ISSN 0130-2221

Квант

12
1984

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Художники, нарисовавшие эту афишу, позволили себе небольшую смелость. Они символически намекнули на тематику задач, которые предстояло решать участникам олимпиады.

Оргкомитет, заботясь о «неразглашении олимпийской тайны», решил распространить афишу лишь после окончания официальных состязаний. Ее получили все участники и гости олимпиады в качестве сувенира. Справедливы ли были опасения оргкомитета? Ответ на этот вопрос вы можете найти в статье «XV Международная физическая олимпиада».

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант

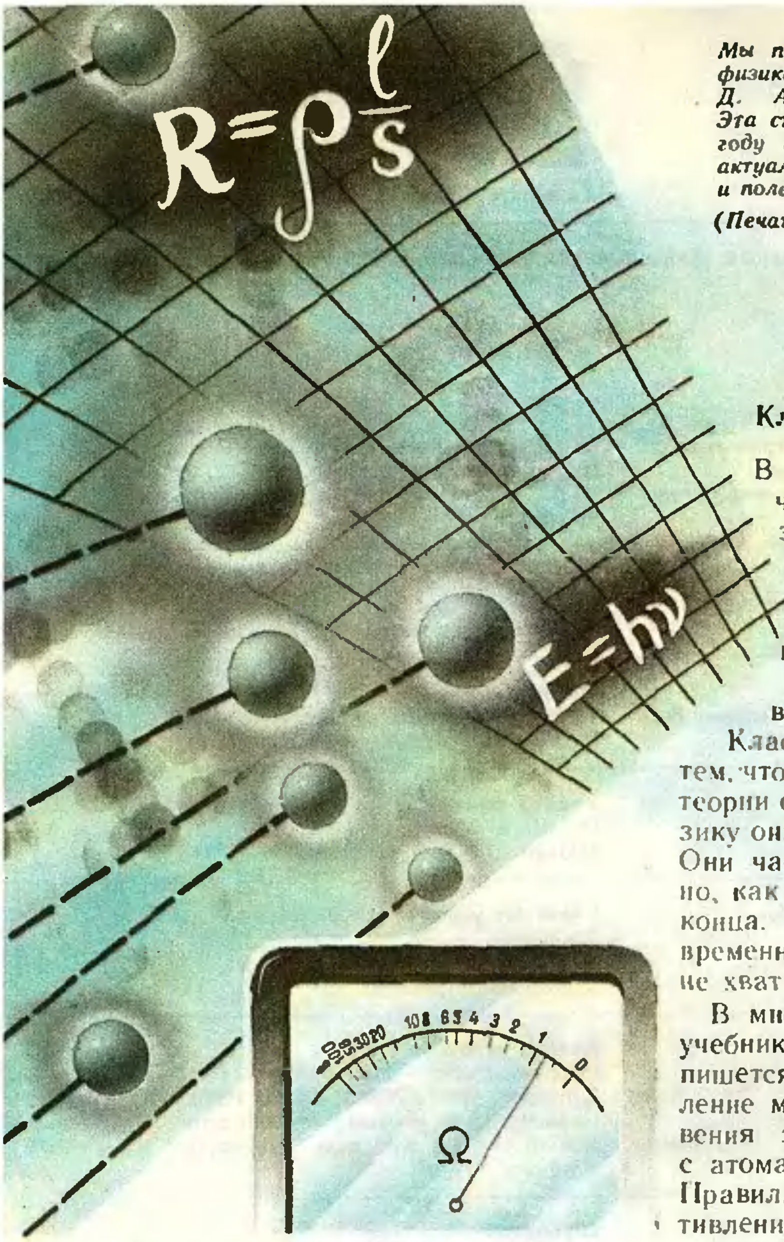
12 1984

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / **IN THIS ISSUE:**

Разноцветную дугу на небосводе (см. фотографию на первой странице обложки) можно увидеть лишь при определенных условиях. О том, когда и как она возникает, рассказывается в заметке «Что такое радуга?» (с. 20)



Мы публикуем статью крупного советского физика и блестящего популяризатора науки Д. А. Франк-Каменецкого (1910—1970). Эта статья, впервые опубликованная в 1970 году в «Кванте» № 9, не потеряли своей актуальности и, несомненно, будет интересна и полезна сегодняшнему читателю.

(Печатается с небольшими сокращениями.)

Электрическое сопротивление — квантовое явление

Доктор физико-математических наук
Д. А. ФРАНК-КАМЕНЕЦКИЙ

Сопротивление проводника протеканию электрического тока — совсем не такая простая вещь, как это кажется на первый взгляд. Как мы увидим, здесь не обойтись без кванта. Посмотрим сначала, что можно сделать без его помощи.

Классическая теория

В современной физике классическими называются теории, созданные классиками науки прошлых веков, до возникновения квантовой физики и теории относительности. Чаще всего слово «классический» физики употребляют как противоположное слову «квантовый».

Классическая теория отличается тем, что в ней не участвует квант. Такие теории очень просты, современному физику они кажутся несколько наивными. Они часто приносят большую пользу, но, как правило, решают вопрос не до конца. В классической теории для современного физика всегда чего-то не хватает.

В многих книгах, в том числе и в учебниках (и даже очень хороших), пишется, что электрическое сопротивление металла происходит от столкновения электронов, переносящих ток, с атомами*) кристаллической решетки. Правильно ли такое понимание сопротивления?

Лучше всего не говорить ни «да», ни «нет», а сказать, что оно выражает классическую теорию электрического сопротивления. К ней относится все, что мы только что говорили о классических теориях вообще. Но в данном случае классическая теория оказывается совсем слабой: она не может объяснить многих самых основных особенностей электрического сопротивления. В классической теории безусловно верно одно: сопротивление происходит оттого, что электроны передают часть своей энергии и импульса (количества движения) кристаллической решетке. Но каким именно образом происходит эта передача — вопрос совсем не простой и очень интересный.

*) Точнее было бы сказать — с ионами, но это здесь для нас несущественно.

Температурная зависимость

Сопротивление чистых металлов сильно возрастает с температурой. Для многих из них оно примерно пропорционально абсолютной температуре. При низких температурах такая простая зависимость нарушается. Это хорошо видно на рисунке 1, где показано, как меняется с температурой удельное сопротивление меди — самого употребительного проводника электрического тока. Как видно из рисунка, в области высоких температур зависимость хорошо представляется прямой линией. Но если эту прямую продолжить в сторону низких температур (на рисунке показано пунктиром), она уходит не в абсолютный нуль, а в несколько более высокую температуру — для меди около 60 К. На самом деле при низких температурах зависимость становится более сложной: сопротивление меняется пропорционально пятой степени температуры. При приближении к абсолютному нулю сопротивление чистых металлов становится очень малым. Есть группа металлов, у которых сопротивление совсем исчезает при температуре на несколько градусов выше абсолютного нуля. Этого явления, называемого сверхпроводимостью, мы сейчас касаться не будем. Достаточно много интересного можно сказать и о более простых вещах.

Если объяснять электрическое сопротивление столкновениями электронов с атомами, то температурная зависимость сопротивления чистых металлов остается совершенно непонятной. Ведь дело обстоит так, как если бы электроны сталкивались только с атомами, совершающими тепловое движение, но свободно пролетали мимо неподвижных. Иногда так и говорят (как будто электрону легче попасть в движущийся атом), но это ошибка. Это все равно что считать, будто, стреляя не целясь, легче попасть в качающийся маятник, чем в неподвижный. Итак, классическая теория не способна объяснить зависимость сопротивления от температуры.

Остаточное сопротивление

Когда измеряют сопротивление чистых металлов при очень низких температурах, то обнаруживается замечательная вещь. Продолжая кривую рисунка 1 к абсолютному нулю, получают сопротивление, которое должно было бы остаться, если бы можно было на опыте достичь абсолютного нуля. Его так и называют остаточным сопротивлением. Оказывается, что оно сильно меняется от образца к образцу. Остаточное сопротивление крайне чувствительно к ничтожным примесям, к механической и термической обработке. Тщательно очищая металл, обрабатывая его так, чтобы добиться безупречного кристаллического строения, можно уменьшить остаточное сопротивление, и нет предела этому уменьшению. Итак, опыт наталкивает на удивительный вывод: идеальный кристалл при температуре абсолютного нуля не должен иметь электрического сопротивления. Иными словами: электрическое сопротивление чистых металлов происходит только от нарушений кристаллического строения, которые вызываются тепловым движением, примесями и дефектами (неправильностями) кристаллической решетки.

Атомные коридоры

Если бы электроны двигались по законам классической механики, они должны были бы сталкиваться с атомами независимо от того, расположены ли атомы в строгом порядке или нет. Конечно, между правильными рядами атомов есть своего рода коридоры (рисунок 2), но чтобы направить электрон по такому коридору, требовалась бы точная ориентировка кристалла по отношению к приложенному электрическому напряжению. А ведь обычно мы имеем дело не с одним кристаллом, а с сочетанием множества мелких кристалликов, ориентированных случайным образом. Одиночный правильный кри-

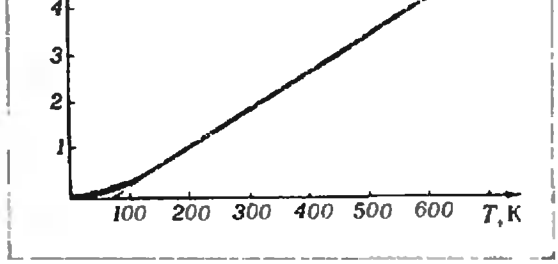


Рис. 1. График зависимости удельного сопротивления меди от абсолютной температуры

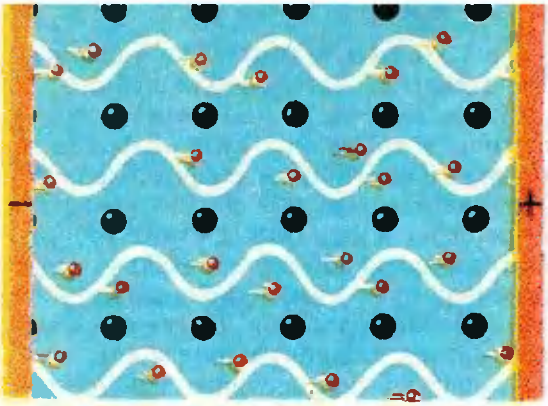


Рис. 2. Движение электронов и распространение электронных волн в правильном (идеальном) кристалле.

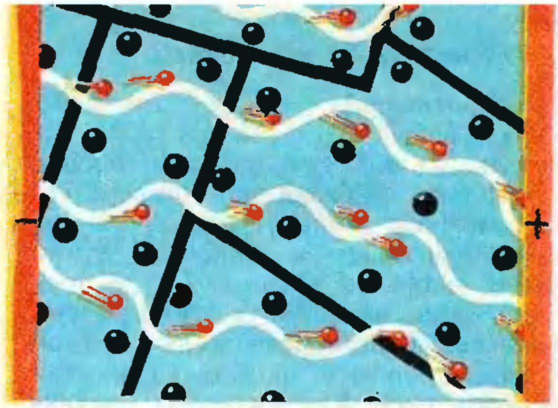


Рис. 3. Схема движения электронов по атомным лабиринтам в поликристаллическом агрегате. Красным цветом показаны электроны.

сталл называют монокристаллом (от греческого слова «моно» — один), а сочетание многих кристаллов — поликристаллическим агрегатом (от греческого «поли» — много). Так вот, точные измерения показали, что сопротивление поликристаллических агрегатов очень мало отличается от сопротивления монокристаллов. Особенно важно то, что сопротивление поликристаллических агрегатов сильно уменьшается с понижением температуры. Это никак нельзя объяснить движением электрона по атомным коридорам по законам классической механики. При переходе из одного кристаллика в другой атомный коридор резко меняет свое направление (рисунок 3). Электрон должен был с разлету стукнуться о «стенку». А он спокойно шествует по атомному лабиринту, подобно Тезею, которому указывала направление нить Ариадны. Что же это за чертовщина и как это объяснить?

Чудеса без чудес

Давно известны еще более удивительные факты. Механическая и термическая обработка заметно влияют на электрическое сопротивление металлов. Воспользуемся для удобства применяемой в технике единицей удельного сопротивления $Ом \cdot мм^2/м = 10^{-4}\ Ом \cdot см = 10^{-6}\ Ом \cdot м$. В этих единицах удельное сопротивление обычной технической меди при 20 °С выражается числом 0,0172. После холодной протяжки сопротивление медной проволоки возрастает до 0,0177. Даже наматывания проволоки на катушку достаточно, чтобы ее сопротивление возросло. Если же подвергнуть проволоку отжигу, то есть длительному нагреву, а затем охладить ее опять до 20 °С, значение сопротивления возвращается к нормальной величине. Очевидно, сопротивление чувствительно к небольшим нарушениям кристаллической структуры (такие свойства называют структурно чувствительными). Еще поразительнее чувствительность сопротивления к ничтожным примесям. Тщательная очистка уменьшает удельное сопротивление меди при температуре 20 °С до 0,0169 $Ом \cdot мм^2/м$. Это обстоятельство имеет большое значение для техники. Ведь если уменьшить сопротивление проводов, то уменьшаются и бесполезные потери электроэнергии на их нагрев. Поэтому медь, предназначенную на электротехнические нужды, подвергают специальной очистке посредством электролиза. Этот своеобразный металлургический процесс несколько напоминает «переливание из пустого в порожнее». На аноде медь растворяется, а на катоде осаждается медь, чистота которой измеряется «тремя девятками» после запятой: 99,999 %, то есть примеси в электролитической меди составляют всего тысячную долю процента.

Посмотрим теперь, как количество примесей влияет на сопротивление меди. Достаточно добавить к меди 1 % марганца, чтобы удельное сопротивление ее возросло до 0,048 $Ом \cdot мм^2/м$, то есть почти в три раза! Между тем сопротивление чистого марганца составляет 0,05 $Ом \cdot мм^2/м$. Таким образом, достаточно ввести в медь 1 % марганца, чтобы ее сопротивление стало практически равно сопротивлению 100 %-го марганца! Это не исключительный случай. Примерно так же действуют добавки железа, кобальта, иридия и другие. Если бы сопротивление происходило от столкновений электронов с атомами примесей, эти примеси должны были бы влиять раз в сто слабее. С точки зрения классической теории непомерное действие малых примесей — чистое чудо.

У сплавов, содержащих примеси в большой пропорции, сопротивление очень велико. Металлурги разработали замечательные рецепты сплавов с высоким сопротивлением: никелин, манганин, константан, нихром и другие. Сопротивление этих сплавов в несколько раз больше, чем у каждой из составных частей. Так, константан, состоящий из 60 % меди и 40 % никеля, имеет удельное сопротивление 0,44 Ом·мм²/м, в то время как у чистой меди оно равно 0,017, а у никеля 0,072 тех же единиц*).

«Королем» подобных сплавов можно назвать всем известный нихром, удельное сопротивление которого около 1 Ом·мм²/м. Недаром он нашел такое широкое применение в нагревательных приборах.

Поразительно, что температурная зависимость сопротивления у сплавов совсем другая, чем у чистых металлов. Сопротивление большинства сплавов тоже возрастает с температурой, но гораздо слабее. Специально для научных приборов, где желательно иметь постоянное сопротивление, разработан уже упоминавшийся константан, название которого означает «постоянный». В интервале температур от 0 ° до 400 °С его сопротивление меняется всего лишь от 0,441 до 0,448 Ом·мм²/м.

С точки зрения классической теории постоянство сопротивления сплавов столь же мало понятно, как и пропорциональность сопротивления температуре для чистых металлов. Сопротивление сплава должно было бы по смыслу этой теории складываться из сопротивлений его составных частей по простому правилу смешения (как, например, теплоемкость). Если внимательно разобраться во всем, что известно об электрическом сопротивлении, то станет ясно, что уже это простое явление вынуждает для своего понимания обратиться за помощью к кванту.

*) Все цифры здесь приведены для температуры 20 °С

Электронные волны и атомные волноводы

Все становится на свое место, если вспомнить, что по законам квантовой механики электрон имеет одновременно свойства частицы и волны. Ширина атомных коридоров близка к длине волны электрона, и потому при движении по таким коридорам волновые свойства электрона проявляются в полной мере.

В радиотехнике сантиметровых волн широкое применение имеют волноводы. Это — металлические трубки круглого или прямоугольного сечения. Радиоволны распространяются по волноводу, следуя за всеми его изгибами. Свет — тоже электромагнитные волны, и его можно запрятать в световод — трубку с зеркальными стенками*).

Действие световода с зеркальными стенками легко понять. Световые волны все время отражаются от стенок и, таким образом, остаются внутри световода. Радиоволны тоже хорошо отражаются от гладких металлических поверхностей. Если же поверхность шероховатая, то волна как бы разбивается о зазубрины и в результате рассеивается и поглощается. Ее энергия переходит в тепло.

В квантовой теории протекание электрического тока через металл описывается как распространение электронных волн по атомным коридорам, играющим роль волноводов. Если атомы расположены на плоскости в идеальном порядке, на равных расстояниях друг от друга, то такая плоскость полностью отражает электронные волны — наподобие идеального зеркала. Рассеяние и поглощение электронных волн происходит только при нарушении строгого порядка в расположении атомов. Этот удивительный вывод был получен впервые довольно сложным математическим путем из уравнений квантовой механики. Но его можно было бы сделать и на основании установленных опытным путем свойств электрического сопротивления, если бы к ним отнеслись более внимательно.

В идеальном правильном кристалле волноводы совершенно гладкие. Всякое нарушение атомного порядка действует как шероховатость стенок волно-

*) На практике нет необходимости делать стенки зеркальными. Обычно используют явление полного внутреннего отражения, но это для нашей темы не имеет значения.

Рис. 4. Нарушение правильности атомного волновода тепловым движением.

вода. Электронные волны рассеиваются нарушениями решетки. Часть энергии электронов поглощается и переходит в тепло. Это и есть квантовый механизм электрического сопротивления. Правильность атомных волноводов нарушается тепловыми колебаниями, на которых рассеиваются электронные волны (рисунок 4). Отсюда возникает тепловая часть электрического сопротивления, зависящая от температуры. Охлаждая металл, ее можно сделать сколь угодно малой. При этом сохраняется остаточное, или структурное, сопротивление, связанное с постоянными дефектами (порчей) кристаллической структуры (рисунки 5 и 6). Дефекты есть во всяком кристалле и зависят от его «биографии» — от условий, в которых он зарождался, рос и существовал. Дополнительные дефекты возникают при холодной механической обработке — протяжке проволоки и даже намотке ее на катушку. Оттого и возрастает сопротивление. При длительном нагреве (отжиге) атомы возвращаются на свои места и дефекты залечиваются — сопротивление падает.

Внедрение инородных атомов вызывает серьезную порчу кристаллической решетки (рисунок 7). При этом один атом примеси может сбить с места сотни атомов кристалла-«хозяина». Оттого примеси и повышают сопротивление. Замечено, что действие примеси тем сильнее, чем больше ее атомы по размерам и другим факторам отличаются от атомов «хозяина», чем сильнее они нарушают правильность кристаллической решетки.

Если охлаждать металл, то тепловая (то есть происходящая от теплового движения) часть сопротивления падает. Когда она станет гораздо меньше, чем не зависящая от температуры структурная часть, то при дальнейшем охлаждении сопротивление почти не меняется. У сплавов с неупорядоченным строением структурная часть сопротивления настолько велика, что даже при высоких температурах преобладает над тепловой. Этим и объясняется слабая зависимость электрического сопротивления сплавов от температуры.

Рис. 5. Первый тип дефектов кристаллической решетки — вакансии (пустые места). Замечательно, что электроны рассеиваются и на вакансиях — нужно ли лучшее доказательство того, что они сталкиваются вовсе не с атомами решетки? Дело в том, что вакансия играет роль отверстия в стенке атомного волновода, нарушающего правильное распространение электронных волн.

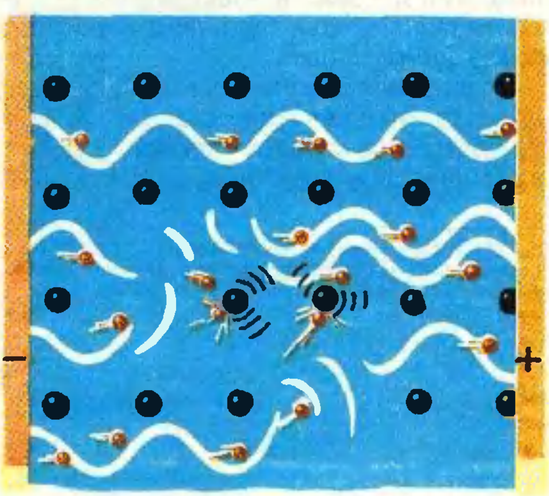
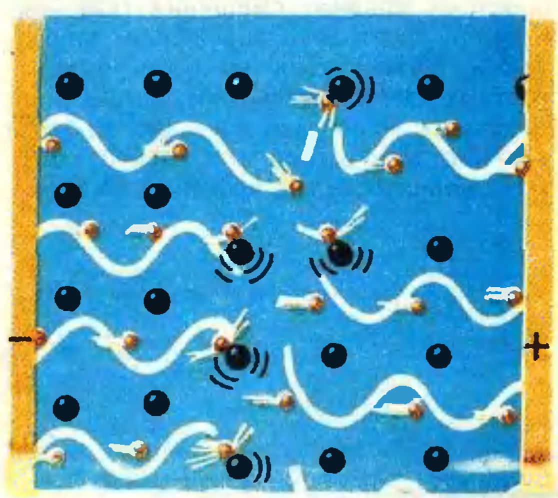


Рис. 6. Второй тип дефектов кристаллической решетки — дислокации.



Звуковой квант — фонон

Мы познакомились с некоторыми квантовыми явлениями, *но сам квант* пока оставался в тени. Сейчас он выйдет на передний план.

Тепловое движение в твердом теле можно представлять себе как колебания атомов около своих положений равновесия. Но частицы в твердом теле не могут колебаться независимо. Они все прочно связаны между собой и совершают всегда коллективные колебания. Не так, как на танцплощадке, где каждая пара движется независимо от других, а как в массовой сцене большого балета, где все исполняют свои партии согласованно.

Коллективные колебания громадного числа частиц вещества — это то же самое, что звуковые *волны. Если вывести* любую частицу из положения равновесия, то возмущение будет распространяться по телу со скоростью звука. Оказывается, что тепловое движение в твердом теле можно рассматривать как распространение звуковых волн. Нагревая тело, мы заставляем его звучать. К счастью для нас, частота этих колебаний в миллиарды раз выше тех, какие может услышать наше ухо. Очевидно, живые существа в процессе эволюции приспособились не слышать «тепловой звук», иначе мы не выдержали бы непрерывного шума «кричащих» предметов.

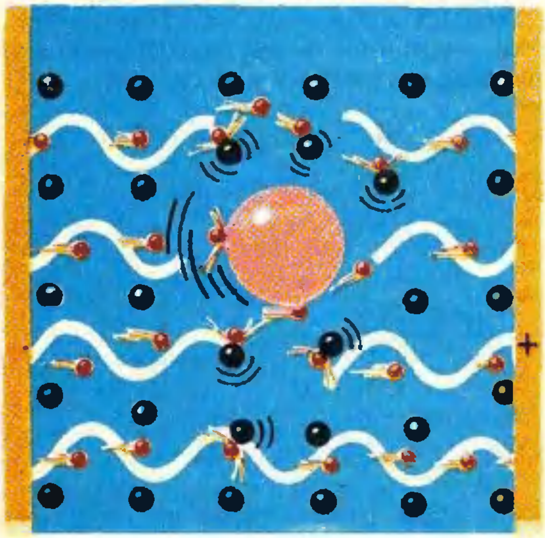
Итак, обнаруживается неожиданная связь между *электрическим сопротивлением* и звуком. Электроны рассеиваются на звуковых волнах, возбуждаемых при тепловом движении кристаллической решетки. Но всякая волна состоит из квантов. У световой или вообще *электромагнитной волны* — это фотоны, у звуковой волны — фононы (от греческих слов, означающих свет и звук). Фотоны — самые настоящие частицы, вполне равноправные с другими элементарными частицами. Фононы не совсем равноправны в том смысле, что они способны существовать только внутри вещества (в пустоте фононов быть не может). Они — и подобные им — называются квазичастицами (то есть «почти частицами»). Фонон — самый простой представитель обширной семьи квазичастиц. Другие ее члены нас сейчас не интересуют.

Мы говорили, что электронные волны рассеиваются на шероховатостях, *созданных тепловым движением*, то есть звуковыми волнами. Но если звуковую волну описывать как поток фононов, то и электроны можно считать частицами, забыв про их волновые свойства. Теперь мы как бы возвращаемся к простому объяснению сопротивления: электронам мешает свободно двигаться то, что они сталкиваются с другими частицами. Но только не с частицами вещества, а с звуковыми квантами — фононами.

Теперь можно, наконец, немного и посчитать. Будем для простоты вести расчет так, как если бы все фононы имели одну одинаковую частоту ν. Такое допущение неправильно, но ошибка от *него получается* небольшая.

Энергия фонона, как и всякого кванта, равна $h\nu$, где h — постоянная Планка, а ν — частота волны. Число фононов есть $\frac{E}{h\nu}$, где E — энергия теплового движения, *пропорциональная* абсолютной температуре T. За множитель пропорциональности можно принять постоянную Больцмана k. Итак, число фононов* равно $N=\frac{kT}{h\nu}$. Мы получили очень важный результат. Число фононов в твердом теле пропорционально абсолютной температуре. Следовательно, если сопротивление происходит от столкновений электронов с фононами, оно тоже *должно быть пропорционально* абсолютной температуре! Так

Рис. 7. Атом примеси сбивает с места множество атомов решетки. Из-за этого нарушается правильное движение не только тех электронов, которые сталкиваются с самим атомом примеси, но и множества других. (Соотношения расстояний между атомами кристалла и их размеров по отношению к атому примеси — условные.)



*) Это число фононов на одно колебание решетки, точнее говоря, на одну колебательную степень свободы, или, как любят выражаться физики, на один осциллятор.

разрешается одна из загадок электрического сопротивления.

Но этот результат справедлив только при достаточно высоких температурах. Ведь по смыслу квантовой теории число фононов не может быть меньше единицы. Посмотрим, при какой температуре оно равно единице. Эту температуру называют температурой Дебая и обозначают греческой буквой θ. Приравняв N единице, находим: $\theta=\frac{h\nu}{k}$. Температура Дебая (или дебаевская температура) играет очень важную роль в физике твердого тела. С помощью этой величины интересующее нас число фононов выражается совсем просто: $N=\frac{T}{\theta}$. При температуре ниже дебаевской это число становится меньше единицы. Это значит, что можно говорить только о среднем числе фононов, и расчет усложняется. Но величина $\frac{T}{\theta}$ по-прежнему остается мерой числа фононов в твердом теле, а следовательно, и числа столкновений электронов с фононами. Исходя из этих соображений, была высказана следующая гипотеза: температурная зависимость электрического сопротивления чистых металлов выражается универсальной функцией от меры числа фононов $\frac{T}{\theta}$. Математически эта гипотеза записывается так: $\frac{R}{R_0}=F\left(\frac{T}{\theta}\right)$, где R — сопротивление при температуре T, R_θ — при температуре θ, а F — функция, вид которой может быть найден из опыта. Важно то, что функция F — общая для разных чистых металлов. Как хорошо эта гипотеза оправдывается на

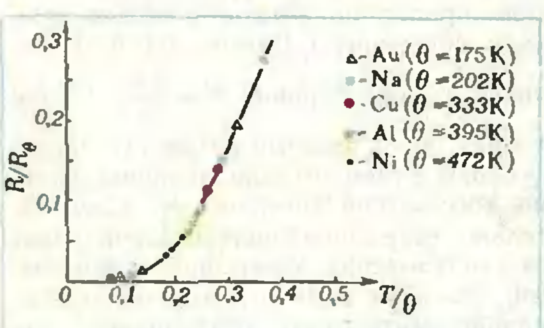


Рис. 8. Обобщенная кривая температурной зависимости удельного сопротивления чистых металлов.

опыте, видно из рисунка 8. Этот график построил в свое время американский физик Бардин, прославившийся впоследствии своими работами по теории сверхпроводимости.

Интересно и полезно связать дебаевскую температуру θ со скоростью звука c. Вспомним, что вещество состоит из атомов и волна распространяется не непрерывно, а перескакивает от атома к атому. За период колебания τ волна не может пройти путь, меньший, чем расстояние между соседними атомами a. Иначе волна «повисла бы» в пустоте между двумя атомами. Путь, проходимый звуковой волной за одно колебание, равен $c\tau$. Итак, атомное строение вещества накладывает на периоды звуковых колебаний ограничение: $c\tau \geqslant a$. Частота ν есть число периодов за единицу времени, откуда $\nu\tau=1$. Таким образом, частоты звуковых колебаний ограничены условием

$$\nu \leqslant \frac{c}{a}. \qquad (*)$$

При тепловом движении возбуждаются звуковые волны (иначе говоря, фононы) с разными частотами, как говорят, целый спектр частот. Но у спектра фононов есть предельная частота. Волны с более высокими частотами не успевали бы перескочить от одного атома к следующему и потому не могут возбуждаться. Подробные расчеты показывают, что дебаевскую температуру можно определять так, как мы это делали, если только за частоту ν брать предельную частоту фононного спектра в твердом теле. Так мы и будем поступать.

Нам осталось оценить расстояние между атомами a. Если число атомов в единице объема равно n, то $n=\frac{1}{a^3}$. Отсюда и из формулы (*) получается: $\frac{\nu^3}{c^3}\leqslant n$. Более точный расчет, который мы здесь привести не можем, дает добавочный множитель 4π. Таким образом, получается формула, связывающая предельную частоту ν со скоростью звука c:

$$4\pi\frac{\nu^3}{c^3}=n. \qquad (**)$$

(Окончание см. на с. 12)

Сколько площадей у многоугольника?

Кандидат физико-математических наук
А. Л. ТООМ

В этой статье не излагается общая теория площадей, а просто рассказывается о различных подходах к определению площади многоугольника. В первой части речь идет о совсем простом (но для многих — совершенно неожиданном!) вопросе: корректно ли обычное определение площади треугольника и выпуклого многоугольника? Во второй части обсуждается понятие площади «самопересекающихся» многоугольников; оно оказывается связанным с двумя совсем разными физическими вопросами.

Площади треугольника и выпуклого многоугольника

Все знают, что площадь треугольника равна половине произведения длины основания на высоту. Но у треугольника л ю б у ю сторону можно принять за основание. Так, треугольник, изображенный на рисунке 1, имеет три площади:

$$S_1=\frac{1}{2}ah_a,\ S_2=\frac{1}{2}bh_b,\ S_3=\frac{1}{2}ch_c,$$

где h_a, h_b, h_c — длины высот, опущенных на стороны с длинами a, b, c соответственно. Вы скажете, что $S_1=S_2=S_3$? Да, это верно. А почему? Потому что и то и другое и третье — площадь треугольника? Вот этот довод никуда не годится. Оттого что мы даем одно и то же название «площадь» каким-то трем величинам, они не обязаны стать равными. Наоборот, потому мы и можем называть все три написанные величины одним и тем же именем «площадь», что они равны. А что они равны — это надо доказать.

З а д а ч а 1. Докажите, что для любого треугольника

$$ah_a=bh_b=ch_c.$$

З а д а ч а 2. Профессор Нонсенс предложил рассматривать новую величину — «бульвар» треугольника, равный сумме длин его основания и высоты, опущенной на это основание. Согласно этому предложению, должны иметь место равенства (см. рис. 1)

$$a+h_a=b+h_b=c+h_c.$$

Так ли это? Годится ли предложение профессора Нонсенса? (Ответ надо обосновать.)

Две приведенные задачи иллюстрируют важное математическое понятие к о р р е к т н о с т и определения. Нередко привычка заменяет понимание и доказательство, и мы наивно думаем, что смысл каждого слова всегда один и тот же. Однако в математике все должно быть строго обосновано, и если результаты двух разных вычислений называются одинаково, то из этого еще не следует, что они равны. Наоборот, надо доказать, что они всегда будут равны, чтобы иметь право одинаково их называть. Говорят, что определение, формулировка которого допускает несколько различных путей вычисления или построения, *корректно*, если все эти пути приводят к одинаковому результату. Так, первое определение (площади треугольника) оказалось корректным, а второе («бульвар» профессора Нонсенса) — не корректным. Обратите внимание: корректность определения нам пришлось д о к а з ы в а т ь. Это необходимо делать во всех случаях, когда в самом определении имеется некоторый произвол — неоднозначное построение, свобода выбора какого-то элемента и т. п.

Рассмотрим другой пример. В школь-

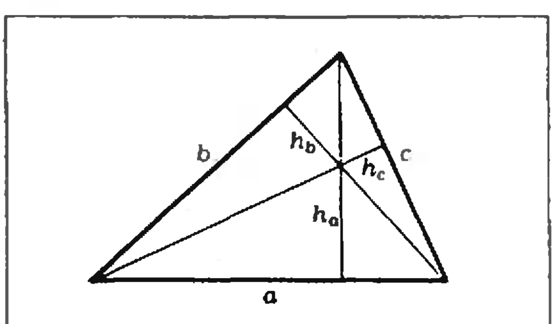


Рис. 1.

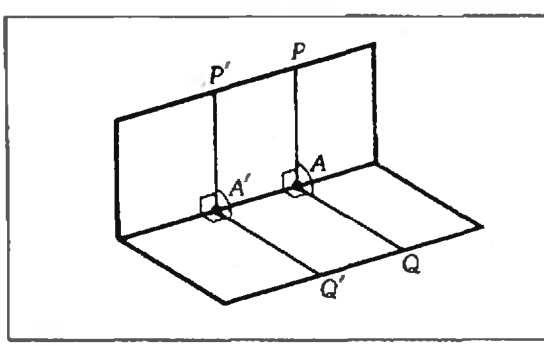


Рис. 2.

ном учебнике девятого класса величина двугранного угла определяется как величина его линейного угла (угол PAQ на рисунке 2). Но линейный угол можно отложить от **произвольной** точки A на ребре AA' двугранного угла, рассмотреть, например, угол $P'A'Q'$. Почему получится та же величина?

З а д а ч а 3. Докажите корректность определения двугранного угла.

З а д а ч а 4. Вспомните определение угла между скрещивающимися прямыми. В чем произвол в этом определении? Докажите его корректность.

Поговорим теперь о площади четырехугольника. Если это не есть какой-нибудь особенный четырехугольник, например трапеция, то обычный рецепт вычисления его площади таков: разрезать четырехугольник по диагонали на два треугольника и взять сумму их площадей. Но ведь выпуклый четырехугольник можно разрезать по диагонали двумя разными способами. Что, если в одном случае получится одно, а в другом — другое? А для многоугольника с большим числом сторон способов разрезания на треугольники еще больше. На каком основании мы уверены (если уверены), что при всех этих разрезаниях сумма площадей получившихся кусков будет одна и та же? Из практики? Но все практические измерения обеспечивают точность лишь с каким-то числом знаков. Показала же теория относительности, что обычная формула сложения скоростей верна лишь приблизительно, и лишь для скоростей, существенно меньших скорости света! Может быть, и традиционные представления о площади многоугольников верны лишь приблизительно? Вот, например, чертеж, заимствованный нами из брошюры Я. С. Дубнова*).

Здесь квадрат со стороной 21 см разрезается на части, из которых, как показывает рисунок 3, вроде бы удается сложить прямоугольник со сторонами 34 см и 13 см.

Поскольку

$$21^2=441\neq442=34\cdot13,$$

площадь фигуры меняется от перестановки ее частей. А почему бы, собственно, и нет?

З а д а ч а 5. Разберитесь, в чем дело на рисунке 3.

З а д а ч а 6. Докажите, что, если многоугольник двумя разными способами разрезан на треугольники, то сумма площадей получившихся треугольников в обоих случаях одна и та же.

*) Я. С. Дубнов. Ошибки в геометрических доказательствах. М., Гостехиздат, 1953, с. 10.

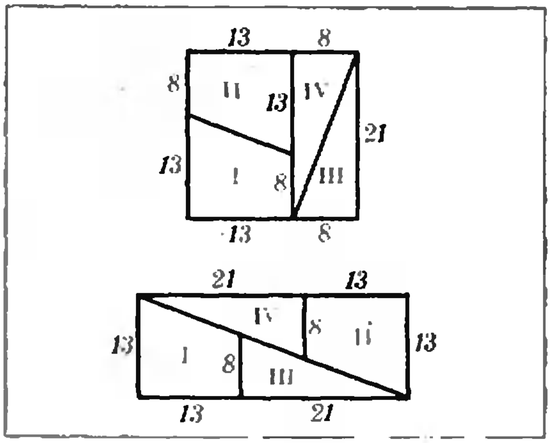


Рис. 3.

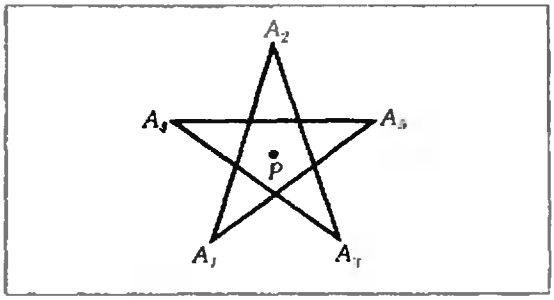


Рис. 4.

Площади самопересекающихся многоугольников

Мы обсудили корректность школьного определения площади многоугольника и треугольника — их внутреннюю непротиворечивость. Но к определениям в математике предъявляются не только формальное требование корректности. Определение должно еще «работать». Поясним это на следующем примере, тоже связанном с площадью многоугольника.

Можно ли, и если можно, то как разумно и естественно определить площади самопересекающихся многоугольников? Какова, например, площадь пятиконечной звезды (рис. 4)?

Говоря формально, есть очень много корректных способов приписать каждому самопересекающемуся многоугольнику какое-нибудь число и назвать это число его площадью. Но далеко не каждый такой способ заслуживает чтобы о нем говорить. Вообще, определения в математике формируются отнюдь не беспричинно, не «с потолка». Во многих (а, может быть, в конечном счете и во всех) случаях математические определения бывают вдохновлены естествознанием. Вспомним, где в физике фигурирует площадь многоугольника. Вот два случая, которые пришли мне на ум.

1) В электродинамике важным понятием является поток магнитной индукции (магнитный поток) Φ сквозь участок поверхности, ограниченный проводящим контуром. Пусть контур лежит в плоскости, а вектор $\vec{B}$ магнитной индукции одинаков во всех точках пространства и перпендикулярен плоскости контура. Тогда

$$\Phi = BS, \qquad (1)$$

где S — площадь фигуры, ограниченной контуром. С физической точки зрения вполне уместен вопрос о том, чему равен магнитный поток Φ, если контур имеет вид самопересекающегося многоугольника.

В самом деле, расположим изолированный провод в форме самопересекающегося многоугольника в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$ магнитной индукции однородного поля (рис. 5), и концы провода присоединим к амперметру. Что покажет амперметр, если начать «шевелить» этот провод? Ведь что-то он покажет! Например, отклонится ли стрелка амперметра при передвижении треугольника MNA в положение $M'N'A$? Площадь заштрихованной части не изменяется. Однако провод MN в своем движении пересекает магнитные силовые линии и поэтому возникает ЭДС индукции. Должен потечь ток. И он действительно течет!

Значит, магнитный поток Φ меняется. Поскольку мы хотим, чтобы формула $\Phi = BS$ имела место, то и S должно меняться (в отличие от заштрихованной площади). Так что же такое S — «площадь» самопересекающегося многоугольника?

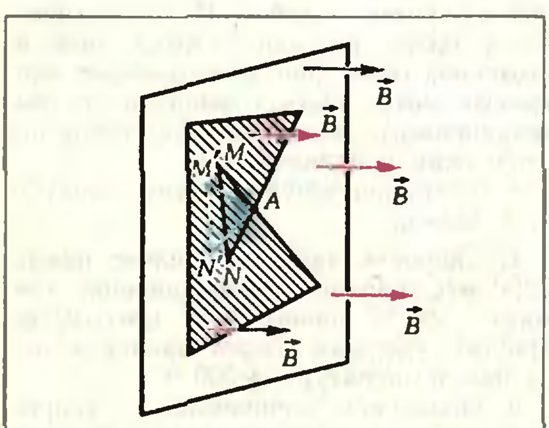


Рис. 5.

Легко понять, что в качестве S здесь не годится сумма обычных площадей ограниченных частей плоскости (заштрихованных на рисунке 5). Как же определить S в общей случае?

2) В термодинамике работа, которую совершает рабочее тело в произвольном замкнутом процессе, измеряется площадью, ограниченной линией, изображающей этот процесс на $(p - V)$-диаграмме (p — давление, V — объем). Естественно считать, что это верно и для процесса, изображаемого на $(p - V)$-диаграмме самопересекающейся ломаной.

В обоих приведенных физических примерах у нас возникла потребность указать площади самопересекающихся плоских многоугольников. Замечательно то, что в обоих случаях возникает одно и то же понятие площади, несмотря на то, что примеры эти взяты из различных областей физики. И это понятие площади уже разработано математиками. Оно описано, например, в статье Н. Вагутена*). В ней дается несколько определений этого понятия, эквивалентных между собой; мы остановимся на следующем.

Выберем направление обхода нашего многоугольника и обозначим его вершины в том порядке, в каком мы его обходим: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Отметим на плоскости произвольную точку P, не лежащую на контуре многоугольника. Будем обходить многоугольник по его контуру: пойдем по A_1A_2, потом по A_2A_3 и так далее, и вернемся в точку A_1. При этом радиус-вектор, начинающийся в точке P и кончающийся в той точке, где мы находимся, будет вертеться то в положительном направлении (то есть против часовой стрелки), то в отрицательном. В конечном счете он повернется на угол $360° \cdot n$, где n — целое число, показывающее, сколько раз мы обходим вокруг точки P, идя по пути $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1$. Так, если точку P взять в центре пятиконечной звезды (см. рис. 4), то мы получим $n = 2$.

Наш многоугольник делит плоскость на области: одну бесконечную и несколько конечных. Число n постоянно в каждой области, причем в бесконеч-

*) «Формула площади» («Квант», 1981, № 4, с. 17—20).

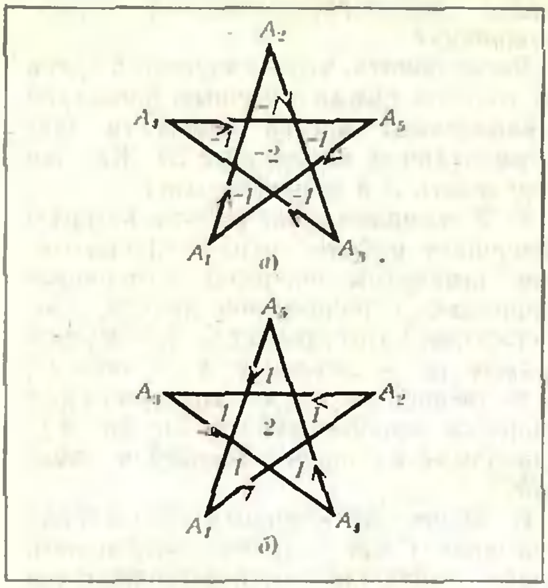


Рис. 6.

ной области $n=0$ (на рисунке 6, *а*, *б* расставлены значения n во всех конечных областях). Так вот, назовем ориентированной *площадью* нашего многоугольника сумму

$$S_1n_1+S_2n_2+\ldots+S_kn_k,$$

где $S_1, \ldots, S_k$ — обычные площади всех конечных областей вырезаемых нашим многоугольником из плоскости, а $n_1, \ldots, n_k$ — значения n для этих областей.

В отрыве от физических приложений это определение может показаться математической игрушкой, не имеющей практического смысла. В действительности же именно оно дает значения площадей, при которых выполняются оба названные выше физических соотношения.

Задача 7. Обоснуйте формулу (1) для магнитного потока в случае самопересекающихся плоских контуров, понимая S как ориентированную площадь.

Задача 8. Покажите, что работа тела на $(p-V)$-диаграмме пропорциональна ориентированной площади, ограниченной самопересекающейся линией, изображающей процесс.

Интересно, что определение, выработанное из чисто математических соображений, оказалось в согласии с двумя совершенно различными физическими законами. Подобное не раз происходило в истории науки, и об этом еще будет написано в «Кванте».

Электрическое сопротивление — квантовое явление

(Начало см. на с. 2)

Выражая частоту ν из формулы (**) и подставляя ее в выражение для дебаевской температуры — $\theta=\frac{h\nu}{k}$,— получим, что

$$\theta=\frac{hc}{k}\sqrt[3]{\frac{n}{4\pi}}.$$

Итак, мы получили связь между дебаевской температурой θ и скоростью звука в твердом теле c. С помощью этой формулы и графика, представленного на рисунке 8 (см. с. 8) можно решать задачи, которые мы вам предложим. Они просты и не требуют особой смекалки, но интересны и поучительны в двух отношениях. Во-первых, вы убедитесь в существовании неожиданной связи между такими разными вещами, как скорость звука и зависимость электрического сопротивления от температуры. Во-вторых, вы познакомитесь с обобщенными кривыми, очень полезными во многих случаях, когда не удается воспользоваться формулами теории. Зависимости $R=f(T)$ у каждого металла свои, но раз их удалось совместить на обобщенной кривой (см. рисунок 8), значит, эти зависимости и выражающие их кривые подобны. Подобие имеет здесь более широкий смысл, чем в школьной геометрии: оно означает, что кривые могут быть совмещены путем независимого изменения масштабов по двум осям координат.

А теперь попробуйте решить следующие задачи:

1. Скорость звука в железе равна 5200 м/с, удельное сопротивление при минус 100 °С равно 0,592 Ом·мм²/м. Найдите удельное сопротивление железа при температуре +200 °С.

2. Пользуясь зависимостью сопротивления меди от температуры (см. рисунок 1 на с. 3), определите скорость звука в меди.

Излучение Вавилова — Черенкова

В этом году исполнилось пятьдесят лет с того дня, как в журнале «Доклады Академии наук СССР» появились первые сообщения об открытии одного из красивейших физических явлений.

В то время, в 1934 году, молодой начинающий ученый Павел Алексеевич Черенков под руководством академика Сергея Ивановича Вавилова исследовал люминесценцию (холодное свечение) растворов урановых солей под действием гамма-излучения. Для уточнения измерений было решено посмотреть, как светятся сами растворители. В то время считалось, что чистые жидкости вообще не дают никакого свечения, но в опытах Черенкова было обнаружено слабое видимое свечение растворителей. Это свечение не имело ничего общего с люминесценцией, но к такому выводу пришли не сразу.

В лаборатории Вавилова была разработана специальная методика измерений, которая позволяла определять, является ли свечение разных веществ люминесценцией или нет. Черенков провел соответствующие эксперименты с обнаруженным им свечением чистых жидкостей. По их результатам Вавилов заключил, что найденное излучение не есть люминесценция.

Какова же природа этого свечения? Первые соображения об этом высказал тоже С. И. Вавилов. Гамма-излучение, то есть электромагнитное излучение высокой энергии, проходя через вещество, выбивает из атомов электроны, которые затем движутся через вещество в направлении, близком к направлению распространения пучка гамма-лучей. Вот эти-то электроны и дают свечение. Вавилов высказал также некоторые предположения о том, как именно излучают выбитые электроны, но они не подтвердились в дальнейшем. Однако идея, что источником наблюдаемого свечения служат летящие через среду электроны, оказалась совершенно правильной и определила весь ход дальнейших исследований.

Круг проблем, связанных с опытами Черенкова, Вавилов постоянно обсуждал со многими физиками — своими сотрудниками (С. И. Вавилов был директором Физического института имени П. Н. Лебедева АН СССР) и учениками. В частности, ему удалось заинтересовать этими вопросами Игоря Евгеньевича Тамма и Илью Михайловича Франка. Многократные совместные обсуждения помогли понять природу нового физического явления. Важную роль для понимания сыграло то обстоятельство, что свечение оказалось направленным — свет излучался вперед, под острым углом к направлению движения выбитых электронов.

Через три года после того как были опубликованы первые сообщения об открытии нового вида свечения, Тамм и Франк разработали полную теорию явления. Они показали, что свечение излучается электронами, которые движутся через прозрачное вещество с постоянной (!) скоростью, превышающей (!) скорость света в этом веществе.

Согласно теории относительности, скорость света в вакууме — это предельная скорость для всех материальных тел. Электрон не может обогнать свет в вакууме. Но он может обогнать свет, двигаясь в прозрачной среде, где скорость света значительно меньше, чем в вакууме. Тогда-то и возникает излучение, открытое Вавиловым и Черенковым.

Теория Тамма и Франка объяснила не только свойство направленности излучения, но и все остальные его свойства — спектральный состав, интенсивность, поляризацию. После появления теории Черенков провел ряд дополнительных измерений для ее проверки. Их результаты, как и результаты предыдущих измерений, оказались в хорошем согласии с теорией Тамма и Франка.

Здесь следует сказать, что проведенные Черенковым измерения были необычайно трудны, потому что свечение было крайне слабым, на пределе чувствительности человеческого глаза, а приборов лучших, чем глаз, в то время еще не существовало. Черенков с большим искусством справился со всеми трудностями и получил надежные результаты.

В первые годы после открытия и объяснения нового свечения никто не думал о его практическом применении — слишком слабым было это свечение. Но десять лет спустя были разработаны очень чувствительные приемники света — фотоумножители, и тогда возникла идея использовать излучение Вавилова — Черенкова для регистрации быстрых заряженных частиц.

Довольно скоро на этом принципе были созданы соответствующие приборы, получившие название черенковских счетчиков. Такой счетчик состоит из прозрачного вещества, в котором летящая заряженная частица создает излучение Вавилова — Черенкова. Это излучение затем попадает на фотоумножитель и преобразуется в легко регистрируемый импульс напряжения. Ныне черенковские счетчики вошли в арсенал необходимых приборов во всех лабораториях (как наземных, так и космических — расположенных на спутниках), где ведутся исследования по изучению быстрых частиц.

Открытие излучения Вавилова — Черенкова получило широкое признание в отечественной и мировой науке. В 1946 году Вавилов, Тамм, Франк и Черенков были удостоены Государственной премии СССР, а в 1958 году Черенкову, Тамму и Франку (С. И. Вавилов скончался в 1951 году) за открытие и объяснение излучения Вавилова — Черенкова была присуждена Нобелевская премия по физике, высший знак международного научного признания.

А еще позже, в 1974 году, почти одновременно в Англии и в СССР вспомнили о том, что прохождение заряда через вещество со скоростью, превышающей скорость света в этом веществе, рассматривал в конце прошлого века английский физик и математик Оливер Хевисайд. Он довольно полно изучил это явление (хотя и не так полно, как Тамм и Франк), но в те времена сама мысль о возможности движения со столь большими скоростями казалась фантастической, и работы Хевисайда были прочно и надолго забыты.

Б. М. Болотовский

Теорема Виета и вспомогательный многочлен

Л. Д. КУРЛЯНДЧИК,
кандидат физико-математических наук
С. В. ФОМИН

Многие задачи так или иначе сводятся к нахождению корней алгебраических уравнений. Но бывает — и об этом пойдет речь в нашей статье, — что для решения задачи полезно, наоборот, построить многочлен, корнями которого являются данные, известные числа. Прием, связанный с введением вспомогательного многочлена, позволит нам решить несколько совсем разных на вид задач. Среди них — задачи М879 и М882 из Задачника «Кванта» и одна из задач последней международной олимпиады.

Пусть u и v — два действительных числа. Как построить квадратный трехчлен, корнями которого являются u и v? Проще всего — рассмотреть многочлен

$$P(t)=(t-u)(t-v)=t^2+pt+q.$$

Его коэффициенты равны:

$$p=-(u+v),\quad q=uv, \qquad (1)$$

то есть сумме (со знаком минус) и произведению исходных чисел. Формулы (1) называются формулами Виета. С ними связаны две теоремы из школьного учебника:

если квадратное уравнение $t^2+pt+q=0$ имеет корни u и v, то выполняются равенства (1) (теорема Виета);

числа u и v являются корнями квадратного уравнения $t^2-(u+v)t+uv=0$ (обратная теорема).

Приведем несколько примеров применения обратной теоремы Виета. Начнем с совсем простой задачи.

З а д а ч а 1. *Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число $2+\sqrt{3}$.*

Р е ш е н и е этой задачи, как и многих других, может быть основано на том, что квадратное уравнение с «сопряженными» корнями $a+b\sqrt{d}$ и $a-b\sqrt{d}$ (где a, b и d — целые числа) имеет целые коэффициенты*). Этот факт, разумеется, сразу следует из формул Виета (1).

Итак, искомое уравнение имеет корни $t_1=2+\sqrt{3}$ и $t_2=2-\sqrt{3}$, поэтому его коэффициенты равны: $p=-(t_1+t_2)=-4$, $q=t_1t_2=1$.

О т в е т: $t^2-4t+1=0$.

З а д а ч а 2. *Является ли число $t_1=\sqrt{37}-\sqrt{20}$ решением неравенства $t^2+9t-17>0$?*

Р е ш е н и е. Составим квадратное уравнение, корнями которого являются числа t_1 и $t_2=-\sqrt{37}-\sqrt{20}$:

$$t^2+2\sqrt{20}t-17=0.$$

Поскольку $2\sqrt{20}=\sqrt{80}<9$, справедливо неравенство $t_1^2+9t_1-17>t_1^2+2\sqrt{20}t_1-17=0$.

О т в е т: число t_1 является решением данного неравенства.

Вычисление значения функции в данной точке часто упрощается, если предварительно построить многочлен, который в этой точке обращается в нуль. Вот типичный пример.

З а д а ч а 3. *Вычислить $u^4-5u^3+6u^2-5u$, если $u=2+\sqrt{3}$.*

Р е ш е н и е. Вспомним результат задачи 1: $u^2-4u+1=0$ или $u^2=4u-1$. Используя это соотношение, выразим линейно через u степени u^3 и u^4:

$$u^3=u^2\cdot u=(4u-1)u=4u^2-u=4(4u-1)-u=15u-4,$$

$$u^4=u^3\cdot u=(15u-4)u=15u^2-4u=15(4u-1)-4u=56u-15.$$

Отсюда $u^4-5u^3+6u^2-5u=56u-15-5(15u-4)+6(4u-1)-5u=-1$.

О т в е т: -1.

Действуя так же, как в приведенном решении, можно значение любого многочлена с целыми коэффициентами в точке $u=a+b\sqrt{d}$ представить в виде $ku+l$ (a, b, d, k, l — целые числа).

З а д а ч а 4. *Доказать, что число $(7+\sqrt{48})^{13}+(7-\sqrt{48})^{13}$ целое и делится на 14.*

Р е ш е н и е. Числа $u=7+\sqrt{48}$ и $v=7-\sqrt{48}$ являются корнями квадратного трехчлена $t^2-14t+1$. Используя формулы $u^2=14u-1$ и $v^2=14v-1$, получим «рекуррентное соотношение» для величин $a_n=u^n+v^n$:

*) Много красивых примеров, связанных с этой идеей, читатель найдет в статье Н. Вагутена «Сопряженные числа» (Квант, 1980, № 2, с. 26).

$a_0=2$
$a_1=u+v=14$
$a_2=u^2+v^2=(14u-1)+(14v-1)=$
$=14a_1-a_0$
$a_3=u^3+v^3=u(14u-1)+v(14v-1)=$
$=14a_2-a_1$
. . . .
$a_n=u^n+v^n=u^{n-2}(14u-1)+$
$+v^{n-2}(14v-1)=14a_{n-1}-a_{n-2}.$

Из этих соотношений следует, что все числа a_n целые. Кроме того, если n нечетно, то a_n делится на 14. Доказать это утверждение можно по индукции: если a_{n-2} делится на 14, то и a_n делится на 14.

Задача 5. *Найти $u^8+\frac{1}{u^8}$, если $u=\sqrt{2}+1$.*[*])

Формулы Виета, аналогичные формулам (1) для квадратного трехчлена, можно выписать и для многочлена n-ой степени

$$P(t)=(t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n)=$$
$$=t^n+a_1t^{n-1}+a_2t^{n-2}+\dots+a_n$$

с корнями $x_1, \dots, x_n$. Для этого нужно раскрыть скобки, привести подобные члены и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях.

Напишем эти формулы в явном виде для многочлена третьей степени

$$P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3+pt^2+qt+r$$

с корнями x, y и z:

$$\boxed{\begin{aligned} p&=-x-y-z\\ q&=xy+yz+zx\\ r&=-xyz\end{aligned}} \qquad (2)$$

Теперь перейдем к наиболее интересным примерам применения вспомогательного многочлена — они связаны именно с тем случаем, когда многочлен строится по нескольким (не менее, чем трем) корням.

Задача 6. *Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям:*

$$x+y+z=a,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}.$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно a.

Решение. Применим формулы (2). В нашем случае $p=-a$, $q=xyz/a=-r/a$. Поэтому

$$P(t)=t^3-at^2-\frac{r}{a}t+r=(t-a)\left(t^2-\frac{r}{a}\right).$$

Следовательно, число a является корнем многочлена $P(t)$ и значит, совпадает с одним из чисел x, y, z.

Задача 7. (М882) *Сумма трех целых чисел u, v и w равна нулю. Докажите, что число $2u^4+2v^4+2w^4$ — квадрат целого числа.*

Решение. Пусть $P(t)=t^3+pt^2+qt+r$ — многочлен, корнями которого являются числа u, v и w. В силу теоремы Виета, $p=-(u+v+w)=0$. Имеем:

$$u^3+qu+r=0,$$
$$v^3+qv+r=0,$$
$$w^3+qw+r=0.$$

Чтобы получить выражение, фигурирующее в условии, домножим эти уравнения на $2u$, $2v$ и $2w$ соответственно и сложим:

$$2u^4+2v^4+2w^4+2q(u^2+v^2+w^2)=0$$

(мы использовали то, что $u+v+w=0$). Но $u^2+v^2+w^2=(u+v+w)^2-2q=-2q$, поэтому $2u^4+2v^4+2w^4=(2q)^2$.

Сходным образом решается и нередко включаемая в олимпиады

Задача 8. *Разложить на множители: $x^3+y^3+z^3-3xyz$.*

Решение. Рассмотрим многочлен $P(t)=t^3+pt^2+qt+r$, корнями которого служат числа x, y, z; тогда $P(x)=0$, $P(y)=0$, $P(z)=0$. Сложим три равенства

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$
$$y^3+py^2+qy+r=0,$$
$$z^3+pz^2+qz+r=0,$$

а затем воспользуемся формулами Виета (2) и уже встречавшимся в предыдущей задаче тождеством

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=p^2-2q.$$

Получим

$$x^3+y^3+z^3+p(p^2-2q)-qp+3r=0,$$

откуда

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=-p(p^2-3q)=$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

Замечание. Выражение $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ неотрицательно (поскольку $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0$). Поэтому из доказанного тождества вытекает неравенство

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc} \qquad (3)$$

для среднего арифметического и среднего геометрического трех неотрицательных чисел: достаточно положить в этом тождестве $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$.

Посмотрим теперь, как можно использовать вспомогательный многочлен при решении систем уравнений.

Задача 9. *Решить систему*

$$\begin{cases} x+y+z=2\\ x^2+y^2+z^2=14\\ x^3+y^3+z^3=20.\end{cases}$$

Решение. Следуя нашему методу, введем многочлен

$$P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3+pt^2+qt+r.$$

По теореме Виета

$$p=-(x+y+z)=-2,$$
$$q=xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=-5.$$

Для нахождения коэффициента r домножим уравнения системы на q, p и 1 соответственно и сложим. Поскольку $P(x)=P(y)=P(z)=0$, получим:

$$-3r=2q+14p+20=-10-28+20=-18.$$

Итак, $P(t)=t^3-2t^2-5t+6$. Это — многочлен с целыми коэффициентами, причем его старший коэффициент равен 1. Поэтому любой целый корень многочлена $P(t)$ должен быть делителем свободного члена. В данном случае все три корня целые (и находятся среди делителей числа 6) — это 1, -2, и 3[*]). Таким образом, $\{x, y, z\}=\{1, -2, 3\}$.

[*]) Указания и ответы к задачам 5, 10, 13 и упражнениям приводятся в конце журнала.

[*]) В принципе достаточно угадать — или найти перебором — хотя бы один корень, а затем использовать разложение на множители. Подробнее об этом приеме рассказано в статье С. В. Фомина «Разложение на множители» (Квант, 1983, № 7, с. 23).

Ответ: $(1,-2,3)$, $(1,3,-2)$, $(-2,1,3)$, $(-2,3,1)$, $(3,1,-2)$, $(3,-2,1)$.

Задача 10. *Решить систему*

$$\begin{cases} xyz=1 \\ x+y+z=xy+yz+zx \\ x^3+y^3+z^3=\dfrac{73}{8}. \end{cases}$$

Рассматриваемый метод эффективен и во многих задачах, связанных с неравенствами.

Задача 11. *Числа u, v, w, x, y, z таковы, что*

$$x+y+z=u+v+w,$$
$$xyz=uvw,$$
$$0<u\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant w,\ u\leqslant v\leqslant w.$$

Докажите, что $u=x$, $v=y$, $w=z$.

Решение. Рассмотрим два многочлена:

$$P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3+pt^2+qt+r,$$
$$Q(t)=(t-u)(t-v)(t-w)=t^3+pt^2+kt+r$$

(коэффициенты при t^2 и свободные члены совпадают в силу теоремы Виета). Пусть $R(t)=P(t)-Q(t)=(q-k)t$. Тогда $R(u)=P(u)=(u-x)(u-y)(u-z)\leqslant 0$. С другой стороны, $R(u)=(q-k)u$, поэтому $q-k\leqslant 0$. Аналогично, $R(w)=P(w)=(w-x)(w-y)(w-z)\geqslant 0$, откуда $q-k\geqslant 0$. Значит, $q=k$, то есть многочлены $P(t)$ и $Q(t)$ совпадают и корни у них одинаковые.

Задача 12*). ***Доказать, что для неотрицательных чисел x, y, и z с суммой $x+y+z=1$ выполнены неравенства***

$$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}.$$

Решение. Левое неравенство доказать нетрудно:

$$xy+yz+zx-2xyz=xy(1-z)+yz(1-x)+zx\geqslant 0.$$

Для доказательства правого неравенства рассмотрим многочлен

$$P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-t^2+qt+r,$$

где $q=xy+yz+zx$, $r=-xyz$, и перепишем неравенство так: $q+2r\leqslant 7/27$. Поскольку

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}q+r=-\frac{1}{8}+\frac{q+2r}{2},$$

достаточно доказать, что $P(1/2)\leqslant 1/216$. Если все числа x, y, z не больше $1/2$, то в силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом (3)

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{1/2-x+1/2-y+1/2-z}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}.$$

Если же какое-то из этих чисел больше $1/2$ (такое число может быть только одно), то

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\leqslant 0.$$

В заключение рассмотрим две задачи, в которых используются многочлены более высоких степеней.

Задача 13. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=n \\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=n \\ x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n=n, \end{cases}$$

где x_1, x_2, ..., x_n — комплексные числа (о комплексных числах читатель может прочесть в статье Л. С. Понтрягина (Квант, 1983, № 2)).

Задача 14 (**М879**). *Пять целых чисел a, b, c, d, e таковы, что $a+b+c+d+e$ и $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ делятся на нечетное число n. Докажите, что число $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ также делится на n.*

Решение. Пусть $P(t)=t^5+pt^4+qt^3+rt^2+kt+l$ — многочлен, корнями которого являются числа a, b, c, d и e. Сразу отметим, что в силу теоремы Виета все коэффициенты этого многочлена — целые числа, причем p и q делятся на n. Складывая равенства $P(a)=0$, $P(b)=0$, ..., $P(e)=0$, получим, что

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+5l+$$
$$+r(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+k(a+b+c+d+e)$$

делится на n. А так как $l=-abcde$, утверждение задачи доказано.

Внимательный читатель, конечно, заметил, что во всех разобранных задачах мы имели дело с так называемыми симметрическими многочленами, то есть такими выражениями, которые не меняются при перестановках переменных. Красивая и содержательная теория этих многочленов излагается, например, в книге В. Г. Болтянского и Н. Я. Виленкина «Симметрия в алгебре» (М., 1967). В частности, доказывается теорема о том, что всякий симметрический многочлен от переменных x_1, x_2, ..., x_n может быть выражен через коэффициенты a_1, a_2, ..., a_n многочлена $P(t)=t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n = (t-x_1)\times\times(t-x_2)\ldots(t-x_n)$. И хотя мы, строго говоря, нигде в решениях задач не воспользовались этой теоремой, но именно она по существу лежит в основе нашего метода.

Упражнения

1. Докажите, что $\varphi^8=13-21\varphi$, где $\varphi=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2. Сумма длин ребер прямоугольного параллелепипеда равна 96 см, площадь полной поверхности — 286 см^2, объем — 120 см^3. Найдите длины ребер.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^5+y^5+z^5=1. \end{cases}$$

4. Разложите на множители: $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$.

5. Положительные числа x, y, z удовлетворяют неравенствам $xyz>1$, $x+y+z<\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$. Докажите, что ровно одно из этих чисел меньше 1.

*) Эта задача — с XXV Международной математической олимпиады. Другое ее решение см. на с. 56.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Закон нечетных чисел» для свободного падения тел» предназначена восьмиклассникам, «Теорема, позволяющая решать основные задачи электростатики» — девятиклассникам, «Что такое радуга?» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

«Закон нечетных чисел» для свободного падения тел

Движение свободно падающих на Землю тел — это, как известно, движение с постоянным ускорением $g=9{,}81$ м/с^2. В случае, если тело в начальный момент покоится относительно Земли, закон свободного падения математически выражается уравнением

$$h=\frac{gt^2}{2}, \qquad (1)$$

где h — перемещение тела (по вертикали), t — время, отсчитываемое от начала падения.

Оказывается, формула (1) приводит к одному любопытному следствию, о котором в учебниках физики обычно не говорится, но о котором знал еще Галилей, открывший закон свободного падения. Оно само по себе может считаться законом, и им можно пользоваться при решении конкретных задач.

О каком же следствии идет речь?

Формула (1), очевидно, позволяет вычислить перемещение тела за любое время, в том числе и за время $t=n\Delta t$ секунд (здесь $n=1, 2, 3, \ldots, \Delta t=1$ с). Мало того, с помощью этой же формулы можно определить перемещение не только за все n секунд, но и за каждую из n секунд — за первую, вторую, третью и т. д.

В самом деле, если за n секунд тело совершило перемещение h_n, а за $(n-1)$ секунд — h_{n-1}, то за n-ю секунду (здесь n — «номер» секунды) перемещение $h(n)$, естественно, равно разности h_n и h_{n-1} (здесь n — число секунд):

$$h(n)=h_n-h_{n-1}=\frac{g(n\Delta t)^2}{2}-\frac{g((n-1)\Delta t)^2}{2}=$$
$$=\frac{g}{2}((n\Delta t)^2-((n-1)\Delta t)^2)=$$
$$=\frac{g(\Delta t)^2}{2}(2n-1). \qquad (2)$$

Из формулы (2) видно, что перемещение $h(1)$ за первую секунду $(n=1)$ равно

$$h(1)=\frac{g(\Delta t)^2}{2}$$

Аналогично можно найти, что в последующие секунды тело совершает перемещения:

$$h(2)=3\frac{g(\Delta t)^2}{2},\quad h(3)=5\frac{g(\Delta t)^2}{2},$$
$$h(4)=7\frac{g(\Delta t)^2}{2},\quad h(5)=9\frac{g(\Delta t)^2}{2},$$
$$h(6)=11\frac{g(\Delta t)^2}{2}, \ldots, h(n)=(2n-1)\frac{g(\Delta t)^2}{2}.$$

Таким образом, перемещения за последовательные равные промежутки времени длительностью в 1 секунду относятся друг к другу как $1:3:5:7:9:11:\ldots:(2n-1)$, то есть как ряд нечетных чисел (заметим, что величина $(2n-1)$ при любом значении n является нечетным числом).

Интересно, что Галилей сформулировал закон свободного падения тел именно в этой форме. Словами самого Галилея: «Пространства, проходимые падающим телом в одинаковые промежутки времени, относятся между собой как последовательные нечетные числа».

Не следует думать, что «закон нечетных чисел» относится исключительно к случаю свободного падения тел. Он, разумеется, справедлив для любого равноускоренного движения без начальной скорости. Ведь эта закономерность есть прямое следствие того, что перемещение тела при таком движении пропорционально квадрату времени. Не нужно также думать, что этот «закон» верен только тогда, когда промежутки времени, для которых вычисляются перемещения, равны одной секунде. Он, конечно, верен для любых равных промежутков времени, как это и отмечено Галилеем.

В заключение предлагаем читателям выяснить самостоятельно, как выглядит «закон нечетных чисел» в случае равнозамедленного движения.

Теорема, позволяющая решать основные задачи электростатики

Известно, что электростатическое поле часто изображают при помощи силовых линий. Попытаемся установить связь между числом силовых линий N и зарядом q, создающим электрическое поле. Для этого введем понятие потока электрического поля.

Потоком электрического поля через некоторую поверхность будем называть произведение ES, где S — площадь поверхности, а E — модуль вектора напряженности электрического поля, перпендикулярного этой поверхности.*) (Понятие «поток» здесь введено по аналогии с потоком жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы площадью S в единицу времени, который, как известно, равен vS («Физика 8», § 65).)

Начнем с простейшего случая — одного точечного заряда. Картина силовых линий поля, созданного положительным точечным зарядом q, изображена на рисунке 1. Рассмотрим сферу радиуса r, центром которой служит сам заряд q, и определим поток электрического поля через поверхность этой сферы. Силовые линии, выходящие из заряда, перпендикулярны поверхности сферы, и в каждой точке сферы модуль напряженности поля равен

$$E=\frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Кл^2/(Н$\cdot$м^2) — электрическая постоянная. Но $4\pi r^2$ — это площадь поверхности сферы. Обозначив ее через S, получим:

$$ES=\frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Отсюда видно, что поток через поверхность сферы электрического поля, созданного точечным зарядом, не зависит от радиуса сферы, а зависит только от самого заряда q. Поэтому, если провести ряд концентрических сфер, то поток электрического поля через все эти сферы будет одинаковым. Очевидно, что и число силовых линий, пересекающих эти сферы, тоже будет одинаковым.

Условились число силовых линий, выходящих из заряда, принимать равным потоку электрического поля:

$$N=ES=\frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (3)$$

Отношение N/S, представляющее собой число силовых линий, пересекающих единицу площади поверхности, перпендикулярной (ортогональной) силовым линиям, называют густотой силовых линий. Ясно, что она характеризует величину напряженности поля в данном месте.

Можно показать, что поток электрического поля, а значит и число силовых линий, равняется q/ε_0 не только для поля одного точечного заряда, но и для поля, создаваемого любой совокупностью точечных зарядов, в частности — заряженным телом. Тогда в формуле (3) q означает алгебраическую сумму всей совокупности зарядов. Мало того, если сферу заменить любой другой замкнутой поверхностью, то поток электрического поля, а следовательно и число силовых линий, пересекающих ее, не изменится.

Утверждение, что *поток электрического поля и число силовых линий через замкнутую поверхность, внутри которой находится система зарядов, равняется q/ε_0, где q — алгебраическая сумма зарядов,* называется теоремой Гаусса.

Воспользуемся теоремой Гаусса для решения некоторых конкретных задач электростатики.

1. Чему равна напряженность электростатического поля внутри проводника?

Известно, что проводник — это такое тело, в котором имеются свободные заряды. Эти заряды действительно свободно могут перемещаться по всему объему проводника. Единственным препятствием для их передвижения служит

Рис. 1.

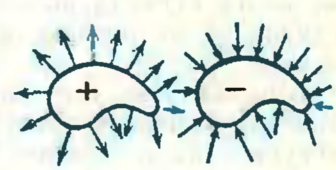


Рис. 2.

*) Если электрическое поле не перпендикулярно данной поверхности, при вычислении потока электрического поля надо учитывать только проекцию вектора напряженности на направление нормали к поверхности.

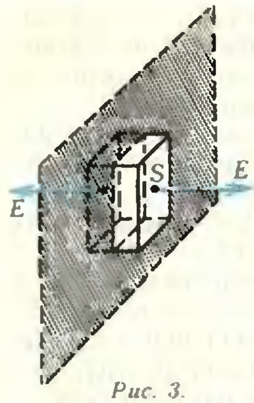


Рис. 3.

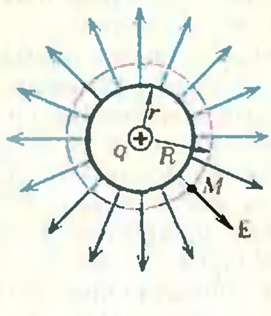


Рис. 4.

поверхность проводника, которую они сами покинуть не могут.

Рассмотрим изолированный проводник, которому сообщен электрический заряд. Вокруг такого проводника, конечно, создается электростатическое поле. Докажем, что *внутри заряженного проводника электростатическое поле отсутствует, то есть напряженность поля равна нулю.*

Как известно, в незаряженном проводнике отрицательный заряд всех электронов точно сбалансирован положительным зарядом всех протонов, и их суммарный заряд равен нулю. Но если проводник заряжен, то баланс зарядов нарушается. В проводнике создается избыток свободных электронов, если он заряжен отрицательно, или избыток протонов (недостаток электронов), если он заряжен положительно. В первом случае, взаимно отталкиваясь, избыточные электроны разойдутся друг от друга на максимально возможные расстояния, вследствие чего они расположатся на поверхности проводника (которую покинуть не могут). Внутри же проводника баланс зарядов восстановится, и там суммарный заряд снова станет равным нулю.

Во втором случае, наоборот, часть электронов с поверхности проводника, вследствие сил притяжения к положительным зарядам, устремится внутрь проводника и сбалансирует избыточные положительные заряды. Суммарный заряд внутри проводника снова станет равным нулю, а избыточный положительный заряд сосредоточится на его поверхности.

Выходит, что заряд любого знака, сообщенный проводнику, располагается на его поверхности. Внутри же проводника, то есть внутри замкнутой поверхности, которой в данном случае служит поверхность самого проводника, заряд равен нулю ($q=0$). Но тогда из теоремы Гаусса следует, что

$$E=\frac{q}{\varepsilon_0 S}=0,$$

то есть внутри проводника поля нет.

2. Как направлены силовые линии у поверхности заряженного проводника?

На любой свободный электрон, находящийся на поверхности заряженного проводника, действуют силы со стороны остальных зарядов поверхности (в объеме проводника сумма положительных и отрицательных зарядов равна нулю). Имея возможность свободно перемещаться по поверхности, электроны сами расположатся так, чтобы результирующая сила, действующая на каждый из них вдоль поверхности, стала равной нулю. Это означает, что проекция напряженности поля на направление касательной к поверхности проводника в любой ее точке равна нулю. А это возможно только при условии, что *силовые линии поля направлены перпендикулярно поверхности заряженного проводника* (рис. 2).

3. Какова напряженность поля, созданного заряженной плоскостью?

На рисунке 3 изображен участок заряженной проводящей плоскости с площадью S, на который приходится заряд q.

Мы знаем, что силовые линии поля, созданного этой плоскостью, всюду перпендикулярны к ней. А чему равняется модуль напряженности электрического поля?

Окружим выбранный участок плоскости замкнутой поверхностью, через которую силовые линии проходят под прямым углом к ней. Для плоскости такой поверхностью служит, например, прямоугольный параллелепипед с основаниями, параллельными плоскости. Силовые линии поля перпендикулярны только этим основаниям, остальные четыре грани параллелепипеда параллельны силовым линиям. Площадь обоих оснований равна $2S$.

Из теоремы Гаусса следует, что

$$E\cdot 2S=\frac{q}{\varepsilon_0},\text{ откуда } E=\frac{q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Эта формула приведена в § 45 «Физики 9» без вывода. Из формулы видно, что напряженность поля в любой его точке не зависит от расстояния до заряженной плоскости. Такое поле называют однородным.

4. Чему равна напряженность поля заряженного проводящего шара?

Поскольку шар проводящий, силовые линии поля всюду направлены перпендикулярно его поверхности, то есть по радиусам (рис. 4). Найдем модуль напряженности поля в любой точке M, находящейся на расстоянии R от центра шара. Проведем через эту точку замкнутую поверхность, ортогональную силовым линиям поля. Такой поверхностью служит сфера радиуса R и площадью $4\pi R^2$, концентрическая поверхности проводящего шара.

По теореме Гаусса $ES=q/\varepsilon_0$. Отсюда

$$E=\frac{q}{\varepsilon_0 S}=\frac{q}{4\pi R^2\varepsilon_0}$$

— заряженный шар создает вокруг себя такое же поле, как точечный заряд, помещенный в центре шара (см. рис. 4).

Что такое радуга?

Каждому, наверное, доводилось видеть эту удивительную разноцветную «небесную арку», протянувшуюся на полгоризонта. После освежающего грозового ливня она радует глаз своим многоцветием на фоне свинцовых туч, уносимых ветром.

Как возникает и что представляет собой это поразительное зрелище? Прежде всего опишем саму радугу, какой она видится наблюдателю.

Характерно, что радугу можно видеть только стоя спиной к солнцу, если перед глазами наблюдателя есть туча, а высота солнца над горизонтом не превышает приблизительно 42°. Радуга представляет собой часть окружности основания конуса, вершина которого — глаз наблюдателя. Ось конуса — прямая, идущая от солнца через глаз наблюдателя (рис. 1). Центр окружности обычно ниже линии горизонта, так что радуга не есть полуокружность. К таковой она приближается, если солнце близко к закату. Угол при вершине конуса равен приблизительно 84°.

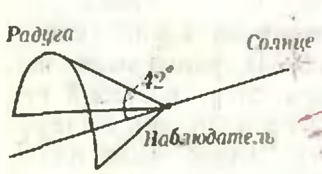


Рис. 1.

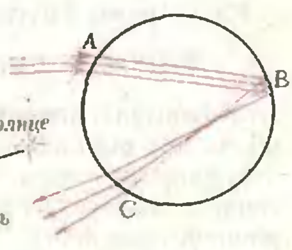


Рис. 2.

При перемещениях наблюдателя радуга перемещается вместе с ним, так что не имеет смысла пытаться добраться до основания радуги и посмотреть на нее «сбоку». Радуга — это не то, что находится в определенном *месте*. Радуга — это то, что можно видеть в определенном *направлении* (под углом около 42° к упомянутой оси).

Внешняя (верхняя) часть радуги — красного цвета, нижняя — фиолетового. Между ними — «все цвета радуги».

Основные явления в радуге

Туча, на фоне которой видна радуга, состоит из водяных капель. В них-то и происходят те оптические явления, из-за которых она возникает. В основном это:

1) Преломление света на границе воздух — вода. Согласно закону преломления, $\sin\alpha/\sin\beta=n$, где α — угол падения света, β — угол преломления и n — показатель преломления второй среды (воды) относительно первой (воздуха).

2) Отражение на границе вода — воздух. Оно происходит по обычному закону отражения — угол падения равен углу отражения.

3) Дисперсия света, то есть зависимость показателя преломления от длины световой волны. Видимый солнечный свет содержит в себе различные длины волн — от самых длинных, около 750 нм, вызывающих ощущение красного цвета, до самых коротких, около 400 нм,— фиолетовых. У воды показатель преломления для красного света $n_к=1,331$, для фиолетового — $n_ф=1,344$. Значения n для других цветов лежат между этими числами.

Как возникает радуга?

Пользуясь приведенной формулой и значениями n, можно понять, как образуется радуга.

Рассмотрим каплю воды, на которую падает солнечный свет (рис. 2). Пусть пучок света (пока какой-нибудь одной длины волны) падает на каплю вблизи точки A, преломляется в ней и доходит до точки B. Здесь он отражается, в точке C снова преломляется и вы-

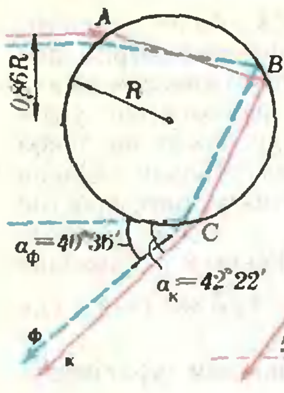


Рис. 3.

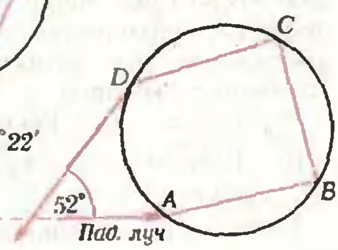


Рис. 4.

ходит из капли. Но выходит уже в виде *расходящегося* пучка.

Можно, однако, показать, что пучки, которые попадают в то место капли, которое находится на расстоянии $0{,}86R$ (где R — радиус капли) от оси, выходят из капли почти без всякой расходимости (рис. 3). *Только эти лучи и видит глаз наблюдателя.* А при таком положении точки A угол между падающим лучом и лучом, выходящим из капли, как раз близок к 42°. Точнее, для красного цвета этот угол равен 42°22′, а для фиолетового — 40°36′. Таким образом, угловая ширина радуги составляет 1°46′. В этом угловом интервале и лежат «все цвета радуги».

Конечно, одна и та же капля не может находиться и под углом 42°22′ и под углом 40°36′. Каждый «цвет» исходит поэтому из разных капель, находящихся в данный момент под соответствующим углом в указанном интервале. В образовании радуги участвуют миллионы капель.

Вторая радуга

Обычно над основной яркой радугой видна еще одна, менее яркая. Она концентрична с первой, но порядок цветов в ней обратный. Нижний ее край красного цвета, верхний — фиолетового. Возникает она в результате тех же процессов преломления и отражения света в каплях воды. Но если основная радуга возникает в результате двукратного преломления и однократного отражения света, то вторичная образуется при двукратном преломлении и двукратном же отражении света.

Как видно из рисунка 4, свет в капле преломляется в точке A, дважды отражается в точках B и C и выходит из капли после второго преломления в точке D. Видна эта радуга под углом не 42°, а 52°. «Лишнее» отражение приводит к некоторой потере световой энергии (в точке C происходит ведь и преломление света!), поэтому она менее яркая. Вторая радуга исходит из совсем других капель, расположенных под бо́льшим углом к оси конуса.

Понятно, что свет от тех или иных капель (для обеих радуг), попавший в ваш глаз, не может попасть в глаз вашего соседа или вообще какого-то другого наблюдателя. Каждому наблюдателю природа показывает его «индивидуальную» радугу, возникшую в «его» миллионах капель.

Заключение

Изложенная здесь теория радуги, предложенная еще Ньютоном, не описывает все процессы, происходящие в каплях дождя. Картина радуги осложняется дополнительными процессами интерференции и дифракции света, играющими важную роль, когда капли очень малы по размерам. Описанная выше картина относится к каплям диаметром 0,5—2 мм.

Дополнительные явления несколько меняют вид радуги. Все это приводит к тому, что цвета в радуге менее чисты, чем те цвета, которые можно видеть при преломлении солнечного света в призме.

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Где ошиблись Петя и Вова?» предназначена восьмиклассникам, «Геометрия помогает решать уравнения» — девятиклассникам и «Двугранные и трехгранные углы» — десятиклассникам. Это деление в какой-то мере условно, так как каждая из этих заметок может быть полезной не только учащимся указанных классов.

Где ошиблись Петя и Вова?

Два друга, Петя и Вова, решали на олимпиаде*) систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2-xy+y^2)(x-y)=1+y^3, \\ (x^2+xy+y^2)(x+y)=1-y^3. \end{cases}$$

Петя заменил второе уравнение произведением уравнений:

$$\begin{cases} (x^2-xy+y^2)(x-y)=1+y^3, \\ (x^3-y^3)(x^3+y^3)=1-y^6, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} (x^2-xy+y^2)(x-y)=1+y^3, \\ x^6-y^6=1-y^6. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x=\pm1$, откуда он получил ответ: $(1;0)$; $(-1;-1)$.

Вова заменил первое уравнение произведением уравнений:

$$\begin{cases} x^6-y^6=1-y^6, \\ (x^2+xy+y^2)(x+y)=1-y^3, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x=\pm1, \\ (x^2+xy+y^2)(x+y)=1-y^3. \end{cases}$$

Отсюда получается ответ: $(1;0)$; $(-1;1)$.

После олимпиады они сверили ответы и очень удивились. Кто был неправ?

П. П. Горнуша

Геометрия помогает решать уравнения

В некоторых случаях вместо того чтобы преобразовывать уравнение можно поступить следующим образом: перевести задачу на геометрический язык, а затем записать полученное геометрическое условие другим способом; в результате получается более простое уравнение. Сейчас мы рассмотрим два таких примера, причем в каждом из них исходное уравнение равносильно условию «некоторые точки лежат на одной прямой»; подходящим образом записав это условие, мы получим более простое уравнение, которое и будем решать.

З а д а ч а 1. Решите уравнение $\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=4$, где $0°<x<90°$.

Р е ш е н и е. Придадим уравнению вид:

$$\sqrt{(\sqrt{12})^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos x}+\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot2\cdot\cos(90°-x)}=4. \quad (1)$$

На рисунке 1 изображен прямоугольный треугольник, в котором $|AC|=\sqrt{12}$, $|BC|=2$, $\widehat{ACD}=x$, $\widehat{DCB}=90°-x$; $|CD|=\sqrt{3}$, $|AB|=4$. Первое слагаемое в левой части (1) равно $|AD|$, второе — $|DB|$. Но так как $|AD|+|DB|=|AB|$, значит, $D\in[AB]$. Поэтому данное уравнение можно заменить на уравнение

$$\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x+\sqrt{3}\cdot2\cdot\sin(90°-x)=2\cdot\sqrt{12} \quad (2)$$

(так как $S_{ACD}+S_{DCB}=S_{ACB}$), или

$$6\sin x+2\sqrt{3}\cos x=4\sqrt{3},$$

которое решается легче, чем исходное. Имеем: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=1$, то есть $\sin(x+30°)=1$, откуда $x=60°$.

О т в е т: $x=60°$.

З а м е ч а н и е. Строго говоря, требуется доказать, что из уравнения (2) следует уравнение (1). Покажем это. Из уравнения (2) следует, что $S_{ACD}+S_{DCB}=S_{ACB}$, поэтому $|AD|+|DB|=|AB|$, а это и записано в уравнении (1).

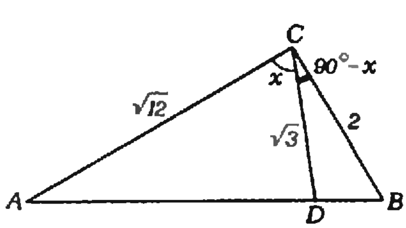


Рис. 1.

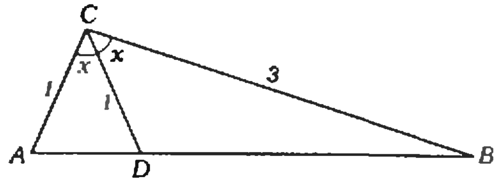


Рис. 2.

*) Олимпиада МФТИ — 84

Задача 2. Решите уравнение: $\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{10-6\cos x}=\sqrt{10-6\cos 2x}$, где $x\in]0;\pi/2[$.

Решение. Пусть $|CA|=1$, $|CB|=3$, $|CD|=1$, $\widehat{ACD}=\widehat{DCB}=x$ (рис. 2). Тогда $|AD|=\sqrt{2-2\cos x}$, $|DB|=\sqrt{10-6\cos x}$, $|AB|=\sqrt{10-6\cos 2x}$.

Данное уравнение означает, что $|AD|+|DB|=|AB|$, откуда $D\in[AB]$. Следовательно, $S_{ACD}+S_{CDB}=S_{ACB}$, то есть $\sin x+3\sin x=3\sin 2x$, $4\sin x=6\sin x\cdot\cos x$. Отсюда следует, что $\cos x=2/3$, так как $\sin x\neq 0$ (из условия: $x\in]0;90°[$).

Ответ: $x=\arccos 2/3$.

Замечание. Если бы $x\in[0;\pi/2]$, то уравнение имело бы еще один корень $x=0$.

Упражнение. Докажите равносильность двух уравнений: $\sqrt{5-4\cos x}+\sqrt{13-12\sin x}=\sqrt{10}$ и $2\sin x+6\cos x=3$, где $x\in]0;\pi/2[$.

Э. Я. Ясиновый

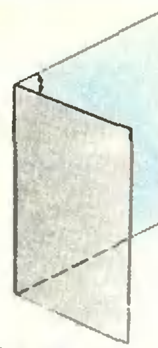


Рис. 1а.

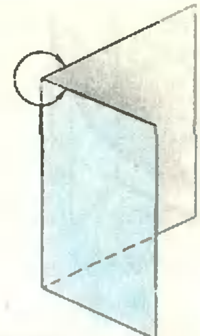


Рис. 1б.

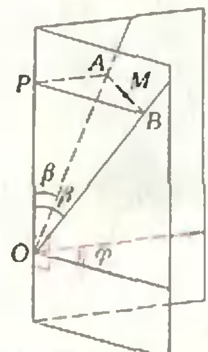


Рис. 2а.

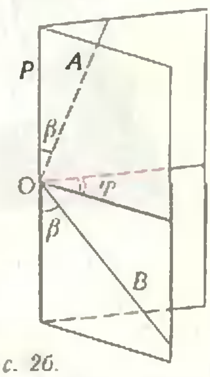


Рис. 2б.

Двугранные и трехгранные углы

Двугранные углы. Двугранным углом называют объединение двух полуплоскостей, имеющих общую границу, и одной из ограниченных ими пространственных областей (рис. 1). Подчеркнем: не всякий двугранный угол есть пересечение двух полупространств (см. рис. 1б).

Величиной двугранного угла называют величину плоского угла, получающегося в сечении этого двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру. Величина двугранного угла на рисунке 1а меньше π, а двугранного угла на рисунке 1б — больше π.

Двугранные углы — пространственные аналоги углов на плоскости: многие их свойства аналогичны свойствам плоских углов. Например, биссектор выпуклого двугранного угла (так называют полуплоскость, делящую двугранный угол на два конгруэнтных двугранных угла) можно определить как множество точек двугранного угла, равноудаленных от его граней. Так же, как и на плоскости, определяются вертикальный и смежный углы, при этом их величины равны соответственно φ и $\pi-\varphi$, где φ — величина исходного двугранного угла.

Сейчас мы разберем решения двух задач, в некотором смысле обратных друг другу.

Задача 1. *Двугранный угол величины φ, $0<\varphi<\pi$, пересечен плоскостью. В каких пределах может лежать величина α угла, получающегося в сечении?*

Задача 2. *В каких пределах может лежать величина φ угла, являющегося ортогональной проекцией угла величины α, $0<\alpha<\pi$?*

Ответ к задаче 1: $0<\alpha<\pi$. Поскольку величина двугранного угла меньше π, он лежит по одну сторону от плоскости любой из своих граней. Поэтому и угол в сечении лежит по одну сторону от прямой, содержащей любую из его сторон. Следовательно, $\alpha<\pi$. Остается показать, что для любого α из промежутка $]0;\pi[$ существует плоскость, пересекающая двугранный угол по углу величины α. Для этого проще всего указать два луча с общей вершиной на ребре двугранного угла, лежащие в разных его гранях, такие, что угол между ними равен α (а затем через эти два луча провести секущую плоскость).

Выберем на ребре двугранного угла луч OP и проведем в его гранях лучи OA и OB под одинаковым углом β к OP (рис. 2а). При изменении β лучи OA и OB будут поворачиваться, и ясно,

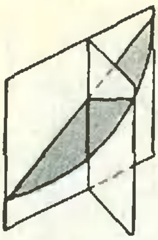


Рис. 3.

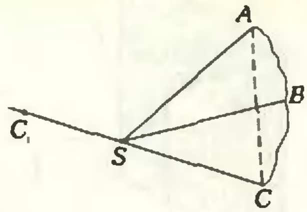


Рис. 4.

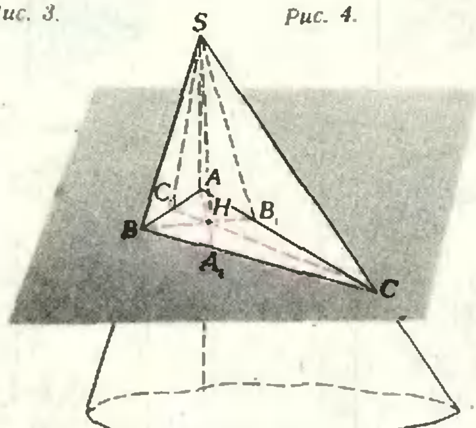


Рис. 5.

что когда β пробегает все значения от 0 до $\pi/2$, угол $\widehat{AOB}=\alpha$ будет меняться от 0 до φ. Если же луч OB проводить под углом $\pi-\beta$ к OP (рис. 2б), угол α будет меняться от π до φ (при $0<\beta<\pi/2$).

Строго обосновать это рассуждение позволяет несложный расчет. Пусть плоскость, перпендикулярная к ребру двугранного угла и проходящая через точку P, пересекает лучи в точках A и B, M — середина отрезка AB (мы рассматриваем первый случай — рис. 2а). Тогда

$$\sin(\alpha/2)=\frac{|MA|}{|OA|}=\frac{|PA|\sin(\varphi/2)}{|OA|}=$$
$$=\sin\beta\cdot\sin(\varphi/2),$$

поэтому $\sin(\alpha/2)$ принимает при изменении β от 0 до $\pi/2$ все значения в промежутке $]0;\ \sin(\varphi/2)]$, а сам угол α — в промежутке $]0;\ \varphi]$ (поскольку угол $\alpha/2$ — острый).

Вычисления для второго случая мы оставим читателю, а здесь покажем, как можно обойтись без них. Очевидно, что в сечении двух смежных двугранных углов любой плоскостью (пересекающей их общее ребро) образуются смежные плоские углы (рис. 3). Но угол в сечении двугранного угла, смежного к данному, как показано выше, может иметь любую величину от 0 до $\pi-\varphi$ ($\pi-\varphi$ — величина этого смежного угла). Поэтому в соответствующих сечениях исходного двугранного угла будут получаться углы величиной от π до φ, что как раз и требовалось.

Перейдем к задаче 2. Пусть угол A_1OB_1 величины φ является ортогональной проекцией угла AOB величины α. Угол A_1OB_1 определяет двугранный угол величины φ, ребро которого — это перпендикуляр к плоскости A_1OB_1, проходящий через точку O, а грани содержат лучи OA_1 и OB_1. Очевидно, угол AOB является сечением этого двугранного угла. Таким образом, мы снова оказались в ситуации задачи 1, только теперь задана величина угла в сечении α, а не двугранного угла φ. Но из задачи 1 известно, что при любых заданных значениях α и φ, $0<\alpha,\varphi<\pi$, можно так пересечь двугранный угол величины φ, чтобы в сечении получился угол величины α. Следовательно, в задаче 2 при проектировании можно получить угол любой величины φ, $0<\varphi<\pi$, независимо от α. Учитывая, что $\varphi<\pi$ (так как угол AOB меньше развернутого), находим ответ $0<\varphi<\pi$.

Трехгранные углы. Пусть дан треугольник ABC и точка S, не лежащая в плоскости этого треугольника. Трехгранным углом $SABC$ (выпуклым) называют объединение всех лучей с вершиной S, пересекающих треугольник ABC. (Иногда определяют и невыпуклый трехгранный угол $SABC$ — объединение всех лучей с вершиной S, не пересекающих внутренность треугольника ABC — такие трехгранные углы мы рассматривать не будем.)

Для краткости мы будем использовать следующие обозначения для трехгранного угла $SABC$: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — величины двугранных углов с ребрами SA, SB, SC соответственно, α, β, γ — величины противолежащих им плоских углов.

Трехгранные углы — одни из возможных пространственных аналогов треугольников (другой аналог — тетраэдры). Поэтому многие теоремы геометрии трехгранных углов похожи на теоремы геометрии треугольников (при этом плоским углам соответствуют стороны треугольников, а двугранным углам — углы треугольников). Например, известная теорема «каждый плоский угол меньше суммы двух других» — аналог неравенства треугольника. Применяя эту теорему к трехгранному углу $SABC_1$ (рис. 4), получаем другое полезное свойство трехгранных углов: «сумма плоских углов меньше 360°».

Аналогом теоремы «высоты треугольника пересекаются в одной точке» служит утверждение следующей задачи.

З а д а ч а 3. *Докажите, что три плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла перпендикулярно противолежащим граням («высоты»), имеют общую прямую.*

(Имеется в виду, что указанные плоскости определены однозначно, то есть хотя бы два плоских угла, для определенности ASB и ASC, не прямые.)

Д о к а з а т е л ь с т в о мы сведем к применению аналогичной планиметрической теоремы.

Проведем через точку A, взятую на ребре SA, плоскость, перпендикулярную этому ребру (рис. 5). Пусть B и C — точки пересечения этой плоскости с прямыми SB и SC соответственно, AA_1, BB_1, CC_1 — линии пересечения плоскостей из условия задачи с плоскостью ABC.

Плоскость SAA_1 перпендикулярна плоскостям SBC (по условию) и ABC (она проходит через перпендикуляр SA к (ABC)), поэтому она перпендикулярна к их линии пересечения — прямой BC. Отсюда следует, что $(AA_1) \perp (BC)$, то есть, что AA_1 — высота треугольника ABC.

Плоскость ASC перпендикулярна плоскостям ABC и SBB_1, поэтому она перпендикулярна прямой BB_1, следовательно, $(BB_1) \perp (AC)$, аналогично $(CC_1) \perp (AB)$, значит $[BB_1]$ и $[CC_1]$ — тоже высоты треугольника ABC.

Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке — точке H, поэтому три плоскости, о которых идет речь в задаче, пересекаются по прямой — прямой SH.

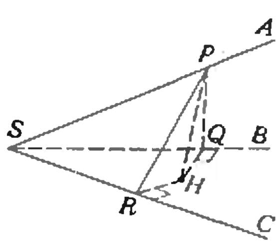


Рис. 6а.

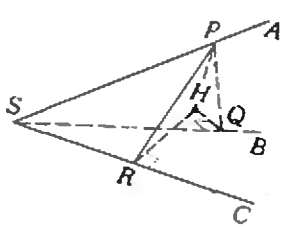


Рис. 6б.

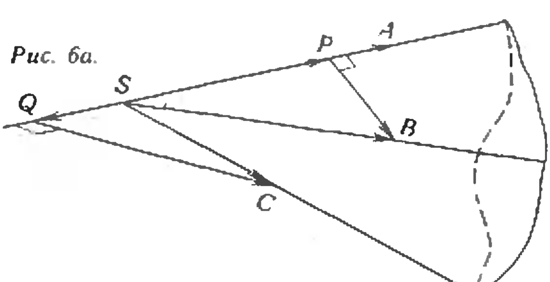


Рис. 7.

Теоремы синусов и косинусов. *Для (выпуклого) трехгранного угла верны следующие соотношения:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\hat{A}} = \frac{\sin\beta}{\sin\hat{B}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\hat{C}}$$

(теорема синусов); (1)

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\hat{A}$$

(первая теорема косинусов); (2)

$$\cos\hat{A} = -\cos\hat{B}\cos\hat{C} + \sin\hat{B}\sin\hat{C}\cos\alpha$$

(вторая теорема косинусов). (3)

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы с и н у с о в. Возьмем на ребре SA точку P, $|SP|=1$; пусть Q, R и H — ее проекции на прямые SB, SC и плоскость SBC (рис. 6). В прямоугольном треугольнике PQH угол при вершине Q равен $\hat{B}$ (если $\hat{B} \leqslant \pi/2$ — рис. 6 а) или $\pi - \hat{B}$ (при $\hat{B} > \pi/2$ — рис. 6 б); в любом случае

$$|PH| = |PQ|\sin\hat{B} = |SP|\sin\gamma \cdot \sin\hat{B} = \sin\gamma \cdot \sin\hat{B}.$$

Из прямоугольных треугольников PRH и SPR аналогично получается, что $|PH| = \sin\beta \cdot \sin\hat{C}$. Приравнивая эти два выражения, находим, что $\sin\beta/\sin\hat{B} = \sin\gamma/\sin\hat{C}$. Точно так же доказывается второе равенство теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о п е р в о й т е о р е м ы к о с и н у с о в. Пусть векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ имеют длину 1, P и Q — проекции точек B и C на прямую SA (рис. 7). Тогда $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \cos\gamma$, $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = \cos\beta$, $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \cos\alpha$, угол между векторами $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{QC}$ равен $\hat{A}$, $\overrightarrow{SP} = \cos\alpha\,\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SQ} = \cos\beta\,\overrightarrow{SA}$ и (вне зависимости от того острые, прямые или тупые углы β и γ) $|QC| = \sin\beta$, $|PB| = \sin\gamma$. Далее, $\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SQ}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SP}$ и в силу свойств скалярного произведения

$$\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SP} - \overrightarrow{SQ} \cdot \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SQ} \cdot \overrightarrow{SP},$$

откуда

$$\sin\beta\sin\gamma\cos\hat{A} = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma,$$

то есть

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\hat{A}.$$

Теорема доказана.

Если угол A — прямой, то $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$. Это утверждение иногда называют теоремой Пифагора для трехгранных углов.

Для доказательства второй теоремы косинусов удобно воспользоваться понятием полярного (или пополнительного) трехгранного угла.

Полярный угол*). Пусть дан трехгранный угол $SABC$. Проведем через его вершину S перпендикуляр к плоскости SBC и выберем на нем (из двух возможных) луч SA_1 так, чтобы угол ASA_1 был тупым. Иными словами, точки A и A_1 должны лежать по разные стороны от плоскости SBC. (Объясните сами, почему угол ASA_1 не может быть прямым.) Аналогично выбираются лучи SB_1 и SC_1: $(SB_1)\perp(SAC)$, $(SC_1)\perp(SAB)$, углы BSB_1 и CSC_1 — тупые. Трехгранный угол $SA_1B_1C_1$ и называют *полярным* к углу $SABC$.

Многие применения полярных углов основаны на следующих двух интересных свойствах:

1) угол, полярный к полярному, совпадает с исходным трехгранным углом;

2) для взаимно полярных трехгранных углов $SABC$ и $SA_1B_1C_1$

$$\alpha_1=\pi-\hat{A},\ \beta_1=\pi-\hat{B},\ \gamma_1=\pi-\hat{C}, \quad (4)$$

$$\hat{A}_1=\pi-\alpha,\ \hat{B}_1=\pi-\beta,\ \hat{C}_1=\pi-\gamma. \quad (5)$$

Докажите эти свойства самостоятельно (см. упражнение 5).

*) См. также «Квант», 1983, № 7, с. 53—54.

Доказательство второй теоремы косинусов. Запишем первую теорему косинусов для угла $SA_1B_1C_1$, полярного к данному углу $SABC$: $\cos\alpha_1=\cos\beta_1\cos\gamma_1+\sin\beta_1\sin\gamma_1\cos\hat{A}_1$, и воспользуемся соотношениями (4) и (5). Получим

$$\cos(\pi-\hat{A})=\cos(\pi-\hat{B})\cos(\pi-\hat{C})+\\+\sin(\pi-\hat{B})\sin(\pi-\hat{C})\cos(\pi-\alpha),$$

откуда немедленно вытекает (3).

Упражнения

1. Докажите, что биссектор выпуклого двугранного угла есть множество точек этого угла, равноудаленных от его граней.

2. Дан двугранный угол и прямая l, пересекающая его ребро и проходящая внутри него.

а) Пусть она не перпендикулярна ребру двугранного угла. Докажите, что через прямую l можно провести плоскость так, чтобы она была биссектрисой получившегося в сечении угла, и что такая плоскость единственна.

б) В каких случаях можно провести плоскость из п. а), если данная прямая перпендикулярна ребру?

3. Докажите, что три следующие плоскости имеют общую прямую:

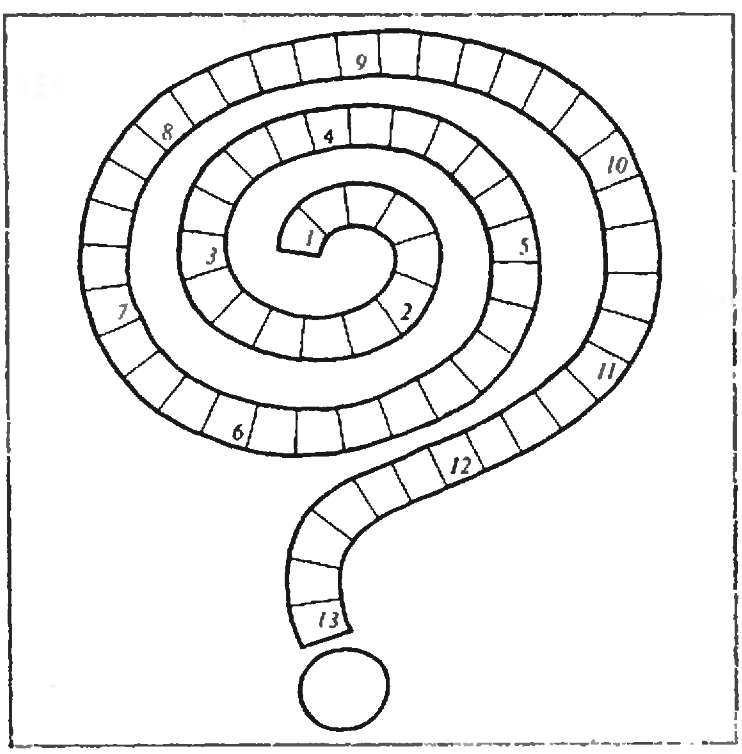
а) биссекторные плоскости двугранных углов трехгранного угла («биссектрисы»);

б) плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и биссектрисы противолежащих плоских углов («медианы»);

в) плоскости, проходящие перпендикулярно граням трехгранного угла через их биссектрисы («серединные перпендикуляры»).

(Окончание см. на с. 42)

Чайнворд



Заполните клетки буквами слов, заданными в списке 1—12 ниже, имея в виду, что последняя буква каждого предыдущего слова является началом следующего. Выписав буквы, стоящие на клетках с нечетными цифрами, вы получите имя выдающегося французского математика первой половины XIX века. Какого именно?

1. Плоская геометрическая фигура. 2. Выдающийся советский математик начала XX века. 3. Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону. 4. Высота боковой грани пирамиды. 5. Раздел математики. 6. Французский физик и математик. 7. Отрезок, соединяющий центр с точкой окружности. 8. Математические знаки. 9. Математический знак. 10. Французский математик и механик начала XIX века. 11. Тригонометрическая функция. 12. Часть круга, ограниченная дугой окружности и стягивающей ее хордой.

И. И. Картузов

Квант для младших школьников

Задачи

1. Сколько зеленых стаканчиков нужно поставить на левую чашку весов, чтобы изображенные на рисунке весы оказались в равновесии?

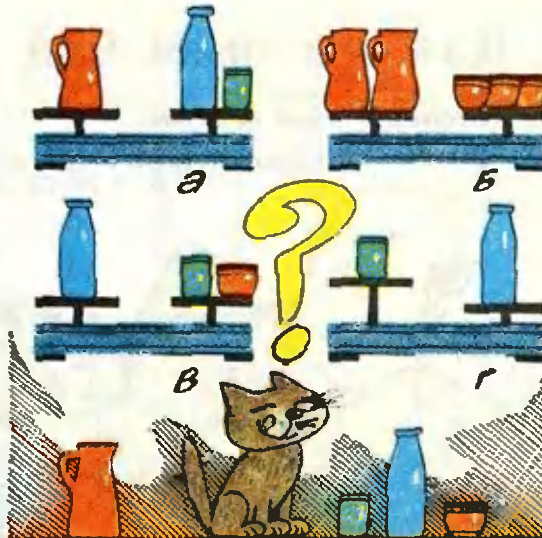
2. На клетчатой плоскости из точки A проведены три луча AB, AC и AD (см. рисунок). Докажите, что угол BAC равен углу CAD, используя свойства квадратной сетки.

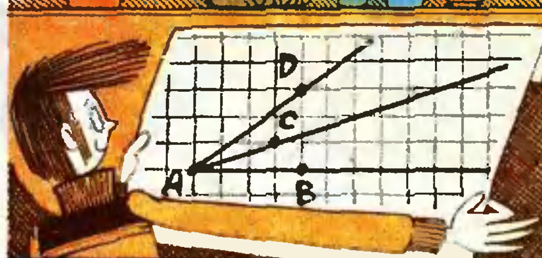
3. Недавно я нашел прошлогоднюю таблицу хоккейного турнира между 6-ми классами нашей школы. На ней сохранилась лишь небольшая часть записей. Попробуйте восстановить таблицу.

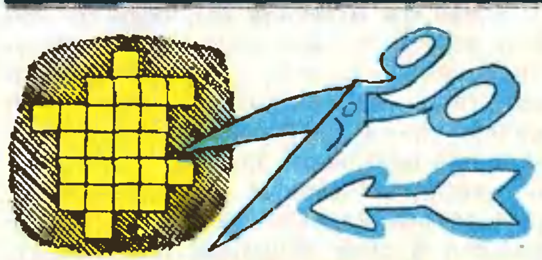
4. Фигуру, изображенную на рисунке, требуется разделить на 6 одинаковых частей, делая разрезы только по линиям сетки. Сколькими способами вам удастся это сделать?

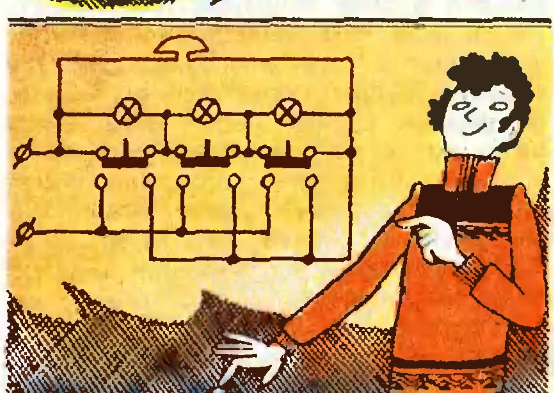
5. На рисунке изображена электрическая цепь со звонком, тремя лампочками и тремя кнопками, каждая из которых в свободном состоянии соединяет одну пару контактов, а в нажатом — другую. Цепь включена в сеть. Как она будет работать при нажатии на одну из кнопок?

Эти задачи предложили:
М. Коман (ЧССР) и Б. Н. Гордейчик.









Как мы пьем чай

(или о том, как надо решать качественные задачи по физике)

Доктор педагогических наук
Н. А. РОДИНА

В одном из выпусков телевизионной передачи «Что? Где? Когда?» «знатокам» был задан вопрос (приводим его в несколько уточненном виде):

«Уважаемые знатоки! Перед вами стоит стакан с чаем. Отпейте глоток и ответьте на вопрос: почему чай поднимается вверх, в то время как обычно вода льется вниз?»

Ответ, на котором остановились после минутного обсуждения знатоки, был такой: «воду мы всасываем». Он был признан правильным, и знатоки получили очко и награду — книгу.

А что бы ответили вы, если бы такой вопрос задали вам и не в телевизионной передаче, а на уроке физики? Ведь вопрос этот — настоящая качественная физическая задача (так условно называют задачи, в которых нет числовых данных и решение которых не обязательно должно быть выражено в виде формулы или числа). Но прежде чем думать над ответом, договоримся, что мы будем считать ответом. Решить качественную задачу по физике — это значит дать ответ на ее вопрос, обоснованный законами и правилами физической науки, выраженный принятыми в ней терминами, изложенный логично, так, чтобы каждый новый этап рассуждений являлся следствием предыдущего. Наверное, вы согласитесь, что с этой точки зрения нельзя считать данный знатоками ответ на «задачу о чае» удовлетворительным.

Так как же решать задачу? Давайте послушаем, как это делают два шестиклассника — Саша и Алеша.

Саша. Все дело в атмосферном давлении!

(Надо сказать, что Саша предпочитает отвечать на вопросы быстро.)

Алеша. Подожди, надо начать с самого начала — с условия: неподвижное тело — чай, находящийся в стакане,— пришло в движение. Мы знаем, что существует явление инерции — если на тело не действуют другие тела, не действует сила, то тело находится в покое или движется равномерно и прямолинейно. Тело не может само по себе изменить это состояние, и чай не может начать двигаться без действия силы.

Саша. Но ведь на все тела действует сила тяжести, она действует и на чай. Он не льется, не падает вниз, потому, что у стакана есть дно.

Алеша. Такое объяснение — у стакана есть дно — может дать и маленький ребенок. С точки зрения физики это — не объяснение. Кто учил физику, тот скажет: под действием веса чая дно прогибается, возникает сила упругости, направленная вверх. Она действует на чай и уравновешивает действующую на него силу тяжести.

Мы объяснили, почему чай был сначала неподвижен относительно стакана. Но в нашей задаче речь идет не о движении всего тела — воды в стакане — как целого, а о движении частей воды относительно друг друга. Такое движение вызывается разницей давлений в разных местах внутри жидкости или на ее поверхность.

Саша. Это похоже на сообщающиеся сосуды. Когда давление столбов жидкости в сосудах не одинаково, то один столб опускается, а другой поднимается. В нашей задаче один столб чая — это тот, который находится около рта, а второй — весь остальной чай. Пока мы не пьем чай, давление этих столбов воды одинаково, а как только...

Алеша. Нужно объяснить, почему те два столбика чая, о которых ты говорил, производят друг на друга одинаковое давление.

Саша. Это мы потом докажем, а теперь продолжим решение задачи. Итак, нам дано: чай в стакане был неподвижен, а когда человек коснулся стакана губами, чай начал подниматься.

Алеша. Во-первых, в физике есть более точные термины, и нужно сказать так: чай находился в покое относительно стакана; а во-вторых, нужно учесть все особенности явления. Ты не обратил внимания на то, что, если стакан неполный, приходится наклонять его, пока губы не коснутся чая. Потом человек делает вдох — и только тогда чай начинает подниматься.

Предлагаю такую, на мой взгляд — четкую, формулировку задачи.

Дано: в стакане находится чай; он покоится относительно стакана. Человек наклоняется к стакану или наклоняет его так, чтобы чай и губы соприкоснулись. Потом он делает вдох, и чай в этом месте поднимается, попадает человеку в рот. Остальная часть чая опускается. Вопрос задачи: почему та часть чая, которая касается губ человека, поднимается вверх?

Саша. Но ведь всего этого не было в условии задачи!

Алеша. Было. Просто нужно точно представить себе то явление, о котором говорится в условии. А после этого нужно «привнести» еще те данные, о которых, может быть, и не сказано, но которые можно получить из наблюдений или при продумывании задачи. По-моему, правильное и до конца понятое условие задачи — это уже начало решения.

Саша. Тогда давай продолжим решение. Человек делает вдох, то есть втягивает в себя воздух,...

Алеша. Подожди. Что значит — втягивает воздух? Вдох человек делает так: усилием мышц он расширяет свою грудную клетку, объем его легких увеличивается, воздух в них расширяется. От этого плотность воздуха в легких и в сообщающейся с ними полости рта уменьшается, и давление его становится меньше, чем давление наружного воздуха. Воздух перемещается из места более высокого давления, то есть снаружи, в область более низкого, то есть в легкие.

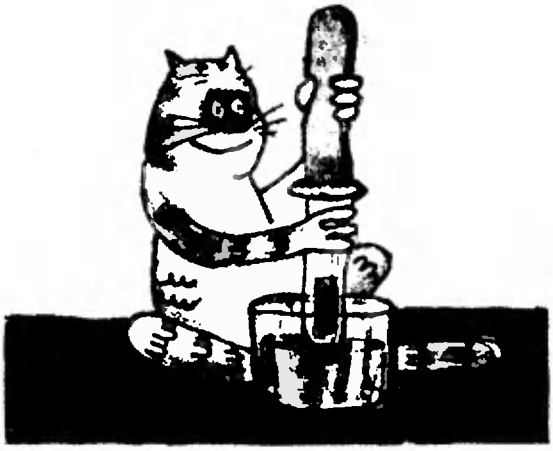
Саша. А так как человек, делая вдох, касается губами поверхности чая, причем касается плотно, то происходит вот что: на всю поверхность чая действует атмосферное давление, а на поверхность, примыкающую к губам человека, действует давление воздуха, находящегося в полости рта, а оно меньше атмосферного. Все ясно! Я же говорил, что причина всего — атмосферное давление! Опять скажешь: подожди?

Алеша. Скажу. Почему атмосферное давление, про которое мы знаем, что оно действует на чай сверху вниз, заставляет чай подниматься вверх?

Саша. Потому что жидкости и газы передают давление во всех направлениях без изменения. Это — закон Паскаля.

Алеша. По-моему, мы уже можем сформулировать окончательное решение задачи.

Чай в стакане был неподвижен, так как равнодействующая приложенных к нему сил — силы тяжести и силы упругости дна стакана — равна нулю — ведь значения этих сил равны, направлены силы по одной прямой в противоположные стороны. Неподвижны относительно друг друга были и части жидкости (чая), так как давление внутри нее и давление на ее поверхность было



везде одинаково. Когда человек приблизил вплотиую губы к какому-то месту поверхности чая и сделал вдох, то есть расширил легкие, в этом месте давление воздуха на поверхность чая стало меньше, чем действующее на остальную часть поверхности атмосферное давление. Разница давлений заставила чай перемещаться в область более низкого давления — столбик чая, находящегося под губами человека, поднялся, а остальной чай опустился.

Мне кажется, мы дали образцовое решение задачи.

Алеша. Давай спросим у автора статьи, как можно оценить наше решение.

Автор. Я учительница физики, и шестиклассникам Саше и Алеше поставила бы за данное ими решение задачи оценку «пять». Решение считаю очень хорошим. Мне очень понравилось, что по ходу рассуждений у Алеши все время возникали «попутные» вопросы. Ведь ответы на них и были этапами решения всей задачи.

Но является ли это решение образцовым? В зависимости от того, каковы были практические цели решения задачи, каковы знания решающего ее человека, решение можно оценить по-разному. Но его можно улучшать, пожалуй, беспредельно. Например, можно было бы указать, почему и при каких условиях плотность воздуха изменяется при изменении его объема, причем, дать объяснение на основании знаний о молекулах; можно более подробно разъяснить роль закона Паскаля в наблюдаемом явлении и т. д.

Эти дополнительные объяснения и те, о которых говорили Саша и Алеша, решая задачу, советую читателям продумать.

В заключение предлагаю вам самостоятельно решить такую качественную задачу.

Все знают, как пользуются пипеткой. А почему поднимается жидкость в пипетке? Будет ли пипетка «работать», если вместо резинового баллончика на стеклянную трубку надеть маленький полиэтиленовый мешочек?

Наша анкета

Дорогие читатели! Для улучшения работы журнала нам очень важно знать ваше мнение о публикуемых в «Кванте» материалах. Просим ответить на вопросы нашей анкеты.

1. Ваши фамилия, имя, отчество, возраст, место учебы (город, школа, класс) или работы (профессия, специальность), круг интересов (математика, физика).
2. С какого года вы читаете «Квант»? Ваше отношение к журналу в целом.
3. Сколько человек читают ваши номера «Кванта»?
4. Материалы каких рубрик журнала вас интересуют и доступны для вас? Какие не интересуют или не нравятся?
5. Назовите 2 — 3 лучшие статьи (за 1983 — 1984 годы) из разных рубрик журнала.
6. Справляетесь ли вы с задачами из Задачника «Кванта»?
7. Статьи на какие темы вы хотели бы видеть в «Кванте» в 1985 году?
8. Дополнительные замечания и пожелания.

Ответы высылайте на отдельном листе бумаги, сохранив нумерацию вопросов, до 20 февраля 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, дом 32/1, «Квант», «Анкета».

Текст А. П. Савина, рисунки Э. В. Назарова

задачник Кванта

Задачи

M896 — M900; Ф908 — Ф912

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 28 февраля 1985 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М896, М897» или «Ф908». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М896. Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что окружность с диаметром AB касается прямой CD. Докажите, что окружность с диаметром CD касается прямой AB тогда и только тогда, когда прямые BC и AD параллельны.

М897. Найдите хотя бы одну пару целых чисел (x, y) такую, что число

$$(x+y)^7-x^7-y^7$$

делится на 7^7, а число $(x+y)xy$ не делится на 7.

М898*. Для нечетных натуральных чисел $a<b<c<d$ выполнены условия: $ad=bc$; $a+d=2^k$ и $b+c=2^m$, где k и m — некоторые натуральные числа. Докажите, что

а) $a=1$;

б) для каждого $m\geqslant 3$ существует, причем только один, набор чисел a, b, c, d, k, удовлетворяющий этим условиям.

М899. Назовем *округлением* нецелого числа x замену его на одно из двух ближайших целых чисел ($[x]$ или $[x]+1$).

а) Докажите, что в любом равенстве

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_n$$

все нецелые слагаемые можно округлить так, что равенство останется верным.

б) В таблицу из m строк и n столбцов записаны некоторые числа, причем суммы их по строкам $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и по столбцам $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — целые числа. Докажите, что все нецелые числа в таблице можно округлить так, что суммы по строкам и столбцам не изменятся.

в)* Пусть теперь суммы $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ не обязательно целые. Докажите, что нецелые числа в таблице можно округлить так, что их суммы по строкам и столбцам будут округлением соответствующих сумм $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

А. П. Савин

М900. Может ли проекция на плоскость выпуклого многогранника с 6 гранями быть а) 8-угольником? б) 9-угольником?

в)* Какое наибольшее число сторон может иметь проекция выпуклого многогранника с n гранями?

М. Д. Ковалев

Ф908. Самолеты летят по одной прямой навстречу друг другу с одинаковой скоростью v. Предельная дальность обнаружения — l. Один самолет после обнаружения другого совершает разворот, не меняя значения скорости, и летит параллельно второму самолету, который продолжает лететь со скоростью $\vec{v}$. Потеряют ли самолеты друг друга из виду после разворота, если ускорение при повороте равно a? Спустя какое время после обнаружения надо начинать разворот, чтобы в конце разворота расстояние между самолетами оказалось наименьшим?

И. И. Воробьев

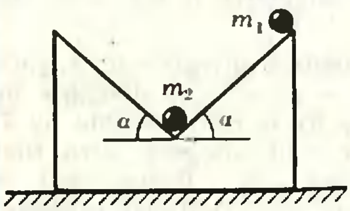


Рис. 1.

Ф909. На невесомой горке, образованной двумя гладкими плоскостями, каждая из которых составляет угол α с горизонтальной плоскостью (рис. 1), находятся два шарика. Горка может без трения скользить по горизонтальной плоскости. Верхний шарик, масса которого m_1, отпускают. При каком условии нижний шарик, масса которого m_2, начнет после этого «забираться» на горку?

А. И. Буздин

Ф910. На цилиндр радиуса R одето равномерно растянутое резиновое кольцо массы m. Длина кольца в нерастянутом состоянии равна πR, жесткость резинки — k. Цилиндр начинают раскручивать с постоянным угловым ускорением β. Через какое время кольцо начнет проскальзывать относительно цилиндра, если коэффициент трения кольца о цилиндр равен μ? Чему будет равна при этом угловая скорость кольца?

А. А. Липидес

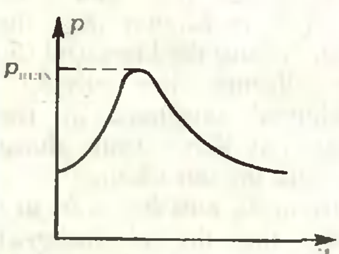


Рис. 2.

Ф911. На рисунке 2 приведен график изменения давления пороховых газов в стволе ружья по мере продвижения пули в стволе. Определите скорость сгорания пороха (в кг/с) при давлении p_{max}, если скорость пули в этот момент равна v. Площадь поперечного сечения ствола равна s. Температуру пороховых газов считать постоянной. Известно, что пороховые газы, образующиеся при сгорании массы пороха M, в объеме V_0 создают давление p_0.

Л. Г. Маркович

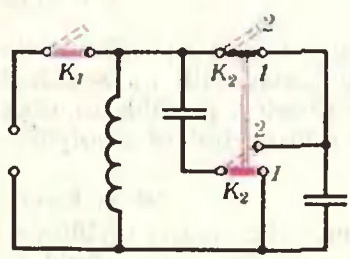


Рис. 3.

Ф912. В катушке из сверхпроводящего провода создают постоянный ток, подключив ее к источнику тока через ключ K_1 (рис. 3). После этого к концам катушки подключают батарею из двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Ключ K_1 размыкают, после чего ток начинает течь через конденсаторы, заряжая их. В момент времени, когда напряжение на конденсаторах максимально, а ток равен нулю, двойной ключ K_2 перебрасывают из положения *1* в положение *2*, так что конденсаторы оказываются включенными последовательно, а напряжение на катушке удваивается. Поскольку индуктивность катушки не изменилась, а напряжение возросло, максимальный ток через катушку, а значит, и запасенная энергия будут больше первоначальных. Найдите ошибку в приведенных рассуждениях.

Д. В. Павлов

Problems

M896—M900; P908—P912

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 28th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M896. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral such that the line CD is tangent to the circle on AB as a diameter. Prove that the line AB is a tangent to the circle on CD as a diameter if the lines BC and AD are parallel.

M897. Find one pair of positive integers a, b such that the number $(a+b)^7-a^7-b^7$ is divisible by 7^7 and the number $ab(a+b)$ is not divisible by 7.

M898*. Let a, b, c, d be odd integers such that $0<a<b<c<d$ and $ad=bc$. Prove that if $a+b=2^k$, $b+c=2^m$ for some natural numbers k and m, then

a) $a=1$,

b) for each $m\geqslant 3$ there exists one and only one set of integers a, b, c, d satisfying these conditions.

M899. Let us call either of two integers closest to a non-integral number x (i.e. $[x]$ or $[x]+1$) *a round-off* of x.

a) Prove that all non-integral summands in any equality of the form

$$x_1+\ldots+x_m=y_1+\ldots+y_n$$

may be rounded off so that the equality remains true.

b) Some numbers are written down in a table with m lines and n columns, and it is known that the sums $a_1, \ldots, a_m$ of these numbers along the lines and the sums $b_1, \ldots, b_n$ along the columns are integers. Prove that all the non-integral numbers in the table may be rounded off so that their sums along the lines and along the columns do not change.

c)* Now suppose the sums $a_1, \ldots, a_m$ and $b_1, \ldots, b_n$ are not necessarily integers. Prove that the non-integral numbers in the table may be rounded off so that their sums along the lines and along the columns will be the round-offs of the corresponding sums $a_1, \ldots, a_n$ and $b_1, \ldots, b_n$.

A. P. Savin

M900. Can a projection of a convex polyhedron with 6 faces on a plane be a polygon with a) 8 sides? b) 9 sides? c)* What is the greatest possible number of sides of a polygon that is a projection of a polyhedron with n faces?

M. D. Kovalev

P908. Two planes fly along the same rectilinear course towards each other with the same speed v. The planes can detect each other from the distance l. After having detected the other plane, one of the planes makes a 180° turn at the same speed and flies parallel to the other plane, which continues flying with velocity $\vec{v}$. Will the planes then be located outside the range of detection, if the accelleration during the turn is a? How long after detecting the other plane must the maneuvering plane begin its turn in order to make the distance between the planes at the end of the turn minimal?

I. I. Vorobiev

P909. Two ball bearings are placed on a "hill" whose sides are smooth planes forming the same angle α with the horizontal plane (Fig. 1). The hill can slide without friction along the horizontal plane. Then the upper ball bearing, whose mass is m_1, is released. Under what condition will the other ball bearing, whose mass is m_2, begin to "climb" up the hill?

A. I. Buzdin

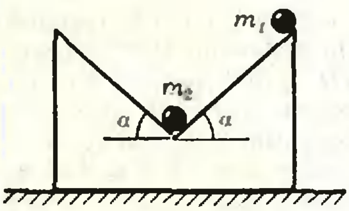


Fig. 1.

P910. A uniformely streched rubber band of mass m is slipped on a cylinder of radius R. The length of the rubber band (in unstretched state) equals πR, the elasticity of rubber is k. The cylinder is then rotated with constant angular acceleration β. How much time later will the rubber band begin to slip down the cylinder if the friction coefficient is μ? What will the angular velocity of the cylinder then equal?

A. A. Lupides

P911. Figure 2 shows the plot of gas pressure inside the barrel of a shotgun as the bullet moves along the barrel. Determine the speed of powder burning (in kg/s) at the pressure p_{max} if the velocity of the bullet at that moment is v. The area of the barrel's perpendicular section is s. The gas temperature may be assumed constant. It is known that burning powder gas generated by the combustion of powder of mass M yields pressure p_0 in a volume V.

L. G. Markovich

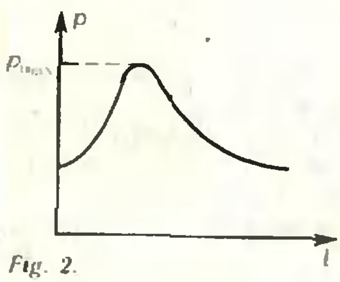


Fig. 2.

P912. Direct current is sent through a coil made of superconducting wire by turning on the switch K_1 connecting it to the source (Fig. 3). Then a battery consisting of two parallel capacitors is connected to the extremities of the coil. The switch K_1 is turned off, and then current flows through the capacitors, charging them. At the moment of time when the tension on the capacitors is maximal while the current is zero, the double switch K_2 is thrown over from position *1* to position *2*, so that the capacitors are then in sequence, and the tension on the coil doubles. Since the inductivity of the coil does not change while the tension increases, the maximal current through the coil and hence the stored energy will be greater than before we switched over K_2.
Find the mistake in the above argument.

D. V. Pavlov

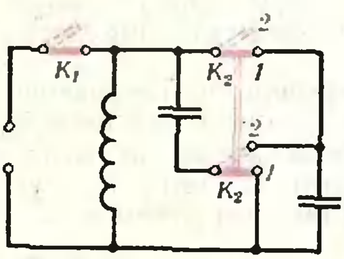


Fig. 3.

Решения задач

М881—М883; Ф890, Ф892, Ф893*

М881. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки плоскости до трех вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой вершины.

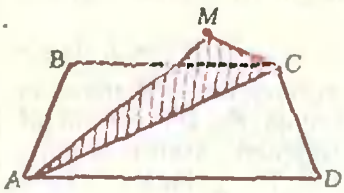


Рис. 1.

Рис. 2. M

Пусть, для определенности, MA — наибольшее из расстояний от точки M до вершин равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 1). По неравенству треугольника $MA \leqslant AC + MC$ и $BD \leqslant MB + MD$, причем для любой точки M плоскости хотя бы одно из этих неравенств строгое. Складывая неравенства и учитывая, что $AC = BD$, получаем $MA \leqslant MB + MC + MD$.

Это решение имеет красивую геометрическую интерпретацию: прикладывая друг к другу треугольники AMC и BMD так, чтобы их равные стороны AC и BD совместились, мы получаем четырехугольник (рис. 2); утверждение задачи сводится к тому, что каждая его сторона меньше суммы остальных (это утверждение выполняется и в тех случаях, когда один или оба треугольника AMC, BMD вырождаются в отрезки).

С. Е. Рукшин

◆

М882. Сумма трех целых чисел a, b и c равна 0. Докажите, что число $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ — квадрат целого числа.

Пользуясь условием $a + b + c = 0$, получаем, что $a^4 + b^4 + c^4 = a^2(b+c)^2 + b^2(c+a)^2 + c^2(a+b)^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2abc\,(a+b+c) = (a^2+b^2+c^2)^2 - a^4 - b^4 - c^4$, откуда $2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = (a^2+b^2+c^2)^2$.

Л. Д. Курляндчик, С. В. Фомин

◆

М883. В какое наименьшее число цветов нужно раскрасить клетки бесконечного листа клетчатой бумаги, чтобы
а) любые две клетки на расстоянии 6 были покрашены в разные цвета? (Расстояние между клетками — наименьшее число линий сетки, горизонтальных и вертикальных, которые должна пересечь ладья на пути из одной клетки в другую.)
б) любые четыре клетки, образующие фигуру в форме буквы Г (рис. 1), были покрашены в четыре разных цвета?

а) Ответ: в 4 цвета. Пример раскраски клетчатой плоскости в 4 цвета, при которой любые две клетки на расстоянии 6 окрашены в разные цвета, представлен на рисунке 2.

Чтобы доказать, что меньшим числом цветов обойтись нельзя, достаточно рассмотреть 4 клетки, показанные на рисунке 3. Любые две из них расположены на расстоянии 6 друг от друга и, следовательно, все они должны быть окрашены в разные цвета.

б) Ответ: в 8 цветов. Схема доказательства повторяет пункт а): надо привести пример 8-цвет-

*) Решение задачи Ф891 см. в заметке «Электроемкость — свойство проводника» на с. 40.

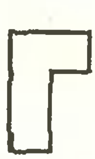


Рис. 1.

Рис. 2.

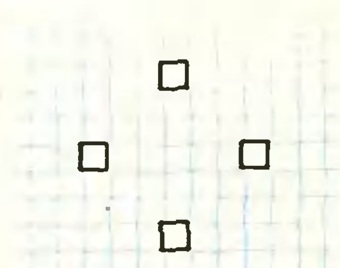


Рис. 3.

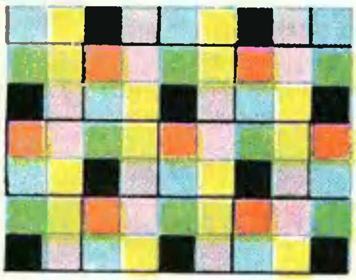


Рис. 4.

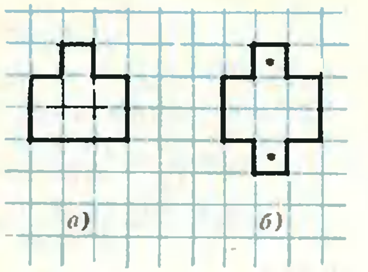


Рис. 5.

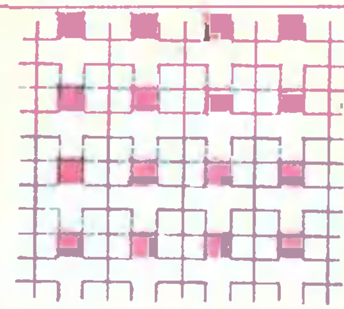


Рис. 6.

ной раскраски (он показан на рисунке 4) и объяснить, почему семи цветов недостаточно.

Рассмотрим 7-клеточную фигуру на рисунке 5,а. Любые две ее клетки можно покрыть одной «буквой Г» из четырех клеток, поэтому все ее клетки должны быть разноцветными. Следовательно, в фигуре на рисунке 5,б клетки, отмеченные звездочками, при 7-цветной раскраске должны быть одного цвета (потому что остальные ее 6 клеток нужно покрасить в 6 разных цветов). Тогда, очевидно, в любой бесконечной решетке с шагом в 3 клетки (рис. 6) все клетки должны быть окрашены одним цветом, а остальные клетки плоскости — другими цветами. Но в таком случае потребуется уже не 7, а 9 цветов (по числу таких решеток, покрывающих плоскость).

А. Г. Печковский, И. В. Итенберг

◆

Ф890. *Кристаллы железа при температуре до 910 °C состоят из элементарных ячеек, имеющих форму куба с длиной ребра $a_1 = 2{,}87\cdot 10^{-10}$ м. Атомы железа располагаются в вершинах куба и в его центре (рис. 1). Такая разновидность элемента — с объемноцентрированной кубической решеткой — называется альфа-железом (Fe_α). При температуре выше 910 °C ячейки кристалла железа представляют собой гранецентрированный куб с длиной ребра $a_2 = 3{,}63\cdot 10^{-10}$ м. Атомы располагаются в вершинах куба и в центрах его граней (рис. 2). Такая разновидность элемента называется гамма-железом (Fe_γ). Одинакова ли плотность железа в этих состояниях? Относительная атомная масса железа $\mu = 55{,}847$.*

Определим сначала, сколько атомов элемента приходится на каждую ячейку-куб. Если мысленно вырезать один элементарный кубик, то в каждой его вершине будет по 1/8 атома (каждая вершина — общая для 8 кубиков). Таких вершин 8. Следовательно, на ячейку-куб Fe_α приходится $\frac{1}{8}\cdot 8 + 1 = 2$ атома (с учетом центрального атома).

На элементарную ячейку Fe_γ приходится $\frac{1}{8}\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 6 = 4$ атома, так как на каждую грань приходится по $\frac{1}{2}$ атома, а граней — 6.

На ячейку альфа-железа приходится объем

$$V_\alpha = (2{,}87\cdot 10^{-10})^3\ \text{м}^3 \approx 23{,}64\cdot 10^{-30}\ \text{м}^3,$$

на ячейку гамма-железа —

$$V_\gamma = (3{,}63\cdot 10^{-10})^3\ \text{м}^3 \approx 47{,}83\cdot 10^{-30}\ \text{м}^3.$$

Масса одного атома железа—

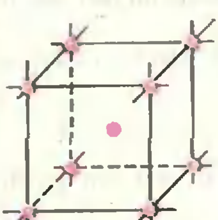


Рис. 1.

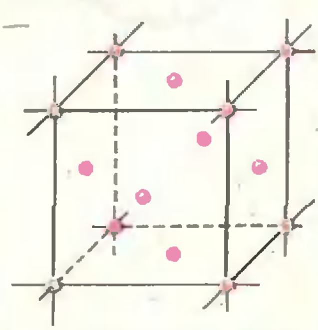


Рис. 2.

$$m=\frac{55{,}847\cdot 10^{-3}}{6{,}02\cdot 10^{23}}\ кг\approx 9{,}28\cdot 10^{-26}\ кг$$

($6{,}02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро). Таким образом, плотности Fe_α и Fe_γ равны, соответственно,

$$\varrho_\alpha=\frac{2m}{V_\alpha}\approx\frac{2\cdot 9{,}28\cdot 10^{-26}}{23{,}64\cdot 10^{-30}}\ кг/м^3\approx 7850\ кг/м^3,$$

$$\varrho_\gamma=\frac{4m}{V_\gamma}\approx\frac{4\cdot 9{,}28\cdot 10^{-26}}{47{,}83\cdot 10^{-30}}\ кг/м^3\approx 7760\ кг/м^3.$$

и $\varrho_\alpha>\varrho_\gamma$

И. М. Низамов

Ф892. *На стеклянный шарик радиуса R падает луч света, направленный вдоль радиуса. На расстоянии r от центра шарика свет рассеивается равномерно по всем направлениям на маленьком воздушном пузырьке, образовавшемся при изготовлении шарика. Определить зависимость доли выходящего из шарика света от r. Показатель преломления стекла n. Потерями света в стекле пренебречь.*

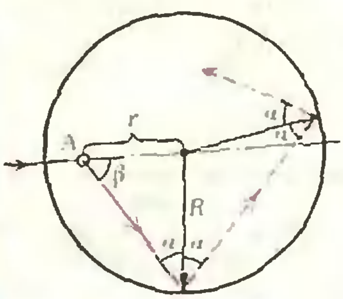


Рис. 1.

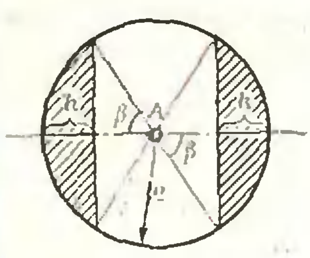


Рис. 2.

В результате рассеяния на пузырьке луч отклоняется на угол β от своего начального направления и падает на границу раздела стекло — воздух под углом α (рис. 1). Если при этом оказывается, что $\sin\alpha>\frac{1}{n}$, то на границе происходит полное внутреннее отражение. Второй раз луч упадет на границу стекло — воздух снова под углом α, снова произойдет полное внутреннее отражение, и т. д. Таким образом, лучи, испытавшие после рассеяния полное внутреннее отражение на границе стекло — воздух не выйдут из шарика. Найдем, при каких значениях угла отклонения β это происходит.

Согласно теореме синусов (см. рис. 1),

$$\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin\beta}.$$

Подставляя $\sin\alpha$, находим:

$$\beta_1=\arcsin\left(\frac{R}{rn}\right), \tag{1}$$

$$\beta_2=\pi-\arcsin\left(\frac{R}{rn}\right). \tag{2}$$

Полное внутреннее отражение испытывают все лучи, отклоняющиеся при рассеянии на углы β, удовлетворяющие условию

$$\beta_1<\beta<\beta_2.$$

Все остальные лучи после рассеяния выходят из шарика.

Так как лучи рассеиваются на пузырьке равномерно по всем направлениям, доля η света, выходящего из шарика, равна отношению площадей двух сферических сегментов (на рисунке 2 они заштрихованы) к полной площади сферы произвольного радиуса, центр которой совпадает с центром пузырька:

$$\eta=\frac{2\cdot 2\pi\varrho h}{4\pi\varrho^2}=\frac{h}{\varrho}.$$

Как видно из рисунка 2,

$$h=\varrho(1-\cos\beta)=\varrho\left(1-\sqrt{1-\sin^2\beta}\right)=$$

$$=\varrho\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{R}{rn}\right)^2}\right).$$

Таким образом,

$$\eta=1-\sqrt{1-\frac{1}{r^2}\left(\frac{R}{n}\right)^2}. \tag{3}$$

При $r<\frac{R}{n}$ выражения (1) — (3) теряют смысл — в этом случае ни один из лучей, рассеянных пузырьком, не испытывает полного внутреннего отражения, и весь свет выходит из шарика.

А. А. Лапидес

◆

Ф893. *Для измерения распределения скорости ветра на высоте используются шары-зонды, которые имеют постоянную вертикальную скорость подъема. При запуске такого шара была получена зависимость угла α возвышения шара над горизонтом от времени t (рис. 1). Полагая скорость ветра у поверхности Земли равной нулю, а расстояние от места запуска шара до наблюдателя равным L=1 км (рис. 2), определить высоту подъема шара через 7 минут после запуска и скорость ветра на этой высоте.*

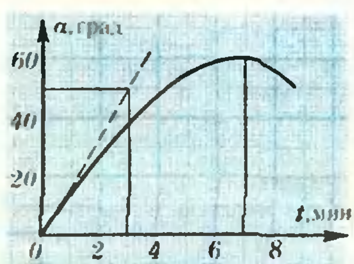


Рис. 1.

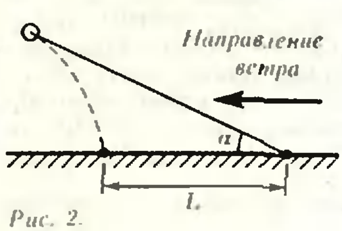


Рис. 2.

В начальный момент времени вектор $\vec{v}$ скорости шара направлен вертикально. Поскольку скорость ветра вблизи поверхности Земли равну нулю, скорость шара при малых высотах подъема (и при малых $\alpha(t)$) постоянна и равна $\vec{v}$. Следовательно, при малых α зависимость $\alpha(t)$ определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha(t)\approx\alpha(t)\approx\frac{vt}{L}. \qquad (1)$$

Пусть за малый промежуток времени Δt угол возвышения изменился на $\Delta\alpha$. Из (1) следует, что $\Delta\alpha/\Delta t=v/L$, откуда

$$v=L\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Отношение $\Delta\alpha/\Delta t$ может быть найдено по графику зависимости $\alpha(t)$. Оно определяется наклоном касательной к кривой $\alpha(t)$ в точке $\alpha=0$ (см. рис. 1). Выразив α в радианах, найдем из графика значение $\Delta\alpha/\Delta t$ и, подставив его в (2), найдем скорость шара-зонда при малых α:

$$v=10^3\frac{50\cdot 2\pi}{360\cdot 3\cdot 60}\text{ м/с}\approx 4{,}85\text{ м/с}.$$

(Точность определения v зависит от точности построения касательной. Для данного на рисунке 1 масштаба значения v лежат в пределах $4{,}8\div 5{,}0$ м/с.)

За время $t_1=7$ мин$=420$ с шар поднимается на высоту

$$h=vt_1\approx 2000\text{ м}.$$

Как видно из рисунка 1, в этот момент $\alpha(t)$ достигает максимального значения. Это означает, что на высоте h вектор скорости шара направлен вдоль луча зрения, проведенного из точки наблюдения. Следовательно, угол наклона вектора $\vec{v}_h$ к горизонту равен $\alpha(t_1)=60°$. Вертикальная проекция v_h равна $v=4{,}85$ м/с, а горизонтальная — это скорость u_h ветра на высоте h. Значит,

$$u_h=v\operatorname{ctg}60°\approx\frac{4{,}85}{\sqrt{3}}\text{ м/с}\approx 2{,}8\text{ м/с}.$$

В. В. Можаев

Электроемкость — свойство проводника

(к решению задачи Ф891)

Известно, что заряд, сообщенный проводящему телу, располагается на его поверхности. При этом распределение заряда по поверхности таково, что напряженность электрического поля внутри проводника в любой точке равна нулю. Проводник представляет собой эквипотенциальную область (любая поверхность, лежащая целиком внутри проводника, является эквипотенциальной). Линии напряженности электрического поля перпендикулярны поверхности проводника.

Электрическое поле, создаваемое проводником с зарядом q, в любой точке пространства определяется суперпозицией полей, создаваемых отдельными заряженными участками проводника. Каждый такой участок несет заряд $\Delta q_i = \sigma_i \cdot \Delta s_i$, где Δs_i — площадь участка, σ_i — поверхностная плотность зарядов на данном участке проводника. Что произойдет, если проводнику сообщить заряд в n раз больший (или меньший), чем q? Плотность заряда в любой точке поверхности проводника изменится в n раз.*) Напряженность поля, создаваемого проводником в каждой точке пространства, изменится в n раз. Это означает, что элементарная работа, совершаемая электрическим полем над единичным положительным зарядом, на любом участке изменится в n раз. Во столько же раз изменится работа электрических сил, действующих на единичный положительный заряд при перемещении его от поверхности проводника до бесконечности — то есть потенциал φ проводника.

Итак, при изменении заряда проводника в n раз во столько же раз изменяется потенциал проводника, и следовательно, отношение q/φ остается неизменным. Величину

$$C=\frac{q}{\varphi}$$

называют электроемкостью (или просто емкостью) уединенного проводника. Чем больший заряд можно сообщить проводнику при заданном потенциале, тем больше емкость проводника. Можно сказать, что электроемкость характеризует способность проводника накапливать заряд при данном потенциале. Для данного проводника (проводника с емкостью C) существует единственное значение заряда q, который нужно сообщить проводнику для того, чтобы его потенциал был равен φ.

Электроемкость однозначно определяется формой проводника, его размерами и электрическими свойствами окружающей среды.

Если размеры проводника подобно уменьшить в n раз, то и емкость проводника уменьшится в n раз. Покажем это.

Пусть на уединенном проводнике N с емкостью C имеется заряд q; потенциал проводника равен, очевидно, $\varphi=q/C$. Сообщим проводнику дополнительно небольшой заряд Δq, принеся его на поверхность проводника из бесконечности. Работа, которая будет совершена электрическим полем при перемещении заряда Δq, равна

$$\Delta A=-\varphi\cdot\Delta q=-\frac{q}{C}\cdot\Delta q=-\Delta\left(\frac{q^2}{2C}\right).$$

Эта работа идет на изменение потенциальной энергии проводника. Следовательно, с добавлением заряда Δq потенциальная энергия проводника изменилась на

$$\Delta U=-\Delta A=\Delta\left(\frac{q^2}{2C}\right).$$

Но это значит, что потенциальная энергия проводника с емкостью C, которому сообщен заряд q, равна

$$U=\frac{q^2}{2C}. \qquad (*)$$

Можно сказать, что эта энергия обусловлена силами отталкивания, действующими между одноименно заряженными отдельными участками поверхности проводника и представляет собой потенциальную энергию взаимодействия одноименных точечных зарядов, распределенных по поверхности проводника. Два элементарных участка поверхности проводника N (рис. 1, *а*) вносят в полную потенциальную энергию вклад

$$\Delta U_{12}=k\frac{\Delta q_1\cdot\Delta q_2}{R_{12}},$$

где Δq_1, Δq_2 — заряды этих участков, R_{12} — расстояние между ними.

А теперь обратимся к уединенному проводнику N', линейные размеры которого в n раз меньше, чем у проводника N. Что можно сказать об электроемкости C' этого проводника?

Пусть проводник N' имеет тот же заряд q, что и проводник N. Рассмотрим два элементарных участка поверхности проводника N' (рис. 1, *б*), подобные участкам *1* и *2* проводника N. Вклад, который дает взаимодействие зарядов этих участков в полную потенциальную энергию, равен

$$\Delta U'_{12}=k\frac{\Delta q'_1\cdot\Delta q'_2}{R'_{12}}.$$

Из подобия линейных размеров проводников N' и N следует, что площади участков *1'* и *1*, *2'* и *2* связаны соотношениями $\Delta s'_1=\Delta s_1/n^2$, $\Delta s'_2=\Delta s_2/n^2$. Из теоремы единственности можно получить связь между плотностями зарядов на этих участках: $\sigma'_1=\sigma_1 n^2$, $\sigma'_2=\sigma_2 n^2$. Следовательно, $\Delta q'_1=\sigma'_1\cdot\Delta s'_1=\Delta q_1$ и $\Delta q'_2=\sigma'_2\cdot\Delta s'_2=\Delta q_2$. А поскольку $R'_{12}=R_{12}/n$, $\dfrac{\Delta U_{12}}{\Delta U'_{12}}=\dfrac{1}{n}$, то есть $\Delta U'_{12}=n\cdot\Delta U_{12}$. Следовательно, и полная потенциальная энергия проводника N' больше потенциальной энергии провод-

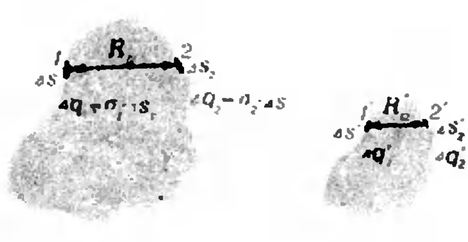


Рис. 1. *а)* *б)*

---

*) Это следует из так называемой теоремы единственности, согласно которой существует единственное равновесное распределение заряда на проводнике. (См. статью «О теореме единственности в электростатике» в «Кванте» № 2 за 1982 год.)

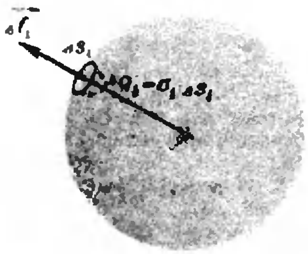


Рис. 2.

ника W в n раз. А как мы показали (см. (*)), $U=q^2/2C$; значит, емкость C' в n раз меньше емкости C.

Итак, при уменьшении размеров проводника в n раз его электроемкость уменьшается во столько же раз.

Рассмотрим теперь, как изменение формы проводника влияет на его емкость (и ответим на вопрос задачи **Ф891**: как изменится электроемкость проводящей сферы, если в ней сделать вмятину?).

На заряд $\Delta q_i = \sigma_i \cdot \Delta s_i$, сосредоточенный на малом участке Δs_i заряженного проводника (рис. 2), действуют силы отталкивания со стороны остальных зарядов, лежащих на поверхности проводника. Результирующая всех этих сил — $\Delta\vec{f}_i$ — перпендикулярна поверхности участка. Чтобы на месте этого участка сделать вмятину, нам надо совершить работу против силы $\Delta\vec{f}_i$ (мы говорим только о работе против электростатических сил). А это приведет к увеличению электрической потенциальной энергии проводника. Поскольку заряд проводника остается прежним, увеличение энергии означает уменьшение емкости. Если же какой-нибудь участок проводника «выпучится», это приведет к увеличению электроемкости.

Наконец, скажем, как зависит электроемкость проводника от электрических свойств окружающей его среды. Если заряженный проводник находится в среде с диэлектрической проницаемостью ε, то в любой точке пространства (вне проводника) напряженность поля, создаваемого зарядом проводника, в ε раз меньше, чем это было бы в вакууме. Значит, и потенциал проводника в такой среде в ε раз меньше, чем в вакууме, а электроемкость — в ε раз больше.

Р. Л. Энфиаджян

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М851—М865, Ф863—Ф877, справились с задачами М851, М852, М854, М862 и Ф864, Ф869, Ф873, Ф874. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

М. Александров (Москва) 52, 57, 60, 61, 63, 64; *Р. Алексеев* (Ленинград) 61, 65; *Г. Андреева* (Пермь) 57; *В. Апальков* (Харьков) 57; *А. Артюх* (Чернигов) 56; *А. Асрян* (с. Грибоедов Арм. ССР) 53; *Р. Бабаев* (Баку) 57, 63; *С. Балтова* (Старозагорский округ, НРБ) 60; *А. Барабаш* (Киев) 53, 56, 57; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 53, 57, 61, 63, 65; *М. Барон* (Ленинград) 59; *А. Батырев* (Москва) 53, 57, 59, 61, 63; *Ю. Бекетов* (Ленинград) 53, 57; *М. Бенце* (Сацеле, СРР) 65; *И. Бирман* (Донецк) 57, 61, 63; *А. Бирюков* (Саратов) 55, 63; *И. Бордовский* (Трубчевск) 55; *М. Будулуца* (Невельск) 57; *В. Бурковский* (В.— Коровинцы Житомирской обл). 53; *А. Бурлука* (Ростов) 57; *В. Васильев* (Воронеж) 53; *А. Ващенко* (Дзержинск) 61; *С. Велесько* (Минск) 61, 63; *Э. Велиметов* (Баку) 53, 59; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) 53, 55, 57—60; *И. Вехтер* (Кишинев) 53; *Р. Видгоп* (Баку) 63; *А. Вишик* (Москва) 53; *А. Габриелян* (Лутугино) 57; *Т. Газарян* (Ереван) 53, 57—61, 63; *Т. Гамбарян* (Баку) 53; *Р. Гендлер* (Ташкент) 53, 55, 57, 59—61, 63—65; *Э. Годзданкер* (Витебск) 53; *Е. Гольдберг* (Ленинград) 59; *Г. Горбатенко* (Арзамас) 55; *В. Гордиюк* (Киев) 53, 56; *Ю. Грабовский* (Киев) 53; *Н. Григорьева* (Андропов) 57, 61, 63; *И. Гуров* (Баку) 64; *А. Давтян* (п. Мецамор, Арм. ССР) 53; *Ю. Дейкало* (Киев) 53, 57, 63; *С. Демьянченко* (Москва) 57, 63; *А. Джафаров* (Баку) 57; *Н. Джурелов* (Ямбол, НРБ) 53; *В. Дончева* (Черна Гора, НРБ) 60; *А. Дубровин* (Воронеж) 53, 55, 57; *С. Дудко* (Донецк) 53, 59; *В. Душацкий* (Одесса) 63; *А. Дынников* (Жуковский) 53, 55, 57, 59, 63, 65; *И. Дынников* (Жуковский) 57; *В. Елистратов* (Донецк) 53, 59, 63; *В. Журавлев* (Гайворон) 61, 63, 65; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) 53; *Л. Зосин* (Киев) 53, 55, 63; *Л. Иванов* (Саратов) 55; *Л. Йорданова* (Стара Загора, НРБ) 60; *А. Кадыров* (Ташкент) 63; *В. и И. Калович* (Хабаровск) 60, 61; *А. Касимов* (Киев) 63; *П. Кирилин* (Дубна) 53, 58, 59, 63; *А. Киселев* (Ленинград) 53; *Т. Кобдиков* (Павлодар) 61, 63; *Л. Коломиец* (Москва) 57, 61, 63; *И. Кольтовер* (п. Черноголовка Московской обл.) 53; *К. Копотун* (Киев) 59, 63; *С. Котов* (Первоуральск) 61; *Ю. Кочетков* (Винница) 61; *Н. Крылов* (Ленинград) 63; *В. Кузнецов* (Пенза) 56; *Г. Кукарских* (Москва) 53, 55; *Н. Курило* (с. Ольховка Харьковской обл.) 53, 56, 59, 60; *М. Куринной* (Харьков) 59, 61, 63; *С. Кярис* (Молетай) 61, 63; *Л. Леняшин* (Ленинград) 57; *С. Литовченко* (Воронеж) 59; *В. Любарский* (Киев) 53; *Е. Макаренко* (Херсон) 53; *М. Макаров* (Севастополь) 61, 63; *М. Маринов* (Ямбол, НРБ) 53; *Ю. Махлин* (Москва) 53, 55, 57, 60; *А. Мельников* (Москва) 57; *Р. Микаилов* (Масаллы) 53; *А. Милушевич* (Титово-Ужице, СФРЮ) 52; *С. Минаев* (Свердловск) 53, 61; *А. Мирзабекян* (Москва) 63; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 57—61, 63, 65; *Ю. Михлин* (Москва) 61; *Е. Мишин* (Севастополь) 61; *И. Мишнев* (Ямбол, НРБ) 53; *А. Молотков* (Ленинград) 57—59; *Б. Монхтор* (Улан-Батор, МНР) 53; *Е. Мухин* (Кинешма) 53; *С. Мягчилов* (Одесса) 53; *О. Никифорчин* (Ивано-Франковск) 53; *Ю. Никулинский* (Пенза) 53; *М. Ободовский* (Москва) 57; *О. Овецкая* (Донецк) 53, 55, 63; *Л. Ольха* (Свердловск) 57; *Р. Оруджев* (Баку) 53; *Б. Панич* (Севастополь) 63; *И. Пивкина* (Новосибирск) 53; *Н. Писаренко* (Новосибирск) 53, 55; *В. Погребняк* (Винница) 53, 61; *Т. Поликарпова* (Белорецк) 59; *С. Полинов* (Магнитогорск) 53; *В. Порошин* (Ленинград) 56, 57, 61, 63, 64; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 53, 55, 57, 59—61, 63—65;

Е. Растигеев (Барнаул) **61**; *Д. Розман* (Севастополь) **61**; *Е. Романов* (Димитровград) **61**; *И. Самовол* (Гайворон) **61, 63, 65**; *Ю. Свирид* (Минск) **53**; *К. Семенов* (Киев) **53, 56, 57, 63**; *А. Сенчик* (Киев) **53**; *Р. Сибилев* (Ленинград) **53, 55, 57, 59**; *А. Сидорович* (Москва) **59**; *А. Смирнов* (Ленинград) **57**; *Г. Спивак* (Киев) **53**; *С. Старцев* (Уфа) **53, 59, 61**; *М. Степанов* (Ленинград) **53**; *В. Судаков* (Тбилиси) **53**; *В. Тартаковский* (Киев) **53, 55**; *М. Тейтель* (Киев) **53, 55, 57, 59, 60, 61**; *И. Терез* (Симферополь) **61**; *Д. Толпин* (Электросталь) **57**; *А. Трухан* (Минск) **56, 63**; *В. Тульчинский* (Киев) **53**; *Л. Тюрин* (Николаев) **63**; *А. Умнов* (Миасс) **53**; *Е. Финк* (Ленинград) **56, 57, 61, 64**; *Б. Фридман* (Москва) **53, 56—59**; *К. Хлебаров* (Ямбол, НРБ) **53**; *М. Хованов* (Москва) **57**; *М. Холмянский* (Москва) **53, 56—59**; *Б. Цветков* (Люберцы) **56**; *А. Череватый* (Киев) **53, 55, 57, 63, 65**; *Е. Черная* (Днепродзержинск) **53, 57, 63**; *Ю. Шамрук (д. Новый Двор Гродненской обл.)* **63**; *О. Шаров* (Киев) **53, 63**; *С. Шейнин* (Молодечно) **57**; *Т. Шибанова* (Ангарск) **53**; *Г. Шпитальник* (Ленинград) **63**; *В. Шульга* (Евпатория) **59, 61**; *А. Эфендиев* (Баку) **53**; *Е. Юдицкий* (Киев) **53**.

Физика

О. Авраменко (Херсон) **65, 67, 68, 70—72, 75, 76**; *В. Апальков* (Харьков) **66—68, 70—72, 75—77**; *А. Артюх* (Чернигов) **68, 71, 75, 76**; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **63, 66—68, 70—72**; *Д. Борец* (Харьков) **63, 68**; *Д. Бердников* (Виница) **66, 75**; *О. Бесман* (Алма-Ата) **68**; *Э. Бондаренко* (Полтава) **70, 75, 76**; *Ю. Боровский* (Киев) **68**; *Р. Боташев* (Фрунзе) **68, 70, 75**; *Т. Брейтус* (Москва) **76**; *В. Бурковский* (п. Великие Коровинцы Житомирской обл.) **65, 75**; *О. Васильев* (Алма-Ата) **70, 75**; *С. Винтовкин* (Свердловск) **70**; *О. Гавриков* (Киев) **68, 72**; *А. Галактионов* (Пермь) **63**; *В. Галухин* (Рязань) **68, 70, 75**; *А. Глухов* (Саратов) **75**; *Г. Горбатенко* (Арзамас) **67**; *М. Готман* (Киев) **65, 68, 70, 75, 76**; *Ю. Грабовский* (Киев) **68, 70, 72**; *В. Гриншпун* (Караганда) **76**; *В. Гусев* (Красноярск) **68**; *Ю. Дейкало* (Киев) **68**; *А. Доде* (Корсунь-Шевченковский) **76, 77**; *С. Дубовик* (Брест) **70, 75, 76**; *С. Дудко* (Донецк) **66, 68, 70**; *Д. Ермошин* (Москва) **66, 68, 71**; *С. Жилинскас* (Вильнюс) **68**; *К. Залуцкий* (Киев) **63, 75**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **63**; *И. Калиновский* (Киев) **68, 70—72, 75, 76**; *В. Киреев* (Киев) **75, 77**; *А. Кириченко* (Пермь) **66, 70—72**; *П. Кларк* (Тула) **72**; *А. Климачев* (Минск) **70, 75, 76**; *Г. Климович* (п. Болшево Московской обл.) **63, 65, 70—72, 76, 77**; *А. Клишко* (Улан-Удэ) **68, 72**; *М. Козлов* (Москва) **63**; *А. Кордюк* (Киев) **66**; *Я. Корчевский* (Киев) **75**; *С. Котов* (Первоуральск) **70, 75**; *В. Краснов* (Чебоксары) **63**; *К. Кудрявцев* (Стаханов) **75**; *М. Кудряшев* (с. Красный Яр Куйбышевской обл.) **75, 76**; *М. Курдюкова* (Москва) **76**; *Н. Курило* (п. Ольховатка Владимирской обл.) **75**; *В. Кусков* (п. Красный Октябрь Владимирской обл.) **68, 70, 76**; *П. Линник* (ст. Анапская Краснодарского кр.) **65**; *Ю. Литвиненко* (Воронеж) **75**; *А. Лихтциндер* (Ташкент) **66, 67, 75, 76**; *К. Лопин* (Фрунзе) **63**; *Д. Лунц* (Саратов) **63, 65, 67, 68, 70, 71, 75—77**; *П. Лушников* (Москва) **63, 68, 70, 75, 76**; *О. Мазяр* (Львов) **68, 70, 75, 76**; *К. Макарчук* (Киев) **63, 68, 72, 75, 77**; *А. Мастыркин* (Минск) **77**; *Ю. Махлин* (Москва) **65, 68, 70**; *В. Меньков* (Мончегорск) **63, 65, 66, 68, 72, 75**; *А. Микалькявичус* (Паневежис) **75, 76**; *С. Минаев* (Свердловск) **70**; *А. Михеев* (Кимры) **63, 71, 75**; *О. Мороз* (Алма-Ата) **65, 70**; *К. Мосейчев* (Зеленоград) **68, 70—72**; *С. Мошкевич* (Киев) **68, 71, 72, 75—77**; *С. Мягчилов* (Одесса) **63, 68, 75, 76**; *С. Никоненко* (Киев) **68, 70, 76**; *О. Осауленко* (п. Ольшанка Кировоградской обл.) **68**; *А. Онуфриев* (Москва) **68, 75**; *А. Парьев* (п. Красногвардейский Белгородской обл.) **76**; *Д. Пастухов* (Витебск) **65, 67, 75—77**; *П. Пеев* (Русе, НРБ) **68**; *И. Перелыгин* (Харьков) **72, 75, 76**; *А. Перепеличный* (Владимир) **68, 70, 75**; *И. Пильников* (Тамбов) **75, 76**; *Ю. Праховник* (Москва) **68, 70**; *Я. Пугай* (Алма-Ата) **70, 75**; *В. Рай* (с. Марфовка Крымской обл.) **68**; *С. Рахамов* (Казань) **63, 65—68, 70, 71, 75—77**; *А. Ржевский* (Новосибирск) **63, 65—68, 70**; *Р. Ривкин* (Минск) **68, 75, 76**; *В. Руднев* (Целиноград) **68**; *М. Рудык* (Винница) **63, 66, 67, 68**; *Д. Русинов* (Ленинград) **63, 65**; *Ю. Рыбалочко* (Киев) **75, 76**; *М. Савченко* (Белгород) **67, 68, 70, 71, 75—77**; *И. Серикбаев* (с. Чилик Алма-Атинской обл.) **76**; *К. Симонов* (Новосибирск) **63, 65—68, 70**; *М. Скоробогатов* (Киев) **65—68, 70—72, 75—77**; *С. Собесский* (Красноармейск Кокчетавской обл.) **68, 76**; *Г. Спивак* (Киев) **68, 70**; *С. Стасевич* (Брест) **63, 70, 75**; *С. Степанянц* (Ереван) **68, 70**; *М. Стрешинский* (Киев) **68**; *С. Суздаленко* (Полоцк) **68, 70**; *Д. Таджибаева* (Учкурган) **70, 75**; *В. Тартаковский* (Киев) **68, 75, 76**; *И. Терез* (Симферополь) **63, 65—68, 70**; *А. Тихомиров* (Чимкент) **68**; **70**; *С. Тужанский* (Виница) **63, 66—68, 75—77**; *А. Умнов* (Миасс) **67**; *Н. Федин* (Омск) **75—77**; *Л. Федичкин* (Москва) **63, 65—68, 71, 72, 75, 76**; *Л. Фельдман* (Саратов) **68, 70, 71, 75—77**; *С. Феранчук* (Минск) **68, 71, 72**; *В. Фурман* (Ташкент) **66, 68, 70—72, 75—77**; *А. Ходарцев* (Беслан) **76**; *А. Хонахбаев* (Рига) **74**; *Б. Цветков* (Люберцы) **68**; *А. Цирс* (Апатиты) **63, 66, 67**; *О. Чемерченко* (п. Купянск-Узловой Харьковской обл.) **79**; *С. Чернышев* (п. Юкари-Юз Ташкентской обл.) **66, 70, 71**; *С. Черняк* (Харьков) **63, 66, 67**; *Г. Швец* (Киев) **66, 68, 76, 77**; *А. Щеголев* (п. Черноголовка Московской обл.) **68, 70—72, 75, 76**; *О. Юминов* (Омск) **68**; *О. Яковлев* (Иркутск) **68, 75, 76**.

Двугранные и трехгранные углы

(Начало см. на с. 23)

4. В сечении любого ли трехгранного угла плоскостью можно получить правильный треугольник?

5. Докажите свойства 1) и 2) полярного трехгранного угла.

6. В каких пределах могут лежать суммы:
а) плоских,
б) двугранных углов трехгранного угла?

7. а) Докажите, что если все двугранные углы трехгранного угла острые, то и все плоские углы — острые.

б) Верно ли обратное утверждение?

8. В трехгранном угле сумма двух двугранных углов равна π. Докажите, что сумма противолежащих им плоских углов также равна π.

9. В плоскости каждой грани трехгранного угла через его вершину проведена прямая, перпендикулярная противоположному ребру. Докажите, что эти три прямые лежат в одной плоскости.

Б. М. Ивлев

Мои встречи с Дебаем

(к 100-летию со дня рождения Петера Дебая)

Выдающийся физик и химик Петер Йозеф Вильгельм Дебай (1884—1966) широкому кругу физиков известен как автор теории теплоемкости твердых тел.

В начале нашего века разработка такой теории представлялась трудной проблемой. Дело в том, что в прошлом столетии была найдена любопытная закономерность, касающаяся *теплоемкости*. Многочисленные измерения показали, что произведение удельной теплоемкости на молярную массу вещества постоянно для всех твердых тел, практически не зависит от температуры и равно приблизительно 25,2 Дж/(моль·К). Это — закон Дюлонга и Пти.

В начале этого века было экспериментально установлено, что при низких температурах теплоемкость твердых тел с понижением температуры уменьшается. И если построить кривую зависимости теплоемкости от температуры, то она стремится к нулю при абсолютном нуле температур. Скольнибудь удовлетворительного объяснения этому не было.

Многие ученые пытались выразить найденную температурную зависимость теплоемкости математической формулой. Но кроме более или менее приближенных эмпирических формул никому не удавалось ничего получить. Первую настоящую теорию теплоемкости твердых тел дал Эйнштейн. В ней использовалась идея Планка о том, что энергия атомов меняется дискретно, кратно $h\nu$, где ν — частота колебаний атомов. Эйнштейн поначалу предположил, что для всех атомов частоты одинаковы (что на самом деле не так), и сумел построить теорию теплоемкости в сравнительно грубом приближении.

Воспользовавшись той же основной идеей Планка, Дебай в 1912 году создал теорию, в которой было учтено, что различные атомы колеблются с разными частотами. Эта теория позволила теоретически получить закон Дюлонга и Пти при сравнительно высоких температурах и вывести довольно точную зависимость теплоемкости от температуры при низких температурах. В соответствии с данными измерений, из теории следовало, что теплоемкость пропорциональна третьей степени абсолютной температуры. Теперь эту зависимость называют законом теплоемкости Дебая.

В дальнейшем выяснилось, какие температуры следует считать высокими, а какие — низкими. Оказалось, что для каждого вещества в твердом состоянии существует характеристическая температура — температура Дебая, выше которой применима классическая теория теплоемкости, а ниже — требуется введение квантовой теории.

Из теории Дебая, в частности, следовало, что при низких температурах *теплопроводность* твердых диэлектриков с уменьшением температуры должна увеличиваться. И это действительно так. Например, для алмаза температура Дебая порядка 2000 °С, комнатные температуры для него низкие, и теплопроводность очень велика — она сравнима с теплопроводностью хороших проводников (меди).

Имя Дебая связано не только с теорией теплоемкости и теплопроводности твердых тел; оно знакомо ученым, занимающимся и магнетизмом, и электролитической диссоциацией и др. За крупные научные достижения Дебай в 1936 году был удостоен Нобелевской премии по химии.

Мне удалось познакомиться с Дебаем в 1928 году на Всесоюзном съезде физиков, на котором присутствовало много именитых зарубежных ученых. Я тогда был студентом, и для нас Дебай был классиком, так как его имя часто встречалось во многих курсах физики. Личная встреча и знакомство с ним было для меня и других молодых физиков событием.

Тогда Дебаю было 44 года. Когда объявили его доклад, на трибуну вышел человек атлетического телосложения, и мы приготовились услышать громовой голос. Каково же было всеобщее удивление, когда он начал говорить очень высоким голосом, почти что дискантом.

Мы хорошо знали Дебая как теоретика и мало знали о его экспериментальных работах. На съезде рассказывали, что когда в кулуарах обсуждался какой-нибудь вопрос и к Дебаю обращались теоретики, Дебай говорил, что он экспериментатор и что теория — не его специальность. А если обращались экспериментаторы, Дебай говорил, что он теоретик. На самом деле он был, конечно, и тем и другим.

Дебай был веселый и остроумный человек. Мы были удивлены, когда он в шутку затеял бороться с другим известным немецким физиком Робертом Полем, человеком тоже атлетического телосложения, и победил его.

После окончания съезда большинство иностранных делегатов отправились домой через Батуми. Дебай же поехал вместе с нами в Ленинград, сказав, что ему интереснее ехать со студентами, чем с учеными. Ехали мы в обычном вагоне. В дороге Дебай развлекал нас многочисленными рассказами из жизни физиков и из своей тоже. Кстати сказать, по дороге он обучал нас немецкому языку (Дебай родился в Нидерландах, но работал в Германии), а мы его — русскому. Он был, видимо, лучшим учителем, чем мы, поскольку мы понимали его, а он нас — практически нет.

Второй раз я встретился с Дебаем в 1930 году, когда после окончания института был командирован в Германию и посетил Лейпциг, где Дебай тогда заведовал кафедрой физики в университете. Помня о нашем знакомстве, он встретил меня весьма любезно, показал лабораторию, пригласил на лекцию и на семинары. Я убедился в том, что многие экспериментальные работы Дебая были обставлены с большим искусством и остроумием.

И. К. Кикоин

XXV Международная математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

Юбилейная XXV Международная математическая олимпиада проходила с 29 июня по 10 июля в столице ЧССР г. Праге. Она собрала рекордное количество стран-участниц — 34; впервые в олимпиаде приняли участие команды Норвегии и Кипра. Почти все команды школьников состояли из 6 человек. Исключение составили команды Алжира — 4 человека, а также Норвегии и Люксембурга — по 1 человеку.

В команду СССР вошли: Евгений Абакумов (Ленинград, ФМШ при ЛГУ), Андрей Астрелин (Новосибирск, с. ш. № 119), Константин Игнатьев (Москва, с. ш. № 2), Федор Назаров (Ленинград, с. ш. № 239), Леонид Оридорога (Донецк, с. ш. № 64), Сергей Струков (Воронеж, с. ш. № 85).

Ежегодно при встречах на международных олимпиадах руководители команд обмениваются опытом работы. В этом году такой разговор был проведен в виде официального симпозиума, на котором были заслушаны доклады И. Моравчика (ЧССР), Т. А. Сарычевой (СССР), Д. Херси (Великобритания), А. Маковского (ПНР), Ж. Вилмета (Бельгия), Г. Буроша (ГДР), Л. Киффера (Люксембург), Е. Гиянакополоса (Греция) и Л. Давидсона (Куба).

Выступавшие рассказали об особенностях проведения олимпиад в своих странах, высказали пожелания по улучшению организации международных олимпиад. В докладе И. Моравчика в частности было рассказано об интересном опыте проведения олимпиад в ЧССР для школьников 6 и 7 классов.

В рамках симпозиума была организована большая интересная выставка материалов внеклассной работы из многих стран. Большим успехом пользовался стенд СССР, на котором широко был представлен журнал «Квант», а также библиотечка «Квант».

По завершении симпозиума жюри, состоящее из научных руководителей команд, приступило к исполнению своих прямых обязанностей — отбору задач для соревнований. Эта работа очень трудна, поскольку нужно учесть различный уровень подготовки у школьников из развитых стран и из молодых стран Азии, Африки и Латинской Америки. При этом надо было отобрать и очень сложные задачи, чтобы можно было выявить победителей.

Жюри, возглавляемое профессором Ф. Зитеком, отлично справилось со своими обязанностями. Об этом можно судить как по результатам олимпиады, так и по результатам опроса, проведенного корреспондентом журнала «Квант»: каждому члену жюри было предложено расположить отобранные задачи в порядке возрастания трудности. Хотя мнения отдельных членов жюри сильно расходились, усредненный порядок задач по их трудности совпал с порядком, полученным из анализа работ участников.

Каждую задачу было решено оценивать в 7 очков и по установившейся традиции провести соревнования в два дня, предлагая в каждый из дней по 3 задачи на 4,55 часа работы. Таким образом, максимальная сумма очков, которую мог набрать участник, составила 42 очка, как и было в последние 5 лет.

Задачи, по которым проводились соревнования, были таковы.

Первый день

1 (ФРГ). Пусть x, y, z — неотрицательные действительные числа такие, что $x+y+z=1$. Докажите, что

$$0\leqslant xy+yz+xz-2xyz\leqslant\frac{7}{27}.$$

2 (Нидерланды). Укажите какую-либо пару натуральных чисел (a, b) такую, что:

1) число $ab(a+b)$ не делится на 7,

2) $(a+b)^7-a^7-b^7$ делится на 7^7.

Ответ обосновать.

Слева направо: Ф. Назаров, Л. Оридорога, С. Струков, К. Игнатьев, А. Астрелин, Е. Абакумов, педагогический руководитель команды Т. А. Сарычева, научный руководитель команды А. А. Фомин, корреспондент журнала «Квант» А. П. Савин.

3 (СРР). На плоскости даны две различные точки O и A. Для каждой точки X этой плоскости, отличной от точки O, обозначим через $a(X)$ величину угла AOX, выраженную в радианах $(0 \leqslant a(x) < 2\pi)$, где угол $a(x)$ отсчитывается против часовой стрелки от луча OA, а через $C(X)$ — окружность с центром O и радиусом $OX + a(X)/OX$.

Пусть задан конечный набор цветов, и каждая точка плоскости окрашена в один из них. Докажите, что существует точка Y такая, что $a(Y) > 0$ и на окружности $C(Y)$ имеется хотя бы одна точка того же цвета, что и точка Y.

Второй день

4 (СРР). Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ прямая CD касается окружности с диаметром AB. Докажите, что прямая AB касается окружности с диаметром CD тогда и только тогда, когда прямые BC и AD параллельны.

5 (МНР). Пусть d — сумма длин всех диагоналей, а p — периметр плоского выпуклого n-угольника $(n > 3)$. Докажите, что

$$n-3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2$$

($[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x).

6 (ПНР). Пусть a, b, c, d — нечетные целые числа, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $0 < a < b < c < d$;

2) $ad = bc$;

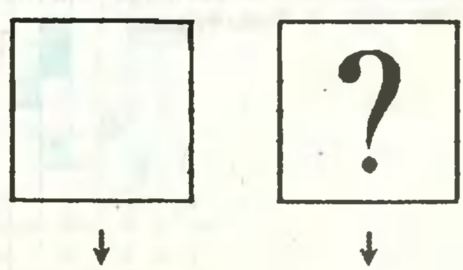
3) $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$ для некоторых целых чисел k и m. Докажите, что $a = 1$.

(В скобках после номера задачи указана страна, предложившая эту задачу.)

Олимпиада ознаменовалась крупным успехом команды СССР и команд других социалистических стран. Наша команда набрала 235 очков из 252 возможных, на втором месте команда Болгарии (203 очка), на третьем — Румынии (199), четвертое и пятое места поделили команды Венгрии и США (195), далее следуют команды Великобритании (165), Вьетнама (163), ГДР (161), ФРГ (150) и Монголии (146).

Из шести участников нашей команды пятеро получили первые премии: А. Астрелин (42 очка), К. Игнатьев (42 очка), Л. Оридорога (42 очка), Ф. Назаров (41 очко), Е. Абакумов (40 очков). Всего получили первые премии 14 участников, набравших не менее 40 очков. Кроме наших ребят первые премии получили по два участника из команд Болгарии и Румынии и по одному из команд Великобритании, Венгрии, Вьетнама, США и ФРГ.

Вторые премии получили участники, набравшие не менее 26 очков, в том



2	1	2	1	1	1
3	2	2	1	2	2
1	2	2	1	1	0
2	2	2	1	2	1
1	0	2	3	2	2
1	1	1	2	1	2

1	0	2	0	1	0
2	2	4	2	2	0
1	0	3	1	2	0
1	1	3	2	3	1
0	0	1	2	1	1
0	0	0	1	1	1

числе и С. Струков (28 очков), а третьими премиями были награждены участники, набравшие не менее 18 очков. Всего было награждено 98 из 192 участников, то есть половина всех школьников.

Несмотря на небывалый успех команды СССР, самой большой сенсацией явилось прекрасное выступление команды Монголии, ранее находившейся в числе аутсайдеров, а в этом году занявшей 10 место, впереди команд таких стран, как Франция, Австрия, Швеция. Монгольские школьники завоевали 3 вторых премии.

Жюри присудило один специальный приз. Им был награжден Федя Назаров за оригинальное решение 5-й задачи.

Во время проверки и оценки работ для участников были проведены соревнования, носившие веселый и занимательный характер, по задачам чехословацких конкурсов для шести- и семиклассников. Одна из этих задач изображена на рисунке на с. 45. Несколько задач этих конкурсов приводится также в Задачнике раздела «Квант» для младших школьников» этого номера.

Олимпиада была прекрасно организована. Надолго запомнятся участникам торжественные церемонии открытия и закрытия олимпиады в актовом зале Карлова университета в Праге, экскурсии и прогулки по «златой Праге», посещение замка-резиденции чешских королей в Карлштейне и очень интересной и обширной системы пещер недалеко от Праги, дружеские беседы со сверстниками из многих стран.

Следующая, XXVI Международная математическая олимпиада состоится в 1985 году в Финляндии.

XV Международная физическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

XV Международная физическая олимпиада проходила в Швеции с 24 июня по 1 июля. В качестве места непосредственного проведения олимпиады была выбрана Гуманитарная школа в небольшом курортном городке Сигтуна, в сорока семи километрах от Стокгольма.

Сигтунская гуманитарная школа — самая большая и известная школа-интернат Швеции. В настоящее время в школе занимается 540 учеников-старшеклассников, в том числе на полном пансионе — 335 человек. (Из числа выпускников этого года были сформированы бригады гидов-переводчиков, которые работали с командами всех стран.) Наряду со стандартными для Швеции курсами обучения в этой школе существует особый, «международный» курс, где обучение проводится на английском языке. Среди учеников школы — дети из разных стран Европы. Успешная сдача экзаменов в этой школе дает право ее выпускникам поступать в университеты пятидесяти стран мира. Школа была основана в 1925 году. Среди окончивших школу — нынешний король Швеции Карл XVI Густав и нынешний премьер-министр Улоф Пальме.

Для участия в олимпиаде съехались команды из 18 стран: Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, Вьетнама, ГДР, Голландии, Исландии, Кубы, Норвегии, Польши, Румынии, Советского Союза, Финляндии, ФРГ, Чехословакии, Швеции, Югославии. Впер-

Команда Советского Союза на XV Международной физической олимпиаде. Слева направо: Л. Закревский, И. Потеряйко, А. Дешковский, А. Алексеев, С. Орлов.

вые в олимпиаде приняли участие Великобритания, Исландия и Норвегия. Из традиционных участников не приехала команда Франции.

По существующему международному статусу физической олимпиады каждая страна может послать команду из пяти школьников. Кандидатами в команду СССР были названы победители XVII Всесоюзной олимпиады, хорошо проявившие себя на зимних сборах в 1983 году и успешно выступившие на XVIII Всесоюзной олимпиаде. Таким образом, на заключительные летние сборы были приглашены семь школьников, выпускников средней школы:

Александр Абанов — с. ш. № 170 г. Краснодара,
Антон Алексеев — с. ш. № 239 г. Ленинграда,
Александр Дешковский — с. ш. № 11 г. Барановичи,
Лев Закревский — с. ш. № 50 г. Минска,
Игорь Курников — с. ш. № 1 г. Гатчины,
Сергей Орлов — с. ш. № 842 г. Москвы,
Игорь Потеряйко — ФМШ № 2 г. Киева.

По установившейся традиции все школьники, приглашенные на сборы, освобождаются от выпускных школьных экзаменов и получают право поступать в любой вуз СССР без вступительных экзаменов.

Заключительные тренировочные сборы включали теоретические занятия, выполнение лабораторных работ, проведение четырех внутренних олимпиад. По итогам этих сборов в команду Советского Союза на XV Международную физическую олимпиаду вошли: А. Алексеев, А. Дешковский, Л. Закревский, С. Орлов и И. Потеряйко. Руководителем делегации был старший научный сотрудник Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР О. Ф. Кабардин, педагогическим руководителем команды — старший научный сотрудник того же института В. А. Орлов.

Организация и проведение XV Международной физической олимпиады были поручены Шведскому физическому обществу и Министерству образования Швеции. Председателем оргкомитета был назначен Президент Шведского физического общества профессор Бендт Свенссон, специалист в области физики элементарных частиц и космологии. Генеральным секретарем олимпиады был назначен Ларс Сильверберг, специалист в области ядерной физики.

Для подготовки задач и проведения теоретического тура были привлечены ученые Стокгольмского университета. Подготовка и проведение экспериментального тура были возложены на Национальную высшую политехническую школу Стокгольма. Утверждение всех результатов олимпиады, изменение правил ее проведения осуществлялись Международной комиссией, в которую наряду с председателем оргкомитета и генеральным секретарем входили представители от каждой страны-участницы — руководитель делегации и педагогический руководитель команды. Во всех обсуждениях принимали участие также (без права голосования) наблюдатели из Великобритании, Венгрии, Канады, Китая, Советского Союза и Югославии.

Официальными языками олимпиады были английский и русский. На выполнение заданий теоретического тура школьникам отводилось 5 часов, а экспериментального — 4 часа. В качестве вспомогательных вычислительных средств разрешалось пользоваться непрограммируемым калькулятором и логарифмической линейкой.

Участникам были предложены следующие задачи:*)

Теоретический тур

Задача 1

а) Представьте себе плоскопараллельную прозрачную пластинку, показатель преломления которой меняется с расстоянием z от нижней поверхности пластинки (рис. 1). Покажите, что $n_A \sin\alpha = n_B \sin\beta$.

б) Представьте себе, что вы стоите посередине широкой плоской пустыни. На расстоянии вы видите нечто похожее на водную поверхность. Когда вы приближаетесь к «воде», она постепенно удаляется от вас, так что расстояние до «воды» все время остается равным 250 м. Объясните этот феномен!

в) Вычислите температуру у поверхности Земли для случая б), предположив, что ваши глаза находятся на высоте 1,6 м от поверхности. Показатель преломления воздуха при температуре $t_1 = 15\ °C$ и нормальном атмосферном давлении $p = 0{,}1013$ МПа равен $n_1 = 1{,}000276$. Температуру воздуха на высоте, большей 1 м от поверхности Земли, можно считать постоянной и равной $t_2 = 30\ °C$. Можно считать, что $(n-1)$ пропорционально плотности частиц в газе.

Задача 2

На некоторых озерах можно иногда наблюдать довольно необычное явление — так называемые сейши*). Озера, на которых наблюдается это явление, обычно протяженные и узкие. Мы привыкли видеть волны на озере, но иногда вода в озере колеблется как чай в стакане, который вы несете своему гостю, находящемуся в другом конце комнаты.

Для создания моделей сейшей используется прямоугольная ванночка. Толщина водяного слоя в ванне h, горизонтальная длина ванны L. Предположим, что поверхность воды вначале составляет небольшой угол с горизонтальной поверхностью. Тогда вода начнет качаться, то есть поверхность воды остается ровной, но колеблется относительно горизонтальной поверхности. Постройте модель движения жидкости и выведите выражение для периода колебаний T сейшей. Начальные условия даны на рисунке 2,*а*. Предполагается, что $\delta \ll h$.

В приведенной на рисунке 2,*б* таблице даны периоды колебаний при разных глубинах воды в двух ванночках с разными длинами. Проконтролируйте каким-нибудь подходящим образом, что выведенная вами формула соответствует экспериментальным данным, и оцените применимость вашей модели.

На рисунке 2, *в* дана диаграмма изменений уровня водной поверхности в озере Веттерн (в Швеции) у его северного и южного концов. Длина озера 123 км, средняя глубина 50 м. Обозначьте шкалу времени на диаграмме.

Задача 3

Электрический фильтр состоит из четырех компонентов так, как показано на рисунке 3,*а*. Импедансом (сопротивлением) источника напряжения можно пренебречь, а нагрузочное сопротивление считать бесконечно большим. Фильтр должен быть таким, чтобы отношение $U_{вых}/U_{вх}$ зависело от частоты так, как показано на рисунке 3, *б*. При частоте f_0 разность фаз между $U_{вых}$ и $U_{вх}$ равна нулю.

Для построения фильтра вы можете выбрать какие-нибудь из следующих компонентов: два резистора с сопротивлениями по 10 кОм; два конденсатора с емкостями по 10 нФ; две катушки с индуктивностями по 160 мГн (катушки не содержат железа и их активным сопротивлением можно пренебречь).

В результате комбинации четырех компонентов, указанных выше, вы можете сделать фильтр, удовлетворяющий условиям, показанным на рисунке 3, *б*. Определите частоту f_0 и отношение $U_{вых}/U_{вх}$ при этой частоте для всех возможных комбинаций компонентов.

*) Решения этих задач, приведенные на с. 57, подготовлены участником олимпиады А. Дешковским.

*) Сейши — это стоячие волны, возникающие на закрытых водоемах. При сейшах происходят колебания всей массы воды, причем поверхность водоема наклоняется то в одну, то в другую сторону. (*Прим. автора.*)

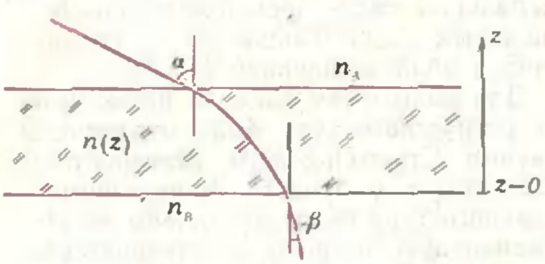
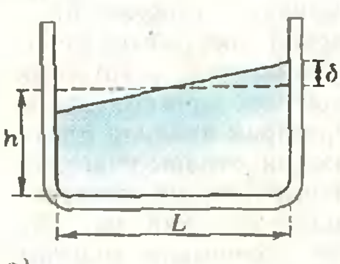


Рис. 1.



а)

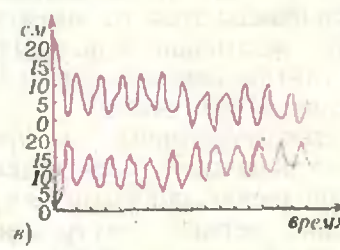
$L = 479$ мм

h, мм	T, с
30	1,78
50	1,40
69	1,18
88	1,08
107	1,00
124	0,91
142	0,82

$L = 143$ мм

h, мм	T, с
31	0,52
38	0,48
58	0,43
67	0,35
124	0,28

б)



в)

Рис. 2.

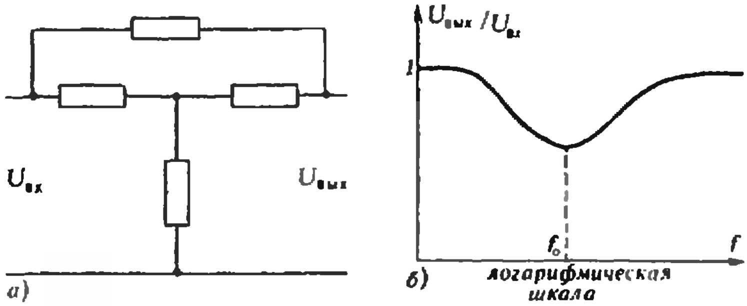


Рис. 3.

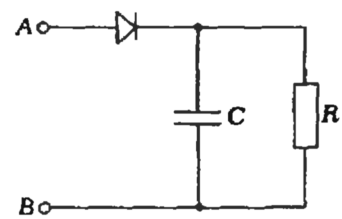


Рис. 4.

Экспериментальный тур

Опишите ваш способ решения экспериментального задания. Для читающего должно быть ясно из вашего описания, почему и каким образом вы решаете различные моменты задания, а также последовательность исполнения этих моментов. Формальное математическое вычисление погрешностей необязательно, достаточно просто оценить ошибку.

Задача 1

Материалы: генератор синусоидальных колебаний частотой 0,20 кГц; осциллограф с двумя каналами (двухлучевой); миллиметровая бумага; диод; конденсатор емкостью 0,10 мкФ (черный, квадратный); резистор с неизвестным сопротивлением (красный); коммутационная доска; соединительные провода.

Постройте цепь, показанную на рисунке 4; определите экспериментальным путем среднее значение мощности, выделяющейся в резисторе R при соединении точек A и B с генератором переменного тока с частотой 0,20 кГц и амплитудой напряжения 2,0 В (то есть между минимумами и максимумами 4,0 В).

Задача 2

В спектре неоновой лампы видны несколько спектральных линий в желто-оранжево-красной области. Одна из желтых линий (на коротковолновом конце этой группы спектральных линий) наиболее яркая. Определите длину волны этой линии. Оцените точность в ваших вычислениях длины волны.

Принадлежности: неоновая лампа, подключенная к источнику переменного напряжения в 220 В; лазер (длина волны его неизвестна); дифракционная решетка с неизвестной постоянной; объект-микрометр (стеклянная пластинка, в центре которой имеется шкала длиной 1 мм, содержащая 100 делений); деревянная метровая линейка; штатив; зажимы.

Примечание. Даже если вы знаете длину волны лазера, вам не разрешается использовать эти данные.

Осторожно!

1. При выполнении задания не допускайте попадания лазерного луча в глаз!

2. Не касайтесь пальцами поверхности дифракционной решетки и объект-микрометра!

Каждая задача и теоретического и экспериментального туров оценивалась в 10 баллов.

Первую задачу теоретического тура полностью решили 5 участников, вторую — 10 (3 — из СССР), третью — 7 (1 — из СССР). Абсолютно лучший результат после теоретического тура был у голландского школьника Яна де Боэра — 30 баллов. У А. Алексеева был второй результат — 29 баллов. Лучшие командные результаты были у команд Румынии и СССР — по 115 баллов. У остальных участников советской команды были следующие результаты: С. Орлов — 25, А. Дешковский — 23, Л. Закревский и И. Потеряйко — по 19 баллов.

Максимальное количество баллов за эксперимент получил школьник из Румынии Мариус Василиу — 17,5. Участники советской команды получили: А. Дешковский и С. Орлов — по 17 баллов, Л. Закревский — 16, И. Потеряйко — 14, А. Алексеев — 10,5. Лучший командный результат за эксперимент был у команды ФРГ — 76,5 баллов, наша команда имела второй результат — 75 баллов.

После подведения итогов лучшие общие результаты оказались у двух школьников — Яна де Боэра из Голландии и Сорина Спаноша из Румынии (по 43 балла). Они были названы абсолютными победителями олимпиады. Трем нашим участникам были присуждены первые премии (как набравшим не менее 90 % от максимального результата) — С. Орлову, А. Дешковскому и А. Алексееву. Л. Закревскому и И. Потеряйко были вручены вторые премии (как набравшим не менее 78 % от максимального результата). Общее число первых премий — 9, вторых — 5, третьих — 16, почетных грамот — 15.

Команда СССР в неофициальном командном зачете заняла первое место (190 баллов), дальше идет команда Румынии (181,5 баллов). Остальные места были распределены следующим образом: Венгрия (153), ФРГ (151,5), Чехословакия (143), Голландия (139,5), Болгария (134), ГДР (122), Польша (111), Великобритания (97 — 4 участника), Швеция (94), Югославия (92), Австрия (87,5), Норвегия (75,5), Финляндия (62,5), Вьетнам (44,5 — 3 участника), Куба (42,5 — 4 участника), Исландия (34 — 2 участника).

А. Алексеев получил специальный приз за исчерпывающее решение задачи № 3 теоретического тура. В процессе проверки работ выяснилось, что официальное решение задачи включало не все возможные варианты. А. Алексеев рассмотрел все принципиальные возможности, и его работа служила жюри в качестве справочника всех возможных ответов. Л. Закревский получил специальный приз как самый юный участник олимпиады.

Во время проведения олимпиады особое место занимала четко спланированная культурная программа. Школьники познакомились с достопримечательностями г. Сигтуны, основанного около 1000 года и имеющего богатое историческое прошлое. Школьники побывали на экскурсии в старой части города Стокгольма, у Королевского дворца наблюдали смену караула, посетили музеи, зоопарк, парк аттракционов, совершили прогулку на пароходе на один из островов, побывали в парке летней резиденции короля Швеции — Дротингхольме. Председатель Совета Стокгольма устроил для участников олимпиады прием в городской ратуше. Встреча проходила в зале, в котором вручаются Нобелевские премии. В день закрытия олимпиады участники побывали в университетском городе Упсала, где посетили строящийся ускоритель.

Закрытие олимпиады проходило в актовом зале Сигтунской гуманитарной школы. В церемонии закрытия принял участие лауреат Нобелевской премии 1981 года за работы в области электронной спектроскопии К. Сигбан. Он тепло поздравил участников с успешным окончанием олимпиады, пожелал дальнейших успехов в овладении физическими знаниями. Он сказал, что участники прошедшей олимпиады в будущем наверняка внесут свой вклад в науку и научно-технический прогресс. Он призвал школьников не забывать о том, что главное завоевание человечества — это мир, обратил внимание на необходимость бережного отношения к окружающей природе. Он подчеркнул, что Международные физические олимпиады проводятся с целью расширения международных контактов в области школьной физики, что они должны способствовать развитию внешкольных занятий, повышению интереса к физике как науке. Школьные олимпиады должны способствовать также установлению дружественных взаимоотношений между молодежью разных стран, помогать укреплению сотрудничества и взаимопонимания между различными народами.

Заключительное слово на закрытии было предоставлено профессору из Югославии Груичу Дражка. От имени всех участников и руководителей команд он поблагодарил оргкомитет за высокий уровень проведения олимпиады, за гостеприимство и теплый прием. Он подтвердил решение югославского правительства о проведении XVI Международной физической олимпиады летом 1985 года в Югославии.

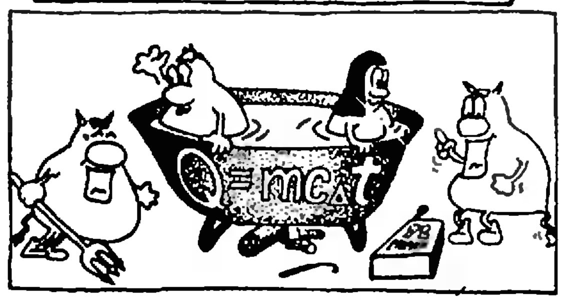
Во время проведения олимпиады проходили многочисленные беседы между представителями разных стран. Было отмечено, что олимпиадное движение становится все более популярным в разных странах. В качестве примера достаточно сказать, что с целью участия в прошедшей олимпиаде команды Великобритании ценой больших усилий со стороны Европейского физического общества были перенесены сроки проведения экзаменов в Кембриджском и Оксфордском университетах.

Представители большинства стран выразили надежду на дальнейшее расширение сотрудничества в области популяризации и пропаганды физико-математических знаний. В этом смысле журналу «Квант» было выделено особое место, поскольку во многих странах «Квант» пользуется большой популярностью.

От имени всей советской делегации хотелось бы еще раз поблагодарить шведскую сторону за гостеприимство, доброжелательность и высокий уровень организации олимпиады, а также сотрудников советского посольства в Стокгольме за большую помощь и поддержку.

Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» поздравляют советскую команду и ее руководителей с большой победой и желают им дальнейших творческих успехов.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ



«Квант» в гостях у «Кванта»

Пятнадцать лет на физическом факультете Новосибирского государственного университета шутя работает студенческий клуб «Квант». В этом году шутки членов клуба дошли до нашего журнала, и мы предлагаем читателям совершить вместе с клубом «Квант» традиционную прогулку по ε-окрестности НГУ — Новосибирскому научному центру.

Наше путешествие начинается в главном корпусе НГУ. Вот идет студент Иванов, насвистывая третий закон Ньютона. Совсем недавно Иванов приумножил славу факультета на нуль. Чего он только не знает! Алгебры не знает, анализа не знает, квантовой механики не знает...

На третьем этаже темнеет дверь деканата. Здесь отражают интересы студентов. Напротив двери доска объявлений. «В деканате начинается чтение спецкурса «Методы отчисления». Первое занятие: «Метод последовательного исключения». Из-за двери слышен добродушный разговор: «Захожу на экзамен, а там студентов — режь, не хочу!» Вывешиваются первые итоги. Подсчитано, что студенты физфака уже взяли на 30 % билетов больше, чем их было на столах!

Общежитие. Здесь живут студенты-физики. До сих пор студенты знали свое общежитие, как облупленное. Теперь оно сверкает свежей краской. Из окон доносится грохот — это физики выкидывают свои шутки.

Повернем к студенческой столовой. Шутки о ней не истощаются так же, как работники столовой. Тем не менее повара недовольны: «Как студента ни корми, все равно есть приходит!» Заглянем в меню. Приятная новость: в столовой подготовлено новое блюдо — котлеты «Дожуем до понедельника».

Наш путь ведет к спорткомплексу НГУ. По трассе слалома только что спустился с горы студент Залетаев. Потрясающе! Его время на целых 10 секунд меньше времени свободного падения с той же высоты!

Выходим на проспект, где расположены многочисленные научно-исследовательские институты. Направо по курсу — вычислительный центр. По заказу работников торгового центра тут разрабатывается новая обсчетно-вычислительная машина.

Вдали высится корпус института ядерной физики. Здесь тоже происходит много интересного. Читаем объявления у входа. «Для поломки дорогостоящего прибора в лабораторию № 8 срочно требуется студент». «Вниманию стажеров: установка № 5 в положении переключателя НАЛЕВО — выключена, НАПРАВО — сломана».

На двери в подвал надпись: «Лаборатория фундаментальных исследований». Под ней выведена новая формула для основания натуральных логарифмов: $e=mc^2$. Важнейшим достижением лаборатории стал выдвинутый ею принцип эквивалентности времени и энергии: масса покоя бывает тогда и только тогда, когда есть масса свободного времени. Мы выходим из ИЯФа. Пахнет паленым. Это студенты-практиканты жгут за собой мосты...

Налево — институт автоматики. Учеными этого института создана модель робота-тунеядца. Работа увенчалась успехом — модель не работает.

Институт полупроводников. Предложенный здесь лазерный эталон времени позволяет определить количество секунд в минуте с точностью до седьмого знака.

Выходим на Морской проспект. Институт экономики. В связи с инфляцией на Западе здешние экономисты предложили понизить курс мировых констант на 15—20 %.

В доме культуры «Академия» большая культурная программа. Недавно здесь прошел сеанс телепатии. Телепат Нагорный в течение трех с половиной часов пытался прочесть хоть одну мысль на лице студента Васькина. Не удалось. Знай наших!

Приближаемся к концу нашего путешествия. Слева почта и телеграф. Вот выходит студент Сидоров. Он только что сообщил своим родителям: «Учиться на физфаке трудно. Но мы не сдаем!»

Возвращаемся в НГУ. За время нашего отсутствия пришла телеграмма: «В связи с днем физика в НГУ из МГУ вылетели восемь студентов».

Из репродуктора доносятся последние известия. «По сведениям гидрометцентра СССР, в Академгородке ночью легкое похолодание, до 2—3 градусов ниже абсолютного нуля. Спокойной ночи, дорогие товарищи, мы прощаемся с вами...»

Экскурсию по материалам клуба «Квант» вели В. Матизен и О. Трезубов

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском Ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1985/86 учебный год.

Цель этой школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по углублению своих знаний по физике и математике. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка (по классам, с указанием итоговых оценок за вступительное задание ЗФТШ). Все материалы по организации кружка следует выслать в адрес ЗФТШ до *25 мая 1985 года.*

Учащиеся ЗФТШ и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а работы членов кружка проверяют его руководители.

С учащимися Москвы проводятся очные занятия по физике и математике (по программе ЗФТШ) два раза в неделю в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ). Набор в эти группы производится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 408-51-45).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо аккуратно переписать (на русском языке) в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетрадной обложки наклейте лист бумаги, заполненный по образцу:

1. Область (край или АССР)	*Курская обл.*
2. Фамилия, имя, отчество	*Гончаров Олег Витальевич*
3. Класс	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*Курчатовская средняя школа № 2*
5. Профессия родителей и занимаемая должность:	
отец	*слесарь*
мать	*машинист котельных установок*
6. Подробный домашний адрес	*307239, Курская обл., г. Курчатов, ул. Космонавтов, д. 10, кв. 76.*

Внизу начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№								
Ф								
М								

В тетрадь вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (с указанием класса). В этом конверте вы получите ответ из ЗФТШ

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1985 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1985 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской и Читинской областей, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660062, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1—6 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 3—8 — для учащихся восьмых классов, задачи 5—12 — для учащихся девятых классов.

В задании по математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 4—10 — для восьмых классов, 7—13 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Судно пришвартовано за нос и корму к берегу двумя одинаковыми тросами, образующими угол 60° с линией берега. Под действием ветра, дующего с берега, тросы натянулись так, что сила натяжения каждого троса составляет 10^5 Н. Определите силу, с которой ветер давит на судно.

2. Заканчивая сотый круг, лидер велогонки обогнал основную группу на 3 круга. Определите среднюю скорость лидера, если средняя скорость группы $v=45$ км/ч.

3. Какой массы груз из алюминия нужно привязать к пробке массы $m=20$ г и плотности $\varrho_1=0{,}25$ г/см^3, чтобы опущенная в воду пробка находилась в безразличном равновесии? Плотность алюминия $\varrho_2=2{,}72$ г/см^3.

4. Теплоизолированный сосуд охлаждается водой, протекающей внутри него по змеевику. Температура воды на входе T_0. Если вода течет по змеевику со скоростью v_1, ее температура на выходе равна T_1. Оказалось, что скорость охлаждения сосуда не изменилась, когда скорость воды стала равной v_2. Определите температуру воды на выходе во втором случае.

5. В плавающем в океане айсберге пробурили сквозной колодец глубиной 200 м. Какую минимальную работу надо затратить для подъема из колодца пробы воды массы $m=0{,}5$ кг? Плотность льда составляет 0,9 плотности воды.

6. Два одинаковых калориметра заполнены до высоты $h=25$ см: первый — льдом, второй — водой при температуре $t_1=10$ °С. Воду выливают на лед. После установления теплового равновесия уровень повысился еще на $\Delta h=0{,}5$ см. Какова была начальная температура льда? Плотность льда $\varrho_1=0{,}9\varrho$ (ϱ — плотность воды). Теплоемкость льда вдвое меньше теплоемкости воды: $c_1=c/2=2100$ Дж/(кг·К). Удельная теплота плавления льда $\lambda=340$ кДж/кг.

7. Определите максимальное число оборотов, которое может сделать за сутки спутник, вращаясь вокруг Земли. Радиус Земли $R=6400$ км.

8. Гладкий диск радиуса R вращается в горизонтальной плоскости вокруг своей оси со скоростью $n=0{,}25$ об/с. От поверхности диска на расстоянии $R/3$ от оси отрывается небольшое тело, которое без трения скользит по диску. Через какое время тело соскользнет с диска?

9. Собрана последовательная цепь из резистора с сопротивлением $R=15$ Ом и двух батареек с параметрами $\mathscr{E}_1=5$ В, $r_1=2$ Ом и $\mathscr{E}_2=10$ В, $r_2=3$ Ом. Что покажут вольтметры, подключенные к каждой из батареек, если батарейки включены навстречу друг другу?

10. В задаче № 5 определите время, через которое можно услышать всплеск воды от камня, брошенного в колодец без начальной скорости. Скорость звука в воздухе $c=330$ м/с.

11. Заряженный конденсатор емкости C соединяют с батареей с электродвижущей силой $\mathscr{E}$. В процессе перезарядки выделилось количество теплоты, равное $5C\mathscr{E}$. Определите первоначальный заряд на конденсаторе.

12. Тонкостенный цилиндр радиуса R раскрутили вокруг его оси симметрии до угловой скорости ω и поставили на пол к стене так, что ось цилиндра параллельна ребру двугранного угла. Сколько оборотов сделает цилиндр до полной остановки, если коэффициент трения между цилиндром и стеной μ, а между цилиндром и полом — 2μ?

Математика

1. Какое из двух чисел больше:

$$\sqrt{1983}+\sqrt{1985} \text{ или } 2\sqrt{1984}?$$

2. Основания трапеции равны 30 см и 40 см, а углы при меньшем основании — 130° и 140°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

3. Найдите все натуральные числа m и n, удовлетворяющие уравнению $n^2-m^2=117$.

4. Зарплата рабочего составляла 200 рублей. В результате двух последовательных повышений на одинаковое число процентов она возросла до 233 руб. 28 коп. Определите, на сколько процентов повышалась зарплата.

5. Все натуральные числа, начиная с единицы, выписаны подряд. Какая цифра стоит на 1985-м месте?

6. При каких натуральных значениях n число $n^5+2n^3-n^2-2n$ делится на 120?

7. В окружность вписан треугольник ABC. В точке B проведена касательная к окружности. Расстояния от точек A и C до касательной равны 3,2 см и 0,8 см. Найдите длину высоты треугольника ABC, проведенную из вершины B.

8. Четвертый член арифметической прогрессии равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений ее первых трех членов будет наименьшей?

9. Длины двух сторон треугольника равны 6 см и 8 см, а две его медианы пересекаются под прямым углом. Найдите длину третьей стороны треугольника.

10. В реку впадает приток. Теплоход отходит от пристани A на притоке и идет вниз по течению 80 км до реки, далее — по реке против течения до пристани B, затратив 18 часов на весь путь от A до B. На обратный путь от B до A теплоход затратил менее 15 часов. Какой была скорость течения в притоке, если скорость теплохода в стоячей воде 18 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч?

11. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. На ребрах AD и B_1C_1 взяты соответственно точки M и Q, а на ребре CD — точки P и N так, что

$$|AM|=|C_1Q|=|CP|=|PN|=\frac{a}{3}.$$

Найдите тангенс угла между прямыми (MP) и (QN).

12. Решите уравнение

$$x+\sqrt{x^2(1+x\sqrt{x^2-4x+4})}=x^2.$$

13. Определите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} axy+x+y=2, \\ yz+y-2z=1, \\ xz-2z+x=-1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Рэндзю — итоги конкурса

Тщательно проверив почти семьсот писем с ответами на задачи по шашкам рэндзю, жюри конкурса определило победителя, нашедшего верные и наиболее короткие выигрышные варианты в большинстве задач. Им стал ученик 10 класса с. ш. № 842 г. Москвы Леонид Глуховский. Ему был вручен приз конкурса, учрежденный редакцией журнала «Квант» и президиумом ПКФР (подготовительный комитет по созданию Федерации шашек рэндзю СССР) — турнирный комплект рэндзю. В числе лучших участников конкурса оказались также: Г. Гребенюк (Уфа), М. Гуляев (Новоалтайск), А. Берсенев (Славянск), О. Большов (Московская обл.), В. Соколовский (Москва), Г. Тютюма (Киев), С. Филиппов (Москва). По результатам конкурса всем участникам был присвоен соответствующий разряд, о котором они узнают из разосланных жюри писем.

В заключение проинформируем читателей, что редакция журнала по Вашей просьбе поможет Вам связаться с одной из ближайших секций рэндзю, которые существуют уже более чем в 70 городах нашей страны.

По многочисленным просьбам читателей приведем с краткими комментариями решения задач конкурса (см. «Квант», 1983, №№ 8, 10).

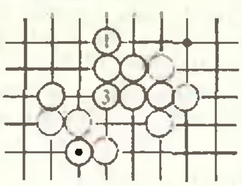


Рис. 1.

1. Самая легкая из конкурсных задач; с ней справились практически все участники.

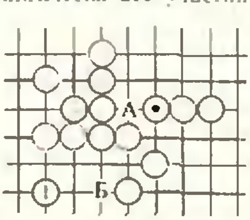


Рис. 2.

2. Приведенное на диаграмме 2 кратчайшее решение не очевидно: большинство присланных решений длиннее. Ход 1 — простейший пример одного из основных тактических приемов эндшпиля — двойное обозначение. Зачастую только таким путем можно выиграть партию. Третий ход, в зависимости от второго хода белых, черные делают в пункты А или Б.

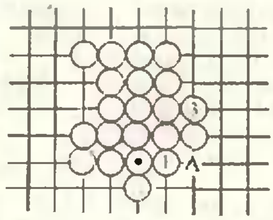


Рис. 3.

3. Черные ходом 1 создают угрозу вилки 3×3. Пятый ход — в пункт А.

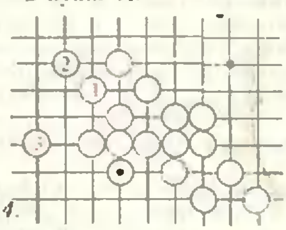


Рис. 4.

4. Исходная позиция черных в этой простой задаче служит иллюстрацией одной из заповедей рэндзиста: нельзя увлекаться атакой, а то это может привести к плачевному финалу.

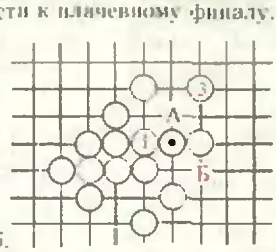


Рис. 5.

5. В атаке важен порядок наступательных ходов. Если первым ходом белые пойдут не в пункт 1, а в пункты А или 3, то черные смогут защититься, *отыграв горизонтальную* четверку.

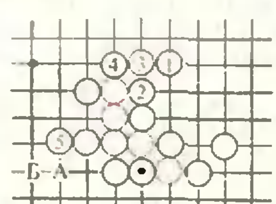


Рис. 6а.

6. Большинство участников конкурса прислали ответы, показанные на диаграмме 6а. Однако первый пришедший в голову маневр часто оказывается ложным, а хорошая позиция безнадежно испорченной. Если здесь черные вторым ходом пойдут в пункт А, а четвертым — в пункт Б, то они успевают перекрыть угрозу белых в пункте 3. Верное кратчайшее решение приведено на диаграмме 6б (если 8 — А, то 9 — В, 11 — Г).

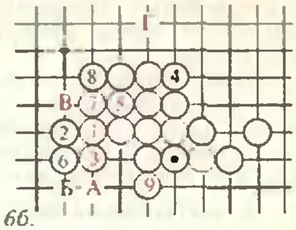


Рис. 6б.

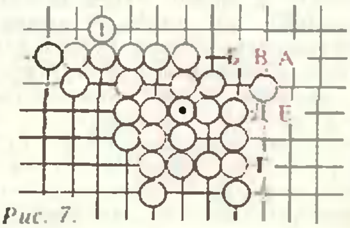


Рис. 7.

7. У белых есть выигрыш на шахах: ходы А — Е. Для защиты (а также для начала выигрышной атаки) у черных есть лишь ход 1.

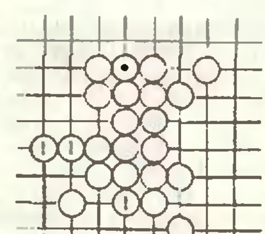


Рис. 8.

8. Неоднозначность решения безусловно сделала задачу менее привлекательной (при игре по правилам классического рэндзю, откуда заимствованы все задачи, решение — единственное). Однако и здесь для нахождения любого из показанных на диаграмме 8 выигрышных ходов нужно было продемонстрировать довольно высокий уровень понимания рэндзю.

9. Попытки выиграть «в лоб» пресекаются контригрой бе-

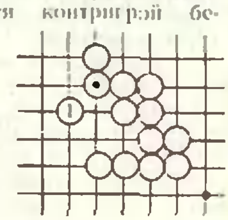


Рис. 9.

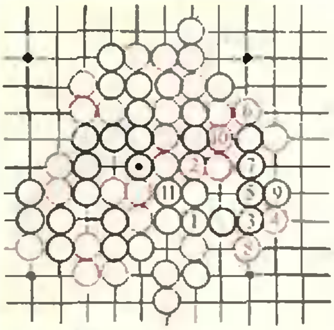


Рис. 10.

лых. К победе приводит лишь обозначение (создание угрозы 4×3) в пункте 1.

10. Самая легкая из задач второго тура.

11. Бросающийся в глаза выигрыш созданием двойного обозначения в пункт 2 (вилки 4×3 в пунктах Б и В) не проходит из-за защиты белых в пункт А. Этот красивый, и

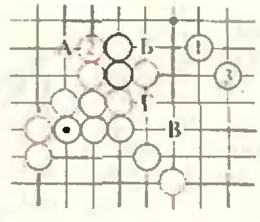


Рис. 11.

порой единственный, способ защиты называется контршахом. Его надо иметь в виду и при атаке. Здесь кратчайший выигрыш достигается последовательными обозначениями 1 и 3. Если же белые делают второй ход в пункт Б, то черные выигрывают ходами Г и В.

12. Очень сложная задача. В этой позиции практически невозможно проследить развитие атаки до конца, и лишь хорошая интуиция, основанная на большом опыте игры, может

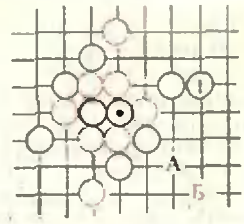


Рис. 12.

подсказать сильный ход. Подмеченная многими участниками конкурса симметрия не является полной из-за разной удаленности краев доски. Поэтому ход 1 является единственным, который не только значительно усиливает позицию черных, но и обеспечивает им пространство для дальнейшего развития атаки. Популярный среди участников конкурса ход в пункт А опровергается защитой в пункт Б.

Н. Н. Александров, А. Г. Сокольский

Ответы, указания, решения

Сколько площадей у многоугольника?

1. Примените подобие треугольников.

2. Предложение профессора Нонсенса не годится, так как написанные равенства, вообще говоря, не верны. Достаточно проверить их ложность для одного какого-нибудь треугольника (например, для треугольника со сторонами 3, 4 и 5).

3. Примените теорему о равенстве углов с соответственно параллельными сторонами.

4. Нужно проверить, что величина полученного угла не зависит от выбора точки, через которую проводятся прямые, параллельные данным. Проверка основана на той же теореме, что и 3.

5. Прямоугольник со сторонами 34 и 13 закрыт не полностью: между фигурами остаются щели.

6. Пусть проведены оба разрезания (показанные на рисунке 1 синим и красным). Тогда многоугольник разрезан на кусочки, из которых можно сложить треугольники как первого, так и второго способа. Сумма площадей этих кусочков равна каждой из сумм, о которых шла речь. Поэтому эти суммы равны.

7. Формулу (1) можно доказать индукцией по числу самопересечений контура. Совершая индукционный шаг, мы берем одно самопересечение, разрезаем в этой точке провода и соединяем их иначе, так что получится два многоугольника (рис. 2). Из физических соображений ясно,

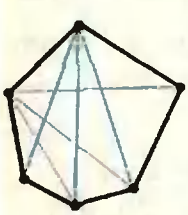
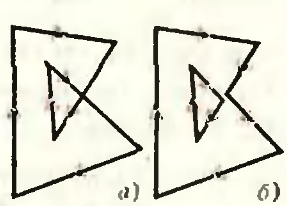


Рис. 1.



а) б)

Рис. 2.

что и сумма потоков вектора $\vec{B}$ через эти два многоугольника равна потоку через прежний многоугольник.

8. Можно применить тот же прием, что в 7.

Теорема Виета и вспомогательный многочлен

Задачи

5. $u^8+\frac{1}{u^8}=1154$. Указание: число $u=1+\sqrt{2}$ является корнем квадратного трехчлена t^2-2t-1, поэтому $u-\frac{1}{u}=2$; $u^2+\frac{1}{u^2}=6$, $u^4+\frac{1}{u^4}=34$, $u^8+\frac{1}{u^8}=1154$.

10. $\left(1,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{2},\ 2\right)$, $\left(2,\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(2,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 2\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ 2,\ 1\right)$. Указание: полагая $x+y+z=a$, получим:

$$P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-at^2+at-1=$$
$$=(t-1)(t^2+t+1-at),$$

поэтому один из корней равен 1.

13. $x_1=x_2=\ldots=1$. Указание: положим $P(t)=(t-x_1)(t-x_2)\ldots(t-x_n)=t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n$; тогда $0=P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_n)=n+na_1+na_2+\ldots+na_n=nP(1)$, значит, одно из чисел $x_1, \ldots, x_n$ (скажем, x_1) равно 1. Теперь для $x_2, x_3, \ldots, x_n$ получаем аналогичную систему, и т. д.

Упражнения

1. Указание: $\varphi^2+\varphi-1=0$, $\varphi^4=(1-\varphi)^2=1-2\varphi+(1-\varphi)=2-3\varphi$, $\varphi^8=4-12\varphi+9\varphi^2=4-12\varphi+9(1-\varphi)=13-21\varphi$.

2. 1 см, 8 см, 15 см. Указание: три измерения x, y, z параллелепипеда удовлетворяют системе уравнений $4(x+y+z)=96$, $2(xy+yz+zx)=286$, $xyz=120$, то есть являются корнями уравнения $t^3-24t^2+143t-120=0$.

3. $(1,\ 1,\ -1)$, $(1,\ -1,\ 1)$, $(-1,\ 1,\ 1)$. Указание: из двух первых уравнений и формул

Виета следует, что числа x, y, z являются корнями многочлена вида $t^3-t^2-t+r=0$ ($xy+yz+zx=((x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2)/2=-1$). Отсюда, аналогично решениям задач 3 и 4, получаем, что $t^5=(3-r)t^2-(2-r)t-2r$ при $t=x$, y, z. Складывая эти три равенства и используя третье уравнение исходной системы, найдем, что $r=1$, то есть числа x, y и z — корни многочлена $t^3-t^2-t+1=(t-1)^2(t+1)$.

4. $5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$. Указание: рассмотрите многочлен с корнями $u=x-y$, $v=y-z$, $w=z-x$ и, используя соотношение $u+v+w=0$, действуйте аналогично решению задачи 8.

5. Указание: если $P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3+pt^2+qt+r$, то $-r>1$, $-p<q/(-r)$. Подставляя $t=1$, получим: $P(1)=1+p+q+r>1+p+pr+r=(1+p)(1+r)>0$, то есть $(1-x)(1-y)(1-z)>0$.

Где ошиблись Петя и Вова?

Оба ученика не правы. Пусть имеется система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y)=g_1(x, y), \\ f_2(x, y)=g_2(x, y). \end{cases} \qquad (1)$$

Петя получил систему

$$\begin{cases} f_1(x, y)=g_1(x, y), \\ f_1(x, y)f_2(x, y)=g_1(x, y)g_2(x, y). \end{cases} \qquad (2)$$

Системы уравнений (1) и (2), вообще говоря, неравносильны. Ясно, что любое решение системы (1) является решением системы (2). Обратное в общем случае неверно: любое решение системы $f_1(x, y)=g_1(x, y)=0$ — решение системы (2), но может не быть решением уравнения $f_2(x, y)=g_2(x, y)$, а, следовательно, и решением системы (1).

Аналогичную ошибку сделал и Вова. Если бы ребята сделали проверку, то получили бы верный ответ: (1; 0).

Двугранные и трехгранные углы

1. Рассмотрите сечение двугранного угла любой плоскостью, перпендикулярной его ребру и примените соответствующее свойство биссектрисы угла на плоскости.

2. а) Поверните двугранный угол на 180° вокруг оси l.

б) Ответ: в случае, когда прямая l лежит в биссекторной плоскости; при этом рассматриваемых в п. а) плоскостей бесконечно много. См. указание к п. а).

3. а) Докажите, что (любые) две биссекторные плоскости пересекаются и что любая точка линии их пересечения равноудалена от всех трех граней угла и потому лежит на третьей биссекторной плоскости. б) Пусть A, B, C — такие точки на ребрах трехгранного угла, что $|SA|=|SB|=|SC|$, тогда линии пересечения рассматриваемых плоскостей с треугольником ABC — медианы этого треугольника. в) Каждая из рассматриваемых плоскостей есть множество точек, равноудаленных от каких-то двух вершин треугольника ABC из указания к п. б).

4. Ответ: нет. Решение. Рассмотрим трехгранный угол $SABC$, у которого плоские углы BSA и CSA — прямые, а $\widehat{BSC}<60°$, и предположим, что треугольник ABC — правильный (рис. 3). Тогда $|AB|=|AC|$, поэтому $|BS|=|CS|$. Далее, $|BC|<|CS|$, поскольку $\widehat{BSC}<60°$, а $|CS|<|CA|$ (катет меньше гипотенузы). Получили противоречие: $|BC|<|AC|$ в правильном треугольнике ABC.

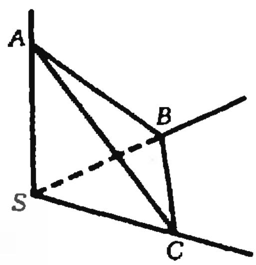


Рис. 3.

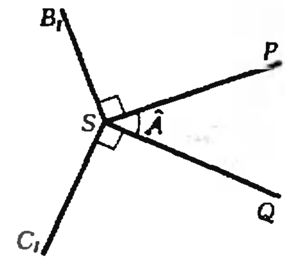


Рис. 4.

5. 1) Пусть $SA_1B_1C_1$ — полярный угол к углу $SABC$, тогда ребро SA перпендикулярно к плоскости SB_1C_1, так как SB_1 и SC_1 по определению полярного угла перпендикулярны к плоскостям SAC и SAB. 2) В сечении двугранного угла при ребре SA, проходящем через S и перпендикулярном к этому ребру, получится картина, показанная на рисунке 4: ребра SB_1 и SC_1 лежат в плоскости сечения и соответственно перпендикулярны сторонам угла PSQ — линейного угла двугранного угла при ребре SA, причем углы B_1SQ и C_1SP — тупые. Отсюда следует, что $\alpha+\hat{A}=\widehat{B_1SC_1}+\widehat{PSQ}=\pi$. Соотношения (5) следуют из (4) и свойства 1).

6. Ответ: а) $]0; 2\pi[$; б) $]\pi; 3\pi[$. Указания: а) неравенство $\alpha+\beta+\gamma<2\pi$ доказано в статье; то, что любое значение суммы от 0 до 2π возможно, видно из рассмотрения угла при вершине правильной треугольной пирамиды; б) примените свойство 2) полярного трехгранного угла и п. а).

7. а) Воспользуйтесь второй теоремой косинусов. б) Ответ: нет.

8. а) Воспользуйтесь второй теоремой косинусов или рассмотрите «смежный» трехграный угол, продолжив одно из ребер данного — этот угол будет «равнобедренным» (см. упражнение 11, а). б) Ответ: да.

9. Найдите $\sin^2 \hat{A}$ из равенства $\sin^2 \hat{A}=1-\cos^2 \hat{A}$ и первой теоремы косинусов; покажите, что $\sin^2 \hat{A}/\sin^2 \alpha = (1-(\cos^2 \alpha+\cos^2 \beta+\cos^2 \gamma)+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)/\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$.

10. Все эти прямые перпендикулярны прямой SH из решения задачи 3 в статье.

11. а) Воспользуйтесь второй теоремой косинусов. б) Ответ: нет.

XXV Международная математическая олимпиада

1. Из того, что числа x, y, z положительны, а их сумма равна 1, следует, что каждое из них не превосходит 1. Поэтому $xy+xz+yz-2xyz=xy(1-z)+xz(1-y)+yz\geqslant 0$. Можно считать, что $x\leqslant y\leqslant z$; тогда нетрудно показать, что $x\leqslant \frac{1}{3}$, $y\leqslant\frac{1}{2}$, $z\geqslant\frac{1}{3}$. Из очевидного тождества

$$xz=\frac{1}{3}\left(x+z-\frac{1}{3}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)$$

вытекает, что $xz\leqslant\frac{1}{3}\left(x+z-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-y\right)$, так как $x-\frac{1}{3}\leqslant 0$, а $z-\frac{1}{3}\geqslant 0$. Используя это неравенство и неравенство $y\leqslant\frac{1}{2}$, получаем

$$xy+xz+yz-2xyz=(x+z)y+xz(1-2y)\leqslant$$
$$\leqslant(1-y)y+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-y\right)(1-2y)=\frac{2}{9}-\frac{2}{9}y-$$

$$-\frac{y^2}{3}=\frac{7}{27}-\frac{1}{3}\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leqslant\frac{7}{27}.$$

2. Решение задачи М897 см. в одном из следующих номеров «Кванта».

3. Рассмотрим все окружности радиуса меньше 1 с центром O. Поскольку их бесконечно много, а число цветов, в которые они раскрашены — конечно, среди них найдутся две окружности, радиусов r и s $(0<r<s<1)$, окрашенные одинаковыми наборами цветов (наборов цветов — тоже конечное число). Возьмем на окружности радиуса r точку Y, для которой $a(Y)=r(s-r)$ (очевидно, $0<a(Y)<1$), тогда $C(Y)$ — это вторая из наших окружностей $(r+r(s-r)/r=s)$. Следовательно, Y — искомая точка (в набор цветов окружности $C(Y)$ входит и цвет точки Y).

4. Решение задачи М896 см. в одном из следующих номеров «Кванта».

5. Левая часть неравенства может быть переписана в виде:

$$\frac{p}{n}<\frac{d}{n(n-3)/2}.$$

Это утверждение можно прочесть следующим образом: среднее арифметическое длин сторон выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин его диагоналей, что повторяет формулировку задачи М846, решение которой помещено в «Кванте» № 7 за 1984 год на с. 53.

Докажем вторую часть неравенства. Сначала рассмотрим случай нечетного числа сторон: $n=2k+1$. Заметим, что длина диагонали, стягивающей две вершины, стоящие через одну, меньше суммы длин сторон с концами в этих трех вершинах. Отсюда d_2 — сумма длин всех таких диагоналей,— меньше, чем $2p$. d_3 — сумма длин диагоналей, стягивающих вершины, лежащие на периметре многоугольника через две,— меньше $3p$, ..., $d_k<kp$. Но сумма $d_2+d_3+...+d_k=d$, а сумма $2p+3p+...+kp=$ $=(k+2)(k-1)p/2$. Учитывая, что $n=2k+1$, получаем $(k+2)(k-1)p/2=\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-\right.$ $\left.-2\right)p/2$. Тем самым неравенство доказано.

В случае $n=2k$ возникают «диаметральные» диагонали, по одну и другую сторону от которых находится по $k-1$ вершин. Нужно заметить, что длина каждой из них меньше $p/2$ и поэтому $d_k<kp/2$. В то же время d_2+d_3+ $+...+d_{k-1}<p(2+3+...+(k-1))=(k-2)\times$ $\times(k+1)p/2$.

Окончательно получаем

$$d<\frac{kp}{2}+\frac{(k-2)(k+1)p}{2}=\frac{p}{2}(k^2-2)=$$
$$=\frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right).$$

Решение Ф. Назарова, за которое он получил специальный приз жюри, основано на легко устанавливаемом неравенстве для проекций сторон диагоналей на прямую заданного направления и последующего интегрирования этих неравенств по всем направлениям. Известно, что соответствующий интеграл для одного отрезка равен удвоенной длине этого отрезка. Тем самым неравенство для проекций переносится на неравенство для самих отрезков.

6. Решение задачи М898 см. в одном из следующих номеров «Кванта».

XV Международная физическая олимпиада

Теоретический тур

Задача 1

а) Разобьем пластинку на тонкие плоскопараллельные слои с показателями преломления n_1, n_2, ..., n_n (рис. 5). Тогда можно записать:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1}=\frac{n_1}{n_A},\ \text{или}\ n_A\sin\alpha=n_1\sin\gamma_1,$$

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{n_2}{n_1},\ \text{или}\ n_1\sin\gamma_1=n_2\sin\gamma_2,$$

. . . .

$$\frac{\sin\gamma_n}{\sin\beta}=\frac{n_B}{n_n},\ \text{или}\ n_n\sin\gamma_n=n_B\sin\beta.$$

Отсюда получаем

$$n_A\sin\alpha=n_1\sin\gamma_1=n_2\sin\gamma_2=...=n_n\sin\gamma_n=$$
$$=n_B\sin\beta,$$

или

$$n_A\sin\alpha=n_B\sin\beta.$$

б) Пусть наблюдатель смотрит под углом α, а глаз находится в среде с показателем преломления n. Тогда для любой точки с показателем преломления n_x выполняется соотношение (см. пункт а)) $n\sin\alpha=n_x\sin\alpha_x$. Так как $\sin\alpha_x$ не может быть больше 1, луч не войдет в среду с показателем $n_x\leqslant n\sin\alpha$. Обозначим через n_0 показатель преломления у поверхности Земли. Пока угол α мал, $n_0>n\sin\alpha$, и наблюдатель видит песок (рис. 6). При критическом угле $\alpha_{\text{крит}}=\operatorname{arcctg} h/L$ $n_0=n\sin\alpha_{\text{крит}}$, и в глаз наблюдателя попадает луч, скользящий по поверхности Земли. Наконец, когда $\alpha>\alpha_{\text{крит}}$ наблюдатель видит небо, а создается ощущение видения водной глади.

в) Так как $(n-1)$ пропорционально плотности частиц в газе, а плотность частиц обратно пропорциональна температуре газа, можно записать:

$$(n_0-1)T_0=(n_1-1)T_1=(n_2-1)T_2.$$

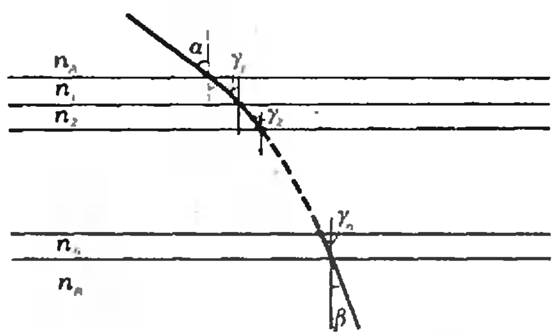


Рис. 5.

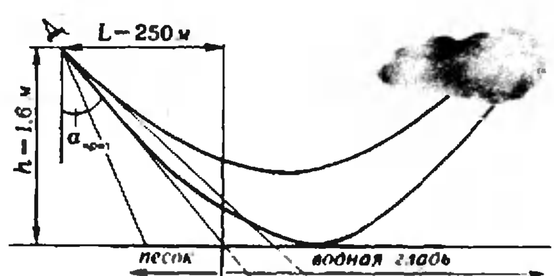


Рис. 6.

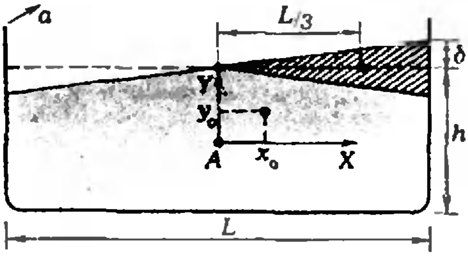


Рис. 7.

где индекс «0» относится к поверхности Земли, индекс «1» соответствует температуре T_1, а «2» — T_2. Как следует из пункта б),

$$n_0=n_1\sin\alpha_{\text{крит}}=n_1L/\sqrt{L^2+h^2}.$$

тогда

$$T_0=T_1\frac{n_1-1}{n_0-1}=$$

$$=T_1\frac{n_1-1}{((n_1-1)T_1/T_2+1)L/\sqrt{L^2+h^2}-1}\approx$$

$$\approx 329\text{ К, или } t_0\approx 56\ ^\circ\text{C}.$$

Задача 2

Пусть A — центр масс водоема в невозмущенном состоянии (рис. 7). Найдем его координаты x_0 и y_0 в начальный момент колебаний, которые равны амплитудным значениям:

$$x_0=\frac{\varrho a(\delta L/2)(L/3)}{\varrho aLh}=\frac{\delta L}{6h},$$

$$y_0=\frac{\varrho a(2/3\delta)(\delta L/4)}{\varrho aLh}=\frac{\delta^2}{6h}.$$

(Отсюда видно, что $x_0\gg y_0$.) В процессе колебаний координаты центра масс изменяются по законам $x=x_0\cos\omega t$, $y=y_0\cos\omega t$, где ω — частота колебаний.

Согласно закону сохранения энергии, начальный запас потенциальной энергии системы равен запасу критической энергии при прохождении системой положения равновесия:

$$\varrho ga\frac{\delta^2L}{6}=\frac{\varrho aLh}{2}\left((x'(t))^2+(y'(t))^2\right),$$

или

$$\frac{g\delta^2}{3h}=\omega^2\left(\frac{\delta^2L^2}{36h^2}+\frac{\delta^4}{36h^2}\right).$$

Пренебрегая вторым слагаемым по сравнению с первым в правой части равенства, получим

$$\omega=2\frac{\sqrt{3gh}}{L},$$

откуда период колебаний

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}.$$

Эту формулу можно проверить, сравнивая значения $T_{\text{выч}}$, вычисленные из нее, со значениями $T_{\text{экс}}$, данными в таблице. Легко заметить, что $T_{\text{экс}}=1{,}1\,T_{\text{выч}}$. Для озера Веттерн $T_{\text{выч}}\approx 3$ часа, следовательно, единица масштаба на диаграмме соответствует приблизительно 2 часам. Были предложены и другие решения этой задачи. Например, предположив, что образовалась стоячая волна, и зная скорость распространения волн $v=\sqrt{gh}$, получаем $T=2L/\sqrt{gh}$. Можно было также весь водоем представить как большое число сообщающихся сосудов, в каждом из которых происходят колебания с периодом $T=2L/\sqrt{gh}$. Эти решения, предложенные советскими участниками олимпиады, оценивались одинаково с официальным решением.

Задача 3

Полное решение содержит 12 схем электрического фильтра (рис. 8), тогда как в официальное решение входило только 4 первых. Рассмотрим одну из возможных схем (рис. 9) и построим для нее векторную диаграмму (заметим, что метод векторных диаграмм в наших школах не изучается). Из диаграммы найдем

$$U_1=I_1R,\quad U_2=I_1\omega L,$$

$$I_2=\frac{\sqrt{U_1^2+U_2^2}}{R}=I_1\frac{\sqrt{R+\omega^2L^2}}{R}.$$

$$U_4\cos\beta=-U_2,\quad U_4\sin\beta=U_{\text{вых}},$$

$$U_{\text{вх}}=U_1+U_{\text{вых}},$$

$$\frac{I_1}{\omega C}+\frac{I_2}{\omega C}\cos\alpha=U_2=I_1\omega L,$$

$$\cos\alpha=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}.$$

откуда

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{LC}}=5{,}6\cdot10^3\text{ Гц},$$

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}=\frac{L}{R^2C+L}=0{,}138.$$

Аналогичные рассуждения можно привести и для всех остальных схем. Можно было решать задачу в общем виде (что и было сделано советскими участниками олимпиады). Обозначим сопротивления каждого элемента через z_1, z_2, z_3 и z_4, найдем искомое отношение напряжений:

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}=$$

$$=1-\frac{z_1z_2}{z_1(z_2+z_3)+z_4(z_1+z_2+z_3)}$$

и представим его в виде

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}=\delta=1-\frac{1}{A+iB}.$$

Сдвига фаз между напряжениями не будет, если $B=0$ и $\delta>0$. Если же $\delta<0$, $\varphi=\pi$. Преобразуем выражение для δ:

$$\delta=1-\frac{1}{A+iB}=1-\frac{A-iB}{A^2+B^2}=$$

$$=1-\frac{A}{A^2+B^2}+\frac{iB}{A^2+B^2},$$

$$\delta^2=\left(1-\frac{A}{A^2+B^2}\right)^2+\left(\frac{B}{A^2+B^2}\right)^2=$$

$$=1-\frac{2A-1}{A^2+B^2},$$

откуда следует, что δ минимально при $B=0$, поэтому

$$\delta=1-\frac{1}{A}.$$

При $f\to0$ или $f\to\infty$ $\delta\to1$ и $A\to\infty$. Это возможно, если: а) $z_1\to0$; б) $z_2\to0$; в) $z_3\to\infty$, а

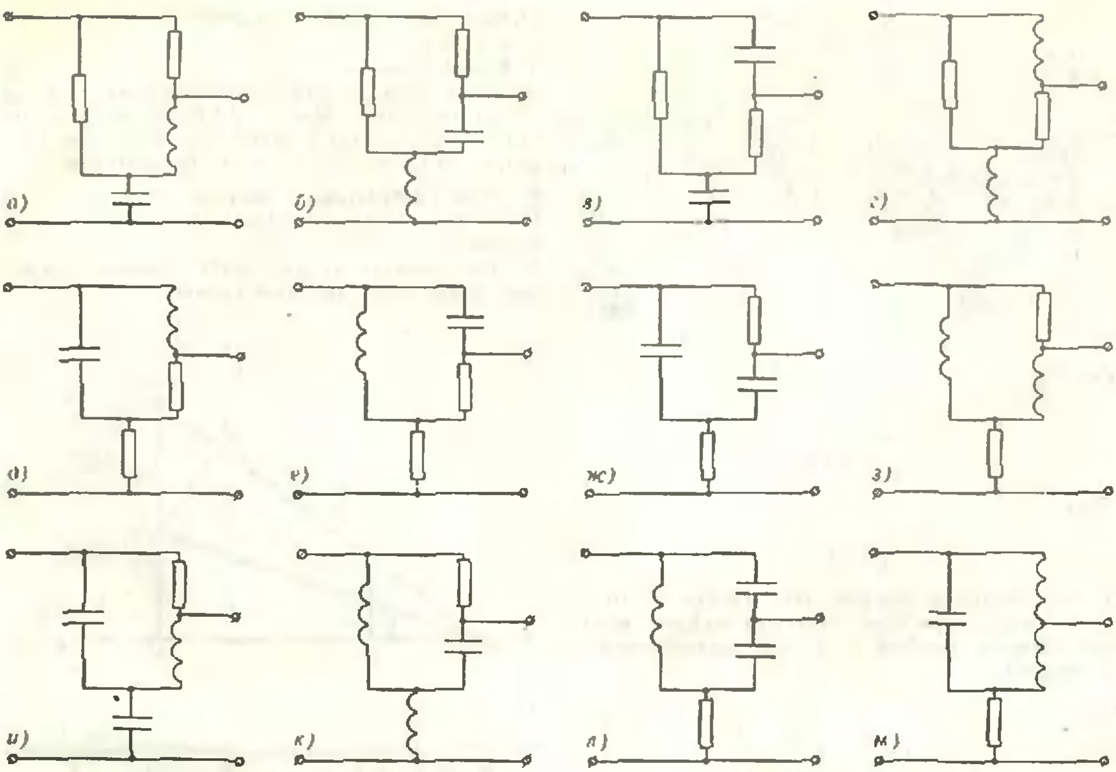


Рис. 8.

$z_2 \not\to \infty$; г) $z_4 \to \infty$, а z_1 и $z_2 \not\to \infty$. Учитывая еще, что δ должно быть больше 0, можно найти значения f и δ для всех приведенных схем.

Экспериментальный тур

Задача 1

Собираем схему, указанную в условии задачи. К выводам схемы и к конденсатору подключаем осциллограф и получаем две осциллограммы, изображенные на рисунке 10. От момента времени t_1 до t_2 конденсатор заряжается от сети, а от t_2 до t_3 — разряжается через резистор. Согласно закону Ома для цепи, содержащей заряженный конденсатор и резистор,

$$\frac{q}{c} + q'(t)R = 0,$$

откуда

$$\ln\frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC}, \quad q = q_0 e^{-t/(RC)},$$

$$\text{или } U = U_0 e^{-t/(RC)}.$$

Обозначим произведение RC через τ и найдем его значение из осциллограммы:

$$u_{t_2} = 0{,}3\text{ В}, \quad u_{t_3} = 0{,}1\text{ В}, \quad t_3 - t_2 \approx 1{,}8\cdot 10^{-3}\text{ с},$$

$$\tau_1 \approx 1{,}65\cdot 10^{-3}\text{ с}.$$

Нарисуем график зависимости $u = u(t)$ в полулогарифмическом масштабе (рис. 11), из которого видно, что от 3 до 5 мс график представляет собой прямую линию (значит, зависимость действительно экспоненциальная). Из графика найдем

$$\tau_2 = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \approx 1{,}55\cdot 10^{-3}\text{ с}.$$

Можно считать, что

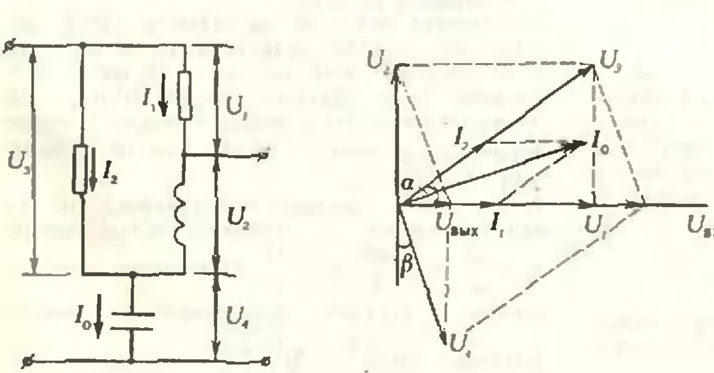


Рис. 9.

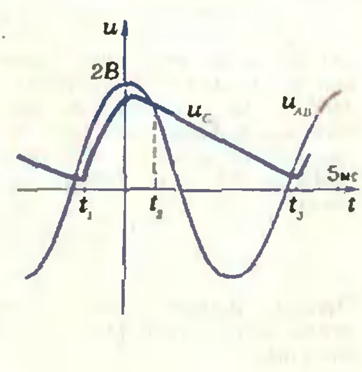


Рис. 10.

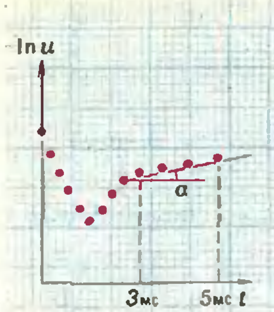


Рис. 11.

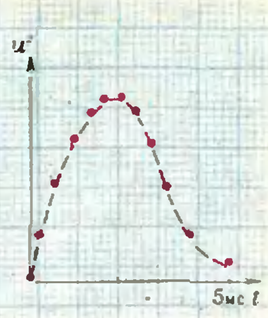


Рис. 12.

$$\tau=\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\approx 1{,}6\cdot 10^{-3}\text{ с}.$$

Тогда

$$R=\frac{\tau}{C}\approx 16\text{ кОм}.$$

Теперь построим график зависимости u^2 от t (рис. 12), с помощью которого найдем искомое значение средней мощности, выделяющейся в резисторе:

$$dQ=\frac{u^2}{R}\,dt,\quad P=\frac{\int\limits_0^T dQ}{T}.$$

Здесь $\int\limits_0^T dQ$ — количество теплоты, которое выделяется за период T. Оно равно численно площади под графиком зависимости $u^2(t)$. Полагая $T=5$ мс, получаем

$$P=(50\pm 2{,}5)\text{ мкВт}.$$

Задача 2

Для определения длины волны лазера воспользуемся объект-микрометром как дифракционной решеткой:

$$d_0\sin\alpha_0=n_0\lambda_0.$$

Здесь $d_0=10^{-5}$ м — постоянная объект-микрометра, α_0 — угол, под которым наблюдается максимум n_0 порядка, λ_0 — длина волны лазера. Отсюда

$$\lambda_0=\frac{d_0\sin\alpha_0}{n_0}.$$

Проделаем то же самое для дифракционной решетки и найдем ее постоянную:

$$\lambda_0=\frac{d_1\sin\alpha_1}{n_1},\ \text{и}\ d_1=d_0\frac{n_1\sin\alpha_0}{n_0\sin\alpha_1}.$$

Теперь вычислим длину волны λ_x желтой линии неона. Для этого закрепим лампу в зажиме, закроем ее линейкой, оставив только тонкую полоску, и будем смотреть на нее через дифракционную решетку. Мы увидим несколько ее изображений. Для любого из них можно записать

$$\lambda_x=\frac{d_1\sin\alpha_2}{n_2}.$$

Проведя соответствующие измерения и вычисления, для искомой длины волны было получено значение

$$\lambda_x=(5{,}9\pm 0{,}2)\cdot 10^{-7}\text{ м}.$$

«Квант» для младших школьников

(см. с. 27)

1. Еще 4 стаканчика.
2. Из рисунка 13 легко установить, что каждый из треугольников MNL и LKP равен треугольнику ABD. Отсюда следует, что AL — ось симметрии угла BAD, то есть его биссектриса.
3. Ответ изображен на рисунке 14.
4. На рисунке 15 приведены два возможных решения.
5. При нажатии кнопки звонит звонок и зажигается лампочка над этой кнопкой.

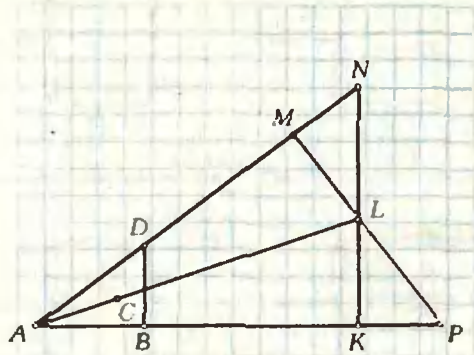


Рис. 13.

	6а	6б	6в	6г	Очки	Счет	Место
6а		1:1	0:1	5:1	3	6:3	2
6б	1:1		0:1	1:2	1	2:4	4
6в	1:0	1:0		1:1	5	3:1	1
6г	1:5	2:1	1:1		3	4:7	3

Рис. 14.

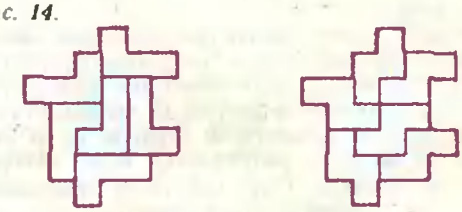


Рис. 15.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. Имеется всего 6 двузначных чисел, являющихся точными квадратами: 16, 25, 36, 49, 64 и 81, но лишь одно из них — 16 после перестановки цифр образует простое число — 61. Таким образом, есть 4 номера телефона, удовлетворяющие условию: 2-61-16; 3-61-16; 5-61-16; 7-61-16.
2. Если S — площадь треугольника, то его высоты связаны со сторонами соотношениями: $h_a=\frac{2S}{a}$, $h_b=\frac{2S}{b}$, $h_c=\frac{2S}{c}$. Подставляя эти выражения в заданное соотношение для высот, получаем, что $\frac{2S}{c}=\sqrt{\frac{2S\cdot 2S}{ab}}$, откуда $c=\sqrt{ab}$. В нашем случае $c=\sqrt{7\cdot 2}=\sqrt{14}$, но $c>a-b$ в то

1	6	9	5
3	4	2	7
8	0	5	4
1	0	0	6

Рис. 16.

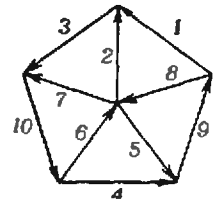


Рис. 17.

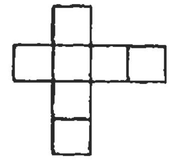


Рис. 18.

время как $\sqrt{14}<7-2=5$. Следовательно, такого треугольника не может быть.

3. Соедините две стеклянные трубки шлангом и приложите их к краю стены. Затем наливайте в одну из трубок воду, пока уровень воды в ней не сравняется с краем стены. Если кладка не горизонтальна, уровень воды во второй трубе будет ниже или выше края кладки.

4. Заметим, что количество литров масла, содержащегося в семнадцати литровых бидонах должно оканчиваться на 3. Это возможно лишь в том случае, если таких бидонов 9. Отсюда следует, что десятилитровых бидонов — 7, а всего 16 бидонов.

5. См. рис. 16.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 11)

1. Ответ: 73 и 37. Решение. Легко понять, что цифры a и b, из которых составлены эти числа, обе нечетны и ни одна из них не равна 5. Кроме того, они различны. Пусть $a>b$, тогда разность $(10a+b)-(10b+a)=9(a-b)$ должна быть полным квадратом, что возможно лишь при $a-b=4$. Отсюда получаем, что $a=7$, $b=3$.

2. См. рис. 17.

3. При охлаждении жидкости, находящейся в сосуде, основную роль играет испарение со свободной поверхности. На остывающем киселе образуется пленка, которая «закрывает» эту поверхность. Кроме того, кисель очень вязок, в нем практически отсутствует конвекция. По всему по этому кисель охлаждается медленнее компота.

4. Ответ: 27, 2710027, 271002710027 и т. д.

Решение. Число $\overline{100ab...x}$ в 37 раз больше числа $\overline{ab...x1}$. Начнем делить первое число на 37. Первая цифра частного — 2, то есть $a=2$. Учитывая это, делим дальше и получаем, что вторая цифра частного — 7, следовательно, $b=7$. Следующая цифра частного — 1, причем деление произведено нацело. Здесь можно остановиться и получить ответ 27, а можно и продолжить деление и получить остальные ответы.

5. Перебором нетрудно показать, что искомая фигура не может состоять меньше, чем из 7 клеток. На доске, показанной на рисунке 18, начинающий выигрывает, поставив первым ходом крестик в «центральную» клетку.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 8, 9)

Задание 15 (Кин — Мортенсен, Орхус, 1983 г.). **1. b4! cb 2. f4!** Белые создали страшную угрозу Лa1—d1—d4×. **2...Лc6** (2...Л:g3 3. Л:e7×, 2...Лh7 3. Л:e7+! Л:e7 4. Лd1) **3. Лd1 Л:c4 4. Лc7!** Черные сдались.

Задание 16 (Хазаи — Сабо, Будапешт, 1983 г.). **1. Kg6!! Л:d4** На 1...fg решает 2. Фd3, а на 1...Лg8 — 2. Фf3. **2. Л:d4 fg 3. Фe4! Фe7** (3...Лf8 4. Ф:g6+ Крe7 5. Ф:g7+ Крe8 6. Л:f8+ С:f8 7. Фg6+ Крe7 8. Лf4 и т. д.) **4. Л:d7! Ф:d7 5. Фa8+ Фd8 6. Фc6+ Фd7 7. Ф:c5 Фb7 8. Фd6 Фc8 9. Ф:b4 g5 10. a3.** Черные сдались.

Задание 17 (А. Карпов — Б. Спасский, Москва, 1973 г.). Компенсация за качество у белых достаточная, но можно ли было предположить, что партия продлится всего два хода? Ведь 30.Фd2 не годится — 30...Лad8 31. Ф:d6? Кf8! и верх берут черные.

32.Фg5!f6. Размен ферзей приводил к потере коня. **33.Фg4 Крh7.** Отражая угрозу 34. Л:d6 и Кf5+, но теперь в бой энергично вступает второй конь белых. **34. Кh4!** Черные сдались, убедившись, что в варианте 34...Лg8 (34...Кf8 35.К:g6 с дальнейшим 36.Фh5+ и 37.Л:d6) 35.С:c4 Лg7 36.Л:d6 Ф:d6 37.Кhf5 спастись от мата можно только ценой ферзя — 37...Фd1+.

Задание 18 (С. Татаи — А. Карпов, Лас—Пальмас, 1977 г.). Партия получилась эффектной благодаря ходу **23...Фd3!** Не часто ферзь так просто встает под удар неприятельской пешки. **24.ed.** Допускает изящное развитие атаки, но и лучшее 24.Фd2 (24.Кe3 Ф:c2 и С:b2) вряд ли оставляло белым шансы на спасение: 24... Ф:d2+ 25.Кр:d2 Лad8+ 26. Крe1 Лc8 с угрозой Лc2. **24...ed+ 25.Крd2 Лe2+! 26.Кр:d3 Лd8+ 27.Крc4 Л:c2+ 28.Кр:b4 Лcd2! 29.f3 Сf8+ 30.Крa5 Сd7! Белые сдались.**

Чайнворд
(см. с. 26)

1. Эллипс; 2. Стеклов; 3. Высота; 4. Апофема; 5. Арифметика; 6. Ампер; 7. Радиус; 8. Скобки; 9. Интеграл; 10. Лаплас; 11. Синус; 12. Сегмент. На нечетных номерах стоят буквы имени французского математика Эвариста Галуа.

Напечатано в 1984 году

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, А. И. Климанов, А. Я. Коршунов, И. Б. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. Э. Чудновский, Е. С. Шабельник
Фото представили:
Л. Д. Шварц

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 18.10.84
Подписано к печати 22.11.84
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр.-отт. 23,80
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,77 Т-21369
Цена 40 коп. Заказ 2807 Тираж 172 768 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

МАТЧ ВЕКА

Свои последние партии перед поединком Карпов и Каспаров провели в «матче века»: сборная СССР — сборная шахматистов «остальных стран». В этом увлекательном состязании, которое проходило на десяти досках в четыре круга, верх взяли наши гроссмейстеры со счетом 22:18, несколько улучшив результат (20,5:19,5) почти 15-летней давности. На первых двух досках Карпов и Каспаров выиграли свои матчи с одинаковым счетом 2,5:1,5 (победа и три ничьи) соответственно у Андерссона и Тиммана после упорной борьбы.

А. Карпов — У. Андерссон
Новоиндийская защита

1.d4 Кf6 2.c4 e6 3.Кf3 Сb4+ 4.Сd2 С:d2+ 5.Ф:d2 0—0 6.Кc3 d5 7. e3 Кbd7 8.cd ed 9. Сd3 Лe8 10.0—0 Кe4 11.Фc2 Кdf6 12.b4. Не будем слишком подробно останавливаться на дебютных тонкостях. Ход пешкой типичен для подобных позиций, он определяет так называемую атаку пешечного меньшинства на ферзевом фланге. Некоторая инициатива принадлежит белым, однако в нечто реальное она превратится только через ...70 ходов. **12...c6 13.Кe5 Сf5 14.Кa4! g6 15.Фb2 a6 16.Лfc1 Лe7 17.Кc5 К:c5 18.bc С:d3 19.К:d3 Лc8 20.Лc3 Лcc7 21. Лb3 Кe8 22. Фe2 f6 23. Фf3 Лf7 24. Крf1 Кg7 25. Крe2 Лce7 26. Крd1! Фc8 27.Лab1 h5 28.h3 Кe6 29. h4 Крh7 30. Фh3 Фe8 31. Крc2 Лd7 32. Крb2 Кg7 33. Кf4 Лfe7 34. Крa1 Фf7 35. Лg1 Кe6 36. Кd3 Кg7 37. g4 hg 38. Л:g4 Кh5 39.Лb1. Фe6 40.Фf3 Лg7 41.Лbg1.** В этом положении партия была отложена. Специалисты полагали, что у черных больше шансов на ничью, чем у белых на победу. Однако Карпов придерживается иного мнения. **41...Лde7 42.Крb2!** Задача белых поменять коней и использовать уязвимость неприятельских пешек, но сразу 42.Кf4 не опасно из-за ответа 42...Фf5. Кажется, что сейчас черные могут проявить активность — 42...f5. После 43.Лg5 Фe4 44. Фd1 (44. Ф:e4 Л:e4 45. Кe5 Л:h4 46.К:g6 Лg4 с равенством) 44...Ф:h4 у белых ничего нет. Однако сильнее 43.Л4g2!, и если теперь 43...Фe4 44.Фd1 Ф:h4, to 45. Лh1 Фe4 46. Л:g6! (46. Кf4 Крg8) 46... Кр:g6 (46... Л:g6 47. Ф:h5+ Крg7 48. Фh8+ Крf7 49. Лh7+) 47. Ф:h5+ Крf6 48. Кf4, и черные на краю пропасти; забавна угроза 49. Лe1 и 50. f3.

42...Крh6 43.Крc3 Фf7 44.Кf4 К:f4 45.Л:f4 Лe6 46.Крd2 Фe7 47.Крe2 Крh7 48.Крf1 Крh6 49.Лg3 Крh7 50.Лfg4 Фf7 51.Лf4. На сей раз жертва ладьи не проходит: 51.Л:g6 Л:g6 52.Фf5 Крh6 53.Л:g6+ Ф:g6 54.Ф:e6 Крh5!

51...Крh6 52.Крg1 Крh7 53.Крh2 Крh6 54.Фg2 Крh7 55.Крg1 Лe8 56.Фf3 Лf8 57.Крf1 Фe7 58.Фd1 Фe8 59.Фb1 Крh6 60.Крe2 Фd8 61.Лfg4 Лfg8 62.Крf1 Фe8 63.Фd1 Фe6 64.Фf3 Лf7 65.Крg1 Лfg7 66.a3 Лe7 67.Крh2 Лf7 68.Лf4 Крh7 69.Фd1 Крh6 70.Фd3 Фe8 71.e4! de 72.Л:e4 Фd7 73.Фe3+ Крh7 74.Лe6 Лgg7 75.Лf3 f5 76.h5! gh 77.Фh6+ Крg8 78.Лfe3.

Вся партия протекала в позиционных маневрах, но сейчас могла завершиться тактическим путем — 78...Ф:d4 79.Лe8+ Лf8 80.Л:f8+ Кр:f8 81.Фh8+ Крf7 82.Фe8+ Крf6 83.Фe6+ Крg5 84.Лg3+ Крh4 (84...Крf4 85.Фe3+ с выигрышем ладьи) 85.Ф:f5. Тихий ход, решающий дело. Грозит мат ферзем или ладьей на h3, а на 85...Л:g3 — 86.fg×.

78...Фc7+. Также ведет к быстрой гибели, значительно упорнее было 78...Лe7. **79.Крh3 Лe7 80.Л:e7 Л:e7 81.Фg6+ Крf8 82.Фf6+ Крe8 83.Фh8+ Крd7 84.Л:e7+ Кр:e7 85.Фg7+.** Черные сдались.

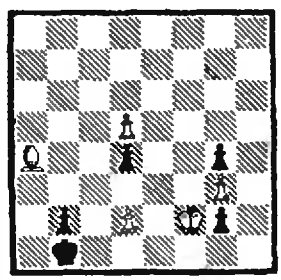
Г. Каспаров — Я. Тимман
Ферзевый гамбит

1.d4 Кf6 2.c4 e6 3.Кf3 d5 4.Кc3 Сe7 5.Сg5 0—0 6.e3 h6 7.С:f6 С:f6 8.Фc2 c5 9.dc Фa5 10.cd ed 11.0—0—0. Неожиданное решение. Впрочем, белые забирают пешку d5, не слишком оголяя своего короля. **11...Сe6 12.К:d5 Лc8.** После 12...С:d5 13.Л:d5 Ф:a2 14.Сc4 Фa1+ 15.Фb1 С:b2+ 16.Крc2 Ф:b1+ 17. Л:b1 у белых несомненный перевес. **13.Крb1 С:d5.** Если 13...Л:c5, то 14.b4! Л:c2 15. К:f6+ gf 16.ba Л:f2 17.Лd8+, и черным не развязаться. **14.Л:d5 Кc6 15.Сc4 Кb4 16.Фd2 Л:c5 17.Л:c5 Ф:c5 18.Лc1 Фb6 19.Фd7! Лf8.**

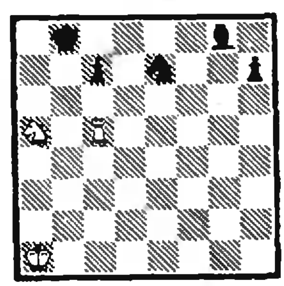
Пассивный ход. Любопытные варианты могли возникнуть после 19...К:a2!? 20.С:f7+ Крf8 (20...Крh7 21.Фf5+ Крh8 22.Лc8+ Л:c8 23.Ф:c8+ Сd8 24.Кр:a2) 21.Кd4 (21.Лc8+ Л:c8 22.Ф:c8+ Кр:f7 23.Фc4+ Крg6 24.Ф:a2 Фb5! с полноценной компенсацией за пешку) 21...С:d4 22.ed. Теперь нельзя 22...К:c1 из-за 23.Сe6 и надо отдавать ферзя. Но 22...Лd8! 23.Лc8 Л:c8 24.Ф:c8+ (24.С:a2 Фg6+!) 24...Кр:f7 25.Фc4+ Фe6! 26.d5 (26.Ф:a2 Ф:a2+ 27.Кр:a2 Крe6 28.Крb3 Крd5 29.Крc3 a5!, создавая отдаленную проходную) 26...Кc3+!! 27.bc Фe1+ и 28...Ф:f2+ с равным ферзевым эндшпилем. Однако Каспаров собирался действовать хладнокровно — 20.Лc2! Кc3+ 21.Крc1 Кe4 22.С:f7+ (22.Ф:f7+ Крh8 23.Фe6 Кd6 с неясной игрой) 22...Крh8 23.Кe5!, но после 23...Фa5 игра продолжалась.

20.Фb5 Фd6 21.e4 Кc6 22.Сd5 a6 23.Ф:b7 Кe5 24.Лc8 Л:c8 25.Ф:c8+ Крh7 26.Фc2 Крg8 27. Кd2 g5 28. a3 Крg7 29. Кf1 Фb6 30. Кg3 Крg6 31.Крa2 h5 32.Фc8 h4 33. Фg8+ Сg7 34.Кh5! Черные сдались.

Конкурсные задания



23. Белые начинают и выигрывают.



24. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 февраля 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 23, 24).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Перед вами геометрическая схема большого южного витража собора Парижской богоматери, раскрашенная случайными красками. Схему начертил графопостроитель ЭВМ БЭСМ-6 по программе, созданной в 1983 году московской десятиклассницей Аней Сосинской на VII летней школе юных программистов в г. Новосибирске.