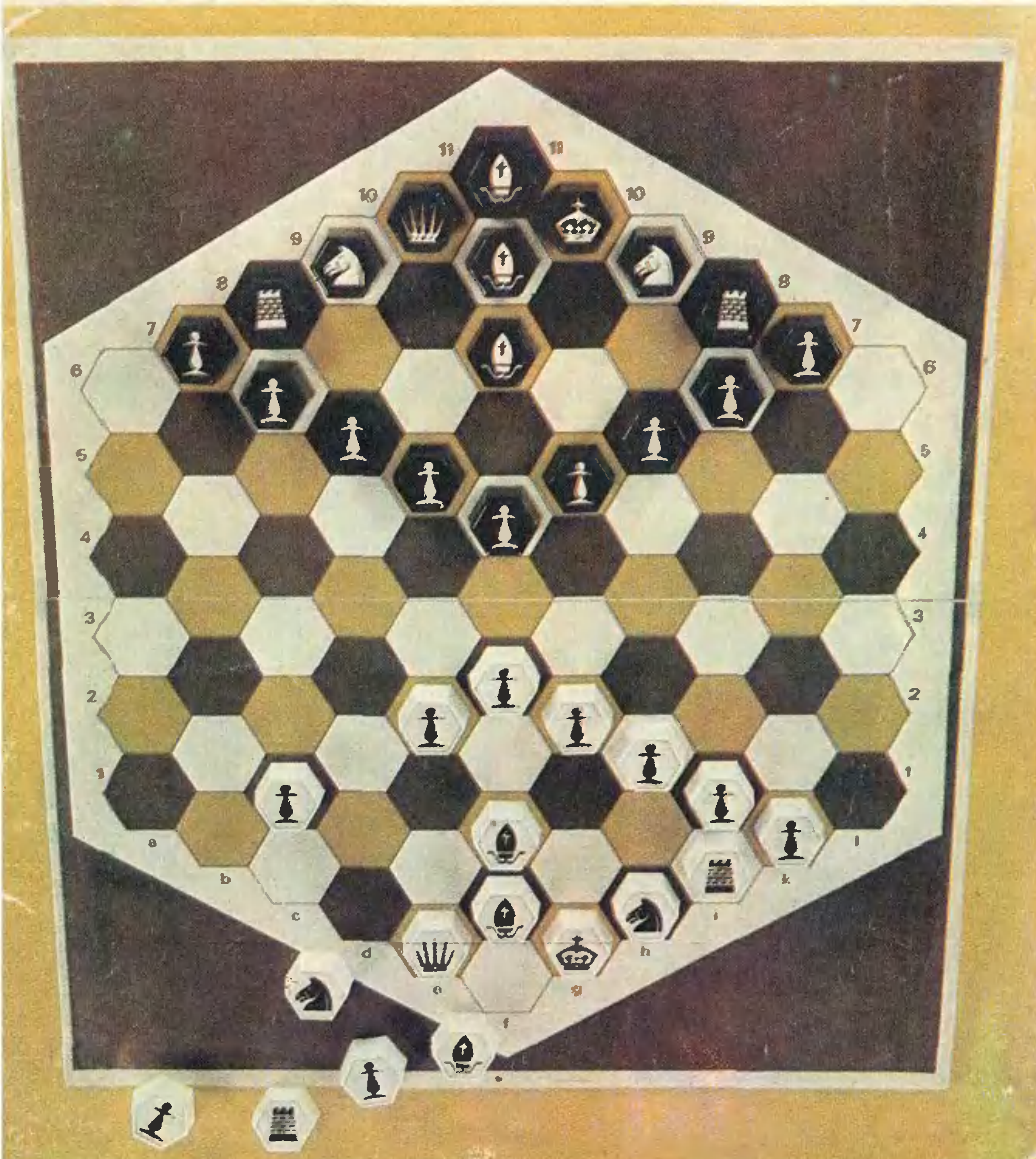
ISSN 0130-2221

Квант

10
1985

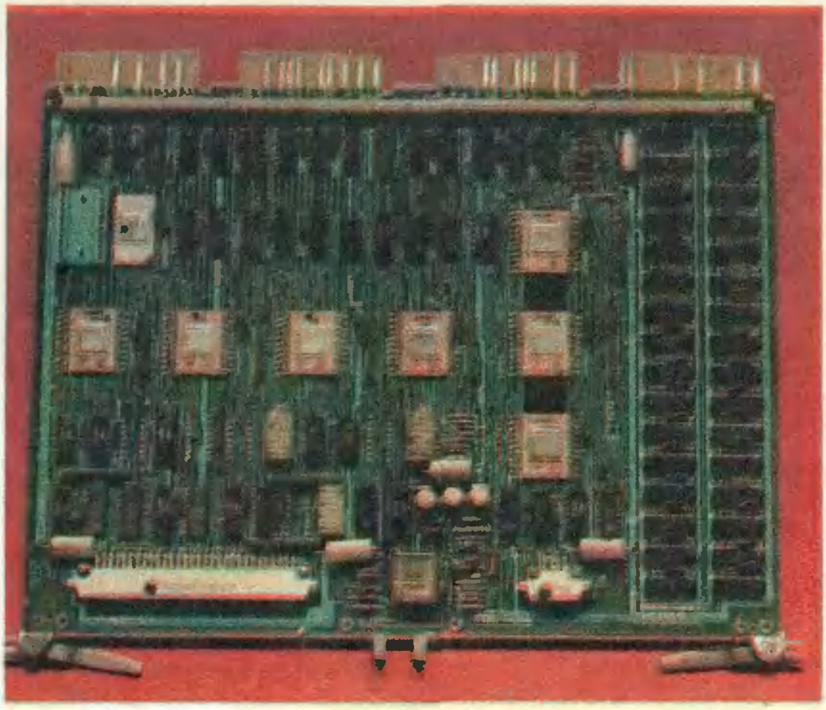
Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

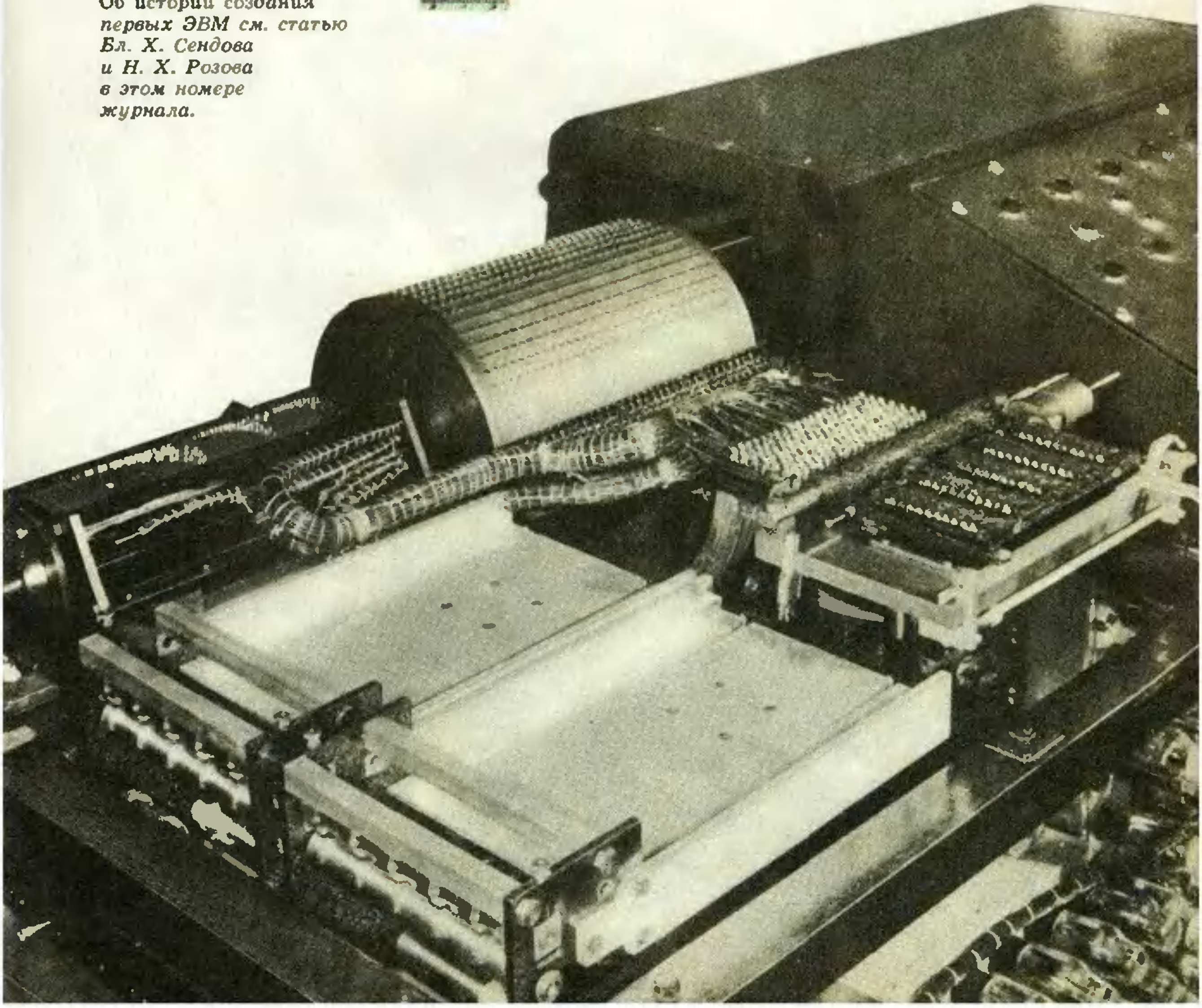


На черно-белой фотографии внизу показана часть первой в мире электронной вычислительной машины, сконструированной в 1942 году и названной «ABC» ее создателем Дж. Атанасовым. Вверху на цветном отпечатке показана «Электроника МС 1201.2», современная советская одноплатная встраиваемая микро-ЭВМ, а ниже — совсем крохотная однокристальная микро-ЭВМ «Электроника С5—31».

Интересно, что последняя машина, размером в почтовую марку, по объему памяти и быстродействию на много порядков превосходит своего неуклюжего прародителя, компьютер «ABC».

Об истории создания первых ЭВМ см. статью Бл. Х. Сендова и Н. Х. Розова в этом номере журнала.





Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант 10 1985

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / **IN THIS ISSUE:**

2	*В. А. Фабрикант.* Первые шаги Нильса Бора в науке	*V. A. Fabrikant.* Niels Bohr's first steps in science
8	*Бл. Х. Сендов, Н. Х. Розов.* История рождения компьютера	*Bl. Kh. Sendov, N. Kh. Rozov.* How the computer was born
	Новости науки	**Science news**
14	Еще один тип радиоактивности	One more kind of radioactivity
	Математический кружок	**Mathematics circle**
15	*С. Б. Гашков.* Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника	*S. B. Gashkov.* Inequalities fo the area and perimeter of convex polygons
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
21	Математика 8, 9, 10	Mathematics 8, 9, 10
24	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
25	Задачи	Problems
26	*А. В. Семёнов.* Трение: вредное, полезное, интересное...	*A. V. Semenov.* Friction: harmful, useful, interesting...
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
29	Задачи М946—М950; Ф958—Ф962	Problems M946—M950; P958—P962
34	Решения задач М926—М930; Ф938—Ф942	Solutions M926—M930; P938—P942
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Искусство программирования	**The art of programming**
42	*А. П. Ершов.* Алгоритмический язык	*A. P. Ershov.* The algoritmic language
	Полупроводниковые элементы вычислительной техники	**Semiconducting elements in computers**
46	II. Полевые транзисторы	II. Field transistors
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
48	*А. Р. Зильберман.* Повторим колебания	*A. R. Zilberman.* Reviewing oscillations
	Олимпиады	**Olympiads**
52	XI Всероссийская олимпиада школьников	The 11th All-Russian school olympiad
57	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Наша обложка (*41*)	**Our cover page** (*41*)
	«Квант» улыбается (*20*)	**Kvant smiles** (*20*)
	Смесь (*19, 24, 28, 40, 41, 55*)	**Miscellaneous** (*19, 24, 28, 40, 41, 55*)
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Гексагональные шахматы (*3-я с. обложки*)	Hexagonal chess (*3rd cover page*)

Необычная шахматная доска, воспроизведенная на первой странице обложки,— не шутка художника. На таких трехцветных шестиугольных досках играют в гексагональные шахматы. На обложке приведена начальная расстановка черных фигур, белые ставятся аналогично напротив черных. Как играть в такие шахматы, рассказано в сегодняшней «Шахматной страничке».

Первые шаги Нильса Бора в науке

Академик АПН СССР
В. А. ФАБРИКАНТ

Нильс Хенрик Давид Бор. Копенгаген, 1916 год.

Я рассматриваю труды Бора как величайший триумф человеческой мысли.
Резерфорд, 1936 г.

В этом году 7 октября человечество отметило столетие со дня рождения одного из создателей современной физики — Нильса Бора. Важно подчеркнуть, что слова Резерфорда, приведенные в качестве эпиграфа, сказаны им уже после того, как на смену боровской теории атома пришла стройная квантовая механика. Ни в коем случае не умаляя заслуги создателей квантовой механики Гейзенберга, Шредингера и Дирака, Резерфорд справедливо делает акцент на роли Бора.

Дирак, в значительной мере завершивший построение квантовой механики и заложивший основы квантовой электродинамики, так оценивал роль Бора в лекции, прочитанной им в 1975 году: «Я считаю, что появление идей Бора было самым грандиозным шагом в истории развития квантовой механики».

Надо сказать, что роль Бора была весьма своеобразной. Наибольшую известность получила так называемая модель атома Бора, хотя сам Бор относился к этой модели довольно скептически, понимая ее противоречивость. Гораздо более важными были те фундаментальные идеи, которые имел в виду Дирак.

Велики заслуги Бора и как учителя большой плеяды крупных ученых, в том числе выдающегося советского физика Ландау. Это связано не только с масштабами его научного гения, но и с поразительными душевными качествами. Он был человеком исключительной доброты, чистоты и обаяния. К Бору приезжали и молодые, и уже сложившиеся ученые. Он вел с ними поистине изнурительные дискуссии, приводившие к весьма важным новым результатам. Сбылись слова, сказанные о Боре, когда он был еще мальчиком, его отцом: «К Нильсу будут приходить люди и слушать его».

Студент, магистр, доктор

В 1903 году Нильс Бор поступил в Копенгагенский университет, где его отец Кристиан Бор был профессором физиологии. Курс физики в этом университете читал профессор Кристиансен. Широта его интересов и своеобразный подход к предмету, безусловно, сыграли очень большую роль в формировании Нильса Бора как физика.

Интересно, что студенты очень скоро почувствовали незаурядность Нильса Бора. Одна его сокурсница в письме своей кузине, отправленном в 1904 году, писала: «Кстати о гениях. С одним из них я встречаюсь каждый день. Это Нильс Бор, о котором я уже тебе рассказывала: его незаурядные способности проявляются все в большей степени».

В 1905 году Датское королевское общество наук объявило конкурс на лучшую работу по физике. Надо было исследовать колебания струй жидкостей с целью создания метода определения коэффициента поверхностного натяжения (речь шла о развитии работ знаменитого английского физика Рэлея). Бор весьма успешно справился с теоретическими проблемами, но эксперимент успел выполнить только с одной жидкостью — с водой. Важность теоретических результатов Бора была оценена золотой медалью, хотя его конкурент, также награжденный золотой медалью, разработал более простой экспериментальный метод и определил коэффициент поверхностного натяжения ряда жидкостей.

Окончив в 1907 году университет, Бор обратился к Кристиансену за темой для магистерской диссертации. Тот посоветовал заняться электронной теорией металлов. Бор послушался и вскоре написал своему брату Харальду, что работы Лоренца по электронной теории его очаровали. Но очарованность не помешала Бору обнаружить принципиальные недостатки классической электронной теории. В 1909 году Бор получил степень магистра и сразу же начал работать над докторской диссертацией, явившейся продолжением его теоретических исследований.

Докторская диссертация, представленная 12 апреля 1911 года, в частности, содержала доказательство принципиальной невозможности создания теории магнитных свойств вещества на основе чисто классических представлений. Так как диссертация была опубликована только на датском языке, ее результаты не получили широкого распространения, и через восемь лет голландка ван Лёвен заново провела то же доказательство (теорема Бора — ван Лёвен). Важно подчеркнуть, что здесь Бор впервые лично натолкнулся на границу применимости классической физики.

Защита диссертации состоялась 13 мая того же года. В еженедельнике «Политика» была помещена заметка, где кратко описывалось выступление на этой защите профессора Кристиансена: «Он говорил в своей обычной приятной манере, рассказал несколько забавных историй и выразил сожаление, что диссертация Бора не была опубликована на иностранном языке. У нас в Дании едва ли есть такие компетентные в электронной теории люди, кто бы мог судить о диссертации на эту тему». Дальше было написано: «Доктор Бор, бледный и застенчивый молодой человек, не принимал активного участия в обсуждении, побившем по своей непродолжительности все рекорды».

Кристиансен был прав, и поэтому Бор вскоре после защиты с радостью отправился в Кембридж на годичную стажировку.

Бор попадает к Резерфорду

В Кембридже работал сам «отец электрона» Дж. Дж. Томсон. Более компетентного человека в области, интересовавшей Бора, не было. Однако по ряду причин Бору не удалось наладить деловой контакт с Томсоном.

Зато в Кембридже Бор в октябре 1911 года впервые встретился с Резерфордом, приезжавшим сюда из Манчестера на так называемый ежегодный кавендишский обед. Бор вспоминал: «Хотя в этот раз мне не удалось познакомиться с Резерфордом, на меня произвели глубокое впечатление его обаяние и энергия — качества, с помощью которых ему удавалось достигать почти невероятных вещей, где бы он ни работал».

Н. Бор и Л. Д. Ландау на «Празднике Архимеда» в МГУ.

В ноябре Бор поехал в Манчестер к одному из коллег своего отца. Коллега оказался близким другом Резерфорда и познакомил с ним Бора. Позднее Бор писал: «Во время беседы, в которой Резерфорд с подлинным энтузиазмом говорил о многих новых перспективах развития физики, он любезно согласился на мою просьбу о том, чтобы мне присоединиться к группе, работающей в его лаборатории, после того как ранней весной 1912 года я должен был закончить свои занятия в Кембридже». Резерфорд только просил договориться о переезде с Джи-Джи (прозвище Томсона), чтобы эта процедура не выглядела как результат переманивания сотрудника от одного руководителя к другому. Согласие Томсона было получено без особого труда.

Если в Кембридже Бор увлекался моделью атома Томсона, согласно которой отрицательно заряженные электроны вкраплены в облако положительного заряда «как изюминки в кекс», то в Манчестере он быстро освоился с ядерной моделью атома Резерфорда, созданной только год тому назад, где положительный и отрицательный заряды как бы поменялись местами. В этой модели положительно заряженное ядро малых размеров окружено облаком электронов, движущихся по замкнутым орбитам вокруг ядра (как планеты вокруг Солнца). У модели Резерфорда имелся серьезный недостаток — она никак не могла объяснить устойчивость структуры атома, проявлявшуюся буквально на каждом шагу.

Бор с энтузиазмом окунулся в атмосферу манчестерской лаборатории и занялся попытками разрешения этого противоречия. Резерфорд быстро оценил глубину подхода Бора и оказывал ему всяческую поддержку. У Бора возникла идея применить к решению указанной проблемы квантовые представления, развитые Планком и Эйнштейном. Неизвестно, правда, где и когда Бор впервые познакомился с этими представлениями (характерная деталь — в курсе теоретической физики Кристиансена, изданном на немецком языке в 1910 году, нет ни слова о квантах!).

Главная работа Бора

В сентябре 1912 года Бор вернулся в Копенгаген и продолжил свои попытки применить квантовые представления к планетарной модели атома, но дело продвигалось очень туго. В первых числах февраля 1913 года к нему случайно заглянул его университетский товарищ — спектроскопист Хансен. До этой встречи Бор не проявлял никакого интереса к строению линейчатых спектров излучения и поглощения различных элементов. Позднее он говорил: «Они воспринимались так же, как прекрасные узоры на крыльях бабочек,— их красотой можно было восхищаться, но никто не думал, что регулярность в их окраске способна навести

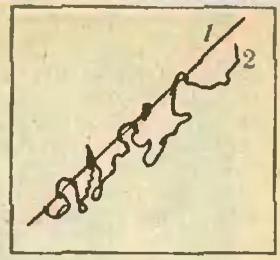
Н. Бор и В. Паули, наблюдающие за вращением волчка.

на след фундаментальных биологических законов». Хансен задал вопрос: «А как твоя теория объясняет спектральные формулы?» Бор, получивший к тому времени, как мы видели, весьма солидную подготовку в области теоретической физики, не понял, о чем идет речь. Он ничего не знал ни о каких спектральных формулах. Хансен сказал: «Тебе необходимо посмотреть эти формулы. Они с замечательной простотой описывают атомные спектры». Бор выполнил этот совет из вежливости, не придавая ему особого значения. Однако, по его словам, как только он увидел формулу Бальмера, все немедленно прояснилось. Формула эта была подобрана Бальмером (швейцарским физиком и математиком) чисто эмпирическим путем еще в конце XIX века и выражала последовательность частот для ряда линий в видимой области спектра атома водорода. Несколько позднее аналогичные закономерности были обнаружены и для невидимых участков водородного спектра.

После знакомства с формулой Бальмера дело быстро пошло на лад, и уже в марте 1913 года Бор завершил работу, которую он назвал «О строении атомов и молекул». В том же году по представлению Резерфорда она была опубликована в в английском журнале «Phylosophical Magazine» в виде трех статей. Мы ограничимся рассмотрением только первой, наиболее важной из «трилогии» Бора статьи — «Связывание электронов положительным ядром».

Между фактическим ходом исследования и изложением его автором в завершающей статье часто существует разрыв. Известный американский биохимик, нобелевский лауреат Сент-Дьёрдьи изобразил часто складывающуюся ситуацию графически (см. рис.), где по одной оси отложено время, по другой — «истина». Ломаная 2 выражает фактический ход исследования, когда периоды роста «истины» сменяются периодами ее спада (то есть заблуждениями), а идеальная прямая *1* изображает изложение этого же процесса в завершающем труде.

Бор, по натуре человек откровенный, не мог так поступить, хотя и переделывал свою статью многократно. Для Бора характерна также щепе-



«График» Сент-Дьёрдьи.

тильность, с которой он ссылается на своих неудачливых предшественников, пытавшихся применить квантовые представления к объяснению свойств атома.

Введение к статье содержит очень важное замечание, касающееся роли квантовой постоянной Планка в теории атома. Это замечание носит совершенно современный характер и связано с так называемой теорией размерностей. Одним из пионеров применения методов теории размерностей в физике был Рэлей (с развития трудов которого, еще студентом, начинал свою научную деятельность Бор).

Если выбрана определенная система основных величин, например в механике — длина, время и масса, то размерности производных величин записываются через размерности основных величин. Так, размерность длины обозначается $[l]=L$, тогда размерность площади $[S]=L^2$ и объема $[V]=L^3$. Размерность времени $[t]=T$, соответственно размерность скорости $[v]=LT^{-1}$, а ускорения $[a]=LT^{-2}$. Так как размерность массы $[m]=M$, то размерность силы $[F]=MLT^{-2}$. И так далее.

Бор обратил внимание на то, что в модели атома Резерфорда имеются только два параметра — заряд e и масса электрона m, из которых нельзя образовать величину, определяющую структуру атома и имеющую размерность длины. Если же добавить планковскую постоянную h, то такая возможность появляется.

Воспроизведем несложные выкладки, отсутствующие в статье Бора, которые помогут понять его идею. При этом мы, так же как это сделал Бор в последующих частях статьи, будем пользоваться так называемой абсолютной электростатической системой единиц (СГСЭ). В ней в качестве основных механических единиц приняты сантиметр, грамм и секунда (отсюда буквы СГС). Размерность заряда электрона в этой системе проще всего определить из закона Кулона (основного закона электростатики), записав его в простейшем виде $F=e^2/r^2$. Тогда $[e^2/r^2]=[F]=MLT^{-2}$, откуда $[e]=M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$. Размерность планковской постоянной определяется из формулы для энергии кванта $E=h\nu$. Поскольку частота ν равна единице, деленной на период колебаний, ее размерность $[\nu]=T^{-1}$. Размерность энергии легко получить из выражения для кинетической энергии ($mv^2/2$), которое дает $[E]=ML^2T^{-2}$. Тогда размерность планковской постоянной $[h]=[E]/[\nu]=ML^2T^{-1}$.

Составим выражение $h^2/(me^2)$. Его размерность будет просто L (что легко проверить, воспользовавшись приведенными выше выкладками). Значит, это выражение характеризует некоторую длину. И действительно, если ввести множитель $1/(4\pi^2)$, то есть заменить h на $\hbar=h/2\pi$, получим $h^2/(4\pi^2)(me^2)=\hbar^2/(me^2)$ — величину, равную радиусу атома водорода. Справедливости ради отметим, что метод размерностей не может дать никаких сведений о численных множителях типа $1/(4\pi^2)$.

Теперь об основном содержании статьи. Планк считал частоту излучения, испускаемого атомом, равной частоте колебаний электрона, рассматриваемого как линейный осциллятор (модель — электрон на пружинке). В планетарной модели атома аналогом этой частоты должна служить частота обращения электрона по орбите. Однако в действительности с частотой излучения дело обстоит гораздо сложнее.

Бор при помощи элементарных выкладок, но далеко не безупречным в смысле логики путем выводит выражение для энергии электрона E_n, вращающегося по одной из стационарных орбит. В современных обозначениях

$$E_n=-\frac{2\pi^2me^4Z^2}{n^2h^2}, \qquad (1)$$

где Z — порядковый номер элемента в периодической таблице, $n=1, 2, 3,...$ — так называемое квантовое число, задающее номер орбиты. Затем, предполагая, что при переходе с одной стационарной орбиты на другую электрон испускает *один* квант лучистой энергии, он записывает знаменитое боровское условие для частоты:

$$h\nu=E_{n1}-E_{n2}, \qquad (2)$$

откуда

$$\nu=\frac{2\pi^2me^4Z^2}{h^3}\left(\frac{1}{n_2^2}-\frac{1}{n_1^2}\right). \qquad (3)$$

При $Z=1$ (для атома водорода) и $n_2=2$ это совпадает с эмпирической формулой Бальмера

$$\nu=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n_1^2}\right),\ n_1=3, 4, ...,$$

где R — постоянная величина.

Только после завершения этого вывода Бор обращает внимание на то, что для круговых орбит можно получить промежуточное следствие — так называемое правило квантования орбит. Если электрон движется со скоростью v_n по круговой орбите радиуса r_n, то произведение импульса электрона на радиус, называемое в механике моментом импульса, принимает только определенные, дискретные значения, кратные постоянной Планка:

$$mv_nr_n=n\hbar=n\frac{h}{2\pi}. \qquad (4)$$

Теперь, при современных изложениях теории Бора, идут обратным, более простым путем, указанным им самим: сразу постулируют правильность формулы (4) и с ее помощью получают квантование энергии электрона.

При тщательном сравнении формулы (3) с опытными данными обнаружились небольшие расхождения. Бор их быстро устранил, учтя то, что ядро в атоме не неподвижно, а описывает окружность малого радиуса — в планетарной модели атома и ядро и электрон вращаются относительно их центра масс, расположенного вблизи ядра. Это приводит к том у, что в формуле (3) вместо m должно входить $m/(1+m/M)$, где M — масса ядра, у водорода почти в 2000 раз превышающая m. Как нетрудно видеть, поправка действительно мала. Тем убедительнее выглядела модель атома Резерфорда — Бора. Такое же хорошее согласие получалось и для остальных спектральных серий водорода и иона гелия. Однако для других атомов, где число электронов больше одного, эта модель не объясняет спектры их излучения так же хорошо, как для водорода.

Надо сказать, что у Бора не было наивной радости по поводу прекрасного согласия теории и опыта. До конца Бор сохранял свое понимание орбитальной модели как условного «образа» атома.

Как ни важны были конкретные результаты, полученные Бором в этой работе, но еще важнее были основные идеи, заключавшиеся в ней. Приведем их в формулировках, данных самим Бором:

«1) Динамическое равновесие системы (имеется в виду атом — *В. Ф.*) в стационарных состояниях можно трактовать с помощью обычной механики, тогда как переход системы из одного стационарного состояния в другое нельзя трактовать на этой основе.

2) Указанный переход сопровождается испусканием монохроматического*) излучения, для которого соотношение между частотой и количеством выделенной энергии именно такое, которое дает теория Планка».

Существование стационарных состояний Бор «объяснил», приняв в качестве постулата, что, вопреки классической электродинамике, в этих состояниях электрон, движущийся ускоренно по орбите, не излучает. Только гений такого масштаба как Бор мог решиться на этот шаг. Так родились знаменитые постулаты Бора.

Напомним, что первая работа Планка не была лишена противоречивости. Прокладывание принципиальных путей в науке вообще дело весьма нелегкое. Недаром в известном изречении Карла Маркса говорится: «В науке нет широкой столбовой дороги, и только тот может достигнуть ее сияющих вершин, кто, не страшась усталости, карабкается по ее каменистым тропам». Бор, смело идя на разрыв с классической электродинамикой, вместе с тем использует соображения, из которых родился важный физический принцип — принцип соответствия. Он заключается в том, что все-таки должно существовать некое «соответствие» между результатами квантовых и классических рассмотрений. В предельном случае (когда величина квантов стремится к нулю) это соответствие должно переходить в простое совпадение — подобно тому как механика Эйнштейна переходит в механику Ньютона при скоростях, малых по сравнению со скоростью света.

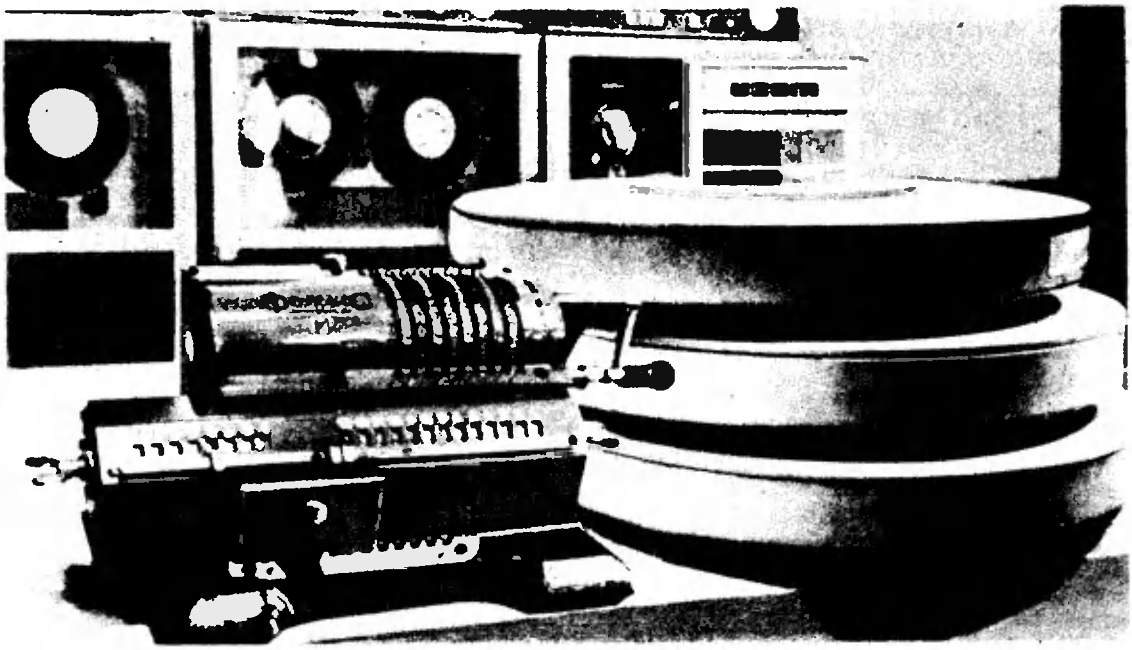
Принцип соответствия, несмотря на свою несколько туманную формулировку, сыграл огромную роль в развитии физики атомов и молекул. Ученик Бора нидерландский физик-теоретик Крамерс, с большим успехом применивший этот принцип в своей работе, писал: «Мое глубокое убеждение состоит в том, что в области человеческого мышления вообще, и в физике в частности, наиболее важные и самые плодотворные концепции это те, которым невозможно придать точно определенный смысл». Эти слова друзья Крамерса взяли в качестве эпиграфа к посмертному изданию его сочинений.

Герб Н. Бора.

В первой работе Бора еще не было сформулированного им принципа дополнительности. Для света, например, этот принцип проявляется в том, что полное описание его свойств должно включать в себя такие противоположные понятия, как волна и частица (фотон). Эти понятия как бы дополняют друг друга. Когда Бор был награжден высшим датским орденом Белого Слона и тем самым получил дворянство, он выбрал себе герб с изображением древнекитайского символа Инь и Янь, где одна светлая фигура, похожая на запятую, дополняет такую же темную фигуру до полного круга. На гербе по-латыни написан девиз: «Противоположности дополняют друг друга».

---

*) Квантовым представлениям не противоречит испускание атомом сразу нескольких фотонов при переходе из одного стационарного состояния в другое. Но тогда излучение перестает быть монохроматическим (см. статью В. А. Фабриканта «Что такое нелинейная оптика»; «Квант», 1985, № 8). Линейчатые спектры, объясненные Бором, соответствуют именно однофотонным процессам.



История рождения компьютера

Академик Болгарской академии наук
Бл. Х. СЕНДОВ,
доктор физико-математических наук
Н. Х. РОЗОВ

В статье «Предыстория рождения компьютера» (см. «Квант», 1985, № 9) было рассказано о многовековом пути человечества от счета на пальцах до арифмометра. Сейчас мы продолжим путешествие по истории — от возникновения теоретической идеи «считающей машины» до создания первых реальных ЭВМ. Этот этап развития вычислительной техники, непосредственно предваряющий эру современных компьютеров, занял примерно столетие.

На грани реального и фантастического

Великая промышленная революция, ознаменовавшаяся постепенным, но неуклонным переходом от мелкого ручного ремесленного труда к крупному машинному фабричному производству, с течением времени затронула все области техники и дала мощный импульс дальнейшему прогрессу науки. Это была эпоха великих открытий, выдающихся изобретений, плодотворных идей. Прогресс не мог в конце концов не проявиться и в вычислительном деле, столь тесно связанном с торгово-индустриальными и научно-техническими проблемами.

С начала XIX века главное внимание ученых, интересовавшихся облегчением и обеспечением вычислений, было сосредоточено на всестороннем совершенствовании считающих устройств, получавших все более и более широкое распространение. Основное предназначение считающего устройства (наиболее удачным его примером является арифмометр Однера) состояло в том, чтобы самостоятельно осуществлять любую арифметическую операцию над числами.

А можно ли создать машину, которая бы выполняла не просто отдельные арифметические операции, но «умела» автоматически проводить всю цепочку вычислений, необходимую для решения задачи в целом? Такая постановка вопроса представляется сегодня абсолютно естественной и логичной, однако двести-полтораста лет назад даже сама по себе эта мысль была нетривиальной и означала открытие нового направления в научном поиске. Человеком, которому суждено было высказать и впервые попытаться реализовать фундаментальную идею вычислительной машины, явился англичанин Чарльз Бэббидж (1791—1871).

Крупный математик, талантливый инженер, разносторонний изобретатель, известный естествоиспытатель, пытливый исследователь, Ч. Бэббидж, при поразительном многообразии своих интересов и осуществленных дел, всю жизнь неутомимо и упорно занимался разработкой и конструированием вычислительных машин. В 1822 году он построил образец машины, названной им «разностной», и приступил к созданию большой разностной машины, предназначенной для расчета навигационных и астрономических таблиц. Однако эта работа по разным причинам завершена так и не была.

В 1834 году Ч. Бэббидж начинает работу над своим главным детищем — вычислительной машиной, которую он назвал «аналитической» и которая должна была автоматически решать все те вычислительные задачи, с которыми сталкивались инженеры и математики. Грандиозный проект такой машины, разработанный автором с удивительной подробностью, настолько обогнал свое время, что его практическое осуществление не могло не оказаться нереальным.

В чем конкретно состоял сделанный Ч. Бэббиджем шаг вперед в развитии вычислительной техники? Прежде всего, машины Бэббиджа, как аналитическая, так и разностная, рассчитаны не на выполнение каждой арифметической операции по отдельным командам человека, поступающим всякий раз после завершения предыдущей операции, а на комплексное проведение — без вмешательства человека на промежуточных этапах — всего нужного объема вычислений в целом. При этом, если разностная машина была ориентирована на одну вполне определенную, неизменную программу действий с данными числами, то аналитическая машина допускала осуществление различных программ вычислений в зависимости от рассматриваемой задачи. Выражаясь современным языком, разностная машина — это *специализированная вычислительная машина с фиксированной программой*, а аналитическая машина — это *универсальная автоматическая вычислительная машина с программным управлением.*

Чарльз Бэббидж — автор проекта первой универсальной программируемой вычислительной машины.

Нельзя не отметить, что аналитическая машина Бэббиджа представляла собой единый комплекс специализированных блоков: *устройства для ввода* начальной информации (исходных данных), *запоминающего устройства (памяти), арифметического устройства* (осуществляющего действия над числами), *устройства управления* (обеспечивающего выполнение операций в необходимой последовательности), *устройства для вывода* обработанной информации (результата). Иными словами, эта машина, предвосхищая архитектуру современных компьютеров, обладала практически всеми их нынешними основными структурными компонентами.

Однако — дитя своей эпохи! — аналитическая машина, как и все предшествующие ей считающие устройства, была (и не могла не быть) чисто м е х а н и ч е с к и м калькулятором. Ведь в первой половине прошлого столетия исследования в области электричества, работы по его использованию еще только начинались. Именно поэтому гениальные идеи Ч. Бэббиджа относительно назначения, логической структуры и принципов работы вычислительной машины оказались облеченными в одежды, заранее предопределившие бесперспективность попыток внедрения подобных машин в жизнь. Впрочем, и здесь Ч. Бэббидж пытался сказать новое слово: проект предусматривал, что приводить аналитическую машину в действие должен паровой двигатель.

Первая леди компьютерного королевства

Как показала дальнейшая история, одним из пророческих замыслов Ч. Бэббиджа явилась предложенная им система управления вычислительной машиной с помощью перфокарт. Идея использования карточек с пробитыми в них отверстиями (перфокарт) получила широкое распространение после того, как в 1804 году французский изобретатель Жозеф Мари Жаккар (1752—1834) применил их для автоматизации работы ткацкого станка. Однако Ч. Бэббиджу впервые пришлось заняться детальной разработкой многих вопросов, связанных с введением перфокартами в машину массивов чисел и последовательностей команд.

Управление вычислительной машиной, очевидно, невозможно без развития теории рационального описания комплексов тех операций, которые следует выполнять машине при решении различных задач. Тем самым оказалось неизбежным рождение нового направления науки — программирования. Заслуга создания этого направления принадлежит Августе Аде Лавлейс (1815—1852), дочери великого английского поэта Джорджа Байрона.

Леди Лавлейс, проявлявшая незаурядные математические способности, серьезно интересовалась работой Ч. Бэббиджа и глубоко понимала его идеи. В своей публикации 1843 года, которую по праву считают первой работой по теории программирования, она высказала целый ряд мыслей и принципов, сохраняющих свое значение и сегодня, а некоторые предложенные ею термины закрепились в научном языке. Ей принадлежит и исторически первая достаточно сложная конкретная программа — для вычисления так называемых чисел Бернулли по специально разработанному алгоритму (практически опробовать

Ада Лавлейс — создатель первой программы для вычислительной машины.

эту программу она, конечно, не могла по причине отсутствия машины).

Говоря о программировании, нельзя не отметить еще два факта, относящихся к XIX веку и сыгравших особенно важную роль в становлении этой науки. Первый — «изобретение» Ч. Бэббиджем специальной команды, называемой сейчас *командой условного перехода* (говорят еще *ветвления*) и имеющей в современном программировании исключительное значение. Эта команда позволяет самой машине автоматически определять дальнейшую последовательность операций в зависимости от результата, получающегося на определенном шаге работы. Тем самым открывается возможность поручить машине выполнение не только арифметических, но и логических операций.

Однако для того чтобы продвинуться по этому пути, нужно располагать аппаратом формально-математического анализа логических высказываний. Именно таким аппаратом оказалась теория, предложенная в 1847 году английским математиком Джорджем Булем (1815—1864) и получившая название *булевой алгебры.*

Это — второй исторический факт XIX века, предопределивший использование вычислительных машин для решения логических проблем и автоматизации рассуждений.

Время надежд, время исканий

Ч. Бэббидж умер, его аналитическая машина так и осталась незавершенным проектом... Но его основная идея — создать автоматическую вычислительную машину с программным управлением для выполнения научно-технических расчетов — умереть не могла. Ибо она была прозорливым предвидением насущных потребностей продолжающегося развития цивилизации.

Уже с конца прошлого столетия быстро увеличивается число моделей и модификаций арифмометра и других считающих устройств (клавишных, записывающих и т. п.), начинается их широкое производство и применение. Арифмометр существенно облегчил и ускорил наиболее утомительную и рутинную работу — выполнение арифметических операций. Однако фактическое решение сколько-нибудь серьезной конкретной математической задачи, получение в ней реального ответа в виде численных данных, прежде всего обычно и нужного в приложениях, оставалось целой проблемой, непростым и трудоемким делом, требовавшим длительных усилий больших коллективов вычислителей.

Например, одним из основных мостов, связывающих математику с жизнью, являются *дифференциальные уравнения*. Естественно, что отыскание решений (или, как говорят математики, *интегрирование*) таких уравнений служит типичным объектом вычислительных работ. Вот что говорилось по этому поводу в книге «Численное интегрирование дифференциальных уравнений», изданной всего лишь полвека назад, в 1932 году: «Читатель должен твердо уяснить себе главную мысль: решение этих уравнений в огромном большинстве случаев является на практике чрезвычайно трудной операцией, отнимающей часто много времени на вычисления...»

Было совершенно ясно: разрешить все усиливающееся противоречие между уровнем развития математической теории и возможностями ее реальных приложений, ликвидировать громадные трудности на пути осуществления расчетов, в которых остро нуждались техника и наука, экономика и управление, может лишь вычислительная машина. Этим в первую очередь и объясняется, что пристальный интерес к конструированию вычислительных машин, явно наметившийся в конце XIX века, стал затем резко расти. Усилиями отдельных инженеров, физиков, математиков, изобретателей, а чаще — целых коллективов удалось добиться многих замечательных результатов. Нельзя не подчеркнуть, что в значительной мере эти результаты были бы невозможны без сделанных к тому времени открытий и исследований в физике, механике, технике, без достигнутого уровня промышленного производства и технологической культуры.

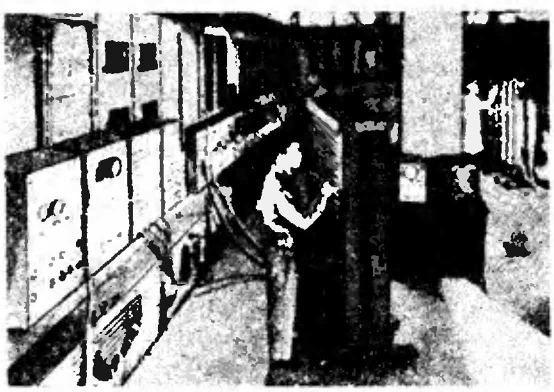
Какие же вычислительные машины были спроектированы и созданы в первой половине нашего столетия? Даже простое перечисление их моделей потребовало бы слишком много места. Поэтому мы ограничимся лишь кратким перечислением их основных, принципиальных особенностей и несколькими примерами.

Большую группу составляли специализированные *электромеханические вычислительные машины*, представлявшие собой механический калькулятор, который приводился в движение электроприводом и управлялся электрическими импульсами. Особое распространение получили *табуляторы* (иначе: счетно-аналитические, или счетно-перфорационные машины), применявшиеся главным образом для механизации решения задач статистики и учета. Первый табулятор разработал еще в 1884 году американский инженер Германн Холлерит (1860—1929).

Были построены электромеханические вычислительные машины, ориентированные и на другие важные практические задачи. Надо признать, что некоторые из них являлись блестящими образцами совершенной конструкторской мысли и идеального технического исполнения. Среди них следует упомянуть первую машину для интегрирования дифференциальных уравнений, изобретенную известным советским математиком и корабелом академиком А. Н. Крыловым (1863—1945). Отметим далее, что в 1915 году фирма «Аскания» (Берлин) изготовила вычислительную машину для определения времени приливов и отливов на северном побережье Германии. Автомат состоял из замысловатого кружева нескольких сотен бронзовых шестеренок и был не так уж громоздок. Для того, чтобы составить расписание приливов на год, он должен был «шевелить шестеренками» восемь часов — быстродействие достаточно поразительное по тем временам. Но еще более поразительно, что машина верой и правдой безотказно служила 60 лет — до 1975 года!

Другую группу составляли *универсальные* электромеханические вычислительные машины с *программным управлением*. В этих машинах применялась техническая новинка — электромагнитное реле. Исторически первой действующей машиной такого типа была машина «Ц-3», построенная в 1941 году немецким инженером Конрадом Цузе, однако развязанная гитлеровской Германией война стала причиной того, что это достижение немецкой науки не получило своевременной известности и не оказало влияния на развитие вычислительной техники.

Самая совершенная из машин этой группы, получившая название «Марк-1», создавалась в 1937—1944 годах под руководством американского физика Говарда Эйкена. Она сыграла большую роль в решении целого ряда ключевых вопросов конструирования компьютеров. Вот некоторые ее характеристики. «Марк-1» весил 4,5 тонны, занимал площадь 17×2,5 м и представлял собой сложную комбинацию огромного числа релейных и механических элементов, соединенных 800 км электропроводки. Ввод начальных данных — 23-значных чисел в обычной (десятичной) форме осуществлялся с помощью перфокарт, а управление работой машины обеспечивалось бумажной перфолентой. На операцию сложения (вычитания) затрачивалось 0,3 секунды, а умножение и деление требовали 5,7 с и 15,3 с соответственно.



ЭНИАК — первая эффективно работающая ЭВМ.

Наконец, упомянем еще большую группу *аналоговых вычислительных машин* (или машин непрерывного действия). Работа этих машин базируется на идее конструирования — по исходным данным — такой модельной схемы (главным образом — электрической), измерение одной из физических характеристик (например напряжения) которой и определяет искомую величину. Эти машины особенно хорошо себя зарекомендовали при решении задач, где в первую очередь важно получить качественное или графическое представление об изменении неизвестной. Однако для особо точных вычислений они практически непригодны.

Итак, достигнутые успехи в создании вычислительных машин были несомненны. И все же эти машины ни в коей мере не могли удовлетворить огромные «вычислительные потребности», сложившиеся к середине XX века. Непомерно дорогостоящей и неприемлемо громоздкой являлась их конструкция, слишком низкой оставалась скорость работы, явно недостаточным был объем памяти, весьма негибким оказывалось на практике управление процессом вычислений. Дальнейшее интенсивное развитие вычислительной техники, ее массовое использование объективно не могло быть обеспечено лишь улучшением реализации уже имевшихся идей.

Требовалась принципиально новая идея...

«АВС» — первый электронный компьютер

Принципиально новая идея состояла в том, чтобы заменить все механические элементы машины, все электромагнитные реле *электронными*

Дж. Атанасов — конструктор первой электронной вычислительной машины.

Академик С. А. Лебедев — создатель первой в СССР (и в Европе) ЭВМ.

вакуумными лампами. Реализация этой идеи привела к появлению ЭВМ — *электронной вычислительной машины* и ознаменовала начало новой эры в развитии вычислительной техники. Напомним, что в 30-е годы нашего столетия электронные лампы были уже довольно подробно изучены и широко распространены в технике, что создавало благоприятные потенциальные возможности успешного их использования в вычислительной технике.

До относительно недавнего времени в различных публикациях, где речь заходила о зарождении ЭВМ, это событие связывалось с именами Джона Мокли и Джона Эккерта. В подтверждение приводился бесспорный и общеизвестный факт: эти два американских физика спроектировали и в 1945 году запустили в действие электронную вычислительную машину, названную «ЭНИАК». На этом основании делался (явно или неявно) вывод, что именно им принадлежит и сама идея, приведшая к революционной перестройке всей вычислительной техники.

Но история возникновения идеи ЭВМ оказалась много более сложной и запутанной, а события, связанные с созданием первой электронной вычислительной машины, протекали совсем не так прямолинейно.

Несомненно, «ЭНИАК» явилась первой в мире работающей ЭВМ, реальной родоначальницей вычислительных машин принципиально нового типа. Ее конструкторы Дж. Мокли и Дж. Эккерт имеют неоспоримые и существенные заслуги в развитии современной вычислительной техники. Однако основополагающие принципы ЭВМ впервые были высказаны не ими.

Эти принципы впервые — и притом в весьма законченной форме — высказал в 1937 году американский физик болгарского происхождения Джон Винсент Атанасов (род. в 1903 году). В частности, он предложил при оперировании с числами в машине использовать двоичную систему счисления, а для ее создания рекомендовал комбинации из ламповых схем и конденсаторов.

Более того, Дж. Атанасов, вместе со своим помощником Клиффордом Бэрри, предпринял и первую попытку спроектировать и построить электронный компьютер. Этот компьютер, названный им позже «АВС», был практически закончен к 1942 году, оставалось лишь укомплектовать периферийное оборудование на перфокартах. И то, что «АВС» так и не удалось ввести в эксплуатацию,— одно из драматических следствий самого трагического события нашего века, второй мировой войны. Надо, впрочем, заметить, что и идеи, и работа Дж. Атанасова над электронным компьютером были известны целому ряду ученых и, в том числе, Дж. Мокли.

Факты, связанные с работой Дж. Атанасова над первым электронным компьютером, стали широко известны лишь в 60-е годы, а несколько позже был официально признан его приоритет.

После появления в 1945 году первого действующего электронного компьютера начался период бурного развития электронной вычислительной техники. История этого периода — тема отдельного разговора. А закончить настоящую статью нам хотелось бы напоминанием о первой советской электронной вычислительной машине «МЭСМ». Она была построена в 1951 году под руководством академика Сергея Алексеевича Лебедева (1902—1974) и была, кстати, первым электронным компьютером в Европе.

Новости науки

Еще один тип радиоактивности

Как уже рассказывалось в «Кванте» (см. «Квант», 1984, № 8, с. 38), несколько лет назад было обнаружено самопроизвольное превращение радия в свинец с испусканием ядер углерода. Были зарегистрированы распады трех изотопов радия:

$$^{222}_{88}Ra \to ^{208}_{82}Pb + ^{14}_{6}C,$$
$$^{223}_{88}Ra \to ^{209}_{82}Pb + ^{14}_{6}C,$$
$$^{224}_{88}Ra \to ^{210}_{82}Pb + ^{14}_{6}C.$$

Так к давно известным видам радиоактивных превращений тяжелых ядер, встречающихся в природе (альфа- и бета-распады, спонтанное деление ядер и т. д.), добавился новый вид — распад с излучением ядра изотопа углерода, более тяжелого, чем ядро гелия (альфа-частица).

Совсем недавно, в этом году, сотрудниками Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна), а также группой американских физиков был обнаружен еще один тип распада, с излучением еще более тяжелого ядра — ядра неона.

Так, например, распадается изотоп урана с массовым числом 233:

$$\boxed{^{233}_{92}U \to ^{209}_{82}Pb + ^{24}_{10}Ne}$$

или

$$\boxed{^{233}_{92}U \to ^{208}_{82}Pb + ^{25}_{10}Ne.}$$

— распад идет с излучением изотопа неона с массовым числом 24 или 25. Какой именно происходит распад — пока не ясно.

Вероятность такого распада очень мала: примерно на 10^{12} излученных альфа-частиц приходится одно ядро неона. Если бы альфа-распада урана не было, ядро урана жило бы в среднем около 10^{17} лет, дожидаясь своего неонного распада (период полураспада изотопа урана-233 с испусканием альфа-частицы составляет $1{,}62 \times 10^5$ лет).

Распадается и другой изотоп урана — с массовым числом 232:

$$\boxed{^{232}_{92}U \to ^{208}_{82}Pb + ^{24}_{10}Ne.}$$

Вероятность вылета ядра неона в этом случае тоже примерно в 10^{12} раз меньше вероятности вылета альфа-частицы.

Обнаружен такой же распад еще одного ядра — ядра протактиния:

$$\boxed{^{231}_{91}Pa \to ^{207}_{81}Tl + ^{24}_{10}Ne.}$$

Образовавшийся таллий-207 превращается в свинец-207 (среднее время жизни таллия-207 составляет 6,8 мин) с излучением электрона (бета-распад). Вероятность неонного распада протактиния меньше вероятности его альфа-распада приблизительно в 10^{11} раз.

Все вновь открытые распады, как мы видим, заканчиваются на изотопах свинца, на которых заканчиваются и все естественно-радиоактивные ряды — семейства урана, тория и актиния. Природа нашла еще один — обходной — путь превращения различных элементов в устойчивый свинец.

Я. С.

Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника

Кандидат физико-математических наук
С. Б. ГАШКОВ

Возможно, читателю известно, что среди всех фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг. Если нет, советуем прочитать статью В. В. Трофимова «Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки» в пятом номере журнала за этот год.

Здесь же мы познакомим читателя с аналогичными экстремальными свойствами правильных n-угольников, выделяющими их среди всех прочих n-угольников, и в качестве следствий получим несколько интересных неравенств, связывающих между собой площадь и периметр n-угольника, радиусы «вписанного» и «описанного» кругов и другие его характеристики. Для точной формулировки и доказательства этих утверждений нам придется определить несколько вспомогательных понятий, а для треугольников упомянутые утверждения можно сформулировать уже сейчас.

Упражнения

1. Среди треугольников, вписанных в данный круг, наибольшую площадь (и периметр) имеет правильный треугольник.

2. Среди треугольников, описанных около данного круга, наименьшую площадь (и периметр) имеет правильный.

3. Среди треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет правильный.

4. Среди треугольников с данной минимальной высотой наименьшую площадь (и периметр) имеет правильный.

5. Среди треугольников с данной максимальной стороной наибольшую площадь (и периметр) имеет правильный.

Далее аналоги утверждений 1-5 будут доказаны для произвольных выпуклых n-угольников.

Что такое выпуклый многоугольник?

Определение 1. *Многоугольник P называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через какие-нибудь две соседние его вершины.* Такие прямые далее называются касательными к многоугольнику P, так что касательная — это прямая, содержащая какую-нибудь его сторону. Далее рассматриваются только выпуклые многоугольники, а появление невыпуклых многоугольников оговаривается особо.

Упражнения

6. Докажите, что выпуклый многоугольник совпадает с пересечением своих касательных полуплоскостей. Полуплоскость называется касательной к P, если она содержит P и ограничена касательной к P.

7. Докажите, что прямая, имеющая общие точки с выпуклым многоугольником, либо разрезает его на два многоугольника, либо проходит через его вершину так, что он целиком лежит в одной из полуплоскостей, определяемых рассматриваемой прямой.

Определение 2. *Прямая, проходящая через вершину выпуклого многоугольника так, что он лежит целиком по одну сторону от этой прямой, называется опорной к этому многоугольнику.* Любая касательная является опорной, но не каждая опорная является касательной (см. рис. 1).

Упражнение 8. Докажите, что выпуклый многоугольник имеет в точности две опорные прямые, параллельные данному направлению. Эти прямые ограничивают полосу, содержащую этот многоугольник.

Определение 3. *Полоса, ограниченная параллельными опорными прямыми, называется опорной полосой; опорная полоса, у которой хотя бы одна из ее граничных прямых является касательной, называется касательной полосой* (см. рис. 2).

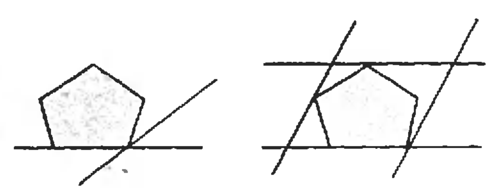


Рис. 1   *Рис. 2*

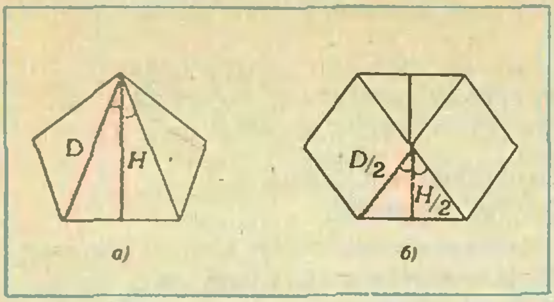


Рис. 3.

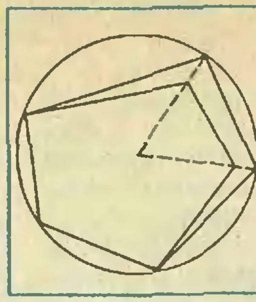


Рис. 4.

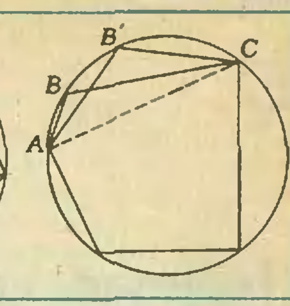


Рис. 5.

Упражнения.

9. Докажите, что выпуклый многоугольник совпадает с пересечением своих касательных полос.

10. Докажите, что невыпуклый многоугольник содержится в выпуклом многоугольнике большей площади и меньшего периметра.

Диаметр и ширина многоугольника

Понятия, которые здесь будут определены, необходимы для формулировки теоремы, обобщающей утверждения упражнений 4 и 5.

Определение 4. *Диаметром многоугольника называется наибольшее расстояние между его вершинами.*

Упражнение 11. Докажите, что наибольшее расстояние между точками а) треугольника, б) произвольного n-угольника равно его диаметру.

Определение 5. *Шириной многоугольника называется наименьшая ширина его касательных полос.*

Упражнения

12. Докажите, что ширина любой опорной полосы не меньше ширины многоугольника (откуда следует, что наименьшая ширина опорных полос равна ширине многоугольника).

Очевидно, что ширина треугольника равна его наименьшей высоте.

13. Докажите, что ширина H, диаметр D и периметр P правильного n-угольника связаны равенствами $2n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2n}H=P=2n\sin\frac{\pi}{2n}D$ (если n нечетно), $n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}H=P=n\sin\frac{\pi}{n}D$ (если n четно).

Указание: см. рис. (3 *а*, *б*)

Изопериметрическое и другие экстремальные свойства правильных многоугольников

Докажем следующую теорему

Теорема 1. а) Среди выпуклых n-угольников, лежащих в данном круге, наибольшую площадь (и периметр) имеет вписанный в этот круг правильный n-угольник.

б) Среди n-угольников, содержащих данный круг, наименьшую площадь (и периметр) имеет описанный около этого круга правильный n-угольник.

в) Среди n-угольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный n-угольник.

Для доказательства теоремы понадобятся пять вспомогательных утверждений, доказать которые мы предлагаем читателю в качестве упражнений.

Упражнения.

14. Если один выпуклый многоугольник содержит второй, то периметр первого больше периметра второго.

15. а) Вписанный в круг равносторонний многоугольник имеет равные углы, то есть является правильным.

б) Описанный около круга равноугольный многоугольник имеет равные стороны, то есть является правильным.

16. Среди треугольников с данными основанием и углом при вершине наибольшую площадь (и периметр) имеет равнобедренный треугольник.

17. а) Среди треугольников с данными вписанной окружностью и углом при вершине наименьшее основание имеет равнобедренный треугольник.

б) Среди треугольников с данным углом при вершине и данной вневписанной окружностью, касающейся основания и продолжений боковых сторон, наименьшее основание имеет равнобедренный треугольник.

18. Среди треугольников с данными основанием и периметром наибольшую площадь (и угол при вершине) имеет равнобедренный треугольник.

Докажем, наконец, теорему. Начнем с пункта а). Заметим, что если n-угольник не является вписанным в рассматриваемый круг, то можно построить n-угольник, вписанный в этот круг и имеющий большую площадь и (см. упражнение 14) больший периметр (см. рис. 4). Если же n-угольник, вписанный в круг, не является правильным, то (см. упражнение 15 а)) у него найдутся соседние неравные стороны, которые на рисунке 5 обозначены AB и BC. Обозначим B' середину дуги AC (см. рис. 5). Тогда $B\neq B'$, $|AB'|=|B'C|$ и из упражнения 16 следует, что изображенный на рис. 5 n-угольник с вершиной B' вместо B

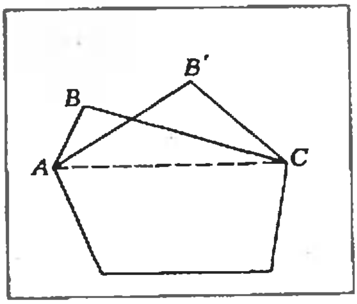


Рис. 6.

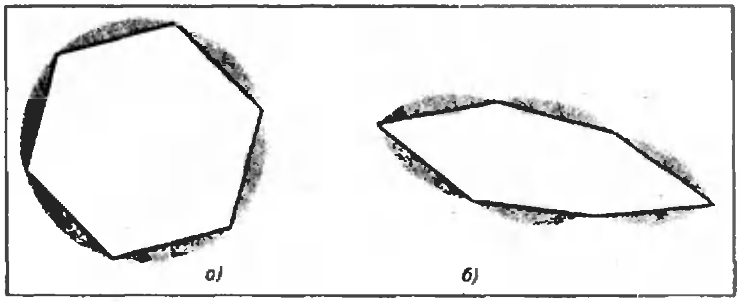


Рис. 7.

имеет больший периметр и большую площадь. Из сделанных замечаний следует, что если среди всех n-угольников, лежащих в данном круге, существует тот, который имеет наибольшую площадь (периметр), то он обязательно будет правильным n-угольником, вписанным в этот круг.

Очевидную на первый взгляд теорему существования на самом деле не так просто строго доказать, поэтому мы опускаем ее доказательство.

З а д а ч а 1 (для самостоятельного решения). Используя упражнения 18, 15 б) и соотношение $S=\frac{rP}{2}$ между площадью, периметром и радиусом вписанного в n-угольник круга, докажите пункт б).

Докажем теперь пункт в). Заметим, что если выпуклый n-угольник не является равносторонним, то можно построить n-угольник с тем же периметром, но большей площадью (см. рис. 6, на котором $|AB|\neq|BC|$, $|AB'|=|B'C|=\frac{|AB|+|BC|}{2}$, площадь треугольника $AB'C$, согласно упражнению 18, больше площади треугольника ABC). Если же n-угольник не является выпуклым, то из упражнения 10 следует, что существует n-угольник с тем же периметром и большей площадью. Остается показать, что среди выпуклых равносторонних n-угольников с данной стороной наибольшую площадь имеет правильный n-угольник. Для этого придется применить изопериметрическое свойство круга (читайте о нем в упоминавшейся статье В. В. Трофимова). Сравним площади правильного и неправильного n-угольников с равными сторонами, изображенных на рисунке 7. Первый из них на этом рисунке вписан в круг, а к сторонам второго приложены сегменты того же круга. Из выпуклости n-угольника следует, что эти сегменты не пересекаются, значит, периметры изображенных на рисунке 7 фигур равны, а для сравнения площадей рассматриваемых n-угольников достаточно сравнить площади изображенных фигур. Первая из них — круг, а вторая кругом не является (в противном случае из упражнения 16 а) следовало бы, что и второй n-угольник правильный, что противоречит сделанному предположению). Значит, согласно изопериметрическому свойству круга, вторая фигура имеет меньшую площадь. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если выпуклый n-угольник имеет площадь S, периметр P, лежит в круге радиуса R и содержит круг радиуса r, то справедливы неравенства

$$2n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\,r\leqslant 2\sqrt{n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\,S}\leqslant P\leqslant 2n\sin\frac{\pi}{n}\,R,$$

каждое из которых может обращаться в равенство, лишь когда n-угольник является правильным.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что для правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса R и описанного около круга радиуса r, справедливы равенства

$$2n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\,r=2\sqrt{n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\,S}=P=2n\sin\frac{\pi}{n}\,R,$$

и применить теорему 1.

Изложенное доказательство теоремы 1 имеет существенный недостаток: оно опирается на утверждения, которые нельзя строго доказать в рамках школьной программы (см. об этом упоминавшуюся статью В. В. Трофимова). Но все прямые (то есть лишенные отмеченных недостатков) доказательства этой теоремы более сложные и их помещать здесь нецелесообразно.

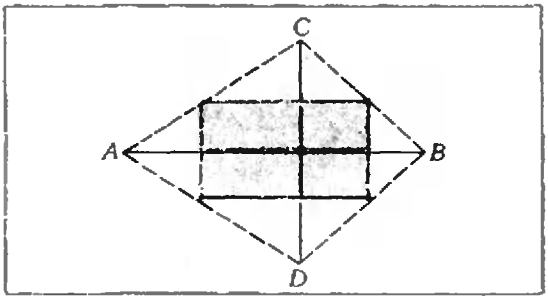


Рис. 8.

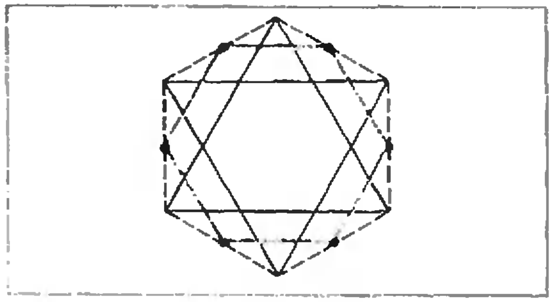


Рис. 9.

Для дальнейшего понадобятся некоторые вспомогательные понятия, интересные и сами по себе. Их изложению посвящен следующий параграф.

Смешение и симметризация многоугольников

Излагаемые далее понятия были введены в геометрию Г. Минковским, который применял их в своих знаменитых исследованиях о выпуклых множествах.

Определение 6. *Смешением (полусуммой) двух точечных множеств называется множество середин всех отрезков, концы которых принадлежат этим множествам (один конец первому множеству, а другой — второму).* (На рисунке 8 показано смешение отрезков AB и CD.)

Упражнения

19. а) Смешением параллельных прямых является прямая, делящая пополам полосу между ними.

б) Смешением отрезков, лежащих на параллельных прямых, является средняя линия трапеции (параллелограмма), образованной этими отрезками.

в) Смешением параллельных полос ширины H_1 и H_2 является параллельная им полоса ширины $\frac{H_1+H_2}{2}$.

г) Смешением кругов радиуса R_1 и R_2 является круг радиуса $\frac{R_1+R_2}{2}$.

20. Опорная полоса смешения двух многоугольников является смешением параллельных ей опорных полос этих многоугольников.

Очень важной для дальнейшего является утверждение следующей задачи.

Задача 2. Смешением двух многоугольников P_1 и P_2 является многоугольник P, для каждой стороны которого найдется параллельная ей сторона одного из многоугольников P_1 или P_2, причем для любой из сторон многоугольников P_1 или P_2 найдется параллельная ей сторона многоугольника P. Периметр многоугольника P равен полусумме периметров многоугольников P_1 и P_2.

Определение 7. *Многоугольник M^* называется симметризацией многоугольника M, если он является смешением многоугольников M и M', центрально-симметричных друг другу относительно некоторой точки O.*

На рисунке 9 показана симметризация правильного треугольника. Она ограничена красным шестиугольником.

Задача 3. Докажите, что при симметризации многоугольника получается центрально-симметричный многоугольник, периметр, диаметр и ширина не меняются, а число вершин увеличивается не более чем в два раза.

Упражнение 21. Докажите, что центрально-симметричный многоугольник диаметра D и ширины H лежит в круге диаметра D и содержит круг диаметра H.

После проведенной подготовки можно коротко доказать замечательное неравенство, впервые доказанное в 1922 году К. Рейнхардтом.

Теорема Рейнхардта

Теорема 2. Для ширины, периметра и диаметра любого выпуклого n-угольника справедливы неравенства

$$2n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2n}H \leqslant P \leqslant 2n\sin\frac{\pi}{2n}D,$$

каждое из которых обращается в равенство, например, для правильного n-угольника при нечетном n.

Доказательство. Рассмотрим вместо n-угольника его симметризацию, которая, согласно задаче 3, является выпуклым центрально-симметричным $2m$-угольником с теми же периметром, шириной и диаметром. Согласно упражнению 21 этот $2m$-угольник содержит круг диаметра H и сам содержится в круге диаметра D. Применяя к нему следствие из теоремы 1, получаем неравенство:

$$2m\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}H\leqslant P\leqslant 2m\sin\frac{\pi}{2m}D.$$

Так как $m\leqslant n$, то неравенства теоремы вытекают из доказанного неравенства и упражнения 22.

Упражнение 22. Функция $x\sin\frac{\pi}{x}$ строго возрастает, а функция $x\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$ строго убывает при $x>2$.

Доказательства остальных утверждений теоремы содержатся в упражнениях 13 и 14.

Дополнением к теореме 2 является следующее утверждение.

Задача 4. Площадь выпуклого n-угольника удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{\sqrt{3}}H^2\leqslant S\leqslant\frac{n}{2}\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}D^2.$$

Левое неравенство обращается в равенство лишь для правильного треугольника, а правое — лишь для правильного n-угольника и только, если n нечетно.

Мы надеемся, что вам удастся найти короткое и красивое доказательство этого утверждения.

Задачи для исследования

Выше были доказаны неравенства Рейнхардта, связывающие между собой периметр P, площадь S, диаметр D и ширину H произвольного выпуклого n-угольника.

Читателю, желающему выяснить условия, при которых эти неравенства обращаются в равенства, мы предлагаем ряд задач для самостоятельного решения.

1. Если n нечетно, то для правильного n-угольника неравенства Рейнхардта обращаются в равенства. Если n четно, то это неверно.

2. Если $n\neq 2^m$, $m=1,2,3,\ldots$, то в случае выполнения одного из равенств

$$H\cdot 2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}=P,$$

$$D\cdot 2n\sin\frac{\pi}{2n}=P\quad(*)$$

выполняется другое.

Многоугольники, для которых выполняются условия задачи 2, называются далее *экстремальными*. Любой равносторонний n-угольник назовем *k-полуправильным*, если k его вершин можно окрасить в белый цвет, а остальные — в черный так, что между каждыми соседними белыми вершинами лежит $\frac{n}{k}-1$ черных вершин, углы при белых вершинах равны $\pi-\frac{\pi}{k}-\frac{\pi}{n}$, а углы при черных — $\pi-\frac{\pi}{n}$.

3. Если $n\neq 2^m$ ($m=1,2,3,\ldots$) и k — максимальный нечетный делитель n, то k — полуправильный n-угольник является экстремальным.

4. Найти все экстремальные n-угольники. Удовлетворительное решение этой задачи автору неизвестно. Впрочем, имеется «алгоритм», позволяющий для любого конкретного n найти все экстремальные n-угольники. С его помощью можно доказать, что:

а) если p — простое, то единственным экстремальным p-угольником является правильный p-угольник;

б) если p — простое и $p>2$, то единственным экстремальным $2p$-угольником является p-полуправильный $2p$-угольник (впрочем, других полуправильных $2p$-угольников нет);

в) существует только два экстремальных девятиугольника — правильный и 3-полуправильный (других полуправильных девятиугольников нет);

г) для всех остальных n, не равных степени двойки, существуют экстремальные n-угольники, не являющиеся ни правильными, ни полуправильными; все экстремальные n-угольники являются равносторонними;

д) если $n=p$ или $n>2p$, p — простое, $p>2$, то существует один экстремальный n-угольник, а для любого другого $n\neq 2^k$, $k=1, 2, 3, \ldots$, их существует несколько.

5. Для любого $n=2^k$, $k\in N$, найти наилучшие константы h_n и d_n, для которых выполняются неравенства $h_nH\leqslant P\leqslant d_nD$. Найти также все n-угольники, для которых хотя бы одно из них обращается в равенство. Решение этой задачи автору неизвестно. Ясно лишь, что $h_n>2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$, $d_n<2n\sin\frac{\pi}{2n}$. Можно предположить, что $d_n=2(n-2)\times\times\sin\frac{\pi}{2(n-1)}+4\sin\frac{\pi}{4(n-1)}$. При $n=4$ это действительно так, в чем можно убедиться, решив задачу 6.

6. Среди всех выпуклых четырехугольников заданного диаметра найти тот, который имеет наибольший периметр.

Простое решение этой задачи автору неизвестно. Довольно длинное ее решение можно прочитать в книге Шклярского, Ченцова, Яглома «Геометрические оценки и задачи по комбинаторной геометрии», «Наука», 1974.

7. Для любого четного n найти наилучшую константу c_n, для которой справедливо неравенство $S\leqslant c_nD^2$, а также все n-угольники, для которых оно обращается в равенство.

При $n>4$ решение этой задачи автору неизвестно. Ясно, что $c_n<\frac{n}{2}\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$. Довольно очевидно, что $c_4=\frac{1}{2}$.

8. Доказать неравенства

$$D>\left(2\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{-1},$$

$$H<\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right)^{-1}.$$

При $n\neq 2^m$, $m\in N$, эти неравенства неулучшаемы и каждое из них обращается в равенство только для экстремальных n-угольников.

9. Найти неулучшаемые неравенства для $n=2^m$, $m\geqslant 3$.

Решение этой задачи при $m>2$ автору неизвестно.

С. Г.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

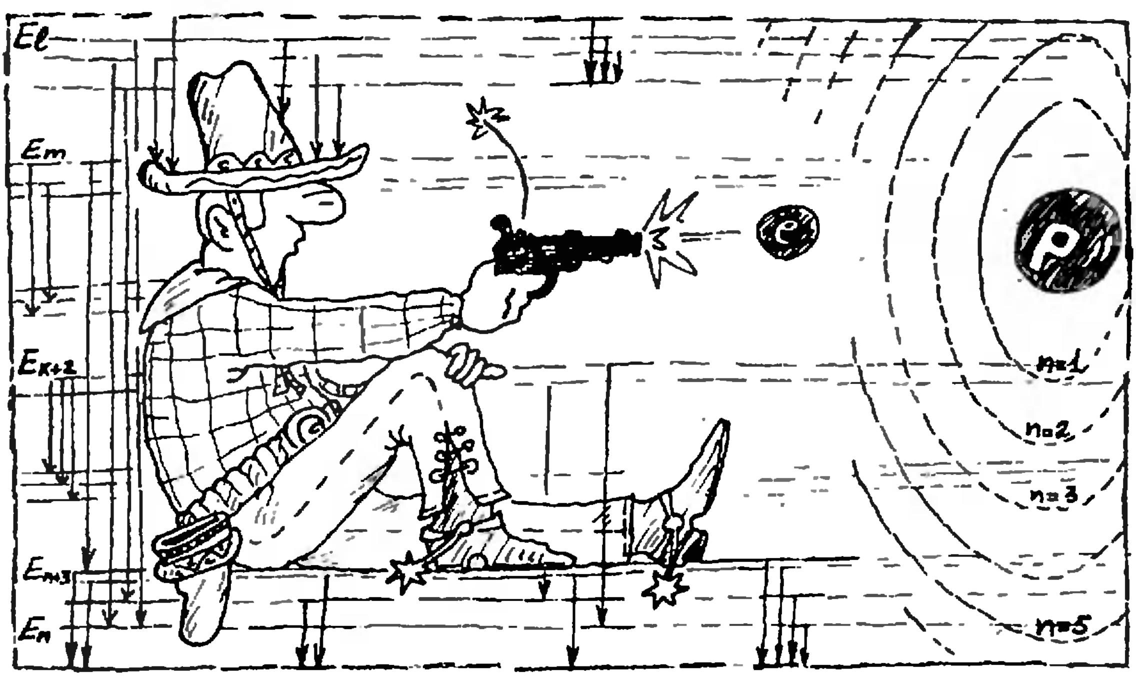
Нильс Бор и «Журнал шутливой физики»

В 1935 году к 50-летию Нильса Бора сотрудники руководимого им Института теоретической физики выпустили первый том рукописного сборника "The Journal of Jocular Physics" («Журнал шутливой физики»). В предисловии к сборнику говорилось: «Большое событие, отмечать которое мы готовились, явилось великолепным поводом совершить, наконец, тот шаг, который был уже подготовлен бурным развитием нашей науки и в котором давно ощущалась необходимость: организовать и легализовать довольно старую область физики — The Jocular Physics. По причинам, еще не выясненным, она до сих пор влачила просто жалкое существование на общем фоне стремительного развития науки. В качестве первой меры мы предприняли издание этого сборника, который знаменует рождение нового периодического издания, и посвящено оно будет исключительно юмористической стороне многогранной жизни мира физиков».

Сборник действительно стал периодическим и выходил ... раз в 10 лет (второй том вышел к 60-летию Н. Бора, третий — к 70-летию). Аналогичный сборник под названием "The Journal of Unclear Physics" («Журнал нечистой физики») был выпущен к 50-летию английского физика Р. Пайерлса. Здесь мы помещаем два материала из этих сборников.

Атом, который построил Бор

Вот Бор всем известный...
А вот дополнительности закон,
Который был Бором провозглашен,
Который описывает с двух сторон
Как электрон, так и протон
Атома,
Который построил Бор.
А вот электронные уровни
Атома,
Который построил Бор,
Которые спектр характерный дают
На них перескакивают электроны,
Атома,
Который построил Бор.
А вот ядро
Атома,
Который построил Бор,
Которое видит он как каплю,
Которая находится точно в центре
Атома,
Который построил Бор.



Н. Бор и вестерны

Нильс Бор любил ходить в кино, причем из всех жанров признавал только один — ковбойские вестерны. Трудно себе представить, что привлекало Бора в этих картинах. «Я вполне могу допустить,— говорил он,— что хорошенькая героиня, спасаясь бегством, может оказаться на извилистой и опасной горной тропе. Менее вероятно, но все же возможно, что мост над пропастью рухнет как раз в тот момент, когда она на него ступит. Исключительно маловероятно, что в последний момент она схватится за былинку и повиснет над пропастью, но даже с такой возможностью я могу согласиться. Совсем уж трудно, но все-таки можно поверить в то, что красавец ковбой как раз в это время будет проезжать мимо и выручит несчастную. Но чтобы в этот момент тут же оказался оператор с камерой, готовый заснять все эти волнующие события на пленку,— уж этому, увольте, я не поверю!»

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка предназначена десятиклассникам. Однако первая ее часть может быть полезной и учащимся 8-х и 9-х классов.

Векторы в геометрических задачах

1. Параллельность и отношение отрезков

Задача 1. *Точки K, L, M, N — середины сторон BC, CD, DE, EA пятиугольника $ABCDE$, точки P и Q — середины отрезков KM и LN. Доказать, что отрезки PQ и AB параллельны, и найти отношение их длин (рис. 1).*

Переведем утверждение задачи на векторный язык.

Параллельность отрезков PQ и AB записывается равенством $\overrightarrow{PQ}=k\cdot\overrightarrow{AB}$, где k — некоторое действительное число. Вычислив k, мы найдем отношение длин отрезков PQ и AB.

Основной в решении этой задачи оказывается формула $\overrightarrow{OZ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY})$, где Z — середина отрезка XY, а O — произвольная точка.

Решение. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})\Big) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$

Отсюда следует, что отрезки PQ и AB параллельны, а отношение их длин равно $\frac{1}{4}$.

В приведенном решении мы дважды использовали «формулу разности» $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}$, позволяющую выразить любой вектор через векторы, отложенные от одной и той же точки.

Вот несколько примеров записи одного и того же утверждения на геометрическом и векторном языках:

1. *Точки A, B, C лежат на одной прямой.*	1. $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$.
2. *Точка M делит отрезок AB в отношении $\lvert AM\rvert:\lvert MB\rvert=l:k$*	2. $k\cdot\overrightarrow{AM}=l\cdot\overrightarrow{MB}$ ($k>0$, $l>0$).
3. *M — точка пересечения медиан (центроид) треугольника ABC.*	3. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.
4. *$ABCD$ — параллелограмм.*	4. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

В двух последних случаях геометрическое и векторное утверждения равносильны при условии, что точки A, B, C не лежат на одной прямой.

Задача 2. *Доказать, что середины оснований и точка пересечения диагоналей трапеции лежат на одной прямой (рис. 2).*

Решение. Пусть M, N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей. Из подобия треугольников AOD и BOC следует: $\frac{\lvert OA\rvert}{\lvert OC\rvert}=\frac{\lvert OD\rvert}{\lvert OB\rvert}$. Обозначая эти

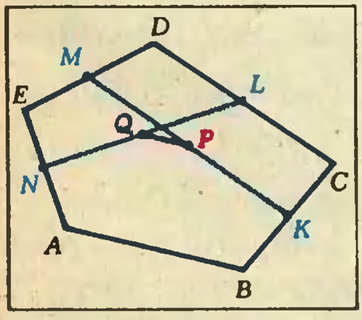


Рис. 1.

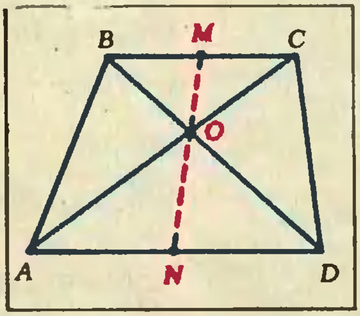


Рис. 2.

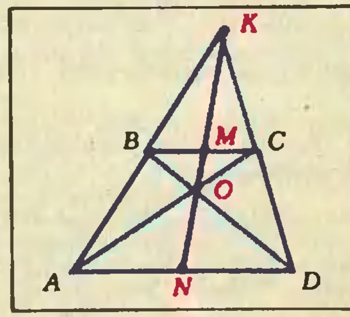


Рис. 3.

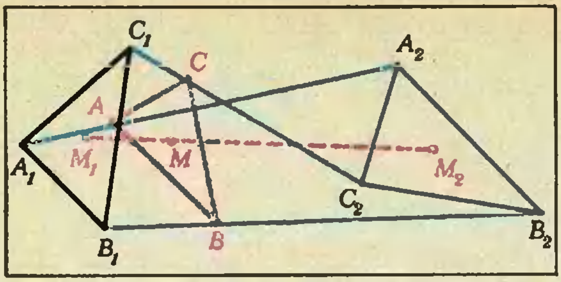


Рис. 4.

отношения через k, получим $\overrightarrow{OA}=-k\cdot\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}=-k\cdot\overrightarrow{OB}$.

Тогда $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=$ $=\frac{1}{2}(-k\cdot\overrightarrow{OC}-k\cdot\overrightarrow{OB})=-k\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+$ $+\overrightarrow{OB})=-k\cdot\overrightarrow{OM}$, то есть точки M, O, N лежат на одной прямой.

Аналогично доказывается, что середины оснований трапеции и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой. Таким образом, любая трапеция обладает следующим свойством: *середины ее оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой (рис. 3).*

Задача 3. *Даны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Точки A, B, C делят отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 в одном и том же отношении:*

$$\frac{|A_1A|}{|AA_2|}=\frac{|B_1B|}{|BB_2|}=\frac{|C_1C|}{|CC_2|}.$$

Докажите, что если эти точки не лежат на одной прямой, то центроиды треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ лежат на одной прямой.

Решение. Пусть M, M_1, M_2 — центроиды треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ (рис. 4), O — произвольная точка. Обозначим через k отношение $\frac{|A_1A|}{|AA_2|}$. Тогда $\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=$ $=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+$ $+\overrightarrow{OC_1})=\frac{1}{3}((\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB_1})+$ $+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}))=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{C_1C})$.

Аналогично

$$\overrightarrow{MM_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_2}+\overrightarrow{BB_2}+\overrightarrow{CC_2}).$$

Так как $\overrightarrow{A_1A}=k\cdot\overrightarrow{AA_2}$, $\overrightarrow{B_1B}=k\cdot\overrightarrow{BB_2}$, $\overrightarrow{C_1C}=k\cdot\overrightarrow{CC_2}$, получаем $\overrightarrow{M_1M}=k\cdot\overrightarrow{MM_2}$ — точки M, M_1, M_2 лежат на одной прямой.

2. Центроид системы точек

Понятие центроида легко переносится с треугольника на произвольную конечную систему точек пространства:

Точка M называется центроидом системы n точек A_1, A_2, ..., A_n, если $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}=\vec{0}$.

С помощью формулы разности последнее равенство можно переписать так: $(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OM})+(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OM})+\ldots$ $\ldots+(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OM})=\vec{0}$ (O — произвольная точка),

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}-n\cdot\overrightarrow{OM}=\vec{0},$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}).$$

Из последней формулы следует, что любая конечная система точек имеет единственный центроид. Причем центроид системы, состоящей из одной точки, — сама эта точка, центроид пары точек — середина соединяющего их отрезка. Нахождение центроида большего числа точек упрощается благодаря следующему принципу: *если M_1 — центроид системы k точек A_1, A_2, ..., A_k, а M_2 — центроид системы l точек B_1, B_2, ..., B_l и эти системы не имеют общих точек, то центроид системы $k+l$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$, B_1, B_2, ..., Bl — это точка M, принадлежащая отрезку M_1M_2 и делящая его в отношении $|M_1M|:|MM_2|=l:k$.*

Действительно, пусть $k\cdot\overrightarrow{M_1M}=$ $=l\cdot\overrightarrow{MM_2}$.

Используя формулу разности, получим:

$$k(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1})=l(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}),$$

$$k\cdot\overrightarrow{OM}-k\cdot\overrightarrow{OM_1}=l\cdot\overrightarrow{OM_2}-l\cdot\overrightarrow{OM},$$

$$(k+l)\cdot\overrightarrow{OM}=k\cdot\overrightarrow{OM_1}+l\cdot\overrightarrow{OM_2},$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{k}{k+l}\overrightarrow{OM_1}+\frac{l}{k+l}\overrightarrow{OM_2}.$$

По формуле (1)

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{k}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_k}),\ \overrightarrow{OM_2}=$$
$$=\frac{1}{l}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\ldots+\overrightarrow{OB_l}),$$

так что

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{k+l}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_k}+$$
$$+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\ldots+\overrightarrow{OB_l}),$$

и мы получили требуемое.

Применяя этот принцип к тройке вершин треугольника, мы получим, что центроид треугольника лежит на

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	4	1	2
$\vec{b}$	1	4	0
$\vec{c}$	2	0	2

Табл. 1.

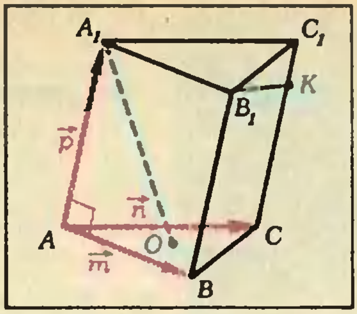


Рис. 5.

	$\vec{m}$	$\vec{n}$	$\vec{p}$
$\vec{m}$	a^2	$\frac{1}{2}a^2$	0
$\vec{n}$	$\frac{1}{2}a^2$	a^2	a^2
$\vec{p}$	0	a^2	$4a^2$

Табл. 2.

отрезке, соединяющем вершину с центроидом двух других вершин, то есть с серединой противоположной стороны, и делит этот отрезок в отношении 2:1, считая от вершины. Отсюда следует известная теорема планиметрии: *медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершин.*

Аналогично доказывается, что *отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке — центроиде тетраэдра — и делятся в этой точке в отношении 3:1, считая от вершин.*

3. Вычисление расстояний и углов

Задав в пространстве тройку некомпланарных векторов — базис, можно разложить по этому базису любой вектор единственным образом. Зная же скалярные произведения базисных векторов, мы сможем легко вычислить скалярные произведения любых векторов, а следовательно, их длины и углы между ними.

Задача 4. *Дано* $\vec{a}\vec{b}=1$, $\vec{a}\vec{c}=2$, $\vec{b}\vec{c}=0$, $\vec{a}^2=\vec{b}^2=4$, $\vec{c}^2=2$.

Найти $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})$, *если* $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Решение: Перепишем условие задачи в виде «таблицы умножения» (табл. 1). Находим: $|\vec{p}|=\sqrt{\vec{p}^2}=\sqrt{(2\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{16}=4;$

$$|\vec{q}|=\sqrt{\vec{q}^2}=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2}=$$
$$=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}}=$$
$$=\sqrt{16}=4.$$

Из определения скалярного произведения получаем:

$$\cos(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}=\frac{2(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}{16}=$$
$$=\frac{2\vec{a}^2+\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}-\vec{b}^2-\vec{b}\vec{c}}{16}=\frac{9}{16},$$

откуда $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\arccos\frac{9}{16}$.

Задача 5. *Основание призмы* $ABCA_1B_1C_1$ *— правильный треугольник. Боковое ребро* AA_1 *вдвое больше стороны основания и образует углы* $\widehat{A_1AB}=90°$, $\widehat{A_1AC}=60°$. O — центр треугольника ABC. *Найти на прямой* CC_1 *такую точку* K, *что прямые* B_1K *и* A_1O перпендикулярны.

Решение. Положение точки K на прямой CC_1 определяется значением коэффициента x в равенстве $\overrightarrow{C_1K}=x\cdot\overrightarrow{C_1C}$. Обозначим через a длину стороны основания призмы, выберем в качестве базиса тройку векторов $\vec{m}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{n}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{p}=\overrightarrow{AA_1}$ (рис. 5), после чего составим «таблицу умножения» (табл. 2).

Разложим векторы $\overrightarrow{A_1O}$ и $\overrightarrow{B_1K}$ в базисе $(\vec{m},\ \vec{n},\ \vec{p})$: $\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AO}=$ $=-\vec{p}+\frac{1}{3}(\vec{m}+\vec{n})=\frac{1}{3}(\vec{m}+\vec{n}-3\vec{p})$,

$\overrightarrow{B_1K}=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{C_1K}=-\vec{m}+\vec{n}-x\vec{p}$.

Записав условие перпендикулярности прямых A_1O и B_1K:

$$(\vec{m}+\vec{n}-3\vec{p})(-\vec{m}+\vec{n}-x\vec{p})=0,$$

получим, используя таблицу 2: $11a^2x-3a^2=0$, откуда $x=\frac{3}{11}$.

Упражнения

1. В тетраэдре $ABCD$ точки E и F — середины ребер AB и CD. Докажите, что середины отрезков CE, DE, AF и BF являются вершинами параллелограмма.

2. Точки A, B, C, D, E, F не лежат в одной плоскости. Докажите, что если прямые AB и DE, BC и EF, CD и AF параллельны, то $|AB|=|DE|$, $|BC|=|EF|$, $|CD|=|AF|$.

3. Докажите, что отрезки, соединяющие середины сторон основания четырехугольной пирамиды с центроидами противоположных боковых граней, пересекаются в одной точке. В каком отношении они делятся этой точкой?

4. Докажите, что середины четырех отрезков, о которых идет речь в предыдущем упражнении, являются вершинами параллелограмма.

Найдите отношение площади этого параллелограмма к площади основания пирамиды.

5. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат, каждое из боковых ребер вдвое больше стороны основания. Найдите угол между прямыми SM и BN, где M и N — середины ребер AB и SC.

6*. Прямые a и b пересекаются в точке O. Из произвольной точки M, отличной от O, опущены перпендикуляры MA и MB на прямые a и b. Из точек A и B опущены перпендикуляры AA_1 на прямую b и BB_1 на прямую a. Докажите, что прямые A_1B_1 и OM взаимно перпендикулярны.

7*. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ некомпланарны. Докажите, что векторы

$$\bar{m}=(\bar{a}\bar{a})\,\bar{a}+(\bar{a}\bar{b})\,\bar{b}+(\bar{a}\bar{c})\,\bar{c},$$
$$\bar{n}=(\bar{b}\bar{a})\,\bar{a}+(\bar{b}\bar{b})\,\bar{b}+(\bar{b}\bar{c})\,\bar{c},$$
$$\bar{p}=(\bar{c}\bar{a})\,\bar{a}+(\bar{c}\bar{b})\,\bar{b}+(\bar{c}\bar{c})\,\bar{c}$$

также некомпланарны.

Ю. И. Ионин, В. Б. Некрасов

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. При каких натуральных n сократима дробь $\dfrac{8n+71}{5n+46}$?

2. Решите уравнение $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}=16$.

3. В окружности радиуса R проведены два диаметра, угол между которыми равен α. Докажите, что расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на эти диаметры, не зависит от положения точки на окружности, и найдите его.

4. Докажите, что число $n^2+5n+16$ ни при каком натуральном n не делится на 169.

5. Постройте квадрат, если даны 4 точки: по одной точке на каждой из прямых, содержащих стороны квадрата.

Девятый класс

6. Разложите на множители выражение
$$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n)^2-x^n,$$
где n — натуральное число, $n>3$.

7. Высоты треугольника пересекаются в точке H. Известно, что $|HC|=|AB|$. Найдите угол при вершине C.

8. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые a и b. Проведите прямую, пересекающую обе данные прямые и: а) проходящую через данную точку M, не лежащую на a и b; б) параллельную данной прямой l. В каком случае решение возможно?

9. а) При каком условии прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны?

б) Найдите кратчайшее расстояние от точек параболы $y=x^2-8x+16$ до прямой $y=-2x+1$.

10. В пространстве даны две скрещивающиеся взаимно перпендикулярные прямые a и b. Найдите множество середин отрезков AB данной длины d таких, что $A\in a$, $B\in b$.

Десятый класс

11. Как нужно разместить в пространстве правильный тетраэдр, чтобы его ортогональная проекция на данную плоскость имела наибольшую площадь? Найдите значение этой площади, если ребро тетраэдра имеет длину a.

12. Решите уравнение
$$\log_2^2(x+y)+\log_2^2(xy)+1=2\log_2(x+y).$$

13. Докажите *формулу Симпсона:* пусть площадь сечения тела плоскостью P_x, проведенной перпендикулярно координатной оси Ox через точку этой оси с координатой x, выражается при $x\in[a;\,b]$ многочленом от x не выше третьей степени (тело заключено между плоскостями P_a и P_b); тогда объем тела V можно вычислить по формуле

$$V=\frac{h}{6}\,(S_a+4S_{\text{ср}}+S_b),$$

где $h=b-a$, $S_a=S(a)$, $S_b=S(b)$, $S_{\text{ср}}$ — площадь «среднего» сечения — сечения плоскостью $P_{(a+b)/2}$, соответствующего координате $x_0=(a+b)/2$.

14. Дан прямоугольный параллелепипед, основание которого — квадрат $ABCD$ со стороной 10, боковое ребро AA_1 имеет длину 40. Пусть P — середина AB, Q — середина CD, E — точка, принадлежащая PQ и удаленная от стороны AB на расстояние 1. Найдите длину кратчайшего пути, проходящего по поверхности этого параллелепипеда и соединяющего точку E с точкой F, симметричной точке E относительно центра параллелепипеда.

15. Решите уравнение $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$.

Публикацию подготовил *Б. М. Ивлев*

Уголок коллекционера

Нильс Бор и филателия

Существуют десятки марок и почтовые блоки, посвященные Альберту Эйнштейну. «Филателистическая судьба» другого выдающегося физика XX века — Нильса Бора сложилась иначе. Единственная марка с портретом Бора вышла на его родине, в Дании, в 1963 году, к пятидесятилетию создания основ квантовой теории строения атомов. На ней изображена также схематическая модель атома водорода и приведена формула для определения энергии излученных фотонов: $h\nu=E_2-E_1$.

Мы воспроизводим здесь эту марку.

В. Р.

Задачи

1. Переложите две спички так, чтобы равенство, изображенное на рисунке, стало верным.

2. Чему равно выражение $\frac{\text{Г}\cdot\text{Р}\cdot\text{У}\cdot\text{З}\cdot\text{И}\cdot\text{Я}}{\text{Т}\cdot\text{Б}\cdot\text{И}\cdot\text{Л}\cdot\text{И}\cdot\text{С}\cdot\text{И}}$, если буквам соответствуют цифры, причем одинаковым буквам — одинаковые цифры, а разным — разные?

3. Однажды дождливым осенним вечером я шел на станцию по проселочной дороге. Грязь, вылетавшая из-под моих ботинок, оседала на обшлагах брюк. Придя на станцию, я обнаружил, что с внутренней стороны брюки стали грязными до колен. Но брызги грязи так высоко не поднимались. Почему же я так испачкался?

4. Число 6116 обладает следующим свойством: какую бы пару его цифр ни взять, последняя цифра их суммы такая же, как последняя цифра суммы двух других цифр. Сколько четырехзначных чисел с таким свойством?

5. Детский кубик я оклеил чистой бумагой, каждую грань разделил на четыре квадратика и в каждый квадратик попытался записать целое число так, чтобы сумма этого числа и четырех чисел в соседних квадратиках равнялась 13 (см. рисунок; соседними считаются квадратики, имеющие общую сторону). Однако у меня ничего не получилось. Может быть, вам удастся? Или же это сделать невозможно?

Эти задачи нам предложили: *Сережа Алтунджи*, ученик 7 класса, *Л. А. Штейнгарц*, *А. П. Савин*, *М. И. Музаффаров*, *В. В. Произволов*.


ОВОЩИ-Ф

Трение: вредное, полезное, интересное...

А. В. СЕМЁНОВ

Приходилось вам катать на санках своего приятеля? Конечно — да. И, конечно, вы замечали, что по льду катить санки одно удовольствие, по снегу — потруднее, а если попадется голый, без снега, асфальт, то тащить санки ох как тяжело. А почему? Наверное, каждый ответит сразу: при движении по асфальту трение больше. И будет прав. Но давайте разеберемся с трением чуть подробнее.

Как вы думаете, если твердые соприкасающиеся поверхности неподвижны — может ли быть между ними трение? Как следует подумайте, обратитесь к своему повседневному опыту...

Конечно, может. Если бы не сила трения, мы не смогли бы стоять даже на слегка пологой горке; никакое тело не смогло бы удержаться на наклонной плоскости — в результате действия силы тяжести оно съезжало бы. Именно трение мешает нам, когда мы пытаемся подвинуть какой-нибудь предмет. Такое трение называют трением покоя, в отличие от трения скольжения, возникающего при движении поверхностей друг относительно друга.

Итак, когда тело, скажем ящик, стоит на полу, а мы пытаемся его сдвинуть, мы преодолеваем силу трения покоя. Когда нам это удалось и ящик поехал по полу, действует сила трения скольжения.

Между трением покоя и трением скольжения есть существенное различие. Сила трения покоя зависит от того, с какой силой мы действуем на тело, пытаясь сдвинуть его с места. Мы прикладываем маленькую силу — и сила трения покоя маленькая, как раз такая, чтобы уравновесить приложенную силу. Мы увеличиваем усилие — и сила трения покоя растет. Но вот при каком-то усилии нам удалось сдвинуть ящик, он заскользил по полу. При этом сила трения скольжения остается практически постоянной и равной максимальной силе трения покоя. При каком же усилии нам наконец удастся сдвинуть тело? Иными словами, какова наибольшая сила трения покоя? От чего она зависит?

Над этими вопросами (и вообще над тем, что такое трение) ученые думали уже много веков назад. Размышления о силе трения встречаются среди записей Леонардо да Винчи. Но строгие ответы, в форме законов, были сформулированы в 1699 году французским физиком Амонтоном. Через сто лет после Амонтона законы трения были переоткрыты Кулоном, и теперь их чаще всего называют законами Амонтона — Кулона.

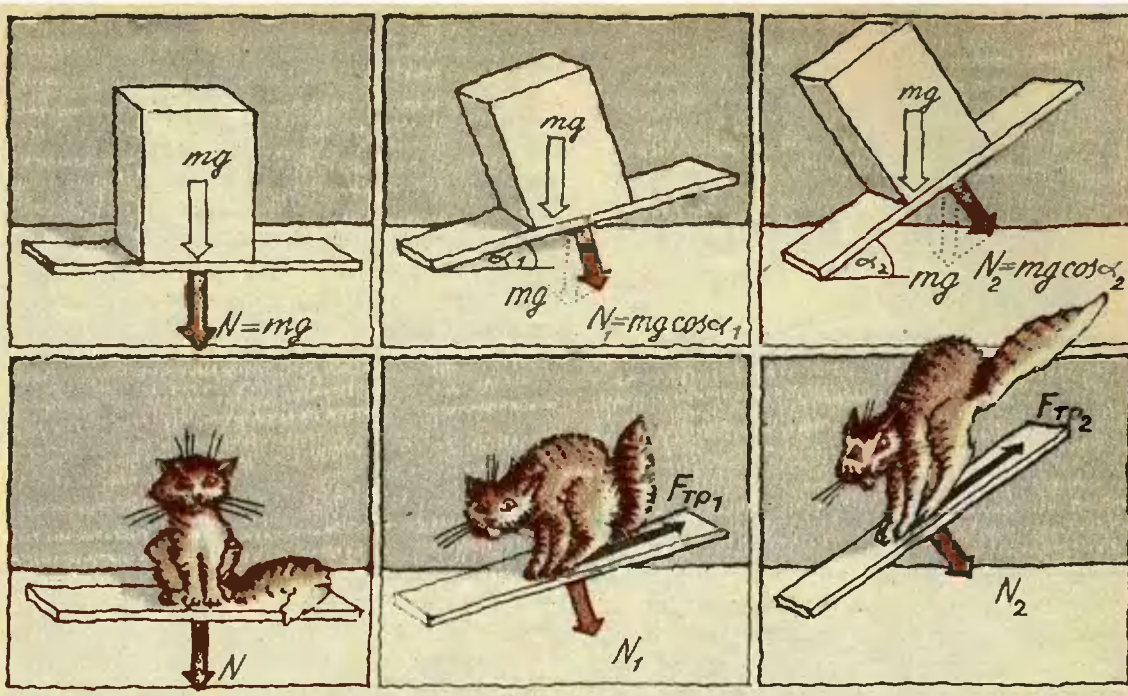
Основной из этих законов можно сформулировать так: максимальная сила трения покоя (f_{max}) между поверхностями двух тел прямо пропорциональна величине силы (N), с которой тела прижаты друг к другу:

$$f_{max}=\mu N.$$

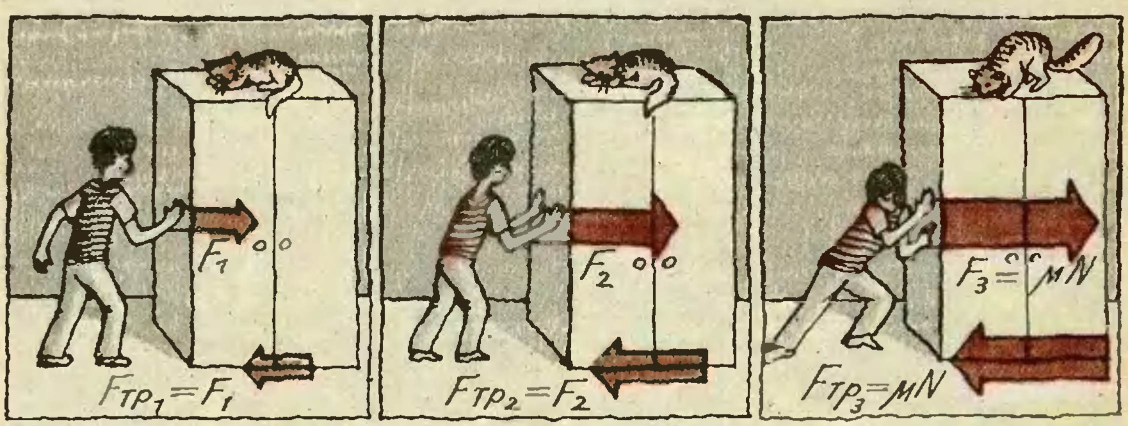
Для ящика, стоящего на полу, сила N равна силе тяжести, на наклонной плоскости прижимающая сила станет меньше, соответственно меньшей будет и сила трения. Коэффициент пропорциональности μ зависит от материалов, из которых сделаны соприкасающиеся поверхности, и от того, как они обработаны. Как это ни удивительно, сила трения не зависит от площади поверхности соприкосновения тел.

Говоря о трении, мы все время подразумевали «вредность» его действия: из-за трения протираются подошвы, «лысеют» автомобильные шины, снашиваются детали машин. С этим вредным трением борются, стараются его уменьшить. Но трение — буквально вездесуще, бывает оно и полезно.

Прежде всего, именно благодаря силе трения мы с вами можем ходить по земле. Припомните: как трудно бывает в гололед ходить по улице. Все это происходит из-за того, что уменьшается сила трения при движении: по льду она меньше, чем по асфальту. И только благодаря трению



Когда тело находится на горизонтальной поверхности, сила, прижимающая его к этой поверхности, равна силе тяжести. Если поверхность не горизонтальна, а составляет какой-то угол α с горизонтом, то прижимающая сила тем меньше, чем больше этот угол ($\alpha_2>\alpha_1$, и $N_2<N_1$). И соответственно, чем более крутая наклонная плоскость, тем меньше сила трения скольжения ($F_{тр_2}<F_{тр_1}$).



Шкаф не сдвинется с места до тех пор, пока прикладываемая к нему «движущая» сила не станет равной μN. А до этого момента сила трения покоя всякий раз уравновешивает «движущую» силу, и шкаф остается неподвижным.

можем мы подняться по лестнице так, чтобы ноги не скользили по ступенькам, а руки по перилам.

На рисунке на странице 26 художник попытался показать, что случится, если внезапно исчезнет сила трения. Но не все последствия этого поистине катастрофического исчезновения ему удалось предвидеть. Подумайте сами, чего художник не предусмотрел.

Нет сомнений, что перед нами безумная теория, но весь вопрос в том, достаточно ли она безумна, чтобы оказаться еще и верной!

Н. Бор

...цивилизация стоит перед наиболее серьезной проблемой, требующей обеспечения урегулирования отношений между народами, чтобы беспрецедентные опасности были устранены, а народы мира могли бы совместными усилиями повышать благосостояние людей на основе достигнутого научного прогресса.

Н. Бор

задачник Кванта

Задачи

М946—М950; Ф958—Ф962

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 декабря 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М946, М947» или «Ф958». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М946—М950 предлагались на XI Всероссийской олимпиаде по математике; задачи Ф958—Ф961 предлагались на заключительном этапе XIX Всесоюзной олимпиады по физике.

М946. Две параболы расположены на плоскости так, что их оси взаимно перпендикулярны и параболы пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

Л. П. Купцов

М947. На доске в строку написаны числа

$$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \ldots\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}.$$

а) Докажите, что как бы мы ни расставили знаки «+» и «—» между этими числами, полученная сумма не будет равна нулю.

б) Какое наименьшее количество написанных чисел необходимо стереть с доски для того, чтобы после некоторой расстановки «+» и «—» между оставшимися числами получилась сумма, равная нулю?

М948. Правильный треугольник ABC полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками*). Докажите, что треугольник ABC можно полностью покрыть четырьмя такими треугольниками (эти треугольники разрешается передвигать).

В. В. Произволов

М949. Даны 1985 гирь с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 1984 г, 1985 г. Можно ли их разделить на пять групп так, чтобы и число гирь, и их суммарная масса были бы одинаковы во всех пяти группах?

Е. П. Ерошенков

М950. Двадцать пять коротышек делят садовые участки в Цветочном городе. Каждый участок представляет собой квадрат 1×1 и все участки вместе составляют квадрат 5×5. Каждый коротышка находится в ссоре не более, чем с тремя другими коротышками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки двух поссорившихся коротышек не были бы соседними. (Соседними называются участки, имеющие общую сторону.)

С. В. Конягин

Ф958. Космическая станция массой M и состыкованный с ней спутник массой m движутся вокруг

*) В данной задаче треугольник рассматривается вместе с его внутренней областью.

Земли по круговой орбите, радиус которой равен $1{,}25R$, где R — радиус Земли. В некоторый момент спутник катапультируется со станции в направлении ее движения и переходит на эллиптическую орбиту с апогеем, удаленным от центра Земли на расстояние $10R$. При каком отношении m/M спутник встретится со станцией, совершив один оборот вокруг Земли?

А. А. Бирюков, Б. В. Данилюк

Ф959. При относительной влажности воздуха $r_1=50$ % вода, налитая в блюдце, испарилась на открытом воздухе за время $t_1=40$ мин. За какое время испарилась бы вода при $r_2=80$ %?

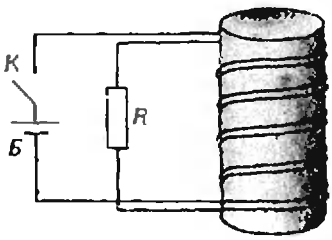


Рис. 1.

Ф960. Для того чтобы получить две совершенно одинаковые катушки, их наматывают на немагнитный сердечник одновременно, используя сложенные вместе провода (рис. 1). Одну из катушек подключают через ключ $К$ к батарейке $Б$ с напряжением U_0, вторую — к резистору R. Ключ замыкают. Рассчитайте мощность тока на резисторе. Нарисуйте график зависимости силы тока через батарейку от времени.
Через время τ ключ размыкают. Какое количество теплоты выделится в резисторе, начиная с этого момента?
Индуктивность каждой из катушек L. Батарейку считать идеальной. Сопротивлением проводов пренебречь.

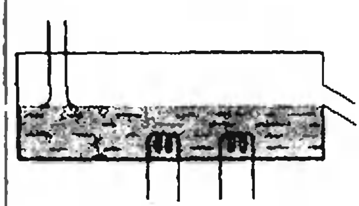


Рис. 2.

Ф961. Для поддержания постоянной температуры воды в проточном аквариуме пользуются двумя одинаковыми нагревателями (рис. 2). В обычном режиме используют один из них, а если подключают параллельно второй нагреватель, то расход холодной воды приходится увеличить в 3 раза. Как нужно изменить расход холодной воды, если нагреватели включены в сеть последовательно? Каким должен быть расход холодной воды, если включена одна спираль мощностью $P=100$ Вт? Температура холодной воды $t_1=10$ °С, температура воды в аквариуме $t_2=27$ °С. Вода быстро перемешивается.

А. Р. Зильберман

Ф962. Точечные источники, расположенные на главной оптической оси линзы, образуют равномерно светящуюся нить (проходящую через фокус линзы). Найти закон изменения $E(x)$ освещенности в точках, лежащих на той же оси по другую сторону линзы на больших от нее расстояниях x ($x \gg F$, где F — фокусное расстояние линзы).

М. А. Воронцов, В. Е. Куницын

Problems

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 15th to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

Problems M946—M950 were proposed at the 11th All-Russian olympiad in mathematics; problems P958—P961 were proposed at the final stage of the All-Union olympiad in physics.

M946—M950, P958—P962

M946. Two parabolas on the plane have four common points and perpendicular axes of symmetry. Prove that the four common points lie on a circle.

L. P. Kuptsov

M947. The following numbers are written in line on the blackboard.

$$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \dots\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}.$$

a) Prove that for any disposition of the signs "+" and "—" between them the corresponding sum will be non-zero.
b) What least amount of numbers must be erased from this list so that for a certain disposition of the signs "+" and "—" between the remaining numbers the corresponding sum vanishes?

M948. The equilateral triangle ABC is entirely covered by five smaller equilateral triangles. Prove that the triangle ABC can be entirely covered by four of these triangles.

V. V. Proizvolov

M949. A total of 1985 weights of mass 1g, 2g, 3g,...,1984g, 1985g are given. Can the weights be divided into five groups so that the number of weights and their total mass in each group is the same?

E. P. Eroshenkov

M950. Garden plots in the City of Flowers are being distributed among twenty five dwarfs. Each plot is a 1 by 1 square, together they constitute a 5 by 5 square. Each dwarf is on bad terms with no more than three other dwarfs. Prove that the plots can be distributed so that no two dwarfs on bad terms with each other are given neighbouring plots. (Plots are called neighbouring if they have a common side.)

S. V. Konyagin

P958. A space station of mass M linked together with a sputnik of mass m moves along a circular orbit of radius $1.25R$ around the Earth, where R is the Earth's radius. At some moment the sputnik is catapulted from the station in the direction of motion and then moves along an elliptic orbit with apogee at a distance $10R$ from the Earth's centre. For what ratio m/M will the sputnik meet the space station after one rotation around the Earth?

A. A. Biryukov, B. V. Danilyuk

P959. When the atmosphere's relative humidity was $r_1=50$ %, the water contained in a saucer and placed outdoors evaporated in time $t_1=40$ min. Now fast would the water have evaporated if $r_2=80$ %?

P960. In order to obtain two absolutely identical coils, they are simultaneously wound around the same non-magnetic cylinder using two wires put together (see Рис. 1). One of the coils is connected through the switch K to the battery B of voltage U_0, the second to the resistor R. The switch K ia then turned on. Calculate the power of current on the resistor. Plot the dependence on time of the current flowing through the battery. After time τ the switch is turned off. How much heat will be developed on the resistor from that time on? The inductivity of each coil is L. The battery may be assumed ideal, the resistance of the wires negligible.

P961. Two identical heaters are used to maintain constant water temperature in a flow-through aquarium (Рис. 2). When the water flow is normal, it suffices to use one heater, but if the second heater is connected in parallel to the first one, the water flow must be increased three fold. How must the water flow be changed when the two heaters are connected

(Окончание см. на с. 34)

СКОРОСТЬ

калейдоскоп

Вопросы и задачи

1. График изображает зависимость от времени скоростей двух прямолинейно движущихся тел на протяжении одного и того же промежутка времени. Какое из тел имело за этот промежуток бо́льшую среднюю скорость?

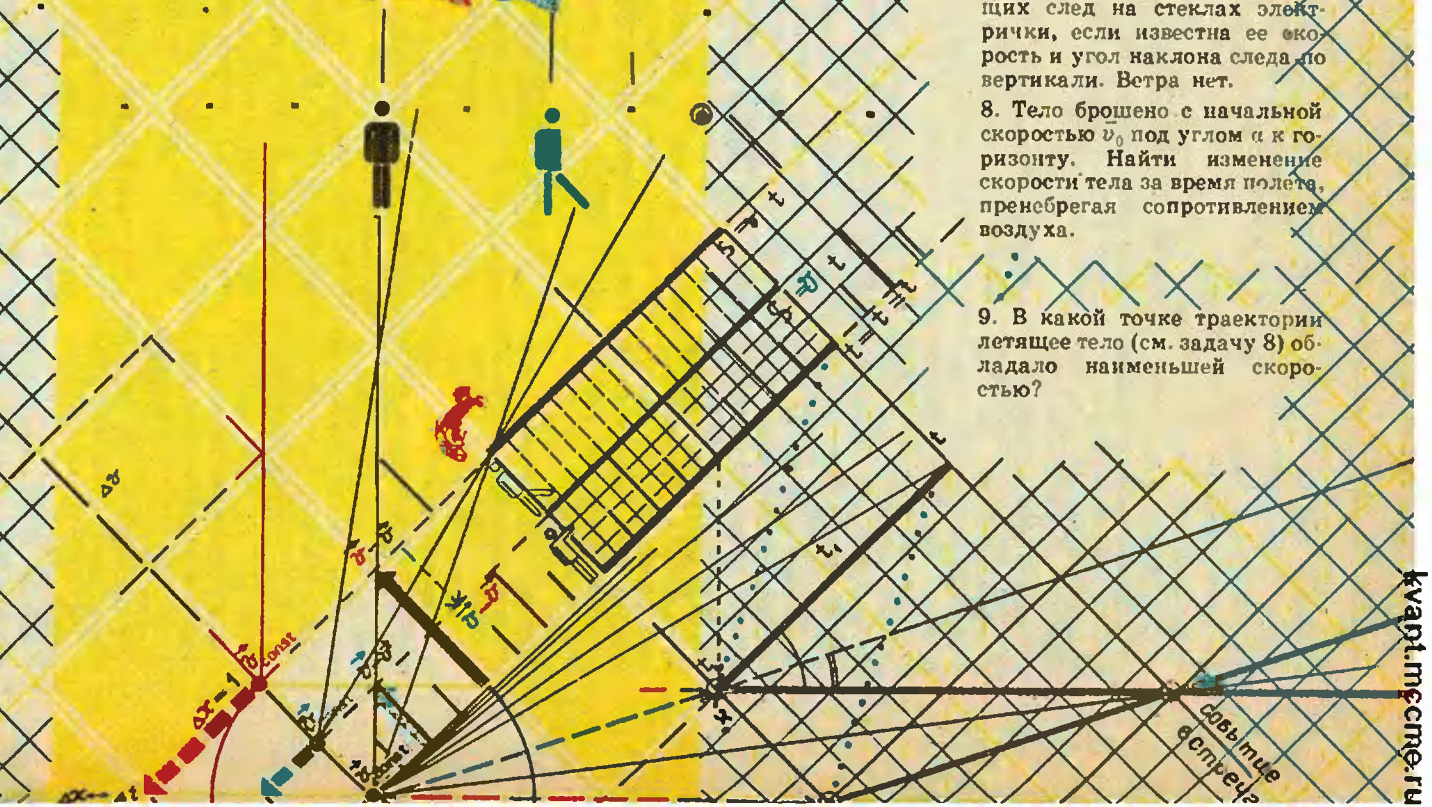
2. Лодку подтягивают за веревку к берегу. Определить скорость движения лодки в момент, когда угол наклона веревки α, скорость ее вытягивания — v_0.

3. На рисунке изображено расположение точек, участвующих в поперечном волновом движении, в какой-то момент времени (v — вектор скорости волны). Каковы направления векторов мгновенных скоростей точек a, b, c и d в этот момент времени?

«...если бы камень, выпущенный с вершины мачты плывущего с большой скоростью корабля, упал в точности в то же самое место, куда он падает, когда корабль стоит неподвижно, то какую службу сослужил бы этот опыт с падением для решения вопроса, стоит ли судно неподвижно или же плывет?»

Г. Галилей

«Диалог о двух главнейших системах мира»



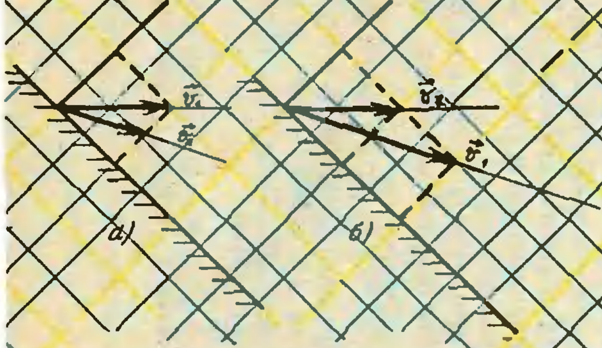
СКОРОСТЬ

7. Определить скорость падения капель дождя, оставляющих след на стеклах электрички, если известна ее скорость и угол наклона следа по вертикали. Ветра нет.

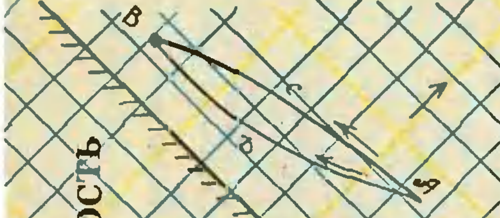
8. Тело брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти изменение скорости тела за время полета, пренебрегая сопротивлением воздуха.

9. В какой точке траектории летящее тело (см. задачу 8) обладало наименьшей скоростью?

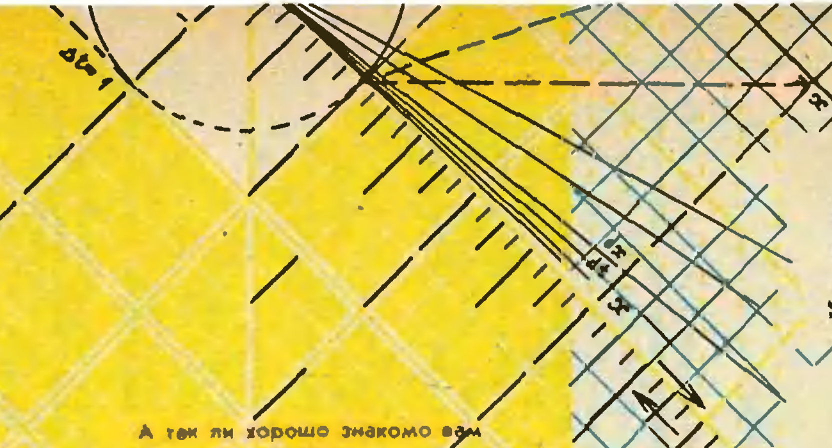
4. Два камня брошены с поверхности Земли под различными углами к горизонту со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ так, как показано на рисунках. Какой из камней улетит дальше? Сопротивлением воздуха пренебречь.



5. Тело соскальзывает из точки A в точку B один раз (не отрываясь) по дуге ACB, другой раз по дуге ADB. В каком случае скорость тела в точке B больше, если коэффициент трения один и тот же?



6. Может ли человек бежать быстрее своей тени?



А так ли хорошо знакомо вам понятие

СКОРОСТЬ ?

Скорость — слово, которым пользуются задолго до того, как узнают, что же скрывается за ним в строгом понимании, прежде всего связывая его с быстротой движения.

Скорость — одна из первых векторных физических величин, с которыми вам пришлось познакомиться. Чтобы задать скорость, надо определить не только ее модуль, но и направление.

Скорость — величина относительная. Одно и то же тело может одновременно двигаться и находиться в покое в разных системах отсчета.

Скорость, с которой распространяется свет в вакууме,— максимально возможная скорость в природе, фундаментальная физическая константа.

Продолжим же знакомство с этим богатым по содержанию физическим понятием. Скорость — тема сегодняшнего «Калейдоскопа».

Микроопыт

Попробуйте, имея газету и секундомер, показать, что средняя скорость движущегося в воздухе тела тем больше, чем меньше площадь его поперечного сечения.

Любопытно, что...

...некоторые объекты могут достигать на Земле скоростей, значительно превышающих вторую космическую, однако от Земли не отрываться. Это, например, электроны, движущиеся в атомах, сами атомы при тепловом движении.

...скорости, сравнимые со скоростью света, получают в земных условиях на ускорителях элементарных частиц. Однако в природе существуют и гигантские объекты, удаляющиеся от нас с подобными скоростями, — это квазары, расстояние до которых измеряется миллиардами световых лет.

Что читать о скорости в «Кванте» (публикации последних лет)

«Кинематика. Относительность движения» — 1982, № 10;

«Равномерное движение» — 1983, № 3;

«Движение по окружности» — 1984, № 6;

«Как вводятся физические величины» — 1984, № 10;

«Принцип относительности» — 1984, № 10;

«Об одном стихотворении А. С. Пушкина» — 1984, № 10.

in sequence? How much water must be used when one heater of power $P=100$ Wt is working? The temperature of the water source is $t_1=10$ °C, the aquarium water temperature is 27 °C, its water mixes very rapidly.

A. R. Zilberman

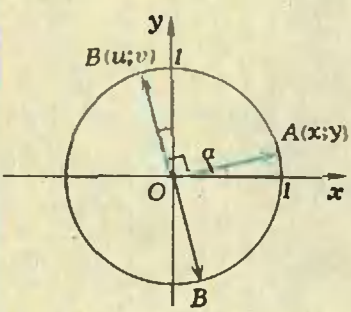
P962. Point sources, located on the principal optical axis of a lens, constitute a uniformly lighted string (passing through the lens' focus). Find the rule $E(x)$ expressing the luminosity at points of the optical axis on the opposite side of the lens, when the distance x from the lens is large ($x \gg F$, where F is the lens' focal distance).

M. A. Vorontsov, V. E. Kunitsin

Решения задач

М926 — М930; Ф938 — Ф942

М926. *Докажите, что если* $x^2+y^2=u^2+v^2=1$, $xu+yv=0$, *то* $x^2+u^2=y^2+v^2=1$, $xy+uv=0$.



Условие задачи удобно представить геометрически. Отметим на координатной плоскости Oxy точки $A(x;y)$ и $B(u;v)$. Угол AOB прямой, так как $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=xu+yv=0$. Кроме того, $OA^2=x^2+y^2=1$ и $OB^2=1$, поэтому точка B получается из точки A поворотом вокруг O на $\pm 90°$ (см. рисунок) и $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$, где α — угол между вектором $\vec{OA}$ и осью Ox, а значит, $u=\cos(\alpha\pm 90°)=\mp\sin\alpha=\mp y$, $v=\sin(\alpha\pm 90°)=\pm\cos\alpha=\pm x$. Следовательно,

$$x^2+u^2=x^2+y^2=1,$$
$$y^2+v^2=y^2+x^2=1,\ xy+uv=xy-xy=0.$$

Приведем еще одно, чисто алгебраическое, решение. В тождестве

$$(x^2+y^2-1)^2+(u^2+v^2-1)^2+2(xu+yv)^2=$$
$$=x^4+y^4+u^4+v^4+2-2(x^2+y^2+u^2+v^2)+$$
$$+2(x^2y^2+u^2v^2+x^2u^2+y^2v^2)+4xuyv=$$
$$=(x^2+u^2-1)^2+(y^2+v^2-1)^2+2(xy+uv)^2$$

левая часть, по условию, равна нулю; следовательно, равна нулю и правая часть, то есть справедливы три доказываемых равенства.

Попробуйте обобщить нашу задачу на трехмерный случай — доказать, что если три вектора длины 1 в пространстве с координатами $(x_1; x_2; x_3)$, $(y_1; y_2; y_3)$, $(z_1; z_2; z_3)$ попарно перпендикулярны, то векторы $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$ и $(x_3; y_3; z_3)$ тоже имеют длину 1 и попарно перпендикулярны.

С. В. Дужин

◆

М927.* *На плоскости дано конечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проведено несколько отрезков с концами в данных точках. Эти отрезки разрешается менять: если какие-то два из них, AC и BD, пересекаются, их можно стереть и провести*
а) отрезки AB и CD,
б) отрезки AB и BC.
(Если «новый» отрезок уже проведен, проводить его второй раз не нужно.)
Можно ли после нескольких таких замен (только по правилу а) или только по правилу б), но не по обоим) вернуться к исходному набору отрезков?

а) Докажем, что через конечное число операций «типа а» — замены пересекающихся отрезков AC и BD на непересекающиеся AB и CD — мы придем к конфигурации, в которой уже не будет пересекающихся отрезков.

Рассмотрим сумму s длин всех отрезков конфигурации. При каждой операции типа a она уменьшается:

$$AB+CD<AC+BD \qquad (*)$$

(для треугольников APB и CPD, где P — точка пересечения AC и BD — рис. 1, выполнены неравенства $AB<AP+PB$ и $CD<CP+PD$; сложив их, получим (*)).

С другой стороны, величина s может принимать лишь конечное число различных значений, по-

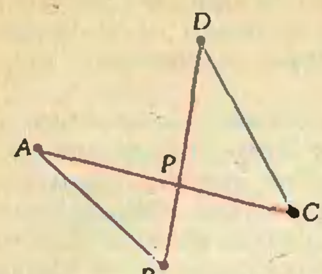


Рис. 1.

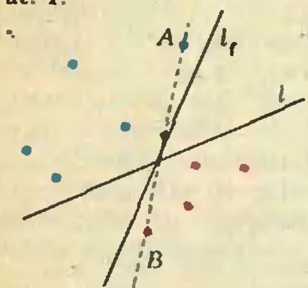


Рис. 2.

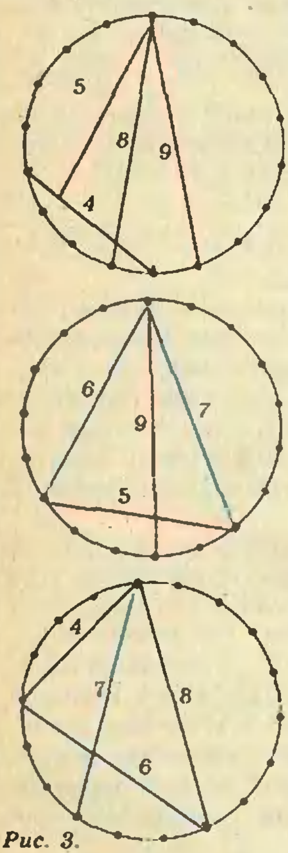


Рис. 3.

скольку существует лишь конечное число различных конфигураций из отрезков с вершинами в данных точках. Поэтому через конечное число шагов мы придем к конфигурации, с которой уже нельзя проделать операцию, уменьшающую s.

Это решение дает очень грубую верхнюю оценку для максимального количества T_n операций, которое может быть проделано с конфигурацией на n точках — можно сказать лишь, что оно меньше числа всех конфигураций, то есть $2^{n(n-1)/2}$ ($n(n-1)/2$ — это число различных отрезков с концами в данных n точках).

Приведем идею другого решения, дающего значительно лучшую оценку. Рассмотрим произвольное разбиение f данных точек на два непустых множества, каждое из которых лежит целиком по одну сторону от некоторой прямой l. Таких прямых для данного разбиения, конечно, бесконечно много, но одну из них всегда можно получить, повернув по часовой стрелке прямую, соединяющую две какие-либо точки A и B на очень маленький угол вокруг середины отрезка AB (рис. 2); эту прямую обозначим l_f. Число прямых l_f, а значит и число рассматриваемых «выпуклых» разбиений не превосходит числа пар точек $n(n-1)/2$.

Назовем *балансом конфигурации* суммарное число b пересечений ее отрезков со всеми прямыми l_f; ясно, что $0 \leqslant b \leqslant (n(n-1)/2)^2$. При операции типа *а* число пересечений любой прямой l_f с отрезками конфигурации не увеличивается, а по крайней мере для одной прямой оно уменьшается на 2. Следовательно, $T_n \leqslant n^2(n-1)^2/8$. Интересно было бы получить еще более точную оценку для T_n.

б) Приведем пример, показывающий, что для операции «типа *б*» — замены пересекающихся отрезков AC и BD на имеющие общий конец AB и BC — процесс может «зациклиться» и тем самым продолжаться неограниченно. Расположим 18 точек в вершинах правильного 18-угольника и обозначим через $D(k, l)$ конфигурацию из 36 отрезков, в которой каждая из 18 точек соединена с k-й и l-й от нее по счету.

Чтобы пройти за 54 операции путь $D(4,8) \to D(5,9) \to D(6,7) \to D(4,8)$ (рис. 3), достаточно каждую из операций, изображенных на рисунке 4, проделать по 18 раз (поворачивая картинку каждый раз на 20°).

По-видимому, существуют и примеры с существенно меньшим числом точек n и длиной цикла T, чем $n=18$ и $T=54$.

И. Б. Васильев, В. Е. Колосов

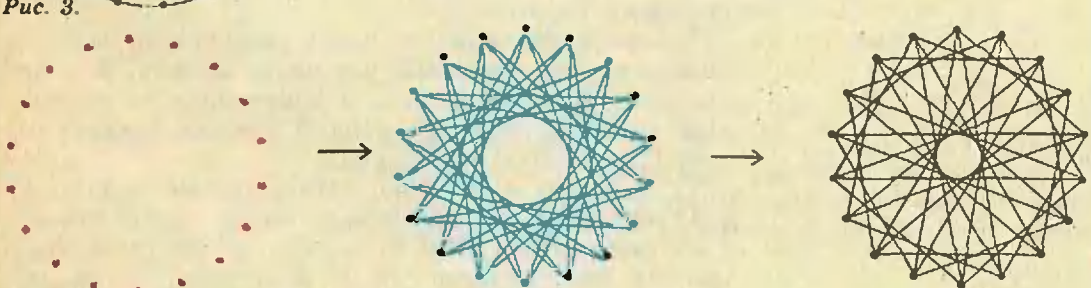


Рис. 4.

М928. *В кинотеатре $N+1$ место. Вначале N человек, имеющие билеты с указанием места (в их числе и Игорь) сели на произвольные N мест, не глядя на свои билеты. Пришедший последним $(N+1)$-й зритель хочет занять свое место; если оно занято — сгоняет сидящего там, тот поступает так же и так далее, пока нужное согнанному место не окажется свободным. Какова вероятность того, что Игорю придется пересесть? (Другими словами, какую долю среди всех возможных размещений зрителей составляют невыгодные для Игоря?)*

Ответ: 1/2. Докажем, что выгодных для Игоря размещений столько же, сколько невыгодных, установив взаимнооднозначное соответствие между теми и другими.

Пусть при некотором исходном размещении P N зрителей на $N+1$ местах Игорь пересел на свободное место. Тогда получится новое размещение P'. Таким образом, все возможные размещения разбиваются на пары (P, P') и достаточно показать, что в каждой паре одно размещение — выгодное для Игоря (его не сгонят), а другое — невыгодное.

Если P — выгодное размещение, то последний зритель, участвующий в пересадках (то есть имеющий билет на свободное место), при размещении P' сгонит Игоря. Значит, P' — невыгодное размещение. Если же P — невыгодное размещение, то зрителю, который сгоняет Игоря, при размещении P' сгонять будет некого, поэтому на нем пересадки закончатся, то есть P' — выгодное для Игоря размещение.

И. Б. Алексеев-Астафьев

◆

М929. *Натуральные числа a, b, c, d, e удовлетворяют условию $a^4+b^4+c^4+d^4=e^4$. Докажите, что по крайней мере а) три из них четны, б) три делятся на 5, в) два делятся на 10.*

а) Заметим, что *число n^4 при четном n делится на 16, а при нечетном n дает при делении на 16 остаток 1*. (Действительно, при $n=2k+1$

$$n^4-1=(n-1)(n+1)(n^2+1)=$$
$$=8k(k+1)(2k^2+2k+1),$$

а $k(k+1)$ всегда делится на 2.)

Следовательно, остаток от деления $a^4+b^4+c^4+d^4$ на 16 равен количеству нечетных чисел среди a, b, c, d. А поскольку он должен совпадать с аналогичным остатком для e^4, мы получаем, что условие задачи может выполняться, только если все пять чисел четны, или если число e и ровно одно из остальных чисел нечетны. Тем самым доказано и утверждение а).

б) Для остатка от деления числа n^4 на 5 справедливо утверждение, аналогичное доказанному в пункте а): *этот остаток равен 0 или 1 в зависимости от того, делится n на 5 или нет*. (Действительно, если $n=5k\pm1$, то $n^2-1=5k(5k\pm2)$ делится на 5; если $n=5k\pm2$, то $n^2+1=5k(5k\pm4)+5$ делится на 5. Поэтому $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)$ всегда делится на 5, если n не кратно 5. Это утверждение есть частный случай так называемой малой теоремы Ферма, формулировка которой приводится на полях.)

Малая теорема Ферма

Для любого целого числа n и простого числа p число n^p-n делится на p.

Теперь точно так же, как в решении пункта а), доказывается, что либо все числа a, b, c, d, e делятся на 5, либо число e и ровно одно из остальных четырех не делятся на 5, откуда следует б).

в) Рассмотрим три случая.

1) Число e четно. Из решения задачи а) следует, что все остальные числа тоже четны, а из решения задачи б) — что по крайней мере три из них делятся на 5, а значит, и на 10.

2) Число e делится на 5. Этот случай рассматривается так же, как предыдущий: все

числа a, b, c, d делятся на 5 и к тому же хотя бы три из них — на 2.

3) Число e не делится ни на 2, ни на 5. Тогда, как следует из решений задач а) и б), среди чисел a, b, c, d найдутся три четных и три кратных 5, а значит, хотя бы два из них делятся на 10.

Равенство $30^4+120^4+272^4+315^4=353^4$ показывает, что числа, удовлетворяющие условию задачи, существуют и что оценки а), б), в) нельзя усилить.

В заключение отметим, что до сих пор неизвестно, имеет ли уравнение $a^4+b^4+c^4=d^4$ решение в натуральных числах. Но сравнительно недавно (1966 г.) было обнаружено решение уравнения $a^5+b^5+c^5+d^5=e^5$:

$$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5.$$

В. Д. Яковлев

◆

М930. *Числа от 1 до 1985 разбиты на 6 множеств. Докажите, что в одном из них найдется три числа, одно из которых равно сумме двух других (или два числа, из которых одно вдвое больше другого).*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что утверждение задачи неверно. Это означает, что разность любых двух чисел каждого из наших 6 множеств не принадлежит этому множеству.

Поскольку $1985:6>330$, хотя бы одно из данных множеств содержит по крайней мере 331 число. Обозначим эти числа в порядке возрастания через $a_0, a_1, \ldots, a_{330}$, а само это множество — через A. По предположению

$$a_j-a_i \notin A \text{ при всех } i, j,\ 0 \leqslant i<j \leqslant 330. \quad (1)$$

Рассмотрим разности a_1-a_0, a_2-a_0, ..., $a_{330}-a_0$. Это различные числа, заключенные между 1 и 1985 и содержащиеся в силу (1) в пяти из данных множеств. Поскольку $330:5=66$, хотя бы одно из этих множеств (назовем его B) содержит 66 чисел — в порядке возрастания, $b_0, b_1, \ldots, b_{65}$. Разность любых двух из них совпадает с разностью каких-то двух чисел из $a_1, \ldots, a_{330}$ (если $b_j=a_k-a_0$, а $b_i=a_l-a_0$, то $b_j-b_i=a_k-a_l$), поэтому в силу (1) и с учетом нашего исходного предположения

$$b_j-b_i \notin A \cup B \text{ при всех } i, j, 0 \leqslant i<j \leqslant 65. \quad (2)$$

Продолжая рассуждать таким же образом, мы выберем из разностей $b_1-b_0, \ldots, b_{65}-b_0$ $[65/4]+1=17$*) чисел $c_0<c_1<\ldots<c_{16}$, принадлежащих третьему из данных множеств, отличному от A и B (назовем его C). При этом в силу (2) и нашего предположения

$$c_j-c_i \notin A \cup B \cup C \text{ при всех } i, j, 0 \leqslant i<j \leqslant 16$$

(если $c_j=b_k-b_0$, $c_i=b_l-b_0$, то $c_j-c_i=b_k-b_l$).

Аналогично выбираются 6 чисел $d_0<d_1<\ldots<d_5$ $(5=[16/3])$ из четвертого множества D, для которых

$$d_j-d_i \notin A \cup B \cup C \cup D \text{ при } 0 \leqslant i<j \leqslant 5;$$

затем 3 числа $e_0<e_1<e_2$ $(2=[5/2])$ из пятого множества E, попарные разности которых e_j-e_i, $0 \leqslant i<j \leqslant 2$ могут принадлежать уже только шестому множеству F, и, наконец, два различных чис-

*) $[a]$ — целая часть числа a.

ла $f_0=e_1-e_0$ и $f_1=e_2-e_0$ из множества F, разность $f_1-f_0=e_2-e_1$ которых тоже должна принадлежать множеству F, что противоречит нашему предположению.

Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Рассуждая так же, как в приведенном решении, нетрудно показать, что утверждение задачи выполняется для любого разбиения первых N чисел $1, 2, \ldots, N$ на k множеств при

$$N=N_k=k!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!}\right) \qquad (3)$$

($n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$). Значения N_k для $k=1, \ldots, 6$ выписаны в таблице на полях. Очевидно, что и для любого $N \geqslant N_k$ утверждение задачи будет верно для k множеств; в нашем случае $1985>1957=N_6$. Отметим, что сумма в скобках в правой части (3) при $k\to\infty$ очень быстро сходится к основанию натуральных логарифмов — числу $e=2{,}718\ldots$ Можно проверить, что $N_k=[k!e]$, однако эта красивая формула, к сожалению, не дает *наименьшего* подходящего значения N для данного k; например, для $k=3$ наименьшее значение равно 14, а не 16. Здесь возникает интересная, но, видимо, трудная задача оценки этого наименьшего значения снизу. Верно ли, например, что оно всегда больше $ck!$, где c — некоторая постоянная? Лучшей известной пока оценкой остается $(3^k-1)/2$ *А. Ходулева* (см. решение задачи М540, «Квант» № 12, 1979, с. 23).

k	N_k
1	2
2	5
3	16
4	65
5	326
6	1957

А. Д. Валиев, В. Н. Дубровский

◆

Ф938. *Пилот космического корабля, движущегося со скоростью $v=1$ км/с, заметил прямо по курсу астероид диаметром $d=7$ км, когда до его поверхности оставалось расстояние $l=8{,}5$ км. Космонавт сразу же включил аварийные двигатели, которые за пренебрежимо малое время сообщают кораблю дополнительную скорость $\Delta v=300$ м/с, направление которой задается космонавтом. Может ли корабль избежать столкновения?*

Чтобы избежать столкновения, космонавт должен так изменить скорость корабля, чтобы угол между первоначальным направлением «на астероид» и новым курсом был больше угла α_0, определяемого условием (рис. 1)

$$\sin\alpha_0=\frac{d/2}{l+d/2}=\frac{d}{2l+d}\approx 0{,}292.$$

Максимальное отклонение от первоначального курса при сообщении кораблю дополнительной скорости Δv обеспечивается в том случае, когда вектор $\vec{\Delta v}$ оказывается перпендикулярным вектору $\vec{v_1}=\vec{v}+\vec{\Delta v}$ (рис. 2), то есть когда

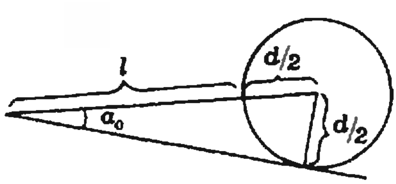


Рис. 1.

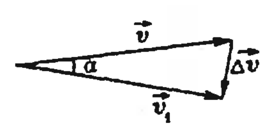


Рис. 2.

$$\sin\alpha=\frac{\Delta v}{v}=0{,}3.$$

Значит, при включении аварийных двигателей космонавт может изменить курс корабля на угол $\alpha>\alpha_0$, и столкновения с астероидом не произойдет.

А. В. Андрианов

◆

Ф939. *Дно сосуда наклонено под углом $\alpha=45°$ к горизонту. В дне имеется полусферическая выпуклость радиусом R*

Рассмотрим тело, имеющее форму половины шара радиуса R. Предположим, что оно находится в жидкости плотности ρ и ориентировано в про-

(рисунок 1). Высота столба жидкости над выпуклостью равна H. Какая вертикальная сила действует со стороны жидкости на выпуклый участок дна? Плотность жидкости равна ϱ.

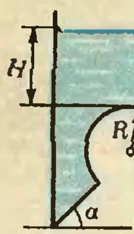


Рис. 1.

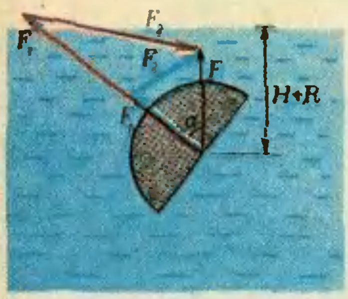


Рис. 2.

странстве точно так же, как и выпуклость в дне данного сосуда.

Согласно закону Архимеда, на это тело действует выталкивающая сила $\vec{F}$, направленная вертикально вверх и равная по модулю

$$F=\varrho gV=\varrho g\,\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\varrho g\pi R^3.$$

С другой стороны, силу $\vec{F}$ можно представить как равнодействующую двух сил давления со стороны жидкости: силы $\vec{F}_1$, действующей на «основание» половины шара, и силы $\vec{F}_2$, действующей на его боковую поверхность (на рисунке 2 показаны два возможных случая):

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2.$$

Нас интересует проекция силы $\vec{F}_2$ на вертикальную ось (обозначим ее через X и направим вверх):

$$F_{2x}=F-F_{1x}\quad\text{(для одного случая)}$$

или

$$F_{2x}=F_{1x}-F\quad\text{(для другого случая)}.$$

Для нахождения модуля и проекции силы $\vec{F}_1$ заметим, что давление линейно возрастает с глубиной и поэтому можно воспользоваться его средним значением:

$$F_1=p_{\text{ср}}S=\varrho g(H+R)\pi R^2,$$
$$F_{1x}=\varrho g(H+R)\pi R^2\cos\alpha.$$

Тогда для искомой величины получим

$$F_{2x}=F-F_{1x}=\frac{2}{3}\varrho g\pi R^3-\varrho g(H+R)\pi R^2\cos\alpha$$

или

$$F_{2x}=F_{1x}-F=\varrho g(H+R)\pi R^2\cos\alpha-\frac{2}{3}\varrho g\pi R^3.$$

При угле $\alpha=45°$ первый случай оказывается невозможным: $2/3<\cos\alpha=\sqrt{2}/2$, поэтому $F_{2x}<0$, чего в данной ситуации быть не может. Таким образом, остается второй случай:

$$F_{2x}=\varrho g\pi R^2\left((H+R)\cos\alpha-\frac{2}{3}R\right).$$

Л. Г. Маркович

Ф940. *Почему при кладке кирпичных печей для скрепления кирпичей используют глиняный раствор, а не, например, цементный (хотя он более твердый)?*

◆

В печи возможны большие и неравномерные по времени и по объему перепады температуры. Если кирпичи и раствор сделаны из разных материалов (то есть из материалов с разными коэффициентами теплового расширения), то при изменении температуры (охлаждение, нагревание) они будут по-разному меняться в объеме (расширяться, сжиматься). Это приведет к возникновению больших внутренних напряжений в местах контактов кирпич — раствор; в результате печь растрескается.

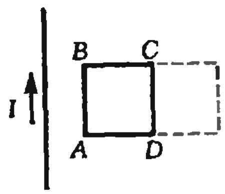
В. А. Ильин

Ф941. *В магнитном поле постоянного прямолинейного тока находится квадратная металлическая рамка ABCD (см.*

◆

При переводе рамки в новое положение изменяется пронизывающий ее магнитный поток. В результате в рамке индуцируется электродвижущая си-

рисунок). Рамку переводят в новое положение, показанное на рисунке пунктиром. Это можно сделать двумя способами: равномерным поворотом вокруг стороны CD или равномерным параллельным переносом вдоль AD. При каком способе выделится больше тепла, если время перевода рамки в новое положение в обоих случаях одинаковое?

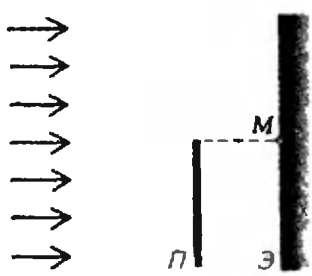


ла, возникает ток и выделяется тепло. ЭДС индукции, а значит, и выделившееся в рамке количество теплоты зависят от изменения магнитного потока через рамку и от времени, за которое это изменение произошло.

Во время поворота рамки вокруг стороны CD магнитный поток изменяется от некоторого начального значения до нуля и далее до некоторого значения с противоположным, по сравнению с первоначальным, знаком. При параллельном переносе рамки вдоль AD изменение магнитного потока происходит от начального значения до другого, меньшего значения, но с тем же знаком. Таким образом, в первом случае изменение магнитного потока больше, чем во втором. Это означает, что и тепла в рамке выделится больше в первом случае.

С. С. Кротов

Ф942. *Плоская световая волна падает нормально на экран Э. Как изменится освещенность экрана в точке M (см. рисунок), если на пути волны поместить полубесконечную непрозрачную пластину П, параллельную экрану?*



◆

Волновая поверхность плоской волны — плоскость, перпендикулярная направлению распространения волны. На пластину $П$ свет падает нормально, поэтому плоскость, в которую помещают пластину, является одной из волновых поверхностей, и ее можно рассматривать как совокупность одинаковых вторичных источников, колеблющихся в фазе. Результирующее колебание в точке M на экране представляет собой суперпозицию колебаний, приходящих от этих источников.

При внесении пластины закроется половина вторичных источников. Поэтому амплитуда результирующего колебания в точке M уменьшится в 2 раза. Освещенность экрана в точке M пропорциональна квадрату этой амплитуды. Следовательно, при внесении пластины освещенность уменьшится в 4 раза.

Д. А. Купцов

Это было так, точно из-под ног ушла земля и нигде не было видно твердой почвы, на которой можно было бы строить. Мне всегда казалось чудом, что этой колеблющейся и полной противоречий основы оказалось достаточно, чтобы позволить Бору — человеку с гениальной интуицией и тонким чутьем — найти главнейшие законы спектральных линий и электронных оболочек атомов, включая их значение для химии. Это кажется мне чудом и теперь. Это — наивысшая музыкальность в области мысли.

А. Эйнштейн

Во всей мировой науке в наши дни не было человека с таким влиянием на естествознание, как Бор. Из всех теоретических троп тропа Бора была самой значительной.

П. Капица

Я приехал в СССР, чтобы встретиться со старыми друзьями и найти новых, потому что содружество ученых разных стран помогает не только развитию науки, но и делу мира.

Н. Бор

Я до сих пор изумляюсь, когда смотрю на ядерный реактор.

Н. Бор

Если я что-нибудь немножко умею, то разве что думать...

Н. Бор

Квантовая теория больше не влечет меня к своим проблемам. Ныне первостепенная проблема — найти путь к предотвращению ядерной войны!

Н. Бор

Мы продолжаем публикацию стереометрических задач с чертежами, начатую во 2-м номере «Кванта» за этот год (см. также обложки 3, 5 и 6 номеров). Ниже приводятся условия двух задач; первая из них предлагалась на приемных экзаменах в Московский физико-технический институт в 1984 году. Вторая задача интересна тем, что рассматриваемую в ней конфигурацию не очень-то легко себе представить. Чтобы дать читателям возможность поразмыслить над ней самостоятельно, чертеж к ней мы поместим на обложке одного из следующих номеров.

Задача 1. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $|AC|=2|AB|$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей прямоугольника. Сфера касается плоскости $ABCD$ и всех боковых ребер пирамиды. Найти объем пирамиды, если радиус сферы равен R, а угол SDC равен α.

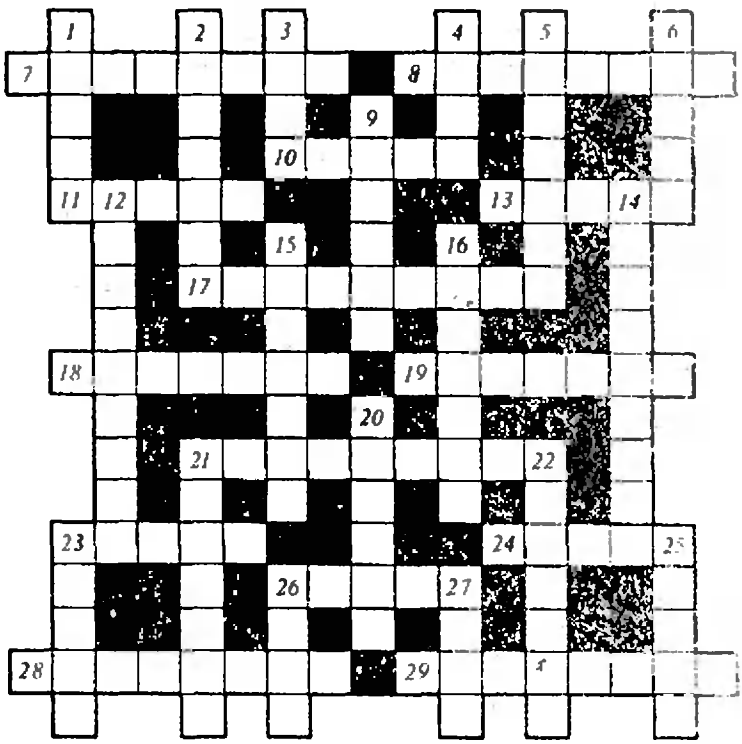
Плоскость проходит через точку S, касается указанной сферы и пересекает прямые BD и AC соответственно в точках P и Q ($|DP|>|BP|$, $|AQ|>|CQ|$). Найти отношение $|BP|:|BD|$, если:

а) $|BP|=|CQ|$,

б) $|CQ|=3|AC|$.

Задача 2. Имеется шесть предметов, два одинаковых шара радиуса R_1, еще два одинаковых шара радиуса R_2, очень длинный цилиндр с радиусом основания r и плоскость. Они расположены в пространстве так, что каждый из них касается пяти остальных (цилиндр — своей боковой поверхностью). Выразить R_1 и R_2 через r.

Кроссворд



По горизонтали: 7. Советский ученый-физик, удостоенный Нобелевской премии. 8. Прибор для измерения атмосферного давления. 10. Буква греческого алфавита. 11. Физическая величина. 13. Продукт механического соединения каких-либо веществ. 17. Прибор для измерений на сферах. 18. Звезда, красный гигант. 19. Прибор для регулирования силы тока в цепи. 21. Советский космонавт. 23. Наименьшая порция электромагнитной энергии. 24. Процесс распространения колебаний в пространстве. 26. Приставка для образования наименований дольных единиц. 28. Одна из декартовых координат точки. 29. Утверждение, принимаемое без доказательства, в рамках какой-либо научной теории.

По вертикали: 1. Трехэлектродная электронная лампа. 2. Тригонометрическая функция. 3. Прозрачная, бесцветная жидкость. 4. Один из элементов транзистора. 5. Вещество, состоящее из макромолекул. 6. Сплав железа с углеродом. 9. Гениальный английский физик. 12. Первый русский академик. 14. Единица измерения телесного угла. 15. Металл, имеющий наименьшее удельное сопротивление. 16. Прибор для преобразования электрических колебаний в звуковые. 20. Неправильность в действиях, мыслях. 21. Тригонометрическая функция. 22. Прибор для измерения силы тока, напряжения и сопротивления. 23. Минерал, природный кремнезем. 25. Самый твердый минерал. 26. Единица измерения длины. 27. Газ, предохраняющий живые организмы на Земле от вредного влияния солнечной радиации.

Составил Г. Н. Плотников

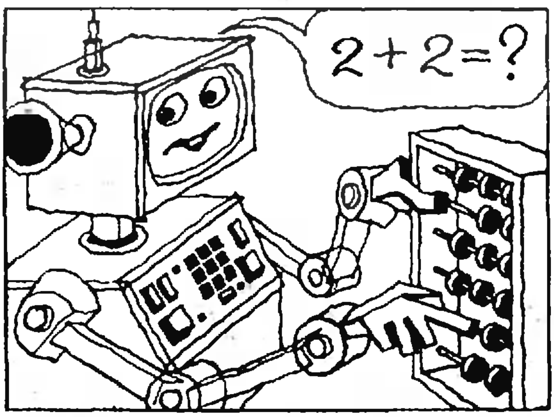
Алгоритмический язык

Академик А. П. ЕРШОВ

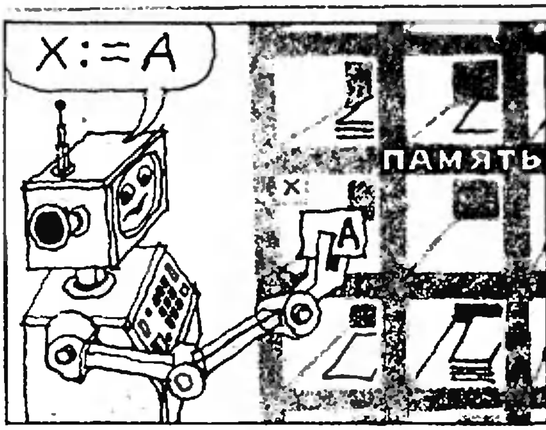
В этой статье продолжается разговор об основных понятиях информатики, начатый автором в предыдущем номере «Кванта». Как и прежде, следует обращать внимание на слова, набранные курсивом — это термины из информатики. А вот короткие слова, напечатанные жирным шрифтом, — это служебные слова, они появляются только в программах, выполняя в них определенные функции, в которых вам следует разобраться.

В прошлой статье мы рассмотрели несколько примеров алгоритмов. Теперь же наша цель — научиться записывать алгоритмы «по всем правилам науки». Но прежде чем разбирать правила отдачи приказа, следует понять, на что способен исполнитель приказов. Мы начнем поэтому с ответа на следующий вопрос:

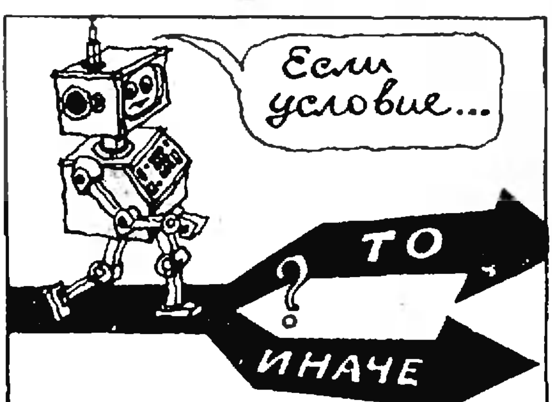
Что должен уметь исполнитель?



1°. **Считать.** Исполнитель должен не только быстро и безошибочно производить все четыре арифметических действия, но и понимать порядок их выполнения, «понимать скобки», а также находить *численные значения* переменных величин. Например, хороший исполнитель почти сразу сообщает, что при $x=0{,}17$ и $y=1{,}32$ выражение $(x^2+3x)(y^3+5xy)/\sqrt{x^2+xy}$ равно 3,66409 ... и даже быстро укажет, что $\cos 0{,}29°=0{,}99998719$ ... или $\sin(x^2+x)=0{,}003471$ ... при $x=0{,}17°$. Не страшны ему ни большие числа, ни большие объемы вычислений.

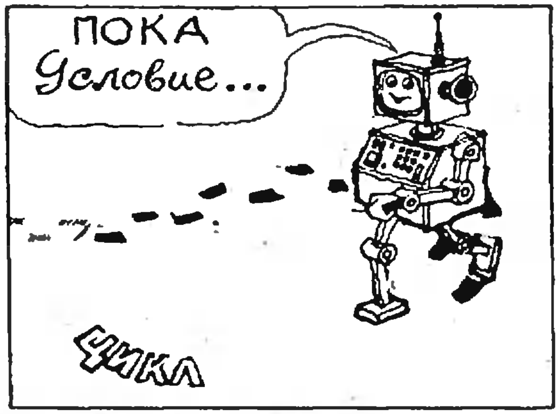


2°. **Запоминать.** Исполнитель умеет заносить сообщаемые ему данные в определенные (известные ему) места своей *памяти*. Данные могут быть как *числовыми*, так и *текстовыми (литерными) величинами*. В частности, он может запомнить какую-нибудь *команду* или *серию команд*. При необходимости исполнитель может уничтожить эти данные, заменить или изменить их. В частности, переменные числовые величины могут подвергаться многократным изменениям в процессе исполнения алгоритма.

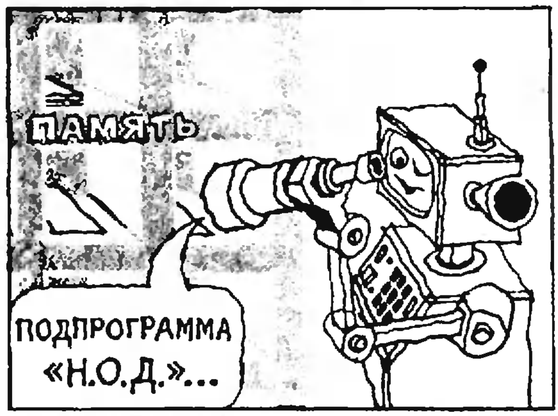


3°. **Выбирать.** Исполнитель должен уметь сам принимать решения о своих дальнейших действиях в зависимости от обстановки. Именно, он проверяет, выполнено ли некоторое сообщаемое ему *условие*, и **если** оно выполнено, он исполняет одну серию команд, **иначе** — другую серию. Такой выбор между двумя сериями команд программисты называют *условной командой* или *ветвлением*. Разумеется, исполнитель должен понимать заданное условие и уметь его проверить.

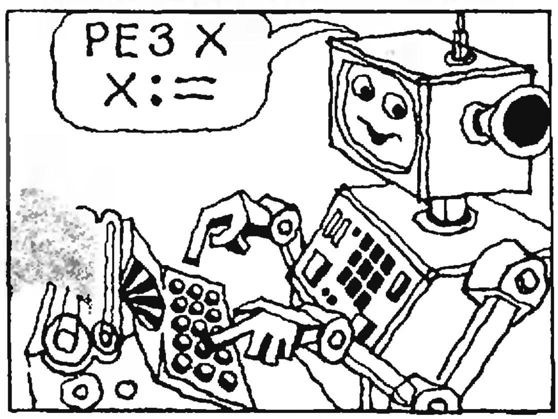
4°. Повторять. Исполнитель повторяет (быстро и, быть может, многократно) одну и ту же серию команд (*цикл*), пока выполнено определенное условие (*условие цикла*). Это условие он должен проверить перед каждым выполнением серии, а обнаружив, что оно нарушается, он должен перейти к следующей за циклом команде. Хороший исполнитель — например современный компьютер — силен именно умением с колоссальной скоростью таким образом *работать в цикле*.



5°. Вспоминать. Среди текстов, записанных в память исполнителя, могут быть разные данные (числовые, литерные), которые он должен уметь при необходимости вспомнить. В частности, в память могут быть занесены *вспомогательные алгоритмы*. Хороший испольнитель вспоминает (и выполняет) их по одному упоминанию их названия (*имени*), не требуя повторения всех команд вспомогательного алгоритма. Такой прием программисты называют *вызовом подпрограммы*.



6°. Печатать. Исполнитель печатает (например, карандашом на бумаге, на *печатающем устройстве* или на экране дисплея) решение задачи (ответ), то есть результаты выполнения программы, постепенно образовавшиеся в нужных местах его памяти в процессе работы. (Впрочем, при работе в диалоговом режиме с заказчиком компьютер-исполнитель пользуется печатью на дисплее не только в конце работы, но и в процессе работы для того, чтобы задавать вопросы.)



Примеры записи алгоритмов

Ниже приводятся примеры записи алгоритмов. Эти записи выполнены в соответствии с правилами *алгоритмического языка*, принятого в вашем учебнике. Мы предлагаем внимательно прочитать их и разобрать, как они работают, то есть сыграть роль исполнителя алгоритма (для предложенных исходных данных — значений аргументов). Если это сразу не получится, стоит еще раз просмотреть §§ 2—4 вашего учебника, прочитать общие пояснения, приведенные ниже, и затем вернуться к исполнению алгоритмов. Более подробные комментарии приводятся в конце статьи. Прочитав их, вы проверите, правильно ли вы исполнили данные алгоритмы, и будете готовы самостоятельно писать простые программы на алгоритмическом языке.

В частности, вы сможете записать алгоритмы, решающие задачи из предыдущей статьи этого раздела («Квант» № 9) на алгоритмическом языке. В таком виде часть решений (задачи про роботы) приводятся на следующей странице, остальные появятся в одном из ближайших номеров «Кванта».

Корни квадратного уравнения

```
алг КОРНИ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ
  (цел a, b, c, вещ x1, x2, лит C)
  арг a, b, c
  рез C, x1, x2
нач вещ d
    d: = b²−4ac
    если d<0
      то C: = «НЕТ РЕШЕНИЯ»
      иначе C: = «РЕШЕНИЕ»
          если d=0
            то x1: = −b/2a
               x2: = x1
            иначе x1: = (−b+√d)/2a
                  x2: = (−b−√d)/2a
          все
    все
кон
```

Упражнение 1. Примените этот алгоритм к следующим тройкам чисел $(a;\ b;\ c)$: (1; 2; 1), (2; 3; 7), (0; 4; 2).

Робот на шахматной доске

В следующих задачах маленький робот ходит по шахматной доске; через $(x;\ y)$ обозначены его координаты (например, поле e2 записывается как (5; 2), поле $h5$ — как (8; 5)); ход вверх увеличивает y на 1, ход вправо увеличивает x на 1.

```
алг РОБОТ ХОДОК (цел x, y, лит C)
  арг x, y
  рез C
нач пока x≤7
  нц
    шаг вправо
    x: = x+1
  кц
  пока y≤7
  нц
    шаг вверх
    y: = y+1
  кц
  C: = «ПРИШЕЛ»
кон
```

Упражнение 2. Примените алгоритм в ситуации, показанной на рисунке 1, где $(x;\ y)=(2;\ 3)$.

```
алг РОБОТ СКАЛОЛАЗ (цел y, лит C)
  арг y
  рез C
нач пока y≤7
  нц
    пока справа нет горы
    нц
      шаг вправо
    кц
    шаг вверх
    y: = y+1
  кц
  C: = «УРА, ЗАЛЕЗ!»
кон
```

Упражнение 3. Примените алгоритм в ситуации, показанной на рисунке 2.

```
алг РОБОТ ОБХОДЧИК (цел x, y, g, лит C)
  арг x, y
  рез C, g
нач пока y≤7
  нц
    если сверху нет ямы
      то шаг вверх
         y: = y+1
         g: = y
      иначе если x≤7
             то шаг вправо
                x: = x+1
             иначе g: = y
                   y: = 8
            все
    все
  кц
  C: = «Я НА ГОРИЗОНТАЛИ №»
кон
```

Упражнение 4. Примените алгоритм в ситуации рисунка 1 и сравните с упражнением 2*).

Делимость

```
алг ОСТАТОК ОТ ДЕЛЕНИЯ (цел x, y, r, лит C)
  арг x, y
  рез C, r
нач C: = «ОСТАТОК РАВЕН »
  пока x<y
  нц
    x: = x−y
  кц
  r: = x
кон
```

Упражнение 5. Примените алгоритм к числам $(x;\ y)$, равным (14, 5), (100000, 3), (27, 0).

```
алг ПРОВЕРКА ПРОСТОТЫ (цел x, d, r, лит C)
  арг x
  рез C
нач цел d
  C: = «ЧИСЛО — ПРОСТОЕ»
  d: = 2
  пока d≤√x
  нц
    ОСТАТОК ОТ ДЕЛЕНИЯ (x, d, r, E)
    если r=0
      то C: = «ЧИСЛО — СОСТАВНОЕ»
         d: = x+1
      иначе d: = d+1
    все
  кц
кон
```

Упражнение 6. Примените алгоритм к x, равному 7, 15, 49.

*) Обратите внимание на присваивания $g{:}=y$ и $y{:}=8$ — они обеспечивают выход из цикла.

Общие пояснения

Все приведенные записи алгоритмов начинаются с *заголовка* (выделенного синим цветом). Заголовок начинается с *названия* или *имени алгоритма* (оно напечатано заглавными буквами после служебного слова **алг**(оритм)) и списка *параметров* (список переменных величин стоит в скобках после названия алгоритма). Далее (после слов **арг**) следует список *аргументов* (это те параметры, которые в начале нужно ввести в машину — их она *запоминает*). Завершается заголовок списком *результатов* (они перечислены после слова **рез**). Мы будем считать, что машина напечатает их значения, когда алгоритм будет исполнен.

После заголовка идет *тело* программы. Оно начинается со служебного слова **нач**(ало), далее идут все *команды*, которые завершаются словом **кон**(ец).

Обратим сперва внимание на те команды, в которых машина *считает*. Здесь имеются как совсем простые вычисления (например прибавленные единицы), так и более сложные (скажем $(-b+\sqrt{d})/2a$). Записываются эти вычисления самым обычным образом — так, как вас учат на уроках математики. Поэтому этот аспект записи алгоритмов у вас не вызовет никаких трудностей. Стоит, однако, обратить внимание на команду *присваивания* (значок $:=$). Запись $x:=a$ означает, что параметру x машина присваивает значение a (здесь a может быть и числом, и текстом, и другим параметром). В этом случае машина *запоминает*, что x равно a. Если теперь она должна *напечатать* x, то она напечатает не букву x, а число (текст) a.

В *теле* программы для наглядности мы цветом выделили все ветвления и повторения. *Ветвления* показаны здесь раздваивающимися красными стрелками. Запись ветвления начинается со служебного слова **если** и кончается служебным словом **все**. После слова **если** стоит *условие*, затем служебное слово **то**, за ним первая серия *команд*, затем служебное слово **иначе**, а за ним вторая серия *команд*. Напомним, что при ветвлении машина проверяет условие, далее исполняет либо первую серию команд (если условие выполнено), либо вторую (в противном случае). Можно сказать, что машина *выбирает* нужную ей серию команд. Исполнив ее, машина переходит к следующей команде.

Повторения (или *циклы*) выделены здесь желтыми кружками. Каждый цикл открывается служебным словом **пока** и завершается словом **кц** (конец цикла). После слова **пока** стоит *условие цикла*, затем служебное слово **нц** (начало цикла), за ним серия команд цикла. Напомним, что при исполнении цикла машина сначала проверяет условие; если оно выполнено, машина выполняет серию команд цикла и вновь проверяет условие; если оно опять выполнено, машина снова исполняет серию и так далее, пока условие не окажется нарушенным; тогда она переходит к следующей команде (после слова **кц**); если условие никогда не нарушится, машина будет «работать вечно»,— говорят, что она *зациклилась*. Чтобы избегать зацикливания, нужно позаботиться о *выходе из цикла*, то есть добиться нарушения условия цикла.

Вспомогательный алгоритм (подпрограмма) вызывается своим именем, с указанием списка переменных (в скобках); указывать аргумент и результат не следует. Машина исполняет подпрограмму и присваивает переменным из ее списка соответствующие значения. Поэтому важно правильно согласовать имена этих переменных с именами переменных из основной программы.

Когда все команды программы исполнены (перед заключительным служебным словом **кон**), машина *печатает* подряд полученные значения тех переменных, которые в заголовке стоят после служебного слова **рез** (те переменные, которым никакие значения не присвоены, не печатаются). Не печатаются также кавычки, обрамляющие значения литерных переменных.

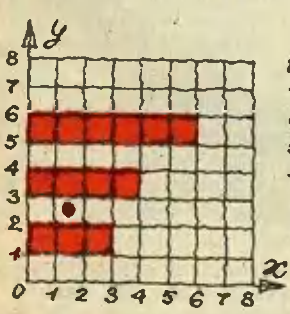


Рис. 1.

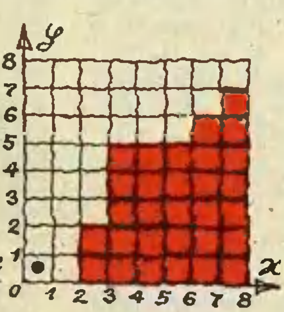


Рис. 2.

II. Полевые транзисторы

Доктор физико-математических наук
М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН,
кандидат физико-математических наук
Г. С. СИМИН

Принцип работы полевого транзистора (ПТ) очень прост (рис. 1). На тонкой полупроводниковой пластинке расположены три электрода. Если приложить напряжение между электродами 1 (истоком) и 2 (стоком), то по пластинке, называемой каналом, потечет ток. Величина протекающего по каналу тока изменяется при приложении к третьему электроду (затвору) управляющего напряжения.*)

Различные типы полевых транзисторов (а их существует довольно много) отличаются друг от друга принципом работы затвора. Существуют ПТ, в которых роль затвора играет p—n-переход, контакт металл — полупроводник, структура металл — диэлектрик — полупроводник (МДП-структура) и т. д.

На рисунке 2 показан ПТ, в котором в качестве затвора используется p—n-переход, смещенный в обратном направлении. Как известно («Физика 9» §79), на границе между электронным (n-типа) и дырочным (p-типа) полупроводниками образуется слой, обедненный свободными носителями тока (запорный слой). Если приложить к p—n-переходу запирающее напряжение $U_з$: «плюс» к n-типу и «минус» — к p-типу, то ширина этого слоя растет. Поскольку свободных носителей в запорном слое нет, ток через него не протекает. Таким образом, увеличение напряжения на затворе приводит к сужению канала, по которому протекает ток, и при неизменном напряжении сток — исток происходит уменьшение тока через транзистор. Еще большее напряжение на затворе полностью перекрывает канал, и ток обращается в нуль.

На рисунке 3 изображен другой тип транзистора, чрезвычайно широко используемый в современных ЭВМ, особенно в микрокалькуляторах. В качестве затвора в этом ПТ используется МДП-структура. Металлический затвор отделен от полупроводниковой пластины тончайшим (сотые доли микрона) слоем двуокиси кремния SiO_2, которая является хорошим диэлектриком. Поэтому транзисторы этого типа иногда называются также МОП—ПТ (металл—окисел—полупроводник). На пластине кремния p-типа под стоком и истоком созданы области n-типа (рис. 3, а). Напряжение сток—исток $U_{си}$, таким образом, прикладывается к двум последовательно соединенным p—n-переходам. Какова бы ни была полярность напряжения $U_{си}$ в отсутствие напряжения на затворе, один из p—n-переходов всегда оказывается запертым. В таком состоянии сопротивление p—n-перехода очень велико, и ток, протекающий через транзистор, близок к нулю.

*) Поскольку управление сопротивлением канала производится электрическим полем затвора, транзисторы этого типа и называются *полевыми*.

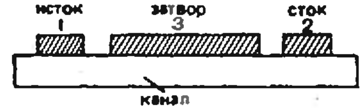


Рис. 1.

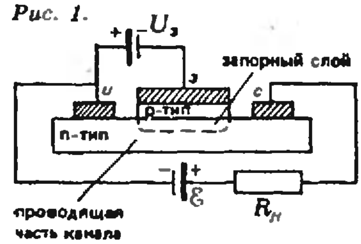


Рис. 2.

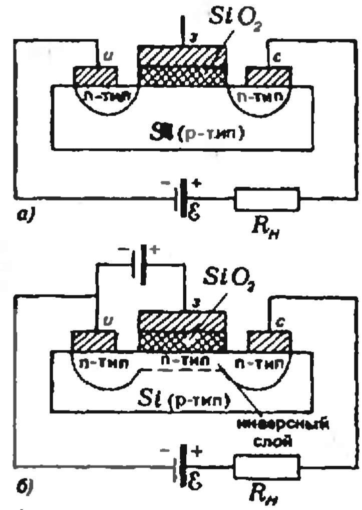


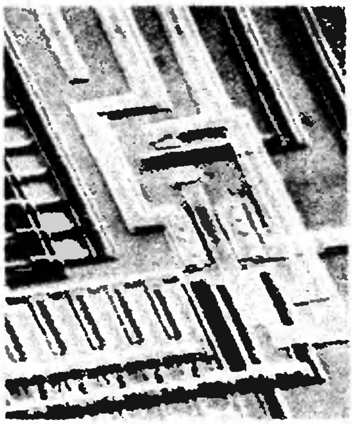
Рис. 3.

Большие интегральные схемы (БИС) для ЭВМ, содержащие на одном кристалле десятки и сотни тысяч транзисторов, в настоящее время изготавливаются из кремния. Подвижность электронов в кремнии $\sim 0,1$ м^2/(В · с). К началу 90-х годов нашего века ожидается появление БИС на основе арсенида галлия (GaAs). Подвижность электронов в GaAs ~ 1 м^2/(В · с). В исследовательских лабораториях созданы структуры, имеющие подвижность до 100 м^2/(В · с), пригодные для изготовления полевых транзисторов.

Минимальная достижимая длина канала L определяется совершенством технологии. Для полевого транзистора 60-х годов $L \cong 20$ мкм. Для современного серийного кремниевого МДП-транзистора $L \cong$ $\cong 3$ мкм. В исследовательских лабораториях получены приборы с $L \lesssim 0,3$ мкм.

Собственное предельное время переключения «3 мкм — транзистора» — $3 \cdot 10^{-11}$ с. Практическая скорость сраба-

тывания современной серийной логической МДП-ячейки составляет $5 \cdot 10^{-9}$ с. Рекордно малое время переключения МДП-транзистора, полученное в 1984 году, составляет $\sim 10^{-11}$ с.



Микрофотография фрагмента МДП—БИС. Длина канала самых больших элементов ~ 10 мкм, самых маленьких ~ 1 мкм.

При громадной плотности упаковки элементов на пластине ($\sim 10^5$) и крошечных размерах элементов ($\lesssim 1$ мкм), каждая пылинка, севшая на пластину, приводит к выходу из строя всей БИС.

В таких костюмах обычно работают хирурги. Но эта девушка «оперирует» не больного: она проводит операцию по изготовлению БИС.

Если же приложить сравнительно небольшой положительный потенциал к затвору $U_з$, то по другую сторону диэлектрика, в p-канале, который как бы служит второй обкладкой конденсатора, начнут скапливаться отрицательные заряды. Положительный заряд на затворе индуцирует появление в канале электронов, которые притягиваются полем металлического электрода. При некотором напряжении $U_з = U_0$, называемом пороговым напряжением, в узком слое под затвором концентрация индуцированных полем электронов превысит исходную концентрацию дырок в p-канале. Произойдет изменение характера проводимости (инверсия). Вместо полупроводника p-типа в пределах этого слоя возникнет полупроводник n-типа. В результате исчезают p—n-переходы между стоком и истоком и образуется сплошной проводящий канал (рис. 3, б). В таком состоянии сопротивление транзистора мало.

ПТ, у которых в отсутствие управляющего напряжения на затворе канал для тока открыт и сопротивление мало, называются нормально открытыми. ПТ, у которых, наоборот, в отсутствие управляющего напряжения канал закрыт, называются нормально закрытыми. МДП—ПТ, принцип работы которого рассмотрен выше (рис. 3), относится к нормально закрытым ПТ.

Для того чтобы схема, содержащая ПТ, имела два легко различимых состояния «0» и «1», и таким образом, могла служить элементом логической ячейки, достаточно последовательно с транзистором в цепь сток — исток включить сопротивление нагрузки $R_н$ и источник напряжения $\mathscr{E}$.

Если в такой схеме используется, например, нормально закрытый ПТ, то в отсутствие напряжения на затворе ($U_з = 0$) сопротивление транзистора очень велико и практически все напряжение источника $\mathscr{E}$ падает на транзисторе. Когда напряжение на затворе превышает пороговое значение U_0, сопротивление транзистора мало, и все напряжение падает на сопротивлении $R_н$. Эти два легко различимых состояния соответствуют состояниям «0» и «1» в логических схемах на основе МДП-транзисторов. Достаточно небольшого (≈ 1 В) сигнала на затворе, чтобы перевести транзистор из состояния «0» в состояние «1».

Важнейшим параметром транзистора в качестве элемента логических схем ЭВМ является скорость его переключения из открытого состояния в закрытое и обратно. Эта скорость определяется как свойствами самого прибора, так и схемой, в которую он включен. Самое малое время переключения, которое, в принципе, может быть получено, приблизительно равняется времени прохождения носителей τ вдоль канала под действием приложенного напряжения $U_{си}$. При длине канала L и скорости носителей v время пролета τ составит $\tau = L/v$. Скорость дрейфа электронов (или дырок) в электрическом поле, как известно, пропорциональна напряженности поля E ($v = \mu E$). Коэффициент пропорциональности μ, имеющий размерность $м^2/(В \cdot с)$, называется подвижностью. Поскольку напряженность поля в канале $E = U_{си}/L$, окончательно получаем: $\tau = L^2/\mu U_{си}$. Таким образом, предельное быстродействие полевых транзисторов определяется тем, насколько коротким удается сделать канал транзистора, и подвижностью носителей в материале, из которого изготовлен транзистор.

О том, каковы реальные размеры транзисторов, скорости их переключения и плотность упаковки в современных ЭВМ, вы узнаете из соседней колонки.

Повторим колебания

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

Колебания возникают в системе, выведенной из состояния устойчивого равновесия. Во многих практически важных случаях, если возвращающая в положение равновесия сила линейно зависит от смещения, получаются гармонические колебания. Обычно это «малые» колебания, когда равновесие нарушено незначительно.

Простейший пример — колебания математического маятника при небольших углах отклонения нити от вертикали. Еще пример — колебания груза под действием силы упругости пружины в отсутствие других сил. Он интересен тем, что колебания оказываются гармоническими, даже если они не малые — лишь бы пружина подчинялась условию (закону Гука) $F=-kx$, где x — удлинение пружины (смещение груза из положения равновесия), k — жесткость пружины, F — сила упругости пружины.

Разберем этот пример подробнее. Пусть груз прикреплен к горизонтальной пружине, второй конец которой закреплен, и находится на гладкой горизонтальной поверхности. Уравнение второго закона Ньютона для груза имеет вид

$$mx''=-kx,$$

или

$$x''+\frac{k}{m}x=0 \qquad (1)$$

(здесь m — масса груза, x'' — его ускорение, точнее — проекция ускорения на горизонтальную ось X). Решением такого уравнения является функция

$$x=x_m\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)=x_m\cos(\omega_0 t+\varphi_0), \qquad (2)$$

где x_m — амплитуда, $\omega_0=\sqrt{k/m}$ — собственная частота, φ_0 — начальная фаза колебаний. Частота определяется параметрами колеблющейся системы (k и m), а амплитуда и начальная фаза зависят от того, как именно систему вывели из состояния равновесия, то есть определяются начальными условиями.

Для нахождения x_m и φ_0 нужно составить дополнительно два уравнения. Достаточно задать, например, смещение x_0 и скорость v_0 в начальный момент времени $t_0=0$:

$$x_0=x(t_0)=x_m\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_0+\varphi_0\right)=x_m\cos\varphi_0,$$

$$v_0=v(t_0)=x'(t_0)=-x_m\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_0+\varphi_0\right)=-x_m\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\varphi_0.$$

Разделив второе уравнение на первое, найдем φ_0:

$$\operatorname{tg}\varphi_0=-\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{v_0}{x_0},\quad \varphi_0=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{v_0}{x_0}\right).$$

Величину x_m проще всего найти, исключая тригонометрические функции обычным методом возведения в квадрат и сложения уравнений:

$$x_0^2+\frac{m}{k}v_0^2=x_m^2,\quad x_m=\sqrt{x_0^2+\frac{m}{k}v_0^2}.$$

Можно задавать координаты $x(t_1)$ и $x(t_2)$ в какие-то «удобные» моменты времени t_1 и t_2, или скорости $v(t_1)$ и $v(t_2)$ или координату $x(t_1)$ и скорость $v(t_2)$ и т. д. Важно только, чтобы моменты времени t_1 и t_2 не оказались разделенными целым числом полупериодов.

Таким образом, зная уравнение движения системы (уравнение (2)) и два дополнительных данных, мы полностью опишем движение. То же можно сказать, например, и про равноускоренное движение — ускорение определено силами, а вместе с начальными координатой и скоростью это позволяет знать о таком движении абсолютно все.

Уравнения, похожие на уравнение (1), получаются во многих задачах на колебания — нужно только правильно выбрать переменную. Проиллюстрируем это, несколько усложнив задачу про груз на пружине.

Задача 1. *Груз — чашка весов массой M — висит на пружине жесткости k, а колебания возникают при падении в чашку грузика массой m (он пролетает до удара путь h и прилипает к чашке). Опишите движение чашки.*

Направим ось координат X и выберем начало координат 0 так, как показано на рисунке 1. Учитывая, что вначале чашка была в равновесии, запишем

$$Mg-k(l-l_0)=0$$

(l — длина пружины с подвешенной чашкой, l_0 — без нее). При отклонении на x от начального положения, когда грузик уже прилип к чашке, уравнение движения системы будет иметь вид:

$$(M+m)g-k(l-l_0+x)=(M+m)x''.$$

Раскрывая скобки и учитывая первое уравнение, получим

$$x''+\frac{k}{M+m}x=\frac{mg}{M+m}.$$

Это уравнение очень похоже на уравнение (1), мешает только правая часть — она не равна нулю. Ясно, почему так получилось: мы взяли начало координат не там, где нужно, — ведь положение равновесия у потяжелевшей чашки сдвинулось вниз на расстояние $\Delta x=mg/k$. Если мы введем новую переменную

$$x_1=x-\Delta x=x-\frac{mg}{k},$$

то уравнение для x_1 будет практически таким, как (1):

$$x_1''+\frac{k}{M+m}x_1=0$$

(напомним, что при такой замене переменной производные от x_1 такие же, как от x).

Мы не станем здесь решать задачу до конца, главное мы сделали — получили уравнение колебаний. Из него сразу найдем частоту колебаний:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M+m}}.$$

Для полного описания движения системы нужно вначале решить задачу о неупругом ударе груза о чашку, а затем найти амплитуду и начальную фазу колебаний. Проделайте это сами (ответ приведен в конце номера на с. 59).

Частоту гармонических колебаний системы можно находить и из энергетических соображений. Покажем это на примере идеального колебательного контура (без потерь).

Обозначим максимальный заряд конденсатора (амплитуду колебаний заряда) через q_m, а максимальный ток через катушку (амплитуду колебаний тока) — I_m. Ток — это первая производная от заряда обкладок по времени, поэтому для гармонических колебаний справедливо соотношение

$$I_m=q_m\omega_0.$$

В тот момент, когда заряд максимален ($q=q_m$), ток равен нулю, а при $i=I_m$ заряд конденсатора обращается в нуль. Найдем энергии контура в указанные моменты времени и приравняем их:

$$\frac{q_m^2}{2C}=\frac{LI_m^2}{2},\text{ или }\frac{q_m^2}{2C}=\frac{Lq_m^2\omega_0^2}{2},$$

где C — емкость конденсатора, L — индуктивность катушки. Отсюда

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Для примера применения энергетического метода разберем следующие две задачи.

Задача 2. *Найдите период вертикальных колебаний груза массой m в системе, изображенной на рисунке 2. Считать массу блока M сосредоточенной в его оси. Пружина имеет жесткость k, нить нерастяжима.*

Приравняем энергии системы в положении равновесия и в крайнем положении, когда скорость груза обращается в нуль. Но сначала немного статики. Обозначая длину нерастянутой пружины через l_0, а длину ее в положении равновесия через l, запишем

$$k(l-l_0)=Mg+2mg$$

(вниз на блок действуют две одинаковые силы натяжения нити, равные весу груза).

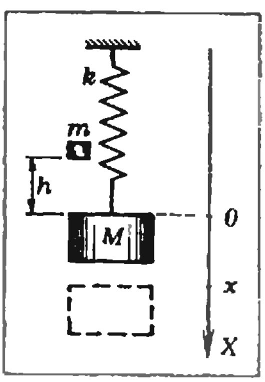


Рис. 1.

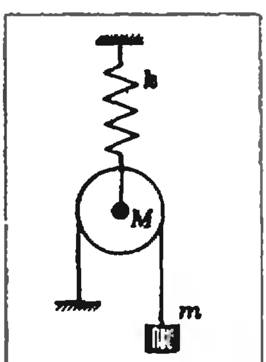


Рис. 2.

Пусть максимальное смещение оси блока вниз от положения равновесия равно x_m, тогда полная энергия системы в крайнем положении

$$W_1=\frac{k(l-l_0+x_m)^2}{2}-Mgx_m-mg(2x_m).$$

Обозначив скорость оси блока при прохождении положения равновесия через v_m, найдем выражение для полной энергии системы в этот момент:

$$W_2=\frac{k(l-l_0)^2}{2}+\frac{1}{2}Mv_m^2+\frac{1}{2}m(2v_m)^2.$$

Для гармонических колебаний в этом случае $v_m=x_m\omega_0$. Поэтому приравняв энергии W_1 и W_2, после простых преобразований получим

$$\frac{kx_m^2}{2}=\frac{Mx_m^2\omega_0^2}{2}+2mx_m^2\omega_0^2,$$

откуда

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M+4m}}.$$

Эту задачу можно решить и при другом распределении масс в блоке, для этого к энергии поступательного движения блока нужно лишь прибавить энергию его вращения. Если, например, масса M не сосредоточена в оси, а распределена по окружности радиуса r с центром на оси, то полная кинетическая энергия

$$W_k=\frac{Mv^2}{2}+\frac{M(vr/R)^2}{2},$$

где R — радиус блока.

Задача 3. *В системе зажигания двигателя внутреннего сгорания используется явление самоиндукции. Катушка индуктивности L подключается к аккумулятору с напряжением U_0 (рис. 3), и когда ток достигает значения I_0, цепь размыкают. Параллельно катушке подключен разрядник P («свеча» зажигания), в котором при достижении напряжения U $(U\gg U_0)$ проскакивает искра. Какой важный параметр мы не задали? При каких соотношениях между всеми параметрами система будет работать?*

Важным параметром тут является емкость C (конденсатор емкости C на схеме подключен параллельно разряднику). Она складывается из емкости разрядника, емкости между подводящими проводами и емкости между витками катушки.

Проделаем расчет. Если бы разрядника не было, в контуре, состоящем из катушки и конденсатора, возникли бы колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе получается при токе катушки, равном нулю. Это напряжение можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{LI_0^2}{2}=\frac{CU_m^2}{2},\quad U_m=I_0\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Разряд происходит при условии $U\leqslant U_m$, то есть

$$U\leqslant I_0\sqrt{\frac{L}{C}},\ \text{или}\ I_0\geqslant U\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

В этой задаче есть одна тонкость. Как бы ни был устроен выключатель, он не может действовать мгновенно. В процессе размыкания активное сопротивление цепи меняется от нуля (вначале) до очень большой величины (когда цепь разомкнута), и в цепи выделяется тепло. Здесь снова важно влияние емкости C. Если время размыкания τ мало́ по сравнению с периодом колебаний $T=2\pi/\omega_0=2\pi\sqrt{LC}$, то выделившимся количеством теплоты по сравнению с энергией, запасенной в катушке, можно пренебречь.

Иногда «колебательное» уравнение возникает в задачах явно не колебательных. Рассмотрим пример.

Задача 4. *Тонкий однородный брусок длиной l скользит сначала по гладкому горизонтальному столу, а затем попадает на шероховатый участок с коэффициентом трения μ. Брусок останавливается, въехав туда наполовину. Найдите начальную скорость бруска и время торможения.*

Пусть на шероховатой поверхности находится часть бруска длиной $x<l/2$. Считая, что силы нормальной реакции распределены вдоль бруска равномерно, найдем силу трения:

$$F_{тр}=-\mu mg\frac{x}{l}$$

и ускорение бруска:

$$a=x''=\frac{F_{тр}}{m}=-\mu g\frac{x}{l}.$$

Получили знакомое уравнение

$$x''+\frac{\mu g}{l}x=0.$$

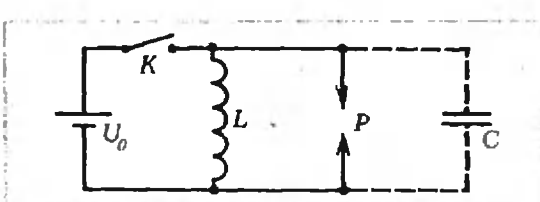


Рис. 3.

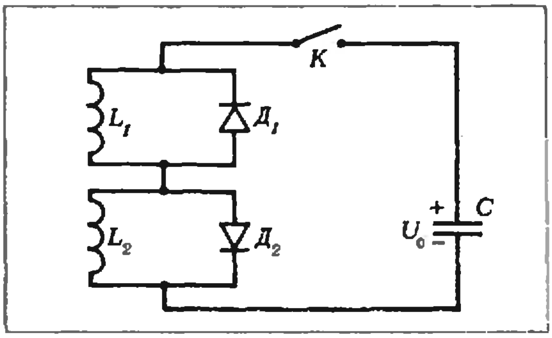


Рис. 4.

Торможение начинается в момент, когда $x=0$, и заканчивается при скорости $v=0$, что соответствует ровно четверти периода «колебаний»; следовательно, время торможения

$$\tau=\frac{1}{4}T=\frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

Разумеется, настоящих колебаний не будет — брусок после остановки назад не поедет (при отсутствии проскальзывания сила трения упадет до нуля).

Легко теперь записать выражение для координаты x:

$$x=\frac{l}{2}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\,t \quad (\text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant\tau)$$

и для скорости v:

$$v=x'=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\cos\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\,t$$

$$(\text{при } 0\leqslant t\leqslant\tau).$$

Отсюда найдем начальную скорость

$$v=v\,(t=0)=\frac{1}{2}\sqrt{\mu g l}.$$

Эту задачу можно усложнить, увеличив скорость так, чтобы брусок весь въезжал на шероховатую часть стола, — тогда после «гармонического» торможения наступит обычное. Хитрость же в том, что теперь «гармоническая» часть займет уже не четверть периода, а меньше. Рассчитайте сами время торможения при $v_0=2\sqrt{\mu g l}$ (ответ приведен на с. 59).

Теперь обсудим задачу про слабо затухающие колебания в контуре.

З а д а ч а 5. *Катушка индуктивностью $L=1$ Гн, имеющая активное сопротивление $R=1$ Ом, и конденсатор емкостью $C=1$ мкФ образует колебательный контур. В некоторый момент напряжение на конденсаторе равно $U_1=0{,}1$ В, а ток — максимален. Чему равен этот ток? Найдите приближенно потери энергии в контуре за один период. Через какой промежуток времени заряд конденсатора окажется нулевым? П о д с к а з к а: при выбранных параметрах контура колебания затухают медленно.*

Выделим в схеме отдельный элемент — резистор, обладающий только активным сопротивлением. В тот момент, когда ток в контуре максимален, ЭДС индукции, возникающая в катушке, равна нулю. Значит, сумма напряжений на резисторе и конденсаторе — тоже нуль. Отсюда найдем максимальный ток:

$$I_m=\frac{U_1}{R}=0{,}1\ \text{А}.$$

Для оценки тепловых потерь энергии в течение одного периода будем считать ток синусоидальным с амплитудой I_m. Тогда

$$\Delta W=Q=\frac{1}{2}I_m^2RT=\frac{1}{2}I_m^2R2\pi\sqrt{LC}\approx$$
$$\approx 3\cdot10^{-5}\ \text{Дж}.$$

Энергия, запасенная в контуре,

$$W=\frac{1}{2}LI_m^2+\frac{1}{2}CU_1^2\approx5\cdot10^{-3}\ \text{Дж}\gg\Delta W,$$

значит, наше приближение было корректным.

Для расчета времени τ «доразряда» конденсатора от заряда $q_1=CU_1$ до нуля воспользуемся связью между зарядом и током:

$$q_1=\int_0^\tau i\,(t)\,dt=\int_0^\tau I_m\cos\omega_0 t\,dt=$$
$$=\frac{I_m}{\omega_0}\sin\omega_0\tau,$$

откуда

$$\tau=\frac{1}{\omega_0}\arcsin\frac{CU_1\omega_0}{I_m}=$$
$$=\frac{1}{\omega_0}\arcsin(\omega_0 RC)\approx1\cdot10^{-6}\ \text{с}.$$

Упражнения

1. Рассчитайте период колебаний столба воды в U-образной трубке с площадью поперечного сечения $S=0{,}2$ см^2. Масса воды $m=5$ г. Вязкостью пренебречь.

2. Электродвигатель вращает маховик массой $m=0{,}1$ кг и радиусом $R=5$ см при помощи резинового приводного ремня жесткостью $k=20$ Н/см. При каком числе оборотов мотора колебания скорости маховика могут стать недопустимо большими? Считайте, что масса маховика сосредоточена на расстоянии $r=3$ см от оси вращения.

П о д с к а з к а: из-за неровностей вала мотора происходят толчки — один раз за оборот вала. Тут опасен резонанс.

3. В некоторый момент в схеме, изображенной на рисунке 4, ключ K замыкают. Нарисуйте графики зависимостей $U_C(t)$, $I_{L1}(t)$ и $I_{L2}(t)$. Диоды считать идеальными.

XI Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции в дни весенних школьных каникул проходит заключительный, зональный этап Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников 8—10 классов. Зональному этапу предшествуют школьные, районные, городские и областные (краевые) олимпиады, по результатам которых каждая область (край) представляет по одному победителю от каждого класса по каждому из предметов.

В этом году заключительный этап олимпиады проводился в четырех городах — Смоленске (для Северо-Западной зоны), Казани (для Центральной зоны), Грозном (для Юго-Западной зоны) и Омске (для Сибири и Дальнего Востока). Кроме того, в это же время проходил заключительный этап олимпиады в физико-математических школах-интернатах при Ленинградском, Московском и Новосибирском университетах.

Задание по математике для заключительного этапа олимпиады состояло из пяти задач, на решение которых отводилось четыре часа. Как показала проверка, наибольшие трудности у учащихся вызвали задачи по геометрии, комбинаторике и анализу. Значительные трудности у восьмиклассников вызвала задача о разложении многочлена на множители. Члены жюри подробно обсудили со школьниками конкурсные задачи и проанализировали типичные ошибки.

Особенностью заключительного этапа олимпиады по математике этого года было проведение практического тура, в котором участвовали школьники 9 и 10 классов. Задачи, предложенные на практическом туре, вызвали большой интерес как у участников олимпиады, так и у руководителей команд: впервые на наших олимпиадах использовались микрокалькуляторы. Хотя результаты решения этих задач не учитывались при определении победителей олимпиады, школьники, хорошо проявившие себя в практическом туре, были награждены грамотами и специальными призами. Подводя итоги, Центральный Оргкомитет принял решение рассмотреть возможность включения задач практического тура в число конкурсных задач олимпиады.

Заключительный этап олимпиады по физике проводился в два тура — теоретический и экспериментальный. Задание теоретического тура включало пять задач, экспериментального — две задачи. На выполнение каждого задания отводилось четыре часа. По результатам проверки оказалось, что наибольшие трудности у восьмиклассников вызвала первая задача, у девятиклассников — вторая, у десятиклассников — третья задача теоретического тура.

Школьники, занявшие I—IV места на зональном этапе Всероссийской олимпиады, были награждены дипломами, грамотами и памятными подарками. Из числа призеров была сформирована команда РСФСР для участия во Всесоюзной олимпиаде.

Специальными грамотами были награждены также учителя, подготовившие призеров олимпиады.

Ниже приводятся задачи по математике и физике заключительного этапа и фамилии призеров XI Всероссийской олимпиады школьников.

Математика

8 класс

1. Докажите, что для любых чисел x и y, отличных от нуля, выполняется неравенство

$$x^4+y^4 \leqslant \frac{x^6}{y^2}+\frac{y^6}{x^2}.$$

2. На доске в строку написаны числа

$$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \ldots\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}.$$

а) Докажите, что, как бы мы ни расставили знаки «+» и «—» между этими числами, полученная сумма не будет равна нулю.

б) Какое наименьшее количество написанных чисел необходимо стереть с доски для того, чтобы после некоторой расстановки «+» и «—» между оставшимися числами получилась сумма, равная нулю?

3. На плоскости даны отрезок AB и точка C, являющаяся внутренней точкой отрезка AB. Найдите множество точек M плоскости, таких, что $\angle AMB = \angle ACM$.

4. Правильный треугольник ABC полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками. Докажите, что треугольник ABC можно полностью покрыть четырьмя такими треугольниками. (В данной задаче треугольник рассматривается вместе с его внутренней областью.)

5. Представьте многочлен $x^{1985}+x+1$ в виде произведения двух многочленов.

9 класс

1. Докажите, что, для того чтобы знаки чисел a, b, c были одинаковы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$ab+bc+ca>0,\ \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}>0.$$

2. Дан остроугольный треугольник ABC. Рассматриваются всевозможные параллелограммы $AKMT$, вершины K, M, T которых лежат на сторонах AB, BC, CA соответственно.

а) При каком положении точки K длина диагонали AM будет наименьшей?

б) При каком положении точки K длина диагонали KT будет наименьшей? Опишите в этом случае метод построения точки K с помощью циркуля и линейки.

3. Даны 1985 гирь с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 1984 г, 1985 г. Можно ли их разделить на пять групп так, чтобы и число гирь, и их суммарная масса были одинаковы во всех пяти группах?

4. Две окружности радиусов R и r расположены на плоскости так, что одна находится вне другой. К окружностям проведены две внешние касательные и одна внутренняя касательная. Внутренняя касательная пересекает внешние касательные в точках A и B и касается одной из окружностей в точке C. Докажите, что справедливо равенство

$$R\cdot r=|AC|\cdot|BC|.$$

5. Дано натуральное число m. Последовательность чисел (x_n) строится следующим образом: $x_1=1$, а число x_{n+1} при $n\geqslant 1$ равно сумме цифр числа mx_n. Докажите, что в последовательности (x_n) обязательно найдутся два равных числа.

10 класс

1. Докажите, что уравнение

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$$

не имеет решений в целых числах.

2. Две параболы расположены на плоскости так, что их оси взаимно перпендикулярны и параболы пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

3. На плоскости даны правильный треугольник ABC и квадрат $DEHK$. Они расположены так, что вершина D квадрата является серединой стороны AC, вершина E лежит на стороне AB, вершина H — на стороне BC. Докажите, что вершина K лежит вне треугольника ABC.

4. Ребра AA_1, BB_1, CC_1 многогранника $ABCA_1B_1C_1$ лежат на параллельных прямых l_1, l_2, l_3 соответственно. Его треугольные грани ABC и $A_1B_1C_1$ лежат, вообще говоря, в непараллельных плоскостях. Докажите, что объем многогранника равен

$$V=\frac{1}{3}\left(|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|\right)\cdot S,$$

где S — площадь треугольника, вершинами которого являются точки пересечения прямых l_1, l_2, l_3 с перпендикулярной им плоскостью.

5. Двадцать пять коротышек делят садовые участки в Цветочном Городе. Каждый участок представляет собой квадрат 1×1 и все участки вместе составляют квадрат 5×5. Каждый коротышка находится в ссоре не более чем с тремя другими коротышками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки двух поссорившихся коротышек не были соседними. (Соседними называются участки, имеющие общую сторону.)

Задачи практического тура

9 класс

1. С помощью калькулятора вычислите число

$$4\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}.$$

2. Калькулятор выполняет арифметические операции с числами, не более чем двузначными. Как на этом калькуляторе можно умножить 10-значное число на 10-значное?

3. Калькулятор выполняет только две арифметические операции: сложение и вычитание. Известно, что функция $f(x)$ является линейной функцией. Известны ее значения $f(1)=16{,}3$ и $f(2)=15{,}1$. Как можно вычислить значение $f(1985)$? Чему оно равно?

4. Сколько цифр имеет число 2^{1985}? Дайте обоснование результата.

5. Какое количество арифметических операций следует выполнить, чтобы вычислить число ax^3+bx^2+cx+d? (Здесь a, b, c, d, x — данные числа.)

6. С помощью линейки постройте точку, являющуюся центром тяжести шестиугольника $ABCDEF$, вырезанного из однородного куска фанеры, если $[AB]\parallel[FE]\parallel[DC]$, $[BC]\parallel[ED]\parallel[AF]$ (рис. 1).

10 класс

1. С помощью калькулятора вычислите число

$$\sqrt[3]{200+126\sqrt[3]{2}+\frac{54}{1+\sqrt[3]{2}}}+\sqrt[3]{\frac{18}{1+\sqrt[3]{2}}}-6\sqrt[3]{2}.$$

2. Какое количество арифметических операций следует выполнить, чтобы вычислить число $\dfrac{ax^2+bx+c}{Ax^2+Bx+C}$? (Здесь a, b, c, A, B, C, x — данные числа.)

3. Сколько цифр имеет число 3^{1985}? Дайте обоснование результата.

4. Калькулятор выполняет только две арифметические операции: сложение и вычитание. Известно, что функция $f(x)$ является квадратичной функцией. Известны ее значения $f(1)=5{,}699$, $f(2)=5{,}404$, $f(3)=6{,}127$. Как можно на данном калькуляторе вычислить число $f(1985)$? Чему оно равно?

5. Проверьте, что $e^6>\pi^4+\pi^5$. При каком наибольшем натуральном n выполняется неравенство $0<e^6-\pi^4-\pi^5<10^{-n}$? (Числа e и π

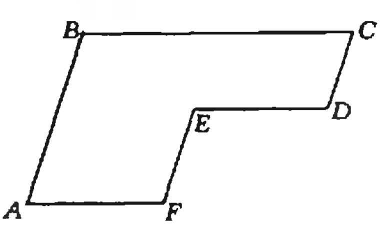


Рис. 1.

даны с пятнадцатью знаками после запятой:

$e=2{,}718281828459045...,$

$\pi=3{,}141592653589793...$)

6. С помощью циркуля и линейки постройте точку, являющуюся центром тяжести выпуклого четырехугольника, вырезанного из однородного куска фанеры.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. В схеме, изображенной на рисунке 2, напряжение батарейки неизменно, а напряжение U источника можно изменять. Оказалось, что при $U_1=3$ В ток через источник не идет. При каком напряжении источника батарейка не будет разряжаться? График зависимости тока через лампочку от напряжения на ней приведен на рисунке 3.

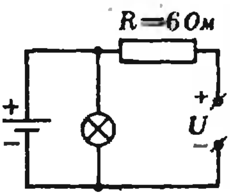


Рис. 2.

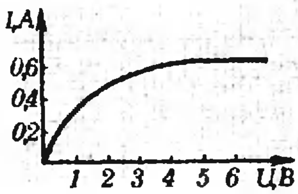


Рис. 3.

2. Упоры-ролики A и $Б$ позволяют «закрепить» балку горизонтально (рис. 4). Давить на балку роликом можно с силой, не превышающей F_0, иначе она разрушается. Какой самый большой груз можно подвесить к правому концу балки? Как нужно ее расположить при этом? Масса балки m, длина L, расстояние между роликами по горизонтали l.

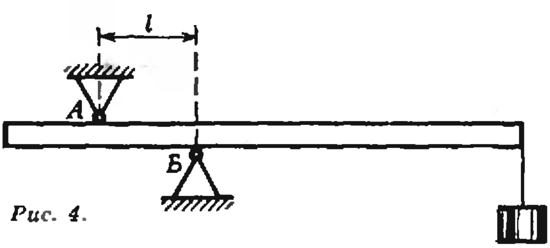


Рис. 4.

3. Мальчик равномерно крутил над головой камень массой m, привязав его к веревке длиной l (рис. 5). Оказалось, что кисть руки при этом описывает окружность радиуса l. Определите радиус окружности, по которой движется камень, если сила сопротивления воздуха движению камня равна γv^2, где γ — заданный постоянный коэффициент, v — скорость камня. Силой тяжести камня можно пренебречь.

4. На каменистом дне водоема лежит куб (рис. 6), материал которого имеет плотность, в 7 раз большую плотности воды. Ребро куба $a=2$ м. Куб пытаются поднять со дна с помощью устройства, работающего по принципу присоски,— квадратного со стороной a щита, плотно прилегающего к верхней грани куба, из-под которого откачивается воздух до давления $p\approx 0$. Можно ли с помощью этого устройства поднять куб до поверхности? Если нет, то на какой глубине он оторвется от присоски? $p_{атм}\approx 10^5$ Па; $g\approx 10$ м/с^2; $\varrho_в=10^3$ кг/м^3.

9 класс

1. При сжатии некоторой порции влажного воздуха в 4 раза его давление возросло в 3 раза. Когда воздух сжали еще в 2 раза, давление стало в 5 раз больше первоначального. Все происходило при неизменной температуре. Какова была относительная влажность в самом начале?

2. По нефтепроводу диаметром d_1 перекачивают в сутки некоторое количество нефти. Во сколько раз больше будет перекачиваться нефти за сутки по другому нефтепроводу диаметром $d_2=2d_1$ той же длины, если насосная станция обеспечивает прежнюю разность давлений? Считать, что сила сопротивления движению жидкости пропорциональна скорости.

3. Тонкостенный цилиндр радиусом R раскрутили до угловой скорости ω_0 и положили между двумя наклонными плоскостями (рис. 7; $\alpha=\pi/4$). Коэффициент трения скольжения μ не зависит от скорости проскальзывания. Определите число оборотов, которое сделает цилиндр до прекращения вращения, если известно, что ось цилиндра при торможении покоилась.

4. Оцените мощность нагрузки, при которой перегорит волосок предохранителя в электросети, если при мощности $P_1=1$ кВт он нагревается до $t_1=120$ °С при температуре в комнате $t=20$ °С. Температурный коэффициент сопротивления материала волоска $\alpha=4\cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$, температура плавления $t_{пл}=320$ °С. Теплоотдача растет пропорционально разности температур.

10 класс

1. В колебательном контуре, состоящем из последовательно соединенных резистора с сопротивлением R, катушки с индуктивностью L и конденсатора с емкостью C, происходят затухающие колебания. За некоторое время амплитуда тока в контуре уменьшилась от I_1 до I_2. Какое количество теплоты выделилось за это время на резисторе?

2. Тонкий обруч (радиуса R), массой которого можно пренебречь по сравнению с массами двух прикрепленных к нему одинаковых грузиков ничтожно малых размеров, просверлен посередине между грузиками (рис. 8). За это отверстие обруч подвешен на вбитый

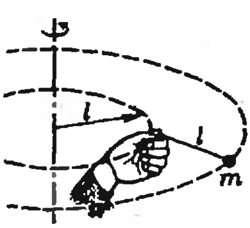


Рис. 5.

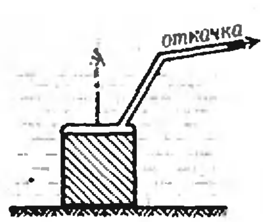


Рис. 6.

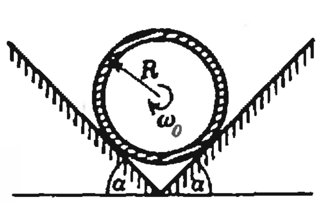


Рис. 7.

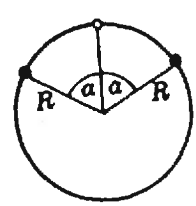


Рис. 8.

в стену гвоздь и может совершать малые гармонические колебания в вертикальной плоскости (как маятник) без потерь энергии. Характеризуя расположение грузиков угловым расстоянием между ними 2α, начертите график зависимости периода T колебаний от угла α. Какой длины математический маятник совершает свободные колебания с тем же периодом, что и данный маятник?

3. В герметичном цилиндрическом сосуде с нагревателем под поршнем массы M находится некоторое количество воды и ее паров, над поршнем — вакуум (рис. 9). Известно, что при мощности нагревателя N_1 поршень медленно поднимался с установившейся скоростью v_1, а при увеличении мощности до $N_2=2N_1$ его скорость стала $v_2=2{,}5\ v_1$. Температура внутри цилиндра при этом не менялась. Найдите эту температуру. Удельная теплота парообразования при данных условиях $\lambda=2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг, $N_1=100$ Вт, $M=10$ кг, $v_1=0{,}05$ м/с. Потери тепла происходят только через дно сосуда.

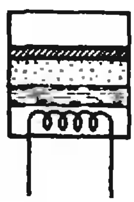


Рис. 9.

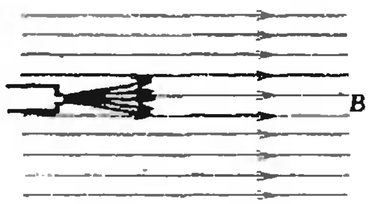


Рис. 10.

4. Для фокусировки пучка электронов, ускоренных разностью потенциалов U и распространяющихся в пределах узкого конуса, используется однородное магнитное поле, линии которого параллельны оси пучка (рис. 10). При каком значении магнитной индукции B пучок будет фокусироваться на экране, отстоящем от электронной пушки на расстоянии L? Отношение заряда к массе e/m для электрона считать известным.

Экспериментальный тур

8 класс

1. При наложении двух расчесок с различным шагом зубьев возникает чередование просвечивающих и темных участков, называемое муаром. Исследуйте, как зависит скорость движения полос муара от скорости движения расчесок.

Оборудование: две расчески, миллиметровая бумага.

2. Определите массу бруска несколькими способами.

Оборудование: динамометр школьный, брусок, штатив с муфтой и планкой, линейка, нить.

9 класс

1. Измерьте элементарный электрический заряд.

Оборудование: источник постоянного тока с регулируемым напряжением, сосуд с раствором поваренной соли (хлорид натрия), два металлических стержня (электроды), трубка стеклянная с пробкой, миллиамперметр, ключ, часы с секундной стрелкой, пластилин, линейка.

2. Определите отношение сопротивлений двух резисторов, располагая вольтметром с неизвестным внутренним сопротивлением.

Оборудование: плоская батарейка 3336, вольтметр школьный, два резистора, соединительные провода.

10 класс

1. Оцените размеры молекул олеиновой кислоты, считая, что она растекается на поверхности воды мономолекулярным слоем.

Оборудование: 0,15 % раствор олеиновой кислоты в спирте, пипетка с водой, линейка, весы и гири, ликоподий или тальк, стакан.

Известно, что плотность олеиновой кислоты $\rho=895$ кг/м^3, а химическая формула — $C_{18}H_{34}O_2$.

2. Предложите методику измерений, которая позволит измерить неизвестную ЭДС источника тока при помощи не более двух собранных электрических схем.

Оборудование: источник тока, два вольтметра.

Б. Б. Буховцев, Л. П. Купцов, О. Ю. Овчинников, С. В. Резниченко

Призеры XI Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Гусманов Р. (п. Дюртюли Башкирской АССР, с. ш. № 3),
Дынников И. (Жуковский, с. ш. № 10),
Черных А. (Краснодар, с. ш. № 40),
Южаков В. (Бийск, с. ш. № 18);

по 9 классам
Асташкевич А. (Томск, с. ш. № 24),
Вайсбурд М. (Томск, с. ш. № 6),
Муштари А. (Казань, с. ш. № 18),
Ханочкин Ю. (Брянск, с. ш. № 3);

по 10 классам —
Вертгейм Л. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Есипова Т. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Кирилин П. (Дубна, с. ш. № 10),
Корнилов Э. (Чебоксары, с. ш. № 27);

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Дзигоева Л. (орджоникидзе, с. ш. № 2),
Когон Л. (Кемерово, с. ш. № 89),
Стыркас К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Сухих В. (Сыктывкар, с. ш. № 31);

по 9 классам —
Игнатьев М. (Саратов, с. ш. № 13),
Крестьяников А. (Славгород, с. ш. № 10),
Прокопенко Б. (Гатчина, с. ш. № 3),
Филимоненков В. (Свердловск, с. ш. № 130);

по 10 классам —
Васильев В. (Воронеж, с. ш. № 59),
Земцов П. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Ковшов Д. (Арзамас, с. ш. № 15),
Милов С. (Тула, с. ш. № 36).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Васильев К. (Тула, с. ш. № 45),
Костин А. (Омск, с. ш. № 92),
Рощин И. (Челябинск, с. ш. № 138),
Соковых В. (Елец, с. ш. № 24);

по 9 классам —
Арапов А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Барахнин В. (Новосибирск, с. ш. № 83),
Русаков Г. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1),
Фокеев О. (Казань, с. ш. № 79);

по 10 классам —
Гольденберг И. (Мурманск, с. ш. № 8),
Куцак С. (Липецк, с. ш. № 44),
Назин С. (Ангарск, с. ш. № 10),
Сапегина О. (Пенза, с. ш. № 6).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Ананичев Д. (Свердловск, с. ш. № 5),
Будько Д. (Белгород, с. ш. № 3),
Пигарев А. (Улан-Удэ, с. ш. № 9),
Щербаков А. (Обнинск, с. ш. № 10);

по 9 классам —
Боровиков Е. (Новосибирск, с. ш. № 30),
Волков О. (Горький, с. ш. № 23),
Лебедев Д. (Гатчина, с. ш. № 3),
Никитин И. (Горький, с. ш. № 172),
Чунаев А. (Волгоград, с. ш. № 92);

по 10 классам —
Акулов А. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Барзыкин В. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Костачев А. (Устинов, с. ш. № 58),
Кусков В. (п. Красный Октябрь Владимирской обл., Краснооктябрьская с. ш.),
Лунц Д. (Саратов, с. ш. № 13).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Васильев Ю. (Ангарск, с. ш. № 10),
Комов В. (Гуково, с. ш. № 23),
Мельников Д. (Тула, с. ш. № 36),
Петров К. (Чебоксары, с. ш. № 27);

по 9 классам —
Боюр Р. (Тольятти, с. ш. № 28),
Дектярев А. (Ленинский р-н Курской обл., с. ш. № 6),
Лукьянов П. (Чита, с. ш. № 49),
Трусов А. (Псков, с. ш. № 8);

по 10 классам —
Климович Г. (п. Болшево Московской обл., с. ш. № 3),
Литвиненко Ю. (Воронеж, с. ш. № 5),
Ржевский А. (Новосибирск, с. ш. № 149),
Ямакаев Р. (Альметьевск, с. ш. № 16).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Бобылев С. (Березники, с. ш. № 3),
Карасев Д. (п. Тучково Московской обл., с. ш. № 1),
Карстен В. (Новокузнецк, с. ш. № 72),
Пичугин А. (Курская обл., с. ш. № 29);

по 9 классам —
Орехов Д. (Новгород, с. ш. № 10),
Писарев В. (Братск, с. ш. № 18),
Рахамов С. (Казань, с. ш. № 131),
Шебзухов Ю. (Нальчик, с. ш. № 5);

по 10 классам —
Мазур А. (Иркутск, с. ш. № 18),
Рубцов В. (Челябинск, с. ш. № 127),
Савченко М. (Белгород, с. ш. № 3),
Севастьянов А. (Северодвинск, с. ш. № 17).

Векторы в геометрических задачах
(см. с. 21)

2. Указание. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AF}=\vec{0}$.

3. 3:2, считая от сторон основания.

4. 1/72.

5. $\arccos\dfrac{17\sqrt{10}}{60}$.

6. Решение. Пусть $\vec{e}$, $\vec{f}$ — единичные векторы, лежащие на прямых a и b. Пусть $\vec{m}=\overrightarrow{OM}$. Тогда

$$\overrightarrow{OA}=(\vec{m}\vec{e})\cdot\vec{e},\ \overrightarrow{OB}=(\vec{m}\vec{f})\cdot\vec{f},$$

$$\overrightarrow{OA_1}=(\overrightarrow{OA}\cdot\vec{f})\cdot\vec{f}=(\vec{m}\vec{e})\cdot(\vec{e}\vec{f})\cdot\vec{f},$$

$$\overrightarrow{OB_1}=(\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e})\cdot\vec{e}=(\vec{m}\vec{f})\cdot(\vec{f}\vec{e})\cdot\vec{e}.$$

Так как $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1}$, то $\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\vec{m}=(\overrightarrow{OB_1}\cdot\vec{m}-\overrightarrow{OA_1}\cdot\vec{m}=(\vec{m}\vec{f})\cdot(\vec{f}\vec{e})\cdot(\vec{e}\vec{m})-(\vec{m}\vec{e})\times\times(\vec{e}\vec{f})\cdot(\vec{f}\vec{m})=0$, откуда и следует перпендикулярность прямых A_1B_1 и OM.

7. Указание. Предположив, что для некоторых чисел x, y, z выполняется равенство $x\vec{m}+y\vec{n}+z\vec{p}=\vec{0}$, докажите, что $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$, откуда $x=y=z=0$.

Избранные школьные задачи

1. $n=13k-4$, где k — натуральное число. Решение. Заметим, что

$$\frac{8n+71}{5n+46}=1+\frac{3n+25}{5n+46},$$

поэтому исходная дробь сократима в том и только в том случае, когда сократима дробь $\dfrac{3n+25}{5n+46}$, а следовательно, и дробь $\dfrac{5n+46}{3n+25}$. Далее последовательно получаем, что сократимость исходной дроби эквивалентна сократимости дробей $\dfrac{3n+25}{2n+21}$ (так как $\dfrac{5n+46}{3n+25}=1+\dfrac{2n+21}{3n+25}$), $\dfrac{2n+21}{n+4}$ (так как $\dfrac{3n+25}{2n+21}=1+\dfrac{n+4}{2n+21}$) и $\dfrac{13}{n+4}$ (так как $\dfrac{2n+21}{n+4}=2+\dfrac{13}{n+4}$). Последняя из полученных дробей сократима тогда и только тогда, когда ее знаменатель делится на 13.

2. $1\pm\sqrt{7}$. Решение.

$$x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=\frac{x^4+6x^3+18x^2}{(x+3)^2}=$$
$$=\frac{x^4}{(x+3)^2}+\frac{6x^2}{x+3}.$$

Обозначив $x^2/(x+3)$ через y, получим уравнение $y^2+6y-16=0$, корни которого $y_1=-8$ и $y_2=2$. Осталось решить уравнения замены $x^2/(x+3)=2$ и $x^2/(x+3)=-8$, второе из которых не имеет решений.

3. $R\sin\alpha$. Решение. Угол M_1MM_2 равен либо α (рис. 1, *а*), либо $180^\circ-\alpha$ (рис. 1, *б*), так как его стороны перпендикулярны данным диаметрам. Далее, точка M_1 лежит на окружности диаметра MO: если M_1 совпадает с O, то это очевидно, а если M_1 не совпадает с O, то это следует из того, что угол MM_1O прямой. Аналогично показывается, что M_2 лежит на окружности диаметра MO. Итак, угол M_1MM_2 вписан в окружность радиуса $R_1=\dfrac{MO}{2}=\dfrac{R}{2}$ и равен либо α, либо $180^\circ-\alpha$, поэтому длина хорды M_1M_2 равна $2R_1\sin\alpha=R\sin\alpha$ (см. «Геометрия 6—10», § 11, с. 147).

4. Заметим, что $n^2+5n+16=(n-4)^2+13n$. Это число заведомо должно делиться на 13, поэтому $(n-4)$ должно делиться на 13, тогда $(n-4)^2$ делится на 169, а второе слагаемое $13n$ не делится на 169 (так как n не делится на 13).

5. Указание. Пусть точки P, Q, R, S лежат на прямых AB, BC, CD, DA соответственно (рис. 2). Отложим от точки Q отрезок QT, равный по длине и перпендикулярный отрезку PR (из двух направлений на прямой QT выбирается такое, что точка T лежит в правой полуплоскости с границей BC). Тогда точка T лежит на прямой DA, и для её построения достаточно соединить точки S и T. Если T и S совпадают, то в качестве DA можно взять любую прямую, проходящую через S.

6. $(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+\ldots+x^{n+1})$. Решение. Предположим, что $x\neq1$ и воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии: $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{1-x^{(n+1)}}{1-x}$. Получаем, что рассматриваемое выражение равно

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2-x^n=\frac{(1-x^n)(1-x^{n+2})}{(1-x)^2}=$$
$$=\frac{1-x^n}{1-x}\cdot\frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

(при $x\neq1$). Случай $x=1$ очевиден.

7. 45° или 135°. Решение. Обозначим основания высот, проведенных к сторонам AB, BC, CA, через C_1, A_1 и B_1 соответственно (рис. 3). Если угол C острый, то из равенства прямоугольных треугольников ABB_1 и CHB_1

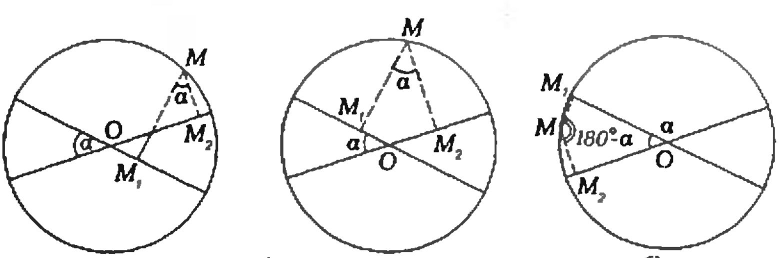


Рис. 1.

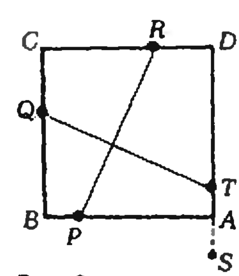


Рис. 2.

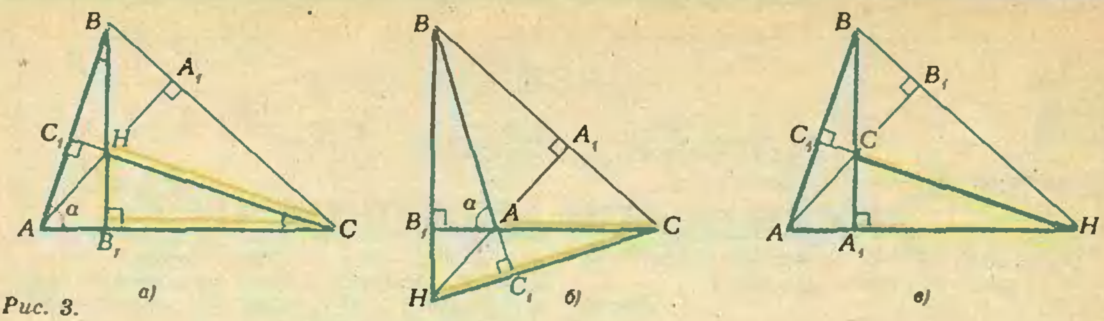


Рис. 3.

(у них равны гипотенузы AB и CH по условию и острые углы ABB_1 и HCB_1 — каждый из них равен $90°-\alpha$, см. рис. 3, *а*, *б*) получаем $BB_1=B_1C$. В прямоугольном треугольнике BB_1C катеты BB_1 и B_1C равны, поэтому каждый из углов CBB_1 и B_1CB равен 45°. Если угол C тупой (см. рис. 3, *в*), то равны треугольники ABA_1 и CHA_1, поэтому $BA_1=A_1H$ и $\angle BHA_1=45°$, а $\angle ACB=\angle A_1CB_1=135°$ (в четырехугольнике A_1CB_1H: $\angle H=45°$, $\angle A_1=\angle B_1=90°$).

8. Указание. Прежде всего отметим, что существует, притом только одна, пара (параллельных) плоскостей α и β, такая, что a лежит в α, b лежит в β и $b \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$. Любая прямая, пересекающая a и проходящая через M (параллельная l), лежит в некоторой плоскости π (в п. а) — это плоскость, проходящая через a и M, в п. б) — это плоскость, проходящая через a и параллельная l). Если π не совпадает с α, то прямая b пересекается с π в некоторой точке N. Искомая прямая должна совпадать с прямой MN. Прямая MN всегда пересекается с b (в точке N) и лежит с a в одной плоскости (плоскости π), поэтому MN и a либо параллельны, либо пересекаются. Легко понять, что $MN \parallel a$ только в том случае, когда MN принадлежит β (в п. а)); соответственно, l параллельна β (в п. б)). Следовательно, решение задачи существует, если M не лежит ни в α, ни в β в п. а), и если l не параллельна α и β в п. б).

9. а) $k_1k_2=-1$; б) $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$. а) Угловой коэффициент прямой $y=kx+b$ — это тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс. б) Проведем к параболе $f(x)=x^2-8x+16$ касательную, параллельную прямой $y=-2x+1$ (рис. 4). Для этого найдем абсциссу точки касания: $f'(x)=2x-8$; $2x-8=-2$ при $x=3$, уравнение касательной $y=-2x+7$. Эта касательная пересекает ось абсцисс в точке (3,5; 0). Парабола лежит по одну сторону от этой касательной, поэтому кратчайшее расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки касания (точки (3; 1)) на прямую $y=-2x+1$. Это расстояние равно расстоянию между прямыми $y=-2x+1$ и $y=-2x+7$. Его проще всего найти из прямоугольного треугольника ABC: пусть $AB=z$, тогда $BC=0{,}5z$, поскольку $\operatorname{tg}\angle BCA=2$; поэтому $z^2+\dfrac{1}{4}z^2=9$, откуда $z=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

10. Окружность диаметра $\sqrt{d^2-h^2}$, где h — длина общего перпендикуляра PQ к прямым a и b, центр окружности — середина этого перпендикуляра, плоскость окружности перпендикулярна PQ. Указание. Множество середин отрезков AB, где A принадлежит a, B принадлежит b, — плоскость, проходящая через середину общего перпендикуляра к прямым a и b и перпендикулярная ему. Поэтому искомое множество лежит в этой плоскости. Спроектируем ортогонально на эту плоскость один из данных отрезков — отрезок AB (рис. 5); получим отрезок A_1B_1. AA_1BB_1 — параллелограмм, так как отрезки AA_1 и BB_1 параллельны и равны (длина каждого из них равна h). Из прямоугольного треугольника AA_1M, где M — середина AB, найдем, что $MA_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2-h^2}$. Далее, в прямоугольном треугольнике A_1OB_1 точка M — середина гипотенузы, поэтому $OM=A_1M=\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2-h^2}$, откуда следует, что точка M принадлежит окружности с центром O радиуса $\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2-h^2}$, расположенной в плоскости A_1OB_1. Осталось проверить, что любая точка этой окружности — середина одного из отрезков, фигурирующих в условии задачи.

11. $\dfrac{a^2}{2}$; плоскость проекции должна быть параллельна любым двум противоположным ребрам тетраэдра. Указание. Проекцией тетраэдра будет либо треугольник, либо четырехугольник. В первом случае площадь проекции будет совпадать с проекцией одной из граней; при этом площадь проекции будет равна $S\cos\varphi$, где $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площадь грани правильного тетраэдра, φ — угол между плоскостью этой грани и плоскостью проекции. В этом случае наибольшее значение площади проекции равно $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, когда $\cos\varphi=1$. Во втором случае диагонали четырехугольника — проекции противоположных ребер тетраэдра (ребер AD и BC на рисунке 6). По известной формуле площадь этого четырехугольника равна $0{,}5bc\sin\psi$, где b и c — диагонали четырехугольника, ψ — угол между ними. Диагонали четырехугольника — проекции ребер тетраэдра, и их длины равны $a\cos\theta_1$ и $a\cos\theta_2$, где θ_1 и θ_2 — углы между этими ребрами и плоскостью проекции, поэтому $b<a$, $c<a$ и $S\leqslant 0{,}5a^2\sin\psi\leqslant 0{,}5a^2$; при этом равенства достигаются в случае, когда $\cos\theta_1=\cos\theta_2=\sin\psi=1$.

12. $x=y=1$. Решение. Запишем уравнение в виде

$$\log_2^2(xy)+(\log_2(x+y)-1)^2=0.$$

Это равенство возможно только в том случае, когда имеет место система уравнений

$$\begin{cases}\log_2(xy)=0,\\ \log_2(x+y)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=1,\\ x+y=2,\end{cases}$$

откуда $x=y=1$.

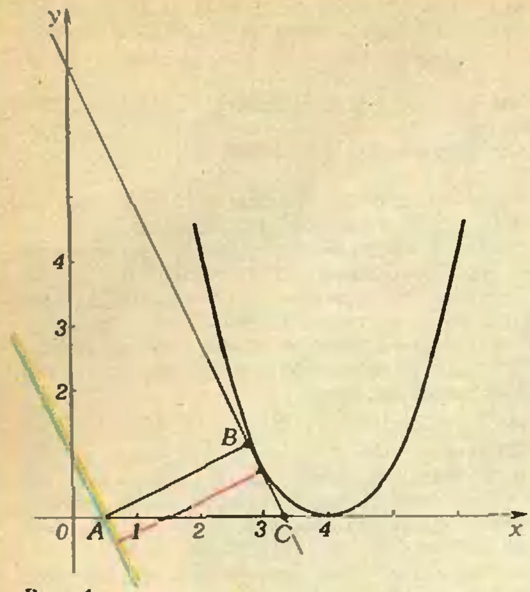


Рис. 4.

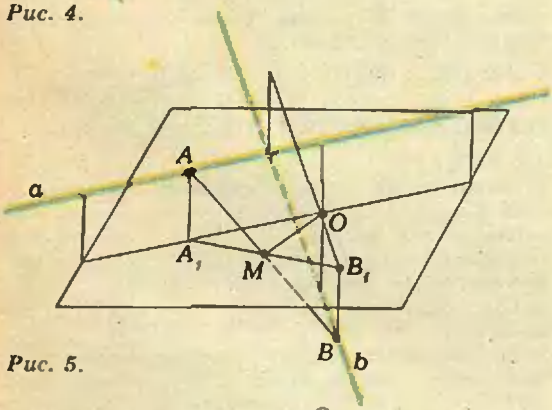


Рис. 5.

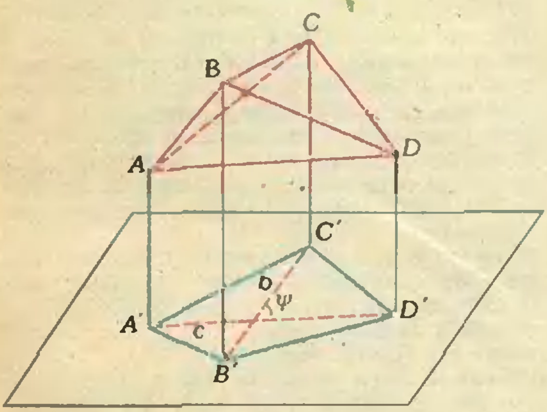


Рис. 6.

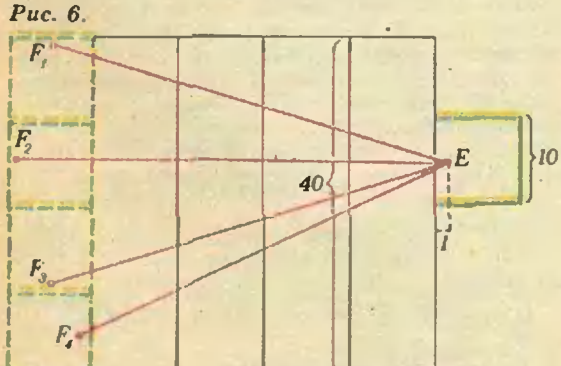


Рис. 7.

13. Указание. $\int_a^b (C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3)dx = C_1\int_a^b dx + C_2\int_a^b x\,dx + C_3\int_a^b x^2dx + C_3\int_a^b x^3dx$, поэтому достаточно проверить справедливость формулы Симпсона для функций 1, x, x^2 и x^3.

14. $\sqrt{2164}\approx 46{,}52$. Указание. Рассмотрим путь, соединяющий E с F на развертке параллелепипеда. Достаточно сравнить пути $|EF_1|$, $|EF_2|$, $|EF_3|$, $|EF_4|$ (рис. 7; можно считать, что развертка боковых граней и квадрата, содержащего E, зафиксированы, и рассмотреть четыре варианта развертки оставшегося квадрата). По теореме Пифагора легко подсчитать, что $|EF_1|=|EF_3|=\sqrt{46^2+14^2}=\sqrt{2312}$; $|EF_4|=\sqrt{42^2+20^2}=\sqrt{2164}$. Кроме того, очевидно, что $|EF_2|=50$.

15. $x=c$, где c — это меньшее из чисел a и b. Решение. Обозначим $a-x$ через y^4, $b-x$ через z^4, тогда $a+b-2x=y^4+z^4$. После этого уравнение запишется в виде $y+z=\sqrt[4]{y^4+z^4}$. Возведем обе части этого уравнения в четвертую степень; после преобразований получим уравнение $yz(2y^2+3yz+2z^2)=0$, откуда либо $z=0$, либо $y=0$, либо $2y^2+3yz+2z^2=0$. При $z\neq 0$ уравнение $2y^2+3yz+2z^2=0$ можно записать в виде $2\left(\frac{y}{z}\right)^2+3\left(\frac{y}{z}\right)+2=0$. Получившееся квадратное уравнение (относительно переменной $\frac{y}{z}$) не имеет решений. Итак, либо $y=0$, откуда $x=a$, либо $z=0$, откуда $x=b$. Проверка показывает, что из двух полученных значений годится только меньшее.

Кроссворд
(см. с. 41)

По горизонтали: 7. Прохоров. 8. Барометр. 10. Альфа. 11. Длина. 13. Смесь. 17. Сферометр. 18. Антарес. 19. Реостат. 21. Терешкова. 23. Квант. 24. Волна. 26. Микро. 28. Ордината. 29. Постулат.

По вертикали: 1. Триод. 2. Косинус. 3. Вода. 4. База. 5. Полимер. 6. Сталь. 9. Ньютон. 12. Ломоносов. 14. Стерадиан. 15. Серебро. 16. Телефон. 20. Ошибка. 21. Тангенс. 22. Авометр. 23. Кварц. 25. Алмаз. 26. Метр. 27. Озон.

Повторим колебания

Задачи

1. $x_1=m\sqrt{\dfrac{2gh}{k(M+m)}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}\,t.$

4. Весь брусок окажется на шероховатом участке стола через 1/12 «периода». Полное время торможения

$$\tau=\sqrt{\frac{l}{\mu g}}\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right).$$

Упражнения

1. $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2\rho Sg}}\approx 0{,}7$ с.

2. $n=\dfrac{\omega_0}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{R}{r}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\approx 35$ об/с ≈ 2000 об/мин.

3. См. рис. 8.

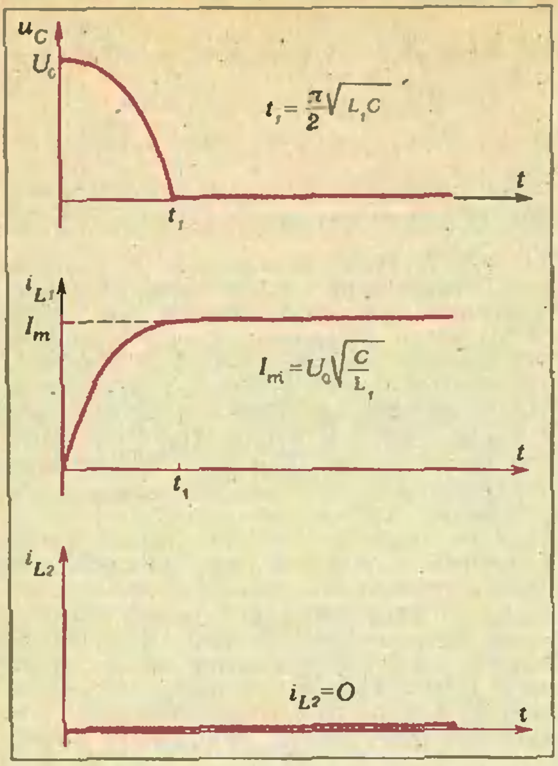


Рис. 8.

XI Всероссийская олимпиада школьников

Математика

8 класс

1. Неравенство преобразуется к виду

$$\frac{(x^2-y^2)^2(x^4+x^2y^2+y^4)}{x^2y^2}>0.$$

2. См. решение задачи М947 в «Кванте» № 2, 1986 г.

3. Ответ: искомое множество есть объединение интервала CB, луча, сонаправленного с лучом BA, с началом в точке A и окружности с центром A радиуса $\sqrt{AB\cdot AC}$. Указание: точка M, не лежащая на прямой AB, удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда треугольники AMB и ACM подобны, то есть когда $AB:AM=$ $=AM:AC$.

4. См. решение задачи М948 в «Кванте» № 2, 1986 г.

5. $x^{1985}+x+1=(x^2+x+1)(x^{1983}-x^{1982}+x^{1980}-$ $-x^{1979}+\ldots+x^6-x^5+x^3-x^2+1)$.

9 класс

1. *Необходимость* данного условия очевидна. Для доказательства *достаточности* предположим, не ограничивая общности, что $a\leqslant b\leqslant c$, и докажем, что в таком случае либо $a>0$ (то есть числа a, b, c положительны), либо $c<0$ (то есть числа a, b, c отрицательны). Пусть $a<0$ и $c>0$. Возможны два случая: $a\leqslant b<0<c$ или $a<0<b\leqslant c$. Второй случай сводится к первому изменением знаков у чисел a, b, c. В первом случае $ca<0$, $bc<0$, поэтому $ab>-bc-ca>-bc$, $\frac{1}{ab}<-\frac{1}{bc}$, то есть $\frac{1}{ab}+$ $+\frac{1}{bc}<0$. Но тогда и $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}<0$. Получили противоречие.

2. а) Ответ: точка K должна лежать на прямой, проведенной через основание M высоты AM треугольника ABC параллельно стороне AC.
б) См. решение задачи М908 в «Кванте» № 6, 1985 г.

3. См. решение задачи М949 в «Кванте» № 2, 1986 г.

4. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, O_1C и O_2D — их радиусы, проведенные в точки касания с общей внутренней касательной (рис. 9). Легко видеть, что точки A и B лежат на окружности с диаметром O_1O_2. Продолжим отрезок O_1C до пересечения с ней в точке E. Тогда O_2ECD — прямоугольник, следовательно, $|CE|=|O_2D|$ и из подобия треугольников ACO_1 и ECB вытекает, что

$$|AC|\cdot|BC|=|O_1C|\cdot|CE|=|O_1C|\cdot|O_2D|=Rr.$$

5. Покажем, что $x_n<100m$ при всех n. (Поскольку числа x_n натуральные, отсюда следует, что среди них найдутся одинаковые.) Доказательство проведем индукцией по n. При $n=1$ $x_1=1<100m$. Пусть $x_n<100m$, и пусть $10^p\leqslant mx_n<10^{p+1}$, то есть число mx_n записывается $(p+1)$-й цифрой. Тогда сумма x_{n+1} его цифр не превосходит

$$9(p+1)<10(p+1)\leqslant 10\cdot 10^{p/2}\leqslant 10\sqrt{mx_n}<$$
$$<10\sqrt{m\cdot 100m}=100m,$$

так как, очевидно, $p+1\leqslant 10^{p/2}$ при $p=0, 1, 2, \ldots$

10 класс

1. Левая часть данного уравнения преобразуется к виду $3(x-y)(y-z)(z-x)$, поэтому оно эквивалентно такому: $(x-y)(y-z)(z-x)=10$. Перебирая делители числа 10, легко убедиться, что это уравнение решений не имеет.

2. См. решение задачи М946 в «Кванте» № 2, 1986 г.

3. Обозначим через $2a$ и b длины сторон соответственно треугольника ABC и квадрата $DEHK$. Тогда $b<a$. Действительно, предположим, что $b\geqslant a$. Возьмем на стороне BC точку M так, чтобы отрезки EM и AC были параллельны (рис. 10). Тогда, очевидно, $EM>EH$, и так как $|EH|=b$, то $|EM|>b\geqslant a$. С другой стороны, при $b\geqslant a$ угол AED не превосходит 60°, поэтому угол ADE не меньше 60°, то есть угол ADE не меньше угла AED. Значит, $|AE|\geqslant a$, и поэтому $|EM|=|EB|=|AB|-|AE|\leqslant a$. Получили противоречие.
При $b<a$ угол AED больше 60°. Следовательно, угол BEH меньше 30°, поэтому угол EHB больше 90°. Значит, угол EHM острый. Так как угол EHK прямой, отсюда следует, что точка K лежит вне треугольника ABC.

4. Найдем объем тетраэдра $ABCA_1$. Пусть α — угол между прямой l_1 и плоскостью ABC, $\beta=$ $=90°-\alpha$ — угол между плоскостью ABC и плоскостью P, перпендикулярной к l_1. Тогда высота тетраэдра, опущенная из точки A_1, равна $|AA_1|\sin\alpha$, а площадь проекции треугольника ABC на плоскость P равна $S_{ABC}\cos\beta=S$. Следовательно,

$$V_{ABCA_1}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot|AA_1|\cdot\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\cos\beta\cdot|AA_1|=\frac{1}{3}|AA_1|\cdot S.$$

Аналогично, $V_{A_1BCB_1}=|BB_1|\cdot S/3$, $V_{A_1B_1CC_1}=$ $=|CC_1|\cdot S/3$. В то же время $V=V_{ABCA_1}+$ $+V_{A_1BCB_1}+V_{A_1B_1CC_1}$.

5. См. решение задачи М950 в «Кванте» № 2, 1986 г.

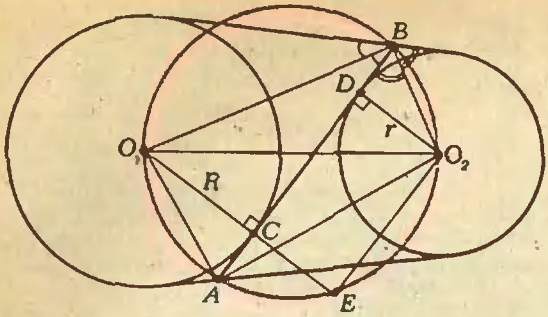


Рис. 9.

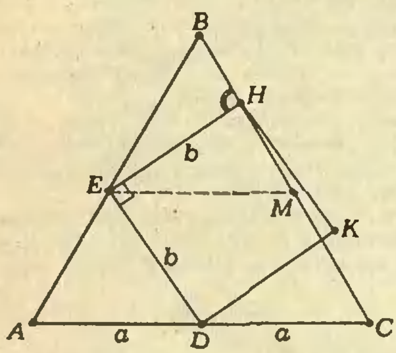


Рис. 10.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Из условия задачи ясно, что напряжение батарейки $U_б=U_1=3$ В. Для того чтобы батарейка не разряжалась, ток в цепи должен обеспечивать только источник. Поэтому

$$U_2=U_1+I_1R\approx 6{,}3 \text{ В}$$

(здесь $I_1\approx 0{,}55$ А — ток в лампочке при напряжении U_1 на ней).

2. Балку нужно расположить так, чтобы она находилась в равновесии при силе реакции со стороны упора A, равной нулю. Тогда наибольшая масса груза будет равна

$$M=\frac{F_0}{g}-m,$$

а расстояние от упора $Б$ до правого конца балки будет равно

$$x=\frac{L}{2}\frac{m}{M+m}=\frac{L}{2}\frac{mg}{F_0}.$$

Ограничения на l не существенны.

3. Камень движется по окружности (рис. 11) радиусом

$$R=2l\cos\alpha=l\sqrt{\frac{m^2}{2\gamma^2l^2}\left(\sqrt{1+\frac{16\gamma^2l^2}{m^2}}-1\right)}.$$

Указание. Угол α определяется из уравнения движения камня, записанного для проекций на направления радиуса и касательной к окружности:

$$F\cos\alpha=m\omega^2R,\quad F\sin\alpha-\gamma^2\omega^4R^2=0,$$

где F — сила натяжения веревки.

4. Куб оторвется от присоски на глубине (отсчитываемой от верхней грани куба)

$$h=\left(\frac{\varrho_т}{\varrho_в}-1\right)a-\frac{p_{атм}}{\varrho_в g}=2 \text{ м}.$$

9 класс

1. Начальная влажность воздуха $\varphi=50$ %. Указание. Из условия задачи ясно, что уже после первого сжатия водяной пар, содержащийся в воздухе, стал насыщенным.

2. Количество перекачиваемой нефти увеличится в $(d_2/d_1)^4=16$ раз.

3. Цилиндр сделает

$$N=\frac{(1+\mu^2)\omega_0^2R}{4\pi\sqrt{2}\,\mu g}$$

оборотов. Указание. Начальная кинетическая энергия цилиндра равна работе против сил трения F_1 и F_2 (рис. 12). Значения F_1 и F_2 можно найти из условия неподвижности оси цилиндра:

$$F_1+\frac{\sqrt{2}}{2}mg-N_2=0,\quad F_2+N_1-\frac{\sqrt{2}}{2}mg=0,$$

где силы реакции опоры N_1 и N_2 связаны с силами трения соотношениями $F_1=\mu N_1$ и $F_2=\mu N_2$.

4. Предохранитель перегорит при мощности нагрузки

$$P_2=P_1\sqrt{\frac{t_{пл}-t}{t_1-t}\,\frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_{пл}}}\approx 1{,}4 \text{ кВт}.$$

Указание. Для оценки можно считать, что мощность нагрузки равна мощности, потребляемой от электросети.

10 класс

1. Будем считать, что затухание колебаний происходит только за счет потерь энергии на нагревание резистора, то есть $Q=W_1-W_2$. В тот момент, когда ток в данном контуре максимален, а значит, ЭДС индукции равна нулю, напряжение на конденсаторе нулю не равно:

$$U_C+IR=0, \text{ и } |U_C|=IR.$$

Поэтому энергия контура

$$W=\frac{1}{2}LI^2+\frac{1}{2}CU_C^2=\frac{1}{2}I^2(L+CR),$$

а ее уменьшение

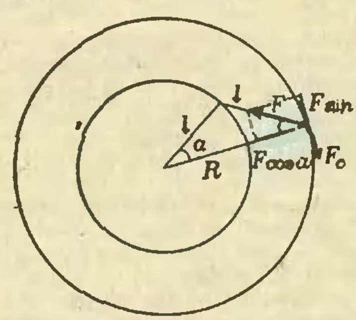


Рис. 11.

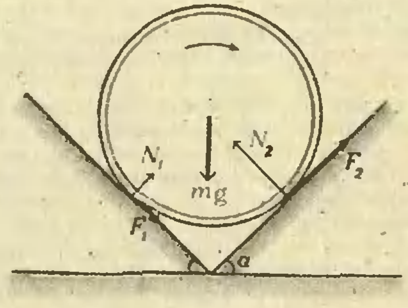


Рис. 12.

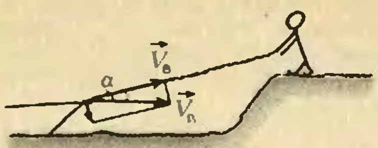


Рис. 13.

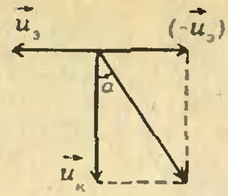


Рис. 14.

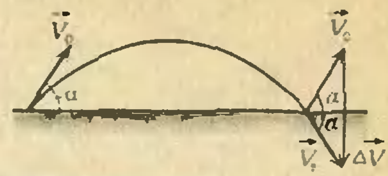


Рис. 15.

$$W_1-W_2=Q=\frac{1}{2}(L+CR)(I_1^2-I_2^2).$$

2. При малых колебаниях данного маятника каждый грузик описывает небольшую дугу окружности радиусом $r=R\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$. В момент прохождения положения равновесия скорость грузика максимальна и равна $v_m=(2\pi/T)r\varphi_m$, где φ_m — угловая амплитуда колебаний. В момент наибольшего отклонения от равновесия центр тяжести маятника поднимается на высоту $h_m=R(1-\cos\alpha)(1-\cos\varphi_m)$. Воспользовавшись законом сохранения энергии, найдем, что период малых колебаний нашего маятника

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Значит, искомый график зависимости $T=T(\alpha)$ представляет собой горизонтальный отрезок. Такой же период колебаний будет иметь математический маятник длиной $l=2R$.

3. Температура внутри цилиндра равна

$$T=\frac{1{,}5v_1MgM\lambda}{N_1R}\approx 370\ \text{К}.$$

Указание. Воспользуйтесь законом сохранения энергии

$$N\,\Delta t=\lambda\,\Delta m+q\,\Delta t,$$

где $\Delta m=\frac{pM}{RT}\Delta V=\frac{Mg}{S}\frac{M}{RT}v\,\Delta tS$ — масса испарившейся за время Δt воды, q — количество теплоты, теряемое в единицу времени.

4. Индукция магнитного поля кратна величине

$$B=\frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Указание. Каждый электрон движется по винтовой линии.

Калейдоскоп «Кванта»

1. За одно и то же время первое тело прошло бо́льший путь, чем второе, следовательно, у первого тела и бо́льшая средняя скорость.
2. $v_л=v_в/\cos\alpha$ (рис. 13).
3. Скорость точки a направлена вниз, точки b — вверх, точки d — вниз, скорость точки c равна нулю.
4. В случае а) горизонтальные начальные скорости у обоих тел одинаковы, а начальная вертикальная скорость больше у первого, следовательно, у первого время полета больше — оно улетит дальше.
В случае б) начальные вертикальные скорости у обоих тел одинаковы, следовательно, одинаковы времена полета, но горизонтальная скорость больше у первого — оно улетит дальше.
5. Сила нормального давления на выпуклой поверхности меньше, чем на вогнутой. Следовательно, и сила трения в среднем на ACB меньше, чем на ADB. Поэтому скорость тела в точке B больше в том случае, если оно скользит по кривой ACB.
6. Может, если, например, тень образуется на стене, параллельно которой бежит человек, а источник света движется быстрее человека в том же направлении.
7. Пусть скорость электрички $u_э$, а угол наклона следа капель к вертикали — α. Из рисунка 14 видно, что скорость падения капель

$$u_к=\frac{u_э}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

8. $|\Delta\vec{v}|=|\vec{v}_1-\vec{v}_0|=2v_0\sin\alpha$ (рис. 15).
9. В наивысшей точке траектории, где вертикальная составляющая скорости равна нулю.

Микроопыт

Сравните время падения слегка смятой в ком газеты с определенной высоты со временем падения с той же высоты газеты, сжатой в плотный комок.

«Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 9)

1. Петя ехал в вагоне № 2 на месте № 1.
2. Нетрудно заметить, что сумма красной и желтых частей квадрата (рис. 16) составляют половину его площади, а также сумма синих и желтых частей составляют половину площади квадрата. Из этого следует равенство площадей красной и синей частей квадрата.
3. Под тяжестью сосулек ветка время от времени прогибается и сосульки начинают расти на новом месте.
4. См. рисунок 17.
5. Возьмем среди этих чисел то, которое делится на 18 (такое существует, докажите это). Поскольку оно делится и на 9, сумма его цифр равна либо 9, либо 18 (единственное трехзначное число с суммой цифр 27 —

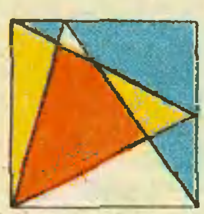


Рис. 16.

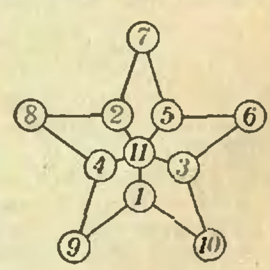


Рис. 17.

это число 999, которое на 18 не делится). Таким образом, это число делится на сумму своих цифр.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 9)

Головоломки

От Олимпа до Парнаса. 175 верст.

Одинаковые числа при умножении. Нет, так как четырехзначное число, составленное из одинаковых цифр, делится на простое число 101, на которое не может делится ни один из сомножителей.

Одинаковые числа при сложении. Нет. Заметим, что при сложении в каждом разряде сумма цифр равна 9 и не может равняться 19. Следовательно, сумма цифр у числа 99...9 вдвое больше, чем у числа A, но $1985 \cdot 9$ — нечетное число.

Арифметические ребусы

$$\begin{array}{r} 9\,321 \\ +\,93\,247 \\ \hline 102\,568 \end{array}; \qquad \begin{array}{r} 37\,148 \\ +\ 7\,148 \\ 148 \\ \hline 44\,444 \end{array}$$

Кросснамбер
См. рисунок 18.

6	7	8	9
5	3	4	2
4	4	1	5
3	3	9	6

Рис. 18.

Поросенок и перец
(см. «Квант» № 8)

Задачи

1. Рыцарь не может заявить, что кто-то выше его по рангу. Следовательно, Лягушонок — не рыцарь. Если вы внимательно читали текст сказки, вы должны были заметить, что по крайней мере один раз Лягушонок сказал правду. Поэтому он нормален.
2. Герцогиня нормальна (см. текст).
3. Чеширский кот — не рыцарь (см. задачу 1). Поэтому он или лжец или нормальный. Если он лжец, то и кухарка лгунья. Но в таком случае кухарка сказала бы правду. Итак, Чеширский кот — нормален. Кухарка не может быть лгуньей. Поэтому она либо рыцарь, либо нормальная особа, но быть рыцарем тоже не может (тогда сказанное ею было бы ложью).
Итак, и кухарка и кот — нормальны (и оба лгут).
4. А — не рыцарь. Если В — рыцарь, то А — нормальный, а С — лжец, что невозможно. Поэтому и В — не рыцарь. Следовательно, С — рыцарь. Теперь уже легко установить, что А — лжец, а В — нормальный (но лжет).
5. Лягушонок, как мы уже знаем, нормальный. Если Лещ — рыцарь, то он сказал правду, и Кролик — лжец, и Лягушонок солгал. В этом случае Кролик скажет: «Лягушонок». Если же Лещ — лжец, то Кролик — рыцарь и поэтому и в этом случае его ответ будет: «Лягушонок».

Вопросы

1. Скорее не скорее, но уж не быстрее — это точно.
2. Как известно, чтобы смеяться хорошо, нужно смеяться последним, а вообще лучше не делать много шума из ничего.
3. В воздухе больше перцу тогда, когда его больше в супе.
4. Правда, потому что тарелка и сама может летать.
5. Конечно, при полете вверх, потому что при полете вниз уже не так страшно.
6. И поэтому тоже.
7. Если Пес в своем уме, то правда, а если нет, то тогда вообще не о чем говорить...
8. По этому поводу мнения читателей и редакции разделились.

Синяя гусеница дает совет
(см. «Квант» № 7)

Задачи

1. Если считать, что гусенице достаточно добраться до начала ветви, то ей понадобится 17 дней. Если потребовать, чтобы гусеница полностью влезла на ветку — то 18 дней.
2. Например, если Л — лев, а В — волк, то лев, сделав два — три прыжка схватит волка, находящегося в 20 метрах от него. Если же лев будет убегать от волка по равнине, то в конце концов волк догонит льва.
3. Этот человек — карлик. Он просто не может дотянуться до кнопки своего этажа.
4. 10 метров. **Решение.** Прежде всего отметим, что улитка может ползти неравномерно. В условии задачи сказано, что за улиткой велось постоянное наблюдение, то есть она ни на мгновение не оставалась без надзора. Поэтому первую и последнюю минуту улитка проползла ровно по 1 метру. Докажем, что за каждую из оставшихся 4 минут она проползала не более чем по 2 метра. Изобразим, например, вторую минуту в виде отрезка на числовой оси. Из всех наблюдателей, которые следили за улиткой при $t=1$ выберем того, который наблюдал за улиткой до этого момента меньше всех, а из наблюдателей в момент времени $t=2$ того, который наблюдал за улиткой до этого дольше всех. Пусть t_1 время, когда ушел первый из выбранных нами наблюдателей, а t_2 — время, когда начал наблюдать второй из выбранных нами наблюдателей. Ясно, что $t_2 < t_1$ (иначе нашелся бы момент времени, когда улитка была бы без надзора). За каждый промежуток времени от 1 до t_1 и от t_2 до 2 улитка проползет не больше, чем по 1 метру. Поэтому за всю вторую минуту она проползет не более 2 метров.
Представляем читателям самостоятельно построить график движения улитки и способ организации наблюдения за ней (вам понадобится 10 наблюдателей), при котором улитка проползет в точности 10 метров. Для облегчения задачи покажем, как улитка может проползти 3 метра за первые две минуты. За первые 5 секунд она проползает 1 метр, потом останавливается и стоит на месте до конца первой минуты, потом за 5 секунд она проползает еще 1 метр, за следующие 5 секунд — тоже 1 метр и останавливается до конца второй минуты. Наблюдение организуем так: первый наблюдатель следит за улиткой всю первую минуту, второй начинает наблюдать, когда улитка остановилась в первый раз, третий — в момент ухода второго наблюдателя, четвертый — в момент,

когда улитка остановилась во второй раз. Подумайте теперь, как надо действовать дальше.

5.
```
   986
   345
  4930
 3944
2958
340170
```

Вопросы

1. Может. Начало у него «в», а конец — «е».
2. Как известно, словом делу не поможешь, а поэтому лучше в тупик не попадать.
3. Хорошо известно, что последняя капля может переполнить чашу любого сколь угодно большого размера.
4. Рост — это и длина, и высота, и ширина.
5. Встаньте на весы, резко поднимитесь на цыпочки, и вы увидите ответ.
6. Сила удара зависит от относительного движения подбородка и ног, а поэтому все равно больно.
7. Хотя змеи и ползут с неба, но живут-то они на земле...

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 7)

Задание 13 (Д. Хэйн, 1889 г.). **1. Cb5!** (тихий вступительный ход, который нелегко найти) 1...Kpf7 2.Kpg5 Kpe7 (2...Kpg8 3.Cc4×) 3.Фf6×, 1...Kpd8 2.Фd6+Kpc8 3.Ca6×.

Задание 14 (А. Мандлер, 1928 г.). **1.Kpf2** Kpc8 2.Ch2 Kpd8 3.Фd1×, 1...Kpa8 2.Cd2 Kph8 3.Фh1×.

Задачи наших читателей
(см. «Квант» № 6, с. 19)

1. Если некоторые натуральные x, y, z удовлетворяют уравнению

$$x^{p-1}+y^{p-1}=z^{p-1}, \qquad (1)$$

то они должны удовлетворять эквивалентному уравнению

$$(x^{p-1}-1)+(y^{p-1}-1)=(z^{p-1}-2). \qquad (2)$$

Разделим обе части уравнения (2) на p:

$$\frac{(x^{p-1}-1)}{p}+\frac{(y^{p-1}-1)}{p}=\frac{(z^{p-1}-2)}{p}. \qquad (3)$$

Согласно Малой теореме Ферма, левая часть (3) при всех натуральных x и y, таких, что $(x, p)=(y, p)=1$, будет суммой двух целых чисел, то есть числом целым. Правая же часть (3) ни при каком натуральном z целым числом не будет, так как если $(z, p)=1$, то $(z^{p-1}-2)$ делится на p с остатком $(p-1)$, а если $(z, p)\neq 1$, — то с остатком $(p-2)$. Это значит, что эквивалентные уравнения (3), (2) и (1) в натуральных числах неразрешимы.

2. Понятно, что при $p=3$ уравнение (3) (см. предыдущую задачу) не имеет решения в натуральных числах, таких, что $(x, 3)=(y, 3)=(z, 3)=1$. Однако известны натуральные x, y, z, такие, что $x^2+y^2=z^2$. Это так называемые *пифагоровы тройки*, такие, как (3, 4, 5). Значит любая пифагорова тройка содержит число, кратное 3.

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Винодарова, В. В. Губин, Т. Н. Кольченко, В. Ф. Лактионов, П. П. Лахтунов, Ю. П. Мартыненко, Ю. Н. Сафонов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, В. В. Юдин, Н. А. Ящук

Фото представили
Е. А. Артемов, А. М. Орехов, В. И. Савела, Э. А. Смирнов, А. Н. Сухоруков

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.08.85. Подписано к печати 20.09.85.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8.
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. л. 7,37. Т-18870
Тираж 173213 экз.
Цена 40 коп. Заказ 2244

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

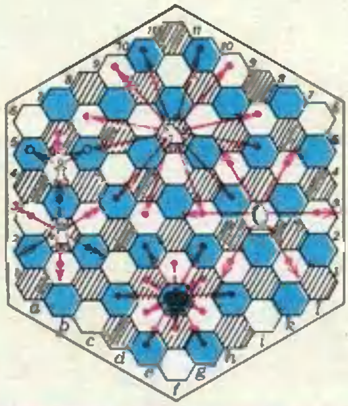
Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ГЕКСАГОНАЛЬНЫЕ ШАХМАТЫ

Известны десятки разновидностей шахмат, в которых используются необычные доски, фигуры или правила игры. Мы уже рассказывали о цилиндрических шахматах и о шахматах на параллельных досках. Нестандартные доски редко применяются для серьезной игры.

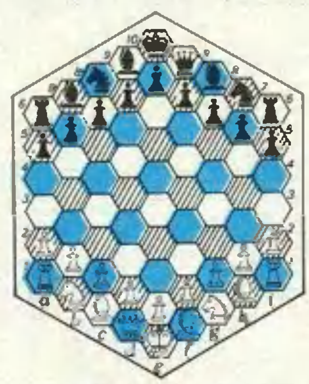
Но есть и одно исключение — гексагональные, или, иначе, шестигранные шахматы. Доска для гексагональных шахмат имеет вид шестиугольника. Изобретены два варианта игры, один — советским геологом И. Шафраном, другой — польским инженером В. Глинским. Польские шахматы получили широкое распространение в мире, расскажем сначала о них.

Гексагональная доска состоит из 91 поля трех цветов (см. 1-ю с. обложки); на ней 11 вертикалей от «a» до «l» (кроме «j»), поля каждой нумеруются от нижнего к верхнему. Роль горизонталей выполняют диагонали, слева от линии «f» параллельные a1 — f1, а справа параллельные f1 — l1. В дополнение к обычному комплекту фигур каждая сторона получает по одному слону и одной пешке. Начальное расположение показано на обложке, ходы фигур — на следующем рисунке.



Король ходит на все соседние поля, не только непосредственно примыкающие к данному, но и ближайшие к нему того же цвета. Направления движения ладьи и слона указаны стрелками, они ходят на любое число полей в одном из шести направлений (разных для ладьи и слона). Ферзь, объединяющий ходы ладьи и слона, движется в 12 направлениях. Пешки ходят на одно поле по вертикали (в начальном положении — на два), бьют наискосок: с b5 на a5 и c6. Сохраняется и взятие на проходе — в ответ на c2 — c4 черная пешка d3 может побить белую: d3:c3. Достигая последнего поля вертикали, пешка превращается в любую фигуру. Рокировок нет, поскольку короли находятся в достаточной безопасности, а ладья за два хода подключается к атаке или защите. Все остальные правила и цель игры — поставить мат неприятельскому королю — не меняются.

Доска для шахмат Шафрана чуть меньше. Начальная расстановка напоминает обычные шахматы. Фигуры ходят, как в польском варианте, лишь пешка бьет под углом 60°: с b5 на a6 и c7.



Пешки трех центральных вертикалей могут сделать первый ход сразу и на три поля вперед, остальные только на два. Возможны рокировки — короткая, если ладья приближается к королю, и он переступает через нее, и длинная, если король подходит к ладье, и она перепрыгивает через него.

В польских шахматах доска представляет собой правильный шестиугольник, и, возможно, такая геометрическая четкость помогла Глинскому «обыграть» Шафрана в популярности.

Теория шестигранных шахмат почти не разработана, к тому же разнообразие ходов и вариантов существенно больше, чем в обычных шахматах, и предугадать ответ противника труднее.

Геометрия шестигранной доски весьма своеобразна. Так, вертикаль «f» является ее осью симметрии, а поле f6 — центральным полем (на обычной доске центр состоит из четырех полей — d4, d5, e4, e5). Хотя доска больше, но путь коня между любыми полями занимает не более четырех ходов (на обычной доске с a1 до h8 конь добирается за 6 ходов). Любопытно, что любая фигура может сделать ход, сохраняя контроль над прежними полями. Особенно интересно проявляется это свойство у коня. Например, с g9 он атакует e7, и продолжает контролировать его, перейдя на d9 или h6. Конь может и пройти по треугольнику, выигрывая темп у партнера.

Немного хроники. В 1953 г. польские шахматы демонстрировались на Всемирной выставке в Париже. В 1980 г. в Лондоне состоялся первый чемпионат Европы. Тогда же был организован и всесоюзный клуб «6 граней», который с 1982 г. проводит соревнования*). В 1984 г. в Венгрии прошел второй чемпионат Европы, в котором участвовали 26 игроков из 7 стран. Победителям первого первенства поляку М. Мацковяку и второго — венгру Л. Рудольфу — было присвоено звание международного гроссмейстера по гексагональным шахматам. В следующем номере мы вернемся к этой теме.

Конкурсные задания

Оба предлагаемых этюда — на обычной доске, но число 6 обыгрывается и в них: в позициях по шесть фигур.

19. Белые: Крh7, Фe1, Кb7. Черные: Крf7, Фf3, п.f5. Белые начинают и выигрывают.

20. Белые: Крg5, Фc1, Лc5. Черные: Крe7, Фb8, Лd8. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 декабря 1985 г. (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 19, 20»).

*) Адрес клуба: 109004, Москва, Б. Коммунистическая ул., д. 9, Ждановский дом работников просвещения, клуб «6 граней».

Цена 40 коп. Индекс 70465

Уголок коллекционера

АТОМ В ФИЛАТЕЛИИ

Воспроизведенные здесь марки на первый взгляд подобраны совершенно случайным образом, у них нет никакого тематического единства. Тут и портреты выдающихся физиков лауреатов Нобелевской премии Фредерика Жолио-Кюри и Синьитиро Томонаги, и советские марки, посвященные борьбе за мир, ленинскому плану ГОЭЛРО и XXVI съезду КПСС, Всемирной выставке 1967 года в Монреале и Выставке достижений народного хозяйства. Есть здесь и марки, связанные с научными конференциями и Международным агентством по атомной энергии. Но присмотритесь внимательно, и вы увидите, что на каждой марке изображена планетарная модель атома, теория которой создана великим датским физиком Нильсом Бором. В этом месяце ему исполнилось бы сто лет. Боровская модель атома стала своеобразным символом нашего атомного века.

В. Рудов