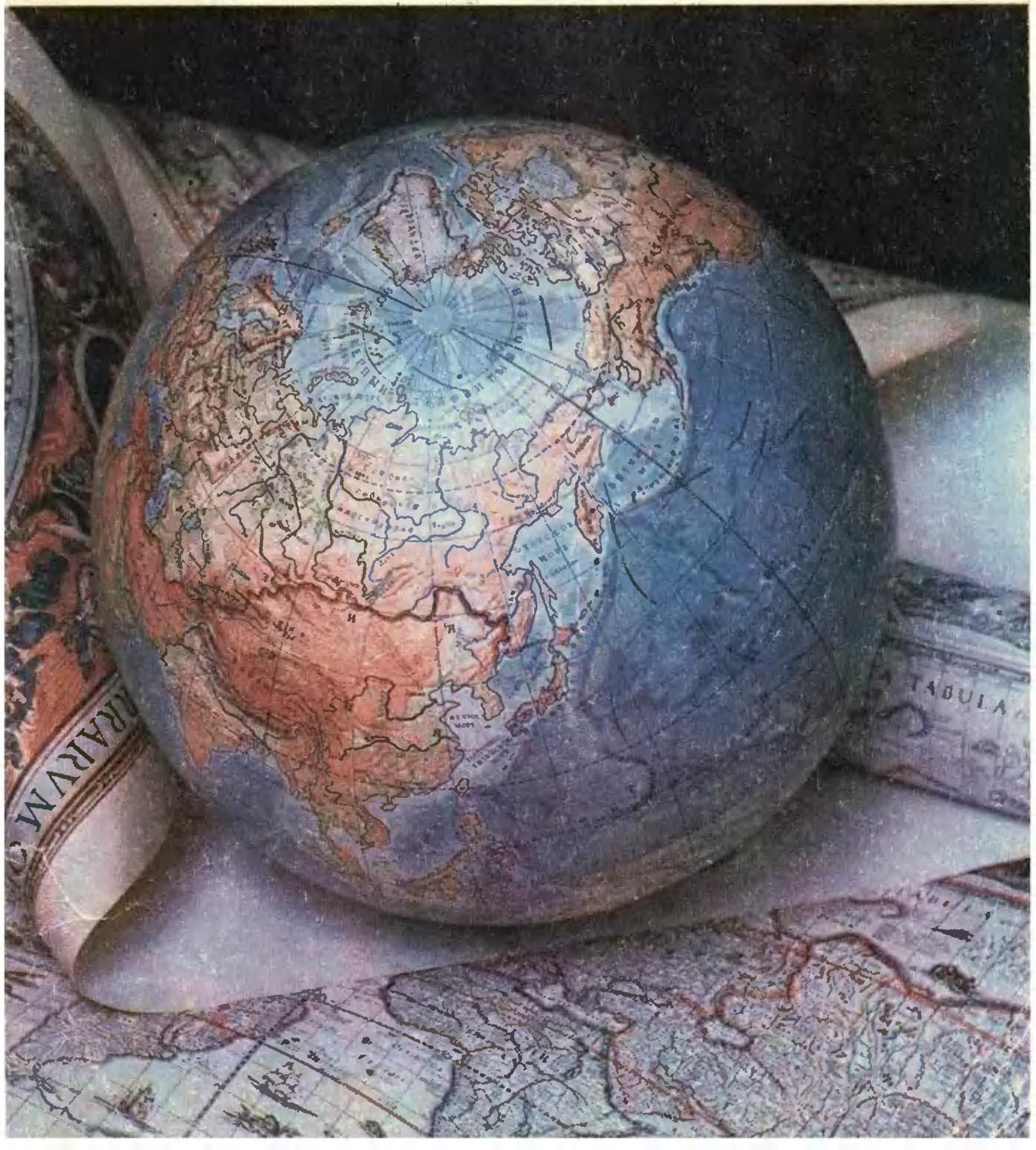


Квант

2
1985

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*



1	6	15	1000
2	7	50	10000
3	8	100	10^5
4	9	150	10^6
5	10	500	10^7

1	8	1	6
2	9	2	7
3	10	3	8
4	15	4	9
5	20	5	10
6	20	15	15
7			

P	20
P◇	30
PP	40
PP◇	50
PPP	60
PPP◇	70
PPPP	80
PPPP◇	90
100	1000
8000	

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ		
1	2	3	4	5	6	7		
η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο
8	9	10	20	30	40	50	60	70
π	φ	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	
80	90	100	200	300	400	500	600	
ψ	ω	α	β	γ	δ			
700	800	900	1000	2000	3000	4000		
M	M							
10000	20000							

I	1	VI	6
II	2	VII	7
III	3	VIII	8
IV	4	IX	9
V	5	X	10
L	50	C	100
D	500	M	1000

Здесь показаны системы записи чисел, придуманные людьми в разные эпохи. Слева сверху — числовые иероглифы древнего Египта; правее — клинописные записи чисел древнего Вавилона (2500—2000 г. до н. э.). Во втором ряду слева — числа в записи древних племен индейцев Майя (на нынешней территории Пе-

ру); правее — записи чисел ацтекских племен (XI—XVII века). В нижнем ряду слева — древнегреческая алфавитная запись чисел и рядом — знакомая вам древнеримская система счисления. Мы предлагаем читателями записать число 1985 в каждой из этих систем счисления.



Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы



В НОМЕРЕ:

IN THIS ISSUE:

2	Памяти И. К. Кикоина	In memory of I. K. Kikoin
3	А. В. Бушмелев, С. А. Лавренченко. Многогранники-торы	A. V. Bushmelev, S. A. Lavrenchenko. Polyhedral tori
6	Л. С. Понтрягин. Обобщение чисел	L. S. Pontryagin. Generalization of numbers
13	А. А. Варламов, А. И. Маляровский. Переговорная трубка длиной в экватор?	A. A. Varlamov, A. I. Malyarovski. An equator-long speaking tube?
<hr/>		
	Новости науки	Science news
12	В. А. Бронштэн. Миллисекундные пульсары	V. A. Bronshten. Millisecond pulsars
<hr/>		
	Лаборатория «Кванта»	Kvant's lab
19	А. А. Боровой. Пузырьки в жидкости	A. A. Borovoy. Bubbles in liquids
<hr/>		
	Школа в «Кванте»	Kvant's school
23	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
29	Математика 8, 9	Mathematics 8, 9
36	Избранные школьные задачи	Selected school problems
<hr/>		
	«Квант» для младших школьников	Kvant for younger school children
31	Задачи	Problems
32	Л. Карролл. Бег по кругу и длинный рассказ	L. Carroll. A caucus-race and a long tale
<hr/>		
	Задачник «Кванта»	Kvant's problems
37	Задачи М906—М910; Ф918—Ф922	Problems M906—M910; P918—P922
40	Решения задач М886—М890; Ф898—Ф902	Solutions M886—M890; P898—P902
<hr/>		
	Практикум абитуриента	College applicant's section
48	А. И. Буздин, С. С. Кротов. Повторим гидростатику	A. I. Buzdin, S. S. Krotov. Reviewing hydrostatics
<hr/>		
	Информация (18)	Information (18)
54	Варианты вступительных экзаменов	College entrance examination problems
<hr/>		
	Наша обложка (58)	Our cover page (58)
59	Ответы, указания, решения	Answers, hints, solutions
	Шахматная страничка	The chess page
	Парадоксы пешечного эндшпиля (3-я с. обложки)	Paradoxes of pawn endgames (3rd cover page)



28 декабря 1984 г. на 77 году жизни скончался выдающийся советский ученый-физик, дважды Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственных премий СССР, академик Исаак Кушелевич Кикоин.

Огромное внимание уделял И. К. Кикоин воспитанию молодого поколения. По его инициативе был создан журнал «Квант», главным редактором которого он был в течение 15 лет. Он возглавлял оргкомитет Всесоюзных школьных олимпиад, был автором ряда школьных учебников.

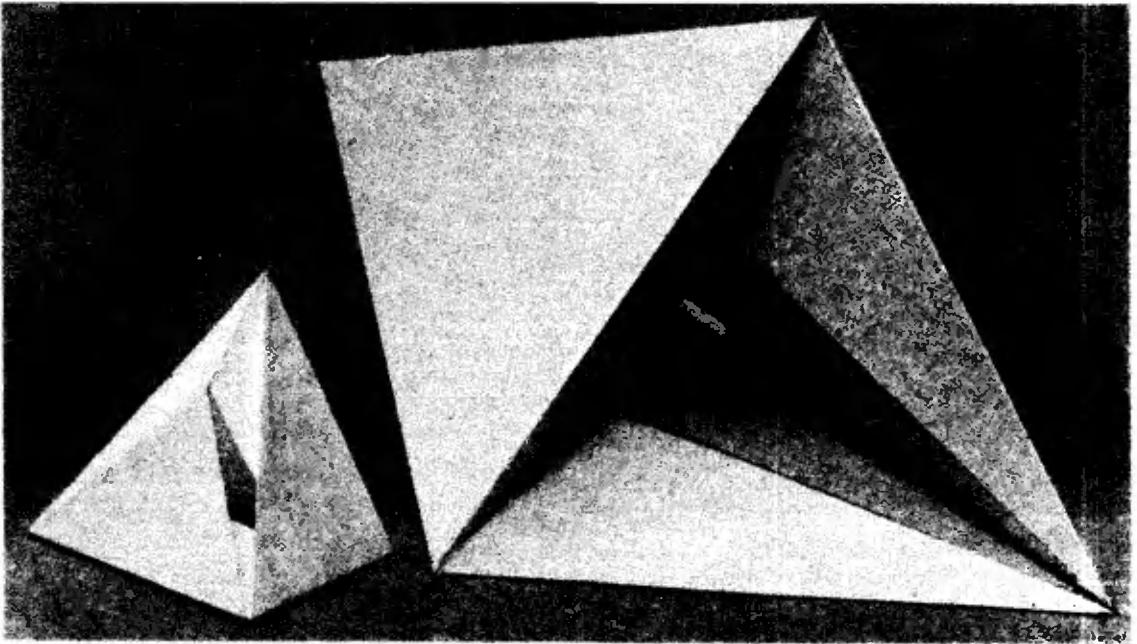
И. К. Кикоин часто встречался со школьниками. Последний раз он выступил перед ними во время вручения Школе естественных наук при Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова премии Ленинского комсомола. Его выступление — своеобразное завещание молодежи.

«Я хочу рассказать вам, о чем я думал, принимая эту награду, — обратился к собравшимся И. К. Кикоин. — Я думал о том, что вот я — академик, руководитель большого коллектива, у меня много наград, но без всяких сомнений все это — положение, степени, звания — обменял бы я на вашу молодость, на ваши 15, пусть 17, лет.

А поменяться мне надо потому, что за долгую жизнь я не успел насладиться любимой своей физикой, не хватило мне времени, ясно вижу теперь — не хватило. А ведь не было ни одного дня в жизни, ни выходного, ни праздника, ни отпуска, когда бы я ею не занимался. Часто и сны вижу о физике. И все равно времени не хватило. Вы сами узнаете, как это бывает, когда проживете жизнь.

Поэтому сейчас не упускайте времени. Все равно его не хватит, но хоть будет не так обидно. Знаете, ученый — это не название должности и не место работы. Вот он вошел в лабораторию — и стал думать о науке, и стал ученым. Это не так. Ученый — это постоянное и часто мучительное, иногда прекрасное состояние. Вот примерно об этом я думал, когда мне передавали эту награду».

Пусть это напутствие И. К. Кикоина навсегда останется с вами, как и светлая память о выдающемся ученом.



Многогранники-торы

А. В. БУШМЕЛЕВ, С. А. ЛАВРЕНЧЕНКО

В этой заметке рассказывается о том, как найти многогранник с наименьшим числом вершин, имеющий форму тора (бублика). Картонные модели таких «рекордных» многогранников-торов (с 7 и 8 вершинами) показаны на фотографии выше. В заметке рассказывается не только о теории вопроса, но даются рецепты изготовления подобных моделей.

Многогранником называют поверхность, ограничивающую некоторый объем и состоящую из конечного числа плоских многоугольников — *граней* многогранника. Стороны граней называются *ребрами*. К каждому ребру примыкают ровно 2 грани. От всякой грани можно перейти к другой, переходя через ребра. Грани могут пересекаться либо в одной вершине, либо по одному целому ребру.

Предположим, что наши многогранники — резиновые, а потому, после «раздувания» их как воздушных шариков, одни из них будут походить на сферу, другие — на тор, третьи — на крендель и т. д. (рис. 1). В дальнейшем под многогранниками будут подразумеваться исключительно многогранники с треугольными гранями.

Треугольные сети на поверхностях

При «раздувании» данного многогранника ребра и грани искривляются, и на «раздутом» многограннике образуется сеть из криволинейных треугольников. Таким образом, каждому многограннику соответствует *треугольная сеть* на сфере (если многогранник типа сферы) или на торе (если многогранник типа тора).

Такую треугольную сеть можно начертить непосредственно на поверхности сферы или тора. Для этого нужно отметить на поверхности определенное число точек (*узлы*), соединить их непересекающимися линиями без самопересечений (*дуги*) так, чтобы поверхность оказалась разбитой на части (*области*), каждая из которых ограничена тремя дугами и тремя узлами, а пересечение двух областей либо пусто, либо состоит из одного узла, либо состоит из одного ребра.

Реализация сетей многогранниками

Теперь естественно поставить такой вопрос: всякая ли треугольная сеть, начерченная указанным выше образом на поверхности сферы или тора, получается из вершин, ребер и граней некоторого многогранника его «раздуванием»? Другими словами, *можно ли всякую треугольную сеть на сфере или на торе реализовать в виде настоящего многогранника* так, чтобы узлы

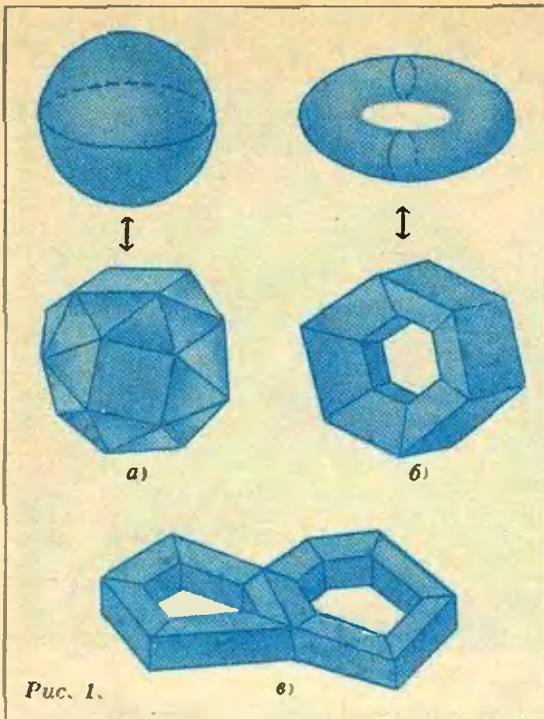


Рис. 1.

и вершины, дуги и ребра, области и грани взаимно-однозначно соответствовали бы друг другу с сохранением примыкания (то есть так, чтобы узлы, соединенные дугой, отвечали бы вершинам, соединенным соответствующим ребром, и дуги, ограничивающие область, отвечали бы ребрам, ограничивающим соответствующую грань)?

Для сферы положительный ответ был установлен еще давно немецким математиком Штейницем, который доказал к тому же, что многогранник, реализующий сеть, всегда можно выбрать выпуклым. В настоящее время доказано и обобщение теоремы Штейница на случай тора: *всякая треугольная сеть на торе реализуется многогранником.*

Примеры треугольных сетей на торе

Для того чтобы привести такие примеры, можно взять резиновую камеру в форме тора, отметить на ней узлы и нарисовать дуги сети. Однако, то, что при этом получится, затруднительно будет изобразить на листе бумаги, поэтому будем пользоваться следующей *разверткой* тора на плоскости. Проведем на нашей камере две замкнутые линии — C_1 и C_2 (рис. 2а)). Затем разрежем камеру вдоль линии C_1 (рис. 2б)), после чего камеру можно деформировать в цилиндр

(рис. 2в)). Разрезаем этот цилиндр по линии C_2 , и то, что получилось (рис. 2г)), растягиваем на плоскости в виде квадрата (рис. 2д)). Итак, тор можно изображать на плоскости в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами.

Без доказательства сообщаем, что список треугольных сетей на торе с 7 и 8 узлами исчерпывается рисунком 3.

Задача. Докажите, что многогранников типа тора с числом вершин меньше 7 не существует.

Указание. Воспользуйтесь формулой Эйлера $\Gamma - P + B = 0$ и соотношением $3\Gamma = 2P$ (вытекающим из того, что для треугольных сетей к каждому ребру примыкают ровно 2 грани, а каждая грань ограничена 3 ребрами), где Γ , B , P число граней, вершин и ребер, соответственно.

Методика реализации сетей с малым числом узлов

Начнем с реализации сети б) (рис. 3) (модель изображена на с. 3 справа). Шесть вершин располагаются в некоторой плоскости $\alpha = (v_2 v_5 v_7)$ (рис. 4). В этой же плоскости α лежат 4 грани — $v_7 v_2 v_3$, $v_7 v_3 v_8$, $v_8 v_4 v_5$, $v_2 v_4 v_5$. Расположим вершину v_1 где-нибудь над α , а v_6 — где-нибудь под ней. Для каждой грани, исходящей из v_1 (из v_6), ребро, противоположное вершине v_1 (вершине v_6), лежит в плоскости α ; все такие ребра помечены синим (красным) цветом на рисунке 4.

Переходим к реализации остальных сетей. Нам потребуется преобразование *перестройки* многогранников (рис. 5), которое можно применить к паре граней, дающих в объединении плоский выпуклый четырехугольник. В изложенном выше построении расположим v_1 над ребром $v_7 v_5$, а v_6 — под ним. Перестройка, примененная к граням $v_1 v_7 v_5$ и $v_6 v_7 v_5$, приводит

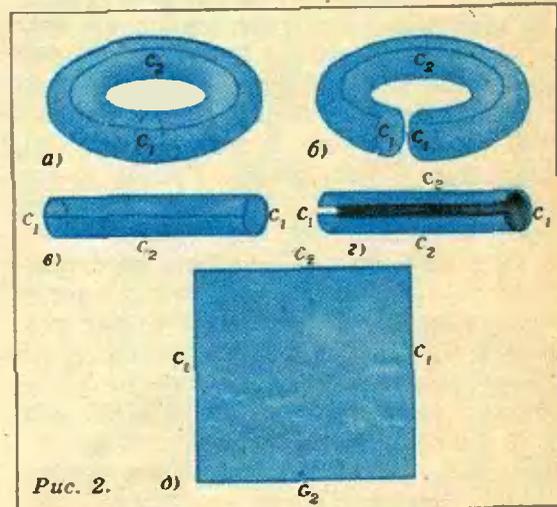


Рис. 2.

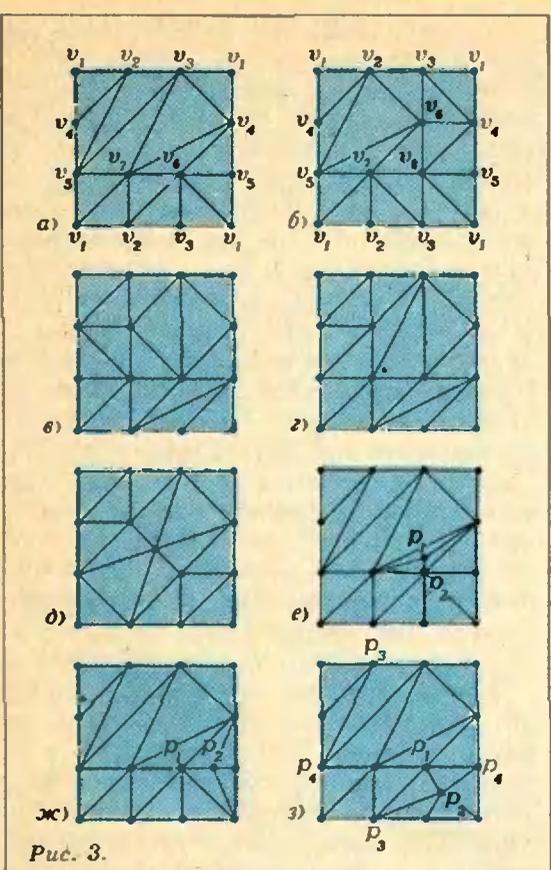


Рис. 3.

к реализации сети в). Если в получившемся при этом многограннике применить перестройку к $v_6v_4v_5$ и $v_2v_4v_5$, то получим реализацию сети д). После этого достаточно мало сместить вершину v_6 по плоскости $(v_1v_3v_5)$ в направлении от v_1 , применить перестройку к $v_1v_3v_5$, $v_1v_6v_5$ и получить реализацию сети г).

Для реализации оставшихся сетей с рисунка 3 введем еще преобразование *раскалывания* по ребрам v_0v_1 и v_0v_2 (рис. 6), при котором возникает новая вершина v'_0 , расположенная достаточно близко к v_0 . Сети е), ж) и з) реализуются раскалыванием многогранника, реализующего сеть а) (его модель изображена на

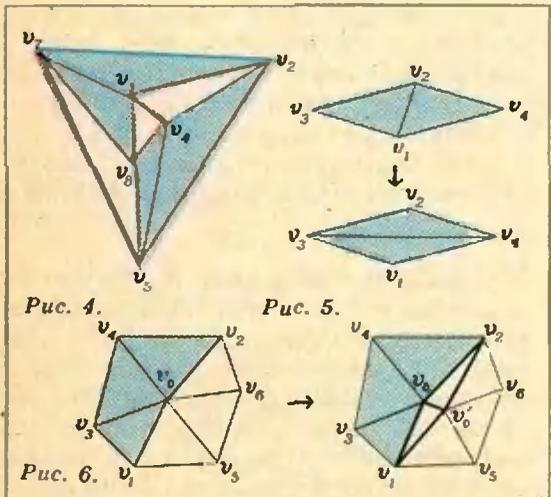


Рис. 4.

Рис. 5.

Рис. 6.

с. 3 слева), соответственно, по ребрам (указываются по рисунку 3а)) v_6v_7 и v_6v_4 , v_6v_1 и v_6v_4 , v_6v_5 и v_6v_2 .

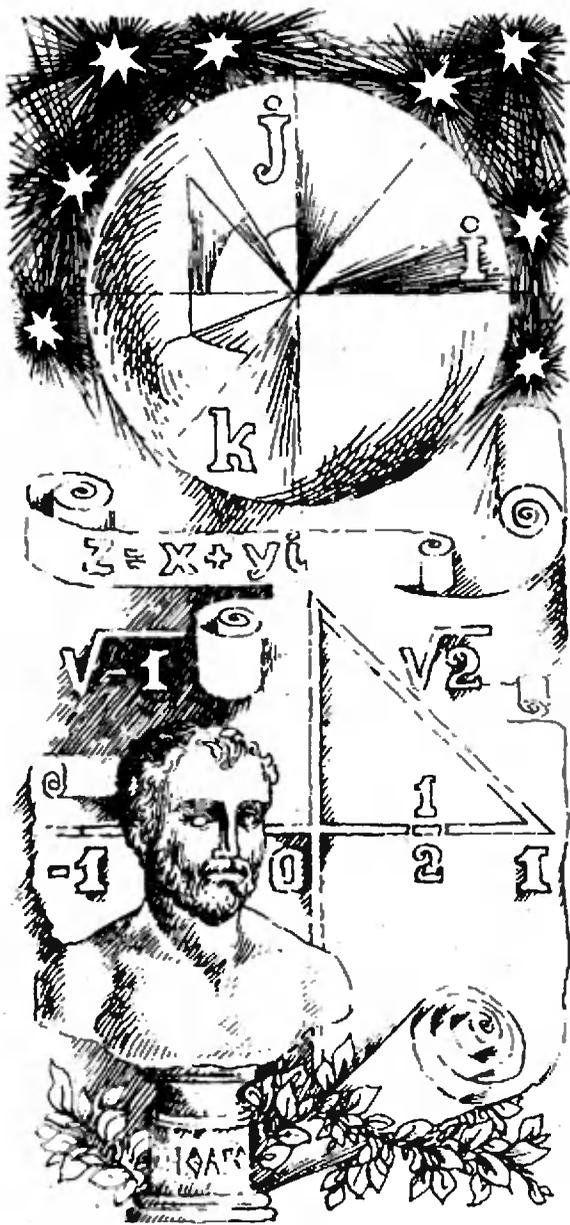
О доказательстве обобщения теоремы Штейница для тора

У нас нет возможности изложить здесь доказательство детально. Основная идея состоит в том, что сети сперва упрощаются последовательным применением преобразования *стягивания*, которое определяется как обратное к *раскалыванию*. Например, стягивание сетей е), ж), з) (рис. 3) по дуге p_1, p_2 приводит к сети а). Затем остающиеся простейшие сети (их оказалось конечное число: 1 с 7 узлами, 4 с 8 узлами — это сети а), б), в), г) и д); 16 с 9 узлами и, наконец, 1 с 10 узлами) реализуются в виде явно построенных многогранников при помощи методики, приведенной выше. Все простейшие сети находятся путем выполнения некоторого перебора. Простейшие сети удается реализовать в виде многогранников по методике, описанной выше. Более сложные сети получаются из реализаций простейших сетей выполнением *раскалываний* (обратных к *стягиваниям*, проделанным при упрощении соответствующей сети) в тех случаях, когда эти *раскалывания* возможны. Остальные случаи мы здесь не обсуждаем.

Построение моделей многогранников-торов с семью и восемью вершинами

Модель многогранника-тора с семью вершинами можно изготовить, вырезав из тонкого картона треугольные грани с размерами ребер, указанными ниже, а затем склеив эти грани по схеме рисунка 3а). Размеры ребер (в сантиметрах): $|v_1v_4| = |v_2v_3| \approx 10,3$; $|v_4v_7| = |v_3v_7| \approx 7,8$; $|v_4v_3| \approx 10,0$; $|v_2v_4| = |v_1v_3| \approx 8,7$; $|v_4v_5| = |v_3v_6| \approx 7,0$; $|v_1v_6| = |v_2v_6| = |v_1v_5| = |v_2v_5| \approx 7,0$; $|v_1v_2| \approx 6,0$; $|v_5v_6| \approx 4,1$; $|v_1v_7| = |v_2v_7| \approx 3,4$; $|v_6v_7| = |v_5v_7| \approx 4,9$; $|v_4v_6| = |v_3v_5| \approx 3,8$.

Размеры ребер многогранника-тора с восемью вершинами (рис. 3 б), показанного на фотографии в начале статьи (большой многогранник), следующие: $|v_1v_i| \approx 15,0$ см; $|v_iv_k| \approx 18,1$ см; $|v_7v_2| = |v_2v_5| = |v_5v_7| \approx 18,5$ см; $v_8v_3 = v_3v_4 = v_4v_8 \approx 6,3$ см; $v_7v_8 = v_2v_3 = v_4v_5 \approx 7,0$ см; $v_7v_3 = v_2v_4 = v_5v_8 \approx 12,9$ см; ($i=1,6$; $j=3, 4, 8$; $k=2, 5, 7$).



Обобщение чисел

Академик Л. С. ПОНТЯГИН

В этой статье рассказано о развитии понятия числа — от счета предметов в глубокой древности до создания действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов. Во второй части статьи (в следующем номере «Кванта»), на основании совсем элементарных свойств чисел, векторов и многочленов, будет объяснено, почему дальнейшее обобщение понятия числа невозможно.

По мере того как проявлялись новые практические применения чисел и в результате развития теоретической математики понятия числа развивалось, появлялись новые числа. Первым практическим применением чисел был счет предметов. Для этого использовались целые положительные числа, которые принято называть *натуральными*. При измерении длин и при торговых расчетах приходилось делить целые числа друг на друга. При этом результат деления не всегда был целым числом. Поэтому возникла потребность в дробных или, что то же самое, рациональных числах. Для того чтобы вычитание рационального числа из другого рационального числа всегда было возможно, пришлось ввести *отрицательные* рациональные числа. Так образовался запас, или множество, всех *рациональных* чисел.

Еще в глубокой древности, задолго до появления отрицательных чисел, которые стали рассматриваться в середине нашего тысячелетия, было установлено, что отношение длины диагонали квадрата к длине его стороны не является рациональным числом. Стало необходимым ввести новые числа, которые назвали *иррациональными*. Так возник запас, или множество, всех *действительных* чисел.

§ 1. Комплексные числа

В процессе развития алгебры математики стали рассматривать квадратные корни из отрицательных чисел. Квадратные корни из отрицательных чисел встречались в промежуточных вычислениях, результаты которых оказывались обычными действительными числами. Так возникла потребность в присоединении новых чисел — квадратных корней из отрицательных чисел. В действительности, достаточно добавить только одно «новое» число, так называемую *мнимую единицу* i , которая определяется условием

$$i^2 = -1. \quad (1)$$

Это новое число i и было присоединено к множеству всех действительных чисел. С так возникшими числами приходилось производить всевозможные алгебраические вычисления, так что пришлось рассматривать многочлены относительно i . При учете условия (1), многочлен любой степени относитель-

но i превращался в многочлен первой степени, то есть записывался в виде

$$z = x + iy = x + yi, \quad (2)$$

где x и y были обычными действительными числами. Числа вида (2) были названы *комплексными числами*. Операции сложения и умножения комплексных чисел были определены как операции над многочленами относительно i с учетом условия (1) следующим образом. Если

$$z_1 = x_1 + y_1 i; \quad z_2 = x_2 + y_2 i \quad (3)$$

суть два комплексных числа, то *сумма* их определяется формулой

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i. \end{aligned} \quad (4)$$

Особую роль среди всех комплексных чисел играет число *нуль*, определяемое формулой

$$0 = 0 + 0i. \quad (5)$$

Оно обладает тем замечательным свойством, что

$$0 + z = z + 0 = z. \quad (6)$$

Каждому комплексному числу соответствует *противоположное* ему число $-z$, определяемое условием

$$z + (-z) = 0. \quad (7)$$

Существование противоположного числа обеспечивает возможность вычитания. Именно

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2). \quad (8)$$

Произведение чисел z_1 и z_2 как многочленов относительно i с учетом соотношения (1) дает следующий результат:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + \\ &+ y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + \\ &+ (x_1 y_2 + x_2 y_1) i. \end{aligned} \quad (9)$$

Среди всех комплексных чисел для умножения играет особую роль *единица*, определяемая формулой

$$1 = 1 + 0i. \quad (10)$$

Она обладает следующим свойством:

$$1z = z1 = z. \quad (11)$$

Для того чтобы осуществить деление комплексного числа z_1 на комплексное число z_2 , достаточно определить величину $1/z_2 = z_2^{-1}$. Число z_2^{-1} называется *обратным* к числу z_2 . Для комплексного числа $z = x + yi$ обратное число определяется формулой

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i. \quad (12)$$

Из этой формулы видно, что число z^{-1} всегда существует, когда $z \neq 0$.

Легко проверяется, что если число z^{-1} определено формулой (12), то мы имеем

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} z = 1. \quad (13)$$

Теперь *деление* комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0$ определяется формулой

$$z_1 / z_2 = z_1 (z_2^{-1}). \quad (14)$$

Таким образом возник запас или множество всех комплексных чисел, среди которых содержится множество всех действительных чисел. Именно, это комплексные числа вида

$$z = x + 0i. \quad (15)$$

В самом деле, при сложении и умножении двух комплексных чисел вида (15) $z_1 = x_1 + 0i$, $z_2 = x_2 + 0i$ по формулам (4) и (9), соответственно, мы получаем (проверьте!) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + 0i$ и $z_1 z_2 = x_1 x_2 + 0i$, то есть просто происходит сложение и умножение действительных чисел x_1 и x_2 . Таким образом, нет нужды различать комплексное число $z = x + 0i$ и действительное число x , можно считать действительные числа частью комплексных. Поэтому множество комплексных чисел называется *расширением* множества действительных чисел.

У п р а ж н е н и я

1. Найдите a^2 , $a + b^2$, ab^{-1} , если $a = 2 + 3i$, $b = 5 - i$.

2. Решите уравнения $az + b = 0$, $az^2 = b$, если $a = 3 + i$, $b = 2 - 3i$.

§ 2. Основная теорема алгебры

Для того чтобы получить все комплексные числа, мы начали с присоединения к действительным числам только одного числа i , являющегося корнем алгебраического уравнения

$$z^2 + 1 = 0. \quad (16)$$

Однако оказывается, что мы тем самым пришли к такому запасу чисел, для которого любое алгебраическое уравнение уже имеет хотя бы один корень. Это есть *основная теорема алгебры*, доказанная великим немецким математиком К. Ф. Гауссом на рубеже XVIII и XIX веков. Сформулируем эту теорему точнее.

Пусть

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad (17)$$

где $a_0 \neq 0$, произвольный многочлен степени $n \geq 1$ относительно z с действительными коэффициентами. Тогда



Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), великий немецкий математик, а также астроном, физик и геодезист. Выдающиеся математические способности Гаусса проявились еще в раннем детстве. К моменту защиты докторской диссертации, в 22 года, он был автором многих ярких открытий, в том числе первого строгого доказательства основной теоремы алгебры. К этой теореме он относился с особым пристрастием, и впоследствии нашел не менее шести других ее доказательств! Трудно назвать такую отрасль теоретической и прикладной математики, в которую Гаусс не внес существенного вклада. И вопросов, затронутых в этой статье, отметим еще придуманную им геометрическую интерпретацию комплексных чисел, в результате которой исчезли последние возражения против использования комплексных чисел в математике.

$f(z)$ имеет хотя бы один корень, то есть существует такое комплексное число α , что

$$f(\alpha) = a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0. \quad (18)$$

Эта теорема была доказана Гауссом для действительных коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n . Позже эта теорема была доказана и для того случая, когда коэффициенты многочлена $f(z)$ являются комплексными числами.

Заметим, что для комплексных чисел имеет место коммутативность умножения, то есть множители можно менять местами:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1. \quad (19)$$

После того как комплексные числа

были построены и изучены, возник вопрос, нельзя ли пойти в обобщении дальше. Именно нельзя ли построить величины с несколькими мнимыми единицами, i_1, i_2, \dots, i_n , то есть совокупность величин — «обобщенных чисел» — вида

$$x = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n \quad (20)$$

где x_0, x_1, \dots, x_n суть действительные числа, и для этих величин определить сложение и умножение, обладающие обычными свойствами сложения и умножения чисел. Оказывается, что такие величины можно построить с тремя единицами i_1, i_2, i_3 . Они называются *кватернионами*. Для них выполнены обычные свойства сложения и умножения чисел, кроме закона коммутативности умножения (см. (19)). В конце прошлого века выдающийся немецкий математик Ф. Г. Фробениус доказал, что дальше пойти по этому пути уже невозможно. Доказательство этой теоремы Фробениуса, составляющее главное содержание настоящей статьи, будет изложено в следующем номере.

Для доказательства теоремы Фробениуса мне придется воспользоваться некоторыми результатами из алгебры, не входящими в ныне действующую программу средней школы, касающимися деления и разложения многочленов на множители.

§ 3. Деление многочленов

При делении целого положительно-го числа a на целое положительное число b , мы приходим к равенству

$$a = bh + k, \quad (21)$$

где h и k — целые неотрицательные числа, $k < b$. Число h называется *частным*, а k — *остатком* при делении числа a на число b .

Способ деления целых чисел хорошо известен из арифметики. Но так же, как и целые числа, можно делить друг на друга многочлены. Будем исходить из двух многочленов:

$$\begin{aligned} a(z) &= a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p \\ b(z) &= b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + \dots + b_q \end{aligned} \quad (22)$$

Будем предполагать здесь, что числа a_0 и b_0 не равны нулю, так что многочлен $a(z)$ имеет степень p , а многочлен $b(z)$ имеет степень q . В результате деления $a(z)$ на $b(z)$ мы придем к следующему тождеству, аналогичному равенству

ву (21):

$$a(z) \equiv b(z)h(z) + k(z), \quad (23)$$

где степень многочлена $k(z)$ меньше q . Многочлены $h(z)$ и $k(z)$ называются соответственно *частным* и *остатком* при делении многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$.

Если $k(z)$ — тождественный нуль, то говорят, что многочлен $a(z)$ *делится* на многочлен $b(z)$, а $h(z)$ является частным от их деления.

Равенство (21) доказано в арифметике, а тождество (23) должно доказываться в алгебре. Но деление многочленов не входит в ныне действующую школьную программу. Чтобы доказать (23), мы должны построить такие многочлены $h(z)$ и $k(z)$, которые удовлетворяют этому тождеству. Процесс этого построения представляет собой очень важный алгоритм. Этот алгоритм очень похож на обычный алгоритм деления чисел «уголком». Поэтому, прежде чем разбирать его в общем виде, советую посмотреть практический пример деления двух многочленов, показанный на рисунке 1.

Опишем теперь алгоритм деления многочлена $a(z)$ степени p на многочлен $b(z)$ степени q в общем случае. Если $p < q$, то тогда $h(z) \equiv 0$, $k(z) \equiv a(z)$ и тождество (23) выполнено.

Теперь мы можем строить многочлены $h(z)$ и $k(z)$ в предположении, что $p > q$. Сперва построим тождество

$$a(z) \equiv b(z)h_1(z) + a_1(z), \quad (24)$$

в котором степень многочлена $a_1(z)$ меньше p . Для этого положим

$$h_1(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{p-q}.$$

Тогда разность

$$a(z) - b(z)h_1(z) \equiv a_1(z)$$

имеет степень меньше, чем p , так как в этом многочлене коэффициент при z^p равен нулю. Остальные степени z , входящие в этот многочлен, очевидно, меньше p . Таким образом, тождество (24) построено.

Если многочлен $a_1(z)$ имеет степень, меньшую, чем q , то тождество (24) уже является тождеством (23). В противном случае к многочлену $a_1(z)$ применим ту же процедуру, которая применена к многочлену $a(z)$ при построении тождества (24). Тогда мы получим для него тождество

$$a_1(z) \equiv b(z)h_2(z) + a_2(z),$$

причем степень многочлена $a_2(z)$ уже меньше, чем степень многочлена $a_1(z)$. Если многочлен $a_2(z)$ уже имеет степень, меньшую чем q , то, подставляя $a_1(z)$ из последнего тождества в тождество (24), мы получим тождество

$$a(z) \equiv b(z)(h_1(z) + h_2(z)) + a_2(z),$$

которое уже является тождеством (23). Если многочлен $a_2(z)$ тоже имеет степень, большую или равную, чем q , то мы продолжим наше

построение дальше и в конце концов докажем нужное тождество (23).

Здесь мы описали процесс деления многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$, то есть нахождения многочленов $h(z)$ и $k(z)$, входящих в тождество (23). Докажем теперь, что эти многочлены однозначно определены многочленами $a(z)$ и $b(z)$. Допустим, что наряду с тождеством (23) имеет место тождество

$$a(z) \equiv b(z)h_0(z) + k_0(z), \quad (25)$$

причем степень многочлена $h_0(z)$ меньше q . Вычитая тождество (25) из (23), получим

$$b(z)(h(z) - h_0(z)) = k_0(z) - k(z).$$

Так как степень многочлена $b(z)$ равна q , а степень многочлена $k_0(z) - k(z)$ меньше q , последнее тождество может иметь место лишь при условии $h(z) - h_0(z) \equiv 0$, так что и $k_0(z) - k(z) \equiv 0$.

Заметим в заключение, что в процессе деления многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$ не могут появиться комплексные числа, так что если многочлены $a(z)$ и $b(z)$ имеют действительные коэффициенты, то многочлены $h(z)$ и $k(z)$, входящие в тождество (23), также имеют действительные коэффициенты.

Упражнение 3. Разделите многочлен $x^5 + 2x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x$ на многочлен $x^2 + 1$.

§ 4. Разложение многочленов на неприводимые множители

Пусть

$$f_0(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (26)$$

— многочлен произвольной положительной степени n с произвольными действительными или комплексными коэффициентами. Как было отмечено ранее, этот многочлен имеет хотя бы один комплексный корень α . Докажем теперь, что если $f_0(z)$ имеет α своим корнем, то есть

$$f_0(\alpha) = 0,$$

то многочлен $f_0(z)$ делится на двучлен $z - \alpha$, так что имеет место равенство

$$f_0(z) \equiv (z - \alpha)f_1(z), \quad (27)$$

где, очевидно, $f_1(z)$ имеет степень $n - 1$.

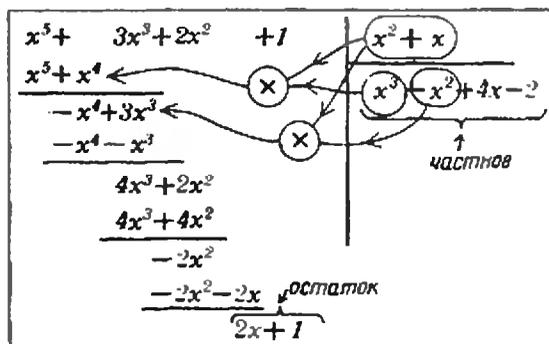


Рис. 1.



Фердинанд Георг Фробениус (1849—1917), выдающийся немецкий алгебраист, работавший в Берлине и Цюрихе. Наряду с У. Гамильтоном и А. Кейли он считается одним из творцов алгебры гиперкомплексных чисел (в частности, кватернионов). Но он пошел и дальше — ему принадлежит важная теорема, обсуждаемая в этой статье, утверждающая, по существу, что разужных обобщений понятия числа, после комплексных чисел и кватернионов, не существует.

Для доказательства формулы (27) разделим многочлен $f_0(z)$ на многочлен $z-a$. Тогда в силу формулы (23) мы получим

$$f_0(z) \equiv (z-a)f_1(z) + k(z), \quad (28)$$

где $k(z)$ есть многочлен нулевой степени, то есть число. Подставляя в это тождество вместо z число a , получаем равенство $0 = f_0(a) = (a-a) \times f_1(a) + k$. Таким образом, $k=0$ и формула (27) доказана. Доказанное утверждение называется *теоремой Безу*.

Сосредоточим теперь свое внимание на том случае, когда многочлен $f_0(z)$ имеет действительные коэффициенты. Если корень a является действительным корнем, то многочлен $f_1(z)$ также имеет действительные коэффициенты, так как он получается в результате деления многочлена $f_0(z)$ с действительными коэффициентами на двучлен $z-a=r_1(z)$ также с действительными коэффициентами. Для рассмот-

рения случая, когда a есть комплексное число, введем понятие комплексно-сопряженных чисел.

Если

$$z = x + yi \quad (29)$$

есть произвольное комплексное число, то комплексное число, определяемое формулой

$$\bar{z} = x - yi, \quad (30)$$

называется *комплексно-сопряженным* z . Ясно, что равенство $z = \bar{z}$ имеет место тогда и только тогда, когда число z действительное.

Из правила сложения и умножения комплексных чисел вытекают следующие формулы:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad (31)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2. \quad (32)$$

Из последних трех формул вытекает, что если $f_0(z)$ есть многочлен с действительными коэффициентами, то имеет место тождество

$$\overline{f_0(z)} \equiv f_0(\bar{z}). \quad (33)$$

Таким образом, если a есть комплексный корень многочлена $f_0(z)$, то \bar{a} также есть комплексный корень многочлена $f_0(z)$. Из формул (27) и (33) следует, что если a не есть действительное число, то многочлен $f_1(z)$ имеет корень \bar{a} , отличный от a , и потому разлагается в произведение:

$$f_1(z) \equiv (z-\bar{a})f_2(z). \quad (34)$$

Из формул (27) и (34) вытекает, что

$$f_0(z) \equiv (z-a)(z-\bar{a})f_2(z). \quad (35)$$

Мы имеем,

$$r_2(z) \equiv (z-a)(z-\bar{a}) \equiv z^2 - (a+\bar{a})z + a\bar{a}, \quad (36)$$

где $r_2(z)$ есть многочлен с действительными коэффициентами степени 2. Его коэффициенты действительны, так как действительны числа $a+\bar{a}$ и $a\bar{a}$. Многочлен $r_2(z)$ не разлагается на действительные множители, так как он не имеет действительных корней. Многочлен с действительными коэффициентами, не разложимый на множители степени $n \geq 1$ с действительными коэффициентами, называется *неприводимым*. Таким образом, в случае действительного корня a мы имеем разложение

$$f_0(z) \equiv r_1(z)f_1(z).$$

В случае комплексного корня мы имеем разложение

$$f_0(z) \equiv r_2(z)f_2(z).$$

Итак, в обоих случаях $f_0(z)$ делит-

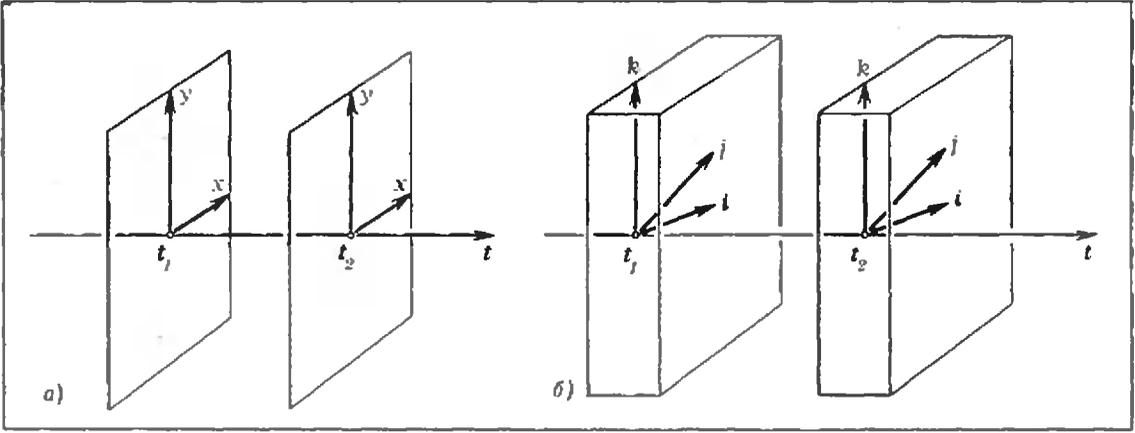


Рис. 2.

ся на неприводимый многочлен первой или второй степени с действительными коэффициентами, так что частное $f_2(z)$ от деления вновь есть многочлен с действительными коэффициентами. Значит, многочлен $f_0(z)$ разлагается на действительные неприводимые множители степени 1 или 2. Из этого вытекает важный вывод:

Произвольный корень α многочлена $f_0(z)$ является корнем неприводимого многочлена первой или второй степени.

Упражнение 4. Разложите многочлен $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 8x$ на неприводимые множители степени 1 и 2.

§ 5. Кватернионы

Как уже упоминалось, кватернионы имеют три мнимые единицы. Эти единицы принято обозначать через

$$i, j, k. \tag{37}$$

Таким образом, каждый кватернион записывается в виде

$$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \tag{38}$$

где x_0, x_1, x_2, x_3 — действительные числа, называемые *координатами* кватерниона x .

Пусть

$$y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k \tag{39}$$

— второй кватернион. Кватернионы x и y считаются *равными* тогда и только тогда, когда их координаты равны, то есть когда имеет место равенство

$$x_0 = y_0, x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3. \tag{40}$$

Сложение кватернионов x и y происходит по правилу

$$x + y = x_0 + y_0 + (x_1 + y_1) i + (x_2 + y_2) j + (x_3 + y_3) k. \tag{41}$$

Можно сказать, что кватернионы

складываются по координатам, то есть так, как складываются векторы 3-мерного векторного пространства при помощи сложения их координат. (Только координат у кватерниона не три, а четыре.) В этом смысле можно рассматривать кватернионы как векторы «четырехмерного пространства». Представить себе четырехмерное пространство, конечно, трудно. Здесь вам может помочь аналогия с трехмерным пространством (рис. 2).

При умножении кватернионов действительные числа можно переставлять с единицами i, j, k . Поэтому для задания правила перемножения кватернионов следует задать правило перемножения единиц (37). Оно следующее:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \tag{42}$$

$$ij = -ji = k; \quad jk = -kj = i; \quad ki = -ik = j. \tag{43}$$

В общем виде формулы сложения и умножения кватернионов можно посмотреть в «Кванте», 1983, № 9, с. 13. Для того чтобы задать кватернион, обратный к кватерниону x , введем понятие *сопряженного* кватерниона \bar{x} . Мы определим его по формуле

$$\bar{x} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k. \tag{44}$$

Простые вычисления дают

$$x\bar{x} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |x|^2. \tag{45}$$

Кватернион x^{-1} , обратный к x , определяется формулой

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}. \tag{46}$$

Для него имеет место соотношение $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$.

(Окончание см. на с. 22)



Миллисекундные пульсары

Кандидат
физико-математических
наук
В. А. БРОНШТЭН

Как уже сообщалось в «Кванте» (1983, № 12, с. 12), сравнительно недавно ученые обнаружили два самых быстрых (на сегодняшний день) пульсара. Один из них — он находится в созвездии Лисички — имеет период приблизительно 1,6 миллисекунды, другой, видимый в направлении созвездия Лебедя, вращается с периодом около 6,1 миллисекунды.

Чем интересны эти пульсары, и почему они сразу же привлекли к себе внимание ученых?

По современным представлениям пульсары — это нейтронные звезды, обладающие мощным магнитным полем. При вращении звезды наблюдатель, периодически попадающий в область направленного пучка радиоволн, фиксирует излучение в виде отдельных импульсов с периодом вращения звезды.

Нейтронные звезды образуются в результате выгорания термоядерного горючего (водорода, гелия, углерода и т. п.) в недрах звезд с массой, превышающей массу Солнца. Сначала выгорает водород, превращаясь в гелий (этот процесс происходит в недрах Солнца и большинства звезд), затем начинает выгорать гелий, затем углерод и т. д. Лишившись источников энергии, поддерживающих равновесное состояние, звезда испытывает катастрофическое

сжатие (до размеров порядка 10 км) и, соответственно, резко увеличивается скорость ее вращения.

Но так можно было объяснить существование пульсаров с периодами вращения около одной секунды. Факт образования миллисекундных пульсаров требовал особого объяснения.

Такое объяснение предложили практически одновременно две группы исследователей — четверо американских ученых во главе с М. Альпаром и, независимо от них, индийский астрофизик Дж. Сринивасан и голландский астрофизик Э. ван ден Хейвель. Вот какой гипотезой они руководствовались.

Допустим, что когда-то образовалась система двойной звезды, в которой одна звезда (назовем ее *A*) превосходила по массе другую (компонент *B*). Несколько миллионов лет назад звезда *A*, как более массивная, первой исчерпала запасы водорода и начала сжиматься. При этом часть вещества стала перетекать на звезду *B*. Когда звезда *A* полностью лишилась источников термоядерной энергии, она взорвалась как сверхновая, а ее остаток образовал пульсар.

Между тем подошли к концу запасы ядерного горючего и в звезде *B*. Теперь вещество начинает перетекать с нее на пульсар (остаток звезды *A*), при этом вращение пульсара может заметно ускориться. Возможно, что после этого звезду *B* постигнет та же судьба, что и звезду *A*, — она взорвется и образует молодой пульсар.

Разрабатывая свою гипотезу, указанные ученые еще не знали о существовании миллисекундных пульсаров. Они хотели объяснить свойства других пульсаров, входящих в двойные системы и обладавших довольно быстрым

вращением — с периодом порядка десятков миллисекунд. Открытие же самых быстрых пульсаров надежно подтвердило эту гипотезу.

Оказалось, что пульсар в созвездии Лебедя действительно входит в двойную систему. Установлено, что период обращения этого пульсара вокруг центра масс системы равен 120 суткам, а его орбита близка к круговой. Второй компонент системы — это белый карлик с массой, примерно втрое меньшей солнечной.

А как же объяснить существование первого миллисекундного пульсара (в созвездии Лисички), который не входит в двойную систему?

По мнению Сринивасана и ван ден Хейвеля такая система могла разрушиться при взрыве звезды *B*, так что оба пульсара — остатки звезд *A* и *B* — разлетелись в разные стороны. Есть и другие объяснения. Несомненно то, что дальнейшие исследования принесут много интересного в понимании природы этих замечательных небесных тел.

Наблюдения миллисекундных пульсаров могут дать неожиданные и очень важные результаты для изучения нашей планетной системы. Дело в том, что из-за движения Земли вокруг Солнца частота излучения пульсаров изменяется с годовым периодом. Исследования этих годовых флуктуаций позволят точнее, чем классические методы небесной механики, определять малейшие отклонения в движении Земли под действием притяжения других планет (планетные возмущения), а значит, и массы возмущающих планет.

И наконец, что не менее важно для науки, миллисекундные пульсары могут стать новым эталоном времени.

Переговорная трубка длиной в экватор?

Кандидат физико-математических наук
А. А. ВАРЛАМОВ,
кандидат физико-математических наук
А. И. МАЛЯРОВСКИЙ

Сидя на кухне за завтраком, часто можно услышать не слишком приятное дребезжание, которое какой-то шутник прозвал «пением водопроводных труб». Прекратить это «коммунальное музицирование» иногда удается, открыв водопроводный кран в своей квартире. Большинство людей после этого облегченно возвращается к прерванному завтраку, не особенно задумываясь над физической сущностью происшедшего явления. А задуматься стоит. Почему звук, возбуждаемый струей воды в неисправном кране в одной из квартир, не дает покоя обитателям всего подъезда, связанного одним водопроводным стоя-



ком? Ведь если в той же квартире свистнуть в свисток, то это услышат разве что соседи в ближайших квартирах, да и то, если дом новый. «Пение» же водопроводной трубы слышны везде, с первого по последний этаж.

Такое различие обусловлено двумя причинами. Первая — это звукоизолирующее действие стен и перекрытий, которые отражают и поглощают звуки свистка. А звуковая волна, распространяющаяся по водопроводной трубе, с ними не взаимодействует и проходит с этажа на этаж беспрепятственно. Теперь — о второй причине. При звучании свистка возникающая акустическая волна распространяется в пространстве по всем направлениям, и ее волновая поверхность (см. «Физика 10», § 31), или волновой фронт, имеет форму сферы. Площадь этой сферы растет по мере удаления от источника звука, и интенсивность звуковой волны — то есть энергия, проходящая через единицу площади волнового фронта в единицу времени, — по мере удаления от источника падает (найдите сами, по какому закону).

А звуковая волна, возникающая внутри водопроводной трубы, «одномерна»: отражаясь от стенок трубы, она не расходится во все стороны в пространстве, а распространяется в одном направлении — вдоль самой трубы — без расширения волнового фронта, так что интенсивность звука по мере удаления от источника практически не изменяется. В этом смысле водопроводная труба представляет собой акустический волновод — канал, в котором звуковые волны распространяются в определенном направлении практически без ослабления.

Другим примером акустического волновода служат переговорные трубы, с помощью которых с давних времен и по сей день на судах передаются команды с капитанского мостика в машинное отделение. Заметим, что затухание звука в воздухе при распространении по волноводу оказывается настолько малым, что если бы удалось сделать такую трубку длиной в 700 км, то она смогла бы служить своеобразным «телефоном» для передачи разговора из Москвы в Ленинград и обратно. Однако вести разговор по такому «телефону» было бы крайне затруднительно, поскольку

собеседник слышал бы сказанное вами примерно через полчаса.

Подчеркнем, что отражение распространяющейся в волноводе волны от его границ является определяющим свойством волновода — именно благодаря ему энергия волны распространяется не во все стороны в пространстве, а передается в заданном направлении.

Сравнительно недавно, около тридцати лет назад, ученые СССР и США обнаружили, что природа сама создала гигантские акустические волноводы, которые по своим размерам значительно превосходят даже выдуманную нами переговорную трубку между Москвой и Ленинградом. Такие волноводы при определенных условиях возникают в океанах. Ученые назвали их подводными звуковыми каналами, или, сокращенно, ПЗК. Распространяющиеся по таким каналам звуковые волны могут быть приняты за тысячи километров от их источника. Так, в одном из наиболее удачных экспериментов звук от подводного взрыва, произведенного учеными у берегов Австралии, обошел под водой половину земного шара и был зарегистрирован другой группой исследователей у Бермудских островов, на расстоянии 19 600 км от Австралии (до сих пор это — рекорд дальности распространения импульсных звуковых сигналов).

Каков же механизм образования такого волновода? Что в нем служит отражающими границами, заставляющими звуковые волны распространяться на столь огромные расстояния? В качестве верхней границы сразу же напрашивается поверхность океана, которая достаточно хорошо отражает звук (см. Приложение). Однако она редко бывает ровной из-за постоянного волнения; а это приводит к хаотическому рассеянию на ней звуковых волн. Дно же отражает звук слабо и служит нижней отражающей границей волновода никак не может. Поэтому границы волновода в океане следует искать где-то между дном и поверхностью. И они были найдены. Этими границами оказались слои воды на определенных глубинах океана.

Как же происходит отражение звуковых волн от «стенок» ПЗК? Чтобы ответить на этот вопрос, нам при-

дется рассмотреть, как вообще происходит распространение звука в океане.

До сих пор мы говорили о волноводах, молчаливо предполагая, что скорость распространения звука в них постоянна. Между тем хорошо известно, что скорость звука в океане колеблется от 1450 м/с до 1540 м/с. Она связана с температурой воды, ее соленостью, с величиной гидростатического давления и с другими факторами. Рост гидростатического давления приводит к тому, что при погружении на каждые 100 м скорость звука увеличивается на 1,6 м/с. С ростом температуры скорость звука также возрастает. Однако в океане температура воды, как правило, довольно резко убывает по мере удаления из верхних, хорошо прогретых, слоев воды в глубину, где она выходит практически на постоянное значение. Действие этих двух механизмов приводит к такой зависимости скорости звука от глубины, как это показано на рисунке 1. Вблизи поверхности преобладающее влияние оказывает быстрое падение температуры — в этих слоях скорость звука уменьшается с ростом глубины. По мере погружения температура меняется все медленнее, а гидростатическое давление продолжает возрастать. На некоторой глубине z_m влияние этих двух факторов «уравнивается» — на этой глубине скорость звука минимальна; а дальше она начинает возрастать с увеличением глубины за счет роста гидростатического давления.

Итак, скорость распространения звука в океане зависит от глубины. И это сказывается на характере распространения звука. Для того чтобы понять, чем определяется ход звуко-

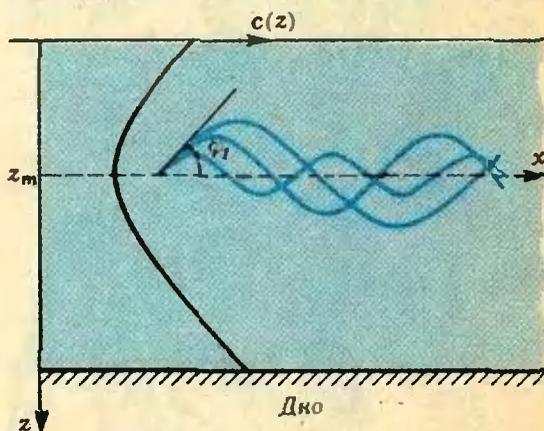


Рис. 1.

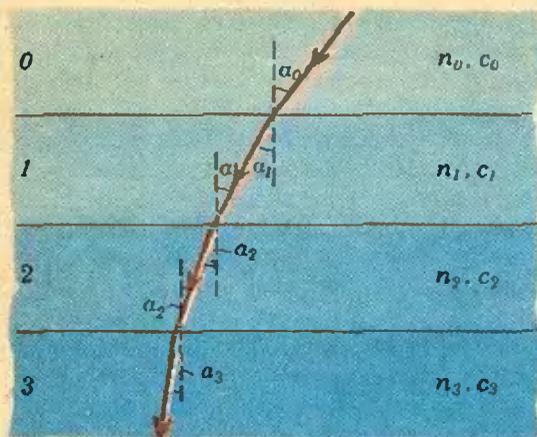


Рис. 2.

вых лучей в океане, мы обратимся к оптической аналогии: посмотрим, как распространяются световые лучи в стопке из плоскопараллельных пластинок с различными показателями преломления, а затем обобщим наш результат на случай среды с плавно меняющимся показателем преломления.

Рассмотрим стопку из плоскопараллельных пластин с разными показателями преломления $n_0, n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$, причем $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ (рисунок 2). Луч, падающий из самой верхней пластинки на пластинку 1 под углом α_0 , после преломления на границе 0—1 составит угол α_1 с нормалью к этой границе; под таким углом он упадет на границу 1—2; после преломления на этой границе луч, пройдя пластину 2, упадет на границу 2—3 под углом α_2 , вновь преломится и т. д. Согласно закону преломления,

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} = \frac{n_1}{n_0}, \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{n_3}{n_2}, \quad \dots, \quad \frac{\sin \alpha_{k-1}}{\sin \alpha_k} = \frac{n_k}{n_{k-1}}, \quad \dots$$

Вспоминая, что отношение коэффициентов преломления двух сред обратно отношению скоростей распространения света в этих средах, перепишем все соотношения в виде

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} = \frac{c_0}{c_1}, \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{c_2}{c_3}, \quad \dots, \quad \frac{\sin \alpha_{k-1}}{\sin \alpha_k} = \frac{c_{k-1}}{c_k}, \quad \dots$$

($c_0 > c_1 > c_2 > \dots > c_k > \dots$). Перемножив последовательно эти равенства друг

на друга, мы получим соотношение

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_k} = \frac{c_0}{c_k}.$$

Устремляя толщину каждой пластинки к нулю, а число пластинок к бесконечности, мы приходим к обобщенному закону преломления, который описывает ход светового луча в среде с плавно меняющимся показателем преломления (этот закон называют обобщенным законом Снеллиуса):

$$c(z) \cdot \sin \alpha(0) = c(0) \cdot \sin \alpha(z), \quad (*)$$

где $c(0)$ — скорость света в месте входа луча в среду, а $c(z)$ — скорость света на расстоянии z от границы среды. При таком предельном переходе ломаная линия, показывающая ход луча, превращается в плавную кривую. Явление искривления световых лучей при распространении света в среде с непрерывно меняющимся показателем преломления называют рефракцией.

Зная, как меняется скорость света в среде, мы можем, пользуясь соотношением (*), указать, каким будет ход того или иного луча, попавшего в среду. Точно так же, по тому же закону (*), происходит искривление звуковых лучей при распространении звука в неоднородной среде, где скорость звука плавно изменяется. Частный случай такой среды и представляет собой океан.

Теперь вернемся к вопросу о том, как распространяется звук в ПЗК. Представим себе, что источник звука находится на глубине z_m (рисунок 3). Каков будет ход звуковых лучей, выходящих из источника? Луч, идущий вдоль горизонтали $z = z_m$, будет прямолинейным. А те лучи, которые выходят под некоторыми углами к этой горизонтали, будут искривляться. По аналогии это явление называют рефракцией звука. Поскольку и выше, и ниже уровня z_m скорость звука возрастает, звуковые лучи будут искривляться в направлении горизонтали $z = z_m$; в какой-то момент луч станет «параллельным» этой горизонтали и, «отразившись», повернет к ней (см. рисунок 3).

Итак, рефракция звука в океане приводит к тому, что часть звуковой энергии, излучаемой источником, может распространяться, не выходя на

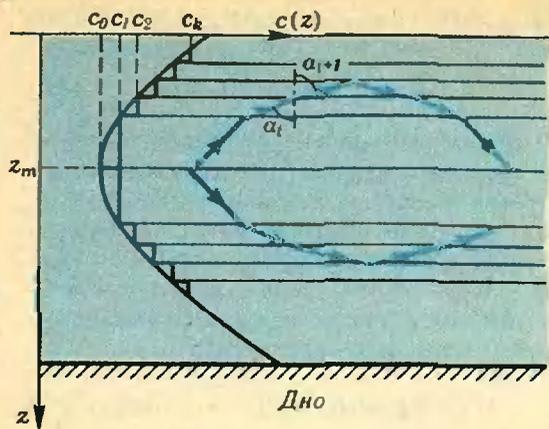


Рис. 3.

поверхность воды и не доходя до дна. А это и означает, что в такой среде реализуется волноводный механизм распространения звука — подводный звуковой канал. Роль «стенок» этого волновода выполняют слои воды на тех глубинах, где происходит «поворот» звукового луча.

Уровень глубины z_m , на которой скорость звука минимальна, называют осью ПЗК. Обычно величины z_m лежат в диапазоне 1000–1200 м; однако в тропических широтах, где вода прогревается на большие глубины, ось ПЗК может опускаться и до глубин в 2000 м. Наоборот, в высоких широтах влияние температуры на распределение скорости звука сказывается только в приповерхностном слое, и ось ПЗК поднимается до глубин 200–500 м, а в полярных широтах — еще ближе к поверхности.

В океане могут существовать два принципиально различных типа ПЗК. Канал первого типа образуется в том случае, когда скорость звука у поверхности воды (c_0) меньше, чем у дна

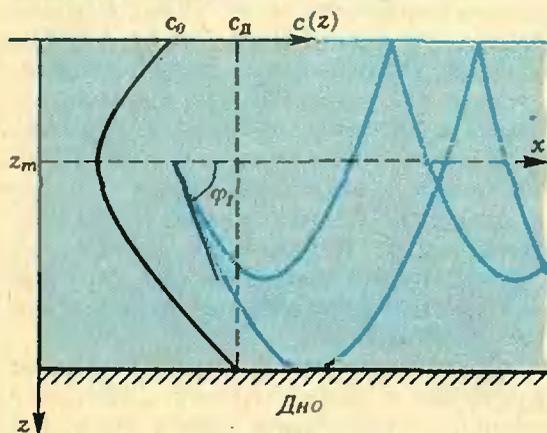


Рис. 4.

(c_d). Этот случай обычно имеет место в глубоководных районах, где давление у дна достигает сотен атмосфер. Звук, идущий из воды в воздух, хорошо отражается от поверхности их раздела (см. Приложение), и если поверхность океана гладкая (штиль), то она служит резкой верхней границей волновода и канал занимает весь слой воды от поверхности до дна (рисунок 4).

Посмотрим, какая часть звуковых лучей «захватывается» в ПЗК. Для этого перепишем полученное нами ранее соотношение (*) в таком виде:

$$c(z) \cdot \cos \varphi_1 = c_1 \cdot \cos \varphi(z),$$

где φ_1 и $\varphi(z)$ — углы, образуемые звуковым лучом с горизонтальной плоскостью на глубинах z_1 и z соответственно. Эти углы называют углами скольжения. (Понятно, что $\varphi_1 = \pi/2 - \alpha_1$, $\varphi(z) = \pi/2 - \alpha(z)$.) Если источник звука находится на оси ПЗК, то $c_1 = c_m$; канал захватывает лучи, для которых угол скольжения у дна равен $\varphi(z) = 0$. Так что все лучи, которые выходят из источника под углами скольжения φ_1 , удовлетворяющими условию (см. рисунок 4)

$$\cos \varphi_1 \geq \frac{c_m}{c_x},$$

попадают в ПЗК.

При неровной поверхности воды звуковые лучи будут рассеиваться на ней; те лучи, которые уйдут от поверхности под достаточно большими углами скольжения, дойдут до дна и там поглотятся. Однако и в этом случае канал может захватывать все те лучи, которые благодаря рефракции чуть-чуть не доходят до волнующейся поверхности (рисунок 5). Канал

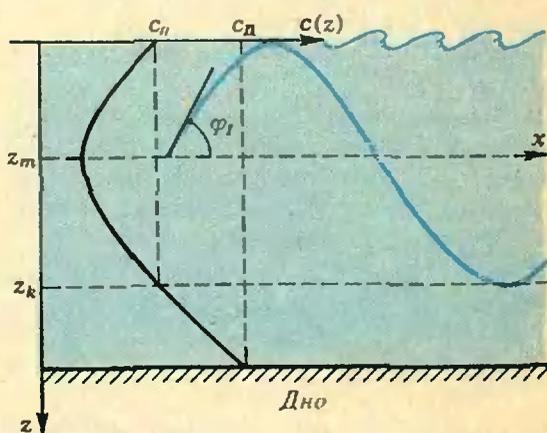


Рис. 5.

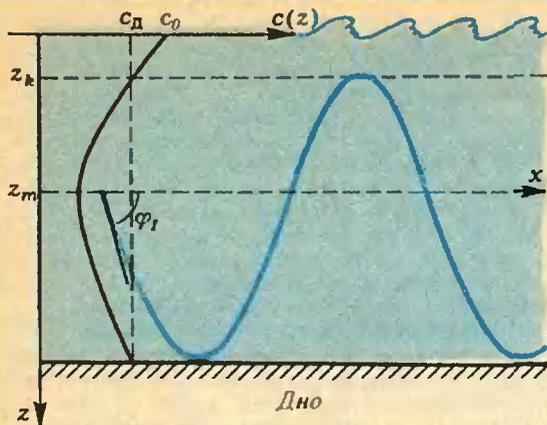


Рис. 6.

при этом простирается от поверхности до глубины z_k , которая определяется из условия $c(z_k) = c_0$. Понятно, что такой канал захватывает все звуковые лучи с углами скольжения

$$\varphi_1 \leq \arccos \frac{c_m}{c_0}.$$

Канал второго типа характерен для мелководных районов и образуется в случае, когда скорость звука вблизи поверхности оказывается большей, чем у дна (рисунок 6). Он занимает слой воды от дна до глубины z_k такой, что $c(z_k) = c_d$. Это как бы перевернутый канал первого типа в случае волнующейся поверхности.

Если источник звука расположен вблизи оси ПЗК, то в точку приема сигнала приходит, как правило, множество звуковых лучей, причем время прохождения звука по ним различно и оказывается максимальным для осевого луча (скорость распространения звука на этой глубине минимальна). Интенсивность короткого импульсного сигнала, регистрируемого в точке приема, растет от начала приема к концу, поскольку разность между временами прихода импульсов по разным лучам к концу приема сигнала уменьшается, и они начинают накладываться один на другой, что и приводит к увеличению интенсивности. Последним приходит звуковой луч, распространяющийся вдоль оси ПЗК (с нулевым углом скольжения), после чего сигнал резко обрывается.

Для определенных типов зависимости скорости звука от глубины ПЗК действует на звуковые лучи подобно фокусирующей линзе: если излучатель расположен на оси ПЗК, то лучи, вышедшие под различными углами скольжения, будут периоди-

чески одновременно сходиться на оси канала в точках, называемых фокусами ПЗК. Так, для канала, в котором скорость звука меняется с глубиной по закону, близкому к параболическому — $c(z) = c_m(1 + \frac{1}{2} b^2 z^2)$,

фокусы для лучей, вышедших под малыми углами скольжения, будут находиться в точках $x_n = x_0 + \pi n / b$, где $n = 1, 2, \dots$ (рисунок 7). Такой профиль кривой $c(z)$ близок к реальному распределению скорости звука в глубинных ПЗК. Отклонения от точной параболической зависимости в $c(z)$ приводят к размытию фокусов на оси ПЗК.

Ну, а можно ли заставить звук, распространяясь по ПЗК, совершить кругосветное путешествие — обогнуть под водой весь земной шар и вернуться к своему источнику? Нет, нельзя. Первой, и самой непреодолимой, преградой служат материки и значительные перепады в глубинах Мирового океана. Поэтому нельзя выбрать такой путь, вдоль которого существовал бы единый ПЗК вокруг всего земного шара. Но это не единственная причина. Звуковая волна, распространяющаяся в ПЗК, отличается от звуковых волн в водопроводной трубе и переговорной трубке. Как уже говорилось, при распространении в этих волноводах звуковая волна одномерна, площадь ее волнового фронта постоянна на любом расстоянии от источника звука, и, следовательно, интенсивность звука (без учета тепловых потерь) также будет постоянна в любом сечении трубы. В подводном звуковом канале звуковая волна распространяется не вдоль прямой, а по всем направлениям

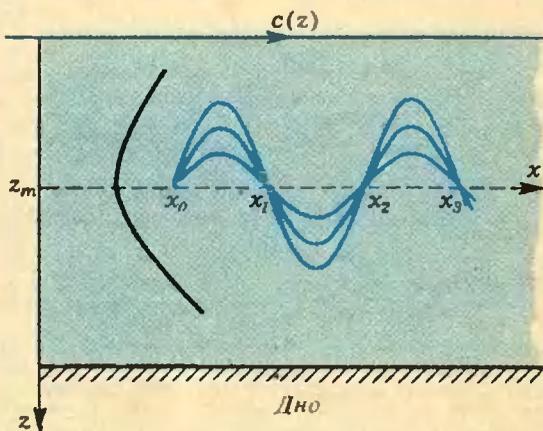


Рис. 7.

в плоскости $z=z_m$. Поэтому волновым фронтом является цилиндрическая поверхность, и уже из-за этого интенсивность звука падает по мере удаления от источника пропорционально $1/R$, где R — расстояние от источника звука до места наблюдения (сравните эту зависимость с полученным вами ранее законом убывания интенсивности для сферической звуковой волны в трехмерном пространстве, а также со случаем одномерной звуковой волны, для которой интенсивность не меняется с расстоянием вообще).

Другой причиной ослабления звука служит затухание звуковой волны при ее распространении в морской воде. Энергия волны переходит в тепло из-за трения в воде. Кроме того, звуковая волна рассеивается в океане на различных неоднородностях, которыми могут служить взвешенные в воде частицы, пузырьки воздуха, планктон и даже газовые пузыри рыб. Это явление используют, в частности, для обнаружения с помощью ультразвуковой локализации косяков рыб.

В заключение заметим, что описанный подводный звуковой канал — отнюдь не единственный пример волновода, существующего в природе. Так, дальнейшее радиовещание с наземных радиостанций возможно только благодаря распространению радиоволн в атмосфере по гигантским волноводам. В определенных условиях в атмосфере могут образовываться волноводные каналы и для электромагнитных волн с частотами светового диапазона. Тогда, в результате сверхдальних миражей, в центре пустыни можно увидеть величаво плывущий морской корабль, а среди океана вдруг поднимется город.

Приложение

Рассмотрим вопрос об отражении и прохождении звуковой волны на границе раздела двух сред.

Пусть плоская звуковая волна какой-либо определенной частоты и с амплитудой звукового давления p падает на границу раздела «вода — воздух» со стороны воды (со стороны более плотной среды) перпендикулярно этой границе. Часть ее (волна с амплитудой p') отразится от границы и пойдет в обратном направлении, другая часть (волна с амплитудой p_1) проникает сквозь границу раздела и будет распространяться в воздухе в первоначальном направлении. Чтобы определить соотношение между амплитудами падающей, прошедшей и отраженной волн, воспользуемся условием равновесия границы раздела и законом сохранения энергии. Условие равновесия границы раздела заключается в равенстве давлений по разные стороны от границы раздела. Учитывая, что отраженная волна распространяется в направлении, противоположном падающей, равенство давлений на границе можно записать в виде

$$p - p' = p_1.$$

Закон сохранения энергии, в данном случае, сводится к равенству интенсивности падающей волны сумме интенсивностей прошедшей и отраженной волн. Можно показать, что интенсивность звуковой волны определяется выражением $I = p^2 / 2\rho c$, где ρ — плотность среды. Поэтому второе уравнение записываем в виде

$$\frac{p^2}{2\rho c} = \frac{p'^2}{2\rho c} + \frac{p_1^2}{2\rho_1 c_1}.$$

Здесь ρ и ρ_1 — плотности, а c и c_1 — скорости распространения звука соответственно для воды и для воздуха.

Решая совместно эти уравнения, находим коэффициент прохождения звука через границу раздела, который определяется отношением амплитуд звукового давления прошедшей и падающей волн:

$$k = \frac{p_1}{p} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho c}.$$

Плотность воздуха составляет лишь 0,0013 от плотности воды, а скорость звука в воздухе примерно в 4,5 раза меньше, чем в воде. Поэтому для границы раздела «вода — воздух» коэффициент прохождения составляет $k = p_1/p = 4 \cdot 10^{-4}$. При наклонном падении волны на границу раздела это отношение оказывается еще меньшим. Таким образом, мы видим, что звук практически не выходит из воды в воздух.

Иная картина наблюдается при отражении звуковой волны от дна. Плотность верхнего слоя донных осадков обычно лежит в пределах 1,24—2,0 г/см³, а скорость распространения звука в них всего на 2—3% меньше, чем в воде. Поэтому значительная часть падающей из воды на дно звуковой волны переходит в грунт и поглощается в нем.

Информация

Вечерняя математическая школа при факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова объявляет весенний набор учащихся 7—9 классов. Основная

цель ВМШ — углубить в объеме школьной программы и расширить знания по математике, научить основам программирования и работы на ЭВМ. Занятия в школе проводятся в виде лекций и семинарских занятий. Для учащихся ВМШ организуются встречи с учеными фа-

культета. Успешно закончившие школу получают свидетельство об окончании ВМШ. Прием производится по результатам собеседования, которое состоится 3 марта в 10 часов по адресу: 119889, Москва, Ленинские горы, МГУ, факультет ВМК; телефон для справок 139 53 74.



Пузырьки в жидкости

Доктор физико-математических наук
А. А. БОРОВОЙ

Как устроена пузырьковая камера?

В начале пятидесятых годов нынешнего столетия молодой сотрудник Мичиганского университета (США) Дональд Глейзер придумал новый тип прибора, регистрирующего элементарные частицы. Он получил название пузырьковой камеры.*

На рисунке 1 изображена современная пузырьковая камера. Это сооружение, занимающее большой зал высотой в несколько этажей, оснащенное сложной техникой и управляемое быстродействующими электронно-вычислительными машинами. Многие из установок имеют даже собственные имена: «Людмила», «Мирабель», «Гаргамель» и т. п.

*Об этом и других детекторах элементарных частиц можно прочитать, например, в книге А. А. Борового «Как регистрируют частицы» (М.: Наука, 1981, серия «Библиотечка «Квант»). (Примеч. ред.)

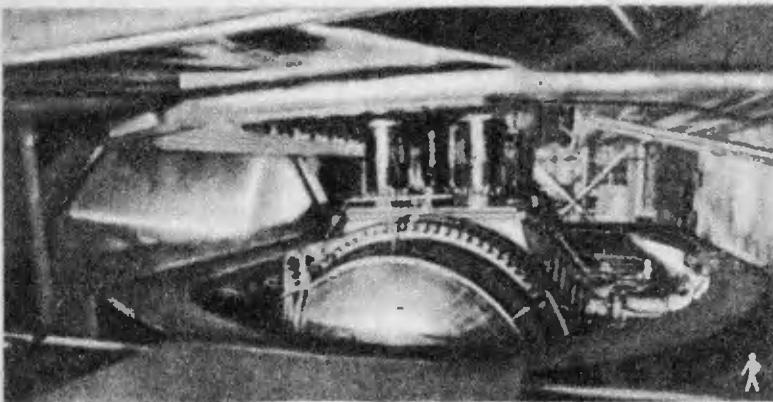


Рис. 1. Пузырьковая водородная камера «Мирабель», используемая для исследований в Институте физики высоких энергий.

Однако первые модели камер, изготовленные Глейзером, никак нельзя было назвать впечатляющими (рис. 2). Их главная часть представляла собой стеклянную ампулу с эфиром объемом несколько кубических сантиметров. Жидкость была нагрета и находилась под давлением около 20 атмосфер (1 атм $\approx 10^5$ Па). Специальное устройство (тоже несложное) позволяло быстро сбросить давление, но при этом эфир закипал не сразу. Если во время такого «ожидания» через жидкость пролетала заряженная частица, оставляя за собой след из ионов, то вдоль следа появлялись пузырьки пара. Сфотографировав след, можно было снова повысить давление, пузырьки исчезали (раздавливались), и прибор был опять готов к работе.

Так пузырьки в жидкости оказались необыкновенно полезными для физики элементарных частиц. На рисунке 3 представлен один из снимков, сделанных с помощью пузырьковой камеры.

Почему же пузырьки появлялись именно на пути частицы?

Сначала вспомним,
что такое кипение

Кипение — это образование по всему объему жидкости пузырьков пара, которые растут и всплывают на поверхность. Очевидно, что для этого давление пара в пузырьках должно быть больше, чем давление в жидкости (иначе последняя их раздавит). Все знают, что при нормальном ат-

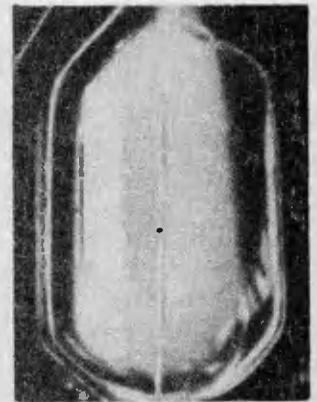


Рис. 2. Трек заряженной элементарной частицы, полученный в первой пузырьковой камере Глейзера.

мосферном давлении вода кипит при 100°C . Именно при такой температуре давление насыщенного пара становится достаточным, и жидкость закипает. Но всегда ли закипает?

Возьмем две пробирки. Одну из них вымоем особенно тщательно, проследим, чтобы на стенках не было царапин или посторонних частиц, и наполним ее дистиллированной водой (приблизительно 10 см^3). Во вторую пробирку нальем такое же количество, но водопроводной воды и еще бросим кусочек мела. Будем подогревать пробирки в одинаковых условиях и в отсутствие прямого соприкосновения с огнем. Оказывается, вода в них будет кипеть по-разному (рис. 4).

В пробирке с водопроводной водой кипение начнется раньше, и процесс этот будет происходить достаточно спокойно и непрерывно. Пузырьки пара образуются, в основном, на кусочке мела. Что касается пробирки с дистиллированной водой, то процесс кипения в ней начнется позже (при большей температуре) и будет происходить неравномерно. В жидкости образуются большие пузыри, их появление и схлопывание сопровождаются громким треском.

В лаборатории удастся очистить сосуд и воду (используется дважды дистиллированная вода) так хорошо, что кипение не наступает вплоть до температуры 140°C . Если в такую воду, ее называющую перегретой, бросить крупинку, произойдет взрыв — так быстро образуются пузыри с паром. Химики хорошо знают это свойство жидкости. Для того чтобы процесс

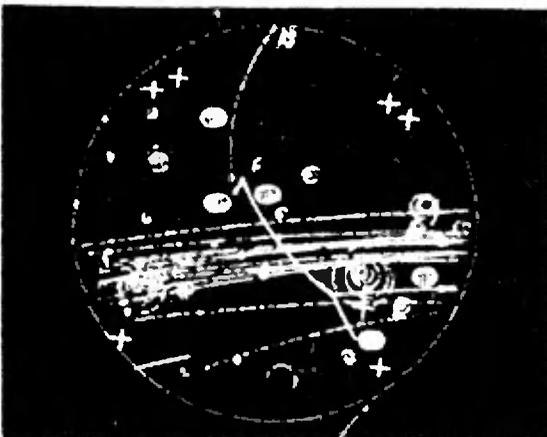


Рис. 3. Фотография процессов взаимодействия и превращения элементарных частиц в жидководородной пузырьковой камере.

кипения происходил равномерно, без взрыва, в сосуд помещают так называемые «кипелки» — обломки стеклянных или фарфоровых трубок, кусочки мрамора и т. п.

Объяснение описанных выше свойств связано с наличием у жидкости поверхностного натяжения. Поверхность жидкости можно представить себе как растянутую упругую пленку. Пленка стремится сжаться — силы поверхностного натяжения стремятся раздавить образовавшийся пузырек. Дополнительное давление *), обусловленное этими силами, тем больше, чем меньше радиус пузырька, так что процесс кипения подавляется в самом зародыше. Именно поэтому однородную жидкость удается перегреть. В то же время, любые неоднородности как в самой жидкости, так и связанные с посторонними включениями, облегчают кипение. Такие неоднородности образуются, в частности, на пути заряженной частицы, вот почему он становится местом образования первых пузырьков. Теперь понятно, что важнейшее условие работы камеры Глейзера — это однородность эфира и чистота ампулы.

Несколько любопытных наблюдений над пузырьками в жидкости

Такие наблюдения можно провести, используя газированную воду. Ее поведение иногда аналогично поведению перегретой жидкости. Сразу же возникает вопрос: *почему и когда газированная вода может служить моделью перегретой жидкости?*

Для опытов понадобится бутылка лимонада, стакан, ложка, сахар и долька шоколада (перечисленные материалы в любом случае гарантируют приятный результат экспериментов). Начнем с того, что быстро откроем бутылку с водой, тогда над горлышком в первый момент появится дымок. *С чем это связано?*

Теперь нальем воду в стакан и пождем, пока опадет пена и в воде будут подниматься только отдельные пузырьки. Закроем стакан плотно

*) Дополнительное давление на пузырек можно оценить по формуле $p=2\sigma/r$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения, r — радиус пузырька. Такое же давление испытывает жидкость в капилляре непосредственно под выпуклой (полюсферической) поверхностью (см. «Физика 9», с. 94).

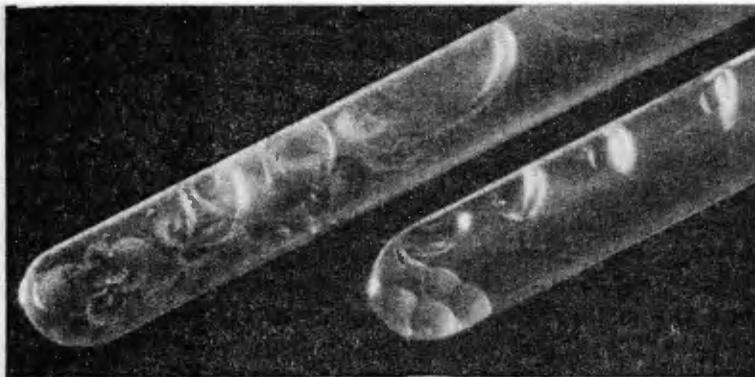


Рис. 4. Так, по-разному, происходит процесс кипения воды в пробирке с дистиллированной водой и в пробирке с водопроводной водой.

прилегающей крышкой — через некоторое время выделение газа совсем прекратится. Откроем стакан, и пузырьки появятся вновь. Почему?

Бросим в стакан щепотку сахара. «Кипение» воды усилится, и на ее поверхности снова появится пена. Очевидно, в воде еще содержалось достаточно много углекислого газа. Что же мешало его выходу, и какую роль сыграл здесь сахарный песок? Бурного выхода газа и появления пены можно добиться и другими путями, например перемешиванием жидкости или переливанием ее из одного стакана в другой.

Наконец, возьмем маленький кусочек шоколада (можно ягоду) и бросим его в стакан. Шоколад тяжелее воды и поэтому пойдет ко дну. Здесь он начнет обрастать пузырьками газа, и они, как поплавки, поднимут шоколад на поверхность. Пузырьки выйдут в воздух, кусочек шоколада вновь опустится на дно и т. д. Иногда такое всплытие и погружение может повторяться до десяти раз.

Как ответить на поставленные вопросы?

По существу, все объяснение сводится к ответу на первый вопрос — почему газированная вода напоминает перегретую жидкость.

Наверное, многие из вас знают, как можно приготовить газированную воду. Нет, не промышленным способом, а обычным домашним — с помощью сифона и баллончиков с углекислым газом (CO_2). Газ из баллончика под давлением поступает в пространство над жидкостью. Для того чтобы он быстрее растворялся в воде, сифон встряхивают. Растворение газа происходит до наступления равнове-

сия. Если он химически не реагирует с жидкостью, то равновесное содержание (плотность, концентрация) газа в жидкости пропорционально его давлению над поверхностью.*)

(Известны и другие домашние способы приготовления «шипучки» — добавлением в воду лимонного сока, пищевой соды и т. п.)

Когда мы быстро открываем бутылку с газированной водой, газ, находящийся над поверхностью под давлением, быстро расширяется и одновременно охлаждается. Пары воды, выходящие вместе с ним, конденсируются, образуя туманное облачко (дымок). После того как давление над поверхностью жидкости значительно уменьшится, растворенный в воде углекислый газ начнет выходить из нее, причем как через поверхность газ — жидкость, так и путем образования пузырьков в объеме жидкости. Сначала, после открытия бутылки, когда равновесие нарушено особенно сильно и в воде имеется большой избыток углекислого газа, пузырьки образуются легко и их много. Поэтому жидкость начинает пениться. Постепенно пена спадает, хотя в воде все еще остается «лишний» газ. Но теперь образование пузырьков затруднено — концентрация газовых молекул стала меньше и случайным образом собраться им вместе и образовать сразу большой пузырек, который бы не раздавили силы поверхностного натяжения, трудно. Пузырьки начинают расти только на неоднородностях в воде, и это действительно похоже на поведение перегретой жидкости.

*) В случае с углекислым газом и водой положение несколько сложнее, так как они реагируют друг с другом. Но получающаяся кислота — соединение нестойкое и легко распадается.

Объяснить все последующие опыты, наверное, не составит для читателей большого труда.

Совершенно неожиданное применение газированной воды

Эту заметку мы начали с рассказа о пузырьковой камере. Кончить ее нам хочется рассказом еще об одном применении пузырьков, причем тоже в физике элементарных частиц.

Несколько лет тому назад перед советскими физиками, исследующими свойства нейтрино, встала следующая задача. Необходимо было из большого объема жидкости (сотни литров) извлечь несколько атомов газа, которые образовались в этом объеме под действием нейтринного излучения. Газ был радиоактивный (неон-19), и его атомы распадались за время, меньшее

одной минуты. Поэтому буквально за секунды надо было среди 10^{28} атомов жидкости разыскать 5—10 атомов газа, извлечь их, транспортировать в счетчик и сосчитать! На первый взгляд, задача казалась нерешаемой.

На помощь пришла идея газированной воды. Жидкость перед облучением насыщалась углекислым газом. Сразу после облучения объем открывался, и жидкость энергично перемешивалась специальными лопастями. Происходило бурное кипение, тем самым поверхность, через которую могли выйти атомы неона, увеличивалась в десятки тысяч раз. Выходящий углекислый газ выносил их, а сам поглощался в другом сосуде (в растворе щелочи). Неон собирался в специальной пробирке и в ней быстро перемещался в счетчик. Вся процедура занимала меньше двадцати секунд.

Обобщение чисел

(Начало см. на с. 6)

Так как для кватернионов не имеет места коммутативность, то есть не всегда имеет место равенство $xy=yx$, деление кватерниона x на кватернион y может происходить «слева» или «справа». Частное z от деления кватерниона x на кватернион y слева задается формулой

$$z = y^{-1}x. \quad (47)$$

Частное от деления кватерниона x на кватернион y справа задается формулой

$$z' = xy^{-1}. \quad (48)$$

Для этих частных мы имеем формулы

$$yz = x; \quad z'y = x. \quad (49)$$

Заметим, что среди всех кватернионов выделяется множество действительных чисел. Это все кватернионы x , для которых x_0 — произвольное действительное число, а остальные координаты равны нулю. Таким образом, множество всех кватернионов является расширением множества действительных чисел.

Как уже было сказано, при перемножении кватернионов не имеет места коммутативность. Все остальные естественные правила, имеющие место для действительных и комплексных чисел, сохраняются.

Упражнение 5. Для кватернионов $q_1 = 2 + i + j$ и $q_2 = 1 + 2i - k$ выполните действия $q_1 + q_2$, $q_1 q_2$, $q_1^{-1} q_2$ и решите уравнение $q_1 z = q_2$.



Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Когда к телу приложены параллельные силы» предназначена восьмиклассникам, «О числе Фарадея и удельном заряде заряженной частицы» — девятиклассникам, «Абсолютно черное тело» — десятиклассникам.

Материалы подготовил И. К. Белкин.

Когда к телу приложены параллельные силы

Хорошо известно, как найти равнодействующую двух сил, приложенных к материальной точке (рис. 1). На векторах, изображающих эти силы, как на сторонах строят параллелограмм; диагональ со стрелкой на конце, проведенная из точки, к которой приложены силы, и есть вектор равнодействующей.

Когда две силы приложены не к материальной точке, а к телу, но так, как показано на рисунке 2, то равнодействующая определяется таким же образом. Пользуясь тем, что точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия («Физика 8», § 46), находят точку C , в которой пересекаются линии действия обеих сил.

Полагая, что силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 приложены именно к этой точке, строят параллелограмм и проводят диагональ. Правда, точка C может оказаться и вне тела, но тогда точку приложе-

ния равнодействующей можно выбрать в любом месте на линии ее действия. Действительно, какую бы точку мы не выбрали, равнодействующая сила \vec{F} сообщит телу такое же ускорение или вызовет такой же вращающий момент, как и силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , вместе взятые.

Если силы параллельны и направлены в одну сторону. Пусть к телу приложены две параллельные сонаправленные силы (рис. 3). Линии действия таких сил нигде не пересекаются, и параллелограмм на них построить нельзя. Тем не менее сложить эти силы и найти их равнодействующую можно.

Нетрудно понять, что равнодействующая направлена параллельно обеим силам и ее модуль равен арифметической сумме модулей складываемых сил. А в какой точке она приложена? Или, другими словами, к какой точке тела надо приложить силу, равную по модулю, но противоположную по направлению равнодействующей, чтобы тело находилось в равновесии?

Чтобы найти точку приложения равнодействующей двух параллельных и одинаково направленных сил, можно воспользоваться правилом моментов («Физика 8», § 48). Проведем прямую, соединяющую точки A и B (см. рис. 3). Где-то на этой прямой должна, очевидно, находиться и точка приложения равнодействующей. Пусть это будет точка O . Допустим, что через эту точку проходит закрепленная ось, перпендикулярная плоскости, содержащей обе складываемые силы (то есть перпендикулярная плоскости рисунка). Если O действительно есть точка приложения равнодейст-

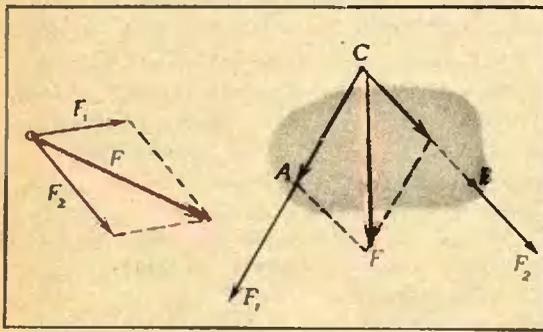


Рис. 1.

Рис. 2.

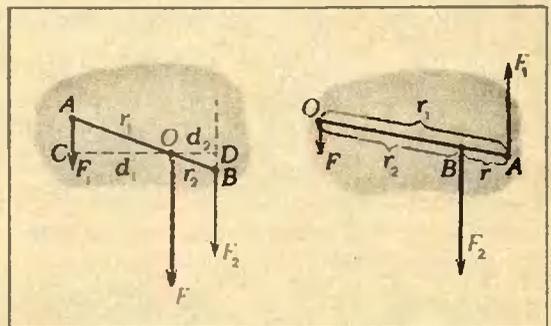


Рис. 3.

Рис. 4.

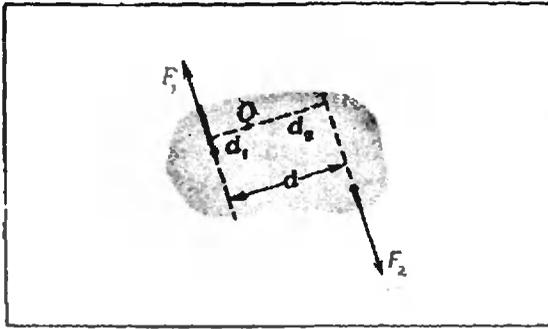


Рис. 5.

вующей, то тело будет находиться в равновесии — равнодействующая уравновешивается силой реакции со стороны оси. С другой стороны, если тело с закрепленной осью находится в равновесии, то алгебраическая сумма моментов сил относительно этой оси должна быть равна нулю. Из рисунка 3 видно, что сила \vec{F}_2 , будь она единственной, поворачивала бы тело вокруг O по часовой стрелке, то есть ее момент $F_2 d_2$ положительный, а сила \vec{F}_1 , если бы она была единственной, поворачивала бы тело против часовой стрелки — ее моменту $F_1 d_1$ надо приписать отрицательный знак (здесь d_1 и d_2 — плечи сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2).

Следовательно,

$$F_2 d_2 - F_1 d_1 = 0, \text{ или } \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Из подобия треугольников AOC и BOD находим, что $d_1/d_2 = r_1/r_2$. Поэтому окончательно получаем

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Это значит, что *равнодействующая двух параллельных, одинаково направленных сил приложена к точке, делящей отрезок, соединяющий точки приложения складываемых сил, в отношении, обратном отношению модулей сил*. Ясно, что эта точка лежит ближе к большей из сил.

Если направления параллельных сил противоположны. Приложенные к телу параллельные силы могут быть направлены и в противоположные стороны (рис. 4). Теперь точка приложения равнодействующей \vec{F} не может находиться где-то между точками приложения сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Ведь вокруг любой точки, лежащей между ними, каждая сила поворачивает тело про-

тив часовой стрелки, знаки моментов этих сил одинаковы, и их сумма не может быть равна нулю, как это требуется для равновесия.

Легко догадаться, что точка приложения равнодействующей лежит за точкой приложения большей силы, как это и показано на рисунке 4. Модуль же равнодействующей равен модулю разности модулей сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 .

В какой же именно точке приложена равнодействующая? На каком расстоянии r_2 от точки приложения большей силы? Воспользуемся опять правилом моментов:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}, \text{ или } F_2 = F_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

Вычтем из правой и левой частей последнего равенства величину F_1 :

$$\begin{aligned} F_2 - F_1 &= F_1 \frac{r_1}{r_2} - F_1 = \\ &= F_1 \left(\frac{r_1}{r_2} - 1 \right) = F_1 \frac{r_1 - r_2}{r_2}, \end{aligned}$$

откуда

$$r_2 = \frac{F_1(r_1 - r_2)}{F_2 - F_1} = \frac{F_1 r_1}{F_2 - F_1}. \quad (*)$$

Таким образом, *точка приложения равнодействующей двух противоположно направленных параллельных сил расположена тем дальше от точки приложения большей из них, чем меньше разность модулей этих сил*.

Пара сил. Мы видели, что если к телу приложены параллельные силы, одинаково или противоположно направленные, то всегда можно найти модуль и направление равнодействующей этих сил и определить точку ее приложения. Если к этой точке приложить силу, равную равнодействующей по модулю, но противоположную ей по направлению, то тело будет находиться в равновесии — оно не будет двигаться поступательно и не будет вращаться.

Но, оказывается, есть один случай, когда равнодействующую найти нельзя. Так бывает, если к телу приложены *две параллельные, противоположно направленные силы, по модулю равные друг другу*. Про такие силы говорят, что они образуют *пару сил*. Модуль их равнодействующей равен, конечно, нулю, а из формулы (*) видно, что при $F_2 - F_1 = 0$ расстояние r_2 до точки приложения равнодействующей равно бесконечности, то есть что

такой точки попросту не существует. И в самом деле, какая же может быть точка приложения равнодействующей, которой нет?

Достаточно, однако, взглянуть на рисунок 5, чтобы понять, что под действием пары сил тело не будет находиться в равновесии — оно будет вращаться. Значит, у пары сил есть некоторый вращающий момент. Но относительно какой оси? Нетрудно показать, что суммарный момент сил, составляющих пару, одинаков для любой оси, перпендикулярной плоскости, в которой лежат обе эти силы (перпендикулярной плоскости рисунка). Действительно, возьмем любую точку O и проведем через нее ось вращения. Момент M_1 силы \vec{F}_1 относительно этой оси равен $F_1 d_1$, момент M_2 силы \vec{F}_2 относительно этой же оси равен $F_2 d_2$. Суммарный момент M обеих сил равен $M_1 + M_2$:

$$M = F_1 d_1 + F_2 d_2.$$

Так как $F_1 = F_2 = F$, то

$$M = F(d_1 + d_2) = Fd,$$

где d — расстояние между линиями действия сил, составляющих пару, называемое *плечом пары сил*. Значит, *момент пары сил равен произведению модуля одной из сил на плечо пары*. Так и говорят — момент пары сил — и не указывают относительно какой оси.

Как же все-таки «ведет» себя тело, к которому приложена пара сил? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, что центр масс тела (о нем говорится в § 44 «Физики 8») движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса тела и к нему приложены все действующие на тело силы (это утверждение называется в физике теоремой о движении центра масс). Но если сумма сил равна нулю, то центр масс не может тронуться с места (если, конечно, он покоился до приложения сил). Когда на тело действует пара сил, сумма сил как раз и равна нулю, и она не может привести в движение центр масс. Тело, однако, вращается. Значит, вращается оно вокруг оси, проходящей через центр масс (ведь все точки на оси вращения находятся в покое). Оси вращения, проходящие через центры масс тел, тем и замечательны, что на них не действуют никакие силы.

О числе Фарадея и удельном заряде заряженной частицы

Явление электролиза, известное с конца XVIII — начала XIX веков, особенно подробно было изучено выдающимся английским физиком М. Фарадеем. В 1834 году была опубликована статья Фарадея, в которой рассказывалось о результатах опытов, приведших к установлению закона электролиза. В этой же статье впервые появились термины, предложенные Фарадеем и ставшие теперь общепринятыми. Это — электрод (а также катод и анод), ион (катион и анион), электролит и название самого процесса — электролиз.

Закон электролиза теперь (но не во времена Фарадея) записывается так («Физика 9», § 69):

$$m = \frac{1}{F} \frac{M}{n} I \Delta t.$$

Здесь m — масса выделившегося на электроде вещества, F — число (постоянная) Фарадея, M — молярная (или атомная) масса вещества, n — его валентность, $I \Delta t$ — заряд, прошедший через электролит.

Заметим, что величина, численно равная отношению M/n , в химии называется *химическим эквивалентом* (так она называлась и при Фарадее, хотя понятия валентности тогда еще не было). Величина эта показывает, какая масса данного вещества вступает в соединение с массой водорода, равной его атомной массе (или замещает эту массу в химических реакциях). Например, для атомарного кислорода относительная атомная масса равна 16, а валентность — 2, так что его химический эквивалент равен 8. Чтобы из кислорода и водорода получилась вода, на каждую единицу массы водорода должно приходиться восемь единиц массы кислорода: 1 кг водорода соединяется с 8 кг кислорода, и в результате получается 9 кг воды.

Физический смысл числа Фарадея. Допустим, что электролиз проводится так, что на электроде выделяется масса вещества, численно равная его химическому эквиваленту. Тогда из закона электролиза следует, что число Фарадея F численно равно электри-

ческому заряду, переносимому ионами, суммарная масса которых численно равна химическому эквиваленту. Из опытов $F=96500$ Кл/моль.

Если выделившееся вещество одновалентное, его химический эквивалент численно равен массе одного моля, а число ионов, перенесших эту массу, равно числу Авогадро N_A . Если же на электроде выделилось двухвалентное вещество, 96 500 кулонов переносится числом ионов, вдвое меньшим числа Авогадро, и т. д.

Удельный заряд протона и других заряженных частиц. Представим себе, что опыт с прохождением тока через электролит проводится так, что на катоде выделяется водород, причем его масса численно равна химическому эквиваленту. Поскольку водород одновалентен, через электролит пройдет один моль ионов водорода. Число этих ионов равно, конечно, числу Авогадро, а перенесенный ими заряд численно равен постоянной Фарадея. Таким образом, мы можем сказать, что масса иона водорода численно равна отношению химического эквивалента к числу Авогадро, а заряд этого иона численно равен отношению постоянной Фарадея к числу Авогадро. Отсюда, согласно закону электролиза, получаем, что отношение заряда иона водорода к его массе, называемое *удельным зарядом* иона, численно равно числу Фарадея, деленному на атомную массу.

Но ион водорода — это ядро атома водорода. Оно имеет особое название — протон (ядра водорода входят в состав атомных ядер всех остальных химических элементов). В единицах СИ удельный заряд протона равен

$$\frac{q_p}{m_p} = \frac{F/N_A}{M/N_A} = \frac{9,65 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}}{10^{-3} \text{ кг/моль}} = 9,65 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг.}$$

Почему мы здесь обращаем специальное внимание на удельный заряд протона? Дело в том, что удельный заряд всякой электрически заряженной частицы — одна из ее важнейших характеристик. От нее зависит, например, скорость и ускорение частицы, движущейся в электрическом поле. Приведем два примера.

Пусть некоторая частица с зарядом q и массой m движется в электрическом поле с напряженностью \vec{E} ,

так что на нее действует сила $q\vec{E}$. Напишем уравнение, выражающее второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = q\vec{E},$$

откуда для ускорения \vec{a} частицы получаем

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}.$$

Мы видим, что ускорение частицы определяется не ее зарядом и не ее массой по отдельности, а отношением q/m , то есть удельным зарядом частицы.

Предположим, что частица, имеющая заряд q и массу m , переместилась в электрическом поле от одной точки к другой, напряжение между которыми равно U . Тогда работа, совершенная полем над частицей, будет равна qU . Если вначале частица покоилась, то за счет этой работы она приобретет кинетическую энергию $mv^2/2$:

$$qU = \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда для скорости частицы получаем

$$v = \sqrt{2 \frac{q}{m} U}$$

— скорость частицы определяется опять-таки ее удельным зарядом.

Абсолютно черное тело

Свет и цвет. Когда мы при дневном (солнечном) свете смотрим на различные тела, окружающие нас, мы видим их окрашенными в различные цвета. Так, трава и листья деревьев — зеленые, цветы — красные или синие, желтые или фиолетовые. Есть также черные, белые, серые тела. Все это не может не вызвать удивления. Казалось бы, все тела освещены одним и тем же светом — светом Солнца. Почему же различны их цвета? Постараемся ответить на этот вопрос.

Будем исходить из того, что свет — это электромагнитная волна, то есть распространяющееся переменное электромагнитное поле. В солнечном свете

содержатся волны, в которых электрическое и магнитное поля колеблются с различными частотами.

Всякое же вещество состоит из атомов и молекул, содержащих заряженные частицы, которые взаимодействуют друг с другом. Поскольку частицы заряжены, под действием электрического поля они могут двигаться, а если поле переменное — то они могут совершать колебания, причем каждая частица в теле имеет определенную собственную частоту колебаний.

Эта простая, хотя и не слишком точная, картина позволит нам понять, что происходит при взаимодействии света с веществом.

Когда на тело падает свет, электрическое поле, «принесенное» им, заставляет заряженные частицы в теле совершать вынужденные колебания (поле световой волны переменное!). При этом у некоторых частиц их собственная частота колебаний может совпасть с какой-то частотой колебаний поля световой волны. Тогда, как известно, произойдет явление резонанса — резкого увеличения амплитуды колебаний (о нем говорится в § 9 и 20 «Физики 10»). При резонансе энергия, принесенная волной, передается атомам тела, что в конечном счете, вызывает его нагревание. О свете, частота которого попала в резонанс, говорят, что он поглотился телом.

Но какие-то волны из падающего света не попадают в резонанс. Однако они тоже заставляют колебаться частицы в теле, но колебаться с малой амплитудой. Эти частицы сами становятся источниками так называемых вторичных электромагнитных волн той же частоты. Вторичные волны, складываясь с падающей волной, составляют отраженный или проходящий свет.

Если тело непрозрачное, то поглощение и отражение — вот все, что может произойти с падающим на тело светом: не попавший в резонанс свет отражается, попавший — поглощается. В этом и состоит «секрет» цветности тел. Если, например, из состава падающего солнечного света в резонанс попали колебания, соответствующие красному цвету, то в отраженном свете их не будет. А наш глаз устроен так, что солнечный свет, лишенный своей красной части, вызывает ощущение зеленого цвета. Окрас-

ка непрозрачных тел зависит, таким образом, от того, какие частоты падающего света отсутствуют в свете, отраженном телом.

Существуют тела, в которых заряженные частицы имеют так много различных собственных частот колебаний, что каждая или почти каждая частота в падающем свете попадает в резонанс. Тогда весь падающий свет поглощается, и отражаться просто нечему. Такие тела называют черными, то есть телами черного цвета. В действительности черный цвет — это не цвет, а отсутствие всякого цвета.

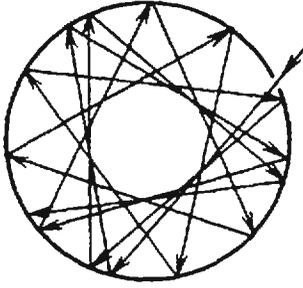
Есть и такие тела, в которых ни одна частота в падающем свете не попадает в резонанс, тогда поглощения нет вовсе, а весь падающий свет отражается. Такие тела называют белыми. Белый цвет — тоже не цвет, это смесь всех цветов.

Излучение света. Известно, что всякое тело может само стать источником света. Это и понятно — ведь во всяком теле есть колеблющиеся заряженные частицы, способные стать источниками испускаемых волн. Но при обычных условиях — при небольших температурах — частоты этих колебаний сравнительно малы, и испускаемые длины волн существенно превосходят длины волн видимого света (инфракрасный свет). При высокой же температуре в теле «включаются» колебания и более высоких частот, и оно начинает испускать световые волны, видимые глазом.

Какой же свет излучает тело, колебания каких частот могут быть «включены» при нагревании? Очевидно, что возникнуть могут только колебания с собственными частотами. При низких температурах число заряженных частиц, имеющих высокие собственные частоты колебаний, мало, и их излучение незаметно. С повышением температуры число таких частиц возрастает, и становится возможным излучение видимого света.

Связь между излучением и поглощением света. Поглощение и излучение — это противоположные друг другу явления. Однако между ними есть нечто общее.

Поглощать — это значит «брать», излучать — значит «давать». А что «берет» тело, поглощая свет? Очевидно, то, что может взять, то есть свет тех частот, которые равны собственным частотам колебаний его частиц. Что



«дает» тело, излучая свет? То, что оно имеет, то есть свет, соответствующий собственным частотам колебаний. Поэтому между способностью тела поглощать свет и способностью его излучать должна существовать тесная связь. И связь эта простая: тело излучает тем больше, чем сильнее оно поглощает. При этом, естественно, самым ярким излучателем должно быть черное тело, которое поглощает колебания всех частот. Математически эта связь была установлена в 1859 году немецким физиком Густавом Кирхгофом.

Назовем испускательной способностью тела энергию, излучаемую единицей площади его поверхности в единицу времени, и обозначим ее через $E_{\lambda, T}$. Она различна для разных длин волн (λ) и разных температур (T), отсюда индексы λ и T . Поглощательной способностью тела назовем отношение поглощенной телом световой энергии в единицу времени к падающей. Обозначим ее через $A_{\lambda, T}$ — она тоже различна для разных λ и T .

Закон Кирхгофа гласит, что отношение испускательной и поглощательной способностей одинаково для всех тел:

$$\frac{E_{\lambda, T}}{A_{\lambda, T}} = C.$$

Величина C не зависит от природы тел, но зависит от длины волны света и от температуры: $C = f(\lambda, T)$. Согласно закону Кирхгофа, тело, которое при данной температуре лучше поглощает, должно интенсивнее излучать.

Абсолютно черное тело. Закон Кирхгофа справедлив для всех тел. Это значит, что его можно применить и к такому телу, которое поглощает все без исключения длины волн. Такое тело называют абсолютно черным. Для него поглощательная способность равна единице, так что закон Кирхгофа принимает вид

$$E_{\lambda, T} = C = f(\lambda, T).$$

Таким образом, становится ясным смысл функции $f(\lambda, T)$: она равна испускательной способности абсолютно черного тела. Задача нахождения функции $C = f(\lambda, T)$ превратилась в задачу найти зависимость энергии излучения абсолютно черного тела от температуры и длины волны. В конце концов, после двух десятилетий тщетных попыток она была решена. Ее решение, данное немецким физиком-теоретиком Максом Планком, стало началом новой физики — квантовой физики.

Заметим, что абсолютно черных тел в природе не существует. Даже самое черное из всех известных веществ — сажа — поглощает не 100, а 98 % падающего на него света. Поэтому для экспериментального исследования излучения абсолютно черного тела использовалось искусственное устройство.

Оказалось, что свойствами абсолютно черного тела обладает... замкнутая полость с малым отверстием (см. рисунок). В самом деле, когда в отверстие попадает луч света, внутри полости он испытывает множество последовательных отражений, так что шансов выйти из отверстия наружу у него очень мало. (По этой же причине открытое окно в доме кажется темным даже в яркий солнечный день.) Если такое тело нагреть, то излучение, исходящее из отверстия, практически ничем не отличается от излучения абсолютно черного тела.

Хорошей имитацией абсолютно черного тела может служить и труба, один конец которой закрыт. Если трубу нагреть, ее открытый конец светит как абсолютно черное тело. При обычной же температуре он выглядит совершенно черным, как и отверстие в полости.

Математика 8, 9

Публикуемая ниже заметка «Еще 13 доказательств теоремы о биссектрисе» адресована восьмиклассникам. Заметка «О теореме Лагранжа» предназначена для девятиклассников. Естественно, каждая из этих заметок может быть полезной и интересной не только учащимся указанных классов.

Еще 13 доказательств теоремы о биссектрисе

В журнале «Квант» № 8 за 1983 год была помещена заметка С. Р. Сефибекова «Четыре доказательства теоремы о биссектрисе». Редакция получила ряд писем от читателей, в которых приводятся новые доказательства этой теоремы. Основой настоящей заметки послужили материалы, которые прислал С. Г. Губа. Кроме того, были использованы доказательства, указанные А. В. Аляевым, А. Г. Гольдбергом, В. Н. Дубовым, А. И. Мостовым.

Напомним условие теоремы.

Во всяком треугольнике биссектриса внутреннего угла делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Иными словами, если в треугольнике ABC проведена биссектриса CD , то $AD:BD=AC:BC$.

Приведем еще семь доказательств этой теоремы, шесть из которых вполне доступны семиклассникам после прохождения темы «Преобразования фигур».

Очевидно, если $AC=BC$, то теорема верна. Поэтому будем считать, что $AC \neq BC$. Пусть, например, $AC > BC$. Тогда биссектриса CD не может быть перпендикулярна к стороне AB , так как в противном случае прямоугольные треугольники CAD и CBD были бы равны по катету и прилежащему

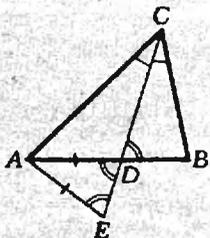


Рис. 1.

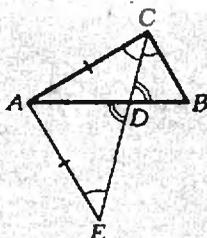


Рис. 2.

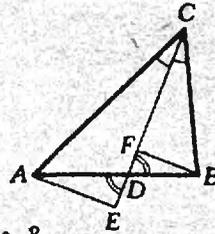


Рис. 3.

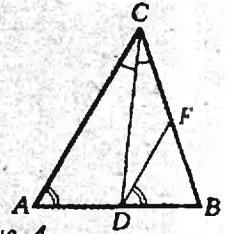


Рис. 4.

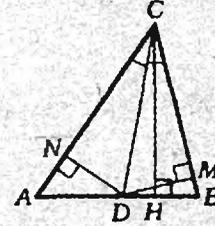


Рис. 5.

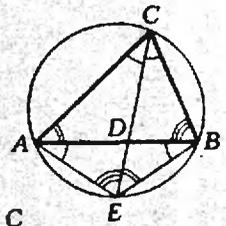


Рис. 6.

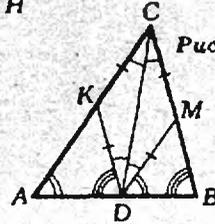


Рис. 7.

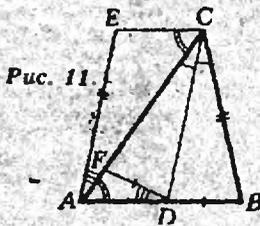
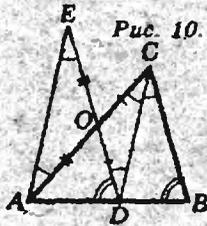
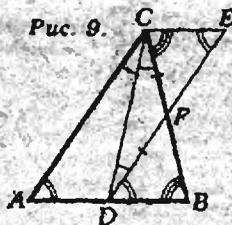
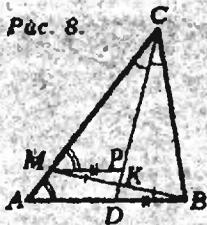
острому углу, откуда следовало бы, что $AC=BC$.

Первое доказательство. Построим на луче CD точку E , такую, что $AE=AD$ (рис. 1). Тогда $\angle AEC = \angle ADE = \angle CDB$. Следовательно, треугольники ACE и BCD подобны (по двум углам). Это значит, что $AE:BD = AC:BC$. Приняв во внимание, что $AE=AD$, получим $AD:BD = AC:BC$.

Второе доказательство. Построим на луче CD точку E , такую, что $AE=AC$ (рис. 2). Тогда $\angle AED = \angle ACD$, то есть треугольники AED и BCD подобны. Из их подобия имеем $AD:BD = AE:BC$. Поскольку $AE=AC$, то теорема доказана. Вариант построения — провести через точку A прямую, параллельную CB , до пересечения с прямой CD в точке E .

Третье доказательство. Из вершин A и B опустим перпендикуляры AE и BF на прямую CD (рис. 3). Из подобия прямоугольных треугольников ADE и BDF получим $AD:BD = AE:BF$. В то же время из подобия прямоугольных треугольников ACE и BCF будем иметь $AC:BC = AE:BF$. В полученных пропорциях правые отношения равны, поэтому равны и левые, то есть $AD:BD = AC:BC$.

Четвертое доказательство. Проведем через точку D прямую, параллельную стороне AC (рис. 4). Тогда по обобщенной теореме Фалеса



$AD:BD=CF:FB$. Из подобия треугольников ABC и DBF имеем $AC:CB=FD:FB$, и так как $CF=FD$, то $AC:BC=CF:FB$. Следовательно, $AD:BD=AC:BC$ (оба отношения равны $CF:FB$).

Пятое доказательство. Площади треугольников, имеющих равные высоты, относятся как соответствующие им основания. Поэтому $S_{CDA}:S_{CDB}=AD:DB$ (рис. 5). С другой стороны, по свойству биссектрисы, высоты в треугольниках CDA и CDB , опущенные из вершины D , равны. Следовательно, $S_{CDA}:S_{CDB}=AC:BC$. Итак, $AD:BD=AC:BC=S_{CDA}:S_{CDB}$.

Шестое доказательство. Опишем вокруг треугольника ABC окружность и продолжим CD до пересечения с окружностью в точке E (рис. 6). Из подобия треугольников ACE и DCB получаем $AC:AE=CD:DB$, то есть $AC \cdot DB=AE \cdot CD$. Из подобия треугольников BCE и DCA имеем $BC:BE=CD:AD$, то есть $BC \cdot AD=BE \cdot CD$. Заметив, что $AE=BE$, получим $AC \cdot DB=BC \cdot AD$, откуда $AD:BD=AC:BC$.

Седьмое доказательство. Проведем через точку D две прямые, одна из которых параллельна стороне AC и пересекает сторону BC в точке M , а другая — параллельна стороне BC и пересекает сторону AC в точке K (рис. 7). Легко доказать, что четырехугольник $KCMD$ — ромб. Из подобия треугольников AKD и DMB имеем $AD:BD=DK:BM$. Так как $DK=DM$, то $AD:BD=DM:BM$. Заменяя в полученной пропорции отношение $DM:BM$ равным ему отношением $AC:BC$ (на основании подобия треугольников ABC и DBM), получим

требуемую пропорцию.

С помощью построений, изображенных на рисунках 8—11, читателю предоставляется возможность получить еще четыре доказательства этой теоремы.

В заключение наметим еще два доказательства теоремы, предназначенные для читателей, знакомых с векторами и геометрическими преобразованиями.

1. Для любой точки D отрезка AB $\vec{CD} = \lambda \vec{CA} + (1-\lambda) \vec{CB}$, где $\lambda = DB:AB$; $1-\lambda = AD:AB$. Действительно, $\vec{CD} = \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{CB} + \lambda \vec{BA} = \vec{CB} + \lambda(\vec{CA} - \vec{CB}) = \lambda \vec{CA} + (1-\lambda) \vec{CB}$.

В нашем случае вектор \vec{CD} параллелен вектору $(1/CA) \cdot \vec{CA} + (1/CB) \vec{CB}$ (см. рис. 7) и поэтому $(1/CA):(1/CB) = \lambda:(1-\lambda)$, откуда $AD:DB=CA:CB$.

2. Выполним последовательно симметрию относительно точки D , гомотегию $H_D^{BD,AD}$ и $H_C^{AC/BC}$, а затем симметрию относительно биссектрисы CD (через H_O обозначена гомотетия с центром O и коэффициентом k). В результате точка A останется на месте, а прямая CD перейдет в себя, в частности, расстояние между ними сохранится. Следовательно, коэффициент итогового преобразования подобия равен 1, то есть $AC/BC \cdot BD/AD=1$.

Б. И.

О теореме Лагранжа

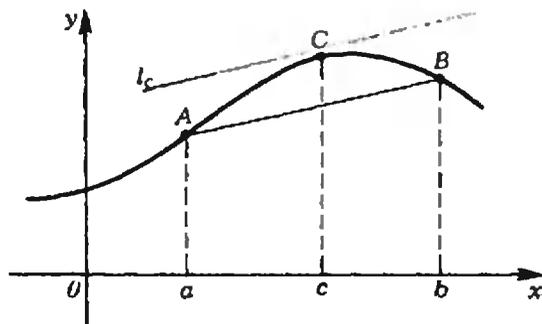
Прежде всего напомним формулировку теоремы Лагранжа.

Пусть функция f дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка. Тогда между любыми двумя точками a и b этого промежутка найдется такая точка c , что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

Эта теорема допускает простую геометрическую интерпретацию. Возьмем на графике функции f две точки $A=M(a; f(a))$ и $B=M(b; f(b))$ (см. рисунок). Угловым коэффициентом прямой AB равен $(f(b) - f(a))/(b - a)$, угловым коэффициентом касательной к графику функции f в точке c абсциссой $x=c$ равен $f'(c)$. Поэтому, записав

(Окончание см. на с. 36)



Задачи

1. «Николай Иванович,— спросил Вадик у знакомого продавца магазина,— сколько стоит блокнот?» «16 блокнотов стоят столько же рублей, сколько блокнотов можно купить на 1 рубль»,— с улыбкой ответил продавец. Сколько же стоит один блокнот?

2. В последнее время я много хожу на лыжах. Правда, позавчера я прошел на 3 км больше, чем вчера, а вчера на 40 км меньше, чем позавчера и сегодня вместе. Сколько километров я прошел на лыжах сегодня?

3. «Нарисуйте в тетрадах какой-нибудь многоугольник, стороны которого проходят по линиям сетки,— сказал учитель.— Так. Теперь найдите число его сторон». «12» — сказал Вова. «4» — сказал Петя. «10» — сказал Андрей. У них были нарисованы многоугольники, изображенные на рисунке. Интересно, что у остальных школьников тоже оказались многоугольники с четным числом сторон. Почему?

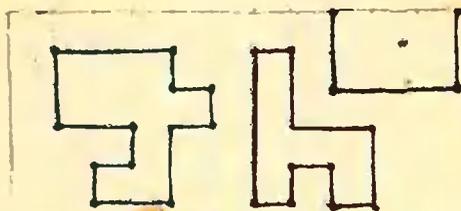
4. Какая физическая ошибка допущена в следующем стихотворении:
 «Она жила и по стеклу текла,
 Но вдруг ее морозом оковало,
 И неподвижной льдинкой капля
 стала,
 А в мире поубавилось тепла.»?

Эти задачи нам предложили С. Р. Сефибеков, А. А. Панов, Н. К. Антонович, А. П. Савин.

Бег по кругу
и длинный рассказ

Л. КЭРРОЛЛ

В 7-м и 8-м номерах «Кванта» прошлого года были опубликованы первые две главы книги Льюиса Кэрролла «Алиса в стране чудес», снабженные вопросами и задачами, придуманными в редакции. Судя по многочисленным письмам читателей, этот материал понравился. Поэтому мы продолжаем публикацию этой замечательной книги с новыми вопросами и задачами (см. следующий разворот журнала). Читателей, у которых есть эта книга, мы просим присылать задачи и вопросы к последующим главам, начиная с шестой.





БЕГ ПО КРУГУ И ДЛИННЫЙ РАССКАЗ

Общество, собравшееся на берегу, имело весьма неприглядный вид: перья у птиц были взъерошены, шерстка у зверьков промокла насквозь. Вода текла с них ручьями, всем было холодно и неуютно.



Прежде всего, конечно, нужно было решать, как поскорее стали держать совет. Не прошло и нескольких минут, как Алиса уже чувствовала себя так, словно знала их всех целую жизнь. Она даже лоспорила с Полулайчиком Лори, который надулся и только твердил:

— Я старше, чем ты, и лучше знаю, что к чему! Алиса потребовала, чтобы он сказал, сколько ему лет, но Полулайчик решительно отказался. На том спор и кончился.

Наконец, Мышь, к которой все относились с почитием, закричала: — Садитесь, все садитесь и слушайте. Вы меня вмиг выдохнете! Мышь не удостоила его ответом и торопливо продолжала: — ...нашел это, — отвечала Мышь. — Ты что, не знаешь, что такое «это»? — Еще бы мне не знать, — отвечал Робин Гусь. — Когда я что-нибудь нахожу, это обычно бывает лягушка или червяк. Вопрос в том, что же нашел архиепископ?

Мышь не удостоила его ответом и торопливо продолжала: — ...нашел к которой все относились с почитием, закричала: — Садитесь, все садитесь и слушайте. Вы меня вмиг выдохнете! Мышь не удостоила его ответом и торопливо продолжала: — ...нашел

Задача 1. Сколько лет полулайчику, если в этом году ему исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения?



Я хотел сказать, — обиженно проговорил Додо, — что нужно устроит Бег по кругу. Тогда мы вмиг выдохнем! — А что это такое? — спросила Алиса. Сказать по правде, ее это не очень интересовало, но Додо многозначительно молчал, видя, ждал вопроса. И так как все тоже молчали, пришлось спрашивать Алисе. — Чем объяснить, — сказал Додо, — лучше показать! (Может, и ты захочешь как-нибудь зимой

сыграть в эту игру? В таком случае я расскажу тебе, что делал Додо.) Сначала он нарисовал на земле круг. Правда, круг вышел не очень-то ровный, но Додо сказал:

— Простите, — спросила, нахмурилась, Мышь с презренной учтивостью, — вы, кажется, что-то сказали? — Нет-нет, — поспешно ответил Полулайчик. — Значит, мне показалось, — заметила Мышь. — И так, я продолжаю. Эдвин, граф Мерсии, и Моркар, граф Нортумбрии, поддержали Вильгельма Завоевателя, и даже Стиванд, архиепископ Кентерберийский, нашел это благоразумным...

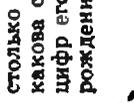
Что он нашел? — спросил Робин Гусь. — ...нашел это, — отвечала Мышь. — Ты что, не знаешь, что такое «это»? — Еще бы мне не знать, — отвечал Робин Гусь. — Когда я что-нибудь нахожу, это обычно бывает лягушка или червяк. Вопрос в том, что же нашел архиепископ?

Мышь не удостоила его ответом и торопливо продолжала: — ...нашел к которой все относились с почитием, закричала: — Садитесь, все садитесь и слушайте. Вы меня вмиг выдохнете! Мышь не удостоила его ответом и торопливо продолжала: — ...нашел

Задача 1. Сколько лет полулайчику, если в этом году ему исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения?

Задача 3. Как видите, это старая и мудрая Мышь. Сколько ей лет, если она моложе Додо во столько же раз, во сколько же она старше орленка Эда, причем Додо и Мыши вместе 84 года, а Эду меньше 7?

ПРАВИЛА ВНОСЬТЕ ОРМЫ- НЕСУЩ



вала от нее глаз, это благодарным и решил вместе с она знала, что ес- Эдгаром Этиленгом отправиться к ли тут же не вы- Вильгельму и предложить ему корону. сохнет, ей грозит Ну как, милочка, сильная простуда. подсыхаешь? — спросила она Алису.

— Гхе-хе! — С меня так и льет, — ответила откашлялась с Алиса печально. — Я и не думаю сох- важным видом нуть! — В таком случае, — прово-

Мышь. — Все зглясил Додо, — я пре- лагаю принять резолю- цию о немедленном рос- луске собрания с целью принятия самых экстре- ных мер для скорей-

шего... — Говорите по-человечески, — ска- зал Орленок Эд. — Я и поло- вины этих слов не знаю! Да и сами вы, по-моему, их не понимаете. — И Орленок от- вернулся, чтобы скрыть улыбку. Птицы тихо захихикали.

Задача 2. Сумма возрастов семи людей 100 лет. Возрасты любых двух из них различны. Найдутся ли среди них трое, сумма возрастов которых не меньше 50 лет?

STOP
ПОЧЕМУ, КОГДА ПТИЦА НАМОКАЕТ, ЕЁ ПЕРЬЯ ОКАЗЫВАЮТСЯ ВЗЪЕРОШЕННЫМИ?

ЕСТВ ЕННА 99

STOP
А ПОЧЕМУ, КОГДА ВАША ОДЕЖДА НАМОКАЕТ, СТАНО- ВИТСЯ ХОЛОДНО, И ВЫ ДАЖЕ МОЖЕТЕ ПРОСТУДИТЬСЯ?

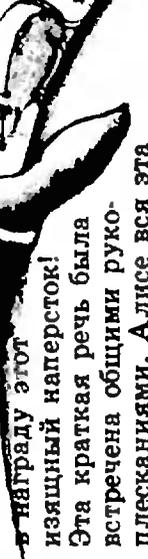
STOP
ПРАВДА ЛИ, ЧТО НА БЕГУ ЛЕГЧЕ ВЫСОХНУТЬ?



КАК ВЫСОКО МОЖЕТ ПОДНЯТЬСЯ СТРАШНЫЙ ШУМ!



ЗАЧЕМ ХЛОПАЮТ ПО СПИНЕ, ЕСЛИ ЧТО-НИБУДЬ ЗАСТРЯНЕТ В ГОРЛЕ?



в награду этот изысканный наперсток! Эта краткая речь была встречена общими рукоплесканиями. Алисе вся эта церемония показалась очень смешной, но вид у всех был такой серьезный, что она не посмела засмеяться. Она хотела ответить на речь Додо, но не могла ничего придумать и только чинно поклонилась и взяла наперсток. Все принялись за угощение. Поднялся страшный шум. Большие птицы мигом проломили свои цукаты и начали жаловаться, что и распробовать их не успели. А у птичек меньше цукаты застряли в горле —



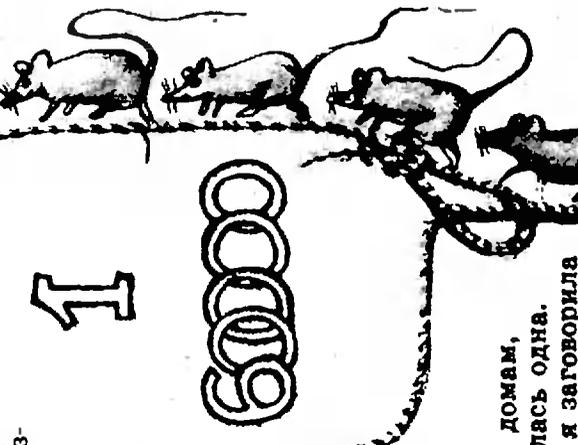
пришлось хлопнуть их по спине. Наконец все поели, уселись в круг и попросили Мышь рассказать им еще что-нибудь.



— Вы обещали рассказать нам свою историю, — сказала Алиса. — И почему вы ненавидите... К и С. Последнюю фразу она произнесла шепотом, боясь, как бы не обидеть Мышь снова. — И не подумаю! — сказала обиженно Мышь, встала и пошла прочь. — Болтаешь какой-то вздор! Ты, верно, хочешь меня оскорбить! — Что этого и в мыслях не было! Просто вы все время обижаетесь. Мышь в ответ только заворчала.

А потом раставил всех без всякого порядка по кругу. Никто не подавал команды — все побежали, когда захотели. Трудно было понять, как и когда должно кончиться это состязание. Через полчаса, когда все набегались и продохли, Додо вдруг закричал: — Бег закончен! Все столпились вокруг него и тяжело дыша, стали спрашивать: — Кто победил? — На этот вопрос Додо не мог ответить, не подумав как следует. Он застыл на месте, приложив ко лбу палец (в такой позе обычно изображают Шекспира, помнишь?), и погрузился в размышления.

А все стояли вокруг и молча ждали. Наконец, Додо прознес: — Победили все! И каждый получит награды! — А кто же их будет раздавать? — спросили все хором. — Она, конечно,



впечаление. Птицы затронулись филозофией сорока начала кутаться в шаль. — Пойду я домой, — сказала она. — Ночной вреден дух вреден горлу. А Канарейка стала кликать своих детисшек: — Идемте домой, мои дорогие! Вам давно пора в постель. Вскоре под разными предлогами все разошлись по домам, и Алиса осталась одна. «И зачем это я заговорила

Задача 4. Сколькими способами может Додо расставить по кругу всех перечисленных участников бега?

Задача 5. (Л. Керролл) Кошка съедает

1 минуту.
За сколько
времени
она съест
60 000
мышей?

но, — ответил Додо, ткнув пальцем в Алису. Все окружили Алису и наперебой закричали: — Награды! Награды! Раздавай награды! — Алиса растерялась. В замешательстве она сунула руку в карман и вытасила оттуда пакетик цукатов. (К счастью, слезы их не размочили.) Она раздавала их собравшимся — каждому по цукату, только-только хватило.

— Но она ведь тоже заслужила награду, — сказала Мышь. — Конечно, подхватил важно Додо. И, повернувшись к Алисе, спросил: — У тебя осталось что-нибудь в кармане? — Нет, — отвечала Алиса грустно. — Только надерстук. — Давай его сюда! — приказал Додо. — Мы просим тебя принять

Задача 6. Четыре бегуна расположились в вершинах квадрата со стороной a . По команде они побежали со скоростью v . Каждый бегун все время бежит прямо на своего соседа по часовой стрелке. Сколько времени будет продолжаться такой бег?

КАКУЮ НУЖНО РАЗВИВАТЬ СИЛУ, ЧТОБЫ ДЕРЖАТЬ СЕБЯ В РУКАХ?

— Прошу вас, не уходите! — крикнула ей вслед Алиса. — Доскажите нам вашу историю! — И все хором подержали ее: — Да-да, не уходите! Но Мышь только мотнула нетерпеливо головой и побежала быстрее.

— Как жаль, что она не пожелала остаться, — вздохнул Попугайчик Лори, как только она скрылась из виду. А старая Медуза сказала своей дочери: — Ах, дорогая, пусть это послужит тебе уроком. Нужно всегда держать себя в руках!



— Поддержите-ка лучше язык, маменька, — отвечала юная Медуза с легким раздражением. — Не вам об этом говорить. Вы даже устрицу выведете из терпения! — Вот бы сюда нашу Дину! — сказала громко Алиса, не обращаясь ни к кому в отдельности. — Она бы миг притащила ее обратно!

— Позвольте вас спросить: кто эта Дина? — заинтересовался Лори. Алиса всегда была рада поговорить о своей любимце. — Это наша кошка, — отвечала она с готовностью. — Вы даже представить себе не можете, как она ловит мышей! А птиц как खा-тает! Раз — и проглотила, даже косточек не оставила!

Речь эта произвела на собравшихся глубокое

о Дине, — грустно подумала Алиса. — Никому она здесь не нравится. А ведь лучше кошки не сыщешь! Ах, милочка! Увижу я тебя когда-нибудь или нет? — Тут бедная Алиса снова заплакала — ей было так грустно и одиноко. Немного спустя снова послышался легкий звук шагов.

Она оглянулась. Может, это Мышь перестала сердиться и пришла, чтобы закончить свой рассказ?



О теореме Лагранжа

(Начало см. на с. 30)

равенство (1) в виде $(f(b) - f(a))/(b-a) = f'(c)$, мы получим геометрическую интерпретацию теоремы Лагранжа: существует такая точка c промежутка $]a; b[$, что касательная к графику функции f в точке с абсциссой $x=c$ параллельна прямой AB .

Точек $x=c$, для которых выполнено равенство (1), может быть и более одной. В этом вы можете убедиться, выполнив следующее упражнение.

1. Найдите все значения $x=c$, при которых для функции $f(x)=(x-1)^3$, $a=0$, $b=2$, выполняется равенство (1). (Ответ: $c=1-1/\sqrt{3}$ и $c=1+1/\sqrt{3}$.)

Мы хотим познакомить вас с механической интерпретацией теоремы Лагранжа. Пусть материальная точка движется по прямой и в момент t имеет координату $s(t)$. Тогда ее средняя скорость за промежуток времени от t_1 до t_2 будет равна $(s(t_2)-s(t_1))/(t_2-t_1)$. Хорошо известно, что мгновенная скорость в момент времени t равна $s'(t)$. Вполне понятно, что в некоторые моменты

времени мгновенная скорость будет больше средней скорости, в другие — меньше. Однако обязательно найдется такой момент времени (и может быть не один!), что средняя скорость будет равна мгновенной. Следовательно, для некоторого $t_0 \in]t_1; t_2[$

$$(s(t_2)-s(t_1))/(t_2-t_1) = s'(t_0),$$

то есть $s(t_2)-s(t_1) = s'(t_0)(t_2-t_1)$. (Сравните эту формулу с формулой (1).)

Отметим также, что в случае, когда f не имеет производной в какой-либо точке, лежащей между a и b , применять теорему Лагранжа нельзя: рассмотрите в качестве примера функцию $f(x) = |x^2 - 1|$, $a=1/2$, $b=\sqrt{7}/2$.

Упражнения

2. Для каких промежутков можно применить теорему Лагранжа к функции f , если: а) $f(x)=x$; б) $f(x)=\{x\}$; в) $f(x)=|x|$?

3. Материальная точка движется по прямой по закону $s(t)=t^3$, где s — путь в метрах, t — время в секундах. В какой момент времени ее мгновенная скорость равна средней скорости на промежутке от $t_1=13$ с до $t_2=46$ с?

4. В каких точках для функций $f(x)=x^2$ и $g(x)=px^2+qx+r$ для промежутка $[a; b]$ выполнено равенство (1)?

Как объяснить геометрически совпадение результатов для обеих функций?

Л. Н. Смоляков

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. В драмкружке число мальчиков составляет 80% от числа девочек. Сколько процентов составляет число девочек в этом кружке от числа мальчиков?

2. Какое из чисел больше: $\sqrt{1986} + \sqrt{1984}$ или $2\sqrt{1985}$?

3. Разложите x^2+x+1 на множители.

4. Длина боковой стороны трапеции равна a , а расстояние до нее от середины противоположной стороны равно b . Найдите площадь трапеции.

5. Докажите, что в любом треугольнике $R > 2r$, где R и r — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей.

Девятый класс

6. Какое из чисел больше: $\sqrt[3]{1986} + \sqrt[3]{1984}$ или $2\sqrt[3]{1985}$?

7. Каким является треугольник (остроугольным, прямоугольным или тупоугольным), если:

а) его высоты равны 3, 4 и 5;

б) его медианы равны 3, 4 и 5?

8. Найдите множество значений функции (без использования математического анализа):

а) $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$; б) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - x + 1}$.

9. Найдите $f'(2)$, если

а) $f(x) = (x-2)^2 g(x)$, где $g(x)$ — произвольная дифференцируемая при $x=2$ функция;

б) $f(x) = (x-2)^2 g(x)$, где $g(x)$ — произвольная непрерывная при $x=2$ функция;

в) $f(x) = (x-2) \left(\sqrt[3]{x + \sqrt{x-2}} + (x-2)^x \times \sqrt[2]{x^5 + \sqrt{x}} \right)$.

10. Докажите, что любой треугольник можно спроектировать в правильный при помощи:

а) параллельной проекции; б)* ортогональной проекции.

Десятый класс

11. Площадь основания пирамиды равна 1. Проведена плоскость, параллельная основанию пирамиды и делящая ее на две части равного объема. Найдите площадь сечения.

12. Сравните числа: $2^{\sqrt{\log_2 x}}$ и $x^{\sqrt{\log_2 x^2}}$ ($x > 1$).

13. Докажите, что любая плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, делит его объем пополам.

14. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c выполняется неравенство $a^4 + b^4 + c^4 > abc(a+b+c)$.

15. а) В тетраэдре проведены 4 отрезка, каждый из которых соединяет вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что все 4 отрезка пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 3:1, считая от вершины.

б) Докажите, что в любом тетраэдре $R > 3r$, где R и r — радиусы соответственно описанной и вписанной сфер

Публикацию подготовил Б. М. Ивлев

Задачник «Кванта»

Задачи

M906—M910; Ф918—Ф922

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 апреля 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M906, M907» или «Ф918». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M906. а) Докажите, что при любом натуральном a уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

имеет по крайней мере три решения в натуральных числах x и y .

б) Найдите число натуральных решений этого уравнения при $a=1985$.

М. В. Славинский

M907. Про треугольник ABC с длинами сторон $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ известно, что $3A+2B=180^\circ$. Докажите, что $a^2+bc-c^2=0$.

Т. А. Джортменадзе

M908. На стороне AB треугольника ABC выбирается точка P , и через нее проводятся прямые, параллельные BC и AC , до пересечения со сторонами AC и BC соответственно в точках M и N . При каком выборе точки P отрезок MN имеет наименьшую длину?

Решите эту задачу а) для треугольника с прямым углом C ; б)* для произвольного треугольника ABC .

Э. Г. Готман

M909. а) Докажите, что существует арифметическая прогрессия из 4 различных членов, содержащая только степени натуральных чисел n^k ($k \geq 2$). Существует ли такая прогрессия из

б) любого конечного числа,

в) бесконечного числа членов?

Существует ли бесконечная (не постоянная) арифметическая прогрессия, не содержащая

г) ни одной степени натурального числа,

д) ни одного числа, составленного из одинаковых цифр?

Р. Н. Азизян, В. Толстых, А. В. Алеев

M910. На сторонах правильного шестиугольника взяты точки A_1, A_2, \dots, A_6 (рис. 1). Известно, что три попарно не смежные стороны шестиугольника $A_1 \dots A_6$ (A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6) определяют треугольник KLM , вершины которого лежат на продолжениях диагоналей правильного шестиугольника. Докажите, что это верно и для трех других сторон шестиугольника $A_1 \dots A_6$.

С. Ю. Ореков

Ф918. Пара одинаковых грузиков A и B , связанных невесомой нитью длины l , начинает соскальзывать с гладкого стола высоты l , причем в начальный момент грузик B находится на высоте $h=2l/3$ от

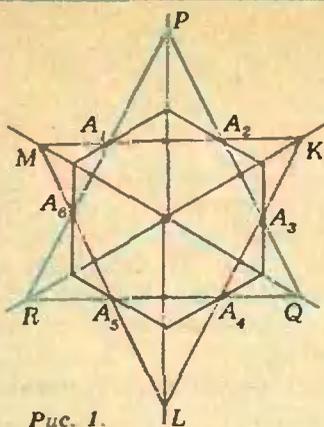


Рис. 1.

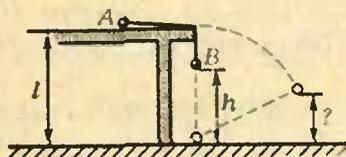


Рис. 2.

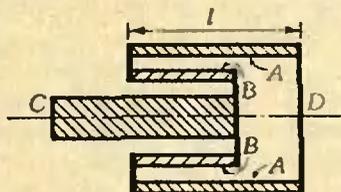


Рис. 3.

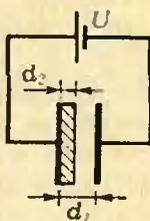


Рис. 4.

пола (рис. 2). Достигнув пола, грузик B прилипает к нему; грузик A в этот момент слетает со стола. На какой высоте над уровнем пола будет грузик A , когда нить вновь окажется натянутой?

Г. Л. Коткин

Ф919. На рисунке 3 показано долевое сечение прибора, используемого в качестве эталона длины. Центральный стержень C и внешняя оболочка A прибора сделаны из материала с коэффициентом теплового расширения α_1 ; их длины при $t_1 = 20^\circ\text{C}$ одинаковы и равны l . Внутренняя труба B сделана из материала с коэффициентом теплового расширения α_2 . Какой должна быть длина внутренней трубы при $t_1 = 20^\circ\text{C}$, чтобы при изменении температуры полная длина эталона $|CD|$ не менялась?

А. П. Ершов

Ф920. Через трубку переменного сечения продувают воздух. Входное отверстие трубки имеет площадь S_1 , выходное — S_2 . На входе скорость воздуха v_1 , температура — T_1 , давление — p_1 ; на выходе температура воздуха T_2 , давление — p_2 . Какова скорость воздуха на выходе?

Г. Л. Коткин

Ф921. Плоский конденсатор подключен к источнику напряжения U . Пластины конденсатора имеют площадь S каждая, расстояние между пластинами равно d_1 . К одной пластине прижата металлическая пластинка площади S и толщины d_2 (рис. 4), имеющая массу m . Пластинку отпускают. С какой скоростью она ударится о другую пластину конденсатора? Влиянием силы тяжести пренебречь.

Ф922. Фотографируя муравья с близкого расстояния, экспериментатор использовал удлинительное кольцо, которое увеличило расстояние от пленки до объектива на $\Delta l = 7,5$ мм. Резкое изображение муравья получилось в том случае, когда на шкале объектива было установлено расстояние $b = 1,05$ м (на шкале указываются значения расстояний от предмета до объектива без использования удлинительных колец). Фокусное расстояние объектива $F = 50$ мм. На каком расстоянии от объектива находился муравей? Считать объектив тонкой линзой.

А. П. Ершов

Problems

M906—M910; P918—P922

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement

M906. a) Prove that for any positive integer a the equation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

has at least three positive integer solutions (x, y) . b) Find the number of positive integer solutions for $a = 1985$.

M. V. Slavinski

of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than April 15th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANTS PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS** (or **MATHEMATICS**).

M907. In triangle ABC we know the sides $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ and the relation $3A+2B=180^\circ$. Prove that $a^2+bc-c^2=0$.

T. A. Djortmenadze

M908. Lines parallel to the sides BC and AC of triangle ABC passing through the point P on side AB intersect the sides AC and BC respectively at points M and N . For what choice of P will MN be of least length?

Solve this problem a) for triangles with right angle C ; b)* for arbitrary triangles ABC .

E. G. Gotman

M909. a) Prove that there exists a (non-constant) four term arithmetical progression consisting of powers of positive integers n^k ($k \geq 2$).

Does such a progression b) of arbitrary finite length, c) of infinite length exist?

Does there exist an infinite arithmetical progression not containing d) any power of a positive integer, e) any number all of whose digits are the same?

R. N. Azizian, V. Tolstykh, A. V. Aliaev

M910. The points A_1, A_2, \dots, A_6 are chosen on the six sides of a regular hexagon (Fig. 1). It is known that three non-adjacent sides A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 of the hexagon $A_1A_2\dots A_6$ determine the triangle KLM , whose vertices lie on the extensions of the diagonals of the regular hexagon. Prove that the same is true of the three other sides of the hexagon $A_1 A_2\dots A_6$.

S. Yu. Orevkov

P918. A pair of identical weights A and B , tied together by a weightless string of length l , begin sliding off a smooth table of height l ; at the initial moment the altitude of the weight B above floor level is $h=2l/3$ (Fig. 2). Having reached the floor, the weight B stays stuck to it; at that moment the weight A flies off the table. At what altitude of the weight A above floor level will the string become stretched again?

G. L. Kotkin

P919. Figure 3 shows a lengthwise section of a device used as an etalon of length. The central rod C and the outer envelope A of the device are made out of material whose heat expansion index is α_1 ; their lengths at $t_1=20^\circ\text{C}$ are the same, equalling l . The inner pipe B is made out of material whose heat expansion index is α_2 . What must the length of the inner pipe at 20°C be in order that the etalon's total length remain the same when the temperature changes?

A. P. Ershov

P920. Air is blown through a pipe of variable section from left to right. The section area at the left extremity is S_1 , at the right it is S_2 . At the left extremity the air velocity is v_1 , its temperature is T_1 and its pressure is p_1 ; at the right extremity the air temperature is T_2 , the pressure is p_2 . What is the air velocity at the right extremity?

G. L. Kotkin

P921. A flat capacitor is connected to a source of tension U . The capacitor's plates are of area S each, the distance between them is d_1 . A metal plate of area S , mass m and thickness d_2 is pressed against one of the capacitor's plates (Fig. 4). Then the metal plate is released. With what velocity will it hit the capacitor's other plate?

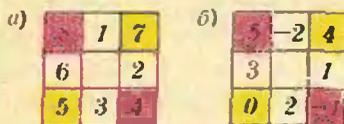
P922. In order to getaclose up of an ant, a photographer added a cylindrical extension to his camera, increasing the distance between the film and the lens by $\Delta=7.5$ mm. A well focused picture of the ant was obtained when the distance reading on the camera was $b=1.05$ m (the distance reading does not take the extension into account). The focal distance of the lens is $F=50$ mm. What was the actual distance between the lens and the ant? The lens may be assumed thin.

A. P. Ershov

Решения задач

M886 — M890; Ф898 — Ф902

M886. Можно ли в $4n-4$ клеток, расположенных по периметру квадрата $n \times n$ клеток, расставить $4n-4$ последовательных целых чисел (не обязательно положительных) так, чтобы суммы чисел в вершинах каждого прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата, а также суммы чисел в концах каждой диагонали, равнялись одному и тому же числу s ? Решите задачу для n , равного а) 3, б) 4, в) 5, г) 1985. Если можно, найдите допустимые значения s .



$$m-1$$

$$M-8$$

$$s-12$$

$$m-2$$

$$M-5$$

$$s-4$$

Рис. 1.

Ответ: а) можно (рис. 1); s может равняться ± 41 , ± 12 ; б) нельзя; в) можно (рис. 2); $s = \pm 8$, ± 24 ; г) можно; $s = \pm 3968$, ± 11904 .

Задача сводится к тому, чтобы разбить некоторый набор из $4n-4$ последовательных целых чисел на $n-2$ четверки и еще 2 пары чисел так, чтобы суммы чисел во всех четверках и парах были одинаковы и равны s . Обозначим через c сумму двух крайних из $4n-4$ таких чисел — наименьшего m и наибольшего M . (Для дальнейшего заметим, что $M = m + 4n - 5$, то есть $c = 2m + 4n - 5$ и $m = (c + 5)/2 - 2n$, $M = (c - 5)/2 + 2n$.) Разумеется, c всегда нечетно. Сумма всех $4n-4$ чисел равна $(2n-2)c$, поэтому, если требуемое разбиение возможно, должно выполняться равенство

$$ns = 2(n-1)c. \quad (1)$$

Это необходимое условие позволяет сразу исключить случай, когда n делится на 4, в частности, $n=4$ (пункт б) задачи): при таких n разбиения не существует, поскольку правая часть (1) не делится на 4, а левая — делится.

Для нечетного n , к которому относится все дальнейшее, условие (1) также дает сильные ограничения: поскольку n и $n-1$ взаимно просты, а n и c нечетны, c делится на n , так что при некотором нечетном r должны выполняться равенства

$$c = nr, \quad s = 2(n-1)r. \quad (2)$$

На рисунке 3 показано, как можно построить нужные разбиения для $r=1$ и $r=3$. Две пары чисел — «красная» и «желтая» — имеют одинаковые суммы s (то есть общий центр симметрии в точке $s/2$), а остальные $4n-8$ чисел образуют четыре «голубые» последовательности по $n-2$

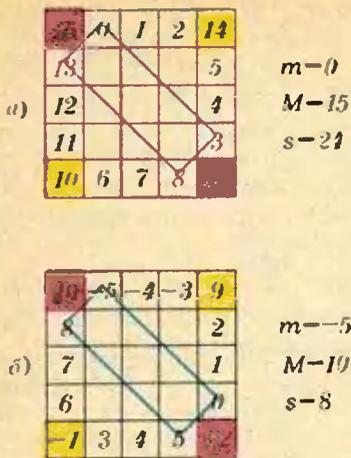


Рис. 2.

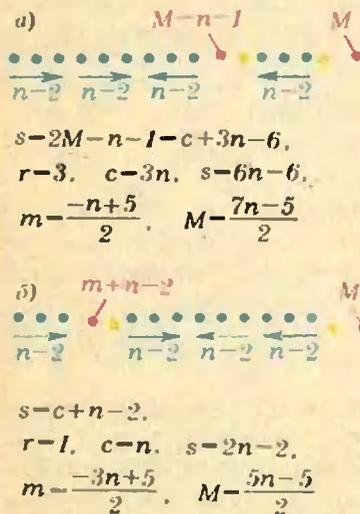
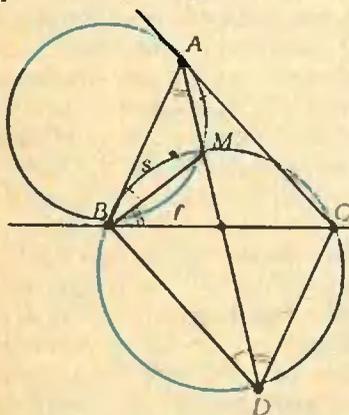


Рис. 3.

M887. Две касательные к окружности. CA и CB пересекаются в точке C (A и B — точки касания). Вторая окружность проходит через точку C , касается прямой AB в точке B и пересекает первую окружность в точке M . Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.



числа (идущих подряд), две из которых мы считаем восходящими, а две другие — нисходящими. Тогда сумма первых чисел этих последовательностей равна сумме вторых, сумме третьих и т. д., так что мы получаем $n-2$ четверки с одинаковыми суммами; если при этом выполнено соотношение (1) между s и c , то все эти суммы также равны s . Показанные на рисунке 3, а и б примеры соответствуют $r=3$ и $r=1$ в формулах (2), для любого нечетного n . (На рисунках 1 и 2 приведены соответствующие заполнения границы квадратов для $n=3$ и $n=5$.) Заменой знаков у всех $4n-4$ чисел (что приведет к изменению знаков у s и c) получим примеры с $r=-3$ и $r=-1$.

Итак, мы указали расстановки чисел со значениями s а) $\pm 4, \pm 12$ для $n=3$; в) $\pm 8, \pm 24$ для $n=5$; г) $\pm 3968, \pm 11904$ для $n=1985$ (и вообще, $\pm 2(n-1), \pm 6(n-1)$ для нечетного n). Докажем, что этими значениями исчерпывается ответ к задачам а), в) и г). Сумма $2s$ двух пар красных и желтых чисел вместе не меньше чем сумма $4m+6$ четырех наименьших $m, m+1, m+2, m+3$ и не больше чем сумма $4M-6$ четырех наибольших $M, M-1, M-2, M-3$ из целых чисел от m до M . Выражая m и M через s и n и пользуясь формулами (2), получим

$$2(c+8-4n)=4m+6 \leq 2s \leq 4M-6=2(c-8+4n),$$

$$nr-4n+8 < 2r(n-1) < nr+4n-8,$$

откуда

$$-4(n-2) \leq (n-2)r \leq 4(n-2),$$

то есть $|r| \leq 4$. Осталось вспомнить, что r нечетно.

Если кому-либо из читателей удастся разобраться в этой задаче также для $n=6$ и, вообще, для $n=4k+2$, мы будем рады познакомиться с решением и сообщить о нем в журнале.

В. Г. Болтянский, Н. Б. Васильев

◆ Пусть прямая AM пересекается со второй окружностью в точке D (см. рисунок). Очевидно, достаточно доказать, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Пользуясь тем, что величина угла с вершиной на окружности, образованного двумя хордами или хордой и касательной, равна половине величины дуги, заключенной внутри угла, можно записать две цепочки равенств:

$$\angle ADB = \frac{1}{2} \cup BsM = \angle ABM = \frac{1}{2} \cup AM = \angle CAD,$$

$$\angle ADC = \frac{1}{2} \cup MC = \angle MBC = \frac{1}{2} \cup BfM = \angle BAM$$

($\cup BfM$ и $\cup BsM$ — это величины дуг BM для первой и второй окружностей). Равенство углов ADB и CAD означает, что параллельны прямые AC и BD , равенство углов ADC и BAM — что параллельны прямые AB и CD ; это и требовалось доказать.

И. Ф. Шарыгин

M888. *Натуральные числа a , b , c и d удовлетворяют равенству $ab=cd$. Докажите, что число $a^{1984}+b^{1984}+c^{1984}+d^{1984}$ составное.*

Докажем, что если $ab=cd$, то $a=uv$, $b=wt$, $c=uw$, $d=wt$, где u, v, w, t — некоторые натуральные числа.

Поскольку ab делится на c , число c можно записать в виде $c=uw$, где u — делитель a , а w — делитель b (например, можно взять в качестве u наибольший общий делитель a и c). Тогда $a=uv$, $b=wt$ и потому $d=vt$. Остальное просто:

$$\begin{aligned} a^{1984}+b^{1984}+c^{1984}+d^{1984} &= \\ &= (uv)^{1984}+(wt)^{1984}+(uw)^{1984}+(vt)^{1984}= \\ &= (u^{1984}+t^{1984})(v^{1984}+w^{1984}), \end{aligned}$$

а число в правой части, очевидно, составное.

А. В. Анджанс

M889. *Существуют ли на плоскости такие три точки A, B, C , что для любой точки плоскости P хотя бы один из отрезков PA, PB и PC имеет иррациональную длину?*

♦ Ответ: такие точки существуют.

Пусть A и B — две точки плоскости, расстояние между которыми равно $\sqrt{2}$, C — середина отрезка AB , P — произвольная точка плоскости.

Тогда $2\vec{PC}=\vec{PA}+\vec{PB}$, $\vec{AB}=\vec{PB}-\vec{PA}$, то есть

$$4PC^2=PA^2+PB^2+2\vec{PA}\cdot\vec{PB},$$

$$AB^2=PA^2+PB^2-2\vec{PA}\cdot\vec{PB}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$4PC^2+AB^2=2PA^2+2PB^2,$$

и, поскольку число $AB^2=\sqrt{2}$ иррационально, числа PA, PB и PC одновременно не могут быть рациональными.

А. М. Слинько

M890. *На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11 000 км шоссейных дорог. Сможет ли она соединить сеть шоссейных дорог все свои города?*

♦ Ответ: да, сможет. Укажем один из возможных способов прокладки дорог. Проложим шоссе длиной 1000 км через один из городов страны параллельно стороне квадрата от границы до границы (рис. 1). Отступив от концов этого шоссе на 100 км, отметим на шоссе две точки. Между ними на равном расстоянии 200 км друг от друга расположим еще 3 точки. Через эти 5 точек проложим 5 дорог, перпендикулярных ранее построенному шоссе и простирающихся от одной границы до другой. Теперь из каждого города проложим шоссе, соединяющее по кратчайшему пути этот город с одной из уже проложенных дорог. Длина каждого такого дополнительного шоссе не более 100 км, а всего таких шоссе не более 50. Следовательно, общая длина всех шоссейных дорог не превосходит $6 \cdot 1000 + 50 \cdot 100 = 11\,000$ км.

Указанная сеть шоссейных дорог не является кратчайшей. На рисунке 2 приведен пример более рационального расположения шоссейных дорог. Ломаная общей протяженностью $5 \cdot 800 + 4 \cdot 200 = 4800$ км дополняется 12 «усиками» длиной $(100\sqrt{2}-100)$ км каждый. Получающаяся при этом сеть шоссейных дорог длиной $4800 + 12 \cdot (100\sqrt{2}-100) = 3600 + 1200\sqrt{2}$ км такова, что, как легко убедиться, расстояние от любой точки квадрата до ближайшего шоссе не превосходит 100 км. Поэтому для того, чтобы соединить 51 город с уже построенной сетью шоссейных

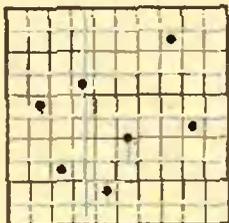


Рис. 1.

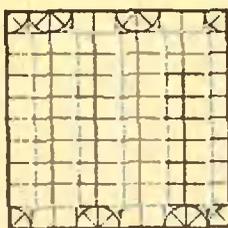


Рис. 2.

дорог, потребуется продолжить большее $51 \cdot 100 = 5100$ км дорог. Следовательно, действуя указанным образом, мы должны будем проложить не более $8700 + 1200\sqrt{2} < 8700 + 1800 = 10\,500$ км дорог.

Л. Д. Курляндчик, С. В. Резниченко

Ф898. Однородная палочка длины l связана невесомой нитью длины l с неподвижной точкой A (рис. 1). Нижний конец палочки может скользить без трения по горизонтальному столу. Расстояние от точки A до стола равно H ($l < H < 2l$). Палочка начинает двигаться без начальной скорости из положения, изображенного на рисунке 1. Найти максимальную скорость центра палочки при последующем движении.

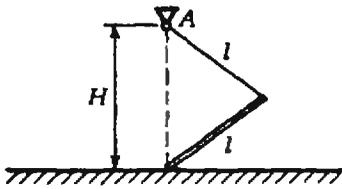


Рис. 1.

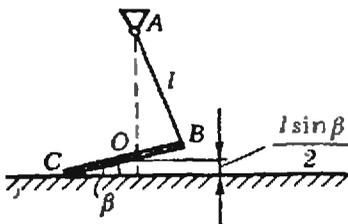


Рис. 2.

Для решения задачи воспользуемся законом сохранения энергии. В начальный момент палочка образует с горизонтом угол α такой, что $\sin \alpha = H/2l$. Полная энергия палочки в начальный момент равна ее потенциальной энергии и равна

$$U_0 = mg \frac{H}{4}.$$

При движении палочки ее полная энергия в любой момент времени складывается из потенциальной энергии

$$U_t = mg \frac{l \sin \beta}{2}$$

(β — угол, который палочка образует с горизонтом в данный момент (рис. 2)), кинетической энергии поступательного движения

$$E_{t1} = m \frac{v_t^2}{2}$$

(v_t — скорость центра масс палочки) и энергии E_{t2} вращательного движения. Согласно закону сохранения энергии

$$U_t + E_{t1} + E_{t2} = U_0,$$

откуда $E_{t1} = \frac{mv_t^2}{2} = U_0 - U_t - E_{t2}$, и

$$v_t = \sqrt{\frac{2}{m}(U_0 - U_t - E_{t2})}.$$

Очевидно, скорость v_t центра масс палочки будет максимальной, когда значения U_t и E_{t2} будут минимальны.

Потенциальная энергия минимальна в тот момент, когда верхний конец палочки занимает наименьшее возможное положение, то есть когда нить вертикальна. При этом

$$U_{t \min} = mg \frac{l-l}{2}.$$

Нетрудно понять, что в этот момент времени палочка движется только поступательно. Действительно, поскольку палочка нерастяжима, проекции скоростей любых ее точек на направление самой палочки должны быть одинаковы. Скорость нижней точки (точка C на рисунке 2) всегда направлена горизонтально, а в тот момент, когда нить вертикальна, скорость верхней точки (точка B на рисунке 2) также горизонтальна (так как нить нерастяжима). Из условия нерастяжимости палочки следует, что эти скорости должны быть одинаковы и все точки палочки должны в этот момент двигаться

ся с такими же скоростями. Это означает, что вращательное движение отсутствует, то есть $E_{12}=0$.

Итак, в тот момент, когда нить вертикальна, скорость центра масс палочки имеет максимальное значение

$$v_{1 \max} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(mg \frac{H}{4} - mg \frac{H-l}{2} \right)} = \sqrt{\frac{g}{2} (2l-H)}$$

и направлена горизонтально.

С. С. Кротов

Ф899. На дне большого закрытого сосуда, заполненного водой, лежит перевернутая чашка массы m . Чашка имеет форму цилиндра радиуса R и высоты R с полусферической полостью, радиус которой также равен R (рис. 1). Полость заполнена ртутью. Воду из сосуда начинают медленно откачивать.

1) Определите, при какой высоте h столба воды в сосуде чашка оторвется от его дна и ртуть начнет вытекать из-под ее краев.

2) Найдите высоту ртути в полости, когда из сосуда откачают всю воду.

Давлением паров воды пренебречь. Плотность воды ρ и плотность ртути ρ_1 считать известными.

Примечание: объем шарового сегмента высоты H и радиуса R (рис. 2) равен $\pi R^2 \times \left(R - \frac{H}{3} \right)$.

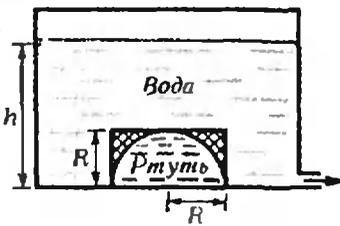


Рис. 1.

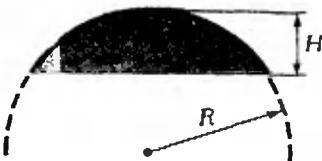


Рис. 2.

◆ Запишем условие равновесия чашки. На нее действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции дна сосуда \vec{N} , а также силы давления воды \vec{F}_w и ртути \vec{F}_p (рис. 3). Чашка находится в равновесии при условии

$$F_p + N = mg + F_w \quad (1)$$

Сила F_w есть сила давления столба воды на верхнее основание чашки, то есть

$$F_w = \begin{cases} \rho g(h-R)\pi R^2 & \text{при } h \geq R; \\ & \text{при } h < R. \end{cases} \quad (2)$$

Из условия равновесия (1) с учетом (2) следует, что с понижением уровня воды в сосуде модуль силы реакции N убывает. При некоторой высоте h столба воды N обратится в нуль. Условие $N=0$ и определяет момент отрыва чашки. Сразу после отрыва давление ртути в верхней точке чашки также обратится в нуль. Для расчета силы F_p в момент отрыва чашки представим себе полусферическую поверхность в слое ртути толщины R . В силу гидростатического равновесия, силы, действующие на эту поверхность снизу и сверху, одинаковы, то есть F_p равна весу «ртутной» чашки:

$$F_p = \rho_1 g \left(\pi R^3 - \frac{2}{3} \pi R^3 \right) = \frac{1}{3} \rho_1 g \pi R^3 \quad (3)$$

Решая уравнение (1) с учетом (2), (3) и условия отрыва чашки $N=0$, получим ответ на первый вопрос задачи:

$$h = R \left(1 + \frac{\rho_1}{3\rho} \right) - \frac{m}{\rho \pi R^2}.$$

Начиная с момента отрыва чашки во всем последующем процессе откачки воды квазиравновесие чашки обеспечивается уменьшением силы давления ртути F_p . Эта сила уменьшается за счет вытекания ртути из-под краев чашки. Ртуть перестанет вытекать, когда уровень воды достигнет верхнего основания чашки ($h=R$). Дальнейшая откачка воды не приведет к изменению количества ртути в чашке. Условие равновесия чашки при этом примет вид (давлением насыщенных паров воды и ртути пренебрегаем)

$$mg = F_{p1} \quad (4)$$

где F_{p1} — сила, с которой давит на чашку остав-

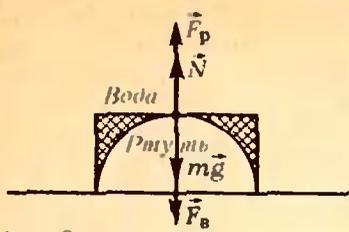


Рис. 3.

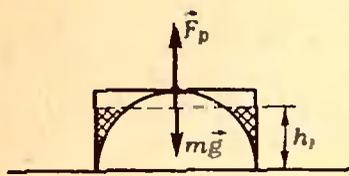


Рис. 4.

Ф900. Часть графика, изображающего процесс, происшедший с идеальным одноатомным газом, утеряна (рис. 1). Масштабы по обеим осям известны (они указаны на рисунке 1). В течение всего процесса перехода из состояния 1 в состояние 2 газ отдал столько же тепла, сколько получил. Найти работу, совершенную газом в этом процессе.

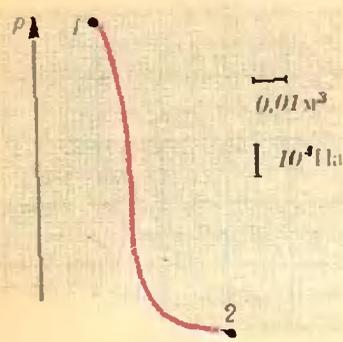


Рис. 1.

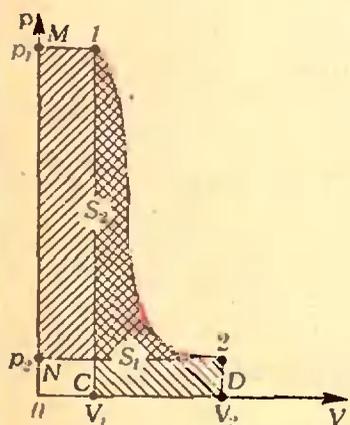


Рис. 2.

шийся в ней слой ртути высоты h_1 (рис. 4). Эта сила численно равна весу ртути в объеме той части чашки, которая заштрихована на рисунке 4:

$$F_{p1} = \rho_1 g (\pi R^2 h_1 - V_1), \quad (5)$$

где V_1 — объем оставшейся в чашке ртути, равный

$$V_1 = \frac{2}{3} \pi R^3 - \pi (R - h_1)^2 (R - \frac{R - h_1}{3}). \quad (6)$$

Подставляя (5) с учетом (6) в условие равновесия (4) и решая получающееся уравнение относительно h_1 , получим ответ на второй вопрос задачи:

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{3m}{\rho_1}}$$

М. Г. Абрамян

◆ Если бы график процесса был задан полностью (рис. 2), то для определения работы, совершенной газом, нужно было бы просто определить площадь S_1 фигуры $C12D$. Покажем, что площадь S_1 можно выразить через площадь S_2 фигуры $M12N$, которую можно определить из заданного «неполного» графика.

Как видно из рисунка 2, $|p_1 V_1| + S_1 = |p_2 V_2| + S_2 \Rightarrow S_2 = S_1 + |p_1 V_1| - |p_2 V_2|$ ($|p_1 V_1|$, $|p_2 V_2|$ — соответственно площади прямоугольников $M1C0$ и $N2D0$). Так как в течение всего процесса газ отдал столько же тепла, сколько получил, из первого начала термодинамики можно заключить, что

$$A = -\Delta U,$$

где ΔU — изменение внутренней энергии газа за время процесса.

Для идеального одноатомного газа $U = \frac{3}{2} \nu RT$, так что

$$A = \frac{3}{2} \nu R(T_1 - T_2),$$

где T_1 и T_2 — температуры газа в точках 1 и 2 соответственно.

Из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что

$$p_1 V_1 - p_2 V_2 = \nu R(T_1 - T_2) = \frac{2}{3} A,$$

так что $|p_1 V_1| - |p_2 V_2| = \frac{2}{3} S_1$ и

$$S_1 + \frac{2}{3} S_1 = S_2,$$

откуда

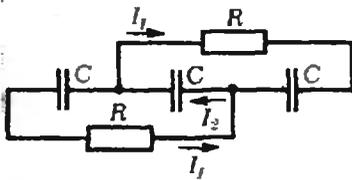
$$S_1 = \frac{3}{5} S_2.$$

Значение площади S_2 можно определить по графику, заданному в условии задачи; используя заданные на графике масштабы, находим $S_2 \approx 3$ кДж; следовательно,

$$A \approx 1,8 \text{ кДж.}$$

В. Т. Карпетян

Ф901. Три одинаковых конденсатора, каждый емкости C , соединили последовательно и подключили к батарее с ЭДС \mathcal{E} . После того как они полностью зарядились, их отключили от батареи. Затем к ним одновременно * подключили два резистора с сопротивлением R каждый так, как показано на рисунке. Какое количество тепла выделится на каждом из резисторов? Чему равны токи через резисторы в момент времени, когда напряжение на среднем конденсаторе в 10 раз меньше ЭДС батареи?



Самое главное — конденсаторы в этой схеме не разряжаются полностью. После того как токи в цепи прекратятся, конденсаторы окажутся соединенными параллельно, то есть напряжения на них окажутся одинаковыми.

Ток, разряжающий средний конденсатор, равен сумме токов крайних конденсаторов, а так как в силу симметрии те равны между собой (см. рисунок),

$$I_2 = 2I_1.$$

Обозначим напряжение на конденсаторах в конце разряда U_x . Поскольку начальное напряжение на каждом из них было $\mathcal{E}/3$, за время разряда через крайние конденсаторы протекут заряды $q_1 = C(\frac{\mathcal{E}}{3} - U_x)$, а через средний — заряд $q_2 = C(\frac{\mathcal{E}}{3} + U_x)$ (средний конденсатор перезарядится до противоположной полярности). Ясно, что $q_2 = 2q_1$, то есть

$$2C(\frac{\mathcal{E}}{3} - U_x) = C(\frac{\mathcal{E}}{3} + U_x),$$

откуда

$$U_x = \frac{1}{9} \mathcal{E}.$$

Тепло, которое выделится на каждом из резисторов, найдем из закона сохранения энергии:

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_2 &= \frac{1}{2} (W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{C}{2} \left(\frac{\mathcal{E}}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{C}{2} \left(\frac{\mathcal{E}}{9}\right)^2 = \frac{2}{27} C \mathcal{E}^2. \end{aligned}$$

Поскольку средний конденсатор перезарядится до противоположной полярности, напряжение $\mathcal{E}/10$ будет на нем дважды — во время разряда от $\mathcal{E}/3$ до 0 и во время зарядки от 0 до $\mathcal{E}/9$. Для первого случая, согласно закону Ома,

$$U_{11} + \frac{\mathcal{E}}{10} = RI_{11} \tag{1}$$

(U_{11} — напряжение на крайних конденсаторах в этот момент); заряды, которые протекут к этому моменту через крайние конденсаторы и через средний, связаны соотношением

$$C\left(\frac{\mathcal{E}}{3} - U_{11}\right) = \frac{1}{2} C\left(\frac{\mathcal{E}}{3} - \frac{\mathcal{E}}{10}\right). \tag{2}$$

Решая совместно (1) и (2), находим ток I_{11} , текущий в первом случае через резисторы:

$$I_{11} = \frac{19}{60} \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Составляя аналогичные уравнения для второго случая —

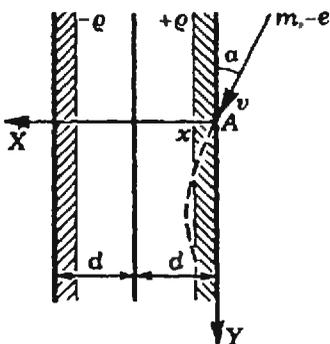
$$U_{12} - \frac{\mathcal{E}}{10} = RI_{12}, \quad C\left(\frac{\mathcal{E}}{3} - U_{12}\right) = \frac{1}{2} C\left(\frac{\mathcal{E}}{3} + \frac{\mathcal{E}}{10}\right),$$

— находим:

$$I_{12} = \frac{1}{60} \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

А. Р. Зильберман

902. Два плоских слоя толщины d каждый равномерно заряжены по объему с плотностями зарядов $-e$ и $+e$. Частица с отрицательным зарядом $-e$ и массой m подлетает к положительно заряженному слою со скоростью v , направленной под углом α к поверхности слоя (см. рисунок). 1) При каком значении скорости частица не сможет проникнуть в отрицательно заряженный слой? 2) Через сколько времени и на каком расстоянии от точки A частица в этом случае покинет положительно заряженный слой?



Выберем систему координат XU , как показано на рисунке. Сразу же можно отметить, что движение частицы вдоль оси U будет равномерным со скоростью $v \cos \alpha$ (действием силы тяжести мы пренебрегаем). Сила, действующая на частицу со стороны заряженных слоев, направлена вдоль оси X и в точке с координатой x определяется зарядами, находящимися в заштрихованных на рисунке областях (симметричных относительно плоскости раздела слоев). Действительно, действие незаштрихованных областей с разноименными зарядами компенсируется, поскольку область объемного заряда можно представить себе как набор плоскостей с поверхностным зарядом, а поле, создаваемое заряженной плоскостью, не зависит от расстояния до нее. По той же причине можно считать, что поле в точке с координатой x определяется заряженными плоскостями с поверхностной плотностью заряда $-e$ и $+e$, расположенными слева и справа от этой точки. Напряженность такого поля равна

$$E = 2 \frac{ex}{2\epsilon_0} = \frac{ex}{\epsilon_0}.$$

Значит сила, действующая на частицу в тот момент, когда она находится в точке с координатой x , равна

$$F_x = -e \frac{ex}{\epsilon_0},$$

и уравнение движения частицы в направлении оси X —

$$x'' = - \frac{eQ}{m\epsilon_0} x$$

— это уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega_0 = \sqrt{eQ/m\epsilon_0}$. Понятно, что частица не проникнет в область отрицательного заряда, если амплитуда этих колебаний будет меньше d . Предельная скорость v_{np} частицы, при которой выполняется это условие, определяется равенством

$$v_{np} \sin \alpha = \omega_0 d = d \sqrt{\frac{eQ}{m\epsilon_0}}; \quad \text{отсюда}$$

$$v_{np} = \frac{d}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{eQ}{m\epsilon_0}}.$$

При скоростях $v < v_{np}$ частица проникает в положительно заряженный слой на некоторую глубину, а затем «выталкивается» из него. Время t , которое частица проводит внутри слоя, — это половина периода колебаний с частотой ω_0 , то есть

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m\epsilon_0}{eQ}};$$

За это время частица смещается по вертикали на расстояние

$$y = tv \cos \alpha = \pi v \sqrt{\frac{m\epsilon_0}{eQ}} \cos \alpha.$$

На таком расстоянии от точки A частица вылетит из положительно заряженного слоя.

А. И. Буздин



Повторим гидростатику

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

Школьная программа по физике построена так, что, познакомившись с темой «Гидростатика» в шестом классе, учащиеся больше к ней не возвращаются. По-видимому, принято считать, что эта тема нетрудная. Но, как показывает опыт вступительных экзаменов, задачи и вопросы по гидростатике часто ставят абитуриентов в тупик.

В чем здесь дело? С нашей точки зрения это связано с тем, что в шестом классе школьники еще не готовы к восприятию всех тонкостей физики, они лишь знакомятся с ней. Однако при составлении вопросов и задач для вступительных экзаменов подразумевается, что абитуриент переосмыслил многие темы, в том числе и гидростатику, с более общих позиций, с учетом знания всего курса физики.

В данной статье нам хотелось напомнить основные законы гидростатики и рассмотреть несколько конкретных задач и вопросов, которые в разные годы включались в экзаменационные билеты или задавались абитуриентам в процессе устного экзамена.

Жидкости и газы при движении как целое представляют собой механическую систему, части которой взаимодействуют друг с другом посредством только сил давления. Действительно, когда жидкость (здесь и далее, говоря о жидкости, мы подразумеваем и газ тоже) находится в покое, вязкость не проявляется — жидкое трение возникает лишь при движении слоев жидкости друг относительно друга или относительно твердого тела.

Для жидкости, как известно, выполняется закон Паскаля: *давление, производимое на жидкость, передается*

без изменения в каждую точку жидкости. Если жидкость находится под действием только силы тяжести, давление p увеличивается с глубиной погружения h по закону $p = \rho gh$, где ρ — плотность жидкости. Поэтому различные участки тела, погруженного в жидкость, испытывают разные силы давления. В результате их суммарного действия возникает выталкивающая сила (архимедова сила). Согласно закону Архимеда, тело, целиком погруженное в жидкость, выталкивается вверх с силой, равной весу вытесненной им жидкости (то есть весу жидкости в объеме этого тела).

Сразу же обратим внимание на тот факт, что закон Архимеда неприменим, когда погруженное тело плотно прижато к стенкам или дну сосуда. Например, известно, что подводная лодка, опустившаяся на илистое дно, под действием силы гидростатического давления прижимается ко дну, а вовсе не выталкивается вверх.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных задач и вопросов.

Вопрос 1. *На одной из чашек уравновешенных весов находится стакан с водой и штатив с подвешенным к нему грузом (рис. 1). Что произойдет с равновесием весов, если нить удлинить настолько, чтобы груз оказался в воде?*

Многие абитуриенты считают, что равновесие нарушится. В качестве причины одни называют выталкивающую силу, действующую на груз по закону Архимеда и уменьшающую натяжение нити, а значит, и силу давления штатива на чашку весов. Другие считают, что после погружения в воду груз будет давить на нее с добавочной силой или, что эквивалентно, повысит уровень воды в стакане и тем самым увеличит давление на дно стакана, в результате чего левая чашка перевесит.

Чтобы получить правильный ответ, достаточно понять, что содержимое чашки не меняется в зависимости от положения груза — вне воды или в воде, и поэтому равновесие весов сохраняется. Но что же было неверного в предыдущих рассуждениях?

При опускании груза в воду натяжение нити действительно уменьшит-

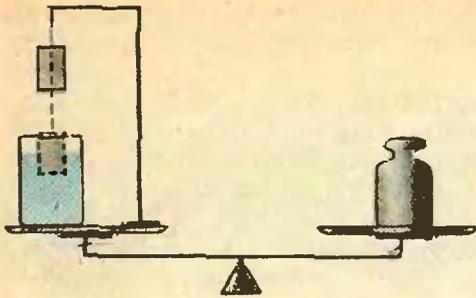


Рис. 1.

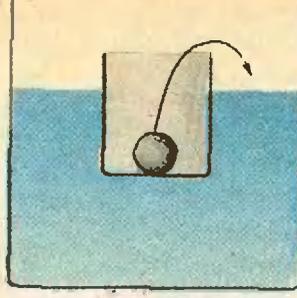


Рис. 2.

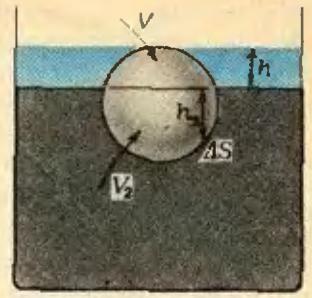


Рис. 3.

ся на величину выталкивающей силы, действующей на груз, и поэтому уменьшится сила давления штатива на чашку. Однако, согласно третьему закону Ньютона, на величину выталкивающей силы возрастет сила, действующая со стороны груза на воду и на дно сосуда. Таким образом, давление стакана на чашку увеличится. Причем уменьшение силы давления штатива будет в точности скомпенсировано увеличением силы давления стакана на чашку весов. Ответ, как видим, остается единственным — равновесие не нарушится.

Подумайте, что произошло бы с весами, если бы в чашку с водой опустили палец, не касаясь стенок и дна стакана, или если бы штатив находился на другой чашке уравновешенных весов?

Вопрос 2. В сосуде с водой плавает стакан, в котором находится небольшой шарик (рис. 2). Как изменится уровень воды, если шарик — один раз деревянный, а другой стальной — переложить из стакана в сосуд?

Сила давления на дно сосуда равна, очевидно, весу воды, стакана и шарика. Если поставить сосуд (который для простоты можно считать невесомым) на весы, то они покажут вес содержимого, причем их показания не изменятся от того, будет ли шарик находиться в стакане или в сосуде с водой. С другой стороны, весы должны показывать силу, действующую на дно сосуда, которая в начальной ситуации определяется только уровнем воды в сосуде.

В случае, когда из стакана перекладывают деревянный шарик, он будет плавать на поверхности воды, и действующая на дно сосуда сила будет, по-прежнему, определяться лишь уровнем воды. А поскольку эта сила не меняется, уровень воды тоже должен остаться прежним.

Иным будет результат в случае, когда шарик стальной. Такой шарик опустится на дно сосуда, и полная сила давления на дно будет складываться из силы давления воды и силы давления шарика. Полная сила опять-таки не должна измениться, значит, должна уменьшиться сила давления воды. Следовательно, уровень воды в этом случае понизится.

Попробуйте ответить на вопрос: как изменится уровень воды в стакане, где плавает кусок льда с замороженными в него а) пробкой, б) дробинкой, в) пузырьком воздуха, после того как лед растает?

Вопрос 3. Стальной шарик плавает в ртути. Поверх ртути наливают слой воды, покрывающий шарик (рис. 3). Как изменится глубина погружения шарика в ртуть?

Очевидно, возникает желание воспользоваться непосредственно законом Архимеда. Однако трудность состоит в том, что разные части шарика находятся в разных жидкостях, поэтому шарик в целом рассматривать нельзя.

Выберем произвольно малый участок поверхности шарика, находящийся в ртути, и найдем действующую на него силу давления. Ясно, что она будет равна

$$f = (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2) \Delta S,$$

где ρ_1 — плотность воды, ρ_2 — плотность ртути, ΔS — площадь выбранного участка. Представим эту силу в виде

$$f = (\rho_1 g (h_1 + h_2) + (\rho_2 - \rho_1) g h_2) \Delta S = f_1 + f_2.$$

Теперь просуммируем силы давления, действующие на все участки поверхности шарика, соприкасающиеся как со ртутью, так и с водой, и получим две силы: F_1 и F_2 . Сила $F_1 = \rho_1 g (V_1 + \frac{1}{2} V_2)$ есть выталкивающая сила, действующая на шарик при условии, что он погружен только в воду. Вторая

сила $F_2 = (\rho_2 - \rho_1)gV_2$ представляет собой силу выталкивания шарика, как если бы он был погружен до уровня ртути в жидкость плотности $(\rho_2 - \rho_1)$.

Таким образом, равнодействующая выталкивающая сила равна

$$F = F_1 + F_2 = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2.$$

Мы видим, что она складывается из двух частей: вода выталкивает часть шарика, плавающую в ней, а ртуть, сама по себе, выталкивает часть шарика, погруженную в нее. Имеет место как бы принцип независимости сил выталкивания — каждая жидкость вносит в общую силу свой независимый вклад. Хотя интуитивно (и такие ответы действительно встречаются!) могло бы показаться, что ртуть выталкивает шарик, а вода наоборот прижимает его к ртути.

Итак, вода как бы помогает ртути удерживать шарик, он несколько «вылезает» из ртути, и глубина погружения шарика в ртуть уменьшается.

Задача 1. В стакане с водой плавает цилиндрическая деревянная шайба с цилиндрической дыркой. Оси шайбы и дырки параллельны. Площадь дна стакана S , площадь сечения дырки s . Удерживая шайбу на месте, дырку осторожно заполняют маслом, после чего шайбу отпускают. На какую высоту поднимется шайба, если вначале она выступала из воды на величину H ? Плотность масла ρ , плотность воды ρ_0 .

Прежде всего найдем, на какую высоту поднимется уровень воды в стакане после того как шайбу отпустят. Для этого определим изменение силы давления ΔF_d на дно сосуда. С одной стороны,

$$\Delta F_d = \rho_0 g \Delta h S,$$

если Δh — изменение уровня воды; с другой стороны, изменение силы давления равно силе тяжести налитого масла:

$$\Delta F_d = \rho g H s.$$

Отсюда получаем

$$\Delta h = \frac{\rho H s}{\rho_0 S}.$$

Выталкивающая сила, действующая на шайбу и уравновешивающая ее силу тяжести, определяется давлением воды на ее нижнее основание. Поскольку шайба продолжает плавать, положение ее относительно нового уровня воды в стакане должно

остаться неизменным. Следовательно, шайба всплывет как раз на величину Δh .

Подумайте, на сколько поднялась бы шайба, если масло налить вне шайбы, ничего не наливая в дырку?

Задача 2. На камень, выступающий над поверхностью воды на высоту H , опирается верхним концом тонкая доска длиной l , частично погруженная в воду (рис. 4). При каком минимальном коэффициенте трения между камнем и доской доска будет находиться в равновесии? Плотность воды ρ_0 , дерева ρ .

На доску действуют четыре силы. Это сила тяжести $M\vec{g}$, приложенная к центру доски, сила реакции опоры \vec{N} , приложенная к точке касания с камнем и перпендикулярная к доске, сила трения $\vec{F}_{тр}$, действующая в той же точке, но направленная по касательной к доске, и выталкивающая сила \vec{F}_* .

До сих пор нам было достаточно знать лишь модуль архимедовой силы. Теперь же оказывается необходимым знать, где приложена эта сила. Выделим мысленно в жидкости объем произвольной формы. В равновесии действующая на жидкость в этом объеме сила тяжести уравнивается силами гидростатического давления, то есть выталкивающей силой. Момент силы тяжести относительно центра масс выделенного участка жидкости равен, очевидно, нулю. Значит, должна быть равна нулю и сумма моментов сил давления. Заменяя выделенный объем жидкости твердым телом такой же формы, убеждаемся, что действующие на него со стороны окружающей жидкости силы не изменятся. Отсюда можно заключить, что суммарное действие сил давления эквивалентно действию силы, направленной по вертикали и проходящей через центр масс вытесненного объема жидкости. Подчеркнем, что таким образом мы находим лишь линию действия выталкивающей силы, но ничего не можем сказать о конкретной точке ее приложения.

Итак, в данном случае выталкивающая сила направлена вертикально вверх и проходит через середину погруженной части доски (через центр масс вытесненного объема воды).

Пусть площадь сечения доски S , длина погруженной части доски $2x$,

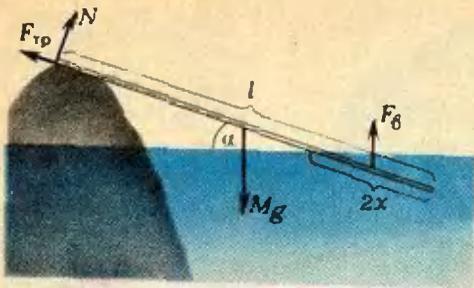


Рис. 4.

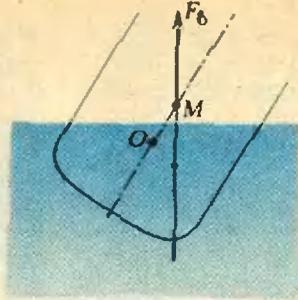


Рис. 5.

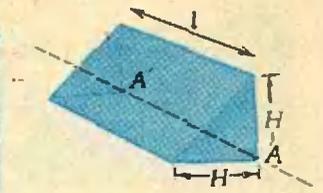


Рис. 6

а угол, который доска составляет с горизонтом (с поверхностью воды), α . Тогда $F_b = 2x\rho_0 Sg$ и $Mg = \rho S l g$. Поскольку нас интересует минимальное значение коэффициента трения доски о камень, можно считать, что $F_{тр} = \mu N$.

Так как доска находится в равновесии, сумма всех действующих на доску сил равна нулю. Запишем это условие, спроектировав все силы на направления касательной к доске и нормали к ней:

$$\begin{aligned} 2x\rho_0 Sg \sin \alpha - \rho l Sg \sin \alpha + \mu N &= 0, \\ 2x\rho_0 Sg \cos \alpha - \rho l Sg \cos \alpha + N &= 0. \end{aligned}$$

Поделив почленно эти уравнения друг на друга, найдем, что

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha.$$

С другой стороны, как это видно из рисунка 4,

$$\operatorname{tg} \alpha = H / \sqrt{(l - 2x)^2 - H^2}.$$

Величину x можно найти из условия равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих на доску. Удобнее всего рассмотреть моменты сил относительно точки касания доски и камня (точки O), поскольку при этом моменты сил трения и реакции опоры будут равны нулю.

Линия действия архимедовой силы проходит через центр масс погруженной части доски, значит, ее плечо относительно точки O равно $(l - x) \times \cos \alpha$. Плечо силы тяжести равно $(l/2) \cos \alpha$. Условие равенства нулю суммарного момента сил имеет вид

$$\rho l S (l/2) \cos \alpha - \rho_0 2x S (l - x) \cos \alpha = 0,$$

или

$$x^2 - lx + \rho l^2 / (4\rho_0) = 0.$$

Отсюда находим

$$x = (l/2) (1 - \sqrt{1 - (\rho/\rho_0)})$$

(второй корень следует отбросить, так как он не удовлетворяет условию $2x < l$).

Тогда окончательно получаем

$$\mu = H / \sqrt{l^2 (1 - \rho/\rho_0) - H^2}.$$

В условии задачи было сказано, что доска тонкая. Как это использовалось при решении?

Отметим, что вопрос о моменте выталкивающей силы исключительно важен при рассмотрении устойчивости плавания тел. В кораблестроении вводится специальное понятие о метацентре — точке пересечения линии действия выталкивающей силы в наклонном положении корабля с плоскостью его симметрии (рис. 5). Метацентр (точка M) не должен опускаться ниже центра тяжести корабля (точка O), иначе вращательный момент архимедовой силы не сможет вернуть корабль в вертикальное положение.

Задача 3. В аквариум прямоугольного сечения налита вода (плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$) до высоты $H = 0,5 \text{ м}$. Определите силу, действующую на стенку аквариума длиной $l = 1 \text{ м}$, и момент сил давления на эту стенку относительно ее нижнего ребра.

В данном случае давление меняется с глубиной погружения h , причем меняется по линейному закону $p = \rho gh$. Не вызывает сомнения, что равнодействующая всех сил давления направлена горизонтально. А чему равен ее модуль? Обычно при ответе на этот вопрос используют формулу $F = p_{cp} S$, где $S = lH$ — площадь соприкосновения воды со стенкой, а $p_{cp} = \rho gH/2$ — среднее давление, равное давлению на середине глубины. И такой ответ, безусловно, верный. Однако не каждый абитуриент может объяснить, почему используется именно это давление в качестве среднего. Попробуем это сделать.

Рассмотрим прямоугольную призму (из материала плотности ρ) высотой l , в основании которой лежит прямоугольный равнобедренный треугольник со стороной H . Поставим эту призму на горизонтальную поверхность

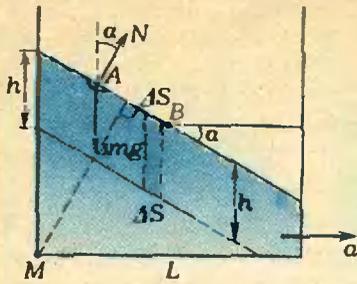


Рис. 7.

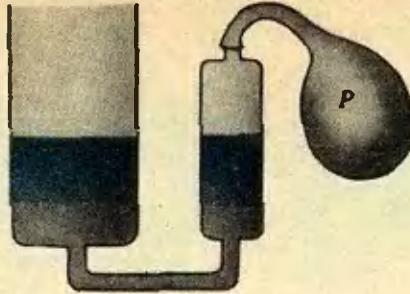


Рис. 8.

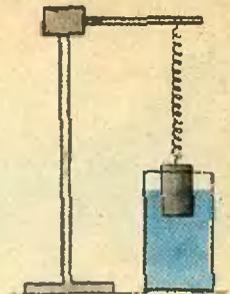


Рис. 9.

(рис. 6). Нетрудно видеть, что сила давления призмы на поверхность по модулю совпадает с силой давления воды на боковую поверхность аквариума (вследствие одинаковости распределения давлений по поверхности соприкосновения). Но сила давления призмы — это ее вес, поэтому

$$F_x = \rho g H \frac{H}{2} l = (\rho g \frac{H}{2})(lH) = 1250 \text{ Н.}$$

Итак, действительно в качестве среднего давления воды следует взять давление на середине глубины.

Второй вопрос задачи — более сложный, поскольку и давление меняется с глубиной, и плечи соответствующих сил давления также зависят от глубины. Ссылаясь на аналогию с предыдущим результатом, иногда предлагают для нахождения момента сил давления использовать среднюю силу давления и «среднее» плечо, равное $H/2$. Но это совершенно неправильно. Чтобы получить верный ответ, действительно следует воспользоваться аналогией, но аналогией с призмой, упоминавшейся выше. Для нее искомым момент есть произведение силы тяжести призмы на плечо относительно прямой AA' (см. рис. 6). Линия действия силы тяжести находится на расстоянии $H/3$ от ребра AA' (в однородном треугольнике центр масс находится в точке пересечения медиан), поэтому

$$M_x = \rho g \frac{H}{2} l H \frac{H}{3} \approx 208,3 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

При решении задачи мы нигде не учитывали атмосферное давление. Подумайте, может ли оно изменить ответ? И еще: как изменится сила давления на стенку, если эту стенку сделать резиновой?

Вопрос 4. Что произойдет с глубиной погружения шарика, плавающего в стакане с водой, если стакан начнет с ускорением двигаться вверх?

Рассмотрим систему вода плюс плавающий в ней шарик. Пусть она движется вверх с ускорением a . Это ускорение создается за счет разности сил давления N_a со стороны дна стакана и силы тяжести системы $(M+m)g$, где M — масса воды, а m — масса шарика:

$$N_a - (M+m)g = (M+m)a.$$

Пока система покоилась, сила давления N_0 на дно стакана определялась соотношением

$$N_0 - (M+m)g = 0.$$

Сравнивая силы N_a и N_0 , видим, что

$$\frac{N_a}{N_0} = \frac{a+g}{g}.$$

Покажем, что давление в любой точке жидкости увеличилось в такое же число раз. Выделим «водяной» цилиндр сечением ΔS , одно из оснований которого совпадает с поверхностью воды, а другое находится на глубине h . Запишем уравнение движения этого цилиндра в вертикальном направлении:

$$p_h \Delta S - \rho \Delta S h g = \rho \Delta S h a,$$

где p_h — давление воды на глубине h , ρ — плотность воды. Мы видим, что

$$p_h = \rho(g+a)h,$$

то есть по сравнению со статическим случаем оно возросло в $(g+a)/g$ раз. Следовательно, во столько же раз увеличилась выталкивающая сила.

Запишем теперь уравнение движения шарика по вертикали:

$$\rho V_a g \frac{a+g}{g} - mg = ma.$$

Отсюда получаем, что объем V_a погруженной части шарика при ускоренном движении стакана вверх не зависит от ускорения системы и равен $V_a = m/\rho$.

Следовательно, глубина погружения шарика в воду не изменится.
Задача 4. Аквариум, имеющий форму куба с ребром L , до половины

наполнен водой и приведен в движение с горизонтальным ускорением \vec{a} ($a < g$). Считая, что к моменту начала движения системы аквариум — вода как целого вода не расплескалась, определите форму поверхности воды и давление в точке M (рис. 7).

Сразу же скажем, что поверхность воды будет представлять собой часть плоскости, наклоненной к горизонту под углом α . Теперь обоснуем это и найдем угол α .

Выделим небольшой объем жидкости массой Δm вблизи произвольной точки A поверхности воды. Равнодействующая сил давления со стороны всей остальной воды будет перпендикулярна поверхности в данном месте. Пусть она равна \vec{N} и образует угол α с вертикалью. Тогда выделенный участок поверхности (поскольку он мал, его можно считать плоским) образует тот же угол α с горизонтом (почему?).

Запишем уравнения движения нашего объема воды, спроектировав все силы и ускорения на вертикальную и горизонтальную оси:

$$\begin{aligned} N \cos \alpha - \Delta mg &= 0, \\ N \sin \alpha &= \Delta ma. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = a/g$$

— угол наклона поверхности не зависит от выбора точки A и определяется только отношением a/g .

Выберем теперь в воде плоскость, параллельную поверхности воды и отстоящую от нее по вертикали на расстояние h . Покажем, что во всех ее точках давление воды p_h будет определяться по формуле $p_h = \rho gh$. Действительно, выделим в воде наклонный цилиндр с образующей длины h и основаниями ΔS . По вертикали этот объем не движется, поэтому сумма проекций всех действующих на него сил на вертикальное направление равна нулю:

$$\rho gh \Delta S \cos \alpha - p_h \Delta S \cos \alpha = 0,$$

где первое слагаемое — это сила тяжести цилиндра, а второе — вертикальная проекция силы давления на нижнее основание цилиндра. Отсюда получаем

$$p_h = \rho gh.$$

Таким образом, поверхностями постоянного давления будут плоскости, параллельные свободной поверхности воды.

Для нахождения давления в точке

M заметим, что из-за несжимаемости воды точка B (середина) остается на месте. Следовательно,

$$p_M = \rho g \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) = \rho \frac{l}{2} (a + g).$$

Было ли нами где-нибудь использовано условие $a < g$? Найдите, каковы будут силы давления воды на стенки и дно аквариума при его ускоренном движении?

* * *

Расставаясь с читателем, мы надеемся, что при подготовке к вступительным экзаменам он внимательно отнесется к теме «Гидростатика» и не захочет разделить участь «плавающих тел, подверженных действию выталкивающих сил».

Упражнения

1. Ртутный манометр (рис. 8) состоит из двух трубок с площадью сечения S_1 и S_2 , причем $S_1/S_2 = 2$. На сколько изменилось измеряемое давление, если уровень ртути в левом колене поднялся на $\Delta h = 10$ мм?

2. В бочку с водой упал стеклянный диск. Его диаметр $D = 30$ см, толщина $h = 5$ мм, плотность стекла $\rho = 2,6 \cdot 10^3$ кг/м³. Чтобы его достать, в бочку опустили трубку диаметром $d = 10$ см, плотно прижали ее к диску, выкачали воду и стали медленно поднимать вверх. Определите, до какого расстояния до поверхности воды можно таким способом поднять диск.

3. Воронка массой M , имеющая форму усеченного конуса с радиусом основания R , стоит на столе. Края воронки плотно прижаты к поверхности стола. Сколько воды будет налито в воронку к моменту ее отрыва от стола, если высота уровня воды в воронке в этот момент равна h ?

4. Цилиндрическую гирию, подвешенную к динамометру, опускают в воду, пока уровень воды в сосуде не изменится на $\Delta h = 8$ см (рис. 9). Показание динамометра при этом изменилось на $\Delta F = 0,5$ Н. Определите сечение сосуда.

5. В сосуде с водой плавает кусок льда, в середину которого вмерзла свинцовая дробишка. Масса льда M , масса дробишки m . Температура воды в сосуде 0°C . Какое наименьшее количество теплоты надо сообщить системе, чтобы дробишка начала тонуть? Плотность свинца ρ_s , льда ρ_l , удельная теплота плавления льда λ .

6. Плотность раствора соли меняется с глубиной по закону $\rho = \rho_0 + Ah$, где $\rho_0 = 1$ г/см³, $A = 0,02$ г/см⁴. В раствор опущены два шарика, связанные нитью. Объемы шариков $V_1 = 0,1$ см³ и $V_2 = 0,2$ см³, их массы $m_1 = 0,13$ г и $m_2 = 0,34$ г. Глубина погружения первого шарика в состоянии равновесия оказалась равной $h_1 = 20$ см. При этом нить натянута. Определите длину нити.

7. Где сильнее горит газ — на первом или на последнем этаже четырнадцатизэтажного жилого дома?

8. В стакане, доверху наполненном водой и закрытом сверху, плавает деревянный шарик. Как изменится сила давления шарика на крышку, если сосуд привести в движение с ускорением \vec{a} , направленным вертикально вверх?

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$x^2 + 3x + |x + 3| = 0.$$

2. Среди корней уравнения

$$\frac{\cos 2\pi x}{1 + \operatorname{tg} \pi x} = 0$$

найдите тот, расстояние от которого до числа $\sqrt{13}$ на числовой прямой будет наименьшим.

3. Из середины D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведен луч, перпендикулярный к гипотенузе и пересекающий один из катетов. На нем отложен отрезок DE , длина которого равна половине длины отрезка AB . Длина отрезка CE равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов. Найдите площадь треугольника ABC . Представьте в виде десятичной дроби приближенное значение этой площади с точностью до 0,01.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2+1} + \sqrt{xy} = \sqrt{x+1}. \end{cases}$$

5. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ имеет своей осью симметрии диагональ AC , длина которой равна 9, а точка E пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ делит отрезок AC так, что длина отрезка AE меньше длины отрезка EC . Через середину бокового ребра пирамиды $SABCD$ проведена плоскость, параллельная основанию и пересекающаяся с ребрами SA, SB, SC, SD соответственно в точках A', B', C', D' . Получившийся многогранник $ABCDA'B'C'D'$, являющийся частью пирамиды $SABCD$, пересекается плоскостью α по правильному шестиугольнику, длина стороны которого равна 2. Найдите площадь треугольника ABD , если плоскость α пересекает отрезки BB' и DD' .

Вариант 2

(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_3^2(1-x)}{x^2-3} > 0.$$

2. Экскаватор роет котлован с постоянной производительностью. После того как он закончил работу, второй экскаватор стал рыть такой же котлован также с постоянной производительностью. Время, которое затратили оба экскаватора на рытье двух котлованов, в $4\frac{1}{12}$ раза превышает время, которое затратили бы оба экскаватора, вырыв совместно один котлован. Первый экскаватор работает с большей производительностью, а суммарная произво-

дительность обоих экскаваторов составляет $70 \text{ м}^3/\text{ч}$. Чему равна производительность каждого экскаватора?

3. Определите, при каких значениях x функция

$$f(x) = x^2(18 \sin 3x - 45 \cos 3x) + x(12 \cos 3x + 30 \sin 3x) + 68 \sin 3x - 170 \cos 3x$$

имеет минимумы.

4. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S , у которой длина ребра основания равна 2, а длина бокового ребра равна $\sqrt{3}$, вписана правильная четырехугольная пирамида $S'A'B'C'D'$ с вершиной S' , у которой длины всех ребер равны между собой. При этом вершина S' лежит в плоскости $ABCD$, а вершины A', B', C', D' лежат на четырех апофемах пирамиды $SABCD$. Докажите, что вершина S' лежит в точке пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, и найдите объем пирамиды $S'A'B'C'D'$.

5. Найдите все a , при которых неравенство

$$-\frac{1}{2}|a+2| \cdot |x+a+4| + \left(|a+2| - \frac{a^2+4a+3}{|a+2|}\right) \times |x+2| - \frac{1}{2}|a+2| \cdot |x-a| > -2$$

выполняется ровно для двух различных значений x .

Вариант 3

(биологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x}{1-x} < x-6.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 2x + 2 \cos x + 7 = 2 \sin\left(\frac{7}{2} \pi + x\right) + 4 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{4 + 2 \log_2 \left(1 - \frac{8x}{(2x+1)^2}\right)} = \log_2 \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) + 2 \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

4. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ со стороной длины a . Длина диагонали AC ромба в 1,5 раза больше длины его стороны. Основание высоты пирамиды совпадает с центром ромба, и ее длина в 1,5 раза больше $|AC|$. Через точку A и середину ребра CS проведена секущая плоскость, образующая с плоскостью основания пирамиды угол 45° . Какова площадь сечения пирамиды этой плоскостью? Сколько таких плоскостей можно построить?

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y^4 - 4y^3 - 16y^2 - 8xy - 4x^2 + 32y + 64 = 0, \\ \sin(5\pi x) - \sqrt{x(x-6)} + 13 \times \\ \times \cos\left(\pi\left(y^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)\right) + \sin(\pi(2y^2 - x)) = 0. \end{cases}$$

Вариант 4

(факультет почвоведения)

1. Производительности трех насосов относятся как 5:4:2. За 7 часов первый насос перекачал на 6 м^3 воды больше, чем третий. Определите производительность каждого из трех насосов.

2. Решите уравнение

$$2 \cos^2 x = 1 + \sqrt{2} - \cos 2x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2 \left| 1 + \frac{9}{x^2} \right| < 1.$$

4. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 45° , длина стороны AB равна c , длина стороны AC равна b , причем $b > c$. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка M так, что угол BAM равен 75° . Прямая AM пересекает окружность, описанную вокруг треугольника ABC , в точке N , расположенной между A и M . Определите длину AN .

5. Укажите все значения a , при которых уравнение

$$\sqrt{5a + \sqrt{5a - x - \frac{x^2}{4}}} + x + \frac{x^2}{4} = 0$$

имеет решение.

Вариант 5

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$2 \sin \frac{x}{4} \cos 3x = \cos 3x.$$

2. В правильном треугольнике со стороной, равной 6 , на одной из сторон взята точка на расстоянии 1 от ближайшей вершины. Найдите расстояние от этой точки до центра треугольника.

3. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 6x + e^{-6x}.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде угол между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равен $\frac{\pi}{3}$. Через точку, лежащую на одном из боковых ребер, проведена прямая, перпендикулярная этому ребру и пересекающая высоту пирамиды в середине. Известно, что длина отрезка этой прямой, лежащего внутри пирамиды, равна 6 . Найдите длину бокового ребра пирамиды.

5. Найдите все действительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y(ax-1) = 2|x+1| + 2xy, \\ yx+1 = x-y \end{cases}$$

имеет действительные решения.

Вариант 6

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Решите уравнение

$$27^x + 9^x = 3^{x+1}.$$

2. Решите уравнение

$$\cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \cos x = 0,5.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^2 - 5|x+1| - 2$$

на отрезке $[-3; 3]$.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC с острым углом при вершине B взяты точки P и Q , причем P — середина стороны AB . Известно, что $|AB|=4$, $|BC|=5$, $|BQ|=3$. Найдите длину отрезка PQ , если площадь треугольника

ABC на $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ больше, чем площадь треугольника PBQ .

5. При каком значении параметра b система неравенств

$$\begin{cases} y > (x-b)^2, \\ x > (y-b)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Вариант 7

(факультет психологии)

1. Вычислите, не используя микрокалькулятор:

$$\left(\frac{928 \cdot 10^{-2}}{0,8} - 0,6 \right) :$$

$$\left(\frac{(42 \cdot 3 \frac{5}{6} + 3,3 : 0,03) : \frac{1}{15}}{(3 \frac{3}{4} : 0,625 - 0,84 : 0,8) : 0,03} \right)^{-1}.$$

2. Два насоса за 4 часа совместной работы подают 96 кубометров воды. Если бы второй насос подавал в час на 6 кубометров больше, чем он подает сейчас, то тогда на накачивание каждого кубометра второй насос расходовал бы на 3 минуты больше, чем расходует на накачивание каждого кубометра первый насос. Сколько кубометров воды в час подает первый насос?

3. Решите уравнение

$$2 \sin x (5 + \cos 2x) = 5 \sqrt{2} \sin 2x.$$

4. Две окружности радиусов 4 и 5 пересекаются в точках B и C . Через центры O_1 и O_2 окружностей проведена прямая; A_1 и A_2 — две из четырех точек пересечения этой прямой с окружностями, причем точка A_2 лежит на окружности с центром O_2 , а длина отрезка A_1A_2 равна 15. Найдите площадь выпуклого четырехугольника A_2BA_1C .

5. Первый член геометрической прогрессии, знаменатель которой — натуральное число, равен 5, а разность между утроенным вторым ее членом и половиной третьего ее члена больше 20. Найдите знаменатель этой прогрессии.

6. Найдите все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

— вторая цифра числа в 2 раза меньше последней его цифры;

— сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой первой и третьей его цифр, делится на 10 без остатка.

7. Найдите все пары чисел (x, y) , удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:

$$\begin{cases} 3^{2x+y-1} + 4 \cdot 3^{2x-1} < 2, \\ 4x+y > 2 - \log_3 4. \end{cases}$$

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Поезд при подходе к платформе начинает тормозить и останавливается, пройдя путь $s = 75$ м. Найдите начальную скорость поезда, если за предпоследнюю секунду он прошел расстояние $l = 2,25$ м. Движение поезда равнозамедленное.

2. Тело начинает скользить вниз по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α . В нижней точке тело ударяется о стенку, поставленную перпендикулярно направлению его движения. Удар абсолютно упругий. Определите коэффициент трения при движении тела, если после удара оно поднялось до половины первоначальной высоты.

3. Брус массой m поднимается вдоль наклонной плоскости при помощи веревки, намотанной на вал электромотора (рис. 1). Движение бруса равноускоренное, в начальный момент $t_0 = 0$ скорость бруса была равна v_0 .

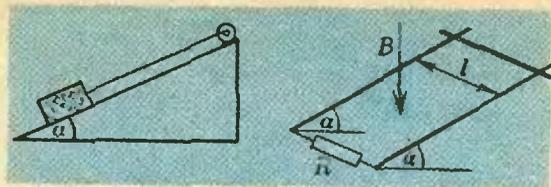


Рис. 1.

Рис. 2.

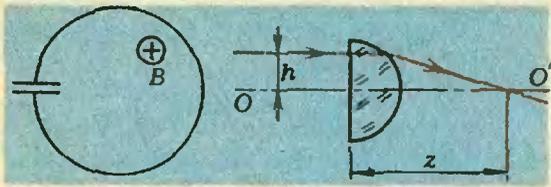


Рис. 3.

Рис. 4.

а в момент t стала равна v . Определите развиваемую электромотором мощность в момент t , если угол наклона наклонной плоскости α , а коэффициент трения между бруском и плоскостью μ .

4. Температура газов, образующихся при сгорании топлива в цилиндрах двигателя автомобиля, равна $t_1 = 827^\circ\text{C}$, температура выхлопных газов равна $t_2 = 97^\circ\text{C}$. Сколько километров проедет автомобиль, имеющий в баке $V = 40$ л топлива, если теплота сгорания топлива $q = 3,2 \cdot 10^{10}$ Дж/м³, а сила сопротивления движению остается постоянной и по модулю равной $F = 1,7 \cdot 10^3$ Н? Двигатель считать идеальной тепловой машиной, работающей с максимально возможным коэффициентом полезного действия.

5. Калорифер подает в помещение $V = 50\,000$ м³ воздуха при температуре t_1 и относительной влажности $\varphi_1 = 60\%$, забирая его с улицы при температуре t_2 и относительной влажности $\varphi_2 = 80\%$. Сколько воды дополнительно испаряет калорифер в подаваемый воздух? Плотность насыщенных водяных паров при t_1 равна $\rho_1 = 15,4 \cdot 10^{-3}$ кг/м³, а при t_2 — $\rho_2 = 9,4 \cdot 10^{-3}$ кг/м³.

6. Источник какого напряжения надо подключить с помощью нихромового провода длиной $l = 19,2$ м и диаметром $d = 3 \cdot 10^{-4}$ м к лампочке, рассчитанной на напряжение $U_1 = 120$ В и мощностью $P = 40$ Вт, чтобы она горела нормально? Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом \cdot м.

7. По двум параллельным шинам в однородном магнитном поле скользит перемычка (рис. 2). Плоскость шин образует угол α с горизонтальной плоскостью. В нижней части шины соединены через резистор с сопротивлением R . Линии индукции магнитного поля направлены вертикально. Коэффициент трения между перемычкой и шинами μ . Масса перемычки m , дли-

на перемычки l . Чему равна индукция магнитного поля, если перемычка скользит с постоянной скоростью v ? Сопротивление шин и перемычки не учитывать.

8. Проволочный виток, замыкающий обкладки конденсатора, помещен в однородное магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны к плоскости витка (рис. 3). Индукция магнитного поля равномерно изменяется со скоростью $\Delta B / \Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл/с. Емкость конденсатора $C = 100$ мкФ. Площадь, охваченная витком, $S = 200$ см². Определите заряд конденсатора.

9. Половинка шара изготовлена из прозрачного вещества с показателем преломления $n = 4/3$. Радиус шара $R = 5$ см. На расстоянии $h = 3$ см от оси OO' параллельно оси на полушаре со стороны плоской поверхности падает луч света (рис. 4). На каком расстоянии z от плоской поверхности полушара этот луч пересечет ось?

10. В некотором фотоаппарате максимальное расстояние от объектива (в виде тонкой линзы) до фотопленки в полтора раза больше фокусного расстояния объектива. С помощью этого фотоаппарата нужно сфотографировать мелкий плоский предмет. Каково при этом минимально возможное отношение размеров предмета к размерам его изображения на фотопленке?

Механико-математический факультет

1. Двигатель ракеты, запущенной с поверхности Земли вертикально вверх, сообщает ей постоянное ускорение $a = 10$ м/с². С какой скоростью ракета упадет на Землю, если двигатель проработал $t = 22$ с? Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².

2. Шарик массой $m = 10$ г, падая без начальной скорости с некоторой высоты, ударился о горизонтальную плиту и подпрыгнул на высоту $H = 0,8$ м. При ударе изменение импульса шарика составило $\Delta P = 0,17$ кг \cdot м/с. Найдите, на какую высоту подпрыгнет шарик после следующего удара, если при каждом ударе шарик теряет одну и ту же часть энергии. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. На невесомой нерастяжимой нити подвешен маленький шарик. Период малых колебаний такого маятника $T = 1,3$ с. На какой максимальный угол будет отклоняться нить от вертикали, если при колебаниях, проходя положение равновесия, шарик будет двигаться со скоростью $v = 2,1$ м/с? Принять $g = 10$ м/с².

4. В вертикальном цилиндре объемом $V = 2$ л под тяжелым поршнем находится газ при температуре $T = 300$ К. Масса поршня $m = 50$ кг, его площадь $S = 50$ см². Температуру газа повысили на $\Delta T = 100$ К. Найдите изменение внутренней энергии газа, если его теплоемкость $C = 5$ Дж/К. Атмосферное давление

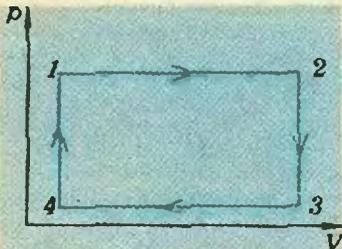


Рис. 5.

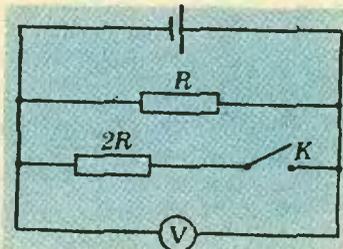


Рис. 6.

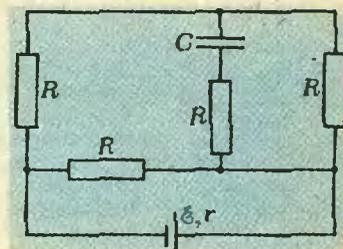


Рис. 7.

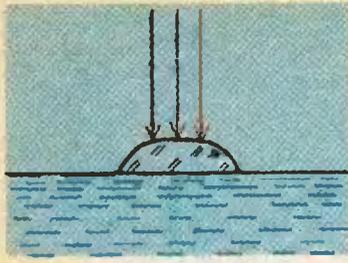


Рис. 8.

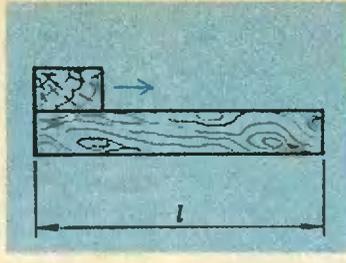


Рис. 9.

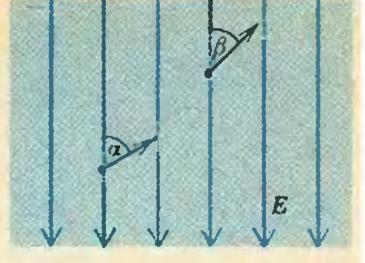


Рис. 10.

$p_0 = 10^5$ Па. Трение поршня о стенки цилиндра не учитывать. Принять $g = 10$ м/с².

5. Процессы, происходящие в цилиндре теплового двигателя с идеальным газом, изображены на диаграмме $p-V$ (рис. 5). Известно, что $T_4 = 300$ К, $T_2 = 500$ К, $T_3 = 450$ К. Найдите, на сколько градусов температура в точке 1 отличается от температуры в точке 3.

6. Резистор сопротивлением $R = 45$ Ом и конденсатор соединены последовательно с аккумулятором; при этом заряд на обкладках конденсатора равен $q_1 = 8 \cdot 10^{-5}$ Кл. Если же резистор и конденсатор подключить к аккумулятору параллельно, то заряд на обкладках конденсатора будет $q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл. Найдите внутреннее сопротивление аккумулятора.

7. Два резистора, источник постоянного тока и вольтметр соединены, как показано на рисунке 6. При замкнутом ключе вольтметр показывает напряжение $U_1 = 16$ В. Если ключ разомкнуть, вольтметр показывает $U_2 = 20$ В. Найдите электродвижущую силу источника, пренебрегая внутренним током в вольтметре.

8. Обмотка мощного электромагнита питается постоянным током и потребляет мощность $P = 5$ кВт. Для предотвращения перегрева обмотки магнит снабжен охлаждающим устройством, по которому течет вода, поглощающая $\eta = 84\%$ выделяющегося в обмотке количества теплоты. Определите необходимый расход воды (в кубических метрах за секунду), если температура воды не должна повышаться более чем на $\Delta T = 25$ К. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³, удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \times 10^3$ Дж/(кг · К).

9. С помощью кинокамеры сняли колебания тяжелого груза, подвешенного на проволоке. Съемка велась при помощи объектива с фокусным расстоянием $F = 5$ см. Изображение маятника на пленке имеет длину $l = 20$ мм. За время съемки $t = 1$ мин маятник совершил $n = 24$ полных колебания. С какого расстояния (от объектива до маятника) велась съемка? Маятник считать математическим; принять $g = 10$ м/с².

10. Светящаяся точка движется с постоянной скоростью $v_1 = 0,2$ м/с вокруг главной оптической оси собирающей линзы. Плоскость окружающей линзы параллельна линзе и находится на расстоянии $d = 60$ см от нее. Определите скорость v_2 , с которой движется изображение точки, даваемое линзой. Учсть, что если расстояние между линзой и светящейся точкой увеличить на $l = 40$ см, то скорости движения точки и ее изображения будут одинаковыми.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Два тела с массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 3$ кг, связанные невесомой и нерастяжимой нитью длиной $l = 40$ см, свободно вращаются на гладкой горизонтальной поверхности с одинаковой угловой скоростью $\omega = 10$ с⁻¹. Нить все время

натянута, и одна ее точка неподвижна. Найдите полную кинетическую энергию этой системы.

2. Лифт массой $M = 1000$ кг поднимается лебедкой с постоянным ускорением. На некотором участке пути длиной $l = 1$ м лифт двигался со средней скоростью $v = 5$ м/с, и скорость его возросла на $\Delta v = 0,5$ м/с. Какая работа совершена по перемещению лифта на указанном отрезке пути? Трением пренебречь.

3. Из резервуара большой емкости с помощью насоса откачивают воду. Наконечник гладкого шланга, из которого вытекает вода, имеет площадь поперечного сечения $S = 10$ см² и находится на уровне поверхности воды в резервуаре. Мотор насоса потребляет мощность $P = 0,5$ кВт. Коэффициент полезного действия установки $\eta = 0,26$. С какой скоростью вытекает вода из шланга?

4. В вертикальном цилиндре с площадью поперечного сечения $S = 2 \cdot 10^{-3}$ м², закрытом сверху поршнем, находится газ. На поршень положили гирию массой $m = 5$ кг и повысили температуру на $\Delta T = kT$ ($k = 0,1$). При этом объем газа уменьшился на $\Delta V = kV$ от первоначальной величины. Какова масса поршня, если внешнее давление $p_0 = 10^5$ Па? Трением пренебречь.

5. Положительные точечные заряды $q_1 = 2 \times 10^{-6}$ Кл и $q_2 = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл, находящиеся в вакууме, действуют друг на друга с силой $F = 0,25$ Н. Определите напряженность поля в точке, расположенной посередине между зарядами.

6. В схеме, изображенной на рисунке 7, емкость конденсатора $C = 23$ мкФ, резисторы имеют одинаковые сопротивления $R = 20$ Ом. Электродвижущая сила батареи $\mathcal{E} = 12$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом. Определите заряд на конденсаторе.

7. Какова минимальная масса медного провода, предназначенного для передачи потребителю мощности $P = 12$ кВт на расстояние $l = 100$ м от генератора с напряжением $U = 220$ В, если допустимые потери мощности составляют $k = 2\%$ от P — мощности, дошедшей до потребителя? Плотность меди $d = 8,9$ г/см³, удельное сопротивление $\rho = 1,75 \cdot 10^{-6}$ Ом · см.

8. Над столом подвешена маленькая лампочка, расположенная в вершине конусообразного абажура, у которого угол между осью и образующей $\alpha = 30^\circ$. На какую величину уменьшится радиус светлого круга на поверхности стола, если на пути лучей параллельно поверхности стола поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d = 5$ см с показателем преломления $n = 1,5$?

9. Тонкий стержень расположен вдоль главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см. Изображение стержня находится по другую сторону линзы, причем изображение ближайшего к линзе конца — на расстоянии $f_1 = 24$ см, а дальнего — на расстоянии

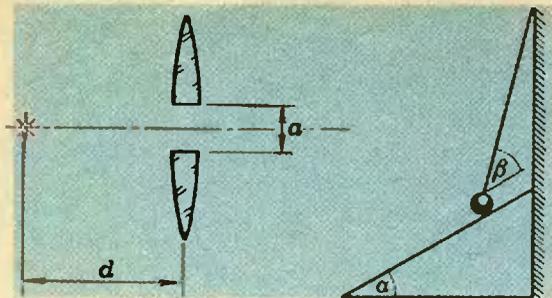


Рис. 11.

Рис. 12.

$f_2=20$ см от линзы. Определите продольное увеличение изображения.

10. Тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием $F=10$ см погружена плоской стороной в воду (рис. 8). На каком расстоянии от линзы сфокусируется параллельный пучок световых лучей? Показатель преломления воды $n=1,33$. Диаметр линзы много меньше фокусного расстояния.

Химический факультет

1. Мотоциклист за время $t=2$ с прошел первую половину тормозного пути. Считая силу торможения постоянной, найдите время, необходимое мотоциклисту для полной остановки.

2. Доска с покоящимся на ее краю бруском движется со скоростью $v_0=3$ м/с (рис. 9). При внезапной остановке доски брусок начинает скользить по ее поверхности. Найдите коэффициент трения между бруском и доской, если в момент соскальзывания бруска его кинетическая энергия уменьшилась в 3 раза по сравнению с первоначальной. Длина доски $l=0,45$ м. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с².

3. На легкой нерастяжимой нити длиной $l=0,5$ м подвешен шарик массой $m_1=0,1$ кг. Летевшая горизонтально со скоростью $v=10$ м/с пуля массой $m_2=0,01$ кг попадает в шарик и застревает в нем. Найдите натяжение нити сразу после соударения. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с². Размер шарика мал по сравнению с длиной нити.

4. Электрон влетает в однородное электрическое поле с напряженностью $E=148$ В/м (рис. 10). В некоторый момент времени ско-

рость электрона \vec{v} ($v=2 \cdot 10^8$ м/с) направлена под углом $\alpha=60^\circ$ к силовым линиям поля. Найдите угол β , под которым будет направлена

скорость электрона через промежуток времени $\Delta t=3 \cdot 10^{-8}$ с. Заряд электрона $e=1,6 \times 10^{-19}$ Кл. Масса электрона $m=9 \cdot 10^{-31}$ кг. Силой тяжести электрона пренебречь.

5. Тонкая собирающая линза разрезана на две половины, которые раздвинуты на расстояние $a=2$ мм (рис. 11). Найдите расстояние от точечного источника до линзы, если расстояние между действительными изображениями источника $l=6$ мм. Фокусное расстояние линзы $F=40$ см.

Географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

1. Однородный шар массой $m=10$ кг удерживается на гладкой наклонной плоскости веревкой, укрепленной над плоскостью (рис. 12). Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=30^\circ$, угол между веревкой и наклонной плоскостью $\beta=45^\circ$. Определите силу, с которой шар давит на наклонную плоскость.

2. Один моль газа находится при температуре $T_1=400$ К. Газ охлаждается изохорически, вследствие чего его давление уменьшается в $n=3$ раза. Затем газ изобарически расширяется так, что в конечном состоянии его температура равна первоначальной. Изобразите процесс на диаграмме $p-V$ и вычислите произведенную газом работу. Универсальная газовая постоянная $R=8,3$ Дж/(моль \cdot К).

3. Амперметр сопротивлением $R_A=2$ Ом рассчитан на токи до $I_A=0,1$ А. Его требуется использовать для измерения токов до $I=10$ А. Сколько метров медной проволоки сечением $S=1,7 \cdot 10^{-6}$ м² необходимо для этого присоединить параллельно амперметру? Удельное сопротивление меди $\rho=1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом \cdot м.

4. Проволочное кольцо радиусом $a=10$ см имеет сопротивление $R=10$ Ом. Кольцо помещено в однородное магнитное поле с индукцией $B=0,5$ Тл. При этом вектор индукции поля направлен под углом $\alpha=30^\circ$ к плоскости кольца. Найдите величину среднего тока, протекающего по кольцу при выключении магнитного поля в течение промежутка времени $\Delta t=1$ с.

5. Фотоэлемент облучается монохроматическим желтым светом с длиной волны $\lambda=6 \times 10^{-7}$ м. За некоторое время фотоэлемент поглотил энергию $W=10^{-5}$ Дж. Найдите число поглощенных фотонов. Постоянная Планка $h=6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж \cdot с, скорость света в вакууме $c=3 \cdot 10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
И. Н. Сергеев, А. А. Склянкин,
В. М. Чубариков

Наша обложка

Казалось бы, глобус и карта — привычные и хорошо знакомые с детства предметы. Но задумывались ли вы о том, что создание карты и глобуса — исследовательская и техническая задача не только для географов и путешественников?

Оказывается, получение плоского изображения сферической поверхности Земного шара — это интересная и трудная (в известном смысле — даже нераз-

решимая!) математическая задача. Как ни изощрились геометры — а среди них были такие выдающиеся ученые, как Меркатор, Эйлер, Гаусс, Чебышев, Ламберт, — придумать теоретически совершенный способ построения плоской карты сферической поверхности они не сумели. Это и не удивительно.

Возьмите обыкновенный лист бумаги и попробуйте им обернуть поверхность глобуса — или сразу появляются

складки, или бумага рвется. Почему? Наложению плоскости на сферу (в отличие, скажем, от цилиндра или конуса) препятствует... математическая теорема, утверждающая что полная кривизна поверхности не меняется при изгибании: у сферы она положительная, у плоскости (а также у цилиндра и конуса) — нулевая. Вот почему сферу развернуть на плоскость и сделать карту Земли без искажений нельзя.



О теореме Лагранжа

(см. с. 30)

2. а) Для любых; б) для промежутков, содержащихся в промежутках вида $[n; n+1]$, где $n \in \mathbb{Z}$; в) для промежутков, не содержащих точку 0 в качестве внутренней точки.
3. 31 с.
4. $c=(b+a)/2$; любые две параболы подобны.

Избранные школьные задачи

1. Ответ: 125 %. Решение. Пусть m — число мальчиков в кружке, d — число девочек. По условию задачи $m=0,8d$, откуда $d=1,25m$, поэтому d составляет 125 % от m .
2. Ответ: второе больше. Указание. Сравните квадраты данных чисел, при этом воспользуйтесь неравенством $\sqrt{1986 \cdot 1984} = \sqrt{1985^2 - 1} < 1985$.
3. $x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1 = x^2(x^3-1)+x^2+x+1 = x^2(x-1)(x^2+x+1)+x^2+x+1 = (x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$.
4. Ответ: ab . Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ известны $AB=a$ и $MN=b$ (M — середина CD , прямые AB и MN перпендикулярны, рис. 1). Проведем через M прямую PQ , параллельную A и пересекающую прямые AD и BC в точках P и Q (см. рис. 1). Треугольники CMQ и PMQ равны, поэтому параллелограмм $ABQP$ равнобедрен исходной трапеции. В этом параллелограмме известны основание $AB=a$ и высота $MN=b$, проведенная к этому основанию.
5. Указание. 1) Докажите сначала, что радиус окружности, имеющей общую точку с каждой из сторон треугольника, не меньше радиуса вписанной окружности (при этом равенство достигается только в том случае, когда рассматриваемая окружность является вписанной).
- 2) Известно, что все три медианы треугольника пересекаются в одной точке G и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины (см. задачу 67 со с. 78 учебника А. В. Погорелова, М.: Просвещение, 1983). Поэтому при гомотетии с коэффициентом $-0,5$ относительно центра G описанная окружность перейдет в окружность радиуса $R/2$, имеющую общую точку с каждой из сторон треугольника (а именно — середину стороны). Следовательно, $R/2 > r$. Равенство $R=2r$ достигается только для правильного треугольника.
6. Ответ: второе больше. Решение. Достаточно проверить, что $\sqrt[3]{1986} - \sqrt[3]{1985} < \sqrt[3]{1985} - \sqrt[3]{1984}$, то есть неравенство

$$\frac{1986 - 1985}{\sqrt[3]{1986^2 + \sqrt[3]{1986 \cdot 1985} + \sqrt[3]{1985^2}}} < \frac{1985 - 1984}{\sqrt[3]{1985^2 + \sqrt[3]{1985 \cdot 1984} + \sqrt[3]{1984^2}}}$$

Справедливость последнего неравенства сразу вытекает из того, что знаменатель первой дроби больше: $\sqrt[3]{1986^2} + \sqrt[3]{1986 \cdot 1985} + \sqrt[3]{1985^2} > \sqrt[3]{1985^2} + \sqrt[3]{1985 \cdot 1984} + \sqrt[3]{1984^2}$.

*Гомотетией с коэффициентом $k < 0$ называют преобразование, заключающееся в последовательном выполнении гомотетии с коэффициентом $|k|$ и симметрии относительно одной и той же точки G .

7. Ответ: а) тупоугольный; б) остроугольный. Решение. Пусть $a > b > c$ — длины сторон треугольника. Тогда при $a^2 > b^2 + c^2$ треугольник тупоугольный, при $a^2 = b^2 + c^2$ — прямоугольный, при $a^2 < b^2 + c^2$ — остроугольный (это следует, например, из теоремы косинусов).

а) Длины сторон треугольника равны: $\frac{2S \cdot 2S}{3}, \frac{2S}{4}, \frac{2S}{5}$, где S — его площадь, и так как

$1/9 > 1/16 + 1/25$, то $a^2 > b^2 + c^2$. б) Пусть медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке G (рис. 2), причем $|AA_1|=3, |BB_1|=4, |CC_1|=5$. Отложим на продолжении медианы CC_1 за точку C_1 отрезок C_1K , конгруэнтный отрезку GC_1 . Четырехугольник $ACBK$ — параллелограмм, так как его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Длины сторон треугольника GBK равны $2/3$ длин соответствующих медиан, поэтому он прямоугольный (так как $5^2 = 3^2 + 4^2$). Отсюда вытекает, что медианы AA_1 и BB_1 перпендикулярны. Из прямоугольных треугольников AB_1G, B_1A_1G и A_1BG легко найти, что $b/2 = |AB_1| = \sqrt{52}/3; c/2 = |A_1B_1| = \sqrt{25}/3$ и $a/2 = |A_1B| = \sqrt{73}/3$. Треугольник ABC остроугольный, так как $a^2 < b^2 + c^2$ ($73 < 25 + 52$). Отметим, что длины сторон треугольника ABC можно найти и из формул, выражающих длины медиан через длины сторон треугольника ABC : $m_a^2 = (b^2 + c^2)/2 - a^2/4$ и т. д.

8. Ответ: а) $]-\infty; -\sqrt{24}] \cup [\sqrt{24}; +\infty[$; б) $[-2; 2]$.

Указание. Множество значений функций f совпадает с множеством значений параметра a , при которых уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы одно решение. а) Уравнение $2x + \frac{3}{x} = a$ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение квадратное уравнение $2x^2 - ax + 3 = 0$, то есть когда дискриминант этого квадратного уравнения неотрицателен: $a^2 - 24 \geq 0$.

б) Уравнение $f(x)=a$ равносильно уравнению $(a-1)x^2 - (a+2)x + a + 2 = 0$ (1) (так как $x^2 - x + 1$ не обращается в 0 ни при каком x). При $a \neq 1$ уравнение (1) квадратное и имеет хотя бы один корень при $(a+2)^2 - 4(a-1)(a+2) \geq 0$. При $a=1$ уравнение (1) линейное и имеет корень $x=1$.

9. Ответ: а) 0; б) 0; в) $\sqrt[3]{2}$. Указание. а) Воспользуйтесь формулой для производной произведения. б) В этом случае пользоваться формулой для производной произведения нельзя:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 g(2+h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot g(2+h) = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(2+h) = \\ &= 0 \cdot g(2) = 0. \end{aligned}$$

в) Функция $y=f(x)$ имеет вид $f(x)=(x-2)g(x)$. Поэтому $((x-2)g(x))' = g(x) + (x-2)g'(x)$. При $x=2$ получаем $f'(2)=g(2)=\sqrt[3]{2}$.

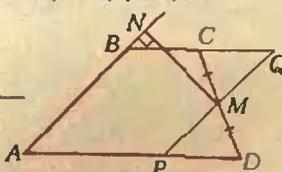


Рис. 1.

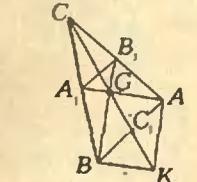


Рис. 2.

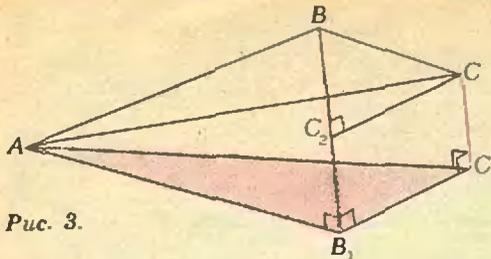


Рис. 3.

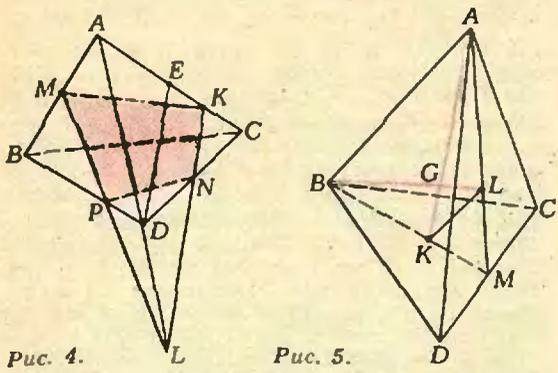


Рис. 4.

Рис. 5.

10. а) Проведем через сторону AB данного треугольника ABC любую плоскость α , не содержащую вершину C . В плоскости α возьмем такую точку C_1 , что треугольник ABC_1 — правильный. При проекции на плоскость α параллельно прямой CC_1 точки A и B перейдут в себя, а точка C — в точку C_1 . Таким образом, треугольник ABC спроектируется в правильный треугольник ABC_1 . б) Пусть $|BC|=a$, $|AC|=b$ и $|AB|=c$ — длины сторон данного треугольника, при этом $c > b > a$. Будем проектировать треугольник ABC на плоскость, проходящую через вершину A (рис. 3). Пусть B_1 — проекция точки B , C_1 — проекция точки C , $|BB_1|=y$, $|CC_1|=x$. Из прямоугольных треугольников ABB_1 , ACC_1 и BCC_2 , где C_2 — проекция точки C на прямую BB_1 , находим длины сторон треугольника AB_1C_1 : $|AB_1|^2=c^2-y^2$, $|AC_1|^2=b^2-x^2$, $|B_1C_1|^2=|CC_2|^2=a^2-(x-y)^2$. Для того чтобы треугольник AB_1C_1 был правильным, достаточно, чтобы $|AB_1|=|AC_1|$, $|AB_1|=|B_1C_1|$, то есть достаточно, чтобы имела неотрицательные решения система

$$\begin{cases} c^2 - y^2 = b^2 - x^2 > 0, \\ c^2 - y^2 = a^2 - (x - y)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x^2 + c^2 - b^2}, \\ c^2 = a^2 + 2x\sqrt{x^2 + c^2 - b^2} - x^2, \\ b^2 > x^2. \end{cases}$$

Далее, $x^2 + c^2 - b^2 > 0$, поэтому достаточно показать, что на промежутке $[0; b]$ имеет решение уравнение $c^2 - 2x\sqrt{x^2 + c^2 - b^2} + x^2 = a^2$. Для этого проще всего убедиться в том, что при $x=0$ левая часть не меньше правой ($c^2 > a^2$), а при $x=b$ — правая часть не меньше левой ($c^2 - 2bc + b^2 < a^2$), в силу неравенства треугольника. Строго говоря, при этом мы пользуемся непрерывностью функции $f(x) = c^2 - 2x \times \sqrt{x^2 + c^2 - b^2} + x^2$.

11. Ответ: $\sqrt[3]{1/4}$. Указание. Одна из частей — пирамида, подобная данной с коэффициентом подобия $k = \sqrt[3]{1/2}$.
 12. Ответ: числа равны. Указание. Логарифмы рассматриваемых чисел по основанию 2 равны: $\sqrt{\log_2 x} = \sqrt{\log_2 2 \cdot \log_2 x}$ (по-

скольку $\log_2 2 = 1/\log_2 x$).
 13. Пусть M и N — середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$ (рис. 4). Если рассматриваемая плоскость проходит через вершину тетраэдра, то доказываемое утверждение очевидно. Если плоскость не проходит через вершину, то она пересекает одну из сторон AC или BC треугольника ABC (для определенности сторону AC в точке K). Пусть P — точка пересечения этой плоскости с ребром BD . Тетраэдр $ABCD$ разбивается плоскостью α на два многогранника $ADPMKN$ и $CBPMNK$. Разобьем каждый из них на две пирамиды: первый на пирамиды $BMKNP$ и $BKNC$, второй на пирамиды $AMKNP$ и $APND$. У пирамид $BMKNP$ и $AMKNP$ общее основание $MKNP$ и равны высоты, проведенные к этому основанию, поскольку M — середина отрезка AB . Покажем теперь, что объемы тетраэдров $BKNC$ и $APND$ равны. У тетраэдров $ABCD$ и $BKNC$ общая высота, опущенная из вершины B , поэтому отношение их объемов равно отношению площадей оснований:

$$\frac{V_{BKNC}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{BKNC}}{S_{ACD}} = \frac{|KC| \cdot |CN|}{|AC| \cdot |CD|} = \frac{1}{2} \frac{|KC|}{|AC|}.$$

Аналогично, $\frac{V_{APND}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{APND}}{S_{BCD}} = \frac{1}{2} \frac{|PD|}{|DB|}$. Оста-

лось доказать, что $|KC| : |AC| = |PD| : |DB|$, или (что то же самое) $|KC| : |KA| = |PD| : |PB|$. Если плоскость α параллельна ребру AD , то это очевидно. Если же она пересекает ребро AD в точке L , то оба отношения равны $|DL| : |LA|$: проведем через точку D прямую DE , параллельную KN , тогда $|DL|/|LA| = |KE|/|KA| = |KC|/|KA|$, так как $|KC| = |KE|$. Аналогично $|PD| : |PB| = |DL| : |LA|$.

14. Для доказательства воспользуемся неравенством $a^2 + b^2 > 2bc$: $2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = (a^4 + b^4) + (b^4 + c^4) + (c^4 + a^4) > 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 = (a^2b^2 + b^2c^2) + (b^2c^2 + c^2a^2) + (c^2a^2 + a^2b^2) > 2ab^2c + 2bc^2a + 2ca^2b = 2abc(a + b + c)$.

15. а) Возьмем любые два из рассматриваемых отрезков (скажем AK и BL ; рис. 5). Оба они лежат в одной плоскости ABM , где M — середина CD , и поэтому пересекаются. Далее, $|KM| = 1/3 |BM|$ (так как медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2:1), поэтому $|KL| = 1/3 |AB|$ и $|AG| : |CK| = |AB| : |KL| = 3:1$. Таким образом, любой из рассматриваемых отрезков проходит через точку G , делящую отрезок AK в отношении 3:1, поэтому все они пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 3:1, считая от вершины (напомним, что AK — любой из этих отрезков).

- б) (Сравните с задачей 5). Указание.
 1) Докажите сначала, что радиус сферы, имеющей общую точку с каждой из граней тетраэдра, не меньше радиуса вписанной сферы (при этом равенство достигается только в том случае, когда рассматриваемая сфера является вписанной).
 2) При гомотетии с коэффициентом $-1/3$ относительно центра G из задачи 15 а) описанная сфера перейдет в сферу радиуса $R/3$, имеющую общую точку с каждой из граней тетраэдра (а именно точку пересечения медиан грани). Следовательно, $R/3 > r$. Равенство достигается только для правильного тетраэдра.

- Повторим гидростатику
 1. $\Delta p = 3 \rho_0 g \Delta h \approx 4$ кПа.
 2. $H = (D/d)^2 (v - v_0) h / v_0 = 7,2$ см (здесь $v_0 = 10^3$ кг/м³ — плотность воды).
 3. $m = \rho_0 R^2 h - M$.
 4. $S = \Delta F / (\rho_0 g \Delta h) = 6,25$ см².

5. $Q = \lambda \left(M - m \frac{Q_2 - Q_0}{Q_0 - Q_1} \frac{Q_1}{Q_2} \right)$ (здесь Q_0 — плотность воды).
6. $l = 12,5$ см.
7. Скорость сгорания газа определяется разностью давления газа и атмосферного давления. Газ, находящийся в трубах (под небольшим давлением), легче воздуха. Поэтому уменьшение давления воздуха при подъеме на четырнадцатый этаж больше, чем уменьшение давления газа. Значит, на верхнем этаже газ должен гореть сильнее.
8. Сила давления на крышку увеличится.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика
Вариант 1

1. $\{-3; -1\}$.
2. $\frac{13}{4}$. Указание. Искомый корень находится среди корней уравнения $\cos 2\alpha x = 0$, то есть среди чисел $x_m = \frac{1+2m}{4}$ ($m \in \mathbb{Z}$).

Заметим, что $x_6 = \frac{13}{4} < \sqrt{13} < \frac{15}{4} = x_7$, а расстояния от остальных корней до $\sqrt{13}$ больше $\frac{1}{2}$. Так как x_7 не удовлетворяет исходному уравнению ($\lg \frac{15\pi}{4} = -1$), искомым корнем является x_6 .

3. $\frac{1}{2} (\sqrt{2} + 1) \approx 1,2$. Указание. Можно считать, что луч DE пересекает катет BC (рис. 6). Точка E лежит на окружности, описанной около $\triangle ABC$. Поскольку $|BC| > |EC|$, $|AC| = |EC| = 1$. Кроме того, $\widehat{ADC} = \widehat{CDE} = \frac{\pi}{4}$ и поэтому $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{8}$. Отсюда $S_{ABC} = \frac{1}{2} |AC| \times |BC| = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \approx 1,20 \pm 0,01$.

4. $\left\{ (0; \log_2 \frac{8}{11}); \left(\frac{1}{3} \log_2 \frac{3+\sqrt{8}}{2}; 2 + \log_2(3 - \sqrt{8}) \right) \right\}$

Указание. Второе уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x(3x+y-1) = 0, \\ x+1 \geq 0. \end{cases}$$

Поэтому исходная система равносильна совокупности двух систем

$$a) \begin{cases} x=0, \\ 2+2^{y-2} = 3 \cdot 2^y. \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x=1-y, \\ x \geq -1, \\ 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x}. \end{cases}$$

5. 4. Решение. Из условия сразу следует, что диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, а треугольники ABD и CBD — равнобедренные. Поскольку многогранник $ABCD A' B' C' D'$ имеет 6 граней, плоскость α пересекает каждую грань по отрезку, концы которого не совпадают с вершинами много-

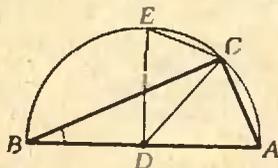


Рис. 6.

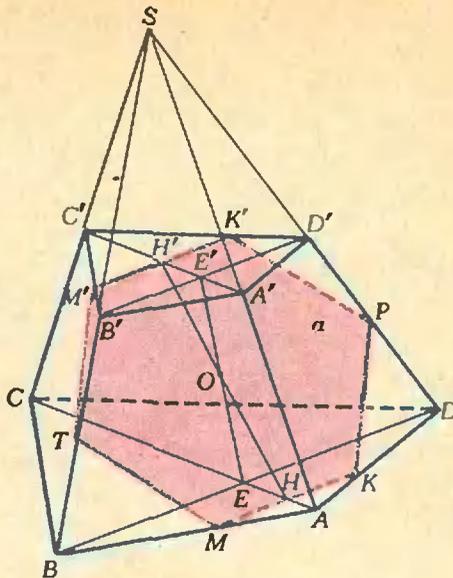


Рис. 7.

гранника. Обозначим вершины шестиугольника, лежащие на сторонах основания $ABCD$, через K и M , на сторонах четырехугольника $A' B' C' D'$ — через K' и M' , а на боковых ребрах DD' и BB' — через P и T соответственно (для определенности считаем вершину P соседней с вершинами K и K'). Поскольку $KMTM'K'P$ — правильный шестиугольник, прямая PT параллельна прямым KM и $K'M'$ и, следовательно, параллельна плоскостям $ABCD$ и $A' B' C' D'$ и одинаково удалена от них. Следовательно, точки P и T — середины ребер DD' и BB' соответственно, а PT — средняя линия трапеции $BB' D' D$, поэтому прямые KM , $K'M'$, PT , $D'B'$ и DB — параллельны. Пусть E' — точка пересечения диагоналей основания $A' B' C' D'$, H — точка пересечения стороны KM с диагональю AC , H' — точка пересечения стороны $K'M'$ с диагональю $A'C'$. Возможны два случая расположения плоскости α : в первом случае точка H лежит между точками A и E , а во втором — между E и C (рис. 7).

Докажем, что возможен лишь первый случай. Пусть O — точка пересечения плоскости $AA' C' C$ с диагональю PT . Треугольники HEO и $H'E'O$

конгруэнтны, поскольку $\widehat{HOE} = \widehat{H'O'E'}$, $|EO| = |O'E'|$, $|HO| = |H'O'|$. Следовательно, $|HE| = |H'E'|$. Таким образом, у трапеций $BDKM$ и $B'D'K'M'$ конгруэнтны высоты HE и $H'E'$ и меньшие основания KM и $K'M'$. Поскольку эти трапеции равнобедренные (они симметричны относительно диагоналей AC и $A'C'$) и $|BD| > |B'D'|$, то $\widehat{KDB} < \widehat{K'D'B'}$. Поэтому второй случай невозможен (иначе $\widehat{CDB} < \widehat{A'DB}$, что противоречит условию $|AE| < |CE|$).

Пусть $\frac{|CE|}{|AE|} = m$. Так как $\triangle BCD \sim \triangle K' C' M'$, а $\triangle BAD \sim \triangle KAM$, $\frac{|C'H'|}{|CE|} = \frac{|K'M'|}{|BD|} = \frac{|KM|}{|BD|} = \frac{|AH|}{|AE|}$. Поэтому $\frac{|C'H'|}{|AH|} = m$. Далее, $|AH| + |HE| = |AE| = \frac{1}{m} |CE| = \frac{2}{m} |C'H'| = \frac{2}{m} \times (|C'H'| + |H'E'|) = 2|AH| + \frac{2}{m} |EH|$. Отсюда

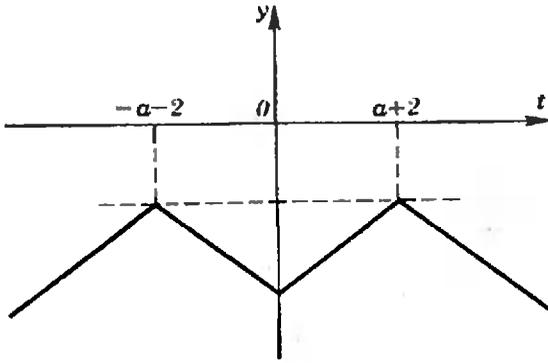
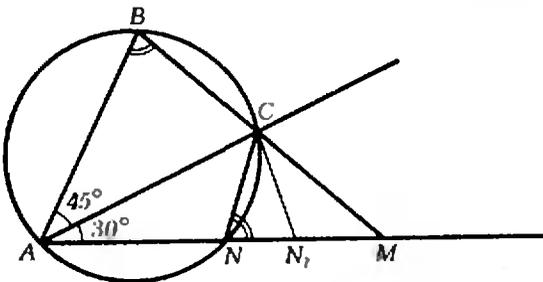


Рис. 8.

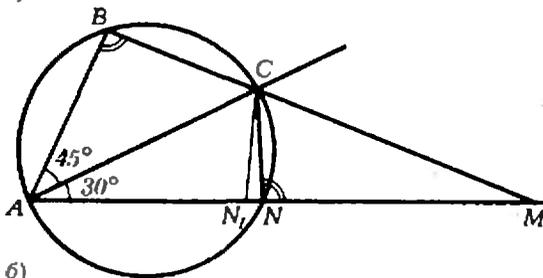
следует, что $|AH| = \frac{m-2}{2m-2} |AE|$. Значит, $\frac{|KM|}{|BD|} = \frac{|AH|}{|AE|} = \frac{m-2}{2m-2}$, но $|KM| = \frac{1}{2} |PT| = \frac{1}{4} \times \times (|B_1D_1| + |BD|) = \frac{3}{8} |BD|$. Поэтому $\frac{m-2}{2m-2} = \frac{3}{8}$, то есть $m=5$, и $|AE| = \frac{1}{6} |AC| = \frac{3}{2}$. Итак, $S_{ABD} = \frac{1}{2} |AE| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{3} = 4$.

Вариант 2

- $x=0; x < -\sqrt{3}$.
- $40 \text{ м}^3/\text{ч}$ и $30 \text{ м}^3/\text{ч}$.
- $-\frac{1}{3} \arcsin \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{2\pi k}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.
- $\frac{1}{12}$. Указание. Пусть K, L, M, N — середины ребер AB, BC, CD и AD соответственно. Пирамида $SKLMN$ — правильная, причем длины всех ее ребер равны $\sqrt{2}$. Плоскости SKN и SLM , а также плоскости SKL и SMN пересекаются по прямым l_1 и l_2 соответственно, проходящим через точку S . Обе эти прямые параллельны плоскости $ABCD$. Поскольку $A'B'C'D'$ — квадрат, пары его противоположных сторон параллельны прямым l_1 и l_2 соответственно. Отсюда следует, что плоскость $A'B'C'D'$ параллельна плоскости основания. Поэтому $|SA'| = |SB'| = |SC'| =$



а)



б)

Рис. 9.

$= |SD'|$, высота пирамиды $SABCD$ проходит через центр квадрата $A'B'C'D'$ и поэтому точка S' совпадает с центром квадрата $ABCD$. Поскольку все ребра пирамиды $S'A'B'C'D'$ равны между собой, эта пирамида подобна пирамиде $SKLMN$, причем коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что $V_{A'B'C'} = \frac{1}{8} V_{KLMN} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} (\sqrt{2})^3 \times \times 1 = \frac{1}{12}$.

5. $-2 \pm \sqrt{3}$. Указание. Ясно, что $a \neq -2$. Положив $t = x + 2$, приведем неравенство к виду $f(t) = -\frac{1}{2} |a+2| (|t+a+2| + |t-a-2|) + \frac{1}{|a+2|} |t| \geq -2$. (*)

При $t < \min\{a+2, 0, -a-2\}$ из (*) получаем

$$\left(|a+2| - \frac{1}{|a+2|} \right) t \geq -2.$$

Если $|a+2| - 1/|a+2| \leq 0$, то есть при $-3 \leq a \leq -1$, неравенство (*) справедливо при всех $t \leq t_0$. Следовательно, $|a+2| - 1/|a+2| > 0$. При таких a график функции $f(t)$, стоящей в левой части (*), имеет вид, показанный на рисунке 8. Поэтому (*) может выполняться для двух значений t лишь тогда, когда $f(-a-2) = f(a+2) = -2$.

Вариант 3

- $1; 1; 3 - \sqrt{3} \cup 3 + \sqrt{3}; \infty$.
- $x = \pi(2k+1) \quad (k \in \mathbb{Z})$.
- $\left\{ \frac{3}{2} \right\}$.
- $\frac{3\sqrt{14}}{16} a^2$; одна. Указание. Пусть φ — угол, образуемый линией пересечения плоскости сечения α с плоскостью $ABCD$ с диагональю AC . Можно подсчитать, что $\sin \varphi = 1$. Поэтому плоскость α пересекает плоскость $ABCD$ по перпендикуляру к AC , проведенному через точку A . Отсюда следует единственность плоскости α , а также перпендикулярность диагоналей четырехугольника $ALMN$ (L и N — точки пересечения плоскости α с ребрами SB и SD соответственно).
- $\begin{cases} x = 4 - \frac{1}{2} y^2, \\ y \in \mathbb{R}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2} (n - y^2), \\ y = 1 \pm \sqrt{5 + \frac{h}{2}} \end{cases}$
 $(n \in \mathbb{Z}, n \geq -10, n \neq 8)$.

Указание. Второе уравнение системы приводится к виду $\sqrt{(x-3)^2 + 4} \sin \pi(y^2 + 2x) = -2 \sin \pi(y^2 + 2x) \cdot \cos \pi(3x - y^2)$, поэтому либо $\sin \pi(y^2 + 2x) = 0$, либо $\sqrt{(x-3)^2 + 4} = -2 \cos \pi(3x - y^2)$. Таким образом, либо $y^2 + 2x = n, n \in \mathbb{Z}$, либо $x = 3, \cos \pi(3x - y^2) = 1$.

Вариант 4

- $10/7 \text{ м}^3/\text{ч}; 8/7 \text{ м}^3/\text{ч}; 4/7 \text{ м}^3/\text{ч}$.
- $x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$.
- $]-\infty, -3[\cup]3; +\infty[$.
- $\frac{1+\sqrt{3}}{2} b - \frac{y^2}{2} c$. Решение. Пусть R — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности, $|AN| = x$ (рис. 9). По теореме синусов $|BC| = 2R \sin A = R\sqrt{2}$; $|NC| = 2R \sin 30^\circ = R$. По теореме косинусов $2R^2 = |BC|^2 = b^2 + c^2 - -bc\sqrt{2}$, $|NC|^2 = R^2 = x^2 + b^2 - bx\sqrt{3}$. Отсюда следует, что x удовлетворяет уравнению

$$x^2 + b^2 - bx\sqrt{3} = \frac{b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{или } 2x^2 - 2bx\sqrt{3} + b^2 - c^2 + bc\sqrt{2} = 0. \quad (*)$$

Полученное уравнение имеет положительные корни

$$x_{1,2} = \frac{b\sqrt{3} \pm \sqrt{b^2 - 2bc\sqrt{2} + 2c^2}}{2} = \frac{b\sqrt{3} \pm (b - c\sqrt{2})}{2}$$

Докажем, что условие задачи удовлетворяет лишь корень $x_1 = \frac{b\sqrt{3} + (b - c\sqrt{2})}{2}$. В самом деле, если $\angle B$ острый (см. рис. 9, а), то $b < c\sqrt{2}$ и $\widehat{CNM} = \widehat{B}$ — тоже острый. Пусть $N_1 = N$ — точка на прямой AM , для которой $|CN_1| = |CN| = R$. Число $|AN_1|$ удовлетворяет уравнению (*), и

$|AN_1| > |AN|$ ($\widehat{B} < \frac{\pi}{2}$). Поэтому решением задачи служит меньший корень уравнения (*), то есть x_1 . Если же $\angle B$ тупой (см. рис. 9, б), то ($b > c\sqrt{2}$), и точка N_1 лежит ближе к точке A , чем точка N (рис. 9, б), поэтому мы должны выбрать больший из корней уравнения (*), то есть снова x_1 . Если $\widehat{B} = \pi/2$, то $b = c\sqrt{2}$ и $x_1 = x_2$.

Отметим, что при рассмотрении здесь способе решения мы не пользовались условием $b \geq c$.

5. $\left[-\frac{1}{20}; 0\right]$. Указание. Выполнив замену $y = -\left(x + \frac{x^2}{4}\right)$, $b = 5a$, получим систему $\sqrt{b + \sqrt{b + y}} = y$, $0 \leq y \leq 1$, которая равносильна системе

$$\begin{cases} 1 \geq y \geq 0, \\ y^2 \geq b, \\ b + y = (y^2 - b)^2. \end{cases}$$

Решая уравнение этой системы относительно b , получим $b = y^2 + y + 1$ или $b = y^2 - y$. Таким образом, задача свелась к исследованию двух систем:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ y^2 \geq b, \\ y^2 + y + 1 - b = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ y^2 \geq b, \\ y^2 - y - b = 0. \end{cases}$$

первая из которых несовместна, а вторая имеет решение при $-\frac{1}{4} \leq b \leq 0$.

Вариант 5

1. $x_1 = \frac{\pi}{6} (2m+1); x_2 = (-1) \frac{2\pi}{3} + 4\pi l$ ($m, n \in \mathbb{Z}$).

2. $\sqrt{7}$.

3. 1.

4. 8. Указание. Пусть MK данный отрезок (на рисунке 10 показано сечение пирамиды «диагональной» плоскостью ASC). Поскольку $\triangle SKL \cong \triangle LMO$ и $(MK) \parallel (OT) \parallel (AS)$, $|SK| =$

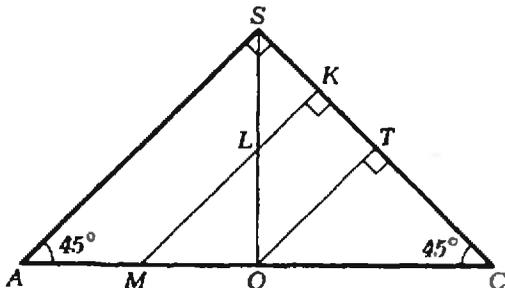


Рис. 10.

$= |KT| = \frac{1}{2} |TC|$. Отсюда следует, что $|SK| = \frac{1}{4} |SC|$, поэтому $|AS| = \frac{4}{3} |MK| = 8$.

5. $a \leq -5 - 4\sqrt{2}$; $a > 0$. Указание. Из второго уравнения системы следует, что $y = \frac{x-1}{x+1}$, $x \neq -1$.

Подставляя это выражение в первое уравнение, приходим к уравнению относительно x :

$$(a-2)x^2 - (a-1)x + 1 = 2(x+1)|x+1|.$$

Возможны два случая $x > -1$ и $x < -1$. В первом случае получаем уравнение $(a-4)x^2 - (a+3)x - 1 = 0$, которое имеет корень, *большой* -1 , при $a \leq -5 - 4\sqrt{2}$ и $a \geq -5 + 4\sqrt{2}$. Во втором случае получается уравнение $ax^2 + (5-a)x + 3 = 0$, имеющее корень, *меньший* -1 , при $0 < a \leq 11 - 4\sqrt{6}$.

Вариант 6

1. $\left\{ \log_3 \frac{\sqrt{13}-1}{2} \right\}$.

2. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3. $y_{\min} = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{53}{4}$, $y_{\max} = f(-1) = -1$.

4. $\sqrt{10}$. Указание. По условию $S_{ABC} = S_{BPQ} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \widehat{B} = \frac{7\sqrt{15}}{4}$. Поэтому $\sin \widehat{B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos \widehat{B} = \frac{1}{4}$.

5. $b = -\frac{1}{4}$. Указание. Если (x_0, y_0) — решение данной системы, то (y_0, x_0) — тоже решение. Поэтому $x_0 = y_0$.

Вариант 7

1. 271.

2. 20 м^3 .

3. $x_1 = k\pi$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{4} + 2l\pi$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

4. $\frac{75\sqrt{7}}{4}$. Указание. $S_{A_1BA_2C} = \frac{1}{2} |BC| \times |A_1A_2|$. Для нахождения $|BC|$ воспользуйтесь тем, что $\frac{1}{2} |BC|$ — высота треугольника BO_1O_2 , причем $|O_1O_2| = 6$ и $S_{BO_1O_2}$ находится, например, по формуле Герона.

5. 3. Указание. Первые три члена прогрессии имеют вид: $5, 5q, 5q^2$. Из условия следует неравенство $15q - \frac{5q^2}{2} > 20$.

6. 248, 436, 624, 812. Указание. Если a, b, c — цифры данного числа, то $c = 2b$, $b < 4$ и $2b + a$ делится на 10. Значит, a четно, причем $2b + a = 10$.

7. $\left(\frac{1}{2} - \log_3 2, 2 \log_3 2\right)$. Указание. Из второго неравенства следует, что $y \geq 2 - \log_3 4 - 4x$. Заменив y в первом неравенстве на правую часть полученного неравенства, приходим к неравенству $3^{-2x+1} - \log_3 4 + 4 \cdot 3^{2x-1} \leq 1$. Положив в этом неравенстве $z = 3^{2x-1}$, получим $4z + \frac{1}{4z} \leq 2$, откуда $4z = 1$.

Физика

Физический факультет

1. $v_0 = 2\sqrt{gl/(t_2^2 - t_1^2)} = 15 \text{ м/с} = 54 \text{ км/ч}$.

2. $\mu = 1/3 \operatorname{tg} \alpha$.

3. $N = (m(v - v_0)/t + mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)) v$.

4. $s = (1 - T_2/T_1) qV/F = 5 \cdot 10^5 \text{ м} = 500 \text{ км}$.

$$5. m = (\varphi_1 Q_1 - \varphi_2 Q_2) V = 86 \text{ кг.}$$

$$6. U = U_1 + 4QIP / (\lambda d^2 U_1) \approx 220 \text{ В.}$$

$$7. B = \frac{1}{vI} \sqrt{\frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}}$$

$$8. q = CS \Delta B / \Delta t = 10^{-7} \text{ Кл.}$$

$$9. z = \sqrt{R^2 - h^2} + \frac{\sqrt{R^2 - n^2 h^2} \sqrt{R^2 - h^2} + nh^2}{n \sqrt{R^2 - h^2} - \sqrt{R^2 - n^2 h^2}} = 14,3 \text{ см.}$$

$$10. (H/h)_{\min} = 2.$$

Механико-математический факультет

$$1. v = t \sqrt{ag(1+a/g)} = 310 \text{ м/с.}$$

$$2. H' = \frac{2gH^2}{(\Delta P/m - \sqrt{2gH})^2} \approx 0,07 \text{ м.}$$

$$3. \alpha_m = \arccos(1 - 2\pi^2 v^2 / (g^2 T^2)) \approx 60^\circ.$$

$$4. \Delta U = C \Delta T - (p_0 + mg/S) V \Delta T / T = 370 \text{ Дж.}$$

$$5. T_1 - T_3 = (T_2 T_4 - T_3^2) / T_3 = -117 \text{ К.}$$

$$6. r = R(q_1 - q_2) / q_2 = 22,5 \text{ Ом.}$$

$$7. \mathcal{E} = U_1 U_2 / (3U_1 - 2U_2) = 40 \text{ В.}$$

$$8. q = P \eta / (c_0 \Delta T) = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с.}$$

$$9. d = F(1 + gt^2 / (4\pi^2 n^2)) \approx 4 \text{ м.}$$

$$10. v_2 = v_1(d+l)/(d-l) = 1 \text{ м/с.}$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

$$1. E_k = \frac{m_1 m_2 \omega^2 l^2}{2(m_1 + m_2)} = 6 \text{ Дж.}$$

$$2. A = Mv \Delta v + Mgl = 1,25 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

$$3. v = \sqrt{2\eta P / (\rho S)} \approx 6,4 \text{ м/с (здесь } \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3 \text{ — плотность воды).}$$

$$4. M = m(1-k)/(2k) - p_0 S/g \approx 2,1 \text{ кг.}$$

$$5. E = 4F(1/q_1 - 1/q_2) = 3 \cdot 10^5 \text{ Н/Кл.}$$

$$6. q = \mathcal{E} CR / (2R + 3r) = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

$$7. m = 4dQl^2(1+k)^2 P / (kU^2) \approx 77 \text{ кг.}$$

$$8. \Delta R = d \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) = 1,1 \text{ см.}$$

$$9. k = (f_1 - F)(f_2 - F) / F^2 = 1,4.$$

$$10. f = Fn = 13,3 \text{ см.}$$

Химический факультет

$$1. t_{\text{общ}} = t(2 + \sqrt{2}) = 6,8 \text{ с.}$$

$$2. \mu = v_0^2 / (3lg) = 0,66.$$

$$3. T = (m_1 + m_2)g + m_2^2 v^2 / (l(m_1 + m_2)) = 1,28 \text{ Н.}$$

$$4. \beta = \operatorname{arctg} \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha + e E \Delta t / m} \approx 45^\circ.$$

$$5. d = Fl / (l - a) = 0,6 \text{ м.}$$

Географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

$$1. F = mg(\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta) = 36 \text{ Н.}$$

$$2. A = (n-1)RT_1 / n = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

$$3. l = I_A R_A S / (Q(I - I_A)) = 2 \text{ м.}$$

$$4. I = (B \lambda^2 \sin \alpha) / (R \Delta t) \approx 0,8 \text{ МА.}$$

$$5. n = W \lambda / (hc) = 3 \cdot 10^{13}.$$

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1984, № 10)

Задание 19 (Ф. Бондаренко, М. Либуркин, 1950 г.). 1. Kh4! Kpg1 2. Kf3+Kpg2 3. K:h2 Kp:h2 4. e5! Но не 4. Кре6? Kpg3 5. Kpd7 Kpf4 6. Крс8 Кре5 7. Kpb7 Kpd6 8. Кра7 Крс7 с ничьей. 4...С:e5 5. Кре6! Черный слон помещает собственному королю! 5...Kpg3 6.Kpd7 Kpf4 7. Крс8! Kpf5 8. Kpb7 и белые выигрывают. Другой вариант: 4...Сс3 5. e6 Сб4 6. Кре5 Kpg3 7. Kpd5 Kpf4 8. Крс6 Кре5 9. Kpb7 Kpd6 10. e7 и снова белые выигрывают. Однако после 1. Ke1? Сс3! 2. Kf3 Kpg2 3. K:h2 Kp:h2 4. e5 Сб4 5. e6 Kpg3 6. Кре5 Cf8 получается ничья.

Задание 20 (М. Левит, 1933 г.). 1. Кре4 Cd8 - 2. b6! Кра6! (2...Kp:b6 3. Kpf5) 3. Кре5! Сg5 4. h7 Сс1! 5. Kpd6! Сb2 6. Крс7! Се5 + 7. Крс6! Са1 8. b7 Кра7 9.Крс7 и белые выигрывают.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, В. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбиллин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Великов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. Н. Вилемкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров,
В. М. Ивлева, Т. С. Петрова, А. В. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:

Е. В. Виноделова, Т. А. Доброкотова, М. В. Дуба,
Т. Н. Колыченко, А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурин
Фото предоставили:
А. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор В. П. Сорокина

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-64

Сдано в набор 19.12.84. Подписано к печати 1.02.85.

Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8

Бумага 70×108 1/16

Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,51. Т-01262

Тираж 176 662 экз. Цена 40 коп. Заказ 3396

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ПАРАДОКСЫ ПЕШЕЧНОГО ЭНДШПИЛЯ

Мы уже рассказывали о знаменитом этюде Рети, одном из самых парадоксальных на шахматной доске.

Р. Рети, 1921 г. Белые: Крh8, п. с6; черные: Кра6, п. h5. Ничья.

Белых выручает своеобразная геометрия шахматной доски. Король догоняет пешку «h», двигаясь за ней не по прямому пути, а зигзагом — 1. Крg7! h4 2. Крf6! Крb6 (2... h3 3. Крe7 h2 4. с7) 3. Кре5! Кр:c6 (3...h3 4. Крd6 h2 5. с7) 4. Крf4, и пешка остановлена.

Парадоксальная идея, принадлежащая Рети, вдохновила многих этюдистов, но пределов совершенствованию, видимо, нет. В «Кванте» № 10 за 1983 год мы привели несколько классических примеров на эту тему. А вот этюды, составленные позднее.

Т. Горгиев, 1967 г. Белые: Крg4, п. п. f5, h7; черные: Крg7, п. п. d7, h6. Ничья.

На доске материальное равенство, но если черные пешки спокойно идут вперед, то белым, как будто, не на что надеяться. И все же спасение есть — для этого дважды применяется маневр Рети! 1. f6+! Кр:h7 2. Крf5! Крg8 3. Крg6 d5 4. Крf5! h5 5. Кре6! Крf8 6. Кр:d5 h4 7. Кре4 с ничьей.

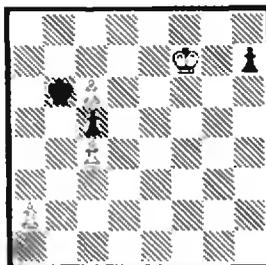
Э. Погосьянц. Белые: Крh5, п. п. с6, f5; черные: Кра7, п. п. f7, g7, h6. Ничья.

Позиция напоминает этюд Рети, но содержит дополнительные нюансы. 1. f6! gf (1... g5 2. Кр:h6 g4 3. Крg7 g3 4. Кр:f7 g2 5. Кре7 g1Ф 6. f7 с ничьей) 2. Кр:h6 Крb6 3. Крg7! f5 4. Крf6! f4 5. Кре5 f3 6. Крd6! f2 7. с7 f1Ф 8. с8Ф Фf6+ 9. Крd5! Ничья.

В приведенном варианте игра не сильно отличается от решения первоисточника, но есть и совсем другой ва-

риант — 2...Крb8. На сей раз 3. Крg7 не спасает — 3...f5 4. Крf6 f4 5. Кре5 f3 6. Крd6 Крс8!, и черные берут верх. Но у белых находится иной путь: 3. Крh5! Крс7 4. Крg4 Кр:c6 5. Крf5 с ничьей.

Следующее произведение, основанное на той же парадоксальной идее Рети, завоевало первый приз в этюдном конкурсе 1982 года.

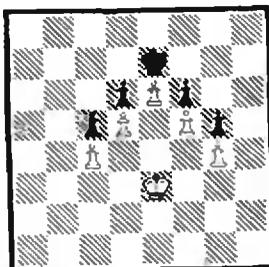


М. Зиняр, 1982 г. Ничья.

Кажется, что пешку «h» легко задержать, но после 1. Крf6? Кр:c6 2. Крg5 Крb6 3. Крh6 Кра5 4. Кр:h7 Крb4 5. Крg6 Кр:c4 6. Крf5 Крс3 7. Кре5 с4 8. a4 Крb4 черные выигрывают. 1. Крg7!! Удивительно, белые как будто подгоняют проходную пешку противника.

1...h5 2. Крf6! — теперь в погону по Рети. 2...h4 3. Кре5! Кр:c6 4. Крf4 Крb6 5. Крg4 Кра5 6. Кр:h4 Крb4. По сравнению с ложным следом 1. Крf6 белый король находится сейчас не на h7, а на h4, что весьма существенно. 7. Крg3!! Легкомысленное 7. Крg4 проигрывает — 7...Кр:c4 8. Крf3 Крd8! 9. a4 c4 10. a5 c3 11. a6 c2 12. a7 c1Ф 13. a8Ф Фh1+. 7...Кр:c4 8. Крf2! Крс3 9. Кре2! Заключительная тонкость: после 9. Кре1 (e3) черная пешка превращается с шахом. 9...с4 10. a4. Ничья.

Рассмотрим теперь еще один парадоксальный пешечный эндшпиль, иллюстрирующий шахматную игру ЭВМ.



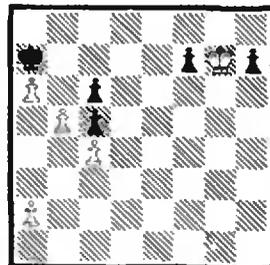
Г. Берлинер. Белые начинают и выигрывают.

По мнению автора позиции, ее пока не в состоянии выиграть белыми ни одна шахматная программа. Действительно, все разработанные алгоритмы для ЭВМ основаны на переборе вариантов и не предусматривают составления плана игры, особенно в эндшпиле. Если говорить об этой позиции, то даже шахматист невысокой квалификации быстро сообразит, что белому королю следует направиться к пешке d6 и завосвать ее. А что же ЭВМ? Для того чтобы обнаружить этот маневр королем, машине надо перебрать варианты на целых 8 ходов, то есть 16 полуходов. Это раза в три больше, чем доступно современным ЭВМ!

Напомним, что в большинстве играющих программ, наряду с обычным перебором, заложен так называемый ФВ — форсированный вариант, при котором перебор производится на большее число ходов, — шахи и взятия фигур как бы не идут в счет. Однако в нашем эндшпиле ФВ не срабатывает: необходимые ходы белого короля хотя и просты, но являются «тихими». Любопытно, что, даже случайно блуждая по доске, белый король никогда не приблизится к пешке d6. Принцип централизации, заложенный в оценочную функцию, всякий раз заставит короля вернуться на вертикали «d» и «e». Для машин здесь ничейный исход неизбежен!

Этот пример хорошо показывает ограниченные возможности шахматного автомата.

Конкурсные задания



3. Белые начинают и делают ничью.

4. Белые: Кра4, п. п. f3, h2; черные: Крh5, п. п. a3, с3. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 апреля 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 3, 4»).

Не секрет, что стереометрические задачи для многих абитуриентов становятся камнем преткновения на экзаменах. Анализ экзаменационных работ показывает, что одна из причин этого — недостаточное пространственное воображение. Чтобы помочь читателям развить у себя это важное качество, мы будем публиковать на четвертой странице обложки чертежи (и, конечно, условия) к многофигурным стереометрическим задачам. Решения, вместе со вспомогательными чертежами, можно найти в следующем номере журнала. Разумеется, сначала читателям рекомендуется порешать задачу самостоятельно; при этом могут пригодиться дополнительные построения, которые иногда будут сделаны на общем чертеже.

Подчеркнем, что наши «красивые» чертежи — это своего рода идеал, который надо научиться, скорее, воображать, чем воспроизводить самостоятельно. В подавляющем большинстве случаев, держа в уме общую картину, можно обойтись гораздо более приблизительным чертежом всей конфигурации, а чаще даже только чертежами каких-то ее сечений или проекций.

Задача. Около конуса описана пирамида, основанием которой служит ромб; длины диагоналей ромба 6 и 8 см. Найти радиусы сфер, касающихся боковой поверхности конуса и вписанных в трехгранные углы при основании пирамиды, если ее высота имеет длину, равную 1 см.

