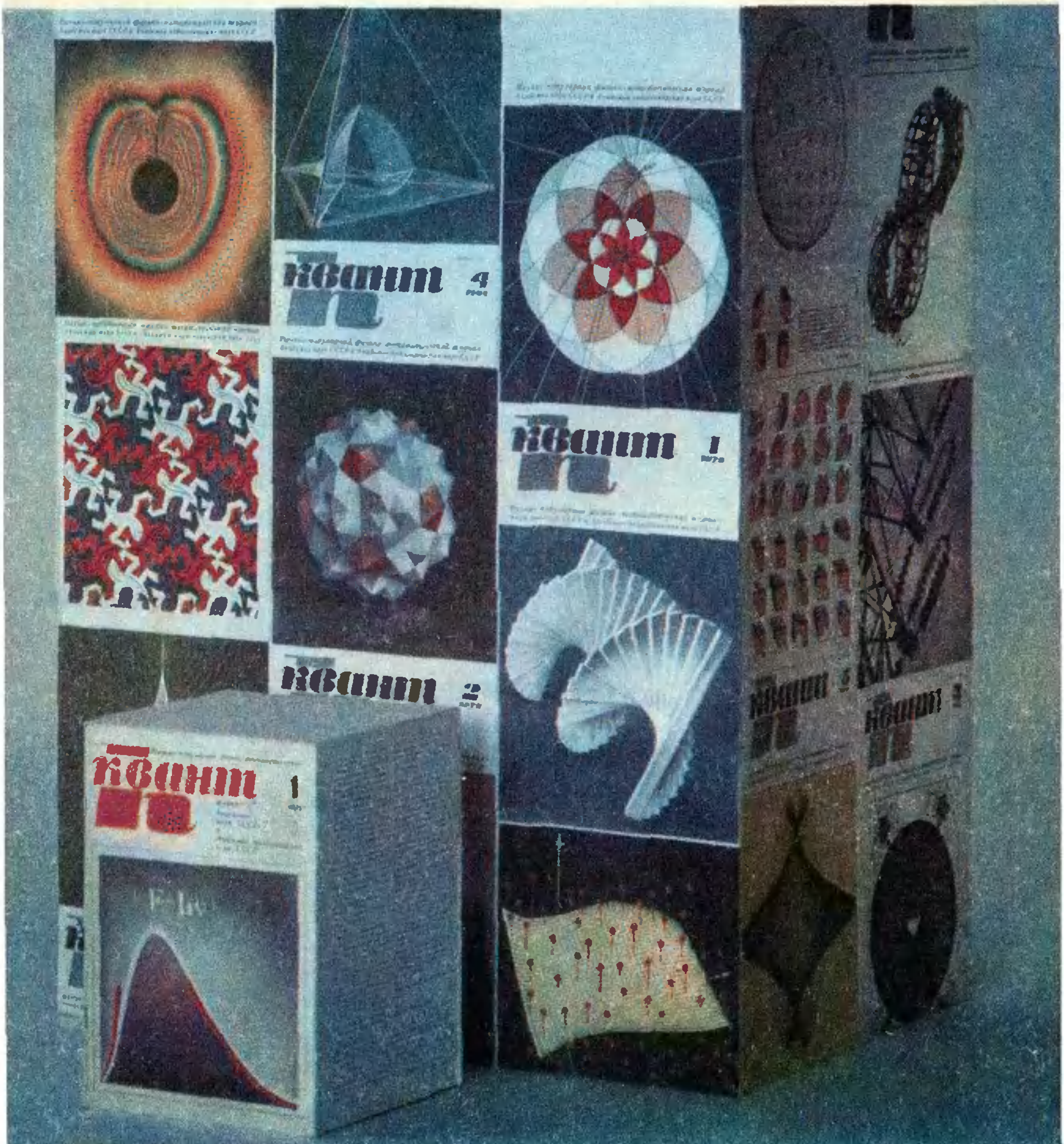
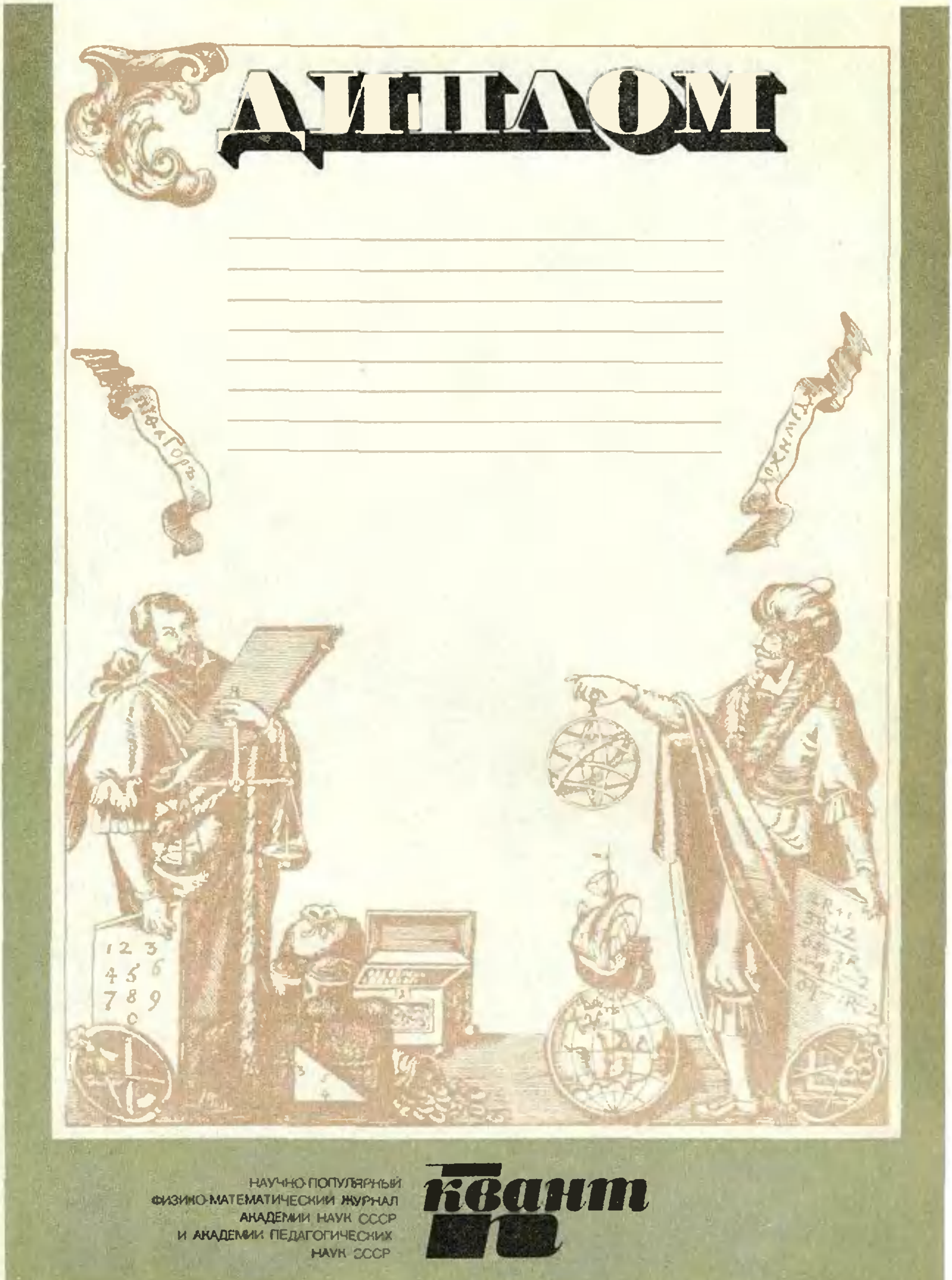
ISSN 0130-2221

Квант

1
1985

Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР





Здесь воспроизведен Диплом, которым с 1985 года награждаются победители конкурсов, проводимых нашим журналом (Задачник «Кванта», шахматный конкурс и др.). На нем изображены аллегорические фигуры Пифагора и Архимеда, заимствованные из первого русского учебника математики, написанного Леонтием Магницким и изданного в Москве в 1703 году.

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант **1** 1985

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / **IN THIS ISSUE:**

«Кванту» — 15 лет

В состав редакционной коллегии и редакционного совета журнала «Квант» входят 18 академиков и членов-корреспондентов АН СССР и АПН СССР, 14 докторов и 20 кандидатов наук. С 1983 года журнал переводится и издается в Греции. Во Франции выпущено два сборника статей из «Кванта». Журнал получил высокую оценку экспертов ЮНЕСКО (Организации Объединенных Наций по вопросам образования, науки и культуры). Сейчас у журнала 175 000 подписчиков, из них 10 000 — зарубежных. По данным, сообщенным нашими читателями, с каждым экземпляром работают в среднем пять школьников. В журнале 15 рубрик. Три из них («Школа в «Кванте», «Квант» улыбается» и «Калейдоскоп «Кванта») появились совсем недавно по инициативе наших читателей. Журнал активно участвует в праздниках юных математиков и физиков, летних школах и других интересных мероприятиях.

Исполнилось пятнадцать лет с тех пор, как вышел первый номер нашего журнала. У его истоков стояли крупнейшие советские ученые. Вместе с ними в создании журнала активно участвовали молодые ученые, организаторы первых Всесоюзных олимпиад по физике и математике для школьников: Ю. М. Брук, Н. Б. Васильев, Г. И. Косоуров, Н. Х. Розов, А. П. Савин, И. Ш. Слободецкий и др.

«Квант» занял особое место среди журналов для старших школьников, издаваемых в разных странах. По оценке экспертов ЮНЕСКО, журнала, подобного «Кванту», нет ни в одной стране.

Журнал стремится проложить мост между современной наукой и школой, дать пищу для самостоятельных размышлений и занятий тем школьникам, которые увлекаются физикой и математикой, пробудить интерес к этим наукам у остальных школьников, повысить физико-математическую культуру учащихся. Его задачи отчетливо видны из воспроизведенного здесь обращения «К нашим читателям», которое было опубликовано в первом номере журнала. За годы существования «Кванта» многие наши читатели стали известными учеными. Читателей «Кванта» мы регулярно видим среди победителей Всесоюзных и Международных олимпиад.

Редакция ведет обширную переписку со школьниками, регулярно проводит встречи с читателями, ежегодно обращается к ним со специальной анкетой, публикуемой в двенадцатых номерах журнала. Читатели помогают нам в выборе тем, в организации новых разделов, в оценке опубликованных материалов, и мы пользуемся случаем, чтобы поблагодарить их за эту помощь.

«Кванту» уже пятнадцать лет, но мы прекрасно понимаем, что далеко не всё в нем совершенно. Впереди еще много увлекательной работы по поиску новых тем, по увеличению доступности и увлекательности публикуемых статей, улучшению оформления журнала. И мы с удовольствием приглашаем наших читателей принять участие в этой работе.

К нашим читателям

В нашей стране издается много журналов. Они нужны математикам и физикам, биологам и врачам, географам и геологам, инженерам разных специальностей, учителям и, конечно,... школьникам. Но своего научного журнала у школьников пока не было. Настала пора заполнить этот пробел. Мы хотели бы, чтобы для школьников, интересующихся математикой и физикой, «Квант» стал их первым научным журналом.

Конечно, мы рассчитываем на школьников, которым математика и физика просто «нравятся» или могут понравиться. Но сейчас очень велика потребность страны в молодежи, занимающейся наукой с увлечением и сверх обязательных школьных требований. В СССР на конец 1968 года было более 800 000 научных работников и среди них более 80 000 специалистов по физико-математическим наукам. Общее же число научных работников, инженеров, экономистов и т. п., которым надо с инициативой и собственной выдумкой владеть математическими методами и искусством физического эксперимента, скоро будет исчисляться миллионами. Наша страна заинтересована в том, чтобы школьники, которые чувствуют в себе способности справляться с математическими и физическими задачами, своевременно задумались о выборе такого дальнейшего жизненного пути, на котором их способности и интересы не пропадут даром. Поэтому и создаются все возможности для усиленных занятий математикой и физикой. Организуются специальные физико-математические школы, со старшими школьниками ведутся дополнительные факультативные занятия, устраиваются физические и математические олимпиады. Этой же цели служит и «Квант». В журнале будет много материала, подходящего для работы в школьных кружках. Но с журналом можно будет работать и самостоятельно.

*Сразу надо подчеркнуть это слово — **работа**. В журнале вы найдете и веселые странички, и материал для сравнительно легкого чтения. Но основные материалы журнала рассчитаны на школьников, которые будут над ними **работать**. Задачи надо решать, статьи читать с бумагой и карандашом в руках, описываемые опыты надо постараться самим воспроизвести.*

Бо́льшая часть материалов журнала рассчитана на старшеклассников, но и ученики 6—7 классов, мы надеемся, найдут в журнале кое-что интересное.

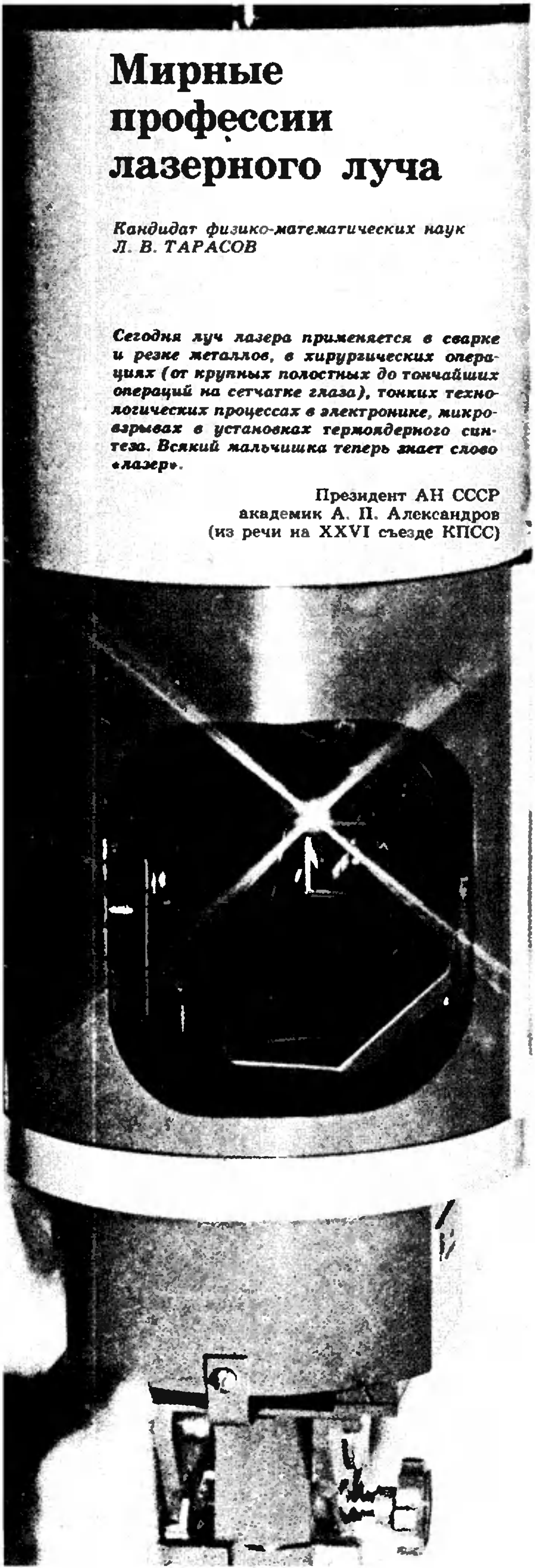
Не пугайтесь, если вначале что-либо покажется вам недоступным и трудным. Возьмитесь за другие материалы журнала, попроще, но через некоторое время попробуйте вернуться к тем, которые сначала оставили в стороне.

В заключение о том, почему журнал назван «Квант». В свое время появление идеи о кванте вызвало глубокие изменения в физической науке. Нам хочется надеяться, что появление нового журнала тоже вызовет большое продвижение и даже заметный скачок вперед в деле приобщения школьников к современной науке. Повторим еще раз: чтобы наши надежды стали реальностью, надо, чтобы читатели сразу включились вместе с нами в активную работу.

Желаем успеха!

Редакционная коллегия

(«Квант», № 1, 1970 г.)



Мирные профессии лазерного луча

Кандидат физико-математических наук
Л. В. ТАРАСОВ

Сегодня луч лазера применяется в сварке и резке металлов, в хирургических операциях (от крупных полостных до тончайших операций на сетчатке глаза), тонких технологических процессах в электронике, микровзрывах в установках термоядерного синтеза. Всякий мальчишка теперь знает слово «лазер».

Президент АН СССР
академик А. П. Александров
(из речи на XXVI съезде КПСС)

Создав лазер, человек получил возможность необычайно сильно концентрировать световую энергию и посылать ее в том или ином направлении в пространстве. Этот поток световой энергии может быть и непрерывным, и в виде следующих друг за другом мощных импульсов. Можно управлять и частотой следования лазерных импульсов, и их параметрами — энергией, длительностью. Лазерный луч можно сфокусировать на облучаемой поверхности в световое пятно диаметром до 1—10 мкм. Современная лазерная техника легко позволяет сконцентрировать на поверхности материала световую интенсивность 10^5—10^6 Вт/см^2. Иными словами, на участке облучения размером ~1 мкм на поверхность материала ежесекундно попадает энергия порядка 0,1 Дж. При столь больших интенсивностях металлы начинают плавиться. Сегодня не составляет особого труда обеспечить еще более высокую световую интенсивность: 10^6—10^8 Вт/см^2. В этом случае происходит интенсивное испарение облучаемого материала.

Мощный лазерный луч может стать грозным оружием, но он же может успешно использоваться в мирных целях. Советские ученые и инженеры убедительно показали, сколь широк круг мирных профессий лазерного луча. Они доказали эффективность и перспективность использования лазеров для обработки материалов, в медицине, в современной вычислительной технике, в точнейших контрольно-измерительных устройствах, для научных исследований. Одно из величайших изобретений XX века — лазер — может и должен быть тружеником, а не солдатом.

В пределах одной статьи невозможно даже кратко рассказать о всех мирных профессиях лазерного луча. Мы ограничимся здесь лишь двумя темами: обработка материалов лазерным лучом и применение лазеров в медицине.

Лазерный луч — новый инструмент для обработки материалов

На циферблате ручных часов «Полет» есть надпись: «23 камня». Упо-

Лазерная установка «Рубин-2», используемая для контроля радиоэлектронной аппаратуры.

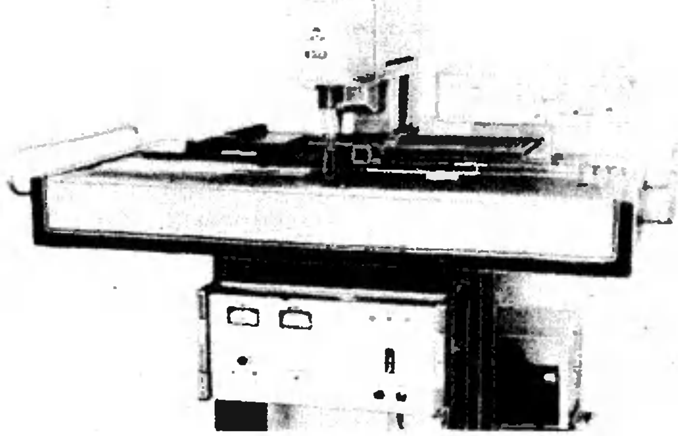
минание о числе камней можно видеть и на циферблатах других часов с механическим заводом. Что это за камни? Речь идет о рубиновых камнях, используемых в часовом механизме в качестве подшипников скольжения. Чтобы изготовить такой подшипник, надо высверлить в рубине (материале весьма твердом и в то же время хрупком) небольшое углубление диаметром всего 0,1 мм. Многие годы эта операция выполнялась механическим способом с использованием сверл из специально обработанной тонкой проволоки. Сверло делало в минуту более 10 000 оборотов и одновременно совершало при этом около 100 возвратно-поступательных перемещений. Для сверления одного камня требовалось примерно 15 минут.

Начиная с 1964 года малопроизводительное механическое сверление отверстий в часовых камнях стало повсеместно заменяться лазерным сверлением. Конечно, термин «лазерное сверление» не надо понимать буквально. Лазерный луч не сверлит отверстие — оно создается за счет интенсивного испарения материала. Отверстие в рубиновом камне (при толщине заготовки 1 мм) пробивается серией из нескольких лазерных импульсов, имеющих энергию 0,1 Дж и длительность порядка 10^{-4} с (то есть имеющих максимальную мощность порядка 10^3 Вт); при фокусировке лазерного импульса в световое пятно диаметром 0,01 см обеспечивается световая интенсивность порядка 10^7 Вт/см^2. Производительность работы лазерной установки, действующей в автоматическом режиме, — один камень в секунду. Это примерно в тысячу (!) раз выше производительности механического сверления.

Во многих измерительных приборах, в технологических процессах, требующих соблюдения высокой точности, необходимы очень тонкие проволоки из меди, бронзы, вольфрама. Чтобы получить такую проволоку, металл протягивают сквозь отверстия соответствующего диаметра, высверленные в сверхтвердом материале, например в алмазе (так называемые алмазные фильеры). Алмазные фильеры позволяют получать проволоку диаметром всего 10 мкм; эта проволока в десятки раз тоньше человеческого волоса. Но как просверлить столь тонкое отверстие в таком сверхтвердом материале, каким является алмаз? Механически это сделать довольно трудно; для сверления одного отверстия требуется до десяти часов. Зато совсем нетрудно пробить это отверстие серией из нескольких сфокусированных мощных лазерных импульсов.

Как видите, лазерное сверление обладает рядом весьма важных преимуществ: оно позволяет получать отверстия в материалах, отличающихся высокой твердостью (например, алмаз) или повышенной хрупкостью (например, глиноземная керамика); можно получать очень тонкие отверстия, и при этом отношение глубины пробиваемых лазером отверстий к их диаметру достигает рекордно больших значений (по сравнению с другими методами сверления) — глубина отверстия может превышать его диаметр в 10—50 раз. Во всех случаях лазерное сверление отличается высокой производительностью. Наконец, в отличие от обычных сверл «лазерные сверла» не ломаются и не изнашиваются.

Развитие микроэлектроники органически связано с совершенствованием технологии изготовления микросхем. Большую помощь может оказать здесь лазерный луч. Вначале лазеры применяли лишь для микросварки. Так, при помощи рубинового лазера приваривались вводы к контактам на кремниевых пластинках, приваривались тонкие провода к тонким пленкам. Затем начали применять CO_2-лазеры (лазеры на углекислом газе) для пробивания отверстий в керамических подложках для микросхем. Сегодня лазерный луч все чаще используют для подгонки параметров тонкопленочных схем и для изготовления отдельных элементов схемы. С помощью лазера можно целиком изготовить пленочную схему — со всеми входящими в нее резисторами, конденсаторами, индуктивностями. Предположим, что на диэлектрическую подложку микросхемы нанесена напылением тонкая металлическая пленка. Перемещая вдоль поверхности пленки сфокусированное лазерное пятно, можно испарить определенные участки пленки и тем самым создать нужный «рисунок» микросхемы.



Установка «Квант-20», предназначенная для резки с помощью лазерного луча специально обработанного стекла.

В наши дни лазерный луч широко применяют для резания материалов. Им можно резать практически любой материал: ткань, бумагу, дерево, фанеру, резину, пластмассу, керамику, листовой асбест, стекло, листы металла. При лазерной резке можно получать аккуратные разрезы сложного профиля, с гладкими необожженными краями среза. Для резки используются непрерывно генерирующие лазеры или лазеры, генерирующие последовательность световых импульсов с высокой частотой следования. Требуемая мощность излучения зависит от разрезаемого материала и толщины заготовки.

Чтобы продемонстрировать, насколько широко используется сегодня лазерная резка, приведем два примера. Первый пример — лазерная резка и раскрой тканей на современной ткацкой фабрике. Устройство включает в себя непрерывно генерирующий CO_2-лазер мощностью 100 Вт, систему фокусировки и перемещения лазерного луча, ЭВМ и систему для натяжения и перемещения ткани. В процессе резания лазерный луч перемещается по поверхности ткани со скоростью до 1 м/с. Диаметр сфокусированного светового пятна равен 0,2 мм. Перемещениями лазерного луча и ткани управляет ЭВМ. Подобное устройство позволяет, например, в течение часа раскроить материал для 50 костюмов. Раскрой производится не только быстро, но и с очень высокой точностью. При этом обеспечивается хорошее качество краев разреза.

Другой пример — применение лазерной резки в авиационной промышленности и, в частности, при производстве космических летательных аппаратов. С помощью лазеров осуществляют автоматизированное разрезание листов титана, стали, алюминия. Непрерывно генерирующий CO_2-лазер мощностью 3 кВт разрезает лист титана толщиной 5 мм со скоростью 3,5 м/мин.

Наряду с лазерной резкой широко применяется сегодня и лазерная сварка. Замечательно, что прочность сварных соединений (ширина шва составляет несколько миллиметров) достигает уровня прочности свариваемого материала. Осуществляется автоматическая лазерная сварка кузовов автомобилей, обшивки судов, сварка газопроводов. На автозаводе имени И. А. Лихачева в Москве, например, при помощи CO_2-лазера мощностью 5 кВт производят автоматическую лазерную сварку карданных валов автомобилей. Срок службы валов повысился в три раза.

Лазерная сварка успешно конкурирует с хорошо известными способами сварки, например с дуговой сваркой. Это убедительно подтверждает таблица, помещенная на этой странице. В таблице приведены данные, относящиеся к дуговой и лазерной сварке одного погонного метра стального листа толщиной 20 мм.

Параметр	Дуговая сварка	Лазерная сварка
Скорость сварки, м/ч	10—15	50—150
Количество проходов, необходимое для получения прочного шва	5—8	1
Время сварки, мин	32	0,6
Ширина шва, мм	20	5

При лазерной сварке происходит быстрое локальное проплавление в данной точке или вдоль заданной линии, и подвергающаяся тепловому воздействию зона имеет очень малые размеры; свариваемые детали не загрязняются какими-либо примесями.

Лазерным лучом можно осуществлять дистанционную обработку, на расстоянии; например, можно осуществлять сварку, посылая луч через прозрачную перегородку (сварка в вакуумированном объеме или в объеме, заполненном инертным газом).

Остановимся еще на одном способе лазерной обработки материалов — лазерном закаливании. Когда лазерный луч падает на поверхность металла, быстро нагревается тонкий приповерхностный слой в том месте, куда направлен луч. По мере перемещения луча на другие участки поверхности происходит быстрое остывание нагретого участка. Это используют для закалки поверхностных слоев, существенно повышающей их прочность. Лазерная закалка позволяет избирательно увеличивать прочность именно тех участков поверхности, тех деталей, которые в наибольшей мере подвергаются износу. Так, лазерную закалку применяют в автомобильной промышленности — для упрочнения головок цилиндров двигателей, направляющих клапанов, шестерен, распределительных валов и т. д. На Московском автозаводе имени Ленинского комсомола производится поверхностная закалка корпуса заднего моста автомобиля «Москвич».

За неимением места мы не можем рассказать о многих других видах лазерной обработки материалов. Так, мы не рассказали о лазерном остекловывании металлов (когда при очень быстром охлаждении нагретой лазерным излучением поверхности металла возникает тонкий приповерхностный стеклообразный слой, отличающийся высокой прочностью и коррозионной стойкостью). Не рассказали мы и о лазерной маркировке изделий, в частности хрупких изделий и изделий малых размеров, о лазерной очистке проводов от изоляции и ряде других процессов.

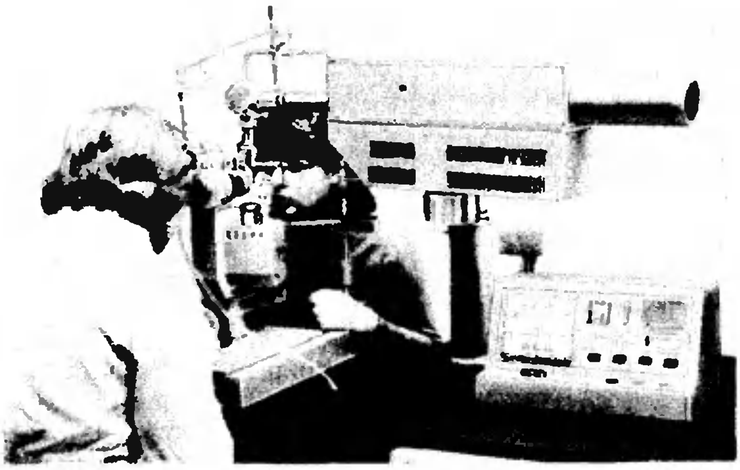
Как заметил академик Н. Г. Басов, «история техники свидетельствует о том, что массовое внедрение новых технологических процессов всегда оказывало революционизирующее воздействие на промышленность. Так было при появлении методов скоростного резания, холодной штамповки, точного литья, дуговой сварки — перечень примеров легко продолжить. В настоящее время промышленная технология во всем мире, по-видимому, находится в преддверии нового качественного скачка, обусловленного широким внедрением лазеров».

Такая высокая оценка роли лазеров совершенно оправдана. Лазерным лучом можно производить самые разнообразные операции и притом над самыми различными материалами. Лазерный луч работает быстро, с высокой точностью, качественно. И еще одно важное преимущество лазерной обработки материалов — возможность широкой автоматизации процессов.

Лазерный луч — необычный медицинский скальпель

Первой областью клинической медицины, в которой лазеры получили наиболее широкое применение, стала офтальмология — область медицины, имеющая дело с глазными заболеваниями. Появление лазера в клинической медицине связано с лечением отслоения сетчатки — излучение, сфокусированное на отслоившиеся участки, «приваривало» их к глазному дну. Затем был разработан метод лечения лазерным лучом глаукомы — заболевания, поражающего 2—3 % людей в возрасте старше 40 лет. Вызывается оно накоплением в глазу внутриглазной жидкости. В здоровом состоянии жидкость, которая вырабатывается внутри глаза и является «смазкой» для хрусталика, выводится из глаза через своеобразную дренажную систему радужной оболочки. Если эта система нарушается, «закупоривается», жидкость накапливается в глазу, возрастает ее давление, появляются боли — развивается глаукома. Заболевание сопровождается сначала ухудшением зрения (очертания предметов становятся туманными, возникают радужные ореолы), а затем приводит к слепоте.

Традиционные хирургические методы лечения глаукомы крайне сложны, сильно травмируют глаз и к тому же крайне ненадежны. Казалось естественным воспользоваться в дан-



Лазерная установка «Ятаган-2», применяемая в глазной микрохирургии.

ном случае лазерным лучом — «прожечь» отверстия (протоки) в радужной оболочке и тем самым восстановить нормальный отток внутриглазной жидкости. Очень скоро, однако, выяснилось, что «прожигание» радужной оболочки вызывает воспаление, которое довольно быстро ликвидирует сделанные протоки. Исследования советских медиков во главе с академиком АМН СССР М. М. Красновым показали, что надо не прожигать, а «пробивать» протоки в радужной оболочке. Для этого нужно, чтобы лазерный импульс был чрезвычайно коротким. В применяемой для лечения глаукомы советской лазерной установке «Ятаган» используются лазерные импульсы длительностью всего 10^{-7}с. Вся операция занимает 10—15 минут.

Начиная со второй половины 60-х годов лазерный луч стал применяться в качестве своеобразного скальпеля в хирургии. В СССР практическое использование лазеров в хирургии началось в 1966 году в Институте хирургии имени А. В. Вишневского (под руководством академика АМН СССР А. А. Вишневского). Лазерный скальпель был применен в операциях на внутренних органах грудной и брюшной полостей. В настоящее время лазерным лучом делают кожно-пластические операции, оперируют пищевод, желудок, кишечник, почки, печень, селезенку и другие внутренние органы. Делаются первые шаги по применению лазера в операциях на сердце.

Обычно используется CO_2-лазер непрерывного действия мощностью в несколько десятков ватт. Излучение лазера поступает в систему шарнирно соединенных полых раздвигающихся трубок, по которой свет распространяется, отражаясь от зеркал. На выходе из системы излучение вырывается наружу в виде достаточно интенсивного светового луча. Во время операции хирург держит в руке выходную трубку и может перемещать ее, свободно поворачивая в разных направлениях и тем самым посылая лазерный луч в нужное место.

Лазерный скальпель используют как для рассечения, так и для сшивания тканей. Рассечение тканей производят сфокусированным лучом. При мощности излучения 20 Вт и диаметре сфокусированного лазерного пятна 1 мм достигается интенсивность около 2,5 кВт/см^2. Излучение проникает в ткань примерно на глубину 50 мкм. Следовательно, объемная плотность мощности излучения, идущая на нагрев ткани достигает 500 кВт/см^3. Для биологических тканей это огромная величина. Естественно, происходит быстрое разогревание и испарение ткани — налицо эффект рассечения ткани лазерным лучом.

Если же снизить интенсивность излучения до 25 Вт/см^2, то ткань испаряться не будет, а будет происходить поверхностная коагуляция (сгущение) тканевой жидкости. Вот этот-то процесс и используют для сшивания разрезанной ткани. Биологическая сварка осуществляется за счет коагуляции жидкости, содержащейся в рассекаемых стенках оперируемого органа и специально выдавливаемой в промежуток между соединяемыми участками ткани.

Лазерный луч как хирургический

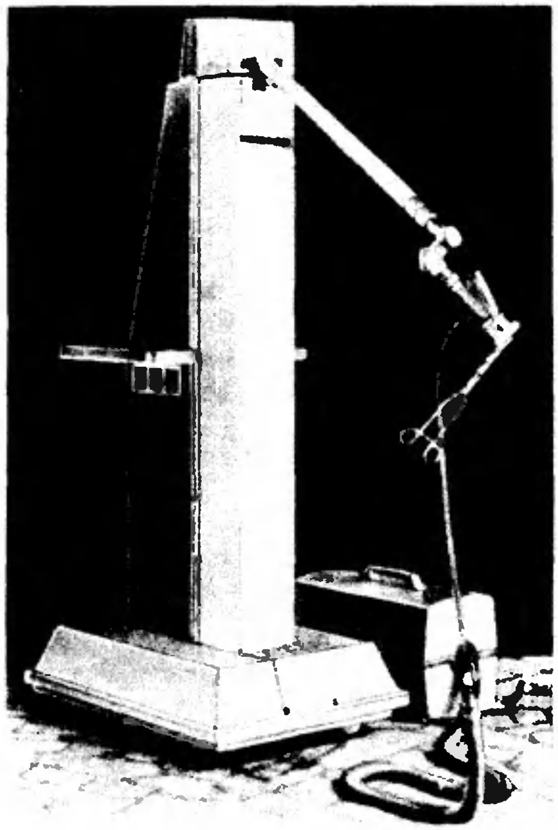
скальпель обладает целым рядом достоинств. Он делает почти бескровный разрез, так как одновременно с рассечением тканей происходит «заваривание» мелких кровеносных сосудов на краях раны. Лазерный луч прозрачен, и это позволяет хирургу хорошо видеть оперируемый участок. Лазерный скальпель обеспечивает абсолютную стерильность — ведь с тканью взаимодействует только излучение. Наконец, как показала клиническая практика, рана от лазерного скальпеля почти не болит и относительно быстро заживляется.

В советской лазерной хирургической установке «Скальпель-1» и во многих подобных ей установках световая энергия передается от лазера к оперируемому органу по системе жестких полых трубок. Вместо системы трубок можно использовать гибкие световоды*). Они позволяют хирургу значительно свободнее манипулировать лазерным скальпелем. Главное же, передача излучения по тонким световодам (их диаметр порядка 1 мм) делает возможным выполнение хирургических операций принципиально нового типа. Обычно при операции, например, на желудке необходимо предварительно сделать вскрытие брюшной полости. Использование же тонких световодов позволяет (при некоторых заболеваниях) обойтись без вскрытия: гибкий «лазерный скальпель »вводят внутрь желудка через рот и пищевод и производят операцию, так сказать, изнутри.

Недавно в нашей стране сделана первая в мире операция с помощью лазера, восстанавливающая кровоснабжение сердца.

Лазерной хирургии принадлежит большое будущее. Залог тому — широкие экспериментальные исследования возможностей применения лазеров в самых различных направлениях этой отрасли медицины.

Ученые разных специальностей — медики, биологи, химики, физики — совместно изучают воздействие лазерного излучения на энергетические процессы в нервной системе; на защитные и восстановительные способности организма; на состав крови и процесс кроветворения; на злокачественные опухоли.



Лазерная хирургическая установка «Скальпель-1» с лазерным хирургическим инструментом «Скальпель-2».

Еще раз хочется сказать: круг мирных профессий лазерного луча очень широк. Мы коснулись лишь некоторых из них.*) Но надеемся, что уже этот короткий обзор дал вам почувствовать, сколь плодотворно и перспективно использование лазеров в мирных целях, на благо человека.

*) Принцип действия световодов основан на явлении полного внутреннего отражения: луч, вошедший в световод, испытывает полное внутреннее отражение при каждом попадании на внутреннюю стенку световода. В гибких световодах это условие выполняется и при сгибании самого световода.

*) В этом году издательство «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» выпустит книгу Л. В. Тарасова «Лазеры: действительность и надежды», в которой читатель найдет подробный рассказ о различных применениях лазеров. (*Примеч. ред.*)

Почему не уменьшится сопротивление

Кандидат физико-математических наук
О. В. ЛЯШКО

Хотя в этой статье решается чисто физическая задача, перед вами — статья по математике. Для ее понимания не требуется серьезных знаний по физике; статья не ставит себе целью подробно описать какие-либо глубокие физические явления. Как часто бывает в приложениях математической науки, здесь строится математическая модель рассматриваемой ситуации и вводится математический аппарат, применение которого дает простое решение исходной задачи, а также позволяет ответить на многие другие вопросы, не только по физике — но и по экономике и геометрии.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из резисторов, и измерим общее сопротивление R цепи между двумя ее точками A и B. Предположим теперь, что один из резисторов сгорел и его сопротивление возросло*). Вновь измерим сопротивление R между A и B. Как вы думаете, может ли тогда оказаться, что сопротивление R 1) увеличилось? 2) осталось неизменным? 3) уменьшилось?

1) Ясно, что сопротивление увеличиться может. Например, если цепь состояла из одного или нескольких последовательно соединенных резисторов, то общее сопротивление цепи равно сумме входящих в цепь сопротивлений; поэтому — увеличилось одно из слагаемых, возрастет и сумма (рис. 1).

2) Чуть подумав, вы, наверное, сумеете привести пример, когда общее сопротивление не меняется. Две такие цепи показаны на рисунке 2. В обеих цепях увеличение сопротивления R_0 не изменяет общего сопротивления (продумайте, почему).

3) А вот попытки привести пример, когда общее сопротивление уменьшается, не приводят к успеху. Так может ли это быть?

— Конечно, нет, — правильно ответит здравомыслящий читатель (так, во всяком случае, отвечают все мои знакомые). Но на вопрос почему этого не может быть, точного ответа от них мне не довелось услышать. Это не удивительно. Ответ на этот вопрос, то есть строгое математическое доказательство того, что при увеличении одного из сопротивлений любой резисторной цепи ее общее сопротивление умень-

*) Случай, когда резистор разрушился (перестал проводить ток), мы не исключаем, считая, что его сопротивление «возросло до бесконечности».

шиться не может, совсем не прост. Он основан на одном глубоком принципе, который можно назвать *принципом минимальности* (физики чаще говорят *принцип наименьшего действия*).

Суть его в следующем: многие физические процессы происходят таким образом, что некоторая величина принимает минимальное значение. Так, например, мыльная пленка, натянутая на проволочный контур в пространстве, выбирает из всех возможных форму ту, при которой ее площадь минимальна. Луч света в среде с переменным показателем преломления из всех возможных траекторий выбирает ту, при которой время его путешествия минимально («принцип Ферма»). Дождевая капля, стекающая вниз с выпуклой горы, выбирает тот путь между данными уровнями, чья длина наименьшая и т. п.

Поэтому, чтобы решить соответствующую задачу (найти форму пленки, или траекторию луча, или путь капли), нужно найти минимум соответствующей функции (площади, или времени, или длины). Вот здесь, конечно, и нужна математика: математическая формулировка принципа минимальности, математические приемы для его использования.

Я думаю, читателю будет интересно не столько установление самого факта, сколько эти приемы и принципы. Впрочем, любопытный читатель, наверное, уже сейчас задаст себе такой вопрос: как это можно дать «строгое математическое доказательство» факта (в данном случае физического), не имеющего к математике никакого отношения? Попробуем, забегая вперед, сначала наметить ответ на этот вопрос.

Когда математик берется за решение прикладной задачи, он обычно начинает с построения ее *математической модели*. Для этого он должен выделить нужные для описания задачи основные понятия и отбросить те стороны явления, которые не существенны для ее решения. В результате возникает абстрактное описание задачи, в котором *реальные* предметы и явления заменены на математические абстракции (точки, линии, числа, функции), а законы, которым подчинены эти явления, выражаются в виде уравнений. Так, наша электрическая цепь превратится в «нагруженный граф», сопротивления станут числами, закон Ома и правила Кирхгофа запишутся в виде «основной системы уравнений». Мы забудем, что изоляция проводов сработана из пластмассы желтого цвета, что проводники и резисторы сделаны из каких-то металлов, что ток — «это бегущие электроны»: все это для нас станет одинаково несущественным. Но я, наверное, слишком забежал вперед. Обо всем по порядку.

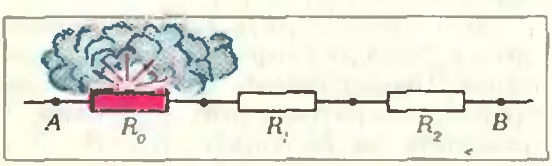


Рис. 1.

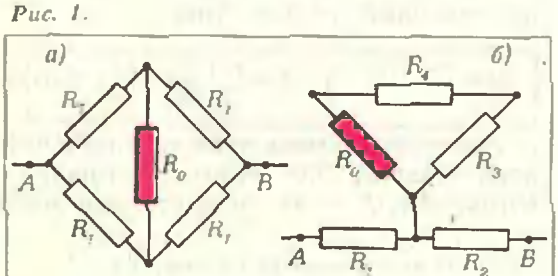


Рис. 2.

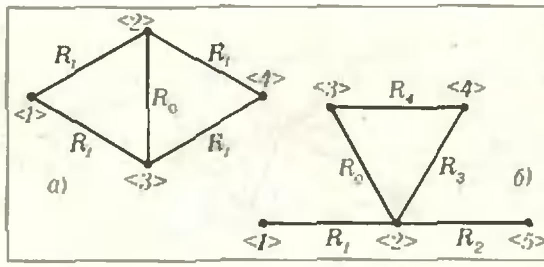


Рис. 3.

Нагруженный граф (или электрическая цепь)

Сопоставим каждой электрической цепи *нагруженный граф*, то есть конечную совокупность точек плоскости или пространства (их называют *вершинами*) и некоторый набор соединяющих точки дуг (*ребра* графа), на которых написаны числа (*нагрузки* ребер). Например, электрическим цепям на рисунке 2 сопоставляются графы, показанные на рисунке 3; более сложный пример графа показан на рисунке 4.

Вершины перенумеруем числами от 1 до n; вершину с номером i будем обозначать $\langle i \rangle$. Мы будем рассматри-

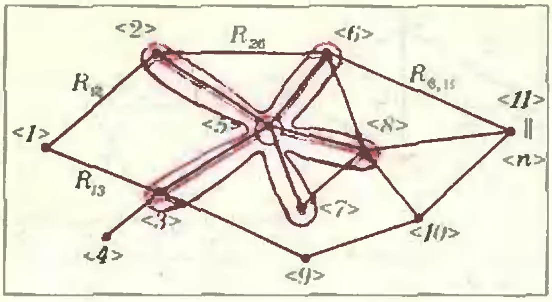


Рис. 4.

вать только такие графы, у которых каждые две вершины соединены не более чем одним ребром; ребро, соединяющее вершины $\langle i\rangle$ и $\langle j\rangle$, будем обозначать $\langle i, j\rangle$; при этом вершина $\langle i\rangle$ называется *началом* ребра, а $\langle j\rangle$ — его концом. Например, на графе, приведенном на рисунке 4, ребра $\langle 2, 3\rangle$ нет вовсе. Нагрузку на ребре $\langle i, j\rangle$ мы будем обозначать R_{ij} и, помня исходную задачу, часто будем называть *сопротивлением* (хотя в нашей математической модели R_{ij} — просто число).

Наконец, *окружением* вершины $\langle i\rangle$ мы будем называть совокупность всех вершин, соединенных с вершиной $\langle i\rangle$ ребрами, и обозначать S_i. Окружения вершины $\langle 5\rangle$ графа на рисунке 4 выделены красным цветом.

Гармонический потенциал (или цепь под напряжением)

Пусть дан нагруженный граф Г с вершинами $\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \ldots, \langle n\rangle$, ребрами $\langle i, j\rangle$ и нагрузками R_{ij}. Наша цель — граф Г (математическую модель электрической цепи) *поставить под напряжение*. Математически это означает следующее.

Прежде всего, нужно *создать разность потенциалов на входе и выходе* нашей цепи (на вершинах $\langle 1\rangle$ и $\langle n\rangle$ графа), то есть выбрать произвольно два числа φ_1 и φ_n. Далее следует подобрать числа $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}$ (*значения потенциала*) для остальных вершин, но теперь уже не произвольно, а так, чтобы выполнялась некоторая система уравнений, которую мы назовем «основной системой». Прежде чем ее выписать, я поясню, откуда она берется. Рассмотрим любую вершину нашей цепи, например вершину $\langle 5\rangle$. Так как в этой вершине нет источника тока, в нее «втекает» такой же ток, какой «вытекает». Эта закономерность называется **первым правилом Кирхгофа** и обычно формулируется так: *алгебраическая сумма токов, идущих по всем ребрам, выходящим из одной вершины, равна нулю.* (О правилах Кирхгофа можно прочитать в этом номере «Кванта» на с. 26). Если ток, идущий по ребру $\langle i, j\rangle$, обозначить через I_{ij}, то правило Кирхгофа для вершины $\langle 5\rangle$ можно записать так (см. рис. 5):

$$I_{52}+I_{56}+I_{58}+I_{57}+I_{53}=0.$$

Воспользовавшись знаком суммы Σ и записью S_5 для окружения вершины $\langle 5\rangle$, это уравнение можно записать короче:

$$\sum_j I_{5j}=0 \text{ (сумма берется по } j\in S_5).$$

Для произвольной вершины $\langle i\rangle$, где $i=2, \ldots, n-1$, соответствующее уравнение имеет вид:

$$\sum_j I_{ij}=0 \text{ (сумма по } j\in S_i).$$

Теперь вспомним, что по закону Ома ток I_{ij} равен отношению напряжения (разности потенциалов) $U_{ij}=\varphi_i-\varphi_j$ к сопротивлению, то есть $I_{ij}=(\varphi_i-\varphi_j)/R_{ij}$. Поэтому *основная система уравнений* запишется в виде

$$\boxed{\sum_j \frac{\varphi_i-\varphi_j}{R_{ij}}=0 \ (j\in S_i),\ i=2, \ldots, n-1.} \tag{1}$$

Поскольку неудобно все время говорить о потенциале, который удовлетворяет системе уравнений (1), мы придумаем для него специальное название. А именно, назовем такой потенциал *гармоническим*. (А слово *потенциал* без этого прилагательного означает **произвольную** функцию на вершинах графа, то есть любой набор чисел $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.)

Теперь можно дать точную математическую формулировку исходной задачи. Предположим, что одну из нагрузок (сопротивлений) R_{ij} графа Г заменили на бóльшую: $R'_{ij}>R_{ij}$. Может ли тогда увеличиться общее сопротивление, то есть число

$$\boxed{R=\frac{\varphi_1-\varphi_n}{I}, \text{ где } I=\sum_j \frac{\varphi_1-\varphi_j}{R_{1j}} \ (j\in S_1)?} \tag{2}$$

(Физический смысл этих соотношений ясен: здесь, по первому правилу Кирхгофа, I — это ток, втекающий*)

*) Или вытекающий из вершины $\langle n\rangle$:

$$I=\sum_j\left(-\frac{\varphi_n-\varphi_j}{R_{nj}}\right) \ (j\in S_n). \tag{2'}$$

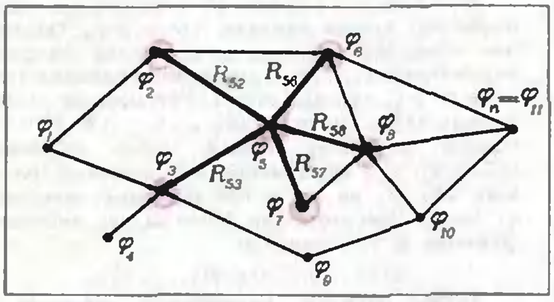


Рис. 5.

в первую вершину $\langle 1 \rangle$, $\varphi_1-\varphi_n$ — это разность потенциалов на входе и выходе, стало быть, по закону Ома, R — общее сопротивление цепи.)

Существование гармонического потенциала (или расчет резисторной цепи)

Математически задача расчета резисторной цепи, поставленной под напряжение, состоит в следующем. Дан граф Г с нагрузками R_{ij} и выбраны значения потенциала φ_1, φ_n на входе и выходе; требуется найти гармонический потенциал с этими данными значениями на входе и выходе, то есть решить основную систему (1) относительно неизвестных $\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{n-1}$ при данных φ_1, φ_n.

Физики знают из практики, что первого правила Кирхгофа (то есть системы (1)) хватает для расчета любых резисторных цепей. Математикам, конечно, этого мало — им нужна соответствующая общая теорема. И она есть:

Теорема 1. *Для любого графа Г с положительными нагрузками R_{ij} и любыми значениями потенциала φ_1, φ_n на входе и выходе существует единственный гармонический потенциал φ.*

Я не привожу прямого доказательства теоремы по двум причинам. Во-первых, оно нам в дальнейшем не потребуется. Во-вторых, для строгого доказательства нужны некоторые понятия из «линейной алгебры», дисциплины, не изучаемой в обычной средней школе. Идея же доказательства состоит в том, что у основной системы всего $n-2$ неизвестных $\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{n-1}$ и столько же (линейных) уравнений, притом эти уравнения независимы, и потому имеют единственное решение.

Упражнения

1. Найдите другое доказательство теоремы 1, опирающееся на основную теорему (см. с. 14).
2. Проверьте, что в случае графов 2,*а* и 2,*б* ток действительно не течет по ребрам с сопротивлением R_0 (то есть разность потенциалов на концах этих ребер равна нулю).
3. Докажите в общем случае, что при $\varphi_1=\varphi_n$ общий ток (см. формулу 2)) равен нулю.
4. Составьте основную систему уравнений для графа на рисунке 4 и прикиньте, сколько нужно времени для ее решения вручную. Если вы умеете программировать, подумайте, как подключить к этой задаче компьютер.
5. Удвойте одно из сопротивлений на графе 2,*а* и сосчитайте, на сколько увеличится его общее сопротивление.
6. Докажите, что из уравнений (1), (2) и закона Ома следует (2′), а из (1), (2′) и закона Ома следует (2).

Для любого нагруженного графа (электрической цепи) Г с вершинами $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, ..., $\langle n \rangle$ и положительными нагрузками (сопротивлениями) R_{ij} на ребрах мы знаем, что можно сосчитать гармонический потенциал φ этого графа, то есть для произвольных значений потенциала φ_1, φ_n на входе и выходе находить остальные значения $\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{n-1}$ потенциала, решая систему уравнений (1). Далее, подставляя полученные значения потенциала в соотношения (2), мы можем найти общее сопротивление цепи R. Для конкретной цепи всегда можно таким образом проверить, уменьшилось ли общее сопротивление при увеличении одного из R_{ij} или нет. Но нам этого мало — мы хотим доказать общий факт, установить, что при увеличении одного сопротивления общее сопротивление никогда не уменьшается, независимо от конкретного выбора цепи.

К сожалению, доказать этот факт непосредственно из уравнений (1) и формулы (2) не удается (попробуйте!). Как говорится — нужна идея!

Квадратичная функция (или тепловая мощность цепи)

Эту идею нам подскажет не математическая интуиция, а один из тех принципов минимальности, о котором шла речь в начале статьи: напряжение в резисторной электрической цепи распределяется согласно такому принципу. Оказывается, ток «ленивый»: из всех возможных вариантов поведения он выбирает тот, при котором его энергетические затраты (мощность, выделяющаяся на проводниках электрической цепи) минимальны. Напомним, что при прохождении по проводнику с сопротивлением R_{ij}

тока I_{ij}, соответствующего разности потенциалов $U_{ij}=\varphi_i-\varphi_j$, на проводнике $\langle i, j\rangle$ выделяется тепловая мощность (то есть количество тепла за единицу времени), равная

$$q_{ij}=R_{ij}I_{ij}^2=U_{ij}I_{ij}=U_{ij}^2/R_{ij}=(\varphi_i-\varphi_j)^2/R_{ij},$$

а на всей цепи—мощность $Q=\Sigma q_{ij}$, где сумма берется по всем ребрам $\langle i, j\rangle$ нашего графа. Общая мощность Q зависит от значений потенциала $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$; поэтому общую мощность мы будем записывать в виде $Q[\varphi]$.

Таким образом, мы ввели в рассмотрение функцию

$$\boxed{Q[\varphi]=\Sigma q_{i,j}, \text{ где } q_{ij}=\frac{(\varphi_i-\varphi_j)^2}{R_{ij}},} \quad (3)$$

которую мы будем называть *квадратичной*. (Сумма в выражении (3) берется по всем ребрам $\langle i, j\rangle$ нашего графа.)

Подчеркнем, что с математической точки зрения мы просто дали определение некоторой функции Q на множестве всех потенциалов φ графа Г и (исходя из физических соображений) интересуемся ее минимумом.

Квадратичная функция Q сама зависит не от числовой переменной, а от другой функции — потенциала φ. Такие «функции от функций» математики называют *функционалами*. Поиск их экстремумов — одна из важных задач *вариационного исчисления*, замечательной ветви математики, зародившейся еще в работах Я. Бернулли, Эйлера и Лагранжа.

Упражнение 7. Выпишите квадратичную функцию Q для графа на рисунке 4. Подумайте, есть ли у вас методы для поиска его минимума.

Указание. Функция Q зависит от $\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{11}(=\varphi_{n-1})$, то есть от нескольких переменных. В школе изучают только методы поиска экстремумов функций от одной переменной, поэтому поиск минимума Q — пока недоступная для вас задача.

Минимальный принцип (или принцип наименьшего действия)

Наша ближайшая цель — найти минимум квадратичной функции Q. Но есть ли у нее минимум? Начнем с ответа на этот вопрос. Наш читатель, конечно же, угадал, что ответ — положительный (это тоже «физически очевидно»). Те, кто готов принять на веру это утверждение, могут пропустить доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Для функции Q существует набор значений переменных $\varphi_2, ..., \varphi_{n-1}$, при котором она достигает минимального значения.*

Доказательство. Не огрвничивая общности, мы можем считать, что $\varphi_1 \geqslant \varphi_n$. Обозначим через M множество всех наборов значений переменных $\varphi_2, ..., \varphi_{n-1}$, удовлетворяющих условиям $\varphi_1 \geqslant \varphi_i \geqslant \varphi_n$ при всех i. Рассмотрим какой-нибудь набор значений $(\varphi_2', ..., \varphi_{n-1}') \notin M$ и построим по нему новый набор значений $(\varphi_2'', ..., \varphi_{n-1}'') \in M$, заменив все значения, большие чем φ_1, на φ_1, и все значения, меньшие φ_n, на φ_n. При этом, как легко видеть, значение функции Q уменьшится:

$$Q(\varphi_2'', ..., \varphi_{n-1}'') < Q(\varphi_2', ..., \varphi_n').$$

Таким образом, наименьшее значение Q на множестве M будет и наименьшим значением Q на всем множестве потенциалов. Нам остается сослаться на теорему Вейерштрасса из анализа, которая утверждает, что непрерывная функция (Q) на замкнутом ограниченном множестве (M) достигает своего наименьшего значения. (Эту теорему в школе не проходят: точное объяснение понятий непрерывности, замкнутости и ограниченности, использующихся в ней, завело бы нас слишком далеко, так что мы не станем здесь этим заниматься.)

Доказательство — типичное для математической «теоремы существования» — не дает нам ни способа найти интересующий нас минимум, ни способа как-либо описать его. Однако следующая теорема, выражающая минимальный принцип для нашей ситуации, характеризует искомый минимум.

Основная теорема. *Потенциал, на котором достигается минимальное значение функции Q, — гармонический.*

Доказательство. Пусть φ^0 — потенциал, на котором достигается наименьшее значение. Нам нужно доказать, что числа $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0, ..., \varphi_{n-1}^0, \varphi_n^0$, где $\varphi_1^0=\varphi_1$, $\varphi_n^0=\varphi_n$, являются решением системы уравнений (1). Зафиксируем все переменные, кроме одного — φ_j. Тогда функция

$$Q(\varphi_2^0, ..., \varphi_{j-1}^0, \varphi_j, \varphi_{j+1}^0, \varphi_{n-1}^0)$$

одной переменной φ_j также достигает минимума при $\varphi_j=\varphi_j^0$.

Эта функция является квадратным трехчленом по φ_j: $Q=a\varphi_j^2+b\varphi_j+c$, причем коэффициенты a и b легко вычислить, раскрывая скобки в выражении (3):

$$a=\Sigma\frac{1}{R_{ij}}, \quad b=-2\Sigma\frac{\varphi_i^0}{R_{ij}}$$

(здесь суммы берутся по всем i, для которых $\langle i\rangle \in S_j$).

Так как минимум функции $a\varphi_j^2+b\varphi_j+c$ $(a>0)$ достигается в точке φ_j^0, которая удовлетворяет уравнению $a\varphi_j^0+b/2=0$, мы получим, подставляя в него выражения для коэффициентов a и $в$,

$\Sigma\varphi_i^0/R_{ij}-\Sigma\varphi_i^0/R_{ij}=\Sigma(\varphi_j^0-\varphi_i^0)/R_{ij}=0.$
Таким образом, $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_{n-1}^0, \varphi_n^0$ — решение системы (1), что и требовалось доказать.

И, наконец, последний вопрос, на который мы ответим: чему равно минимальное значение функции Q. Как чему? — удивится знающий физику читатель, — минимальное значение Q — это сумма мощностей тепла, выделяющегося на проводниках нашей цепи, значит — это общая мощность тепла, выделяющегося на всей цепи, значит — это U^2/R. Стоп! Мы определили тепловую мощность формулой U_{ij}^2/R_{ij} только для одного проводника, а не для всей цепи. Величина R и значение минимума Q находятся независимо друг от друга по величинам R_{ij}, $U=\varphi_1-\varphi_n$. Так что математически не очень ясно, почему это правильный ответ. Опять, те кто верят, что он правильный, могут следующую теорему пропустить.

Теорема 3. *Минимальное значение функции Q равно U^2/R, где R — общее сопротивление электрической цепи.*

Доказательство. Пусть $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ — набор чисел, на котором достигается минимум функции Q. Тогда, по основной теореме, — это решение системы уравнений (1). Следовательно, нам нужно показать, что $(\varphi_1-\varphi_n)^2/R = (\varphi_1-\varphi_n)I$ равно выражению

$$\Sigma(\varphi_i-\varphi_j)I_{ij} \text{ (сумма по всем ребрам } \langle ij\rangle),$$

где величины токов I и I_{ij} подчиняются первому правилу Кирхгофа (1), (2). Раскроем скобки в (1) и вычислим коэффициент при φ_i. Значение потенциала φ_i умножается на величины всех токов I_{ij}, проходящих по ребрам $\langle i, j\rangle$, выходящим из вершины $\langle i\rangle$ (если номер j меньше номера i, то φ_i умножается на $-I_{ji}=I_{ij}$). Поэтому коэффициент при φ_i равен

$$\Sigma I_{ij} \text{ (сумма по } \langle j\rangle \in S_i)$$

и, значит, равен нулю для всех $i\neq 1, n$, из (1). Коэффициенты при φ_1 и φ_n равны соответственно I и $-I$ из (2) и (2'), следовательно, суммируя по всем ребрам,

$$\Sigma(\varphi_i-\varphi_j)I_{ij}=\varphi_1\cdot I+\varphi_n(-I)=(\varphi_1-\varphi_n)I.$$

Решение исходной задачи

Пусть мы увеличили одно (или некоторые) из сопротивлений ребер: $R'_{ij}\geqslant R_{ij}$. Тогда для функций $Q=\Sigma(\varphi_i-\varphi_j)^2/R_{ij}$ и $Q'=\Sigma(\varphi_i-\varphi_j)^2/R'_{ij}$, (суммирование по всем ребрам $\langle ij\rangle$ нашего графа) справедливо неравенство $Q'[\varphi]\leqslant Q[\varphi]$ для любого потенциала φ, с данными φ_1 и φ_2 на входе и выходе. Очевидно, что то же неравенство справедливо и для их минимальных значений:

$$\min Q'=\frac{(\varphi_1-\varphi_n)^2}{R'}\leqslant\min Q=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2}{R},$$

а значит $R\leqslant R'$, что и требовалось доказать.

Другие применения нашей математической модели

А стоит ли игра свеч? — может спросить читатель. Нужно ли разводить такой математический формализм ради задачи, которая и так физически очевидна?

Математические модели создаются не только для того, чтобы математикам было удобнее работать. Отбрасывая конкретную специфику прикладной задачи, часто приходят к моделям, которые оказываются применимыми к совсем другим задачам, из совсем других областей человеческой деятельности. Исследование таких моделей позволяет, образно говоря, одним камнем убить много зайцев.

Здесь мы ограничимся перечислением некоторых ситуаций, в которых наш аппарат нагруженных графов (или его модификации) успешно работает.

1) *Сеть из резинок на прямой.* В системе из n точек на прямой некоторые пары соединены резинками известной жесткости; концевые точки растягиваются (к ним прикладываются известные силы); требуется определить положение равновесия точек.

2) *Второе правило Кирхгофа и формула Эйлера.* Это правило (см. с. 27 в этом номере) также удобно применять при расчете электрических цепей. Оказывается, что соответствующая математическая теория связана с формулой Эйлера $B-P+\Gamma=1$, где B, P, Γ числа вершин, ребер и областей, ограниченных плоским графом.

3) *Транспортные потоки.* Плоский граф может изображать сеть дорог (авиалиний, железных дорог) между городами, нагрузки — определять стоимость перевозок между соседними городами; требуется найти минимальное по стоимости распределение транспортных потоков. Интересно, что на практике такие экономические задачи решаются моделированием транспортной сети с помощью электрической сети: оператор вводит данные о количестве транспортируемого товара и о стоимости перевозок, ставит сеть под напряжение и считывает ответ с соответствующих амперметров!

4) *Совершенные прямоугольники.* Так называются прямоугольники, которые можно разбить на конечное число квадратов разных размеров. Как это ни странно, все совершенные прямоугольники находятся построением и расчетом некоторых нагруженных графов!

Этот список можно было бы продолжить, но к этим вопросам «Квант» надеется в скором времени вернуться.

Белая мгла, или Не верь глазам своим

Кандидат технических наук
Ф. Н. СКЛОКИН

...Густой туман тонким слоем лежит на поверхности земли и насквозь пронизывается ярким весенним арктическим солнцем. Освещенность настолько велика, что без темных очков невозможно смотреть ни вдаль, ни перед собой. Белое, ослепительно яркое снежное покрытие океана полностью сливается на расстоянии нескольких метров с окружающим воздушным пространством, словно вы находитесь на дне банки с молоком. Предметы не отбрасывают тени, в окружающем ландшафте почти отсутствует контрастность...

Это — белая мгла, одно из необычных явлений природы, которое можно наблюдать иногда зимой в горах и почти всегда — весной в Арктике. В белой мгле зрительные ощущения очень часто не соответствуют действительной, реальной картине окружающего вас пространства. И это приводит иногда к довольно неприятным последствиям.

Основное препятствие на пути лыжников, идущих к Северному полюсу,— торосы. Размеры торосов — от нескольких десятков сантиметров до нескольких метров; их надо либо обходить, либо карабкаться через них, преодолевая «в лоб». В белой мгле внешний вид торосов преображается. Нередко впереди себя вы четко видите вмятину в снежном покрове. Но вот вы хотите пронести лыжу над вмятиной и... натыкаетесь на припорошенный снегом кусок льда. В результате этой неожиданной встречи вы теряете равновесие, падаете; а за плечами тяжелый рюкзак. Уже лежа, вы видите, что перед вами действительно торос, и сколько бы вы теперь ни смотрели на него, *он* не превратится во вмятину.

Хочу привести один случай из наших полярных экспедиций. Это было в первых числах мая во время лыжного перехода через пролив Лонга на остров Врангеля. Была самая настоящая белая мгла. Я внимательно всматривался в лыжню, проложенную идущими впереди товарищами, и вдруг заметил, что она стала выпуклой — след от лыж стал на десяток сантиметров выше, чем поверхность снежного покрова. Тут же я перевел взгляд на кончики своих лыж. Нет, лыжи вдавливались в снег. Но стоило отвести взор от лыж, как лыжня сразу же становилась выпуклой. Мне было ясно, что это лишь оптический эффект, но отделаться от этого «наваждения» было непросто.

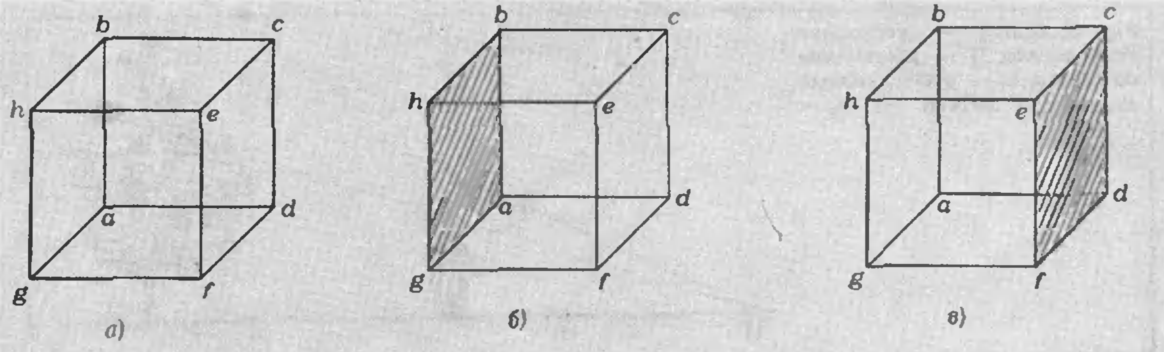


Рис. 1.

Объяснение подобным эффектам довольно несложное. Как известно, зрительное ощущение рельефа создается за счет тени. А в белой мгле в условиях сильного рассеянного света теней у предметов почти нет, и это вызывает зрительный эффект превращения выпуклого участка в вогнутый и наоборот.

Нечто подобное каждый может испытать дома, не отправляясь в Арктику. Нарисуйте на листе бумаги перспективное изображение куба — такое, как на рисунке 1, *а*. Попробуйте сосредоточить взгляд поочередно то на точке a, то на точке e. Вам будет казаться, что перспектива меняется: ближней будет то грань $abcd$, то грань $efgh$. Но если «затенить» грань $bagh$, то все сомнения отпадут: ближняя грань — это $bcda$ (рисунок 1, *б*). «Затените» грань $cdfe$ — и ближней станет грань $efgh$ (рисунок 1,*в*).

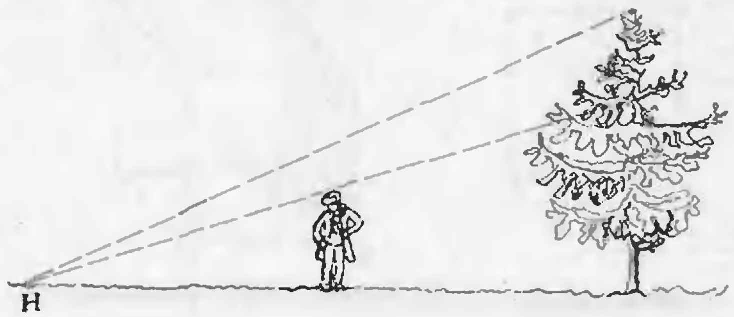
Но вернемся в белую мглу Арктики, которая приготовила путешественникам еще один зрительный эффект.

Окружающий снежный покров сливается с туманом. Глядя вперед, вы видите какой-то предмет, парящий в «молоке» белой мглы. Вам кажется, что он еще довольно далеко, но вдруг этот предмет неожиданно вырастает перед вами. Если это торос, вы просто натыкаетесь на него.

Вот еще два случая из полярных экспедиций. Группа участников зимнего похода по Приполярному Уралу попала в белую мглу. Поднимались по снежному склону; впереди на пути чернел какой-то предмет. Стали спорить, как долго до него идти. Одни уверяли, что это камень, лежащий недалеко; другие — что это далекий утес. На самом же деле оказалось, что это был скальный выступ, до которого пришлось идти вверх по склону почти километр. А во время экспедиции по Северной земле произошел прямо противоположный случай. За скалу, которая виднелась, как казалось, в нескольких километрах, приняли всего-навсего камень с куриное яйцо величиной, лежащий в нескольких десятках шагов.

Известный полярный путешественник Фритьоф Нансен в своей книге «Во мраке льда и ночи» приводит интересный пример потери зрительного ощущения реальных размеров предметов в туманную погоду в Арктике. В проливе Дробак в Норвегии перед носом его экспедиционного корабля «Фрам» неожиданно выросла большая земля, и лоцман скомандовал: «Полный назад!» Когда «Фрам» осторожно подошел поближе, землею оказался кусок плывшего по воде черпака.

Рис. 2. Если l_1 — расстояние до человека, l_2 — расстояние до дерева, h_1 — рост человека, то высота дерева — $h_2 \approx \frac{3}{2} h_1 \frac{l_2}{l_1}$.



Эти обманы зрения объяснить нетрудно. О размерах предметов можно судить, если есть информация об их удаленности от нас и возможность зрительно сравнивать их величину с размерами известного эталона — например, с фигурой человека.

Если наблюдатель, находящийся в точке Н (рисунок 2), знает примерные расстояния до человека и до оцениваемого предмета и знает примерный рост человека, он может из сравнения этих данных найти приблизительную высоту предмета.

Зная реальные размеры объекта, мы можем по его видимым размерам оценить расстояние до него. В этом нам помогают окружающие предметы, ландшафт.

При оценке удаленности и величины предметов в Арктике наблюдателю не с чем сравнивать. Зрительный образ тороса не является эталоном — ведь торос может иметь любые размеры: от сантиметров до метров. Окружающий ландшафт, а в белой мгле — практически отсутствие такового, не дает возможности оценить расстояние. Отсюда такая неопределенность в оценке видимых размеров предметов в белой мгле.

Вот какие коварные сюрпризы готовит Арктика путешественникам, идущим сквозь белую мглу.

Пары чисел и действия с ними

Кандидат физико-математических наук
Н. Б. ВАСИЛЬЕВ,
кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Содержание этой статьи в основном доступно ученикам седьмого класса. Однако мы рекомендуем ее также и старшеклассникам. В статье речь идет о решениях уравнений с двумя переменными в целых числах. В связи с этим рассматриваются различные правила умножения пар чисел, в том числе и умножение комплексных чисел.

1. Уравнение $ax-by=c$ в целых числах

Рассмотрим уравнение

$$8x-5y=19.$$

На примере этого уравнения мы продемонстрируем метод решения в целых числах линейных уравнений вида $ax-by=c$ с целыми a, b и c.

Поскольку $8\cdot3-5\cdot1=19$, пара чисел $x=3$, $y=1$ является решением исходного уравнения. Это решение мы нашли простым подбором.

Покажем теперь, как, имея одно решение, можно записать все остальные решения (их бесконечно много). Вычитая из уравнения $8x-5y=19$ равенство $8\cdot3-5\cdot1=19$, получаем $8(x-3)-5(y-1)=0$, или $x-3=5(y-1)/8$. Из последнего равенства видно, что число $x-3$ будет целым тогда и только тогда, когда $y-1$ делится на 8, то есть $y-1=8n$, где n — какое-нибудь целое число. Подставляя $y-1=8n$ в числитель дроби $5(y-1)/8$ и сокращая ее на 8, получаем $x-3=5n$.

Тем самым, все целые решения исходного уравнения можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} x=3+5n, \\ y=1+8n, \end{cases} \text{ или } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix};$$

здесь n — любое целое число.

Второй вид записи будет подробно объяснен в следующем пункте, а сейчас заметим, что тем же методом получается формула для всех целых решений любого уравнения $ax-by=c$ (где a и b — взаимно простые числа):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

где $(x_0;\ y_0)$ — какое-нибудь одно его целое решение.

Для решения предложенных ниже задач надо иметь ввиду следующие обстоятельства. Если целые числа a и b имеют общие делители (кроме 1 и -1), то надо разделить все члены уравнения на их наибольший общий делитель. В случае, когда c не делится на него, уравнение, очевидно, не имеет целых решений, а в случае, когда делится, такие решения существуют — надо только подобрать одно какое-нибудь решение и записать по формуле (*) все остальные.

Для любых чисел a и b имеется общий метод нахождения одного решения уравнения: этот метод основан на алгоритме Евклида (см. [1] и [5]).

Задачи

1. Имеют ли следующие уравнения решения в целых числах: а) $7x-5y=0$; б) $7x-5y=1$; в) $15x-9y=6$; г) $39x-63y=47$?

Если уравнение имеет решения, то укажите одно из них и запишите по общей формуле все его решения.

2. Сколько решений в натуральных (целых положительных) числах x, y имеют уравнения: а) $19x+85y=1985$; б) $7x+5y=99$?

3*. Автомат делает на ленте длиной 2 м синие пометки от ее начала через каждые 7 см и красные пометки тоже от ее начала через каждые 5 см. Сколько раз синяя и красная пометки окажутся на расстоянии 1 см друг от друга?

2. Пары чисел

Если решения уравнения с одним переменным x представляют собой отдельные числа, то решения уравнения с двумя переменными x и y — это уже пары чисел. В предыдущем пункте мы показали, как из одного целого решения уравнения $ax-by=c$ получать все остальные решения: надо к одному его решению — паре чисел $(x_0;\ y_0)$ — прибавить пару чисел $(b;\ a)$, умноженную на какое-нибудь целое число. Сейчас мы придадим точный смысл сложению пар чисел и умножению их на числа.

Для большей наглядности нам удобно пары чисел $(x;\ y)$ записывать в виде *столбиков* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; а сами числа x и y мы будем называть соответственно первой и второй *компонентами* данной пары (столбика). (Не надо путать столбик $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ с дробью $\frac{x}{y}$!)

Два столбика считаются *равными* тогда и только тогда, когда равны их компоненты:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, только если $\begin{cases} x_1=x_2, \\ y_1=y_2. \end{cases}$

Сложить два столбика — это значит сложить их компоненты:

$$\text{пусть } u=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{тогда } u+v=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}.$$

Так как от перемены мест слагаемых сумма чисел не меняется: $a+b=b+a$, то же самое можно сказать и про столбики: $u+v=v+u$. Для столбиков верно также правило $(u+v)+w=u+(v+w)$.

Умножить столбик u на число k — это значит умножить на k обе его компоненты:

$$\text{если } u=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\text{ то } ku=\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

Особую роль, подобную той, которую для чисел играет число 0, для столбиков играет нулевой столбик $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Если это не приводит к путанице, то его обозначают тоже через «0». Для всякого столбика u верно равенство $u+0=u$.

Казалось бы, столь же естественно ввести умножение столбиков:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1x_2 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}.$$

Для такого умножения выполнены все те же свойства, что и для умножения чисел: 1) $uv=vu$, 2) $u(vw)=(uv)w$, 3) $(u+v)w=uw+vw$. Роль «единицы» играет столбик $e=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Но в отличие от чисел, здесь не всегда возможно деление на ненулевой столбик. Например, если $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то не существует столбика v такого, что $uv=e$.

В конце статьи мы познакомимся с другим, как оказывается, тоже естественным и более содержательным правилом умножения пар чисел:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1x_2-y_1y_2 \\ x_1y_2+x_2y_1 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Это правило замечательно тем, что для него обратная операция — деление на ненулевой столбик — всегда возможна.

Пара чисел $(x;\ y)$, записанная не в виде столбика, а в виде строчки, используется обычно для обозначения координат точки на координатной плоскости Oxy. Метод координат позволяет связать алгебру с геометрией. Так, например, уравнение $ax-by=c$ соответствует прямой на координатной плоскости, а целые решения этого уравнения — точкам с целыми координатами (рис. 1). С помощью правил сложения пар чисел и умножения их на число можно записывать формулы для координат точек; например, если $A=(x_1;\ y_1)$, $B=(x_2;\ y_2)$ — две точки, то точка

$$C=\frac{1}{2}((x_1;\ y_1)+(x_2;\ y_2))=$$
$$=\left(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

— середина отрезка AB.

Задачи

4. Даны столбики

$$u=\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите столбики: а) $2u$; б) $2u-v$; в) $u+2v-3w$.

5. Найдите числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$x\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Сравните результат с 4 в).

6. а) Пусть даны точки $A=(7;\ -1)$ и $B=(-2;\ 5)$. Найдите координаты такой точки $C=(x;\ y)$, что B — середина отрезка AC. б) Найдите координаты точек D и E, которые делят отрезок AB на три равные части.

3. Уравнение $x^2-dy^2=1$ в целых числах

В первом пункте мы показали, как, исходя из одного решения уравнения $ax-by=c$, получать и записывать бесконечную серию его решений. Подобный результат мы получим и для уравнения $x^2-dy^2=1$, где d — натуральное число, не являющееся полным квадратом. Но для этого потребуется свой, более сложный метод. Мы продемонстрируем его на примере уравнения

$$x^2-2y^2=1.$$

Это уравнение имеет очевидные решения $(1;\ 0)$ и $(-1;\ 0)$. Ясно, что если $(x;\ y)$ — решение уравнения, то $(-x;\ y)$, $(x;\ -y)$ и $(-x;\ -y)$ — тоже решения. Поэтому можно ограничиться поиском только положительных (натуральных) решений. Вот два таких решения: $(3;\ 2)$, $(17;\ 12)$ — дальше в их

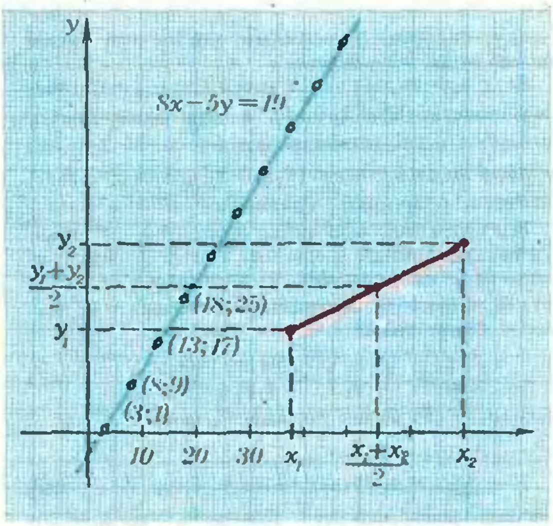


Рис. 1.

поисках продвинуться трудно.

Неожиданную помощь здесь оказывает иррациональное число $\sqrt{2}$. Пользуясь тождеством $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ разложим левую часть уравнения $x^2-2y^2=1$ на множители

$$(x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2})=1$$

и подставим сюда наше первое решение в натуральных числах $x=3$, $y=2$:

$$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1. \qquad (2)$$

Оказывается, что второе решение можно получить, если, пользуясь тождеством $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, возвести в квадрат число $3+2\sqrt{2}$ (или $3-2\sqrt{2}$):

$$(3+2\sqrt{2})^2=9+12\sqrt{2}+8=\\=17+12\sqrt{2},$$

$$(3-2\sqrt{2})^2=9-12\sqrt{2}+8=17-12\sqrt{2}.$$

Пара (17; 12) является вторым решением. Проверим это следующим образом. Возведем обе части верного равенства (2) в квадрат:

$$(3+2\sqrt{2})^2(3-2\sqrt{2})^2=1$$

и получим

$$(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})=1, \text{ или}$$
$$17^2-2\cdot 12^2=1.$$

Следующее новое решение можно получить, возведя число $3+2\sqrt{2}$ в куб:

$$(3+2\sqrt{2})^3=(3+2\sqrt{2})^2(3+2\sqrt{2})=\\=99+70\sqrt{2}.$$

Совершенно аналогично получим $(3-2\sqrt{2})^3=99-70\sqrt{2}$. Поскольку $(3+2\sqrt{2})^3(3-2\sqrt{2})^3=1$, имеем

$$(99+70\sqrt{2})(99-70\sqrt{2})=\\=99^2-70^2\cdot 2=1,$$

то есть (99; 70) — тоже решения уравнения $x^2-2y^2=1$.

Теперь, наверное, уже ясен способ получения новых решений — надо и дальше возводить $3+2\sqrt{2}$ в степень, то есть если

$$(3+2\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2},$$

где x_n и y_n — натуральные числа, то пара $(x_n;\ y_n)$ является решением уравнения $x^2-2y^2=1$. Можно доказать, что этот способ дает все его решения в натуральных числах.

Рассмотрим теперь более общее уравнение такого вида:

$$x^2-dy^2=1,$$

где d — натуральное число, не являющееся полным квадратом.

Оказывается, что все его решения в натуральных числах получаются таким же методом. Надо угадать самое меньшее его решение $(x_0;\ y_0)$ и возводить число $x_0+y_0\sqrt{d}$ в степень n:

$$(x_0+y_0\sqrt{d})^n=x_n+y_n\sqrt{d}.$$

(Самым меньшим решением называется такое решение $(x_0;\ y_0)$, что для любого другого решения $(x;\ y)$ выполняется неравенство $x_0+y_0\sqrt{d}<x+y\sqrt{d}$.)

Для любых чисел d имеется общий метод нахождения наименьшего натурального решения, основанный на разложении чисел в цепные дроби (см. [1] и [2]).

Задачи

7*. Найдите четыре решения в натуральных числах уравнения: а) $x^2-3y^2=1$; б) $x^2-5y^2=1$; в) $x^2-2y^2=-1$.

8*. Докажите, что

$$x_n=\frac{1}{2}((3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n),$$

$$y_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}((3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n)$$

— целые числа, удовлетворяющие уравнению $x^2-2y^2=1$, а) для $n=1, 2, 3$; б) для любого натурального n.

9. Найдите все целые решения уравнения $x^2-4y^2=13$.

10*. Докажите, что уравнение $x^2-3y^2=-1$ не имеет решений в целых числах.

4. Числа вида $p+q\sqrt{2}$

Обратим внимание на то интересное обстоятельство, что числу вида $p+q\sqrt{2}$ с рациональными p и q можно естественно сопоставить пару чисел $(p;\ q)$. При этом равенство двух чисел $p_1+q_1\sqrt{2}=p_2+q_2\sqrt{2}$ имеет место в том и только в том случае, когда $\binom{p_1}{q_1}=\binom{p_2}{q_2}$.

В самом деле, пусть $p_1+q_1\sqrt{2}=p_2+q_2\sqrt{2}$ и $q_1\neq q_2$; тогда получится, что $\sqrt{2}$ равняется рациональному числу $(p_1-p_2)/(q_2-q_1)$, а это неверно. Следовательно, должно выполняться равенство $q_1=q_2$; но тогда из равенства $p_1+q_1\sqrt{2}=p_2+q_2\sqrt{2}$ сразу получаем, что $p_1=p_2$.

Правило сложения чисел $p_1+q_1\sqrt{2}$ и $p_2+q_2\sqrt{2}$ такое же, как для столбиков:

$$(p_1+q_1\sqrt{2})+(p_2+q_2\sqrt{2})=(p_1+p_2)+(q_1+q_2)\sqrt{2},$$

$$\binom{p_1}{q_1}+\binom{p_2}{q_2}=\binom{p_1+p_2}{q_1+q_2}.$$

Теперь перемножим числа $p_1+q_1\sqrt{2}$ и $p_2+q_2\sqrt{2}$:

$$(p_1+q_1\sqrt{2})(p_2+q_2\sqrt{2})=$$
$$=(p_1p_2+2q_1q_2)+(p_1q_2+p_2q_1)\sqrt{2}.$$

В результате мы приходим к числу такого же вида и получаем новое правило умножения для столбиков с рациональными компонентами p_1, q_1, p_2, q_2:

$$\binom{p_1}{q_1}\binom{p_2}{q_2}=\binom{p_1p_2+2q_1q_2}{p_1q_2+p_2q_1}. \qquad (3)$$

Если следовать такому правилу, то можно записать решения уравнения $x^2-2y^2=1$ так: $\binom{x_n}{y_n}=\binom{3}{2}^n$ (возвести столбик в степень n — значит умножить столбик n раз на себя).

Для правила (3) выполнены обычные свойства умножения: роль единицы здесь играет столбик $\binom{1}{0}$, так как он соответствует числу $1=1+0\sqrt{2}$.

Оперировать с числами $p+q\sqrt{2}$ очень помогает интересная симметрия в множестве таких чисел: каждому числу $\alpha=p+q\sqrt{2}$ соответствует число $\bar{\alpha}=p-q\sqrt{2}$, которое называется *сопряженным* к α. (Для столбиков переход к сопряженному означает просто изменение знака у второй компоненты.)

Для операции сопряжения выполнены такие свойства:

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta},\ \overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta},\ \bar{\bar{\alpha}}=\alpha.$$

Но самое важное — это то, что произведение сопряженных чисел $(p+q\sqrt{2})(p-q\sqrt{2})=p^2-2q^2$ уже не содержит $\sqrt{2}$; $\alpha\bar{\alpha}$ — рациональное число. Это позволяет делить числа вида $p+q\sqrt{2}$ друг на друга, получая при этом число такого же вида. Чтобы разделить β на α, достаточно умножить β на $\bar{\alpha}$ и разделить результат на $\alpha\bar{\alpha}$.

Мы уже пользовались парами сопряженных чисел при решении уравнения $x^2-2y^2=1$. Левую часть x^2-2y^2 мы представили как произведение двух сопряженных чисел

$$\alpha=x+y\sqrt{2},\quad \bar{\alpha}=x-y\sqrt{2}.$$

Возьмем теперь два числа $\alpha=x_1+y_1\sqrt{2}$ и $\beta=x_2+y_2\sqrt{2}$ и сопряженные к ним $\bar{\alpha}=x_1-y_1\sqrt{2}$ и $\bar{\beta}=x_2-y_2\sqrt{2}$. Рассмотрим произведение $\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}$. Производя вычисления в определенном порядке — сначала $\alpha\bar{\alpha}$, потом $\beta\bar{\beta}$ и затем $(\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta})$ — получаем:

$$\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}=(x_1^2-2y_1^2)(x_2^2-2y_2^2). \qquad (4)$$

Если вычисление того же произведения $\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}$ произвести в другом порядке, то мы получим

$$\alpha\beta=(x_1x_2+2y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{2},$$
$$\bar{\alpha}\bar{\beta}=(x_1x_2+2y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{2},$$
$$\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}=(x_1x_2+2y_1y_2)^2-2(x_1y_2+x_2y_1)^2. \qquad (5)$$

Из равенств (4) и (5) получаем тождество

$$(x_1^2-2y_1^2)(x_2^2-2y_2^2)=(x_1x_2+2y_1y_2)^2-2(x_1y_2+x_2y_1)^2. \qquad (6)$$

Из этого тождества следует интересная связь между целыми решениями уравнений более общего вида $x^2-2y^2=c$.

Если для пары целых чисел $(x_1;\ y_1)$ выполнено равенство $x_1^2-2y_1^2=c_1$, а для пары целых чисел $(x_2;\ y_2)$ выполнено равенство $x_2^2-2y_2^2=c_2$, то пара целых чисел $(x_1x_2+2y_1y_2;\ x_1y_2+x_2y_1)$ является решением уравнения $x^2-2y^2=c_1c_2$.

Все сказанное про числа вида $a+b\sqrt{2}$ верно и для чисел вида $a+b\sqrt{d}$, где d — простое число (или натуральное, не делящееся на квадрат). В частности, правило умножения для любого d будет таким:

$$\binom{x_1}{y_1}\cdot\binom{x_2}{y_2}=\binom{x_1x_2+dy_1y_2}{x_1y_2+x_2y_1}. \qquad (7)$$

Тождество (6) будет выглядеть так:

$$(x_1^2-dy_1^2)(x_2^2-dy_2^2)=$$
$$=(x_1x_2+dy_1y_2)^2-d(x_1y_2+x_2y_1)^2. \qquad (8)$$

Замечательно, что это тождество выполнено вообще для всех чисел x_1, y_1, x_2, y_2, d — это можно непосредственно проверить, раскрыв скобки. В частности, оно верно и при $d=-1$; получающееся при этом тождество будет играть центральную роль в следующем пункте.

Задачи

11. Перемножьте числа

$$(2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}).$$

12. Разделите числа, избавившись от иррациональности в знаменателе

а) $\dfrac{9+4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{p_1+q_1\sqrt{d}}{p_2+q_2\sqrt{d}}$.

13*. Докажите, что произведение чисел вида x^2+5y^2, где x и y — целые числа, есть снова число того же вида. Найдите все такие числа меньшие 100.

5. Замечательное тождество и композиция Виета

Любые две пары чисел $(a_1;\ b_1)$ и $(a_2;\ b_2)$ связаны таким тождеством, известным еще Диофанту:

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)=$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2. \qquad (9)$$

Оно получается из тождества (8) при $d=-1$ и часто используется в алгебре и теории чисел. Мы расскажем здесь о другом его применении: интересном способе, позволяющем получать из двух прямоугольных треугольников новый прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной произведению их гипотенуз.

Возьмем один прямоугольный треугольник с катетами a_1, b_1 и гипотенузой c_1 и другой — с катетами a_2, b_2 и гипотенузой c_2. Поскольку по теореме Пифагора

$$a_1^2+b_1^2=c_1^2 \text{ и } a_2^2+b_2^2=c_2^2,$$

тождество (9) можно записать так:

$$(c_1c_2)^2=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2.$$

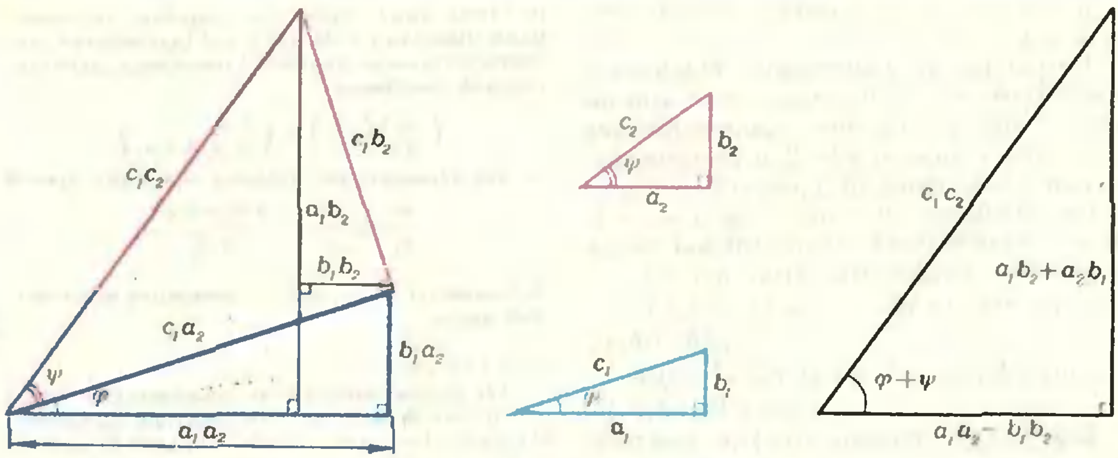


Рис. 2.

Из этого равенства видно, что существует прямоугольный треугольник с катетами $|a_1a_2-b_1b_2|$, $a_1b_2+a_2b_1$ и гипотенузой c_1c_2. По-видимому, это впервые заметил в XVI веке французский математик Франсуа Виет (см. [7]), поэтому назовем такой способ получения из двух прямоугольных треугольников нового прямоугольного треугольника *«композицией Виета»*.

Рассмотрим два одинаковых прямоугольных треугольника с катетами m, n и положим в тождестве (9) $a_1=a_2=n$, $b_1=b_2=m$. Получим

$$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2.$$

Мы видим, что композиция Виета дает новый прямоугольный треугольник с катетами $|m^2-n^2|$, $2mn$ и гипотенузой m^2+n^2. Интересно, что все прямоугольные треугольники с целыми (взаимно простыми) сторонами a, b, c — так называемые «пифагоровы тройки» — могут быть получены по этим формулам

$$c=m^2+n^2,\ a=m^2-n^2,\ b=2mn, \quad (10)$$

где m и n — (взаимно простые) натуральные числа разной четности, $m>n$.

Самое же неожиданное заключается в том, что при композиции Виета двух прямоугольных треугольников получается новый прямоугольный треугольник (рис. 2), у которого угол против катета $a_1b_2+a_2b_1$ равен сумме $\varphi+\psi$ углов φ и ψ исходных треугольников против катетов b_1 и b_2 (если $\varphi+\psi<90°$; если же $\varphi+\psi>90°$, то этот угол равен $180°-(\varphi+\psi)$). Таким образом, композицию Виета можно задать чисто геометрически. Композицией Виета двух прямоугольных треугольников является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной произведению гипотенуз, и углом, равным сумме соответствующих углов взятых треугольников.

Задачи

14. На клинописной табличке, изготовленной в древнем Вавилоне примерно 1500 лет до н. э., среди других пифагоровых треугольников указан такой: 4961, 6480, 8161. Каким m и n в формулах (10) он соответствует?

15*. Найдите $\cos 75°$, используя композицию Виета для двух прямоугольных треугольников с углами 30° и 45°.

16. В пифагоровых треугольниках со сторонами 5, 12, 13 и 7, 24, 25 гипотенуза на 1 больше одного из катетов.

а) Найдите еще два таких пифагоровых треугольника.

б) Найдите общую формулу для сторон таких треугольников.

в)* Укажите среди них треугольники, у которых гипотенуза есть полный квадрат (как у треугольника 7, 24, 25: $25=5^2$).

6. Комплексные числа $a+bi$

В предыдущих пунктах мы с помощью чисел вида $a+b\sqrt{d}$ пришли к тождеству (8), которое оказалось верным при любом d. Затем мы положили в этом тождестве $d=-1$; при этом сами выражения $a+b\sqrt{d}=a+b\sqrt{-1}$ потеряли смысл, так как среди чисел нет $\sqrt{-1}$ — ведь квадрат любого числа является неотрицательным числом. Тем не менее оказывается целесообразным ввести в употребление новое «мнимое» число, квадрат которого равен -1. Его обозначают буквой i (от латинского слова imaginarius — мнимый, воображаемый).

Выражение вида $a+bi$, где a и b — обычные числа, называют *комплексными числами*. Два комплексных числа, по определению, равны тогда и только тогда, когда равны их компоненты:

$a_1+b_1i=a_2+b_2i$, только если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$.

Сложение и умножение комплексных чисел $a+bi$ производится аналогично тому, как они производились для чисел вида $a+b\sqrt{2}$ с рациональными a и b. Однако здесь a и b могут быть любыми числами, а $i^2=-1$. В результате этих операций мы снова получаем выражение вида $a+bi$:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i,$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Мы видим теперь, откуда взялось умножение (1) столбиков, которое мы указали в пункте 2. Это умножение по существу уже обсуждалось в предыдущем пункте — как композиция Виета двух прямоугольных треугольников с катетами $(a_1;\ b_1)$ и $(a_2;\ b_2)$.

Особую роль играют *нулевое* комплексное число $0=0+0i$, *единица* $1=1+0i$ и *мнимая единица* $i=0+1i$. Заметим, что если какая-нибудь компонента a или b комплексного числа $a+bi$ равна нулю, то соответствующую часть комплексного числа при записи опускают.

В мире комплексных чисел можно делить на любое число, отличное от нуля $0=0+0i$. Вычисляя частное двух чисел, удобно умножить оба эти числа на сопряженное число $c-di$ к делителю $z=c+di$:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i.$$

Комплексные числа возникли впервые в алгебре, в задачах о решении алгебраических уравнений третьей и более высокой степени. Однако применения комплексных чисел охватывают едва ли не все основные области математики и физики — геометрию, теорию чисел, математический анализ и теорию вероятностей, расчет электрических цепей, гидродинамику и квантовую механику.

Мы получили комплексные числа как пары действительных чисел, определив для них умножение правилом (1), удовлетворяющее естественным условиям — коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности. Для математики интересна задача классификации всех таких правил. Оказывается, все они укладываются в общую схему: пары (x, y) записываются в виде «обобщенных комплексных чисел» $x+yj$ и j^2 в вычислениях заменяется на $r+sj$ (r, s — фиксированные числа, см. задачу 19); здесь возможны три существенно различных случая (к которым можно свести остальные): (1) $j^2=1$ (к этому типу относится подробно изученное нами правило $j^2=2$); (2) $j^2=0$ (любопытно, что соответствующее правило умножения, записанное для столбиков:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_1y_2+x_2y_1 \end{pmatrix}$$

— это перевернутое правило сложения дробей

$$\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1x_2+x_2y_1}{x_1x_2}\ )$$

и, наконец, (3) $j^2=-1$ — настоящие комплексные числа.

Задачи

17. Будем изображать комплексное число $x+iy$ точкой $(x;\ y)$ на координатной плоскости. Пусть $u=1-i$, $v=-2+5i$. Найдите а) $\bar{u}$; б) $\bar{v}$; в) uv; г) $u\bar{v}$; д) u/v и изобразите все эти числа на координатной плоскости.

18. Пусть $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $w=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Найдите а) z^2, z^4, z^8; б) w^2, w^3, w^6, w^2+w+1.

19*. Пусть r и s — два фиксированных числа. Зададим умножение на парах чисел (всех, а не только рациональных) формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1x_2+ry_1y_2 \\ x_1y_2+x_2y_1+sy_1y_2 \end{pmatrix}.$$

(Это правило соответствует умножению «обобщенных комплексных чисел» $x+jy$, где $j^2=r+sj$.)

а) Проверьте, что для этого умножения выполнены основные свойства 1) — 3) из пункта 2.

б) Какая пара e играет роль единицы?

в) При каких r и s для любой пары u, отличной от $0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, существует такое v, что $uv=e$?

г) При каких r и s существует такая пара $u\neq 0$, что $u^2=0$?

20. Зададим умножение пар чисел $(a;\ b)$ так: каждой паре чисел $(a;\ b)$ соответствует линейная функция $u(t)=at+b$, а произведению $(a_1;\ b_1)$ на $(a_2;\ b_2)$ соответствует композиция функции $u_1(t)=a_1t+b_1$ и $u_2(t)=a_2t+b_2$, то есть подстановка первой во вторую $u_2(u_1(t))=a_2(a_1t+b_1)+b_2=a_2a_1t+a_2b_1+b_2$, или

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2 \\ a_2b_1+b_2 \end{pmatrix}.$$

Какие из следующих законов выполнены для этого умножения: $uv=vu$, $(uv)w=u(vw)$, $u(v+w)=uv+uw$, $(u+v)w=uw+vw$?

Список дополнительной литературы

1. Гельфонд А. О. *Решение уравнений в целых числах*. М.: Наука, 1983.— (Популярные лекции по математике, вып. 8.)
2. Нестеренко Ю. В., Никишин Е. М. *Очерк о цепных дробях*. Квант, 1983, № 5, 6.
3. Вагутен Н. *Сопряженные числа*. Квант, 1980, № 2.
4. Ашманов С. *Числа и многочлены*. Квант, 1980, № 2.
5. *Заочные математические олимпиады*. М.: Наука, 1981.
6. Понтрягин Л. С. *Комплексные числа*. Квант, 1982, № 4.
7. Башмакова И. Г. *Становление алгебры*. М.: Знание, 1979.

Физика 8,9,10

Публикуемая ниже заметка «Какой из трех законов Ньютона важнее?» предназначена восьмиклассникам, «Правила Кирхгофа» — девятиклассникам и «На что способен микроскоп?» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

Какой из трех законов Ньютона важнее?

На этот вопрос многие, не задумываясь, отвечают: «Конечно, второй! В первом-то и формулы никакой нет, а третий просто очевиден». Однако в действительности это не совсем так.

Открытие законов движения позволило за сравнительно небольшой промежуток времени достичь больших успехов в объяснении многочисленных явлений окружающего мира — от описания движения брошенного камня до вычисления отклонений в движении планет от законов Кеплера под влиянием других планет.

Первый шаг в понимании законов движения был сделан Галилео Галилеем, сформулировавшим принцип инерции. Он провозглашает, что тело, предоставленное самому себе, то есть когда на него не действуют никакие другие тела или действия других тел компенсируются, сохраняет свое прямолинейное движение с постоянной скоростью, если оно двигалось до этого, или остается в покое, если оно до этого покоилось. Сейчас это утверждение кажется нам очевидным. Однако со времен Аристотеля было принято считать, что при отсутствии внешних воздействий тело может только покоиться, а для его движения даже с постоянной скоростью необходимо действие со стороны других тел. Ведь в повседневной жизни практически всегда при движении возникают те или иные силы трения, которые со временем это движение (если оно ничем не поддерживается) прекращают.

Исаак Ньютон пошел дальше. Он дал ответ на вопрос о том, как именно изменяется скорость тела под влиянием других тел. Для этого он сформулировал три закона динамики, получившие название законов Ньютона.

Первый из них фактически повторяет принцип инерции Галилея, однако в современной формулировке в него вкладывается несколько иной смысл: «Существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, относительно которых движущиеся тела сохраняют свою скорость постоянной, если на них не действуют другие тела или действия других тел компенсируются». Другими словами, первый закон Ньютона позволяет выбирать наиболее удобные системы отсчета, в которых будут справедливы второй и третий законы. Рецепт прост: скомпенсируйте внешние воздействия на какое-либо тело и рассмотрите его движение в выбранной вами системе отсчета. Если оно будет покоиться или двигаться равномерно и прямолинейно,— система отсчета инерциальна, если же тело будет двигаться ускоренно, — система неинерциальна и для описания движения непосредственно с помощью второго закона Ньютона не подходит.

Второй закон Ньютона связывает величину приложенной к телу силы с возникающим ускорением: $\vec{F}=m\vec{a}$. Он позволяет решать основную задачу *) механики — определять положение и скорость тела в любой момент времени по известным силам и начальным условиям («Физика 8», глава 6). Сила при этом выступает как физическая величина, характеризующая взаимодействие тел. С помощью второго закона, в принципе, можно решить любую механическую задачу. Однако о явных выражениях для сил в законах динамики ничего не говорится, а просто указывается на необходимость исследования сил, которые служат причиной изменения движения тел. Только в своем законе всемирного тяготения, который к трем основным законам динамики не отно-

*) Обратная задача — нахождение скоростей, ускорений и сил по известной зависимости координат тела от времени — решается несравненно проще. Однако следует заметить, что таким образом можно определить только равнодействующую всех сил, приложенных к телу, а не каждую силу в отдельности.

сится, Ньютон дает непосредственное выражение для силы гравитационного притяжения между двумя телами.

В качестве третьего закона Ньютон формулирует некоторое общее для всех типов взаимодействий свойство: действию всегда есть равное и противоположное противодействие. Так, если одно тело, действуя на второе, толкает его на север, то второе с такой же по модулю силой толкает первое на юг, и обе эти силы действуют строго вдоль одной и той же линии.

Таким образом, мы приходим к выводу, что нельзя сказать, какой из трех законов Ньютона важнее. Все они необходимы для описания движения тел и все вместе дают принципиальную возможность полного описания любого механического движения. Слово «принципиальная» здесь добавлено неспроста. Только в случае простейших типов сил уравнения Ньютона удается решить точно. Возникающие на практике реальные задачи из-за их математической сложности приходится решать более сложными методами с помощью ЭВМ. Так, задача о движении двух тел под действием их взаимного гравитационного притяжения решается сравнительно просто. Та же задача, но для трех тел, вообще не имеет точного решения, но может быть решена с любой степенью точности. С появлением ЭВМ получение заданной точности решения требует значительно меньшего времени.

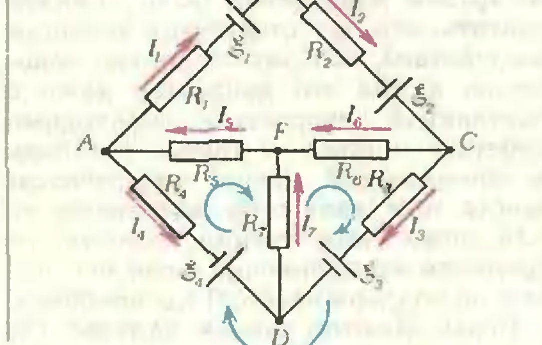
Правила Кирхгофа

Из учебника «Физика 9» (§ 65) мы узнали о законе Ома для замкнутой цепи, который позволяет находить ток, протекающий в простейшей неразветвленной электрической цепи, состоящей из источника тока и резистора. Однако на практике чаще приходится иметь дело со сложными, разветвленными цепями типа показанной на рисунке. Они могут содержать несколько источников тока и несколько резисторов. Эти цепи, в свою очередь, могут служить элементами еще более сложной цепи. Для отыскания токов в различных участках таких цепей служат правила Кирхгофа, которые мы и рассмотрим.

Точки цепи, в которых сходятся три или больше проводов (точки A, B, C, D, F), назовем точками разветвления, или узлами. Ради простоты внутреннее сопротивление каждого источника тока включим в сопротивление резистора в соответствующем участке цепи.

Прежде всего расставим и пронумеруем токи, текущие в каждом участке цепи, произвольно указав их направления. Будем считать ток положительным, если он «втекает» в точку разветвления, и отрицательным в противном случае (о правомерности такого выбора знаков будет сказано ниже). Понятно, что заряд не может ни накапливаться в узле, ни исчезать из него иначе как по подводящим проводам. Следовательно, какой заряд в единицу времени в узел «втекает», такой же заряд должен и «вытечь». Таким образом, мы пришли к первому правилу Кирхгофа: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в любой точке разветвления цепи (в узле), равна нулю.*

Теперь выделим в нашей сложной схеме какой-либо простой замкнутый контур, например $ABCDA$, и произвольно выберем направление его обхода — скажем, по часовой стрелке, начиная от точки A. Рассмотрим участок AB этого контура. Пусть напряжение на нем равно U_{AB}. В отсутствие источника тока эта величина была бы равна падению напряжения I_1R_1 в резисторе (работа по перемещению заряда из точки A в точку B равна выделяющемуся в резисторе количеству теплоты). Если же на участке есть источник тока, то, в зависимости от его полярности, для переноса заряда из точки A в точку B придется совер-



шить работу, бо́льшую или меньшую чем I_1R_1. На данном участке источник тока с ЭДС $\mathscr{E}_1$ уменьшает разность потенциалов (сторонние силы внутри источника совершают положительную работу), и поэтому можно записать:

$$U_{AB}=\varphi_A-\varphi_B=I_1R_1-\mathscr{E}_1. \qquad (1)$$

На участке BC все будет точно так же:

$$U_{BC}=\varphi_B-\varphi_C=I_2R_2-\mathscr{E}_2. \qquad (2)$$

В случае же участка CD источник тока имеет противоположную, по сравнению с предыдущими источниками, полярность, и поэтому он не уменьшает, а увеличивает разность потенциалов (сторонние силы внутри источника совершают отрицательную работу):

$$U_{CD}=\varphi_C-\varphi_D=I_3R_3+\mathscr{E}_3. \qquad (3)$$

На последнем участке рассматриваемого контура по нашему предположению ток течет от точки A к точке D, и ситуация полностью соответствует участку AB:

$$U_{AD}=I_4R_4-\mathscr{E}_4,$$

или, учитывая выбранное направление обхода,

$$U_{DA}=\varphi_D-\varphi_A=-U_{AD}=-I_4R_4+\mathscr{E}_4. \qquad (4)$$

Складывая почленно равенства (1)—(4), получаем:

$$I_1R_1+I_2R_2+I_3R_3-I_4R_4=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_4.$$

Это соотношение выражает второе правило Кирхгофа: *для любого замкнутого контура алгебраическая сумма падений напряжения равна алгебраической сумме ЭДС.*

Правила Кирхгофа не выражают никаких новых свойств электрического поля и поэтому не могут рассматриваться как физические законы. Первое из них, как мы уже говорили, есть следствие закона сохранения заряда, второе — следствие закона сохранения энергии. Однако они оказываются чрезвычайно полезными при отыскании токов в разветвленных цепях.

Вернемся к схеме, изображенной на рисунке, и запишем уравнения, выражающие правила Кирхгофа для узлов A, B, C, F и контуров $ABCDA$, $AFDA$, $DFCD$:

$$I_5-I_1-I_4=0,$$
$$I_1-I_2=0,$$
$$I_2-I_3-I_6=0,$$
$$I_6+I_7-I_5=0,$$
$$I_1R_1+I_2R_2+I_3R_3-I_4R_4=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_4,$$
$$-I_4R_4-I_5R_5-I_7R_7=-\mathscr{E}_4,$$
$$I_7R_7-I_6R_6+I_3R_3=-\mathscr{E}_3.$$

Еще раз обратим внимание на выбор знаков «плюс» или «минус» при составлении уравнений. Перед падением напряжения на резисторе ставится знак «плюс», если выбранное нами направление тока на этом участке совпадает с выбранным направлением обхода, и знак «минус» — в противном случае. ЭДС источника берется со знаком «плюс», если направление тока, который он мог бы создать в контуре, совпадает с направлением обхода контура, и со знаком «минус» — в противоположном случае.

Истинное же направление токов можно определить лишь после решения системы уравнений: если полученное значение какого-либо тока окажется положительным, то это значит, что направление этого тока было выбрано верно; если же ток получится отрицательным, значит, его истинное направление противоположно выбранному.

Нетрудно показать, что, применяя правила Кирхгофа, всегда можно получить ровно столько независимых уравнений, сколько неизвестных токов, то есть полностью и однозначно решить поставленную задачу*).

На что способен микроскоп?

При создании оптических приборов, «вооружающих» глаз, естественно возникает вопрос об их предельных возможностях. Для микроскопа, например, такой характеристикой служит его увеличение. С точки зрения геометрической оптики, подбирая соответствующие окуляр и объектив, увеличение микроскопа можно сделать сколь угодно большим. Однако в действительности это не так, и причина тому — волновая природа света. Представление о лучах света как о геометрических линиях служит

*) Подробное математическое доказательство этого факта имеется в статье О. В. Ляшко в этом номере журнала. (*Примеч. ред.*)

лишь приближением, справедливым до тех пор, пока длина волны света много меньше размеров исследуемого предмета.

Прежде чем говорить о «способностях» микроскопа, рассмотрим некоторую механическую задачу. Не будучи буквальной аналогией, она все же поможет понять, где лежат пределы возможностей оптических приборов.

Представьте себе, что некий исследователь решил изучать форму упругой холмистой поверхности. Для этого, в частности, ему понадобилось уметь восстанавливать перпендикуляр к поверхности в любой ее точке. К этой задаче исследователь подошел несколько необычным способом — он стал бросать на поверхность упругий шарик, измеряя каждый раз угол между направлениями падения и отражения шарика и строя биссектрису этого угла. Очевидно, что таким способом действительно можно получить необходимый набор перпендикуляров, но только в том случае, если диаметр шарика много меньше расстояний между ближайшими «горбами» и радиусами их кривизны (рис. 1, *а*). В противном случае (рис. 1, *б*) никакой информации о форме поверхности получить не удастся.

Нечто подобное происходит и при наблюдении за объектом в микроскоп, хотя между световыми лучами и шариками имеется существенное различие. По мере того как мы хотим

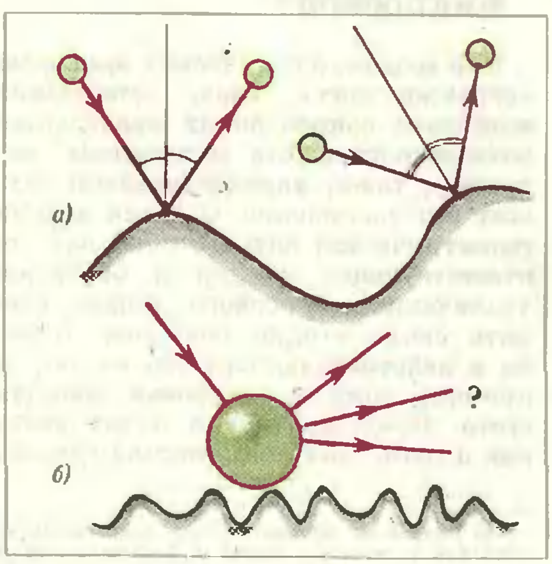


Рис. 1.

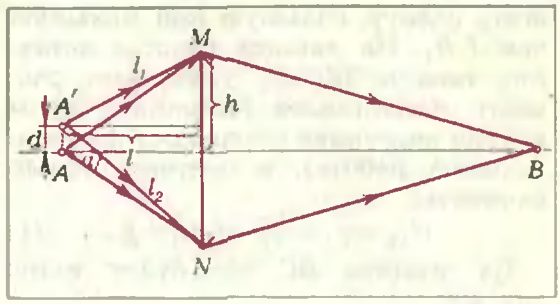


Рис. 2.

рассматривать все более и более мелкие детали объекта, мы изменяем увеличение микроскопа. Оказывается, при увеличении примерно в 2000 раз можно различить две точки, если они находятся друг от друга на расстоянии порядка 0,2 мкм, что составляет около половины длины волны для видимого света. Формально можно довести увеличение микроскопа и до 5000, и до 10 000, однако при этом точки, находящиеся на расстояниях, меньше 0,2 мкм, останутся неразличимыми.

Попробуем разобраться, почему так происходит, обратившись к волновым свойствам света. Рассмотрим тонкую линзу (которая может служить объективом нашего микроскопа). Пусть изображение некоторой точки A находится в точке B (рис. 2). Возьмем точку A', близкую к точке A. Из геометрической оптики следует, что ее изображение будет находиться в некоторой точке B', заведомо не совпадающей с точкой B. Однако всегда ли наблюдателю удается различить точки B и B', то есть увидеть их именно как две точки?

С точки зрения волновой оптики изображение в линзе каждой точки формируется совокупностью всех лучей, проходящих через линзу. В нашем примере это означает, что изображение точки A' не совпадет с точкой B в том случае, если времена прохождения через линзу крайних лучей $A'MB$ и $A'NB$ будут различными. А что под этим подразумевается? Тут следует заметить, что времена можно считать различными, если они отличаются друг от друга хотя бы на период T колебаний световой волны. В рассматриваемой задаче это единственный имеющийся в нашем распоряжении масштаб времени.

Таким образом, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$t_{A'NB}-t_{A'MB}>T=\frac{\lambda}{c},$$

где λ — длина волны, c — скорость света в вакууме. Поскольку времена прохождения света от точек M и N до B равны, полученное условие можно переписать в виде

$$t_{A'N}-t_{A'M}=\frac{l_2-l_1}{c}=\frac{\lambda}{c}. \qquad (*)$$

Из прямоугольных треугольников на рисунке 2 находим:

$$l_2^2=l^2+(h+d)^2,$$
$$l_1^2=l^2+(h-d)^2,$$

откуда, вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$l_2^2-l_1^2=(l_2-l_1)(l_1+l_2)=4hd.$$

Приняв $l_1+l_2=2l$ и $h/l=\sin\alpha$, находим:

$$l_2-l_1=\frac{2hd}{l}=2d\sin\alpha.$$

Тогда из условия (*) следует, что

$$d\geq\frac{\lambda}{2\sin\alpha}$$

— изображения двух точек окажутся различимыми, если расстояние между ними больше или хотя бы порядка длины световой волны. Для видимого света длина волны составляет примерно 0,5 мкм.

Чем меньше размеры предмета, еще различимого микроскопом, тем больше так называемая разрешающая способность микроскопа.

Примечание. Кроме обычных оптических микроскопов существуют электронные микроскопы, у которых разрешающая способность много больше. При их помощи можно даже рассмотреть отдельные молекулы.

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка предназначена девятиклассникам. Однако она может быть полезной и учащимся других классов.

Отражение кривых и преобразования формул

Сравнение математических фигур и величин служит материалом для игр и обучения мудрости.

И. Песталоцци

Математик любит прежде всего симметрию.

Дж. Максвелл

При исследовании функций и построении их графиков полезно учитывать симметрию получаемых кривых. Из школьного курса вам знакомы свойства графиков четных и нечетных функций. Напомним, что функция f с симметричной относительно нуля областью определения называется четной, если $f(-x)=f(x)$ для всех $x\in D(f)$, и нечетной, если $f(-x)=-f(x)$ для всех $x\in D(f)$. Легко показать, что график функции f симметричен относительно оси Oy в том и только в том случае, когда функция f является четной, и симметричен относительно начала координат в том и только в том случае, когда f — нечетная функция. Таким образом, отмеченные свойства графиков отражают простые особенности соответствующих формул.

Более общим способом задания кривых на плоскости является задание их с помощью уравнений с двумя переменными. Например, окружность радиуса r с центром в начале координат задается уравнением $x^2+y^2=r^2$. Прорешав упражнения, предлагаемые в данной статье, вы узнаете, какие свойства уравнений, задающих кривые, отвечают тем или иным видам симметрии этих кривых. Весь новый материал вы «откроете» самостоятельно, решая приводимые ниже упражнения. Мы же лишь напомним необходимые сведения и рассмотрим один простой пример.

1. Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех тех точек координатной плоскости, координаты которых служат решениями этого уравнения. Другими словами, Г есть график уравнения $f(x,\ y)=0$, если $M(x;\ y)\in\Gamma\Rightarrow f(x,\ y)=0$. Отметим, что график функции $y=f(x)$ можно рассматривать и как график уравнения $y-f(x)=0$.

2. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка координатной плоскости

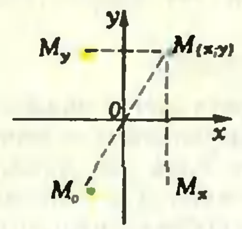


Рис. 1. а.

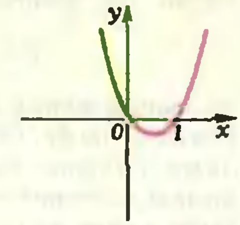


Рис. 1. б.

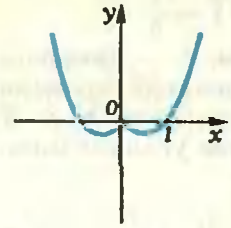


Рис. 1. в.

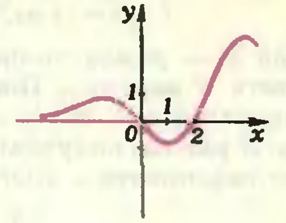


Рис. 1. г.

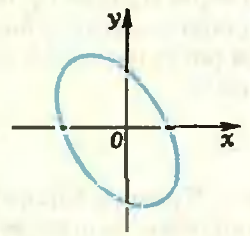


Рис. 1. д.

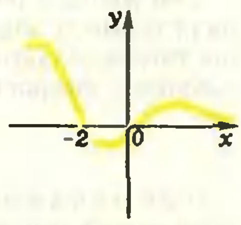


Рис. 2. а.

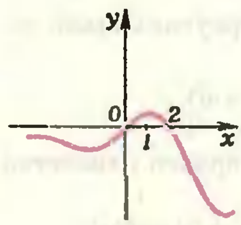


Рис. 2. б.

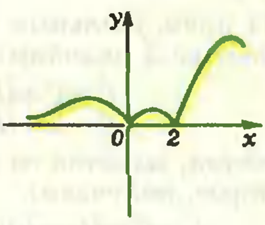


Рис. 2. в.

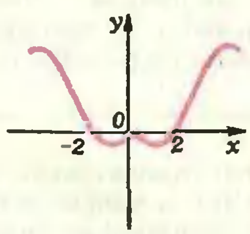


Рис. 2. г.

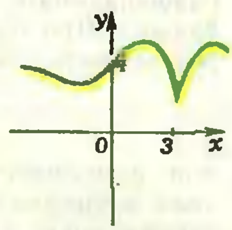


Рис. 2. д.

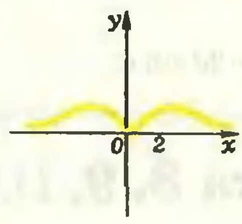


Рис. 2. е.

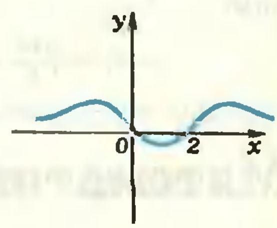


Рис. 2. ж.

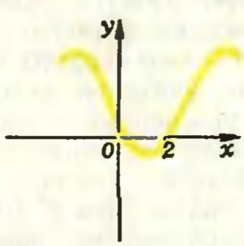


Рис. 2. з.

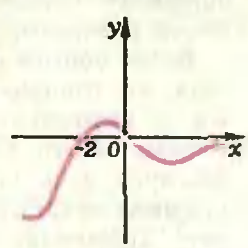


Рис. 2. и.

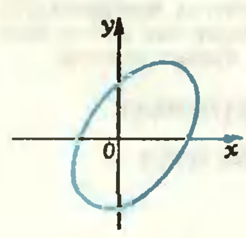


Рис. 3. а.

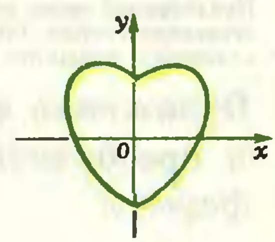


Рис. 3. б.

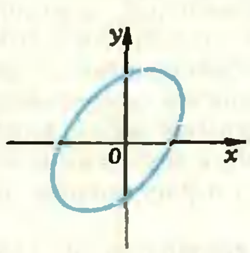


Рис. 3. в.

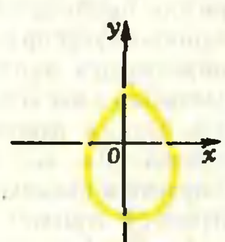


Рис. 3. г.

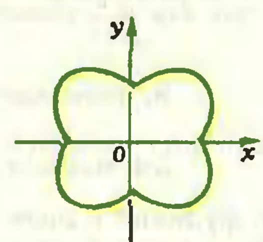


Рис. 3. д.

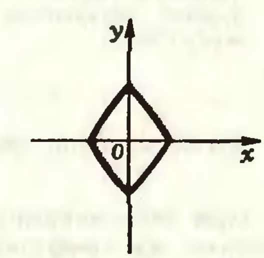


Рис. 3. е.

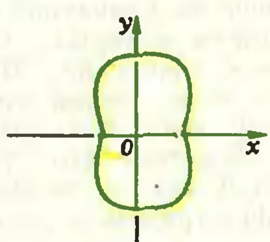


Рис. 3. ж.

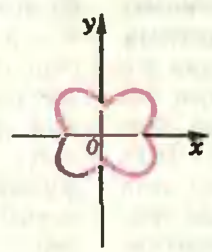


Рис. 3. з.

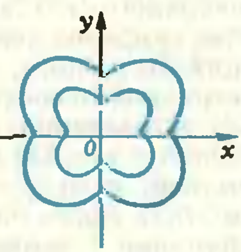


Рис. 3. и.

xOy (рис. 1, *а*), тогда точки M_X, M_Y, M_O, получаемые отражениями точки M относительно осей Ox, Oy и начала координат O соответственно, будут иметь следующие координаты:

$M_X(x;\ -y)$; $M_Y(-x;\ y)$; $M_O(-x;\ -y)$.

Упражнение 1. Какие координаты будут иметь точки, симметричные точке $M(x;\ y)$ относительно биссектрис углов, образованных осями координат?

3. Использование функции $|x|$ позволяет, исходя из уравнений произвольных кривых, получать уравнения кривых, обладающих определенными свойствами симметрии (относительно начала координат, осей Ox и Oy). Рассмотрим пример, иллюстрирующий сказанное, а общие выводы вы сделаете сами, решая предлагаемые упражнения.

Пример. *Построить график функции* $y=x^2-|x|$.

Решение. При $x\geqslant 0$ график данной функции совпадает с графиком функции $y=x^2-x$ (рис. 1, *б*), но *функция* $y=x^2-|x|$ *четная, следовательно*, ее график симметричен относительно оси Oy и выглядит так, как это изображено на рисунке 1, *в*.

Приступайте теперь к решению упражнений. Мы предлагаем следующие изменения в порядке работы в случае, если у вас возникнут затруднения при решении упражнений 2 и 3: если вы не справились с тем или иным заданием, то загляните в ответ и постарайтесь изобразить кривую, задаваемую приведенной в ответе формулой, отправляясь от новой исходной кривой, изображенной на с. 59 на рисунке 1 (текста ответов) для упражнения 2 и на рисунке 2 для упражнения 3. Если же и эти, дополнительные упражнения вызовут у вас затруднения и оперированию с произвольными кривыми и уравнениями (что необходимо для осознания общих принципов) вы предпочитаете действия с конкретными аналитическими выражениями, то, полагая $f(x)=x^2-x$ (или же выбрав другую функцию по своему усмотрению), постройте графики функций, заданных формулами, соответствующими ответам к упражнению 2. То же самое вы можете, в случае надобности, проделать и для упражнения 3, взяв, например, в качестве исходного уравнение $y+x-x^2=0$. Затем вернитесь снова к выполнению упражнений 2 и 3.

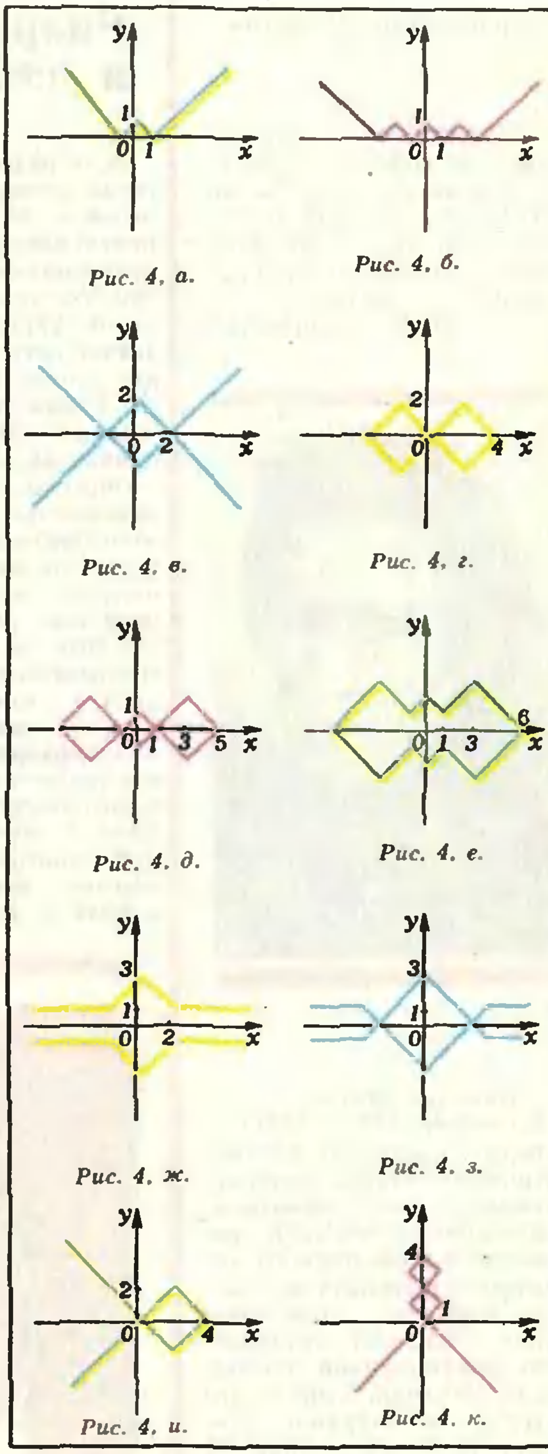


Рис. 4, *а*. Рис. 4, *б*. Рис. 4, *в*. Рис. 4, *г*. Рис. 4, *д*. Рис. 4, *е*. Рис. 4, *ж*. Рис. 4, *з*. Рис. 4, *и*. Рис. 4, *к*.

Упражнения

2. На рисунке 1, *г* изображен график некоторой функции $y=f(x)$. Сравнивая каждый из рисунков 2, *а* — 2, *и* с исход-

(Окончание см. на с. 34)

На страницах 32—33 открывается новая рубрика — «Калейдоскоп «Кванта». Мы рассчитываем, что этот журнальный разворот может быть использован для оформления школьных физических и математических кабинетов.

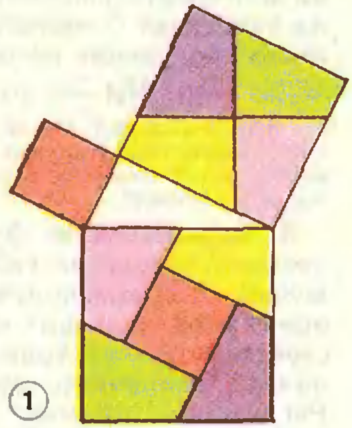
Калейдоскоп «Кванта»

«Человек ... родился быть господином, повелителем, царем природы, но мудрость, с которой он должен править, ... не дана ему от рождения: она приобретается учением».
Н. И. Лобачевский

Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) — гордость русской математической науки, создатель неевклидовой геометрии, названной в его честь геометрией Лобачевского. Он впервые высказал мысль о возможности существования геометрий, отличных от традиционной геометрии Евклида. Однако его труды не получили признания современников. Об удивительной истории становления геометрии Лобачевского можно прочитать в «Кванте» за 1982 г. (№ 11, с. 12 и № 12, с. 7), а о самом Лобачевском — в «Кванте» за 1976 г. (№ 2, с. 5).

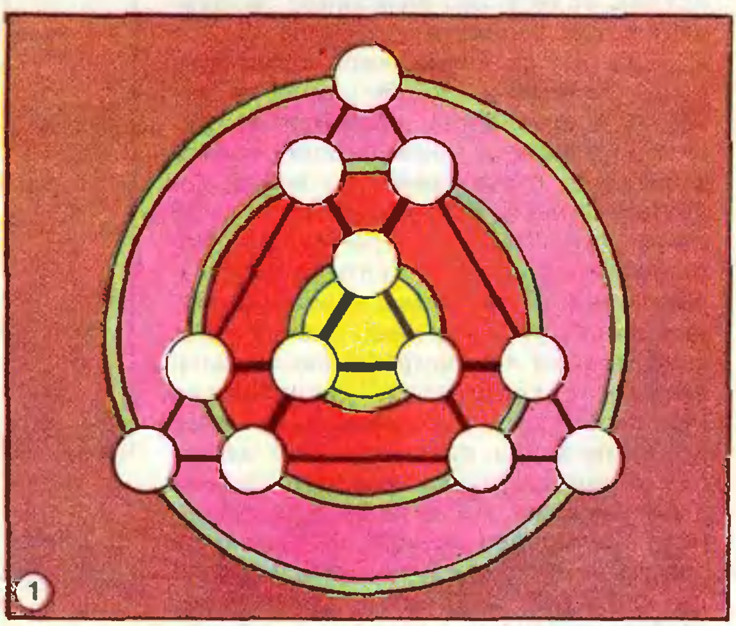
Разрежем и склеим

Если разрезать плоскую геометрическую фигуру на части и из них сложить новую фигуру, то ни у кого не возникнет сомнения в том, что площади старой и новой фигур равны. Этот «закон сохранения площади» использован на рисунке 1 для доказательства теоремы Пифагора. Не правда ли, изящно?

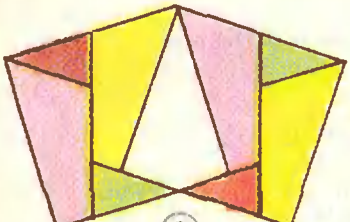


1

Обратно, если даны две плоские фигуры (скажем, многоугольники) равной площади, всегда ли можно одну из них разрезать на конечное число частей и сложить из них вторую? Оказывается, что любой из двух многоугольников равной площади всегда можно разрезать на конечное число частей (меньших многоугольников) и сложить из них второй данный многоугольник. Эта теорема была доказана в 1832 г. и носит название теоремы Больяи — Гервина. Ее доказательство можно прочитать в популярной книге В. Г. Болтянского «Равновеликие и равносоставленные фигуры» (М.: Наука, 1973). Иллюстрацией к этому доказательству служит головоломка под номером 4 на этом развороте.



1



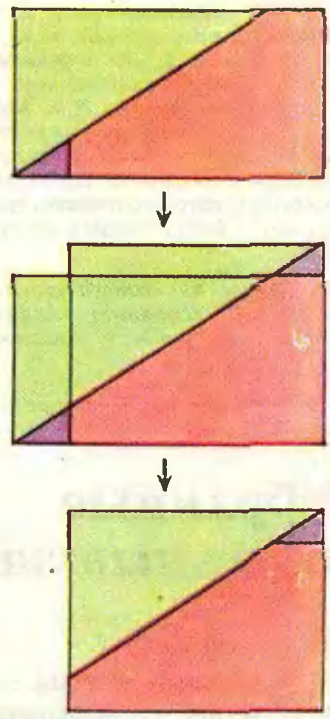
2

Если вы решили эту головоломку, вам, наверное, немало пришлось покрутить маленькие многоугольнички, прежде чем удалось сложить из них квадрат. А нельзя ли обойтись без вращений и сразу разрезать фигуру так, чтобы части совмещались без поворотов, одними параллельными переносами? Так, например, обстоит дело на рисунке 1; обратите внимание, многоугольнички одного цвета переводятся друг в друга параллельными переносами.

В 1951 г. два швейцарских математика, Г. Хадвигер и П. Глюр, доказали, что из двух многоугольников равной площади один всегда можно разрезать на меньшие многоугольники, из которых можно сложить второй, используя для перемещения частей лишь параллельный перенос и центральную симметрию. Этот факт кажется неправдоподобным. Повернем на небольшой угол квадрат. Кажется, что здесь такое разбиение невозможно. Но взгляните на рисунок 2 и вы убедитесь, сколь просто это можно осуществить. На рисунке 3 показан метод соответствующего разбиения двух прямоугольников равной площади с параллельными сторонами.

А можно ли обойтись лишь параллельным переносом? Оказывается, что не всегда. Верно следующее утверждение: для того чтобы выпуклый многоугольник можно было разбить на части, из которых параллельным переносом можно было бы сложить квадрат, необходимо и достаточно, чтобы многоугольник был центрально симметричным.

А. П



3

ГОЛОВОЛОМКИ

2

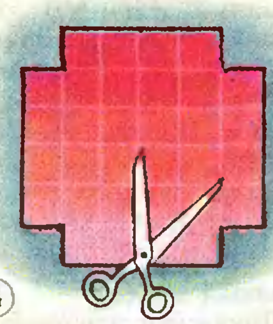
1. Расставьте числа от 1 до 12 в пустые кружочки так, чтобы вдоль трех окружностей и шести прямых сосчитывалась одинаковая сумма. Как найти эту сумму, не расставляя чисел?

2. Решите числовой ребус (разным буквам отвечают разные цифры, одинаковым — одинаковые).

3. Четыре одинаковые игральные кости поставлены так, как показано на рисунке. Сколько очков содержит нижняя грань нижней кости?

4. Разрежьте этот многоугольник на меньшие многоугольники и соберите из них квадрат.

3



4

ным рисунком 1, *г*, определите, каким образом получена изображенная на нем кривая из кривой рисунка 1, *г*, и задайте эту кривую уравнением, используя исходную формулу $y=f(x)$.

3. На рисунке 1, *д* изображен график некоторого уравнения $f(x, y)=0$. Сравнивая каждый из рисунков 3, *а* — 3, *и* с исходным рисунком 1, *д*, определите, каким образом получена изображенная на нем кривая из кривой рисунка 1, *д*, и выразите уравнение, графиком которого является эта кривая, через исходное уравнение $f(x, y)=0$.

4. Для каждого из рисунков 4, *а* — 4, *к* «сконструируйте» уравнение, графиком которого является изображенная на этом рисунке линия.

5. Каким из свойств симметрии (относительно осей координат, начала координат, прямых $y=x$, $y=-x$) обладают кривые, заданные следующими уравнениями:

а) $y^2=ax^3$;
б) $|x|+|y|=1$;
в) $|x|-x=|y|$;
г) $x^2+y^2-2xy-1=0$;
д) $x^2+y^2-2|x|=0$;
е) $x^2-xy-1=0$;
ж) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$;
з) $x^3+y^3-3axy=0$;
и) $x^2-y^3-3axy=0$;
к) $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$?

6. Постройте графики уравнений 5, а — 5, е.

7. Сформулируйте условия на $f(x, y)$, выполнения которых достаточно для того, чтобы график уравнения $f(x, y)=0$ был симметричным: а) относительно оси Ox; б) относительно оси Oy; в) относительно начала координат; г) относительно прямой $x-y=0$; д) относительно прямой $x+y=0$.

П. Г. Сатьянов

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Сколькими нулями оканчивается число, равное произведению всех натуральных чисел от 1 до 1984 включительно?

2. Докажите, что для любых чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

3. Некоторый простейший организм размножается делением на два организма, которое происходит по истечении одной минуты. В пустую пробирку поместили один экземпляр только что возникшего организма и начали отсчет времени; через 1 час пробирка заполнилась организмами до краев. В какой момент времени было заполнено организмами полпробирки?

4. На плоскости лежат прямая и две точки A, B, расположенные по одну сторону от этой прямой. Укажите на прямой точку M, такую, что сумма расстояний $AM+MB$ является наименьшей из всех возможных.

5. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Вычислите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции имеют длину a и b.

Девятый класс

6. Докажите, что число $\log_4 18$ является иррациональным.

7. Нарисуйте график функции $y=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x$.

8. Решите уравнение $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=n$, где $n\in N$, $n>1$.

9. Обязательно ли равны между собой два плоских острых угла, расположенные в пространстве так, что их стороны соответственно перпендикулярны?

10. Сколько может существовать в пространстве скрещивающихся прямых, любые две из которых взаимно перпендикулярны?

Десятый класс

11. Можно ли найти 1984 подряд идущих натуральных числа, таких, что среди них нет ни одного простого числа?

12. Вычислите, чему равна разность $2^{\log_3 5}-5^{\log_3 2}$.

13. Решите неравенство $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1$.

14. Четыре произвольные точки A, B, C, D, расположенные в пространстве, соединены между собой отрезками AB, BC, CD, DA; середины этих отрезков обозначим соответственно M, N, P, Q. Какая получится фигура, если провести отрезки MN, NP, PQ, QM?

15. Какую форму имеет тень куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали, от пучка лучей света, параллельных этой диагонали?

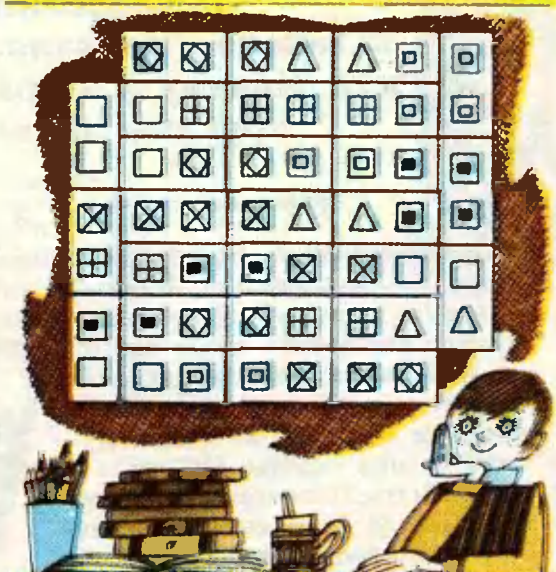
Публикацию подготовил Н. Х. Розов

Квант для младших школьников

Задачи

1. Девочка заменила в своем имени каждую букву ее номером в русском алфавите и получила число 2011533. Как ее звали?

2. Три школьных товарища купили 14 пирожков, причем Коля купил в 2 раза меньше Вити, а Женя больше Коли, но меньше Вити. Сколько пирожков купил каждый из товарищей?



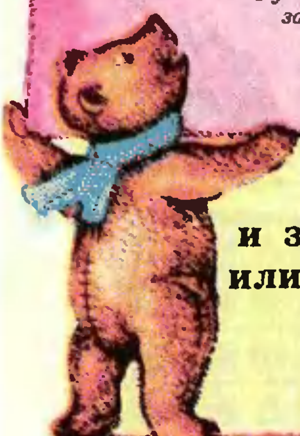
3. Однажды я раскладывал на столе косточки домино, пытаясь сложить какую-нибудь интересную фигуру. После того как получилась фигура, изображенная на рисунке, на руках у меня оставался дупель пусто-пусто. Тут я обратил внимание, что в каждом горизонтальном ряду и каждом вертикальном ряду сумма очков одна и та же. Я перерисовал картинку, поставив вместо очков условные значки. Недавно я нашел эту картинку среди бумаг, но забыл, что означает каждый значок. Помогите мне восстановить их значения.

4. Найдите все числа, которые в 13 раз больше суммы своих цифр.

5. Известно, что убывающий месяц повернут выпуклостью влево, как буква *С* — первая буква слова «старый». Прибывающий же месяц повернут выпуклостью вправо, как закругление буквы *Р* — первой буквы слова «растущий». Везде ли верно это правило?

Эти задачи нам предложили: В. Кудряшов — ученик 10 кл., г. Пенза, В. Бялко — ученица 7 кл., г. Москва, М. В. Варга, Н. К. Антонович, А. Л. Тоом.

...На полянке рос высокий-превысокий дуб, а на самой верхушке этого дуба кто-то громко жужжал: жжж! Винни-Пух сел на траву под деревом, обхватил голову лапами и стал думать. Сначала он подумал так: «Это — жжжжж — неспроста! Зря никто жужжать не станет. Само дерево жужжать не может. Значит, тут кто-то жужжит. А зачем жужжать, если ты — не пчела? По-моему, так!». Потом он еще подумал-подумал и сказал про себя: «А зачем на свете пчелы? Для того, чтобы делать мед! По-моему, так!» Тут он поднялся и сказал: «А зачем на свете мед? Для того, чтобы я его ел! По-моему, так, а не иначе!»



О давлении и законе Паскаля, или Почему у сыра круглые дыры

Кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

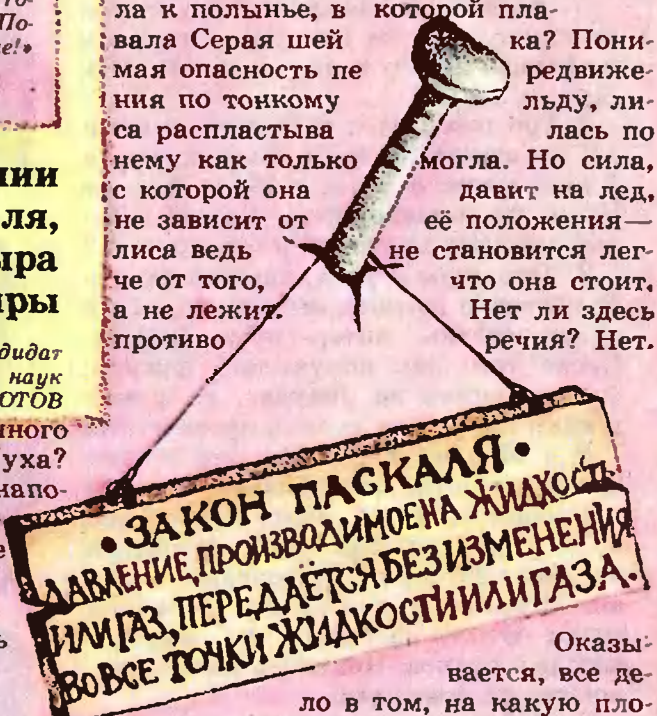
Почему многие любят симпатичного героя — медвежонка Винни-Пуха? Наверное, потому, что он нам напоминает нас самих, когда мы были маленькими, задавали всякие глупые (по мнению взрослых) вопросы и тут же хотели получить на них ответы. Но задавать вопросы очень полезно в любом возрасте. И конечно — при знакомстве с физикой. Давайте попробуем — может быть мне удастся вас в этом убедить.

Не приходилось ли вам в детстве читать сказку «Два жадных медвежонка»? Не знаю как вам, но мне больше всего запомнилась сама книжка, причем, незабываемое впечатление произвели красочные иллюстрации с исчезающей на глазах головкой сыра в ярко-красном «мундире» и ужасно «дырявой» внутри. Дырки были абсолютно круглые и все почти одинаковые — не так ли?

С тех пор прошло много времени, и лишь недавно я понял, что за устройство дырок в сыре отвечает один из фундаментальных законов природы — закон Паскаля.

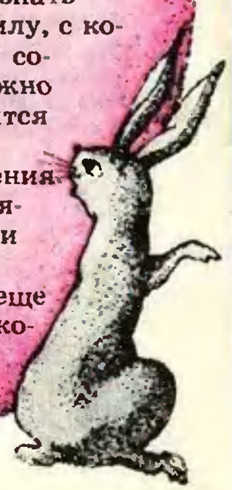
Не забыли, как он звучит? Давление, производимое на жидкость или газ, передается без изменения в каждую точку жидкости или газа. Как видите, главным действующим лицом выступает давление. Вот и давайте прежде всего обсудим эту физическую величину.

Помните, как в печальной сказке «Серая шейка» хитрая лиса подползала к полынье, в которой плавала Серая шейка? Понимая опасность передвижения по тонкому льду, лиса распластывалась по нему как только могла. Но сила, с которой она давит на лед, не зависит от её положения — лиса ведь не становится легче от того, что она стоит, а не лежит. Нет ли здесь противоречия? Нет.



Оказывается, все дело в том, на какую площадь поверхности приходится эта сила давления. Чем больше поверхность соприкосновения лисы и льда, тем меньше сила, прогибающая лед в различных его участках, тем безопаснее по нему передвигаться. (Лиса была хитрая и знала об этом.)

Точно так же и для описания многих других явлений мало знать общую силу давления — силу, с которой давят друг на друга соприкасающиеся тела, а важно знать, какая сила приходится на единицу площади поверхности их соприкосновения. Но сила давления, приходящаяся на единицу площади поверхности — это и есть давление. Не припомните еще какую-нибудь историю, в которой все (с точки зрения физики) определялось именно давлением?



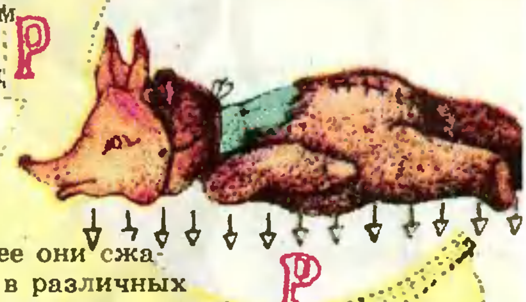
kvant.mccme.ru

Ну, конечно, — это сказка Андерсена «Принцесса на горошине». Почему горошина, попавшая в постель принцессы, могла вызвать у нее столь неприятные ощущения? Опять все дело в давлении. Очевидно, что как с горошиной, так и без нее общая сила, «удерживающая» принцессу на кровати, остается неизменной. Но если на кровати появится выступающая часть в виде горошины, то давление в этом месте резко возрастет, что тотчас испортит настроение принцессы, и она может потерять сон. Вы не станете возражать, что вовсе не нужно быть изнеженной принцессой, чтобы обнаружить в своей постели небольшую горошину? Я думаю, с этим справился бы и свинопас. А вот обнаружить горошину через толщу нескольких пуховых перин (в сказке их было двенадцать — не так ли?) — это требует изысканной утонченности чувств. Чуть дальше мы обсудим, почему пуховая перина, положенная поверх горошины, способна все запутать (а может быть и нет, если, конечно, принцесса настоящая).

Итак, давление — это величина, равная отношению силы, действующей перпендикулярно к поверхности, к площади этой поверхности. Но в законе Паскаля неявно присутствует вроде бы еще одно давление — давление внутри жидкости или газа. Получается так, что жидкость внутри как-то «узнает» о том, что извне на нее что-то давит. То есть действующее на внешнюю поверхность жидкости давление передается самой жидкостью от точки к точке, причем, одинаково во всех направлениях. И это является неотъемлемым свойством именно жидкости. Так она «устроена».

Разберемся в этом поподробнее. Нам понадобится мягкая пружина. Например, такая, как в пневматическом пистолете. Если ее положить на стол, то расстояние между соседними витками будет одинаковым по всей длине пружины. А вот если ту же пружину поставить вертикально, то под действием силы тяжести витки начнут «падать» вниз, приближаясь друг к другу. В конце концов в разных сечениях пружина будет сжата по-разному — чем ниже витки, тем меньше будет расстояние между ними. В чем здесь дело? В результате взаимных перемещений витков в пружине

возникают упругие силы, причем чем ниже витки, тем большую часть пружины они несут на себе, тем сильнее они сжаты. Итак, в различных сечениях давление в пружине разное. Чтобы увидеть картину давлений внутри тела, сожмите в руке поролоновую губку. Какие-то участки поролона сожмутся, какие-то, наоборот, растянутся. Чем сильнее сжато какое-то место, тем меньше и раз-



меры соответствующих «пор».

Как видите, о внутренних давлениях мы могли судить для пружины — по изменению расстояний между соседними витками, для поролона — по изменению размеров «пор».

Жидкость или газ в отличие от твердых тел, как правило, могут быть только сжаты. Причем, если в непроницаемую оболочку налить жидкость и сильно сжать ее, то (если не учитывать силу тяжести) она будет сжата одинаково по всему объему — изнутри нельзя

отличить одну точку от другой. Важно, что независимо от формы внешней поверхности давление из любой точки жидкости передается во все соседние точки одинаково.

Чтобы сделать свои слова более наглядными, я вынужден буду попросить у вас прощения и напомнить не самые лучшие минуты жизни. Всем нам когда-то делали уколы. Помните, как прежде, чем сделать укол, врач надавливает на шприц, и из тоненькой иголки выпускает струйку целебной жидкости? Представим теперь, что нам удалось по всей поверхности шприца наделать небольших отверстий, и вставить в них иголки, — у нас получилось что-то вроде ежика. Если теперь надавить на поршень шприца-ежика, то из всех иголок, находящихся на одной высоте, будут бить абсолютно одинаковые струйки. Это происходит потому, что жидкость подчиняется закону Паскаля и выдавливается из отверстий, находящихся на одной высоте, с одинаковой силой. Для отверстий, находящихся на разных высотах, необходимо учитывать силу гидростатического давления.

Для сравнения упругих свойств жидкости и твердого тела приведем еще один пример. Представим себе, что в одну узкую мензурку мы опустили пружину (такую, что диаметр ее витков совпадает с внутренним диаметром мензурки), а в другую — налили воду. Вообразим теперь, что стенки сосудов внезапно исчезли. Как будут вести себя пружина и вода? Пружина останется на месте, как ни в чем не бывало. Вода же разлетится во все стороны, как лопнувший пузырь. Как вы думаете, почему? Причина различного поведения — в различных способах передачи давления твердым телом и жидкостью. Пружина передает давление практически только по своей длине. В воде же давление передается одинаково во все стороны — и вверх, и вниз, и в бок — в соответствии с законом Паскаля. Кстати сказать, аналогичную картину наблюдал сам Паскаль, когда устанавливал свой закон. Если вы вспомните его классический опыт, то по своей идее он напоминает только что описанный мысленный эксперимент (именно мысленный — мы ведь

его себе представили). Правда, у Паскаля стенки сосуда — бочки — не исчезали, а трескались, и по форме возникающего «фонтана» можно было судить о давлениях в разных частях жидкости.

Теперь легко понять «действие» пуховой перины. Взбитая перина представляет собой как бы гору маленьких пружинок, случайным образом расположенных друг относительно друга. Каждая такая пружинка передает давление по своей длине, но из-за хаотичности расположения пружинок сила давления со стороны горошины передается... Но не будем лишать вас радости самостоятельного поиска правильного решения. Скажем лишь, что несмотря на все ваши усилия и старания интуиция принцессы позволяла безошибочно установить любой подвох — пусть он даже исходил от величественных особ, разбиравшихся в физике.

Теперь пришло время ответить на основной вопрос статьи. (Вы его еще не забыли?) В нескольких словах расскажем о том, как делают сыр, точнее — как делают дырки в сыре. Сначала готовят «тесто» для сыра. Потом полученную массу уплотняют под большим давлением и заполняют ею специальные формы. Образовавшиеся в формах головки сыра вынимают и помещают в теплые камеры для созревания. В этот период сыр «бродит». Внутри спрессованного «теста» образуется углекислый газ, который, накапливаясь, выделяется в виде пузырьков.

Чем больше углекислого газа, тем сильнее раздуваются пузырьки. (Не забудьте, что на этой стадии внутренняя часть будущего сыра представляет собой сплошную мягкую массу.)

Потом сыр затвердевает, и внутри него запечатлевается картина внутреннего «дыхания» бродящего сыра в виде вкраплений пузырьков углекислого газа. Что касается формы образуемых полостей, то вследствие выполнения закона Паскаля давление в пузырьках одинаково передается во все стороны — это во-первых, а во-вторых, «тесто» в этот момент подобно жидкости по своим упругим свойствам. Поэтому пузырьки раздуваются строго сферической формы. Отступление от этого правила будет означать, что в каком-то месте внутри имеются уплотнения или, наоборот пустоты в «тесте». Чем тверже сыр, тем меньше раздувается внутренний пузырек, тем меньше размер дырки. Некоторые сорта сыра перед созреванием не подвергаются обработке высоким давлением (например, российский сыр), и в них выделение углекислого газа при брожении происходит в уже имеющиеся в «тесте» пустоты, которые, как правило, имеют неправильную форму — это промежутки, оставшиеся между зернами полуфабриката после спекания «теста» в печке. Такие сыры в разрезе открывают не правильную картину застывших пузырей, а довольно затейливый узор, гармония которого откроется только опытному сыроделу.

Вот видите, сколько нам пришлось задать разных маленьких вопросов, чтобы ответить на один большой — почему у сыра круглые дыры.

— Здорово, Пух,— сказал Кролик.
— Здравствуй, Кролик,— сказал Пух сонно.
— Это ты сам додумался?
— Да, вроде как сам,— отвечал Пух.— Не то чтобы я умел думать,— продолжал он скромно,— ты ведь сам знаешь, но иногда на меня это находит.

А. А. Милн. Винни-Пух и все-все-все.

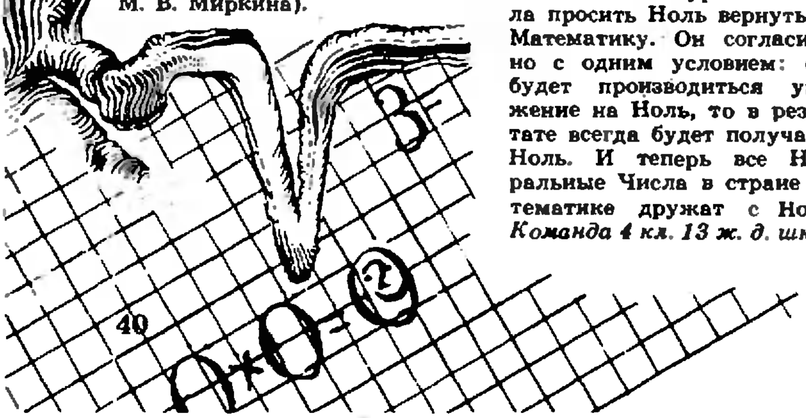
КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Сказки

Математические сказки — это хорошо! Любят их слушать школьники, любят студенты, любят и преподаватели. Жаль только, что мало их, математических сказок.

А что если сами школьники и будут их писать, подумали в Омске. Студенческое научно-педагогическое общество математического факультета Омского университета несколько лет проводит разнообразные конкурсы школьного математического творчества. Сначала сказки писались для матбоев базовых школ факультета старшеклассниками, а с прошлого года сказочниками стали команды 4—7 классов, участвующие в традиционных апрельских олимпиадах. Тема сказки указывалась в олимпиадном задании. Например, четвертым классам предлагалось обыграть связь натуральных чисел и нуля, пятым — рассказать про свойства целых и дробных чисел. Каждая сказка создавалась в течение трех часов, отведенных на олимпиаду. Жюри оценивало математические свойства, используемые героями сказок, лаконичность, занимательность и поучительность.

Интересно, что у учеников старших классов сказки, в общем-то, не получились. А вот какие сказки придумали ребята из четвертых классов. (Нам их прислали члены жюри олимпиады В. Н. Сергеев и М. В. Миркина).



Ноль и Натуральные Числа

В стране Математике жили-были Натуральные Числа и Ноль. Их умножали, складывали, иногда отнимали и даже делили, но сосчитать их никто не мог. Жили Натуральные Числа дружно, ни одно не огорчалось, что оно меньше следующего, но зато каждое гордилось, что оно кого-нибудь, да больше. Один только Ноль был меньше всех. Нечем ему было гордиться, да и никто из Натуральных Чисел его не признавал. И решил Ноль покинуть Математику.

Но как только он ушел, его отсутствие сразу ощутилось: нельзя было записать числа 10, 20, 30, 40, 100 и т. д.

Решили Натуральные Числа просить Ноль вернуться в Математику. Он согласился, но с одним условием: если будет производиться умножение на Ноль, то в результате всегда будет получаться Ноль. И теперь все Натуральные Числа в стране Математике дружат с Нолем.

Команда 4 кл. 13 ж. д. школы

Сказка про Ноль

Поехал однажды Ноль к бабушке. Бабушка встретила его приветливо.

— Ах, внучек! Повзрослел-то как! А как пополнел!

И в самом деле, Ноль за последнее время стал более круглым.

— Ну, пойдем в дом, я тебя блинами угощу,— пригласила внука бабушка. Ноль сел за стол, а бабушка начала хлопотать у плиты. Вдруг заскрипела дверь, и в другую комнату мимо Ноля и бабушки проскользнуло высокое и худое существо.

— Бабушка, кто это? — спросил Ноль, проглотив кусок блина.

— Да, соседка это у меня поселилась,— сказала бабушка, поднимая со сковородки аппетитный, румяный блин. Она на минуту замолчала и посмотрела на дверь, за которой скрылась цифра.

— Единицей ее зовут. Одинокая она, в обществе редко бывает. Женился бы ты на ней, внучек. И она не была бы одинокой, да и тебе было бы веселее. Сейчас ведь ты как бы пустое место, да еще и ненатуральный какой-то. А она красавица: высокая, стройная. Нос, правда, у нее длинный, но ничего, для тебя сойдет.

— А я-то к ней подойду? — расспрашивал Ноль.

— А то как же! Полный, круглолицый... Ну прямо писаный красавец!

На том разговор и кончился. На следующий день Ноль уже познакомился с Единицей и ходил около нее кругами. Вскоре они поженились и оба были счастливы. Ведь вместе они составили натуральное число 10.

Команда 4 кл. с. ш. № 88

Топ-кварк и тигренок Топ

В июле прошлого года в Лейпцигском зоопарке родился тигренок. Ему дали имя Топ, и не случайно. Как раз в это время на конференции по физике элементарных частиц, которая проходила в Лейпциге, было сообщено об открытии шестого кварка, представителя истинно элементарных частиц. Этот кварк еще до своего «рождения» был назван «верхним» («топ» — по-английски), и он, наконец, заполнил недостающее звено в таблице кварков — удивительных частиц, из которых построены нуклоны, мезоны и многие другие частицы.

Удивительны кварки потому, что они имеют дробный заряд, кратный 1/3 (если считать заряд протона за единицу). Таких частиц никто никогда не регистрировал ни в одной лаборатории. Необъясненный до сих пор закон запрещает частицам с дробным зарядом появляться в свободном состоянии; вылетать из ядер или из элементарных частиц могут только частицы с целым зарядом или же вовсе не имеющие заряда.

Сейчас известны три пары кварков. Приведем таблицу всех шести кварков с их названиями (русскими и международными) и величиной заряда (если умножить приведенное значение заряда на заряд протона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, можно получить заряд кварка в Международной системе единиц).

Такую же таблицу можно составить и для антикварков — от кварков они отличаются лишь знаком заряда.

Заметим, что в таблице нет столбца масс, и это неслучайно. Так как кварки в свободном состоянии не живут, то, строго говоря, нельзя не только сказать, какие у них массы покоя, но даже точно определить, что значит масса кварка. Однако хотя свободных кварков, скорее всего, нет в природе, тем не менее о кварках известно довольно много. Первая пара кварков — u-кварк и d-кварк — входит в состав протонов и нейтронов. Протон состоит из двух u-кварков и одного d-кварка, а нейтрон — из одного u-кварка и двух d-кварков. Радиоактивный распад нейтрона

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}$$

(n — нейтрон, p — протон, e^- — электрон, $\tilde{\nu}$ — антинейтрино) сейчас описывается как превращение d-кварка в u-кварк:

$$d \rightarrow u + e^- + \tilde{\nu}.$$

Теперь расскажем о том, как же был открыт топ-кварк.

Когда изучали столкновения протонов с энергией 270 ГэВ с антипротонами такой же энергии, в результате которых рождаются W-бозоны*), то среди последующих распадов W-бозонов обнаружили событие, которое отличалось от всех наблюдавшихся раньше. Следует, наверное, объяснить, что значит «обнаружить событие» в мире элементарных частиц. Физик говорит, что обнаружил событие, если он из своих измерений может вычислить заряды, энергии и импульсы (а следовательно, и массы) всех частиц, которые появились в результате столкновения.

Так вот, при наблюдении за взаимодействием протонов и антипротонов приборы зарегистрировали два узких пучка частиц (две струи), сопровождающиеся мю-мезонами и нейтрино. Известно, что пучки частиц образуются от кварков. Например, при распаде ипсилон-мезона с массой, соответствующей энергии 10,2 Гэв, были обнаружены две струи, отвечающие двум красивым кваркам — кварку b и антикварку $\bar{b}$.

На этот раз струи сопровождались мю-мезонами и нейтрино. О существовании последнего

(Окончание см. на с. 50)

Таблица кварков

Символ	Название		Заряд
	русское	международное	
u	—	up	2/3
d	—	down	−1/3
s	странный	strange	−1/3
c	очаровательный	charm	2/3
b	нижний или красивый	bottom или beauty	−1/3
t	верхний или правдивый	top или truth	2/3

*) О W-бозонах рассказывалось в статье «Открытие новой частицы» («Квант», 1983, № 5). Недавно авторам открытия этих частиц К. Руббиа и С. Ван-дер-Мейеру была присуждена Нобелевская премия.

Задачник Кванта

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 марта 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М901, М902» или «Ф913». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М901—М905; Ф913—Ф917

М901. Биссектрисы AK и BM треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если $OK=OM$, то либо углы A и B треугольника равны, либо угол C равен $60°$.

М902. Натуральный ряд 1, 2, 3,.... разбит на несколько арифметических прогрессий. Докажите, что хотя бы у одной из этих прогрессий первый член делится на ее разность.

А. В. Келарев

М903. Существует ли выпуклый многогранник, любое сечение которого плоскостью, не проходящей через вершину, является многоугольником с а) четным, б) нечетным числом сторон?

А. А. Дороговцев

М904. Для каждого натурального числа

$$A=10^n a_n+10^{n-1}a_{n-1}+\ldots+10a_1+a_0$$

(с десятичной записью $a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0$) положим

$$D(A)=a_n+2a_{n-1}+2^2a_{n-2}+\ldots+2^{n-1}a_1+2^n a_0.$$

Например, $D(1985)=1+2\cdot 9+2^2\cdot 8+2^3\cdot 5=91$, $D(91)=9+2\cdot 1=11$, $D(11)=3$.

а) Докажите, что для любого натурального $A=A_0$ в последовательности $A_1=D(A_0)$, $A_2=D(A_1)$,... встретится число $A^*=A_k<20$, для которого $D(A^*)=A^*$.

б) * Чему равно A^* для $A=19^{85}$?

Е. И. Гуревич, А. Л. Федоров

М905. Докажите, что уравнение $4x^n+(x+1)^2=y^2$ относительно натуральных чисел x и y а) не имеет решений при $n=1$, б) имеет по крайней мере два решения при $n=2$, в)* имеет бесконечно много решений при $n=2$, г)* не имеет решений для натуральных $n\geqslant 3$.

М. Гараев (уч. 10 класса)

Ф913. С горизонтальной поверхности земли бросили под углом $\alpha=60°$ к горизонту со скоростью $v_1=12$ м/с комок сырой глины. Одновременно комок вдвое большей массы бросили навстречу первому под углом $\beta=30^\circ$ к горизонту, причем начальные скорости комков оказались лежащими в одной вертикальной плоскости. В результате столкновения комки слиплись. Найти скорость (по модулю) упавшего на землю слипшегося комка.

В. И. Чивилёв

Ф914. В закрытом сосуде объема $V=33{,}6$ дм^3 находится азот и $\nu=1$ моль воды. При температуре $t=100$ °С давление в сосуде равно $p=2\cdot10^5$ Па. Определить количество азота в сосуде.

С. М. Коршунов

Ф815. Жидкость с диэлектрической проницаемостью ε протекает между пластинами изолированного плоского конденсатора со скоростью v. Перпендикулярно скорости $\vec{v}$ и параллельно пластинам направлено магнитное поле с индукцией B. Определить напряжение на пластинах конденсатора. Расстояние между пластинами a.

А. И. Киркинский

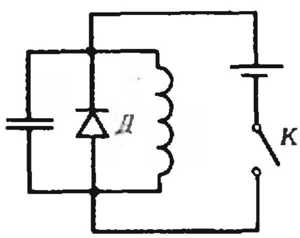


Рис. 1.

Ф916. В схеме, приведенной на рисунке 1 ($Д$ — идеальный диод), ключ K замыкают на время τ, а затем размыкают. В момент размыкания сила тока в катушке индуктивности равна I_0. Через сколько времени после размыкания ключа ток I_L в катушке достигнет максимального значения, если оно равно $2I_0$? Построить график зависимости I_L от времени t $(0<t<\infty)$.

А. И. Киркинский, Е. А. Ромишевский

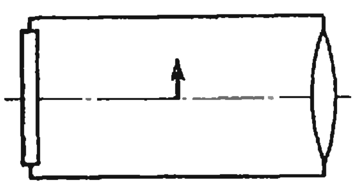


Рис. 2.

Ф917. Предмет находится между линзой и плоским зеркалом, перпендикулярным главной оптической оси линзы. Зеркало, линза и предмет заключены в кожух из светопроницаемой матовой пластмассы (рис. 2). Такая система создает два изображения предмета и изображение линзы. Оба изображения предмета имеют одинаковые размеры независимо от расстояния между линзой и предметом. С каким увеличением изображается линза?

Е. П. Кузнецов

Problems

M901—M905; P913—P917

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all

M901. The bissectors AK and BM of triangle ABC intersect at the point O. Prove that $OK=OM$ implies that either angles A and B of the triangle are congruent, or that the angle C is 60°.

M902. The natural numbers 1, 2, 3,... are partitioned into several arithmetical progressions. Prove that at least one of them has an initial term divisible by the progression's difference.

A. V. Kelarev

M903. Does there exist a convex polyhedron every section of which by a plane not containing any

these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 15th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 31/1, «Квант».
Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problemš; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

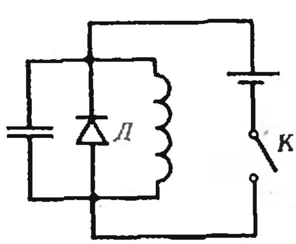


Fig. 1.

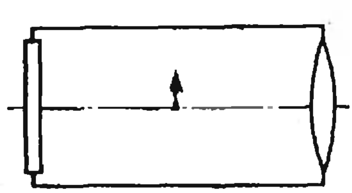


Fig. 2.

vertex is a polygon with a) an even b) an odd number af sides?

A. A. Dorogovtsev

M904. For each natural number

$$A=10^n a_n+10^{n-1}a_{n-1}+\ldots+10a_1+a_0$$

with dicimal notation $a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0$, put

$$D(A)=a_n+2a_{n-1}+2^2a_{n-2}+\ldots+2^{n-1}a_1+2^n a_0.$$

For example, $D(1985)+1+2\cdot 9+2^2\cdot 8+2^3\cdot 5=91$, $D(91)=9+2\cdot 1=11$, $D(11)=3$.
a) Prove that for any natural $A=A_0$, the sequence $A_1=D(A_0)$, $A_2=D(A_1)$,... contains a number $A^*=$ $=A_k<20$ such that $D(A^*)=A^*$.
b)* What is the value of A^* if $A=19^{85}$?

E. I. Gurvich, A. L. Fiodorov

M905. Prove that the equation

$$4x^n+(x+1)^2=y^2$$

with respect to the natural numbers x and y a) has no solutions when $n+1$, b) has at least two solutions when $n=2$, c)* has infinitely many solutions when $n=2$, d)* has no solutions for integers $n\geqslant 3$.

M. Garaev (10th grade student)

P913. A lump of humid clay is thrown from a horizontal stretch of the earth surface at an angle of 60° to the horizon with velocity $v_1=12$ m/s. At the same time a lump (of twice the mass of the first one) is thrown at a 30° angle to the horizon, the two initial velocity vectors being in the same plane and oriented towards each other. The two lumps collide and stick together. Find the speed of the aggregate lump when in hits the ground.

V. I. Chivilіev

P914. A closed receptacle of volume $V=33.6$ dm^3 contains nitrogen and $\nu=1$ moles of water. At temperature $t=100$ °C the pressure in the receptacle equals $p=2\cdot 10^5$ Pa. Determine the amount of nitrogen in the receptacle.

S. M. Korshunov

P915. A liquid with dielectric permeability ε flows with velocity v between the plates of an isolated flat capacitor. There is a magnetic field of induction B, perpendicular to the velocity vector v and parallel to the plates of the capacitor. Determine the tension on the plates if the distance between them is a.

A. I. Kirkinski

P916. In the circuit shown on Figure 1 (where Д is an ideal diode), the switch K is turned on for the period of time τ, and then switched off. At the moment of switching off the current in the inductivity coil was I_0. How much later will the current I_L in the coil acquire its maximal value, if the latter is $2I_0$? Plot the dependence of I_L on time t $(0<t<\infty)$.

A. I. Kirkinski, E. A. Romishevski

P917. An object is placed between a lens and a plane mirror, perpendicularly to the lens' optical axic. The mirror, the lens and the object are enclosed in a case made of translucent plastic (Fig. 2). This system generates two images of the object and an image of the lens. Both images of the object have the same size, independently of the distance betveen the lens and the object. What is the enlargement of the lens' image?

E. P. Kuznetsov

Решения задач

М884, М885; Ф894—Ф897

М884. *Непрерывная и монотонная функция f определена на отрезке $[0; 1]$ и принимает значения также на отрезке $[0; 1]$. Докажите, что ее график можно покрыть n прямоугольниками площади $1/n^2$ каждый. (Стороны прямоугольников параллельны осям координат.)*

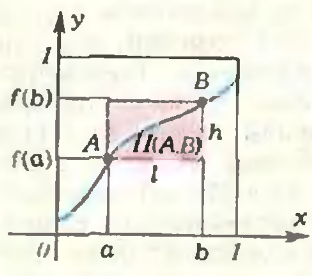


Рис. 1.

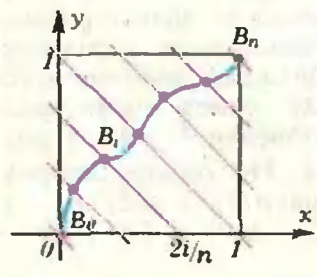


Рис. 2.

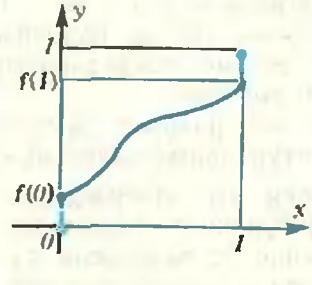


Рис. 3.

Решение основано на следующем соображении: если $A(a;\ f(a))$ и $B(b;\ f(b))$ — две точки на графике функции (рис. 1), то прямоугольник $П(A,B)$ с диагональю AB покрывает участок графика от A до B, а его площадь S удовлетворяет неравенству $2\sqrt{S}\leqslant l+h$, где $l=b-a$ — длина его основания, а $h=f(b)-f(a)$ — высота; это неравенство есть по существу неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом $\sqrt{lh}\leqslant(l+h)/2$.

Это соображение можно использовать двумя способами. Предположим временно, что $f(0)=0$, $f(1)=1$.

1) Продолжим функцию f на всю положительную полуось так, чтобы она осталась непрерывной и монотонной (например, можно положить $f(x)=x$ при $x>1$). Пусть A_0 — начальная точка ее графика (с координатами $(0;0)$). Рассмотрим на графике такие точки $A_1, \ldots, A_n$, что площадь прямоугольника $П(A_{i-1}; A_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, равна $1/n^2$; существование таких точек, очевидно, вытекает из непрерывности и монотонности функции f. Для каждого из этих прямоугольников сумма длины основания и высоты не меньше $2\sqrt{1/n^2}=2/n$, поэтому сумма координат точки A_n (равных, соответственно, сумме длин оснований всех прямоугольников и сумме их высот), не меньше 2. Следовательно, хотя бы одна из этих координат не меньше 1, а значит, построенные n прямоугольников покрывают график.

2) Выберем на графике функции f последовательно точки $B_0, B_1, \ldots, B_n$, начиная с B_0 $(0; 0)$, так, чтобы сумма длины основания и высоты каждого из прямоугольников $П(B_{i-1}, B_i)$, $i=1, \ldots, n$, равнялась $2/n$. (Легко видеть, что B_i — это точка пересечения прямой $y=2i/n-x$ с графиком, в частности, B_n — это конец графика — точка $(1; 1)$; см. рис. 2.) В силу сделанной выше оценки площадь каждого из прямоугольников не превосходит $1/n^2$. Увеличив их при необходимости так, чтобы их площади стали в точности равны

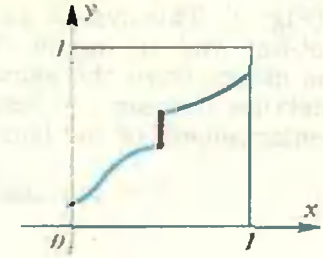


Рис. 4.

$1/n^2$, получим требуемое покрытие.

Если $f(0) > 0$ или $f(1) < 1$, дополним график вертикальными отрезками, соединяющими точку $(0;\ 0)$ с его началом $(0;\ f(0))$ и $(1;\ 1)$ — с концом $(1;\ f(1))$ (рис. 3). Получится непрерывная кривая, соединяющая точки $(0;\ 0)$ и $(1;\ 1)$, к которой оба приведенных рассуждения можно применить практически без изменений.

Такой же прием позволяет доказать утверждение задачи для любой (возможно, разрывной) функции f: в точках разрыва график дополняется до непрерывной кривой отрезком (красный отрезок на рисунке 4). Однако строгое обоснование в этом случае несколько выходит за рамки школьной программы.

Н. Б. Васильев,
В. Н. Дубровский,
С. Ю. Оревков

◆

М885*. *Для каждого натурального числа n обозначим через $p(n)$ число разбиений n в сумму натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми). Количество различных чисел в данном разбиении назовем его разбросом.*

а) Докажите, что сумма $q(n)$ разбросов всех разбиений числа n равна $1 + p(1) + p(2) + \ldots + p(n-1)$.

б) Докажите, что эта сумма не больше $\sqrt{2n}\,p(n)$.

а) Разбиение числа n в сумму натуральных слагаемых будем называть *отмеченным*, если одно из слагаемых выделено среди остальных (подчеркнуто); отмеченные разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, мы будем считать одинаковыми. (На рисунке слева изображены все отмеченные разбиения числа 4; выделенные слагаемые показаны красным цветом.) Заметим, что если k — разброс некоторого разбиения (неотмеченного), то из этого разбиения можно получить ровно k отмеченных разбиений. Поэтому *общее количество отмеченных разбиений числа n равно $q(n)$*. С другой стороны, если из любого отмеченного разбиения, кроме разбиения, состоящего из единственного слагаемого, выкинуть подчеркнутый элемент, получится разбиение некоторого числа, меньшего чем n. И наоборот, если $m < n$, то по любому разбиению числа m можно однозначно восстановить отмеченное разбиение числа n: *надо к разбиению числа m добавить слагаемое $n-m$ и подчеркнуть* его (на рисунке изображено взаимно-однозначное соответствие между отмеченными разбиениями числа 4, кроме разбиения $4 = \underline{4}$, и разбиениями чисел, меньших 4). Но количество разбиений чисел, меньших n, равно $p(1) + p(2) + \ldots + p(n-1)$. *Следовательно,* $q(n) - 1 = p(1) + p(2) + \ldots + p(n-1)$.

$4 = 4$
$4 = 3 + 1 \longleftrightarrow 1 = 1$
$4 = 2 + 2 \longleftrightarrow 2 = 2$
$4 = 2 + 1 + 1 \longleftrightarrow 2 = 1 + 1$
$4 = 1 + 3 \longleftrightarrow 3 = 3$
$4 = 1 + 2 + 1 \longleftrightarrow 3 = 2 + 1$
$4 = 1 + 1 + 1 + 1 \longleftrightarrow 3 = 1 + 1 + 1$

Другими словами идею этого решения можно изложить так: если к каждому из $p(1) + p(2) + \ldots + p(n-1)$ разбиений чисел $m = 1, 2, \ldots, n-1$ добавить одно слагаемое $n - m$, то мы получим *каждое разбиение числа n* (кроме тривиального $n = n$) столько раз, какое его разброс.

б) Достаточно доказать, что разброс любого разбиения числа n в сумму натуральных слагаемых не превосходит $\sqrt{2n}$. Докажем это утверждение. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — все различные слагаемые, входящие в некоторое разбиение (с разбросом k), причем $0 < a_1 < \ldots < a_k$. Тогда, с одной стороны,

$a_1+a_2+...+a_k\leqslant n$, а, с другой стороны, $a_1\geqslant 1$, $a_2\geqslant 2$, ..., $a_k\geqslant k$ (действительно, $a_1\geqslant 1$; $a_2>a_1\geqslant 1$, следовательно, $a_2\geqslant 2$; $a_3>a_2\geqslant 2$, следовательно, $a_3\geqslant 3$, и т. д.). Поэтому $n\geqslant a_1+a_2+...+a_k\geqslant 1+2+...+k=k(k+1)/2\geqslant k^2/2$, то есть $k\leqslant\sqrt{2n}$.

С. Ю. Оревков

Ф894. *В одном из проектов для перелетов космических аппаратов в Солнечной системе предполагалось использовать солнечный парус площадью $S=1$ км^2. Парус раскрывается, когда аппарат движется вокруг Солнца по земной орбите, радиус которой равен $R_З=1{,}5\cdot 10^8$ км. При дальнейшем движении парус постоянно ориентирован перпендикулярно солнечным лучам, давление которых на земной орбите составляет $p=10^{-5}$ Па.*

1) При какой массе космического аппарата он может улететь из Солнечной системы?

2) При какой максимальной массе аппарат может достичь орбиты Марса, радиус которой равен $R_М=2{,}3\cdot 10^8$ км? Гравитационное влияние Земли и других планет не учитывать.

Произведение массы Солнца на гравитационную постоянную — $M_СG=1{,}3\cdot 10^{11}$ км^3/с^2.

◆

При раскрытии солнечного паруса на аппарат действуют сила притяжения Солнца и сила давления солнечных лучей. Результирующая этих сил —

$$F_{эф}=G\frac{M_Сm}{R_З^2}-pS=G\frac{M_Сm}{R_З^2}-\frac{GmR_З^2pS}{GmR_З^2}=$$

$$=G\frac{(M_С-pSR_З^2/Gm)m}{R_З^2}.$$

Мы видим, что давление солнечных лучей как бы уменьшает силу притяжения аппарата к Солнцу — эта сила оказывается такой, как если бы Солнце имело не массу $M_С$, а некую меньшую эффективную массу, равную

$$M_{эф}=M_С-\frac{pSR_З^2}{Gm}.$$

Пользуясь введенной эффективной массой, мы можем дальше решать задачу без учета давления солнечных лучей.

Полная энергия космического аппарата в гравитационном поле тела с массой $M_{эф}$ —

$$E=\frac{mv^2}{2}-G\frac{mM_{эф}}{R}.$$

Согласно закону сохранения энергии эта энергия в любой точке орбиты аппарата должна быть равна

$$E=\frac{mv_З^2}{2}-G\frac{mM_{эф}}{R_З},$$

где $v_З$ — скорость, которую имел аппарат в момент раскрытия паруса на расстоянии $R_З$ от Солнца. Эту скорость найдем из уравнения движения аппарата по земной орбите под действием силы притяжения Солнца:

$$\frac{mv_З^2}{R_З}=G\frac{mM_С}{R_З^2}\Rightarrow v_З=\sqrt{G\frac{M_С}{R_З}}.$$

Таким образом,

$$E=G\frac{m}{R_З}\left(\frac{M_С}{2}-M_{эф}\right)=G\frac{m}{R_З}\left(\frac{pSR_З^2}{Gm}-\frac{M_С}{2}\right).$$

Аппарат может улететь из Солнечной системы, если $E\geqslant 0$, то есть при условии

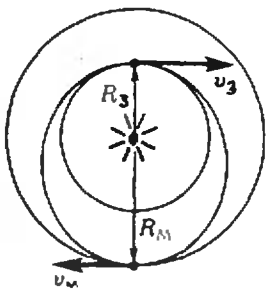
$$\frac{pSR_З^2}{Gm}-\frac{M_С}{2}\geqslant 0.$$

Отсюда находим, при какой массе аппарата это возможно:

$$m \leqslant \frac{2pSR_З^2}{GM_С} \approx 3{,}46 \cdot 10^3 \text{ кг}.$$

При большей массе аппарат будет двигаться по замкнутым орбитам.

Пусть при некоторой массе m_1 орбита аппарата касается орбиты Марса. (Из всех возможных масс m, при которых аппарат достигает орбиты Марса (пересекает ее), m_1 — максимальна.) В этом случае орбита аппарата — эллипс, большая ось которого равна $R_З+R_М$ (см. рисунок). В точках касания скорость аппарата перпендикулярна радиусу-вектору аппарата.



Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_З^2}{2} - G\frac{m_1 M_{эф}}{R_З} = \frac{m_1 v_М^2}{2} - G\frac{m_1 M_{эф}}{R_М} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_З^2 - v_М^2 = 2GM_{эф}\left(\frac{1}{R_З} - \frac{1}{R_М}\right). \quad (*)$$

Согласно второму закону Кеплера

$$v_З R_З = v_М R_М \Rightarrow v_М = v_З \frac{R_З}{R_М}.$$

Подставляя это выражение для $v_М$ в (*) и учитывая, что $v_З = \sqrt{G\frac{M_С}{R_З}}$, после несложных преобразований получим:

$$2M_{эф}R_М = M_С(R_М + R_З),$$

или

$$2\left(M_С - \frac{pSR_З}{Gm}\right)R_М = M_С(R_М + R_З).$$

Отсюда найдем максимальную массу m_1 аппарата, при которой аппарат может достичь орбиты Марса

$$m_1 = \frac{2pSR_З^2}{GM_С}\frac{R_М}{R_М - R_З} \approx 10^4 \text{ кг}.$$

В. А. Данилин

◆

Ф895. *Одна из гипотез о происхождении пояса астероидов восходит к древнегреческой легенде о сыне бога солнца Гелиоса — Фаэтоне, пораженном Зевсом (Юпитером). Согласно этой гипотезе рой каменных глыб, из которого должна была сформироваться планета Фаэтон, слишком близко подошел к Юпитеру. Под влиянием гравитационного поля Юпитера рой распался на отдельные глыбы — астероиды. Радиус роя по оценкам составлял примерно 10^4 км; масса роя (суммарная масса астероидов) в 10^6 раз меньше массы Юпитера.*
На каком расстоянии от центра Юпитера должен был пройти рой, чтобы он начал разваливаться?

Рассмотрим ближайшую к Юпитеру глыбу. Распад роя означает, что расстояние между этой глыбой и центром роя увеличивается.

Рой как целое падает на Юпитер с ускорением, которое ему сообщает сила притяжения Юпитера:

$$ma_1 = G\frac{mM}{R^2} \Rightarrow a_1 = G\frac{M}{R^2},$$

где m — масса роя, M — масса Юпитера, R — расстояние между центрами роя и Юпитера. Глыба движется под действием силы притяжения Юпитера и силы притяжения, действующей на нее со стороны роя как целого. Ускорение, с которым глыба движется к Юпитеру, —

$$a_2 = G\frac{M}{(R-r)^2} - G\frac{m}{r^2};$$

где r — радиус роя. Если $a_2 > a_1$, то расстояние между глыбой и центром роя увеличивается со временем — рой распадается. Из этого условия получаем:

$$\frac{M}{(R-r)^2}-\frac{m}{r^2}>\frac{M}{R^2}.$$

Полагая $r \ll R$, находим:

$$\frac{2rM}{R^3}>\frac{m}{r^2} \Rightarrow R<r\sqrt[3]{\frac{2M}{m}}\approx 1{,}26\cdot 10^6 \text{ км.}$$

В. Е. Белонучкин

***Ф896.** В замкнутом сосуде находятся насыщенный водяной пар при температуре 100 °С и остатки воды. Масса пара $M=100$ г, масса воды $m=1$ г. Сосуд нагревают, пока вся вода не испарится. До какой температуры надо нагреть сосуд? Какое количество тепла для этого потребуется? Давление насыщенного водяного пара возрастает на 3,7 кПа при повышении температуры на 1 °С. Удельная теплота испарения воды $r=2{,}25\cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость водяного пара $c_V=1{,}38\cdot 10^3$ Дж/(кг·К).*

◆

Определим сначала, до какой температуры надо нагреть сосуд, чтобы вся вода испарилась.

Запишем уравнения состояния пара при начальных условиях (давление насыщенного пара при температуре $t_1=100$ °С равно $p_1=10^5$ Па):

$$p_1V=\frac{M}{\mu}RT_1. \qquad (1)$$

Когда температура сосуда станет $T_2=T_1+\Delta T$ и вся вода испарится, давление насыщенного пара в сосуде будет $p_2+\Delta p$. По условию задачи $\Delta p=\alpha\cdot\Delta T$, где $\alpha=3{,}7$ кПа/К. Воспользовавшись этим, запишем уравнение состояния пара при температуре T_2:

$$p_2V=\frac{M+m}{\mu}RT_2,$$

или

$$(p_1+\alpha\cdot\Delta T)V=\frac{M+m}{\mu}R(T_1+\Delta T). \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), находим ΔT:

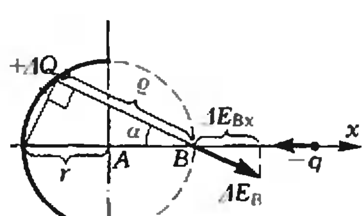
$$\Delta T=\frac{mTp}{MT\alpha-Mp-mp}\approx 0{,}29 \text{ К.}$$

Таким образом, для испарения всей воды сусуд необходимо нагреть до температуры 100,29 °С. Количество тепла, которое необходимо для этого, найдем из уравнения теплового баланса:

$$Q=rm+c_V(M+m)\cdot\Delta T\approx 2290 \text{ Дж.}$$

А. И. Буздин

***Ф897.** Находящаяся на бесконечности в состоянии покоя заряженная частица притягивается однородно заряженным полукольцом вдоль линии AB (см. рисунок). Отношение скоростей частицы в точках A и B равно $v_A/v_B=n$. Найти отношение ускорений частицы в этих точках.*



◆

Запишем уравнения движения частицы в точках A и B:

$$ma_A=qE_A, \qquad ma_B=qE_B.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a_A}{a_B}=\frac{E_A}{E_B},$$

то есть отношение ускорений частицы в точках A и B равно отношению напряженностей поля, создаваемого полукольцом, в этих точках. С другой стороны, из условия задачи нам фактически известно отношение потенциалов поля в точках A и B. Действительно, согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv_A^2}{2}=q\varphi_A, \qquad \frac{mv_B^2}{2}=q\varphi_B$$

(поскольку на бесконечности энергия частицы равна нулю), и

$$\frac{\varphi_A}{\varphi_B}=\frac{v_A^2}{v_B^2}=n^2.$$

Попытаемся выразить отношение E_A/E_B через известное отношение φ_A/φ_B.

Разобьем мысленно полукольцо на множество элементарных участков с зарядом ΔQ каждый (Q — заряд всего полукольца). Пусть $\Delta\varphi_B$ и ΔE_B — соответственно потенциал и напряженность поля, создаваемого в точке B участком, который находится на расстоянии ρ от этой точки (см. рисунок). Тогда

$$\Delta\varphi_B=k\frac{\Delta Q}{\rho}=k\frac{\Delta Q}{2r\cos\alpha},\quad \Delta E_B=k\frac{\Delta Q}{\rho^2}=k\frac{\Delta Q}{4r^2\cos^2\alpha}.$$

Проекция вектора $\Delta\vec{E}_B$ на горизонтальную ось x равна

$$\Delta E_{Bx}=\Delta E_B\cos\alpha=k\frac{\Delta Q}{4r^2\cos\alpha}=\frac{\Delta\varphi_B}{2r}.$$

Из соображений симметрии ясно, что напряженность поля $\vec{E}_B$ в точке B направлена вдоль оси x. Следовательно, значение E_B равно сумме проекций ΔE_{Bx} напряженностей полей, создаваемых всеми элементарными участками, то есть

$$E_B=\Sigma\Delta E_{Bx}=\Sigma\frac{\Delta\varphi_B}{2r}=\frac{\varphi_B}{2r}.$$

Что касается значений φ_A и E_A, то

$$\varphi_A=\frac{Q}{r},\quad E_A=\frac{2Q}{\pi r^2}=\frac{2\varphi_A}{\pi r}$$

(получите эти соотношения самостоятельно).

Итак, $E_A/E_B=4\varphi_A/\pi\varphi_B$, и отношение ускорений частицы в точках A и B равно

$$\frac{a_A}{a_B}=\frac{4}{\pi}\frac{\varphi_A}{\varphi_B}=\frac{4}{\pi}n^2.$$

В. Т. Карапетян

Топ-кварк и тигренок Топ

(Начало см. на с. 41)

можно было догадаться по результатам измерений импульсов всех заряженных частиц. Поскольку зарегистрированное событие связано с распадом практически покоящегося W-бозона, суммарный импульс всех частиц в распаде должен быть равен нулю. Однако измеренный импульс заряженных частиц оказался ненулевым, откуда и был сделан вывод о присутствии нейтрино.

Наиболее вероятная расшифровка события, о котором идет речь, состоит в том, что при столкновении протона с антипротоном родилась частица, состоящая из двух кварков — топ-кварка t и красивого антикварка $\bar{b}$. Топ-кварк распался по схеме

$$t\to b+\mu^++\nu$$

(здесь μ^+ — положительный мю-мезон), а $\bar{b}$ и b дали два пучка частиц. Теперь надо ждать результатов дальнейших опытов.

Масса топ-кварка по оценкам оказалась соответствующей энергии около 40 Гэв (масса ядра кальция!).*) Это, конечно, меньше массы тигренка, даже новорожденного, но в «зоопарке частиц» топ-кварк — рекордсмен.

Я. С.

*) Такая оценка массы топ-кварка получается, если считать, что масса ипсилон-мезона равна массе двух b-кварков (5 ГэВ+ +5 ГэВ=10 ГэВ), а масса новой частицы ($\approx$50 ГэВ) равна сумме масс b-кварка и топ-кварка.

Братиславская летняя школа юных программистов

С 1 по 8 июля 1984 года в столице Словацкой социалистической республики Братиславе прошла первая Летняя школа юных программистов Словакии. Школа проходила в братиславской гимназии им. Ю. Гронца, где уже в течение двадцати лет ведется обучение программированию старших школьников. Организаторы Летней школы — директор гимназии М. Ганула, преподаватели программирования О. Демачек, Е. Ганулова и др.— горячие энтузиасты школьной информатики. Летом 1983 года делегация школьников из гимназии им. Ю. Гронца, возглавляемая О. Демачеком, впервые участвовала во Всесоюзной летней школе юных программистов. По результатам этой поездки и было принято решение о проведении в Братиславе летней школы с приглашением юных программистов из Советского Союза.

В Братиславу съехались полсотни словацких старшеклассников. На первой встрече все ребята рассказали о том, как в их школах изучают программирование, с какими машинами они знакомы, какие программы пишут. А те из словацких девочек и мальчиков, которые привезли на Школу результаты своих программ, сделали краткие сообщения. Школьники из Банской Бистрицы Р. Немец и И. Мелихерчик показали свою программу, работающую с большими числами. Ребятам удалось вычислить некоторые иррациональные числа с высокой точностью (до 256 знаков) на машинах весьма ограниченных возможностей. В сообщении Р. Ласицы из гимназии словацкого города Сенице предложены программные средства для анализа взаимного расположения прямых. И. Кудла из политехникума в г. Левице продемонстрировал выполненные на Бэйсике расчеты зубчатых сцеплений.

С интересом были заслушаны выступления советских школьников. П. Земцов (Новосибирск, с. ш. № 25) рассказал о системе программирования на языке Рапира для советских персональных микро-ЭВМ, А. Петров (Новосибирск, с. ш. № 166) — о применении ЭВМ на уроках по разным школьным предметам путем использования учебных пакетов прикладных программ.

Учебная программа Школы была насыщенной. В первые дни были прочитаны лекции по языку Паскаль. Они оказались весьма актуальными, поскольку в большинстве чехословацких школ, где ведется обучение программированию, учебным языком является Бэйсик — сравнительно простой, но спорный в методическом отношении язык программирования. В лекциях на Летней школе были отражены многие важнейшие проблемы современного программирования — операционные системы, параллельные алгоритмы, программные средства отладки, машинная графика, программное обеспечение искусственного интеллекта.

Обсуждались также вопросы теории и методологии программирования — доказательства правильности программ, основы взаимоотношений математики и программирования. Эти лекции читали преподаватели гимназии, студенты братиславских вузов, научные сотрудники исследовательских институтов Словацкой Академии наук, а также руководитель советской делегации Ю. А. Первин.

Несомненно, наиболее увлекательной частью Школы была работа учащихся за пультами вычислительных машин. Гимназия предоставила с этой целью свою вычислительную технику: две чехословацкие мини-ЭВМ — АДТ-4316 с 8 терминалами и системой программирования на Бэйсике и СМ-3-20 с 6 терминалами и языком Паскаль, а также две персональных микро-ЭВМ с графическими возможностями — новую машину чехословацкого производства ПМД-85 и небольшой английский компьютер Синклер-ZX81. Участники Школы быстро освоились с новой для них техникой и с первых же дней приступили к решению задач, предложенных на выбор в самом начале работы Школы.

Диапазон задач по уровню сложности был достаточно широк и мог удовлетворить любой вкус. Достаточно назвать классические программы из инструментария машинной математики — пакет обработки матриц, арифметика разреженных матриц, построение графиков функций. Тем, кто готовится стать системным программистом, были более близки темы по сортировке, построению таблиц перекрестных ссылок, графическому редактору, автоматизации информационного поиска, модели компилятора. Был предложен целый ряд прикладных и игровых задач — программные средства ведения домашнего бюджета, лабиринтные задачи, программирование шашек, решение шахматных задач, простые диалоговые программы, контролирующие знания по истории, географии, литературе. В большинстве задач активно использовалась графика.

Каждая из таких задач предлагалась команде из 2—3 человек, которые в свободное от лекционных занятий время отлаживали программу на одной из машин. Команда советских школьников составила на Бэйсике программную модель робота-муравья (описанную в журнале «Наука и жизнь», 1984, № 5), которая служит удобным методическим средством при обучении основам программирования младших школьников. Весь диалог с машиной авторы программы сделали на словацком языке (разумеется, не без помощи новых друзей, с которыми советские школьники познакомились в Братиславе).

Интересным был предпоследний день Школы. Большую его половину заняла удивительная экскурсия. По далекой лесной горной дороге все школьники добрались до расположенного высоко в живописных Малых Карпатах Государственного метеорологического центра Словакии. Для программистов представила интерес вычислительная техника, которой оснащен этот центр, например, цветные графические дисплеи с растром 512×512 точек. На экране такого дисплея прекрасно видны получаемые со спутника и обрабатываемые на ЭВМ изображения как всего земного шара, так и ближайшего региона. После такой прогулки, казалось, можно было бы и отдохнуть. Но сразу же после возвращения в классы гимназии началось еще одно мероприятие — соревнование юных программистов, ни-

Участники Школы за пультами ЭВМ в гимназии им. Ю. Гронца.

тересное, серьезное, увлекательное и даже немного азартное.

Каждый участник соревнований получил две задачи. В одной из них, которую следовало запрограммировать на Бэйсике, надо было выдать на экран заданный стилизованный, составленный из символов рисунок, затратив на это минимальное количество предписаний. Вторая задача состояла в программировании на языке Паскаль вычисления факториала так, чтобы на экран выводились все цифры результата. Критерий этой задачи — быстродействие программы. Победили школьники из Поважской Бистрицы В. Белл и новосибирский девятиклассник П. Земцов.

А на другой день состоялась заключительная конференция, где школьники рассказали (и показали на экранах машин!) то, что было сделано за эту необычную в их жизни неделю.

Закрытие было торжественным. Никто из участников не остался без подарка — книг по программированию на словацком и чешском языках, а активным участникам Школы были вручены дипломы и памятные подарки. На этой же заключительной встрече прозвучали соответствующие торжеству момента прелюдии и фуги Баха, мелодии Моцарта в исполнении... вычислительной машины АДТ-4316.

Советским юным программистам, впервые выезжавшим за рубеж, эта Школа доставила много ярких впечатлений. Новых друзей сблизили Паскаль, Бэйсик, Рапира...

Ю. А. Первин

Братислава — Москва — Новосибирск

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при МГУ им. М. В. Ломоносова (ВЗМШ) принимаются учащиеся седьмых классов и ПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Для поступления в школу нужно выполнить первое задание.

Задание 1. Изучите статью «Пары чисел и действия с ними» в этом номере журнала (см. с.) и решите задачи 1—20 из этой статьи (не обязательно все; учитываются решения отдельных пунктов задач).

Решения задач должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Задачи должны идти в том порядке, как они даны в статье, сначала условие, затем — решение. На обложку тетради надо наклеить листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	*Московская*
Фамилия, имя	*Иванов Петр*
Год рождения	*1971*
Класс и школа	*7 класс «Б» школы № 2*
Фамилия, и. о. учителя математики	*Орлов Борис Петрович*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 3, мать — медсестра*
Полный почтовый адрес	*123456 г. Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1.*

Срок отправки задания № 1 — не позднее 5 апреля 1985 г. (по почтовому штемпелю).

Для того чтобы задание было зачтено, нужно решить бо́льшую часть задач. Если вы успешно выполните это задание, то начиная с сентября 1985 г. вы будете получать все дальнейшие задания. Предполагается, что часть заданий будет даваться в журнале «Квант», поэтому советуем вам на него подписаться (журнал распространяется только по подписке; подписка принимается во всех отделениях связи с любого месяца без ограничений). Первое задание надо выслать по адресу: «119823 Москва ГСП, МГУ, ВЗМШ. На прием» или по адресу соответствующего филиала. Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Ижевск, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Орел, Павлодар, Славянск, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в г. Дубна при Объединенном институте ядерных исследований, в г. Могилеве при областном дворце пионеров и школьников, а также отделение ВЗМШ при Московском институте стали и сплавов.

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), должны присылать работы по адресу: «193130 Ленинград, 8-я Советская ул., 3, С-3 ЗМШ. На прием».

Школьники, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ, имеют возможность заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ». Каждая такая группа — это школьный математический кружок, работающий под руководством своего учителя по программе ВЗМШ. Прием в эти группы проводится до 20 сентября 1985 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1985 г. начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе. В группы «Коллективный ученик ВЗМШ» прием без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться с сентября 1985 г. Заявление должно быть заверено директором школы и печатью. Работа руководителя группы «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Вне конкурса принимаются также участники Всесоюзных олимпиад по математике для школьников и учащихся ПТУ.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием на заочное отделение учащихся седьмых классов общеобразовательных школ. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в сентябре месяце. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно окончившие 8 или 9 классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу — интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический Совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 1 апреля 1985 года выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы, при этом не обязательно должны быть решены все задачи. Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;
2) фамилия, имя учащегося;
3) школа и класс (полное название);
4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);
5) фамилия, имя и отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 14×6 см, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и свою фамилию и пришлите по адресу: 119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечания:

1. Для школьников 7—10 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 139-39-43.

2. Для школьников Казахстана и Молдавии действуют филиалы МММФ МГУ: при математическом факультете Казахского государственного университета и при факультете математики и кибернетики Кишиневского государственного университета. Их адреса:

480012 г. Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи, 47/39, Каз. ГУ, математический факультет, филиал МММФ МГУ.

277003 г. Кишинев, ул. Садовая, 60, КГУ, факультет математики и кибернетики, филиал МММФ МГУ.

Задачи вступительной контрольной работы на Малый механико-математический факультет в 1985 году

1. Разложить многочлен x^4+2x^2+9 в произведение двух квадратных трехчленов.

2. Точка D находится внутри треугольника ABC. Доказать, что $AD+BD$ меньше, чем $AC+BC$.

3. Из вершины прямого угла треугольника проведены медиана, биссектриса и высота. Доказать, что угол между медианой и биссектрисой равен углу между биссектрисой и высотой.

4. Встретились 6 школьников. Доказать, что среди них есть либо трое, каждый из которых знаком с двумя другими, либо трое, каждый из которых не знаком с двумя другими (считается, что для двух школьников есть только две возможности: или они знакомы, или не знакомы друг с другом).

5. Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющих равенству

$$x^2+y^2+1=xy+x+y.$$

6. Сколько чисел, не делящихся ни на 3, ни на 7, имеется среди первого миллиона натуральных чисел?

7. Доказать, что у квадрата любого нечетного числа, большего 3, предпоследняя цифра четная.

8. При каких значениях x выражение

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$$

принимает наименьшее значение?

9. Из пункта A выехал первый велосипедист. Одновременно из пункта B навстречу ему выехали второй и третий велосипедисты. Через час второй велосипедист находился между первым и третьим, на одинаковом расстоянии от каждого из них. Еще через полчаса уже первый велосипедист оказался на равном расстоянии от двух других. Через сколько времени после начала движения третий велосипедист будет на одинаковом расстоянии от первого и второго велосипедистов?

10. Доказать, что число

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{77}+\sqrt{78}}+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$$

больше 4.

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые и девятые классы на 1985/86 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры общей физики и кафедры теоретической физики Московского института стали и сплавов и соответствует требованиям на вступительных экзаменах в вузы, прежде всего — в МИСиС.

Работа школы организована следующим образом. Четыре-пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач. Присланные учащимися контрольные работы проверяются и вместе с оценками и комментариями отправляются учащимся. В качестве годового задания учащимся десятых классов посылаются материалы вступительных экзаменов в МИСиС за прошлые годы.

Занятия в ЗФТШ (МИСиСа) начнутся с 1 октября 1985 года. Для зачисления в школу необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного домашнего адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по физике и математике. Заявление и справку вместе с решением первого задания по математике, о котором написано в статье «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» в этом номере журнала, нужно выслать не позднее 5 мая по адресу: 117049 Москва, Ленинский пр., 4, МИСиС, ЗФТШ.

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство
$$x+3>\log_3(26+3^{-x}).$$

2. Решите уравнение
$$\sqrt{x}=\frac{3}{6\sqrt{x}+\sqrt{6x-3}}.$$

3. Через точку A (3; —4) проведена касательная l к гиперболе $y=-\frac{12}{x}$. Найдите радиус окружности с центром на оси ординат, касающейся прямой l и оси абсцисс. Найдите все решения.

4. Найдите все значения x и y, такие, что числа
$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x,\ 2\cos(x+y),\ 4\sin 2x,\ 16\sin(x-y)$$
являются последовательными членами геометрической прогрессии.

5. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $|AC|=4$, $|BD|=2$. Точки M и N лежат на ребрах AD и B_1C_1 соответственно, причем $|AM|:|MD|=|C_1N|:|NB_1|=3:2$, $|MN|=\sqrt{5}$. Найдите объем призмы.

Из всех плоскостей, проходящих через прямую (MN), выбрана та плоскость P, проекция на которую отрезка AA_1 имеет минимальную длину. В каком отношении плоскость P делит отрезок AC?

Вариант 2

1. Решите неравенство
$$125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2}\leqslant\left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$$

2. Найдите все решения уравнения
$$\cos 2x=2\operatorname{tg}^2 x-\cos^2 x,$$
удовлетворяющие неравенству $\sin x\geqslant\cos x$.

3. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготавливала 8 м^3 сверх плана. Поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготавливать по плану?

4. Вершина C прямоугольника $ABCD$ лежит на стороне KM равнобедренной трапеции $ABKM$ ($(BK)\parallel(AM)$), P — точка пересечения отрезков AM и CD. Найдите углы трапеции и отношение площадей прямоугольника и трапеции, если $|AB|=2|BC|$, $|AP|=3|BK|$.

5. Сфера касается плоскости основания и всех боковых ребер правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ (S — вершина). Найдите объем пирамиды, если радиус сферы равен R, а угол $\widehat{SAB}$ равен α.

Плоскость проходит через точку S, касается указанной сферы и пересекает прямые (BE) и (AD) соответственно в точках M и N ($|EM|>|BM|$, $|AN|>|DN|$).
Найдите

а) отношение $|DN|:|AD|$, если $|BM|=|DN|$,

б) отношение $|DN|:|AD|$, если $|BM|:|BE|=3:22$.

Вариант 3

1. Решите неравенство
$$\frac{5}{2-x}>1+\frac{3}{x+2}.$$

2. Решите уравнение
$$\sqrt{3\sin 2x}=4\sqrt{-\sin x\cdot\operatorname{tg} x}.$$

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}5+\log_y x^2=-\log_{\sqrt{x}} y,\\ \dfrac{(\log_5 y)^2}{\log_5 x}=6-3^{x:y}-\log_{25} y.\end{cases}$$

4. Точка O — центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC ($|AB|=|BC|$). Прямая (AO) пересекает отрезок BC в точке M. Найдите углы и площадь треугольника ABC, если $|AO|=3$, $|OM|=\frac{27}{11}$.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $|SA|=4$) точка D лежит на ребре SC, $|CD|=3$, а расстояние от точки A до прямой (BD) равно 2. Найдите объем пирамиды.

Дана сфера радиуса 1 с центром в точке A. Рассматриваются всевозможные правильные тетраэдры $MNPQ$, такие, что точки M и N лежат на прямой (BD), а прямая (PQ) касается сферы в одной из точек отрезка PQ. Найдите наименьшее значение длины ребра рассматриваемых тетраэдров.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Составной стержень представляет собой два соосных цилиндра, прижатых друг к другу торцами (рис. 1). Оказалось, что центр масс C такого стержня находится в стыковочном сечении. Цилиндры имеют одинаковые площади сечения, но изготовлены из различных материалов с плотностями ρ и 2ρ. Определите отношение масс цилиндров.

2. На рисунке 2 изображена изотерма влажного воздуха. Давление воздуха в точках *1*, *2* и *3* равно p_1, p_2 и p_3 соответственно. Определите относительную влажность воздуха в этих точках.

3. В схеме, изображенной на рисунке 3 (величины C, R, $\mathscr{E}$ известны), при разомкнутом ключе K заряд левой пластины плоского конденсатора равен нулю. Определите начальный

Рис. 1.

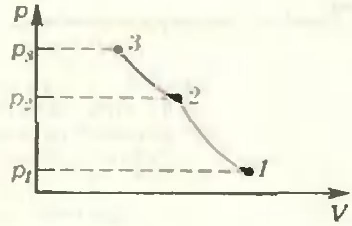


Рис. 2.

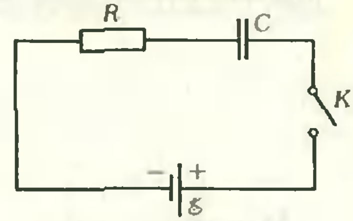


Рис. 3.

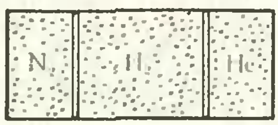


Рис. 4.

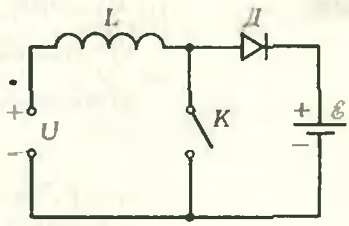


Рис. 5.

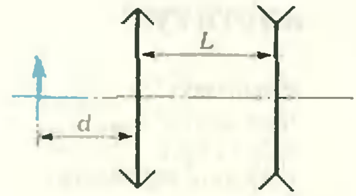


Рис. 6.

заряд правой пластины конденсатора, если после замыкания ключа на резисторе с сопротивлением R выделяется такое же количество теплоты, как и в случае, когда конденсатор вначале не заряжен.

4. Тонкая линза создает изображение небольшого предмета, находящегося в ее фокальной плоскости. Определите высоту предмета, если высота изображения $H=0{,}7$ см.

Вариант 2

1. Под каким углом к горизонту надо бросить камень, чтобы его кинетическая энергия в точке максимального подъема составляла 25 % от его кинетической энергии в точке бросания?

2. В сосуде длиной L, разделенном на три части легкими поршнями, находится азот, водород и гелий (рис. 4). Материал, из которого изготовлен правый поршень, оказался проницаемым для водорода и гелия. Левый поршень проницаем только для водорода. Найдите смещения поршней после установления равновесия в системе. Первоначальные давления и температуры газов одинаковы, объем, занимаемый водородом, больше объемов азота и гелия в два раза.

3. Для подзарядки автомобильного аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E}=12$ В от сети с постоянным напряжением $U=5$ В собрана схема (рис. 5), содержащая катушку с индуктивностью $L=0{,}1$ Гн, идеальный диод $Д$ и прерыватель K, который периодически замыкается и размыкается на одинаковое время $\tau_1=\tau_2=0{,}1$ с. За сколько времени можно таким образом осуществить подзарядку аккумулятора на 20 А·ч (ампер-часов)? Сопротивлением всех узлов схемы и диода в прямом направлении пренебречь.

4. Оптическая система, показанная на рисунке 6, состоит из положительной линзы с фокусным расстоянием $F_1=9$ см и отрицательной линзы с фокусным расстоянием (по модулю) $F_2=5$ см. Расстояние между линзами $L=22$ см. При каких расстояниях d от положительной линзы до предмета эта система будет давать перевернутое мнимое увеличенное изображение предмета?

Публикацию подготовили
П. Б. Гусятников, А. В. Шелагин

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2\sin x}=-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x.$$

2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a; боковое ребро равно b. Определите ее объем и площадь сечения, проходящего через сторону основания перпендикулярно к боковому ребру, противолежащему этой стороне.

3. Что значит $a\geqslant b$? Докажите, что если $a>b$ и $b\geqslant c$, то $a>c$.

4. Расположите в порядке возрастания следующие числа:

$$1;\ 0{,}37;\ \frac{65}{63};\ \frac{61}{59};\ \mathrm{tg}\,33°;\ \mathrm{tg}(-314°).$$

5. Докажите, что если $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{3}$, то

$$2f(x+2)+f(-x-1)=x^2+4x+4.$$

Верно ли обратное утверждение?

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$|\sin x+\sin 2x|\,(2x-5)=\sin x+\sin 2x.$$

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины a последовательно соединены середины ребер AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA и AA_1. Докажите, что полученная фигура — правильный шестиугольник и вычислите его площадь.

3. а) При $a=b=2$ решите уравнение

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{2-b}{x-1}=0.$$

б) Изобразите на координатной плоскости множество точек $M\ (a;\ b)$, для которых это уравнение имеет единственное решение.

4. Расположите в порядке возрастания следующие числа:

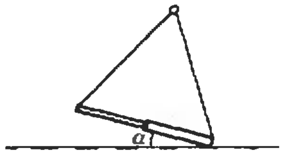


Рис. 1.

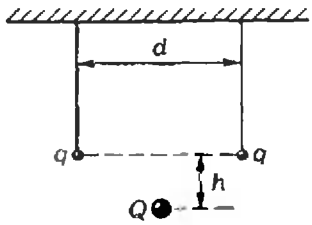


Рис. 2.

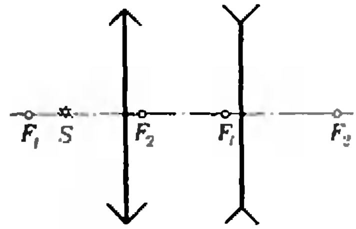


Рис. 3.

$$0{,}02;\ 1;\ 0{,}85;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{0{,}762};\ -\cos 571°.$$

5. Докажите, что при $a=-12$ и $b=17$ наибольшее значение выражения $|2x^2+ax+b|$ на отрезке $[2;\ 4]$ равно 1. Верно ли обратное утверждение?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Стержень, составленный из двух однородных кусков одинаковой длины, является основанием равностороннего треугольника (рис. 1). Масса одного куска стержня вдвое больше массы другого куска. Стержень подвешен за концы на двух невесомых нитях, которые служат боковыми сторонами этого треугольника. Какой угол α с горизонтом образует стержень в положении равновесия?

2. Математический маятник состоит из шарика массой $m=50$ г, подвешенного на нити, длина которой $l=1$ м. Определите наименьшую силу натяжения нити, если шарик проходит через положение равновесия со скоростью $v=1{,}4$ м/с.

3. Тело соскальзывает с наклонной плоскости, длина основания которой $l=2$ м. Коэффициент трения тела о плоскость $\mu=0{,}2$. Определите, на сколько градусов повысится температура тела, если $\alpha=30\ \%$ выделившегося количества теплоты пошло на нагревание тела. Удельная теплоемкость материала, из которого сделано тело, $c=0{,}84$ кДж/(кг·К).

4. При нормальном атмосферном давлении некоторую массу воды нагревают до температуры кипения, пропуская через нее пар при температуре $t_п=100$ °С. Во сколько раз увеличится масса воды, когда она достигнет температуры кипения? Начальная температура воды $t=20$ °С, ее удельная теплота парообразования $r=2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг.

5. Два сосуда, в которых находятся одинаковые массы воздуха при одинаковой температуре, соединяют тонкой короткой трубкой. Какое давление воздуха будет в системе после соединения? Первоначальное давление в первом сосуде $p=6{,}6\cdot10^4$ Па, объем первого сосуда в три раза больше объема второго сосуда.

6. Два шарика, имеющих одинаковые заряды $q=3{,}3\cdot10^{-6}$ Кл, подвешены на одной высоте на тонких невесомых нитях равной длины (рис. 2). На одинаковом расстоянии от этих шариков и на $h=20$ см ниже них расположен заряд Q. Определите величину этого заряда, если известно, что нити висят вертикально, а расстояние между ними $d=30$ см.

7. Два конденсатора, рассчитанные на максимальное напряжение $U=300$ В каждый, но имеющие различные емкости $C_1=500$ пФ и $C_2=300$ пФ, соединены последовательно. Какое наибольшее напряжение можно приложить к такому составному конденсатору?

8. Рассчитайте величину добавочного сопротивления, которое нужно присоединить к миллиамперметру с внутренним сопротивлением $R_0=1$ кОм и током полного отклонения $I_0=1$ мА, чтобы получить вольтметр с пределом измерения $U=600$ В. Вычислите также наибольшую мощность, которая будет выделяться в этом сопротивлении и в рамке прибора.

9. С помощью построения найдите изображение светящейся точки (рис. 3).

10. Определите расстояние наилучшего зрения для человека, которому нужны очки с оптической силой $D=-3$ дптр.

Публикацию подготовили
Г. В. Ефашкин, В. А. Тонян

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Сумма цифр трехзначного числа равна 12, сумма цифр его сотен и десятков кратна 9. Если от искомого числа отнять 99, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите первоначальное число.

2. Решите уравнение: $\cos\frac{3\pi+x}{3}\cdot\cos\frac{9\pi+2x}{6}=\frac{1}{4}$.

3. В правильном тетраэдре $SABC$ через его вершину S проведена плоскость Π, перпендикулярная к плоскости (ABC) и параллельная (AB). Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, если ребро тетраэдра имеет длину a.

4. Решите уравнение $4^x-10\cdot2^{x-1}-24=0$.

5. Вычислите $5\frac{4}{45}-4\frac{1}{15}+3\frac{29}{30}:(55{,}65:5{,}3-9{,}48)$.

Вариант 2
(физический факультет)

1. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Объем параллелепипеда равен v. Найдите длину стороны основания, при которой полная поверхность параллелепипеда будет наименьшей, и вычислите величину угла между диагональю параллелепипеда с наименьшей площадью поверхности и плоскостью его основания.

2. Решите неравенство $\log_4(x-4)+\log_4(x-10)>2$.

3. Найдите объем пирамиды, основанием которой служит прямоугольный треугольник с гипотенузой длиной 6 см и острым углом с величиной в 30°, если боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $\alpha=45°$.

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+6x\right)}{4}.$$

Вариант 3
(индустриально-педагогический факультет)

1. Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 6 дней. Если каждый из них выполнял бы эту работу один, то первый из них потратил бы на 5 дней больше второго. Определите за сколько дней каждый из них в отдельности может выполнить эту работу?

2. Решите уравнение

$$\sin 5x-\sin x=\sin 2x.$$

3. В цилиндрическом колодце, внутренний диаметр которого 2,5 м, прибыло воды на 30 см. Сколько кубометров воды прибавилось?

4. Решите уравнение

$$2^{3x}=\sqrt[3x]{512}.$$

5. Укажите промежутки возрастания и убывания функции

$$y=x^3-27x+15.$$

Вариант 4
(географический факультет)

1. Население города за два года увеличилось с 20 000 до 22 050 человек. Найдите средний ежегодный процент роста населения этого города.

2. Решите уравнение

$$(\sin 2x+\cos 2x)^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. На одной из параллельных сторон трапеции взята точка A, на другой — точка B. Докажите, что отрезок AB делится средней линией трапеции пополам.

4. Постройте график функции $y=x^3-6x^2+9x-4$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два бруска массой $m_1=0{,}4$ кг и $m_2=0{,}6$ кг движутся без трения равноускоренно под действием силы ($F=2$ Н), приложенной ко второму бруску. С каким ускорением движутся бруски? Какова сила натяжения связывающей их нити?

2. Шарик массой $m=100$ г подвешен к нити. В натянутом положении нить расположили горизонтально, и отпустили шарик. Чему равна сила натяжения нити, если она в данный момент образует с горизонтальным направлением угол $\alpha=30°$? Какой прочностью на разрыв должна обладать нить, чтобы она не оборвалась в данном опыте?

3. Тело весит в воздухе $P=3$ Н, в воде $P_в=1{,}8$ Н и в жидкости с неизвестной плотностью — $P_ж=2{,}04$ Н. Какова плотность жидкости?

4. Горизонтально летящая пуля попадает в деревянный брус, лежащий на гладкой горизонтальной плоскости, и пробивает его. Определите, какая часть энергии пули перешла в тепло. Масса пули $m=10$ г, масса бруса $M=1$ кг, начальная скорость пули $v_0=500$ м/с, скорость пули после вылета $v=300$ м/с.

5. При изготовлении льда в бытовом холодильнике потребовалось $\tau_1=16$ мин для охлаждения воды от $T_1=289$ К до $T_2=273$ К и еще $\tau_2=1$ ч 20 мин, чтобы превратить ее в лед. На основании этих данных определите удельную теплоту отвердевания воды. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

6. В комнате затопили печь, и температура поднялась с $t_1=16$ °С до $t_2=21$ °С. Давление воздуха в комнате при этом не изменилось. Какая часть воздуха ушла из комнаты?

7. Определите ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока, если при силе тока $I_1=2$ А во внешней цепи выделяется мощность $P_1=3$ Вт, а при силе тока $I_2=4$ А — мощность $P_2=4$ Вт.

8. Электрическая плитка имеет в нагревателе две секции. При включении одной секции вода в кастрюле закипает через $\tau=8$ мин, а при включении второй (без первой) — через $\tau_2=20$ мин. Через сколько минут закипит вода в кастрюле, если обе секции включить: а) параллельно? б) последовательно? Условия нагревания во всех случаях одинаковы.

9. На дне сосуда, наполненного водой до высоты $H=2$ м, находится точечный источник света. На поверхности воды плавает круглый диск так, что центр диска находится над источником света. При каком минимальном радиусе диска ни один луч света не выйдет через поверхность воды? Коэффициент преломления воды $n=4/3$.

10. На каком расстоянии от линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см надо поставить предмет, чтобы его действительное изображение было в $\Gamma=4$ раза больше самого предмета?

Публикацию подготовили
А. В. Жмулева,
О. Ю. Овчинников

Отражение кривых и преобразования формул

(см. с. 29)

1. $M(y;x)$ и $M(-y;-x)$.

2. а) $y=f(-x)$; б) $y=-f(x)$; в) $y=|f(x)|$; г) $y=f(|x|)$; д) $y=|f(x)-2|+2$; е) $y=f(-|x|)$; ж) $y=f(1-|x-1|)$; з) $y=f(1+|x-1|)$; и) $y=-f(-x)$; см. также рис. 1.

3. а) $f(-x,y)=0$; б) $f(-|x|,y)=0$; в) $f(x,-y)=0$; г) $f(|x|,y)=0$; д) $f(-|x|,|y|)=0$; е) $f(|x|,|y|)=0$; ж) $f(|x|,-|y|)=0$; з) $f(-2|x|,2|y|)=0$; и) $f(-|x|,|y|)$ $f(-2|x|,2|y|)=0$; см. также рис. 2.

4. а) $y=||x|-1|$; б) $y=|||x|-2|-1|$; в) $|y|=||x|-2|$; г) $|y|=2-||x|-2|$; д) $|y|=2-|||x|-1|-2|$; е) $|y|=3-|||x|-1|-2|$; ж) $2|y|=||x|-2|-|x|+4$. Указание. Обратитесь к графику функции $y=|x|-x$ и используйте его для получения изображенной фигуры и «конструирования» подходящей формулы.
з) $2|y|=|||x|-4|-|x|+2|$. Указание. Воспользуйтесь указанием к предыдущей задаче 4, ж.
и) $|y|=|x|-|x-2|-x+2$. Указание. Рассмотрите график функции $y=f(x)-|x|$, где $f(x)$ — функция с «зигзагообразным» графиком, часть которого, лежащая в верхней полуплоскости, совпадает с ломаной, изображенной на рис. 4, и (в статье).
к) $|x|=||y-1|-1|-|y-3|-y+3$. Указание. Воспользуйтесь приемом, предложенным в указании к задаче 4, и. Рассмотрите в данном случае x как функцию от y, графиком которой является часть ломаной, изображенной на рис. 4, к (в статье), лежащей в правой полуплоскости $x>0$*).

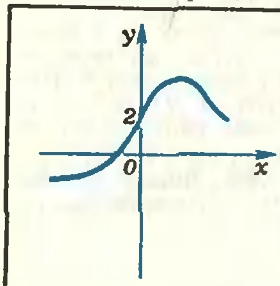


Рис. 1.

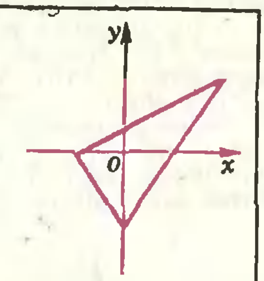


Рис. 2.

5. а) 1; б) 1—5; в) 1; г) 3—5; д) 1—3; е) 3; ж) 1—3; з) 4; и) 5; к) 1—5.
Здесь цифрами 1, 2, 3, 4, 5 обозначены симметрии относительно оси Ox, оси Oy, начала координат, прямой $y=x$ и прямой $y=-x$ соответственно.

6. Графики изображены на рисунке 3.

7. Достаточными (но не необходимыми) будут, например, следующие условия: а) $f(x,y)=f(x,-y)$; б) $f(x,y)=f(-x,y)$; в) $f(x,y)=f(-x,-y)$; г) $f(x,y)=f(y,x)$; д) $f(x,y)=f(-y,-x)$.

Избранные школьные задачи

1. Ответ: 493 нуля. Указание. Количество нулей, которым оканчивается число $N=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot1984$, равно количеству пар множителей 2 и 5, которые можно образовать после разложения числа N на простые множители. Поэтому нужно подсчитать, сколько раз множитель 5 входит в такое разложение (оказывается, что $\left[\frac{1984}{5}\right]+\left[\frac{1984}{25}\right]+\left[\frac{1984}{125}\right]+\left[\frac{1984}{625}\right]$ раз), и убедиться, что множителей 2 будет больше. ($[x]$ — целая часть числа x.)

2. Указание. Справедливо следующее полезное тождество:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

*) Для решения подобных задач можно воспользоваться общим методом конструирования уравнений ломаных, содержащимся в решении задачи М848 (см. «Квант», 1984, № 5, с. 47).

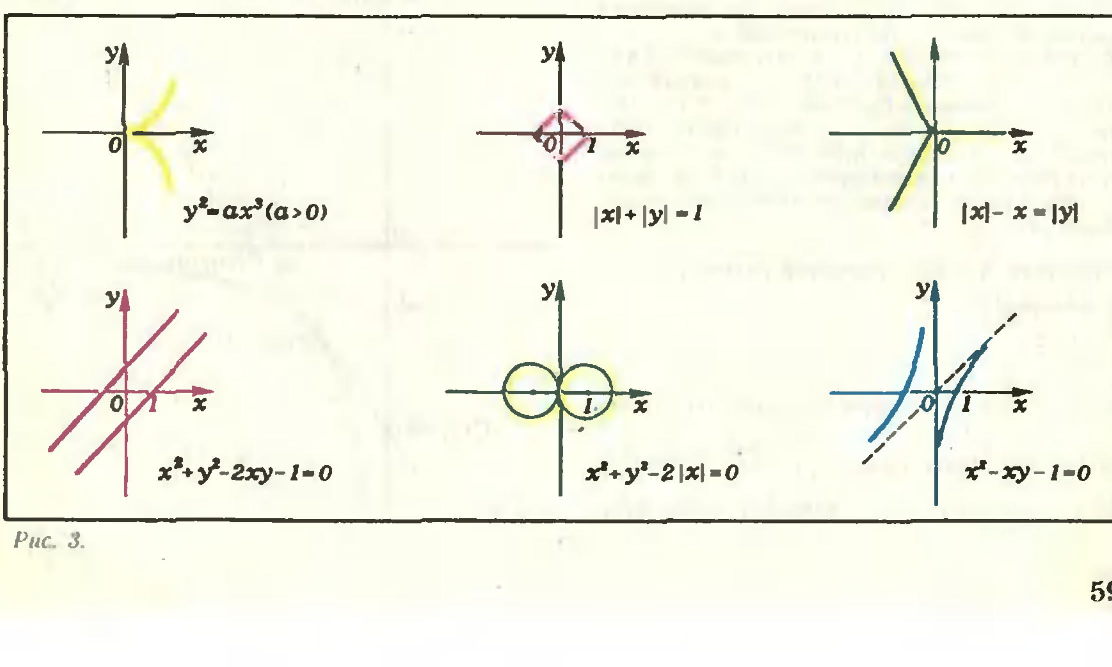


Рис. 3.

3. Ответ: полпробирки было заполнено через 59 минут.

4. Ответ: пусть B^* — точка плоскости, симметричная точке B относительно данной прямой; тогда точкой M является точка пересечения данной прямой с прямой AB^*. Замечание. Если A^* — точка, симметричная точке A относительно данной прямой, то данная прямая и прямая A^*B пересекаются в той же точке M.

5. Ответ: $2ab/(a+b)$. Указание. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$, а MN — отрезок, о котором идет речь в условии (причем точка M лежит на боковой стороне AB). Для вычисления длины MO можно воспользоваться тем, что

$$\triangle ABD \backsim \triangle MBO,\ \triangle BAC \backsim \triangle MAO.$$

6. Указание. От противного: если бы оказалось, что $\log_4 18 = \frac{p}{q}$, то имело бы место равенство $2^{2p-q}=3^{2q}$, а оно невозможно (почему?).

7. Ответ: прямая $y=1$, из которой выколоты все точки $(\pi k/2;\ 1)$, $k \in Z$.

8. Ответ: уравнение не имеет корней ни при каком натуральном $n>1$. Указание. Необходимо воспользоваться неравенством $\sin\alpha \leqslant 1$.

9. Ответ: не обязательно.

10. Ответ: три прямые. Указание. Для доказательства нужно привести пример трех прямых, удовлетворяющих условию задачи, и объяснить, почему большее число таких прямых существовать не может.

11. Ответ: можно. Указание. Рассмотрите 1984 натуральных числа, следующих подряд за числом

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1985+1.$$

12. Ответ: 0. Указание. Справедливо следующее полезное равенство:

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a},\ a>0,\ b>0,\ c>0,\ b\neq 1.$$

13. Ответ: $2\pi k<x<(\pi/2)+2k\pi$, $k \in Z$. Указание. Докажите предварительно следующий полезный факт: если значение x таково, что $0<\sin x<1$, то для этого значения x выполнено неравенство $\sqrt{\sin x}>\sin^2 x$ (аналогичное утверждение верно и для косинуса).

14. Ответ: параллелограмм. Указание. Достаточно убедиться, что

$$[MN]\parallel[AC]\parallel[QP],\ [MQ]\parallel[BD]\parallel[NP].$$

Таким образом: если последовательно соединить отрезками середины сторон произвольного пространственного четырехугольника, то получится плоская фигура — параллелограмм.

15. Ответ: правильный шестиугольник. Указание. Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб ($ABCD$ — нижнее основание, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра), а пучок лучей света параллелен диагонали куба BD_1, то тень является шестиугольником с вершинами в серединах тех ребер куба, которые не примыкают к вершинам куба B и D.

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $]0;\ +\infty[$.

2. $\frac{1}{2}$. Указание. Данное уравнение равносильно уравнению $6x-3+\sqrt{x}\sqrt{6x-3}=0$. При $x=\frac{1}{2}$ левая часть этого уравнения равна нулю, а при $x>\frac{1}{2}$ положительна.

3. $r_1=3$, $r_2=12$. Решение. Касательная l, имеющая уравнение $y=\frac{4}{3}(x-6)$, пересекает оси Ox и Oy в точках B (6; 0) и C (0; −8). На оси Oy существуют ровно две точки Q_1 и Q_2 (рис. 4), являющиеся центрами окружностей, касающихся оси Ox и прямой l. Прямые (Q_1B) и (Q_2B) перпендикулярны и являются биссектрисами внутреннего угла B и внешнего угла B треугольника OBC соответственно. По свойству биссектрисы угла треугольника $\frac{|OQ_1|}{|Q_1C|}=\frac{|OB|}{|BC|}=\frac{3}{5}$. Кроме того, $|OQ_1|+|Q_1C|=8$. Поэтому $r_1=|OQ_1|=3$. Из подобия прямоугольных треугольников Q_1OB и Q_2OB следует, что $r_2=|OQ_2|=\frac{|OB|^2}{|OQ_1|}=12$.

4. $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi k\right),\ \left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+\pi m\right),\ (-\mathrm{arctg}\,3+\pi n;\ 2\,\mathrm{arctg}\,3+\pi m)\right\}$ $(k,\ m,\ n \in Z)$.

Указание. Числа $\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,x$, $2\cos(x+y)$, $4\sin 2x$, $16\sin(x-y)$ образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда эти числа отличны от нуля:

$\mathrm{ctg}\,x\neq 0$, $\cos(x+y)\neq 0$, $\sin 2x\neq 0$, $\sin(x-y)\neq 0$,

и выполнены равенства

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,x\cdot 4\sin 2x=(2\cos(x+y))^2,$$

$$2\cos(x+y)\cdot 16\sin(x-y)=(4\sin 2x)^2.$$

Решая полученную систему, получаем ответ.

5. $V=4$; плоскость P делит отрезок AC в отношении 3:13. Решение. Опустим из точки N перпендикуляр (NN_1) на плоскость $ABCD$. Поскольку $(BB_1C_1C)\perp(ABCD)$, а $N\in(BB_1C_1C)$, основание N_1 перпендикуляра (NN_1) лежит на прямой BC (рис. 5). При этом $(NN_1)\parallel(BB_1)$, $N_1\in[BC]$, $|BN_1|:|N_1C|=2:3$. Высота призмы равна длине отрезка NN_1. Следовательно, ее

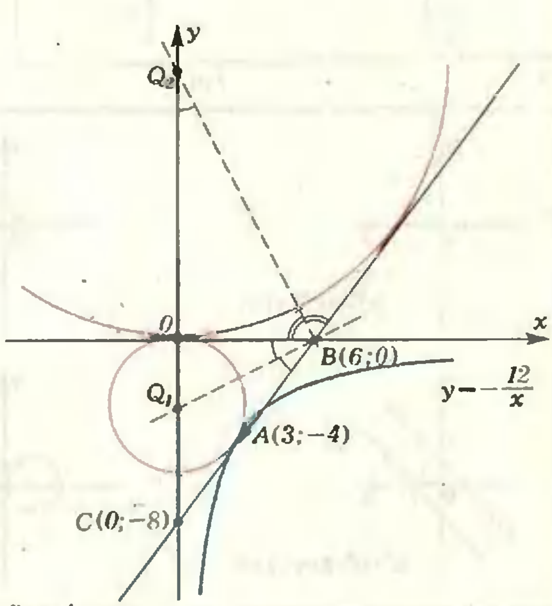


Рис. 4.

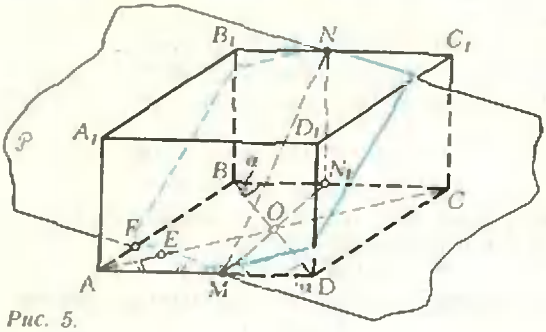


Рис. 5.

объем $V = S_{ABCD} \cdot |NN_1| = \frac{1}{2}\,|AC|\cdot|BD|\cdot\cdot|NN_1|$. Треугольник MNN_1 прямоугольный: $|NN_1|=\sqrt{|MN|^2-|MN_1|^2}$. Учитывая, что по условию $|AC|=4$, $|BD|=2$, $|MN|=\sqrt{5}$, получим

$$V=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot\sqrt{5-|MN_1|^2}=4\sqrt{5-|MN_1|^2}.$$

Остается найти длину отрезка MN_1.

Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Точка, симметричная точке M относительно O, лежит на отрезке BC, делит его в отношении 2:3, считая от точки B, и, значит, совпадает с точкой N_1. Таким образом, O — середина отрезка MN_1: $|MN_1|=2|ON_1|$. В ромбе $ABCD$ $|BO|=1$, $|OC|=2$, $(BO)\perp(OC)$. Следовательно, $|BC|=\sqrt{5}$, $|BN_1|=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=$ $=\frac{1}{\sqrt{5}}$, где $\alpha=\widehat{OBC}$. По теореме косинусов для треугольника OBN_1 имеем

$$|ON_1|^2=|BO|^2+|BN_1|^2-$$
$$-2|BO|\cdot|BN_1|\cos\alpha=1.$$

Отсюда $|ON_1|=|MO|=1$, $|MN_1|=2$, $V=4$.

Для ответа на второй вопрос задачи докажем лемму.

Лемма. Пусть $A\neq A_1$ и $M\neq N$ — точки пространства, расположенные на непараллельных прямых (AA_1) и (MN). Пусть из всех плоскостей, проходящих через прямую (MN), выбрана та плоскость P, проекция на которую отрезка AA_1 *имеет минимальную длину. Тогда плоскость* P перпендикулярна плоскости MNN_1, где N_1 — такая точка пространства, что $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{N_1N}$.

Доказательство. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из точки N_1 на (MN), а P_* — плоскость, проходящая через прямую (MN) и перпендикулярная прямой (N_1K) (плоскость P_* перпендикулярна плоскости MNN_1). Докажем, что P_* и есть P, что завершит доказательство утверждения.

Возьмем произвольную плоскость Q, проходящую через прямую (MN) и отличную от плоскости P_*. Обозначим через L основание перпендикуляра, опущенного из точки N_1 на плоскость P_* (рис. 6). Проверим, что длина $|LN|$ проекции отрезка N_1N на плоскость Q больше длины $|KN|$ проекции этого отрезка на плоскость P_* (поскольку проекции отрезков AA_1 и N_1N на любую плоскость одинаковы, это и будет означать, что $P_*=P$). По построению, $(N_1K)\perp(KN)$. Применяя теорему о трех перпендикулярах, получаем, что и $(LK)\perp(KN)$. Но это означает, что треугольник LKN прямоугольный, а отрезок LN — его гипотенуза. *Следовательно,* $|LN|>|KN|$. Что и требовалось доказать.

Вернемся к решению задачи. По построению $\overrightarrow{N_1N}=\overrightarrow{AA_1}$. Следовательно, в силу доказанного утверждения, плоскость P перпендикулярна (MNN_1). Поскольку и $(ABCD)\perp(MNN_1)$, линия пересечения (MF) плоскостей P и $(ABCD)$ перпендикулярна плоскости MNN_1. В частности, $(MF)\perp(MN_1)$. Обозначим через E точку пересечения прямых (MF) и AC (E — точка пересечения плоскости P с прямой (AC)). В треугольнике OMD $|MO|=1=|DO|$. Поэтому $\widehat{OMD}=\widehat{ODM}=\widehat{OBC}=\alpha$. Угол EMN_1 — прямой. Следовательно, $\widehat{EMA}=180^\circ-\widehat{OMD}-\widehat{EMN_1}=$ $=90^\circ-\alpha=\widehat{EAD}$. Таким образом, треугольник AEM — равнобедренный и

$$|AE|=|EM|=\frac{|AM|}{2\sin\alpha}=\frac{\frac{3}{\sqrt{5}}}{2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{3}{4}.$$

Поэтому точка E делит отрезок AC в отношении

$$|AE|:|EC|=\frac{3}{4}:\left(4-\frac{3}{4}\right)=3:13.$$

Вариант 2

1. $]-\infty;\,-3]\cup\left[\frac{1}{3};\,+\infty\right[$.
2. $x=\pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+(2n+1)\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$.
3. 24 м^3.
4. $\widehat{MAB}=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; $S_{ABKM}:S_{ABCD}=(2\sqrt{2}+1)/3$.
5. $V=\frac{R^3\sqrt{3}(1+2\cos\alpha)^2}{4(1-2\cos\alpha)\cos\alpha}$; а) 1:2; б) 3:1.

Вариант 3

1. $]-8;\,-2[\cup]\,0;\,2\,[$.
2. $x_1=\pi k$; $x_2=\arcsin\frac{1}{3}+\pi(2l+1)$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$.
3. $\left\{\left(5;\,\frac{1}{25}\right),\ \left((\log_3 6)^{\frac{2}{3}};\ (\log_6 3)^{\frac{1}{3}}\right)\right\}$.
4. $\widehat{BAC}=\arccos\frac{1}{9}$; $S=20\sqrt{5}$.
5. $V=\frac{3}{8}\sqrt{\frac{87}{2}}$; $a_{\min}=\frac{2}{3}(\sqrt{11}-\sqrt{2})$.

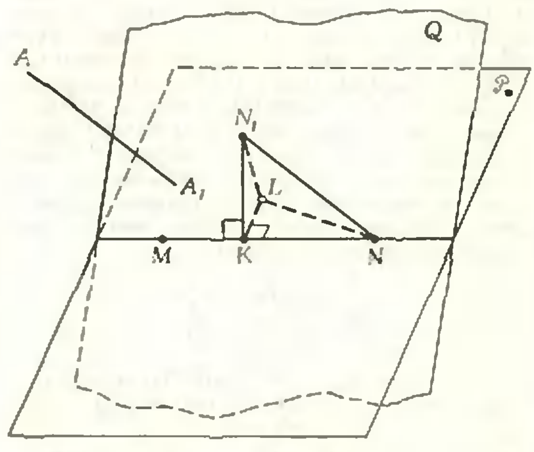


Рис. 6.

Физика

Вариант 1

1. Из того, что центр масс стержня находится в стыковочном сечении, а составляющие стержень цилиндры имеют одинаковые сечения (S), но изготовлены из различных материалов, следует, что длины цилиндров различны. Обозначим их через l_1 и l_2. Тогда массы цилиндров равны соответственно

$$m_1=\rho l_1 S \text{ и } m_2=2\rho l_2 S.$$

Запишем условие равенства моментов сил тяжести относительно центра масс системы:

$$m_1 g\frac{l_1}{2}=m_2 g\frac{l_2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$m_2/m_1=\sqrt{2}.$$

2. Из данной изотермы ясно, что сначала водяной пар, содержащийся в воздухе, ненасыщенный. В точке 2 он становится насыщенным и остается таким на всем участке 2—3. Таким образом, относительная влажность в точках 2 и 3 равна 100 %:

$$\varphi_2=\varphi_3=100\ \%.$$

Для точки 1 имеем

$$\varphi_1=\frac{p_{п1}}{p_{нп}}100\ \%=\frac{p_{п1}}{p_{п2}}100\ \%=\frac{V_2}{V_1}100\ \%=$$

$$=\frac{p_1}{p_2}100\ \%.$$

3. Если конденсатор вначале не был заряжен, после замыкания ключа по цепи проходит заряд $C\mathscr{E}$, источник тока совершает работу $C\mathscr{E}^2$, а конденсатор приобретает энергию $C\mathscr{E}^2/2$. Согласно закону сохранения энергии, количество теплоты, выделившееся на резисторе, равно разности работы источника и энергии конденсатора:

$$Q=C\mathscr{E}^2-C\mathscr{E}^2/2=C\mathscr{E}^2/2.$$

Теперь рассмотрим случай, когда вначале правая пластина конденсатора была заряжена. Обозначим этот заряд через q. В этом случае еще до замыкания ключа в конденсаторе есть электрическое поле с напряженностью $E=q/(2\varepsilon_0 S)$, и это поле обладает запасом электрической энергии $W=\varepsilon_0 E^2 Sd/2=q^2/(8C)$ (здесь S — площадь пластин конденсатора, d — расстояние между пластинами, $C=\varepsilon_0 S/d$ — емкость конденсатора). Что произойдет после замыкания ключа, когда разность потенциалов между пластинами станет равной $\mathscr{E}$? Отметим два важных обстоятельства. Во-первых, имеющийся заряд q не изменится: включение батареи приводит только к его перераспределению. Следовательно, можно использовать закон сохранения заряда. Во-вторых, даже при замкнутом ключе две пластины не представляют собой конденсатор в обычном смысле этого слова, так как полный заряд не равен нулю и электрическое поле имеется не только между пластинами, но и снаружи. Однако в данном случае энергия электрического поля вне пластин, в силу неизменности общего заряда, остается одной и той же. Меняется только энергия поля в пространстве между пластинами:

$$\Delta W=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}-\frac{q^2}{8C}.$$

Пусть на левой пластине теперь будет заряд q_1, а на правой q_2. Из закона сохранения заряда

$$q_1+q_2=q. \qquad (1)$$

Заряд q_1 создает поле с напряженностью $E_1=q_1/(2\varepsilon_0 S)$, а заряд q_2 — поле с напряженностью $E_2=q_2/(2\varepsilon_0 S)$. Результирующая напряженность равна $E_2-E_1=(q_2-q_1)/(2\varepsilon_0 S)$. С другой стороны, $(E_2-E_1)d=\mathscr{E}$. Поэтому

$$q_2-q_1=2\mathscr{E}\varepsilon_0 S/d=2C\mathscr{E}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем

$$q_1=\frac{q}{2}-C\mathscr{E},\quad q_2=\frac{q}{2}+C\mathscr{E},$$

$$\Delta q=q_2-q=C\mathscr{E}-q/2.$$

Этот заряд Δq и протек через источник, поэтому работа источника равна

$$A=\Delta q\mathscr{E}=(C\mathscr{E}-q/2)\mathscr{E}.$$

В соответствии с законом сохранения энергии,

$$A=\Delta W+Q,$$

или

$$\left(C\mathscr{E}-\frac{q}{2}\right)\mathscr{E}=\left(\frac{C\mathscr{E}^2}{2}-\frac{q^2}{8C}\right)+\frac{C\mathscr{E}^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$q=4C\mathscr{E}.$$

4. Из условия задачи видно, что линза — рассеивающая. Тогда из формулы линзы (записанной для данного случая)

$$\frac{1}{F}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$$

найдем

$$f=F/2.$$

Увеличение предмета

$$\Gamma=\frac{H}{h}=\frac{f}{d},$$

откуда размер предмета

$$h=H\frac{d}{f}=2H=2\cdot 0{,}7\text{ см}=1{,}4\text{ см}.$$

Вариант 2

1. $\alpha=\arccos\sqrt{0{,}25}=60°$.

2. $\Delta l_1=L/4$ (левый поршень расположится посередине сосуда), $\Delta l_2=0$ (при достаточно большой скорости диффузии правый поршень практически не сдвинется с места).

3. $T\approx 22{,}4$ ч.

4. $d<F_1\dfrac{2F_2+L}{F_2+L-F_1}=16$ см.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $x_1=k\pi,\ x_2=\dfrac{5\pi}{6}+2l\pi\quad (k, l\in \mathbf{Z})$. Указание. Уравнение равносильно системе

$$2\sin x=3\,\mathrm{tg}^2 x,\ \mathrm{tg}\, x\leqslant 0.$$

2. $V=\dfrac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2},\ S=\dfrac{a^2}{4b}\sqrt{3b^2-a^2}$. Указание. При вычислении площади сечения S воспользуйтесь равенством $V=\dfrac{1}{3}bS$.

3. Неравенство $x\geqslant y$ означает, что $x-y\geqslant 0$. Утверждение задачи следует из очевидного равенства $a-c=(a-b)+(b-c)$.

4. $0{,}37<\mathrm{tg}\,33°<1<\dfrac{65}{63}<\dfrac{61}{59}<\mathrm{tg}(-314°)$.

Указание. $\mathrm{tg}(-314°)=\mathrm{tg}\,46°=\dfrac{1+\mathrm{tg}\,1°}{1-\mathrm{tg}\,1°}$, но $\mathrm{tg}\,1°=\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{180}>\dfrac{\pi}{180}>\dfrac{1}{60}$. Поэтому $\dfrac{1+\mathrm{tg}\,1°}{1-\mathrm{tg}\,1°}=$

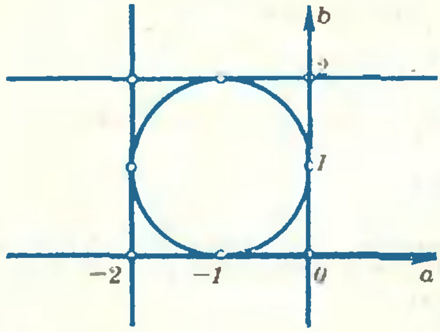


Рис. 7.

$$=\frac{2}{1-\operatorname{tg}1^\circ}-1>\frac{2}{1-\frac{1}{60}}-1=\frac{61}{59}.$$

5. Верно. Решение. Требуемое равенство легко проверяется. Докажем обратное утверждение. Пусть некоторая функция при любом x удовлетворяет условию $2f(x+2)+f(-x-1)=x^2+4x+4$. Подставляя в это равенство вместо x выражение $-x-3$, получим $2f(-x-1)+f(x+2)=(x+3)^2-4(x+3)+4$. Вычитая из первого равенства, *умноженного на 2, второе, получим* $2f(x+2)=x^2+6x+7$. Заменив здесь x на $x-2$, получим

$$f(x)=\frac{1}{3}\left((x-2)^2+6(x-2)+7\right)=\frac{x^2+2x-1}{3}.$$

Вариант 2

1. $x_1=\frac{2k\pi}{3}$, $x_2=\pi(2l+1)$ $(k,\ l\in Z)$. Указание. При $\sin x+\sin 2x>0$ уравнение принимает вид $2x-5=1$, откуда $x=3$, но $\sin 3+\sin 6<0$. При $\sin x+\sin 2x<0$ получим $x=2$, но $\sin 2+\sin 4>0$. Остается случай $\sin x+\sin 2x=0$.

2. $\frac{3a^2\sqrt3}{4}$. Указание. Отрезки, соединяющие середины перечисленных ребер с центром куба, перпендикулярны диагонали BD_1 и потому лежат в одной плоскости. Кроме того, длины этих отрезков равны. Отсюда легко следует, что шестиугольник правильный с длиной стороны $\frac{a\sqrt2}{2}$.

3. а) $x=-\frac{1}{2}$; б) см. рисунок 7.

Указание. Уравнение равносильно системе $(a+2)x^2+(2-2b)x-a=0^*$, $x\neq0$, $x\neq1$, $x\neq-1$. Квадратное уравнение $(a\neq-2)$ имеет единственный корень при $\frac{D}{4}=(1-b)^2+a^2+2a=0$, или, иначе, при $(b-1)^2+(a+1)^2=1$. При $a=-2$ приходим к уравнению $(2-2b)x=-2$, которое имеет единственный корень при $b\neq1$. Уравнение (*) *имеет корень $x_1=0$ при $a=0$. При этом* $x_2=b-1$. Поэтому у исходного уравнения будет в этом случае единственный корень, если $b\neq2$, $b\neq1$, $b\neq0$. Аналогично рассматриваются случаи $x_1=1$, $x_1=-1$.

4. $0{,}02<0{,}85<-\cos(-571^\circ)<\frac{\sqrt3}{2}<\sqrt{0{,}762}<1$.

Решение. Все неравенства, кроме $-\cos(-571^\circ)=\cos 31^\circ>0{,}85$, проверяются без *труда. Докажем, что $\cos 31^\circ>0{,}85$.*

$\cos 31^\circ=\cos(30^\circ+1^\circ)=$

$=\cos 30^\circ\cdot\cos 1^\circ-\sin 30^\circ\cdot\sin 1^\circ=$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt3\cos 1^\circ-\sin 1^\circ)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt3\cos\frac{\pi}{180}-\sin\frac{\pi}{180}\right)>$$

$$>\frac{1}{2}\left(\sqrt3\left(1-\frac{\pi^2}{2\cdot180^2}\right)-\frac{\pi}{180}\right)>$$

$$>\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{180^2}-\frac{\pi}{360}>$$

$$>\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\pi^2}{2\cdot80^2}-\frac{\pi}{360}>$$

$$>0{,}86-\frac{\pi}{360}\left(1+\frac{\pi}{180}\right)>0{,}86-0{,}01>0{,}85$$

(мы воспользовались неравенством $\sin x<x$ при $x>0$ и вытекающим из него неравенством $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ при $x>0$, а также тем, что $\pi<3{,}2$).

5. $\max\limits_{2\leqslant x\leqslant4} f(x)=1$. Обратное утверждение (если $\max\limits_{2\leqslant x\leqslant4}|2x^2+ax+b|=1$, то $a=-12$ и $b=17$) справедливо.

Указание. Функция $f(x)=|2x^2-12x+17|$ принимает наибольшее значение в одной из точек $x=2$, $x=3$ или $x=4$.

Для доказательства обратного утверждения следует заметить, что при выполнении условий задачи справедливы неравенства $f(2)\leqslant1$, $f(3)\leqslant1$ и $f(4)\leqslant1$ или

$|8+2a+b|\leqslant1$, $|18+3a+b|\leqslant1$ и $|32+4a+b|\leqslant1$.

Из первых двух неравенств с использованием *неравенства* $|u-v|\leqslant|u|+|v|$, *получаем* $|a+10|\leqslant2$, а из второго и третьего — $|a+14|\leqslant2$, откуда $a=-12$.

Физика

1. $\alpha=\operatorname{arctg}(1/6\sqrt3)\approx6^\circ$.

2. $F=mg(1-v^2/(2gl))\approx0{,}44$ Н.

3. $\Delta t=\alpha\mu gl/c\approx1{,}4\cdot10^{-3}$ К.

4. $n=1+c(t_n-t)/r=1{,}15$.

5. $p'=3/2p\approx10^5$ Па.

6. $Q=-\frac{(4h^2+d^2)^{3/2}q}{4d^3}\approx-3{,}8\cdot10^{-6}$ Кл.

7. $U_{max}=U(1+C_1/C_2)=350$ В.

8. $R_д=U_0/I_0-R_0=599$ Ом; $P_д=I_0^2R_д=0{,}599$ Вт; $P_0=I_0^2R_0=1$ мВт.

9. См. рисунок 8.

10. $d=d_0/(1-d_0D)=14{,}3$ см (здесь $d_0=25$ см — *расстояние наилучшего зрения для нормального* глаза).

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. 453.

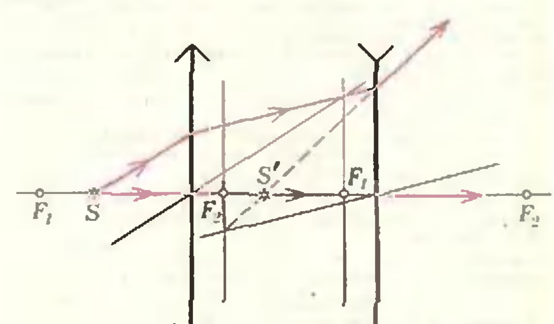


Рис. 8.

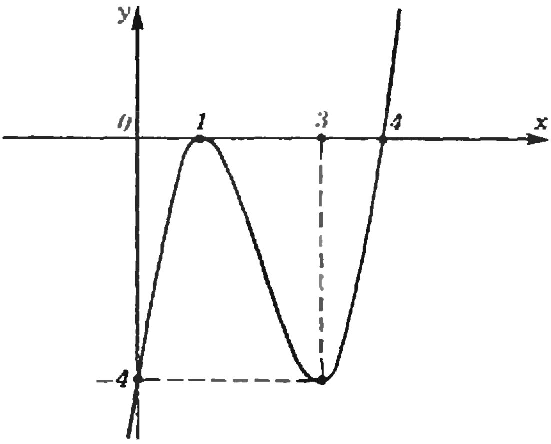


Рис. 9.

2. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2}$ $(n \in \mathbf{Z})$.

3. $\frac{a^2\sqrt{6}}{9}$.

4. $\{3\}$.

5. $4\frac{41}{45}$.

Вариант 2

1. $\sqrt[3]{v}$; $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. $]\,12;\ +\infty\,[$.

3. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ см^3.

4. $x=\frac{\pi}{10}(2l+1)$ $(l \in \mathbf{Z})$.

Вариант 3

1. 15 дней; 10 дней.

2. $x_1=\frac{k\pi}{2}$; $x_2=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2l\pi}{3}$ $(k,\ l \in \mathbf{Z})$.

3. $\frac{15}{32}\pi$ м^3.

4. $\{1\}$.

5. Возрастает при $x \in\ ]-\infty;\ -3\,[$ и при $x \in\ ]\,3;\ +\infty\,[$. Убывает при $x \in\ ]-3,\ 3\,[$.

Вариант 4

1. 5 %.

2. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4}$.

4. См. рисунок 9.

Физика

1. $a=F/(m_1+m_2)=2$ м/с^2; $T=m_1a=0{,}8$ Н.
2. $T=3mg\sin\alpha=1{,}5$ Н; $T_{max}=3mg=3$ Н.
3. $\varrho_ж=\varrho_в\frac{P-P_ж}{P-P_в}=800$ кг/м^3 (здесь $\varrho_в=1000$ кг/м^3 — плотность воды).
4. $\alpha=1-\frac{v^2}{v_0^2}-\frac{m}{M}\frac{(v_0-v)^2}{v_0^2}\approx 0{,}64$.
5. $\lambda=c(T_1-T_2)\tau_2/\tau_1=3{,}36\cdot 10^5$ Дж/кг.
6. $\alpha=1-T_1/T_2\approx 0{,}02$.
7. $\mathscr{E}=\frac{P_1I_2^2-P_2I_1^2}{I_1I_2(I_2-I_1)}=2$ В; $r=\frac{\mathscr{E}I_1-P_1}{I_1^2}=0{,}25$ Ом.
8. $\tau_3=\tau_1\tau_2/(\tau_1+\tau_2)\approx 5{,}7$ мин; $\tau_4=\tau_1+\tau_2=28$ мин.
9. $r=H/\sqrt{n^2-1}\approx 2{,}3$ м.
10. $d=F(1+1/\Gamma)=25$ см.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, В. К. Егоров, В. С. Коваль, А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов, В. И. Савела, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Е. С. Шабельник

Фото представили:
Ю. Белозеров (фотохроника ТАСС), Л. Д. Шварц

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. В. Румянцева

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

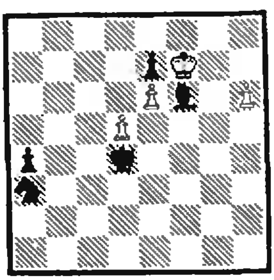
Сдано в набор 21.11.84.
Подписано к печати 27.12.84
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр.-отт. 23,80.
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,46. Т-23648
Цена 40 коп. Заказ 3109. Тираж 175628 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

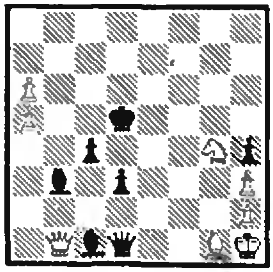
ФАНТАСТИКА НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Мы уже познакомились с творчеством всех четырех советских гроссмейстеров по шахматной композиции. В нашей стране есть также несколько международных мастеров по композиции. Старейший из них — Александр Казанцев. Возможно, кто-то из читателей знает его совсем по другой линии, ведь он известный писатель-фантаст, автор популярного романа «Пылающий остров». Фантастические сюжеты использует писатель и в своем этюдном творчестве.



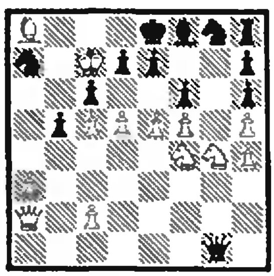
А. Казанцев, 1947—1948 гг.
Ничья.

1. d6 Кb5. В случае 1... Кс4 к ничьей ведет 2. de Крe5 3. e8К! Сh8 4. h7 a3 5. Крg8 Кр:e6 6. Кр:h8 Крf7 7. Кd6+ Крf8 8. К:c4 a2 9. Кe5! a1Л 10. Кd7+. **2. de Крe5 3. e8К! Сh8 4. h7 a3 5. Крg8 Кр:e6! 6. Кр:h8 Крf7 7. Кd6+ Крf8 8. К:b5 a2 9. Кd4! a1Л! 10. Кe6+ Крf7 11. Кd8+ Крg6 12. Крg8 Лa8 13. h8К+!** Третье чудесное превращение. **13... Крf6 14. Кf7,** и белые спасаются. В процессе решения на доске произошло невероятное событие — почти полностью сменился состав фигур!



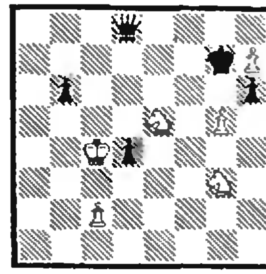
А. Казанцев, 1954 г.
Ничья.

1. Крg2 Фd2+ 2. Сf2 Крc6 3. a7 Крb7 4. a6+ Крa8 5. Фa1 Сb2 6. Фh1! Фd1 7. Сg1 Фe2+ 8. Кf2! Удивительное, почти фантастическое положение. За восемь ходов не разменено ни одной пешки, а все белые фигуры оказались запатованными. У черных выбор между матом собственному королю (если ферзь покинет вторую горизонталь) и патом неприятельскому. Второй вариант предпочтительнее, и потому — ничья. Автор этюда признался, что это одно из любимых его произведений, в нем впервые так ярко удалось воплотить невероятное.



А. Казанцев, 1979 г.
Выигрыш.

1. Кe6! Ф:g4 (Матом заканчивается дело после 1... de 2. d6 ed 3. Ф:e6+ Сe7 4. cd Крf8 5. de+ К:e7 6. Ф:f6+ Крg8 7. К:h6×) **2. С:c6! dc 3. d6 Фd1 4. Кg7+ С:g7 5. Фf7+! Кр:f7.** Белый король сражается один против целого черного воинства: короля, ферзя, ладьи, слона и двух коней! К счастью, пешки оказываются верными слугами своего предводителя. **6. e6+ Крf8 7. d7 b4 8. a4 b3! 9. cb Кb5+ 10. ab cb 11. d8Ф+ Ф:d8 12. Кр:d8 b4! 13. Крc7!** Черный король распатован и получает мат от белой пешки. Композитор очень гордится этим фантастическим замыслом,— ведь ему удалось решить самую невероятную задачу, какую может поставить перед собой этюдист: показать, что король, один гордый король, опираясь лишь на свои пешки, в состоянии одолеть вооруженную до зубов неприятельскую рать!

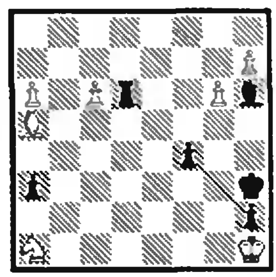


А. Казанцев, 1935 г.
Выигрыш.

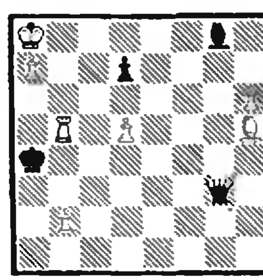
1. Кf5+ (не годится 1. Кh5+? из-за 1... Кр:h7 2. g6+ Крg8) **1... Кр:h7 2. g6+ Крg8 3. Кc6 Фc7 4. Крb5 Фd7** (ввиду угрозы Кce7+ ферзь должен все время связывать коня c6) **4... Фd7 5. Кр:b6 Фe6 6. Крc7 Фc4 7. Крd6 Фa6 8. Крc5 Фa3+ 9. Крd5 Фa2+ 10. Крe5 Ф:c2 11. Кce7+ Крf8 12. g7+,** и белые выигрывают.

Конкурсные задания

Сегодня мы начинаем очередной шахматный конкурс. Его победители будут награждены шахматной литературой с автографом А. Карпова и дипломом журнала «Квант». Решившим 20 заданий из 24 будет присвоен II разряд, 15 заданий — III разряд.



1. Ничья.



2. Выигрыш.

Срок отправки решений — 25 марта 1985 г. по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант» с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 1, 2».

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Многие наши читатели увлекаются моделированием и поиском новых форм звездчатых многогранников. Показанный на этом рисунке многогранник придумал наш читатель А. П. Трофименко, рабочий из г. Геленджик. Этот многогранник — объединение четырех октаэдров (их видимые части показаны разными цветами), которые расположены в некотором смысле «максимально симметрично». При таком расположении у полученной фигуры много элементов симметрии. В частности, оси симметрии четвертого и третьего порядка, то есть такие прямые, что многогранник совмещается сам с собой при повороте вокруг этих прямых на углы, кратные 90° и 120°. Найдите эти оси. Попробуйте перечислить все элементы симметрии этого звездчатого многогранника.