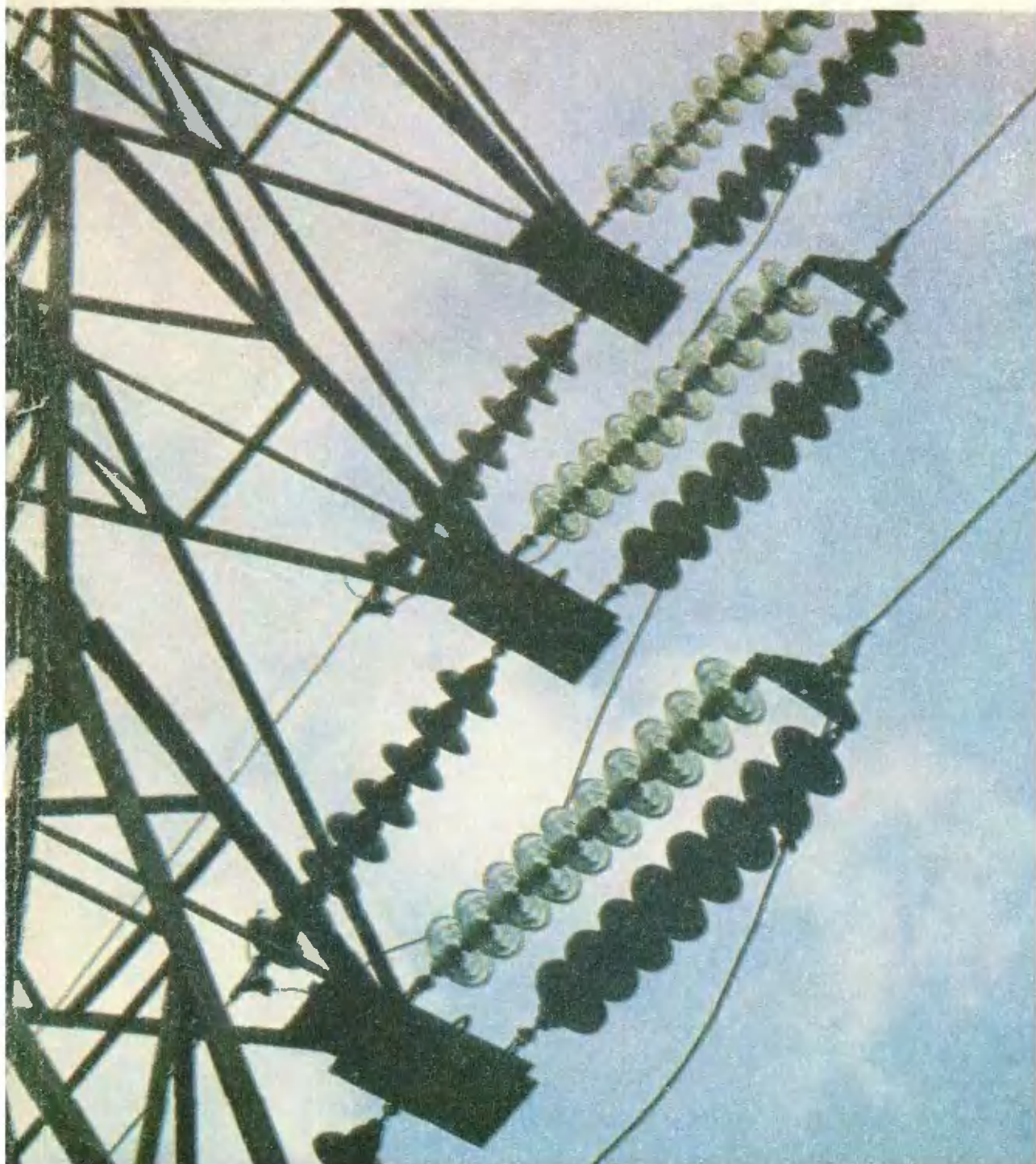


Квант

10
1984

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*



Физика изучает только такие свойства тел, которые могут быть выражены числом, и для изучения этих свойств в физике вводятся физические величины, характеризующие те или иные свойства (о том, как это делают, рассказано в статье академика И. К. Кикоина в этом номере журнала). Для каждой физической величины должен быть указан способ ее измерения. Измерить физическую величину — это значит сравнить ее с однородной величиной, принятой за единицу. Для такого сравнения необходимо какое-либо устройство или тело, которое воспроизводило бы единицу данной величины. Такие устройства называют мерами. Для каждой физической величины приняты свои единицы измерения и, соответственно, свои меры. Например, миллиметровая линейка, сантиметр, которым пользуются портные, — это меры длины; гири и разновески — меры массы и т. д. Каждая мера с той или иной точностью воспроизводит эталон, который принят за единицу данной величины. Эталон массы — это, как известно,

специально изготовленный цилиндр из сплава платины и иридия. Масса этого цилиндра — ее называют килограммом — и принята за международную единицу массы.

Килограмм как эталон массы получила «международное признание» сравнительно недавно — в начале XX века. А измерения массы производились с незапамятных времен, и в незапамятные времена существовали меры и приборы для измерения массы. По нашим сегодняшним представлениям они были примитивны и неудобны. С развитием культуры, науки и техники они совершенствовались, число их росло. Со временем стала очевидной необходимость создания эталонов, «хранящих» единицы измерения. На приведенной здесь фотографии вы видите сделанные из бронзы разновески, которые воспроизводили единицы массы, принятые в некоторых странах Европы специальным соглашением в 1570 году, и гирю, которой пользовались в те времена в быту (в настоящее время они хранятся в одном из музеев в Брюсселе).



Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант 10₁₉₈₄
10

Основан в 1970 году



Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

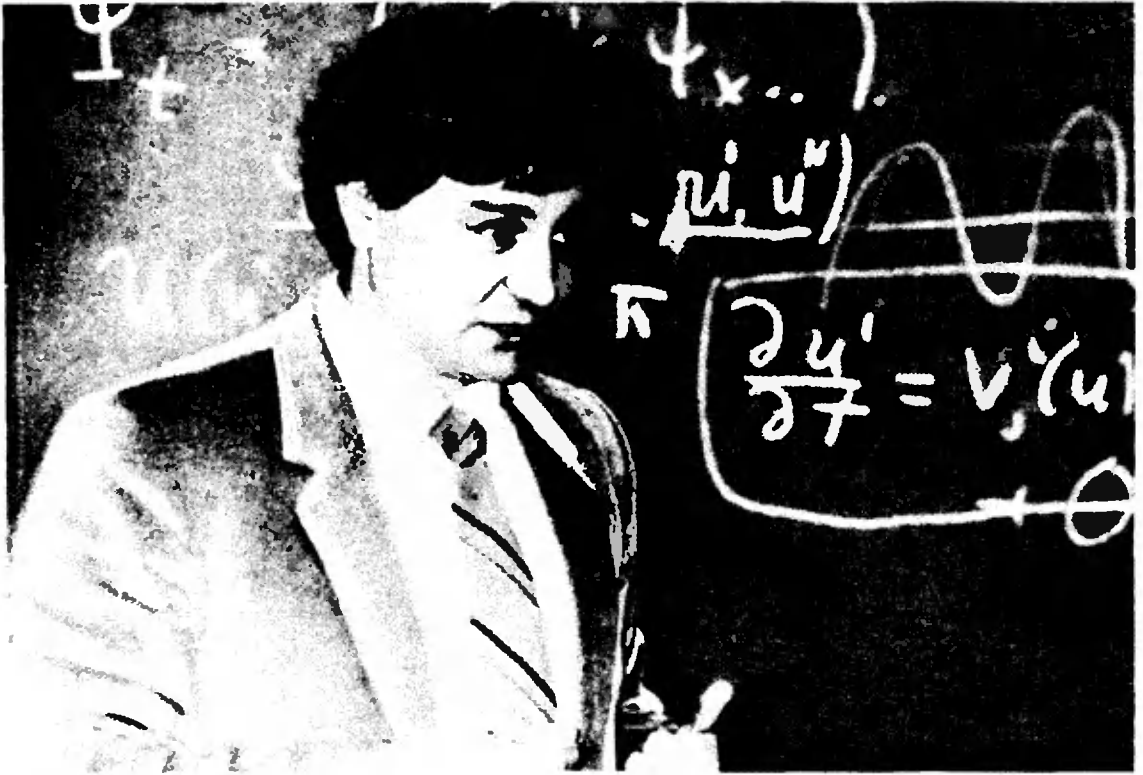


В НОМЕРЕ:

IN THIS ISSUE:

2	Беседа с академиком С. П. Новиковым	A talk with academician S.P. Novikov
7	И. К. Кикоин. Как вводятся физические величины	I. K. Kikoin. How physical quantities are introduced
14	Б. К. Приходько. Решение уравнений на микрокалькуляторе	B. K. Prikhodko. Solving equations on microcomputers
6	Новости науки Кольца вокруг Солнца	Science News Rings around the sun
18	Лаборатория «Кванта» А. А. Дозоров. Принцип относительности	Kvant's lab A. A. Dozorov. The relativity principle
20	Математический кружок В. Г. Болтянский. Экспонента	Mathematics circle V. G. Boltianski. The exponential function
25	Школа в «Кванте» Физика 8, 9, 10	Kvant's school Physics 8, 9, 10
30	Математика 8, 9, 10	Mathematics 8, 9, 10
33	Избранные школьные задачи	Selected school problems
35	«Квант» для младших школьников Задачи	Kvant for younger school children Problems
36	Б. А. Розенфельд. Откуда произошли названия звезд и созвездий	B. A. Rozenfeld. Where do the names of stars and constellations come from
40	Задачник «Кванта» Задачи М886 — М890; Ф898 — Ф902	Kvant's problems Problems M886 — M890; P898 — P902
43	Решения задач М871 — М875; Ф883 — Ф886	Solutions M871 — M875; P883 — P886
53	Практикум абитуриента В. А. Данилин. Передача электроэнергии на расстояние	College applicant's section V. A. Danilin. Long-distance transmission of electric energy
56	Олимпиады X Всероссийская олимпиада школьников	Olympiads 10th All-Russian school olympiad
60	Задачи Московской городской математической олимпиады школьников	Problems of the Moscow school mathematics olympiad
61	Ответы, указания, решения Смесь (13, 34) Шахматная страничка ЭВМ против гроссмейстера (3-я с. обложки)	Answers, hints, solutions Miscellaneous (13, 34) The chess page Computer vs. grandmaster (3rd cover page)

Фотография, воспроизведенная на первой странице обложки, — хорошая иллюстрация к вопросам в перечне электрической энергии по проводим (см. заметку «Интюзиный и переломный электрический ток» на с. 28 и статью «Источники электроэнергии на расстоянии»).



Беседа с академиком С. П. Новиковым

Из богатого талантами поколения математиков, вошедших в науку в конце 50-х годов и в начале 60-х годов, научные успехи Сергея Петровича Новикова относятся, пожалуй, к числу наиболее впечатляющих. Начав с одной из самых трудных и абстрактных областей математики — современной алгебраической топологии, С. П. Новиков защитил кандидатскую диссертацию в 25 лет, докторскую в 27, был избран членом-корреспондентом Академии наук в 28 лет и академиком в 43 года. В 1967 году Сергей Петрович получил Ленинскую премию, а в 1970 году на Всемирном конгрессе математиков С. П. Новиков стал первым советским лауреатом премии Филдса, присуждаемой раз в четыре года ведущим математикам мира (в возрасте до 40 лет). Сейчас Сергей Петрович совмещает работу в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау (его работы связаны с математической физикой, в частности, с теорией солито-

нов) и в Математическом институте им. В. А. Стеклова с заведыванием кафедрой высшей геометрии и топологии в Московском университете.

Сергей Петрович, член редколлегии журнала «Квант», ответил на вопросы нашего корреспондента А. Б. Сосинского у себя дома. Беседа проходила в уютном рабочем кабинете, целиком уставленном книгами (не только по математике!), живо и непринужденно. Мы воспроизводим здесь (практически без редакционных изменений) магнитофонную запись этой беседы, лишь добавив в виде сносок несколько пояснений к ответам Сергея Петровича.

— Сергей Петрович, когда вы всерьез заинтересовались математикой? Что больше повлияло на этот выбор: школа, олимпиады, семья?

— Как вы знаете, я происхожу из математической семьи^{*)}. Влияние семьи я бы, конечно, поставил на первое место. Нельзя сказать, чтобы я серьезно начал увлекаться математикой в школе; но во всяком случае я много

^{*)} Отец Сергея Петровича, академик П. С. Новиков (1901—1975), — выдающийся специалист по теории функций и множеств, алгебре и математической логике; мать, Л. В. Келдыш (1904—1975), — доктор физико-математических наук, известный специалист по теории множеств и геометрической топологии.

о ней знал — профессию математика я себе представлял. Это, наверное, было решающим в моем выборе. А увлекаться математикой по-настоящему я начал на первом курсе университета. Хочу заметить, что наша школа — средняя школа № 330 г. Москвы — в те годы была первоклассной, дававшей хорошее общее образование (включая даже латынь, которую я, правда, забыл).

— Участвовали ли вы в олимпиадах?

— В олимпиадах я поучаствовал в младших классах — в классах 5-м, 6-м, их тогда в Москве устраивал Институт усовершенствования учителей. Участвовал и в олимпиаде, организованной в Московском университете, но, получив в 7-м классе вторую премию (в 1952 году), я потерял к этому интерес. Хотя в дальнейшем я ходил на кружки и олимпиады, но активности не проявлял и блистательных результатов не показывал.

— Сергей Петрович, были ли вы прилежным учеником?

— Учился я прилично: без троек. Но круглым отличником никогда не был.

— Как вы выбрали, в университете, свою будущую научную специальность внутри самой математики?

— В наше время на мехмате*) была очень разумная система предоставления тем курсовых работ уже на втором курсе. Тогда к моменту распределения по кафедрам (в начале третьего курса) студенты были хоть минимально научно подготовленными. Все мы слушали спецкурсы и участвовали в работе спецсеминаров, даже «полутворческих», уже на первом курсе. Существовавшее тогда математическое образование хорошо подготавливало к выбору научной специальности. При этом важную роль, у меня например, сыграло желание заняться каким-то совсем другим кругом проблем, не теми, которыми в основном занималось старшее поколение. Мне хотелось заняться не теорией множеств и теорией функций действительного переменного, не общей алгеброй и математической логикой, но какими-то современными, совсем другими областями. Вот так я выбрал себе алгебраическую топологию. Немалую роль сыграло то, что блестящий профессор, вскоре лауреат Ленин-

ской премии, Михаил Михайлович Постников, работавший в этой области, мой будущий научный руководитель, читал нам замечательные лекции на первом курсе. Среди наших лекторов первого курса отмечу еще широко известных ученых Борнса Николаевича Делоне и Александра Яковлевича Хинчина, членов-корреспондентов АН СССР. И хотя это обстоятельство сейчас недооценивают, замечу, что тот состав преподавателей, ведущих упражнения (семинарские занятия) на первом курсе, который был у нас, сам за себя говорит. У нас вели упражнения Андрей Петрович Ершов, известный ныне специалист по программированию, Евгений Фролович Мищенко, теперь известный специалист по теории управления, оба они стали членами-корреспондентами АН СССР, Владимир Андреевич Успенский, сейчас профессор МГУ, хороший специалист по математической логике. Они много рассказывали нам о науке. Вот это и определило подход к выбору специальности, именно, я бы сказал, подход. Нас учили, как нужно выбирать себе область исследований, и что в первую очередь надо выбирать себе современного и талантливого ученого в руководители.

— Были ли у вас трудности на пути становления ученым?

— Административных трудностей у меня не было — жизнь сама в административном плане шла навстречу. А научные трудности были. Они были связаны с тем, что исследования в алгебраической топологии у нас в тот период сильно ослабли. Несмотря на то, что в мировой науке современная топология приобретала все большее и большее влияние на математику, у нас в Москве во второй половине 50-х годов почти не было исследований в этой области. Это и было главным барьером, и нам приходилось самостоятельно, в определенном смысле, начинать «влезать» в современную науку.

— Когда вы говорите: «нам», кого вы имеете в виду?

— Я имею в виду небольшой круг своих однокурсников, которые избрали себе не традиционные области исследования, а именно современную топологию.

— Многие читатели «Кванта» знают и даже романтизируют профессию физика-теоретика. А чем занимаетесь вы,

*) Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, где С. П. Новиков был студентом в 1955—1960 гг.

Сергей Петрович, зачем нужны «математики-исследователи»? Если вопрос поставить совсем грубо, за что (кроме преподавания) вам деньги платят?

— Это очень интересный вопрос. Можно сказать так: чисто теоретический математик, работающий внутри математики и никогда не выходявший к каким бы то ни было приложениям, ответа на этот вопрос не знает (насколько я представляю себе своих коллег). Это и было, в известном смысле, причиной того, почему я обратился к кругу физиков-теоретиков, изучал эту область и много лет с ними работал. Но на основании длительного опыта работы вместе с физиками, я могу сказать, что идеи чистой математики — это, безусловно, исключительно важная компонента прогресса научной культуры. Без фундаментальных математических исследований человечество обойтись не может.

Сам я много лет работал как консультант-математик среди физиков-теоретиков, обсуждая вместе с ними многочисленные математические вопросы. Нужно сказать, что физики-теоретики высоко квалифицированы математически, обсуждать с ними приходится только те вопросы, которые касаются неизвестных им, более новых разделов математики. Что касается математики, которой эти специалисты пользуются ежедневно, то здесь они в помощи не нуждаются, зная ее не хуже самих математиков. Кроме того, я потратил много усилий на выделение для себя чисто математических задач, которые могли бы быть полезны для теоретической физики.

Ну и, конечно, много внимания нами уделялось извлечению такого рода математических задач, которые полезны для развития самой математики. Работа с физиками — это комплекс сложный, многосторонний, и я думаю, что это один из наиболее эффективных видов работы для математиков.

— Что вы можете сказать о математиках старшего поколения?

— Мы ценим выдающиеся достижения математиков старшего поколения. Нет ни малейшего сомнения, что в научной культуре, которая возникла в 20-е, 30-е годы у нас в Москве, математика сыграла исключительно важную роль. Математическая школа в нашей стране в этот период росла очень бурно, и ее достижения общеизвест-

ны*). Математиков моего поколения, выросших на рубеже 50-х — 60-х годов, безусловно, можно считать ответвлением того древа, могучего древа, которое образовалось в Московской и вообще Советской математической школе за 20-е, 30-е, 40-е годы. Но математики нового поколения, во всяком случае их значительная часть, подвергли свою математическую идеологию существенной перестройке. Идеи, связанные с теорией функций действительного переменного, теорией множеств, общей алгеброй, математической логикой, уже сейчас представляются в значительной степени разобранными. Это естественно. Уважение к заслугам прошлого поколения вместе с ясным сознанием того, что нам надо переориентироваться на более современный круг идей, совершенно других, более близких к естественным наукам, — это, пожалуй, является главным в моем отношении к старшему поколению.

— Какие качества вы хотели бы видеть у своих учеников?

— В первую очередь я хотел бы у них видеть научную самостоятельность — чтобы они могли ставить перед собой научные проблемы, а не только получать их из рук старших.

Во-вторых, я бы считал крайне важным также умение найти разумное сочетание между математикой и естественными и прикладными науками — не забывать ни самой теоретической математики, ни ее приложений.

И третье, я считаю, что математики более молодого поколения должны преодолеть начавшееся еще в 20-х годах расхождение между математикой и математическим аппаратом физики. Пока еще в образовании это не преодолено; математики еще часто не знают математического аппарата физики, во всяком случае большинство, те, которые не посвятили этому десятилетия личной работы. Так что третье я бы сформулировал так: молодым математикам нужно научиться понимать ту реальную математику, которая эффективно используется в других науках.

Разумеется, я хотел бы видеть своих учеников честными, порядочными людьми, принципиально относящимися к научным и общественным вопросам.

* См., например, статью П. С. Александрова в «Кванте», 1977, № 10, с. 13.

— Часто приходится слышать, что в науке, в том числе математике, сегодня преобладает узкая специализация. В то же время, о таких математиках XX века, как Пуанкаре, Гильберт^{*}, Бурбаки, говорят как об «универсалах». Какова сейчас в этом отношении ситуация в математике?

— В вашем вопросе есть какая-то странная ошибка. Математика по фамилии Бурбаки^{**}) никогда не существовало, а составлявшие его талантливые ученые, и даже наиболее крупные среди них, не были универсалами напоподобие Пуанкаре и Гильберта. Лично мне особенно симпатична фигура Пуанкаре, наиболее близкого к естественным наукам.

Мне кажется, что узость специализации многих математиков связана с чрезмерно абстрактным и переусложненным языком. Я бы сказал, что эта узость происходит также из-за ослабления связи теоретической математики с приложениями, которое имело место на определенном этапе. Мы лишились четкого критерия того, что нужно знать обязательно. Каждый знает только то, что он хочет, или то, что ему приказал выучить научный руководитель. Пока естественно-научный характер математического образования не будет восстановлен, этот универсализм возродить не удастся.

— Математикам не дают Нобелевские премии. Справедливо ли это?

— Я не верю в известные анекдоты, которые математики на этот счет рассказывают. По завещанию Нобеля, премии не дают также ни физикам-теоретикам, ни биологам. Формулировка его завещания совершенно ясная. Премии, учрежденные А. Нобелем, изобретателем динамита, присуждаются за работы типа изобретений, непосредственно полезных человечеству. Биологи получают Нобелевскую премию за исследования, относящиеся, по существу, к медицине, на самом деле нет Нобелевской премии по биологии. Когда физики-теоретики получают Нобелевскую премию, это некоторое смещение, которого они добивались десятилетиями. Завещание состоит в

том, что премии получают, за изобретения, но не за научные открытия. Если Нобелевскую премию завещатель не дал биологии и теоретической физике, почему она должна была достаться математике? Я рекомендовал бы математикам не обижаться на то, что инженер А. Нобель не помянул математику в своем завещании. Она от этого не становится хуже.

— Есть ли у вас серьезные увлечения, кроме науки? Хобби, спорт, досуг?

— Спорт для нас, ученых, существует, как мы считаем, для поддержания здоровья и вряд ли я смогу сказать вам что-то новое об этом.

А если говорить об интеллектуальных увлечениях, я с какого-то времени любил исторические книги, но в первую очередь не книги, написанные историками, а книги — подлинники, написанные самими действующими людьми, древними и современными (к сожалению, только по-русски или по-английски). Потому, что мне было любопытно понять, как они жили и действовали, чем они от нас отличались, чем были на нас похожи.

Для меня чтение исторических книг — просто любимое чтение; я не советовал бы, однако, никому из математиков путать увлечения такого рода с деятельностью настоящих профессионалов.

— Что вы можете посоветовать тем нашим читателям, которые всерьез интересуются физикой и математикой?

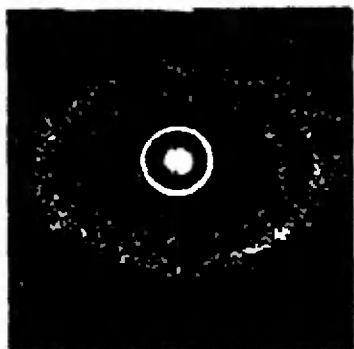
— Перед человеком, который хочет стать ученым, стоят две задачи. Первая из них — научиться творчески работать и совершать хотя бы небольшие научные открытия в определенной специальной области, на грамотном научном уровне. Вторая — не утонуть в узкой области, с которой (возможно, случайно) начал. Эти две задачи нужно решать гармонично. Одна из них требует воспитания и тренировки творческих навыков, другая — затраты громадного труда на приобретение образования, хотя этот труд может показаться на первый взгляд бесполезным, исходя из сиюминутных интересов. Сочетание этих двух компонентов творческого процесса есть то, что необходимо ученому на длительный период.

^{*}) Анри Пуанкаре (1854—1912), французский математик, физик; Давид Гильберт (1862—1943), немецкий математик.

^{**}) Никола Бурбаки — коллективный псевдоним группы математиков (в основном французских), имевших целью объединить все изложение математики на теоретико-множественной основе.



Кольца вокруг Солнца



Когда в 1610 году Галилей впервые направил на небо телескоп, он, в частности, обнаружил несколько странный вид планеты Сатурн. Она казалась состоящей из трех звезд, как бы касающихся друг друга, причем средняя звезда выглядела примерно в три раза больше боковых («высочайшую*) планету тройною наблюдал»). Через пятьдесят с небольшим лет Гюйгенс с помощью более сильного телескопа объяснил не-

обычный вид Сатурна тем, что он, единственный на небе, носит красивое украшение — кольца (при меньшем увеличении кольца представлялись боковыми звездами). Первое теоретическое исследование колец Сатурна принадлежит Максвеллу. В 1859 году он закончил работу об устойчивости колец, в которой доказал, что кольца не являются сплошными, а состоят из множества отдельных частиц. Это была первая работа Максвелла, удостоенная премии Лондонского королевского общества.

Лишь совсем недавно Сатурн потерял свою монополию на кольца. В 1977 году были открыты кольца Урана (обнаруженные по затмению блеска звезд, оказавшихся для земного наблюдателя позади колец), а в 1979 году из космоса были сфотографированы кольца Юпитера (невидимые с Земли.*). Теперь кольца у планет Солнечной системы перестали быть коллекционной редкостью, и их существование стало почти обычным. Правда надо признать, что законы движения мелких частиц и крупных обломков, из которых состоят кольца, таят в себе много загадок.

Пожалуй, самое неожиданное в этом ряду событие произошло в прошлом, 1983 году, когда было доказано существование колец и у главы планетной системы — самого Солнца. Такая гипотеза была высказана еще давно, в 1927 году, но лишь в 1967 году кольца были впервые замечены.

Во время солнечного затмения в июне 1983 года группа японских и индонезийских ученых зарегистрировала инфракрасное излучение от пылевого диска вокруг Солнца. Согласно расчетам, радиус диска в 4 раза больше радиуса Солнца (около 3 млн км), его масса около миллиона тонн, а температура примерно 1300 К. Астрономы предполагают даже, что излучает не диск, а целая яйцеподобная оболочка, окружающая Солнце, и что она образовалась из частиц, захваченных Солнцем из космоса за последние 10 миллионов лет и раскаленных до состояния свечения солнечным теплом.

Все это, конечно, только первые данные, но они очень интересны и еще раз подтверждают мысль о том, что небесные объекты живут своей космической жизнью, только события у них протекают, с нашей точки зрения, чрезвычайно медленно.

Я. С.

* Во времена Галилея Сатурн считался своей удаленной от Солнца планетой (Уран, Нептун и Плутон были открыты позже).

* Существование этих колец было предсказано еще в 60-е годы советским астрономом С. К. Всехсвятским.

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

Продолжается подписка на журнал «Квант» на 1985 год.

Журнал рассчитан на учеников 6—10 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия, и всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения

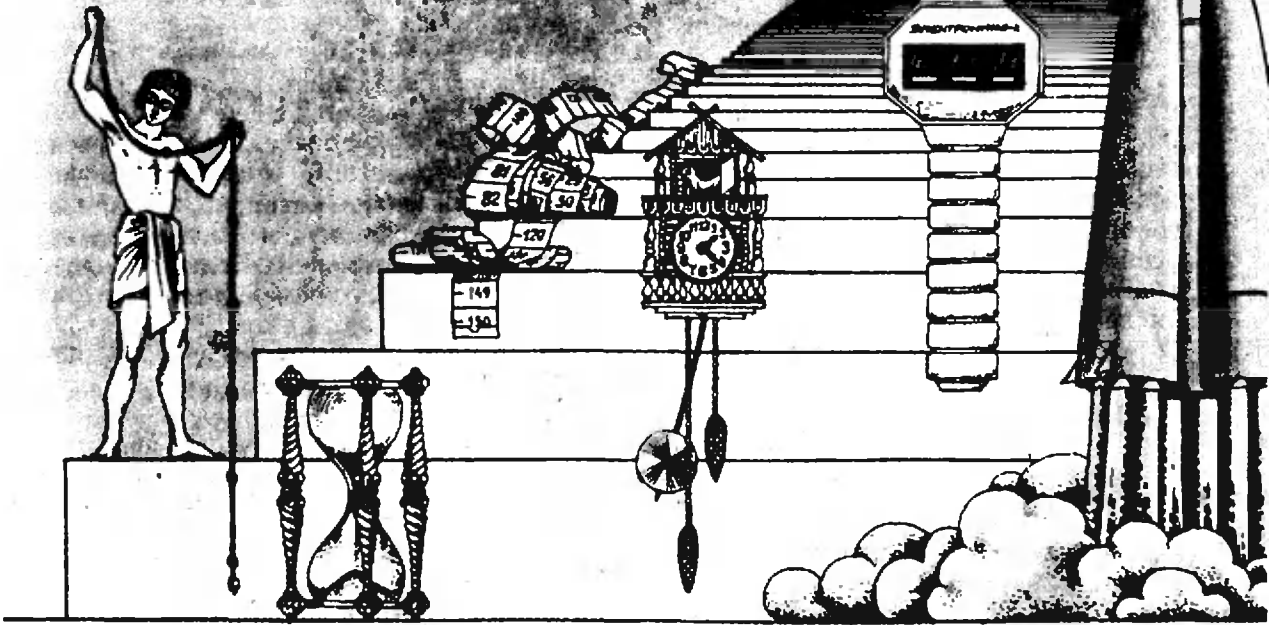
различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука».

Цена номера 40 коп. Стоимость годовой подписки 4 руб. 80 коп. Индекс журнала в каталоге «Союзпечати» 70465.

Как вводятся физические величины

Академик И. К. КИКОИН



Физика отличается от других естественных наук тем, что объективные закономерности, устанавливаемые при изучении физических явлений природы, выражаются количественно (математически). Для этого физики вводят величины, характеризующие изучаемое явление или процесс. Экспериментально устанавливаются математические соотношения между величинами в виде соответствующих уравнений или формул, которые называются физическими законами природы.

Как же вводятся физические величины? Для каждой физической величины должен быть указан способ ее измерения. Точнее, нельзя вводить физическую величину, не указав, по крайней мере, принципиальный способ ее измерения. Поясним это некоторыми примерами. Начнем с величин, используемых в механике.

1. Скорость

Понятие скорости введено с незапамятных времен. И можно себе

представить, как это было сделано. Возможно, какой-то человек, располагающий прибором для измерения времени — это могли быть, например, солнечные часы — наблюдал за движением караванов в пустыне. Он определил, какой путь проходит караван за определенный промежуток времени. Может быть, он сделал это, сосчитав число шагов верблюда. Шаг верблюда — это мера измерения длины. Сопоставив числа, выражающие промежуток времени и пройденный путь, он установил любопытное соотношение между ними. Оказалось, что отношение путей, пройденных караваном за любые промежутки времени, равно отношению этих промежутков времени. На современном языке это означает следующее: если обозначить путь, пройденный караваном за промежуток времени t_1 , через s_1 , а путь, пройденный караваном за

промежуток времени t_2 , через s_2 , то $\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1}{t_2}$. Очень любопытный факт! Наблюдатель, вероятно, рассказал об



этом многим из своих знакомых, и, возможно, нашелся человек, который сообразил, что указанное соотношение особого смысла не имеет, потому что оба отношения, и справа и слева, — числа отвлеченные, и ничего нет удивительного в том, что $2=2$ или $3=3$ и т. д. Он предложил переписать это соотношение в виде

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2}$$

и назвал эти отношения скоростью передвижения каравана. Эта величина оказалась полезной, потому что, пользуясь ею, можно предсказать, на каком расстоянии от начального пункта движения окажется караван через любой промежуток времени. Действительно, обозначив $\frac{s}{t} = v$, сразу можно найти, что $s=vt$. Таким образом, была введена величина, которая называется скоростью. Не следует думать, что уравнение $s=vt$ есть некий закон природы. Это уравнение следует из определения того, что такое скорость. Можно было бы с таким же успехом назвать скоростью, например, отношение $\frac{s^2}{t^2} = u$.

И тогда тоже можно было бы определить величину s из уравнения $s=t\sqrt{u}$. Но условились, именно условились, называть скоростью отношение $\frac{s}{t}$.

2. Ускорение

Бывают и такие движения, при которых отношение пройденных путей за любые промежутки времени равно отношению квадратов этих промежутков времени. На современном языке это записывается следующим равенством:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}, \quad (1)$$

где s_1 и s_2 — расстояния, пройденные движущимся телом за промежутки времени t_1 и t_2 соответственно. Такого, например, движение тел, свободно падающих в вакууме, или движение тел вниз по наклонной плоскости без трения.

Такие движения изучал знаменитый итальянский физик Галилей. Он записал уравнение (1) в виде $\frac{2s_1}{t_1^2} = \frac{2s_2}{t_2^2}$ * и назвал эти отношения и вообще отношение $\frac{2s}{t^2}$ ускорением движущегося тела (материальной точки). Понятие ускорения связано, очевидно, с тем, что сама скорость движущегося тела может меняться со временем. Если скорость пропорциональна времени, то есть $v = v_0 + at$, то $a = \frac{v-v_0}{t}$, где $(v-v_0)$ — изменение скорости за промежуток времени t .

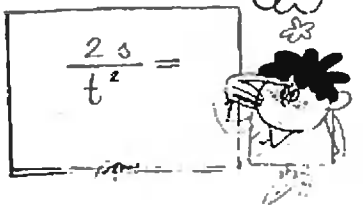
Таким образом, была введена новая физическая величина — ускорение.

Известная формула $s = \frac{at^2}{2}$ (предполагается, что начальная скорость тела равна нулю) также не выражает никакого закона природы, а есть следствие принятого определения ускорения.

В дальнейшем было введено уточнение: для правильного описания различного рода движений необходимо принять во внимание, что перемещение s , скорость v и ускорение a — величины векторные.

*1 Коэффициент 2 вводится из чисто математических соображений.

**ГАЛИЛЕЙ
НАЗВАЛ ЭТО
ОТНОШЕНИЕ
УСКОРЕНИЕМ**



3. Масса

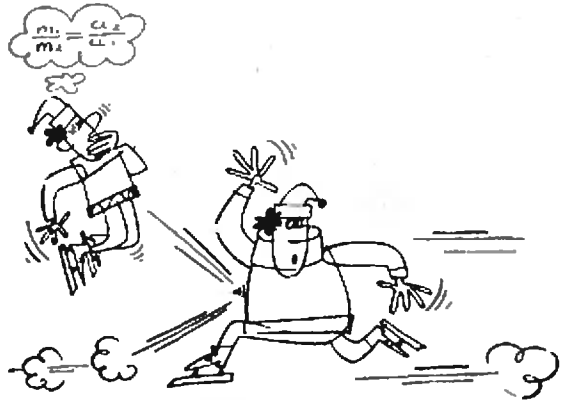
Из ряда опытов, проведенных в самых разных условиях, можно сделать вывод, что тело, бесконечно удаленное от всех других тел, не может двигаться с ускорением, если рассматривать движение относительно некоторых вполне определенных систем отсчета, которые называются инерциальными системами отсчета. Такое тело находится либо в состоянии покоя, либо движется равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета. Если же тело движется с ускорением, то всегда можно указать другое тело или другие тела, влияние которых вызывает ускоренное движение данного тела. В таких случаях говорят, что тела взаимодействуют друг с другом. Рассмотрим простейший случай — когда взаимодействуют два тела. Опыт показывает, что в этом случае оба тела получают ускорения, направления которых взаимно противоположны. Что касается модулей ускорений обоих тел, то они могут быть различны. Но отношение модулей ускорений обоих тел остается постоянным, независимо от того, в каких условиях происходит взаимодействие. Так, оно не зависит от взаимного расположения этих тел в пространстве, не зависит от времени, не зависит от скоростей обоих тел, не зависит от окружающей среды и т. д. Это отношение зависит только от свойств самих взаимодействующих тел.

В физике изучают только такие свойства тел, которые могут быть выражены числом, и для изучения тех или иных свойств в физике вводятся физические величины, характеризующие эти свойства. Когда речь идет об ускорении тела, вызванном влиянием на него другого тела, то это ускорение может быть большим или меньшим. Чем больше ускорение тела, тем, очевидно, больше изменение его скорости за данный промежуток времени. И наоборот, если ускорение тела мало, то это значит, что за тот же промежуток времени его скорость изменяется мало. Скорость не может меняться мгновенно — для всякого изменения скорости тела требуется некоторый промежуток времени.

Ускорения двух взаимодействующих тел вызваны их взаимодействием. Очевидно, что промежуток времени, в течение которого изменяются скорости двух взаимодействующих друг с другом тел,



**ЧЕМ БОЛЬШЕ МАССА
— ТЕМ МЕНЬШЕ
УСКОРЕНИЕ**



один и тот же для обоих тел — это время их взаимодействия. Ясно, что тому телу, у которого ускорение меньше, следует приписать большую инертность — его движение более похоже на движение по инерции. Ведь если бы ускорение тела равнялось нулю, то это означало бы, что тело движется по инерции (с постоянной по величине и направлению скоростью). А это противоречило бы предположению о взаимодействии тел. Из двух взаимодействующих тел более инертно то тело, у которого ускорение меньше, и наоборот. Следовательно, инертность есть свойство тел, которое нужно характеризовать некоторой величиной. Такой величиной служит масса тела.

Свойства тел, от которых зависит отношение их ускорений при взаимодействии друг с другом, мы назовем *массами* этих тел. Массу тела принято обозначать буквой m . Таким образом, мы ввели новую величину — массу. Но мы еще не указали способа измерения массы тела. Попытаемся это сделать.

Припишем одному из двух тел массу m_1 , другому — массу m_2 , а ускорения этих тел при взаимодействии обозначим через \ddot{a}_1 и \ddot{a}_2 . Мы знаем из опыта, что отношение модулей ускорений всегда

постоянно. Условимся, что отношение $\frac{a_2}{a_1}$ равно отношению $\frac{m_1}{m_2}$, то есть

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (2)$$

Это означает, что тело большей массы получает меньшее ускорение и наоборот. Ускорения измерять мы умеем, поэтому можно определить из (2) отношение масс обоих тел. Именно *отношение* масс! Но как найти значение массы каждого из тел? Вспомним, как поступают при измерении любой физической величины. Как, например, измеряется длина тела? Для этого, как известно, выбирается эталон, длина которого принимается за единицу (в СИ — 1 метр). Тогда число, выражающее длину любого тела, определяется отношением этой длины к 1 м. Так же мы поступим и в случае измерения массы. Выберем тело, которое будет служить эталоном, то есть масса которого будет принята за единицу (в СИ — 1 килограмм). Обозначим массу эталона m_s . Теперь уже нетрудно определить массу m любого тела. Для этого нужно привести это тело во взаимодействие с эталоном и измерить ускорения обоих тел.

Обозначим ускорение эталона через a_s , ускорение тела, масса которого измеряется, через a . Тогда в соответствии с формулой (2) пишем

$$\frac{m}{m_s} = \frac{a_s}{a}.$$

$$m = \frac{a_s}{a} m_s, \quad (3)$$

то есть *масса тела равна массе эталона, умноженной на отношение ускорения эталона к ускорению тела.*

Можно было бы, конечно, написать, что отношение масс двух тел равно квадрату обратного отношения их ускорений, корню квадратному из этого отношения или другой функции от этого отношения. Но оказалось целесообразным дать такое определение массы, которое отвечает соотношению (2). Причина этому следующая. Пользуясь соотношением (2), мы показали, как можно измерить массу любого тела, используя эталон массы. Тогда, измерив по формуле (3) массу нескольких тел, можно на опыте показать, что масса нескольких тел, сложенных вместе, равна сумме масс всех слагаемых тел. Если бы мы определили массу тела,

например, так, что отношение масс равнялось бы квадрату обратного отношения их ускорений, то масса нескольких тел не равнялась бы сумме масс этих тел — как говорят, масса не обладала бы свойством аддитивности. Так что определение массы, отвечающее соотношению (2), вполне обосновано.

4. Сила

Выше было указано, что ускорение любого тела возникает при взаимодействии этого тела с другими телами. Таким образом, причиной ускорения, которое получает данное тело, служит влияние на него других тел. Нужно найти физическую величину, которая служила бы мерой этого влияния. Эту физическую величину называли *силой*. Поэтому вместо того, чтобы говорить, что тело приобретает ускорение под влиянием других тел, говорят кратко — на тело действует сила. Как выразить силу числом? Ответ на этот вопрос дал великий английский физик Ньютон. Он сформулировал один из важнейших законов механики, который получил название второго закона Ньютона.

Если обозначить силу через \vec{F} , то второй закон Ньютона выражается уравнением

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (4)$$

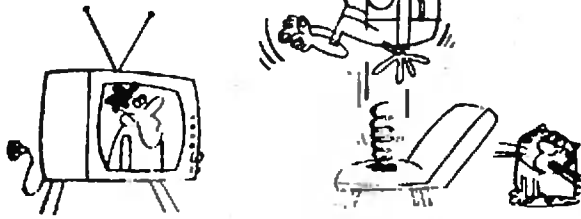
где \vec{a} — ускорение тела, а m — его масса. Не нужно думать, будто из уравнения (4) следует, что сила \vec{F} , действующая на тело, зависит от его массы или ускорения. Значение силы не зависит от свойств тела или от характера его движения. Оно определяется характером взаимодействия данного тела с другими телами.

К счастью, в природе имеется не так много различных типов взаимодействия. При изучении же законов механики мы сталкиваемся всего с двумя типами сил — это сила всемирного тяготения (гравитационная сила) и электростатическая сила.*)

Сила всемирного тяготения определяется формулой

*1) Существуют также магнитные силы, которые своим происхождением обязаны движению электрических зарядов. Однако обычно они малы по сравнению с электростатическими силами.

ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЕЛО ПОЛУЧАЕТ УСКОРЕНИЕ.



$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(закон всемирного тяготения Ньютона). В частности, в условиях Земли сила всемирного тяготения проявляется в виде силы тяжести, действующей на любое тело и направленной к центру Земли.

Электростатическая сила определяется формулой

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

(закон Кулона). В механике электрические силы, характеризующие взаимодействие между заряженными частицами, из которых состоят тела, проявляются в виде сил упругости и сил трения. Сила упругости возникает при деформации тела, то есть при изменении взаимного расположения частей тела, например, при растяжении или сжатии пружины. Сила трения возникает, как известно, при движении соприкасающихся тел относительно друг друга.

Таким образом, в механике обычно изучаются три вида сил: сила всемирного тяготения, сила упругости и сила трения.

Если любая из этих сил, приложенная к телу массы m , вызывает его ускорение, равное \vec{a} , то значение этой силы всегда равно $m\vec{a}$. Другими словами, если телу массы m нужно сообщить ускорение, равное \vec{a} , то к этому телу нужно приложить силу \vec{F} , равную $\vec{F} = m\vec{a}$ (ясно, что направление прилагаемой силы \vec{F} должно совпадать с направлением ускорения \vec{a} , которое нужно сообщить телу). При этом сила \vec{F} может быть силой тяжести (силой

всемирного тяготения), силой упругости, силой трения или, наконец, геометрической суммой этих сил. В этом и заключается смысл второго закона Ньютона.

Попробуем выяснить, что послужило основанием для формулировки второго закона Ньютона. Представим себе две материальные точки A и B , взаимодействующие друг с другом, то есть сообщающие друг другу ускорения. Опыт показывает, что направления этих ускорений взаимно противоположны.

Очевидно, обе взаимодействующие материальные точки «равноправны» в том смысле, что можно взаимно поменять их обозначения. Другими словами, ни одна из взаимодействующих точек не имеет никаких преимуществ перед другой. Отсюда следует, что должна существовать физическая величина, одинаковая для обеих взаимодействующих материальных точек. Нетрудно найти такую величину. Из соотношения (2) следует:

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A},$$

где m_A и m_B — массы взаимодействующих материальных точек, a_A и a_B — модули их ускорений. Следовательно,

$$m_A a_A = m_B a_B. \quad (5)$$

Вот мы и нашли величину, которая одинакова для обоих взаимодействующих тел. Эта величина характеризует взаимное влияние материальных точек друг на друга, вызывающее их ускорения. Существование такой величины и послужило основанием для формулировки второго закона Ньютона.

Учитывая, что ускорение — величина векторная, перепишем соотношение (5) в виде

$$m_A \vec{a}_A = -m_B \vec{a}_B.$$

Обозначив $m_A \vec{a}_A = \vec{F}_A$ и $m_B \vec{a}_B = \vec{F}_B$, получим

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B.$$

Векторные величины \vec{F}_A и \vec{F}_B Ньютон назвал *силами*. Как видно, *сила, с которой материальная точка A действует на материальную точку B , равна по модулю, но противоположна по направлению силе, с которой материальная точка B действует на материальную точку A* . Это утверждение выражает третий закон Ньютона. Иногда кратко

этот закон формулируют так: действие равно противодействию.

Из всего сказанного о физической величине, называемой силой, следует, что единственный результат действия силы на тело (материальную точку) — это ускорение, приобретаемое телом под действием этой силы.

5. Импульс

Мы уже знаем, что при взаимодействии двух тел оба тела получают ускорения, которые зависят от их масс. Но можно найти величину, которая будет одинакова для обоих взаимодействующих тел и не будет зависеть от масс этих тел.

Эту величину мы найдем, переписав второй закон Ньютона — $\vec{F} = m\vec{a}$ — в несколько измененном виде. Вспомним, что ускорение тела можно записать как $\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$. Тогда $\vec{F} = m \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$, откуда

$$\vec{F}t = m\vec{v} - m\vec{v}_0.$$

Величина $m\vec{v}$ получила название импульса тела, а величина $\vec{F}t$ — импульса силы.

Теперь мы можем сказать, что при взаимодействии двух тел изменяется импульс каждого из них. Но в соответствии с третьим законом Ньютона импульсы сил, с которыми тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Поэтому и изменения импульсов обоих тел также равны по модулю и взаимно противоположны по направлению. Значит, *геометрическая сумма импульсов взаимодействующих тел остается постоянной при любом взаимодействии этих тел.* Это утверждение называют законом сохранения импульса. Можно показать, что закон сохранения импульса справедлив не только для двух, но и для любого числа взаимодействующих друг с другом тел. Это — один из важнейших законов природы.

6. Работа и энергия

Импульс силы мы определили как произведение силы \vec{F} на время ее действия t . По аналогии можно ввести величину, равную произведению силы, действующей на тело, на перемещение тела. Эту величину называют *работой* силы. В том случае, когда направления векторов силы \vec{F} и перемещения \vec{s} совпадают, работа силы равна Fs . В общем же случае, когда направление силы и направление перемещения тела составляют угол α друг с другом, выражение для работы имеет вид

$$A = Fs \cos \alpha.$$

В отличие от импульса тела, который есть величина векторная, работа — величина скалярная.

Можно доказать, что работа сил, действующих на тело, всегда равна

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \quad (6)$$

Величину $\frac{mv^2}{2}$ называют *кинетической энергией* движущегося тела. Равенство (6) выражает так называемую теорему о кинетической энергии: *изменение кинетической энергии тела равно работе действующих на тело сил.* Напомним,



**САДНТЬСЯ НА КАЧЕЛИ
МОЖНО
ПО-РАЗНОМУ**





что взаимодействие тел можно характеризовать не только силой, но и *потенциальной энергией*. Для потенциальной энергии справедлива следующая теорема: *изменение потенциальной энергии взаимодействующих тел, взятое с обратным знаком, равно работе сил взаимодействия*.

Таким образом, мы ввели три важные физические величины — работу сил, кинетическую энергию тела и потенциальную энергию взаимодействия тел.

Нетрудно показать, что для системы тел, взаимодействующих друг с другом силами тяготения и упругости, справедлив закон сохранения полной энергии: *сумма потенциальной и кинетической энергий взаимодействующих друг с другом тел остается неизменной*. Закон сохранения энергии и закон сохранения импульса представляют собой наиболее общие законы природы.

Мы привели ряд примеров того, как вводятся физические величины. Из этих примеров видно, насколько важно правильно выбрать физические величины, характеризующие то или иное явление. Мы ограничились только величинами, характеризующими механическое движение.

Рациональное введение физических величин позволило открыть и сформулировать ряд важных законов классической механики (ньютонической механики). Эти законы нашли широчайшее применение во многих областях техники. По тем же принципам вводятся физические величины и в других разделах физики.

Задача для исследования

ВЫБРАТЬ ВЕРШИННЫ ВЫПУКЛОГО k -УГОЛЬНИКА

Условимся называть систему точек на плоскости точками общего положения, если никакие три из этих точек не принадлежат одной прямой. Ясно, что 4 точки общего положения на плоскости могут не являться вершинами выпуклого 4-угольника; однако, как нетрудно доказать, если на плоскости имеются 5 точек, то некоторые 4 из них наверняка являются вершинами выпуклого 4-угольника. 6, 7 или 8 точек общего положения можно расположить на плоскости так, что никакие 5 из них не будут являться вершинами выпуклого 5-угольника; однако среди любых 9 точек общего положения наверняка

ка найдутся 5 таких, что они являются вершинами выпуклого 5-угольника. Доказательство этого утверждения несложно, но довольно громоздко. Ему посвящена заметка Г. А. Тонояна («Квант», 1975, № 11, с. 26).

Знаменитому венгерскому математику Палу Эрдешу, члену Венгерской Академии наук и многих других академий и научных обществ разных стран принадлежит задача об определении наименьшего числа $N=N(k)$ такого, что из N точек общего положения на плоскости наверняка можно выбрать k точек, являющиеся вершинами выпуклого k -угольника. С помощью довольно громоздкого перебора возможных вариантов расположения точек на плоскости Эрдэш доказал, что $N(6)=17$: на плоскости можно указать такие 16 точек общего положения, что никакие 6 из них не являются вершинами выпуклого 6-угольника; однако если число точек общего положения равно 17, то среди них 6 вершин выпуклого 6-угольника обязательно найдутся. Таким образом,

$$N(3)=3, N(4)=5, \\ N(5)=9, N(6)=17.$$

Так как $3=2^1+1$, $5=2^2+1$, $9=2^3+1$, $17=2^4+1$, то Эрдэш предположил, что наименьшее число точек общего положения на плоскости, из числа которых можно выбрать k точек, являющихся вершинами выпуклого k -угольника, задается формулой: $N(k)=2^{k-1}+1$.

Эта гипотеза Эрдеша выглядит привлекательно: формулировка ее совсем проста. Однако, увы! — на сегодняшний день не видно никаких подходов к решению задачи об определении числа $N(k)$, то есть к доказательству (а, может быть, и напротив — к опровержению) гипотезы Эрдеша (самому же Эрдешу принадлежит лишь оценка числа $N(k)$, с жалением, довольно далекая от гипотетического результата). Было бы интересно получить хорошие оценки $N(k)$ сверху и снизу.

И. Я.

Решение уравнений на микрокалькуляторе

Б. К. ПРИХОДЬКО

— Хорошая машинка, — сказал один из моих учеников, закончив вычисления. — Жаль только, что корни кубические извлекать не умеет.

— Почему же не умеет? — возразил я. — На этой машинке можно извлекать корни даже более высоких степеней. Надо лишь подобрать соответствующий алгоритм, то есть указать, какие математические операции следует для этого выполнять (и в каком порядке).

О построении алгоритмов для решения некоторых алгебраических уравнений на микрокалькуляторе типа «Электроника БЗ-14М» и пойдет речь далее. Желательно читать эту статью, держа в руках калькулятор подобного типа.

Метод итераций

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Если это уравнение имеет действительный корень $x = \xi$, то его часто удается найти (с любой точностью) методом последовательных приближений, или, как иначе говорят, методом итераций.

Рассмотрим кратко сущность этого метода.*) Уравнение (1) заменяют равносильным уравнением вида

$$x = \varphi(x), \quad (2)$$

где функция φ определена и дифференцируема на отрезке, содержащем искомый корень ξ . Далее, выбирают начальное приближение $x_0 \approx \xi$ и находят первое приближение x_1 как значение функции φ при $x = x_0$, то есть $x_1 = \varphi(x_0)$. Затем вычисляют значение φ при $x = x_1$ и получают второе приближение $x_2 = \varphi(x_1)$ и т. д. Приближение x_{n+1} находят по рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Если бесконечная последовательность x_n имеет предел ξ , то, переходя к пределу в уравнении (3), получим $\xi = \varphi(\xi)$. Значит, ξ — корень уравнения (2), а следовательно, и уравнения (1). Геометрическую суть метода иллюстрирует рисунок 1.

На практике вычисления останавливают, когда будет обнаружено, что в границах заданной точности выполняется равенство

$$x_{n+1} = x_n. \quad (4)$$

*) Подробно этот метод описан в статье В. Г. Болтянского в «Кванте», 1983, № 3, с. 16.



Однако будьте осторожны! Выполнение равенства (4) не гарантирует совпадение x_n с корнем ξ с заданной точностью на рассматриваемом отрезке. На рисунке 2 показано, какая неприятность может произойти: последовательность (x_n) сходится к точке η , для которой значение $\varphi(\eta)$ очень близко (в пределах заданной точности) к η , но не совпадает с η , в то время как настоящий корень ξ уравнения расположен в другом месте.

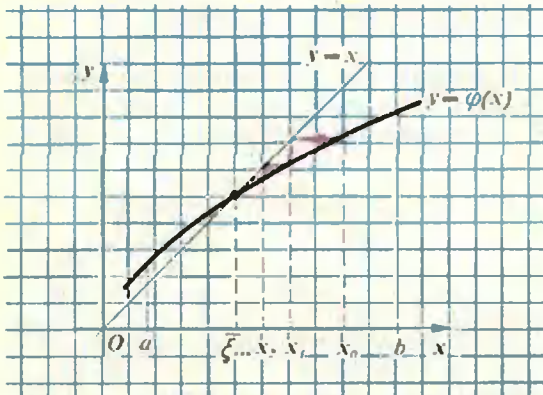


Рис. 1.

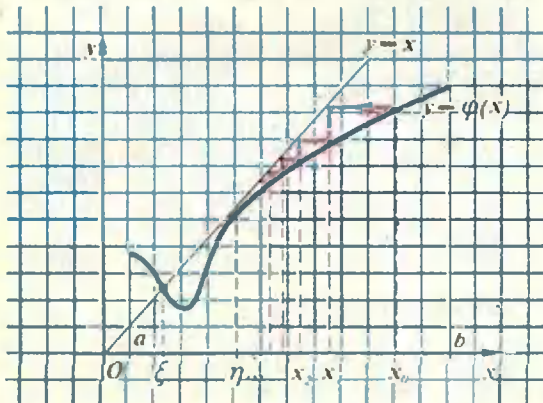


Рис. 2.

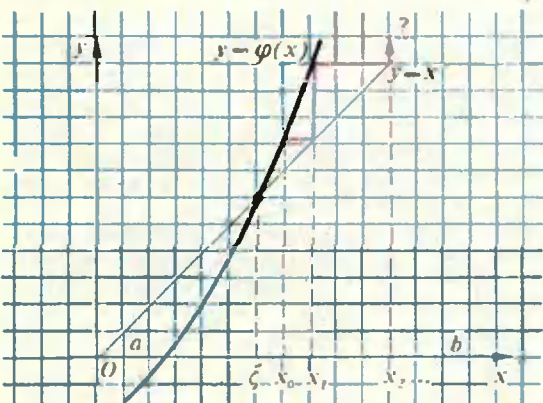


Рис. 3.

Выбор функции φ

Для составления уравнения (2) функцию φ можно выбирать различными способами*), однако не каждый выбор подходит для вычисления корня методом итераций. Мы будем предполагать, что уравнение (1) имеет корень ξ на заданном отрезке $[a, b]$ и что мы это уравнение заменили на равносильное ему уравнение (2). Тогда итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сходится при любом начальном приближении $x_0 \in [a, b]$ к корню уравнения (1), если выполнено следующее условие:

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \text{ при любом } x \in [a, b], \quad (5)$$

где q — фиксированное число.

Мы не будем доказывать это утверждение (см. задачу 10 цитированной выше статьи В. Г. Болтянского), но будем постоянно им пользоваться.

Заметим, что, если условие (5) не выполнено, процесс итераций (3) может быть расходящимся (см. рис. 3).

Доказано, что чем меньше число q , тем быстрее сходится итерационный процесс (3) и тем меньше потребуется последовательных приближений для получения окончательного результата. Поэтому, выбирая функцию φ , необходимо стремиться к тому, чтобы число q было по возможности малым. Если же удастся подобрать функцию φ так, чтобы выполнялось равенство $\varphi'(\xi) = 0$, то итерационный процесс (3) будет сходиться очень быстро.

Но это еще не все. Надо непременно учитывать удобство вычислений на данном калькуляторе. С целью сокращения затрат времени на вычислительную работу, функцию φ следует выбирать так, чтобы процесс вычисления корня по формуле (3) получался цепочным. Под цепочным вычислительным процессом понимают такой процесс, который может быть реализован на данном калькуляторе без записи промежуточных результатов.

В дальнейшем будем конструировать только цепочные вычислительные процессы.

Извлечение корней

Чтобы извлечь кубический корень из положительного числа a , поступим

*) Например, положив $\varphi(x) = f(x) + x$.

следующим образом. Обе части уравнения

$$x^3 = a$$

умножим на x и извлечем корень четвертой степени. Получим

$$x = \sqrt[4]{ax}.$$

Положим $\varphi(x) = \sqrt[4]{ax}$. Тогда формула (3) принимает вид

$$x_{n+1} = \sqrt[4]{ax_n}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Так как

$$\varphi'(x) = \frac{a}{4\sqrt[4]{a^3x^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{\frac{x^3}{a}}}$$

получаем

$$\varphi'(\sqrt[3]{a}) = \frac{1}{4} < 1.$$

При $x > \sqrt[3]{a}$ функция $\varphi'(x)$ убывает. Следовательно, на бесконечном промежутке $[\sqrt[3]{a}, \infty]$ выполняется условие (5), и сходимость итерационного процесса (6) обеспечена.

Из формулы (6) вытекает, что извлечение кубического корня сводится к умножению полученного результата на константу a и последующему двукратному извлечению квадратного корня, а следовательно, представляет собою цепочный вычислительный процесс. Условимся для упрощения записи алгоритмов клавишу очистки индикаторного регистра обозначать значком \square , а цифровые и операционные клавиши — соответствующими цифрами и знаками математических операций без рамок. Символ $\text{ind}(A)$ будет означать, что на индикаторе высвечивается число A . Тогда алгоритм извлечения кубического корня на «Электронике БЗ-14М» запишется так:

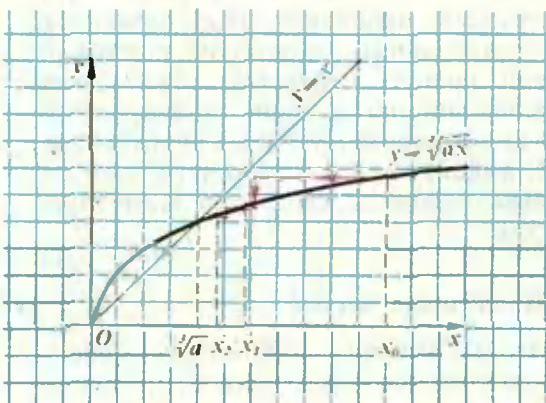


Рис. 4.

$$\square x_0 \times a = \underbrace{\sqrt{\sqrt{\square}}}_{1\text{-й шаг}} \times a = \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\square}}}}_{2\text{-й шаг}} \times a = \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\square}}}}}_{3\text{-й шаг}} \dots \text{ind}(\sqrt[3]{a}),$$

где x_0 — начальное приближение. Графически итерационный процесс показан на рисунке 4.

Если требуется вычислить корень пятой степени, обе части уравнения $x^5 = a$ разделим на x , а затем извлечем корень четвертой степени, после чего получим рекуррентную зависимость

$$x_{n+1} = \sqrt[4]{\frac{a}{x_n}}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Принимая $x_0 = 1$, запишем алгоритм извлечения корня пятой степени на «Электронике БЗ-14М»:

$$\square a \sqrt{\sqrt{\sqrt{\square}}} \frac{1}{x} \times a = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\square}}}} \frac{1}{x} \times a = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\square}}}}} \dots \text{ind}(\sqrt[5]{a}).$$

Графически итерационный процесс показан на рисунке 5.

Очевидно, таким же путем можно извлекать корни степеней $2^k(2^m - 1)$, $2^k(2^m + 1)$, где $k=0, 1, 2, \dots, m=2, 3, 4, \dots$

Остается сказать несколько слов о выборе начального приближения. При извлечении корней во всех рассмотренных случаях за начальное приближение можно брать $x_0 = 1$ или вообще любое число $x_0 \in [1, a]$. Сходимость итерационного процесса (3) от этого не нарушится.

Решение уравнений

Прием, которым мы воспользовались при извлечении корня пятой степени

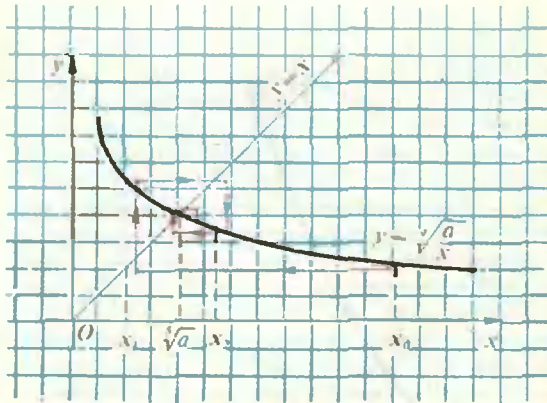


Рис. 5.

(деление обеих частей равенства на неизвестную x с последующим решением уравнения в квадратных радикалах), можно применить для вычисления положительных корней некоторых алгебраических уравнений высших степеней.

Как это делается, покажем на примере. Пусть требуется вычислить положительный корень уравнения

$$x^5 - 10x^3 + 21x - 3 = 0. \quad (7)$$

Разделив левую часть уравнения на x и обозначив $g(x) = 21 - 3/x$, получим биквадратное уравнение $x^4 - 10x^2 + g(x) = 0$, решая которое, найдем $x =$

$$= \sqrt{5 \pm \sqrt{\frac{3}{x} + 4}}.$$

Выберем рабочую формулу:

$$x_{n+1} = \sqrt{5 + \sqrt{\frac{3}{x_n} + 4}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Вычисления ведем на «Электронике БЗ-14М». Начиная с $x_0 = 1$, получим следующий ряд последовательных приближений:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, & x_3 &= 2,694692, \\ x_1 &= 2,765095, & x_4 &= 2,694672, \\ x_2 &= 2,693507, & x_5 &= 2,694672. \end{aligned}$$

Сравнивая приближения x_4 и x_5 , видим, что равенство (4) выполняется с точностью до 10^{-6} . Следовательно, искомым значением корня будет $x = 2,694672$ с той же точностью. Впрочем, это еще надо проверить!

Аналогичным способом можно находить корни других алгебраических

уравнений. Некоторые из них мы здесь запишем в общем виде:

- 1) $x^{2m+1} - ax \pm d = 0,$
- 2) $x^{2m+1} - 2ax^{2m} \pm bx \pm d = 0,$
- 3) $x^{2m+1} - 2ax^{2m+1} \pm bx \pm d = 0,$
 $a > 0, m = 0, 1, 2, \dots$

Описанный способ решения уравнений удобен в том отношении, что, как и в случае извлечения корней, за начальное приближение можно брать $x_0 = 1$.

Упражнения

1. Докажите, что решение уравнения (7) нами найдено верно.
2. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: $x_{n+1} = \sqrt[4]{ax_n}$, $x_0 = 1$. Найдите формулу для x_n и докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[4]{a}$.
3. Докажите, что $\sqrt[3]{a} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[2]{a}}$ при $a > 0$.
4. Придумайте итерационный процесс для извлечения кубического корня, который бы:
 - а) сходился быстрее, чем (6),
 - б) сходился медленнее, чем (6),
 - в) был расходящимся.
5. Найдите рекуррентные формулы для извлечения корней а) 11-й степени; б) 13-й степени.
6. Напишите алгоритмы извлечения корня 6-й степени на «Электронике БЗ-14М».
7. По заданному алгоритму найдите x :

$$\boxed{c} \quad x_0 \times a \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots} \sqrt{\dots} \sqrt{\dots} \times a \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots} \sqrt{\dots} \sqrt{\dots} \dots \text{ind}(x).$$
8. С точностью до 10^{-6} найдите корни из следующих чисел: а) $\sqrt[3]{10}$, б) $\sqrt[3]{756}$, в) $\sqrt[5]{23}$, г) $\sqrt[7]{653}$, д) $\sqrt[11]{7895}$, е) $\sqrt[13]{1256}$, ж) $\sqrt[17]{3224}$.
9. С точностью до 10^{-6} вычислите содержащиеся в промежутке $[1, \infty[$ корни следующих уравнений: а) $5x^2 - 296x + 453 = 0$, б) $x^3 - 71x - 11 = 0$, в) $x^3 - 220x + 17 = 0$, г) $x^4 - 6x - 109 = 0$, д) $x^4 + 3x - 15 = 0$, е) $x^5 - 4x - 2 = 0$, ж) $x^3 - 24x^2 + 92x - 5 = 0$, з) $x^4 - 12x^2 + 5x - 25 = 0$, и) $x^4 - 18x^2 + 7x + 13 = 0$, к) $x^5 - 102x^3 + 487x + 50 = 0$.

Поправки

(см. «Квант» № 7)

На с. 17 в условиях задач 7 и 8 после знака \Leftrightarrow должна стоять буква n .

На с. 38 в первом абзаце следует читать: n относительно $O: I_O = (a+b+c)R^2 = 2pR^2$.

На с. 39 неправильно указаны инициалы одного из авторов задач — следует читать А. В. Бялко.

На с. 44 во второй колонке дробь $1/n$ нужно заменить на $1/(2n)$, величину S_{n-1} — на $S_{n-1}/2$, а координату $x_1 = 1$ — на $x_1 = 1/2$. На рисунках 1 и 2 кирпичи должны лежать так, чтобы расстояния между краями соседних кирпичей, считая сверху, составляли последовательность $1/2, 1/4, 1/6, \dots, 1/(2(n-1))$ (для стопки из n кирпичей), соответствующие изменения нужно внести и в первую колонку. В третьей колонке $1/(2p)$ надо заменить на $(1/2)^n$.

На с. 48 формула в задаче 10 должна выглядеть так:

$$4|MN|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 - |AC|^2 - |BD|^2.$$

(см. «Квант» № 8)

В решении задачи Ф874 (с. 52) допущена неточность: при повороте автомобиля ускорение ему сообщает сила трения, действующая и на передние, и на задние колеса и равная μmg (а не $\mu \frac{mg}{2}$). Поэтому $v_n = \sqrt{\mu g R}$, $v \leq v_n \approx 60$ км/ч.



Принцип относительности

Кандидат физико-математических наук
А. А. ДОЗОРОВ

В пригородной электричке, глядя в окно на только что тронувшийся поезд, пятилетний мальчик спросил:

— Мама, это кто поехал, мы или тот поезд?

— Поезд, — ответила мама.

— А почему мне кажется, что это мы поехали?

Мама как-то ответила, не обратив внимания на то, что ее сын сформулировал один из фундаментальнейших вопросов физики.

Одним из первых аналогичный вопрос сформулировал и дал на него ответ великий итальянский ученый Галилео Галилей. Случилось это в 1636 году, то есть примерно 350 лет тому назад. Вот рассуждения Галилея по поводу так называемого принципа относительности, изложенные им в книге «Диалог о двух главнейших системах мира — птолемеевой и коперниковой»:

«Уединитесь с кем-либо из друзей в просторное помещение под палубой какого-нибудь корабля, запаситесь мухами, бабочками и другими подобными мелкими летающими насекомыми; пусть будет у вас там также большой сосуд с водой и плавающими в нем маленькими рыбками; подвесьте, далее, наверху ведро, из которого вода будет падать капля за каплей в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно, как мелкие летающие животные с одной и той же скоростью движутся во все стороны помещения; рыбы, как вы увидите, будут плавать безразлично во всех направлениях; все падающие капли попадут в подставленный сосуд, и вам, бросая какой-нибудь предмет, не придется бросать его с большей силой в од-

ну сторону, чем в другую, если расстояния будут одни и те же; и если вы будете прыгать сразу двумя ногами, то сделаете прыжок на одинаковое расстояние в любом направлении. Прилежно наблюдайте все это, хотя у вас не возникает никакого сомнения в том, что пока корабль стоит неподвижно, все должно происходить именно так. Заставьте теперь корабль двигаться с любой скоростью, и тогда (если только движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль или стоит неподвижно... И причина согласованности всех этих явлений заключается в том, что движение корабля обще всем находящимся на нем предметам, так же, как и воздуху».

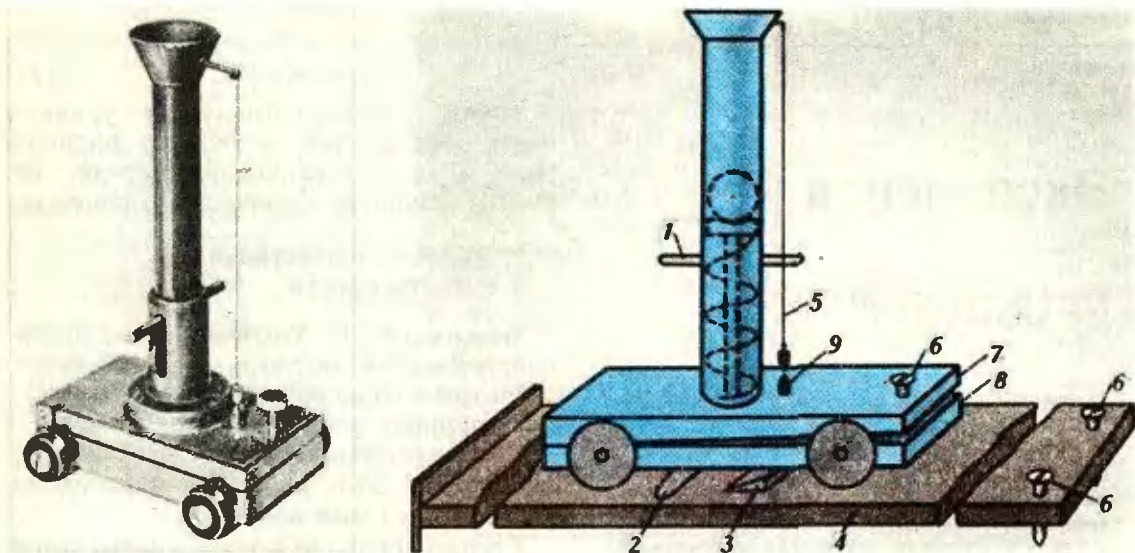
Исаак Ньютон в книге «Математические начала натуральной философии», вышедшей в 1687 году, так сформулировал принцип относительности: «Относительные движения друг по отношению к другу тел, заключенных в каком-либо пространстве, одинаковы, покоится ли это пространство или движется равномерно и прямолинейно без вращения».

В современной формулировке принципа относительности Галилея обычно звучит так: законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Этот принцип очень долго не подвергался какому-либо пересмотру. Лишь в 1905 году в своих знаменитых работах по специальной теории относительности Альберт Эйнштейн обобщил механический принцип относительности, распространив его на все физические явления: «Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга, отнесены эти изменения состояния».

Таким образом, никакие опыты, проводимые в какой-либо инерциальной системе, не позволяют сказать, движется ли данная система прямолинейно и равномерно или покоится.

Представьте себе, что неподвижная пушка стреляет точно вверх. Снаряд, естественно, должен возвратиться точно



в дуло этой пушки.*) В этом еще нет никакого фокуса, секрет заключен лишь в тренировке артиллеристов. Если же теперь заставить пушку двигаться равномерно и прямолинейно и стрелять с ходу без изменения наводки орудия, то, согласно принципу относительности, снаряд снова должен возвратиться в дуло пушки. Это уже гораздо интереснее.

При некотором усердии вы можете самостоятельно изготовить соответствующую установку, схематически изображенную на рисунке, и продемонстрировать ее работу на уроке физики. Самое сложное — это пушка. Пружина пушки при помощи ручек 1 сжимается и фиксируется в этом положении спусковым устройством 2. Снаряд (металлический шарик) укладывается на чашечку, скрепленную с пружиной. При стрельбе с ходу спусковое устройство срабатывает при наезде на клин 3, укрепленный на доске 4, по которой запускается пушка. Настройка орудия (прицеливание) осуществляется при помощи отвеса 5 и трех винтов 6 (для большей точности наводки платформу лучше изготовить из двух пластин 7 и 8). При точной наводке отвес должен совместиться с меткой 9.

Порядок подготовки и проведения опыта следующий. При помощи двух винтов 6 дорожка-доска 4 устанавливается на столе так, чтобы пушка скатывалась по ней примерно с постоян-

ной скоростью (так что движущуюся систему можно считать инерциальной). Подложив под колеса пушки, например, линейку, при помощи трех винтов 6 производят наводку пушки. Затем пушка заряжается, и выстрел производится с места (для этого другой линейкой заставляют сработать спусковое устройство 2). Шарик вылетает и вновь возвращается в дуло пушки. Потом линейка-стопор убирается, пушка набирает скорость, примерно посередине дороги наезжает спусковым устройством на клин 3, шарик вылетает вверх, одновременно двигаясь вдоль дороги с той же скоростью что и пушка, и под аплодисменты зрителей вновь попадает в дуло орудия. Опыт действительно достаточно эффектен.

В заключение — несколько практических советов. Пушку лучше делать массивной, чтобы при наезде на клин и при выстреле наводка не сбивалась. Достаточный диаметр дула — около 3 см. Для ощутимого воздействия на воображение зрителей шарик должен вылетать примерно на 1,5—2 м, за это время платформа с пушкой должна пройти приблизительно 0,5 м. Дорожку нужно делать жесткой, чтобы она не прогибалась под тяжестью орудия, а два винта 6, укрепленные на доске, лучше заострить, тогда сама доска-дорога будет устойчивой. Для того чтобы опыт можно было повторить несколько раз, в конце дороги пушку надо или плавно останавливать рукой или сделать на конце дороги мягкий барьер.

*) Здесь предполагается, что Земля — инерциальная система отсчета, хотя на самом деле любая реальная система отсчета может считаться инерциальной лишь с тем или иным приближением.



Экспонента

Член-корреспондент АПН СССР
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

В любом школьном учебнике изложение темы о показательной функции и числе в содержит недоказанные утверждения, кратко изложенные места. Объясняется это сложностью темы. Здесь мы расскажем о другом подходе к этим понятиям, поясняющем их смысл и связь с дифференциальными уравнениями. При таком способе изложения также имеются недоказанные утверждения (общая теорема существования и единственности для дифференциальных уравнений и свойство непрерывной функции принимать промежуточные значения). Однако эти недоказанные утверждения имеют простой наглядный смысл и принципиальное значение для всей математики.

1. Задача о падении тела в сопротивляющейся среде

На опускающегося парашютиста действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха (остальными воздействиями можно в безветренный день пренебречь). Силу сопротивления воздуха можно считать пропорциональной скорости v , то есть равной по величине qv (коэффициент q зависит, в основном, от диаметра и формы парашюта). Таким образом,

$$ma = mg - qv,$$

где $a = v'$ — величина ускорения (знак минус перед qv связан с тем, что сила сопротивления воздуха действует противоположно направлению падения; рис. 1). Разделив на m , получаем

$$v' = -\frac{q}{m}v + g. \quad (1)$$

Соотношение (1) представляет собой линейное дифференциальное уравнение: производная неизвестной функции $v = v(t)$ (которую требуется определить из этого уравнения) выражается в виде многочлена первой степени от этой неизвестной функции. Обозначая неизвестную функцию через $y = y(x)$, а коэффициенты через a и b , запишем дифференциальное уравнение в виде

$$y' = ay + b. \quad (2)$$

Таким дифференциальным уравнением описывается не только падение тела в сопротивляющейся среде, но и многие другие физические процессы.

2. Теорема существования и единственности

Теорема 1. *Каковы бы ни были действительные числа x_0, y_0 , существует и притом только одна функция $y = y(x)$, являющаяся решением уравнения (2) и удовлетворяющая соотношению $y(x_0) = y_0$. Это решение определено на всей числовой прямой.*

Соотношение $y(x_0) = y_0$ называется начальным условием. Таким образом, теорема 1 означает, что уравнение (2) при любом заданном начальном условии имеет решение (и притом единственное).

Приведем геометрическое пояснение этой теоремы, причем рассмотрим частный случай, когда $a = 1, b = 2$, то есть возьмем уравнение

$$y' = y + 2. \quad (3)$$

В точках, где $y = 0$ (на оси x), мы имеем, согласно (3), $y' = 2$, то есть график искомой функции $y(x)$ должен иметь в этих точках угловой коэффициент касательной, равный 2. Наметим короткими черточками, проведенными в точках оси абсцисс, направление касательной (рис. 2). Далее, при $y = 1$ имеем, согласно (3), $y' = 3$, то есть в точках прямой $y = 1$ график искомой функции должен иметь угловой коэффициент касательной, равный 3; наметим в точках прямой $y = 1$ короткими черточками направление касательной. Мы можем затем наметить черточки и на других прямых, параллельных оси абсцисс (рис. 2). Теперь становится понятным поведение «силовых линий» этого «поля направлений». В каждой своей точке «силовая линия» касается соответствующей черточки, то есть ее касательная имеет угловой коэффициент y' , который, в силу построения черточек, равен $y + 2$. Это означает, что «силовая линия» является графиком функции, удовлетворяющей уравнению (3). Из чертежа понятно, что через каждую точку (x_0, y_0) проходит «силовая линия» и притом только одна. Это и дает наглядное подтверждение справедливости теоремы 1. Ее доказательство

(в нужном нам частном случае) на-
мечено в конце статьи (см. задачи 12—15).

3. Экспонента

Функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y' = y$ и начальному условию $y(0) = 1$, называется *экспонентой* и обозначается символом \exp .

Заметим, что уравнение $y' = y$ является частным случаем уравнения (2); поэтому его решение с начальным условием $y(0) = 1$, в силу теоремы 1, существует и определено однозначно, причем область определения этого решения (то есть экспоненты) является вся числовая прямая.

Непосредственно из определения следует, что экспонента — дифференцируемая функция и ее производная совпадает с этой же функцией (поскольку она является решением уравнения $y' = y$):

$$(\exp x)' = \exp x. \quad (4)$$

Теорема 2. Значения функции \exp положительны, то есть $\exp x > 0$, для любого действительного x .

Доказательство. Допустим, что $\exp x_0 = 0$ при некотором x_0 . Тогда функция $y = \exp x$ удовлетворяет уравнению $y' = y$ и условию $y(x_0) = 0$. Функция $y \equiv 0$ также удовлетворяет уравнению $y' = y$ и условию $y(x_0) = 0$. При этом функции $y = \exp x$ и $y \equiv 0$ различны (например, $\exp 0 = 1$, то есть $\exp 0 \neq 0$). Но тогда получается, что уравнение $y' = y$ имеет при начальном условии $y(x_0) = 0$ два различных решения, что противоречит теореме 1. Итак, равенство $\exp x = 0$ не может иметь места ни при каком x .

Допустим теперь, что при некотором x_1 имеем $\exp x_1 < 0$. Функция \exp дифференцируема и потому непрерывна; следовательно, между двумя точками, в которых она принимает значения разных знаков ($\exp x_1 < 0$, $\exp 0 = 1$), эта функция должна обращаться в нуль (рис. 3). Но это, как мы видели, невозможно.

Итак, экспонента не может принимать ни нулевого значения, ни отрицательных значений; значит, $\exp x > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

Следствие. Экспонента — возрастающая функция.



Рис. 1.

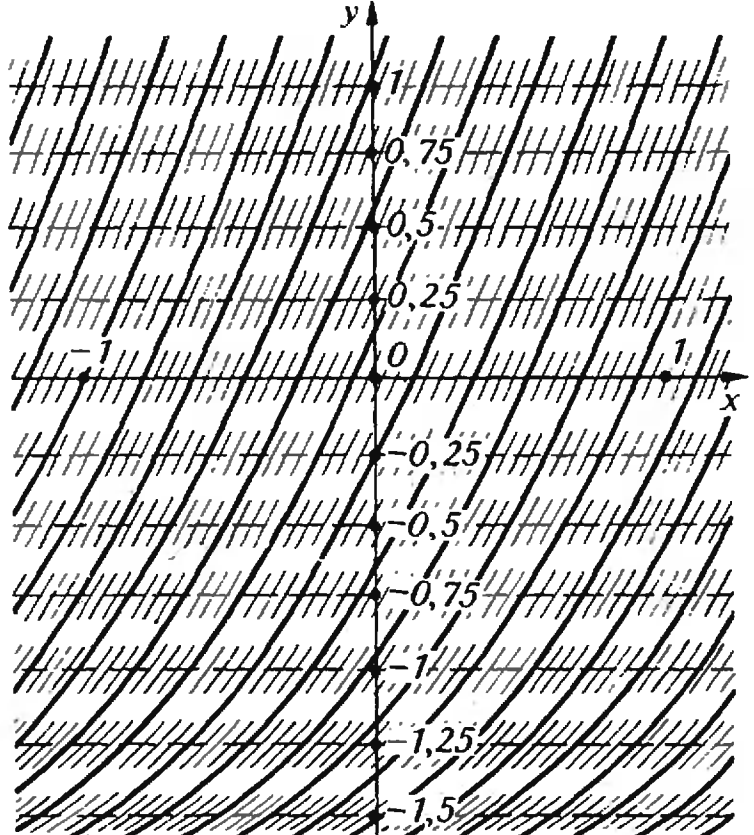


Рис. 2.

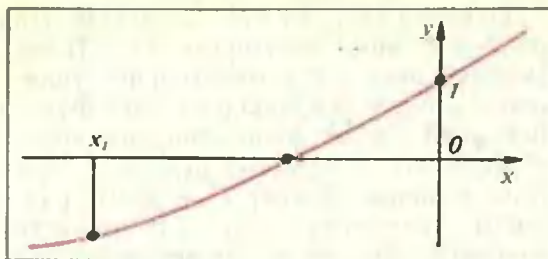


Рис. 3.

Действительно, производная функции \exp (то есть сама эта функция) принимает, по теореме 2, лишь положительные значения, и потому функция \exp — возрастающая.

Теорема 3. Для любых $p, q \in \mathbb{R}$ имеем

$$\exp(p+q) = \exp p \cdot \exp q. \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = \exp(p+x)$. Имеем

$$y' = (\exp(p+x))' = \exp(p+x) = y$$

(см. (4)), то есть эта функция удовлетворяет уравнению $y' = y$. При этом $y(0) = \exp p$.

Рассмотрим теперь функцию $y = \exp p \cdot \exp x$. Имеем

$$y' = \exp p \cdot (\exp x)' = \exp p \cdot \exp x = y,$$

то есть эта функция также удовлетворяет уравнению $y' = y$. При этом $y(0) = \exp p$. По теореме 1, рассматриваемые функции совпадают:

$$\exp(p+x) = \exp p \cdot \exp x.$$

В частности, при $x=q$ получаем (5).

4. Число e

Значение функции \exp при $x=1$ обозначается буквой e , то есть $e = \exp 1$. Чтобы найти приближенное значение числа e , можно поступить следующим образом. Разделим отрезок $[0; 1]$ на n равных частей (каждая из них имеет длину $\Delta x = 1/n$). Через точку $A_0(0; 1)$ проведем «черточку», соответствующую уравнению $y' = y$; она имеет угловой коэффициент $k_1 = y$, то есть $k_1 = 1$. Эту «черточку» будем рассматривать над отрезком $[0; 1/n]$. Правый ее конец A_1 имеет координаты $x = 1/n$, $y = 1 + k_1 \Delta x = 1 + 1 \cdot 1/n = 1 + 1/n$ (рис. 4).

Через A_1 проведем новую «черточку», также соответствующую уравнению $y' = y$; ее угловой коэффициент равен y (ординате точки A_1), то есть равен $k_2 = 1 + 1/n$. Эту «черточку» будем рассматривать над $[1/n; 2/n]$. Правый ее

конец A_2 имеет координаты

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{n}, \quad y = \left(1 + \frac{1}{n}\right) + k_2 \Delta x = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

Через A_2 снова проведем «черточку», соответствующую уравнению $y' = y$. Ее угловой коэффициент k_3 равен ординате точки A_2 , то есть $k_3 = \left(1 + 1/n\right)^2$, а правый конец A_3 имеет координаты $x = 3/n$, $y = \left(1 + 1/n\right)^2 + k_3 \Delta x = \left(1 + 1/n\right)^3$.

Продолжая, мы получим ломаную $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ — ломаную Эйлера для уравнения $y' = y$ (на рис. 4 для удобства взяты разные масштабы на осях); точка A_n имеет координаты $x = 1$, $y = \left(1 + 1/n\right)^n$. Эта ломаная дает приближенное представление о решении уравнения $y' = y$, проходящем через точку A_0 , то есть о функции $y = \exp x$ (красный график на рисунке 4); в частности, точка A_n близко расположена к точке графика $y = \exp x$, имеющей абсциссу $x = 1$, то есть к точке $(1; e)$. Иначе говоря, $\left(1 + 1/n\right)^n \approx e$. Чем больше n , тем более точным является это приближенное равенство, и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (6)$$

Например, взяв $n = 1\,000\,000$, то есть выполнив действие $1,000001^{1\,000\,000}$ (это нетрудно сделать с помощью микрокалькулятора), находим $e = 2,7182818\dots$

5. Обозначение e^x

Лемма. Для любого рационального x справедливо равенство

$$\exp x = e^x. \quad (7)$$

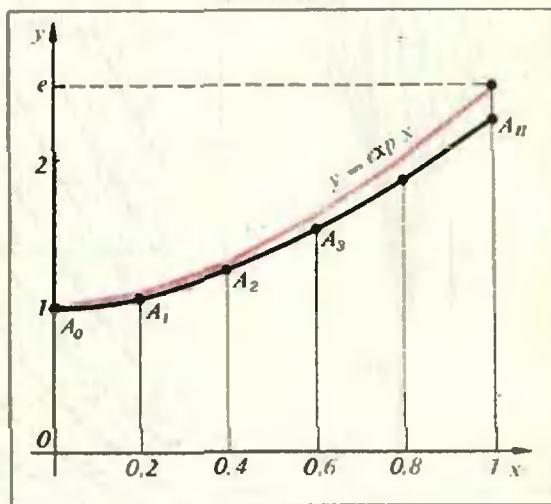


Рис. 4.

Доказательство. Последовательно применяя формулу (5), находим

$$\exp 2x = \exp(x+x) = \exp x \cdot \exp x = (\exp x)^2,$$

$$\exp 3x = \exp(2x+x) = \exp 2x \cdot \exp x = (\exp x)^2 \cdot \exp x = (\exp x)^3$$

и т. д. Итак, для натурального n имеем $\exp nx = (\exp x)^n$, откуда $\exp x = (\exp nx)^{1/n}$. Полагая здесь $x = m/n$ (где m — натуральное), получаем

$$\exp \frac{m}{n} = (\exp m)^{1/n} = (\exp m \cdot 1)^{1/n} = ((\exp 1)^m)^{1/n} = (\exp 1)^{m/n} = e^{m/n}.$$

Это означает, что для положительного рационального числа $x = m/n$ доказываемая лемма справедлива. Легко проверить, что она остается справедливой и для отрицательных рациональных чисел (а также для $x=0$).

Условимся считать по определению, что соотношение (7) справедливо для любого действительного числа x . Иначе говоря, мы условимся считать e^x просто другой формой записи для $\exp x$ (причем для рациональных x эта форма записи согласуется в силу доказанной леммы с понятием степени с рациональным показателем). При использовании этого обозначения формула (5) приобретает привычный вид $e^{p+q} = e^p e^q$. Заметим, что в математической литературе используются обе формы записи экспоненты: $y = e^x$ и $y = \exp x$.

6. Решение дифференциальных уравнений

При записи решений дифференциальных уравнений чаще применяют обозначение e^x , а не $\exp x$. Этой традиции мы и будем придерживаться.

Теорема 4. При $a \neq 0$ решение дифференциального уравнения (2) с начальным условием $y(0) = y_0$ имеет вид

$$y = -\frac{b}{a} + ce^{ax}, \quad (8)$$

где $c = b/a + y_0$.

Доказательство. Так как (согласно теореме 1) искомое решение единственно, то достаточно лишь проверить, что функция (8) (при указанном значении c) удовлетворяет уравнению (2) и требуемому начальному условию. Имеем

$$y' = (ce^{ax})' = c(e^{ax})' = cae^{ax} =$$

$$= a(ce^{ax}) = a\left(y + \frac{b}{a}\right) = ay + b,$$

то есть функция (8), действительно, удовлетворяет уравнению (2) (при любом значении постоянной c). Далее,

$$y(0) = -\frac{b}{a} + ce^0 = -\frac{b}{a} + c = -\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} + y_0\right) = y_0,$$

значит, при указанном значении c функция y удовлетворяет и требуемому начальному условию.

Доказанную теорему обычно применяют следующим образом. Слагаемое $y = -b/a$ легко запомнить: оно получается, если y' приравнять нулю; далее, коэффициент a при неизвестной функции в (2) становится коэффициентом при аргументе в показателе экспоненты. Что же касается константы c , то ее значение (указанное в теореме 4) обычно не запоминают, а в каждом конкретном примере находят c с помощью начальных условий.

Пример 1. Масса $m(t)$ радиоактивного вещества, имеющегося в куске породы в момент t , с течением времени убывает, то есть производная $m'(t)$ (скорость распада) отрицательна. При небольших количествах радиоактивного вещества скорость распада пропорциональна массе радиоактивного вещества:

$$m' = -km$$

(где коэффициент $k > 0$ зависит от вида радиоактивного вещества). Найти закон изменения массы $m(t)$ с течением времени, если в начальный момент $t=0$ масса имевшегося радиоактивного вещества была равна m_0 .

Решение. По теореме 4 имеем $m(t) = ce^{-kt}$. Подставляя $t=0$, получаем $m_0 = ce^0$, откуда $c = m_0$. Окончательно имеем $m(t) = m_0 e^{-kt}$.

Пример 2. Через какой промежуток времени T количество радиоактивного вещества уменьшится ровно вдвое?

Решение. Надо найти T из уравнения $m_0/2 = m_0 e^{-kT}$, то есть $e^{-kT} = 1/2$, или $e^{kT} = 2$. Это соотношение равносильно следующему: $\ln 2 = kT$, откуда

$$T = (\ln 2)/k \approx 0,7/k.$$

Значение $T = (\ln 2)/k$ называется *периодом полураспада*. Он зависит от k (то есть от вида радиоактивного вещества); например, для радия $T \approx 1600$ лет.

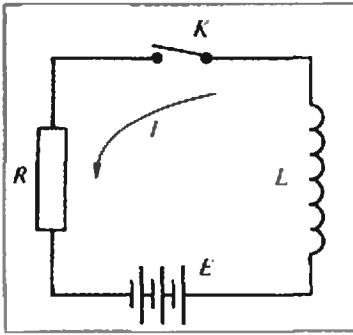


Рис. 5.

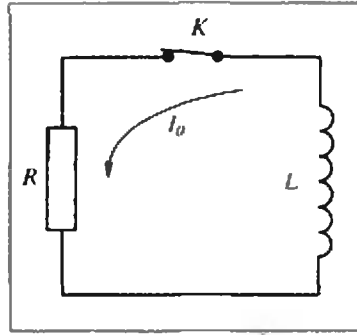


Рис. 6.

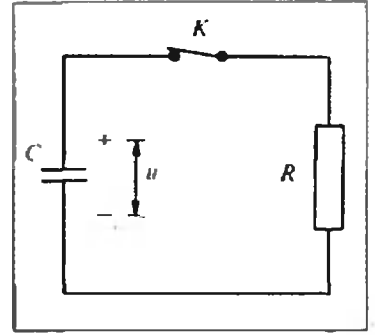


Рис. 7

Пример 3. Найти закон падения тела в сопротивляющейся среде, зная, что при $t=0$ скорость падения была равна v_0 .

Решение. Из уравнения (1) находим по теореме 4:

$$v(t) = \frac{mg}{q} + ce^{-\frac{q}{m}t}$$

Подставляя $t=0$, получаем $v_0 = mg/q + ce^0$, откуда $c = v_0 - mg/q$. Таким образом, окончательно имеем

$$v(t) = \frac{mg}{q} + \left(v_0 - \frac{mg}{q}\right)e^{-\frac{q}{m}t}$$

Так как $e^{-\frac{q}{m}t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то $v(t) \rightarrow mg/q$, стало быть, скорость падения постепенно устанавливается. Например, парашютист, падающий в затяжном прыжке с большой скоростью, после раскрытия парашюта быстро приобретает примерно постоянную скорость mg/q (зависящую от массы парашютиста и параметров парашюта). Это позволяет рассчитать парашют так, чтобы приземление было безопасным.

Задачи

1. Докажите, что для любого $x \neq 0$ справедливо неравенство $\exp x > x + 1$.

2. Используя неравенство $\exp \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n}$ (см. задачу 1), докажите, что $e > (1 + 1/n)^n$.

3. Используя неравенство $\exp\left(-\frac{1}{n+1}\right) > 1 - \frac{1}{n+1}$ (см. задачу 1), докажите, что $e > (1 + 1/n)^n$, то есть $e < (1 + 1/n)^{n+1}$.

4. С помощью неравенств, полученных в задачах 2 и 3, докажите справедливость равенства (6).

5. Докажите, что решение уравнения (2) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ имеет вид (8), где $c = (b/a + y_0)e^{-ax_0}$.

6. В момент $t=t_0$ масса имевшегося в куске породы радиоактивного вещества была равна m_0 ,

а в момент $t=t_1$ она оказалась равной m_1 . Определите период полураспада.

7. При распаде одного грамма радиоактивного вещества образуется d граммов продукта распада. Период полураспада T этого радиоактивного вещества известен. Определите возраст куска породы, если в нем имеется p граммов рассматриваемого радиоактивного вещества и q граммов продукта его распада.

8. В результате теплообмена со средой нагретое тело постепенно охлаждается, то есть его температура $t(\tau)$ уменьшается со временем τ . Согласно закону охлаждения Ньютона, скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и среды: $t'(\tau) = -k(t(\tau) - t_{cp})$. Считая температуру среды t_{cp} постоянной, выведите формулу закона охлаждения.

9. Сила тока $I(t)$, протекающего в RL -цепи (рис. 5), изменяется по правилу $LI' + RI = E$, где L — индуктивность катушки, R — сопротивление резистора. Определите закон $I(t)$ изменения тока, если в момент замыкания цепи ($t=0$) ток был нулевым.

10. В RL -контуре (рис. 6) в момент $t=0$ протекал ток I_0 . Определите значение протекающего в цепи тока при $t > 0$.

11. Напряжение $u(t)$ (разность потенциалов на обкладках конденсатора) изменяется в RC -цепи (рис. 7) по правилу $Cu' + u/R = 0$. Определите характер изменения напряжения, если в момент $t=0$ напряжение было равно u_0 .

12. Рассмотрев ломаную Эйлера для уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$, покажите, что при фиксированном $x > 0$ последовательность $(1 + x/n)^n$ возрастает и ограничена.

13. Пользуясь теоремой Вейерштрасса об ограниченной возрастающей последовательности и задачей 12, установите существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$ при фиксированном $x \geq 0$, а затем и при $x < 0$.

14*. Докажите существование экспоненты. Указание. Положив $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$ (см. задачу 13), вычислите производную $y'(x)$ и установите, что $y'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$; выведе-

дите отсюда, что $y(x)$ является решением уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$. (При вычислении $y'(x)$ воспользуйтесь формулой бнорма Ньютона.)

15*. Докажите единственность экспоненты. Указание. Предположите противное (существование двух разных экспонент) и рассмотрите их разность.



Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Об одном стихотворении А. С. Пушкина» предназначена восьмиклассникам, «Масса и количество вещества, или Об одной «ошибке» Ньютона» — девятиклассникам, «Постоянный и переменный электрический ток» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.



Об одном стихотворении А. С. Пушкина

Среди поэтических сокровищ, оставленных нашим великим национальным поэтом А. С. Пушкиным, есть стихотворение, прямо относящееся к физике, точнее — к механике. Называется это стихотворение «Движение». Оно небольшое по объему — в нем всего 8 строк, но очень богатое по содержанию.

В первых четырех строках читаем:

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить:
Хвалили все ответ замысловатый.

Здесь поэт рассказывает о легендарном споре двух древнегреческих философов. «Мудрец брадатый» — это Зенон Элейский; его противник в споре — Диоген Синопский. Первый утверждал, что движение невозможно; второй стал молча «пред ним ходить»,

как бы наглядно показывая несуразность такого утверждения.

Но дальше А. С. Пушкин пишет:

Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

Этими словами поэт показывает, что доказательство Диогена вовсе не такое безупречное, как казалось тем, кто хвалил «ответ замысловатый». В самом деле, ведь солнце ежедневно делает то же, что делал Диоген, маршируя перед Зеноном: оно «пред нами ходит». В действительности же, как вслед за Коперником утверждал «упрямый Галилей», Солнце покоится, а движется (вращается вокруг своей оси) Земля. Но никакого другого доказательства Диоген дать не мог, поэтому он и «смолчал».

Сейчас неправоту утверждения Зенона можно доказать, не прибегая к методу Диогена. Попробуем это сделать. Прежде всего, постараемся представить себе, как Зенон пришел к выводу, очевидно несуразному, что «движенья нет».

Зенон, по-видимому, рассуждал следующим образом. Тело, двигаясь по некоторой траектории, в любой момент времени может быть где-то застигнуто. Можно считать, что в этом месте и в это мгновение тело покоится, то есть что его скорость равна нулю. Следовательно, движение есть лишь название, данное множеству следующих одно за другим состояний покоя. В каждом таком состоянии покоя перемещение тела, естественно, равно нулю. Складывая это непрерывное множество нулей, Зенон, конечно, получал в итоге ноль: «движенья нет»!

Так вот, ошибка Зенона как раз и состоит в том, что скорость тела в каждой точке траектории он считал равной нулю. На самом деле в каждый момент времени движущееся тело обладает скоростью — так называемой мгновенной скоростью v («Физика 8», § 11). А раз оно обладает скоростью, то за любой сколь угодно малый промежуток времени Δt тело совершает малое перемещение $\Delta s = v\Delta t$. Число таких малых перемещений, в пределе — бесконечно малых, за все время движения t бесконечно велико. Но сумма бесконечно большого числа бесконечно малых

слагаемых равна не нулю, а вполне определенной величине: $s=vt$ (если скорость v одинакова во всех точках). Складывать нужно не нули, как это делал Зенон, а малые перемещения $v\Delta t$. На это впервые указал, спустя почти 2000 лет после легендарного спора, основоположник классической механики Исаак Ньютон, создавший кроме того еще и замечательный математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

В заключение сделаем не очень существенное для темы нашей заметки замечание. В действительности очный спор Зенона с Диогеном состояться не мог: Диоген (около 400—325 до н. э.) родился через 30 лет после смерти Зенона (490—430)!

Масса и количество вещества, или Об одной «ошибке» Ньютона



В 1971 году XIV Генеральная конференция по мерам и весам сочла нужным увеличить число основных единиц Международной системы (СИ) еще на одну — на *моль*, единицу количества вещества. Их, основных единиц, стало теперь семь (килограмм, метр, секунда, кельвин, ампер, кандела, моль).

Что это за величина — количество вещества и почему физика в ней нуждается?

Обычно, в житейской практике, если нужно узнать, сколько вещества содержится в том или ином предмете, например — сколько железа содержится в железном бруске, спешат к ве-

сам. После взвешивания определяют, скажем, что в бруске содержится 5 килограммов, и считают, что ответ на поставленный вопрос вроде бы получен. Но ответ ли это на самом деле? А если взять брусок из алюминия, который после взвешивания тоже окажется пятикилограммовым (по объему он будет почти втрое больше железного!), то можно ли утверждать, что в алюминиевом бруске столько же алюминия, сколько железа в железиом?

Вдумаемся в ответ, полученный после взвешивания: «в бруске содержится 5 килограммов железа». Килограмм — это единица массы, а масса тела — это величина, от которой зависит ускорение, получаемое телом под действием той или иной силы. Так, зная массу и измерив ускорение тела, можно узнать, какая сила действовала на тело. Если же сила известна заранее, ускорение можно не измерять, а вычислить. Но большей частью в обыденной жизни масса интересует нас вовсе не потому, что по ней можно определить силу или ускорение. Хозяйка, зная, что масса купленного ею куска сыра равна 0,5 кг, едва ли имеет в виду воспользоваться этим знанием для того, чтобы определять какие-либо силы или ускорения. Для нее масса характеризует лишь количество данного вещества.

Почему же для многих понятия «масса» и «количество вещества» кажутся синонимами?

Оказывается, «виноват» в этом создатель науки о движении И. Ньютон, который под массой понимал именно количество вещества. В главном своем труде «Математические начала натуральной философии» (или, проще, «Математические основы естествознания») Ньютон так определяет эту величину: «Количество материи (вещества — *И.Б.*) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее». Как известно, данное определение Ньютона в течение столетий (книга Ньютона увидела свет в 1687 году) вызывало споры. В самом деле, плотностью мы называем величину, равную массе единицы объема вещества: $\rho = m/V$. В таком случае определение Ньютона лишено всякого смысла: $m = mV/V = m$ — «масса есть масса». Но действительно ли Ньютон, много лет готовивший книгу и тщательно обдумывавший каждую фразу в ней, допустил ошибку? По-видимому, нет.

Дело в том, что во времена Ньютона слово «плотность» не могло означать то же, что оно означает теперь. Ведь понятие массы было введено в физику именно Ньютоном. До Ньютона не было понятия массы, не могло поэтому быть и понятия плотности как массы единицы объема. С чем же связывалось слово «плотность» в те времена?

Ньютон считал, что все тела состоят из совершенно одинаковых частиц, но в различных веществах по-разному движущихся (об этом мы узнаем из другой книги Ньютона — «Оптика»). Различие в движениях частиц и определяет различие всех свойств веществ и тел. Слово же «плотность» тогда имело буквальный смысл — оно показывало, насколько плотно друг к другу прилегают частицы, то есть насколько плотно они «упакованы». В той же «Оптике» Ньютон упоминает, например, что вода в 19 раз легче, а следовательно, в 19 раз разреженнее золота, что в воде много больше пустот между частицами, чем в золоте. При таком понимании плотность просто означает число частиц в единице объема, а умноженная на объем тела она дает общее число частиц в теле. Эту-то величину Ньютон и называет количеством материи (вещества). Поскольку частицы во всех веществах и телах одни и те же и массы всех частиц в любом веществе одинаковы, масса тела определяется только числом частиц в нем, то есть количеством вещества в теле. Если массы двух тел одинаковы, то и количества вещества в них тоже одинаковы.

В наше время величина «количество вещества» имеет в сущности тот же смысл, что и у Ньютона. Это число частиц, содержащихся в теле; тех частиц, из которых тело состоит. Для бруска железа — это число атомов железа, для воды в сосуде — число молекул воды. Естественной единицей измерения количества вещества была бы 1 частица. Но тогда число, выражающее эту величину, было бы невообразимо большим. Условились за единицу количества вещества принять такое его количество, в котором содержится столько частиц (атомов, молекул), сколько атомов содержится в 0,012 кг изотопа углерода с атомной массой 12, то есть $6,02 \cdot 10^{23}$ частиц (число Авогадро N_A). Называется эта единица моль.

Хотя в моле любого вещества содер-

жится одно и то же число частиц, масса моля разных веществ различна. Масса M моля (молярная масса) равна $10^{-3} \cdot M_r$ кг, где M_r — относительная молекулярная масса («Физика 9», § 2). Моль железа, например, имеет массу 0,056 кг, моль алюминия — 0,027 кг и т. д. Таким образом, 5 кг железа — это приблизительно 90 молей железа, а 5 кг алюминия — около 185 молей. Массы одинаковы, а количества вещества различны.

Хозяйку, купившую в магазине полкилограмма сыра, интересует, конечно, не масса этого куска, а количество сыра в нем. Однако острой необходимости в замене килограммов молями все же нет, потому что масса и количество вещества (для данного вещества) пропорциональны друг другу, так что в 0,5 кг сыра вдвое меньше, чем в 1 кг. А измерять число килограммов куда проще, чем число молей.

В физике, однако, масса и количество вещества далеко не всегда взаимозаменяемы. Приведем один только пример.

И опыт и теория показывают, что произведение давления p идеального газа на его объем V пропорционально температуре T газа и его массе m :

$$pV \sim mT.$$

Коэффициент пропорциональности в этом соотношении для различных газов различен. Но если pV пропорционально m , то оно пропорционально и числу частиц в веществе:

$$pV \sim NT.$$

В этом соотношении коэффициент пропорциональности оказывается одинаковым для всех газов:

$$pV = kNT, \quad (1)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Количество вещества ν (в молях) связано с числом частиц N простым соотношением: $\nu = N/N_A$. Поэтому можно написать

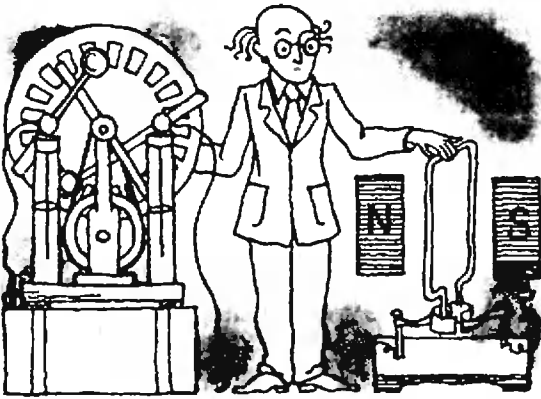
$$pV \sim \nu T.$$

Коэффициент пропорциональности будет теперь другим, но тоже одинаковым для всех газов:

$$pV = R\nu T. \quad (2)$$

Здесь $R = 8,31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная. Это уравнение, равно как и уравнение (1), представляет собой уравнение состояния идеального газа.

Постоянный и переменный электрический ток



Долгое время единственным источником электрического тока служил гальванический элемент, появившийся в самом начале XIX века. В цепи, присоединенной к такому источнику, течет постоянный электрический ток.

Успехи в изучении электромагнетизма привели к изобретению генератора переменного тока, и с тех пор именно переменный ток стал основой современной электроэнергетики.

Почему? Чем переменный ток «лучше» постоянного?

Переменный ток, как и постоянный, — это упорядоченное движение заряженных частиц, в частности в металлах — электронов. Но в цепи переменного тока электроны по многу раз изменяют направление своего упорядоченного движения. Малая масса электронов позволяет им «успевать» изменять направление движения не только 100 раз в секунду, как это происходит в промышленной сети, но и десятки миллионов раз в секунду, как, например, в антеннах радиостанций.

Чтобы в электрической цепи протекал переменный ток, цепь должна быть присоединена к источнику переменной ЭДС. Она выступает здесь в роли периодической вынуждающей силы, и ток в цепи совершает вынужденные колебания, разумеется, с частотой вынуждающей силы. Если ЭДС в источнике изменяется со временем по закону $e = \mathcal{E}_m \cos \omega t$ и источник включен в цепь с активным сопротивлением R , то и ток в цепи изменяется по косинусоидальному закону («Физика 10», § 17):

$$i = \frac{e}{R} = \frac{\mathcal{E}_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t.$$

Здесь \mathcal{E}_m и I_m — амплитуды (максимальные значения) ЭДС и силы тока. Но свойства функции косинуса таковы, что в среднем за период колебаний сила тока равна нулю. Это, однако, не значит, что такой ток бесполезен и ни в чем себя не проявляет. Потому что хотя в среднем сила тока и равна нулю, не равен нулю квадрат силы тока. А мощность тока определяется именно квадратом силы тока. В любой момент времени мощность переменного тока в цепи с активным сопротивлением выражается равенством

$$p = i^2 R = I_m^2 R \cos^2 \omega t.$$

Среднее значение квадрата косинуса за период равно не нулю, а $1/2$, так что среднее значение мощности

$$\bar{p} = \bar{i^2} R = \frac{1}{2} I_m^2 R = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 R.$$

Величина $I = I_m / \sqrt{2}$ называется действующим значением силы тока. В нашем случае мощность можно также выразить через напряжение на сопротивлении:

$$p = \frac{u^2}{R}, \quad \bar{p} = \frac{\bar{u^2}}{R} = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R} = \frac{U^2}{R},$$

где $U = U_m / \sqrt{2}$ — действующее значение напряжения.

В этом состоит одно из отрицательных свойств переменного тока. Ведь провод, по которому протекает ток, необходимо рассчитывать на максимальное значение силы тока, а практически используется немногим более $2/3$ этого значения. Есть и другие отрицательные следствия. Явление электромагнитной индукции приводит, например, к тому, что переменный ток в проводах распределяется не равномерно по всему сечению, а главным образом вблизи поверхности. (Это явление называется скин-эффектом, о нем в «Физике 10» не рассказывается. Характерно, что глубина проникновения переменного тока зависит от многих факторов, в том числе — и от частоты колебаний. Так, при частоте 50 Гц в медном проводнике эта глубина составляет ≈ 9 мм. С увеличением частоты глубина проникновения тока уменьшается.) Благодаря тому, что используется не все сечения проводов, их сопротивление реально возрастает. Далее, переменный ток, как и ток постоянный, окружен магнитным полем, но полем переменным. А такое поле, согласно закону электромагнитной индукции, вызывает в соседних

проводах и в других проводящих материалах электрические токи, что приводит к бесполезной потере энергии.

Все эти недостатки полностью отсутствуют у постоянного тока. Почему же все-таки переменный ток практически безраздельно господствует в технике и в быту?

Прежде всего, сам принцип действия электрических генераторов таков, что в них возникает именно переменная ЭДС («Физика 10», § 23). Но не в этом главное. С помощью нехитрого устройства можно тот же генератор сделать источником и постоянного тока. Главная причина «популярности» переменного тока связана с тем, что электрическую энергию приходится передавать из мест, где она производится (электростанции), к местам ее потребления и часто на большие расстояния. При этом часть передаваемой энергии неизбежно теряется в виде тепла в проводах, по которым она передается в линиях электропередачи (ЛЭП). Чтобы эти потери были не слишком высокими, нужно, оказывается, использовать для передачи *высокое напряжение*.

Необходимость высокого напряжения видна из следующего простого расчета. Допустим, что электрическая мощность $P=66$ кВт передается от электростанции в город под напряжением 220 В (именно такое напряжение обычно используется потребителями). Пусть сопротивление ЛЭП равно 0,4 Ом. Тогда сила тока в ЛЭП составит $I=66\,000\text{ Вт}/220\text{ В}=300\text{ А}$, а выделившееся в линии количество теплоты — $Q=I^2R=(300\text{ А})^2\cdot 0,4\text{ Ом}=36\,000\text{ Вт}$. Больше половины передаваемой мощности (54,5 %) будет потеряно в виде тепла в ЛЭП! А теперь представим себе, что та же мощность по той же ЛЭП передается при напряжении 22 000 В. Теперь ток в цепи будет равен $I=66\,000\text{ Вт}/22\,000\text{ В}=3\text{ А}$, а выделившееся количество теплоты — $Q=(3\text{ А})^2\cdot 0,4\text{ Ом}=3,6\text{ Вт}$. Потеряно будет всего около 0,005 %! Вот почему электрическая энергия по ЛЭП всегда передается при очень высоком напряжении — 110, 220, 330, 400, 500 и даже 750 киловольт.

Но на клеммах генераторов электростанций напряжение значительно меньше — всего несколько тысяч вольт. Значит, в начале линии электропередачи это напряжение нужно повысить, а перед распределением энергии среди

потребителей — понизить так, чтобы потребитель получил ее при напряжении 220 вольт. Такое повышение и понижение напряжения оказывается возможным только для переменного тока. Делается это с помощью устройств, действующих на основе явления электромагнитной индукции, — трансформаторов («Физика 10», § 24). Существование трансформаторов — пожалуй, единственная причина повсеместного применения переменного тока в технике.

Однако те недостатки переменного тока, которые были изложены выше, заставляют думать о том, нельзя ли все-таки для передачи электрической энергии использовать постоянный ток, конечно, тоже высокого напряжения? Это сделать непросто. Действительно, сначала нужно переменное напряжение, после его повышения, преобразовать в постоянное (для этого служат выпрямители), а затем на другом конце ЛЭП — превратить переданное постоянное напряжение в переменное (это можно сделать с помощью устройств, называемых инверторами), чтобы напряжение можно было понизить до значения, нужного потребителю. Одна такая ЛЭП постоянного тока на напряжении 400 кВ в СССР уже работает.

Сказанное в этой заметке нельзя понимать так, что постоянный ток — это «хороший» ток, а переменный — «плохой». И тот и другой — это явления природы, и их нельзя оценивать словами «лучше», «хуже». Сказанное лишь означает, что для передачи энергии на большие расстояния предпочтительнее постоянный ток. И если пока все же преобладает применение для этой цели переменного тока, то это объясняется тем, что преобразование переменного тока в постоянный и обратно до сих пор еще представляет собой трудную задачу, которая, впрочем, успешно решается. Для техники в равной мере нужны и полезны оба тока. В некоторых случаях незаменим постоянный ток, например там, где используется электролиз. Но без переменных токов не было бы радиосвязи, телевидения и т. д. Перефразируя известное детское стихотворение, можно сказать: токи всякие нужны!

Математика 8, 9, 10

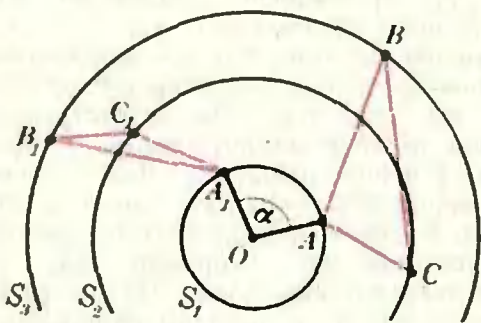
Еще один прием самоконтроля

Публикуемая ниже заметка «Где ошибка?» предназначена восьмиклассникам, «Еще один прием самоконтроля» — девятиклассникам и «Нужно ли делать проверку?» — десятиклассникам. Это деление в какой-то мере условно, так как каждая из этих заметок может быть полезной не только учащимся указанных классов.

Где ошибка?

Как известно, поворот является одним из движений плоскости. При движении любая фигура отображается на равную ей фигуру. Сейчас мы «покажем», используя свойства движений, что при повороте треугольник переходит в неравный ему треугольник.

При повороте вершины треугольника скользят по трем concentрическим окружностям, общий центр которых совпадает с центром поворота, а расстояния между его вершинами сохраняются. Для того чтобы получить образ треугольника ABC при повороте на угол α вокруг точки O , построим concentрические окружности с центром в точке O , на которых лежат точки A , B и C . Затем на окружности, содержащей точку A , построим точку A_1 так, чтобы угол AOA_1 был равен α . Наконец, на окружностях, содержащих точки B и C , построим соответственно точки B_1 и C_1 , такие, что $A_1B_1=AB$ и $A_1C_1=AC$



(см. рис.). На рисунке хорошо видно, что полученный нами треугольник $A_1B_1C_1$ не равен треугольнику ABC (например, $B_1C_1 \neq BC$).

Где же ошибка?

Н. И. Бовсунковский

Материал данной заметки дополняет статью В. Матизена (см. «Квант» № 10, 1980 г.).

Из собственного опыта знаю, что можно хорошо запомнить одну формулу и забыть ей подобную. Предположим, например, вы твердо помните, что $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ (1), но забыли, чему равен $\cos(x+y)$. В этом случае вам поможет следующий прием. Можно считать, что в равенстве (1) x — переменная величина, а y — фиксированное число. Дифференцируя это равенство (по x), получим $(\sin(x+y))'_x = (\sin x)'_x \cos y + (\cos x)'_x \times \sin y$, откуда

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Итак, забытая формула восстановлена.

Аналогично, из формулы

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y)) \quad (2)$$

легко получить формулы: а) $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$ (достаточно продифференцировать равенство (2) по x , считая y постоянным);

б) $\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$ (достаточно продифференцировать (2) по y , считая x постоянным):
 $-\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) - \cos(x-y))$
 и сменить знак у обеих частей полученного равенства).

Приведем другой пример. Учащемуся предложили вывести формулу, выражающую $\sin 3\alpha$ через $\sin \alpha$. Он представил 3α в виде $\alpha+2\alpha$ и воспользовался формулой синуса суммы:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+2\alpha) &= \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha = \\ &= \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

В результате им была получена правильная формула:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \quad (3)$$

После этого ему предложили получить аналогичную формулу для $\cos 3\alpha$. Без особого энтузиазма он повторил преобразования:

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(\alpha+2\alpha) = \dots \\ &\dots = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \end{aligned}$$

После этого его спросили, нет ли другого способа для получения этой формулы. Немного подумав, он записал $\cos 3\alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 3\alpha} = \dots$, но быстро понял, что ничего хорошего на этом пути не получится.

А ведь в данном случае опять помогает дифференцирование. Продифференцировав обе части равенства (3) по α , получаем

$$3 \cos 3\alpha = 3 \cos \alpha - 12 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \\ = 3 \cos \alpha - 12(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha,$$

откуда $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.

Упражнения

1. Зная, что $\sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x$, получите формулу, выражающую $\cos 5x$ через $\cos x$.

2. При помощи дифференцирования получите из «простого» тождества $2 \sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha = \cos \alpha$ другое, «более сложное» тождество.

3. Известна формула $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$, где угол φ определяется из условия $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Получите из этой формулы формулу для $a \cos x - b \sin x$.

В. Е. Ольхов

Надо ли делать проверку?

Школьники часто задают вопрос: «Мы нашли корни уравнения, надо ли делать проверку?» Проверять корни на всякий случай, «для надежности» (подставляя их в данное уравнение), конечно, полезно, во всяком случае, когда это не приводит к более трудоемким выкладкам, чем само решение. Но здесь не это имеется в виду — речь идет о проверке, связанной с возможностью «приобрести посторонние корни». Школьники знают, что не сделав такую проверку, они могут иногда получить неверный ответ («лишний корень»). Более того, даже если ответ оказался верным, учитель или экзаменатор иногда объявляет решение неполным, если проверка отсутствует. Но когда? В каких случаях надо делать проверку? Постараемся ответить на этот вопрос.

1. В тех случаях, когда корни были найдены по простейшим «готовым» формулам (таким, как формулы для решения линейных и квадратных уравнений или уравнений вида $\cos x = a$,

$\log_2 x = a$, $b^x = a$ и т. п.), проверку можно не делать.

Например, как правило, нет смысла проверять корни, полученные по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. (Впрочем, если корни получаются целыми или рациональными, проверка делается быстро и вреда в ней нет.)

Тем не менее при использовании таких формул следует помнить об условиях, при которых их можно применять. Так, формулу (1) можно использовать при условиях $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$. К сожалению, нередки случаи, когда школьники говорят, что при $a = 0$ уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, так как знаменатель в правой части формулы (1) обращается в нуль. При этом забывают о том, что при $a = 0$ это уравнение не будет квадратным

и имеет корень $x = -\frac{c}{b}$, если, конечно, $b \neq 0$.

Грубейшей ошибкой считается ответ $x = \pm \arccos 2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ для уравнения $\cos x = 2$, поскольку формулой $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ для корней уравнения $\cos x = a$ можно пользоваться только при $|a| \leq 1$.

2. Чаше же при решении уравнений приходится проводить много преобразований; при этом данное уравнение заменяется каждый раз на какое-то новое, а у нового уравнения, естественно, могут быть и другие корни. Если в ходе преобразования уравнение заменить новым уравнением, имеющим все корни предыдущего и только их (то есть преобразовывать уравнение так, чтобы не произошло потери или приобретения корней), то такие уравнения называются *равносильными*.

Хорошо известно, что

1) при переносе членов уравнения из одной части в другую,

2) при прибавлении к обеим частям уравнения одного и того же числа,

3) при умножении обеих частей уравнения на одно и то же не равное нулю число

исходное и преобразованное уравнения *равносильны*. *Равносильны* они также в том случае, если преобразования состоят в применении тождеств, верных на множестве всех действительных чисел, например тождеств сокращенного

умножения, формул синуса и косинуса суммы и т. п.

При применении всех этих преобразований каждый раз получаются равносильные уравнения. Поэтому после нахождения корней их проверка не является обязательным этапом решения задачи.

Решим, например, таким образом уравнение

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x - 1 = 0. \quad (2)$$

Разделив обе части уравнения на 2, получим уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} = 0, \quad (3)$$

равносильное уравнению (2). Так как

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то уравнение (3) переписывается в виде

$$\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} = 0.$$

Применяя «справа налево» формулу косинуса суммы двух углов, получаем уравнение

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} = 0, \quad (4)$$

равносильное уравнению (3).

Прибавляя к обеим частям уравнения $\frac{1}{2}$, получаем уравнение

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}, \quad (5)$$

равносильное уравнению (4).

Решение простейшего уравнения (5) запишется так:

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Так как все проведенные преобразования были равносильными, то *проверка найденных корней не обязательна*.

3. Однако не всякое уравнение удается решить путем только равносильных преобразований. Гораздо чаще приходится применять неравносильные

преобразования. При применении таких преобразований, вообще говоря, можно *потерять* некоторые корни исходного уравнения или *приобрести* посторонние корни, то есть корни, не являющиеся корнями исходного уравнения. Чаще всего такие преобразования основаны на использовании формул, верных не при всех действительных x . При этом, в частности, «меняется» область определения уравнения.

Если, например, формулы

$$\log_3 x^2 = 2 \log_3 x, \quad (6)$$

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad (7)$$

применить «слева направо» (то есть заменить левую часть формулы правой), то возможна потеря корней исходного уравнения; поэтому такие преобразования без дополнительных рассуждений недопустимы.

Например, уравнение

$$\log_3 x^2 = 2 \quad (8)$$

имеет два корня: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Однако если мы применим формулу (6) «слева направо», то получим уравнение

$$2 \log_3 x = 2,$$

имеющее только один корень: $x_1 = 3$. Следовательно, в результате применения формулы (6) «слева направо» произошла потеря корня уравнения (8). Отметим, что при применении формулы (6) возможна потеря всех отрицательных корней. С формулой (7) дело обстоит проще. Ею можно пользоваться, только дополнительно следует проверить, являются ли корнями числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, при которых не определен $\operatorname{tg} x$.

4. Если же применять формулу (6) «справа налево», то потери корней не произойдет, но может произойти приобретение посторонних корней, а поэтому *обязательно надо проверить корни и те из них, которые окажутся посторонними, отбросить*.

Посторонние корни могут появиться также при возведении обеих частей уравнения в степень, при потенцировании обеих частей уравнения и при ряде других преобразований. Поэтому, если применялось какое-то из этих преобразований, то *обязательно надо сделать проверку найденных корней и отбросить посторонние корни*.

Пример. Решим уравнение

$$x - 3 = \sqrt{x - 1}. \quad (9)$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат и перенося все члены полученного уравнения в левую часть, приходим к уравнению

$$x^2 - 7x + 10 = 0,$$

имеющему корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$. При возведении в квадрат могли появиться корни, посторонние для исходного уравнения, поэтому найденные корни обязательно надо проверить. Подставляя в уравнение (9) первый корень $x_1 = 2$, получаем неверное числовое равенство $-1 = 1$, значит, $x_1 = 2$ есть посторонний корень для исходного уравнения (9). Подставляя в уравнение (9) второй корень $x_2 = 5$, получаем верное числовое равенство. И, следовательно, $x_2 = 5$ есть корень исходного уравнения.

Итак, уравнение (9) имеет единственный корень $x = 5$.

Вот еще пример. Решим уравнение

$$\log_7(x^2 - 4) = \log_7(4x - 7). \quad (10)$$

Потенцируя, мы приходим к уравнению

$$x^2 - 4 = 4x - 7,$$

корни которого $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. При потенцировании могли появиться корни, посторонние для исходного уравнения, поэтому найденные корни надо проверить. Число $x_1 = 1$ не удовлетворяет уравнению (10), так как не имеют смысла логарифмы от отрицательных чисел, поэтому $x_1 = 1$ не является корнем этого уравнения. Число же $x_2 = 3$ обращает исходное уравнение в верное числовое равенство.

Итак, уравнение (10) имеет единственный корень $x = 3$.

Выводы

1) Если при решении уравнения делались только преобразования, приводящие к равносильным уравнениям, то проверка найденных корней не обязательна.

2) Если проводились преобразования, при которых возможно появление посторонних корней, то обязательно надо сделать проверку найденных значений и отбросить посторонние корни.

3) Следует избегать преобразований, при которых могут произойти потери корней. На начальных порах ими не следует пользоваться вовсе. О тех случаях, когда они все же применяются (и о соответствующих приемах контроля), «Квант» расскажет в другой раз.

Более подробно обо всем сказанном здесь можно прочитать в книге М. К. Потапова, В. В. Александрова, П. И. Пасиченко «Алгебра и анализ элементарных функций» (М.: Наука, 1981).

В заключение предлагается решить, с учетом сказанного выше, следующие уравнения:

- $3^{\log_3(x^2 - 4x + 3)} = x - 1;$
- $\log_2(x + 2)^2 = 6;$
- $\sqrt{x^2 + x - 5} = \sqrt{x - 1};$
- $\frac{2(x - 7)}{x^2 - 6x - 7} = 1;$
- $\sqrt{x - 2}(x^2 + 3) = 4x\sqrt{x - 2};$
- $3^{x^2 - x} = 3^{1 - (\sqrt{x})^2}.$

М. Г. Скворцова

Избранные школьные задачи

Здесь мы приводим ряд задач, предлагавшихся на районных олимпиадах в Новосибирской области. Среди них есть совсем несложные, есть задачи и потруднее, но все они близки к школьной программе. В скобках после номера задачи указано, в каких классах она предлагалась.

Восьмой класс

1 (7—8). Два велосипедиста, Вася и Петя, одновременно выехали из пункта А в пункт Б. Вася весь путь проехал с постоянной скоростью, а Петя, проехав сначала 1 час со скоростью 12 км/ч, оставшийся путь ехал со скоростью 14 км/ч и прибыл в Б на 5 минут раньше Васи. Если бы Петя все время ехал со скоростью 12 км/ч, то он бы прибыл в Б на 6 минут позже Васи. Найдите расстояние от А до Б.

2 (7—8). Возраст человека в 1959 г. оказался равен сумме цифр года его рождения. Найдите

год рождения этого человека, если известно, что он родился в XX веке.

3 (7—8). В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. В точке T она касается стороны BC. Известно, что $\angle BOT : \angle COT = 3 : 4$. Найдите длину стороны BC, если радиус вписанной окружности равен 3, а величина угла A — 30° .

4 (7—8). Докажите, что если положительные числа x и y удовлетворяют неравенствам $x + y > 2,6$ и $x^2 + y^2 < 4$, то $xy > 1$.

5 (7—9). Можно ли разрезать квадрат на 1980 квадратов меньшего размера? А на 1981? (Полученные квадраты могут быть не одинаковыми.)

Девятый класс

6 (7—9). Тебе и мне вместе 35 лет. Сейчас мне вдвое больше лет, чем было тебе тогда, когда мне было столько лет, сколько тебе сейчас. Сколько мне лет и сколько тебе?

7 (8—10). В трапеции сумма углов при основании равна 90° . Докажите, что длина отрезка,

(Окончание см. на с. 55)

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

«За науку»
в гостях у «Кванта»
Более 25 лет издается газета
«За науку» Московского
физико-технического инсти-
тута. Сегодня мы публикуем
подборку юмористических
материалов из этой газеты.

Улыбки художников



ОБНАЖКА НА ЛЕКЦИИ

Соотношение неопределенностей $\Delta E \cdot \Delta t > \hbar$ понимают лишь немногие физики. Я не буду углубляться в эту тему, иначе число таких людей в десятки раз увеличится.

Если домашние спросят вас, что такое элементарные частицы, скажите, что это просто энергия. Они ничего не поймут, но будут думать о вас хорошо.

Каждое из колец Френеля ведет себя точно так же, как и в прошлом семестре.

Что больше — дельта большое или дельта маленькое?

Если мы не сделаем этого ограничения, то произойдет нечто ужасное: снусу станет больше единицы.

Действие рассмотренного устройства просто и понятно. Именно поэтому на практике его не используют. Применяется другой несложный прибор, на изучение которого мы и потратим оставшиеся два месяца.

Объясняю второму и седьмому факультетам: атом водорода состоит из одного электрона и одного протона. Четвертый факультет это должен знать.

Дайте-ка, я покрупнее нарикую бесконечно малые треугольники.

НОВОСТИ

В бутерброде столовой № 4 обнаружен 126-й элемент таблицы Менделеева. Виновные еще не найдены.

Студент пятого курса Марк Новодачный придумал 317-е доказательство того факта, что химия — не наука. Всем сомневающимся он просто демонстрирует два журнала: «Наука и жизнь» и «Химия и жизнь».

Объявления

Всем студентам сдать для анкет голограммы 3×4×6. Вниманию женщин! Долгопрудненская парикмахерская делает не только химию, но также и физику и дифференциальные уравнения.

Кружечки

Голография — баня для аристократов.

О'Генри — нулевая индуктивность.

Меломан — испачкавшийся лектор.

Затор — газета топологов.

Баран — пивная для сотрудников АН СССР.

Экспресс — бывший штамповщик.

Застолье (франц.) — состояние до дальней деревни.

Возгонка (спорт.) — соревнования извозчиков.

Паровоз — свадебная карета.

Монополь — француз.

Диполь — два француз.

Биполь — еще два француз.

(Шахматные)

Турнуть — сделать ход ладьей.

Слоняться — ходить по диагонали.

Вездеход — ферзь.

Подоконник — фигура, стоящая под ударом кавалерии.

Патология — исследование ничейных окончаний.

Спешиться — сдвонуть пешки.

Матожидание — предчувствие близкого проигрыша.

(По заказу автошколы)

Карман — автолюбитель.

Кардан — классность японского автомобилиста.

Картуз — заправила автомобильного бизнеса.

Карнавал — конвейер в Тольятти.



Задачи

1. «Алло, Катя! Нам поставили телефон! Сообщаю номер. Он, как и у тебя, пятизначный. Первая цифра — простое число, следующие две цифры — двузначное простое число, а последние две цифры получаются из предыдущей пары перестановкой и образуют точный квадрат. Так какой у меня номер телефона?»

2. Возможен ли треугольник со сторонами $a=7$ см и $b=2$ см, если известно, что высота, опущенная на третью сторону этого треугольника, является средним геометрическим двух других высот?

3. Предложите конструкцию прибора, основанного на принципе сообщающихся сосудов, предназначенного для проверки горизонтальности кладки кирпичных стен.

4. В магазин привезли 223 литра масла в бидонах по 10 и 17 литров. Сколько было бидонов?

5. Решите кроссрамбер, то есть заполните клетки квадрата цифрами, как клетки кроссворда, в соответствии с указаниями.

По горизонтали:

$$a = (a \text{ по вертикали})^2,$$

$$h = (f \text{ по вертикали}) \times 2,$$

$$i = (c \text{ по вертикали}) + (g \text{ по вертикали}).$$

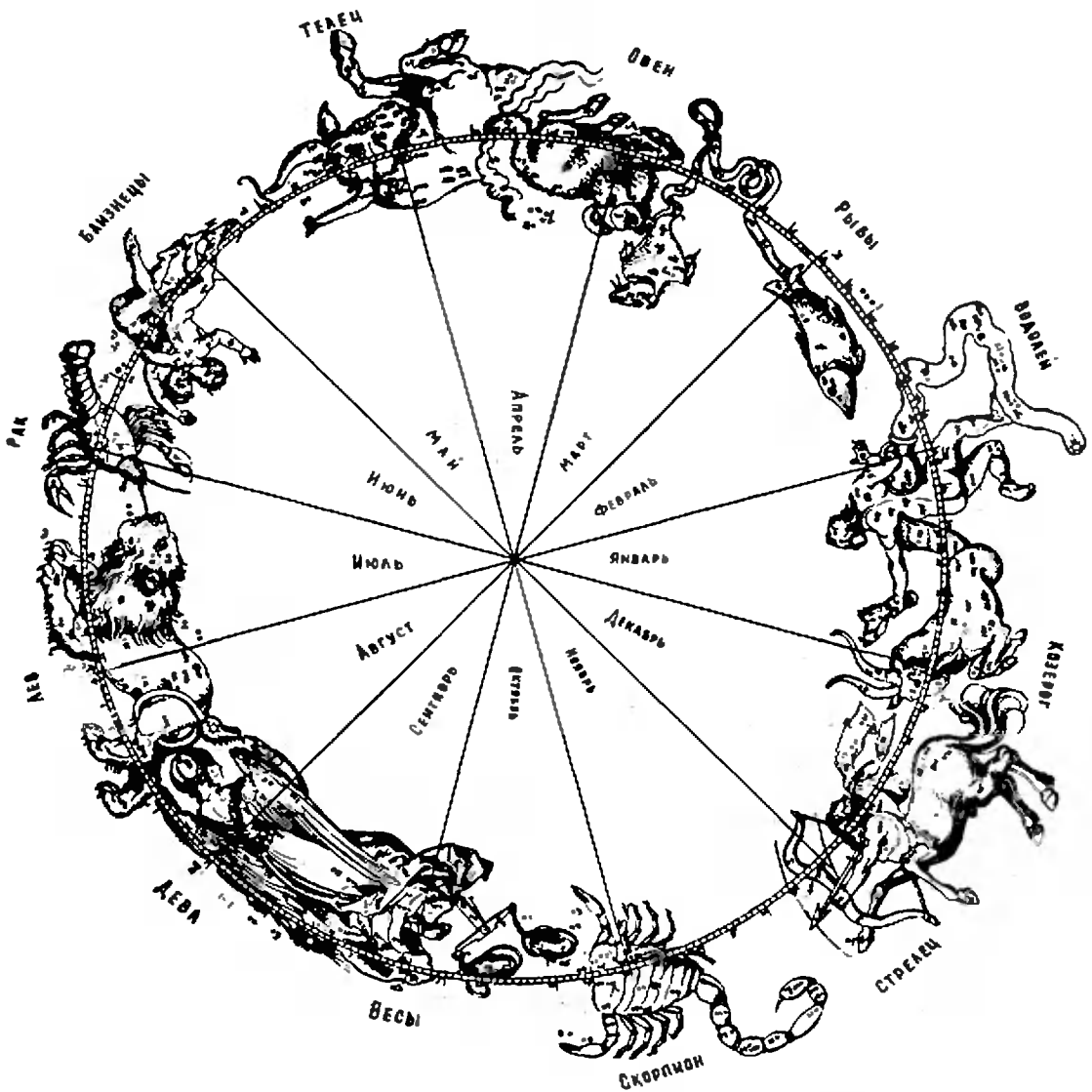
По вертикали:

$$b = (g \text{ по горизонтали})^2,$$

$$d = (a \text{ по горизонтали}) \times (e \text{ по горизонтали}).$$

Задачи предложили М. А. Радлова, С. Р. Сефибсков, В. Д. Вьюн, Н. К. Антонович, А. И. Савин





Откуда произошли названия звезд и созвездий

Доктор физико-математических наук
Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

Если вы посмотрите на звездное небо, то при некотором воображении в россыпи более или менее ярких звезд увидите различные фигуры. Эти фигуры можно составлять различными способами. Уже в древней Греции было выделено 48 таких фигур, заполнивших почти все звездное небо, они получили название «созвездий». Некоторые звезд-

Зодиакальные созвездия. Изображения даны по звездному атласу известного польского астронома XVII века Гевелия.

ды не входили в созвездия, а характеризовались тем, около какого созвездия они расположены.

Еще древние вавилоняне, астрономические знания которых оказали сильное влияние на греков, выделили 12 созвездий Зодиака, то есть 12 созвездий, расположенных вдоль большого круга небесной сферы, по которому совершает свое видимое годичное движение Солнце (этот круг называется эклипикой, от греческого слова *эклеипсис* — «затмение», так как затмения происходят, когда Луна попадает на этот круг). Число созвездий Зодиака равно числу месяцев, и Солнце проходит каждое из них за месяц.

Первоначально вступление Солнца в созвездие Овна приурочивалось ко дню весеннего равноденствия, но за две

Впервые эта статья была опубликована в 1970 году в «Кванте» № 10. Перепечатывается с небольшими изменениями.

тысячи лет этот день несколько «сдвинулся» по отношению к созвездиям Зодиака. Заметим, что «овен» и «телец» — устаревшие названия барана и быка (ср. «овца» и «теленки»). Под Стрельцом, то есть стрелком, понимали кентавра, вооруженного луком со стрелами; под Козерогом — козла с рыбьим хвостом; Рыб представляли в виде двух рыб, соединенных тесьмой. Название Зодиак (от греческого слова *зодион* — «животное») объясняется тем, что большинство созвездий Зодиака имеют вид животных.

Севернее Зодиака греки располагали 21 созвездие, а южнее — 15 созвездий (созвездия южного полушария греки знали хуже, так как в древности путешественники редко доходили даже до экватора).

Названия созвездий объясняются теми фигурами, которые получались при соединении звезд, образующих созвездие, линиями. Разные народы по-разному «рисовали» эти фигуры. Например, в ковше Большой Медведицы греки видели медведя, а арабы — погребальную процессию — гроб, перед которым идут плакальщицы, возглавляемые «предводителем плакальщиц». Некоторые созвездия связаны между собой: Волопаса, то есть пастуха, греки рассматривали как сторожа медведиц. Шесть созвездий — северные созвездия Цефея, Кассиопеи, Андромеды, Персея, Пегаса и Кита — также связаны общей легендой об эфионском царе Кефее (Цефей — латинская форма этого имени), его жене Кассиопее и дочери Андромеде. Согласно этой легенде Кассиопея оскорбила морских нимф nereid и в наказание за это морской бог Посейдон послал морское чудовище Кита (представлявшегося зверем с лапами и страшной пастью) опустошать

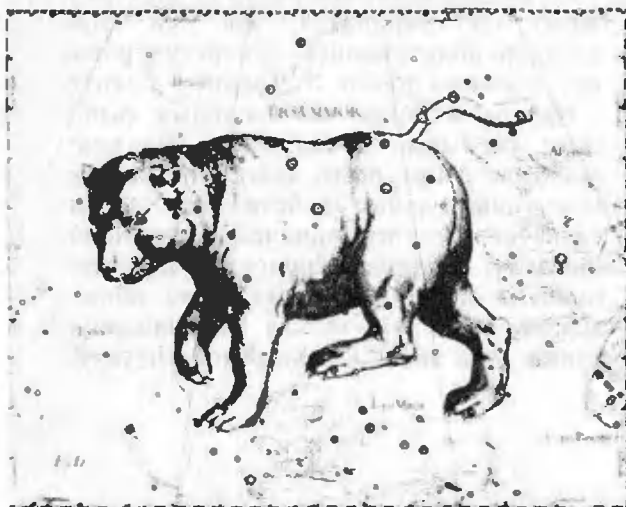
берега Эфиопии. Для спасения страны Кефей должен был принести в жертву свою дочь, имя которой означает «не видевшая мужа». Девушка уже была прикована к скале, когда появился на крылатом коне Пегасе Персей — герой, убивший ужасную Медузу Горгону, обращавшую в камень всех, кто встречался с ней взглядом (сам Персей в борьбе с Медузой Горгоной смотрел не на нее, а на ее отражение в своем щите). Персей отрубил голову Горгоны и явился к Андромеде с этой головой. Показав ее Кита, он превратил его в камень, освободил Андромеду и женился на ней.

Созвездие Геркулеса получило свое название только в новое время, греки называли его «Коленопреклоненный». Созвездие Эридана также получило свое название в новое время, греки называли его «Река». Эридан — древнее название реки По, а также одно из имен мифического сына Солнца Фазтона, согласно легенде упавшего на землю и утонувшего в По.

Созвездие Корабля Арго впоследствии было разделено на Корму, Паруса, Компас и Киль, а из мелких звезд, не входящих в известные раньше созвездия, были образованы новые созвездия: Малый Лев, Гонимые Псы, Щит (первоначально Щит Собесского), Лисичка, Ящерица, Рысь, Единорог и Секстант.

Еще более любопытны названия звезд. Пожалуй, только название Полярной звезды — звезды α созвездия Малой Медведицы (яркие звезды созвездий принято обозначать греческими буквами α , β , γ , ..., примерно в порядке их убывающего блеска) и звезд, носящих собственные имена людей, понятны без обращения к словарю. Полярная звезда получила свое название потому,

Созвездие Большой Медведицы.



Созвездие Волопаса.





Созвездие Андромеды.



Созвездие Эридана.

что она находится вблизи Северного полюса мира, вокруг которого происходит видимое суточное вращение звездного неба. Собственные имена имеют звезды α и β созвездия Близнецов — Кастор и Поллукс; они названы так по именам двух мифических близнецов — сыновей Зевса и Леды, и α Гончих Псов — Сердце Карла, названная Э. Галлеем в 1725 году в честь английского короля Карла II.

Очень немногие звезды имеют греческие и латинские названия, большинство этих названий арабского происхождения. Это объясняется тем, что в средние века центр передовой науки находился на Ближнем и Среднем Востоке, где языком науки был арабский язык (как до этого в эллинистических странах — греческий, а позже в Европе — латинский). Важный вклад в науку того времени внесли ученые Средней Азии и Азербайджана: ал-Хорезми, ал-Бируни, ал-Фергани, Ибн Сина (Авиценна), Омар Хайям, Насир ад-Дин ат-Туси, Улугбек и ученые его школы в Самарканде; много важных открытий было сделано также учеными Ирана, Ирака, Сирии, Египта, Северо-Западной Африки и мусульманской Испании. Труды этих ученых попадали в Западную Европу через Испанию и Италию, а потом через Константинополь, и переводились на латинский язык. Со многими трудами античной науки европейцы познакомились сначала по их арабским переводам и только потом — с их греческими оригиналами.

Большинство арабских названий возникло следующим образом. В знаменитом труде александрийского астронома Клавдия Птолемея (II век н. э.), обычно

называемом нами «Алмагест», имелся каталог 1022 звезд, положения которых были измерены астрономами того времени. Европейцы познакомились с «Алмагестом» по его арабскому переводу, чем и объясняется его название: одно из греческих названий этого сочинения «Мегисте синтаксис» — «Величайшая система» — арабы переделали в ал-Маджисти, откуда и получилось наше название. Каждую звезду Птолемей характеризовал небольшим описанием, указывющим место этой звезды в созвездии. Именно от этих описаний в арабском переводе и произошли наши названия. Некоторые названия, впрочем, восходят не к Птолемею, а к староарабским названиям звезд. Таблица названий некоторых звезд приведена на с. 39.

Заметим, что название Антареса объясняется тем, что эта звезда, как и Марс, красного цвета и является как бы заместителем Марса (наши названия планет — имена римских богов, соответствующих греческим богам Гермесу, Афродите, Аресу, Зевсу и Хроносу, именами которых называли планеты греки).

От названия звезды Регул происходит слово «регулировать», так как этой звездой пользовались при регулировании полевых работ в Древнем Египте.

Названия Мира и Проксима были даны учеными сравнительно недавно: название Мира было дано этой звезде за ее удивительные свойства (эта звезда является долгопериодичной переменной звездой), название Проксима было дано учеными после того, как было обнаружено, что эта звезда расположена ближе всех звезд к Солнечной системе.

Созвездие	Буквенное обозначение	Название	С какого языка	От какого слова произошло	Значение этого слова
1. Малая Медведица	α	Полярная	лат.	поларис	относящийся к полюсу
2. Большая Медведица	α	Дубхе	араб.	дубб	медведь
3. »	β	Мерак	»	марак	брюхо
4. »	γ	Фекда	»	фихд	бедро
5. »	δ	Мегрец	»	маграз	начало хвоста
6. »	η	Алькаид	»	ал-каид	предводитель плакальщиц
7. Дракон	α	Тубан	»	банат на'ш	дракон
8. Цефей	α	Альдерамин	»	ту'бан	правая рука
9. Волопас	α	Арктур	греч.	ал-ямин	страж медведей
10. Северная Корона	α	Альфакка	араб.	арктурос	чаши пищих
11. Геркулес	α	Рас Альгете	»	ал-факка	голова колена прекло- ненного
12. Лира	α	Вега	»	ра с ал-джати	падающий (Орея)
13. Лебедь	α	Денеб	»	ваки	хвост
14. »	δ	Гиснах	»	данаб	крыло
15. Кассиопея	α	Шедар	»	джанах	грудь
16. »	β	Каф	»	садр	ладонь
17. »	δ	Рукба	»	каф	колено
18. Персей	α	Мирфак	»	рукба	локоть
19. »	β	Альголь	»	мирфак	чудовище (Горгона)
20. Возничий	α	Капелла	лат.	ал-гул	козочка
21. »	β	Менкалинан	араб.	капелла	плечо возничего
22. Змееносец	α	Рас Альхаге	»	мвикаб ли-л- анни	голова заклинателя
23. »	β	Цельбальрай	»	рас'с ал-хавва	собака пастуха
24. Змея	α	Унук-Эльхайн	»	калб ал-рай	шея змеи
25. Орел	α	Альтаир	»	'унк ал-хийн	лезящий (Орея)
26. Пегас	α	Маркаб	»	ал-танр	седло
27. Андромеда	α	Альферрац	»	маркаб	пуп коня (звезда отно- силась к Пегасу)
28. »	β	Мирак	»	ал-фарас	брюхо (одной из Рыб)
29. »	γ	Аламак	»	мирак	сандалия
30. Овен	α	Хамал	»	ал-маук	баран (Овен)
31. »	β	Шератан	»	хамал	два знака (общее назва- ние α и β Овна)
32. »	δ	Ботейн	»	шератан	брюшко
33. Телец	η и др.	Плеяды	греч.	бутейн	дочери Плеяды
34. »	α	Альдебаран	араб.	плейадес	идущий вслед (за Плея- дами)
35. »	γ, δ	Гнады	греч.	ал-дебаран	дождливые
36. Лев	α	Регул	лат.	гнодес	царек
37. »	β	Денебола	араб.	регулус	хвост льва
38. Дева	α	Слика	лат.	данаб ал-асад	колос (в руке у Девы)
39. Скорпион	α	Антарес	греч.	слика	место Марса
40. »	β	Акраб	араб.	анта Арес	скорпион
41. Стрелец	α	Альрами	»	акраб	стрелок
42. Водолей	α	Садалмелек	»	ал-рами	счастье государства
43. Кит	β	Денеб Кейтос	»	са'д ал-мулк	хвост кита
44. »	ο	Мира	лат.	данаб кайтос	удивительная
45. Орион	α	Бетельгейзе	араб.	мира	подмышка великана
46. »	β	Ригель	»	ибт ал-джауза	нога
47. »	γ	Беллатрикс	лат.	ридждл	воительница (покров- тельница воннов)
48. »	δ	Минтака	араб.	беллатрикс	пояс
49. Эридан	α	Ахернар	»	минтака	конец реки (Эридана)
50. Заяц	α	Арнеб	»	ахир нахр	заяц

Названия № 31, 32, 34 и 42 первоначально относились к группам звезд, так называемым стоянкам Луны. — на фоне этих звезд Луна находится в один из 28 дней лунного месяца. К группам звезд относятся № 33 и 35.

Более подробно о названиях звезд см. книгу Ю. А. Карпенко «Названия звездного неба» (М.: Наука, 1981).

Задачник «Кванта»

Задачи

M886—M890, Ф898—Ф902

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 декабря 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-8, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M886, M887» или «Ф898». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи M887—M890 предлагались на X Всероссийской олимпиаде школьников по математике. Задачи Ф898—Ф902 — на XVIII Всесоюзной олимпиаде школьников по физике.

M886. Можно ли в $4n-4$ клеток, расположенных по периметру квадрата $n \times n$ клеток, расставить $4n-4$ последовательных целых чисел (не обязательно положительных) так, чтобы суммы чисел в вершинах каждого прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата, а также суммы чисел в концах каждой диагонали равнялись одному и тому же числу s ? Решите задачу для n , равного: а) 3, б) 4, в) 5, г) 1985. Если можно, найдите допустимые значения s .

В. Г. Болтянский

M887. Две касательные к окружности, CA и CB , пересекаются в точке C (A и B — точки касания, рис. 1). Вторая окружность проходит через точку C , касается прямой AB в точке B и пересекает первую окружность в точке M . Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

И. Ф. Шарыгин

M888. Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют равенству $ab=cd$. Докажите, что число $a^{1984} + b^{1984} + c^{1984} + d^{1984}$ составное.

А. В. Анджанс

M889. Существуют ли на плоскости такие три точки A, B, C , что для любой точки плоскости P хотя бы один из отрезков PA, PB и PC имеет иррациональную длину?

А. М. Слинко

M890. На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11 000 км шоссейных дорог. Сможет ли она соединить сетью шоссейных дорог все свои города?

Л. Д. Курляндчик

Ф898. Однородная палочка длины l связана невесомой нитью длины l с неподвижной точкой A (рис. 2). Нижний конец палочки может скользить без трения по горизонтальному столу. Расстояние от точки A до стола равно H ($l < H < 2l$). Палочка начинает двигаться без начальной скорости из положения, изображенного на рисунке. Найти максимальную скорость центра палочки при последующем движении.

С. С. Кротов

Ф899. На дне большого закрытого сосуда, заполненного водой, лежит перевернутая чашка массы m . Чашка имеет форму цилиндра радиуса R и высоты R

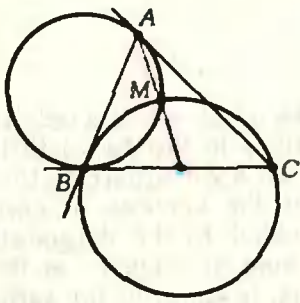


Рис. 1.

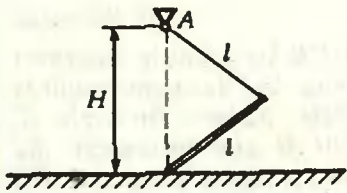


Рис. 2.

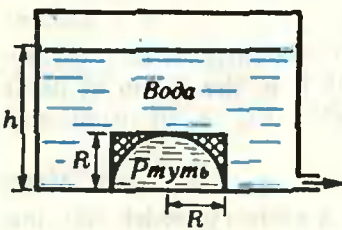


Рис. 3.

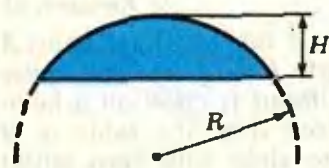


Рис. 4.

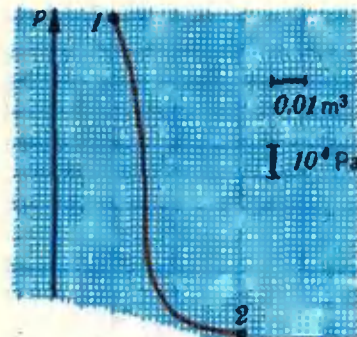


Рис. 5.

с полусферической полостью, радиус которой также равен R (рис. 3). Пустота заполнена ртутью. Воду из сосуда начинают медленно откачивать.

1) Определите, при какой высоте h столба воды в сосуде чашка оторвется от его дна и ртуть начнет вытекать из-под ее краев.

2) Найдите высоту ртути в полости, когда из сосуда откачают всю воду.

Давлением паров воды пренебречь. Плотность воды ρ и плотность ртути ρ_1 считать известными. **Примечание:** объем шарового сегмента высоты H и радиуса R (рис. 4) равен $\pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right)$.

М. Г. Абрамян

Ф900. Часть графика, изображающего процесс, происшедший с идеальным одноатомным газом, утеряна (рис. 5). Масштабы по обшим осям известны (они указаны на рисунке 5). В течение всего процесса перехода из состояния 1 в состояние 2 газ отдал столько же тепла, сколько получил. Найти работу, совершенную газом в этом процессе. Универсальная газовая постоянная $R=8,3$ Дж/(моль·К).

В. Т. Каралетян

Ф901. Три одинаковых конденсатора, каждый емкости C , соединили последовательно и подключили к батарее с ЭДС \mathcal{E} . После того, как они полностью зарядились, их отключили от батареи. Затем к ним одновременно подключили два резистора с сопротивлением R каждый так, как показано на рисунке 6. Какое количество тепла выделится на каждом из резисторов? Чему равны токи через резисторы в момент времени, когда напряжение на среднем конденсаторе в 10 раз меньше ЭДС батареи?

А. Р. Зильберман

Ф902. Два плоских слоя толщины d каждый равномерно заряжены по объему с плотностями зарядов $-q$ и $+q$. Частица с отрицательным зарядом $-e$ и массой m подлетает к положительно заряженному слою со скоростью v , направленной под углом α к поверхности слоя (рис. 7).

1) При каком значении скорости частица не сможет проникнуть в отрицательно заряженный слой?

2) Через сколько времени и на каком расстоянии от точки A частица в этом случае покинет положительно заряженный слой?

А. И. Бuzдин

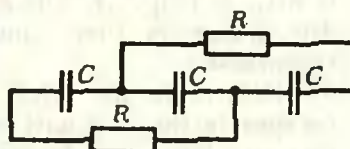


Рис. 6.

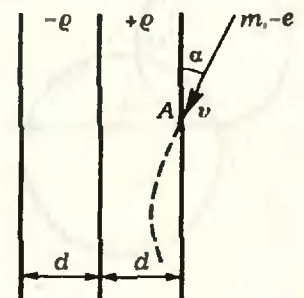


Рис. 7.

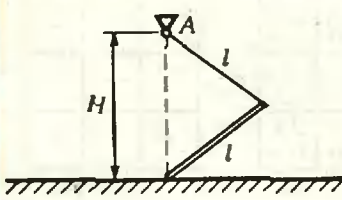


Fig. 2.

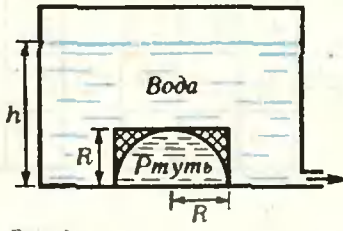


Fig. 3.

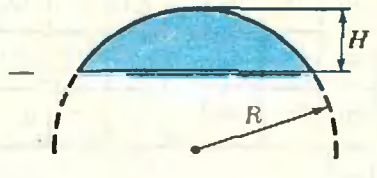


Fig. 4.

water is entirely pumped out. The pressure of water vapors may be neglected. The densities ρ of water and ρ_1 of mercury are assumed known. Remark: the volume of a spherical cap of altitude H and radius R is given by the formula $\pi H^2(R - H/3)$, see Fig. 4.

M. G. Abramian

P900. Part of the graph representing a process involving a monoatomic gas is lost (Fig. 5). The units on both axes are known (they are shown on the figure). During the entire process from state 1 to state 2 the gas loses as much heat as it acquires. Find the work carried out by the gas during the process. The universal gas constant is $R=8.3\text{J}/(\text{mole}\cdot\text{K})$.

V. T. Karapetian

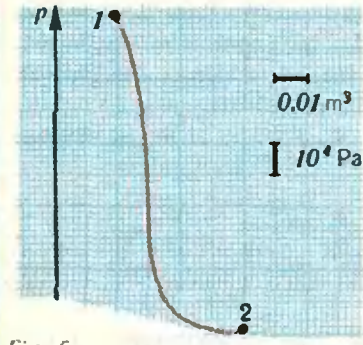


Fig. 5.

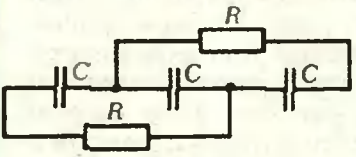


Fig. 6.

P901. Three identical capacitors, each of capacity C , were connected consecutively to a battery of EMF \mathcal{E} . After they were completely charged, they were disconnected from the battery. Then two resistors were simultaneously connected to them as shown on Fig. 6. How much heat will be generated at each of the resistors? What are the currents flowing through the resistors when the tension on the middle capacitor is 10 times less than that of the battery?

A. R. Zilberman

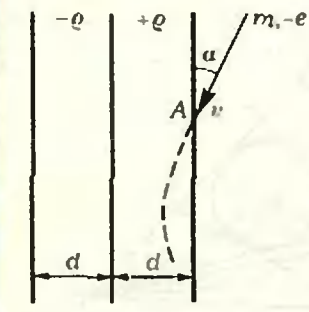


Fig. 7.

P902. Two flat layers of thickness d each are uniformly charged with volume density $-q$ and $+q$. A particle of negative charge e and mass m reaches the positively charged layer with velocity v at an angle α to the layer's surface (Fig. 7).

- 1) For what values of the velocity will the particle be unable to reach the negatively charged layer?
- 2) How much time later and at what distance from the point A will the particle leave the positively charged layer in this case?

A. I. Buzdin

Решения задач

M871—M875; Ф883—Ф886

M871. В клетки таблицы размера 3×3 записывают числа 1 или -1 . Затем число в каждой клетке заменяется на произведение чисел, стоящих во всех соседних клетках (соседними считаются клетки, имеющие общую сто-

Проследим за тем, как меняются числа в таблице. Пусть первоначально в ней были записаны числа $a_1, a_2, \dots, a_9 (a_i = \pm 1)$, как показано на рисунке 1. Выпишем таблицы, получающиеся из нее в результате указанных в условии задачи операций, учитывая,

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Рис. 1.

2,4	1,3,5	2,6
1,5,7	2,4,6,8	3,5,9
4,8	5,7,9	6,8

Рис. 2.

3,7	2,8	1,9
4,6	*	4,6
1,9	2,8	3,7

2,4	1,3	2,4
6,8	7,9	6,8
1,3	*	1,3
7,9		7,9
2,4	1,3	2,4
6,8	7,9	6,8

.	.	.
.	.	.
.	.	.

рону). Докажите, что после нескольких повторений этой операции во всех клетках будут стоять единицы.

что $a^2=1$. Эти таблицы показаны на рисунке 2, где для краткости в клетках таблиц приводятся только индексы сомножителей, например, произведение $a_1 a_3 a_5$ обозначается 1, 3, 5. Звездочка * означает число 1. Как видим, всегда после четырех операций во всех клетках будут стоять единицы.

И. К. Жук, И. В. Воронович

M872. На плоскости расположены три окружности C_1, C_2, C_3 радиусов r_1, r_2, r_3 — каждая вне двух других, причем $r_1 > r_2$ и $r_1 > r_3$. Из точки пересечения внешних касательных к окружностям C_1 и C_2 проведены касательные к окружности C_3 , а из точки пересечения внешних касательных к C_1 и C_3 — касательные к C_2 . Докажите, что последние две пары касательных образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность, и найдите ее радиус.

◆
 Ответ: $r = r_1 r_2 r_3 / (r_1 r_3 + r_1 r_2 - r_2 r_3)$.
 Обозначим центры данных окружностей через O_1, O_2, O_3 , точки пересечения касательных — A и B (рис. 1).

Решение задачи основано на следующем очевидном, но часто используемом соображении: точка пересечения внешних касательных к двум окружностям служит центром гомотетии этих окружностей (то же верно и для точки пересечения внутренних касательных). Из него сразу вытекает, что четвертая окружность должна быть гомотетична C_2 с центром A и C_3 с центром B , поэтому ее центр O должен лежать на пересечении отрезков AO_2 и BO_3 . Теперь надо

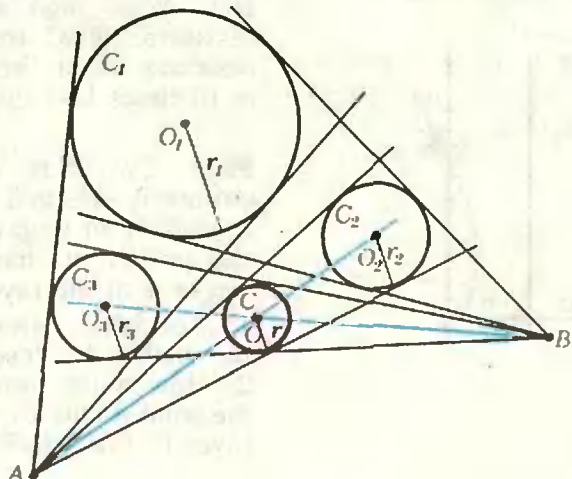


Рис. 1.

доказать существование такого числа r , что окружность C с центром O радиуса r будет гомотетична C_2 с центром A (то есть $r : r_2 = |AO| : |AO_2|$) и, одновременно, гомотетична C_3 с центром B (то есть $r : r_3 = |BO| : |BO_3|$), и найти это число.

Вычислим отношение $|AO| : |AO_2|$. Для этого проведем отрезок $O_2 D$, параллельный BO_3 (рис. 2), тогда, пользуясь гомотетичностью треугольников AOO_3 и $AO_2 D$, $O_1 B O_3$ и $O_1 O_2 D$, получим

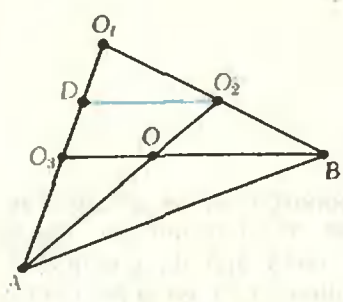


Рис. 2.

$$\begin{aligned} \frac{|AO_2|}{|AO|} &= \frac{|AD|}{|AO_3|} = 1 + \frac{|O_2 D|}{|AO_3|} = 1 + \frac{|O_3 D|}{|O_3 O_1|} \cdot \frac{|O_3 O_1|}{|AO_3|} = \\ &= 1 + \frac{|BO_2|}{|BO_1|} \cdot \left(\frac{|AO_1|}{|AO_3|} - 1 \right). \end{aligned}$$

Но $|BO_2|:|BO_1|=r_2:r_1$ (окружности C_2 и C_1 гомотетичны с центром B и коэффициентом $r_2:r_1$), и, аналогично, $|AO_1|:|AO_3|=r_1:r_3$, таким образом,

$$\frac{|AO_2|}{|AO|} = 1 + \frac{r_2}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_3} - 1 \right) = \frac{r_1 r_3 + r_1 r_2 - r_2 r_3}{r_1 r_3}.$$

Из равенства $r:r_2=|AO|:|AO_2|$ теперь находим, что

$$r = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_3 + r_1 r_2 - r_2 r_3}. \quad (1)$$

Ту же самую величину мы получим и при втором способе нахождения r — из соотношения $r:r_3=|BO|:|BO_3|$ — потому что все изменения сведутся к замене r_2 на r_3 и обратно, а такая замена не влияет на значение правой части (1). Тем самым утверждение задачи доказано.

Отметим, что доказать существование окружности, вписанной в четырехугольник, образованный касательными, то есть равенство

$$r_2 \cdot \frac{|AO|}{|AO_2|} = r_3 \cdot \frac{|BO|}{|BO_3|}, \quad (2)$$

можно короче, причем разными путями. Приведем, например, доказательство «методом площадей». Перенесем (2) в виде

$$\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{|AO|}{|AO_2|} = \frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{|BO|}{|BO_2|}. \quad (3)$$

Поскольку $r_2:r_1=|BO_2|:|BO_1|=S_{ABO_2}:S_{ABO_1}$, $|AO|:|AO_2|=S_{ABO}:S_{ABO_2}$, $r_3:r_1=|BO_3|:|BO_1|=S_{ABO_3}:S_{ABO_1}$, и $|BO|:|BO_2|=S_{ABO}:S_{ABO_2}$ (где S_{ABO} , S_{ABO_1} и т. д. — площади соответствующих треугольников), обе части равенства (3) равны $S_{ABO}:S_{ABO_1}$.

Задача легко решается также с помощью понятия центра масс, о котором подробно рассказывалось в статье В. Г. Болтянского и М. Б. Балка в «Кванте» № 4 за этот год. Предлагаем читателям самостоятельно найти это решение.

Л. П. Купцов.
В. Н. Дубровский

М873. Учитель написал на доске квадратный трехчлен $x^2 + 10x + 20$. Затем каждый ученик по очереди увеличивал или уменьшал на единицу по своему выбору один из младших коэффициентов (коэффициент при x или свободный член), но не оба сразу. В результате получился трехчлен $x^2 + 20x + 10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен с целыми корнями?

◆ Ответ: верно.

Заметим, что при каждом изменении трехчлена его значение в точке $x=-1$ изменяется на 1 (в ту или другую сторону). Значение первого трехчлена $f(x)=x^2+10x+20$ в этой точке равно $f(-1)=11$, а последнего, $g(x)=x^2+20x+10$, — $g(-1)=-9$. Поэтому в какой-то промежуточный момент на доске был написан трехчлен $h(x)=x^2+px+q$, для которого $h(-1)=0$. Оба его корня — целые (один равен -1 , другой, по теореме Виета, равен $-q$).

А. А. Берзиньш

М874*. При каких целых m и n выполняется равенство
а) $(5+3\sqrt{2})^m = (3+5\sqrt{2})^n$?
б) $(a+b\sqrt{d})^m = (b+a\sqrt{d})^n$, где a и b ($a \neq b$) — взаимно простые натуральные числа, $a, d > 1$ — натуральное число, среди делителей которого нет квадратов простых чисел?

◆ Ответ: только для $m=n=0$.

Мы должны доказать, что исходное равенство

$$(a+b\sqrt{d})^m = (b+a\sqrt{d})^n \quad (1)$$

не может выполняться при положительных целых m и n . (В круглых скобках стоят числа, большие 1, поэтому m и n — одного знака; если m и n отрицательны, то, перейдя к обратным числам, мы получим равенство, аналогичное (1) с показателями $|m|$ и $|n|$.) Заметим, что в условиях задачи число \sqrt{d} (в частности, $\sqrt{2}$) — иррациональное. Раскроем в данном равенстве скобки и представим его в виде

$$x+y\sqrt{d}=z+t\sqrt{d}, \quad (2)$$

где x, y, z, t — натуральные числа. Равенство (2) может выполняться только, если $x=z$ и $y=t$ (иначе

\sqrt{d} — рациональное число), поэтому вместе с данным равенством (1) должно выполняться и равенство для «сопряженных» чисел (полученных подстановкой $-\sqrt{d}$ вместо \sqrt{d}):

$$(a-b\sqrt{d})^m = (b-a\sqrt{d})^n, \quad (3)$$

эквивалентное равенству $x-y\sqrt{d}=z-t\sqrt{d}$.

Это соображение сразу дает решение задачи а): поскольку $|5-3\sqrt{2}| < 1$, а $|3-5\sqrt{2}| > 1$, равенство

$$(5-3\sqrt{2})^m = (3-5\sqrt{2})^n$$

не может выполняться при $m > 1$, $n > 1$: слева стоит число, по модулю меньшее 1, а справа — большее 1.

Приведем теперь два решения задачи б).

Первое основано на соображениях делимости. Заметим сначала, что в равенстве (1) показатели m и n можно считать взаимно простыми (если они имеют наибольший общий делитель $q > 1$, то, извлекая корень степени q , мы получим аналогичное равенство со взаимно простыми m и n). Значит, одно из этих чисел, скажем, n — нечетно. Тогда после раскрытия скобок в (1) все члены, не содержащие \sqrt{d} , кроме a^n , будут иметь множитель b . Приравняв их суммы в левой и правой частях ($x=z$), получим, что a^n делится на b . А поскольку a и b взаимно просты, это возможно лишь при $b=1$. Подставляя в (3) $b=1$ и учитывая, что $1-a\sqrt{d} < 0$, видим, что обе части (3) отрицательны, следовательно, число m также нечетно. Отсюда точно так же выводится, что $b^n=1$ делится на a , так что и $a=1$, в противоречии с условием $a \neq b$.

Второе решение б) ближе к решению задачи а) — в нем используются лишь переход к сопряженным числам (3) и оценки и не используется условие взаимной простоты натуральных чисел a и b .

Пусть $a > b$, тогда $1 < a+b\sqrt{d} < b+a\sqrt{d}$ и поэтому из (1) следует (при $m > 1$, $n > 1$), что $m > n$. С другой стороны, должно выполняться равенство

$$\left(\frac{a-b\sqrt{d}}{a+b\sqrt{d}}\right)^m = \left(\frac{b-a\sqrt{d}}{b+a\sqrt{d}}\right)^n. \quad (4)$$

Сравним величины

$$\mu = \left|\frac{a-b\sqrt{d}}{a+b\sqrt{d}}\right| \text{ и } \nu = \left|\frac{a\sqrt{d}-b}{b+a\sqrt{d}}\right| \quad (5)$$

(во второй знак модуля можно и не писать, поскольку $a\sqrt{d} > b$). Заметим, что если $p > q > 0$, то величина

$$\frac{p-q}{p+q} = \frac{1-q/p}{1+q/p} = \frac{2}{1+q/p} - 1$$

тем больше (ближе к 1), чем меньше отношение q/p . Поскольку, очевидно,

$$\frac{b}{a\sqrt{d}} < \frac{b}{a} < \frac{b\sqrt{d}}{a} \text{ и } \frac{b}{a\sqrt{d}} < \frac{a}{b\sqrt{d}},$$

в любом из двух случаев $a > b\sqrt{d}$ и $a < b\sqrt{d}$ будет $\mu < \nu$ и тем более $\mu^m < \nu^n$, ибо $0 < \mu < \nu < 1$, а $m > n$. Это противоречит равенству $\mu^m = \nu^n$, вытекающему из (4).

Ю. В. Михеев, Н. Б. Васильев

М875. По кругу вписано $n \geq 3$ натуральных чисел, причём отношение суммы двух соседей любого из этих чисел к нему самому является натуральным числом. Докажите, что сумма всех таких отношений а) не меньше $2n$, б) не больше $3n$.

Обозначим через a_1, \dots, a_n данные числа, а через

$$S_n = \frac{a_n + a_2}{a_1} + \frac{a_1 + a_3}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n} \quad (*)$$

— рассматриваемую в задаче сумму.

а) Поскольку для любых положительных x и y справедливо неравенство $x/y + y/x \geq 2$, сумму S_n

можно оценить так:

$$S_n = \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}\right) + \left(\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_2}{a_3}\right) + \dots + \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \geq \\ \geq 2 + 2 + \dots + 2 = 2n$$

(это неравенство справедливо для любых положительных чисел a_1, \dots, a_n).

б) Неравенство $S_n \leq 3n$ докажем индукцией по n .

При $n=3$ рассмотрим два случая: 1) все числа равны, 2) среди чисел a_1, a_2, a_3 есть различные. В первом случае все слагаемые в (*) равны 2 и $S_3=6 < 3 \cdot 3$. Во втором случае все наибольшее из чисел a_1, a_2, a_3 (пусть им будет a_1) строго больше полусуммы двух других ($a_1 > (a_2 + a_3)/2$). Тогда число $(a_2 + a_3)/a_1$ меньше 2, а так как это число — натуральное, $a_1 = a_2 + a_3$. Следовательно,

$$S_3 = \frac{a_2 + a_3}{a_1} + \frac{a_3 + a_1}{a_2} + \frac{a_1 + a_2}{a_3} = 3 + \frac{2a_3}{a_2} + \frac{2a_2}{a_3},$$

причем числа $k = 2a_3/a_2 = (a_1 + a_3)/a_2 - 1$ и $l = 2a_2/a_3$ — натуральные. Учитывая, что $kl=4$, получаем такие варианты: $k=1, l=4$ — тогда $a_2 = 2a_3$ и $S_3 = 8 < 9$, или $k=2, l=2$ — тогда $a_3 = a_2, S_3 = 7 < 9$ или $k=4, l=1$ и снова $S_3 = 8 < 9$.

Предположим теперь, что наше неравенство справедливо для $n-1$ чисел и докажем, что $S_n < 3n$. Если все числа a_i равны, то $S_n = 2n < 3n$. В противном случае возьмем наибольшее из чисел a_1, \dots, a_n (если имеется несколько наибольших чисел, выберем то из них, которое строго больше хотя бы одного из своих соседей). Пусть это будет число a_n , тогда $a_n > (a_{n-1} + a_1)/2$. Как и выше, отсюда следует, что $a_n = a_{n-1} + a_1$, то есть

$$\frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a_{n-2} + a_1}{a_{n-1}}, \quad \frac{a_n + a_2}{a_1} = 1 + \frac{a_{n-1} + a_2}{a_1},$$

причем $(a_{n-2} + a_1)/a_{n-1}$ и $(a_{n-1} + a_2)/a_1$ — натуральные числа. Таким образом, набор a_1, \dots, a_{n-1} удовлетворяет условию задачи и для него рассматриваемая сумма $S_{n-1} < 3(n-1)$. Следовательно, $S_n = S_{n-1} + 3 < 3n$.

Из сказанного видно, что при добавлении к набору a_1, \dots, a_n числа $a_{n+1} = a_1 + a_n$ (между a_1 и a_n) сумма S_n увеличивается на 3. Отсюда по индукции легко выводится, что сумма S_n может принимать любое целое значение S из промежутка $2n \leq S < 3n$.

О. Р. Мусин

◆
Ф883. При разрыве неподвижного зенитного снаряда он разлетается на очень большое число осколков, летящих равномерно во все стороны со скоростью v_0 . Такой снаряд, летящий вниз со скоростью u , разрывается на высоте H над землей. Когда осколки будут падать на землю наиболее часто?

После разрыва снаряда множество разлетающихся во все стороны осколков образуют расширяющуюся равномерно со скоростью v_0 сферу, центр которой движется вниз с ускорением g и с начальной скоростью u . Таким образом, ко времени t от момента разрыва центр сферы сместится от точки A , лежащей на высоте H над землей (в этой точке произошел разрыв) на расстояние $AO = ut + gt^2/2$ (см. рисунок), а радиус сферы будет равен $R_t = v_0 t$. Пусть к этому времени центр сферы находится над землей на высоте $(R_t - h) < R_t$. Значит, те осколки, которые должны

были бы лежать на поверхности сферического сегмента с высотой h_i (см. рисунок) упали на землю. Найдем массу $m(t)$ этих осколков.

Пусть m_0 — масса всех осколков (масса снаряда); тогда

$$m(t) = m_0 \frac{S(h_i)}{S(R_i)} = m_0 \frac{2\pi R_i h_i}{4\pi R_i^2} = m_0 \frac{h_i}{R_i},$$

где $S(h_i)$ — площадь сферического сегмента с высотой h_i , $S(R_i)$ — площадь всей сферы к моменту времени t . Подставляя $R_i = v_0 t$ и $h_i = ut + gt^2/2 + v_0 t - H$ (см. рисунок), получаем

$$m(t) = m_0 \left(\frac{u+v_0}{2v_0} + \frac{gt}{4v_0} - \frac{H}{2v_0 t} \right). \quad (1)$$

Полученная формула верна для промежутка времени $t_1 \leq t \leq t_2$, где t_1 — время, прошедшее после взрыва до начала падения осколков на землю, t_2 — время, прошедшее до падения на землю последнего осколка. Найдем значения t_1 и t_2 .

Первым упадет на землю осколок, скорость которого в точке A равна $|\vec{u} + \vec{v}_0| = u + v_0$; следовательно,

$$(u+v_0)t_1 + \frac{gt_1^2}{2} = H,$$

откуда

$$t_1 = \frac{\sqrt{2gH + (u+v_0)^2} - (u+v_0)}{g}. \quad (2)$$

Время t_2 находим из условия

$$(u-v_0)t_2 + \frac{gt_2^2}{2} = H,$$

откуда

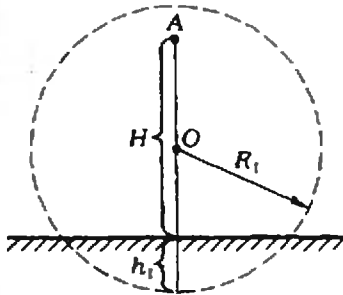
$$t_2 = \frac{\sqrt{2gH + (u-v_0)^2} - (u-v_0)}{g}.$$

Вернемся к формуле (1). Понятно, что частота падения осколков на землю в данный момент времени — это значение производной $m'(t)$:

$$m'(t) = \frac{m_0 g}{4v_0} + \frac{m_0 H}{2v_0 t^2}.$$

Очевидно, что значение $m'(t)$ тем больше, чем меньше t . Следовательно, с наибольшей частотой осколки будут падать на землю через время t_1 (см. (2)) после разрыва снаряда.

И. И. Солодовников



Ф884. Задача Н. Е. Жуковского. Жук ползет по жесткой (непрогибающейся) соломинке, опирающейся на гладкий пол и гладкую вертикальную стенку (рис. 1). Соломинка однородная, длина ее l , масса m ; масса жука M ($M \gg m$). Соломинка образует угол α с горизонтом. Начальная скорость жука в точке B была равна v_0 . Как должен двигаться жук, чтобы соломинка оставалась

Пусть в некоторый момент времени ускорение, с которым жук ползет вниз вдоль соломинки, равно \vec{a} . На жука действуют сила тяжести Mg и сила \vec{f} реакции со стороны соломинки. Найдем, как направлена сила \vec{f} .

Запишем уравнение движения жука:

$$Mg + \vec{f} = M\vec{a},$$

или, в проекциях на оси X и Y (см. рис. 1):

$$Ma = Mg \sin \alpha + f_x, \quad f_y - Mg \cos \alpha = 0.$$

неподвижной? Как зависит ускорение жука от пройденного им вдоль соломинки расстояния? За какое время жук доползет до нижней точки? Сможет ли жук подняться по соломинке из точки A в точку B ?

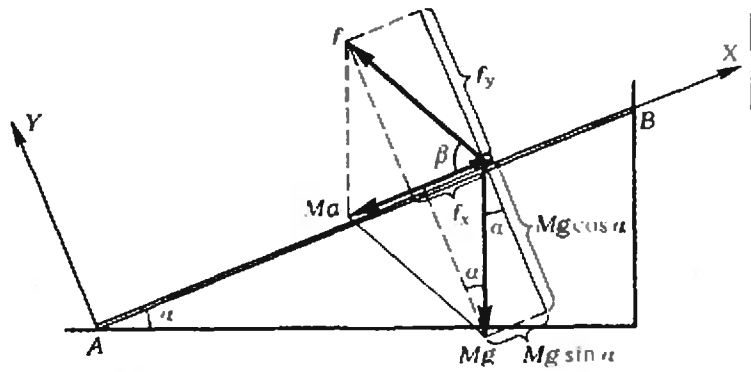


Рис. 1.

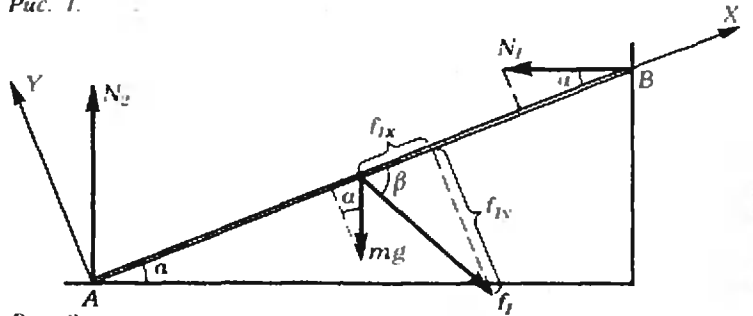


Рис. 2.

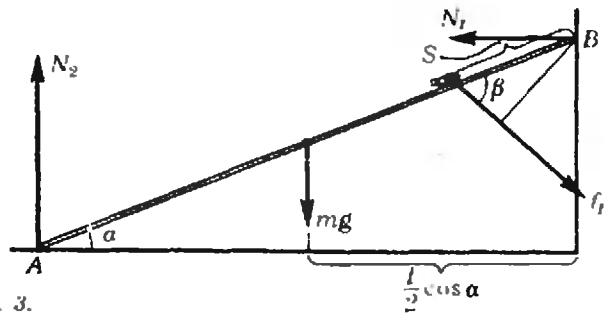


Рис. 3.

Отсюда $f_x = M(a - g \sin \alpha)$, $f_y = Mg \cos \alpha$, и (см. рис. 1)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f_y}{f_x} = \frac{g \cos \alpha}{a - g \sin \alpha}.$$

Теперь рассмотрим силы, действующие на соломинку (рис. 2). Это сила тяжести mg , сила \vec{N}_1 реакции со стороны гладкой стенки, сила \vec{N}_2 реакции со стороны гладкого пола и сила \vec{f}_1 , с которой жук действует на соломинку; согласно III закону Ньютона, $\vec{f}_1 = -\vec{f}$. Чтобы соломинка оставалась неподвижной, должны выполняться два условия: геометрическая сумма действующих на нее сил должна быть равна нулю и алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки должна быть равна нулю. Запишем первое условие (см. рис. 2):

в проекциях на ось X —

$$N_2 \sin \alpha + f_{1x} - N_1 \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0,$$

или

$$N_2 \sin \alpha + M(a - g \sin \alpha) - N_1 \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0;$$

(1)

в проекциях на ось Y —

$$N_2 \cos \alpha + N_1 \sin \alpha - mg \cos \alpha - f_{1y} = 0,$$

или

$$N_2 \cos \alpha + N_1 \sin \alpha - mg \cos \alpha - Mg \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) найдем N_1 и N_2 :

$$N_1 = Ma \cos \alpha, \quad N_2 = (M+m)g - Ma \sin \alpha.$$

Запишем второе условие, рассматривая моменты сил относительно точки B (рис. 3):

$$N_2 l \cos \alpha - mg \frac{l}{2} \cos \alpha - f_{1x} \sin \beta = 0,$$

где x — координата жука к данному моменту. Учитывая, что $f_{1x} \sin \beta = f_{1y} = Mg \cos \alpha$, и подставляя найденные значения N_1 и N_2 , получаем

$$Mgl - Mal \sin \alpha + mg \frac{l}{2} - Mgx = 0.$$

Перепишем это уравнение в таком виде:

$$x - l \frac{2M+m}{2M} = -a \frac{l \sin \alpha}{g} \quad (3)$$

и введем обозначения $x - l \frac{2M+m}{2M} = z$, $\frac{g}{l \sin \alpha} = \omega^2$.

Учитывая, что $a = x'' = \left(z + l \frac{2M+m}{2M} \right)'' = z''$, уравнение (3) можно записать так:

$$z'' = -\omega^2 z.$$

Полученное нами уравнение — уравнение гармонических колебаний. В общем случае решение такого уравнения записывается в виде

$$z(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (4)$$

а постоянные A и B находятся из начальных условий. В нашем случае начальные условия (при $t=0$) таковы:

$$x(t_0) = z(t_0) + l \frac{2M+m}{2M} = 0 \Rightarrow z(t_0) = -l \frac{2M+m}{2M},$$

$$x'(t_0) = v_0 \Rightarrow z'(t_0) = v_0.$$

Подставляя в уравнение (4) $t=0$ и $z(t_0)$, получаем

$$B = -l \frac{2M+m}{2M}.$$

Продифференцировав уравнение (4) и подставив $t=0$ и $z'(t_0)$, получим:

$$A = \frac{v_0}{\omega}.$$

Таким образом,

$$z(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t - l \frac{2M+m}{2M} \cos \omega t,$$

и, следовательно,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + l \frac{2M+m}{2M} (1 - \cos \omega t). \quad (5)$$

Итак, закон движения жука при условии, что соломинка неподвижна, дает формула (5). Ускорение,

с которым движется жук в произвольный момент времени, определяется формулой (3) —

$$a(t) = \frac{g}{\sin \alpha} \left(\frac{2M+m}{2M} \right) - \frac{g}{l \sin \alpha} x(t) \quad (6)$$

— и зависит от x линейно.

Время τ , за которое жук доползет от точки B до точки A , определяется условием $x(\tau) = l$, то есть

$$l = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega \tau + l \frac{2M+m}{2M} (1 - \cos \omega \tau). \quad (7)$$

Если масса соломинки пренебрежимо мала по сравнению с массой жука ($m \gg M$), то

$$x(t) = l - l \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (5')$$

$$a(t) = \frac{g}{\sin \alpha} \left(1 - \frac{1}{l} x(t) \right), \quad (6')$$

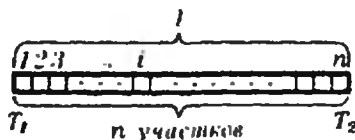
и время τ определяется условием

$$\frac{v_0}{\omega} \sin \omega \tau = l \cos \omega \tau \Rightarrow \operatorname{tg} \omega \tau = \frac{\omega l}{v_0}. \quad (7')$$

Подняться по соломинке из точки A в точку B так, чтобы соломинка оставалась неподвижной, жук может только в том случае, если в каждой точке (в том числе и в точке A) ускорение жука будет таким же, как в рассмотренном нами случае движения сверху вниз. Покажите это сами.

Ю. М. Брук

◆
◆885. Концы однородного стержня постоянного сечения поддерживаются при температурах T_1 и T_2 ($T_2 > T_1$). Температурный коэффициент линейного расширения материала стержня равен α . Чему равна длина стержня, если при $t = 0^\circ \text{C}$ она была l_0 ?



Поскольку температуры на концах стержня поддерживаются постоянными, а стержень однородный и имеет постоянное сечение, через любое поперечное сечение стержня за данный промежуток времени проходит одно и то же количество теплоты, то есть поток тепла через стержень постоянен. Поток тепла пропорционален разности температур, приходящейся на единицу длины стержня. Следовательно, температура вдоль стержня возрастает от «холодного» конца к «горячему» по линейному закону. Разделим мысленно стержень на участки малой длины δ такой, что в пределах каждого участка температуру можно считать постоянной. Пусть n — число участков; тогда $\delta = l/n$, где l — искомая длина стержня. Рассмотрим i -й участок (см. рисунок). Температура стержня на этом участке —

$$T_i = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{n} i, \text{ или } t_i = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{n} i.$$

При $t = 0^\circ \text{C}$ длина этого участка была

$$\delta_{i0} = \frac{\delta_i}{1 + \alpha t_i}.$$

Очевидно, что $\sum_{i=1}^n \delta_{i0}$ — это длина l_0 стержня при $t = 0^\circ \text{C}$, то есть

$$l_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{1 + \alpha t_i} = \delta_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \alpha t_i} = \frac{l}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \alpha t_i}.$$

Поскольку нас интересует линейное расширение стержня, можно считать, что

$$\frac{l}{l+at_i} = \frac{l-at_i}{l-a^2t_i^2} \approx 1-at_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{l}{l+at_i} &\approx \sum_{i=1}^n (1-at_i) = n - a \sum_{i=1}^n \left(t_1 + \frac{t_2-t_1}{n} i \right) = \\ &= n - a \left(nt_1 + \frac{t_2-t_1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) \approx n \left(1 - a \frac{t_1+t_2}{2} \right) \end{aligned}$$

(мы учли, что $n \gg 1$). Таким образом,

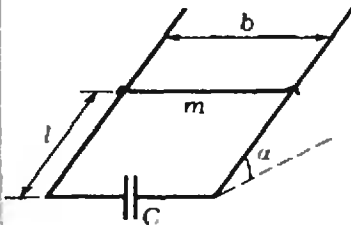
$$l_0 = \frac{l}{n} \left(1 - a \frac{t_1+t_2}{2} \right),$$

откуда

$$l = \frac{l_0}{1 - a \frac{t_1+t_2}{2}} \approx l_0 \left(1 + a \frac{t_1+t_2}{2} \right).$$

Л. Г. Маркович

◆
Ф886. По двум параллельным металлическим направляющим, наклоненным под углом α к горизонту и расположенным на расстоянии друг от друга, может скользить без трения металлическая перемычка массы m . Направляющие замкнуты снизу на незаряженный конденсатор емкости C , и вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого \vec{B} направлена вертикально (см. рисунок). В начальный момент перемычку удерживают на расстоянии l от основания «горки». За какое время перемычка достигнет основания «горки» после того, как ее отпустят? Какую скорость она будет иметь у основания? Сопротивлением проводников пренебречь.



При движении перемычки меняется магнитный поток, пронизывающий контур, «замыкаемый» перемычкой. В результате в контуре возникает ЭДС индукции.

В течение малого промежутка времени Δt , когда мгновенную скорость v перемычки можно считать неизменной, мгновенное значение ЭДС индукции равно

$$\mathcal{E}_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = vbB \cos \alpha.$$

Ток, текущий через перемычку в это время, равен $i = \Delta q / \Delta t$, где Δq — заряд, накопившийся на конденсаторе за время Δt , то есть

$$\Delta q = C \cdot \Delta\mathcal{E}_i = CbV (\cos \alpha) \cdot \Delta v$$

(поскольку сопротивление подводящих проводов отсутствует, мгновенное значение напряжения на конденсаторе равно \mathcal{E}_i). Итак,

$$i = CbV \cos \alpha \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = CbVa \cos \alpha,$$

где a — ускорение, с которым движется перемычка.

На перемычку действуют сила тяжести и сила Ампера. Запишем уравнение движения перемычки:

$$ma = mg \sin \alpha - ibB \cos \alpha = mg \sin \alpha - Cb^2V^2 a \cos^2 \alpha.$$

Отсюда найдем a :

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + Cb^2V^2 \cos^2 \alpha}.$$

Время, за которое перемычка спустится к основанию горки, определим из условия $l = \frac{at^2}{2}$:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{mg \sin \alpha} (m + Cb^2V^2 \cos^2 \alpha)}.$$

Скорость перемычки у основания —

$$v_t = at = \sqrt{\frac{2lmg \sin \alpha}{m + Cb^2V^2 \cos^2 \alpha}} \quad \text{А. И. Буздин}$$



Передача электроэнергии на расстояние

Кандидат физико-математических наук
В. А. ДАНИЛИН

В настоящее время передача электрической энергии от генератора к потребителю происходит, в основном, по проводам с помощью переменного тока. При этом обязательно возникают потери энергии, прежде всего — на нагрев проводов. Снизить потери можно за счет уменьшения силы тока в линии электропередачи, то есть за счет повышения напряжения на выходе с генератора (чтобы передаваемая мощность осталась неизменной).

Для непосредственного использования электрической энергии потребителем напряжение в конце линии, то есть на входе к потребителю, нужно понизить.

В случае переменного тока повышение и понижение напряжения осуществляется с помощью трансформаторов.

Как устроен генератор переменного тока? Каков принцип работы трансформатора? От чего зависят потери в линии электропередачи? Эти и аналогичные вопросы могут возникнуть у абитуриентов в связи с повторением темы «Производство, передача и использование электрической энергии». Некоторые из них мы обсудим на примере не-

скольких конкретных задач. Почти все они в свое время предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. Трансформатор, повышающий напряжение с $U_1=100$ В до $U_2=3300$ В, имеет замкнутый сердечник в виде кольца (рис. 1). Через кольцо пропущен провод, концы которого присоединены к вольтметру. Вольтметр показывает напряжение $U=0,5$ В. Сколько витков содержится в каждой обмотке трансформатора?

В замкнутом кольцевом сердечнике, где практически сконцентрировано все магнитное поле, магнитный поток одинаков во всех его сечениях. В любом витке, надетом на сердечник, безразлично к какой обмотке он относится, мгновенное значение ЭДС индукции одно и то же, поскольку, согласно закону электромагнитной индукции, оно определяется скоростью изменения магнитного потока в сердечнике: $e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Если обмотки трансформатора содержат n_1 и n_2 витков, то ЭДС индукции, наведенные в этих обмотках, равны соответственно $e_1 = n_1 e$ и $e_2 = n_2 e$.

Обычно активное сопротивление обмоток трансформатора мало, и его можно не учитывать. Аналогичное можно сказать и о проводе, к которому присоединен вольтметр. Тогда в любой момент времени справедливы равенства

$$u = -e, \quad u_1 = -e_1, \quad u_2 = -e_2.$$

Здесь u — мгновенное значение напряжения на концах провода, u_1 — напряжение на первичной обмотке и u_2 — на разомкнутой вторичной обмотке трансформатора.

Поскольку изменения всех ЭДС происходят в одних и тех же фазах, их отношения можно заменить отношением соответствующих действующих значений, а значит, с учетом предыдущих равенств, — и отношением действующих значений напряжений:

$$\frac{e_1}{e} = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}} = \frac{U_1}{U}, \quad \frac{e_2}{e} = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}} = \frac{U_2}{U}.$$

Отсюда найдем количество витков в каждой обмотке:

$$n_1 = \frac{e_1}{e} = \frac{U_1}{U} = 200,$$

$$n_2 = \frac{e_2}{e} = \frac{U_2}{U} = 6600.$$

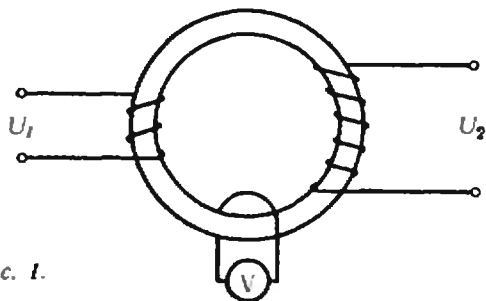


Рис. 1.

Задача 2. Электроэнергия от генератора передается потребителю по проводам. Сопротивление проводов r , сопротивление нагрузки R , напряжение на генераторе U . Определите КПД линии передачи, то есть отношение мощности, выделяемой на нагрузке, к полной мощности, отдаваемой генератором. При каком сопротивлении нагрузки полезная мощность максимальна?

По закону Ома для полной цепи ток в линии

$$I = \frac{U}{r+R}.$$

Мощность генератора

$$P = UI = \frac{U^2}{r+R},$$

мощность, выделяемая на нагрузке,

$$P_n = I^2 R = \frac{U^2 R}{(r+R)^2}.$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{P_n}{P} = \frac{U^2 R (r+R)}{(r+R)^2 U^2} = \frac{R}{r+R}.$$

При уменьшении R до нуля и при неограниченном возрастании R величина P_n падает до нуля. Значит, при некотором промежуточном значении $R=R_n$ полезная мощность должна достигать своего максимального значения.

Исследуем функцию $P_n(R)$ на максимум. Для этого найдем и приравняем нулю производную от $P_n(R)$ по R :

$$P'_n(R) = U^2 \frac{(r-R)}{(r+R)^3} = 0.$$

Отсюда получим, что мощность, выделяющаяся в нагрузке, максимальна, если $R=r$. При этом $P_{n,\max} = U^2/(4r)$. КПД линии в этом случае $\eta=1/2$ — половина мощности генератора тратится бесполезно.

Задача 3. Линия электропередачи может работать при двух различных напряжениях генератора U_1 и U_2 и соответствующих сопротивлениях нагрузки R_1 и R_2 . Отношение потерь мощности на подводящих проводах для этих случаев равно α . Определите отношение U_2/U_1 при условии, что мощность генератора в обоих случаях одинакова.

Пусть сопротивление подводящих проводов равно r — эта величина не изменяется. Полная мощность, отдаваемая генератором,

$$P = UI = \frac{U^2}{R+r},$$

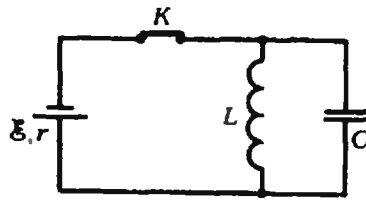


Рис. 2.

где I — ток в цепи. Мощность тепловых потерь

$$P_n = I^2 r = \frac{U^2}{(R+r)^2} r.$$

Отношение потерь мощности при различных значениях U и R равно

$$\frac{U_1^2}{(R_1+r)^2} r : \frac{U_2^2}{(R_2+r)^2} r = \alpha.$$

По условию задачи в обоих случаях генератор отдает одну и ту же мощность:

$$\frac{U_1^2}{R_1+r} = \frac{U_2^2}{R_2+r}.$$

Из двух последних соотношений следует

$$\frac{U_1^2 (R_2+r)^2}{U_2^2 (R_1+r)^2} = \alpha, \quad \frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{R_1+r}{R_2+r}.$$

Откуда

$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\alpha}.$$

На примере этой задачи видно, как велико влияние напряжения, под которым происходит передача энергии, на величину тепловых потерь в линии электропередачи. Достаточно повысить напряжение в α раз, как потери уменьшатся в α^2 раз.

* * *

Важно уметь оценивать токи и напряжения, возникающие в линиях электропередачи при переходных процессах. Таких, например, как отключение или быстрое изменение нагрузки. Если учесть, что напряжения, под которыми работают современные линии, порядка 10^6 В, то возможные увеличения напряжения, так называемые перенапряжения, могут привести к электрическому пробую в линии. Одна из схем, иллюстрирующая переходный процесс, представлена в следующей задаче.

Задача 4. Обмотка трансформатора, имеющая индуктивность $L=0,1$ Гн, и параллельно подключенный к ней конденсатор емкостью $C=0,1$ мкФ через ключ K подсоединены к источнику с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением

$r=100 \text{ Ом}$ (рис. 2). После установления стационарного режима ключ замыкают. Найдите амплитуду напряжения, возникающего на концах обмотки, по отношению к ЭДС источника.

При установившемся режиме через обмотку трансформатора течет постоянный ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r},$$

напряжение на обмотке, а значит, и на конденсаторе равно нулю.

При размыкании ключа K возникает изменение магнитного потока, которое создает на концах обмотки напряжение. Его амплитуду можно найти, рассмотрев колебания в контуре, составленном из катушки индуктивности L и конденсатора емкости C . Энергия, запасенная в катушке во время протекания постоянного тока, через четверть периода колебаний перейдет в энергию заряженного конденсатора:

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Отсюда амплитуда напряжения на конденсаторе, а следовательно и на концах обмотки трансформатора, равна

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{Cr}} \mathcal{E} = 100 \mathcal{E}.$$

Как видно, перенапряжение весьма велико. На практике оно возникает всегда, когда происходит отключение тока, идущего через катушку, при малых значениях емкости подключенного к ней конденсатора.

Упражнения

1. Вторичная обмотка трансформатора, имеющая $n=100$ витков, пронизывается магнитным потоком, изменяющимся со временем по закону $\Phi = 0,01 \cos 314t$ (в единицах СИ). Напишите формулу, выражающую зависимость ЭДС индукции во вторичной обмотке от времени, и найдите действующее значение этой ЭДС.

2. При передаче электроэнергии на большое расстояние используется повышающий трансформатор, нагруженный до номинальной мощности $P=1000 \text{ кВт}$. При этом разность показаний счетчиков электроэнергии, установленных на выходе с трансформаторной подстанции и в приемном пункте, увеличивается ежедневно на $\Delta W_n = 215 \text{ кВт}\cdot\text{ч}$. Во сколько раз необходимо повысить выходное напряжение, чтобы при передаче электроэнергии потери не превышали $0,1\%$?

3. Определите массу меди, нужную для устройства двухпроводной линии длиной $l=5 \text{ км}$. Напряжение на шинах станции $U=2400 \text{ В}$, передаваемая мощность $P=60 \text{ кВт}$, допустимая потеря напряжения в проводке $U_n = 0,08U$. Плотность меди $D=8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, удельное сопротивление $\rho=0,017 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

Избранные школьные задачи

(Начало см. на с. 33)

соединяющего середины оснований, равна длине отрезка, соединяющего середины ее диагоналей.

8 (8—10). В треугольнике ABC величина угла при вершине C равна 120° . Докажите, что из отрезков длиной $a+b$, b , c можно составить треугольник. Здесь $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$.

9 (10). Три числа являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Если ко второму числу прибавить 2, то они будут образовывать арифметическую прогрессию. Если после этого к третьему числу прибавить 2, то они будут образовывать арифметическую прогрессию. Если после этого к третьему числу прибавить 16, то они снова будут образовывать геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

10 (8—10). Периметр некоторого 1982-угольника меньше 2000. Докажите, что среди треугольников с вершинами в соседних вершинах этого 1982-угольника найдется треугольник, площадь которого меньше 1.

Десятый класс

11 (10). Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = 0,5$.

12 (10). На координатной плоскости нарисован график параболы $y=x^2$. Найдите абсциссу точки параболы, ближайшей к точке $M(0; a)$.

13 (10). Найдите многочлен (не обязательно второй степени) с целыми коэффициентами, для которого число $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ является корнем.

14 (9—10). Докажите, что для любого действительного x выполняется неравенство $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

15 (8—10). В треугольнике ABC биссектрисы BP и CT пересекаются в точке O . Известно, что точки A , P , O и T лежат на одной окружности. Найдите величину угла A .

Публикацию подготовил Е. И. Хухро

X Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции в дни весенних школьных каникул проходит заключительный, зональный этап Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников 8—10 классов. В этом году Всероссийская олимпиада отметила свой десятилетний юбилей. Она стала одним из самых массовых соревнований школьников Российской Федерации, а ее победители достойно представляли республику на Всесоюзной и Международной олимпиадах.

Как обычно, зональному этапу предшествовали районные, городские и областные (краевые) олимпиады, в результате чего каждая область (край) была представлена победителем областного (краевого) этапа по каждому классу.

В этом году заключительный этап олимпиады проводился для Северо-Западной зоны в Вологде, для Центральной зоны в Саранске, для Юго-Западной зоны в Нальчике и для зоны Сибири и Дальнего Востока в Якутске. Кроме того, в это же время заключительный этап олимпиады проходил в физико-математических школах-интернатах при Московском, Ленинградском и Новосибирском университетах.

Задание заключительного этапа по математике состояло из пяти задач, на решение которых отводилось четыре часа. Как показала проверка, наибольшее трудности у учащихся вызвали задачи по геометрии и теории чисел. Значительные трудности вызвали также задачи комбинаторного типа. Члены жюри подробно обсудили со школьниками конкурсные задачи и проанализировали допущенные ошибки.

Заключительный этап олимпиады по физике проводился в два тура — теоретический и экспериментальный, причем в экспериментальном туре принимали участие все школьники, независимо от результатов теоретического тура. Задание теоретического тура включало четыре задачи, а экспериментального — две. На решение каждого задания отводилось четыре часа. Проверка показала, что для участников олимпиады все задания оказались посильными.

Школьники, занявшие I—IV места на зональном этапе Всероссийской олимпиады, были награждены дипломами, грамотами и памятными подарками. Из числа призеров была сформирована команда РСФСР для участия во Всесоюзной олимпиаде.

Специальными грамотами были награждены также учителя, подготовившие призеров олимпиады.

Ниже приводятся задачи по математике и физике заключительного этапа и фамилии призеров X Всероссийской олимпиады школьников.

Математика

8 класс

1. Каждую грань куба разбили на четыре одинаковых квадрата и каждый получившийся квадрат покрасили одной из трех различных красок. Оказалось, что любые два квадрата, имеющие общую сторону, покрашены в разные цвета. Докажите, что всего имеется по восемь квадратов каждого цвета. Приведите пример такой раскраски.

2. Постройте плоскую замкнутую восьмизвенную ломаную, перескакающую каждое свое звено ровно один раз, причем во внутренней точке звена.

3. Окружности с центрами O_1 и O_2 одинакового радиуса касаются друг друга в точке A . Окружность с центром O_3 вдвое большего радиуса содержит внутри себя окружность с центром O_1 , касаясь ее в точке B , а окружность с центром O_2 пересекает в точках P и Q . Докажите, что прямая AB проходит или через точку P , или через точку Q .

4. См. задачу 3, пункт а) для 10-го класса.

5. Натуральные числа a, b, c, d удовлетворяют равенству $ab=cd$. Докажите, что число $a^{1984} + b^{1984} + c^{1984} + d^{1984}$ является составным.

9 класс

1. Найдите все натуральные числа n такие, что сумма цифр десятичной записи числа 2^n равна 5.

2. В клетках квадратной таблицы 3×3 расставлены знаки «+» и «-», как показано на рисунке 1. Разрешается в любом столбце или в любой строке изменить сразу все знаки на противоположные. Можно ли, повторяя эту процедуру несколько раз, из данной таблицы получить таблицу, показанную на рисунке 2?



Рис. 1.



Рис. 2.

3. Чему равно максимальное значение разности трехзначного числа и суммы кубов его цифр? Для какого трехзначного числа достигается этот максимум? Чему равно минимальное положительное значение этой разности?

4. Через точку C , лежащую вне окружности с центром O_1 , проведены к этой окружности две касательные, касающиеся ее в точках A и B . Через точки C и B проведена окружность с центром O_2 , касающаяся прямой AB в точке B и пересекающая окружность с центром O_1 в точке M . Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

5. Существуют ли на плоскости точки A, B, C такие, что для любой точки P этой плоскости длина хотя бы одного из отрезков PA, PB, PC является иррациональным числом?

10 класс

1. См. задачу 1 для 9-го класса.

2. Дана функция $f(x), x \in]-\infty; +\infty[$. Известно, что функция $d(x) = f(x) + \sin f(x)$ является периодической. Докажите, что функция $f(x)$ также является периодической.

3. Циферблат часов (круг с числами 1, 2, 3, ..., 11, 12) насажен в центре на ось, укрепленную на классной доске. Циферблат может поворачиваться вокруг оси на любой угол, крат-

ный 30° . Вначале на доске напротив каждого числа циферблата написали ноль. Затем циферблат несколько раз повернули, причем после каждого поворота к каждому из написанных на доске чисел прибавляли то число, которое оказалось напротив него на циферблате. Могут ли в итоге оказаться равными 1984:

- все числа на доске;
- все числа на доске, кроме одного;
- все числа на доске, кроме двух?

4. На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11 000 км шоссейных дорог. Сможет ли она соединить сеть шоссейных дорог все свои города?

5. Внутри грани тетраэдра $ABCD$ взяты точки A' , B' , C' , D' так, что точка A' находится на грани BCD , точка B' — на грани ACD , точка C' — на грани ABD , точка D' — на грани ABC , причем каждые две из точек A' , B' , C' , D' лежат в одной плоскости с некоторыми двумя вершинами тетраэдра. Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' , DD' пересекаются в одной точке.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Массивный клин с углом при основании α движется по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 1). Сверху на клин опирается тяжелый стержень массы m , удерживаемый в вертикальном положении гладкими опорами, в которых он может совершать вертикальные перемещения без трения. Под действием стержня клин движется равномерно. Найдите коэффициент трения между клином и стержнем и силу, с которой стержень давит на клин, во время движения клина в горизонтальном направлении с постоянной скоростью. Трением клина о горизонтальную поверхность и трением стержня об опоры можно пренебречь.

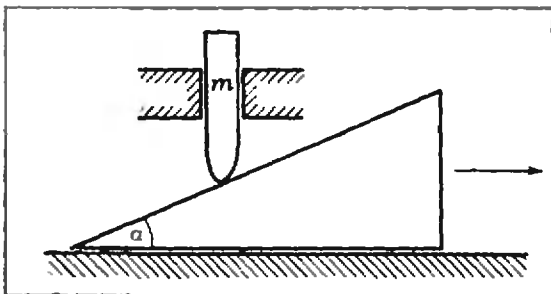


Рис. 1

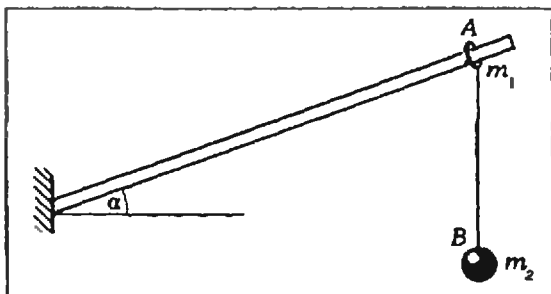


Рис. 2

2. Исследовательская ракета стартовала вертикально вверх с полюса неизвестной планеты, лишенной атмосферы. Радиосообщения с борта ракеты показали, что в течение времени t , начиная с момента старта, все предметы на ее борту давили на свои опоры и растягивали подвесы, на которых были подвешены, с силами, в $k=1,8$ раза большими, чем на поверхности планеты перед стартом. Все остальное время до падения на поверхность планеты предметы в ракете находились в состоянии невесомости. Сколько времени прошло с момента старта до момента падения ракеты на поверхность планеты? Зависимостью силы тяготения планеты от высоты над ее поверхностью для данного случая можно пренебречь.

3. Проволочный резистор намотан виток к витку на цилиндрический каркас и имеет $n=10$ витков. Сопротивление резистора $R=5$ Ом. После того как в одном месте нарушилась изоляция провода, сопротивление резистора упало до $R_1=4,75$ Ом. Чему равно сопротивление, возникшее в месте нарушения изоляции?

4. На гладкий жесткий неподвижный стержень, образующий угол α с горизонтом, надето колечко A массы m_1 , которое может скользить по стержню без трения (рис. 2). К колечку при помощи невесомой нити AB прикреплен грузик B массы m_2 . Первоначально колечко удерживают рукой таким образом, что нить AB вертикальна. Чему будет равно натяжение нити в первый момент времени после того, как колечко отпустят?

9 класс

1. Однородный шкаф массы m , высоты H и ширины l стоит на опорах, расположенных на расстоянии l одна от другой. Коэффициенты трения между опорами и участками горизонтальной поверхности пола, с которыми каждая из опор соприкасается, μ_1 и μ_2 , причем $\mu_2 < \mu_1$. Шкаф необходимо сдвинуть с места, не опрокидывая и не переворачивая его. Какой наименьшей горизонтально направленной силой можно это сделать? Где такая сила должна быть приложена? В какую сторону направлена?

2. Некоторое количество идеального одноатомного газа в герметическом сосуде подвергают изобарному расширению, при котором его объем увеличивается в полтора раза. Затем с тем же газом проводят процесс сжатия, в результате которого и объем газа, и его давление уменьшаются в три раза, причем в ходе процесса давление остается прямо пропорциональным объему с одним и тем же коэффициентом пропорциональности. При сжатии газ передал окружающим телам количество теплоты Q_0 . После сжатия газ снова изобарно расширяют, доводя его объем до первоначального (того, который имел газ перед первым изобарным расширением).

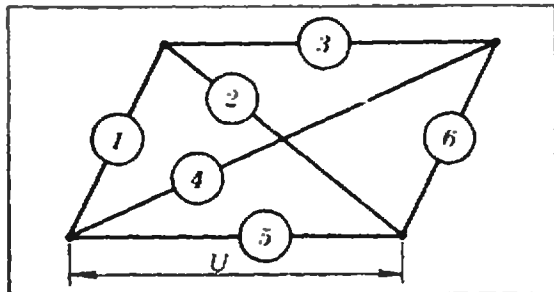


Рис. 3.

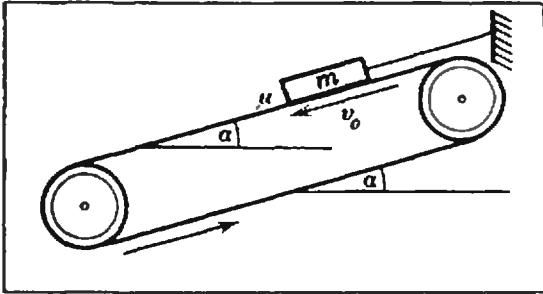


Рис. 4.

Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы изохорно вернуть его в упомянутое первоначальное состояние?

3. Шесть одинаковых вольтметров соединены между собой, как показано на рисунке 3, и подключены к источнику постоянного напряжения. Один из вольтметров показывает при этом напряжение $U_x = 10$ В. Каковы показания остальных вольтметров?

4. Два маленьких шарика разных масс m_1 и m_2 подвешены на двух параллельных невесомых и нерастяжимых нитях так, что касаются друг друга и их центры располагаются на одной высоте. Первый шарик отводят в плоскости нитей на некоторую высоту h_1 таким образом, что нить остается прямой, и отпускают без начальной скорости. Известно, что в результате столкновения шаров первый шар останавливается, а второй поднимается на высоту $h_2 = 0,25 h_1$. Найдите относительную потерю механической энергии.

10 класс

1. На ленте транспортера, движущейся с постоянной скоростью v_0 вниз под углом α к горизонту, лежит кирпич, удерживаемый от движения вниз вместе с лентой при помощи привязанного к нему шнура, закрепленного наверху (рис. 4). Шнур перерезают. Какую работу совершит сила трения, действующая на кирпич, к тому моменту, когда кирпич приобретет скорость транспортера? Коэффициент трения μ , масса кирпича m .

2. Колечки O и O' надеты на вертикальные неподвижные стержни AB и $A'B'$ соответственно (рис. 5). Нерастяжимая нить закреплена в точке A' и на колечке O и протета сквозь колечко O' . Считая, что колечко O' движется вниз с постоянной скоростью v , определите скорость колечка O в тот момент, когда $\widehat{AOO'} = \alpha$.

3. В предварительно откачанный сосуд объема $V = 10^{-3}$ м³ ввели небольшое количество воды и измерили давление при трех значениях температуры: при $t_1 = +60^\circ\text{C}$ $p_1 = 1,92 \cdot 10^4$ Па, при $t_2 = +90^\circ\text{C}$ $p_2 = 4,20 \cdot 10^4$ Па, при $t_3 = +120^\circ\text{C}$ $p_3 = 4,55 \cdot 10^4$ Па. Определите по этим данным массу введенной воды. Какими стали бы давления при этих температурах, если бы массе воды уменьшили на 20 %?

4. Незаряженный конденсатор с емкостью C подключают к последовательно соединенным катушке с индуктивностью L и батарее с напряжением U . Как только ток через катушку упадет до нуля, конденсатор отключают и затем подключают вновь, поменяв местами его выводы. Как только ток через катушку снова упадет до нуля, конденсатор вновь переключают и т. д. Какой максимальный заряд окажется на конденсаторе после того, как его подключали n раз?

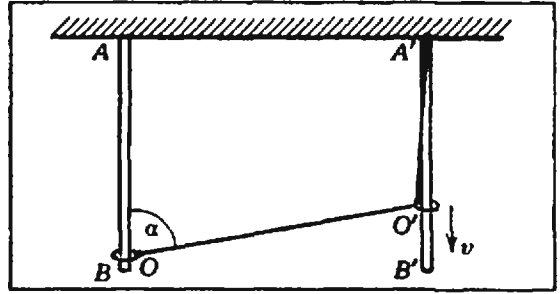


Рис. 5.

Активным сопротивлением цепки можно пренебречь.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Определите плотность неизвестной жидкости.

Оборудование: сосуд с водой, сосуд с неизвестной жидкостью (раствором соли), две стеклянные трубки, две резиновые трубки, линейка, пластилин, стеклянный тройник, ножницы, насос Шинца.

Примечание. При определении плотности неизвестной жидкости контакта этой жидкости с водой допускать нельзя.

2. Определите коэффициент трения целлулоида о дерево.

Оборудование: целлулоидный шарик для настольного тенниса с отверстием (3—4 мм), линейка деревянная ученическая, сосуд с водой (200 мл), мелкий сухой песок.

9 класс

1. Определите удельную теплоту плавления неизвестного кристаллического вещества.

Оборудование: сосуд с горячей водой, две одинаковые пробирки, неизвестное вещество, термометр, часы с секундной стрелкой.

Плотность вещества и воды, а также удельную теплоемкость воды считать известными:

$$\rho_{\text{вещ}} = 1,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_{\text{вода}} = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad c_{\text{вода}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}.$$

2. Исследуйте зависимость жесткости пружины, самостоятельно изготовленной из медной проволоки, от длины получившейся пружины и ее диаметра.

Оборудование: медная проволока диаметром 1—2 мм, цилиндрические стержни различных диаметров (например, 1, 2, 3 см), линейка, набор разновесов, штатив с двумя лапками, нить.

10 класс

1. Исследуйте зависимость периода малых колебаний линейки, положенной на тело цилиндрической формы, от длины линейки и диаметра цилиндра.

Оборудование: три цилиндра различных диаметров (например, 2, 4, 8 см), три линейки разной длины (например, 25, 50, 100 см), часы с секундной стрелкой.

2. Определите область, в которой можно одновременно видеть светящуюся лампочку, находящуюся на главной оптической оси собирающей линзы, и ее изображение (наблюдение ведется одним глазом).

Оборудование: электрическая лампочка на подставке, источник тока, собирающая линза, соединительные провода, линейка.

Призеры X Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Волгунин А. (Горький, с. ш. № 36),
Парьев В. (п. Красногвардейский Белгородской обл., с. ш.),

Слепухин А. (Калуга, с. ш. № 5),
Тимкин В. (Новосибирск, с. ш. № 110);

по 9 классам —

Баткин Я. (Петрозаводск, с. ш. № 30),
Бергер А. (Иваново, с. ш. № 6),
Бурлука А. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Земцов П. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Филиппов С. (Белорецк, с. ш. № 14);

по 10 классам —

Астрелин А. (Новосибирск, с. ш. № 119),
Басманова Т. (Магнитогорск, с. ш. № 33),
Богданов А. (Рязань, с. ш. № 14),
Гочев Г. (Дубна, с. ш. № 9),
Лев М. (Свердловск, с. ш. № 130),
Николаев В. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Трусов И. (Орел, с. ш. № 1).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Вайсбург М. (Томск, с. ш. № 6),
Кларк П. (Тула, с. ш. № 58),
Кожеевников А. (Ижевск, с. ш. № 30),
Халочкин Ю. (Брянск, с. ш. № 3);

по 9 классам —

Бирюков А. (Саратов, с. ш. № 13);
Гольденберг И. (Мурманск, с. ш. № 8),
Ковшов Д. (Арзамас, с. ш. № 15),
Назик С. (Ангарск, с. ш. № 10);

по 10 классам —

Кривоносов А. (Свердловск, с. ш. № 37),
Мисник С. (Воронеж, с. ш. № 62),
Маскадынов Е. (Ангарск, с. ш. № 10),
Смирнов А. (Череповец, с. ш. № 12).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Крестьяников А. (Славгород, с. ш. № 10),
Минеев И. (Салехард, с. ш. № 2),
Онацкий А. (Ставрополь, с. ш. № 30),
Фролкин М. (Долгопрудный, с. ш. № 10);

по 9 классам —

Васильев В. (Воронеж, с. ш. № 59),
Киришин П. (Дубна, с. ш. № 10),
Пантюхина Е. (Омск, с. ш. № 88),
Строев М. (Оренбург, с. ш. № 30),

по 10 классам —

Архипов О. (Бугульма, с. ш. № 2),
Веснин Р. (Петрозаводск, с. ш. № 18),
Курганов Д. (Туапсе, с. ш. № 6),

Румянцев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Струков С. (Воронеж, с. ш. № 85).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Волков О. (Горький, с. ш. № 23),
Дорофеев Д. (Липецк, с. ш. № 1),
Зыряков И. (Братск, с. ш. № 32),
Лукаш А. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1);

по 9 классам —

Барзыкин В. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Башкиров В. (Чебоксары, с. ш. № 27),
Бенидюк П. (Пятгорск, с. ш. № 5),
Лобода А. (Прокопьевск, с. ш. № 2);

по 10 классам —

Абрамов В. (Нальчик, с. ш. № 18),
Брезгунов А. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Гринберг М. (Красноярск, с. ш. № 42),
Курников И. (Гатчина, с. ш. № 1),
Макаров Д. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Соловьев А. (Куйбышев, с. ш. № 63).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Бояр Р. (Тольятти, с. ш. № 28),
Орлов Д. (Красноярск, с. ш. № 10),
Трусов А. (Псков, с. ш. № 8),
Чунаев А. (Волгоград, с. ш. № 92);

по 9 классам —

Маточкин С. (Йошкар-Ола, с. ш. № 2),
Михеев А. (Кимры, с. ш. № 13),
Фельдман Л. (Саратов, с. ш. № 13),
Чередниченко С. (Находка, с. ш. № 21);

по 10 классам —

Абанов А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Берестов М. (Томск, с. ш. № 77),
Дубинин А. (Электросталь, с. ш. № 21),
Кузнецкин К. (Киров, с. ш. № 16),
Соколов Е. (Дятьково, с. ш. № 2),
Ярунин Н. (Павлово, с. ш. № 1).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Колмак В. (Ставрополь, с. ш. № 1),
Лебедев Д. (Гатчина, с. ш. № 3),
Равдин М. (Прокопьевск, с. ш. № 2),
Рахамов С. (Казань, с. ш. № 131);

по 9 классам —

Аюков С. (Пенза, с. ш. № 53),
Васильев А. (с. Верхневелиюльск ЯАССР, с. ш. № 2),
Кириллов Е. (п. Нововоронежский Воронежской обл., с. ш. № 3),
Севастьянов А. (Северодвинск, с. ш. № 17);

по 10 классам —

Андреев А. (Боровичи, с. ш. № 10),
Беспалов Е. (Курган, с. ш. № 35),
Бияк М. (Краснодар, с. ш. № 27),
Милготик П. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Приходько В. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 14).

Задачи Московской городской математической олимпиады школьников

В 1984 году московская математическая олимпиада проводилась в 47-й раз. Ниже публикуются задачи ее заключительного тура; в скобках указаны фамилии авторов задач.

8 класс

1. Решите уравнение $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0$.

(А. Н. Дранишников)

2. Каждые две из шести ЭВМ соединены своим проводом. Укажите, как раскрасить каждый из этих проводов в один из пяти цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходило пять проводов разного цвета.

(В. Б. Алексеев)

3. Докажите, что сумма расстояний от центра правильного семиугольника до всех его вершин меньше, чем сумма расстояний до них от любой другой точки.

(С. Б. Гашков, А. В. Рябинин)

4. Сумма пяти неотрицательных чисел равна единице. Докажите, что их можно расставить по кругу так, что сумма всех пяти попарных произведений соседних чисел будет не больше $\frac{1}{5}$.

(С. Б. Гашков)

5. Разрежьте квадрат на 8 остроугольных треугольников.

(М. Гарднер)

6. Является ли четным число всех 64-значных натуральных чисел, не содержащих в записи нулей и делящихся на 101?

(С. Б. Гашков)

9 класс

1. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину, а боковые грани — одинаковую площадь. Докажите, что основание этой пирамиды — равнобедренный треугольник.

(А. Н. Дранишников)

2. Каждые две из 13-ти ЭВМ соединены своим проводом. Можно ли раскрасить каждый из этих проводов в один из 12-ти цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходило 12 проводов разного цвета?

(В. Б. Алексеев)

3. Некоторый треугольник можно вырезать из бумажной полоски единичной ширины, а из любой полоски меньшей ширины его вырезать нельзя. Какую наименьшую площадь может иметь этот треугольник?

(С. Б. Гашков)

4. По кругу расставлено не менее четырех неотрицательных чисел, в сумме равных единице. Докажите, что сумма всех попарных произведений соседних чисел не больше $\frac{1}{4}$.

(С. Б. Гашков, А. Н. Дранишников)

5. Существует ли три ненулевые цифры, с помощью которых можно составить бесконечное число десятичных записей квадратов различных целых чисел?

(С. Б. Гашков)

6. В прямоугольнике размера 3×4 произвольно расположены 4 точки. Докажите, что между какими-то двумя из них расстояние не больше, чем $\frac{25}{8}$.

(С. Б. Гашков)

10 класс

1. Не используя калькуляторов, таблиц и т. п., докажите неравенство $\sin 1 < \log_3 \sqrt{7}$.

(И. Н. Сергеев)

2. Жюри олимпиады решило по ее результатам сопоставить каждому участнику натуральное число таким образом, чтобы по этому числу можно было однозначно восстановить баллы, полученные участником за каждую задачу, и чтобы из каждых двух школьников большее число сопоставлялось тому, кто набрал большую сумму баллов. Помогите жюри решить эту задачу!

(И. Н. Сергеев)

3. Решите уравнение в целых числах $19x^3 - 84y^2 = 1984$.

(В. Б. Алексеев)

4. В некотором царстве, в некотором государстве было выпущено неограниченное количество монет достоинством в n_1, n_2, n_3, \dots копеек, где $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ — бесконечная последовательность, состоящая из натуральных чисел. Докажите, что эту последовательность можно оборвать, т. е. найдется такое число N , что любую сумму, которую можно уплатить без сдачи выпущенными монетами, на самом деле можно уплатить только монетами достоинством в n_1, n_2, \dots, n_N копеек.

(С. Б. Гашков, И. Н. Сергеев)

5. Квадрат разрезан на остроугольные треугольники. Докажите, что их не меньше 8.

(М. И. Гринчук)

6. Треугольное сечение куба касается вписанного в куб шара. Докажите, что площадь этого сечения меньше половины площади грани куба.

(С. Б. Гашков)

Ответы, указания, решения



Решение уравнений на микрокалькуляторе

2. $x_n = \sqrt[n]{a \cdot \frac{2^{2n}-1}{3}}$

4. а) $x_{n+1} = \sqrt[n+1]{a \cdot x_n}$ б) $x_{n+1} = \sqrt[n]{\frac{a}{x_n}}$

в) $x_{n+1} = \frac{a}{x_n}$

5. а) $x_{n+1} = \sqrt[n+1]{a \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{x_n}}}$ б) $x_{n+1} = \sqrt[n+1]{\frac{a}{x_n}}$

6. $\square x_0 \times a \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{a} \times a \sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{a} \dots \text{ind}(\sqrt[n]{a})}$

7. $x = \sqrt[n]{a}$

8. а) 2,154435, б) 9,109767, в) 1,872172, г) 2,524239,

д) 2,261022, е) 1,731345, ж) 1,608334.

9. а) $x_1 = 57,62784$; $x_2 = 1,572158$. б) $x = 8,502572$.

в) $x = 14,79361$. г) $x = 3,371635$. д) $x = 1,765015$.

е) $x = 1,518512$. ж) $x_1 = 19,22910$; $x_2 = 4,715751$.

з) $x = 3,546518$. и) $x_1 = 3,920271$; $x_2 = 1,114004$.

к) $x_1 = 9,844947$; $x_2 = 2,293349$.

Где ошибка?

Ошибка в построении образа точки С. На окружности S_2 существуют две точки, удаленные от A_1 на расстояние $|AC|$ — точки C_1 и C_2 (рис. 1), т. к. окружности S_2 и S_3 пересекаются в двух точках. Из этих двух точек нужно взять точку C_2 , поскольку угол $\angle C_2OC_1 = \alpha$. Отметим, что если мы неверно построим также образ точки В, взяв точку B_2 , то получившийся треугольник $A_1C_1B_2$ будет равен треугольнику ABC , но не будет являться его образом при повороте на угол α вокруг точки O .

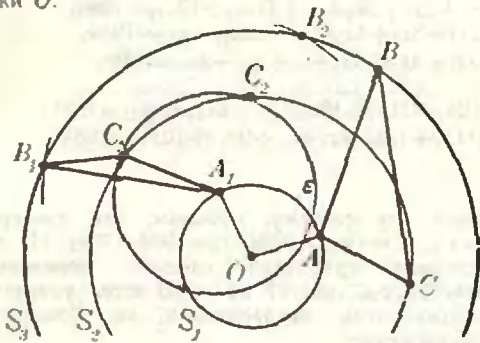


Рис. 1.

Еще прием самоконтроля

1. $\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$.

2. $2 \sin 2a \cos a + 4 \cos 2a \sin a - 3 \sin 3a = -\sin a$.

3. $a \cos x - b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x + \varphi)$.

Надо ли делать проверку?

1. 4. 2. -10; 6. 3. 2. 4. 1. 5. 2; 3. 6. 1.

Избранные школьные задачи

1. Ответ, 27,4 км. Указание. Проще всего «забыть» про Васю и воспользоваться тем, что

расстояние $s = 12$ (км) Петя, двигаясь со скоростью 14 км/ч, проедет на 11 мин быстрее, чем если бы он двигался со скоростью 12 км/ч.

2. Ответ: 1938. Указание. Запишите искомый год в виде $1900 + 10x + y$ и решите относительно цифр x и y уравнение $59 - 10x - y = 1 + 9 + x + y$.

3. Ответ. $3 + 3\sqrt{3}$. Указание. Так как $(OT) \perp (BC)$, а BO и CO — биссектрисы, то легко найти углы $\angle OBT = 45^\circ$ и $\angle OCT = 30^\circ$.

4. Возведите первое неравенство в квадрат и отнимите второе.

5. Ответ. Да (в обоих случаях). Разбиение показано на рисунке 2 для четных n и рисунке 3 для нечетных n , где n — число квадратов в разбиении ($n \geq 4$).

6. Ответ. 15 и 20 лет. Указание. Задача

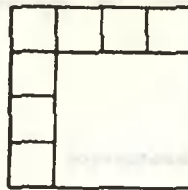


Рис. 2.

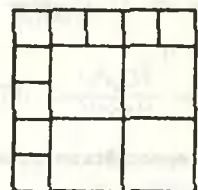


Рис. 3.

сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 35, \\ y = 2(x - (y - x)). \end{cases}$$

7. Указание. Продолжите боковые стороны трапеции до пересечения, проведите медиану в полученном прямоугольном треугольнике и найдите длину первого отрезка l , $l = \frac{a-b}{2}$, где

a и b — длины оснований трапеции, $a > b$. Этому же числу (принем в любой трапеции) равна длина второго отрезка.

8. Указание. Достаточно проверить, что большой отрезок меньше суммы двух других: $(a+b) < b+c$, т. е. что $a < c$, а это верно, т. к. в треугольнике ABC против большего угла $C = 120^\circ$ лежит большая сторона.

9. Ответ. 1, 3, 9 или $1/9, -5/9, 25/9$.

10. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{1982}$ — длины последовательных сторон 1982-угольника. Если предположить противное, то $a_1 a_2 \geq 2, a_2 a_3 \geq 2, \dots, a_{1981} a_{1982} \geq 2, a_{1982} a_1 \geq 2$. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получим 1982 неравенства: $(a_1 + a_2)/2 \geq \sqrt{a_1 a_2} \geq \sqrt{2}, (a_2 + a_3)/2 \geq \sqrt{2}$ и т. д. Сложив все эти неравенства, получим: $a_1 + a_2 + \dots + a_{1982} \geq 1982 \sqrt{2} > 2000$, что противоречит условию.

11. Ответ. $\pi/4 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$. Указание. $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 0,5 \sin^2 2x$.

12. Ответ. $x=0$ при $a \leq 0,5, x = \pm \sqrt{a-0,5}$ при $a > 0,5$. Указание. Достаточно найти наименьшее значение функций $f(x) = x^2 + (x^2 - a)^2 (f(x) — квадрат расстояния между данной точкой и точкой параболы с абсциссой x). Докажите, что это значение достигается в одной из критических точек функции $f(x) = 0$ и $x = \pm \sqrt{a-0,5}$ при $a > 0,5$) и сравните $f(0)$ и $f(\pm \sqrt{a-0,5})$.$

13. Ответ. Например, $(x^2 - 10)^2 = 84$. Указание. Достаточно заметить, что число $((\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 - 10)^2$ — целое.

14. Неравенство достаточно доказать для $x \in [0; \pi/2]$. При $x=0$ неравенство очевидно, а на промежутке $]0; \frac{\pi}{2}]$ функция $\cos x$ убывает, а $\sin x < x$. Поэтому $\cos x < \cos(\sin x)$, а $\sin(\cos x) < \cos x$.

15. Ответ. 60° . Указание. Угол \widehat{TOP} (в любом треугольнике) равен $90^\circ + \widehat{A}/2$. Из условия «точки A, P, O и T лежат на одной окружности» следует, что либо $\widehat{A} = \widehat{TOP}$, откуда $\widehat{A} = 180^\circ$ (что невозможно), либо $\widehat{A} + \widehat{TOP} = 180^\circ$, откуда $\widehat{A} = 60^\circ$.

Передача электроэнергии на расстояние

1. $e = \pi \Phi'(t) = 314 \sin 314t$ (в единицах СИ); $E \approx 222$ В.

$$2. \frac{U'}{U} = \sqrt{\frac{\Delta W_{\text{эл}}/t}{0,001P}} \approx 3 \text{ (здесь } t=1 \text{ сутки} = 24 \text{ ч).}$$

$$3. m = \frac{4D_{\text{эл}}P}{0,08U^2} \approx 1970 \text{ кг} \approx 2 \text{ т.}$$

X Всероссийская олимпиада школьников

Математика

8 класс

1. Утверждение следует из того, что три квадрата при каждой из 8 вершин куба должны быть раскрашены по-разному. Развертка куба, раскрашенного требуемым образом, показана на рисунке 4.

2. См. рис. 5.

3. Пусть прямая AB пересекает окружности с центрами O_2 и O_3 в точках D и D' , соответственно (рис. 6). Окружность O_2 симметрична окружности O_1 относительно точки A , поэтому $D = Z_A(B)$, то есть $|AD| = |AB|$. Окружность O_3 гомотетична O_1 с центром B и коэффициентом 2, поэтому $D' = H_B^2(A)$, то есть $|BD'| = 2|BA|$. Следовательно, точка D совпадает с D' и принадлежит обеим окружностям O_2 и O_3 .

5. Решение этой задачи — М888 — будет опубликовано в «Кванте» № 1 за 1985 г.

9 класс

1. $n=5$. Числа 2^n при $n \leq 5$ проверяются непосредственно. При $n \geq 6$, пользуясь тем, что чис-

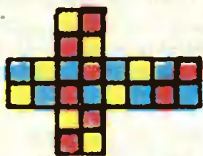


Рис. 4.

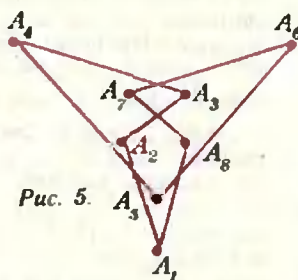


Рис. 5.

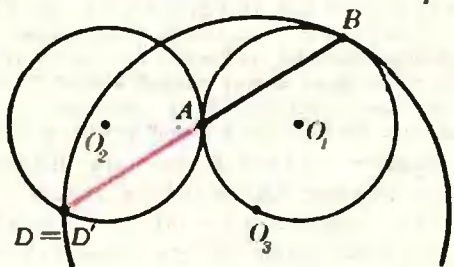


Рис. 6.

ло, образованное последними k цифрами числа 2^n (при $2^n \geq 10^k$), должно делиться на 2^k и тем, что сумма цифр рассматриваемых чисел равна 5, последовательно устанавливаем, что последняя цифра этих чисел может равняться только 2, две последних — 12, три последних — 112. Остается заметить, что $1112 = 2^3 \cdot 139$, $10112 = 2^7 \cdot 79$, а числа, кончающиеся на 00112 не делятся на 32, то есть при $n \geq 6$ решений нет.

2. Нельзя. Указание. Четыреста числа плюсов в левом верхнем квадрате 2×2 таблицы при указанных операциях не меняется.

3. Максимальное значение рассматриваемой разности равно 396 и достигается для чисел 620 и 621, минимальное положительное — 3, оно достигается, например, для числа 437. Указание. Для числа $abc = 100a + 10b + c$ рассматриваемая разность равна $(100a - a^3) + (10b - b^3) + (c - c^3)$. Наибольшее значение каждого из этих трех слагаемых можно найти перебором. Для нахождения наименьшего значения разности можно заметить, что каждое слагаемое делится на 3 при любых целых a, b, c .

4. Решение этой задачи — М887 — будет опубликовано в «Кванте» № 1 за 1985 г.

5. Решение этой задачи — М889 — будет опубликовано в «Кванте» № 1 за 1985 г.

10 класс

2. Функция $h(t) = t + \sin t$ строго возрастает, поэтому из равенства $g(x+T) = g(x)$, то есть $h(f(x+T)) = h(f(x))$, вытекает, что $f(x+T) = f(x)$.

3. а) Не могут. После каждого поворота сумма всех чисел (первоначально равная нулю), увеличивается на $1+2+\dots+12=78$, а в итоге она должна стать равной $12 \cdot 1984$. Но это число не делится на 78.

б) Не могут. Указание. Предположим, что после нескольких поворотов число 1984 оказалось записанным, например, против чисел 12, 1, 2, ..., 10 на циферблате в исходном положении, и пусть среди этих поворотов было x_k ($k=1, 2, \dots, 12$) поворотов на угол $k \cdot 30^\circ$. Тогда целые неотрицательные числа x_1, \dots, x_{12} удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 11x_{11} + 12x_{12} = 1984, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \dots + 12x_{11} + x_{12} = 1984, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + \dots + x_{11} + 2x_{12} = 1984, \\ \dots \\ 10x_1 + 11x_2 + 12x_3 + \dots + 8x_{11} + 9x_{12} = 1984, \\ 11x_1 + 12x_2 + x_3 + \dots + 9x_{11} + 10x_{12} = 1984. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $x_3 = x_4 = \dots = x_{12}$, $x_1 = 79x_3 - 1984$, $x_2 = 1984 - 77x_3$. Из двух последних уравнений следуют неравенства $1984/79 \leq x_3 \leq 1984/77$, но целых чисел, удовлетворяющих этим неравенствам, не существует. Противоречие.

в) Могут. Для доказательства достаточно заметить, что первые 10 уравнений системы пункта б) имеют решение в целых неотрицательных числах, например, $x_1 = 61, x_2 = 0, x_3 = 17, x_4 = x_5 = \dots = x_{12} = 26$.

4. См. решение задачи М890 в Кванте № 1 за 1985 г.

5. Указание. Точки A' и B' могут лежать в одной плоскости только с вершинами A и B , поэтому прямые AA' и BB' пересекаются. Точно так же доказывается, что любые две из прямых AA', BB', CC' и DD' пересекаются. А поскольку они не лежат в одной плоскости, все они должны иметь общую точку.

Физика

Теоретический тур

8 класс

- $\mu = \operatorname{tg} \alpha$; $N = mg \cos \alpha$.
- $t = \tau(k + \sqrt{k(k-1)}) = 3\tau$.
- $R_{\text{нз}} = \frac{R(nR_1 - (n-1)R)}{n^2(R-R_1)} = 0,5 \text{ Ом}$.
- $T = \frac{m_1 m_2 g \cos^2 \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha}$.

9 класс

- Искомая сила $F_{\text{мин}}$ должна быть направлена слева направо и приложена на высоте $h = l/(2\mu_2)$. Ее модуль $F_{\text{мин}} = \mu_2 mg$.
- $Q = 3/8 Q_0$.
- Вольтметр 3 всегда показывает 0. Если 10 В показывает вольтметр 5, то остальные (1, 2, 4, 6) вольтметры показывают по 5 В каждый. Если же 10 В показывает один из (1, 2, 4, 6) вольтметров, то вольтметр 5 показывает 20 В.
- $\Delta E/E = 1 - \sqrt{h_2/h_1} = 1/2$; другими словами, $\Delta E/E = 50\%$.

10 класс

- $A = \frac{mv_0^2}{2} \frac{\mu}{\mu + \operatorname{tg} \alpha}$.
- См. решение задачи Ф868 («Квант», 1984, № 7).
- В состояниях 2 и 3 пар ненасыщенный, поэтому для расчета массы можно воспользоваться значениями t_2 , p_2 или t_3 , p_3 . Например, $m = M p_2 V / (RT_2) \approx 2,5 \cdot 10^{-4}$ кг. При уменьшении массы воды давления станут равными: $p'_1 = p_1$, $p'_2 = p_2 m' / m = 0,8 p_2$, $p'_3 = 0,8 p_3$ (в состоянии 1 пар в обоих случаях насыщенный).
- $q_n = 2nCU$.

Вниз по кроличьей норе

(см. «Квант» № 7)

Задачи

- Ответ. Алиса ошиблась: такого количества цифр не может потребоваться для нумерации всех страниц книги.
Решение. Сначала заметим, что если количество страниц в книге четырехзначно, то потребуются по крайней мере $3 \cdot 900 + 2 \cdot 90 + 9 > 373$ цифр. Если число страниц двузначно, то понадобится не меньше, чем $9 + 2 \cdot 90 = 189 < 373$ цифр. Если же в книге трехзначное число страниц, то понадобится всего $9 + 189 + 3 \cdot k$ цифр (k — количество страниц, нумеруемых трехзначными числами). Это число делится на 3 и, следовательно, не равно 373 ни при каком k .
- Если решать эту задачу, предполагая, что на циферблате стоят арабские цифры и что числа 10, 11 и 12 не могут «расколоться», то есть что каждое из них стоит на своем куске целиком, то получается такой ответ: а) может; б) может; в) не может. Для случаев а) и б) легко строятся примеры. В случае в) воспользуйтесь тем, что сумма всех чисел на циферблате равна $1+2+\dots+12=78$ и не делится на 4. Если же считать, что двузначные числа 10, 11 и 12 тоже могут расколоться так, что их разные цифры могут оказаться на разных кусках, получается уже другая задача: на какое вообще количество кусков можно разбить циферблат так, чтобы суммы чисел на всех кусках оказались равными.
И, наконец, если использовать римские цифры, то получится еще одна задача про расколотый циферблат.

Попробуйте решить и эти задачи. При этом следует помнить, что при переворачивании римских цифр могут получаться другие числа. Например, из IX при переворачивании получается XI.

3. Ответ. В первой банке малиновое, во второй земляничное, в третьей клубничное варенье.

4. Ответ. 25 ступеней. Указание. От первого до пятого этажа четыре пролета по 25 ступеней в каждом.

5. Ответ. Она должна спросить: «Живете ли вы в этой стране?» В стране А ей ответят «да», в стране З: «нет».

6. Ответ: а) через $\frac{12}{11}$ часа, то есть в

13 час 5 $\frac{5}{11}$ мин; б) 23; в) 43.

Указание. а), б) За 1 час минутная стрелка делает 1 оборот вокруг своей оси, часовая — $\frac{1}{12}$ оборота. Если стрелки совпадут через t часов,

то $t - \frac{t}{12} = n$, где n — целое число. Таким обра-

зом, часовая и минутная стрелки совпадают в моменты времени $t = \frac{12}{11} n$.

в) Рассуждая, как в случаях а) и б), получим соотношения $t - \frac{t}{12} = \frac{2n+1}{4}$, где n — целое число.

7. Ответ: $2^{10} = 1024$ способа. Указание. Каждая из 10 ламп может независимо от остальных находиться в двух состояниях: гореть или не гореть.

8. Ответ. Нельзя. Указание. На плане имеются три комнаты с пятью дверями в каждой. Легко понять, что из комнаты с нечетным числом дверей нельзя выйти и войти одинаковое количество раз. Поэтому прогулка должна начинаться и кончаться в одной из таких комнат. Задача — шутка. Вам никто не мешает выйти из комнаты, где находится норка, а затем вползти в нее (в комнату!).

9. Ответ. В пузырьке не яд. У — лжец. Указание. X и Y не могут быть оба жителями страны А, так как их высказывания противоречат друг другу. Если X — житель страны А, то он говорит правду, и Y — лжец. Если X — лжец, то Y — тоже лжец (если бы Y был жителем страны А, то сказанное X было бы правдой). Поэтому в пузырьке не яд, а Y — житель страны З.

10. Ответ. Задача имеет два решения:

$$\begin{array}{r} + 49680 \\ + 535 \\ \hline 50215 \end{array} \qquad \begin{array}{r} + 49630 \\ + 585 \\ \hline 50215 \end{array}$$

Вопросы

- Сестра, конечно, была старшей. А, иначе, почему бы она с интересом читала книжку, в которой не было ни картинок, ни разговоров.
- Высота голоса любого живого существа определяется размером и натяжением голосовых связок. Считая, что слон «говорит» басом (он большой), легко понять, что кролик говорил бы очень тонким голосом (он маленький).
- В сказке могла, а на самом деле нет (если только не воспользуется парашютом).
- Если Алиса оплустит банку, то банка будет падать рядом с ней, постепенно отставая из-за сопротивления воздуха.
- Прежде чем попасть в шкаф, банка имела большую скорость, поэтому очень вероятно, что она разбилась. Однако Алиса может и не узнать

об этом, потому что скорость ее падения может превзойти скорость, с которой звук от разбитой банки ее догоняет.

6. Широта и долгота — это угловые координаты, определяющие положение точки на поверхности земного шара. Если вы сейчас находитесь в точке A , которая имеет α° северной широты и β° восточной долготы, то ваш «антипод» находился бы в точке α° южной широты и $180^\circ - \beta^\circ$ западной долготы. Например, из австралийского города Перт, пройдя в сквозь Землю, вы вынырните в районе Бермудских островов.

7. Чем меньше, тем лучше.

9. Для этого, например, можно забираться в мокрой одежде.

Море слез

(см. «Квант» № 8)

Задачи

1. 35 перчаток. 2. Алнса была в белом платье, Мейбл в синем, а Ада — в зеленом.

3. Возможны в других системах счисления. Например, $4 \cdot 5 = 13_5$ в системе счисления с основанием 21 ($24 = 1 \cdot 21 + 3$).

4. Ответ. 16 ч $36 \frac{12}{13}$ мин. Решение. Часы

в момент остановки показывают без чего-то пять часов, то есть 4 ч t мин. При этом минутная стрелка прошла полкруга, то есть 180° и еще α° , а часовая не дошла α° до середины круга. За 1 минуту минутная стрелка поворачивается на 6° , а часовая на 0.5° . За t минут минутная стрелка повернется на $t \cdot 6^\circ = 180^\circ + \alpha$, а часовая

на $60^\circ - \alpha^\circ = t \cdot 0.5^\circ$. Отсюда $t = 36 \frac{12}{13}$ мин.

5. Ответ. Не догонит. Указание. Кошке до норки 7 прыжков. За 7 прыжков кошки мышка делает 21 шаг и скроется в норке.

6. Ответ. Кошке следует расположиться в центре описанной около $\triangle ABC$ окружности, если треугольник ABC не тупоугольный, и в середине наибольшей стороны, если ABC — тупоугольный треугольник.

7. Ответ. $2401 = (2+4+0+1)^4$. Указание. Число $l+o+r+n$ — однозначное, не меньше 5.

8. Ответ. За 27 секунд.

Вопросы

1. 4. В футах 12 дюймов. Рост Алнсы после того, как она увеличилась, стал равен 9 футам. Поэтому она выросла в $\frac{9 \cdot 12}{10} = 10,8 \approx 11$ раз.

Все время, пока Алнса росла, она говорила. Оцените, сколько секунд вам понадобится, чтобы произнести все сказанное ею до удара головой о потолок. Естественно, у разных читателей получатся разные результаты. Это поможет каждому из вас оценить скорость роста Алнсы. Вес Алнсы увеличился приблизительно в $11^3 = 1331$ раз. Если «маленькая» Алнса весила хотя бы 1 килограмм, то «выросшая» Алнса весила бы больше тонны. И заплакать лужу она может довольно большую, если она плакса, так что, уменьшившись до размеров Мыши, она смогла бы плавать в такой луже (или даже утонуть).

2. Об этом шла речь раньше. Голос Алнсы, по-видимому, станет густым басом.

3. Самые нижние части закраин (реборд) колес движутся в направлении, противоположном направлению движения.

Главный редактор — академик И. К. Киоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбиллин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никитин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Великов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. И. Влашкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров,
Б. М. Ивлева, Г. С. Петрова, А. Б. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:

Ю. М. Аратовский, Т. А. Доброхотова-Майкова,
М. Б. Дубах, А. И. Климаков, В. С. Коляль, Н. С. Кузьмина,
С. Ф. Лукин, Ю. П. Мартыненко, И. Е. Смирнова,
Е. С. Шабельник

Фото представили:

Р. Е. Зыков, В. И. Ободзинский

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 20.8.84 Подписано к печати 20.9.84.

Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8

Бумага 70×108 1/16

Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,29 Т-18332

Тираж 172 727 экз. Цена 40 коп. Заказ 2234

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Шахматная страничка



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЭВМ ПРОТИВ ГРОССМЕЙСТЕРА

В «Кванте» № 6 за этот год рассказывалось о двух партиях А. Карпова с микрокомпьютерами. Встречаются иногда гроссмейстеры и с большими компьютерами.

Любопытная партия (один на один) была сыграна между экс-чемпионкой мира среди машин программой «Белл» и экс-чемпионом мира в игре по переписке, специалистом в области машинных шахмат Г. Берлинером.

«Белл» — Берлинер
Защита Алехина

1.e4 Kf6 2.e5 Kd5 3.d4 d6 4.Kf3 g6 5. c4 Kb6 6.ed cd 7.Ce2 Cg7 8.0—0 0—0 9.Ce3 Kc6 10.Kc3 d5! Если до сих пор компьютер мог обращаться к дебютной библиотечке, то сейчас он вынужден принимать самостоятельные решения, — последний ход черных является теоретической новинкой. 11.c5 Kc4 12. C:c4 dc 13.Фe2 Cg4 14.Lad1. В сложном положении черные затевают интересное осложнение, которые в конечном итоге складываются в их пользу. 14...K:d4 15.C:d4 C:d4 16.L:d4. После 16.Kb5 e5 17.Kb:d4 cd 18.Ф:c4 C:f3 19.gf Фf6 позиция принимала ничейные очертания. «Белл» избирает вариант, который ведет к выгодному материальному соотношению для белых. Конечно, компьютеру трудно было сообразить, что его кони окажутся не слишком подвижными. 16...Ф:d4 17.K:d4 C:e2 18.Kd:e2 Lfd8 19.b3! (19.Ld1 L:d1 20. K:d1 Lc8 с явным перевесом у черных).

19...cb 20.ab Ld2 21.f4! Лb2 22.Kd4 Ld8 23.Ка4. Белые нзобратательно защищаются, если 23.Ld1, то 23...f6 и 24...e5. 23...Ld2 24.Kb5 a6 25.Kbc3 Lc2 26.Ld1 Ldd2 27.L:d2 L:d2 28.g3 f5 29.h3 Kpf7 30.Kpf1 e5! 31.fe Kpe6 32.Kb6 Lc2 33.Ke2 Kp:e5 34.Kpe1 Kpe4 35.Kc4 g5! 36.Kpd1 L:c4 37.bc Kpd3 38. Kg1?

Несмотря на упорное стремление черных к победе, машина

до сих пор не упустила шансов на ничью. Сейчас следовало продолжать 38.h4! h6 39.hg hg 40.Kg1 Kpe3 (40...g4 41.Ke2 Kp:c4 42.Kpd2 a5 43.Kpc2) 41.Kh3 f4 42.K:g5! fg 43.Kpc2 g2 44.Kh3 Kpd4 45.Kpd3, и выигрыша нет. 38...g4? Взаимная любезность, после 38...Kpe3 39.Ke2 a5 белые оказывались в цугцванге. Ошибаются не только машины, но и люди. 39.h4? Белые не используют последний шанс — 39.hg fg 40. Ke2 Kp:c4 41.Kf4 и т. д. 39...Kpe3! 40.Ke2 Kpf2 41.Kpd2 a5! 42.Kpd3 a4! 43.Kd4 a3 44.Kpc2 a2 45.Kpb2 f4 46.Kf5 fg. Белые сдались. Поединок небезошибочный, но погрешности машины несут вполне человеческий характер.

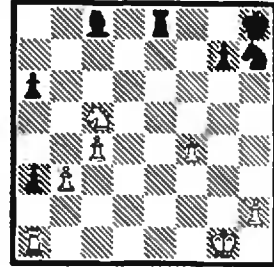
Если в серьезной партии ЭВМ пока что далеко до гроссмейстеров (лучшие программы свои лучшие партии проводит на уровне кандидата в мастера), то в блице или сеансе одновременной игры они время от времени берут верх над знаменитыми шахматистами. Однажды, например, компьютер одолел английского гроссмейстера М. Стинга.

«Чесс» — Стинг
Ферзевое fianchetto

1.e4 b6 2.d4 Cb7 3.Kc3 c5 4.dc bc 5.Ce3 d6 6.Cb5+ Kd7 7.Kf3 e6 8.0—0 a6 9.C:d7+ Ф:d7 10.Фd3 Ke7 11.Lad1 Ld8 12. Фc4 Kg6 13.Lfe1 Ce7 14.Фb3 Фc6 15.Kph1 0—0 16.Cg5 Ca8 17.C:e7 K:e7 18.a4 Lb8 19.Фа2 Lb4 20.b3. Гроссмейстер избрал скромное начало, машина тоже ведет партию бесхитростно, в основном делая развешивающие ходы. Поэтому, хотя положение черных и предпочтительнее, решающим образом разница в классе пока не сказалась. Последующая азартная игра черных является типичной для блицпартии. В турнирной встрече Стинг избрал бы более надежное продолжение. 20...f5 21.Kg5 fe 22.Kc:e4. Соблазн вскрыть большую диагональ и линию «f» был велик, но использовать это обстоятельство не удастся, а центр черных заметно ослабляется. 22...L:f2? Прогрывающий ход. Наверное, гроссмейстер рассчитывал быстро закончить дело путем 23.K:f2 Ф:g2X. Однако последовало 23.L:d6 Ф:d6 24.K:d6 L:g2 25.Kge4 Lg4 26.c4 Kf5 27.h3 Kg3+ 28.Kph2 L:e4 29. Фf2 h6 30.K:e4 K:e4 31.Фf3, и через несколько ходов черные сдались.

Самая трудная стадия игры для ЭВМ — эндшпиль, по-

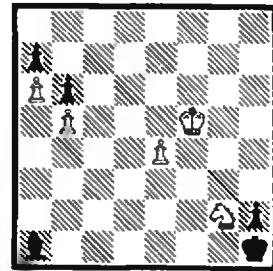
скольку перебор вариантов (основное оружие компьютера) имеет здесь весьма относительную ценность. Впрочем, если окончание носит тактический, комбинационный характер, то машина может показать свои лучшие качества. Вот как завершилась сеансовая партия между компьютером и гроссмейстером У. Брауном.



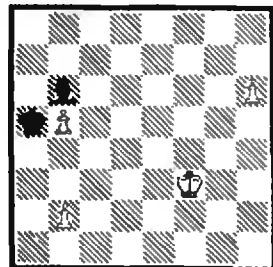
Браун — «Чесс»

Белые собираются взять на a3, после чего реализация лишней фигуры не так проста. Вторая чемпионка мира среди ЭВМ находит энергичный путь к цели. 47...g5! 48.fg Ле5 49.b4 a5! 50.Kd3 L:g5+ 51.Kpf2 ab 52.K:b4 Ла5 53.Kpe3 (53.Ke2 a2 54.Kb4 Ла4 55.K:a2 Ce6) 53...Ce6 54.Kpd4 Kg5! 55.Kc2 a2 56.Kb4 Ла4 57.Kpc5 Ke4+ 58.Kpb5 Cd7+ 59.Kc6 Kc3+ 60. Kpc5 C:c6 и через несколько ходов белые сдались.

Конкурсные задания



19. Белые начинают и выигрывают.



20. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 декабря 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 19, 20»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На этой картинке художник сумел «вывернуть наизнанку» кубик Рубика. Если быть более точным, здесь показана инверсия изображения кубика Рубика относительно содержащей его черной окружности. Об инверсии можно прочитать в «Кванте» № 5 за этот год на с. 26. О кубике Рубика «Квант» писал неоднократно, в последний раз — в № 9 за 1983 год на с. 33.

