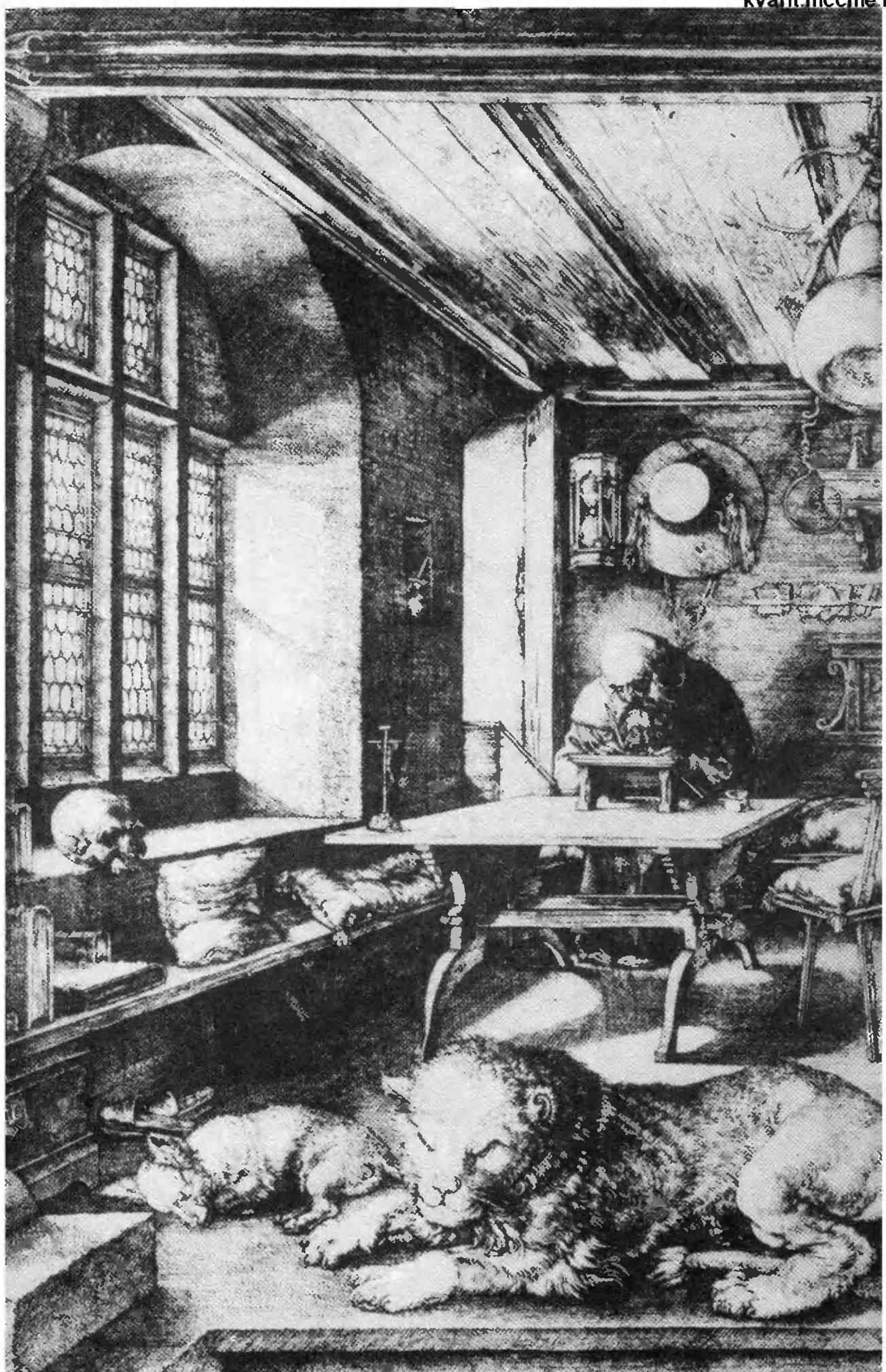


# Квант

**2**  
1984

*Научно-популярный физико-математический журнал  
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*





Научно-популярный  
физико-математический журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР

**Квант**

**2 1984**

Основан в 1970 году



Издательство «Наука»: Главная редакция физико-математической литературы



**В НОМЕРЕ:**

- 2 **Б. В. Гнеденко.** Математическое творчество и общественный прогресс  
6 **В. А. Займовский.** Трещина — враг металла  
13 **В. П. Коротихин.** Зримая прочность  
16 **А. П. Веселов.** Классификация пленок

**IN THIS ISSUE:**

- B. V. Gnedenko.** Mathematical research and social progress  
**V. A. Zaimovski.** Cracks — enemies of metals  
**V. P. Korotikhin.** Visible solidity  
**A. P. Veselov.** Classification of spanning surfaces

**Наш календарь**

- 22 Лев Андреевич Арцимович  
23 Яков Ильич Френкель

**Our calendar**

- Lev Andreevich Artsimovich  
Yakov Il'ich Frenkel

**Школа в «Кванте»**

- 24 Физика 8, 9, 10  
31 Школа без доски и мела

**Kvant's school**

- Physics 8, 9, 10  
School without blackboard or chalk

**«Квант» для младших школьников**

- 33 Задачи  
34 **Н. А. Родина.** Такая знакомая и такая удивительная вода!

**Kvant for younger school-children**

- Problems  
**N. A. Rodina.** So familiar and surprising — water!

**Геометрическая страничка**

- 38 Перспектива

**Geometric page**

- Perspective

**Задачник «Кванта»**

- 41 Задачи М846 — М850; Ф858 — Ф862  
44 Решения задач М831 — М835; Ф842 — Ф846

**Kvant's problems**

- Problems M846 — M850; P858 — P862  
Solutions M831 — M835; P842 — P846

- 53 **Варианты вступительных экзаменов**

- 59 **Ответы, указания, решения**  
**Смесь (51, 52)**

**College entrance examination problems**

- Answers, hints, solutions  
**Miscellaneous (51, 52)**

**Шахматная страничка**

- Перегрузка фигур (3-я с. обложки)

**The chess page**

- Overload of pieces (3 rd cover page)

Фотография на 1-й с. обложки — иллюстрация к статье В. П. Коротихина «Зримая прочность»

# Математическое творчество и общественный прогресс

Академик АН УССР Б. В. ГНЕДЕНКО

Общественный прогресс в первую очередь связан не с количеством производимых изделий, а с обилием новых идей, которые изменяют производительные силы и общественное сознание, открывают новые пути в науке и производстве. Конечно, для общественного прогресса одних новых идей недостаточно, требуется и их осуществление, материальное их воплощение в дела.

Создание нового — всегда в какой-то мере разрушение старого, уже устоявшегося. Вот почему так мучительно долго и сложно рождаются и пробивают себе путь принципиально новые концепции в науке и непривычные подходы к решению практических проблем.

Об этом превосходно рассказано в недавней статье А. Д. Александрова «Тупость и гений» (см. «Квант», № 11, с. 12—17 и № 12, с. 7—12 и 15 за 1982 г.), посвященной истории открытия неевклидовой геометрии Лобачевского. При чтении этой статьи возникает только одно желание, чтобы слово «тупость» читатели относили не к талантливым людям, открывавшим и открывающим новое в безбрежном океане непознанного, а к тем, кто готов категорически судить обо всем, даже о том, чего он не понимает, и закрывать дорогу всему новому и перспективному.

Чтобы человечество двигалось вперед по пути прогресса, оно нуждается в постоянном притоке смелых умов, способных увидеть в привычном и установившемся возможности совершенствования, не страшщихся отказаться от общепринятого решения во имя лучшего. Вот почему для молодежи так важна атмос-



Борис Владимирович Гнеденко

сфера творчества, поиска новых решений и постановки принципиально новых проблем.

\* \* \*

Годы школьного и университетского обучения обладают неповторимой особенностью, поскольку именно тогда человек находит свои истинные увлечения, обогащает свой разум огромным объемом знаний, ставит перед собой жизненные цели и начинает испытывать свои творческие силы. Именно в это время перед молодыми людьми возникает вопрос: а что я могу добавить к тому, что гении прошлого дали человечеству? Есть ли у меня для этого способности и талант? Ответы на эти вопросы могут определить всю дальнейшую жизнь человека. Общество же крайне заинтересовано в том, чтобы его члены получали привычку к самостоятельному мышлению, к поиску нового, к творчеству, к совершенствованию уже известного.

Ряд крупных мыслителей полагает, что наличие творческих способностей является счастливой случайностью и далеко не каждый наделен ими в достаточно полной мере. Действительно, каждый из нас встречался с людьми, практически мгновенно

венно находящими выход из положения, которое остальных ставит в тупик. В школе и в университете встречаются учащиеся, которые играючи справляются с труднейшими вопросами, тогда как для других они являются непреодолимыми препятствиями. Но только ли эти учащиеся призваны сказать новое слово в науке, или же это сделают наиболее прилежные? На самом деле здесь все не так просто.

Я неоднократно наблюдал, что многие студенты-математики, превосходно сдававшие экзамены, так и не стали математиками-творцами. И это случилось не потому, что они не прилагали к этому усилий, не стремились к тому, чтобы создать новое. Просто у них это не получилось, они как бы были лишены творческого начала. В то же время нередко студенты, не блиставшие во время экзаменов, считавшиеся далеко не знатоками той или иной области математики, стали авторами превосходных работ, создали либо новые направления математических исследований, либо доказали превосходные теоремы. В них, как оказалось, горел творческий огонь, они обладали даром сопоставления, способностью взглянуть на вещи с иной стороны, в результате чего они замечали новое и интересное там, где многие специалисты проходили мимо, не видя ничего перспективного для науки.

В одной из статей академика А. Н. Колмогорова «Наука требует горения» (Известия, 1962, 21 февраля) написано: «Талант, одаренность, скажем, в области математики, физического эксперимента, конструирования новых приборов, даны от природы не всем. Никакой упорный труд не может заменить эту природную одаренность. Он дает действительно ценные плоды в науке лишь в соединении с одаренностью, как, конечно, и одаренность окажется бесплодной без упорного и сосредоточенного труда».

Не следует думать, что математическая одаренность встречается крайне редко. Мой опыт показывает, что математически одаренных людей встречается достаточно много, только нередко они сами не верят в свою

одаренность или же не находят в себе сил развивать ее упорным, направленным в определенную сторону трудом. Иногда же природная одаренность не получает развития, поскольку обладающие ею люди не имеют увлекательных проблем для самостоятельных размышлений или же не прошли школу творчества. Ведь творчеству необходимо учиться так же, как и любому делу. Недаром во все времена молодые люди стремились попасть в те университеты, в которых работали выдающиеся ученые и руководители, где выдвигались и решались значительные научные проблемы. Молодой человек, попавший в такой коллектив, узнает большое число актуальных вопросов, требующих разрешения, постигает возможные подходы к их решению, наблюдает, как другие занимаются близкими задачами и продвигаются к заветной цели. Все это приближает его к проникновению в процесс творчества, оказывает огромное стимулирующее и воспитывающее воздействие на его личность и характер.

\* \* \*

В конце прошлого века в нашей стране прославилась петербургская математическая школа. Ее истоки связаны с деятельностью Л. Эйлера (1707—1783), М. В. Остроградского (1801—1862) и ряда других ученых. Пожалуй, своего расцвета она достигла в период, когда в Петербургском университете работал выдающийся математик П. Л. Чебышев (1820—1896). Его научные интересы были исключительно широки — теория чисел, теория вероятностей, теория функций, теория интегрирования, теория механизмов. Он охотно делился с математической молодежью интересовавшими его проблемами. Совсем не случайно поэтому Чебышев был как бы центром притяжения для способных молодых математиков, и недаром из его окружения вышли такие замечательные исследователи, как А. М. Ляпунов (1857—1918), А. А. Марков (1856—1922) и Д. А. Граве (1863—1939). Чебышев не только предлагал проблемы, но и

создавал обстановку, которая содействовала развитию способностей, интересовался результатами молодых математиков и радовался их успехам.

Мне посчастливилось провести научную юность в прославленной московской школе теории вероятностей, когда в ней в полную силу работали такие выдающиеся исследователи, как А. Н. Колмогоров (род. 1903), А. Я. Хинчин (1894—1959), Н. В. Смирнов (1900—1966), Е. Е. Слуцкий (1880—1948). В ту пору буквально каждая неделя приносила науке новые результаты, новые постановки задач. И все это активно обсуждалось на научном семинаре по теории вероятностей. Вместе с математиками в этом семинаре принимали участие биологи и физики, а также специалисты по проблемам телефонной связи. В результате такого общения теория вероятностей возникала перед начинающими математиками не только как объект чисто математического исследования, но и как орудие познания явлений природы и технических процессов. Теория вероятностей и вместе с ней и вся математика возникали перед нашим умственным взором как вечно живая, а значит, развивающаяся область знания, в которой нам самим предстоит сделать еще очень многое.

На семинаре, о котором шла речь, после каждого доклада проходило его обсуждение и выяснялось, что законченное на первый взгляд исследование на самом деле нуждается в продолжении во многих направлениях, в нем находятся вопросы, которые требуют доработок, углубленного изучения и дальнейшего развития. Коллективное обсуждение индивидуального труда приводило к убеждению, что научные исследования — не только личное дело исследователя, но и значительное общественное явление. А в связи с этим возникал вопрос: на чем сосредоточить свои усилия, какие проблемы представляют принципиальную значимость для науки и для общественного прогресса? Далее становилось ясным, как существом для личных научных успехов критически

воспринимающий научный коллектив, способный указать недостатки и новые стороны проблемы, еще не затронутые исследователем, мимо которых часто может пройти исследователь-одиночка.

На семинаре постепенно выкристаллизовывался ясный взгляд на замечательные слова К. А. Тимирязева, русского естествоиспытателя последнего столетия, которые звучат примерно так: «Исследователю необходимо знать все о немногом и по-немногу обо всем». Это крайне важно, поскольку знание о многом придает широту взглядам, а знание всего о немногом позволяет увидеть то, что еще не выяснено, что требует дальнейших поисков.

Чтение журнальной литературы, посещение лекций и семинаров, посвященных специальным вопросам, постепенно вырабатывало свободу обращения с определенной группой вопросов, глубокое проникновение в методы исследования, широкий взгляд на весь круг идей, а вместе с тем и некоторую неудовлетворенность уже достигнутым. Возникали новые вопросы, еще не получившие решения. Они волновали, о них думалось постоянно в любой обстановке — за столом, в театре, на концерте, в трамвае. Мысль непрерывно искала и сопоставляла то, что уже было известно, с тем, что только хотелось узнать и разрешить. Порой решение приходило быстро, и озаряло всю проблему как молния. Далее оставалось только изложить на бумаге то, что было так внезапно найдено. Порой же проходили дни, недели, месяцы, а иногда и годы, прежде чем удавалось нащупать путь решения проблемы. И чем труднее давалось решение, тем желаннее оно становилось, тем упорнее работалось. И должен сказать, что никогда мне в голову не приходила мысль о том, что время на поиски потеряно. Никогда ни об одном исследователе у меня не появлялось мысли о его тупости, если решение не давалось ему в руки сразу.

\* \* \*

Творческие способности, как и любые другие, требуют постоянного упражнения, постоянной тренировки.

Эта тренировка начинается еще в школе, когда учащийся решает нестандартные задачи, самостоятельно ищет решение, преодолевает затруднения, вникает в познаваемое, а не бездумно запоминает его. Все это формирует характер и обостряет творческие способности. Но для того чтобы всерьез заняться творчеством, нужна проблема, над которой хочется думать, которая вызывает искреннее увлечение и внутреннее убеждение в том, что без размышлений над ней невозможно существовать, когда мысль произвольно возвращается к ней. При этом не только исследователь овладевает проблемой, но и проблема овладевает исследователем. И, конечно, в процессе воспитания творческих начал исключительно велика роль учителя, способного направить на путь исканий, вызвать страсть познания и поиска.

Это достигается многими путями — развитием привычки думать, а не только запоминать; воспитанием уверенности в собственных силах у каждого учащегося; решением нестандартных задач, требующих работы мысли; показом того, как работали выдающиеся ученые прошлого; созданием атмосферы поиска, а также многими другими приемами. В университете эта традиция усиливается чтением специальных курсов и участием в специальных семинарах, позволяющих студентам вплотную подойти к тематике современных исследований и узнать об очередных проблемах в определенной области знания. В зависимости от личных творческих задатков молодые люди быстрее или медленнее подходят к самостоятельному творчеству. Случается, что некоторые лица отходят от поисков нового, поскольку их больше привлекают другие формы деятельности — практическая работа, популяризация, накопление знаний, организационная или общественная деятельность. Однако мы знаем, что каждый год в ведущих вузах страны выделяются студенты, которые увлекаются научными поисками и получают самостоятельные результаты, достойные

опубликования. Конечно, далеко не каждый становится ученым самого первого ранга. Но, как правило, молодые люди, проявившие себя в студенческие годы и получившие тогда самостоятельные научные результаты, остаются верными научным исканиям и вносят в науку свой полезный вклад, позволяющий ей двигаться по пути прогресса.

\* \* \*

Несомненно, что в творчестве приходится считаться с возможностью различных склонностей у молодых людей: одних интересует задача построения общих теорий; других волнуют поиски наиболее общих условий, в которых действует та или иная теорема; третьи стремятся применить свои математические знания для решения задач практики; четвертые же считают, что их более всего занимает приведение полученных результатов в стройную систему; пятые подвергают направления математических исследований и сами основные понятия углубленному философскому анализу и затем объединяют различные направления математической мысли воедино.

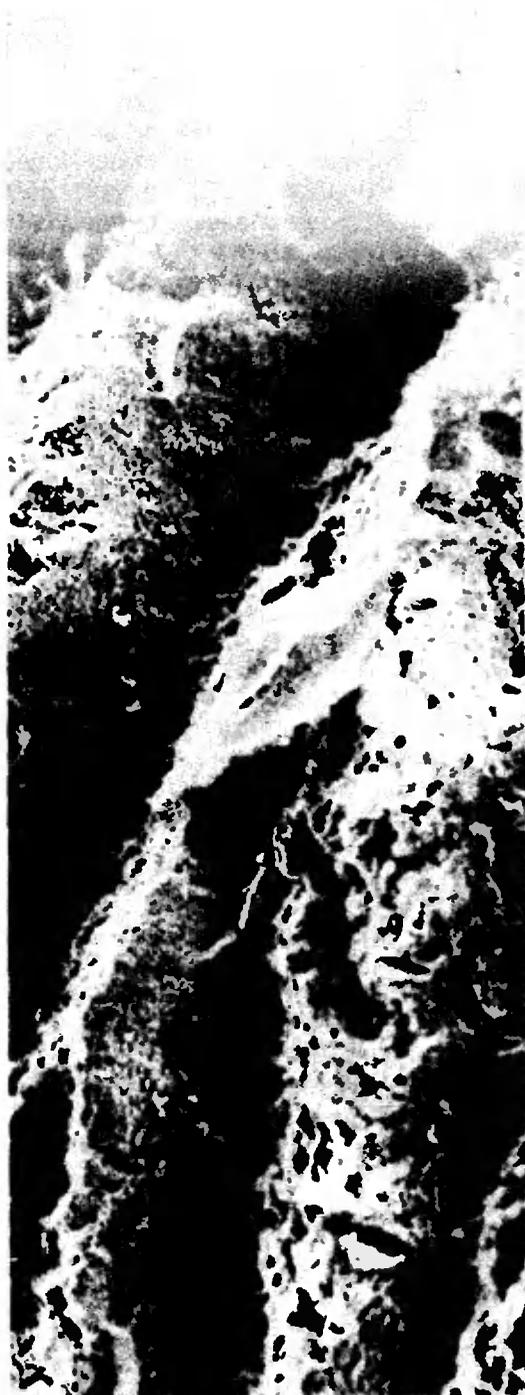
Особенно существенными для общественного прогресса мне представляются способности тех исследователей, которые умеют в задачах практики находить источники для развития теории и в абстрактных построениях выявлять методы для исследования практических ситуаций.

Творческие способности, умение создавать новое, сопоставлять различные ситуации и выводить из этого сопоставления неизвестные ранее следствия представляют собой не просто личное богатство, но и огромную общественную ценность.

Молодые поколения должны знать больше, шире и глубже и приобретенные знания превращать в дела, а для этого нужно приучаться систематически познавать и творчески мыслить.

# Трещина — враг металла

Доктор физико-математических наук  
В. А. ЗАЙМОВСКИЙ



Проблема разрушения металлов касается каждого из нас, поскольку из металла сделаны автомобили и поезда, корабли и самолеты, мосты и рельсы, а также многие другие изделия и детали, от надежной работы которых зависит наша безопасность. Разрушение маленькой детали рулевого управления автомобиля может иметь весьма неприятные последствия, а если разрушается рельс или обрушивается мост, если разламывается корпус корабля или самолета, то последствия могут быть трагичными.

Самым «коварным» видом разрушения металлов и других конструкционных материалов является так называемое хрупкое разрушение. Особенность его в том, что оно «подкрадывается» незаметно, не предупреждая о своем приближении вплоть до самого критического момента. Когда же этот момент наступает, то чаще всего уже ничего нельзя поделать. Процесс разрушения развивается с огромной скоростью и остановить его нельзя. Именно хрупкое разрушение стало причиной гибели многих самолетов и кораблей, причиной катастроф, связанных с разрушением мостов, газопроводов и т. п. Количество подобных аварийных разрушений крупных конструкций исчисляется тысячами, и ущерб от них огромен.

А непосредственным «исполнителем приговора», инструментом разрушения являются хрупкие трещины.

## Трещина Гриффитса

Роль трещин в процессах хрупкого разрушения первым понял английский ученый и инженер А. Гриффитс в начале 20-х годов нашего столетия.

В те годы Гриффитс работал инженером в авиационном исследовательском центре и занимался исследованиями прочности стекла. Стекло не использовалось в авиационной конструкции в качестве конструкционного материала и нужно было Гриффитсу как модель, на которой можно получить хрупкое разрушение. Руководители центра не одобряли «увлечения» Гриффитса, и когда горелка, на которой он плавил стекло,



16 января 1943 года американский танкер «Шенектеди» внезапно разломился на две части прямо в порту. Трещина прошла почти мгновенно через палубу и по обоим бортам до подводной части.

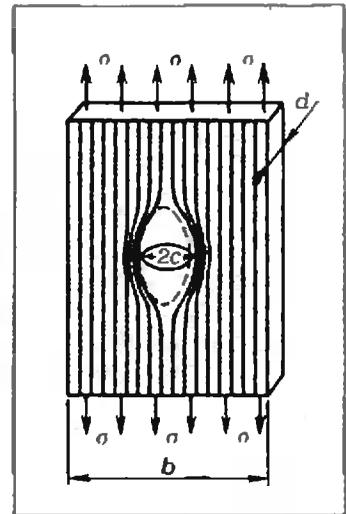


Рис. 1. Пластина с эллиптической трещиной.

стала причиной пожара в лаборатории, его опыты были запрещены, а сам он переведен на другую работу. Но все же Гриффитс успел получить результаты, на которых базируется вся современная физическая теория хрупкого разрушения.

Чтобы понять суть теории Гриффитса, нужно вспомнить, как происходит деформация твердого тела. При деформации, как известно, возникает сила упругости  $F$ . Напряжение  $\sigma$  равно отношению величины этой силы к площади  $S$  поперечного сечения тела:  $\sigma = F/S$ . С другой стороны, напряжение определяется величиной относительной деформации тела  $\varepsilon = \Delta l/l$  ( $\Delta l$  — изменение длины тела,  $l$  — начальная длина). Для каждого материала существует предельное значение деформации  $\varepsilon_{\text{max}}$ , которую он может выдержать, и соответствующее значение напряжения  $\sigma_{\text{пр}}$  (предел прочности) (см. учебник «Физика 9»).

Гриффитс установил, что прочность тонких стеклянных нитей может быть в сотни раз большей, чем прочность обычного (скажем, оконного) стекла. Он предположил, что в массивных стеклянных изделиях есть очень мелкие, невидимые глазу трещины, которые резко уменьшают их прочность.

Хорошо известно, что любое отверстие в деформированном теле

вызывает концентрацию напряжения. Картину напряженного состояния можно представить наглядно с помощью «силовых» линий, густота которых пропорциональна напряжению в материале. Если в теле есть отверстие, то силовые линии обходят его (ведь пустота не может нести нагрузку) и сгущаются у его краев (рисунок 1), где материал оказывается перегруженным. Среднее напряжение  $\sigma$  в сечении при этом не меняется, так как иначе нарушилось бы условие равновесия тела.

Величина «концентрированного» напряжения зависит от формы отверстия, его размера и радиуса кривизны его краев. Например, у краев отверстия, имеющего в сечении форму эллипса, напряжение возрастает до величины

$$\sigma_{\text{конц}} = \alpha \sigma,$$

где  $\sigma$  — напряжение вдали от отверстия, а  $\alpha$  — так называемый коэффициент концентрации напряжения. Значение  $\alpha$  определяется длиной отверстия и радиусом кривизны у края. Как показывают расчеты, для эллиптического отверстия

$$\alpha = 1 + 2\sqrt{c/\rho},$$

где  $c$  — половина длины отверстия,  $\rho$  — радиус кривизны у края.

Если роль концентратора напряжения играет трещина, то положение резко ухудшается, так как ее вер-

шина может быть очень острой. Предельный радиус кривизны в вершине «атомно острой» трещины равен межатомному расстоянию, то есть  $\sim 10^{-1}$  мкм. Такая трещина при длине в несколько микрон (когда ее с трудом можно увидеть в сильный оптический микроскоп) приводит к увеличению напряжения у ее края в сотни раз, что и объясняет наблюдаемое снижение прочности.

Гриффите, однако, использовал в своем анализе другой подход. Он обратил внимание не на перегруженные, а наоборот — на недогруженные участки материала вблизи трещины. Картина распределения силовых линий на рисунке 1 показывает, что не только само отверстие не участвует в работе материала, но «отлынивают» от работы и некоторые объемы выше и ниже отверстия. Иными словами, при появлении в деформированном теле трещины одни участки частично разгружаются и передают свои обязанности другим участкам, расположенным левее и правее трещины. Условно можно рассматривать эту ситуацию так, как будто произошла полная разгрузка некоторого объема (эффективного), размеры которого сопоставимы с длиной трещины (на рисунке 1 граница эффективного объема показана красной штриховой линией).

Упругая энергия, которая высвобождается при разгрузке эффективного объема, расходуется на образование новых поверхностей — «берегов» трещины (ведь поверхность обладает повышенной энергией, а разрушение образца увеличит его суммарную поверхность). Как показывают расчеты (они приведены в конце статьи в Приложении), поверхностная энергия линейно увеличивается с ростом трещины, а упругая энергия, высвобождающаяся при увеличении эффективного объема, пропорциональна квадрату размера трещины.

На рисунке 2 представлено графически изменение энергии деформированной пластины в зависимости от длины трещины. Как видно из рисунка, существует некоторый критический размер трещины ( $c_{кр}$ ), при

котором энергия деформированного тела максимальна. При деформации образца (при заданном напряжении) трещины, длина которых меньше  $2c_{кр}$ , расти не будут, так как это привело бы к повышению энергии пластины. Если же в образце есть трещина длины  $2c > 2c_{кр}$ , то ее рост будет выгодным — энергия образца будет понижаться.

Гриффите получил соотношение, связывающее критический размер трещины ( $c_{кр}$ ) и напряжение  $\sigma$  в образце (см. Приложение):

$$c_{кр} = \frac{2E\gamma_s}{\pi\sigma^2},$$

где  $\gamma_s$  — поверхностная энергия, приходящаяся на единицу площади (у твердых тел эта энергия значительно больше, чем у жидкостей).

Итак, если известно напряжение, возникающее в образце при данной деформации, можно указать, при каком критическом размере трещины материал образца неминуемо разрушится. Переписав гриффитсовское соотношение в виде

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi c}} \approx \sqrt{\frac{E\gamma_s}{c}} = \sigma_{кр},$$

мы выясним другую сторону вопроса. Если в образце есть трещина длины  $2c$ , то мы можем найти из этой формулы критическое значение напряжения  $\sigma_{кр}$  и, соответственно, то пре-

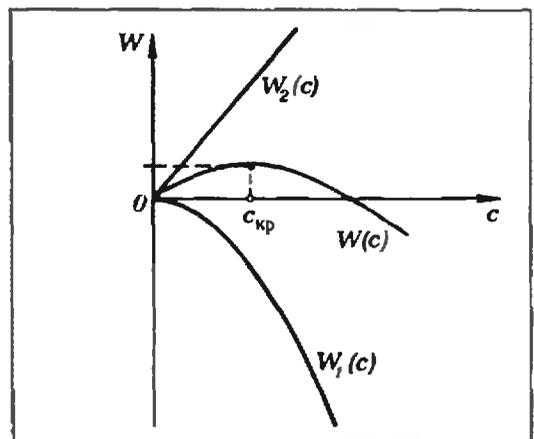


рис. 2. График изменения энергии деформированной пластины в зависимости от размера трещины (красная кривая);  $W_1(c)$  — упругая энергия (она взята отрицательной, так как характеризует уменьшение общей энергии деформации пластины);  $W_2(c)$  — поверхностная энергия.

дельное значение деформации, с которого начинается неотвратимое разрушение материала образца. При  $\sigma > \sigma_{кр}$  трещина начнет расти, то есть будет увеличиваться  $s$ . Из формулы видно, что с ростом  $s$  все меньшее значение  $\sigma$  становится критическим для данного материала. Фактически это означает, что после достижения критического напряжения окончательное разрушение неизбежно даже в случае уменьшения или полного снятия деформации.

Проверяя полученную им формулу для стекла, Гриффитс получил хорошее совпадение расчетных данных с экспериментальными. Однако для металлов, как было выяснено позднее, формула Гриффитса давала очень большую ошибку. Причину этого несоответствия установил венгерский физик Е. Орован. Оказалось, что при образовании трещины в металле в тонком слое, прилегающем к берегам трещины, обязательно имеются, пусть небольшие, остаточные деформации (именно поэтому осколки разрушенного металла не удается совместить так же точно, как это можно сделать с осколками стеклянного стакана).

Однако это не противоречит идее баланса энергии, которую развил Гриффитс. Просто в расчетах нужно учесть, что часть упругой энергии, высвобождающейся при разгрузке эффективного объема, затрачивается на пластическую деформацию слоя материала, прилегающего к берегам трещины. Это приводит к тому, что в формуле Гриффитса к величине  $\gamma_s$  добавляется слагаемое  $\gamma_p$  — энергия пластической деформации, приходящаяся на единицу площади свободной поверхности трещины:

$$\sigma_{кр} \approx \sqrt{\frac{E(\gamma_s + \gamma_p)}{c}}$$

Эта формула (ее называют формулой Гриффитса — Орована) прекрасно описывает реальную ситуацию при хрупком разрушении металлов.

Посмотрите на фотографию на с. 6. Так выглядит при большом увеличении (в несколько тысяч раз) поверхность разрушения стали. Отчетливо видны «холмы», «долины» и другие особенности рельефа по-

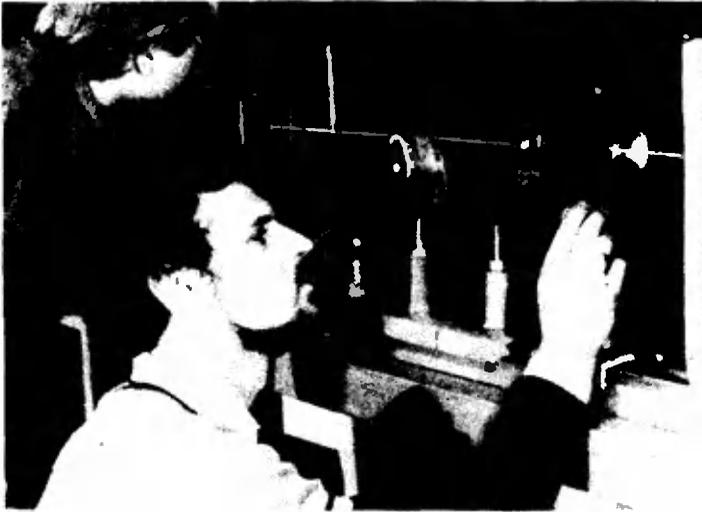
верхности. Это и есть следы пластической деформации, сопровождающей рост трещины в металле. Анализ подобных фотографий, проводимый специальными методами, позволяет восстановить подробности поведения трещины при разрушении металла.

Итак, основные выводы теории Гриффитса сводятся к следующему. Во-первых, можно указать размеры трещин, с которыми материал еще может надежно работать при заданном напряжении. Во-вторых, после достижения критического соотношения между напряжением и длиной трещины процесс дальнейшего роста трещины становится неуправляемым, лавинным. Вершина трещины очень быстро разгоняется до огромных скоростей\*).

Предельная скорость трещины составляет примерно половину скорости звука в данном материале. Для стали экспериментально зафиксированы скорости движения трещин около 2,5 км/с, или  $\sim 10\,000$  км/ч! Интересно, что трещина может развивать такую огромную скорость за одну тысячную долю секунды, то есть ускорение на этапе разгона — порядка  $10^6$  м/с<sup>2</sup>. Примерно так и произошло разрушение газопровода, результаты которого вы видите на фотографии на с. 11, — трещина за считанные секунды пробежала несколько миль.

Конечно, если рабочее напряжение в конструкции мало, то критическая длина трещины будет очень большой. Так, после разрушения одного из мостов было обнаружено, что перед наступлением катастрофы в нем была трещина длиной 3 м. Она росла медленно, в течение, может быть, многих лет, о чем свидетельствуют окисленная поверхность ее берегов. Именно это позволяет легко отличить «докритическую» трещину от «свежего» излома. Но чаще приходится иметь дело с трещинами значительно меньшей длины, и для их обнаружения применяют специальные методы.

\*) Конечно, понятия скорости и ускорения трещины условны, так как трещина не является материальным телом. Речь идет о движении ее вершины



В металлофизической лаборатории технологического факультета Московского института стали и сплавов студенты исследуют детали поверхности разрушения металла с помощью лазерного луча.

### Усталость и живучесть металлов

Как же возникают и как растут трещины до наступления критического момента? Один из самых распространенных в технике случаев связан с так называемой усталостью металлов. Этим термином определяют процессы постепенного накопления повреждений и роста трещин при периодически меняющейся деформации материала. Именно такие деформации возникают, например, на вращающемся изогнутом валу. В той точке вала, которая в данный момент находится внизу (точка *A* на рисунке 3, *a*), материал растянут. Но когда эта точка окажется наверху, она попадет в зону сжатия. Вращение приводит к многократному повторению этой ситуации; деформация, а следовательно, и напряжение в окрестности точки *A* будут со временем меняться так, как показано на рисунке 3, *b*.

Подобных деталей вокруг нас огромное множество. Это и коленчатый вал двигателя, и оси железнодорожных вагонов, и маховики, и многие-многие другие. Усталость неизбежно возникает в «работе» любого моста: мост всегда деформирован в результате действия силы тяжести, а когда по нему проходит поезд (или машина), деформация возрастает, затем уменьшается до исходного уровня, и т. д.

Появление усталостных трещин обусловлено своеобразными процес-

сами пластической деформации, которые охватывают не весь объем материала, а сосредоточены в самых «слабых» точках детали — там, где есть острые углы, отверстия и т. п., около которых создается концентрированное напряжение. Появляющаяся трещина сама становится эффективным концентратором напряжения. Постепенный рост трещины увеличивает концентрацию напряжения, и скорость ее роста увеличивается. В результате рано или поздно длина трещины достигнет критического значения, определяемого соотношением Гриффитса — Орована. За этим наступает быстрое окончательное разрушение.

Полный срок службы изделия можно разделить на две части: время до появления трещины такого размера,

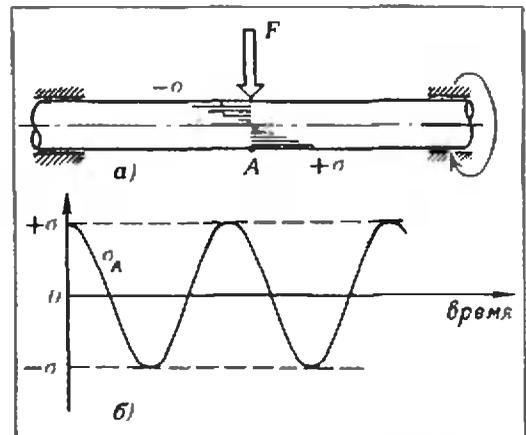


Рис. 3. Изменение напряжения при вращении деформированного вала.



Разрушение магистрального газопровода.

что ее уже можно обнаружить каким-либо методом, и время от этого момента до окончательного разрушения. Соотношение между этими двумя составляющими полной долговечности изделия зависит от свойств самого материала и от многих внешних факторов, но, к счастью, второй период чаще всего растягивается на достаточно большой срок.

Способность материала работать при наличии растущей в нем трещины называется живучестью. Конечно, точность определения продолжительности периода живучести зависит от чувствительности метода, который применяют для обнаружения трещин.

На железной дороге конкретное воплощение этой ситуации каждый пассажир может наблюдать из окна ва-

гона. Многие, вероятно, видели стоящие на путях вагоны-дефектоскопы, но пока еще контроль рельсов в основном осуществляется вручную. Если вы много путешествуете по железной дороге, то, возможно, видели и такую картину: вдоль пути движется рабочий в наушниках, толкая перед собой тележку на колесах; прибор на тележке — ультразвуковой дефектоскоп. Рабочий обходит свой участок дороги раз в 10 дней, и если в проверяемом рельсе имеется трещина размером больше копеечной монеты, в наушниках прозвучит предостерегающий сигнал. Рельс будет заменен новым, и угроза катастрофы миновала.

Теперь оценим пригодность для изготовления рельсов трех различных материалов. Предположим, что для двух из них критическая длина трещины ( $2c_{кр}$ ) одинакова, а для третьего — значительно меньше. Усталостные трещины в этих трех материалах могут расти с существенно разными скоростями. На рисунке 4 рост длины трещины для каждого материала показан красными кривыми. В нашем случае материал 2 имеет гораздо большую живучесть, чем материал 1. Штриховая горизонтальная линия на рисунке характеризует минимальную длину трещины, которая может быть обнаружена данным методом, а вертикальные штриховые линии отмечают периодичность контроля. Как видно из рисунка, в первом материале трещина может быть

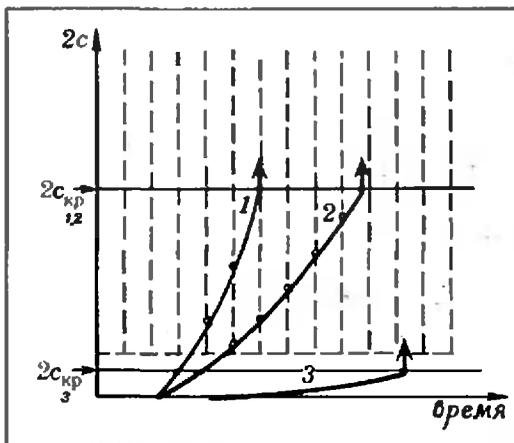


Рис. 4. Зависимость длины усталостной трещины от времени для трех материалов.

обнаружена при двух проверках, а во втором — при пяти.

Ясно, какой из этих двух материалов будет более надежным. Ведь обходчик — это живой человек, который может быть в плохой форме или отвлекаться в неподходящий момент и т. д. Даже если сделать скидку на это, дефектный рельс из второго материала будет заменен прежде, чем трещина достигнет критического размера и произойдет непоправимое. То, что наверняка можно сделать с пятой попытки, не всегда делается со второй!

Что касается материала 3, то он обладает великолепной живучестью. Но пока чувствительность дефектоскопа, используемого для контроля, не может быть повышена, этот материал должен быть забракован. Хотя трещина в нем растет очень медленно, она достигнет критической длины и разорвет рельс, даже не предупредив дефектоскописта о своем присутствии.

Повышение чувствительности дефектоскопа — задача технически разрешимая. Но это привело бы к замедлению процесса контроля или сделало бы аппаратуру более громоздкой, так что обходчик уже не смог бы действовать в одиночку. Можно и чаще делать проверки, но ведь надо когда-то пропускать и сами поезда и, кроме того, возможное число обходчиков не беспредельно.

\* \* \*

Изучение законов образования и движения трещины необходимо — знание этих законов позволяет разрабатывать способы защиты металлов от разрушения. И не случайно становятся все более редкими аварии и катастрофы, связанные с коварным хрупким разрушением.

## Приложение

Рассмотрим трещину, образовавшуюся в пластине толщины  $d$ . Будем, как и Гринфитс, считать, что если трещина имеет эллиптическую форму — такую, как на рисунке 1, — то эффективный объем ограничен (в плоскости пластины) эллипсом с полуосями  $c$  и  $2c$  и равен  $2\pi c^2 d$ . Энергия, запасенная в пластине вследствие ее деформации, равна работе, которую совершила упругая сила  $F$  при перемещении всех частей тела на рас-

стояние  $\Delta l$  ( $\Delta l$  — абсолютная деформация тела):

$$A = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$$

( $\frac{1}{2} F$  — среднее значение упругой силы, которая в процессе деформации линейно увеличивалась от 0 до  $F$ ). Энергия, приходящаяся на единицу объема, — это

$$a = \frac{A}{S l} = \frac{1}{2} \frac{F}{S} \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

Но  $F/S$  — это напряжение  $\sigma$  в пластине, а  $\Delta l/l$  — относительная деформация  $\epsilon$ . Если деформация упругая, то справедлив закон Гука и

$$\sigma = \epsilon E,$$

где  $E$  — модуль упругости материала пластины.

Итак, энергия упругой деформации, приходящаяся на единицу объема пластины, —

$$a = \frac{1}{2} \epsilon \sigma = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

и, следовательно, при разгрузке эффективного объема  $2\pi c^2 d$  выделяется энергия

$$W_1 = \frac{\pi \sigma^2 c^2 d}{E}.$$

При образовании трещины длины  $2c$  вскрылись две новые поверхности, каждая площадью  $2cd$  (кривизной берегов трещины пренебрегаем). Энергия, которая была затрачена на образование этих поверхностей, равна

$$W_2 = 4cd\gamma_s,$$

( $\gamma_s$  — поверхностная энергия, приходящаяся на единицу площади).

Таким образом, появление трещины изменило энергию деформированной пластины на величину

$$W = W_2 - W_1 = 4cd\gamma_s - \frac{\pi \sigma^2 c^2 d}{E}.$$

Приведенный на рисунке 2 график зависимости  $W(c)$  имеет максимум в точке с абсциссой  $c = c_{кр}$ . В этой точке производная  $\frac{dW}{dc}$  обращается в нуль:

$$\frac{dW}{dc} = 4d\gamma_s - \frac{2\pi \sigma^2 c d}{E} = 0,$$

и из этого условия мы находим  $c_{кр}$ :

$$c_{кр} = \frac{2E\gamma_s}{\pi \sigma^2}.$$

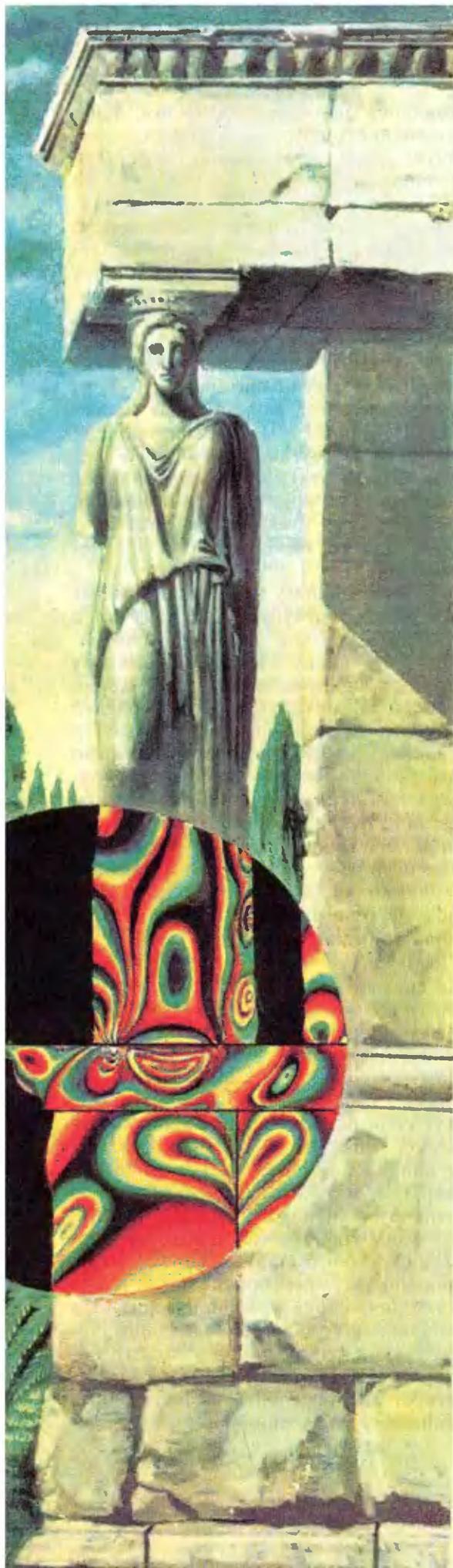
## Зримая прочность

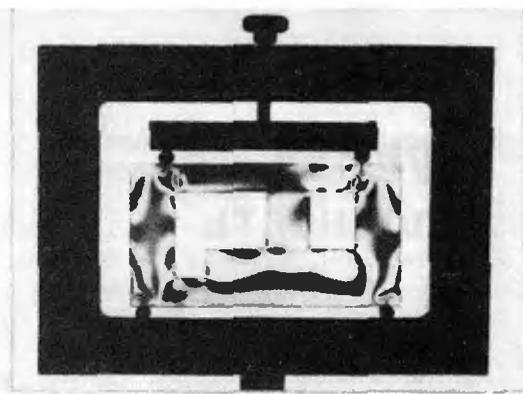
*В. П. КОРОТИХИИ*

Во все времена человек заботился о прочности того, что создавалось его руками. Однако у древних строителей и конструкторов представления о природе прочности были в основном интуитивные. Новые здания, например, проектировались почти всегда по типу старых, проверенных, и обязательно с большим запасом прочности, который видели в непомерной массивности колонн, арок, стен. Но и толстые стены бывают непрочными. Наглядный тому пример — величественные развалины мечети Биби-Ханым в Самарканде, разрушившейся через 30 лет после окончания строительства. И таких случаев было немало.

В наше время катастрофические разрушения в строительстве и технике происходят гораздо реже, чем даже 100 лет назад. А ведь в XX веке создано и создается новых машин, приборов и сооружений несоизмеримо больше, чем во все прошлые времена. При этом сегодняшняя техника не чета технике прошлого. Современные сооружения должны, зачастую, выдерживать поистине фантастические механические напряжения. Как удастся избежать ошибок, сделать верный прогноз прочности будущей конструкции? Ответить на этот вопрос в нескольких словах невозможно. Для этого существует целая наука — механика деформируемого твердого тела, которая включает в себя математическую теорию упругости, теории пластичности, ползучести, разрушения, устойчивости, волновых процессов и т. д.

Существуют и различные экспериментальные методы исследования деформаций в телах. Экспериментальными методами решаются наиболее сложные задачи, не поддающиеся пока что теоретическому анализу. Об одном из них, по праву считающемся самым наглядным и универсальным, и пойдет речь.





*Модель панели типового жилого дома, исследуемая методом фотоупругости. На экране видна четкая интерференционная картина, по которой можно определить распределение деформаций и напряжений, возникающих при нагрузке (нагрузка приложена в четырех точках).*

Метод фотоупругости, или поляризационно-оптический метод, позволяет исследователям увидеть сам процесс возникновения в конструкции деформаций и вызванных ими напряжений.

Идея метода фотоупругости была разработана еще в прошлом веке. В 1815 году шотландский физик Дейвид Брюстер обнаружил, что при освещении некоторых прозрачных веществ, подвергнутых деформации, поляризованным светом на экране, установленном позади освещаемого образца, наблюдается яркая интерференционная картина. Брюстер предположил, что расположение и конфигурация интерференционных полос определяются теми деформациями, которые возникают в образце в результате действия нагрузки.

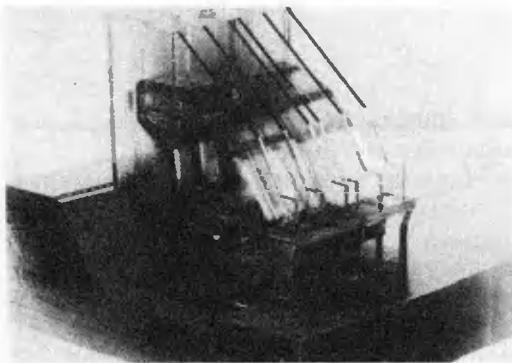
Позднее в работах Максвелла, Френеля и других ученых была установлена точная математическая зависимость между оптическими явлениями, наблюдаемыми в деформированных прозрачных материалах, и существующими в них механическими деформациями и напряжениями. Таким образом, появилась возможность «расшифровывать» картину полос, переводить ее в картину распределения деформаций и напряжений в исследуемом объекте. А таким объектом может быть модель моста, стены здания, участка плотины, переборки корабля и т. п.

Однако реализовать идею метода фотоупругости в XIX веке было очень сложно. Главная помеха заключалась в том, что не было хорошего материала для моделей. При-

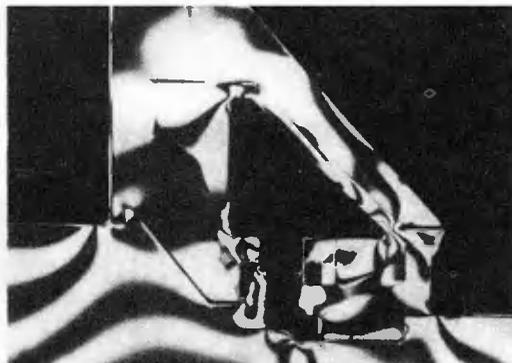
ходилось работать со стеклом, а изготавливать из стекла модели — занятие весьма трудоемкое и дорогостоящее. Когда узнаешь, что в 1911 году французский ученый Менаже исследовал прочность арочного моста на ажурной стеклянной модели, хочется, образно говоря, снять шляпу перед этой «старинной», «ручной» работой.

Модели первой плотины Днепрогэса были сделаны из желатина. Неудобств здесь было много. Во-первых, изготовить можно было только сильно упрощенные плоские модели поперечных сечений плотины; во-вторых, чтобы эти модели сохранялись плоскими, их приходилось помещать между двумя стеклами, и т. д. Точность такого эксперимента была невысокой.

По-настоящему широкое применение метод фотоупругости получил с тридцатых годов нашего столетия, когда на смену стеклу и желатину пришел целлулоид. В наше время основными материалами для моделей служат фенолформальдегидные и эпоксидные смолы, которые, помимо высокой прочности, простоты обработки, обладают еще замечательным свойством «замораживать» деформации. Кавычки, как вы убедитесь, здесь вполне уместны. При замораживании сделанную из смолы модель помещают в шкаф-термостат и плавно поднимают температуру до 140 °С. После этого модель нагружают и, не снимая нагрузки, начинают понижать температуру в термостате. Когда температура становится близка к комнатной, нагрузку убирают, а саму модель вынимают из термостата. Эффект получается такой же, как если бы мы сжали пропитанную водой губку и, не разжимая, поместили ее на мороз. Когда вода замерзнет, можно снять зажимы — отпечаток от них останется. Вот так же в модели остается картина деформаций (только физика здесь иная, связанная с переориентацией молекулярной структуры полимера). На обложке журнала вы видите замороженную картину полос в модели напорного водовода. Картина соответствует распределению деформаций и напряжений, возникающих под дей-



Модель части плотины Днестровской ГЭС.



Картина полос в срезе модели плотины Днестровской ГЭС.

ствием внутреннего давления. В верхней части отверстия видна трещина.

До появления способа замораживания все исследования в фотоупругости проводились только на плоских моделях. Объясняется это тем, что картина интерференционных полос, возникающая при прохождении поляризованного света через модель, зависит не только от деформаций, но и от толщины модели. Для того чтобы избежать лишних измерений и громоздких вычислений, связанных с учетом изменения толщины, изготавливали только плоские модели. Способ замораживания деформаций дает возможность брать для исследования пространственную модель конструкции, сооружения, например — плотины.

Из твердой эпоксидной смолы делают почти полную уменьшенную копию плотины — с машинным залом, водоводами и прочими существенными деталями. Ее устанавливают в термостате, разогревают и нагружают. При этом нагрузки подбираются так, чтобы они имитировали рабочее состояние плотин. После остывания модель вынимают из термостата. Из нее выливают плоские кусочки, так называемые срезы, которые и исследуют. Так можно изучить все закоулки плотины и составить полную картину деформаций и напряжений, которые будут возникать в плотине в рабочем режиме. Важность такой информации очевидна.

Много внимания уделяют ученикам механики задачам прочности различных конструкций и сооружений при импульсных воздействиях. Такие нагрузки как удар, взрыв, сейсмические волны могут за очень короткий промежуток времени сделать немало бед. И здесь метод фотоупругости дает возможность предусмотреть

многие неприятные последствия. В сочетании с методами высокоскоростной фотографии он позволяет исследовать динамику поведения объекта при кратковременных мощных нагрузках.

Новые материалы на основе эпоксидных смол дают возможность применять метод фотоупругости не только на моделях, но и непосредственно на конструкциях. Достигается это с помощью специальных покрытий, которые наносятся на поверхность исследуемого участка объекта и деформируются вместе с ним. Это дает возможность проводить измерения в заводских и полевых условиях, в жидких, химически агрессивных и взрывоопасных средах. Особенно широко покрытия применяются в задачах авиационной и металлообрабатывающей промышленности.

Во время наземных испытаний новой конструкции самолета покрытия наносятся на те участки двигателя, фюзеляжа, крыла, которые особенно интересуют конструкторов машины. При этом требуется только одно — чтобы данное место было открытым для прямого наблюдения картины полос, возникающих в покрытии (их наблюдают в отраженном свете). Результаты такого «натурного» эксперимента всегда представляют большой практический интерес.

Подобных примеров можно привести очень много. Круг задач, охватываемых методом фотоупругости, чрезвычайно велик. Это задачи атомной энергетики и гидротехнического строительства, космической и авиационной техники, металлургии, машиностроения, горного дела...

Совершенствование метода, разработка новых материалов для моделей и покрытий расширяют его возможности и область применения.

# Классификация пленок

Кандидат физико-математических наук  
А. П. ВЕСЕЛОВ

Главные действующие лица нашего рассказа — пленки — воображаемые организмы особого рода, живущие в нашем трехмерном мире и способные к удивительным превращениям. Читатель может себе представлять пленку как гибкое, плоское (то есть не имеющее толщины) амебообразное существо ограниченных размеров с подвижной границей, которая представляет собой одну замкнутую линию; вблизи каждой внутренней (то есть не граничной) точки пленка устроена как кусочек плоскости, возможно, изогнутый. При своей жизнедеятельности пленка может не только *непрерывно деформироваться* (то есть изгибаться, растягиваться и сжиматься без разрывов и склеек), но и претерпевать более радикальное превращение — *разрыв-срастание*: при этом превращении пленка временно разрывается по дуге (начинающейся и заканчивающейся на границе), как-то растягивается, сжимается и извивается, а затем срастается, притом непременно так, что те точки, которые были оторваны друг от друга, снова соединяются в прежнем порядке. Разрыв-срастание, таким образом, не меняет внутреннего строения пленки, однако позволяет принципиально изменить ее расположение в пространстве, — например, заузить или распутать ее. Если вам пришлось разматывать леску из спутанного клубка, то вы можете себе представить, насколько облегчилась бы ваша задача, обладай леска указанным выше свойством. О превращениях пленок мы еще поговорим позже, а сейчас познакомим читателя с некоторыми представителями класса пленок.

Простейший из них (рис. 1) отвечает виду реальной амебы, но вполне может принимать форму треугольника, квадрата и даже пятиконеч-

ной звезды. Он имеет специальное название — *диск*.

Пленка, изображенная на рисунке 2, называется по довольно понятным причинам *ручкой*, хотя больше напоминает не отбитую ручку чашки, а велосипедную камеру с небольшой дыркой. Впрочем, форма ее может меняться до неузнаваемости (рис. 3).

Следующая пленка (рис. 4) заслуживает того, чтобы о ней поговорить побольше. Мы ее будем называть *амебиус*, в честь ее первооткрывателя А. Ф. Мёбиуса, хотя чаще ее называют *листом Мёбиуса*.

Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868) был одним из ведущих геометров своего времени. Работая директором одной из немецких обсерваторий и отдавая много времени занятиям астрономией, он тем не менее на протяжении многих лет размышлял о свойствах объектов типа наших пленок, в частности, изображенного на рисунке 4 листа Мёбиуса. Лишь в преклонном возрасте Мёбиус решился представить результаты своего труда на суд Парижской Академии, однако столь нетрадиционная тематика его «Мемуара об односторонних поверхностях» привела к тому, что рукопись пылилась на полках Академии до тех пор, пока автор не решил издать ее на свои средства отдельной книгой. Примерно в то же время появились работы, посвященные тем же вопросам, другого немецкого астронома И. Б. Листинга (1808—1882), получившего свои результаты независимо от А. Ф. Мёбиуса.

Читателю рекомендуется немедленно изготовить макет амебиуса, для чего необходимо вырезать из бумаги полоску длины около 20 см и ширины 4 см. Проведя посередине одной из ее сторон вдоль всей длины синюю линию, и, аналогично, с другой стороны — красную линию, нужно затем склеить концы полоски, предварительно перекрутив их на  $180^\circ$  (рис. 5). Обратим сразу внимание на следующее примечательное обстоятельство: синяя линия в месте склейки переходит в красную и наоборот, то есть теперь обе линии находятся на одной стороне поверхности. Амебиус имеет лишь одну сторону! В отличие от исходной полоски, где были две стороны (условно: синяя и красная), у амебиуса всю поверхность можно обойти, не переходя через край.

Совершим теперь варварский акт: разрежем нашего амебиуса ножницами вдоль синей-красной линии. Ну как? Признайтесь — этого вы сов-

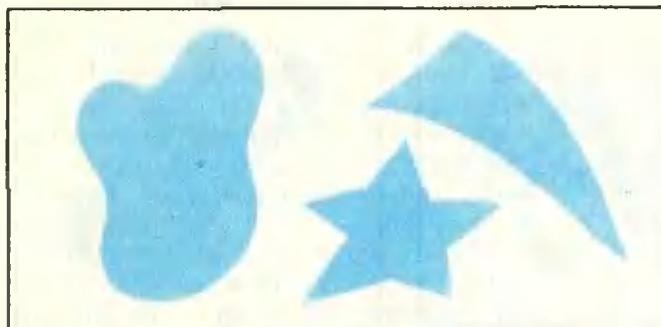


Рис. 1.

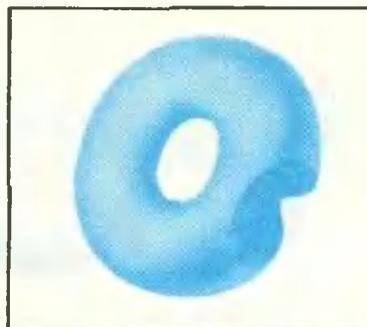


Рис. 2.

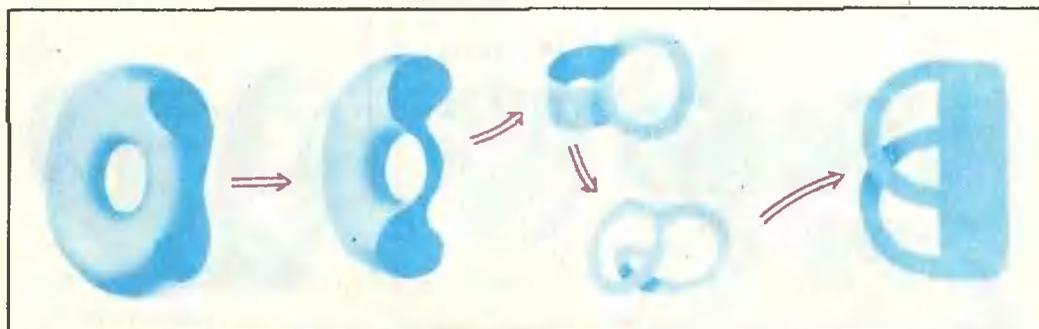


Рис. 3.

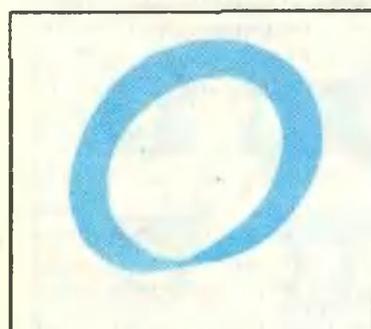


Рис. 4.

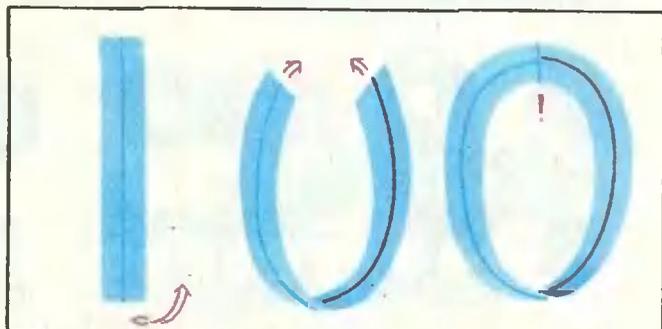


Рис. 5.

сем не ждали (если не проделывали эту операцию раньше). Амебиус не распался на два, но разрез подействовал на него губительно: граница новой поверхности состоит уже из двух замкнутых кривых (проверьте!), и поэтому полученная поверхность не отвечает никакой пленке в нашем смысле. Кроме того, у нее уже две стороны. Именно поэтому повторно аналогичная процедура не приведет к столь поразительному результату, хотя вряд ли читатель сможет предугадать его.

Однако оставим подобные жесткие операции и посмотрим, что происходит с амебиусом в естественных условиях. Прежде всего, благодаря способности к разрыву-срастанию, амебиус может принять форму ленты,

перекрученной на любое нечетное число полуоборотов (рис. 6). (Отметим, что полоска, скрученная на целое число оборотов, не отвечает никакой пленке, так как имеет границей две замкнутые кривые.) В самом деле, порвавшись поперек, он может раскрутиться на любое целое число оборотов, а затем срастись на старом месте (проследите это на полоске бумаги). Точно так же амебиус может завязываться в любой узел и снова развязываться (рис. 6).

Для таких превращений не потребовалось бы никаких временных разрывов, живи амебиус в четырехмерном пространстве. Четвертое измерение позволяет, помимо известного из научно-фантастической литературы выхода из полностью закрытой комнаты, свободно развязывать узлы и раскручивать перекрученные пленки. Таким образом, способности

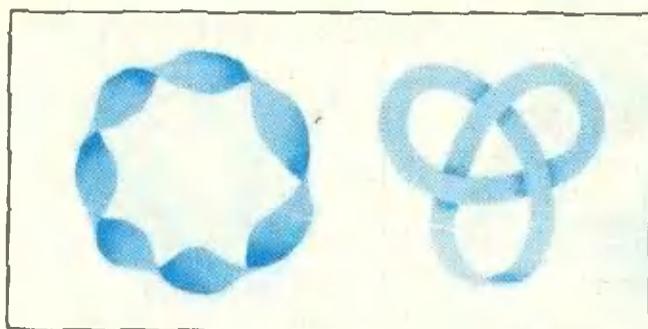


Рис. 6.

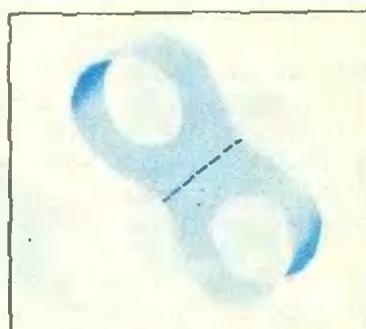


Рис. 7.

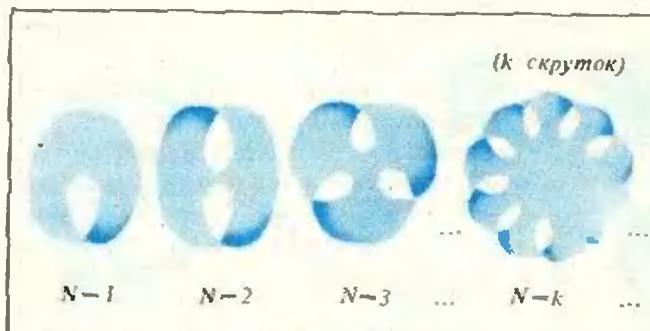


Рис. 8.

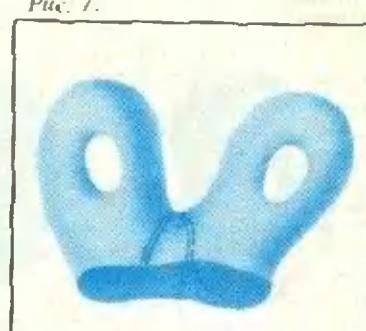


Рис. 9.

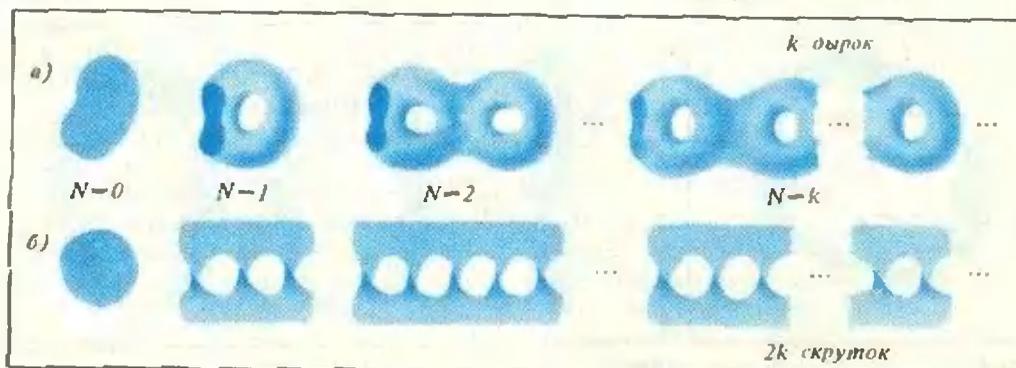


Рис. 10.

к разрыву-срастанию у наших пленок появляется в процессе эволюции только из-за «маломерности» нашего пространства. Желаясь познакомиться с четырехмерным пространством поближе рекомендуем книжку И. М. Гельфанда и др. *Метод координат* (М.: Наука, 1965).

Можно выделить целое (бесконечное) семейство пленок, которые естественно называть *амебиусовыми*. Второй (после амебиуса) представитель этого семейства получается в результате «приживления» двух амебиусов друг к другу по кусочку границы (рис. 7). Следующий — приживлением трех амебиусов и т. д. Формы этих пленок весьма разнообразны, так что их не всегда просто опознать. На рисунке 8 изображено

все семейство в одном из наиболее симметричных их обликов.

Точно таким же образом ручка порождает семейство *двусторонних* пленок, получающихся последовательным приживлением друг к другу нескольких ручек (рис. 9). Семейство двусторонних также состоит из бесконечного числа видов, определяемых числом видов ручек, «входящих в состав» пленки. Сюда естественно включать и диски, поскольку у них тоже две стороны (они отвечают числу ручек  $N=0$ ). Автор не смог выбрать наиболее красивую среди многообразия форм этих пленок, и поэтому на рисунке 10 *а, б* семейство нарисовано дважды. Убедитесь на приме-

ре двукратной ручки ( $N=2$ ), что это две различные формы одной и той же пленки. Предупреждаю, что это не так просто, но доставит истинному любителю геометрии немало удовольствия. Возможно, вам удастся обнаружить более изящные формы этих пленок.

Читатель уже убедился, что сколь многообразен и богат класс наших пленок, столь сложен может быть их внешний вид. Поэтому, я думаю, для него будет неожиданным следующий результат, являющийся основным в науке о пленках.

Классе всех пленок состоит из двух бесконечных семейств — семейства амебиусовых (рис. 8) и семейства двусторонних пленок (рис. 10).

Этот результат — типичная теорема классификации. Она утверждает, что любой представитель некоторого класса (у нас — любую пленку) можно отнести ровно к одному виду из некоторого списка (у нас — из списка амебиусовых и двусторонних).

«Этого не может быть! — воскликнет читатель, немного поразмыслив, — ведь здесь не упомянута, например, пленка, получающаяся сживлением амебиуса и ручки» (рис. 11). Однако посмотрим, так ли это, для удобства выбрав ручку формы, изображенной справа на рисунке 3 (рис. 12). Амeбиус «выворачивает» ручку, превращая ее в два амeбиуса, так что наша пленка есть не что иное, как тройной амeбиус, изображенный на рисунке 8 под номером 3. Результат поразительный, поскольку ответ получился такой же, как если бы вместо ручки был двойной амeбиус, — совсем другая пленка! Легко понять теперь, что в результате сживления  $k$  амeбиусов ( $k \geq 0$ ) и  $l$  ручек ( $l \geq 0$ ) получается  $(k+2l)$ -кратный амeбиус, так что смешивая ручки и амeбиусы, мы ничего нового не получим. (Отметим, что тем самым признак двусторонности является рецессивным, а амeбиусовость — доминантным; см. учебник «Общая биология 9—10», 1983, § 55.)

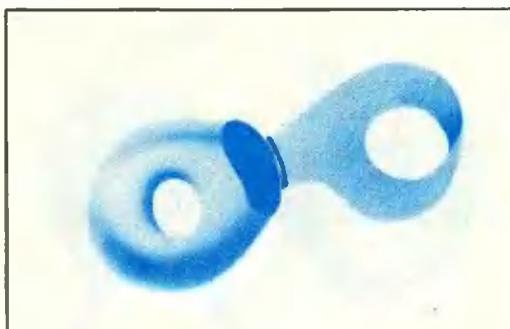


Рис. 11.

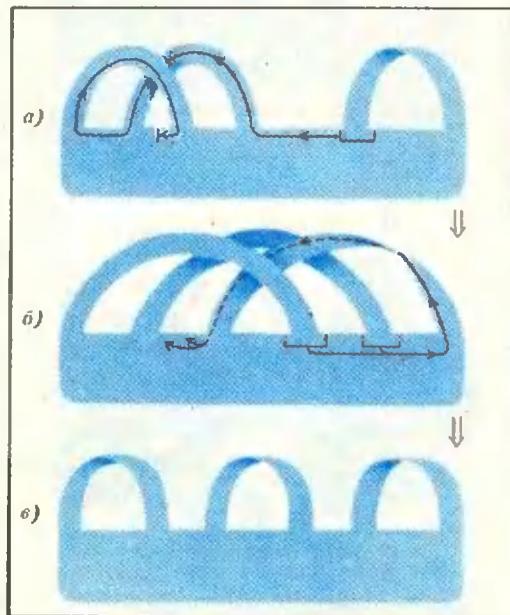


Рис. 12. Удивительное превращение ручки с амeбиусом в тройной амeбиус. Сначала одно из оснований амeбиуса проводится вдоль края ручки (а), пока не занимает положение между двумя средними основаниями ручки (б). Затем два привычных основания ручки проводятся поочередно вдоль края скрученной ленты амeбиуса (см. б)). Проходя вдоль края амeбиуса, две ленты ручки перекручиваются — получают две новые скрученные ленты, одна из которых охватывает другую. Охваченную ленту можно высвободить, двигая оба ее основания вдоль края охватывающей. Получится тройной амeбиус!

(Здесь проводится операция передвижения ленты вдоль края пленки. Эту операцию пленка вполне способна выполнить: часть пленки вдоль ее границы становится чрезвычайно эластичной, а основание ленты, напротив, — жестким; лента, двигаясь вдоль края, растягивает вслед за собой эластичный край пленки и сжимает его навстречу себе. Внешне это выглядит так, как будто основание ленты просто скользит по краю пленки.)

Однако пора перейти к доказательству основного результата. Возьмем

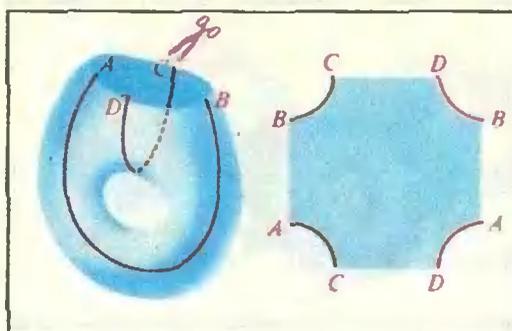


Рис. 13.

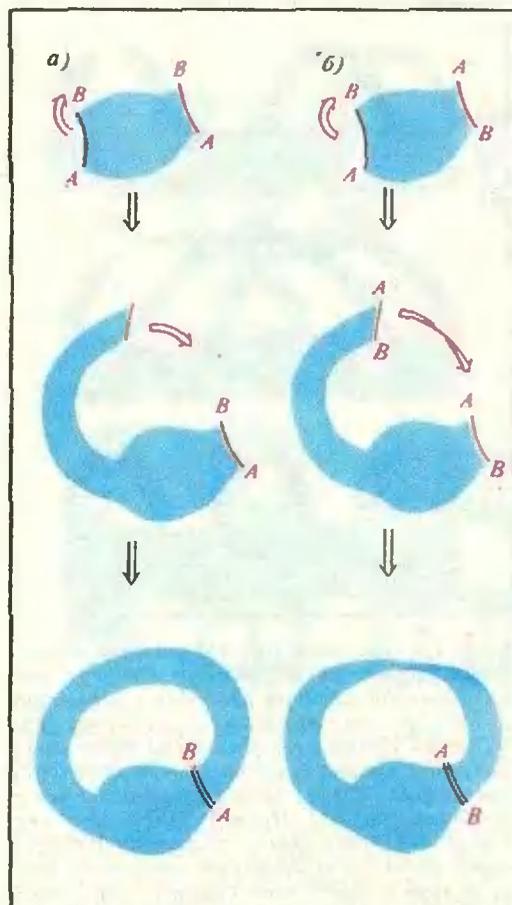


Рис. 14.

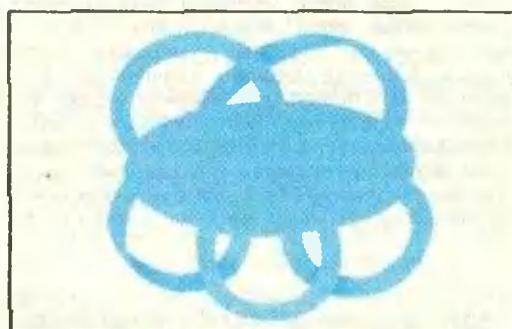


Рис. 15.

любую пленку. Воспользуемся интуитивно очевидным фактом, что всякую пленку некоторыми разрезами можно превратить в диск. Для ручки, например, понадобятся два разреза, для амбиуса достаточно и одного. На границе полученного диска останутся следы разрезов (рис. 13). Чтобы восстановить пленку, надо проделать обратную операцию по их сращиванию. Будем делать это таким образом: возьмем кусочек ткани вдоль одного из краев разреза и вытянем его в виде длинной ленты, а затем срастим с другим краем. Обратим внимание на то, что получившиеся ленты бывают двух типов I и II, в зависимости от того, как лежат края разреза на границе диска (рис. 14).

В результате мы получим исходную пленку в виде, подобном изображенному на рисунке 15.

Приведение пленки к одной из перечисленных форм осуществим в нескольких этапах. Первый этап («выметание» из-под ленты типа I) — изображен на рисунке 16. В результате такой процедуры, примененной ко всем лентам типа I, мы приведем пленку к виду, где каждая такая лента будет расположена отдельно от всех остальных. Разберемся теперь с лентами типа II. Под такой лентой обязательно находится ровно одно из оснований какой-то другой ленты (в данном случае это может быть только лента того же типа); иначе край всей пленки состоял бы из двух кривых. Такую пару лент естественно (см. рис. 3) назвать ручкой.

Второй этап состоит в аналогичной операции выметания из-под ручки (рис. 17), результатом которой будет выделение «чистой» ручки. В конце концов пленка примет вид диска с приклеенными по отдельности ручками и лентами типа I или амбиусами (читатель, конечно, же узнал их). Далее, если есть хотя бы один амбиус, то он раскрутит все ручки в двойные амбиусы (см. рис. 12), и мы придем к одной из форм для семейства амбиусовых (рис. 8). В противном случае пленка состоит из некоторого числа ручек и является двусторонней, что и завершает наше доказательство.

Впрочем, все ли мы доказали? Мы установили, что любую пленку можно отнести по крайней мере к одному из видов, перечисленных в списке. А может быть, — ее можно отнести к нескольким видам? Другими словами, не могут ли два вида из списка оказаться одним и тем же (то есть приводиться друг в друга по естественным законам развития пленок)? Оказывается — нет. Но на доказательстве мы останавливаться не будем, отсылая читателя к книгам, перечисленным в конце статьи.

Отметим, что приведенное доказательство дает эффективный способ для определения вида, которому принадлежит данная пленка, в частности, позволяет решить, когда две данные формы отвечают одной пленке.

**Задача.** Определите, к какому виду принадлежат пленки, изображенные на рисунке на с. 51, а также покажите, что формы, изображенные на рисунке 10, действительно соответствуют одной и той же двусторонней пленке.

На этом можно было бы закончить, однако во избежание недоразумений автор должен отметить, что все изложенное имеет отношение не столько к биологии, сколько к *топологии* — области геометрии, занимающейся свойствами фигур, не меняющимися при любых сжатиях и растяжениях. В связи с этим дадим перевод основных понятий с биологического языка, принятого в статье, на математический. Пленки — компактные связные двумерные многообразия со связным краем, двусторонняя и амебиусовая пленка — соответственно ориентируемое и неориентируемое двумерное многообразие со связным краем, амебиус — лист Мёбиуса, название «диск» и «ручка» заимствованы из топологии и в переводе не нуждаются. Наша классификация есть не что иное, как топологическая классификация двумерных многообразий со связным краем. Из нее сразу получается и топологическая классификация замкнутых многообразий (таких

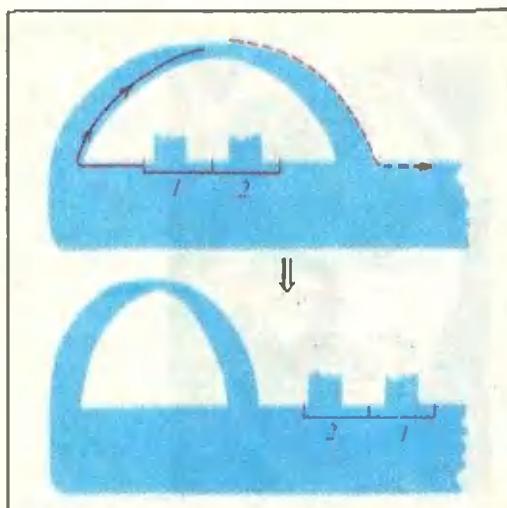


Рис. 16.

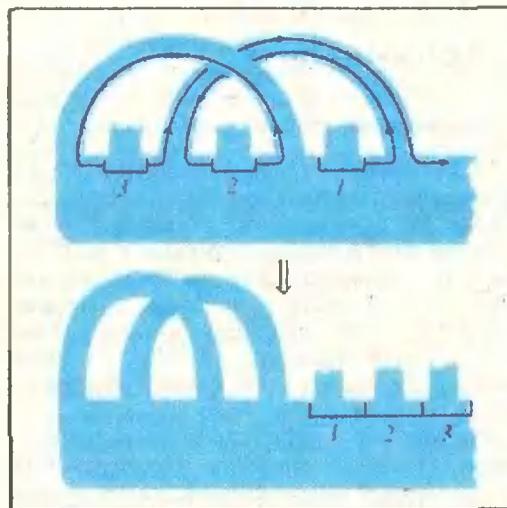


Рис. 17.

как сфера, тор или поверхность пузырька), если заметить, что после вырезания небольшой дырочки мы приходим к пленке. Подробнее об этих вопросах можно прочесть в очень интересной книжке В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича «Наглядная топология» (М.: Наука, 1980). Рекомендую посмотреть также раздел «Топологические эксперименты» в книге Ст. Барра «Россыпи головоломок» (М.: Мир, 1978).

#### Поправка

В статье «Роль математической физики в современной науке» («Квант», 1983, № 12) напечатано ошибочное утверждение. На странице 3, вторая колонка, 8—13 строки сверху, должно быть: «Например, если сумма всех

сил, действующих на данное тело, начальная скорость которого равна нулю, постоянна, то есть длина и направление вектора  $\vec{F} \neq 0$  не зависят от значения времени  $t$ , то движение тела происходит по прямой линии.»



## Лев Андреевич Арцимович

(к 75-летию со дня рождения)

Выдающийся советский физик академик Лев Андреевич Арцимович родился 25 февраля 1909 года в Москве в семье профессора статистики. В 1928 году окончил Белорусский государственный университет, вскоре приехал в Ленинград и поступил препаратором в Физико-технический институт (ФТИ), которым руководил знаменитый ученый академик А. Ф. Иоффе.

Иоффе стремился как можно раньше включать своих учеников и сотрудников в самостоятельные смелые научные исследования. Арцимович оказался необычайно одаренным физиком, успешно владеющим как теорией, так и экспериментом. «Этот парень удивительно умел все сосчитать, составлять уравнения и корректно их решать», — вспоминая приход Арцимовича в ФТИ, писал член-корреспондент АН СССР А. И. Алиханьян.

В 1931 году Арцимович тщательно исследовал полное внутреннее отражение рентгеновских лучей от тонких металлических пленок, заложив тем самым основы оптики рентгеновских лучей.

В 1934—35 годах Л. А. Арцимович занимался изучением свойств медленных нейтронов и, совместно с И. В. Курчатовым, убедительно показал, что они активно захватываются атомными ядрами водорода — протонами. Затем он выполнил ряд работ, подтвердивших справедливость квантовой механики, которая в это время бурно развивалась, но встречала на своем пути немало препятствий, сомнений и противоречий. Особенно важ-

ной была его работа, подтверждавшая выполнение законов сохранения энергии и импульса при аннигиляции электрона и позитрона, справедливость которых одно время подвергалась сомнению.

В 1944 году академик И. В. Курчатов пригласил Л. А. Арцимовича в только что созданный им Институт атомной энергии, где Лев Андреевич работал до конца своей жизни. Сначала он возглавил там важное прикладное направление — разделение изотопов атомных ядер при помощи электромагнитных установок. В 1950 году И. В. Курчатов поручил Арцимовичу руководство исследованиями физики горячей плазмы и управляемых термоядерных реакций — одной из важнейших научных проблем современности.

Под руководством Арцимовича советские физики разработали несколько направлений, ведущих к решению труднейшей задачи — созданию термоядерного реактора. Наиболее перспективным из них оказалось создание экспериментальных установок «Токамак» (тороидальные камеры в магнитном поле), на которых были достигнуты рекордные результаты по нагреву и удержанию плазмы.

Эта проблема до конца еще не решена, но Арцимович твердо верил в торжество человеческого разума. Заканчивая свою монографию об управляемых термоядерных реакциях, он написал следующие слова: «Вряд ли есть какие-либо сомнения в том, что в конечном счете проблема управляемого термоядерного синтеза будет решена. Природа может расположить на пути решения этой проблемы лишь ограниченное число трудностей, и после того, как человеку, благодаря непрерывному проявлению творческой активности, удастся их преодолеть, она уже не в состоянии будет изобрести новые».

Много лет Л. А. Арцимович руководил Отделением общей физики и астрономии Академии наук СССР. Он оказал большую помощь развитию квантовой электроники и лазерной техники, строительству самого крупного в мире советского оптического телескопа, разработке проблем внеатмосферной астрономии. Он был также активным борцом за мир, бесценным представителем отечественной науки на знаменитых Пагуошских конференциях ученых — сторонников мира.

*В. А. Лешковцев*



## Яков Ильич Френкель

(к 90-летию со дня рождения)

Имя выдающегося советского физика-теоретика Я. И. Френкеля прочно связано с целым рядом физических эффектов. Прежде чем кратко рассказать о них — несколько данных из его биографии.

Яков Ильич родился 10 февраля 1894 года в Ростове-на-Дону. С 1909 года жизнь его навсегда связывается с городом на Неве. В 1913 году он с золотой медалью заканчивает известную в Петербурге гимназию. К этому времени молодой человек выполняет первую самостоятельную работу по физике, которую высоко оценивает профессор А. Ф. Иоффе. По окончании физико-математического факультета Петроградского университета Я. И. Френкель остается при нем для подготовки к профессорской деятельности. С начала 1918 года он преподает физику в Таврическом (Симферопольском) университете. В 1921 году Френкель переезжает в Петроград и начинает работать в Физико-техническом институте (ФТИ) и на физико-механическом факультете Политехнического института. Вскоре он становится главой теоретического отдела ФТИ и заведующим кафедрой теоретической физики на физмехе. С обоими этими учреждениями, территориально расположенными в двух шагах друг от друга, связана вся тридцатилетняя научная и педагогическая деятельность Якова Ильича.

Я. И. Френкель посвящал свои усилия разработке широкого круга проблем. Назовем лишь некоторые из полученных им результатов.

Он первым ввел представление о колебательно-поступательном характере движения молекул в жидкостях и построил основы кинетической теории жидкостей (работы 1926—44 гг.).

Ввел понятие о дефектах кристаллической решетки (1926 г.). «Дефекты по Френкелю» (или «френкелевские пары») — это сочетание пустого узла в решетке — дырки — и атома, перешедшего из этого узла в пространство междуузлий. С ними неразрывно связаны процессы диффузии, тепло- и электропроводности в твердых телах.

Френкелевский экситон — квант возбуждения — представляет собой связанное состояние электрона и положительной дырки, способное двигаться по кристаллу (предложен в 1931 г.). Сейчас физика экситонов — одна из наиболее интенсивно развивающихся областей физики твердого тела.

Для описания процессов, происходящих в ядре, Френкель предложил использовать представления статистической физики и термодинамики, рассматривая ядро как систему большого числа частиц (нуклонов). Им (независимо от Н. Бора) была создана капельная модель ядра (модель Бора — Френкеля, 1936 г.). Было введено понятие температуры ядра, испускание частиц из ядра трактовалось в терминах испарения, а поглощение — конденсации. Эти простые соображения оказались необычайно плодотворными и дали особенно ценные результаты после открытия деления урана (1939 г.). Я. И. Френкелем (одновременно с Н. Бором и Дж. Уилером) была разработана теория деления тяжелых ядер.

Ученый-романтик, каким был Я. И. Френкель, по самому складу своего ума может находить черты общего в разных и, казалось бы, далеко друг от друга отстоящих явлениях, связывая далекое с близким, усматривая черты нового в старом. Такому художественному видению мира в большой степени способствовало то, что Яков Ильич владел кистью: его портреты и пейзажи не раз экспонировались на выставках и воспроизводились в различных книгах и журналах. Он был хорошим скрипачом, тонко чувствующавшим музыку и исполнявшим ее исключительно проникновенно.

Автор первого в нашей стране полного курса теоретической физики Яков Ильич Френкель выполнил фундаментальные работы не только в области физики жидких и твердых тел и физики ядра, но и в классической и квантовой механике, астрофизике, геофизике и биофизике.

*В. Я. Ильин*



## Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Как решается основная задача механики?» предназначена восьмиклассникам, «Диэлектрики, полупроводники, полуметаллы, металлы» — девятиклассникам и «Фотоэлектрический эффект и кванты» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

### Как решается основная задача механики?

Основная задача механики, как неоднократно указывается в учебнике «Физика 8», — определять положение (координаты) движущегося тела в любой момент времени. Это механика обязательно должна «уметь», иначе она не может быть наукой о движении. Законы движения, открытые Ньютоном, и прежде всего второй закон Ньютона (основной закон динамики)  $\vec{F} = m\vec{a}$ , как раз и позволяют решать эту задачу.

Второй закон Ньютона связывает силу, приложенную к телу, и вызванное силой ускорение. Но ускорение — это быстрота изменения скорости, а скорость, в свою очередь, — быстрота изменения перемещения тела. Поэтому, решив уравнение, выражающее основной закон динамики, мы узнаем о быстроте изменения координат тела, а значит, и о самих координатах в любой момент времени. Для этого кроме силы нужно знать еще начальные условия — начальные координаты и начальную скорость тела.

На первый взгляд кажется, что уравнение второго закона Ньютона очень простое и что решается оно тоже просто. Однако надо помнить, что уравнение  $\vec{F} = m\vec{a}$  — векторное. Это значит, что за ним «скрываются» три скалярных уравнения для проек-

ций силы и ускорения на оси координат:

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x, \\ F_y &= ma_y, \\ F_z &= ma_z. \end{aligned}$$

Эти уравнения в самом деле решаются легко, но только в том случае, когда проекции силы  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$  постоянны, то есть когда их значения одинаковы при любых значениях координат точки, а значит, и в любой момент времени. Тогда постоянны и значения проекций ускорения  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$ , движение тела, следовательно, равноускоренное, и координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \\ z &= z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}. \end{aligned}$$

Здесь  $x_0$ ,  $y_0$  и  $z_0$  — начальные координаты, а  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  и  $v_{0z}$  — соответствующие проекции начальной скорости на оси координат.

В школьном курсе физики рассматриваются только такие задачи, когда силы постоянны. Значительно сложнее решать основную задачу механики, если сила и ее проекции зависят от координат. В действительности обычно именно так и бывает. Как решается задача в таком случае? Конечно, и теперь нужно знать начальные условия и силу. Но теперь «знать силу» — значит знать, как она изменяется при изменении координат тела.

Пусть, например, на тело действует сила  $F_x$ , которая определенным (и известным) образом зависит от координаты  $x$ . Для определения координаты  $x$  тела в любой момент времени прежние формулы непригодны, потому что если сила  $F_x$  изменяется от точки к точке, будет изменяться и ускорение  $a_x$  тела. Будем решать задачу постепенно, так сказать, шаг за шагом.

Сначала рассмотрим движение нашего тела в течение малого промежутка времени  $\Delta t$ , начиная с момента, который мы условимся считать начальным. В этот момент ( $t=0$ ) координата  $x$  тела равна  $x_0$

(начальная координата), а скорость равна  $v_{0x}$  (начальная скорость). Промежуток  $\Delta t$  выберем настолько малым, чтобы в течение этого времени силу  $F_x$ , а значит, и ускорение  $a_x$  можно было считать постоянными. Силу  $F_{0x}$  мы знаем, поскольку нам известно, как сила зависит от координаты;  $a_{0x}$  мы тоже знаем, так как  $a_{0x} = F_{0x}/m$ . Следовательно, по известным нам формулам равноускоренного движения для скорости  $v_{1x}$  и координаты  $x_1$  в конце промежутка времени  $\Delta t$  мы можем написать:

$$v_{1x} = v_{0x} + a_{0x} \Delta t,$$

$$x_1 = x_0 + v_{0x} \Delta t + \frac{a_{0x} \Delta t^2}{2}.$$

Затем рассмотрим движение тела в следующий столь же малый промежуток времени  $\Delta t$ . Начальной координатой теперь будет найденное нами значение  $x_1$  и начальной скоростью — значение  $v_{1x}$ . В течение этого второго промежутка на тело будет действовать уже другая сила —  $F_{1x}$ . Ее значение мы найдем, зная зависимость силы от координаты. Соответственно другим будет и ускорение тела  $a_{1x}$ . Таким образом, к концу второго промежутка времени скорость тела будет равна

$$v_{2x} = v_{1x} + a_{1x} \Delta t,$$

а координата —

$$x_2 = x_1 + v_{1x} \Delta t + \frac{a_{1x} \Delta t^2}{2}.$$

Эти значения скорости и координаты будут начальными для движения тела в течение следующего, третьего, промежутка, и мы таким же способом найдем значения скорости и координаты к концу этого промежутка. Так, «двигаясь» шаг за шагом, мы сможем определить координату  $x$  тела в любой момент времени. Аналогично можно найти и координаты  $y$  и  $z$ .

В рассмотренной нами процедуре нетрудно заметить систематическую ошибку, которую мы допускаем. Состоит она в том, что сила и ускорение считаются постоянными в течение каждого малого промежутка времени  $\Delta t$ , а в конце промежутка они скачком изменяются. Между тем в действительности и сила, и ускорение всегда изменяются непрерывно. Уменьшить эту ошибку мож-

но, уменьшив значение  $\Delta t$ . Ошибка практически вовсе исчезнет, если промежутки времени сделать бесконечно малыми. Но тогда число наших «шагов» станет бесконечно большим, и процедура из-за этого сделается невозможной.

Специально для таких случаев разработан особый математический аппарат, называемый дифференциальным и интегральным исчислением (Ньютон придумал его именно для этой цели). С его помощью и решается основная задача механики. Но принцип решения именно тот, который мы здесь рассмотрели. Именно таким способом рассчитывают сложные механические движения (например, спутников и ракет) современные ЭВМ.

В заключение отметим следующее. Когда мы говорим, что основная задача механики — находить координаты движущихся тел по известным силам и начальным условиям, то это вовсе не значит, что только этим и занимается механика. Бывает и так, что движение тела, то есть его положение в любой момент времени, известно из наблюдений. Тогда законы движения позволяют найти силу, действующую на тело. Эта задача, так называемая обратная задача механики, столь же важна, как и рассмотренная нами прямая задача, но, как нетрудно понять, она значительно проще.

## Диэлектрики, полупроводники, полуметаллы, металлы

В классической физике было принято все вещества по их электрическим свойствам разделять на проводники и диэлектрики («Физика 9», §§ 44 и 46). Современная физика различает еще два промежуточных состояния — полупроводники («Физика 9», § 78) и полуметаллы. Лишь с появлением квантовой механики стало ясно, в чем различия между всеми этими типами веществ. В этой заметке мы постараемся вкратце описать суть современной квантово-

механической теории, объясняющей электрические свойства твердых тел.

Твердое тело состоит из атомов, образующих кристаллическую решетку. Атомы удерживаются в решетке силами взаимодействия электрически заряженных атомных частиц — положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов. Электрический ток в кристалле — это движение электронов, которое подчиняется законам квантовой механики. Согласно этим законам, электроны и в отдельном атоме, и в кристалле могут обладать лишь определенными (разрешенными) значениями энергии, или, иными словами, находиться на определенных энергетических уровнях. Чем выше уровень, тем большей энергии он соответствует.

В атоме эти уровни расположены довольно далеко один от другого — принято говорить, что уровни образуют дискретный энергетический спектр (рис. 1). При определенных условиях электроны могут переходить с одного уровня на другой, разрешенный, уровень. Электрон с данной энергией может двигаться только по замкнутой траектории — орбите — вокруг ядра.\*)

Когда атомы объединяются в кристалл, часть электронов по-прежнему остается на своих атомных орбитах, но наиболее удаленные от ядра электроны получают возможность двигаться по всему кристаллу благодаря тому, что внешние орбиты

\*) Орбита в квантовой механике, в отличие от классической, понятие условное. Об определенной «размытой» орбите электрона можно говорить лишь приблизительно, и ее замкнутость означает только то, что электрон «в среднем» находится на определенном расстоянии от ядра.

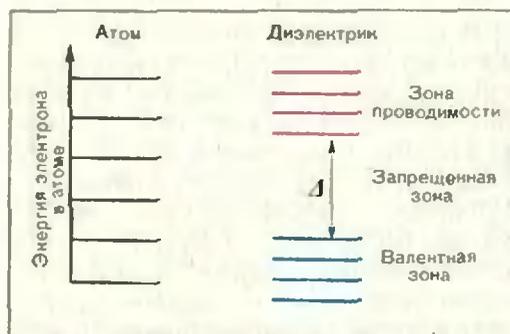


Рис. 1.

Рис. 2.

соседних атомов перекрываются. А это значит, что и энергетические уровни, раньше принадлежавшие отдельным атомам, становятся «общими» для всего кристалла. Вместо дискретных уровней в кристалле образуются энергетические зоны, состоящие из очень близко расположенных уровней. Электроны, которые находятся на этих «обобществленных» уровнях, называются валентными электронами.

Валентные электроны движутся по орбитам, охватывающим весь кристалл, и, казалось бы, могут проводить электрический ток. Однако если бы все было так просто, все твердые тела были бы хорошими проводниками (металлами). Законы квантовой механики делают картину гораздо более сложной и разнообразной.

Во-первых, энергетические зоны разделены промежутками, в которых нет ни одного энергетического уровня. Эти промежутки называются запрещенными зонами. Во-вторых, электроны подчиняются так называемому принципу Паули, согласно которому на каждом уровне в данном состоянии может находиться только один электрон. При наименьшей возможной температуре (равной абсолютному нулю) энергетические уровни последовательно снизу вверх (то есть начиная с наименьших значений энергии) заполняются электронами в соответствии с принципом Паули, а уровни с более высокими энергиями остаются свободными. Различная степень заполнения энергетических зон, а также различия в их относительном расположении и позволяют разделить все твердые тела на диэлектрики, полупроводники, полуметаллы и металлы.

**Диэлектрики.** При  $T=0$  валентные электроны целиком заполняют наименьшую зону, называемую валентной зоной (рис. 2). Свободных уровней в ней нет, а следующая разрешенная зона — зона проводимости — отделена от нее широкой запрещенной зоной. Если к такому образцу приложить электрическое поле, оно не сможет ускорить электроны, то есть создать электрический ток, так как ускорить электрон — значит со-

общить ему дополнительную энергию, а, согласно законам квантовой механики, это можно сделать, только переведя его на более высокий энергетический уровень. Но принцип Паули запрещает электронам занимать уже занятые уровни, а попасть в следующую разрешенную зону, которая совершенно пуста, они не могут, потому что энергия, полученная от электрического поля, много меньше ширины  $\Delta$  запрещенной зоны.

При температуре, отличной от нуля, электроны, в принципе, могут перейти в зону проводимости и стать носителями электрического тока. Однако для того чтобы число электронов, перешедших в эту зону, было достаточно большим, нужно диэлектрик нагреть до такой высокой температуры, что он расплавится, прежде чем ток достигнет измеримой величины. При комнатной температуре ток в диэлектрике практически не течет.

**Полупроводники.** От диэлектрика полупроводник отличается только тем, что ширина  $\Delta$  запрещенной зоны, отделяющей валентную зону от зоны проводимости, у него много меньше (в десятки раз). При  $T=0$  валентная зона в полупроводнике, как и в диэлектрике, целиком заполнена, и ток по образцу течь не может. Но благодаря тому, что энергия  $\Delta$  невелика, уже при незначительном повышении температуры часть электронов может перейти в зону проводимости (рис. 3). Тогда электрический ток в веществе станет возможным, причем сразу по двум «каналам».

Во-первых, в зоне проводимости электроны, приобретая энергию в электрическом поле, переходят на

более высокие энергетические уровни. Во-вторых, вклад в электрический ток дают... пустые уровни, оставленные в валентной зоне электронами, ушедшими в зону проводимости. Действительно, принцип Паули разрешает любому электрону занять освободившийся уровень в валентной зоне. Но, заняв этот уровень, он оставляет свободным свой собственный уровень и т. д. Если следить не за движением электронов по уровням в валентной зоне, а за движением самих пустых уровней, то оказывается, что эти уровни, имеющие научное название *дырки*, тоже становятся носителями тока. Число дырок, очевидно, равно числу электронов, ушедших в зону проводимости (так называемых *электронов проводимости*), но дырки обладают положительным зарядом, потому что дырка — это отсутствующий электрон.

Таким образом, в полупроводнике электрический ток — это ток электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне. Такая проводимость полупроводника называется *собственной*.

Электроны и дырки при движении по кристаллу взаимодействуют с атомами кристаллической решетки, теряя при этом свою энергию. С этими потерями связано электрическое сопротивление вещества. При увеличении температуры потери энергии возрастают, так что сопротивление полупроводника должно было бы с ростом температуры тоже увеличиваться. Но при повышении температуры растет число электронов, переходящих в зону проводимости, а следовательно, и число дырок в валентной зоне. Это значит, что растет (и очень



Рис. 3.

Рис. 4.

быстро) общее число носителей тока. Из-за этого сопротивление полупроводника с повышением температуры не растет, а падает. Полупроводник и можно определить как вещество, *практически не проводящее ток при абсолютном нуле температур, но сопротивление которого с ростом температуры резко падает.*

В природе, однако, полупроводников с собственной проводимостью не существует: в них всегда имеются примеси других веществ, которые и определяют их электрические свойства. Наличие примесей приводит к тому, что в запрещенной зоне полупроводника появляются дополнительные энергетические уровни, с которых или на которые тоже возможны электронные переходы. Широкое применение полупроводников в технике стало возможным только после того, как технологи научились управлять содержанием примесей в полупроводниках и по своему усмотрению делать их проводимость (*примесную проводимость*) почти чисто электронной или чисто дырочной.

Оказывается, можно подобрать такие примеси, атомы которых легко отдают электроны. Освободившиеся при этом дополнительные уровни энергии располагаются внутри запрещенной зоны полупроводника вблизи ее верхнего края (рис. 4, а). Такие примеси называются *донорными примесями*, а уровни — *донорными уровнями*. Из рисунка 4, а видно, что при одной и той же температуре электронам с таких уровней гораздо легче перейти в зону проводимости, чем электронам из валентной зоны, поэтому примесные уровни и станут основными поставщиками электронов в зону проводимости. Но при этом в валентной зоне дырок появляться не будет, и проводимость полупроводника станет почти чисто электронной. Такие полупроводники называются полупроводниками *n*-типа.

Существуют и такие примеси, атомы которых легко присоединяют к себе электроны (*акцепторные примеси*). Дополнительные уровни их электронов (акцепторные уровни) тоже располагаются внутри запрещенной зоны полупроводника, но вблизи ее дна (рис. 4, б). В этом слу-

чае электронам из валентной зоны легче перейти на акцепторные уровни примеси, чем в зону проводимости. Тогда в валентной зоне появятся дырки без того, чтобы в зоне проводимости появились электроны. Получится полупроводник с почти чисто дырочной проводимостью, или полупроводник *p*-типа.

Наиболее известные полупроводниковые материалы — это германий и кремний, а их главные технические применения как раз и связаны с возможностью создания образцов *n*- и *p*-типов («Физика 9», с. 212).

**Полуметаллы.** Это вещества, в которых между зоной проводимости и валентной зоной зазор отсутствует, так что они слегка перекрываются (рис. 5). В таких веществах уже при нулевой температуре имеется небольшое количество электронов и дырок, но *электропроводность их очень слабо зависит от температуры.*

Полуметаллы в природе встречаются редко, из них наиболее известны висмут, сурьма и их сплавы.

**Металлы.** Электроны в металлах окончательно «забывают» свое атомное происхождение, их уровни образуют одну очень широкую зону. Она всегда заполнена лишь частично (число электронов меньше числа уровней) и потому может называться *зоной проводимости* (рис. 6). Ясно, что в металлах ток может течь и при нулевой температуре. Более того, с помощью квантовой механики можно доказать, что в идеальном металле (решетка которого не имеет дефектов) при  $T=0$  ток должен течь без сопротивления!\*)

\*Мы не касаемся здесь сверхпроводников, которые теряют сопротивление при температурах, отличных от абсолютного нуля.

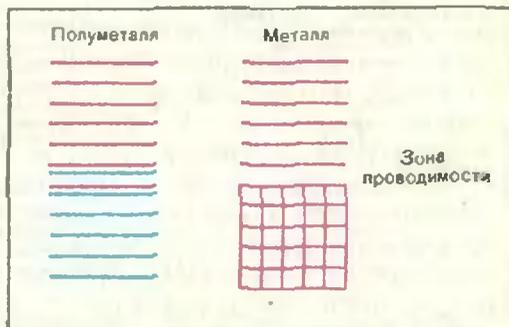


Рис. 5.

Рис. 6.

К сожалению, идеальных кристаллов не бывает, а нулевой температуры достичь невозможно. В действительности электроны теряют энергию, взаимодействуя с колеблющимися атомами решетки, так что *сопротивление реального металла растет с температурой* (в отличие от сопротивления полупроводника). Но самое главное — это то, что при любой температуре электропроводность металла значительно выше электропроводности полупроводника потому, что в металле гораздо больше электронов, способных проводить электрический ток.

## Фотоэлектрический эффект и кванты

Фотоэлектрический эффект был открыт немецким физиком-экспериментатором В. Галльваксом в 1888 году.\*) Он обнаружил, что при освещении отрицательно заряженного проводника ультрафиолетовым светом заряд проводника быстро уменьшается.

Фотоэффект был подробно исследован в 1888—1890 годы русским ученым А. Г. Столетовым и несколько позже — немецким ученым Ф. Ленардом. Так, в 1899 году Ленард доказал, что при освещении металла ультрафиолетовым (а иногда и видимым) светом из металла вырываются отрицательно заряженные частицы — электроны.\*\*)

Сам по себе факт вырывания электронов из металла под действием света не вызывал удивления. К этому времени уже было известно, что свет — это электромагнитная волна. Значит, падающий на поверхность металла свет приносит с собой переменное электрическое поле. В та-

ком поле электрон в металле должен совершать колебания, а при достаточно большой амплитуде он может и вылететь из металла, где его удерживает сила притяжения к положительно заряженным частицам (напомним, что амплитуда определяет энергию колебаний). Можно ожидать, что на «раскачку» электрона потребуется некоторое время (расчет показывает, что могут потребоваться даже минуты). Число вылетающих в единицу времени электронов должно, очевидно, зависеть от интенсивности падающего света (то есть от энергии излучения, проходящей за единицу времени через единичную площадку в направлении, перпендикулярном лучу). Так, свет мощного прожектора должен, естественно, вырывать больше электронов, чем свет карманного фонарика. От интенсивности падающего света должна зависеть и энергия вылетающих электронов.

Таким образом, на основании волновой теории света можно было ожидать, что:

1. Любой свет, то есть свет любой длины волны, должен вырывать электроны из металла, поскольку любой свет приносит с собой переменное электрическое поле.

2. На вырывание электрона из металла требуется определенное время. Поэтому фотоэлектроны (электроны, вырванные светом) должны появляться через некоторое время после включения света.

3. Число вырванных электронов и их энергия должны быть пропорциональны интенсивности света (то есть квадрату амплитуды колебаний в световой волне).

Однако исследования, проведенные А. Г. Столетовым, В. Галльваксом и Ф. Ленардом, показали, что законы фотоэффекта совсем не такие, как ожидалось. Оказалось, что:

1. Не всякий свет вырывает электроны из металла. Для каждого металла существует определенная наименьшая частота  $\nu_{\min}$  (и наибольшая длина волны  $\lambda_{\max}$ ), такая, что свет меньшей частоты (большей длины волны) вовсе не вырывает электронов. Если частота колебаний в световой волне меньше этой граничной

\*) Годом раньше немецкий физик Г. Герц обнаружил, что искровой разряд между двумя электродами происходит более активно, если искровой промежуток освещается ультрафиолетовым светом.

\*\*) Говоря более точно, испускание электронов твердыми и жидкими телами следует называть внешним фотоэлектрическим эффектом (в отличие от внутреннего фотоэффекта, когда под действием света электроны остаются внутри тела и лишь изменяют свое состояние).

частоты, то и самый мощный прожектор, испускающий такой свет, не вырвет ни одного электрона. Но если частота больше  $\nu_{\min}$ , то и маленький карманный фонарик вызовет вылет электронов. Эта наименьшая частота (наибольшая длина волны) называется красной границей фотоэффекта.

2. Вылет электронов из металла начинается практически одновременно с началом его освещения. Мгновенность действия и сделала фотоэффект таким важным в различных автоматических устройствах.

3. Вырванные светом электроны имеют различные значения кинетической энергии — от самых малых до некоторого максимального значения  $mv_{\max}^2/2$ . Эта максимальная энергия фотоэлектронов линейно зависит от частоты света, а не от его интенсивности. Интенсивности света пропорционально только число вырванных электронов (в этом состоит закон Столетова для фотоэффекта).

Таким образом, главную роль почему-то играет частота света, которая определяет его цвет, но не имеет никакого отношения к энергии волны. Законы фотоэффекта оказались, следовательно, несовместимыми с волновой теорией света.

Полное теоретическое объяснение фотоэлектрического эффекта было найдено в 1905 году А. Эйнштейном. Он показал, что в этом случае свет ведет себя не как волна, а как поток частиц, квантов света, энергия которых выражается равенством  $E=h\nu$ , введенным еще за пять лет до этого М. Планком для объяснения совсем другого процесса.

Сам фотоэффект состоит в том, что световые частицы, сталкиваясь с электронами металла, передают им свою энергию и импульс (сами кванты при этом исчезают). Если энергия квантов падающего света больше той работы, которую электрон должен совершить против сил притяжения к положительно заряженным частицам вещества, электрон может вылететь из металла. Если энергия квантов меньше этой работы (работы выхода электрона из металла), ни один электрон из металла не вылетит.

Становится понятным смысл граничной частоты, то есть красной границы фотоэффекта: для вырывания электрона из металла энергия квантов должна быть не меньше, чем  $h\nu_{\min}$ . Эта энергия и равна работе выхода  $A$  электрона из данного металла. В случае, когда энергия  $h\nu$  падающих квантов больше  $A$ , максимальная кинетическая энергия электронов равна разности  $h\nu - A$ :

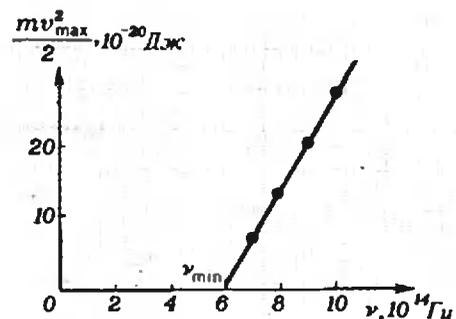
$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = h\nu - A.$$

Это и есть формула Эйнштейна для фотоэффекта. Обычно ее пишут в виде

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

А что же интенсивность света, играет ли она какую-нибудь роль? Да, играет. Если свет вызывает фотоэффект, то число вылетающих в единицу времени электронов пропорционально именно интенсивности света. Но интенсивность света теперь связана не с амплитудой колебаний в световой волне, а с числом квантов, испускаемых источником в единицу времени. Вдвое более «сильная» лампа испускает вдвое больше квантов; свет такой лампы и электронов из металла вырвет вдвое больше. Но энергия вылетающих электронов зависит не от силы света лампы, а от того, какого цвета свет она испускает.

Теория Эйнштейна самым тщательным образом была проверена экспериментально (в опытах, подобных описанному в «Физике 10» на с. 225). Особенно точные измерения провел в 1916 году американский физик Р. Милликен. Результаты этих исследований могут быть пред-



ставлены в виде графика зависимости максимальной кинетической энергии электронов от частоты света (см. рисунок; приведенный на нем график относится к металлу барию). В этом графике вся суть теории Эйнштейна. Из него видно, что пока частота света меньше граничной  $\nu_{\text{гип}}$ , энергия электронов равна нулю. А дальше кинетическая энергия растет пропорционально частоте  $\nu$  (точнее разности частот  $\nu - \nu_{\text{гип}}$ ), как это и следует из уравнения Эйнштейна. А наклон графика (тангенс угла наклона) определяет значение постоянной Планка  $h$ .

Открытие и исследование фотоэлектрического эффекта привели к тому, что наряду с волновой теорией света появилась еще одна теория — квантовая теория света. В 1921 году за важные физико-математические исследования, особенно за открытие законов фотоэлектрического эффекта, А. Эйнштейну была присуждена Нобелевская премия (высшая международная награда за научные достижения). В 1923 году за исследования в области элементарных зарядов и фотоэлектрического эффекта такая же премия была присуждена Р. Милликену.

## Школа без доски и мела

20 лет ВЗМШ

При слове «школа» на ум приходит классная комната, где ученики сидят за партами, а учитель пишет мелом на доске. Есть, однако, школа, где все происходит совсем не так. В этом учебном году отмечает свое двадцатилетие Всесоюзная заочная математическая школа Академии педагогических наук СССР при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова (ВЗМШ). Всего в ВЗМШ сейчас учится около пятнадцати тысяч учеников — школьников 8—10 классов.

В комнате, занимаемой ВЗМШ в Московском университете, на стене висит карта СССР, в которую воткнуты флажки, соответствующие 42 филиалам школы при университетах и других вузах. На противоположной стене — многоярусная полка для тетрадей учеников. На третьей стене — портрет академика И. Г. Петровского, основателя и горячо поддерживавшего Заочную школу, и список членов Научного совета ВЗМШ, в который входят вице-президент АН СССР, ректор МГУ академик А. А. Логанов, президент Академии педагогических наук СССР академик АПН СССР М. И. Кондаков и другие известные ученые.

Цель ВЗМШ — помочь любознательным школьникам, живущим в селах и маленьких городах, приобрести математическую культуру, пополнить свои знания в области математики, научиться решать нестандартные задачи и грамотно записывать их решения. Разумеется, занятия в ВЗМШ не заменяют обычные уроки математики, а дополняют их. Руководство ВЗМШ вовсе не предполагает, что ее ученики станут именно математиками. Математика нужна и становится все нужнее людям самых различных специальностей. Выпускники ВЗМШ поступают в инженерные, технологические, строительные вузы, мореходные, авиационные и

железнодорожные учебные заведения, становятся педагогами и врачами.

Ученики ВЗМШ регулярно получают по почте специальные задания, разработанные учеными и педагогами, изучают содержащийся в них теоретический материал, решают задачи и посылают решения по почте на проверку. По своему содержанию задания, как правило, примыкают к школьной программе, хотя, конечно, они несколько труднее. (По отзывам учеников, их оценки в Заочной школе часто на балл ниже, чем в обычной школе.) В качестве дополнительных даются и довольно трудные задачи, чтобы и для наиболее сообразительных нашлось дело. Пройдя многолетнюю проверку, многие задания затем были выпущены массовым тиражом, и существует уже целая литература, порожденная Заочной школой. Организатор ВЗМШ и постоянный председатель ее Научного совета член-корреспондент АН СССР И. М. Гельфанд привлек к составлению заданий педагогов и ученых, многие из которых — сотрудники МГУ. По материалам ВЗМШ работают кружки и факультативы, и даже радиопередача «Математический кружок Сигма» (см. «Квант», 1983, № 3). В ВЗМШ есть и биологическое отделение.

Все работы учеников ВЗМШ тщательно проверяются. В обычной школе учитель чаще всего просто подчеркивает ошибки учеников, а подробный разбор ошибок проводит устно. В условиях заочного обучения проверка работ превращается в целое искусство, которое передается из поколения в поколение проверяющих. Многие выпускники Заочной школы, поступая в МГУ и другие вузы, сами становятся проверяющими, хорошо помня, каким авторитетом для них был автор замечаний на полях их работ. Недостатки работ отнюдь не исчерпываются простыми ошибками. Один ученик не понял условия задачи, другой ценную мысль неграмотно выражает, а третий вообще не ведает, как приступить к делу. И каждому надо коротко и ясно, в нескольких фразах, показать и в чем он заблуждается.

ся и что он должен делать, чтобы правильно решить задачу.

Например, была дана такая задача: «Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см, а площадь больше 100 см<sup>2</sup>?» Один ученик написал в решении: «Да, существует. Основание берем сколь угодно большое, а высоту 2–3 мм, тогда другие высоты будут меньше 1 см, так как угол близок к 180°». Подобные тексты представляют трудную проблему для проверяющих, потому что их нельзя ни просто одобрить, ни просто отвергнуть. Хотя это ученик, несомненно, сообразительный, его еще надо учить и учить, как записывать свои мысли. Проверяющий написал на полях: «То, что Вы написали, хорошая прикидка, которая должна была показать Вам, какие стороны и углы могут быть у Вашего треугольника. Вы должны были писать или оставить при себе эту прикидку. Но ответ должен был выглядеть так: «положим  $a = \dots$  см,  $b = \dots$  см,  $c = \dots$  см. Тогда треугольник с такими сторонами удовлетворяет условию задачи. Доказательство: ...». А без этого задача не решена!».

Проверенные работы высылаются ученикам для доработки — разумеется, не в качестве указания, а чтобы они прочли замечания, которые им были сделаны, и почерпнули из них как можно больше пользы.

Немалая трудность в обучении математике вообще, а при заочном обучении особенно, обусловлена спецификой математики как науки. Математика работает с абстракциями, а такая работа требует соблюдения особых «правил игры». Те пешеходы, заводцы, бассейны и комбайны, о которых идет речь в школьных задачах, так же качественно отличаются от своих конкретных тезок, как

шахматный король отличается от живых королей. Соответственно, необычен и язык математики. Математические тексты нестроят не только формальными обозначениями, но и такими непривычными выражениями, как «сколь угодно большой», «произвольный», «если и только если», «для любого  $A$  найдется  $B$ », выражающими сложные логические конструкции. Критерием понимания утверждений является умение обращаться с ними: делать из них выводы, формулировать противоположные утверждения, проверять их на частных случаях, обобщать, переходить к наглядным представлениям и т. п. Чтобы успешно работать с математическими абстракциями, необходимо свободно и правильно владеть математическим языком, а такое умение лучше всего приобретается в непосредственном общении с культурным в этом отношении собеседником. Таким образом, нужны какие-то гибридные формы обучения, сочетающие преимущества очной и заочной форм.

С этой целью в ВЗМШ принимаются «коллективные ученики» — группы школьников, работающие над заданиями под руководством своего учителя. Это очень гибкая и удобная форма занятий, которая получила положительную оценку со стороны многих учителей и учеников. Вот характерный отзыв: «Вы делаете громадное дело, вливая конкретное, живое содержание в работу тысяч математических кружков».

Пожелаем же дальнейших успехов всем работникам Заочной школы — педагогам, студентам, ученым, занятым общим делом — выявлением талантов и приобщением их к науке.

А. Л. Тоом

## Из старых задач ВЗМШ

Этот рисунок навеян следующей задачей из старой вступительной работы ВЗМШ: Можно ли заполнить табличку  $4 \times 4$  буквами В, З, М и Ш, обвести их рамками четырех типов (квадрат, ромб, треугольник, круг) и раскрасить клетки таблицы в четыре цвета так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) в каждой строке и в каждом столбце должны встречаться все буквы, все цвета и все типы рамок;
- 2) каждая буква должна появляться по разу в клетке каждого цвета;
- 3) рамка каждого типа должна содержать каждую букву и каждый цвет?





# Такая знакомая и такая удивительная вода!

*Доктор педагогических наук  
Н. А. РОДИНА*

Если последовательно сфотографировать все части поверхности земного шара, то 70% снимков будут иметь такой вид, как фотография на странице 35, — поверхность Земли более чем на  $\frac{2}{3}$  покрыта водой.

На долю океанов приходится основная масса воды, содержится она в озерах, реках, под землей и в воздухе. Запас воды в атмосфере — в виде пара — вдвое превышает ресурсы всех рек.

Средняя глубина океанов составляет 3800 м, наибольшую глубину имеет так называемая Марианская впадина в Тихом океане — около 11 000 м. Если выровнять сушу и дно океанов так, чтобы Земля стала точно шаром, то вся поверхность ее будет покрыта слоем воды толщиной около 2500 м.

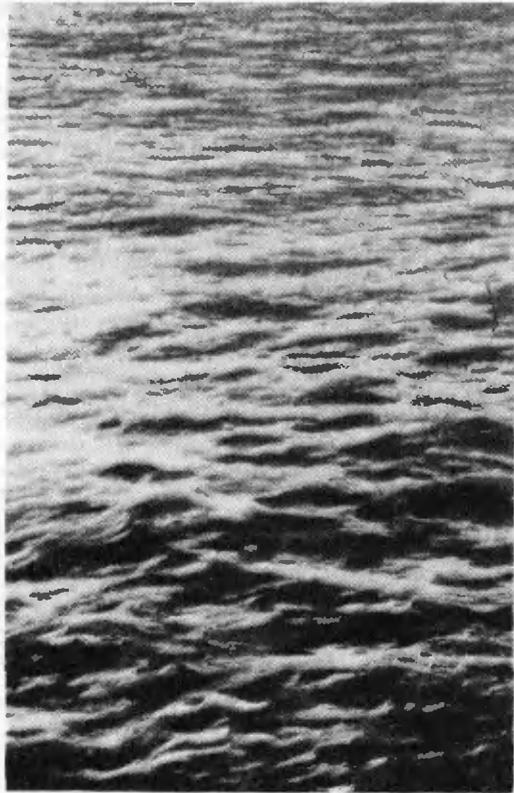
Зная это, а также учитывая, что средний радиус Земли равен 6400 км, можно рассчитать примерный объем воды на Земле и радиус той «капли», которую образовала бы вода, если всю ее собрать воедино.

Конечно, можно показать, и вы можете это сделать сами, что все же объем воды составляет лишь небольшую часть всего объема Земли. Но из всех планет Солнечной системы (а в ней, кроме девяти больших планет, есть еще тысячи маленьких планет — астероидов) ни одна не может сравниться с Землей по обилию воды. Например, Венера и Марс имеют такие сухие поверхности, каких нет нигде на Земле. Даже пустыня Сахара по сравнению с ними казалась бы просто болотом.

Без воды невозможна была бы жизнь на нашей планете. Она содержится в организмах животных, в растениях. Человек ежегодно потребляет около двух тонн воды. Мы пользуемся ею постоянно, она необходима нам так же, как воздух.

И эта вода, такая распространенная и такая, на первый взгляд, обыкновенная жидкость, обладает, оказывается, необыкновенными физическими свойствами, отличающими ее от других веществ и делающими ее такой полезной для человека. Как будто природа специально позаботилась о том, чтобы придать воде свой-





ства, благодаря которым смягчаются жара и холод на Земле, рыбы могут зимовать в водоемах, человек пользуется «мостами из льда»...

Рассмотрим некоторые из этих свойств.

Вода относится к тем редким веществам, которые в обычных условиях нашей жизни встречаются и в виде твердого тела, и в виде жидкости, и в виде газа. Многие ли из вас видели, например, твердый бензин (температура его плавления ниже  $-60^{\circ}\text{C}$ )? Жидкое железо мы можем увидеть только во время экскурсии на металлургический завод, а жидкий воздух — в специальных лабораториях. А вот воду мы хорошо знаем во всех трех состояниях. Зимой, стоя на берегу реки, мы видим лед — твердое состояние воды, видим в проруби воду, вдыхаем вместе с воздухом водяной пар (он невидим).

Известно, что все тела при нагревании расширяются, а при охлаждении сжимаются. Это относится и к воде. Именно этим объясняется, например, прогревание воды способом конвекции. Но если пронаблюдать расширение и сжатие воды при изменении ее температуры более тщательно, то мы заметим особенность воды, имеющую большое значение для человека.

Представьте себе, что в двух одинаковых колбах налиты жидкости. В одной колбе — вода, в другой — любая другая жидкость, скажем бензин, и обе жидкости имеют одинаковую температуру, например,  $15^{\circ}\text{C}$ . Будем постепенно охлаждать эти жидкости до  $0^{\circ}\text{C}$ . Сначала вода не проявит никаких «чудес», обе жидкости будут сжиматься. Но после того как температура жидкостей станет равной  $4^{\circ}\text{C}$ , бензин будет продолжать сжиматься, а вода станет расширяться!

Рассмотрим обратный процесс: будем нагревать эти жидкости от  $0^{\circ}\text{C}$ . Бензин (и другие жидкости) будет только расширяться, а вода сначала сожмется, а лишь после  $4^{\circ}\text{C}$  начнет расширяться, то есть поведет себя как остальные жидкости.

Вы можете проделать опыт, доказывающий это удивительное свойство воды. Налейте в банку или в стакан примерно до половины высоты холодной воды (по возможности, воду возьмите похолоднее, но не холоднее  $4^{\circ}\text{C}$ ) и опустите в воду термометр, который может измерять температуру от  $0^{\circ}\text{C}$  и выше (годится, например, школьный лабораторный термометр или комнатный). Резервуар термометра должен находиться вблизи дна сосуда (хорошо, если вы укрепите термометр так, чтобы его можно было двигать только вверх и вниз). Теперь осторожно поместите на поверхность воды небольшие кусочки льда слоем 2—4 см и наблюдайте за показаниями термометра. Температура будет понижаться, но когда она станет близкой к  $4^{\circ}\text{C}$  (она может отличаться на  $1-1,5^{\circ}$ , это зависит от качества термометра, то есть его «класса», от наличия примесей в воде и других причин), вы увидите, что столбик термометра остановится. Убедитесь, что он остается неподвижным, а затем осторожно поднимите термометр так, чтобы его резервуар оказался в верхнем слое воды, где находится лед. Вы увидите, что там температура близка к  $0^{\circ}\text{C}$ . В процессе опыта вам, может быть, придется добавлять лед; делайте это осторожно, чтобы он не опускался вниз и не перемешивался с нижними слоями воды.

Из наших наблюдений следует, что наибольшую плотность вода имеет при  $4^\circ\text{C}$ , при нагревании выше этой температуры и при охлаждении ниже нее плотность воды уменьшается. Это свойство пресной воды (морская вода им не обладает) носит название аномалии теплового расширения (аномалия — неправильность, отклонение от общей закономерности).

На рисунке 1 изображен график зависимости объема воды от температуры (для 1 г воды). Пользуясь им, постройте график зависимости плотности воды от температуры.

Благодаря аномалии теплового расширения воды водоемы с пресной водой не промерзают зимой до дна. По мере наступления холодов воздух над озером, рекой или прудом постепенно охлаждается. Охлаждается и соприкасающийся с ним верхний слой воды. По мере остывания он становится плотнее и опускается на дно — тонет в менее плотной теплой воде. Постепенно придонный слой воды становится все холоднее, и наконец температура его достигает  $4^\circ\text{C}$ . Лежащие над ним слои воды продолжают охлаждаться от  $4^\circ\text{C}$  до  $0^\circ\text{C}$ , но теперь уже плотность их становится меньше, и они не опускаются вниз. Поэтому на дне водоема и зимой сохраняется сравнительно теплый слой воды, в котором и зимуют рыбы, рачки, водоросли.

Но на этом «чудеса» не кончаются, вода не скупится на сюрпризы.

Возьмите две пробирки (или маленькие стеклянные пузырьки) и налейте в одну из них воду, а в другую — расплавленный воск или стearин. Воск оставьте в комнате — он быстро застынет, а воду придется

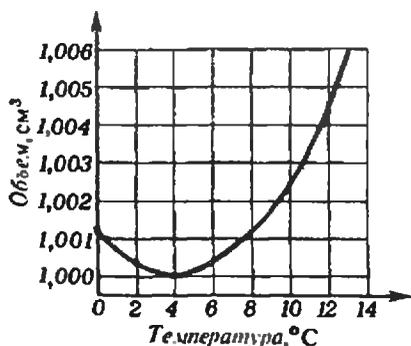


Рис. 1.

вынести на мороз или поместить в морозильную камеру холодильника, чтобы она обратилась в лед. И снова вода удивит нас! Воск в процессе отвердевания сожмется, на его поверхности образуется глубокая воронка. А на поверхности льда вы увидите выпуклость (а если пузырек был наполнен водой доверху и закрыт, то лед его даже разорвет).

Сделаем вывод: при переходе воды из жидкого состояния в твердое плотность ее уменьшается — ведь объем ее увеличивается при неизменной массе. У воска, как и у большинства веществ, наоборот, плотность при отвердевании увеличилась.

Благодаря этой особенности воды лед, покрывающий зимой поверхность озера, не опускается на дно, не тонет. Если бы он не имел такого свойства, то аномалия теплового расширения воды не принесла бы пользы, водоемы промерзли бы до дна. То, что вода имеет наибольшую плотность при  $4^\circ\text{C}$  и что она расширяется при отвердевании, приводит к такому окончательному распределению температур в водоемах, какое показано на рисунке 2.

Возникает, однако, вопрос: почему не выравнивается температура воды в водоеме? Почему за долгую холодную зиму водоемы все же не охлаждаются до дна за счет теплопроводности? Это объясняется тем, что вода имеет очень малую, или, как говорят, плохую теплопроводность.

Слой воды толщиной в 1 м и площадью в  $1\text{ м}^2$  при разности температур его поверхностей, равной  $1^\circ\text{C}$ , передает за одну секунду от более нагретой к менее нагретой поверхности  $0,58\text{ Дж}$  энергии. Эта величина —  $0,58\text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{с})$  — называется коэффициентом теплопроводности воды. Для сравнения укажем значения коэффициентов теплопроводности меди —  $395\text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{с})$  (в 660 раз больше, чем воды), алюминия —  $204\text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{с})$ .

Плохо проводит тепло и лед. А если поверх льда лежит еще и свежесыпавший снег, а он состоит из мелких кристалликов льда, между которыми находится воздух, — совсем плохой проводник тепла, имеющий коэффициент теплопроводности

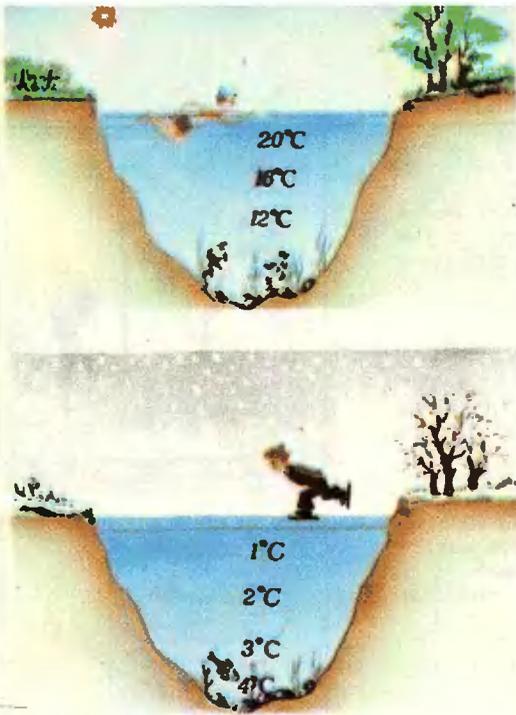


Рис. 2.

0,023 Дж/(м<sup>3</sup> · °С · с), — то уж такая «шуба» надежно укрывает от мороза нижние слои воды в глубоких водоемах.

Обсудим еще одно замечательное свойство воды. Посмотрите таблицу удельных теплоемкостей тел (учебник для 6—7 классов). Самая большая удельная теплоемкость у воды! Чтобы нагреть 1 кг ее на 1 °С необходимо 4200 Дж энергии. Для керосина при тех же условиях необходимо 2100 Дж, а для ртути — 140 Дж. Значит, и остывая на один градус, килограмм воды отдаст окружающим телам в два раза больше энергии, чем керосин, и в 30 раз больше, чем ртуть. Поэтому при пользовании грелкой не только проще всего, но и выгоднее всего заполнять ее обычной водой.

Подсчитайте, какое количество тепла выделится при остывании грелки с объемом 2 л, от 100 °С до 20 °С в двух случаях: когда грелка заполнена водой и когда она заполнена растительным маслом (плотность воды 1000 кг/м<sup>3</sup>, масла — 900 кг/м<sup>3</sup>, их удельные теплоемкости, соответственно, 4200 Дж/(кг · °С) и 2000 Дж/(кг · °С).

А теперь рассмотрим это явление в других масштабах. Летом, в теплую погоду, количество теплоты, поглощаемое от окружающего воздуха водами океанов, морей, больших

озер, настолько значительно, что смягчается жара в тех местах суши, которые лежат вблизи больших водоемов. Наступает зима, и вода, остывая, отдает воздуху это громадное количество теплоты. Поэтому зима в таких местах Земли не столь сурова, как в других, лежащих на тех же широтах.

Подсчитаем, например, какое количество теплоты отдает Черное море при смене времен года от лета к зиме. Наблюдения показывают, что средняя температура поверхностных вод Черного моря летом около 25 °С, а зимой около 7 °С. Площадь его поверхности приблизительно равна 420 000 км<sup>2</sup>, а средняя глубина — около 1200 м.

Объем воды в море

$$V = (420\,000 \cdot 10^6) \text{ м}^2 \cdot 1200 \text{ м} \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ м}^3.$$

Подсчитаем массу воды, зная, что плотность морской воды равна 1030 кг/м<sup>3</sup>:

$$m = 1030 \text{ кг/м}^3 \cdot 5 \cdot 10^{14} \text{ м}^3 \approx 5,1 \cdot 10^{17} \text{ кг}.$$

Удельная теплоемкость морской воды равна 4000 Дж/(кг · °С). Следовательно, общее количество теплоты, которое отдает море, остывая, равно:

$$Q = 4000 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°С)} \cdot (25 - 7) \text{ °С} \times 5,1 \cdot 10^{17} \text{ кг} \approx 3,7 \cdot 10^{22} \text{ Дж}.$$

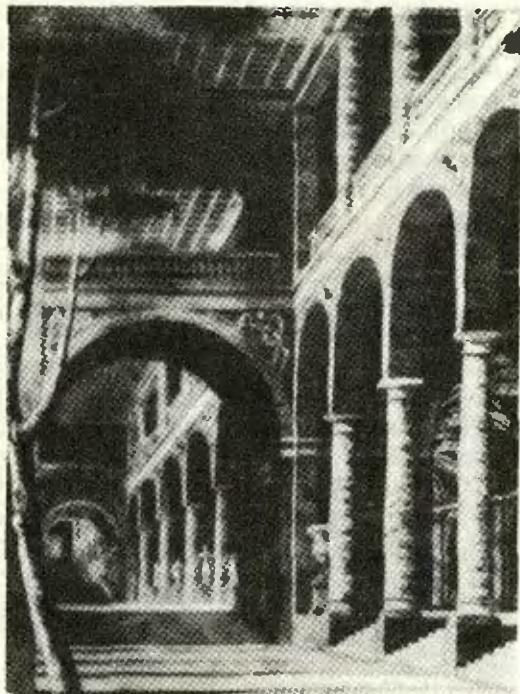
Подсчитайте сами, сколько пужно было бы сжечь каменного угля, чтобы получить такое количество теплоты.

Воду применяют в качестве охладителя для двигателей внутреннего сгорания и реакторов потому, что она поглощает много тепла при нагревании.

Вода хорошо растворяет многие вещества, и поэтому ее можно сделать и соленой, и сладкой. Температура кипения воды такова, что в ней можно сварить большинство потребляемых человеком продуктов...

Мы предлагаем вам посмотреть еще и таблицу удельных теплот парообразования веществ, убедиться, что из всех веществ, указанных в ней, вода имеет наибольшую удельную теплоту, и подумать: — какие выгоды (а может быть, неудобства?) приносит это человеку.

Под редакцией Д. Б. ФУКСА



## Перспектива

Общезвестно, что уходящие вдаль параллельные линии кажутся нам сходящимися и что это явление называется перспективой. Перспективой издавна пользовались художники для создания на плоском холсте иллюзии пространственного изображения. Иллюстрацией может служить картина Гонзаго, фотографию которой вы видите перед собой.

Наиболее доступное плоское изображение пространственных объектов — это фотография. Можно считать, что фотографирование — это отображение, ставящее в соответствие каждой точке пространства (точнее, его части) некоторую точку листа бумаги следующим образом. Фиксируется точка — «фокус»  $\Phi$  — и плоскость — «экран»  $\mathcal{E}$  (плоскость, параллельная задней стенке аппарата). Чтобы избежать происходящего в реальном фотоаппарате перевертывания изображения, мы помещаем эту плоскость между фокусом и снимаемым объектом. После этого точке  $A$  фотографируемой части пространства ставится в соответствие точка  $A'$  пересечения экрана с прямой  $\Phi A$  (рис. 1).

Посмотрим, как изображаются на экране прямые, плоскости и углы.

1°. Отрезок прямой, не проходящей через  $\Phi$ , изображается как прямолинейный отрезок (отрезок линии пересечения плоскости  $\mathcal{E}$  с плоскостью, проходящей через заданный отрезок и точку  $\Phi$ ; рис. 2).

2°. Уходящий в бесконечность кусок прямой  $l$ , не параллельной  $\mathcal{E}$  и не проходящей через  $\Phi$ , изображается как конечный интервал, кончающийся в точке пересечения плоскости  $\mathcal{E}$  с прямой, параллельной  $l$  и проходящей через  $\Phi$ . Эта точка называется изображением бесконечно удаленной точки прямой  $l$  (см. рис. 2).

3°. Изображения бесконечно удаленных точек параллельных прямых (не параллельных  $\mathcal{E}$ ) совпадают («параллели сходятся на бесконечности!»).

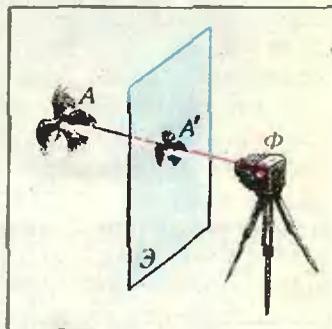


Рис. 1.

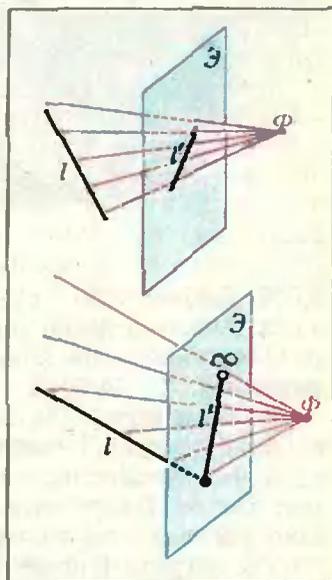


Рис. 2.

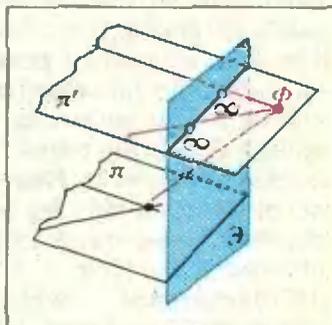


Рис. 3.

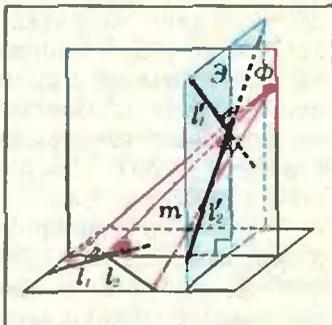


Рис. 4.

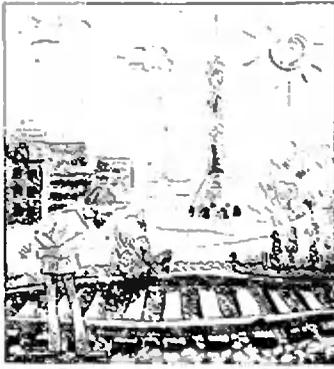
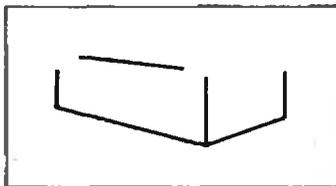


Рис. 5.

**М823.** С фотографии срисован контур дома длиной 60 м и шириной 15 м, причем более длинная стена на фотографии слева (остальные части контура на фотографии загорожены веткой дерева). Требуется: а) дорисовать контур; б) нарисовать точную карту (проекцию на горизонтальную плоскость), на которой указать контур дома и точку съемки; в) определить высоту дома и высоту, с которой производилась съемка.



$3\frac{1}{2}^\circ$ . Изображения параллельных прямых тогда и только тогда параллельны, когда эти прямые параллельны Э.

4°. Пусть  $\pi$  — плоскость, не параллельная Э. Изображения бесконечно удаленных точек прямых, параллельных  $\pi$ , заполняют на Э прямую — линию пересечения плоскости Э с плоскостью  $\pi'$ , параллельной  $\pi$  и проходящей через Ф. Эта прямая называется изображением бесконечно удаленной прямой плоскости  $\pi$  (рис. 3). Очевидно, у параллельных плоскостей эти изображения одинаковы.

Предположим теперь, что в нашем пространстве выделено «вертикальное направление» (как это имеет место в реальном пространстве) и что экран вертикален (параллелен этому направлению). Изображение бесконечно удаленной прямой горизонтальной плоскости называется горизонтом (это название соответствует общепринятому представлению о горизонте). Из сказанного видно, что изображения бесконечно удаленных точек горизонтальных прямых лежат на горизонте. Добавим к этому:

5°. *Горизонт горизонтален* (то есть перпендикулярен изображениям на экране вертикальных прямых).

К сожалению, длины и углы при нашем отображении искажаются. В нескольких случаях это искажение удается проконтролировать:

6°. Если  $I_1, I_2$  — вертикальные отрезки, находящиеся на равном расстоянии от экрана,  $i_1, i_2$  — изображения этих отрезков на экране, то  $|I_1|:|I_2| = |i_1|:|i_2|$ .

7°. Если  $I_1, I_2$  — вертикальные отрезки равной длины, находящиеся на расстояниях  $r_1, r_2$  от плоскости, параллельной Э и проходящей через Ф, а  $i_1, i_2$  — изображения этих отрезков, то  $|i_1|:|i_2| = r_2:r_1$ .

8°. Проведем через Ф вертикальную плоскость В, перпендикулярную экрану, и прямую  $m$  в В, составляющую с Э угол  $45^\circ$ . Пусть  $\Pi$  — произвольная горизонтальная плоскость, А — точка пересечения  $m$  с  $\Pi$  и  $I_1, I_2$  — произвольные прямые в  $\Pi$ , проходящие через А. Тогда угол между изображениями прямых на экране равен углу между этими прямыми (рис. 4).

Утверждения 6° и 7° очевидны, утверждение 8° следует из того, что углы, равенство которых оно утверждает, симметричны относительно плоскости, перпендикулярной  $I$  и проходящей через линию пересечения  $\Pi$  и Э.

Заметим, что изучаемая нами «фотографическая перспектива» отличается от «зрительной перспективы». Например, человек, стоящий перед прямолинейной трамвайной линией, скажет, что рельсы видятся ему сходящимися и направо, и налево; значит, он видит их не прямолинейными, что не согласуется с утверждением 1°. Другой человек, рассматривающий Останкинскую телебашню, скажет, что точка, расположенная на половине высоты башни, кажется ему более близкой к верхушке башни, чем к основанию, — это противоречит утверждению 6° (рис. 5). Причина этих различий в том, что наш глаз, в отличие от объектива фотоаппарата, не смотрит неподвижно в одну точку, а быстро пробегает по рассматриваемому предмету (например, когда мы читаем, мы пробегаем глазами каждую строчку). Поэтому зрительный образ предмета складывается в нашем сознании из бесчисленных кусочков, на которых предмет виден под разными углами. Если добавить, что мозг вносит в видимое изображение массу поправок, в том числе и на перспективу, станет ясно, что геометрия зрительного образа для нас чересчур сложна.

Теперь обратимся к задаче М823 из Задачника Кванта, составлявшей задание к этой геометрической страничке.

**Решение.** Так как изображения вертикальных отрезков на нашем чертеже параллельны, то экран вертикален (см.  $3\frac{1}{2}^\circ$ ), а горизонт горизонтален (см.  $5^\circ$ ).

а) *Дорисовка контуров дома* (рис. 6). Достраиваем четырехугольник  $ABV_1A_1$ . Продолжаем линии  $AB, A_1V_1$  до пересечения в точке К. Проводим через точку К «горизонт» — прямую, перпендикулярную  $AA_1$  и  $BB_1$ . Линию  $AC$  продолжаем до пересечения с горизонтом в точке М. Соединяем  $A_1$  с М. Через С проводим вертикальную линию до пересечения в точке  $C_1$  с  $A_1M$ . Соединяем  $V_1$

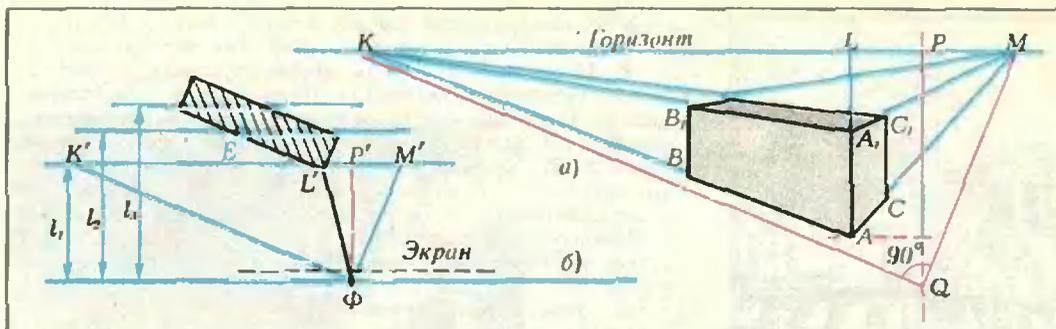


Рис. 6.

с  $M$  и  $C_1$  с  $K$ . Продолжение линии  $AA_1$  и точка  $L$  понадобятся нам в части б), красные линии — в части в).

б) На рисунке 6, б черные линии изображают требуемый план, синие — дополнительные построения; красные линии нужны для части в). Построение использует длины сторон, а также следующие пропорции (мы пользуемся обозначениями рисунков 6, а и б; прямые  $\Phi K'$ ,  $\Phi M'$  на рисунке 6, б параллельны сторонам дома):  $l_2:l_1 = AA_1:BB_1$ ;  $l_3:l_1 = AA_1:CC_1$ ;  $K'L':L'M' = KL:LM$ . (Построение по этим данным проводится без труда и многими разными способами; например, можно начать с того, что нарисовать в заданном масштабе заштрихованный прямоугольник, а затем найти на нем точку  $L$ .)

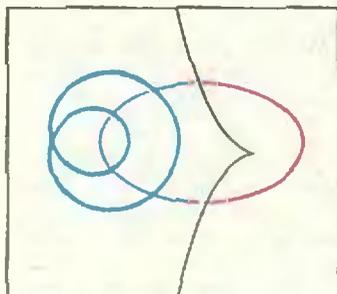
в) Проведем на рисунках 6, а и б следующие построения (они показаны на них красным цветом): проведем перпендикуляр  $\Phi P'$  к отрезку  $K'M'$ , отметим на отрезке  $KM$  точку  $P$ , такую, что  $KP:PM = K'P':P'M'$ , и построим точку  $Q$ , такую, что  $PQ \perp KM$  и  $KQ \perp QM$ . Тогда

$$AA_1:AL:PQ = h:H:l_1, \tag{1}$$

где  $h$  — высота дома и  $H$  — высота точки съемки. Поскольку  $l_1$  мы можем найти из рисунка 6, б, этого достаточно для нахождения  $h$  и  $H$  (по нашим измерениям,  $l_1 \approx 50,7$  м,  $h \approx 24,5$  м,  $H \approx 40,9$  м). Докажем пропорцию (1). В точке местности, соответствующей точке  $P'$  нашего плана, соорудим вертикальную мачту и отметим на ней две точки: первую — на уровне точки съемки, вторую — ниже первой, так, чтобы отрезок между первой и второй точками был виден из фокуса под углом  $45^\circ$  (вторая точка оказалась у нас ниже уровня земли). Длина этого отрезка равна расстоянию от фокуса до мачты, то есть  $l_1$ , а на фотографии его изображением служит отрезок  $PQ$  (в силу утверждения 8° угол  $KQM$  должен быть прямым). Теперь пропорция (1) следует из утверждения 6°.

**Задание к следующему выпуску геометрической странички**

На чертеже изображены три кривые: красным — эллипс, синим — «выпукнутая восьмерка» и черным — полукубическая парабола. Следите каждую из этих кривых на отдельный лист (можно с увеличением, но обязательно точным!), возьмите на них достаточно частые последовательности точек на примерно одинаковых расстояниях и проведите в этих точках нормали к кривым (нормаль — перпендикуляр к касательной в точке касания); не забудьте, что перпендикуляр располагается по обе стороны от прямой, к которой он восстановлен). Каждый из трех ваших чертежей будет густо разбит на прямые, идущими в различных направлениях. Вы увидите, что эти прямые не равномерно заполняют чертеж (на одном из них будет даже совершенно пустой кусок). Более того, на каждом из чертежей можно будет различить кривую, к которой прямые спускаются особенно сильно. Попытайтесь проследить ход этих кривых.



# Задачник «Кванта»

## Задачи

М846 — М850; Ф858 — Ф862

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 апреля 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М846, М847» или «Ф858». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

**М846.** Докажите, что среднее арифметическое длин сторон правильного многоугольника меньше среднего арифметического длин его диагоналей.

*В. Ф. Лев*

**М847.** Квадрат расчерчен на  $n \times n$  клеток. Двое игроков по очереди обводят по одной стороне одной клетки (дважды обводить одну и ту же сторону нельзя). Кто выиграет при правильной игре, если

а) побеждает игрок, первым построивший замкнутую линию;

б) проигрывает игрок, который вынужден первым построить замкнутую линию.

*И. Ветров, А. Когин*

**М848.** а) Постройте график функции

$$f_0(x) = ||x-1| - 2||x|-3|$$

б) На рисунке 1 изображены графики трех «кусочно-линейных» функций  $f_1, f_2, f_3$ . Запишите формулы для них в виде

$$y = kx + b + c_1|x-a_1| + \dots + c_m|x-a_m|,$$

где  $k, b, c_i, a_i$  — некоторые числа,  $m$  — количество точек излома графика ( $a_i$  — абсциссы точек излома,  $i=1, 2, \dots, m$ ).

в) Запишите в таком же виде функцию  $f_0$  из пункта а).

г)\* Некоторая функция является комбинацией линейных функций, «модуля» и операции сложения, причем знак модуля использован в ее записи  $n$  раз (в примере а)  $n=4$ ). Какое наибольшее число изломов (при каждом  $n$ ) может иметь ее график?

*П. Г. Сатъянов*

**М849.** Из цифр 1, 2, ..., 7, взятых в разном порядке, составлены семь семизначных чисел. Докажите, что сумма седьмых степеней нескольких из этих чисел не может равняться сумме седьмых степеней остальных чисел.

*Г. А. Гальперин*

**М850\*.** Через точку пересечения биссектрисы угла  $A$  треугольника  $ABC$  и отрезка, соединяющего основания двух других биссектрис, проведена прямая, параллельная стороне  $BC$ . Докажите, что длина меньшего основания об-

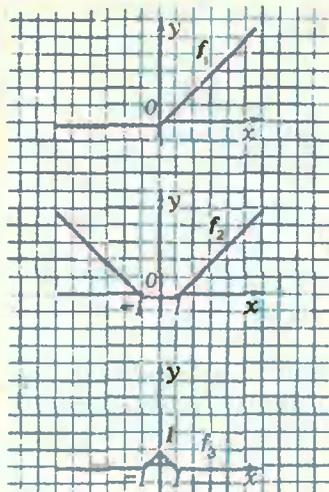


Рис. 1.

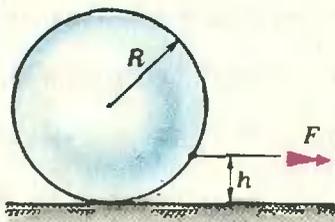


Рис. 2.

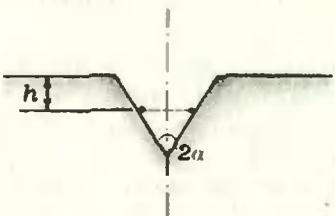


Рис. 3.

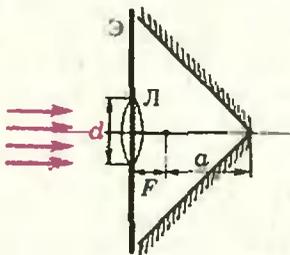


Рис. 4.

разовавшейся трапеции равна полусумме длин ее боковых сторон.

*В. И. Дубровский*

**Ф858.** После удара футболиста мяч полетел в направлении ворот, находящихся на расстоянии  $L = 32$  м, со скоростью  $v = 25$  м/с под углом  $\alpha$  к горизонту ( $\cos \alpha = 0,8$ ). Из-за бокового ветра, дующего вдоль ворот перпендикулярно скорости  $\vec{v}$ , горизонтальное смещение мяча в плоскости ворот оказалось равным  $s = 2$  м. Найти время полета мяча до плоскости ворот. Мяч не вращается; скорость ветра  $u = 10$  м/с.

*В. И. Чивизёв*

**Ф859.** Шар радиуса  $R$  и массы  $m$  движется по горизонтальной поверхности под действием постоянной силы натяжения  $\vec{F}$  легкой нерастяжимой нити. Точка закрепления нити находится на высоте  $h$  над поверхностью (рис. 2), нить все время горизонтальная, шар движется поступательно. При каком максимальном коэффициенте трения это возможно? Чему равно ускорение шара?

*Л. Г. Маркович*

**Ф860.** В конической непроводящей лунке с углом  $2\alpha$  при вершине на глубине  $h$  находятся два небольших одинаково заряженных тела, связанных нитью (рис. 3); масса каждого тела  $m$ . После пережигания нити тела начинают скользить вверх по поверхности лунки и вылетают из лунки на высоте  $H$  над ее основанием со скоростью  $v$ . Коэффициент трения тел о поверхность лунки  $\mu = a \operatorname{tg} \alpha$  ( $a < 1$ ). Определить заряды тел.

*О. Я. Савченко*

**Ф861.** В колебательном  $RLC$  контуре сопротивление невелико, так что колебания затухают в нем слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: дважды за период в моменты, когда ток в цепи максимален, катушку индуктивности быстро растягивают от длины  $l$  до длины  $l + \Delta l$ , а в моменты, когда максимален заряд на конденсаторе, катушку быстро сжимают до прежнего размера (параметрический резонанс). При каком относительном изменении длины катушки  $\Delta l/l$  колебания в контуре будут незатухающими? Индуктивность катушки считать обратно пропорциональной ее длине.

*А. И. Киркинский*

**Ф862.** Линза с фокусным расстоянием  $F$  и диаметром  $d$  вставлена в отверстие такого же диаметра в экране из светопоглощающего материала ( $d/F < 2$ ). Экран расположен так, что оптическая ось линзы совпадает с биссектральной плоскостью и перпендикулярна ребру дву-

гранного прямого угла (рис. 4). Грани угла посеребрены. Расстояние от ребра угла до фокуса линзы равно  $a$  ( $a > F$ ). Экран освещается широким пучком, параллельным оси линзы. Какая доля светового пучка, отраженного от зеркала, выйдет наружу, пройдя через линзу? На каком расстоянии от линзы эти лучи дадут изображение?

*A. A. Ланидес*

## Problems

**M846 — M850; P858 — P862**

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (\*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than April 30 th, 1984, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS)**.

**M846.** Prove that the arithmetic mean of the lengths of the sides of a regular polygon is less than the arithmetic mean of its diagonals.

*V. F. Lev*

**M847.** A square is divided into  $n \times n$  little squares. Two players in turn draw lines along one side of one square (it is forbidden to draw a line covering a line already drawn). Who wins in errorless play, if

a) the winner is the player who has first constructed a closed line;

b) the loser is the player first forced to construct a closed line.

*A. Kogan, I. Vetrov*

**M848.** a) Plot the graph of the function

$$f_0(x) = ||x-1|-2||x|-3||.$$

b) Figure Puc. 1 shows the graphs of three "piecewise-linear" functions  $f_1, f_2, f_3$ . Express these functions in the form

$$y = kx + b + c_1|x-a_1| + \dots + c_m|x-a_m|,$$

where  $k, b, c_i, a_i$  are numbers,  $m$  is the amount of break points of the graph (the  $a_i$  are the abscissas of the break points,  $i=1, 2, \dots, m$ ).

c) Express the function  $f_0$  (see a)) in the same form.

d)\* A certain function is the composition of linear functions, sums and absolute values, the absolute value sign being used  $n$  times (in a)  $n=4$ ). What is the maximal number of break points (for a given  $n$ ) that its graph may have?

*P. G. Saitanov*

**M849.** The digits 1, 2, ..., 7 taken in seven different orders, constitute seven seven-digit numbers. Prove that the sum of the seventh powers of some of these numbers can't equal the sum of seventh powers of the others.

*G. A. Galperin*

**M850\*.** A line parallel to the side  $BC$  of triangle  $ABC$  is drawn through the intersection point of the bisector of angle  $A$  with the segment joining the points where the other two bisectors intersect the opposite sides. Prove that the length of the lesser base of the trapezium thus obtained equals the half sum of its two lateral sides.

*V. N. Dubrovsky*

**P858.** A football is kicked towards the goal from a distance of  $L=32$  m with velocity  $v=25$  m/s at an angle  $\alpha$  to the horizon ( $\cos \alpha=0.8$ ). Due to a side wind, blowing along the goal perpendicularly to  $\vec{v}$ , the horizontal displacement of the ball in the goal's plane is  $s=2$  m. Find the ball's time of flight to this plane. The ball does not spin; the wind velocity is  $u=10$  m/s.

*V. I. Chisolev*

**P859.** A ball of radius  $R$  and mass  $m$  moves on a horizontal surface under a constant force  $\vec{F}$  exerted by a light unstretchable string. The string is attached to the ball at a point whose height above the surface is constantly equal to  $h$ , the string is constantly horizontal, the ball moves rectilinearly without spinning (see figure Рис. 2). For what maximal friction coefficient is this possible? What is the ball's acceleration?

*L. G. Markovitch*

**P860.** A cone-shaped receptacle (with vertex angle  $2\alpha$ ) contains two identically charged small bodies of mass  $m$  tied by a string at depth  $h$  (see figure Рис. 3). After the string is burned through, the bodies begin to slide upward along the surface of the receptacle and at the height  $H$  above the vertex fly out with velocity  $v$ . The friction coefficient of the bodies on the receptacle's surface is  $\mu = a \tan \alpha$  ( $a < 1$ ). Determine the bodies' charges.

*O. Ya. Savchenko*

**P861.** The oscillating circuit  $RLC$  has a weak resistance so that the oscillations decrease slowly. In order to obtain non-decreasing oscillations, the following is done: twice during each period, when the current in the circuit is maximal in absolute value, the inductivity coil is rapidly stretched from length  $l$  to length  $l + \Delta l$  and then, when the current is minimal, rapidly contracted to the original length (parametric resonance). For what relative change in the length of the coil  $\Delta l/l$  will the oscillations be non-decreasing? The inductivity of the coil is assumed inversely proportional to its length.

*A. I. Kirkinisky*

**P862.** A lens of focal distance  $F$  and diameter  $D$  is put into an aperture of the same diameter in a screen made of light-absorbing material ( $D/F < 2$ ). The screen is placed so that the lens's optical axis is contained in the bissector plane of a right dihedral angle formed by two silver-covered half-planes and is perpendicular to its edge (see figure Рис. 4). The distance from the lens's focus point to the angle's edge is  $a$  ( $a > F$ ). A wide light beam, parallel to the lens's axis, falls on the screen. What part of the beam will come back through the lens? At what distance from the lens will the returning beam produce an image?

*A. A. Lapides*

## Решения задач

### M831 — M835; Ф842 — Ф846

**M831.** Пусть  $P$  и  $Q$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ ,  $M$  и  $N$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Докажите, что если прямые  $MN$  и  $PQ$  перпендикулярны, то  $|BC| = |AD|$ .

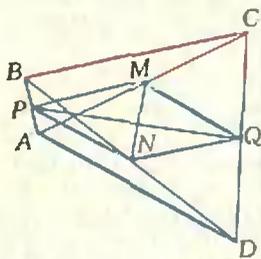
Первое решение. Отрезки  $PM$  и  $NQ$  — средние линии треугольников  $ABC$  и  $DBC$  (см. рисунок), поэтому  $|PM| = |NQ| = \frac{1}{2} |BC|$ . Аналогично,  $|PN| = |MQ| = \frac{1}{2} |AD|$ . Следовательно,  $PMQN$  — параллелограмм, а поскольку его диагонали перпендикулярны, это ромб. Таким образом  $|BC| = 2|PM| = 2|PN| = |AD|$ .

Второе решение. Выразим векторы  $\vec{PQ}$  и  $\vec{MN}$  через  $\vec{BC}$  и  $\vec{AD}$ :

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \vec{PN} + \vec{NQ} = \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{BC}, \\ \vec{MN} &= \vec{MQ} + \vec{QN} = \frac{1}{2} \vec{AD} - \frac{1}{2} \vec{BC}\end{aligned}\quad (1)$$

и перемножим скалярно левые и правые части этих равенств:

$$\vec{PQ} \cdot \vec{MN} = \frac{1}{4} (\vec{AD} + \vec{BC}) (\vec{AD} - \vec{BC}) = \frac{1}{4} (|\vec{AD}|^2 - |\vec{BC}|^2).$$



Из этого соотношения видно, что  $|AD| = |BC|$  тогда и только тогда, когда  $\vec{PQ} \cdot \vec{MN} = 0$ , то есть отрезки  $PQ$  и  $MN$  перпендикулярны (или вырождаются).

Оба решения без изменений проходят для любой четверки точек  $A, B, C, D$  на плоскости или в пространстве. В частности, справедливы, например, такие утверждения: если у четырехугольника *средние линии перпендикулярны*, то его диагонали равны; если три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, попарно перпендикулярны, то каждое его ребро равно противоположному (о таких — «равногранных» — тетраэдрах рассказывалось в статье В. Э. Матисена в «Кванте» № 7 за 1983 г.). Из приведенных решений также видно, что в условиях задачи прямые  $AD$  и  $BC$  образуют равные углы с  $PQ$  (и с  $MN$ ).

В. В. Прасолов,  
В. И. Дубровский

**М832.** а) Докажите, что для любого натурального  $n \geq 6$  квадрат можно разрезать на  $n$  квадратов (среди которых могут быть и квадраты одинакового размера).

б) Докажите, что для любого натурального  $n \geq 100$  куб можно разрезать на  $n$  кубов.

а) Если квадрат разрезан на  $n$  квадратов, то разрезав любой из них на 4 равных квадрата, мы получим разрезание исходного на  $n+3$  квадрата. Поэтому достаточно придумать разрезания для  $n=6$  (что дает все  $n=3k, k=2, 3, \dots$ ), для  $n=7$  (что дает все  $n=3k+1$ ) и для  $n=8$  (что дает все  $n=3k+2$ ). Эти разрезания показаны на рисунке 1.

б) Идея решения такая же, как в пункте а). Разрезав любой из кубов, составляющих исходный куб, на  $m$  равных кубов, мы увеличим общее число частей

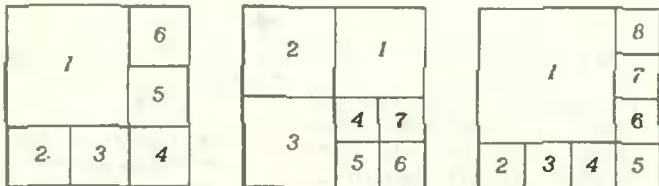


Рис. 1.

на  $m-1$ . Нам понадобятся три основных способа разрезания: для  $m=8$  (по схеме  $2 \times 2 \times 2$ ), для  $m=20 = 3^3 - 2^3 + 1$  (8 кубов из 27, образующих куб  $3 \times 3 \times 3$ , заменяются на один размером  $2 \times 2 \times 2$ ; рис. 2) и для  $m=38 = 4^3 - 3^3 + 1$  (27 кубов в разрезании  $4 \times 4 \times 4$  заменяются на один размером  $3 \times 3 \times 3$ ; рис. 3). Комбинируя эти разрезания по указанному принципу, мы получим, что куб можно разрезать на  $n$  кубов для

$$n = 1 + 7k, (1 + 19) + 7k, (1 + 2 \cdot 19) + 7k, (1 + 3 \cdot 19) + 7k, (1 + 4 \cdot 19) + 7k, (1 + 37) + 7k, (1 + 2 \cdot 37) + 7k (k=0, 1, 2, \dots).$$

А так как первые слагаемые в этих выражениях — 1, 20, 39, 58, 77, 38 и 75 — меньше 100 и дают при делении на 7 все возможные остатки (соответственно, 1, 6, 4, 2, 0, 3 и 5), среди выписанных чисел содержатся все числа  $n, n \geq 100$ . В действительности, как легко проверить, среди этих чисел содержатся все числа, большие 70. Подумайте, можно ли еще уменьшить эту границу.

В. А. Лу

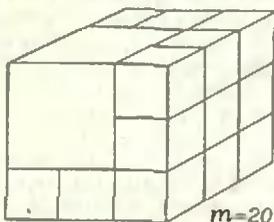


Рис. 2.

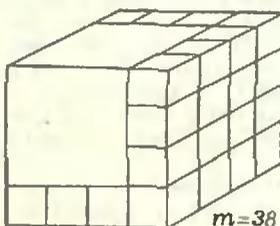


Рис. 3.

**М833\*.** Последовательность  $x_n$  задается условиями:

$$x_1 = 2; x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1-2x_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Прежде всего докажем индукцией по  $n$ , что  $x_n = \text{tg } n\alpha$ , где  $\alpha = \text{arctg } 2$ . При  $n=1$  это верно по условию. Пусть генератор  $x_n = \text{tg } n\alpha$ ; тогда

$$x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1-2x_n} = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } n\alpha}{1 - \text{tg } \alpha \text{tg } n\alpha} = \text{tg } (n+1)\alpha,$$

Докажите, что

- а)  $x_n \neq 0$  (при всех  $n$ );  
 б) Эта последовательность неперiodическая.

что и требовалось. (Это соотношение поясняет и происхождение задачи: она связана с элементарным доказательством иррациональности чисел вида  $\lg r$ , где  $r$  — произвольное рациональное число, не кратное  $1/4$ .)

- а) Заметим, что при любом  $m$

$$x_{2m} = \lg 2ma = \frac{2 \lg ma}{1 - \lg^2 ma} = \frac{2x_m}{1 - x_m^2}. \quad (*)$$

Теперь можно доказывать утверждение а) от противного. Если  $x_n = 0$  и  $n = 2m$ , то из (\*) следует, что  $x_m = 0$ . Если  $n = 2^k(2s+1)$ , где  $k$  и  $s$  — целые неотрицательные числа, то повторяя это рассуждение  $k$  раз, получим, что  $x_{2s+1} = 0$ . Отсюда  $(2+x_{2s})/(1-2x_{2s}) = 0$  или  $x_{2s} = -2$ , то есть в силу (\*)  $2x_s/(1-x_s^2) = -2$ . Оба корня этого уравнения иррациональны (они равны  $(1 \pm \sqrt{5})/2$ ), но все  $x_s$  должны быть рациональными, так как числа  $(2+x)/(1-2x)/(1-2x)$  при любом рациональном  $x$  и число  $x_1 = 2$  рациональны. Противоречие.

Попутно отметим, что  $x_n \neq 1/2$  ни при каком  $n$  (это доказывается вполне аналогично), поэтому последовательность определена при всех  $n$ .

б) Докажем, что последовательность  $x_n$  не только неперiodична, но и вообще принимает каждое свое значение только один раз. Допустим, что это не так, и  $x_{n+m} = x_n = 0$  при некоторых  $n$  и  $m$ ,  $n, m \geq 1$ . Поскольку  $x_n = \lg na$ , получим, что

$$\lg(n+m)a - \lg na = \frac{\sin ma}{\cos(n+m)a \cos na} = 0.$$

Следовательно,  $x_m = \lg ma = 0$ , а это в силу а) невозможно.

В. Э. Матисев

**М834.** Оросительная установка, расположенная в точке  $O$ , обслуживает круг радиуса 100 м с центром  $O$ . Такими установками нужно полностью орошать квадратное поле  $1 \text{ км} \times 1 \text{ км}$ .

а) Бригадир предложил расположить 64 установки в вершинах квадратной сетки со сторонами, параллельными краям поля (рис. 1). В каких пределах может меняться сторона  $a$  квадратной сетки?

б) Восьмиклассник Витя утверждает, что можно оросить поле с помощью лишь 46 таких установок. Прав ли Витя?

а) Ответ: длина стороны  $a$  квадратов сетки (в метрах) должна быть заключена в пределах

$$122,7 \approx 100(10 - \sqrt{2})/7 < a < 100\sqrt{2} \approx 141,4.$$

Углы поля должны отстоять не более, чем на 100 м от ближайших к ним установок. Расстояние между противоположными углами поля равно  $100\sqrt{2}$ , а между противоположными углами установками —  $7a\sqrt{2}$  (рис. 1), поэтому должно выполняться условие

$$100\sqrt{2} < 100 + 7\sqrt{2}a + 100,$$

откуда

$$a > 100(10 - \sqrt{2})/7 \approx 122,65.$$

Центр каждого квадрата сетки должен отстоять от его вершин также не более, чем на 100 м, поэтому должно выполняться условие  $a/\sqrt{2} < 100$ , откуда  $a < 100\sqrt{2} \approx 141,42$ . Заметим, что даже при максимальном значении  $a = 100\sqrt{2}$  все установки (при их симметричном относительно центра расположении на поле) уместятся в квадрате  $1000 \times 1000$ , поскольку  $7\sqrt{2} < 10$ .

Если оба условия на  $a$  выполнены, то, как легко видеть, все поле будет орошено; удобно нарисовать вокруг каждой установки  $O$  квадрат с центром в  $O$  и диагональю 200 метров (со стороной  $100\sqrt{2} > a$ ), — такие квадраты покрывают все поле, а каждая установка поливает свой квадрат.

б) Витя предложил расставлять установки не по квадратной, а по треугольной сетке; на рисунке 2 показано, как разместить ровно  $46 = 4 \cdot 7 + 3 \cdot 6$  установок, орошающих все поле; на этом рисунке  $R = 100$ ,  $b = 100\sqrt{3} \approx 173,2$  м. Пользуясь той же идеей, можно расставить даже  $45 = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 7$  установок (рис. 3).

На этих рисунках ряды по 6 и 7 установок отстоят друг от друга на  $3R/2$ , причем крайние (верхний и нижний) ряды отстоят от краев поля всего на  $R/2$ , а этого как раз достаточно, чтобы все точки этих краев были политы; удобно, как это сделано на рисунке 3, нарисовать шести-

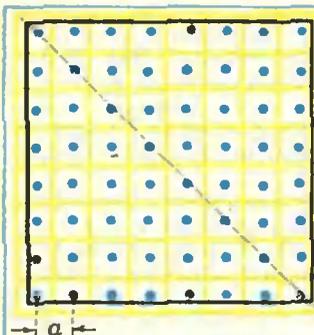


Рис. 1.

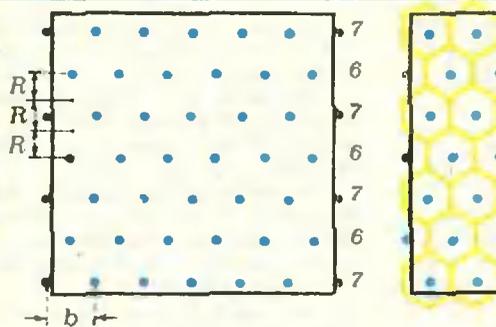


Рис. 2.

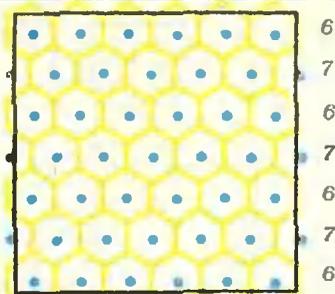


Рис. 3.

угольники со стороны  $R$ , каждый из которых подшивается своей установкой.

В горизонтальном направлении ряд из 6 установок обслуживает расстояние  $6b = 600\sqrt{3} \approx 1039,23 > 1000$ , так что и в этом направлении все обетонит благополучно. Правда, в рядах из 7 установок на рисунках 2 и 3 крайние выступят за границы поля, но это легко исправить — можно просто сдвинуть каждую из них на край поля или равномерно уменьшить все расстояния по горизонтали.

С различными проявлениями «оптимальности» шестиугольной решетки в математических задачах и физических явлениях можно познакомиться, например, в книге Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп» из серии Библиотечка «Квант» (М., 1981). Привнесите нам, встретились ли вам интересные ее использования в живой природе (не считая, конечно, всем известных пчелиных сот), в технике.

Н. Б. Васильев

**MS35\*** На однокруговой шахматный турнир приехали  $n$  шахматистов из страны  $A$  и  $n$  шахматистов из страны  $B$ . Оказалось, что как бы ни разбить шахматистов на пары (чтобы друг с другом играли шахматисты разных стран), найдется хотя бы одна пара шахматистов, которые уже встречались ранее друг с другом. Докажите, что можно выбрать  $a$  шахматистов из страны  $A$  и  $b$  шахматистов из страны  $B$  так, что каждый из выбранных  $a$  шахматистов встретался с каждым из выбранных  $b$  шахматистов, а  $a + b > n$ .

Доказательство проведем индукцией по  $n$ .

При  $n = 1$  утверждение задачи очевидно ( $a = b = n = 1$ ). Теперь надо доказать его для  $n = k$ , предположив, что оно верно для всех  $n < k$ .

В случае, когда каждый из  $k$  шахматистов, прибывших из страны  $A$ , встречался ранее с каждым, прибывшим из  $B$ , доказывать нечего ( $a = b = k$ ). Поэтому будем считать, что какие-то два шахматиста —  $\alpha$  из  $A$  и  $\beta$  из  $B$  — друг с другом не встречались. Тогда остальные шахматисты удовлетворяют условию задачи для  $n = k - 1$ . (Если составить из них пары и присоединить к ним  $(\alpha, \beta)$ , то по условию в одну из этих пар, но заведомо не в  $(\alpha, \beta)$ , попадут встречавшиеся шахматисты.) По предположению индукции можно образовать группу  $A$  из  $a_1$  шахматистов страны  $A$  и группу  $B$  из  $b_1$  шахматистов страны  $B$  так, что каждый шахматист группы  $A$  встречался с каждым из  $B$  и  $a_1 + b_1 > k - 1$ . Если окажется, что  $a_1 + b_1 > k$ , — все в порядке ( $a = a_1$ ,  $b = b_1$ ). Остается рассмотреть случай  $a_1 + b_1 = k$ ; рассуждения иллюстрирует рисунок из полях.

Пусть  $A$  — группа из  $k - a_1 = b_1$  шахматистов из  $A$ , не вошедших в группу  $A$ ,  $B$  — группа шахматистов из  $B$ , не вошедших в  $B$ . Устроим два новых турнира — для групп  $A$  и  $B$  ( $n = a_1$ ) и  $A$  и  $B$  ( $n = b_1$ ). Один из этих турниров (для определенности, с участием групп  $A$  и  $B$ ) удовлетворяет условию задачи. (В противном случае можно так составить пары из шахматистов групп  $A$  и  $B$  и, независимо, групп  $A$  и  $B$ , что ни в одну из этих пар не попадут встречавшиеся шахматисты, а это противоречит условию для «общего» турнира.) По предположению индукции в группе  $A$  можно найти  $a_2$  шахматистов, каждый из которых встречался с каждым из каких-то  $b_2$  шахматистов группы  $B$ , причем  $a_2 + b_2 > a_1$ . Кроме того, по выбору групп  $A$  и  $B$  каждый из этих  $a = a_2$  шахматистов встречался с каждым из  $b_1$  шахматистов группы  $B$ . Таким образом мы можем выбрать  $a = a_2$  шахматистов из страны  $A$  и  $b = b_1 + b_2$

B	1	1	1	1	0	1
	1	1	1	1	1	0
b <sub>2</sub>	0	0	1	1	0	1
	1	0	1	1	0	0
B̄	0	1	1	1	1	1
	1	0	0	0	0	0
		A	a <sub>2</sub>		Ā	

В этой «таблице встреч» каждый столбец отвечает шахматисту, прибывшему из страны А, а строка — шахматисту из В (здесь  $n=6$ ). Единицы ставятся на пересечении строк и столбцов, отвечающих встречавшимся ранее шахматистам, на остальных местах — нули. Желтым цветом отмечены клетки, отвечающие парам выбранных шахматистов, красным — одна из максимальных систем независимых нулей.

из страны В, каждый из которых встречался со всеми выбранными шахматистами другой страны. При этом  $a+b=a_2+b_2+b_1 > a_1+b_1=k$ , что и требовалось.

Приведенный нами рисунок также поясняет, как свести задачу к следующей теореме Д. Кёнига о матрицах \*) (то есть прямоугольных таблицах), составленных из нулей и единиц:

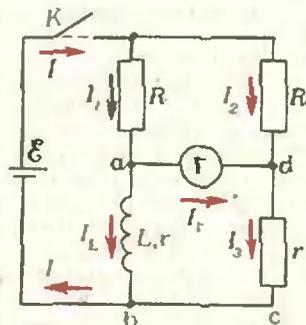
*Назовем линией любую строку или столбец таблицы; два числа в таблице, не лежащие на одной и той же линии, назовем независимыми. Тогда минимальное число линий, содержащих все нули, равно максимальному числу независимых нулей.*

В нашем случае число строк и столбцов в матрице («таблице встреч» — см. рис.) одинаково (и равно  $n$ ); условие задачи означает, что в любом наборе независимых чисел есть единица, то есть максимальное число независимых нулей меньше  $n$ . По теореме Кёнига можно указать меньше  $n$  линий, содержащих все нули. Тогда на пересечениях остальных линий —  $a$  столбцов и  $b$  строк, где  $a+b > n$ , — стоят единицы, а это, по существу, и утверждается в задаче.

Еще одно эквивалентное утверждение, часто используемое в олимпиадных задачах, — теорема Холла о различных представителях (или «теорема о сватовстве»): *пусть каждый из  $n$  юношей знаком с некоторыми из  $n$  девушек, причем для любых  $k$  юношей ( $k=1, 2, \dots, n$ ) имеется по крайней мере  $k$  девушек, знакомых хотя бы с одним из них; тогда их можно разбить на пары так, что в каждой паре будут знакомые девушка и юноша.* Эту теорему в разных формулировках и с несколькими доказательствами можно найти в статьях М. И. Башмакова («Квант», 1970, № 4, с. 14) и В. Н. Вагутена («Квант», 1974, № 11, с. 23).

Л. Д. Менихес

Ф842. В схеме, изображенной на рисунке, в некоторый момент замыкают ключ К. Найти установившееся значение тока, текущего через катушку с индуктивностью  $L$  и активным сопротивлением  $r$ . Какой заряд протечет через гальванометр  $\Gamma$  после замыкания ключа? Параметры элементов, указанные на рисунке, считать заданными. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением гальванометра пренебречь.



В установившемся режиме, когда в схеме будет течь постоянный ток, а катушка индуктивности будет обладать только активным сопротивлением  $r$ , схема будет симметричной. В этом случае ток через гальванометр равен нулю, а токи в правой и левой частях разветвленного участка схемы будут равны друг другу и равны  $\mathcal{E}/(R+r)$ . Следовательно, в установившемся режиме ток через катушку будет равен:

$$I_L(\infty) = \mathcal{E}/(R+r).$$

Пусть теперь в некоторый произвольный момент времени через элементы схемы текут такие токи, как это показано на рисунке. Поскольку сопротивление гальванометра равно нулю, при любых конечных значениях тока через гальванометр падение напряжения на нем будет также равно нулю, и следовательно, в любой момент времени токи  $I_1$  и  $I_2$  будут равны.

Согласно закону сохранения заряда,

$$I_1 = I_7 + I_L \tag{1}$$

$$I = I_1 + I_2 = 2I_1 = I_L + I_3 \tag{2}$$

Согласно закону Ома для контура  $abcd$ ,

$$I_L r - I_3 r = -L \frac{dI_L}{dt} \tag{3}$$

Из уравнений (3) и (2) получаем:

$$I_1 - I_L = \frac{L}{2r} \frac{dI_L}{dt}$$

Используя уравнение (1), найдем связь тока  $I_7$  через гальванометр с током  $I_L$  через катушку индуктивности:

\*См., например, Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

$$I_{\Gamma} = \frac{L}{2r} \frac{dI_L}{dt}$$

Заряд, протекший через гальванометр, очевидно, будет равен

$$Q = \int_0^{\infty} I_{\Gamma} dt = \int_0^{\infty} \frac{L}{2r} \frac{dI_L}{dt} dt = \frac{L}{2r} \int_0^{\infty} dI_L = \\ = \frac{L}{2r} [I_L(\infty) - I_L(0)] = \frac{L\mathcal{E}}{2r(R+r)}$$

Здесь  $I_L(0)$  — ток через катушку в начальный момент времени. До замыкания ключа ток  $I_L$  был равен нулю; следовательно, и после замыкания он также будет равен нулю:  $I_L(\infty) = 0$ .

В. В. Можаяев

**Ф843.** Колесо радиуса  $R$ , расположенное на высоте  $H$  над землей, вращается с угловой скоростью  $\omega$ . С колеса срывается капля и падает на землю в точке  $B$  под центром колеса (рис. 1). Найти время падения капли и точку  $A$  колеса, в которой капля отрывается.

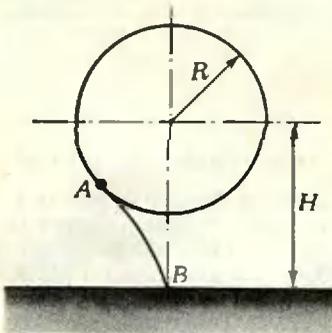


Рис. 1

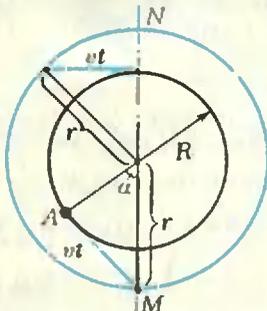


Рис. 2

**Ф844.** В сосуд, наполненный смесью жидкостей, плотность которой изменяется с глубиной по закону  $\rho = \rho_0 + ah$ , опускают тело массы  $m$  и объема  $V$ . Тело целиком погружается в жидкость. На

Чтобы найти время падения капли, представим себе, что одновременно с каждой точки колеса срываются капли, и рассмотрим движение этих капель в системе отсчета, падающей с ускорением  $\vec{g}$ . В этой системе капли движутся по инерции со скоростью  $v = \omega R$ . Через время  $t$  они будут находиться на окружности радиуса

$$r = \sqrt{R^2 + v^2 t^2}$$

(рис. 2). Чтобы найти положение капель в неподвижной системе отсчета, связанной с землей, эту окружность надо опустить на расстояние

$$s = gt^2/2.$$

Ясно, что в тот момент, когда  $r + s = H$ , капля долетит до точки  $B$  на земле. Из условия

$$\sqrt{R^2 + v^2 t^2} + \frac{gt^2}{2} = H$$

находим:

$$t_{\text{пад}}^2 = \frac{2}{g^2} \left( (v^2 + gH) \pm \sqrt{v^4 + 2gHv^2 + g^2 R^2} \right).$$

В этой формуле нас устраивает только знак «минус», так как второй корень соответствует приходу в точку  $B$  той капли, которая находится в точке  $N$  окружности (см. рис. 2), а эта капля задерживается колесом. Подставляя  $v = \omega R$ , находим:

$$t_{\text{пад}} = \frac{\sqrt{2(\omega^2 R^2 + gH - R\sqrt{\omega^4 R^2 + 2gH\omega^2 + g^2 R^2})}}{g} \quad (*)$$

Зная время падения капли до точки  $B$ , легко найти точку ее отрыва от колеса. Действительно, в падающей системе отсчета эта капля через время  $t = t_{\text{пад}}$  после отрыва должна оказаться в точке  $M$  окружности (см. рис. 2). Следовательно, она отрывается в точке  $A$  такой, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{vt_{\text{пад}}}{R} = \omega t_{\text{пад}},$$

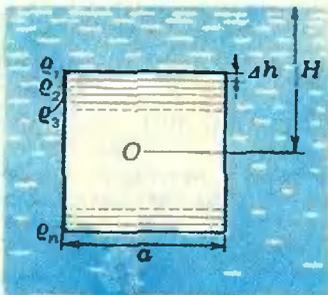
где  $t_{\text{пад}}$  определяется формулой (\*).

А. Н. Григоренко

Пусть в состоянии равновесия центр тяжести куба, погруженного в смесь, находится на глубине  $H$ . Сила тяжести, действующая на куб, уравновешивается выталкивающей силой, равной численно весу смеси в объеме куба.

Чтобы найти этот вес, разобьем мысленно жидкость в объеме куба на  $n$  тонких горизонтальных слоев

какой глубине оно окажется, если имеет форму куба? шара?



толщины  $M_i$  таких, что в пределах каждого слоя плотность жидкости можно считать постоянной (см. рисунок). Тогда вес жидкости в объеме куба равен

$$P = gS \cdot \Delta h (\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n)$$

( $S$  — площадь грани куба). Поскольку плотность смеси меняется с глубиной по линейному закону, сумма, стоящая в скобках, равна  $(\rho_1 + \rho_n)n/2$ . Если  $\rho_1$  — плотность у верхней грани куба, а  $\rho_n$  — у нижней, то

$$\rho_1 = \rho_0 + \alpha \left( H - \frac{a}{2} \right), \quad \rho_n = \rho_0 + \alpha \left( H + \frac{a}{2} \right),$$

где  $a$  — длина ребра куба. Таким образом,

$$P = gS \cdot \Delta h \cdot n \frac{\rho_1 + \rho_n}{2} = gSa(\rho_0 + \alpha H) = gV(\rho_0 + \alpha H).$$

Теперь из условия равновесия куба —

$$mg = gV(\rho_0 + \alpha H)$$

— найдем глубину его погружения:

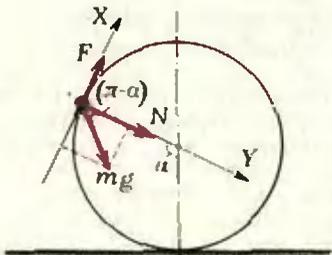
$$H = \frac{m - \rho_0 V}{\alpha V}.$$

Аналогичным образом можно найти глубину погружения шара. Сделай это самостоятельно, вы убедишься, что шар погружается в смесь на ту же глубину, что и куб.

Из приведенного решения понятно, что если тело массы  $m$  и объема  $V$  имеет такую форму, что площади его горизонтальных сечений, взятых на одинаковом расстоянии по вертикали от некоторой точки  $O$  тела, равны, то при полном погружении тела в смесь точка  $O$  будет находиться на глубине  $H = \frac{m - \rho_0 V}{\alpha V}$ .

Л. Г. Маркина

Ф845. Внутри камеры автомобиля радиуса  $R$  попал небольшой камешек. При какой минимальной скорости автомобиля камешек будет вращаться вместе с колесом, если коэффициент трения камешка о камеру равен  $\mu$ ?



На камешек внутри камеры действуют три силы (см. рисунок): сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила нормальной реакции  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}$ . Чтобы камешек вращался вместе с колесом, эти силы должны сообщать ему центростремительное ускорение  $v^2/R$ , где  $v$  — линейная скорость вращения колеса, равная скорости движения автомобиля (колеса вращаются без проскальзывания).

Запишем уравнение движения камешка в проекциях на оси  $X$  и  $Y$  (см. рисунок):

$$F - mg \sin(\pi - \alpha) = 0, \quad (1)$$

$$N + mg \cos(\pi - \alpha) = mv^2/R. \quad (2)$$

Из уравнения (1) находим:

$$F = mg \sin \alpha.$$

Абсолютное значение силы трения не может быть больше  $\mu N$ , и следовательно,  $N \geq F/\mu$ . Минимальному значению  $v$  соответствует, как видно из уравнения (2),  $N = \frac{F}{\mu} = \frac{m}{\mu} g \sin \alpha$ . С учетом этого получаем:

$$v_{\min}^2 = Rg \left( \frac{\sin \alpha}{\mu} - \cos \alpha \right).$$

Выражение, стоящее в скобках, минимально, когда производная функции  $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\mu} - \cos \alpha$  равна нулю, то есть

$$\frac{\cos \alpha}{\mu} + \sin \alpha = 0 \Rightarrow -\mu = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Тогда

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{-\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v_{\min} &= \sqrt{gR \left( \frac{1}{\mu \sqrt{1 + \mu^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{gR}{\mu} \sqrt{1 + \mu^2}} \end{aligned}$$

А. В. Лесин

**Ф846.** Почему мощные двигатели постоянного тока следует включать через пусковой реостат?

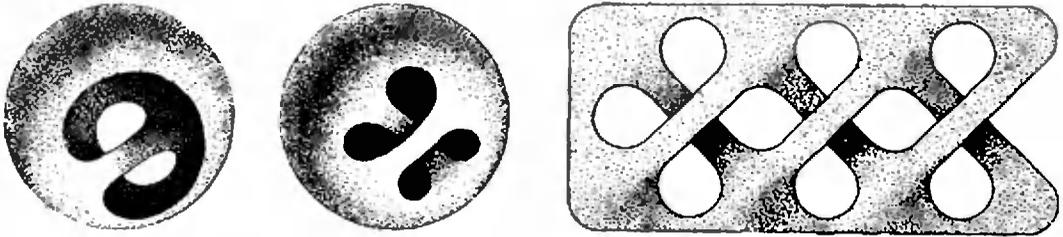
При нормальной работе двигателя ток в его обмотке равен

$$I = \frac{U - \mathcal{E}_*}{r_*}$$

где  $U$  — напряжение сети,  $\mathcal{E}_*$  — ЭДС индукции, возникающая при вращении якоря двигателя в магнитном поле,  $r_*$  — сопротивление обмотки якоря, которое невелико. Если двигатель включать прямо в сеть, без пускового реостата, то в момент пуска двигателя, когда якорь еще неподвижен и  $\mathcal{E}_* = 0$ , пусковой ток в обмотке  $I_* = U/r_*$  будет намного превышать нормальный рабочий ток. Чтобы уменьшить значение  $I_*$  и предотвратить перегрев обмотки, в цепь якоря вводят пусковой реостат, который затем выводят.

А. В. Кубышкин

Эти замысловатые поверхности, придуманные Ю. В. Котывым, являются «пленками» (см. статью «Классификация пленок» на с. 16). Определите, к какому классу каждая из них относится.



## Задачи для исследования

1. Имеется несколько гирек. Известно, что если любую из них убрать, то остальные можно разделить на две группы равной массы.

Докажите, что число гирек нечетно, если

а) массы гирек — целые числа;

б) массы гирек — любые действительные числа.

в) Из какого наименьшего числа гирек с различными целочисленными массами может состоять набор, удовлетворяющий условиям задачи?

г) Сколько гирек может входить в такой набор?

В. В. Произволов,  
Э. И. Туркевич

2. Известно, что квадрат любого целого числа при делении на 3 дает остаток 0 или 1, а при делении на 5 — 0, 1 или 4.

а) Найдите все натуральные  $k$ , такие, что остаток от деления квадрата любого целого числа на  $k$  — тоже квадрат.

б) Попробуйте найти такие  $k$ , что остаток от деления куба любого целого числа на  $k$  — тоже куб.

С. А. Голдобин

# КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

## Маленькие хитрости маленьких

### Оригинальное решение

— Лиза, реши задачку. Тебе семь лет, а твоей подружке Оле на два года меньше. Сколько лет Оле?

- Пять лет.
- Правильно. А как ты решила?
- Я вчера была у нее на дне рождения!



### Кухня погоды

В который раз мама объясняет шестилетней Марине, почему идет дождь. Сейчас привела ее на кухню:

— Вот смотри. Когда вода кипит в кастрюле, то на ее крышку садится пар, а потом он, охлаждаясь, спадает назад в кастрюлю каплями. Так и дождь.

Девочка просияла:

— Наконец-то я поняла, почему идет дождь! Его люди варят!

### Заниматься надо!

Хороший солнечный день. Все дети играют во дворе, только одна трехлетняя Лена рассматривает картинки в книжке.

— Доченька, иди погуляй.

— Нет, заниматься надо! — строго ответила девочка.

### Съедобные ...трубы

— Папа, что это за машина? — спросил четырехлетний Дима.

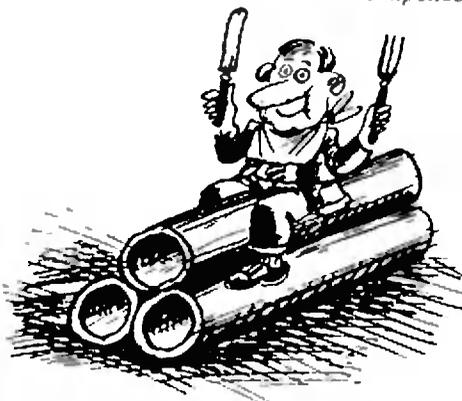
— Сварочный аппарат.

— А что он делает?

— Трубы варит.

— А когда он их сварит, кто их будет есть?

В. А. Миронов

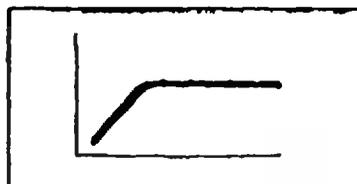


## Как важно быть точным

На семинаре по ядерной физике Э. Ферми, пояснив зависимость эффективного сечения рассеяния нейтронов от их энергии, изобразил на доске следующий график:



Затем задумался, извлек из кармана маленькую логарифмическую линейку, быстро произвел какие-то вычисления и со словами «немного пониже» стер старую кривую и провел новую.



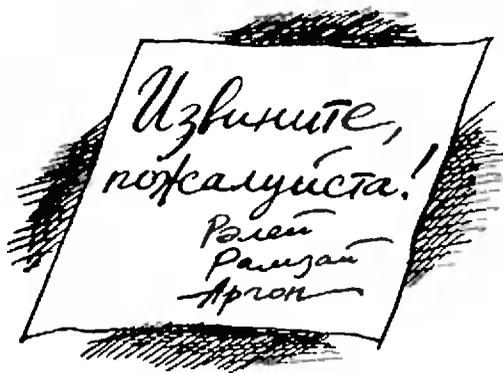
После минутного молчания аудитория разразилась смехом (ведь никаких численных значений ни на том, ни на другом графике представлено не было). Ферми сначала не понял, в чем дело, но затем понимающе улыбнулся и продолжил лекцию.

(По материалам журнала «American journal of physics», 1976, т. 44, № 3, р. 235.)

## Извините за аргон

Когда в 1895 году знаменитые английские ученые Рэлей и Рамзай открыли первый инертный газ — аргон (за это открытие позднее им была присуждена Нобелевская премия) и ввели «пудевую» колонку для благородных газов в таблицу Менделеева, большинство ученых отнеслись к этому достижению скептически. Чрезвычайно терпеливый и корректный Рэлей ответил: «Без сомнения, результат очень странен. В самом деле, я вижу некоторые признаки того, что аномальные свойства аргона преподносятся как своего рода обвинения против нас. Но мы работали очень добросовестно. Факты были санишком за нас, и все, что мы можем сделать сейчас, это извиниться за самих себя и за газ».

(По материалам журнала «Успехи физических наук», 1966, т. 88, № 1, стр. 149.)



Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1983 году.

## Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

### Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} > \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$$

2. Решите уравнение

$$\log_2 \left( \cos 2x + \cos \frac{x}{2} \right) + \log_{\frac{1}{2}} \left( \sin x + \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

3. В треугольнике  $ABC$  с периметром  $2p$  длина стороны  $AC$  равна  $a$  и величина острого угла  $ABC$  равна  $\alpha$ . Вписанная в треугольник  $ABC$  окружность с центром  $O$  касается стороны  $BC$  в точке  $K$ . Найдите площадь треугольника  $BOK$ .

4. Найдите все значения  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} - 5 \right| - \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} - 7 \right| + \\ + \left| 24\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} + 13 \right| = \\ = 11 - \sqrt{\sin \frac{\pi(x-2y-1)}{3}} \\ 2(x^2 + (y-a)^2) - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y-a)^2} - \frac{3}{4} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение

5. Дана треугольная пирамида  $ABCD$ . Точка  $F$  взята на ребре  $AD$ , а точка  $N$  взята на ребре  $DB$  так, что  $|DN| : |NB| = 1 : 2$ . Через точки  $F$ ,  $N$  и точку пересечения медиан треугольника  $ABC$  проведена плоскость, пересекающая ребро  $CB$  в точке  $H$ . Через точку  $H$  проведена плоскость, параллельная плоскости  $(ADB)$  и пересекающая ребра  $CA$  и  $CD$  в точках  $L$  и  $K$  соответственно. Известно, что  $|CH| : |HB| = (|AF| : |FD|)^2$  и что радиус шара, вписанного в пирамиду  $CHLK$ , равен  $R$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к сумме площадей всех граней пирамиды  $ABCD$ , если длина перпендикуляра, опущенного из вершины  $D$  на плоскость  $ABC$ , равна  $h$ .

### Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{16-x^2} \cdot \log_2(x^2-5x+6).$$

2. Найдите все решения уравнения\*)

$$\frac{1+2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x \cdot \cos x - 1}$$

3. Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости неравенством

$$2|x| + |y+2x+1| < 5.$$

4. Угол при основании равнобедренного треугольника равен  $\pi/6$ . Построен круг радиуса  $2/\sqrt{3}$  с центром в вершине треугольника. Определите отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна  $\sqrt{7}$ .

5. При всех  $a$  решите уравнение

$$(x-3)(x+1) + 3(x-3) \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2)$$

и определите, при каких  $a$  оно имеет ровно одно решение.

6. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{2-|y|} \times \times (5\sin^2 x - 6\sin x \cdot \cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt{33}) = = \arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5}{4}\pi^2.$$

### Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x.$$

2. Решите уравнение

$$|5x^2 - 3| = 2.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{3}{2} \log_4 \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2} \log_2 x > 1.$$

4. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7, а в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найдите это двузначное число.

5. Прямая, параллельная гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ , пересекает катет  $AC$  в точке  $D$ , а катет  $BC$  — в точке  $E$ , причем длина отрезка  $DE$  равна 2, а длина отрезка  $BE$  равна 1. На гипотенузе взята точка  $F$  так, что длина отрезка  $BF$  равна 1. Известно также, что величина угла  $FCB$  равна  $\alpha$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

6. Дан трехгранный угол с вершиной  $O$ , у которого величина каждого из плоских углов равна  $\varphi$ . Плоскость  $\alpha$  пересекает ребра этого

\*) Слова «решите уравнение», «найдите все решения уравнения», «найдите все действительные решения уравнения» (варианты 8, 9) и «найдите все  $x$ , удовлетворяющие уравнению» (варианты 10, 11) означают одно и то же; аналогично — для систем. (Прим. ред.)

треугольного угла в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ , причем отрезки  $OA$  и  $OB$  равной длины, а отрезок  $OC$  короче отрезка  $OA$ . Известно, что величина двугранного угла между плоскостью  $\alpha$  и гранью  $OAB$  равна  $\beta$ . Два шара расположены по разные стороны от плоскости  $\alpha$  так, что каждый шар касается всех граней трехгранного угла и плоскости  $\alpha$ . Найдите:

- 1) величину угла между прямой, проходящей через центры шаров, и плоскостью грани  $OAB$ ,
- 2) отношение радиусов указанных шаров.

#### В а р и а н т 4 (химический факультет)

1. Найдите все решения уравнения

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4 \sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x).$$

2. Решите неравенство

$$(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1) \log_5\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{1}{x}(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1) < 0.$$

3. Треугольная призма  $ABCA'B'C'$  с нижним основанием  $ABC$  и боковыми ребрами  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  рассечена плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , где точка  $E$  является серединой ребра  $AA'$ , а точка  $F$  лежит на ребре  $BB'$ , причем  $|BF|:|FB'| = 1:2$ . Найдите объем части призмы  $ABCA'B'C'$ , заключенной между секущей плоскостью и нижним основанием этой призмы, если известно, что объем призмы равен  $V$ .

4. Найдите координаты точки, лежащей на графике функции  $y = 1 + \cos x$  при  $0 < x < \pi$  и наименее удаленной от прямой  $x\sqrt{3} + 2y + 4 = 0$ .

5. Значениями переменных  $x$ ,  $y$  являются действительные числа. Найдите все целые значения  $n$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 + 24y(x+y) + 2(3n-2)x + \\ + 4(3n-2)y + 3 = 0, \\ 4(x^2 + y^2) + (4n+2)y + 2n^2 = \\ = 8xy + (4n+2)x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

имеет решение. При найденных целых значениях  $n$  найдите все решения этой системы.

#### В а р и а н т 5 (биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$4 \cos^3 x + 3\sqrt{2} \sin 2x = 8 \cos x.$$

2. Найдите все значения  $x$ , при которых производная функции

$$y(x) = 3x^3 \cdot \ln x - 36x \cdot \ln x - 7x^3 + 108x$$

равна нулю.

3. Решите неравенство

$$8 + 6|3 - \sqrt{x+5}| > x.$$

4. Площадь трапеции  $ABCD$  равна 6. Пусть  $E$  — точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции. Через точку  $E$  и точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, которая пересекает меньшее основание  $BC$  в точке  $P$ , а большее основание  $AD$  — в точке  $Q$ . Точка  $F$  лежит на отрезке  $EC$ , причем  $|EF|:|FC| = |EP|:|EQ| = 1:3$ . Найдите площадь треугольника  $EPF$ .

5. Найдите все значения  $b$ , при которых оба неравенства

$$2b \cdot \cos 2(x-y) + 8b^2 \cdot \cos(x-y) + 8b^2(b+1) + 5b < 0,$$

$$x^2 + y^2 + 1 > 2bx + 2y + b - b^2$$

выполняются при любых  $x$  и  $y$ .

#### В а р и а н т 6 (факультет почвоведения)

1. Поле разделено на три участка. За день были вспаханы половина первого участка и  $3/4$  второго участка, а третий участок, который составляет четвертую часть всего поля, был вспахан полностью. Вспаханная за день площадь поля в два раза больше площади второго участка. Какую часть площади поля составляет площадь, вспаханная за день?

2. Решите уравнение

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x = 1.$$

3. Найдите действительные  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x + 2y^{-1} = 3, \\ 4x + 4y = 32. \end{cases}$$

4. В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $K$ . Известно, что  $|BC| = 2$ ,  $|KC| = 1$ ,  $|BK| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

5. Найдите все значения  $\alpha$ , которые удовлетворяют условию  $2 < \alpha < 5$  и при которых уравнение

$$\log_2(3 - |\sin \alpha x|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$$

относительно  $x$  имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию  $2 < x < 3$ .

#### В а р и а н т 7 (географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos^2 2x - 5 \sin^2 x + 1 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2(\sqrt{x^2 - 4x} + 3) > > \log_2\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x+1} + 1}\right) + 1.$$

3. На катете  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу  $AB$  в точке  $K$ . Найдите площадь треугольника  $СКВ$ , если длина катета  $AC$  равна  $b$  и величина угла  $ABC$  равна  $\beta$ .

4. Решите систему

$$\begin{cases} 2|x^2 - 2x - 3| - \log_3 3 = 3 - x^{-1} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 < 8. \end{cases}$$

5. Каждое из ребер треугольной пирамиды  $ABCD$  имеет длину 1. Точка  $P$  на ребре  $AB$ , точка  $Q$  на ребре  $BC$  и точка  $R$  на ребре  $CD$  взяты так, что длина отрезка  $AP$  равна  $\frac{1}{2}$ , длина отрезка  $BQ$  равна  $\frac{1}{3}$  и длина отрезка  $CR$  равна  $\frac{1}{3}$ . Плоскость  $PQR$  пересекает прямую  $AD$  в точке  $S$ . Найдите величину угла между прямыми  $SP$  и  $SQ$ .

## В а р и а н т 8

(отделение геофизики геологического факультета)

1. Найдите все действительные решения уравнения

$$(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23).$$

2. В треугольнике  $ABC$  угол  $BAC$  — прямой, длины сторон  $AB$  и  $BC$  равны, соответственно, 1 и 2. Биссектриса угла  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $L$ ,  $G$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Что больше — длина  $BL$  или длина  $BG$ ?

3. Решите неравенство

$$\log_{\sin \frac{\pi}{3}}(x^2-3x+2) > 2.$$

4. Найдите все пары действительных чисел  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 3 \sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

5. Согласно расписанию, катер проходит по реке, скорость течения которой 5 км/ч, путь из  $A$  в  $D$  длиной 15 км за 1 час. При этом, выходя из пункта  $A$  в 12 часов, он прибывает в пункты  $B$  и  $C$ , отстоящие от  $A$  на расстояние 11 км и 13 км соответственно, в 12 ч 20 мин и в 12 ч 40 мин. Известно, что если бы катер двигался из  $A$  в  $D$  без остановок с постоянной скоростью  $v$  (относительно воды), то сумма абсолютных величин отклонений от расписания прибытия в пункты  $B$ ,  $C$ ,  $D$  не превышала бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого катеру для прохождения 5 км со скоростью  $v$  в стоячей воде. Какой из пунктов —  $A$  или  $D$  — находится выше по течению?6. В основании пирамиды  $SABC$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором длины сторон  $AB$  и  $AC$  равны 1, а косинус угла  $BAC$  равен  $\frac{4}{5}$ . Ребро  $SA$  перпендикулярно ребрам  $AB$  и  $AC$ , угол  $BAC$  вдвое больше угла  $BSC$ . Внутри пирамиды находится прямой круговой цилиндр, образующая которого параллельна  $BC$ . Какова наибольшая возможная площадь боковой поверхности такого цилиндра?

## В а р и а н т 9

(отделение общей геологии геологического факультета)

1. Найдите все действительные решения уравнения

$$(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2.$$

2. В треугольнике  $ABC$  угол  $BAC$  — прямой, длины сторон  $AB$  и  $BC$  равны, соответственно, 1 и 3. Точка  $K$  делит сторону  $AC$  в отношении 7 : 1, считая от точки  $A$ . Что больше — длина  $AC$  или длина  $BK$ ?

3. Решите неравенство

$$\log_3(5x^2+6x+1) < 0.$$

4. Найдите все пары действительных чисел  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x - y = 2\pi. \end{cases}$$

5. Автобус проходит путь  $AE$ , состоящий из участков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  длиной 10 км,5 км, 5 км, 6 км соответственно. При этом, согласно расписанию, выезжая из пункта  $A$  в 9 часов, он проходит пункт  $B$  в  $9\frac{1}{5}$  ч, пункт  $C$  — в  $9\frac{3}{8}$  ч, пункт  $D$  — в  $9\frac{2}{3}$  ч.С какой постоянной скоростью  $v$  должен двигаться автобус, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения пунктов  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и времени движения автобуса от  $A$  до  $E$  при скорости  $v$  не превосходила 51,7 минут?6. В основании пирамиды  $SABC$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$ , длины сторон  $AB$  и  $AC$  равны  $\sqrt{5}$ , ребро  $SA$  перпендикулярно плоскости  $ABC$ , угол  $BAC$  вдвое больше угла  $BSC$ . Среди всех прямых круговых цилиндров с образующей, параллельной  $SA$ , находящихся внутри пирамиды, рассматривается цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности. Известно, что расстояние от центра его нижнего основания до ребра  $BC$  составляет  $\frac{11}{16}$  длины медианы  $AM$  треугольника  $ABC$ . Найдите объем пирамиды  $SABC$ .

## В а р и а н т 10

(специальности «экономическая кибернетика» и «планирование народного хозяйства» экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42.$$

2. Найдите все  $x$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{4-x^2}(\sin 2\pi x - 3 \cos \pi x) = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_3(x^2-2) < \log_3\left(\frac{3}{2}|x|-1\right).$$

4. В треугольнике  $ABC$  медианы, опущенные на стороны  $AC$  и  $BC$ , пересекаются под прямым углом. Длина стороны  $AC$  равна  $b$ , длина стороны  $BC$  равна  $a$ . Найдите длину стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ .

5. В магазине продаются красные и синие карандаши. Красный карандаш стоит 17 копеек, синий карандаш — 13 копеек. На покупку карандашей можно затратить не более 4 рублей 95 копеек. При покупке число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более, чем на пять. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей, при этом красных карандашей нужно закупить как можно меньше. Сколько красных и сколько синих карандашей можно закупить при указанных условиях?

6. Для каждого неотрицательного значения  $a$  решите неравенство

$$a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \geq 0.$$

## В а р и а н т 11

(специальность «политическая экономия» экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$2^{x+2} \cdot 5^{x+2} = 2^{3x} \cdot 5^{3x}.$$

2. Найдите все  $x$ , удовлетворяющие уравнению

$$\lg 3x = \lg 5x.$$

## 3. Решите неравенство

$$4(x-1) < \sqrt{(x+5)(3x+4)}.$$

4. Сколько точек с целочисленными координатами находится внутри криволинейной трапеции, образованной осью абсцисс, прямыми  $x = \frac{3}{2}$ ,  $x = 129$  и графиком функции  $y = \log_2 x$ ? Точки, лежащие на границе указанной криволинейной трапеции, не учитывать.

5. На факультет подано от школьников на 600 заявлений больше, чем от производителей. Девушек среди школьников в 5 раз больше, чем девушек среди производителей, а юношей среди школьников больше, чем юношей среди производителей в  $n$  раз, причем  $6 \leq n \leq 12$  ( $n$  — целое число). Определите общее количество заявлений, если юношей среди производителей на 20 больше, чем девушек среди производителей.

6. Определите, при каких значениях  $a$  уравнение

$$x - a = 2|2|x| - a^2|$$

имеет ровно три корня. Найдите эти корни.

## В а р и а н т 12

(Факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 2^{5-x} + 9.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1.$$

3. В треугольниках  $ABC$  и  $A'B'C'$  длина стороны  $AB$  равна длине стороны  $A'B'$ , длина стороны  $AC$  равна длине стороны  $A'C'$ , величина угла  $BAC$  равна  $60^\circ$  и величина угла  $B'A'C'$  равна  $120^\circ$ . Известно, что отношение длины  $B'C'$  к длине  $BC$  равно  $\sqrt{n}$  (где  $n$  — целое число). Найдите отношение длины  $AB$  к длине  $AC$ . При каких значениях  $n$  задача имеет хотя бы одно решение?

4. В окружность радиуса 7 вписан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Длины сторон  $AB$  и  $BC$  равны. Площадь треугольника  $ABD$  относится к площади треугольника  $BDC$ , как 2:1. Величина угла  $ADC$  равна  $120^\circ$ . Найдите длины всех сторон четырехугольника  $ABCD$ .

5. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2 \cos x + a \cdot \sin y = 1, \\ \log_2 \sin y = (\log_2 a) \log_a (2 - 3 \cos x), \\ \log_a z + \log_a \left(\frac{1}{2a} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение относительно  $x$ ,  $y$  и  $z$ . При каждом таком значении  $a$  найдите все решения.

## В а р и а н т 13

(специальность «структурная и прикладная лингвистика» филологического факультета).

1. Решите уравнение

$$\log_5(x-1) = \log_5 \frac{x}{1+x}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 4^x + 8, \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0. \end{cases}$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 24x - \cos 12x - 3 \sin 8x$$

на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ .

4. В трапеции  $ABCD$  сторона  $AD$  является большим основанием. Известно, что  $|AD| = |CD| = 4$ ,  $\widehat{BAD} = 90^\circ$  и  $\widehat{BCD} = 150^\circ$ . На основании  $AD$  построен треугольник  $AED$  так, что точки  $B$  и  $E$  лежат по одну сторону от прямой  $(AD)$ , причем  $|AE| = |DE|$ . Длина высоты этого треугольника, проведенной из вершины  $E$ , равна  $1\frac{2}{5}$ . Найдите площадь общей части трапеции  $ABCD$  и треугольника  $AED$ .

5. Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$|1-ax| - 1 + (1-2a)x + ax^2$$

имеет ровно одно решение.

## Ф и з и к а

## Задачи устного экзамена

## Физический факультет

1. Два тела движутся с постоянными скоростями по взаимно перпендикулярным прямым. Скорость первого тела  $v_1 = 30$  м/с, второго —  $v_2 = 20$  м/с. В тот момент, когда расстояние между телами наименьшее, первое тело находится на расстоянии  $s_1 = 500$  м от точки пересечения прямых. На каком расстоянии  $s_2$  от точки пересечения прямых находится в этот момент второе тело?

2. Плоский обруч движется так, что в некоторый момент времени скорости концов диаметра  $AB$  лежат в плоскости обруча и перпендикулярны этому диаметру (рис. 1). Скорость точки  $A$  равна  $v_A$ , а скорость точки  $B$  равна  $v_B$ . Определите скорости концов диаметра  $CD$ , перпендикулярного  $AB$ , в этот же момент времени, считая, что эти скорости также лежат в плоскости обруча.

3. Тело массы  $m = 0,5$  кг прикреплено двумя одинаковыми пружинами к вертикальным стенкам и совершает колебания, двигаясь прямолинейно по горизонтальной плоскости (рис. 2). Величины двух последовательных отклонений тела от среднего положения (положения равновесия) вправо и влево равны  $s_1 = 10$  см и  $s_2 = 7$  см. Определите коэффициент трения  $\mu$  тела о плоскость, если известно, что жесткость каждой пружины  $k = 15$  Н/м. (Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.)

4. В вертикально стоящем цилиндрическом сосуде со свободно движущимся (без трения) поршнем массой  $m_p$  и площадью  $S$  находится некоторое количество идеального газа. При нагреве газа на  $\Delta T$  градусов его объем увеличивается на  $\Delta V$ . Найдите массу  $m$  газа, если атмосферное давление постоянно и равно  $P_0$ . Молярная масса газа  $M$ .

5. Плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого  $d = 1$  см, находится в вакууме и расположен так, что сила тяжести перпендикулярна его пластинам (рис. 3). Верхняя пластина конденсатора закреплена, а нижняя, которая изготовлена из фольги толщиной  $h = 0,1$  мм, лежит на изолирующей подставке. До какого напряжения  $U$  надо за-

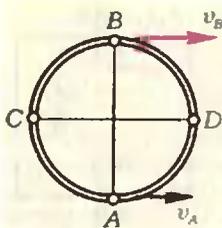


Рис. 1

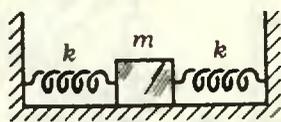


Рис. 2

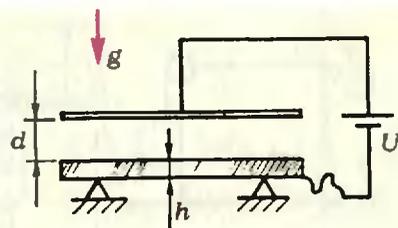


Рис. 3

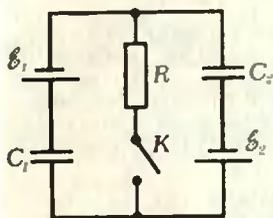


Рис. 4

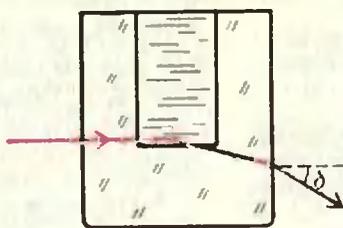


Рис. 5

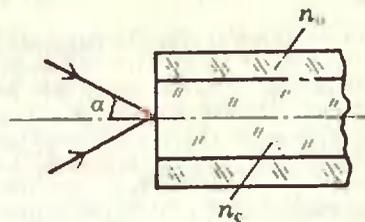


Рис. 6

рядить конденсатор, чтобы нижняя пластина перестала давить на опору? Плотность фольги  $\rho = 2830 \text{ кг/м}^3$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ . Весом соединительных проводов пренебречь.

6. В схеме, изображенной на рисунке 4, вначале ключ  $K$  не замкнут. Какой по абсолютной величине заряд  $Q$  протечет через резистор с сопротивлением  $R$ , если ключ замкнуть?  $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 20 \text{ В}$ ,  $C_1 = 1 \text{ мкФ}$ ,  $C_2 = 2 \text{ мкФ}$ .

7. От понижающей трансформаторной подстанции, действующее значение напряжения на выходе которой  $U = 220 \text{ В}$ , необходимо протянуть до потребителя двухпроводную линию электропередачи длиной  $L = 1 \text{ км}$ . Какого сечения  $S$  должен быть алюминиевый провод, которым будет прокладываться эта линия, если потребляемая в нагрузке мощность  $P = 10 \text{ кВт}$ , а действующее значение падения напряжения в линии не должно превышать  $\Delta U = 20 \text{ В}$ ? Удельное сопротивление алюминия  $\rho = 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , нагрузка на конце линии чисто омическая.

8. Жидкость налита в прямоугольный сосуд с толстым дном (рис. 5). Световой луч падает на дно сосуда под углом, отличающимся от  $90^\circ$  на пренебрежимо малую величину. Преломившись на границе раздела жидкость — стекло и стекло — воздух, луч выходит из сосуда под углом  $\delta = 30^\circ$  к первоначальному направлению. Вычислите показатель преломления жидкости  $n_c$ , если показать преломления стекла  $n_s = 1,50$ .

9. Оптический волоконный световод представляет собой стеклянный цилиндр — сердцевину — с показателем преломления  $n_c = 1,50$ , окруженный оболочкой с показателем преломления  $n_s = 1,41$  (рис. 6). Распространение излучения по световоду осуществляется за счет полного внутреннего отражения на границе раздела сердцевины — оболочка. На передний торец световода падает сходящийся под углом  $2\alpha$  пучок. Каково максимальное значение  $\alpha_{\text{max}}$  угла, при котором все попадающее в световод излучение будет распространяться по световоду?

10. Определите минимально возможное расстояние  $l_{\text{min}}$  между предметом и его дей-

ствительным изображением, полученным с помощью линзы с фокусным расстоянием  $F$ .

#### Механико-математический факультет

1. Тело массой  $m = 20 \text{ кг}$  тянут с силой  $F = 120 \text{ Н}$  по горизонтальной поверхности. Если эта сила приложена под углом  $\alpha_1 = 60^\circ$  к горизонту, то тело движется равномерно. С каким ускорением  $a$  будет двигаться тело, если ту же силу приложить под углом  $\alpha_2 = 30^\circ$  к горизонту? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

2. На столе лежит доска массы  $M = 1 \text{ кг}$ , а на доске груз массы  $m = 0,5 \text{ кг}$ . Какую силу  $F$  нужно приложить к доске, чтобы она выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской  $\mu_1 = 0,1$ ; между доской и столом  $\mu_2 = 0,2$ . Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

3. С каким минимальным ускорением  $a$  нужно перемещать в горизонтальном направлении брусок  $A$ , чтобы тела  $1$  и  $2$  не двигались относительно бруска (рис. 7)? Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и обоими телами  $\mu = 0,4$ . В блоке трения нет. Ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

4. На диске, который может вращаться вокруг вертикальной оси, лежит маленькая шайба массой  $m = 100 \text{ г}$ . Шайба соединена горизонтальной пружиной с осью диска. Если число оборотов диска не превышает  $n_1 = 2 \text{ об/с}$ , пружина находится в недеформированном состоянии. Если число оборотов диска медленно увеличивается до  $n_2 = 5 \text{ об/с}$ , то пружина удлиняется вдвое. Определите жесткость  $k$  пружины.

5. С идеальным газом проводят процесс  $1-2-3-4$ , изображенный на  $V-T$  диаграмме (рис. 8). В некотором состоянии  $3$  на отрезке, изображающем процесс  $2-3-4$ , давление газа такое же, как и в состоянии  $1$ . Известно, что  $V_1 = 1 \text{ м}^3$ ,  $V_2 = 4 \text{ м}^3$ ,  $T_1 = 100 \text{ К}$ ,  $T_4 = 300 \text{ К}$ . Каков объем  $V_3$  газа в состоянии  $3$ ?

6. Пружина, прикрепленная верхним концом к крышке откачанного вертикального цилиндра, удерживает невесомый поршень у самого дна цилиндра. В каком отношении  $V_{\text{верх}}/V_{\text{ниж}}$  поршень будет делить весь объем цилиндра, если по обе стороны поршня ввести

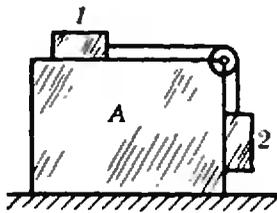


Рис. 7.

но одинаковой массе одного и того же газа? Известно, что расстояние между дном и поршнем возрастет вдвое, если пространство над поршнем от газа освободить.

7. Восемь одинаковых резисторов, сопротивление каждого из которых  $R=15$  Ом, образуют цепь, показанную на рисунке 9. Источник напряжения подключен к точкам А и О. Найдите сопротивление  $R_{AO}$  цепи.

8. Из провода длиной  $l=2$  м, обладающего сопротивлением  $R=4$  Ом, спаян квадрат. В стороны квадрата включены источники с ЭДС  $\mathcal{E}_1=10$  В и  $\mathcal{E}_2=8$  В согласно схеме, приведенной на рисунке 10. Цепь помещена в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости квадрата, направленное за чертеж и возрастающее во времени по закону  $B=kt$ , где  $k=16$  Тл/с. Найдите силу тока  $I$  в цепи. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

9. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . В начальный момент времени электрон находился в точке О и его скорость  $\vec{v}$  была перпендикулярна вектору магнитной индукции. Найдите расстояние  $l$  электрона от точки О в момент времени  $t$ . Массу электрона  $m$  и его заряд  $q$  считать известными.

10. Точечный источник света помещен на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F=8$  см на расстоянии  $d=12$  см от линзы. Линза начинает смещаться в направлении, перпендикулярном своей главной оптической оси, со скоростью  $v_1=1$  см/с. С какой скоростью  $v_2$  начнет смещаться при этом изображение источника, если сам источник остается неподвижным?

#### Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. К потолку кабины лифта, поднимающегося с ускорением  $a=1,2$  м/с<sup>2</sup>, прикреплен динамометр. К динамометру подвешен блок, свободно вращающийся без трения вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы с массами  $m_1=200$  г и  $m_2=300$  г. Пренебрегая массами блока и нити, определите показание  $F$  динамометра.

2. Молекула, летящая со скоростью  $v=300$  м/с перпендикулярно поверхности движущегося тяжелого поршня, испытывает с ним упругое столкновение. Поршень движется в ту же сторону, что и молекула, со скоростью  $V=30$  м/с. Какую часть  $\Delta E/E$  энергии молекула потеряет при соударении?

3. В пространство над ртутным столбиком в трубке барометра попало немного воздуха. Когда барометр показывал давление  $p_1=$

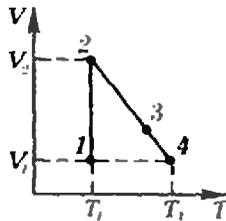


Рис. 8.

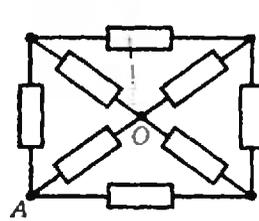


Рис. 9.

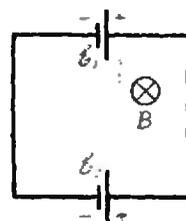


Рис. 10.

$=748$  мм рт. ст., длина цилиндрической части, занятой воздухом, была  $l=60$  мм. Трубку осторожно выдвинули из сосуда со ртутью еще на  $\Delta h=21$  мм, после чего барометр стал показывать давление  $p_2=751$  мм рт. ст. Считая температуру постоянной, определите атмосферное давление  $p_a$  в момент опыта.

4. Процесс в идеальном газе идет сначала так, что давление и объем связаны равенством  $p\sqrt{V}=B$ . Когда температура газа достигает значения  $T$ , процесс продолжается при ином характере зависимости давления от объема:  $p=D/V^2$ . Найдите упомянутую температуру  $T$ , если константы  $B$  и  $D$ , а также количество вещества  $\nu=m/M$  заданы.

5. Два одинаковых сосуда соединены тонкой трубкой с краном. В первом сосуде находится некоторое количество идеального газа при температуре  $t_1=27$  °С, а во втором — иное количество того же газа при температуре  $t_2=227$  °С и том же давлении. Во сколько раз изменится давление газа, если открыть кран и довести температуру содержимого сосудов до  $t_3=127$  °С?

6. Два одинаковых свинцовых шарика брошены вертикально вверх один вслед за другим через некоторый промежуток времени с одинаковыми начальными скоростями  $v_0$ . Шарик столкнулся на высоте  $h$  и слипся. На сколько поднимется температура шариков? Удельная теплоемкость свинца равна  $c$ .

7. Маленький шарик массой  $m=0,01$  мг, несущий заряд  $q=10$  нКл, помещен в однородное электрическое поле, направленное горизонтально. Шарик приходит в движение без начальной скорости и через время  $t=4$  с приобретает скорость  $v=50$  м/с. Найдите напряженность  $E$  поля. Ускорение свободного падения принять равным  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

8. Замкнутая цепь состоит из источника и реостата, соединенных последовательно. В цепи течет ток  $I_0=0,5$  А. Если сопротивление реостата уменьшить в  $k=4$  раза, ток возрастет в  $l=2$  раза. Какой ток  $I$  будет течь в цепи, если сопротивление реостата уменьшить до нуля?

9. По П-образной рамке, помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, движется без трения с постоянной скоростью  $v=2$  м/с перемычка, сопротивление которой  $R=0,2$  кОм (рис. 11). К перемычке приложена сила  $F=4$  Н. Найдите силу тока  $I$  в перемычке. Сопротивлением рамки пренебречь. Силу тяжести не учитывать.

10. Луч света из воздуха падает на однородный прозрачный шар, проникает в него и достигает поверхности раздела шар — воздух. Какой угол  $\varphi$  составляет вышедший луч с падающим на шар, если угол падения луча  $\alpha=26^\circ$ , а угол преломления  $\beta=17^\circ$ ?

### Химический факультет и факультет почвоведения

1. Двигатели ракеты, запущенной вертикально вверх с поверхности Земли, работали в течение времени  $t=1$  мин и сообщали ракете постоянное ускорение  $a=3g$ . Какой максимальной высоты  $h$  достигла ракета? Ускорение свободного падения считать постоянным и равным  $g=9.8$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. С аэростата сбросили два шарика одинакового радиуса  $R=1$  см: один — алюминиевый (плотность  $\rho_1=2.7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>), другой — железный (плотность  $\rho_2=7.8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>). Шарик соединен длинной тонкой нитью. Найдите натяжение  $T$  нити после того, как из-за сопротивления воздуха движение шариков установится, то есть они приобретут постоянные скорости.

3. Герметичный цилиндр разделен газонепроницаемым поршнем на равные части. В одной половине находится идеальный газ с молярной массой  $M_1$ , в другой —  $M_2$ . Массы газов, их объемы и температуры одинаковы. Поршень освободили. На какую долю  $\Delta V/V$  своего первоначального значения окажется увеличенным объем одной из частей цилиндра (или уменьшенным объем другой части) после установления равновесия при той же температуре?

4. Из двух одинаковых проводников изготовлены два контура — квадратный и круглый. Оба контура помещены в одной плоскости в однородном, изменяющемся во времени магнитном поле. В круглом контуре индуцируется постоянный ток  $I_1=0.4$  А. Найдите силу тока  $I_2$  в квадратном контуре.

5. Сходящийся световой пучок падает на рассеивающую линзу с фокусным расстоянием  $-F$  и собирается в точку, лежащую в фокальной плоскости по другую сторону линзы. На каком расстоянии  $f$  от линзы соберется пучок, если рассеивающую линзу заменить на собирающую с фокусным расстоянием  $+F$ ?

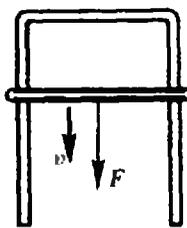


Рис. 11.

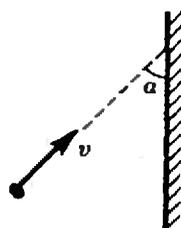


Рис. 12.

### Географический и геологический факультеты

1. Будет ли плавать в воде (плотность воды  $\rho_0=1000$  кг/м<sup>3</sup>) полый кубик из железа (плотность железа  $\rho=7800$  кг/м<sup>3</sup>), если длина ребра кубика  $a \approx 20$  см, а толщина стенок  $b=0.5$  см?

2. В герметически закрытом сосуде находится воздух, температура которого  $t_1=27$  °С, а относительная влажность  $\varphi_1=60$  %. Давление насыщенного водяного пара при этой температуре  $p_1=26.7$  мм рт. ст. Чему будет равна относительная влажность  $\varphi_2$  воздуха в данном сосуде, если его поддерживать при температуре  $t_2=100$  °С?

3. Герметичный сосуд объемом  $V=0.25$  м<sup>3</sup> содержит азот под давлением  $p_1=120$  кПа. Какое давление  $p_2$  установится в сосуде, если азоту сообщить количество теплоты  $Q=8.4$  кДж? Молярная теплоемкость азота в описанных условиях  $C=21$  Дж/(моль · К). Универсальная газовая постоянная  $R=8.3$  Дж/(моль · К).

4. Точечный источник света движется равномерно и прямолинейно под углом  $\alpha=45^\circ$  к плоскому зеркалу со скоростью  $v=10$  м/с (рис. 12). Найдите скорость  $v_{\text{плн}}$  движения изображения относительно источника.

Публикацию подготовили  
А. Н. Боголюбов, Б. Б. Буховцев,  
Н. И. Новкин, И. И. Мельников,  
В. И. Родин, А. Н. Соколкин

### Ответы, указания, решения



Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

#### Математика

##### Вариант 1

1.  $\{-2; -1\} \cup \{3\}$ . Указание. Неравенство

$$\sqrt{(x+2)(3-x)} \cdot \frac{x+1}{(x+4)\left(x+\frac{5}{2}\right)} < 0$$

равносильно системе

$$\begin{cases} (x+1)(x+4)\left(x+\frac{5}{2}\right) < 0, \\ (x+2)(3-x) > 0. \end{cases}$$

2. а.  $\frac{\pi}{6} + 4\pi k$ ,  $x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2\pi l$  ( $k, l \in \mathbf{Z}$ ). Указание. Данное уравнение равносильно сис-

теме

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin x, \\ \sin x + \cos \frac{x}{2} > 0. \end{cases}$$

Функция  $\cos \frac{x}{2}$  имеет период  $4\pi$ .

3.  $\frac{1}{2}(p-a)^2 \lg \frac{a}{2}$ . Указание.  $|BK| = p-a$ .

4.  $a_1=6k-1$ ,  $a_2=6l+3$ ,  $a_3=6m$ ,  $a_4=6n+2$  ( $k, l, m, n \in \mathbf{Z}$ ).

Решение. Исследуем вспомогательную функцию

$$F(z) = |12z-5| - |12z-7| + |24z+13|.$$

Легко посчитать, что

$$F(z) = \begin{cases} 24z+11, & \text{если } 0 < z < \frac{5}{12}, \\ 48z+1, & \text{если } \frac{5}{12} < z < \frac{7}{12}, \\ 24z+15, & \text{если } z \geq \frac{7}{12}. \end{cases}$$

Таким образом, функция  $F$  возрастает на  $[0; +\infty]$ . Следовательно, при  $z > 0$  имеем  $F(z) > F(0) = 11$ . Значит, левая часть первого уравнения системы  $> 11$  и равна 11 только

при  $\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} = 0$ . С другой стороны, правая часть этого уравнения  $\leq 11$  и равна 11 только при  $\sqrt{\sin \frac{\pi(x-2y-1)}{3}} = 0$ . Поэтому первое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi y}{2} = 0, \\ \sin \frac{\pi(x-2y-1)}{3} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Сделав во втором уравнении подстановку  $t = x^2 + (y-a)^2$ , найдем, что это уравнение равносильно уравнению

$$x^2 + (y-a)^2 = 1. \quad (2)$$

Из (1) следует, что пара чисел  $(x; y)$  тогда и только тогда является решением данной системы, когда  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} y = 2p + 1 \quad (p \in \mathbb{Z}), \\ x - 2y - 1 = 3q \quad (q \in \mathbb{Z}). \end{cases} \quad (3)$$

Значит, в частности,  $x$  должен быть целым числом. Тогда из (2)  $x$  равен  $-1, 0$  или  $1$ . При  $x = -1$  из (2)  $y = a$  и равенства (3) равносильны системе

$$\begin{cases} y + 1 = 2(p + 1), \\ 2(y + 1) = -3q. \end{cases}$$

Значит,  $y + 1$  делится на 6, откуда  $a = 6k - 1$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Аналогично, при  $x = 1$  получаем  $y = a$  и

$$\begin{cases} y - 3 = 2(p - 1), \\ 2(y - 3) = -3(q + 2). \end{cases}$$

Значит,  $y - 3$  делится на 6, откуда  $a = 6l + 3$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ). При  $x = 0$  имеем  $y - a = \pm 1$  и

$$\begin{cases} y - 1 = 2p, \\ 2(y - 1) = -3(q + 1). \end{cases}$$

Значит,  $y - 1$  делится на 6, откуда  $a = 6m$  или  $a = 6n + 2$  ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ).

5.  $\frac{(17 - \sqrt{17})R}{8h}$ . Решение. Пусть  $S$  — площадь грани  $ABC$ ,  $S_1, S_2, S_3$  — площади остальных граней,  $R'$  — радиус шара, вписанного в пирамиду  $DABC$ . Тогда

$$\frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} SR' + \frac{1}{3} S_1 R' + \frac{1}{3} S_2 R' + \frac{1}{3} S_3 R',$$

откуда для искомого отношения  $\lambda = \frac{R'}{h}$  получаем  $\lambda = \frac{S}{S + S_1 + S_2 + S_3}$ .

Пирамида  $KLHC$  (рис. 1) получается из пирамиды  $DABC$  гомотетией с центром  $C$  и коэффициентом

$$k = \frac{|CH|}{|CB|}.$$

Поэтому  $R = kR'$ . Значит,

$$\lambda = \frac{R}{kh}.$$

Таким образом, чтобы найти  $\lambda$ , надо найти  $k$ . Спроектируем всю конфигурацию на плоскость  $ABC$  параллельно прямой  $DM$  ( $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ ). При этом вершина  $D$  перейдет в середину  $D_1$ ,

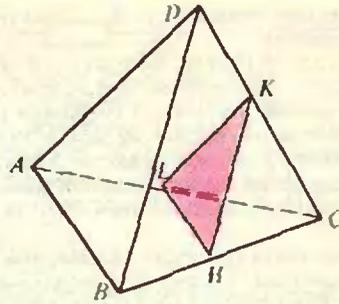


Рис. 1.

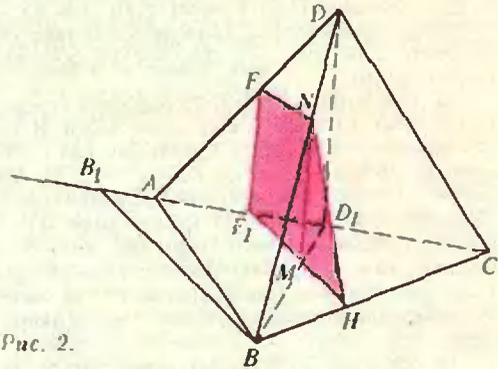


Рис. 2.

ребра  $AC$  (поскольку из  $\frac{|DN|}{|NB|} = \frac{1}{2} = \frac{|D_1M|}{|MB|}$  следует  $(DD_1) \parallel (NM)$ ; рис. 2); значит, грань  $ADC$  перейдет в ребро  $AC$ ; с другой стороны, плоскость  $FNM$  перейдет в прямую  $HM$  (так как  $(FNM) \parallel (NM)$ ); следовательно, точка  $F$  перейдет в  $F_1 = (HM) \cap (AC)$ . Таким образом,  $(FF_1) \parallel (NM) \parallel (DD_1)$ . Проведем через точку  $B$  прямую, параллельную  $(HF_1)$  (см. рис. 2). Положим  $|F_1D_1| = a$  и  $\frac{|AF_1|}{|FD_1|} = m$ . Тогда  $|AF_1| = \frac{|AF_1|}{|FD_1|} \cdot |F_1D_1| = ma$ ,  $|B_1F_1| = \frac{|BM|}{|MD_1|} \times |F_1D_1| = 2a$ ,  $|CD_1| = |AD_1| = |AF_1| + |F_1D_1| = (m + 1)a$ ,  $m^2 = \left(\frac{|AF_1|}{|FD_1|}\right)^2 = \frac{|CH|}{|HB|} = \frac{|CF_1|}{|F_1B_1|} = \frac{|CD_1| + |D_1F_1|}{|F_1B_1|} = \frac{m + 2}{2}$ . Отсюда  $2m^2 - m - 2 = 0$ ,  $m = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$ . Значит,  $k = \frac{|CH|}{|CB|} = \frac{|CH|}{|CH| + |HB|} = \frac{1}{1 + \frac{1}{m^2}} = \frac{17 + \sqrt{17}}{34}$ .

Вариант 2

1.  $[-4; 2] \cup [3; 4]$ .
2.  $x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
3. 25.
4.  $\frac{2\pi\sqrt{3+9}}{27}$ .
5.  $\{1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}, 1 + \sqrt{a^2 + 4a + 8}\}$  при

$a < -2$ ,  $\{1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}, 1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8}\}$  при  $-2 < a < -\frac{1}{2}$ ,  $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$  при  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $\{1 - \sqrt{a^2 - 2a + 5}, 1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8}\}$  при  $-\frac{1}{2} < a < 1$ ,  $\{1 + \sqrt{a^2 - 2a + 5}, 1 - \sqrt{a^2 + 4a + 8}\}$  при  $a > 1$ .

6.  $\{(-1; 2); (-1; -2)\}$ . Указание. Докажите, что  $5 \sin^2 x - 6 \sin x \cdot \cos x - 9 \cos^2 x + 3\sqrt[3]{33} = -\sqrt{58} \sin(2x + \varphi) + 3\sqrt[3]{33} - 2 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ . С помощью тождества  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  докажите, что правая часть  $< 0$  на своей области определения, причем равна она нулю только при  $\arcsin x = -\frac{\pi}{2}$ .

Вариант 3

1.  $x_1 = \frac{\pi}{4}k, x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l (k, l \in \mathbb{Z})$ .

2.  $\left\{-1, -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right\}$ .

3.  $\left]0; \frac{1}{16}\right[$ .

4. 83.

5.  $\frac{1}{2}(1 + 2 \cos 2\alpha)^2 \operatorname{tg} 2\alpha$ .

6. 1)  $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)$ ;

2)  $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}$ .

Указание. Центры  $O_1, O_2$  шаров лежат на прямой  $OH$ , являющейся пересечением биссекторов двугранных углов данного трехгранного угла (задача 538 в «Геометрии 9–10»). Биссектор двугрannого угла с ребром  $OC$  пересекается с плоскостью  $OAB$  по биссектрисе  $OD$  угла  $AOB$ . Картина симметрична относительно  $(COD)$ . 1) Искомый угол —  $HOD$ . Отсеките от данного трехгранного угла правильную треугольную пирамиду с ребром, например,  $|OA|$ . 2) В плоскости  $COD$  имеем картину, изображенную на рисунке 3.  $|OK_2| = |OK_1| + |K_1D| + |DK_2|$ .

Вариант 4

1.  $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k (k \in \mathbb{Z})$ .

2.  $\{1\}$ .

3.  $\frac{5}{18}V$ . Указание. Пусть  $h$  — расстояние от  $C$  до плоскости  $ABB'A'$ ,  $h_1$  — расстояние от  $B$  до прямой  $AA'$ . Построим данную призму до параллелепипеда. Если  $V_1$  — его объем, то  $V = \frac{1}{2}V_1$ . Приняв за основание параллелепипеда грань  $ABB'A'$ , получаем, что  $V_1 = S_{ABB'A'} \cdot h = (|AA'| \cdot h_1)h$ . Итак,  $V = \frac{1}{2}|AA'| \cdot h_1 h$  (эту непривычную формулу объема призмы полезно запомнить!). С другой стороны, искомый объем «нижней части» — это объем четырехугольной пирамиды  $CABF_1$  с вершиной  $C$ .

4.  $(0; 2)$ . Указание.  $d(x) = f(x) \cdot \cos \alpha$  (рис. 4).

5.  $n = -1$ ;  $\left\{\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{36} + \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right\}, \left(\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{36} + \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right), \left(\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{36} - \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right), \left(\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{36} - \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\}$ . Указание. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} 6(x+2y)^2 + 2(3n-2)(x+2y) + 3 = 0, \\ 4(x-y)^2 - 2(2n+1)(x-y) + 2n^2 - \frac{5}{2} = 0. \end{cases}$$

Вариант 5

1.  $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, x_2 = (-1)^l \frac{\pi}{4} + \pi l (k, l \in \mathbb{Z})$ .

2. 2,  $e^2$ .

3.  $[-5; 20]$ .

4.  $\frac{3}{32}$ . Указание.  $|BP| = |PC|$ .

5.  $\left] -\infty; -1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right[ \cup \left] -\frac{1}{2}; 0 \right[$ . Решение. Второе неравенство равносильно неравенству

$$(x-b)^2 + (y-1)^2 > b.$$

Значит, оно выполняется при любых  $x$  и  $y$  тогда и только тогда, когда  $b < 0$ . Поскольку первое неравенство равносильно неравенству  $b(4 \cos^2(x-y) + 8b \cos(x-y) + 8b^2 + 8b + 3) < 0$ , оба неравенства выполняются при любых  $x$  и  $y$  тогда и только тогда, когда  $b < 0$ , и при любых  $x, y$

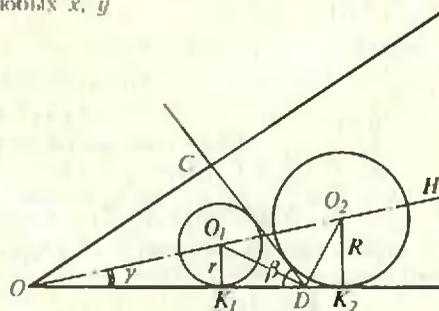


Рис. 3.

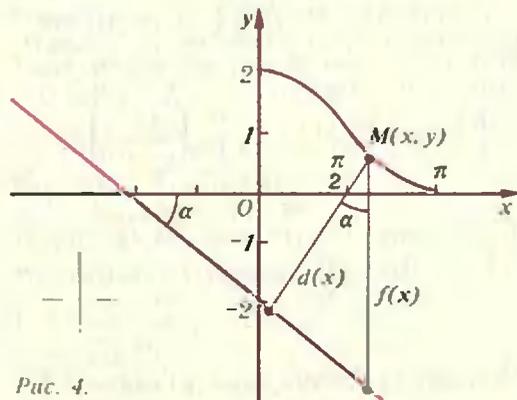


Рис. 4.

$4 \cos^2(x-y) + 8b \cos(x-y) + 8b^2 + 8b + 3 > 0$ ,  
то есть когда  $b < 0$ , и при любых  $z \in [-1; 1]$   
 $f(z) = 4z^2 + 8bz + 8b^2 + 8b + 3 > 0$ .

Вершина графика трехчлена  $f(z)$  лежит в точке  $z_0 = -b$ . Так как  $b < 0$ ,  $z_0 > 0$ . Трехчлен  $f(z)$  обладает пухлым свойством либо при  $f(z_0) > 0$ , что равносильно  $b \in ]-\infty; -\frac{3}{2}[ \cup ]-\frac{1}{2}; 0[$ , либо при  $\begin{cases} f(z_0) < 0, \\ z_0 > 1, \\ f(1) > 0, \end{cases}$

что равносильно  $b \in [-\frac{3}{2}; -1 - \frac{\sqrt{2}}{4}[$ .

Вариант 6

- $\frac{5}{7}$ .
- $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l \quad (k, l \in \mathbf{Z})$ .
- $\{(-17; \log_2 10)\}$ .
- $\frac{15}{16} \sqrt{7}$ .
- $\frac{9}{13}$  л.  $\frac{15}{13}$  л. Указание:  $\log_2(3 - |\sin ax|) > 1$  при всех  $x$ .

Вариант 7

- $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$ .
- $[-1; 0]$ .
- $\frac{1}{4} b^2 \sin 2\beta \cdot \operatorname{ctg}^2 \beta$ .
- $\{(-1; -3), (3; -3)\}$ .
- $\arccos \frac{46}{\sqrt{2641}}$ .

Вариант 8

- $\{-1; 4\}$ .
- $\{BL\} > \{BG\}$ .
- $[\frac{1}{2}; 1 \cup ]2; 2\frac{1}{2}[$ .
- $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, y = \pi - 2\pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$ . Указание. Уравнение  $3 \sin 3x - \sin x = -4$  равносильно системе  $\begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin x = 1. \end{cases}$

5. А. Решение. Пусть  $\omega$  — скорость катера относительно берега, то есть  $\omega = v - 5$ , если  $D$  выше по течению чем  $A$ , и  $\omega = v + 5$ , если выше  $A$ . По условию

$$\left| \frac{11}{\omega} - \frac{1}{3} \right| + \left| \frac{13}{\omega} - \frac{2}{3} \right| + \left| \frac{15}{\omega} - 1 \right| < \frac{5}{v} - \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Предположим, что  $D$  выше, чем  $A$ . Тогда

$$\left| \frac{11}{v-5} - \frac{1}{3} \right| + \left| \frac{13}{v-5} - \frac{2}{3} \right| + \left| \frac{15}{v-5} - 1 \right| < \frac{5}{v} - \frac{1}{2}.$$

Поскольку  $|a+b-c| < |a| + |b| + |c|$ ,

$$\frac{9}{v-5} < \frac{5}{v} - \frac{1}{2},$$

а это неравенство решений не имеет. Предположение, что  $D$  выше чем  $A$ , привело к противоречию. Следовательно, выше  $A$ .\*)

$$6. \frac{3\pi}{10} \cdot \frac{\sqrt{19+6\sqrt{10}}-3}{\sqrt{10+6\sqrt{10}}+\sqrt{19+6\sqrt{10}}-3} = \frac{3\pi}{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10+6+10}}$$

Указание. Пусть  $AH$  — высота треугольника  $ABC$ . Докажите, что для любого цилиндра  $\mathcal{C}$ , находящегося внутри пирамиды  $SABC$ , образующая которого параллельна  $BC$ , существует такой же цилиндр  $\mathcal{C}'$ , конгруэнтный  $\mathcal{C}$ , проекция которого на плоскость  $SAH$  касается  $(AH)$  и  $(SH)$  (рис. 5. а) и проекция которого на плоскость  $ABC$  касается  $(AB)$  и  $(AC)$  (рис. 5. б).

Вариант 9

- $\{-3; 2\}$ .
- $\{AC\} > \{BK\}$ .
- $[-1\frac{1}{5}; -1 \cup ]-\frac{1}{5}; 0[$ .
- $x = \frac{7}{4} \pi + \pi k, y = -\frac{\pi}{4} + \pi l \quad (k \in \mathbf{Z})$ .
- 50 км/ч. Указание. Сделав в неравенстве  $\left| \frac{10}{v} - \frac{1}{5} \right| + \left| \frac{15}{v} - \frac{3}{8} \right| + \left| \frac{20}{v} - \frac{2}{3} \right| + \frac{26}{v} < \frac{517}{600}$

замену  $v = \frac{5}{x}$ , нарисуйте графики левой и правой части.

6.  $\frac{4}{5} \sqrt{13}$ .

Вариант 10

- $\{-5; 5\}$ .
- $\{-2, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\}$ .
- $[-2; -\sqrt{2} \cup ]\sqrt{2}; 2[$ .
- $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$ .
- 19 синих и 14 красных. Указание. Обозначим искомое число синих карандашей через  $x$ , красных — через  $y$ . Тогда решением задачи является точка  $(x_0; y_0)$  с целочисленными координатами, лежащая в пятиугольнике, заштрихованном на рисунке 6, для которой  $x_0 + y_0$  максимально, а  $y_0$  при этом минимально.
- $]-\infty; 3[$  при  $a=0$ .  $]-\infty; \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}[ \cup ]\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}; +\infty[$  при  $0 < a < \frac{1}{12}$ .  $\mathbf{R}$  при  $a \geq \frac{1}{12}$ . Указание.  $a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 = a(x^2 - x + 3)(a^2x^2 + ax + 3a + 1)$ . (Догадаться до этого разложения можно, написав  $a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 = a(ax^2 + 3)^2 - x + 3$ . (1)

\*) Данное решение предложено редакцией журнала. В авторском решении дополнительно проверялось, что при предположении « $A$  выше чем  $D$ » неравенство (1) имеет решение. (Прим. ред.)

Отсюда следует, что любой корень трехчлена  $ax^2-x+3$  является корнем многочлена, стоящего в левой части; поэтому этот многочлен делится на  $ax^2-x+3$ .) Замечание. Равенство (1) показывает, что если положить  $f(x)=ax^2+3$ , то многочлен, стоящий в левой части неравенства, будет иметь вид  $f(f(x))-x$ . Легко доказать, что в данном случае уравнение  $f(f(x))=x$  равносильно уравнению  $f(x)=x$ . Решив последнее — квадратное — уравнение, можно дальше применить к данному неравенству метод интервалов.

**Вариант 11**

1. {1}.
2.  $x = \pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
3.  $]-\infty; -5] \cup [-1\frac{1}{3}; 4[$ .
4. 642.
5. 832. Указание. Все «числа заявлений» — натуральные числа.
6. При  $a = -2$  ( $\{-2, 1\frac{1}{5}, 3\frac{1}{3}\}$ ) и при  $a = -\frac{1}{2}$  ( $\{-\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{3}\}$ ). Указание.

Нарисуйте график правой части.

**Вариант 12**

1.  $2(1 - \log_2 3)$ .
2.  $[-1 - 2\sqrt{13}; -5[ \cup ]1; -1 + 2\sqrt{13}]$ .
3.  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$  при  $n=2$  и 1 при  $n=3$ .
4.  $|AD| = 2\sqrt{21}$ ,  $|CD| = \sqrt{21}$ ,  $|AB| = |BC| = 7\sqrt{3}$ . Замечание. Используйте «усиленные теоремы синусов»:  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ , где  $R$  — радиус описанной окружности (см., например, с. 42 в пособии «Геометрия 8» (М.: Просвещение, 1977)).
5.  $x = \pm \arccos \frac{1-2a}{2-3a} + 2\pi k$ ,  $y = (-1)^k x$

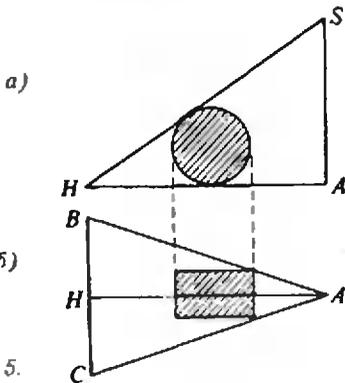


Рис. 5.

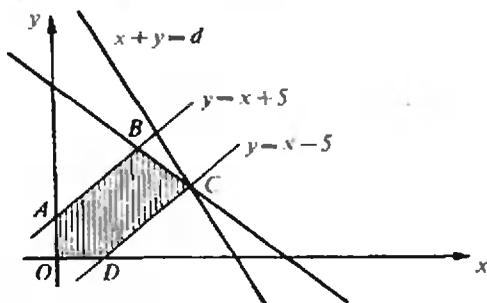


Рис. 6.

$$x \arcsin \frac{1}{2-3a} + \pi l, z = \frac{2a}{1-2a} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \text{ при } a \in ]0; \frac{1}{4} \cup [\frac{1}{4}; \frac{1}{3}[.$$

**Вариант 13**

1.  $\left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$ .
2.  $\{(0; -3)\}$ .
3.  $\max_{[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$ ,  
 $\min_{[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}]} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -4\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$ .
4.  $\frac{49}{3}(3\sqrt{3}-5)$ . Указание. Не забудьте доказать, что точка  $E$  лежит внутри угла  $PCD$  ( $P$  — произвольная точка на продолжении  $[AC]$  за точку  $C$ ).
5. 1, 0. Решение. Данное уравнение при любом  $a$  имеет корень 0. Следовательно, надо найти  $a$ , при которых оно других корней не имеет. Легко проверить непосредственно, что при  $a=0$  и при  $a=1$  уравнение имеет только нулевой корень. При  $a < 2, a \neq 0, a \neq 1$  уравнение имеет ненулевой корень  $\frac{a-1}{a}$  (если  $x = \frac{a-1}{a}$  и  $a < 2$ , то  $ax < 1$  и уравнение принимает вид  $ax^2 + (1-a)x = 0$ ). При  $a > 2$  уравнение имеет ненулевой корень  $\frac{3a-1 + \sqrt{9a^2-14a+1}}{2a}$  (если  $x = \frac{3a-1 + \sqrt{9a^2-14a+1}}{2a}$  и  $a > 2$ , то  $9a^2 - 14a + 1 > 0, ax = \frac{3a-1}{2} + \frac{\sqrt{9a^2-14a+1}}{2} > \frac{3a-1}{2} > 1$  и данное уравнение равносильно уравнению  $ax^2 + (1-3a)x + 2 = 0$ ).

**Физика**

**Физический факультет**

1.  $s_2 = s_1 v_1 / v_2 = 750$  м.
2. Модули скоростей точек  $C$  и  $D$  одинаковы и равны  $v_C = v_D = \sqrt{(v_A^2 + v_B^2)}/2$ ; проекции этих скоростей на горизонтальную и вертикальную осн равны соответственно  $v_{Cx} = v_{Dx} = (v_A + v_B)/2$ ,  $v_{Cy} = -v_{Dy} = (v_B - v_A)/2$ .
3.  $\mu = k(s_1 - s_2)/(mg) = 0,09$ .
4.  $m = \left(\rho_0 + \frac{m_n g}{S}\right) \frac{\Delta \Delta V}{R \Delta T}$ .
5.  $U = d \sqrt{2 \rho h g / \epsilon_0} \approx 8000$  В.
6.  $Q = \mathcal{E}_1 C_1 + \mathcal{E}_2 C_2 = 5 \cdot 10^{-5}$  Кл.
7.  $S > \frac{2L_0 P}{\Delta U (U - \Delta U)} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,4 \text{ см}^2$ .
8.  $n_{ж} = \sqrt{n_c^2 - \sin^2 \delta} \approx 1,41$ .
9.  $\alpha_m = \arcsin \sqrt{n_c^2 - n_0^2} \approx 30^\circ$ .
10.  $I_{\text{мин}} = 4F$ .

**Механико-математический факультет**

1.  $a = \frac{F}{m} \left( \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \frac{mg - F \sin \alpha_2}{mg - F \sin \alpha_1} \right) \approx 0,825 \text{ м/с}^2$ .
2.  $F > (M+m)(\mu_1 + \mu_2)g = 4,5$  Н.
3.  $a = g(1-\mu)/(1+\mu) = 4,2 \text{ м/с}^2$ .

4.  $k = 4\pi^2 m (2n_2^2 - n_1^2) \approx 181,6 \text{ Н/м}$ .
5.  $V_3 = V_1 \frac{(V_2 T_4) / (V_1 T_1) - 1}{V_2 / V_1 + T_4 / T_1 - 2} = 2,2 \text{ м}^3$ .
6.  $V_{\text{верх}} / V_{\text{ниж}} = 4/3$ .
7.  $R_{\text{ДО}} = 7R/15 = 7 \text{ Ом}$ .
8.  $I = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - kI^2/16) / R = -0,5 \text{ А}$ .
9.  $I = \frac{2mv}{|q|B} \left| \sin \frac{|q|Bl}{2m} \right|$ .
10.  $v_2 \approx v_1 d / (d - F) \approx 3 \text{ см/с}$ .

#### Факультет вычислительной математики и кибернетики

1.  $F = 4m_1 m_2 (g + a) / (m_1 + m_2) = 5,28 \text{ Н}$ .
2.  $\Delta E / E = 4 (V/v - V^2/v^2) = 0,36 = 36 \%$ .
3.  $\rho_3 = \rho_2 + \frac{(\rho_2 - \rho_1)l}{\Delta h - (\rho_2 - \rho_1) / (\rho g)} = 761 \text{ мм рт. ст.}$   
(здесь  $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  — плотность ртути).
4.  $T = \sqrt[3]{B^2 D} / (vR)$ .
5. Давление газа возрастет в  $(T_1 + T_2) T_3 : (2T_1 T_2) = 16/15$  раз.
6.  $\Delta T = (v_0^2 - 2gh) / (2c)$ .
7.  $E = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{v^2}{1 - g^2}} = 7,5 \text{ В/м}$ .
8.  $I = I_0 l (k - 1) / (k - l) = 1,5 \text{ А}$ .
9.  $I = \sqrt{F_2} / R = 0,2 \text{ А}$ .
10.  $\varphi = 2(\alpha - \beta) = 18^\circ$ .

#### Химический факультет и факультет почвоведения

1.  $h = 6gt^2 \approx 212 \text{ км}$ .
2.  $T = 2\pi R^2 g (e_2 - e_1) / 3 \approx 0,107 \text{ Н}$ .
3.  $\Delta V / V = (M_1 - M_2) / (M_1 + M_2)$ .
4.  $I_2 = \pi I_1 / 4 \approx 0,314 \text{ А}$ .
5.  $f = F/3$ .

#### Географический и геологический факультеты

1. Кубик утонет, так как его масса (8,9 кг) больше массы вытесненной воды (8 кг).
2.  $\varphi_2 = \varphi_1 (\rho_1 / \rho_2) (T_2 / T_1) \approx 2,6 \%$  (здесь  $\rho_2 = 760 \text{ мм рт. ст.}$  — давление насыщенного пара при  $t_2 = 100^\circ \text{C}$ ).
3.  $\rho_2 = \rho_1 + QR / (CV) \approx 133,3 \text{ кПа}$ .
4.  $v_{\text{отн}} = \sqrt{2} v \approx 14,1 \text{ м/с}$ .

#### Шахматная страничка

(см. «Квант», 1983, № 11)

- Задание 21 (Абрахам — Цини, Ливерпуль, 1932 г.). 1. Фg8+1 Крe7 (1...Кр:g8 2.Кg6 с неизбежным 3.Лh8×) 2. Ф:f7+ Крd8 3. Кg6 Ф:b2 4. Лd1+. Черные сдались (4...Cd7 5. Ф:c8+! Кр:e8 6. Лh8×).
- Задание 22 (Карасев — Кламан, Ленинград, 1967 г.). 1. Лe6! (но не 1.Лg6? Лg8!) 1...Фd8 2.Лg6! Лg8 3. Л:f7 Лd1+ 4.Крh2 Фb8+ 5.g3 Лd2+ 6.Крh1. Черные сдались.

#### Кроссворд

(см. «Квант», № 1, 4-я с. обложки)

- По горизонтали. 5. Ворот. 6. Алмаз. 9. Ортикон. 11. Обертон. 12. Актиний. 13. Антенна. 15. Линотин. 16. Триггер. 17. Полимер. 20. Раструб. 23. Палетка. 24. Уточкин. 25. Трактат. 27. Керосин. 29. Обнинск. 30. Ахромат. 31. Аргон. 32. Герон.
- По вертикали. 1. Вольтметр. 2. Фотон. 3. Длина. 4. Кавитация. 7. Линде. 8. Эбонит. 10. Пионер. 13. Аппарат. 14. Атрибут. 18. Парсек. 19. Атмосфера. 21. Ломоносов. 22. Кираса. 26. Катод. 28. Насос. 29. Отвес.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбиллин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Поталов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уровев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можая, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

#### Номер оформили:

Л. В. Денисенко, М. Б. Дубак, А. Л. Коршунов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. Е. Остев, В. А. Серов, И. Е. Смирнова, Е. К. Темиркина  
Фото А. М. Бернштейна, В. П. Коротких, Б. П. Хасенова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1.

«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 20.12.83. Подписано к печати

Печать офсетная Усл. кр. отг. 24,8

Бумага 70×108 1/16

Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,18 Т-01638

Цена 40 коп. Заказ 3419. Тираж 177349 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
ВО «Союзполиграфпром»  
Государственного комитета СССР  
по делам издательства, полиграфии  
и книжной торговли  
г. Чехов Московской области

## Шахматная страничка



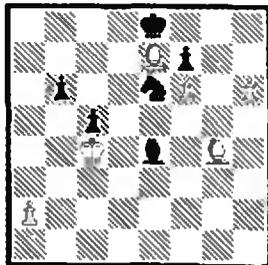
Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

## ПЕРЕГРУЗКА ФИГУР

Тактический прием, о котором пойдет речь сегодня, носит название *перегрузки фигур*. Дальнобойной шахматной фигуре — ферзю, ладье или слону часто приходится выполнять важные задания на определенной линии. Но внезапно на другой линии появляется новое действующее лицо, которое отвлекает внимание нашей фигуры. Теперь ей приходится смотреть в две стороны, происходит перегрузка в ее работе, что ведет к печальным последствиям.

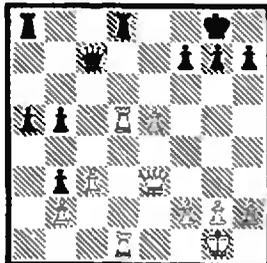
Бывает и так, что две фигуры одного цвета спокойно занимаются своим делом, а тем временем на пересечении линий их действия появляется непрошенный гость, на которого надо реагировать. Перегруженными оказываются сразу две фигуры.

Эта геометрическая тема родственна другой, более распространенной теме — отвлечению. Однако отвлечение, как правило, осуществляется слишком прямолинейно — фигура вынуждена покинуть свой пост и перебраться на неудачное место. При перегрузке же фигура ни к чему не принуждается, она просто запутывается в своих обязанностях. Но пора переходить к примерам.



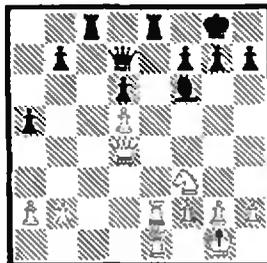
Тайманов — Смыслов  
(Первенство СССР, 1966—67 гг.)

Черный слон сдерживает движение пешки «h» и уверенно справляется с этой задачей. Однако после 1. Cf3!! он неожиданно попадает в состояние перегрузки. Брать на f3 он не может из-за 2.h7, а покинуть большую диагональ нельзя ввиду 2.Сс6×. После 1...b5+ 2.Крс3! Kg5 3.h7 черные сдались (3...С:h7 4.Сс6×, 3...К:h7 4.С:e4).



Минич — Хонфи  
(Матч Югославия—Венгрия, 1966 г.)

1.Фa7!, и тяжелые фигуры черных оказались перегруженными. На 1...Л:d5 решаст 2.Ф:a8+, а на 1...Лdс8 — 2.Ф:c7 Л:c7 3.Лd8+. Черные сдались. Эта комбинация имеет знаменитую предшественницу.



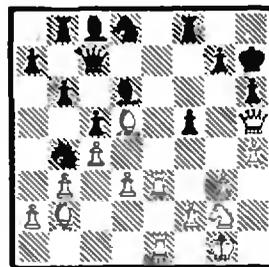
Адамс — Торре  
(Новый Орлеан, 1920 г.)

1.Фg4! Пока в положении перегрузки оказался черный ферзь. 1...Фb5 2.Фс4! А теперь и черная ладья. 2...Фd7 3.Фс7! Фb5 (3...Фa4 4. Лe4! g6 5. Ф:c8 Ф:e4 6. Ф:e8+) 4.a4! Ф:a4 5. Лe4! Фb5 6. Ф:b7! Таких перегрузок ферзь черных не выдержал, черные сдались.



Рагозин — Паиов  
(Первенство СССР, 1940 г.)

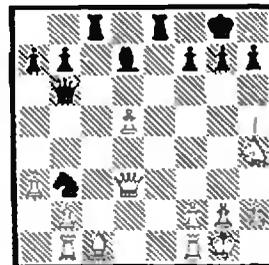
Черные только что дали шах, белые загородились ладьей, и похоже, что дело близится к ничьей. Но после 1...Фс6! ферзь белых очутился в состоянии высшей степени перегрузки — одновременно обе ладьи ему не защитить. Белые сдались.



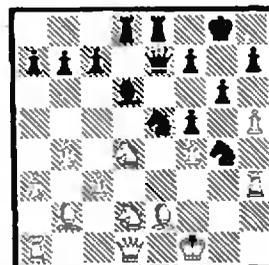
Яндемиров — Гик  
(Москва, 1983 г.)

Черные последним ходом сыграли Кс6 — b4, полагая, что их слон надежно держит поле f4 (правильно было Кс6 — d4, и у белых нет компенсации за фигуру). Однако после 1.Лe7! слон, увы, оказался сильно перегружен. Не хочется пускать коня на f4, но все же приходится менять направление удара. 1...С:e7 2.Кf4! Ф:f4 3.Л:e7 Фd4 4.С:d4 cd 5.Лe8 Л:e8 6.Ф:e8, и вскоре белые выиграли.

## Конкурсные задания



3. Черные начинают и выигрывают.

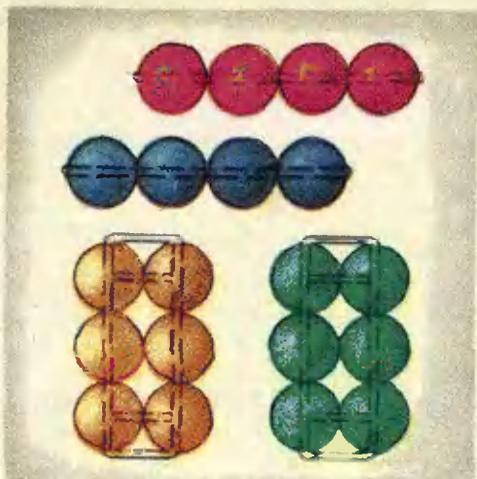


4. Черные начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 апреля 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 3, 4).

Цена 40 коп.

Индекс 70465



Сложить из двадцати отдельных синих шариков тетраэдр, показанный на рисунке, совсем просто. Но в предлагаемой головоломке шарики скреплены в четыре жесткие группы (4, 4, 6, 6), нарисованные слева, и такой же (только разноцветный) тетраэдр нужно собрать из этих четырех элементов. Попробуйте! Шарики можно вылепить из глины (или пластилина) или воспользоваться старыми бусами; между собой их можно скрепить клеем, проволочкой или тонкими деревянными палочками.

А. К.

