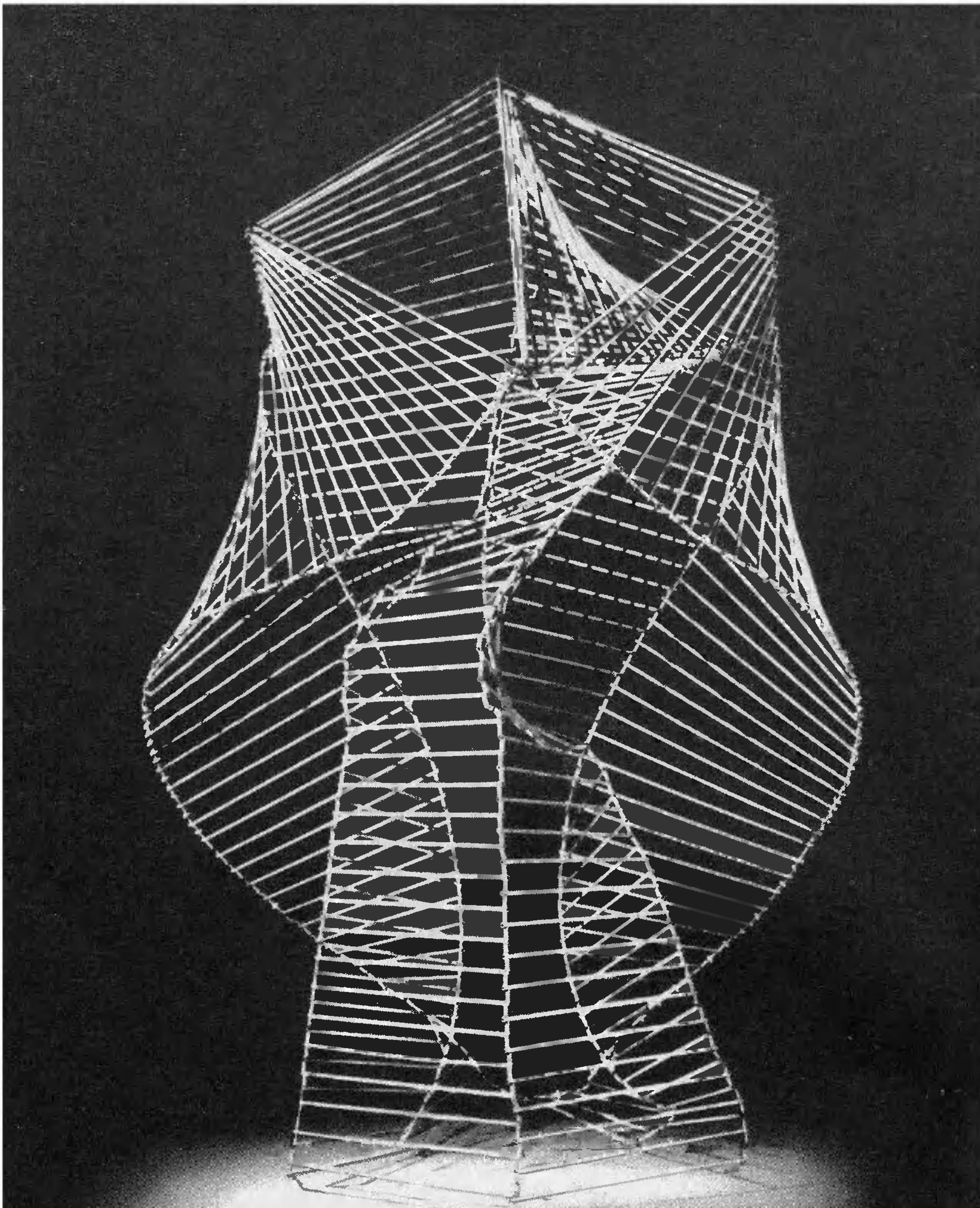
ISSN 0130-2221

Квант

8
1985

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Эту конструкцию, которая экспонировалась в 1983 году в Москве на выставке, посвященной природным формам и архитектурной бионике, создал архитектор Ю. С. Лебедев. С математической точки зрения она интересна тем, что моделирует довольно замысловатую поверхность с самопересечениями, образованную прямолинейными отрезками. В модели эти отрезки — небольшие стержни, закрепленные системой проводов. Они опускаются пятью изящными скрученными переплетающимися шлейфами, как бы повиснув на сторонах и на диагонали квадрата, находящегося сверху.

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант

8 1985

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / IN THIS ISSUE:

Лазерная экспериментальная установка для изучения нелинейно-оптических явлений. (Фотографии к статье сделаны в лаборатории лазерной биофизики и биомедицины физического факультета МГУ.

Что такое нелинейная оптика

Академик АПН СССР
В. А. ФАБРИКАНТ

За последние двадцать пять лет произошло быстрое развитие нового раздела физической науки — нелинейной оптики. Справедливости ради надо сказать, что еще в двадцатых годах нашего столетия С. И. Вавилов упорно искал нелинейные оптические эффекты. Результатом этих исследований стала работа С. И. Вавилова и В. Л. Лёвшина 1926 года, в которой впервые наблюдался нелинейный оптический эффект — уменьшение коэффициента поглощения уранового стекла при прохождении через него света от яркой искры. В честь этой пионерской работы, по предложению академика Р. В. Хохлова, советские конференции, посвященные нелинейной оптике, называются вавиловскими. Создание в 1960 году лазеров вызвало буквально взрыв работ по нелинейной оптике.

Прежде чем перейти к рассказу о некоторых нелинейных оптических явлениях, напомним основные положения линейной оптики, которые, несмотря на свою привычность, в действительности далеко не тривиальны.

«Несовершенство опыта способствует развитию науки»

Одним из основополагающих принципов, лежащих в основе линейной оптики, служит принцип суперпозиции, согласно которому при прохождении одной световой волны сквозь другую обе распространяются, не взаимодействуя друг с другом. Правда, часто говорят, что при интерференции темная полоса образуется там, где одна из интерферирующих волн «гасит» другую. Это, однако, не означает, что волны взаимодействуют друг с другом. Здесь просто происходит векторное сложение противоположно направленных электрических полей обеих волн. При взаимодействии же волн должны были бы измениться под влиянием друг на друга сами эти электрические поля, что при интерференции не имеет места.

Дальше мы увидим, что в действительности взаимодействие волн должно быть всегда, однако результаты его заметны лишь при определенных условиях. Прежде всего — когда интенсивности *) взаимодействующих волн велики. Это условие и определяло направление поисков. Так, С. И. Вавилов пытался обнаружить

*) Интенсивность волны — это энергия, проходящая через единицу площади волнового фронта за единицу времени. Величина интенсивности пропорциональна квадрату амплитуды волны.

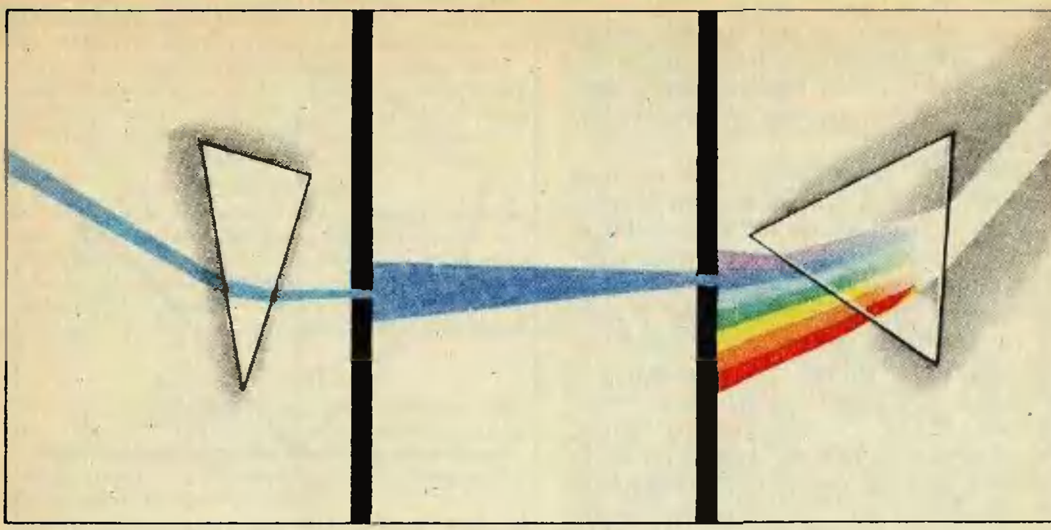


Рис. 1.

нарушение принципа суперпозиции в солнечной короне, где он надеялся найти следы рассеяния света на свете. Однако эти исследования завершились безрезультатно. Заметим, что если бы рассеяние света на свете происходило при обычных (для земных условий) интенсивностях света, то для человека это имело бы весьма неприятные последствия: ведь видимый мир был бы затянут, как туманом, световой пеленой.

Другой важной основой линейной оптики служит принцип неизменности частоты света при прохождении его сквозь различные среды. Он был открыт Ньютоном в процессе его замечательных оптических экспериментов. В 1671 году на их основании Ньютон сформулировал следующее положение: «Вид цвета, свойственный каждому отдельному сорту лучей, не изменяется ни преломлением, ни отражением от естественных тел, ни какой-либо другой причиной, которую я мог наблюдать» (рисунок 1).

Счастливым для развития физики оказалось то обстоятельство, что экспериментальные возможности Ньютона, в смысле интенсивности источников света, были весьма ограничены (солнечный луч, прошедший сквозь щель в оконной ставне). Если бы у него в руках оказался лазер, то наблюдаемая картина могла бы сильно осложниться, что задержало бы развитие оптики. В связи с опытами Ньютона С. И. Вавилов подчеркивал: «Несовершенство опыта способствует развитию науки». Это утверждение звучит парадоксально, но преждевременное обнаружение некоторых деталей в эксперименте может задержать на долгие годы истолкование экспериментальных данных и развитие теории.

Границы применимости линейной оптики — где они?

Практически все нелинейные эффекты наблюдаются при распространении света в веществе. В принципе, теория предсказывает возможность их наблюдения и в вакууме, однако до сих пор там они обнаружены не были.

В классической оптике при объяснении процесса распространения света в среде используют модель атома как системы, в которой электрон как бы закреплен на пружине. Проходящая световая волна вызывает своим электрическим полем вынужденные колебания электрона. Эти колебания в свою очередь порождают в окружающем атом пространстве электромагнитные волны, то есть сам атом начинает излучать. Возникающая вторичная волна по частоте совпадает с первичной волной (при вынужденных колебаниях частота колебаний совпадает с частотой вынуждающей силы). При этом разность фаз этих волн остается постоянной (такие волны называются когерентными). Сложение всех вторичных волн, излучаемых различными атомами, с первичной дает результирующую волну, распространяющуюся в среде со скоростью v, отличной от скорости c распространения света в вакууме. Это и приводит к тому, что показатель преломления среды $n=c/v$ оказывается отличным от единицы.

Смещения электрона, вызванные световой волной от обычного источника света, весьма малы. Они определяются соотношением напряженностей электрического поля световой волны и внутриатомного поля. В волнах от обычных источников света напряженность поля не превышает 10^3 В/см. Напряженность же внутриатомного поля — порядка 10^9 В/см. Таким образом, при воздействии поля световой волны смещение электрона не превышает 10^{-6} от радиуса атома, что составляет 10^{-14} см. Величина порядка процентов от радиуса атомного ядра!

В лазерных пучках напряженности поля достигают 10^6—10^7 В/см и, соответственно, смещения могут быть гораздо большими.

При малых относительных смещениях электрона можно считать, что действующая на электрон возвращающая сила выражается законом: $F=-kx$, то есть имеет место линейная зависимость силы F от смещения x (закон Гука для обычной пружинки). Однако с ростом величины смещений (например, в поле лазерного пучка) должны проявиться отклонения от этого закона. В простейшем случае, который будет рассмотрен ниже, отклонение от линейной зависимости можно принять в виде $F=-kx+\alpha x^2$, где нелинейное слагаемое αx^2 сказывается лишь при достаточно больших смещениях (квадрат малой величины мал по сравнению с самой величиной). Заметим, что теперь величина силы асимметрично изменяется при изменении знака смещения (рисунок 2). В одну сторону электрон, оказывается, сместить легче, чем в другую (например, при $\alpha>0$ в сторону положительных x легче, чем в сторону отрицательных).

Итак, можно сказать, что приближение линейной оптики соответствует выбору простой линейной зависимости возвращающей силы, действующей на электрон, от смещения. Мир нелинейной оптики начинается там, где становятся существенными отклонения от этого простого закона и следует принимать во внимание реальный нелинейный характер этой зависимости.

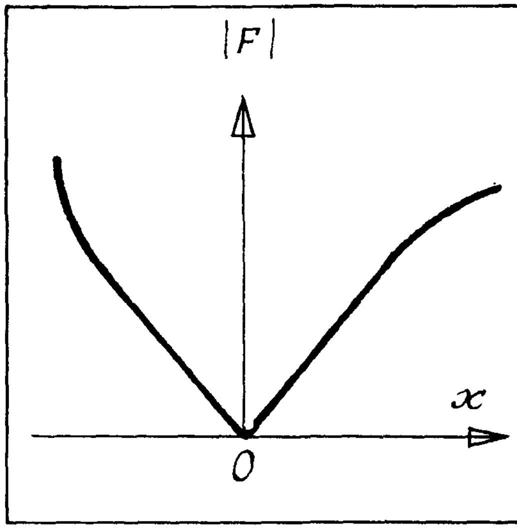


Рис. 2.

В линейной оптике оптические характеристики вещества (например, показатель преломления) зависят только от свойств самой среды и частоты проходящего через нее света, однако на них не влияет его интенсивность. Если же интенсивность проходящей через среду световой волны оказывается столь большой, что нелинейность возвращающей силы не учитывать уже нельзя, то свойства среды начинают сами зависеть от интенсивности проходящей волны. К чему это приводит, вы сейчас увидите.

Генерация гармоник

Рассмотрим простейший случай, о котором уже шла речь выше. Уравнение движения электрона будет иметь вид

$$ma=-kx+\alpha x^2+eE_0\cos\omega t, \qquad (1)$$

где m — масса электрона, $a=x''$ — его ускорение, а $eE_0\cos\omega t$ — сила, действующая на электрон со стороны электрического поля световой волны (E_0 — амплитуда поля, ω — частота). Задача состоит в том, чтобы найти из этого уравнения зависимость $x(t)$ и на ее основании уже судить о свойствах вторичных волн в рассматриваемой среде. К сожалению, математика не дает нам точных методов решения подобных нелинейных уравнений.

Замечательный английский физик Рэлей, занимавшийся теорией колебаний, предложил приближенный метод решения задачи, обладающий большой эффективностью. Так как нелинейное слагаемое αx^2 проявляет себя лишь при достаточно больших x, Рэлей в качестве нулевого приближения пренебрег членом αx^2. После этого осталось линейное уравнение

$$ma = -kx + eE_0 \cos \omega t$$

такое же, как уравнение вынужденных колебаний грузика на пружинке под действием периодической внешней силы. Понятно, что в этом случае движение будет происходить по гармоническому закону, но не с собственной частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, а с частотой ω вынуждающей силы:

$$x_0(t) = beE_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

где beE_0 — амплитуда вынужденных колебаний грузика (для удобства рассмотрения в амплитуде выделен сомножитель eE_0), а φ — сдвиг фазы этого колебания по сравнению с фазой вынуждающей силы.

Для получения следующего приближения Рэлей в уравнении (1) заменил в нелинейном слагаемом величину $x^2(t)$ найденной приближенной величиной $x_0^2(t)$. В результате уравнение (1) из нелинейного превращается в линейное (x в него входит только в первой степени):

$$ma = -kx + \alpha b^2 e^2 E_0^2 \cos^2 \omega t + eE_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

Воспользовавшись известным тригонометрическим соотношением

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t),$$

получаем окончательно

$$ma = -kx + \left(\frac{1}{2}\alpha b^2 e^2 E_0^2 + \frac{1}{2}\alpha b^2 e^2 E_0^2 \cos 2\omega t + eE_0 \cos \omega t\right).$$

Из этого уравнения движения мы видим, что на электрон как бы действуют три вынуждающих силы (слагаемые, заключенные в скобки). Первая из них, не зависящая от времени, вызовет просто постоянное смещение электрона из положения равновесия (асимметрия, о которой мы уже упоминали выше).

Вторая сила, изменяющаяся с частотой 2ω, вызывает появление в смещении электрона составляющей, изменяющейся с той же частотой 2ω. Подчеркнем, что амплитуда этой составляющей пропорциональна квадрату амплитуды световой волны. Наконец, последняя сила, изменяющаяся с частотой ω, нам уже знакома. Она соответствует полю падающей световой волны, благодаря которому и возникают вторичные волны. Амплитуда этой составляющей пропорциональна амплитуде падающей световой волны. С ростом интенсивности световой волны роль второй силы по отношению к третьей увеличивается (квадрат большой величины велик по сравнению с самой величиной).

Таким образом, вынужденные колебания электрона будут состоять из двух гармонических колебаний с частотами ω и 2ω. Соответственно и вторичные волны, испускаемые атомами (ионами) кристалла, будут состоять из волн с той же частотой ω, что и первичная волна, а также из волн с удвоенной частотой. Получается, что из-за нелинейного слагаемого αx^2 в действующей на электрон возвращающей силе в кристалле возникает вторичная волна с удвоенной частотой (ее называют второй гармоникой) и тем

На фотографии показано, как инфракрасный луч лазера ($\lambda = 1064$ нм) преобразуется в видимый свет ($\lambda = 532$ нм) при прохождении через нелинейную оптическую среду. Ход невидимого инфракрасного луча от лазера до нелинейного преобразователя можно проследить по выходящему обратно из преобразователя слабому «отраженному» лучу.

самым нарушается принцип постоянства частоты, царивший в линейной оптике.

С помощью нелинейных эффектов можно преобразовать частоту светового луча, не нарушая его направленности. Это крайне важно для практики, особенно в лазерной технике. Например, лазер на неодимовом стекле дает мощное, но невидимое инфракрасное излучение с длиной волны 1064 нм. Если удвоить его частоту, длина волны станет в два раза короче — 532 нм, что соответствует зеленому свету, прекрасно видимому глазом человека.

В радиотехнике нелинейный эффект преобразования частоты наблюдался задолго до появления нелинейной оптики. Когда в Москве была построена мощная радиостанция, то при приеме в Горьком передач радиостанций, находящихся в городах к западу от Москвы, стали прослушиваться и московские передачи. Это объясняется тем, что мощные волны московской радиостанции изменяют ионосферу над Москвой и тем самым модулируют проходящие радиоволны, принимаемые в Горьком (рисунок 3).

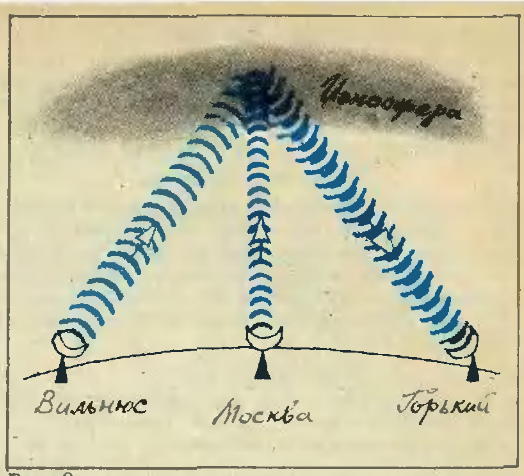


Рис. 3.

Условие синхронизма

И все же не следует думать, что преобразование частоты света с высоким коэффициентом полезного действия (КПД) представляет собой простую задачу. Так, в работе Франкена с сотрудниками, опубликованной в 1961 году и содержащей описание первых наблюдений удвоения частоты света, КПД (то есть отношение интенсивности входящей волны с частотой 2ω к интенсивности падающей волны с частотой ω) составлял всего лишь 10^{-10}! В этих опытах красный свет рубинового лазера с длиной волны 0,6943 мкм превращался в ультрафиолетовое излучение с длиной волны $\lambda = 0{,}3471$ мкм (напомним, что длина волны обратно пропорциональна ее частоте). В качестве кристаллической нелинейной среды был использован кварц.

Для того чтобы эффект генерации гармоник проявился в полной мере, необходимо, чтобы фазы вторичных волн на выходе из кристалла были согласованы (условие волнового синхронизма). Только в этом случае сложение вторичных волн дает интенсивную результирующую волну.

Атомы же распределены по всей длине кристалла, сквозь который проходит свет. Поэтому генерируемые ими вторичные волны будут иметь различные начальные фазы (рисунок 4). Чем дальше от источника находится атом, тем позднее до него дойдет первичная волна и тем позже сам он начнет излучать вторичную. С другой стороны, этот, более далекий от источника, атом окажется ближе к приемнику. Следовательно, его вторичной волне придется пройти меньший путь, чем волне, испущенной более близким к источнику света атомом.

В линейной оптике первичная и вторичная волны имеют одинаковые частоты, а следовательно, и одинаковые скорости распространения в среде. Поэтому в таком случае не важно, где произошло преобразование первичной волны во вторичную — все они приходят к приемнику с одной и той же фазой. Иначе обстоит дело в нелинейной оптике. Показатель преломления среды зависит от частоты (дисперсия), поэтому вторичная волна с частотой

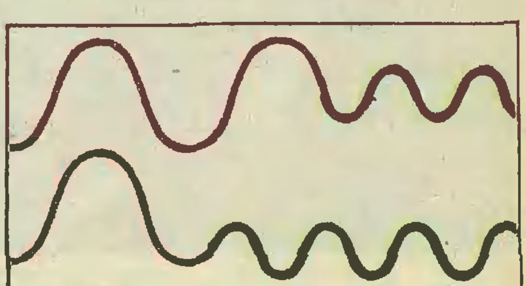


Рис. 4.

2ω распространяется, вообще говоря, уже с другой скоростью, чем первичная (частота которой ω). Поэтому фаза, с которой вторичная волна приходит к приемнику, существенно зависит от того, на каком расстоянии от источника произошло преобразование частоты. Понятно, что наибольшая интенсивность результирующей вторичные волны будет достигнута в том случае, если все вторичные волны от отдельных атомов придут к приемнику с одинаковыми фазами.

Этого можно добиться подбором среды, у которой показатели преломления окажутся одинаковыми для волн с частотами ω и 2ω.

Так, например, обеспечив выполнение условия волнового синхронизма, в кристаллах KH_2PO_4 удается удваивать частоту световой волны с КПД, превышающим 90 %!

«Квантовые» нелинейные эффекты

До сих пор, рассматривая оптические нелинейные явления, мы не выходили за рамки представлений классической физики. Однако есть ряд нелинейных эффектов, которые объяснимы только на языке квантовой физики.

Так, например, в настоящее время широкое применение в лазерной технике нашло резкое просветление, то есть уменьшение коэффициента поглощения некоторых растворов (крипто- и фталоцианина в бензоле) при прохождении через них мощных световых пучков. Кювета с таким раствором представляет как бы автоматический затвор, пропускающий мощный световой пучок и задерживающий слабые. Попробуем разобраться в этом явлении.

Согласно квантовым представлениям атом может обладать только определенными запасами энергии — находиться на определенных энергетических уровнях («Физика 10», § 13). Атом (или молекула) может поглощать свет с частотой ν, удовлетворяющей условию Бора:

$$h\nu = E_2 - E_1, \qquad (3)$$

где h — постоянная Планка, а E_1 и E_2 — энергии атома на двух уровнях. При этом атом переходит с уровня E_1 на уровень E_2. Очень важно, что возбужденный атом (или молекула), поглотивший энергию фотона $h\nu$, задерживается на верхнем энергетическом уровне конечное время. У молекулы фталоцианина оно в масштабах атомного мира огромно — порядка 10^{-3} с. Коэффициент поглощения среды пропорционален, естественно, числу «голодных» молекул, находящихся на нижнем энергетическом уровне E_1, ибо только они способны поглощать фотоны с частотой, удовлетворяющей условию (3). Но при прохождении мощного светового пучка произойдет большое число актов поглощения фотонов веществом, при которых многие молекулы перейдут в разряд «сытых», поднявшись на уровень E_2, где и застрянут на время порядка 10^{-3} с. Это приведет к заметному уменьшению числа «голодных» молекул, находящихся на нижнем уровне E_1. Коэффициент поглощения резко уменьшится. Мощный световой пучок как бы пробивает себе путь в поглощающей среде.

Остановимся немного на многофотонных процессах, когда квантовая «разборчивость в еде» атомов и молекул ослабляется. Оказывается, что в мощных световых пучках среда начинает поглощать излучение самых различных частот. Объясняется это тем, что условие Бора учитывает возможность поглощения атомом лишь одного фотона, чему соответствует выражение (3). При учете возможности многофотонных процессов поглощенная атомом или молекулой порция энергии должна быть равна разности энергий между какими-либо двумя уровнями, а уж сколько фотонов при этом поглотится — это дело хозяйское.

В обычных условиях, при малых интенсивностях световых пучков, плотность фотонов невелика, а вероятность одновременного поглощения двух или нескольких фотонов мала. Однако боровское условие (3) в общем случае следует записать в виде

$$h\nu_1 + h\nu_2 + \ldots = E_2 - E_1.$$

Это приводит к эффекту, обратному описанному выше просветлению среды. В случае мощных пучков среда начинает поглощать свет с теми частотами, для которых она была прозрачна при малых интенсивностях.

Интересно, что в мощных лазерных пучках за счет многофотонных процессов фотоэффект теряет свой квантовый характер. Известное уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu=P+\frac{mv^2}{2},$$

где P — работа выхода, $mv^2/2$ — кинетическая энергия вырванного светом электрона, заменяется уравнением

$$Nh\nu=P+\frac{mv^2}{2}, \qquad (4)$$

где N — число фотонов, поглощаемых электроном одновременно. Из уравнения (4) следует, что с ростом N (интенсивности света) должна расти и кинетическая энергия вырванных электронов. Кроме того, красная граница фотоэффекта смещается в область малых частот $\left(\nu_{кр}=\frac{P}{hN}\right)$.

Характерно, что в работе Эйнштейна 1905 года, удостоенной Нобелевской премии и содержащей вывод основного уравнения теории фотоэффекта, имеется весьма существенное замечание: «Простейшим будет случай, когда один световой квант (фотон) отдает всю свою энергию одному электрону; мы и будем предполагать, что это и происходит в действительности». Это замечание показывает, что Эйнштейн понимал принципиальную возможность многофотонных процессов, но считал возможным им пренебречь. Это было вполне законно до появления лазеров, и многочисленные эксперименты подтверждали справедливость уравнения Эйнштейна. В данном случае опять-таки была полезна ограниченность возможностей эксперимента (в смысле интенсивности света). Она способствовала укреплению позиций квантовой теории. Когда эта теория развилась и окрепла, ей стали по плечу и более сложные эффекты нелинейной оптики, наблюдаемые в мощных лазерных пучках.

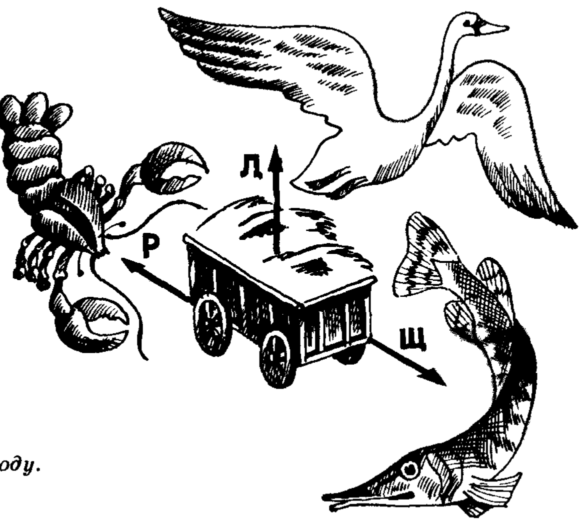
Встреча с читателями журнала

7 июня состоялась встреча членов редакционной коллегии журнала «Квант» с преподавателями математики, занимавшимися на курсах повышения квалификации учителей средних школ при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. В этой встрече, проходившей на механико-математическом факультете МГУ, приняли участие заместитель главного редактора журнала Ю. П. Соловьев, члены редакционной коллегии В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, Н. Х. Розов, А. П. Савин, заведующий отделом математики журнала А. Б. Сосинский. Они подробно рассказали об истории журнала, его задачах и структуре, о планах работы. Особое внимание было уделено проблеме дальнейшего совершенствования материалов журнала, прежде всего в связи с реформой общеобразовательной и профессиональной школы. Большой интерес вызвало обсуждение вопроса о формах участия журнала в решении проблемы компьютеризации школы, помощи ученикам и учителям в изучении нового школьного предмета «Основы информатики и вычислительной техники». Члены редакционной коллегии ответили на многочисленные вопросы участников встречи.

Подчеркивая большое значение журнала в развитии интереса учащихся к физике и математике, многие выступившие на встрече учителя высказали в то же время критические замечания и конструктивные предложения, направленные на дальнейшее улучшение «Кванта». Состоявшееся обсуждение показало, что у журнала имеется еще немало возможностей для того, чтобы лучше и полнее удовлетворять запросы читателей, чтобы стать более доступным и популярным среди школьников, учителей, студентов и любителей математики. Итоги состоявшегося полезного разговора членов редакционной коллегии с учителями будут учтены при планировании дальнейшей работы журнала.

Н. Р.

Геометрия скользящих векторов



Кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ,
кандидат физико-математических наук
А. Б. СОСИНСКИЙ

...Да Лебедь рвется в облака,
Рак пятится назад, а Щука тянет в воду.

Вы, конечно, помните вынесенные в эпиграф строчки замечательной басни И. А. Крылова. А задумывались ли вы над тем, как рассчитать движение воза, если известно, с какими силами его тащат лебедь, рак и щука? Задача эта совершенно естественная, можно сказать, типичная: к некоторому твердому массивному телу в определенных местах приложены силы — что произойдет? Как ни странно, привычный векторный аппарат, изучаемый в школе на уроках физики и математики, совсем непригоден для решения подобных задач. Когда мы должны принимать в расчет не только массу, но и размеры тела, когда мы имеем дело не с абстрактной материальной точкой, а с настоящим предметом, то не всегда ясно, как складывать векторы, приложенные к предмету в разных местах, что можно и чего нельзя делать с этими векторами и, собственно говоря, что представляют собой такие «настоящие» векторы.

Ответ на эти вопросы — в виде небольшой математической теории (*теории скользящих векторов*) — и составляет предмет нашей статьи.

Какие бывают векторы?

Вектор в пространстве или на плоскости принято изображать направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$. Он задается двумя точками: своим *началом* (или *точкой приложения*) A и *концом* B. Если отрезок AB неограниченно продолжить в обе стороны, получится прямая, которая называется *линией действия* вектора AB.

Все векторы, в зависимости от того, какие геометрические или физические величины они представляют, могут быть разбиты на три следующих типа.

1°. Может случиться, что два *геометрически равных* вектора изображают одну и ту же физическую или механическую величину. (Напомним, что в геометрии два вектора (направленных отрезка) называются *равными,* если их линии действия параллельны, длины равны и порядок точек задает одно и то же направление на их линиях действия, или, другими словами, если они совмещаются параллельным переносом.) Такого рода векторы, не имеющие ни определенной линии действия, ни определенной точки приложения, называют свободными. Например, вектор магнитной индукции постоянного магнитного поля или вектор скорости одной инерциальной системы относительно другой — свободные векторы; их можно считать приложенными к любой точке. Математики, как правило, тоже изучают свободные векторы; простейший пример — вектор, задающий параллельный перенос: приложенный к любой точке, он указывает своим концом образ этой точки при данном переносе.

2°. С другой стороны, встречаются такие физические величины, что изображающие их векторы не могут быть отделены от своей точки приложения. Такого рода векторы называются связанными (или закрепленными). Так, вектор мгновенной скорости движущейся точки в данный момент времени — пример связанного вектора.

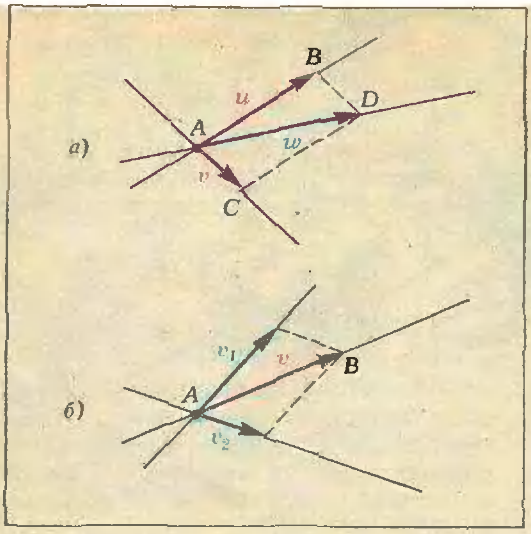


Рис. 1.

Его нельзя отделить от движущейся точки (если, конечно, все остальные точки пространства не перемещаются с той же скоростью).

3°. Наконец, может случиться, что два геометрически равных вектора изображают равные физические величины лишь при условии, что эти векторы имеют одну и ту же линию действия, и изображают не равные физические величины, если они имеют различные *линии действия*. Таковы, например, векторы, изображающие силы, действующие на твердое тело. Такие неотделимые от линии действия векторы называются *скользящими*. Это, так сказать, «настоящие» силовые векторы, реально действующие не на абстрактные «бесконечно малые» тела, а на жесткие предметы, имеющие определенные размеры и форму. Заметим, что здесь условие жесткости тела существенно: тело не растягивается и не сжимается, без потерь передает усилие вдоль линии действия, поэтому не важно, к какой именно точке на линии действия приложена сила; точка приложения может как бы скользить по линии действия.

О скользящих векторах и пойдет наш рассказ. В дальнейшем слово «вектор» без определения следует понимать именно как «скользящий вектор»; а когда речь пойдет о свободных или закрепленных векторах, это будет оговорено.

Мы будем обозначать (скользящие) векторы либо одной полужирной буквой, например **v**, либо двумя буквами

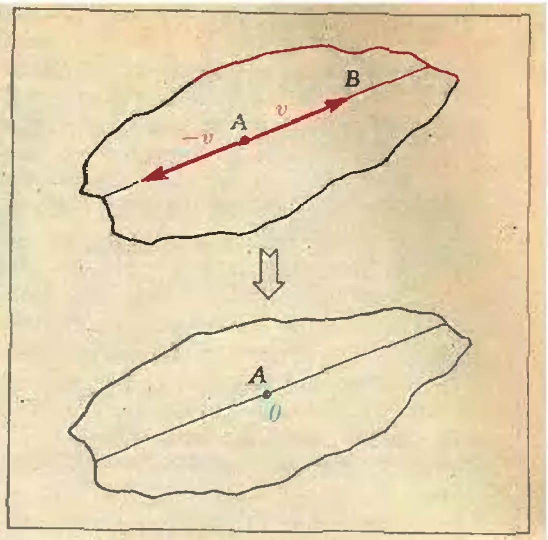


Рис. 2.

с чертой сверху, например $\overline{AB}$. Свободные же векторы мы будем обозначать буквами со стрелками, например $\vec{v}$ или $\overrightarrow{AB}$.

Системы скользящих векторов

Итак, *(скользящий) вектор* $\mathbf{v}=\overline{AB}$ задается прямой $l=AB$ — своей линией действия — и направленным отрезком AB, лежащим на этой прямой. Два вектора $\mathbf{v}=\overline{AB}$ и $\mathbf{u}=\overline{CD}$ *считаются совпадающими*, если они задают один и тот же свободный вектор ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$) и, кроме того, у них одна и та же линия действия (прямые AB и CD совпадают).

В дальнейшем нас будут интересовать не отдельно взятые векторы, а конечные *системы* векторов ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$), ведь именно такие системы отвечают системам сил, действующим на твердое тело. Порядок перечисления векторов, разумеется, не существен; однако один и тот же вектор может встречаться в системе несколько раз, и его нужно считать столько раз, сколько он в ней встречается.

Наша цель — *научиться преобразовывать системы друг к другу, сводить — если это возможно — произвольную систему к системам простейшего вида.* Для этого нам потребуются

Элементарные операции и эквивалентность систем векторов

Когда линии действий двух векторов **v** и **u** пересекаются, эти векторы можно *сложить* естественным образом: если $u=\overline{AB}$, $v=\overline{AC}$ (A — общая точка линий действия), то *суммой* $w=u+v$ векторов u и v называется вектор $w=\overline{AD}$, где точка D получена сложением $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ по *правилу параллелограмма* (рис. 1,*а*). Такое сложение «пересекающихся» векторов будет нашей первой элементарной операцией; она сводит систему из двух векторов (u, v) к системе из одного вектора (w).

У этой операции есть обратная: если дан любой вектор $v=\overline{AB}$, то можно выбрать две произвольные прямые, проходящие через любую точку линии действия (скажем, через точку A), и *разложить* вектор $\overrightarrow{AB}$ по правилу параллелограмма (рис. 1,*б*). Из одного вектора (v) мы получим систему из двух векторов (v_1, v_2).

Обратите внимание, что складывать можно только векторы, чьи линии действия пересекаются или совпадают. Особенно просто складываются векторы с общей линией действия. В частности (рис. 2), так складываются два противоположных вектора, то есть векторы вида $v=\overline{AB}$ и $-v=\overline{BA}$; их суммой будет нуль-вектор $0=\overline{AA}$.

Наша вторая элементарная операция состоит в *уничтожении нуль-вектора*, то есть в переходе от системы вида $(v_1, v_2, \ldots, v_k, v, -v)$ к системе $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. В частности (при $k=0$), простейшая система $(v, -v)$ сводится к пустой или нулевой системе, которую мы будем обозначать так же, как нуль-вектор — через 0.

У второй элементарной операции тоже есть обратная — *рождение нуль-вектора*, то есть переход от системы $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ к системе $(v_1, v_2, \ldots, v_k, v, -v)$, где v — произвольный вектор.

Мы будем говорить, что две системы векторов $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ и $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ *эквивалентны*, или *приводятся друг к другу*, если от одной системы к другой можно перейти с помощью конечной последовательности элементарных операций.

С точки зрения механики понятно, почему мы интересуемся элементарными операциями и эквивалентными системами. Ведь две эквивалентные системы сил всегда оказывают одинаковое воздействие на твердое тело, в чем можно убедиться не только экспериментально, а просто продумав физический смысл элементарных операций. Приводя же сложные системы к более простым, мы получаем возможность легко разобраться в том, какое именно результирующее воздействие данная сложная система сил оказывает на твердое тело.

Простейшие системы на плоскости; пары

Рассмотрим теперь подробнее приведение систем векторов к более простым для случая систем векторов на плоскости.

На рисунке 3 показано, как с помощью элементарных операций осуществляется приведение некоторых простейших систем векторов к другим таким системам. Мы советуем читателю внимательно проследить за всеми операциями и даже проделать их самостоятельно на бумаге.

Особое внимание следует обратить на рисунок 3,*г*. На нем показаны системы из двух противоположных векторов равной длины на параллельных линиях действия; такие системы коротко называют *парами*. Из рисунка видно, что пары не удается упростить, а можно только «повернуть», превратить в другую пару.

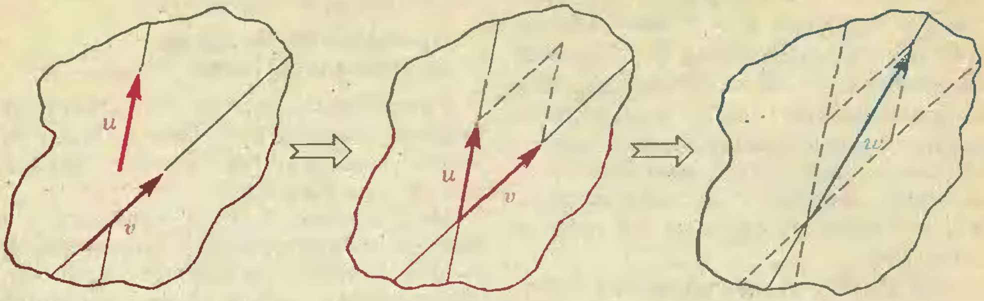
На рисунке 4 показана еще одна серия элементарных операций. Здесь происходит не упрощение исходной системы (из одного вектора), а ее усложнение: из данного вектора мы получаем вектор с другой линией действия и пару; впрочем, если этот рисунок прочитать в обратном порядке (а это осмысленно, ибо каждая элементарная операция имеет обратную), мы получим упрощение (система, состоящая из пары и вектора, приводится к системе из одного вектора). Переход $(v)\to(u, x, y)$ стоит запомнить, он нам потребуется несколько позже.

Заметим еще, что приемы приведения плоских систем бывают полезны и при рассмотрении пространственных задач. Так, пространственная система (**л**, **р**, **щ**, **т**) (**л** $=-$**т**, $|$**р**$|=|$**щ**$|$) применением операции разложения вектора приводится (рис. 5,*а*) к паре (u, v): **л** $=a+v$, **щ** $=b+u$, а плоская система (a, b, **л**, **т**), остающаяся после выделения из системы (**л**, **р**, **щ**, **т**) пары (u, v) (рис. 5,*а*), как легко видеть, приводится к нулю (рис. 5,*б*)

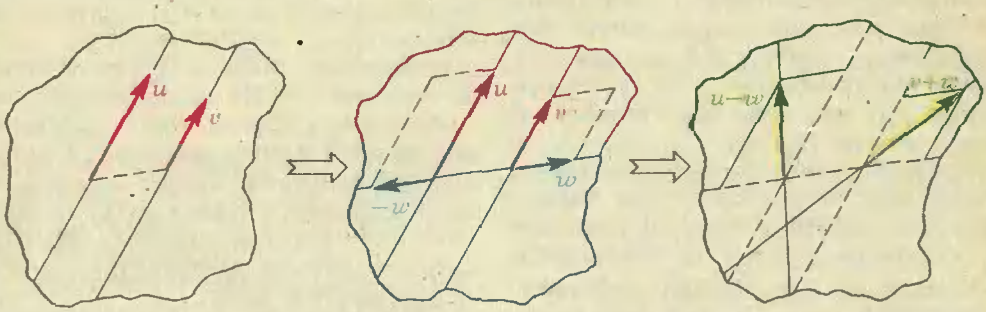
Момент вектора и момент пары

Выше мы видели, что пару векторов нельзя привести к одному скользящему вектору. Однако пара допускает

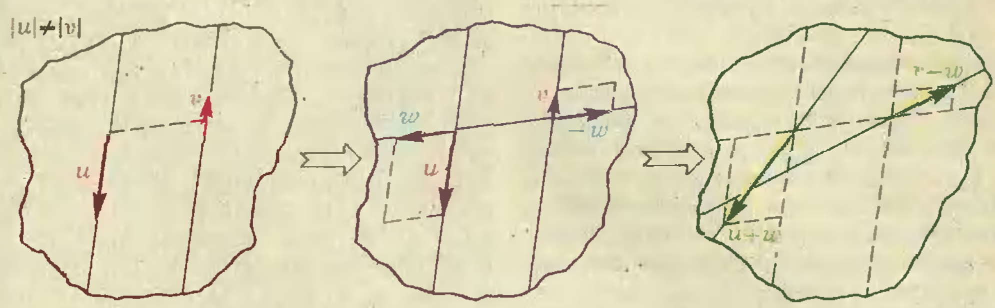
Простейшие преобразования плоских систем:



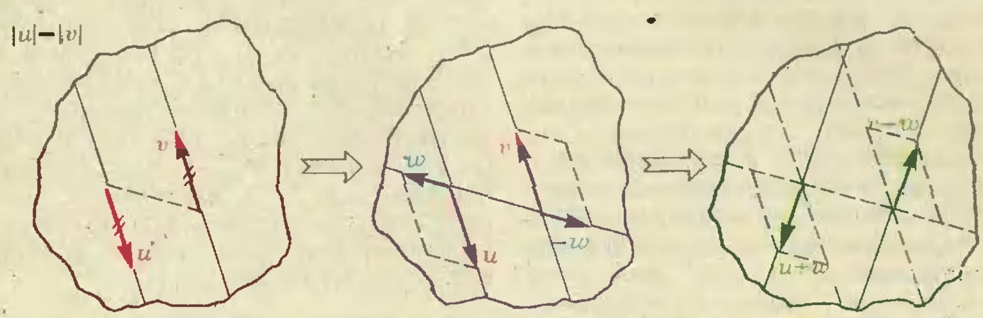
а) два пересекающихся вектора → один вектор;



б) два сонаправленных вектора → два пересекающихся вектора;



в) два противонаправленных вектора разной длины → два пересекающихся вектора;



г) два противонаправленных вектора равной длины (пара) → другая пара.

Рис. 3.

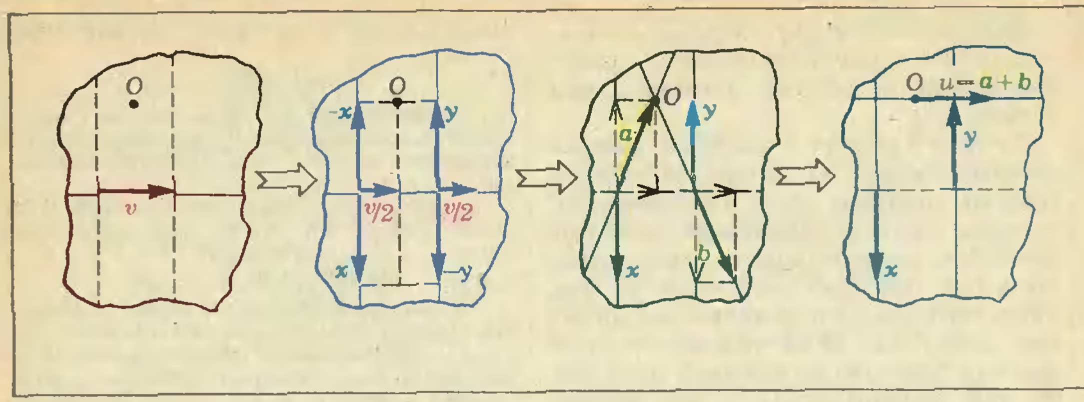


Рис. 4. Один вектор → вектор, проходящий через данную точку, и пара.

удобную векторную характеристику. Чтобы получить ее, нам придется начать издалека.

Пусть дан вектор $\boldsymbol{v}=\overline{AB}\neq 0$ и точка O, не лежащая на его линии действия; тогда *моментом вектора* $\boldsymbol{v}$ *относительно точки* O называется (закрепленный!) вектор OM (приложенный к точке O) с линией действия, перпендикулярной плоскости OAB, длины $OM=r\cdot|\boldsymbol{v}|$ (где r — *плечо* вектора v относительно O, то есть расстояние от O до прямой AB) и направленный так, чтобы направление вращения $\boldsymbol{v}$ вокруг O, наблюдаемое из точки M, было положительным (против часовой стрелки; рис. 6); если точка O лежит на линии действия вектора $\boldsymbol{v}$, или $\boldsymbol{v}=0$, то момент принимается равным нулю. Момент вектора играет важную роль в механике при изучении вращательного движения и имеет красивые приложения в геометрии.

Пусть теперь дана пара векторов $\boldsymbol{v}=\overline{AB}$, $\boldsymbol{v}'=\overline{A'B'}$ и точка O; пусть OM и OM' — моменты $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ относительно O. Тогда легко проверить (сделайте это!), что длина и направление суммы моментов относительно точки O векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ не зависят от выбора этой точки, то есть эта сумма является свободным вектором. Его называют (*векторным*) *моментом пары* ($\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$). Легко проверяется, что длина векторного момента пары ($\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$) равна $d\cdot|\boldsymbol{v}|$, где d — расстояние между параллельными прямыми AB и $A'B'$. Пользуясь этим, а также утверждением задачи 3, нетрудно доказать, *что пара приводится к нулю тогда и только тогда, когда ее векторный момент равен нулю.*

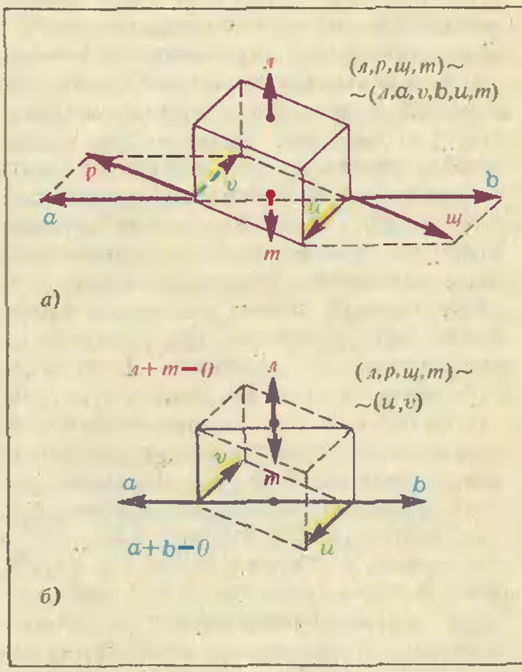


Рис. 5.

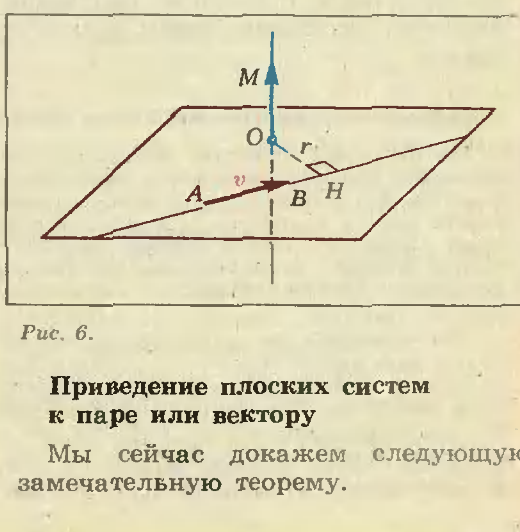


Рис. 6.

Приведение плоских систем к паре или вектору

Мы сейчас докажем следующую замечательную теорему.

Всякая (конечная) система (скользящих) векторов на плоскости приводится либо к одному вектору, либо к паре.

Доказательство. Если данная система состоит из одного вектора — теорема доказана. Если в системе есть векторы с пересекающимися линиями действия, то их можно попарно упрощать (см. рис. 3,*а*), пока не останутся лишь векторы с параллельными линиями действия. Если таких векторов три или более, то по крайней мере два из них сонаправлены, и мы можем упрощать систему дальше (см. рис. 3,*б*). Таким образом, переходы 3, *б* и 3, *а* позволяют нам свести доказательство теоремы к случаю двух противоположно направленных векторов с параллельными линиями действий. Если длины векторов различны, то переход 3, *в* с последующим переходом 3, *а* даст нам один вектор, а если длины равны, то мы получили пару; теперь теорема доказана полностью.

Заметим, во-первых, что доказательство не только устанавливает справедливость теоремы, но и дает эффективный способ для того, чтобы найти вектор (или пару), эквивалентный исходной системе. Во-вторых, если заранее выбрать некоторую фиксированную точку, то можно так проводить наши элементарные операции, чтобы привести данную систему к системе из одной пары и одного вектора, чья линия действия проходит через эту точку. Действительно, это верно, если система приводится к одной паре. Если же она приводится к одному вектору, то операция, показанная на рисунке 4, позволяет привести этот вектор к паре и вектору, чья линия действия проходит через заданную точку.

Исчисление систем векторов; базис

Мы научились приводить системы плоских векторов к простейшим системам. Однако оказывается, что системы можно не только приводить одну к другой, но и выражать одну через другие. При этом возникает исчисление систем векторов, очень похожее на обычное исчисление свободных векторов в пространстве.

Чтобы описать это исчисление, определим сумму двух систем $N=(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ и $M=(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l)$ как их «свободное объединение», то есть систему

$$L=N+M=(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l)$$

(равенство систем векторов понимается здесь и ниже как их эквивалентность), и *произведение системы* N *на число* λ — как новую систему

$$\lambda N=(\lambda \boldsymbol{u}_1, \lambda \boldsymbol{u}_2, \ldots, \lambda \boldsymbol{u}_k),$$

где $\lambda\boldsymbol{u}$ обозначает вектор с той же линией действия, что $\boldsymbol{u}$, длины $|\lambda| \cdot |\boldsymbol{u}|$, направленный так же, как $\boldsymbol{u}$, если $\lambda>0$, и в противоположную сторону, если $\lambda<0$.

Скажем, что система N *линейно выражается* через системы $\boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_n$, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, такие что

$$N=\lambda_1\boldsymbol{M}_1+\lambda_2\boldsymbol{M}_2+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{M}_n.$$

Рассмотрим теперь случай систем на плоскости. Пусть O — произвольная точка плоскости, I и J — одновекторные системы, состоящие из ненулевых неколлинеарных векторов, приложенных к точке O, а K — любая (ненулевая) пара. Тогда системы I, J, K образуют *базис* в множестве систем плоских векторов, то есть любая система N однозначно линейно выражается через I, J, K:

$$N=\alpha I+\beta J+\gamma K$$

(числа α, β, γ однозначно определены системой N при фиксированных I, J, K).

Читатель, знакомый с понятием векторного пространства, конечно, понял, что это утверждение означает, что *множество классов эквивалентных систем (скользящих) векторов на плоскости относительно операций, определенных выше, образует векторное пространство размерности 3.*

* * *

Дойдя до этого места, авторы серьезно задумались, а потом заспорили: о каких именно приложениях теории скользящих векторов рассказать? Где только эта теория не используется! В статике (теория ферм и веревочных многоугольников), в строительной механике, в кинематике и динамике твердого тела, а ее обобщения используются в некоторых новейших разделах геометрии. Но нельзя объять необъятное. Здесь мы приведем только один пример — из кинематики твердого тела, а также, в конце статьи, ряд задач. Еще одно применение скользящих векторов — в строительной механике — рассматривается в заметке «Висячие мосты» на с. 22.

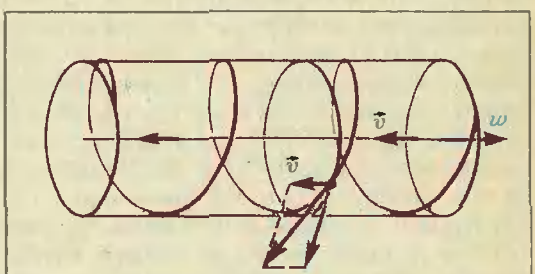


Рис. 7.

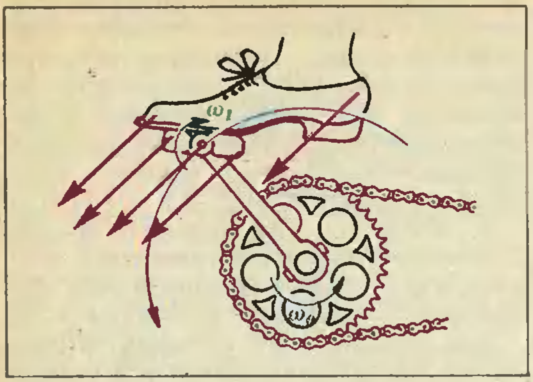


Рис. 8.

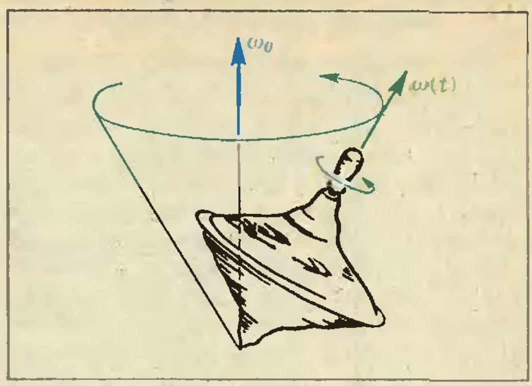


Рис. 9.

Вращение твердого тела

Здесь нас интересует такая *кинематическая задача:* как описать движение твердого тела, вращающегося около некоторой оси, если эта ось в свою очередь вращается вокруг неподвижной оси? Мы будем считать задачу решенной, если дан способ нахождения вектора скорости любой наперед заданной точки тела (относительно неподвижной системы отсчета).

Ответ красиво формулируется в терминах скользящих векторов. Однако прежде чем его привести, мы немного расскажем о том, как вообще может двигаться твердое тело. Начнем с простейших примеров.

При *равномерном прямолинейном движении* твердое тело перемещается с постоянной скоростью в фиксированном направлении. При этом векторы скорости во всех точках одинаковы, их направление и величина неизменны во времени. Все точки движутся по прямым. Движение характеризуется одним свободным вектором скорости $\vec{v}$.

При *равномерном вращательном движении* тело движется с неизменной угловой скоростью (см. «Физику 8», § 17) около неподвижной оси. При этом вектор скорости любой точки на оси вращения — нулевой, а вектор скорости любой другой точки перпендикулярен плоскости, проходящей через эту точку и ось, и по величине пропорционален расстоянию от точки до оси. Точки оси остаются на месте, а остальные точки двигаются по окружностям с центрами на оси. Такое движение характеризуется одним (скользящим) вектором ω — угловой скоростью вращения, линия действия которого совпадает с осью вращения.

При *равномерном винтовом движении* тело равномерно вращается около оси (называемой винтовой осью) и одновременно равномерно перемещается вдоль нее. Вектор скорости каждой точки равен сумме вектора вращательного движения и вектора прямолинейного движения (рис. 7). Точки тела описывают винтовые линии, лишь точки винтовой оси двигаются прямолинейно вдоль нее самой. Движение характеризуется двумя векторами $(\vec{v}, \omega)$: (свободным) вектором перемещения $\vec{v}$ и (скользящим) вектором угловой скорости ω (рис. 7).

Возможные движения твердого тела в пространстве не исчерпываются, конечно, приведенными примерами, хотя бы потому, что в реальной ситуации векторы $\vec{v}$ и ω могут меняться во времени. Однако имеет место вот какой замечательный факт (см. задачу 10): сколь бы сложное движение ни совершало твердое тело, мгновенное распределение скоростей его точек будет таким же, как при одном из трех перечисленных выше типов движения. Отметим, кстати, что прямолинейное и вращательное движения можно считать частными случаями винтового. Два конкретных примера таких более сложных движений показаны на рисунках 8 и 9.

Вернемся теперь к нашей изначальной кинематической задаче: предположим, что подвижная ось MN твердого тела вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 около неподвижной оси AB, а само тело к тому же вращается вокруг оси M_1N_1 с постоянной по величине угловой скоростью ω_1. (Подчеркнем, что

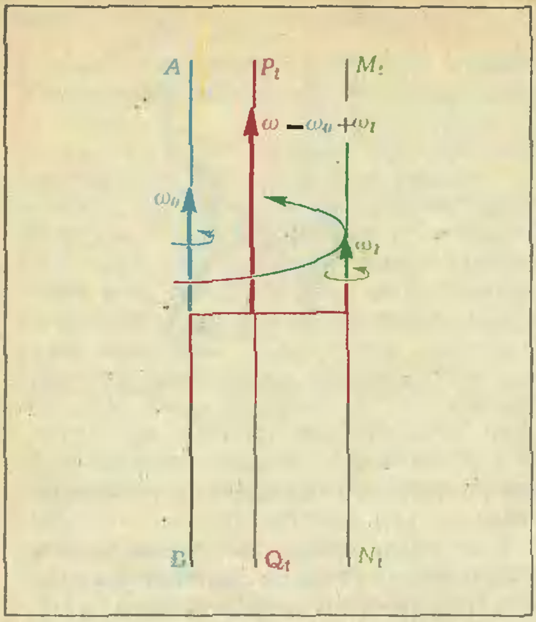


Рис. 10.

как скользящий вектор эта угловая скорость переменная, $\omega_1 = \omega_1(t)$,— меняется положение ее линии действия M_tN_t.) Как описать результирующее движение? Ответ зависит от взаимного расположения осей AB и M_tN_t.

1°. Оси совпадают. Тогда тело вращается около неподвижной оси $AB = M_tN_t$ с постоянной угловой скоростью $\omega = \omega_0 + \omega_1$. (Пример: движение часовой или минутной стрелки часов, лежащих на Северном полюсе.)

2°. Оси параллельны, причем $\omega_0 \neq -\omega_1$. Тогда в любой момент t скорости всех точек тела такие же, как если бы оно равномерно вращалось с угловой скоростью $\omega = \omega_0 + \omega_1$ (здесь имеется в виду сумма скользящих векторов — см. рис. 3 и рис. 10) вокруг линии действия P_tQ_t вектора ω. Говорят, что тело имеет *мгновенную угловую скорость* ω и *мгновенную ось вращения* P_tQ_t. В данном случае мгновенная ось вращается вокруг неподвижной оси AB, оставаясь ей параллельной.

3°. Оси параллельны, причем $\omega_0 = -\omega_1$. Тогда тело совершает *поступательное* движение с вектором скорости $\vec{v}$, равным моменту пары (ω_0, ω_1), то есть в любой момент t скорости всех точек тела одинаковы и равны $\vec{v}$. (Пример: движение подвижной части педали; рис. 8.)

4°. Оси пересекаются. Этот случай аналогичен 2°: в любой момент t тело имеет мгновенную ось вращения и мгновенную угловую скорость $\omega = \omega_0 + \omega_1$. Разница в том, что здесь мгновенная ось описывает не цилиндр, а конус с вершиной в неподвижной точке тела — точке пересечения осей. (Пример: прецессионное движение волчка; рис. 9.)

5°. Оси скрещиваются. В этом случае тело имеет, так сказать, «мгновенную винтовую ось»; подробнее об этом см. в задачах 7, 8.

Мы видим, таким образом, что решение нашей кинематической задачи коротко и просто формулируется в терминах сложения скользящих векторов. Несложные доказательства утверждений 1°—4° мы оставляем читателю в качестве упражнений.

Разные задачи

1. Назовем ***главным вектором*** системы скользящих векторов $(v_1, \ldots, v_n)$ сумму равных им свободных векторов $\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n$, а ***главным моментом*** этой системы относительно точки O — сумму моментов векторов $v_1, \ldots, v_n$ относительно O. Докажите, что у любых двух эквивалентных систем главные векторы и главные моменты относительно одной и той же точки O совпадают.

2. Покажите, что любая система векторов, расположенных в одной плоскости, эквивалентна трем векторам, направленным вдоль сторон треугольника, произвольно выбранного в той же плоскости.

3. Докажите, что плоская система векторов, перпендикулярных к сторонам выпуклого n-угольника в их серединах, эквивалентна нулю, если длины векторов пропорциональны соответствующим сторонам и все векторы обращены внутрь многоугольника (или все наружу).

4. Сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное утверждению предыдущей задачи, для тетраэдра.

5*. Покажите, что любая система векторов пространства эквивалентна шести векторам, направленным по ребрам произвольно выбранного тетраэдра.

6*. Покажите, что любая система векторов пространства эквивалентна системе, состоящей из одного вектора (проходящего через произвольно выбранную точку) и из одной пары. Выведите отсюда, что системы скользящих векторов в пространстве, рассматриваемые с точностью до эквивалентности, образуют шестимерное векторное пространство.

Указание. Сначала приведите систему к трем скользящим векторам, проходящим через три произвольно выбранные точки (раскладывая каждый вектор системы по трем направлениям), затем к двум векторам, один из которых проходит через данную точку, и, наконец, примените построение из рисунка 4.

7. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\underline{\omega}$ около оси, которая в свою очередь движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}$. Докажите, что тело: а) совершает винтовое движение, если $\omega \parallel \vec{v}$; б) имеет мгновенную ось вращения если $\vec{v} \perp \omega$; в) имеет мгновенную винтовую ось, если $\vec{v}$ не параллельно и не перпендикулярно ω (это значит, что все точки некоторой прямой — «винтовой оси» — имеют одинаковые скорости $\vec{v}_1$, направленные вдоль этой оси, а векторы скорости остальных точек равны сумме вектора $\vec{v}_1$ и вектора скорости мгновенного вращения данной точки около винтовой оси).

8*. Покажите, что в случае скрещивающихся осей AB и M_lN_l в кинематической задаче, рассмотренной выше, тело имеет мгновенную винтовую ось, параллельную вектору $\vec{\omega}_0+\vec{\omega}_1$ и пересекающую общий перпендикуляр осей AB и M_lN_l. Уточните положение мгновенной винтовой оси и вектор скорости вдоль оси.

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.

9*. Опишите результирующее движение тела, совершающего мгновенное винтовое движение относительно оси, которая в свою очередь совершает винтовое движение относительно некоторой неподвижной оси.

10*. Докажите, что как бы ни двигалось твердое тело, в любой данный момент распределение скоростей его точек такое же, как если бы оно совершало равномерное (прямолинейное, вращательное или винтовое) движение.

11. Пользуясь тем, что момент вектора $\overline{AB}$ относительно точки O равен по величине удвоенной площади треугольника OAB, докажите, что множество точек внутри выпуклого многоугольника, для которых постоянна сумма расстояний до его сторон (точнее, прямых, содержащих стороны), есть либо отрезок, либо весь многоугольник, либо пустое множество.

Когда в товарищах согласья нет...

Вернемся теперь к басне. Предположим, что тяжелый воз, по форме напоминающий прямоугольный параллелепипед, стоит на дороге. На него действует сила тяжести т, которую можно считать приложенной к центру тяжести, но она компенсируется реакцией опоры: воз стоит на месте. Но вот явились преисполненные благих намерений товарищи: Лебедь, Рак и Щука и стали тянуть воз с силами **л**, **р** и **щ** (рис. 5). Что же произойдет?

Вооруженные теорией, мы теперь можем ответить на этот вопрос. Система сил (л, **р**, **щ**, т) — как и любая другая — приводится к паре и вектору (см. задачу 6). Как их найти? А мы это уже сделали, когда разбирали пример на с. 11 (см. рис. 5). У нас получилась пара (u, v) в горизонтальной плоскости. И теперь ясно, что будет: не сходя с места, воз начнет вращаться там, где стоял. Мы можем поэтому с уверенностью подтвердить слова И. А. Крылова:

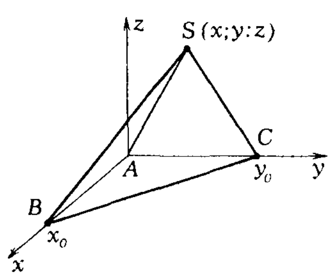
...Да только воз и ныне там!

Невозможный тетраэдр

В некоторых геометрических задачах требуется установить, существует ли фигура с теми или иными свойствами. Иногда ответ к таким задачам можно быстро получить с помощью координатного метода. Примером может служить следующая

Задача. ***Возможна ли треугольная пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник, и все плоские углы при вершине — прямые?***

Решение. Будем вести рассуждения методом от противного. Пусть возможна пирамида $SABC$ (см. рисунок), о которой идет речь в условии задачи: $\widehat{A}=90°$, $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=90°$. На рисунке мы выбрали систему координат с началом в вершине A, ось OX направили по ребру AB и ось OY — по ребру AC. Пусть вершины имеют следующие координаты: $S(x; y; z)$, $B(x_0; 0; 0)$, $C(0; y_0; 0)$. Координаты вершины A — $(0; 0; 0)$. Запишем условие перпендикулярности



в виде равенства нулю соответствующих скалярных произведений

$$\left.\begin{aligned}&\vec{SA}\cdot\vec{SC}=0,\\&\vec{SA}\cdot\vec{SB}=0,\\&\vec{SB}\cdot\vec{SC}=0\end{aligned}\right\}$$

или, переходя к координатам:

$$(-x;\ -y;\ -z)\cdot(-x;\ y_0-y;\ -z)=0,$$
$$(-x;\ -y;\ -z)\cdot(x_0-x;\ -y;\ -z)=0,$$
$$(x_0-x;\ -y;\ -z)\cdot(-x;\ y_0-y;\ -z)=0$$

или

$$\left.\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-y_0y=0,\\&x^2+y^2+z^2-x_0x=0,\\&x^2+y^2+z^2-x_0x-y_0y=0.\end{aligned}\right\}$$

Откуда получаем $x=y=z=0$, то есть $S\equiv A$. Таким образом, пирамида $SABC$ выродилась в треугольник ABC.

Этим и доказана невозможность искомой пирамиды. Мы советуем читателям придумать, для сравнения, «не координатное» решение этой задачи.

С. Р. Сефибеков

Приглашение в парную

(или Физика в бане)

Кандидат физико математических наук
И. И. МАЗИН

«Дивное видел я в Славянской земле на пути своем. Видел бани деревянные, и разожгут их докрасна, и разденутся, и будут наги, и обольются квасом, и возьмут прутья молодые, и бьют себя сами, и того добьются, что вылезут еле живы, и обольются водой студеной, и так оживут.»

Так описывается баня в русских летописях XI века. И по сей день любители бани с азартом «мучают» сами себя. Зачем? Говорят, что польза банных процедур связана с кратковременным воздействием на кожу высоких температур — горячего воздуха. Однако во влажном воздухе высокую температуру трудно выдерживать даже недолго. Так что в хорошей бане должно быть не только жарко, но и сухо. Не так-то просто построить хорошую баню, да и «приготовить» пар, то есть, говоря научным языком, создать оптимальный микроклимат, тоже надо уметь. Наши предки умели это делать еще в XI веке, а вот объяснить, почему в бане нужно поступать так, а не иначе, они бы, пожалуй, не смогли. Но сегодняшний школьник знает достаточно, чтобы ответить на вопросы, которые задает любителям физики обычная парная. Это я и предлагаю сделать читателю. Начнем мы с того, что посмотрим как бы со стороны на банный «сеанс» и будем по ходу дела задавать себе вопросы. А потом мы попытаемся на них ответить.

Итак, в баню! А чтобы лучше ориентироваться, будем пользоваться рисунком со страницы 19.

Вот мы уже в парной. Ну и жара... Что же, постоим немного внизу — здесь попрохладнее. Привыкли — можно и наверх. Горячо? Ничего, сегодня еще не очень жарко, бывает и так, что на горячий деревянный пол босой ногой не встанешь, да и на скамье не посидишь. А если скамья сколочена железными гвоздями, то на нее не стоит садиться и в не очень жаркой бане: прикоснешься голым телом к шляпке гвоздя — заработаешь ожог.

Вопрос 1. Почему в парной внизу холоднее, чем на полке?

Вопрос 2. Почему при той температуре, при которой еще можно сесть на нагретое дерево, садиться на железо уже нельзя — обожжешься?

Постепенно мы привыкаем к парной. Воздух уже не кажется таким горячим. Однако чувствуется, что он сырой — на скамейке, на полу мокрые пятна. Это можно исправить. Нужно, как говорят, «поддать пару»: взять кипятка и маленькими порциями, ковшиком, бросать его в печь на раскаленные камни. Сразу горячая волна пахнет из печи наверх, жарче станет на полке́, жарче и суше; исчезнут мокрые пятна, высохнут пол и скамьи.

Вопрос 3. Почему, когда подбрасывают воду на горячие камни печи, в парной становится суше?

Вопрос 4. Почему нужно подбрасывать воду понемногу, а не вылить в каменку сразу шайку воды?

Вопрос 5. Почему нужно бросать именно кипяток, а не холодную воду?

...Но вот прошло больше часа. В парной побывало много народу, воздух уже не такой свежий, сырость, на полу листья от веников. Пора «чистить» парную. Это делается так. Все выходят минут на десять. За это время нужно подмести пол, окатить его водой из шланга; затем открыть настежь дверь в парную, снаружи около двери плеснуть на пол несколько шаек холодной воды; а потом начать поддавать пар. Свежий пар вытеснит старый, застоявшийся воздух парной. Теперь все готово, можно заходить и начинать все сначала.

Вопрос 6. Зачем нужна лужа холодной воды у входа в парную?

Вопрос 7. Почему свежий пар вытесняет старый воздух парной?

Итак, с правилами бани мы познакомились. Давайте отвечать на возникшие вопросы.

Первый вопрос был настолько прост, что на него, наверное, сразу ответил любой читатель. Так что начнем со второго вопроса.

Что происходит, когда человек наступает или садится на горячую скамью? Температура тела человека не больше 40 °C, в то время как температура воздуха, а следовательно, и скамеек в хорошей парной от 80 до 120 °С. При контакте начинается процесс передачи тепла от горячего тела (скамьи) к холодному (человеку). Как быстро идет процесс? Это определяется, в частности, теплопроводностью горячего тела. Чем больше теплопроводность материала, тем быстрее передается тепло от его более нагретых участков к менее нагретым. У железа, как и у других металлов, теплопроводность значительно больше, чем у дерева,— примерно в 300 раз. Когда мы соприкасаемся с горячей деревянной скамьей, остывает та ее часть, которая находится вблизи зоны контакта, и нам передается тепло, «отнятое» у малого объема скамьи. Иное дело, если в зоне контакта окажется гвоздь: тепло будет быстро «подтягиваться» к точкам соприкосновения со всей длины гвоздя. Кроме того, объемная теплоемкость (то есть теплоемкость, рассчитанная на единицу объема) у железа примерно в 40 раз больше, чем у дерева; так что при одинаковых условиях остывания мы от куска железа получим в десятки раз больше тепла, чем от куска дерева того же объема.

Теперь, я думаю, вы сможете сами четко сформулировать ответ на вопрос 2. (Заметьте: мы ничего не говорили о теплопроводности и теплоемкости человеческого тела. Подумайте сами, какую роль играют эти характеристики в рассмотренном нами процессе.)

Чтобы ответить на следующие вопросы, давайте вспомним некоторые

сведения из молекулярной физики, в частности — о водяном паре.

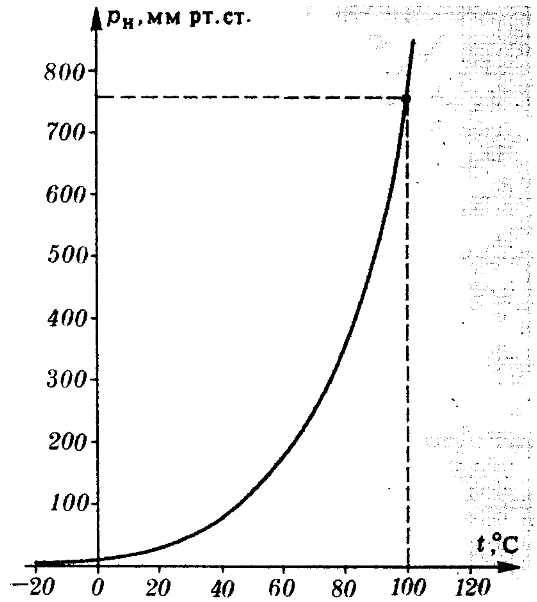
Вода, как известно, может находиться в трех агрегатных состояниях: твердом — лед, жидком — собственно то, что мы и называем водой, и газообразном — пар. Что касается льда, то он прямого отношения к бане не имеет, а вот про воду и пар поговорим.

Вода может превращаться в пар — это испарение, а пар может превращаться в воду — это конденсация. При испарении воды поглощается тепло, а при конденсации той же массы пара выделяется такое же количество тепла. В атмосфере всегда имеется некоторое количество водяного пара. Например, в жилой комнате в 1 м^3 воздуха обычно содержится около 10 г пара. Плотность водяного пара в воздухе называют абсолютной влажностью.

Поставим в комнате блюдце с водой. Вода будет испаряться и со временем вся превратится в пар. При этом абсолютная влажность в комнате повысится, но не намного — объем комнаты обычно несколько десятков кубических метров, и если в блюдце было 10 г воды, то влажность увеличилась не более чем на 1 г/м^3. А если такое же блюдце поместить в сосуд объемом 1 л (10^{-3} м^3) и закрыть его? Количество воды в блюдце будет уменьшаться до тех пор, пока пар в сосуде не станет насыщенным. А это произойдет тогда, когда число молекул, вылетающих из воды за единицу времени, и число молекул, переходящих за единицу времени из пара в воду, сравняются. И с этого времени абсолютная влажность воздуха в сосуде не будет изменяться. (Разумеется, мы имеем в виду, что температура сосуда все время остается постоянной.)

Таким образом, при каждой температуре существует максимальная абсолютная влажность воздуха, равная плотности насыщенного водяного пара при этой температуре. Чем выше температура, тем больше значение плотности насыщенного пара.

Понятно, что чем меньше абсолютная влажность воздуха по отношению к максимально возможной при данной температуре, тем интенсивнее идет испарение воды. Отношение абсолютной влажности к плотности насыщенного пара при данной температуре



называют относительной влажностью, ее измеряют в процентах. Поскольку давление пара пропорционально его плотности, относительную влажность можно определить по-другому: это есть выраженное в процентах отношение парциального давления водяного пара к давлению насыщенного пара при данной температуре.

Давление насыщенного пара, так же как и его плотность, тем больше, чем выше температура. График на рисунке демонстрирует эту зависимость.

Повышение абсолютной влажности при постоянной температуре воздуха ведет к увеличению относительной влажности. И если при неизменной абсолютной влажности температура воздуха понижается, то относительная влажность будет расти. При некоторой температуре она достигнет 100 % — пар в воздухе станет насыщенным, начнется его конденсация (появится туман, выпадет роса). Температуру, при которой это происходит, называют точкой росы.

А если увеличивается абсолютная влажность и растет температура? Тогда относительная влажность будет зависеть от того, что растет быстрее: плотность пара в воздухе или давление насыщенных паров.

Ну, а теперь вернемся к нашим вопросам.

Мы выяснили, что скорость испарения определяется не абсолютной влажностью, а относительной. Если при подбрасывании кипятка в каменку в парной становится суше, значит, относительная влажность уменьшается (а абсолютная, конечно, увеличивается). Почему это происходит? Когда небольшое количество воды с силой бросают в печку, она разбрызгивается в маленькие капельки. Попадая на камни, разогретые до температуры в сотни градусов, капельки мгновенно испаряются, превращаясь в пар, температура которого сравнима с температурой самих камней. Раскаленный пар вырывается из печки, общая температура воздуха в парной повышается. Более высокой температуре соответствует более высокая плотность насыщенного пара, и, значит, даже с учетом увеличения абсолютной влажности, относительная влажность может уменьшаться. Это и происходит на самом деле.

Понятно, почему нужно бросать воду именно маленькими порциями. Большая порция упадет на камни сравнительно большой «каплей». Такая «капля» не сможет испариться так быстро, как маленькая, а просто начнет кипеть, образуя пар с температурой 100 °С или, может быть, немного выше. Но нас это не устроит. Весь секрет в быстротечности процесса! По этой же причине нельзя бросать холодную воду. Ведь у камня довольно низкая теплопроводность, поэтому даже маленькая капля, пока будет нагреваться до 100 °С, успеет немного охладить ту часть камня, с которой соприкасается, а значит, и температура образующегося пара упадет.

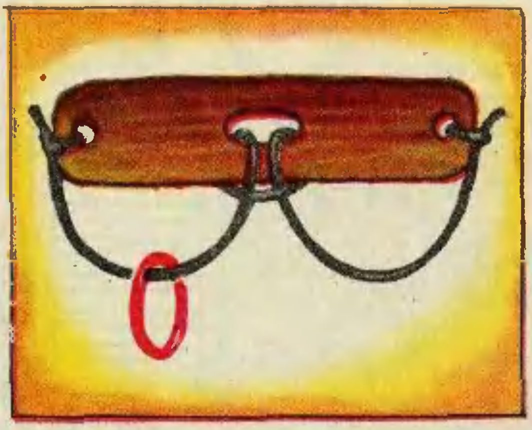
Итак, на вопросы 3, 4 и 5 мы ответили. Вопрос 6 для нас теперь несложен. Вблизи лужи температура ниже, чем точка росы. Поэтому выходящий из парилки «отработанный» пар начинает быстро конденсироваться, как говорят, «садиться» на луже. В хорошей парилке дверь и печь расположены в разных концах: горячий пар, образующийся у каменки, пройдя всю парилку, охлаждается и конденсируется на выходе.

И наконец, последний вопрос: почему свежий пар вытесняет старый воздух парной?

Вспомним, что при «чистке» парной в печь набросали несколько шаек кипятка, то есть не меньше десяти килограммов воды. Температура образовавшегося из этой воды пара — около 300 °С. При такой температуре и при давлении в 1 атмосферу 10 кг водяного пара занимали бы объем более 25 м^3. Можно сказать, что мы в течение небольшого времени ввели в помещение такое количество пара, которое само занимает примерно 1/3 объема этого помещения. Пар этот горячий, поэтому он поднимается вверх и вытесняет старый воздух вниз.

Ну, вот, а теперь, когда с физикой все стало ясно, можно приступать к практическим занятиям. Легкого пара, дорогой читатель!

Африканская головоломка



С давних времен в Африке очень популярны игры и головоломки с веревочками. Мы хотим предложить вам одну из таких головоломок — ее любят в Гамбии. Эта головоломка состоит из планки с тремя отверстиями, шнурка, продернутого через центральное отверстие так, как показано на рисунке, и закрепленного по краям, и кольца, висящего, скажем, на левой петле. Требуется передвинуть кольцо вдоль всего шнурка направо, не отвязывая шнурка от планки. (Шнурок примерно вчетверо длиннее планки, а кольцо больше, чем центральное отверстие в планке.) Попробуйте решить эту головоломку. Если у вас ничего не получается, загляните в конец номера.

А. Т. Калинин

Висячие мосты

Ю. С. ПЕТРОВ

Висячие мосты... Они поражают смелостью замысла, чистотой и совершенством линий. Тонкие вертикальные тросы, спускаясь с изящно изогнутых провисающих канатов, легко удерживают в воздухе многотонную асфальтированную полосу, по которой торопливо снуют автомашины. Взгляните на рисунок — какое ощущение воздушности и легкости! Но за этой легкостью скрывается чудовищная напряженность всех звеньев конструкции, а величественная неподвижность моста, парящего над речной гладью, — следствие равновесия огромных невидимых сил, укрощенных разумом конструкторов.

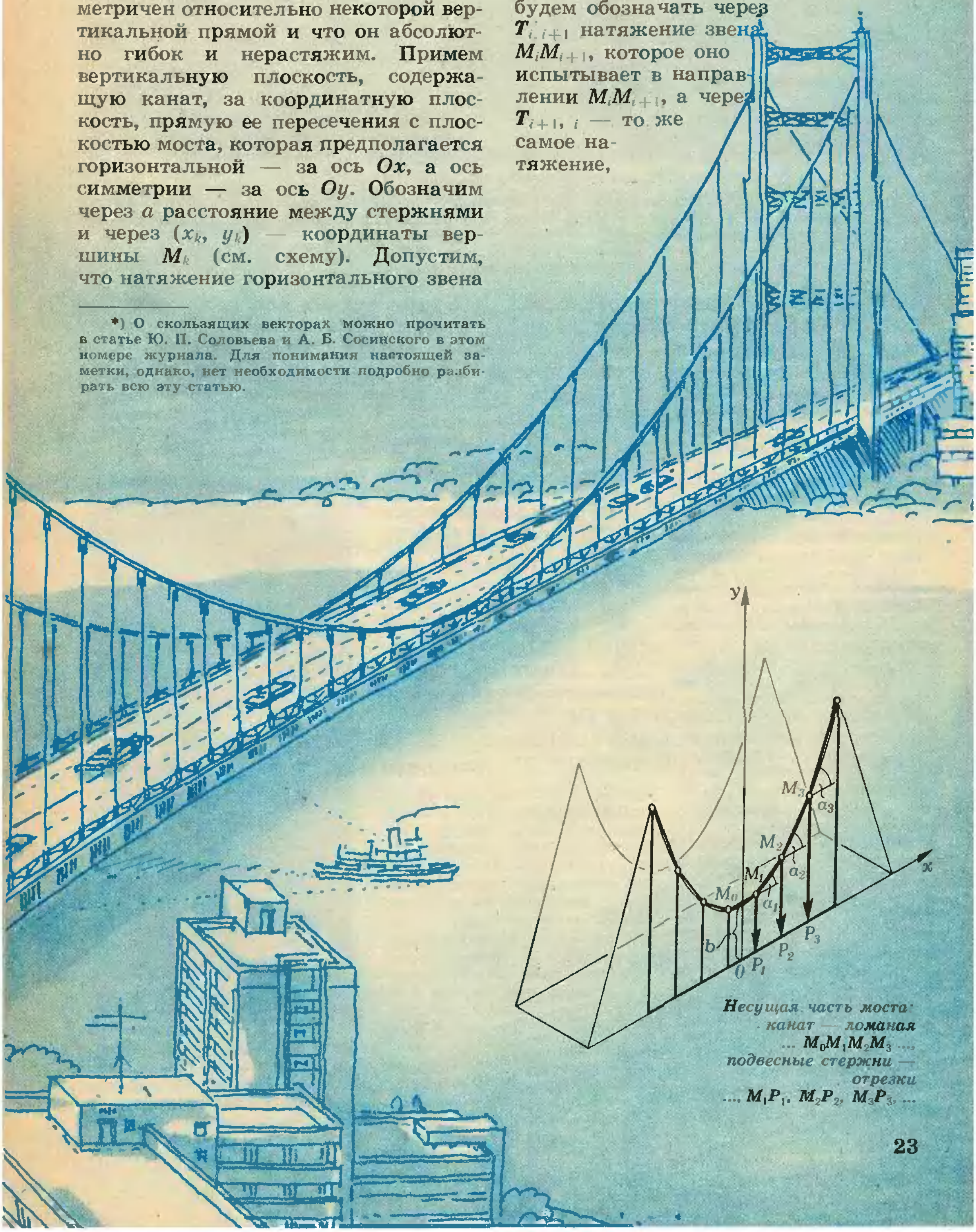
Прежде чем воплотиться в законченное сооружение из стали и бетона, мост проектируется и тщательно рассчитывается большим коллективом инженеров-строителей. Но проектировке конкретных мостов предшествует разработка их общей математической теории, решение многих принципиальных и частных математических задач. Одна из этих задач прямо-таки напрашивается, когда смотришь на висячий мост: какой должна быть кривая, определяющая форму провисающих канатов, чтобы обеспечить их равновесие? Обычно на поставленный вопрос уверенно отвечают: «Ну, как же — это цепная линия. Такую форму принимает гибкая однородная нерастяжимая нить, концы которой закреплены в двух точках. Примерно так выглядят цепь, телеграфный провод, свисающие под действием силы тяжести». Это, однако, неверно, в чем можно убедиться, заглянув в любые учебники или справочники по мостостроению, — в них дается (правильный и очень простой) ответ. Впрочем, в тех книгах, в которых я его нашел, ответ дается бездоказательно, как некая догма. Между тем решение указанной задачи можно получить совсем элементарными средствами, надо только немного уметь оперировать со скользящими

векторами *). Этому решению и посвящена настоящая заметка.

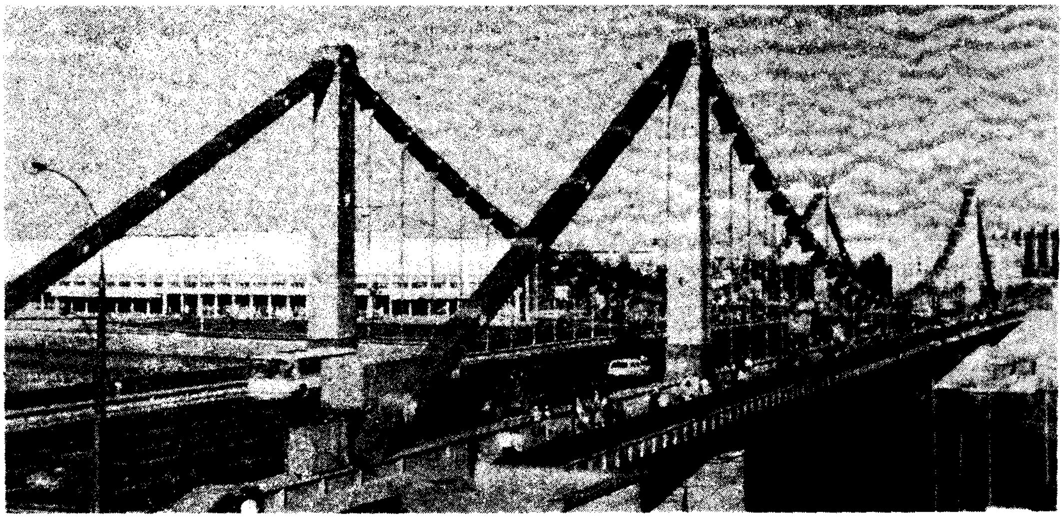
Несущая часть висячего моста состоит из канатов и подвесных стержней, которые мы будем предполагать вертикальными, находящимися на одинаковых расстояниях друг от друга и одинаково нагруженными (см. рисунок). Мы будем пренебрегать весом этих стержней и каната. Будем, наконец, предполагать, что канат симметричен относительно некоторой вертикальной прямой и что он абсолютно гибок и нерастяжим. Примем вертикальную плоскость, содержащую канат, за координатную плоскость, прямую ее пересечения с плоскостью моста, которая предполагается горизонтальной — за ось Ox, а ось симметрии — за ось Oy. Обозначим через a расстояние между стержнями и через (x_k, y_k) — координаты вершины M_k (см. схему). Допустим, что натяжение горизонтального звена равно $\boldsymbol{T}_0$. Натяжение следующих звеньев M_1M_2, M_2M_3,... обозначим через $\boldsymbol{T}_{12}$, $\boldsymbol{T}_{23}$, ..., а их углы наклона к горизонту — через α_1, α_2, ... На точки M_1, M_2, ... действуют силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ..., равные p. Нам нужно найти значения ординат y_k, при которых суммы сил, действующих на точки M_k, равны нулю.

Чтобы исключить всякие недоразумения с направлениями натяжений, будем обозначать через $\boldsymbol{T}_{i,\,i+1}$ натяжение звена M_iM_{i+1}, которое оно испытывает в направлении M_iM_{i+1}, а через $\boldsymbol{T}_{i+1,\,i}$ — то же самое натяжение,

*) О скользящих векторах можно прочитать в статье Ю. П. Соловьева и А. Б. Сосинского в этом номере журнала. Для понимания настоящей заметки, однако, нет необходимости подробно разбирать всю эту статью.



Несущая часть моста: канат — ломаная ... $M_0M_1M_2M_3$ ..., подвесные стержни — отрезки ..., M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, ...



Показанный на снимке Крымский мост через Москву-реку — один из красивейших отечественных висячих мостов. На фотографии хорошо видно, что обе линии подвеса, закрепленные на двух парах опор, имеют форму параболы.

но в противоположном направлении. По соображениям симметрии достаточно рассмотреть лишь одну половину каната (скажем, ту, которая имеет положительные абсциссы). Вершина M_1 находится в равновесии под действием трех сил: $\boldsymbol{T}_0$, $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{T}_{12}$, откуда

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{|\boldsymbol{F}_1|}{|\boldsymbol{T}_0|}=\frac{p}{T_0}.$$

Вершина M_2 находится в равновесии под действием сил $\boldsymbol{T}_{21}$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{T}_{23}$, откуда $\operatorname{tg}\alpha_2=2p/T_0$. Аналогично, $\operatorname{tg}\alpha_k=kp/T_0$.

Теперь мы в состоянии вычислить координаты (x_k, y_k) вершины M_k. Координаты вершины M_1 равны $(a/2, b)$, где b — расстояние от горизонтального звена до оси Ox. Координаты остальных вершин могут быть подсчитаны последовательно по формулам

$$x_k=x_{k-1}+a,\quad y_k=y_{k-1}+a\operatorname{tg}\alpha_{k-1}.$$

Следовательно,

$$x_k=\frac{a}{2}+(k-1)a,$$

$$y_k=b+\frac{ap}{T_0}[1+2+\ldots+(k-1)]=$$

$$=b+\frac{k(k-1)}{2}\frac{ap}{T_0}.$$

Формула для y_k может быть получена и иначе. Для ее вывода достаточно заметить, что внешние силы, приложенные к части $M_1 M_2 \ldots M_k$ каната, образуют систему векторов, эквивалентных нулю, вследствие чего сумма их моментов относительно точки M_k равна нулю.

В выражениях для x_k и y_k имеется неизвестное натяжение T_0. Оно может быть найдено, если известна точка подвеса последней вершины M_n. Пусть h — высота этой точки; тогда

$$h=b+\frac{n(n-1)}{2}\frac{ap}{T_0},$$

откуда

$$T_0=\frac{n(n-1)}{2}\frac{ap}{h-b}.$$

Если из равенств

$$x=\frac{a}{2}+(k-1)a,$$

$$y=b+\frac{k(k-1)}{2}\frac{ap}{T_0}$$

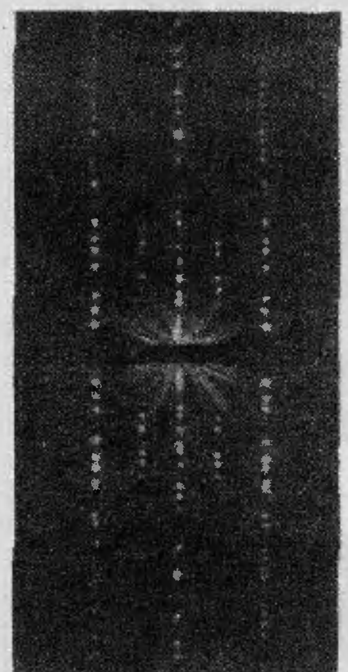
исключить k, то получим, что *точки подвеса M_k лежат на параболе*

$$y=\frac{p}{2aT}x^2+\left(b-\frac{ap}{8T_0}\right)$$

с вертикальной осью.

Открытие рентгеновских лучей

К 90-м годам прошлого столетия профессор Вюрцбургского университета (Германия) Вильгельм Конрад Рентген был уже хорошо известен в научных кругах всего мира как великолепный мастер физического эксперимента. Его исследования свойств жидкостей и газов и пьезоэлектрического эффекта, прямое опытное доказательство порождения магнитного поля движущимися электрическими зарядами считались достойными подражания образцами экспериментального искусства. Запутанные и служившие предметом многолетних споров вопросы находили в опытах Рентгена ответы, *не оставлявшие места для сомнений*, а сами опыты удивляли остроумием замысла и аскетической скромностью применявшихся экспериментальных средств. Ученый любил говорить, что все необходимое для опыта настоящий экспериментатор должен уметь сделать с помощью перочинного ножа.



Эта рентгенограмма получена от кристалла гипса, вращающегося («купающегося») в пучке монохроматического рентгеновского излучения.

Вечером в пятницу 8 ноября 1895 года, закончив с преподавательскими делами, Рентген экспериментировал в лаборатории — как всегда, в одиночестве. Вот уже несколько недель объектом его исследований были вызывавшие тогда жаркие споры катодные лучи. Теперь мы знаем, что это поток быстро несущихся электронов. Но в те времена так называли излучение непонятной природы, испускаемое катодом разрядной трубки (откачанный до высокого вакуума стеклянный баллон, обычно удлиненной формы, в который вблизи концов впаяны металлические электроды) при подаче на ее электроды высокого напряжения. Там, где катодные лучи попадают на стенки трубки, стекло люминесцирует зеленым светом.

Рентген работал в затемненном помещении, а разрядная трубка была помещена в черный светонепроницаемый футляр. Поблизости от нее на лабораторном столе лежал *люминесцентный экран* — листок бумаги, покрытый платиносинеродистым барием (такие экраны, испускающие видимый свет при падении на них невидимого излучения — ультрафиолетовых или катодных лучей,— широко применялись тогда в лабораторной практике). Неожиданно ученый заметил, что *«при каждом разряде через трубку на экране... наблюдается яркая вспышка»*. Рентген незамедлительно удостоверился в том, что именно разрядная трубка — источник *невидимого излучения*, вызывающего свечение экрана. Не стоило большого труда показать, что это невидимое излучение не может быть ни ультрафиолетовыми, ни катодными лучами. В самом деле, вспышки на экране наблюдались и в том случае, когда между ним и трубкой экспериментатор помещал *различные предметы*, заведомо совершенно непрозрачные для ультрафиолетовых и катодных лучей — алюминиевую пластинку толщиной в 15 мм, толстенную книгу в 1000 страниц, наконец, собственную руку. И Рентгену стало ясно, что ему посчастливилось сделать замечательное открытие — обнаружить новый вид лучей, обладающих, к тому же, неслыханной проникающей способностью.

Было ли открытие Рентгена полностью случайным или к историческому эксперименту в темной комнате его подвели какие-то интуитивные соображения, неизвестно. На сей счет существует множество версий — от сомнительных *до весьма убедительных*. Но все они недостоверны: неразговорчивый ученый ничего не рассказал, а очевидцев не было. Зато хорошо известно, что следующие семь недель после 8 ноября Рентген провел в обстановке полного затворничества в лаборатории (он даже распорядился поставить туда раскладную кровать), днем и ночью, почти без отдыха, проводя все новые и новые эксперименты, перепроверяя и варьируя прежние опыты. Период напряженной работы оказался чрезвычайно продуктивным — Рентген выяснил, как зависит поглощение новых лучей от толщины и плотности различных материалов; установил, что лучи могут быть «мягкими» (сильно поглощаемыми) и «жесткими» (слабо поглощаемыми); изучил их фотографическое действие; показал, что они не отклоняются электрическим и магнитным полями, ионизируют воздух; сконструировал разрядную трубку,

(Окончание см. на с. 27)

Обобщенная задача о ферзях

С. Б. БЕЛЫЙ,
Е. А. РОВЕНСКИЙ

Задача о ферзях — *на шахматной доске расставить максимальное число ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу*, и найти число всех таких расстановок — давно уже стала классической. В XIX веке этой задачей занимался великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), а в нашем столетии выдающийся американский математик и кибернетик Клод Шеннон (р. 1916) указал на ее прямое отношение к вопросам помехоустойчивого кодирования.

Недавно появилось интересное обобщение этой задачи, касающееся расстановки максимального числа ферзей («Наука и жизнь», 1982, № 3, с. 73; «Квант», 1983, № 1, 3-я стр. обл.): *на шахматной доске расставить максимальное число ферзей p так, чтобы каждый из них атаковал ровно k ферзей* ($1 \leqslant k \leqslant 4$). Эта задача была поставлена американским математиком Скоттом Кимом и опубликована в J. Recreational Mathematics, 1979-80, vol. 12, № 1, p. 53 (американский журнал, в котором публикуются статьи и задачи занимательного характера по математике). При $k=0$ получаем классическую задачу, для которой $p_{max}=8$. Подумайте, почему в формулировке задачи сделано ограничение $k \leqslant 4$. Задачу Кима удалось решить частично (J. Recreational Mathematics, 1980-81, vol. 13, № 1, p. 61—62). Именно:

$$p_{max}=10 \text{ для } k=1, \qquad (1)$$
$$p_{max}=14 \text{ для } k=2. \qquad (2)$$

Примеры соответствующих расстановок показаны на рисунках 1 и 2.

Для $k=3$ и $k=4$ были найдены расстановки $p=16$ (там же) и $p=21$ (Scientific American, 1981, vol. 245, № 6, p. 19) соответственно, но оставалось неизвестным, являются ли эти числа максимальными.

В данной заметке мы докажем, что

$$p_{max}=18 \text{ для } k=3, \qquad (3)$$
$$p_{max}=21 \text{ для } k=4. \qquad (4)$$

Рисунки 3 и 4 показывают, что расстановки с таким числом ферзей существуют. Заметим, что расстановка с $p=18$ для $k=3$ ранее не была известна. Попробуем теперь найти верхнюю оценку для p.

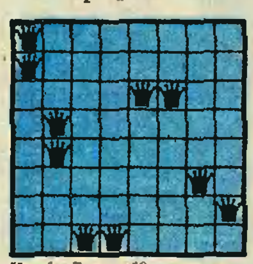
Пусть p — число ферзей, а q — число рядов (вертикалей, горизонталей и диагоналей), на которых стоит хотя бы один ферзь. Тогда, если бы ферзи не атаковали друг друга, то $q=4p$. Но так как общее число боев равно pk (каждый ферзь атакует ровно k ферзей), то

$$q = 4p - \frac{pk}{2} \text{ или } r = \frac{2k}{8-k}. \qquad (5)$$

Докажем теперь (3). Общее число вертикалей, горизонталей и диагоналей на доске $n \times n$ равно $6n-2$, поэтому

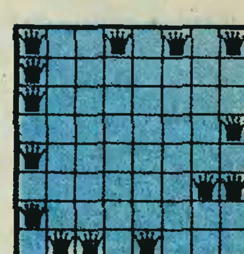
$$q \leqslant 6n-2. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) для доски 8×8 получаем $p \leqslant 18$.



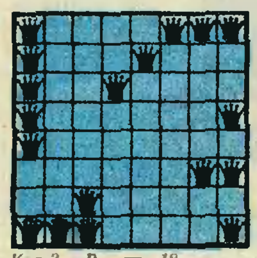
K=1, P_max = 10

Рис. 1. $k=1$, $p_{max}=10$.



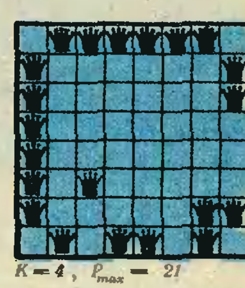
K=2, P_max = 14

Рис. 2. $k=2$, $p_{max}=14$.



K=3, P_max = 18

Рис. 3. $k=3$, $p_{max}=18$.



K=4, P_max = 21

Рис. 4. $k=4$, $p_{max}=21$.

Докажем (4). Так как угловые клетки доски не могут быть заняты ферзями (почему?), получаем

$$q \leqslant 6n - 6. \qquad (7)$$

Из (5) и (7) для доски 8×8 находим $p \leqslant 21$.

Итак, задача Кима полностью решена. Нам остается добавить, что максимальные расстановки ферзей, показанные на рисунках 3 и 4, были найдены с помощью ЭВМ (на это ушло около 30 минут счета на ЭВМ с числом операций 200 тысяч в секунду). Читатели, умеющие программировать, могут попробовать свои силы в составлении такой программы.

Задача для исследования. Естественным обобщением задачи С. Кима является следующая задача:

На шахматной доске $n \times n$ расставить максимальное число ферзей $p_{max} = p(n, k)$ так, чтобы каждый из них атаковал ровно k ферзей ($0 \leqslant k \leqslant 4$), и найти число $N = N(n, k)$ таких расстановок (две расстановки, получающиеся друг из друга поворотом или симметрией, считаются одинаковыми).

Мы предлагаем читателям исследовать следующие вопросы.

1. Чему равно p_{max} при разных n, $n \leqslant 7$?
2. Чему равно N при разных n, $n \leqslant 7$?
3. Можете ли вы указать расстановки для случаев $n=8$, $k=1, 2, 3, 4$, отличные от приведенных здесь?
4. Можете ли вы указать расстановку для $n=8$, $k=0$?
5. Можно ли оценить p_{max} и N сверху и снизу при любых n?

Исследуйте задачу Кима о ферзях для случая
а) цилиндрической шахматной доски;
б) тороидальной шахматной доски;
в) трехмерной шахматной доски;
г) n-мерной шахматной доски.

Открытие рентгеновских лучей

(Начало см. на с. 25)

дающую более интенсивное излучение (по существу это была первая рентгеновская трубка).

Полученные результаты Рентген подытожил в вышедшей в первых числах января 1896 года брошюре «О новом роде лучей». Одновременно он разослал ведущим физикам мира первые рентгеновские снимки, в том числе снимок кисти руки своей жены. Пожалуй, ни одно физическое открытие не вызвало столь огромного и всеобщего интереса, как обнаружение Рентгеном лучей, проходящих сквозь стены и позволяющих видеть невидимое. Физики сразу же принялись повторять удивительные опыты, журналисты заполнили страницы газет сенсационными сообщениями. В 1901 году Рентген стал первым лауреатом Нобелевской премии по физике.

Современные области применения рентгеновских лучей трудно даже перечислить — медицина, генетика, дефектоскопия, рентгеноструктурный анализ, рентгеноспектральный анализ, исследования произведений старинной живописи, криминалистика...

Выдающееся положение занимает открытие рентгеновских лучей и в истории науки — именно с него началась эра атомной и ядерной физики. «В начале 1896 года, в тот самый день, когда в Париже стало известно об опытах Рентгена и о необычных свойствах лучей, испускаемых люминесцирующими стенками... трубок,— рассказывал А. Беккерель,— я задумал исследовать, не испускает ли такие же лучи и всякое другое люминесцирующее вещество». Предположение оказалось неверным, но в опытах Беккереля была открыта радиоактивность.

А Дж. Дж. Томсон вспоминал: «Я исследовал в течение некоторого времени проводимость газов под действием электрических сил, но сталкивался с трудностью найти какой-либо такой метод создания проводимости, который был бы эффективным и надежным. Новые лучи снимали это затруднение... Эксперименты, которые были невозможно трудными до открытия лучей, становились легкими». Результатом этих «легких экспериментов» стало открытие Томсоном (весной 1897 года) электрона.

Б. Е. Явелов

Традиционный праздник юных математиков

Праздник юных математиков в гостеприимной столице Советской Аджарии — г. Батуми — уже давно стал традиционным. Каждый год на осенние школьные каникулы сюда съезжаются юные математики из разных концов нашей страны. Организаторы праздника — Совпроф Аджарии, Министерство просвещения Аджарской АССР, Аджарское отделение Всесоюзного общества «Знание», обком профсоюза работников просвещения, городской отдел народного образования и горком комсомола, Батумский республиканский Дворец пионеров и школьников, средние школы № 7 и 22, школа-интернат № 2 — постарались сделать программу праздника более интересной и разнообразной, чем в предыдущие годы.

Центральное место праздника — конференция, на которой авторитетное жюри, состоящее из математиков и педагогов, и юные гости праздника заслушивают доклады и участвуют в их обсуждении. В этом году на долю жюри, возглавляемого профессором Тбилисского государственного университета Н. Кахниашвили, выпала большая нагрузка — в пяти секциях было заслушано рекордное число докладов (около 60). Интересные доклады представили учащиеся московских школ № 444, 57 и 91. К лучшим докладам жюри отнесло доклады десятиклассника ленинградской школы № 45 Р. Алексеева «О некоторых циклических иеравенствах», учащегося ленинградского ПТУ № 253 М. Михеева «Измерение радиуса шара маленьким циркулем и линейкой», свердловского десятиклассника Ф. Толстова «Интерпретатор языка РАПИРА для ЕС ЭВМ», десятиклассника Ереванской ФМШ № 1 В. Степанова «Сходимость последовательностей», ученика 444-й школы А. Ермакова об алгоритме игры «Быки и коровы». Ряд интересных докладов был представлен батумскими школьниками.

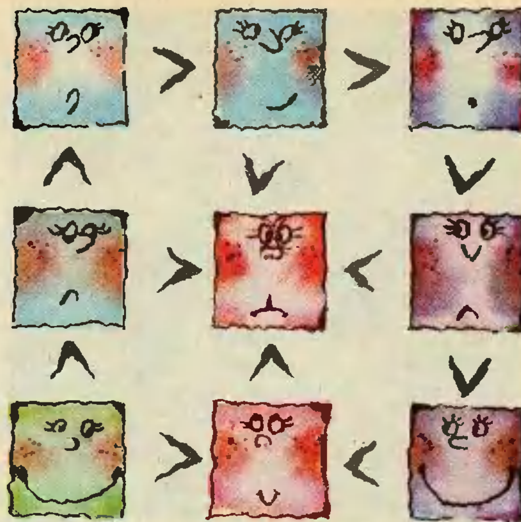
И, как всегда, наибольший интерес вызвал традиционный математический КВН. Начался КВН приветствием, затем команды дали небольшие представления на тему «Математика в путешествии» — таким было «домашнее задание». После этого 12 командам — участникам КВН — были предложены самые разные конкурсы: на лучшее стихотворение с заданными рифмами, лучшую обложку для журнала «Квант», лучшую задачу в «Квант» для младших школьников», ну и, конечно, много математических задач.

Среди них были и задачи-шутки: *Человек родился 1 июня 40 г. до н. э., а умер 1 июня 40 г. н. э. Сколько лет он прожил?* (ответ: 79 лет — не было нулевого года). Были и более серьезные задачи: *Расположить 6 точек на плоскости так, чтобы любые три из них образовывали равнобедренный треугольник* (ответ: эти шесть точек — вершины и центр правильного пятиугольника).

КВН закончился конкурсом капитанов, победителем которого стал капитан команды г. Риги Ю. Антимиров. Прекрасно выступил и капитан команды г. Батуми А. Смирнов: он был единственным, давшим верный ответ на одно из трех заданий конкурса капитанов: *на какое наибольшее число частей могут разделить пространство четыре плоскости, проходящие через одну точку* (ответ: 14), и этим вывел свою команду на первое место. В итоге первое место на КВН поделили команды Батуми и Баку, второе — команды школы № 57 Москвы и Свердловска, третье — команды Ленинградского ПТУ и Риги.

Программа праздника была очень насыщенной. Школьники побывали в Ахалшенском совхозе, совершили экскурсии в Ботанический сад, дельфинарий, Цихисдзири и Государственный музей Аджарии. В программу праздника входила и встреча с редакцией журнала «Квант», на которой хозяева и гости праздника поздравили наш журнал с юбилеем — пятнадцатилетием выхода в свет первого иомера «Кванта». С интересной программой выступили на вечере занимательной математики бакинцы. Накануне торжественного закрытия состоялся традиционный «Огонек дружбы» — один из самых символических пунктов программы. Все присутствующие выразили горячую признательность инициатору и вдохновителю этого замечательного слета юных математиков — заслуженной учительнице республики Медее Илларионовне Жгенти.

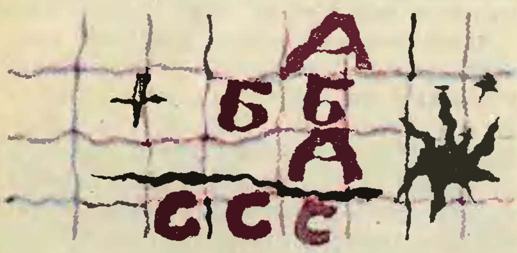
Н. Б. Васильев,
В. Л. Гутенмахер,
Б. М. Ивлев



Задачи

1. Впишите в квадратики (см. рисунок) цифры от 1 до 9 так, чтобы выполнялись *указанные неравенства*.

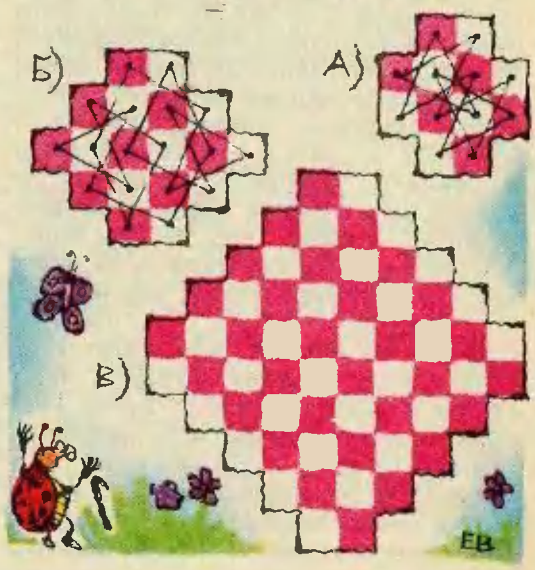
2. Расшифруйте числовой ребус:



3. Маша и Павлик купили по порции мороженого и принесли его домой. Павлик положил свое мороженое в блюдце на стол, а Маша поставила свое мороженое под струю вентилятора. Чье мороженое дольше не растает?

4. Коля и Витя, гуляя по парку, набрели на большую поляну, окруженную липами. Коля пошел вокруг поляны, считая деревья. Витя сделал то же, но начал с другого дерева (хотя пошел в ту же сторону). Дерево, которое у Коли было двадцатым, у Вити было седьмым, а дерево, которое у Коли было седьмым, у Вити было девяносто четвертым. Сколько деревьев росло вокруг поляны?

5. На рисунках А) и Б) указаны замкнутые обходы клеток на двух фигурах шахматным конем. Используя эти рисунки, постройте замкнутый обход шахматным конем всех клеток фигуры, изображенной на рисунке В).



Эти задачи нам предложили Л. П. Мочалов, С. Н. Олехник, А. П. Савин, Г. А. Гальперин, Н. И. Авилов.

О всемирном тяготении, приливах и отливах

Доктор педагогических наук
Н. А. РОДИНА

В одной из книг, посвященных путешествиям, описано такое грандиозное явление: в часы приливов в лагуну одного из островов Альдабра (эти острова лежат в заливе Индийского океана у восточных берегов Африки) устремляются мощные потоки воды; в проливе, соединяющем лагуну с океаном, скорость течения достигает 25 км/ч, а масса втекающей воды составляет несколько миллиардов тонн. В часы отливов вода устремляется назад, в океан, дно лагуны обнажается почти на две трети, и на отмелях бродят тысячи птиц, выискивающих добычу.

Какие же колоссальные силы «выплескивают» воду из лагуны в часы отлива и поднимают ее во время прилива? Это силы всемирного тяготения.

Часто говорят, что Ньютон пришел к мысли о существовании сил притяжения между всеми телами природы, наблюдая падение яблока на Землю. Но открытие и изучение силы тяготения имеет сложную историю.

Еще ученые первых греческих школ (V—IV в. до н. э.) утверждали, что «подобное стремится соединиться с подобным». В течение всего средневековья эта идея поддерживалась аналогией с притяжением магнитов.

Много замечательных имен мы встретим, изучая историю становления учения о всемирном тяготении. Это и Тихо Браге, в течение двадцати лет наблюдавший планеты солнечной системы и оставивший многочисленные точные данные об их движении, и Иоганн Кеплер, установивший на основе этих данных законы движения планет и высказавший мысль о том, что причиной вращения Луны вокруг Земли является притяжение, и Галилео Галилей, открывший спутники Юпитера, и многие другие. Но мы обратимся к работам Ньютона, которому принадлежит открытие закона всемирного тяготения.

«Лабораторией» для Ньютона служил космос, телами, с которыми он проводил «опыты»,— Солнце и планеты солнечной системы. Изучая данные о движении планет, он пришел к выводу, что во всех случаях тело, находящееся в центре (Солнце по отношению к планетам и планеты по отношению к своим спутникам), действует на обращающееся вокруг него тело с некоторой силой, которая и удерживает тело на орбите. Очень важным, решающим для установления закона всемирного тяготения был сделанный им вывод: *сила*, удерживающая небесное тело на орбите, *обратно пропорциональна квадрату расстояния от центрального тела*.

А следующее положение, установленное Ньютоном, гласит: «Тяготение существует ко всем телам вообще и пропорционально массе каждого из тел».

Итак, все тела притягиваются друг к другу. Но если тяготение — свойство всех тел, то почему в нашей обыденной жизни мы замечаем только одно его проявление — притяжение тел Землей (и замечаем ощутимо, когда несем тяжелый груз!)? Почему, сидя за партой рядом с товарищем, мы не ощущаем взаимного притяжения?

На это отвечает Ньютон: «Если кто возразит, что все тела, находящиеся у нас, по этому закону должны бы тяготеть друг к другу, тогда как такого рода тяготение совершенно не ощущается, то я на это отвечу, что тяготение к этим телам, будучи во столько же раз меньше тяготения к Земле, во сколько раз масса тела меньше массы всей Земли, окажется гораздо меньше такого, которое могло бы быть ощущаемо».

Оказывается, сила, с которой притягивают друг друга два человека, находящиеся на расстоянии в один метр (например, сидящие за одним столом), равна приблизительно 0,00000025 Н.

Значит, силы притяжения, в одном случае удерживающие планеты на орбитах, могут быть в другом случае неощутимо малыми.

Запишем закон всемирного тяготения в виде формулы, введя коэффициент пропорциональности (G), связывающий силу тяготения (F) двух тел с их массами (m_1 и m_2) и расстоянием между ними (r):

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (*)$$

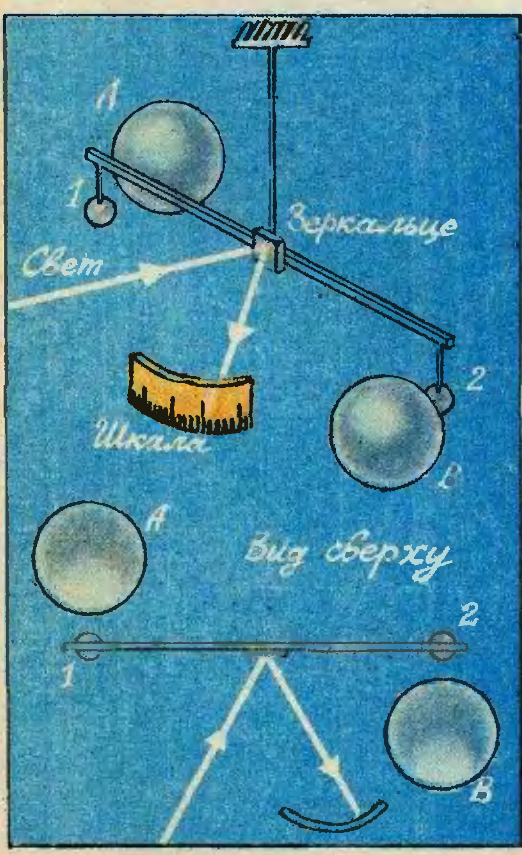


Рис. 1.

Чтобы вычислить силу взаимного притяжения двух тел, нужно знать, чему равен коэффициент G, то есть знать, с какой силой притягиваются друг к другу два тела, имеющие массы, равные единице, на расстоянии, равном единице.

Коэффициент этот можно определить только опытным путем. Он носит название гравитационной постоянной («гравитация» — латинское слово, в переводе на русский язык — тяжесть). Это первая в истории физики постоянная («константа» по-латыни), первая в семье констант, которые называют универсальными, то есть одинаковыми для всех тел природы. Ньютон ввел эту константу в науку, но не он определил ее значение.

Трудности определения постоянной тяготения обусловлены тем, что гравитационное притяжение тел, используемых в лабораторных опытах, «безнадежно» мало, и для его измерения нужны тончайшие приемы.

...Английский ученый Генри Кавендиш столь тщательно выполнял научные измерения, что его добросовестность даже отмечена в истории физики. Свои работы он публиковал только тогда, когда полностью был уверен в правильности и точности полученных результатов. Возможно, именно столь высокая требовательность к себе привела к тому, что о многих открытиях Кавендиша (и очень важных для науки открытиях!) узнали почти через сто лет после того, как они были сделаны им, при изучении его записей.

Именно Генри Кавендиш в 1798 году определил в условиях лаборатории гравитационную постоянную. Схема установки, которой он пользовался, изображена на рисунке 1.

Два небольших свинцовых шара (*1* и *2*) были прикреплены к концам легкого стержня, подвешенного за середину на длинной тонкой нити. К этим шарам подносились большие шары (*A* и *B*). Шары притягивались, стержень поворачивался и закручивал нить. Закручивание прекращалось, когда действие силы упругости нити уравновешивалось действием силы тяготения между большим и малым шаром. А какова сила упругости нити при разных углах закручивания — это Кавендиш измерил заранее. Так

(Окончание см. на с. 34)

Фестиваль задач

На рисунке изображен календарь на месяц. В этом календаре выделен квадрат 3×3. Легко проверить, что этот квадрат — «магический»: в нем суммы чисел по каждой из диагоналей равны суммам чисел в среднем столбце и средней строке. Покажите, что то же самое верно для любого квадрата 3×3, выделенного в календаре.

Великобритания

Три грации, имевшие по одинаковому числу плодов, встретили девять муз. Каждая из граций отдала каждой из муз по одинаковому числу плодов. После этого у каждой музы и у каждой грации стало по одинаковому числу плодов. Сколько плодов было у каждой грации до встречи с музами, если всего плодов у них было не больше 70?

Греция

Расшифруйте арифметический ребус: *LEONARD*−1232551=*EULER*.

ГДР

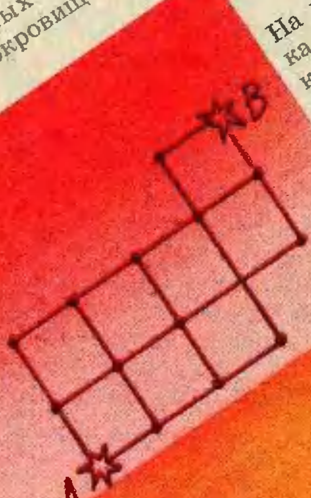
− LEONHARD
12325551
EULER

Некто взял из сокровищницы 1/5 часть того, что там было. Из того, что осталось, другой взял 1/6 часть; оставил же он в сокровищнице 150 золотых монет. Сколько монет было в сокровищнице первоначально?

Египет

На рисунке изображен план поселка, в котором живут Янек и Марженка. Янек живет в доме, отмеченном буквой *A*, Марженка живет в доме, отмеченном буквой *B*. Из рисунка видно, что быстрее всего Янек доберется до Марженки, пройдя семь кварталов (все кварталы одинаковой длины). Подсчитайте, сколько имеется различных кратчайших путей от дома Янека до дома Марженки.

Чехословакия



Парусник, пароход и теплоход ...
вались «Вашингтон», «Линко...
«Джефферсон», но не обяза...
таком порядке. Порты их ...
ния и прибытия в алфа...
рядке: Бермуды, Босто...
Лондон, Ньюпорт и Нью...
но, что:
а) теплоход проплы...
идущего на Берму...
б) «Линкольн» п...
в тот же день, ...
вился из Лондо...
в) «Вашингто...
Йорка на во...
стон, хотя ...
направил...
Как наз...
откуда ...

Числа a, b, c — длины сторон треугольника. Известно, что эти числа удовлетворяют соотношениям $a=x^2+x+1$, $b=2x+1$, $c=x^2-1$. Покажите, что один из углов треугольника равен 120°.

Бельгия

Одна...
про...
ни...
в ...

Однажды первый вторник месяца я провел в Ленинграде, а первый вторник после первого понедельника — в Риге. В следующем месяце я первый вторник провел в Пскове, а первый вторник после первого понедельника — во Владимире. Какого числа и какого месяца я был в каждом из городов?

СССР

Расшифруйте арифметический ребус: SNEG+KRUG=SPORT.

Югославия

$$\begin{array}{r} +\,SNEG \\ KRUG \\ \hline SPORT \end{array}$$

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась.
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Сколько же всего, ты скажешь,
Обезьян там было в роще?

Индия

...лоход назы-
...Линкольн» и
...обязательно в
...ы их отправле-
... алфавитном по-
Бостон, Галифакс,
и Нью-Йорк. Извест-
..., мимо корабля,
...роплыл мимо Галифакс
...Бермуды;
...ьн» прибыл в Галифакс
...день, когда пароход отпра-
...Лондона;
...ингтон» отправился из Нью-
...на всех парусах, но не в Бо-
... хотя один из других кораблей,
...равился туда.
...ак назывался каждый из кораблей,
...откуда он отправился и куда плыл?

США

Найдите четырехзначное число, являющееся полным квадратом, у которого первые две цифры одинаковы и последние две цифры одинаковы.

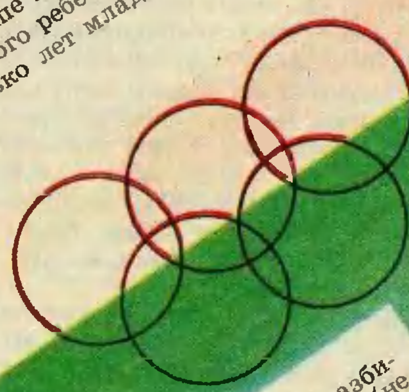
Польша

В семье шестеро детей. Пятеро из них соответственно на 2, 6, 8, 12 и 14 лет старше младшего, причем возраст каждого ребенка — простое число. Сколько лет младшему?

Австралия

Из Варны в Софию со скоростью 75 км/ч отправилась легковая машина. Через 20 минут из Варны по тому же пути отправилась другая машина со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от Варны вторая машина догонит первую?

Болгария



Пять олимпийских колец разбивают плоскость на 15 частей (не считая бесконечной части). Разместите в этих частях по одному числу из набора от 1 до 15 так, чтобы сумма чисел внутри каждого круга равнялась 39.

Австрия

(Начало см. на с. 30)

что теперь по углу закручивания нити можно было определить силу, с которой притягивались друг к другу большие и маленькие шары.

Зная силу притяжения между телами, их массы и расстояние между ними, можно вычислить гравитационную постоянную: так как $F=G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, то $G=\frac{Fr^2}{m_1 m_2}$. В опытах Кавендиша масса малого шара была $m_1=0{,}73$ кг, масса большого шара — $m_2=158$ кг. Кавендиш нашел, что $G=6{,}71\times10^{-11}$ Н · м^2/кг^2. А по современным данным гравитационная постоянная равна $G=6{,}672\cdot10^{-11}$ Н · м^2/кг^2.

Теперь по формуле (*) можно вычислить любую входящую в нее величину по другим, известным величинам. Следует, однако, учитывать, что наиболее точно закон выполняется в тех случаях, когда тела имеют форму шара (и тогда r в формуле (*) — это расстояние между центрами шаров) и когда линейные размеры тел много меньше расстояния между ними.

Например, вы хотите подсчитать силу, с которой ваше тело притягивается к Земле. В формулу (*) нужно подставить расстояние между центром Земли и вашим телом (о «центре тела» не будем говорить, так как размеры любого тела на Земле, даже самой высокой горы, несоизмеримо малы по сравнению с размерами Земли; поэтому за расстояние между телами принимают радиус Земли).

Проведем подсчет для тела массой 40 кг. Для подсчета нужно знать массу Земли — она равна $6\cdot10^{24}$ кг — и радиус Земли — 6400 км, или $6{,}4\cdot10^6$ м. Подставляя в формулу (*) числовые данные, получаем:

$$F=6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}\times\frac{6\cdot10^{24}\ \text{кг}\cdot40\ \text{кг}}{(6{,}4\cdot10^6\ \text{м})^2}\approx390\ \text{Н}.$$

Мы определили силу, с которой тело притягивается Землей, то есть силу тяжести, действующую на тело, находящееся на Земле. Но из учебника физики для 6 класса (с. 50) известно, что силу тяжести можно вычислить проще: она равна 9,8 Н/кг · 40 кг $\approx$ $\approx$ 390 Н. Случайно ли это совпадение? Конечно, нет.

Вспомним, что коэффициент 9,8 Н/кг в формуле, написанной в учебнике, означает, что на тело массой в 1 кг действует на поверхности Земли сила, равная 9,8 Н. А теперь внимательно посмотрите на запись закона всемирного тяготения. Вычисляя силу тяготения между любым телом на Земле (телом любой массы m) и Землей, мы каждый раз будем подставлять в формулу (*) одни и те же значения следующих величин: постоянной G, массы Земли $m_З$ и ее радиуса $r_З$. Значит, для всех тел одинаково и выражение $G\frac{m_З}{r_З^2}$. Подсчитайте его:

$$6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2\cdot\frac{6\cdot10^{24}\ \text{кг}}{(6{,}4\cdot10^6\ \text{м})^2}=$$

$=$...; особенно внимательно подумайте над его наименованием и объясните замеченное совпадение.

Чтобы проверить, хорошо ли вы поняли закон всемирного тяготения, решите такую задачу: почему сила тяжести на планете Меркурий почти в 4 раза больше, чем на Земле, хотя масса Меркурия составляет всего 0,055 от массы Земли? (Если вы найдете ответ, то убедиться в его правильности вы сможете, воспользовавшись справочником, например «Справочником по физике и технике», автор которого — А. С. Енохович. Второе издание этого справочника выпущено издательством «Просвещение» в 1983 году.)

Закон всемирного тяготения сыграл огромную роль в развитии науки и техники. С его помощью были открыты две планеты Солнечной системы — Нептун и Плутон, его используют при расчете скоростей, необходимых для запуска космических кораблей и спутников, расчете их траекторий, для осуществления точной посадки автоматических станций на другие планеты...

Но вернемся к лагуне на островах Альдабра, к приливам и отливам.

Причина возникновения приливов и отливов — всемирное тяготение, а «главный виновник» этого явления — наш спутник Луна.

Будем считать, что вода распределена по Земле тонким слоем. Так как сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния между

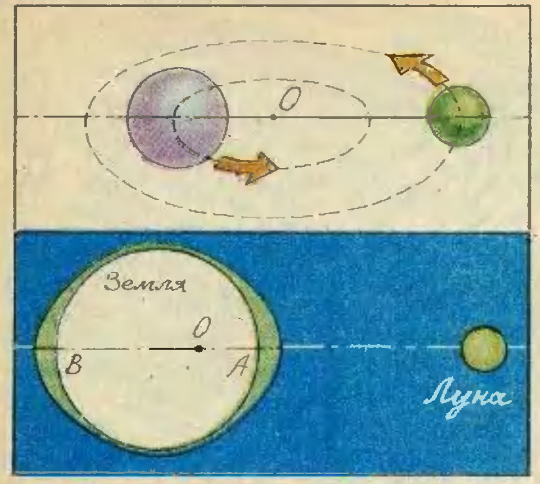


Рис. 2.

телами, вода, находящаяся вблизи точки *A* (рисунок 2), притягивается Луной сильнее, чем вода, находящаяся вблизи точки *B*. Казалось бы, в результате этого вода должна перетечь на «лунную» сторону Земли, где образуется водяной горб. Так как Земля вращается вокруг своей оси, в каждом месте вода будет раз в сутки подниматься (прилив) и опускаться (отлив). Однако в действительности *и приливы, и отливы происходят два* раза в сутки. Почему же это так?

Причина в том, что Земля и Луна не неподвижны друг относительно друга. Представьте себе два шарика — тяжелый и легкий,— соединенные нитью и лежащие на гладкой горизонтальной поверхности. Легкий шарик можно привести во вращение вокруг тяжелого. Однако тяжелый шарик при этом не останется на месте — его центр тоже будет двигаться по окружности, правда, небольшого радиуса (см. рисунок 2). Неподвижной остается только некоторая точка *O* на линии вдоль натянутой нити, расположенная вблизи тяжелого шарика (ее называют центром масс системы). Вокруг этой точки и происходит вращение как тяжелого, так и легкого шарика.

Точно так же Земля и Луна вращаются вокруг некоторой точки, которая, вследствие того, что Земля гораздо массивнее Луны, оказывается даже лежащей внутри Земли (но не в ее центре). Центр Земли вращается вокруг этой точки, а вода на поверхности Земли отбрасывается от центра вращения. Это приводит к тому, что и на противоположной Луне стороне Земли образуется водяной горб. Поверхность океана принимает удлиненную форму, вытянутую в направлении Луны и (немного меньше) в прямо противоположном направлении. Так как Земля вращается и вокруг собственной оси, «двугорбая» приливная волна «бежит» по поверхности Земли. В тех областях, которые оказываются посередине между горбами, наблюдаются отливы.

Изучение приливов связано со многими трудностями. Та упрощенная модель, которую мы рассматривали, далека от реальной картины. Земля, как известно, не шар, она сплюснута у полюсов; вода не распределена равномерно по ее поверхности. Луна при своем движении по орбите оказывается на разных расстояниях от Земли. Свой вклад в приливообразующую силу вносит и Солнце. А взаимное расположение Солнца, Земли и Луны периодически изменяется. Эти и многие другие факторы существенно сказываются на реальной картине образования и движения приливных волн и могут смещать положения водяных горбов, изменять их величину и т. п.

Но главное нам теперь ясно: *причина приливов и отливов — всемирное тяготение.*

Можно с уверенностью сказать, что еще в древности жрецы умели рассчитывать время приливов. Иначе как они могли бы творить «чудеса», которые описаны, например, в сказках Древнего Египта: «...Когда достигли суда канала «Двух рыб», увидели все, что отмели обнажились и дальше продвинуться невозможно. Тогда его величество фараон призвал Джеди и повелел... И Джеди начал произносить над водой магические заклинания. По слову его вода в канале поднялась и покрыла отмели слоем в четыре локтя. И суда фараона двинулись дальше...»

Поросенок и перец

Не скорее ли по внешности он был лакей, а по внутренности — лещ?

С минуту Алиса стояла и смотрела в раздумье на дом. Вдруг из лесу выбежал ливрейный лакей и забарабанил в дверь. (Что это лакей, она решила по ливрее; если же судить по его внешности, это был простой лещ.) Ему открыл ливрейный лакей с круглой физиономией и выпученными глазами, очень похожий на лягушонка.

Лакей-Лещ вынул из-под мышки огромное письмо (величиной с него самого, не меньше) и передал его Лягушонку.

— Герцогине, — произнес он с необычайной важностью.— От Королевы. Приглашение на крокет. Лягушонок принял письмо и важно повторил его слова, слегка изменив их порядок: — От Королевы. Герцогине. Приглашение на крокет.

Затем они поклонились друг другу так низко, что кудри их смешались. Алису такой смех разобрал, что ей пришлось убежать подальше в лес, чтобы они не услышали. Потом она вернулась, подошла к двери и робко постучала.

— Ни к чему стучать, — сказал Лакей. — По двум при-

Почему, если смеяться за деревьями или стучать в дверь при шуме, то тебя вряд ли услышат?

Когда больше содом, когда дым-

...его к потолку, а тот так визжал, что Алиса едва разбирала слова.

— Держи! — крикнула вдруг Герцогиня и швырнула

Не правда ли, что из доказательства Кота следует не то, что он не в своем уме, а то, что он не в уме Пса?

не совался в чужие дела, — хрипло проворчала Герцогиня, — земля бы вертелась быстрее!

— Ничего хорошего из этого бы не вышло, — сказала Алиса, радуясь случаю показать свои знания. — Только представьте себе, что бы сталось с днем и ночью. Ведь земля совершает оборот за двадцать четыре часа...

— Оборот? — повторила Герцогиня задумчиво. И, повернувшись к кухарке, прибавила: — Возьми-ка ее в оборот!

— Кажется, за двадцать четыре, — продолжала задумчиво Алиса, — а может, за двенадцать?

— Оставь меня в покое, — сказала Герцогиня. — С числами я никогда не ладила!

Тут она запела колыбельную и принялась качать младенца. Она подбрасывала

Не потому ли вконец окосел мартовский Заяц, что лучи весеннего мартовского солнца слишком косые?

КОРОМЫСЛОМ ИЛИ КОГДА-СТОЛБОМ?

чинам ни к чему. Во-первых, я с той же стороны двери, что и ты. А во-вторых, они там так шумят, что никто тебя все равно не услышит. И правда, в доме стоял страшный шум: кто-то визжал, кто-то чихал, а временами слышался оглушительный звон, будто там били посуду.
— Скажите, пожалуйста,— спросила Алиса,— как мне попасть в дом? — Ты бы еще могла стучать,— продолжал Лягушонок, не отвечая на вопрос,— если б между нами была дверь. Например, если б ты была там, ты бы постучала, и я бы тогда тебя выпустил.
— Как мне попасть в дом? — повторила Алиса громче.
— А стоит ли туда попадать? — сказал Лягушонок.— Вот в чем вопрос. «Как они любят спорить, эти зверюшки! — подумала она.— С ума сведут своими разговорами!» А Лягушонок, видно, решил, что сейчас самое время повторить свои замечания с небольшими вариациями.— Так и буду здесь сидеть,— сказал он,— день за днем, месяц за месяцем...
— Что же мне делать? — спросила Алиса.— Что хочешь,— ответил Лягушонок и засвистал. «Нечего с ним разговаривать,— с досадой подумала Алиса.— Он такой глупый!» Она толкнула дверь и вошла. В просторной кухне стоял дым столбом; посредине на колченогом табурете сидела Герцогиня и качала младенца; кухарка у печи склонилась над огромным котлом, до краев наполненным супом. «В этом супе слишком много перцу!» — подумала Алиса. Она расчихалась и никак не могла остановиться. Во всяком случае в воздухе перцу было слишком много. Даже Герцогиня время от времени чихала, а младенец чихал и визжал без передышки. Только кухарка не чихала, да еще огромный кот, что сидел у печи и улыбался до ушей.— Скажите, пожалуйста, почему это ваш кот так улыбается? — спросила Алиса робко.— Потому,— сказала Герцогиня.— Это Чеширский Кот — вот почему!— Я и не знала, что Чеширские Коты всегда улыбаются,— сказала Алиса. Пока Алиса размышляла, о чем бы еще поговорить, кухарка сняла котел с печи и, не тратя попусту слов, принялась швырять все, что попадало ей под руку. Полетели совок, кочерга, щипцы для угля. За ними последовали чашки, тарелки и блюдца.— Осторожней, прошу вас,— закричала Алиса. В эту минуту прямо мимо младенца пролетело огромное блюдо.— Если бы кое-кто

КОГДА В ВОЗДУХЕ БОЛЬШЕ ПЕРЦУ, КОГДА СУП ГОРЯЧИЙ ИЛИ КОГДА ОН ХОЛОДНЫЙ?

ПРАВДА ЛИ, ЧТО ДАЛЬШЕ БРОСИТЬ ТАРЕЛКУ ЛЕГЧЕ, ЧЕМ ЧАШКУ? ПОЧЕМУ?

КОГДА СИЛЬНЕЕ ЗАХВАТЫВАЛО ДУХ У МЛАДЕНЦА, ПРИ ПОЛЁТЕ ВВЕРХ ИЛИ ВНИЗ?

SECRET

SECRET

...тобой возиться не буду. Так и знай! Она вгляделась ему в лицо и ясно увидела — это был самый настоящий поросенок! Алиса опустила его на землю, он затрусил прочь. «Если бы он немного подрос,— из него бы вышел весьма неприятный ребенок. А как поросенок он очень мил!» подумала она и вздрогнула. В нескольких шагах от нее сидел на ветке Чеширский Кот. Завидев Алису, Кот только улыбнулся.— Котик! Чешик! — робко начала Алиса.— Скажите, пожалуйста, куда мне отсюда идти? — А куда ты хочешь попасть? — ответил Кот. — Мне все равно...— сказала Алиса.— Тогда все равно, куда и идти,— заметил Кот.— ...только бы попасть куда-нибудь,— пояснила Алиса.— Куда-нибудь ты обязательно попадешь,— сказал Кот.— Нужно только достаточно долго идти.

С этим нельзя было не согласиться. Алиса решила перевести разговор.— А что здесь за люди живут? — спросила она.— Вон там,— сказал Кот и махнул правой лапой,— живет Шляпных Дел Мастер. А там,— и он махнул левой,— живет Мартовский Заяц. Оба не в своем уме.— Почему? — спросила Алиса.— Мастер столько возился с болванками для шляп, что совсем оболванился. Теперь все зовут его просто Болванщик. Ну, а Мартовский Заяц вконец окосел от весеннего мартовского солнца...— На что мне безумцы? — сказала Алиса.— Ничего не поделаешь,— возразил Кот. Все мы здесь не в своем уме — и ты, и я! — Откуда вы знаете, что я не в своем уме? — спросила Алиса.— Конечно, не в своем,— ответил Кот.— Иначе как бы ты здесь оказалась? — А откуда вы знаете, что вы не в своем уме? — Начнем с того, что пес в своем уме. Согласна? — Допустим,— согласилась Алиса.— Дальше,— сказал Кот.— Пес ворчит, когда сердится, а когда доволен, виляет хвостом. Ну а я ворчу, когда я доволен, и виляю хвостом, когда сержусь. Следовательно, я не в своем уме. Ты играешь сегодня в крокет у Королевы? — Мне бы очень хотелось,— сказала Алиса,— но меня еще не пригласили. — Тогда до вечера,— сказал Кот и исчез. Вдруг он снова возник на том же месте.— Кстати, что сталось с ребенком? — сказал Кот.— — Он превратился в поросенка,— отвечала Алиса и глазом не моргнув.

— В поросенка или гусенка? — спросил Кот. — Я сказала в поросенка,

Алисе младенца.
— Можешь покачать его немного. А мне надо пойти и переодеться к крокету у Королевы. С этими словами она выбежала из кухни. Кухарка швырнула ей вдогонку кастрюлю, но промахнулась. «Если я не возьму малыша с собой,— подумала Алиса,— они через денек-другой его прикончат. Оставить его здесь — просто преступление!» Последние слова она произнесла вслух, и младенец тихонько хрюкнул в знак согласия (чихать он уже перестал). — Не хрюкай,— сказала Алиса.— Выражай свои мысли как-нибудь по-другому! «Может, он просто всхлипнул»,— подумала она и посмотрела

ему в глаза, нет ли там слез.— Вот что, мой милый,— сказала Алиса серьезно,— если ты собираешься превратиться в поросенка, я с

— ответила Алиса.
— А можете вы исчезать и появляться не так внезапно? А то у меня голова идет кругом.— Хорошо,— сказал Кот и исчез, на этот раз очень медленно. Первым исчез его кончик хвоста, а последней — улыбка; она долго еще парила в воздухе, когда все остальное уже пропало. «Д-да! — подумала Алиса.— Видала я котов без улыбок, но улыбка без кота! Такого я в жизни еще не встречала». Пройдя немного дальше, она увидела домик Мартовского Зайца.
Ошибиться было невозможно — на крыше из заячьего меха торчали две трубы.

1. В стране чудес живут рыцари, всегда говорящие правду, нормальные особы, которые иногда говорят правду, а иногда лгут, и лжецы, которые лгут всегда, причем рыцари считаются особами более высокого ранга, чем нормальные люди и лжецы, а нормальные люди выше по рангу, чем лжецы. Лягушонок заявил Алисе, что Герцогиня выше его по рангу. Кем был Лягушонок: рыцарем, лжецом или нормальным?

2. Попробуйте выяснить, кем была Герцогиня.

3. Чеширский Кот однажды заявил, что он по рангу ниже кухарки, а та в ответ крикнула: «Неправда!» Какого ранга Чеширский Кот и кухарка?

4. Три обитателя страны чудес, принадлежащие к разным рангам, однажды заявили: А: я нормальный; В: это правда; С — я не нормальный. Кем были А, В и С?

5. Король страны чудес однажды спросил у представших перед ним трех подданных, кто они по рангу. Лещ ответил: «Лягушонок по рангу выше Кролика». Лягушонок сказал: «Кролик выше рангом, чем Лещ». Затем озадаченный король спросил Кролика: «Кто выше рангом: Лещ или Лягушонок?» Что скажет Кролик?

задачник кванта

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M936, M937» или «Ф948». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. Фамилию, имя и отчество пишите печатными буквами. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачник по математике этого номера основан на задачах, предлагавшихся в апреле этого года на «Турнире городов».

M936 — M940; Ф948 — Ф952

M936. Докажите, что за $3n+1$ взвешиваний на чашечных весах без гирь можно выделить самый легкий и самый тяжелый из $2n+2$ камней, если: а) $n=3$; б) n — любое натуральное число.

С. В. Фомин

M937. Существует ли такая фигура F, что ею нельзя накрыть полукруг радиуса 1, а двумя ее экземплярами можно накрыть круг радиуса 1, если F: а) произвольная фигура; б) выпуклая фигура?

Н. Б. Васильев, А. Г. Самосват

M938. Радиус круга с центром O равномерно вращается, поворачиваясь за одну секунду на угол $360°/n$ (где n — натуральное число, большее 3). В начальный момент он занимал положение OM_0, через секунду — положение OM_1, еще через 2 секунды — положение OM_2, еще через 3 секунды после этого — положение OM_3 и т. д., еще через $n-1$ секунд — положение OM_{n-1}.

а) Докажите, что если n — степень 2, то радиусы $OM_1, \ldots, OM_{n-1}$ делят круг на n равных секторов.

б) Возможно ли это при других значениях n?

В. В. Произволов

M939. В клетки таблицы 10×10 записывают каким-либо образом цифры 0, 1, ..., 9 так, что каждая цифра встречается 10 раз.

а) Можно ли это сделать так, чтобы в каждой строке и каждом столбце встречалось не более 4 различных цифр?

б)* Докажите, что найдется строка или столбец, в котором встречается не менее 4 различных цифр.

Л. Д. Курляндчик

M940*. а) Квадрат разбит на прямоугольники. Назовем цепочкой такое множество этих прямоугольников, что их проекции на одну из сторон квадрата целиком покрывают эту сторону без перекрытий (рис. 1). Докажите, что любые два прямоугольника входят в некоторую цепочку.

б) Докажите аналогичное утверждение для куба, разбитого на прямоугольные параллелепипеды (в определении цепочки сторону квадрата нужно заменить на ребро куба).

в) Верно ли, что любые два параллелепипеда в разбиении куба принадлежат одному «слою» —

множеству параллелепипедов, проекции которых на некоторую грань заполняют ее целиком, не налагаясь друг на друга?

А. И. Гольберг, В. А. Гурвич

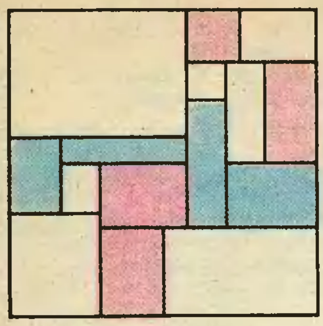


Рис. 1.

Ф948. Известно, что в небольшой «просвет» между машинами, стоящими у тротуара, рекомендуется заезжать задним ходом, а не передним. Почему?

Г. Я. Мякишев

Ф949. Одинаковы ли показания термометров, один из которых помещен у поверхности кипящей жидкости, а другой — в ее глубине?

Т. С. Петрова

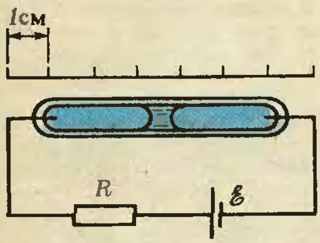


Рис. 2.

Ф950. В запаянной капиллярной трубке находятся два столбика ртути, разделенные капелькой водного раствора электролита HgI_2. Внутренний диаметр трубки $d=0{,}3$ мм. Трубка подключена последовательно с резистором с сопротивлением $R=390$ кОм к батарее с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В (рис. 2). Через какое время капелька сместится на одно деление шкалы (см. рисунок)?

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Ф951. Определить емкость системы конденсаторов, приведенной на рисунке 3. У каждого конденсатора указано значение его емкости, измеренной в микрофарадах.

А. И. Буздин, С. С. Кротов

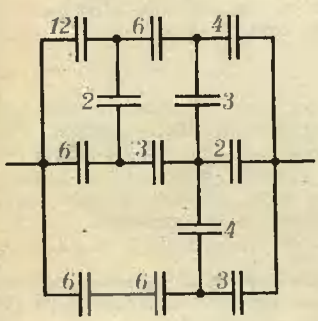


Рис. 3.

Ф952. Наблюдатель рассматривает удаленный предмет и фотографию этого предмета, сделанную из той точки, в которой находится наблюдатель. Что ему кажется бо́льшим — предмет или его фотографическое изображение? Во сколько раз? Фотография была сделана аппаратом, объектив которого имеет фокусное расстояние $F=3$ см; при печатании снимка было сделано увеличение $k=2{,}5$.

Б. С. Рыбин

Problems

M936 — M940; P948 — P952

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes

M936. Prove that $3n+1$ weightings on a plain balance without weights are sufficient to distinguish the lightest and the heaviest of $2n+2$ stones, if a) $n=3$; b) n is any natural number.

S. V. Fomin

M937. Does there exist a plane figure F which does not cover a half disk of radius 1, while two copies suffice to cover a disk of radius 1, if a) F is an arbitrary set; b) a convex one?

N. B. Vasiliev, A. G. Samosvat

M938. The radius of a circle rotates about its centre O, sweeping through an angle of $360°/n$ each second (where n is a natural number greater than 3). At the initial moment the rawithout saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 15 th to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

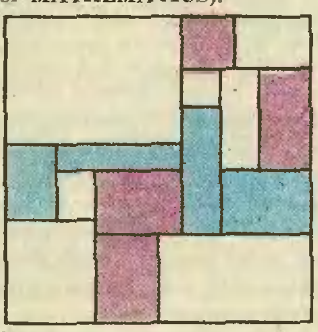


Fig. 1.

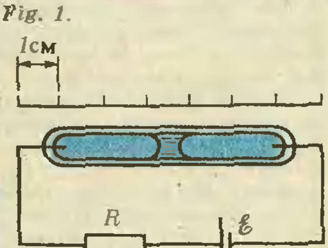


Fig. 2.

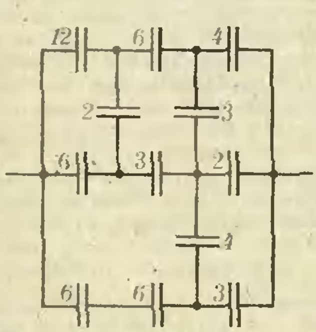


Fig. 3.

dius occupies position OM_0, in a second, position OM_1, in two more seconds, position OM_2, in three more seconds, position OM_3, ets., in $n-1$ seconds more, position OM_{n-1}.

a) Prove that if n is a power of 2, then the radii OM_0, ..., OM_{n-1} divide the disk into n equal parts.

b) Can this happen for other values of n?

V. V. Proizvolov

M939. The entries of a 10 by 10 table are the numbers 0, 1,...,9, each of which appears 10 times.

a) Can it be that no more than 4 different numbers appear in each row and in each column?

b)* Prove that there is always a row or a column with no less than 4 different numbers.

L. D. Kurliandchik

M940*. a) A square is partitioned into rectangles. By a "chain" we mean a collection of these rectangles such that their projections on one of the sides cover it without overlapping (Fig. 1). Prove that any two rectangles are part of at least one chan.

b) Prove a similar statement for the cube partitioned into cuboids (in the definition of chain the word "sides" is changed to "edges").

s) Is it true than any two cuboids in the partition of the cube belong to the same "layer" — a set of cuboids whose projections on one of the faces cover it without overlapping?

A. I. Golberg, V. A. Gurvich

P948. When parking his car in a small space by the curb between two other cars, any experienced driver will move into the space in reverse. Why?

G. Ya. Myakishev

P949. Will two thermometers, one of which is near the surface of a boiling liquid, the other deep inside, show the same temperature?

T. S. Petrova

P950. In a sealed capillary tube, two columns of mercury are separated by a droplet of an electrolyte (HgI_2) solution. The inner diameter of the tube is $d=0.3$ mm. The tube is connected in sequence with a resistor of $R=390$ kOhm to a battery of EMF $\mathscr{E}=10$ V (Fig. 2). How soon will the droplet move by one subdivision of the scale shown on the picture?

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

P951. Determine the capacity of the system of capacitors shown on Figure 3. Each number on the figure shows the capacity of the corresponding capacitor (in microfarads).

A. I. Buzdin, S. S. Krotov

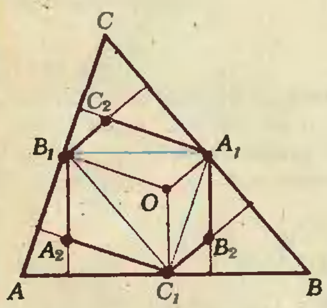
P952. An observer looks at a distant object and a photograph of this object, made from the point of observation. What will seem bigger to him — the object or its picture? By how much? The photograph was taken with a camera of focal distance $F=3$ cm; when it was beeing printed, the enlargement was $k=2.5$.

B. S. Rybin

Решения задач

М916 — М920; Ф927 — Ф932

М916. *Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.*



Обозначим вершины данного треугольника через A, B, C, середины его сторон — A_1, B_1, C_1, три другие вершины рассматриваемого в задаче шестиугольника — A_2, B_2, C_2 (см. рисунок). Заметим, что отрезки, соединяющие центр O описанной окружности треугольника ABC с серединами его сторон, разбивают наш шестиугольник на три параллелограмма $OA_1C_2B_1$, $OB_1A_2C_1$ и $OC_1B_2A_1$ (отрезки OA_1 и B_1C_2 параллельны, так как оба они перпендикулярны стороне BC; аналогично $OB_1 \| A_1C_2$ и т. д.). Отсюда следует, что треугольники $A_1B_1C_2$, $B_1C_1A_2$ и $C_1A_1B_2$ соответственно равны треугольникам A_1B_1O, B_1C_1O и C_1A_1O, а значит, площадь шестиугольника вдвое больше площади треугольника $A_1B_1C_1$, очевидно, равной четверти площади исходного треугольника.

Другое доказательство опирается на то, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке: A_2, B_2 и C_2 — это точки пересечения высот равных треугольников AB_1C_1, C_1A_1B и B_1CA_1, отсюда $\triangle A_2B_1C_1=\triangle C_2CA_1$, $\triangle B_2A_1C_1=\triangle C_2CB_1$, следовательно, наш треугольник равновелик параллелограмму $C_1A_1CB_1$.

Отметим, что в случае тупоугольного треугольника аналогичное построение приводит к самопересекающейся шестизвенной ломаной, для которой утверждение останется в силе, если рассматривать так называемую «ориентированную площадь» (см. статью А. Л. Тоома «Сколько площадей у многоугольника?» в «Кванте» № 12 за 1984 г.).

А. А. Азамов

М917. *а) Чему равна длина максимальной серии идущих подряд несчастливых билетов? б) Сколько существует таких серий максимальной длины? (Считается, что номера билетов изменяются от 000000 до 999999 включительно; билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме трех последних цифр.)*

а) Ответ: 1000. Любой номер билета находится между двумя счастливыми номерами, равными $1000N+N$ и $1000(N+1)+(N+1)$ (N и $N+1$ — трехзначные числа), у которых три первые цифры совпадают, с учетом порядка, с тремя последними (для номера, равного $1000A+B$, где A и B — трехзначные числа, надо взять $N=A$, если $A<B$, и $N=A-1$, если $A\geqslant B$). Поскольку разность этих счастливых номеров равна 1001, длина серии несчастливых билетов не может быть больше 1000. В то же время две серии длины 1000 — от 000001 до 001000 и от 998999 до 999998, очевидно, состоят из несчастливых номеров.

б) Ответ: две серии; они приведены в решении задачи а).

Покажем, что между любыми двумя счастливыми номерами $n=\overline{abcabc}$ *) и $n'=n+1001=$

*) Черта означает десятичную запись: $\overline{a_1a_2...a_n}=a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+...+a_n$.

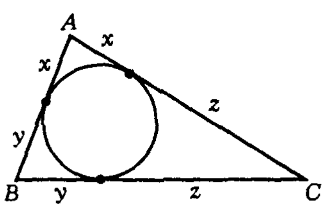
$=\overline{a'b'c'a'b'c'}$ ($\overline{a'b'c'}=\overline{abc}+1$) при $\overline{abc}\neq 000$ и $\overline{abc}\neq 998$ имеется еще хотя бы один счастливый номер. Отсюда, очевидно, следует, что других «несчастливых серий» длины 1000, кроме указанных выше, не существует.

Если $a\neq 9$, $c\neq 0$, то таким номером является $\overline{abc(a+1)b(c-1)}$; если $a=9$, то и $a'=9$, а нужный номер — $\overline{a'b'c'8b_1c_1}$, где число $\overline{b_1c_1}$ получено увеличением на 1 одной из цифр числа $\overline{b'c'}$ ($\overline{b'c'}\neq 99$); если $c=0$, то $c'=1$ и нужный номер — $\overline{a'b'c'a_2b_2 2}$, где $\overline{a_2b_2}$ получено из $\overline{a'b'}$ уменьшением одной из цифр на 1 ($\overline{a'b'}\neq 00$).

С. Ю. Оревков

◆

М918.* *Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а длины его сторон — целые числа. Докажите, что эти числа — 3, 4 и 5.*



Пусть в данном треугольнике ABC длины сторон AB, BC и CA равны c, a и b, тогда, как легко видеть, отрезки сторон от вершин A, B, C до точек касания вписанной окружности со сторонами равны

$$x=\frac{b+c-a}{2},\quad y=\frac{c+a-b}{2},\quad z=\frac{a+b-c}{2} \qquad (1)$$

(обозначения см. на рисунке). При этом полупериметр p треугольника равен $x+y+z$. Приравнивая выражения для площади S треугольника по формуле Герона —

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

и через полупериметр и радиус $r=1$ вписанной окружности —

$$S=pr,$$

получим, что $p=(p-a)(p-b)(p-c)$ или

$$x+y+z=xyz. \qquad (2)$$

Из равенств (1) следует, что числа x, y и z либо все одновременно целые, либо полуцелые (то есть вида $n+1/2$, где n — целое). Во втором случае числа $2x$, $2y$ и $2z$ должны были бы быть нечетными, что невозможно в силу равенства (2) ($2x\cdot 2y\cdot 2z=4(2x+2y+2z)=4(a+b+c)$ — нечетное число равно четному), и, таким образом, мы должны решить уравнение (2) в целых числах.

Пусть для определенности $x\leqslant y\leqslant z$, тогда $xyz\leqslant 3z$, то есть $xy\leqslant 3$. Перебирая пары натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих этому неравенству (и условию $x\leqslant y$), получим, что либо $x=y=1$, и тогда $2+z=z$, что невозможно; либо $x=1$, $y=2$, и тогда $3+z=2z$, то есть $z=3$; либо $x=1$, $y=3$ и $z=2<y$, что противоречит нашему предположению. Итак, $x=1$, $y=2$, $z=3$, то есть $a=y+z=5$, $b=z+x=4$, $c=x+y=3$.

В. В. Прасолов

◆

М919. *а) Докажите равенство*

$$\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg} x\,dx+\int_0^1\operatorname{arctg} x\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

Если f и g — взаимно обратные функции, то уравнения $y=f(x)$ и $x=g(y)$ задают на координатной плоскости Oxy одну и ту же линию — график функции f. На этом соображении основано решение как *б)* Докажите неравенство*

$$9<\int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx+\int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx<9{,}0001.$$

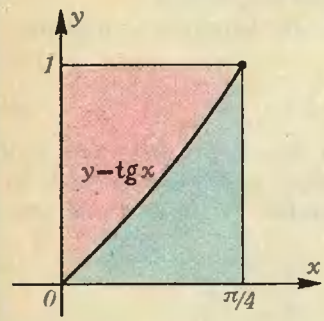


Рис. 1.

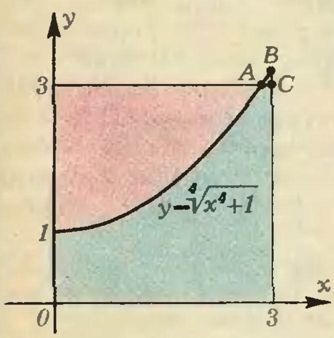


Рис. 2.

задачи а), так и задачи б).

а) На рисунке 1 изображен график функции $y=\mathrm{tg}\,x$, где $x\in[0;\ \pi/4]$. Ту же линию можно задать уравнением $x=\mathrm{arctg}\,y$, где $y\in[0;\ 1]$. Поэтому первое слагаемое в левой части доказываемого равенства — это площадь голубой фигуры на рисунке 1, а второе слагаемое, которое можно записать в виде $\int_0^1 \mathrm{arctg}\,y\,dy$, — площадь розовой фигуры. Сумма этих площадей есть площадь прямоугольника, ограниченного осями координат и прямыми $x=\frac{\pi}{4}$, $y=1$, а эта площадь равна $\frac{\pi}{4}$.

б) Если $y=\sqrt[4]{x^4+1}$, где $x\geqslant 0$, то $y^4=x^4+1$, откуда $x=\sqrt[4]{y^4-1}$. На рисунке 2 изображен график функции $y=\sqrt[4]{x^4+1}$, где $x\in[0;\ 3]$. Эта же линия задается уравнением $x=\sqrt[4]{y^4-1}$, где $y=[1;\ \sqrt[4]{82}]$.

Первое слагаемое в левой части доказываемого неравенства — это площадь голубой фигуры на рисунке 2, а второе слагаемое, которое можно представить в виде $\int_1^3 \sqrt[4]{y^4-1}\,dy$, — площадь розовой фигуры. Сумма этих площадей есть площадь квадрата, ограниченного осями координат и прямыми $x=3$, $y=3$, сложенная с площадью S криволинейного треугольника ABC, ограниченного графиком $y=\sqrt[4]{x^4+1}$ и прямыми $y=3$, $x=3$. Следовательно,

$$\int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx+\int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx=9+S.$$

Остается доказать, что $S<0{,}0001$.

Криволинейный треугольник ABC содержится в прямоугольнике $ABCD$, ограниченном прямыми $x=3$, $y=3$, $x=\sqrt[4]{80}$, $y=\sqrt[4]{82}$. Стороны этого прямоугольника равны $\sqrt[4]{82}-3$ и $3-\sqrt[4]{80}$. Поэтому неравенство $S<S_{ABCD}<0{,}0001$ следует из неравенств $\sqrt[4]{82}<3{,}01$ и $\sqrt[4]{80}>2{,}99$, которые можно установить, например, так:

$$3{,}01^4=((3+0{,}01)^2)^2=(9+0{,}06+0{,}0001)^2>$$
$$>(9+0{,}06)^2=81+1{,}08+0{,}0036>82;$$

$$2{,}99^4=((3-0{,}01)^2)^2=(9-0{,}06+0{,}0001)^2<$$
$$<(9-0{,}059)^2<81-1{,}062+0{,}0036<80.$$

Ю. И. Ионин

◆

М920. *а) Найдите хотя бы одно решение уравнения*

$$x^3+y^3+z^3=x^2y^2z^2$$

в натуральных числах.

б) Докажите, что уравнение*

$$x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$$

а) Ответ: $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$.

б) Выведем из данного уравнения неравенство, которое позволит найти все решения перебором небольшого числа возможных значений неизвестных.

Пусть для определенности $x\leqslant y\leqslant z$, тогда *имеет натуральное решение лишь при $n=1$ и $n=3$, и найдите все эти решения.*

$$z=nx^2y^2-\frac{x^3+y^3}{z^2}\geqslant nx^2y^2-(x+y).$$

В то же время, очевидно, x^3+y^3 делится нацело на z^2, поэтому

$$x^3+y^3\geqslant z^2\geqslant(nx^2y^2-(x+y))^2,$$

следовательно,

$$n^2x^4y^4<2nx^2y^2(x+y)+x^3+y^3.$$

Деля обе части на nx^3y^3, мы получаем нужную оценку

$$nxy<2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{nx^3}+\frac{1}{ny^3}. \qquad (*)$$

Из нее сразу следует, что $x=1$, потому что при $x\geqslant2$ (и $y\geqslant x$) левая часть неравенства (*) не меньше 4, а правая — меньше 3. Подставим значение $x=1$ в (*):

$$ny<2+\frac{2}{y}+\frac{1}{n}+\frac{1}{ny^3}.$$

Это неравенство может выполняться лишь при $y\leqslant3$ (при $y\geqslant4$ его правая часть меньше 4). Вспомним, что число $x^3+y^3=1+y^3$ должно делиться на z^2, причем $z\geqslant y$; отсюда вытекает, что $z=1$ при $y=1$ $(1+y^3=2)$, $z=3$ при $y=2$ $(1+y^3=9)$, а при $y=3$ $(1+y^3=28)$ подходящих значений z не существует. Остается подставить тройки чисел (1, 1, 1) и (1, 2, 3) в исходное уравнение и найти, что в первом случае $n=3$, а во втором $n=1$.

Итак, ответ: при $n=3$ $x=y=z=1$, при $n=1$ уравнению удовлетворяет тройка (1, 2, 3) и все, получающиеся из нее перестановками.

Решенное нами уравнение напоминает по структуре уравнение $x^2+y^2+z^2=nxyz$, которое подробно рассматривалось в статье М. Г. Крейна «Диофантово уравнение А. А. Маркова» в «Кванте» № 4 за этот год. Интересно, что это уравнение также разрешимо только при $n=1$ и $n=3$, однако число его решений в обоих случаях бесконечно. Еще одно похожее уравнение в целых числах $(x+y+z=xyz)$ встречается в решении задачи М918.

Р. А. Мазов, В. Н. Дубровский

◆

Ф927. *Через сцинтилляционный счетчик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, пролетает заряженная частица, и молекулы сцинтиллятора, лежащие вдоль ее траектории, испускают свет. Свет в каждой точке испускается изотропно, то есть равномерно во все стороны. Какая доля световой энергии выйдет из сцинтиллятора в воздух, если коэффициент преломления вещества сцинтиллятора $n=1{,}6$? Поглощением света в сцинтилляторе пренебречь.*

Примечание: телесный угол при вершине конуса равен $\Omega=2\pi(1-\cos\theta)$, где θ — угол между осью конуса и его образующей.

Рассмотрим луч света, испущенный из произвольной точки внутри сцинтиллятора.

Пусть α — угол, который образует этот луч с нормалью $\vec{N}$ к одной из граней параллелепипеда, для определенности назовем ее гранью A, а $\alpha_0=\arcsin(1/n)\approx39°$ — предельный угол полного отражения света на границе сцинтиллятор — воздух.

Докажем, что для любых значений показателя преломления $n>\sqrt{2}$ справедливы следующие утверждения:

1. Луч, испущенный под углом $\alpha<\alpha_0$, обязательно выйдет из сцинтиллятора и притом только через грань A.

2. Никакой луч, испущенный под углом $\alpha>\alpha_0$, через грань A выйти не может.

Прежде всего заметим, что при отражении

света от граней, параллельных $\vec{N}$, угол α не меняется (это следует непосредственно из закона отражения света). Далее, поскольку для $n>\sqrt{2}$ $\alpha_0<45°$, минимальный возможный угол падения луча (удовлетворяющий условию $\alpha<\alpha_0$!) на грани, параллельные $\vec{N}$, оказывается больше α_0 и, следовательно, через эти грани свет из сцинтиллятора выйти не может. Таким образом, утверждение 1 доказано.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Рассмотрим все возможные значения углов α от 0 до 180°. В области $\alpha_0<\alpha<90°$, в силу сделанного замечания, ясно, что ни при каком из этих углов свет через грань A выйти не может. При начальных углах $90°\leqslant\alpha\leqslant180°$ на грань A могут попасть (но вовсе не обязательно попадут) лишь те лучи, которые испытали полное отражение на грани — назовем ее B,— параллельной A. Но такие лучи не могут выйти через грань A, поскольку их угол падения на нее точно такой же, как и на грань B, от которой они отразились. Следовательно, утверждение 2 тоже доказано.

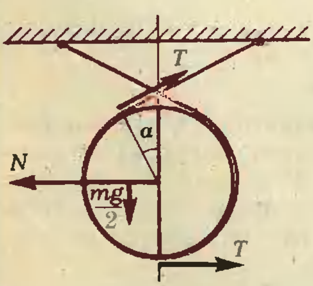
Итак, все лучи, которые выйдут из счетчика, сосредоточены в шести конусах — ось каждого конуса перпендикулярна одной из граней параллелепипеда. Телесный угол, вырезаемый всеми конусами, от максимально возможного телесного угла, равного 4π, составляет долю

$$\eta=\frac{6\cdot 2\pi(1-\cos\alpha_0)}{4\pi}=3\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right).$$

Это означает, что из сцинтиллятора с $n=1{,}6$ выйдет приблизительно 2/3 образовавшейся световой энергии.

С. А. Хорозов

Ф928. *Два одинаковых гладких полуцилиндра, общая масса которых m, подвешены на нерастяжимой невесомой нити так, как показано на рисунке. Чему равны сила натяжения нити и сила давления одного полуцилиндра на другой?*



◆

На каждый полуцилиндр действуют сила тяжести, сила натяжения нити и сила давления со стороны второго полуцилиндра. Запишем условие равновесия полуцилиндра:

в проекциях на горизонтальную ось —

$$T+T\cos\alpha=N, \tag{1}$$

в проекциях на вертикальную ось —

$$T\sin\alpha=\frac{mg}{2}. \tag{2}$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим силу T натяжения нити и силу N давления одного полуцилиндра на другой:

$$T=\frac{mg}{2\sin\alpha},$$

$$N=\frac{mg(1+\cos\alpha)}{2\sin\alpha}.$$

Л. Г. Маркович

Ф929. *Известно, что, охлаждая сосуд с водой и одновременно откачивая газ из сосуда, можно довести воду до кипения. Возможно ли закипание жидкости при охлаждении замкнутого сосуда с жидкостью и газом?*

Условие закипания жидкости при данной температуре — равенство давления над ней давлению насыщенных паров при этой температуре.

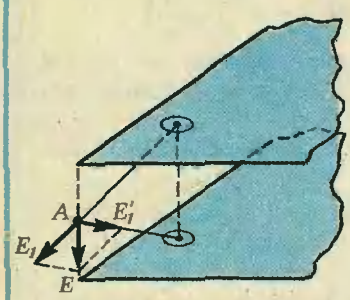
Если замкнутый сосуд с жидкостью и газом охлаждать равномерно, то при любой температуре давление над жидкостью будет больше давления ее насыщенных паров на величину парциального давления газа, находящегося в сосуде. В этом случае жидкость при охлаждении не закипит.

Если же сосуд охлаждать неравномерно, так, чтобы верхняя часть сосуда охлаждалась быстрее, жидкость может закипеть. Это произойдет, когда суммарное давление газа и насыщенных паров над жидкостью, где температура более низкая, станет равным давлению насыщенных паров при той более высокой температуре, какую имеет в данный момент жидкость.

Л. А. Ашкинази

◆

Ф930. *Плотности поверхностного заряда на прямоугольных пластинах плоского конденсатора равны $+\sigma$ и $-\sigma$. Расстояние между пластинами много меньше размера пластин. Определите напряженность электрического поля в точке A (см. рисунок).*



Из соображений симметрии легко показать, что вектор напряженности $\vec{E}_A$ электростатического поля в точке A направлен перпендикулярно пластинам конденсатора.

Действительно, разобьем мысленно каждую пластину на одинаковые малые участки. Выберем на двух пластинах пару симметричных (лежащих друг против друга) участков. Напряженность $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_1'$ поля, создаваемого зарядами этих участков в точке A, направлена вертикально (см. рисунок). Так что суммарная напряженность $\vec{E}_A$ поля в точке A также вертикальна (то есть перпендикулярна пластинам конденсатора).

Дополним мысленно каждую пластину нашего конденсатора еще тремя такими же пластинами (с той же плотностью зарядов) так, чтобы точка A оказалась внутренней точкой конденсатора с «учетверенными» пластинами. Напряженность $\vec{E}_0$ поля такого конденсатора в точке A станет равной $\vec{E}_0=4\vec{E}_A$, где $E_0=\sigma/\varepsilon_0$. Следовательно,

$$E_A=\frac{E_0}{4}=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

О. Я. Савченко

◆

Ф931. *Точечный источник расположен на расстоянии 2F от линзы с фокусным расстоянием F. На расстоянии 3F от линзы расположен экран (см. рисунок). За линзой установлена круглая пластинка радиуса R, пропускаю-*

Изображение источника создается на расстоянии $f=Fd/(F+d)=2F$ от линзы (см. рисунок) и, следовательно, на расстоянии F от экрана. Радиус $R_п$ освещенного пятна на экране определяется соотношением $R_п/2F=R_л/F$ ($R_л$ — радиус линзы), откуда $R_п=R_л/2$.

щая свет неравномерно (радиус пластинки не меньше радиуса линзы). При этом пятно, получающееся на экране, имеет равномерную максимально возможную освещенность. Как распределена «пропускная способность» пластинки вдоль ее радиуса?

В точку экрана, лежащую на расстоянии r от оптической оси ($r \leqslant R_п$), попадают лучи, выходящие из линзы на расстоянии $2r$ от оси. Освещенность в этой точке экрана (без использования пластинки) равна

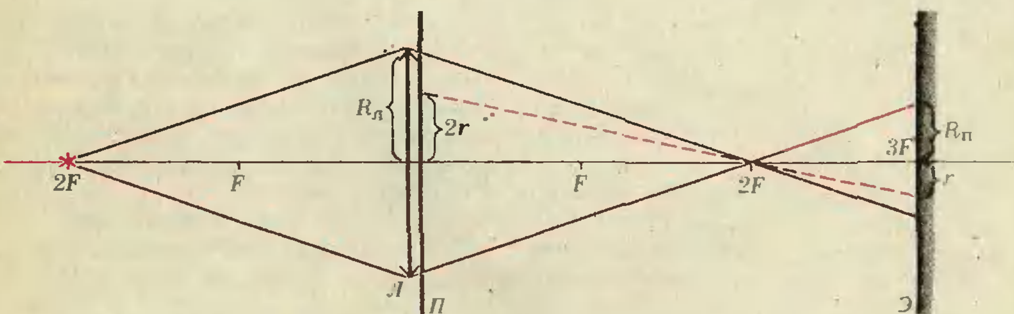
$$E_0(r)=\frac{IF}{(F^2+r^2)\sqrt{F^2+r^2}}=\frac{IF}{(F^2+r^2)^{3/2}}$$

(I — сила света источника; потерями света в линзе мы пренебрегаем). При использовании пластинки освещенность в этой точке будет

$$E(r)=E_0(r)\cdot T(2r)=\frac{IF}{(F^2+r^2)^{3/2}}T(2r),$$

где $T(2r)$ — «пропускная способность» пластинки в ее точках, находящихся на расстоянии $2r$ от оптической оси. Понятно, что освещенность в любых точках пятна (независимо от r) будет одной и той же, если $T(2r)=k(F^2+r^2)^{3/2}$, то есть

$$T(r)=k\left(F^2+\frac{r^2}{4}\right)^{3/2},$$



где k — некоторый коэффициент пропорциональности.

Поскольку $T(r)\leqslant 1$, максимальная возможная освещенность во всех точках пятна при использовании пластинки не может быть больше минимальной освещенности пятна, получающегося без пластинки. Минимальная освещенность без пластинки — в точках, лежащих на границе пятна, то есть на расстоянии $R_п$ от оптической оси. В эти точки попадают лучи, выходящие из пластины на расстоянии $R_л$ от оси. Следовательно, максимальное значение k определяется условием $T(R_л)=1$, то есть

$$k=\frac{1}{(F^2+R_л^2/4)^{3/2}}.$$

Итак, пятно на экране имеет равномерную максимально возможную освещенность, если «пропускная способность» пластинки меняется вдоль ее радиуса по закону

$$T(r)=\frac{1}{(F^2+R_л^2/4)^{3/2}}(F^2+r^2/4)^{3/2}=\left(\frac{4F^2+r^2}{4F^2+R_л^2}\right)^{3/2}.$$

А. А. Лапидес

Ф932. *Настройка гитары состоит в следующем: нажимая в определенном месте вторую струну, добиваются, чтобы она звучала в унисон с первой, далее так же настраивают другие струны. Может ли человек, у которого абсолютно отсутствует музыкальный слух (то есть умение различать звуки по высоте), настроить гитару?*

Давление воздуха в том месте пространства, через которое проходит звуковая волна, отличается от среднего атмосферного давления на величину Δp, которая меняется со временем по закону

$$\Delta p = p_0 \cos \omega t,$$

где p_0 — амплитуда избыточного давления, характеризующая громкость звука (определяется начальными условиями возбуждения звука), ω — частота колебаний, характеризующая тон (высоту) звука (определяется частотой колебаний источника звука).

Представим себе, что мы дернули одновременно с одинаковой силой две гитарные струны, зажав их так, что в случае точной настройки они должны были бы издавать звуки одной и той же высоты. Суммарное дополнительное давление воздуха будет меняться со временем по закону

$$\Delta p_c = p_0 \cos \omega t + p_0 \cos((\omega + \delta\omega)t + \varphi) =$$
$$= 2p_0 \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\left(\omega + \frac{\delta\omega}{2}\right)t + \frac{\varphi}{2}\right),$$

где $\delta\omega$ — разность частот, которая и определяет степень «расстроенности» инструмента, φ — возможный сдвиг фаз в колебаниях струн. Поскольку в нашей задаче $\delta\omega$ мало, колебания на слух будут восприниматься как звук частоты $\omega + \delta\omega/2 \approx \omega$, но громкость звука будет меняться со временем с частотой $\delta\omega/2$, то есть с периодом $T = 4\pi/\delta\omega$. Понятно, что чем меньше $\delta\omega$, тем больше период T. Увеличения этого периода и надо добиваться, подкручивая колки на гитаре.

И. И. Мазин

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия в школе проводятся в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых познакомиться с основными направлениями современной физики. Для десятиклассников организуются факультативные занятия по математике. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 24 сентября. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 5 по 21 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов.

Адрес ВФШ: 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 139-26-56.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Околонаучная информация

Учеными Академгородка были расшифрованы сигналы, посланные неизвестной цивилизацией. Начало 6 сигнала соответствует 12 часам московского времени.

* * *

Институт метрологии утвердил новую единицу времени в СИ: сиюминуту.

* * *

Для любителей кубика Рубика: доказана теорема о том, что КР можно привести к исходному состоянию из любого положения не более чем за 6 ходов. При доказательстве использованы кубик Рубика, широкая кисть и набор из шести красок.

* * *

На экзамене по математике преподаватель А. Е. Иванов отобрал шпаргалку у студента Б. Петрова и, рассматривая пожелтевшие листки, узнал свой почерк пятнадцатилетней давности.

* * *

Вышел из печати сборник «Избранные произведения». В сборник помещены 64 произведения типа $2\times2=4$, $5\times5=25$, $6\times6=36$, $7\times7=49$ и т. п.

* * *

Электриков заинтересует новое издание книги И. А. Гончарова «Обрыв».

* * *

Для абитуриентов, сдающих литературу письменно, выпущено полное собрание сочинений. Интересующиеся могут обратиться в контору БРД.

* * *

Весь натуральный ряд чисел выучил студент Вася Семечкин. Демонстрация феномена продолжается в аудитории 215.

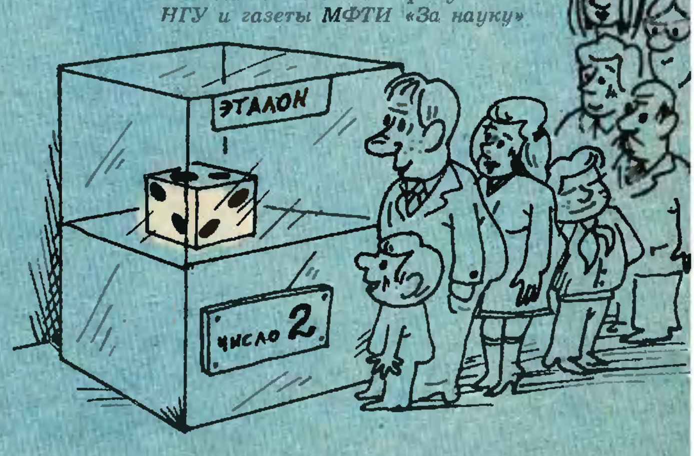
Это любопытно!

Аксиома 1. Что написано пером, то не вырубишь топором.
Аксиома 2. Лес можно вырубить топором.
Следствие. Лес пером не описать.

* * *

Аксиома 3. Обещанного три года ждут.
Аксиома 4. Семеро одного не ждут.
Следствие. Если семеро ждут обещанного три года, им обещано не одно.

По материалам клуба БРД математического факультета НГУ и газеты МФТИ «За науку»



Парадоксы плоского конденсатора

Доктор физико-математических наук
С. М. КОЗЕЛ

«Какие могут быть здесь парадоксы, — скажет читатель, — ведь это такая простая электрическая система». И действительно, что может быть проще плоского конденсатора? Из школьного учебника физики мы знаем, что так называют систему, состоящую из двух параллельно расположенных на небольшом расстоянии проводящих пластин, между которыми находится слой диэлектрика.

Если пластины (обкладки) конденсатора подсоединить к полюсам батареи, то на одной из них появится некоторый заряд $+q$, а на другой — заряд $-q$. Электрическое поле плоского конденсатора сосредоточено, в основном, в пространстве между пластинами. Это поле однородно, то есть вектор напряженности $\vec{E}$ одинаков во всех точках. Емкость плоского конденсатора выражается формулой

$$C=\frac{q}{\Delta\varphi}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d},$$

где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между обкладками конденсатора, S — площадь каждой пластины, d — расстояние между ними. ε — диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 — электрическая постоянная.

Казалось бы, все ясно. А между тем многие абитуриенты, «встретившись» на экзамене с плоским конденсатором, испытывают определенные затруднения. В ряде случаев они, опираясь, вроде бы, на хорошо известные факты, приходят к противоречивым результатам, и возникает парадоксальная ситуация. Разумеется, все эти парадоксы можно легко разрешить, если глубоко и неформально разобраться в законах электростатики. Приведем несколько конкретных примеров.

Парадокс 1. Рассмотрим заряженный плоский воздушный конденсатор. Разность потенциалов между его обкладками

$$\Delta\varphi=\frac{q}{C}=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}.$$

Обратим внимание на то, что $\Delta\varphi$ пропорционально расстоянию d между пластинами конденсатора. Это значит, что, раздвигая пластины заряженного конденсатора, мы можем увеличивать разность потенциалов между ними. Зарядив, например, конденсатор до разности потенциалов 10 В и увеличив затем зазор d в 10^3, 10^4, ... раз, мы получим $\Delta\varphi$ равным, соответственно, 10^4 В, 10^5 В и т. д. Какой простой и хороший способ создания ускорителя заряженных частиц! Не правда ли?

Мы явно вступаем здесь в противоречие со здравым смыслом, который подсказывает нам, что еще один шаг, и мы придем к нарушению одного из основных принципов физики — закона сохранения энергии.

И все же, правильны или нет наши рассуждения? Обычно абитуриенты сразу отвечают, что такого быть не может, но далеко не все указывают физическую причину этого. А на самом деле все очень просто. Приведенная формула для емкости плоского конденсатора справедлива только при малых значениях d, то есть когда d существенно меньше линейных размеров пластин. При больших зазорах между обкладками поле перестает быть однородным и разность потенциалов $\Delta\varphi$ перестает линейно зависеть от d.

Мы затронули здесь очень важный вопрос о пределах применимости физических результатов. Любая физическая модель всегда имеет ограниченную применимость. Нельзя, например, применять модель идеального газа к реальным газам при высоких давлениях и низких температурах. Формула для емкости плоского конденсатора перестает «работать», когда расстояние между обкладками становится достаточно большим и электрическое поле между ними оказывается неоднородным. Нельзя непосредственно применять закон Кулона для определения силы электрического взаимодействия между пластинами плоского конденсатора. К сожалению, абитуриенты нередко в этом случае пишут формулу $F=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$, в то время как правильное выражение для силы имеет вид $F=q\frac{E}{2}=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$ (при этом сила не зависит от расстояния d).

Теперь сформулируем задачу для самостоятельного решения.

Задача 1. Попробуйте оценить, во сколько раз можно увеличить разность потенциалов между обкладками заряженного плоского конденсатора, если удалить их на очень большое расстояние друг от друга. Линейный размер пластин $a=\sqrt{S}$ и начальное расстояние d между ними считать известными.

Заметим, что такого рода задачи на оценки, где точный расчет затруднителен, играют в физике большую роль. Они требуют выбора упрощенной физической модели и позволяют оценить масштабы явления по порядку величины.

Парадокс 2. Возьмем заряженный и изолированный плоский конденсатор и просверлим в его пластинах два маленьких отверстия — одно напротив другого. При этом поле внутри конденсатора практически не изменится и останется однородным. Пусть через одно из отверстий в конденсатор влетает с небольшой начальной скоростью заряженная частица так, чтобы электрическое поле конденсатора ускоряло ее (рис. 1). (Для этого, очевидно, частица должна влетать в конденсатор через отверстие в одноименно заряженной пластине.)

Пролетев через конденсатор, частица вылетает из другого отверстия, приобретя дополнительную энергию $\Delta W=q\Delta\varphi$. Теперь предлагается с помощью магнитного поля изменить направление движения частицы таким образом, чтобы она снова влетела

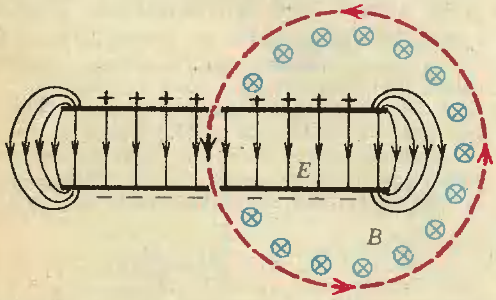


Рис. 1.

через первое отверстие в конденсатор. Напомним, что сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля на движущуюся заряженную частицу, не совершает работы, так как она перпендикулярна вектору скорости частицы.

При повторном пролете через конденсатор частица вновь приобретет дополнительную энергию ΔW, в следующем цикле — еще ΔW и т. д. Мы с вами «изобрели» циклический ускоритель, который не нуждается в источнике энергии. Еще немного фантазии — и мы сконструируем так называемый вечный двигатель, работающий без потребления энергии!

К этому ошибочному результату мы пришли потому, что не приняли во внимание одно из фундаментальных свойств электростатического поля — его потенциальный характер. Потенциальность электростатического поля означает, что если из одной точки пространства в другую мы переносим заряженное тело, то работа электрических сил не зависит от формы пути, а определяется только положениями начальной и конечной точек. Отсюда следует, что если заряженное тело переносить по замкнутой траектории, то при возвращении в исходную точку полная работа электрических сил обращается в нуль. (Напомним, что таким же свойством обладает и гравитационное поле.) Именно это свойство позволяет ввести понятия потенциальной энергии и потенциала.

В нашем случае при движении заряженной частицы внутри конденсатора электрическое поле ускоряет, а вне конденсатора — тормозит ее, и когда частица подлетает к отверстию в первой пластине, ее энергия принимает прежнее значение. Это означает, что в рассматриваемом примере мы принципиально не можем пренебрегать полем вне плоского конденсатора. Разумеется, оно значительно слабее поля между обкладками, но в нем частица пролетает гораздо больший путь; в результате в тормозящем поле вне конденсатора она теряет как раз ту энергию, которую сообщило ей ускоряющее поле внутри конденсатора.

Парадокс 3. Вот еще один пример, показывающий, что пренебрежение внешним полем плоского конденсатора (или, как его называют, полем рассеяния) может привести к принципиально неверным выводам.

В школьном учебнике сказано, что тела, в том числе и проводящие, расположенные вне конденсатора, практически не влияют на его емкость. Чаще всего так и бывает. Пусть, например, вблизи обкладки плоского конденсатора расположена еще одна проводящая незаряженная пластина «а» (рис. 2). Эта пластина не изменит поля внутри конденсатора, и его емкость останется прежней. Поднесем теперь к конденсатору еще одну пластину — «б» и расположим ее вблизи второй обкладки конденсатора. И эта пластина не окажет влияния на емкость конденсатора.

Теперь соединим внешние незаряженные пластины проводником. Наш конденсатор оказался как бы вставленным внутрь проводящей коробки. Что при этом произойдет?

Многие абитуриенты утверждают, что и в этом случае поле между обкладками конденсатора не изменится (так как внешние пластины были не заряжены) и, следовательно, емкость конденсатора тоже не изменится. А между тем схема, изображенная на рисунке 2, при замкнутых крайних пластинах эквивалентна цепи из трех конденсаторов (рис. 3). Если все промежутки между пластинами одинаковы, то емкость такого сложного конденсатора равна $C={}^3/_2C_0$, где C_0 — первоначальная емкость. Таким образом, емкость изменилась, а именно — увеличилась в 1,5 раза. Как это можно объяснить?

Оказывается, причиной всему — поле рассеяния конденсатора. Под его действием происходит перераспределение зарядов на внешних пластинах, в результате чего верхняя пластина «а» оказывается заряженной отрицательно, а нижняя «б» — положительно. (Кстати сказать, из рисунка 3 следует, что если одну из внешних пластин соединить проводником с одной из пластин данного конденсатора, то емкость станет равной $2C_0$.)

Парадокс 4. Пусть мы имеем два одинаковых конденсатора (даже не обязательно плоских) емкостью C каждый. Один из них заряжен зарядом q_0, а другой не заряжен. Электрическая энергия, запасенная в конденсаторах, равна

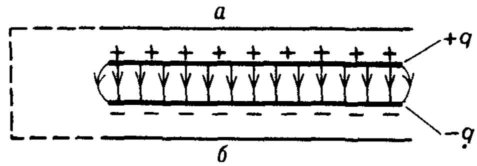


Рис. 2.

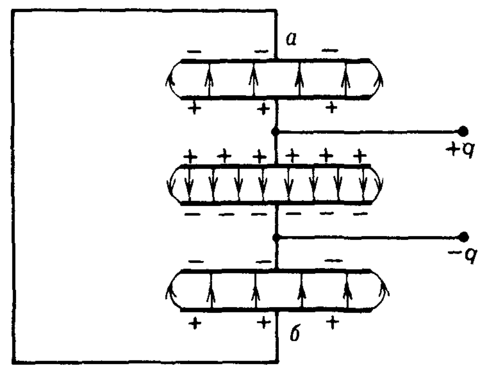


Рис. 3.

$$W_1=\frac{q_0^2}{2C}+0.$$

Соединим теперь конденсаторы параллельно друг другу. Тогда общий заряд конденсаторов останется прежним и равным q_0, а суммарная емкость будет равна $2C$. Теперь электрическая энергия системы равна

$$W_2=\frac{q_0^2}{2(2C)}=\frac{1}{2}W_1.$$

Куда же девалась половина прежнего запаса энергии? (Заметим, что при соединении конденсаторов никакой внешней работы не совершается.)

Для того чтобы разобраться в этом, рассмотрим случай, когда конденсаторы подсоединяются друг к другу через резистор с сопротивлением R (рис. 4). При перезарядке конденсаторов по резистору протекает ток, и, следовательно, на нем выделяется джоулево тепло. Здесь как будто все ясно. Но получим ли мы количественное согласие? Проведем расчет. Для этого нам потребуется умение дифференцировать и интегрировать.

Чтобы рассчитать джоулево тепло, необходимо найти зависимость тока от времени.

Обозначим заряд правого конденсатора на рисунке 4 в некоторый момент времени t после замыкания ключа через q. Тогда заряд левого конденсатора в тот же момент равен q_0-q, а ток, протекающий по сопротивлению R, —

$$i=\frac{1}{R}\left(\frac{q_0-q}{C}-\frac{q}{C}\right)=\frac{1}{RC}(q_0-2q).$$

Если принять во внимание, что по определению ток равен изменению заряда в единицу времени (производной от заряда по времени): $i=\frac{dq}{dt}$, то мы получим уравнение

$$\frac{dq}{dt}+\frac{2}{RC}q=\frac{1}{RC}q_0.$$

Удобнее записать уравнение не для заряда, а для тока, поэтому написанное выше соотношение почленно продифференцируем по времени:

$$\frac{di}{dt}+\frac{2}{RC}i=0, \text{ или } \frac{di}{i}=-\frac{2}{RC}dt.$$

Последнее уравнение легко проинтегрировать. При этом левую часть нужно проинтегрировать в пределах от первоначального значения тока i_0 до значения тока $i(t)$ в рассматриваемый момент времени, а правую — от 0 до t:

$$\ln i(t)-\ln i_0=-\frac{2}{RC}t,$$

или

$$i(t)=i_0e^{-2t/(RC)}.$$

Значение тока i_0 в первый момент после замыкания ключа можно определить из следующих физических соображений: в первый момент левый конденсатор заряжен до разности потенциалов $q_0 v/C$, а правый — не заряжен. Поэтому падение напряжения на резисторе как раз равно q_0/C. Отсюда следует, что $i_0=q_0/(CR)$.

График функции $i(t)$ изображен на рисунке 5. Такие функции называются экспонентами. Они очень часто встречаются при решении физических задач. Время τ, в течение которого сила тока уменьшается в e раз, называется постоянной времени системы. В нашем случае $\tau=CR/2$. Чем меньше сопротивление R, тем быстрее происходит затухание тока.

Теперь нам осталось вычислить джоулево тепло:

$$Q=\int_0^\infty i^2(t)Rdt=\frac{q_0^2}{C^2R}\int_0^\infty e^{-4t/(RC)}dt=$$

$$=\frac{q_0^2}{4C}=\frac{1}{2}W_1.$$

Итак, парадокс разрешен. Независимо от величины R ровно половина первоначальной энергии конденсатора переходит в тепло, а вторая половина сохраняется в виде электрической энергии конденсаторов после их перезарядки. Пусть вас не смущает некоторая сложность приведенного расчета. Такие расчеты, наверное, на приемных экзаменах от вас не потребуются. Нам важно было показать, что строгий расчет полностью разрешает противоречие.

Остается сказать несколько слов о предельном случае $R\to 0$. Что, если мы соединим конденсаторы идеальными проводниками (сверхпроводниками)? Формально наш результат остается в силе, так как он вообще не зависит от величины R. Но где же выделяется «потерянная» энергия и в каком виде?

Разумеется, в этом предельном случае джоулева тепла нет, но существенную роль начинает играть излучение электромагнитной энергии. При быстрых изменениях тока в цепи в окружающем пространстве возникает переменное электромагнитное поле, и половина первоначальной энергии уносится электромагнитной волной.

Следует отметить, что в этом случае необходимо учитывать небольшую индуктивность соединительных проводов. Тогда цепь становится похожей на колебательный контур с малым (но не бесконечно малым!) затуханием. Процесс перезарядки конденсаторов приобретает колебательный характер, и излучением электромагнитной энергии в окружающее пространство пренебречь никак нельзя.

Еще один парадокс, очень похожий на предыдущий, попробуйте разрешить сами.

Задача 2. Имеется незаряженный конденсатор емкостью C и батарея с ЭДС $\mathscr{E}$. Подсоединим обкладки конденсатора к полюсам батареи. Тогда на пластинах появится заряд $q=C\mathscr{E}$, и конденсатор приобретет электрическую энергию $W=C\mathscr{E}^2/2$. При этом батарея совершит работу $A=q\mathscr{E}=C\mathscr{E}^2$. Мы видим, что $W={}^1/_2A$. Куда же девалась вторая половина работы, совершенной батареей?

Парадокс 5. Плоский воздушный конденсатор емкостью C заполнили диэлектрической жидкостью с проницаемостью ε и зарядили до напряжения U. При этом конденсатор приобрел электрическую энергию $W_1=\varepsilon CU^2/2$. Затем конденсатор отсоединили от источника, жидкость слили и после этого разрядили. Легко сообразить, что при разрядке выделится энергия $W_2=\varepsilon^2CU/2=\varepsilon W_1$ (заряд конденсатора $q=\varepsilon CU$ при сливании жидкости не изменился, а емкость стала равной C). Получается, что при разрядке конденсатора выделится больше

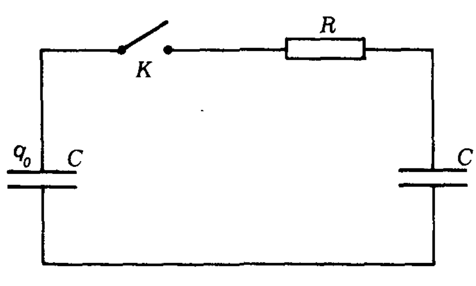


Рис. 4.

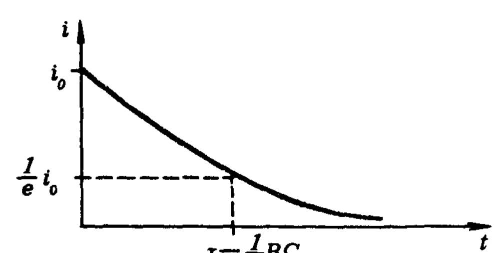


Рис. 5.

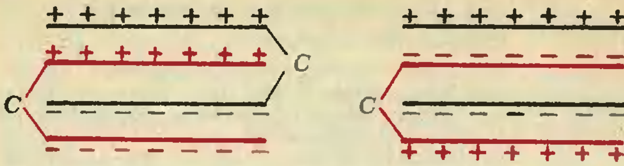


Рис. 6.

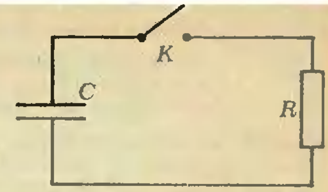


Рис. 7.

энергии, чем он получил при зарядке. Например, при $\varepsilon=2$ $W_2=2W_1$. Возникла явно парадоксальная ситуация.

Хотя задача о разрядке конденсатора, из которого удален диэлектрик, в разных вариантах хорошо известна, многие абитуриенты испытывают серьезные затруднения, пытаясь разрешить этот парадокс. А объяснение здесь очень простое.

При удалении диэлектрика из заряженного конденсатора нужно совершить некоторую внешнюю положительную работу, так как диэлектрик всегда втягивается в область более сильного электрического поля (между обкладками). За счет этой положительной работы внешней силы и будет увеличиваться электрическая энергия конденсатора:

$$W_2-W_1=A_{\text{внеш}}.$$

В нашем случае жидкий диэлектрик вытекает из конденсатора под действием силы тяжести, поэтому энергия конденсатора возрастет на величину работы силы тяжести. Если бы конденсатор все время оставался подключенным к источнику, то необходимо было бы учитывать еще и работу батареи:

$$W_2-W_1=A_{\text{внеш}}+A_{\text{бат}}.$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии для изолированного конденсатора (и вообще для любой изолированной электростатической системы) при наличии внешних сил, совершающих работу.

Задача 3. Попробуйте самостоятельно найти внешнюю работу и работу, которую совершает батарея с ЭДС $\mathcal{E}$, при сливе жидкого диэлектрика с проницаемостью ε из конденсатора, подсоединенного к ее полюсам. Емкость воздушного конденсатора равна C.

Если в системе есть активное сопротивление, то необходимо учитывать и джоулево тепло. В этом общем случае закон сохранения энергии удобно записывать в виде

$$A_{\text{бат}}-Q=\Delta W-A_{\text{внеш}}$$

— работа, совершаемая источником, за вычетом джоулева тепла идет на увеличение электростатической энергии системы и на работу против внешних сил.

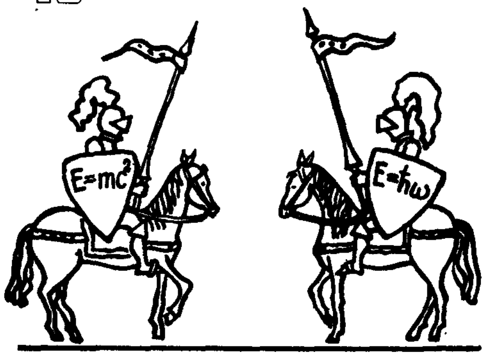
В заключение предлагаем еще несколько задач для самостоятельного решения.

Задачи

4. В плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d вставлена незаряженная металлическая пластина толщиной l, параллельная его обкладкам. Конденсатор подсоединен к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$. Какую работу надо совершить, чтобы удалить пластину из конденсатора? Рассмотреть два случая: а) перед удалением пластины конденсатор отключают от батареи; б) конденсатор все время остается подключенным к батарее.

5. Два одинаковых плоских конденсатора емкостью C заряжены зарядом q каждый и отсоединены от источника. Затем конденсаторы вставляют друг в друга двумя способами, как показано на рисунке 6. Какую работу нужно совершить в каждом из этих случаев? Пластины конденсаторов считать тонкими, а расстояния между пластинами — одинаковыми.

6. Определите максимальную силу взаимодействия между обкладками плоского конденсатора емкостью C и количество теплоты, выделившееся на резисторе с сопротивлением R, после замыкания ключа, если максимальный ток в цепи равен i_0 (рис. 7). Расстояние между обкладками конденсатора d.



VII Московский турнир юных физиков

Часами измеряется время,
А временем жизнь человеческая;
Но чем, скажи, измеришь ты
Глубину Восточного океана.

Козьма Прутков

VII Московский турнир был проведен физическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова с октября 1984 г. по февраль 1985 г. В этом соревновании старшеклассников приняло участие 40 школ Москвы и Московской области.

Первое место и переходящий приз турнира присуждены команде школы № 47 (капитан — О. Виноградова), второе место — командам школ № 7 (Р. Баско) и ФМШ № 18 при МГУ (А. Михеев), третье место — командам школ № 57 (В. Садов), № 82 пос. Черноголовка (В. Барзыкин), № 542 при МИФИ (О. Заборонский) и № 679 (А. Никитин). Победителем конкурса капитанов стал А. Михеев (ФМШ № 18). За лучший доклад на турнире почетной грамотой была награждена А. Буйволова (с. ш. № 7). За активное участие в турнире и проявленные глубокие знания по физике жюри вручило грамоты и подарки 17-ти школьникам. Физический факультет МГУ наградил школы, команды которых показали высокие результаты, физическими приборами.

Ниже мы публикуем задачи финала ТЮФ-VII. Вы можете использовать их при проведении в школе физических олимпиад и викторин, вечеров науки, физбоев, в работе физических кружков.

Домашние задания финалистам турнира

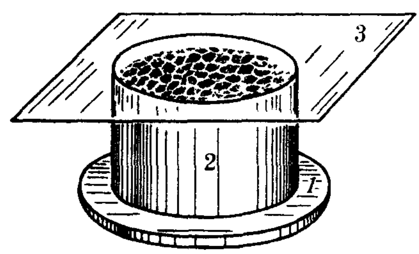
На выполнение этих заданий школьникам отводился один месяц.

1. «Оптический зажигательный прибор». «В этих моих рассуждениях мне представляется возможным достигнуть цели только одним способом: собиранием фокусов нескольких линз или зеркал в одно место, где соединенными силами они и произведут жар больший, чем известный до сих пор.» (М. В. Ломоносов)

Как зависит максимальная температура разогрева и скорость разогрева объекта от числа пучков в приборе, предложенном М. В. Ломоносовым? К чему приведет замена солнечных пучков лазерными?

2. «Катушка». На бумажном каркасе намотана в несколько слоев катушка из медной проволоки. Определить число витков катушки, не разматывая ее. Оценить омическое сопротивление, индуктивность и емкость катушки. Для экспериментов была выдана катушка с такими параметрами: диаметр провода 0,8 мм, диаметр катушки 30 мм, длина намотки 20 мм, число витков 125.

3. «Ячейки Бенара». Создать установку для демонстрации ячеек Бенара. Как зависит в вашей установке размер ячеек от разности температур между нижним и верхним слоями жидкости и от толщины слоя жидкости?



Примерные параметры установки:

1 — латунная пластина толщиной 1—3 мм;

2 — кусок трубы из теплоизоляционного материала (эбонит, оргстекло); внутренний диаметр 100 мм, высота 30 мм. Трубу следует приклеить к пластине эпоксидной смолой;

3 — прозрачная крышка (стекло).

Исследуемая жидкость — подсолнечное масло, в которое надо насыпать щепотку серебрянки (мелкого алюминиевого порошка). Налейте тонкий слой жидкости в получившуюся ванночку, закройте крышкой и начинайте равномерный нагрев нижней пластины — скоро вы обнаружите ячейки Бенара. (См. также «Квант», 1977, № 4, с. 24.)

4. «Снежный покров».

«Мороз снежком укутывал:
«Смотри, не замерзай!»

(Из детской песенки)

«Подсчитано, что если бы снегом укрылась вся Земля, то средняя температура ее поверхности понизилась бы от существующей сейчас +15 °С до —88 °С.»

(Из ученой книги)

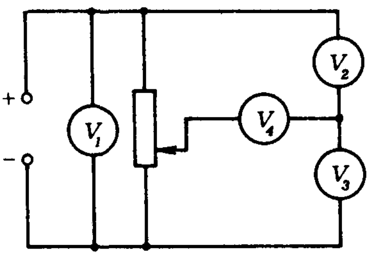
В этих двух цитатах заключен физический парадокс — от снега тепло и... холодно. Разрешите этот парадокс.

5. «Представление». Разыграть с участием членов команды и болельщиков представление на физическую тему. Длительность представления — 5 мин. Жанр произвольный.

Конкурс капитанов и болельщиков

Капитаны выполняли эти задания с двумя помощниками. Болельщики работали индивидуально или группами и присылали ответы в пользу одной из команд-финалистов. Время на выполнение каждого задания — 5 минут.

Большинство задач этого конкурса были предложены командами школ, участвовавших во втором туре турнира.

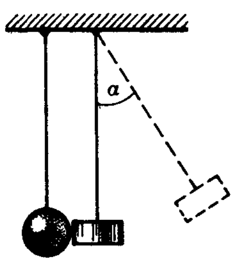


1. **«Вольтметры».** В электрической схеме, приведенной на рисунке, все вольтметры одинаковые.

Показания двух известны: $U_1=10$ В, $U_2=6$ В. Каковы показания двух других?

2. **«Автобус»** (задача предложена школой № 179). Почему задние стекла автобуса обычно гораздо грязнее, чем боковые?

3. **«Парадоксальное столкновение».** После лобового соударения латунного цилиндра массой m с неподвижным биллиардным шаром массой $2m$ цилиндр останавливается, а шар отклоняется на угол $\beta<\frac{\alpha}{2}$



Предложить модель внутреннего устройства цилиндра.

4. **«Волна зажигания»** (предложена школой № 679 и признана лучшей задачей).

Весь во мраке лежит город сонный,
Светлый месяц с небес не глядит.
На бульваре той ночкою темной
Притаился опасный бандит.

Он не знал, что его ожидает...
Полицейских отчаянный взвод
Все теснее его окружает,
А в засаде стоит пулемет.

Чтобы тени его не укрыли,
Чтоб его освещали огни,
Фонари вдоль аллеи включили,
Но не вмиг загорелись они!

Друг за другом они зажигались,
Первый сразу, позднее — второй,
Пятна света в ночи разливались,
Вдоль бульвара бежали волной.

Ловко пользуясь этой заминкой,
Под покровом ночной темноты
Вор ушел неприметной тропинкой,
Его скрыли густые кусты...

В чем причина такой неудачи?
Почему так зажглись фонари?
Нерешенная эта задача
Мне уснуть не дает до зари.

Длинная улица освещается электрическими лампами накаливания, параллельно подключенными к источнику питания. Почему лампочки, находящиеся дальше от источника, зажигаются позднее?

5. **«Смерч»** (школа № 43). Почему при сливе воды в ванне образуется водоворот? В какую сторону вращается вода?

6. **«Лазер»** (школа № 542). Лазерный луч направляют горизонтально на плоскую прозрачную кювету (аквариум) с водой перпендикулярно стенкам кюветы. Если луч проходит выше или ниже поверхности воды в кювете, то на экране за кюветой можно наблюдать пятно от лазерного пучка. Если же лазерный луч проходит вдоль поверхности воды, то на экране наблюдается вертикальная полоска. Объяснить происхождение полоски и рассчитать ее параметры.

7. **«Телевизор»** (школа № 57). В некоторых художественных фильмах, герои которых смотрят телевизор, можно заметить, что по экрану этого телевизора иногда бежит широкая темная горизонтальная полоса. Почему и для каких телевизоров она наблюдается, в какую сторону (вверх или вниз) она бежит и с какой частотой? Каковы ее ширина относительно ширины экрана и степень затемнения?

8. **«Баночка».** Для опыта годится любая пластмассовая баночка с достаточно большой и плотно закрывающейся крышкой (но без резьбы). На турнире демонстрировалась баночка объемом 0,4 л, диаметр крышки 8 см. При резком сжатии баночки с боков крышка с характерным хлопком соскакивает и летит достаточно далеко. Оценить величину максимальной силы, действующей на крышку в этом опыте.

Публикацию подготовили *Е. Н. Юносов, И. В. Яминский*

VIII турнир юных физиков

Этот турнир начинается в сентябре 1985 г. Он будет проводиться в три этапа.

I тур — заочный коллективный конкурс. **С этого года заочный конкурс становится всесоюзным.** Решения задач ТЮФ-VIII, опубликованных ниже, можно отправлять не позднее 30 ноября 1985 года по адресу: 119899, Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, Совет по работе со школьниками, оргкомитет ТЮФ-VIII. В графе «Кому» напишите: «Заочный конкурс ТЮФ-VIII» и номера задач, решения которых вы посылаете. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом школы (в этом конверте будут отправлены результаты проверки решений), а также заявление об участии в турнире с указанием фамилий членов команды, учителя физики, номера школы, класса. Решения задач могут быть индивидуальными и коллективными. Каждое решение пишите на отдельном листе (листах) и вначале обязательно укажите город, номер школы, класс, фамилии и имена авторов решения. К решениям экспериментальных задач должны быть приложены подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Наиболее удачные решения задач и самостоятельно сформулированных проблем будут отмечены грамотами турнира и представлены к печати в «Кванте».

II тур — отборочные физбои. В нем могут принять участие команды школ г. Москвы и Московской области, набравшие в заочном коллективном конкурсе более 40 баллов (из 50-ти возможных). Отборочные физбои 1/4 и 1/2 финала будут проводиться с 10 декабря 1985 г. по 10 января 1986 г. на физическом факультете МГУ по задачам заочного конкурса. (Другим городам могут быть высланы материалы для организации II и III туров на местах).

III тур — финал турнира — состоится 16 февраля 1986 г. на физическом факультете МГУ. В его программу входят: физбой финалистов турнира, конкурс капитанов, конкурс болельщиков, награждение победителей и активных участников турнира.

В составлении заданий для финальных конкурсов турнира могут принять участие все желающие. Условия задач высылайте не позднее 20 января 1986 года. Получить дополнительные сведения о правилах проведения ТЮФ-VIII, а также высказать свои предложения и замечания можно по вышеуказанному адресу.

Задания заочного коллективного конкурса ТЮФ-VIII

Большинство заданий сформулировано на основе конкретных физических явлений и рассчитано на проведение серьезных теоретических и экспериментальных исследований, выходящих за рамки «школьного» подхода. Условия задач сформулированы максимально кратко и допускают различные трактовки и степени упрощения.

1. «Придумай сам». Самостоятельно сформулируйте задачу-проблему и решите ее.

2. «Якорь». Как объяснить, что якорь массой 5 тонн надежно удерживает корабль массой 10 тысяч тонн?

3. «Коэффициент Пуассона». Известно, что всякая продольная деформация твердого тела вызывает и его поперечную деформацию. Объясните это явление. Предложите теоретический расчет коэффициента Пуассона для металлов. Проведите экспериментальные и теоретические исследования резинового стержня.

4. «Двойные рамы». В жилых помещениях средней полосы СССР принято ставить в окна двойные рамы. Не следует ли, по вашему мнению, перейти на применение тройных рам?

5. «Пленка масла». «В 1757 году я находился на борту одного из 96-ти кораблей флотилии, следовавшей из Луисбурга. Я заметил, что поверхность воды вокруг двух кораблей была на удивление спокойна, в то время как вокруг других наблюдалось сильное волнение, вызываемое резкими порывами ветра. Озадаченный столь странным различием, я в конце концов обратился к капитану и спросил, что бы это могло значить. «Коки,— сказал он,— как я понимаю, вылили только что через шпигат жирную воду, и она немного засалила борта этих кораблей». В интонации капитана чувствовался легкий оттенок презрения, высказываемого человеку, который не знает каких-то общеизвестных истин.» (Бенджамин Франклин)

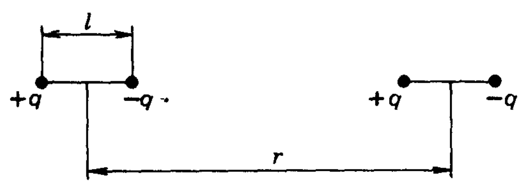
Объясните явление, замеченное ученым. Проведите опыты по выливанию масла на неспокойную поверхность воды.

6. «Автоколебания». Многим известна детская игрушка: длинношеий утенок наклоняется к корытцу с водой и, покачиваясь, «пьет» воду, затем откидывается от корытца, но через некоторое время опять наклоняется и «пьет» и т. д. С точки зрения физика это — пример автоколебаний, происходящих при наличии внешнего источника энергии.

Сконструируйте и изготовьте наглядный прибор или игрушку, демонстрирующую автоколебания.

7. «Поверхностный заряд». Известно, что если зарядить металлический шар, то заряд распределится по его поверхности. Оцените толщину этого поверхностного слоя.

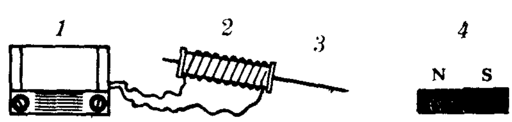
8. «Дипольное взаимодействие». Известно, что два диполя, находящиеся на расстоянии r друг от друга, как показано на рисунке, притягиваются с силой $F \sim p_0^2/r^4$, где $p_0 = ql$ — дипольный момент.



Как будут взаимодействовать диполи, если их моменты будут переменными во времени: $p_1(t) = p_2(t) = p_0 \sin \omega t$?

9. «Сила магнита». Экспериментально исследуйте зависимость от расстояния силы притяжения стального шарика к полюсу полосового магнита. Объясните результаты. Специально исследуйте поведение намагниченного и ненамагниченного шариков.

10. «Скачки Баркгаузена». Интересные явления, связанные с намагничиванием ферромагнетиков, вы можете наблюдать, создав следующую установку:



1 — радиоприемник;
2 — катушка из медного провода;
3 — исследуемый образец;
4 — магнит или электромагнит.

Примерные параметры катушки: число витков — несколько тысяч, диаметр провода — 0,1—0,2 мм, длина намотки — 30—50 мм, внутренний диаметр отверстия в катушке — 5—10 мм. В качестве исследуемых образцов могут быть использованы вязальные спицы, отожженный гвоздь, надфиль и другие ферромагнитные объекты. Катушку следует подключить к входу усилителя радиоприемника (от проигрывателя). Исследуемый образец вставить в катушку. При приближении или удалении магнита от образца, смене полюсов и других манипуляциях вы услышите шуршание и потрескивание.

Исследуйте явление. Попробуйте усовершенствовать установку для подтверждения ваших гипотез.

11. **«Показатель преломления».** Измерьте показатель преломления вара (битума).

12. **«Глубина резкости».** Экспериментальио определите зависимость глубииы резкости фотоаппарата от диаметра диафрагмы. Дайте теоретическое объяснение получеиной зависимости. Как изменится характер исследуемой зависимости при замене объектива на одиночную линзу?

13. **«Черная дыра».** Оцените катастрофические для Землн последствия появления черной дыры, которая движется по земной орбите навстречу Земле. Рассмотрите случаи отношеиия масс черной дыры и Земли 10^{-9}; 10^{-6}; 10^{-3}; 1.

14. **«Прерывистое тяготение».** «Сила тяготения являет нам повседневный пример силы, действующей, по-видимому, беспрерывно. Правда, мы не знаем, не разделено ли ее действие неощутимо малыми промежутками времени, но поскольку при этой гипотезе явления были бы почти теми же, как и в случае непрерывного действия, геометры предпочли последнюю гипотезу как более удобную и простую.»

(Пьер Симон Лаплас)

Оценнте возможную скважность действия силы тяготения.

15. **«Искристый сиег».**

Под голубыми небесами
Великолепными коврами,
Блестя на солнце,
Снег лежит.

А. С. Пушкин

Свежевыпавший пушистый снег искрится иа солнце или в свете фонарей уличного освещения. Оцените характерное расстояние между отдельными «искринками».

16. **«Тихий снег».**

Тишайший снегопад —
Дверям обидно хлопать.
Посередине дня
В столице как в селе.
Тишайший снегопад,
Закутавшийся в хлопья,
В обувке пуховой
Проходит по земле.

Александр Межиров

Оцените громкость звука, возникающего при падении снежинок во время снегопада.

17. **«Скрипящий снег».**

Скрипит, скрипит, как снег капуста,
И снег скрипит, как кочаны.

Олег Чухонцев

Когда, как и почему скрипит сиег и при чем тут капуста!? (По традиции задача 17 имеет шуточный оттенок.)

Публикацию подготовили *Е. Н. Юносов, И. В. Яминский*

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском государственном университете им. Леиинского комсомола работает заочиая школа (ЗШ) для учащихся 8—10 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказывать помощь в формированин и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 8—10 классов, на биологическое — только учащиеся 9 классов, на экономическое — только учащиеся 10 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки (или факультативы), которые работают в школе под руководством учителя. Руководители каждого кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполиивших первое задаиие по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список члеиов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и завереный печатью.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные методические материалы. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а работы членов кружков — его руководители (по желанию руководителей часть работ членов кружков может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 8—9 классов ЗШ приглашается в Летнюю школу при НГУ (которая работает с 1 по 22 августа). Здесь оии вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных учеиых, решают иитересиые задачи иа семинарах, знакомятся с университетом и научно-исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают и развлекаются. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать иа имя директора ЗШ заявление с просьбой выслать первое задание. Заявление должно быть иаписаио на почтовой карточке и оформлено по следующему образцу:

1. Фамилия, имя, отчество (полиостью, печатиыми буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
2. Класс, в котором вы учитесь в своей школе	8 класс
3. Отделение ЗШ, на котором вы хотите учиться (можио указать два отделения)	математическое (математическое и физическое)
4. Подробный домашннй адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149, Новосибирская область, с. Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5.

Руководитель кружка должеи прислать иа имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на *математическое* **или** иа *физическое* отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ииже, *не позднее 25 октября.*

Решения задач нужио записать в простую учеиическую тетрадь в клетку. оставляя поля для замечаний. На обложке тетради укажите те же сведеиия о себе, что и в заявлении. Работы отсылайте вместе с заявлением только простой баидеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок бумаги размером 6×10 см с иаписанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Наш адрес: 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по математике

8 класс

1. Сколько килограммов меди нужно переплавить с 2 кг сплава меди и серебра, содержащего 5 % серебра, чтобы получился сплав, содержащий 2 % серебра?

2. На координатной плоскости изобразите миожество точек (x, y), чьи координаты удовлетворяют условию

$$2y-1\leqslant|x-1|-2x.$$

3. В трапеции через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям проведен отрезок, концы которого лежат на боковых сторонах. Найдите длину этого отрезка, если длины оснований — a и b.

4. Сколько раз нужно взять слагаемым число 8, чтобы в сумме получилось 8^{100}?

5. Точка движется по гипотеиузе прямоугольного треугольника. При каком положении точки расстояние между ее проекциями иа катеты будет наимеиьшим?

6. Как с помощью циркуля и линейки построить параллелограмм по углу и диагоналям?

9 класс

1. Из пунктов A и B, расстояиие между которыми 22,4 км, одновременно выезжают два велосипедиста. Если они поедут навстречу друг другу, то встретятся через 0,5 час. А если поедут в одну сторону (по иаправлению от A к B), то один из них догонит другого через 3,5 час. Найдите скорости велосипедистов.

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), чьи координаты удовлетворяют условию

$$|y^2+1|-2y\geqslant|x-1|-x.$$

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+xy+x=10 \\ y^2+xy+y=20. \end{cases}$$

4. Треугольник ABC — равносторонний. Докажите, что вектор $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{BC}$.

5. Найдите последнюю цифру числа 7^{1985}

6. Как с помощью циркуля и линейки построить треугольник по двум стронам и медиаие, лежащей между ними?

10 класс

1. Найдите объем прямого кругового конуса, если известно, что его боковая поверхность, будучи развернута на плоскости, дает сектор круга радиуса 10 и с центральным углом 72°.

2. По итогам соревнования трех бригад оказалось, что первая и вторая бригады вместе изготовили в два раза больше деталей, чем третья, а первая и третья вместе изготовили в три раза больше второй. Какая бригада заняла первое место?

3. Как с помощью циркуля и линейки построить отрезок длииы $\sqrt{7}$, если на плоскости задан отрезок длины 1?

4. Укажите многочлен с целыми коэффициентами, для которого число $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ является корием.

5. Равнобочная трапеция описана около окружности, длины ее оснований — a и b. Найдите длину диагонали этой трапеции.

6. Докажите, что для любого α из промежутка $[0; \pi/2]$ выполняется неравенство $\cos(\sin\alpha)>\sin(\cos\alpha)$.

Первое задание по физике

Задачи 1—6 предназначены для восьмиклассииков, 6—11 — для девятиклассииков и 10—15 — для десятиклассников.

Для поступления иа физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным решить одиу — две задачи. Одиако после разбора задач своего класса рекомендуем вам ознакомиться и с другими задачами, а понравившиеся задачи советуем попробовать решить.

1. Баржа представляет собой коробку размером $10\times4\times2$ м. Ее масса с грузом $M=50$ т. Можно ли погрузить на баржу еще пару контейнеров массой $m_0=20$ т каждый? Условия устойчивости выполняются.

2. В схеме, изображенной на рисунке 1, сопротивления всех резисторов даны в омах. В каком из них выделится больше тепла при включении схемы в цепь точками A и B?

3. Груз взвешивают на неравноплечих весах. На одной чашке весов его уравновесили гирями массой $m_1=2{,}5$ кг, а на другой — $m_2=3{,}6$ кг. Найдите массу груза. (Массой чашек и коромысел весов пренебречь.)

4. Резиновая трубка полностью заполнена ртутью. Во сколько раз изменится сопротив-

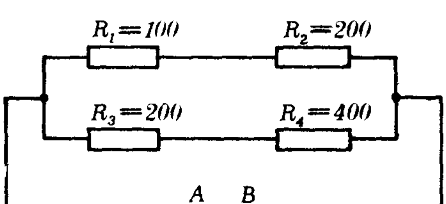


Рис. 1.

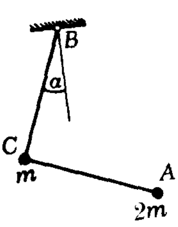


Рис. 2.

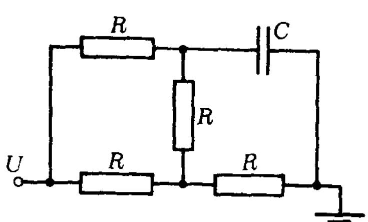


Рис. 3.

ление ртути, если, растягивая трубку, увеличить ее длину в 1,5 раза?

5. Найдите, приближенно, выталкивающую (архимедову) силу, действующую на вас со сторомы окружающего воздуха. Считайте известным, что плотность воздуха примерно в 800 раз меньше плотности воды.

6. Объясните, почему при разбавлении заварки кипятком в прозрачном стакане видно, что чай светлеет, а если следить за цветом чая в непрозрачном цилиндрическом стакане (естественно, наблюдая не сбоку, как в первом случае, а сверху), то кажется, что он не меняется.

7. Найдите отношение расстояний, проходимых за 1 секунду свободно падающими телами без начальной скорости вблизи Земли и на высоте, равной радиусу Земли.

8. Вдоль пенала массой m и длиной l может двигаться кубик той же массы m. Пенал толкнули со скоростью v. Опишите видимое движение пенала. (Попробуйте нарисовать график зависимости скорости пенала от времени.) Первоначальио кубик лежал в середине пенала. Считайте, что кубик не переворачивается, трения ни внутри, ни вне пенала нет, соударения кубика с пеналом абсолютно упругие.

9. Однородный практически невесомый стержень AB согнут посередине в точке C под углом 90° ($AC \perp BC$). К концу A прикреплен грузик массой $2m$, а к точке C — грузик массой m (рис. 2). Конец B шарнирно прикреплен к потолку. Какой угол α с вертикалью образует сторона BC в поле тяжести?

10. Найдите перегрузку пассажира при взлете самолета, который равномерно набирает взлетную скорость $v=60$ м/с на пути $l=1$ км. (Если сила, прижимающая пассажира массой m к сиденью, есть F, то перегрузкой называется величина $n=F/(mg)$. Очевидно, что при этом в n раз возрастает и давление внутренних органов пассажира друг на друга.)

Дополнительный (необязательный) вопрос. Пользуясь предыдущим решением, оцените длину пути разгона космической ракеты при выводе космонавта на околоземную орбиту, считая, что допустимая перегрузка космонавта $n=3$. (Сначала ракета проходит плотные слои атмосферы, двигаясь почти вертикально, но этим путем можно пренебречь. Затем она ускоряется почти горизонтально.)

11. Вагон имеет колеса радиусом R, жестко закрепленные на осях радиусом r. Оси вращаются в подшипниках скольжения. Коэффициент трения в подшипниках μ. Вагон толкнули со скоростью v. Оцеиите расстояние, которое он пройдет до остановки. Считайте, что проскальзывания колес относительно рельсов нет. Трением качения можно пренебречь.

12. Конденсатор емкостью C включен в цепь, как показано на рисунке 3. Сопротивления всех резисторов равны R. Один конец цепи имеет потенциал U, другой заземлен. Найдите установившийся заряд конденсатора.

13. Как направлено ускорение артиллерийского снаряда после вылета из ствола орудия: а) если сопротивление воздуха отсутствует (например, в безвоздушном пространстве вблизи Земли); б) при наличии сопротивления воздуха?

14. В двух соседних вершинах квадрата со стороной a находятся точечные заряды q, а в двух других вершинах — заряды $-q$. Найдите потеициал и напряженность электрического поля в центре квадрата.

15. Перевернутую вверх дном кастрюлю объемом V и массой m опускают в воду и начинают медленно топить. Определите, с какой глубины погружения кастрюля будет тонуть сама. Атмосферное давление p. Кастрюля не переворачивается.

Парадоксы плоского конденсатора

1. Для оценки примем, что при раздвигании пластин конденсатора на расстояние порядка их линейных размеров $a=\sqrt{S}$ электрическое поле приближенно остается однородным, поэтому разность потенциалов возрастет в a/d раз. При дальиейшем их раздвигании поле уже нельзя считать однородным; при этом на очень больших расстояниях поле каждой пластины практически совпадает с кулоновским полем точечного заряда, а потенциал каждой из иих перестает зависеть от иаличия второй пластины. Для оценки можно считать, что на расстояниях, бо́льших a, поле близко к кулоновскому; поэтому при дальнейшем раздвигании пластин разность потенциалов возрастает на величину $2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{1}{2\pi}\frac{a}{d}\Delta\varphi$, где q — заряд конденсатора, а $\Delta\varphi=\frac{dq}{\varepsilon_0 S}$ — первоначальная разность потенциалов. Отсюда следует, что разность потенциалов растет в основном на первом этапе, когда пластины конденсатора удаляются друг от друга иа расстояние порядка их линейных размеров. Подчеркнем, что наш результат — возрастание разности потенциалов в a/d раз, полученный с помощью упрощенной модели,— является лишь оценкой масштабов явления по порядку величины.

2. Половина работы батареи перешла в тепло.

3. При сливе жидкого диэлектрика из кондеисатора, подключенного к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$, его заряд изменяется на величину $\Delta q=C(1-\varepsilon)\mathscr{E}<0$; значит, батарея совершает работу $A_{бат}=\mathscr{E}\Delta q=-C(\varepsilon-1)\mathscr{E}^2<0$. Эиергия коидеисатора при этом изменяется на величину $\Delta W=-(\varepsilon-1)C\mathscr{E}^2/2<0$. Отсюда следует, что

$$A_{внеш}=\Delta W-A_{бат}=\frac{(\varepsilon-1)C\mathscr{E}^2}{2}>0.$$

4. а) В этом случае заряд на конденсаторе не изменяется. Поэтому

$$W_1=\frac{C_1\mathscr{E}^2}{2},\quad W_2=\frac{q^2}{2C_2}=\frac{C_1^2\mathscr{E}^2}{2C_2}=$$

$$=\frac{C_1}{C_2}W_1,\ W_2>W_1,$$

где

$$C_1=\frac{\varepsilon_0 S}{(d\ l)},\quad C_2=\frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Таким образом,

$$A_{внеш}=W_2-W_1=W_1\left(\frac{C_1}{C_2}-1\right)=$$

$$=\frac{\mathscr{E}^2}{2}\ \frac{\varepsilon_0 Sd}{(d-l)^2}.$$

б) В этом случае сохраняется постоянной разность потенциалов. Тогда

$$W_1=\frac{C_1\mathscr{E}^2}{2},\quad W_2=\frac{C_2\mathscr{E}^2}{2},\quad W_2<W_1,$$

$$A_{бат}=\Delta q\mathscr{E}=\mathscr{E}^2\Delta C=\mathscr{E}^2(C_2-C_1)<0,$$

$$A_{внеш}=(W_2-W_1)-A_{бат}=\frac{\mathscr{E}^2}{2}(C_2-C_1)-$$

$$-\mathscr{E}^2(C_2-C_1)=\frac{\mathscr{E}^2}{2}(C_1-C_2)=\frac{\mathscr{E}^2}{2}\ \frac{\varepsilon_0 Sl}{(d-l)d}.$$

Заметим, что работа внешних сил в первом случае больше, чем во втором.

5. Пусть расстояние между любой парой пластин (см. рис. 6 в статье) равно $d/2$. Обозначим через w энергию электростатического поля единицы объема заряженных конденсаторов. Тогда энергия обоих заряженных конденсаторов до их сближения равна

$$W_1=2Sdw.$$

В случае а) напряженность поля между внутренними пластинами увеличивается в 2 раза; следовательно, энергия единицы объема увеличится в 4 раза ($w=\varepsilon_0 E^2/2$):

$$W_2=2S\frac{d}{2}w+S\frac{d}{2}4w=3Sdw.$$

Отсюда следует, что

$$A_{внеш}=W_2-W_1=Sdw=\frac{q^2}{2C}>0.$$

Аналогичным образом для случая б) получим:

$$W_2=Sdw,\ \text{и}\ A_{внеш}=W_2-W_1=-Sdw=$$

$$=-\frac{q^2}{2C}<0.$$

6. $I_m=U/R$, где U — первоначальное напряжение на конденсаторе, поэтому

$$F_m=\frac{1}{2}\frac{CU^2}{d}=\frac{1}{2}\frac{C(I_mR)^2}{d}$$

и

$$Q=\frac{CU^2}{2}=\frac{C(I_mR)^2}{2}.$$

Африканская головоломка
(см. с. 21)

Переведите кольцо к центральному отверстию в направлении, указанном красной стрелкой (рис. 1), а затем вытяните на себя через отверстие часть шнурка, закрашенную на рисунке синим цветом (в направлении синей стрелки), и вытащите наружу узел, в который переплелись шнурки. После этого продвигайте кольцо вдоль шнурка через весь узел слева направо (см. красные стрелки на рисунке 2). Затем

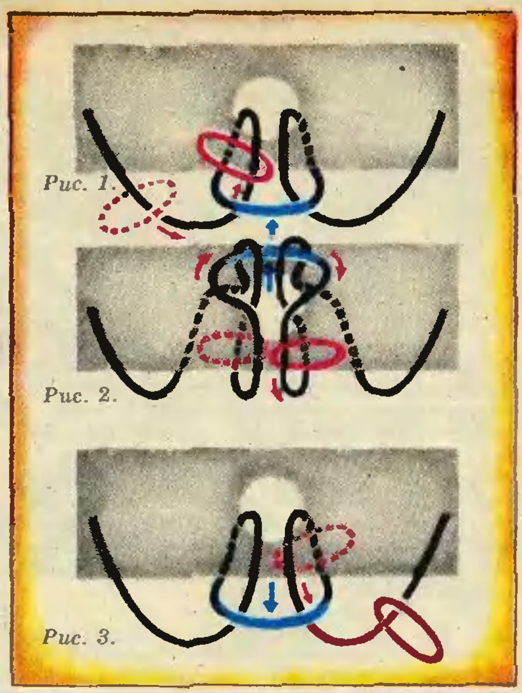


Рис. 1. Рис. 2. Рис. 3.

втяните узел обратно внутрь отверстия и снова продвиньте кольцо направо (рис. 3). Головоломка решена.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 7)

1. Пусть первая цифра — x, а вторая — y. Тогда, с одной стороны, сумма цифр номера равна $3x+4y$, а с другой — $10x+y$. Следовательно, $3x+4y=10x+y$, то есть $7x=3y$, откуда $x=3$, $y=7$. Мой номер телефона 333-77-77.

2. Нетрудно понять, что $C=3$, а $M=0$, цифры E и Ь не превосходят 3, следовательно, одна из них равна 1, а другая 2, причем $E=2$, а Ь$=1$, так как число $3102^2=9622404$ имеет лишь 7 знаков. Итак, ответ: $3201^2=10246401$.

3. Нет. Действительно, если игра не кончилась после того, как все пятеро игроков сделали по одному ходу, то в этот момент у каждого из игроков имеется по две шашки одикового цвета: в двоих по две черные, а у троих по две белые, и передается черная шашка. Если она попадает к игроку, имеющему две черные шашки, то игра заканчивается, а если к игроку, имеющему две белые шашки, он передает ее дальше; если и второй игрок имеет две белые шашки, то и он передает ее дальше, и так далее, пока она не попадает к игроку, имеющему две черные шашки. Но второй игрок, имеющий две черные шашки, не может сделать хода.

4. При попытке наклониться, стоя спиной к стене, проекция центра тяжести тела выходит за пределы ступни, и наклоняющемуся человеку приходится сделать шаг вперед, чтобы не упасть.

5. Глядя на рисунок 4, а) нетрудно заметить, что общая площадь красных и синих кусков равна половине площади всего восьмиугольника; точно так же общая площадь красных и зеленых кусков равна половине всей площади, и общая площадь синих и желтых кусков равна половине всей площади. Отсюда следует,

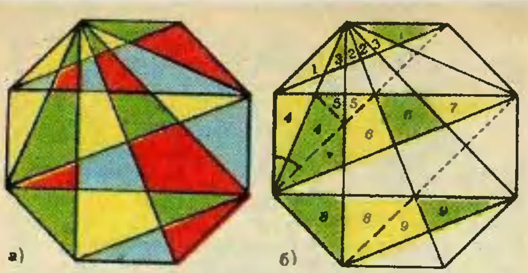


Рис. 4.

что площадь синих кусков равна площади зеленых, а площадь желтых кусков равна площади красных. С другой стороны, проведя дополнительные линии, как показано на рисунке 4, б), мы разобьем желтые куски на девять многоугольников и зеленые куски на девять точно таких же многоугольников. Значит, площадь желтых кусков равна площади зеленых. Поэтому площадь кусков, закрашенных каждым цветом, равна $^1/_4$ площади всего восьмиугольника.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 5)

Задание 9. Этот эпизод взят из партии «Дачесс» — «Каисса» (2-й чемпионат мира среди ЭВМ, Торонто, 1977 г.). Король черных стоял на g8, они ответили 34...Ле8, и после 35. Ф:е8+ все было кончено. Но почему черные отдали ладью, разве они не могли сыграть 34...Крg7? Эта позиция как раз и изображена на диаграмме. Оказывается, в этом случае машина приготовила не 35. g5 K:e3 36. gf+Ф:f6 37. fe Фg5+ и 38...Ф:b5 с решающим перевесом у черных, а блестящее 35. Фf8+!! Кр:f8 36. Сh6+ и 37. Лс8+ с выигрышем.

Задание 10 (Шорт—Майлс). В ответ на 22.Kb6 Шорт опасался 22...Ке2. Если теперь 23. С:е2, то 23...Ф:d1+ 24. С:d1 Лс1×, а на 23. K:d7 следует 23...Лс1+ 24. Л:с1 Л:с1×. Однако белые выигрывали замечательным образом: 23. Фf8+!! Кр:f8 24. K:d7+ и 25. С:е2 или 23...Л:f8 24. К:d7.

Как видите, две эти комбинации — одна — машин, другая — людей — объединяет эффектная и необычная жертва ферзя на поле f8.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Г. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
В. В. Губин, М. Б. Дубах, Е. В. Винодарова, Д. А. Крымов, А. К. Малкин, Г. В. Мурышкин, Ю. Н. Сафонов, И. Е. Смирнова, Э. А. Смирнов, Н. А. Ящук

Фото представили:
Е. Г. Любинский, А. М. Орехов, В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.06.85. Подписано к печати 26.07.85.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,80
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,27. Т-16635
Тираж 172 978 экз. Цена 40 коп. Заказ 1618

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических иаук Е. Я. Гик.

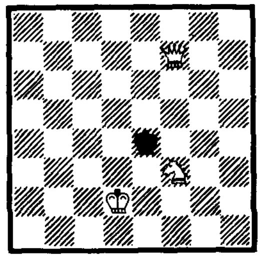
ШАХМАТЫ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ДОСКАХ

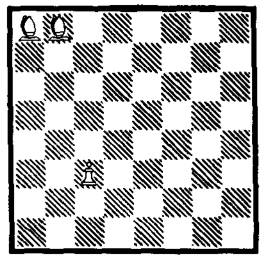
Шахматы, как известно, развивают логическое мышление, комбинаторные способности, интуицию, геометрическое воображение. Мы не раз убеждались в этом, рассматривая различные геометрические сюжеты на шахматной доске, необычные шахматные игры и задачи. Вот еще один пример — шахматы на параллельных досках. Эта идея «параллельных миров», часто используемая фантастами, не ускользнула и от шахматных композиторов.

Игра ведется на двух досках, расположенных одна над другой. На каждой из них ходы обычные, но фигуры могут перемещаться и в пространстве — с одной доски на другую. Ферзь в пространство выходит так же, как король, а пешке разрешается менять плоскость только при взятии. Исходная позиция ставится на нижнюю доску как в обычных шахматах, диаграммы рисуются на двух досках, а в записи позиций номер доски (1 или 2) указывается в скобках. При разыгрывании партии фигуры, отправляющиеся в пространство, можно ставить на перевернутые стаканы, стоящие на нижней доске, однако мы надеемся, что в рассматриваемых задачах геометрическое воображение позволит вам обойтись без специальных приспособлений.

Белые: Крa7(1), Фb7(2), Лb3(2); черные: Крa3(1). Мат в 2 хода.

1.Лb1(2)! Ладья осталась на верхней доске, но освободила дорогу ферзю. 1...Крb4 (b3, b2)(1) 2. Фb4 (b3, b2)(2)×, на вертикали a(1, 2) король получает мат ферзем с тех же полей.

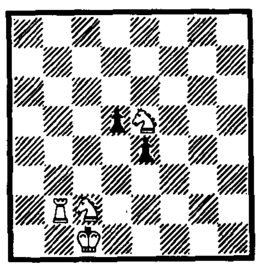
2


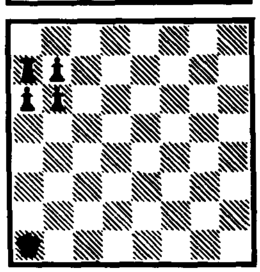
1


Мат в 2 хода.

1.Фf7(1)! Ферзь возвращается на первую плоскость, а черный король не может последовать его примеру (все поля под угрозой). 1...Кр:f3(2) 2. Фf3(1)×, 1...Крf4(2) 2. Фf4 (1)×, 1...Крf5(2). 2.Фf5(1)×, 1...Крd5(2) 2.Фd5(1)×.

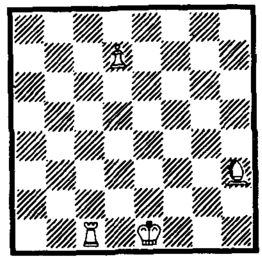
Чтобы разобраться в следующей задаче, вам придется очень внимательно «осмотреть пространство».

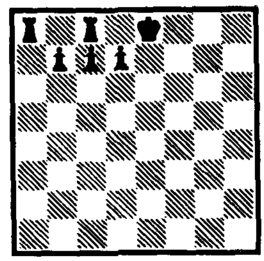
2


1


Мат в 4 хода.

Приведем основной вариант: **1.Кe5(2) — c5(1)!** с угрозой 2.Кb3(1)×. **1...bc(1) 2.Крc2(1) Лa7(2) 3.Лb2(1)** Лa2(2) 4.Лb1(1)×, или 3...Крa2(2) 4. Лa2(1)×. Проанализируем для примера заключительное положение во втором варианте. Черный король стоит на a2(2), и с нижней плоскости его матует ладья a2(1). Ее защищает конь c2(2), поля a1 и a3 на нижней доске бьет ладья a2(1), а на верхней — конь c2(2), поля b1, b2, b3 (1,2) под контролем белого короля.

2


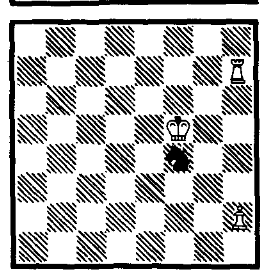
1


Кооперативный мат в 2 хода.

В задаче на кооперативный мат начинают черные, которые помогают белым поставить мат их королю. **1.Лc8(2)!** Только в параллельных шахматах окруженная со всех сторон ладья c8 может исчезнуть, не мешая рокировке короля. **1...d8(2)К! 2.0—0—0(1)! Л:c8(2)×.**

Конкурсные задания

2


1


15. Мат в 2 хода (параллельные доски).

16. Белые: Крe1, Лf1, Лh1; черные: Крg2. Мат в 3 хода (обычная доска).

Срок отправки решений — 25 октября 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 15, 16»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Хорошо известно, что плоскость можно покрыть (без перекрытий и пробелов) квадратами, правильными треугольниками и шестиугольниками. Предложенная вашему вниманию красочная мозаика показывает, что плоскость можно покрыть также и «буквами Т», составленными из 10 квадратиков. Тем самым решена одна из задач, сформулированная в статье Б. Грюнбаума и Дж. Шепарда «Некоторые проблемы, связанные с плоскими мозаиками» из замечательной книги «Математический цветник» под редакцией М. Гарднера (М.: Мир, 1983). Решение этой задачи (и некоторых других задач из статьи Б. Грюнбаума и Дж. Шепарда нам прислал А. Азамов.