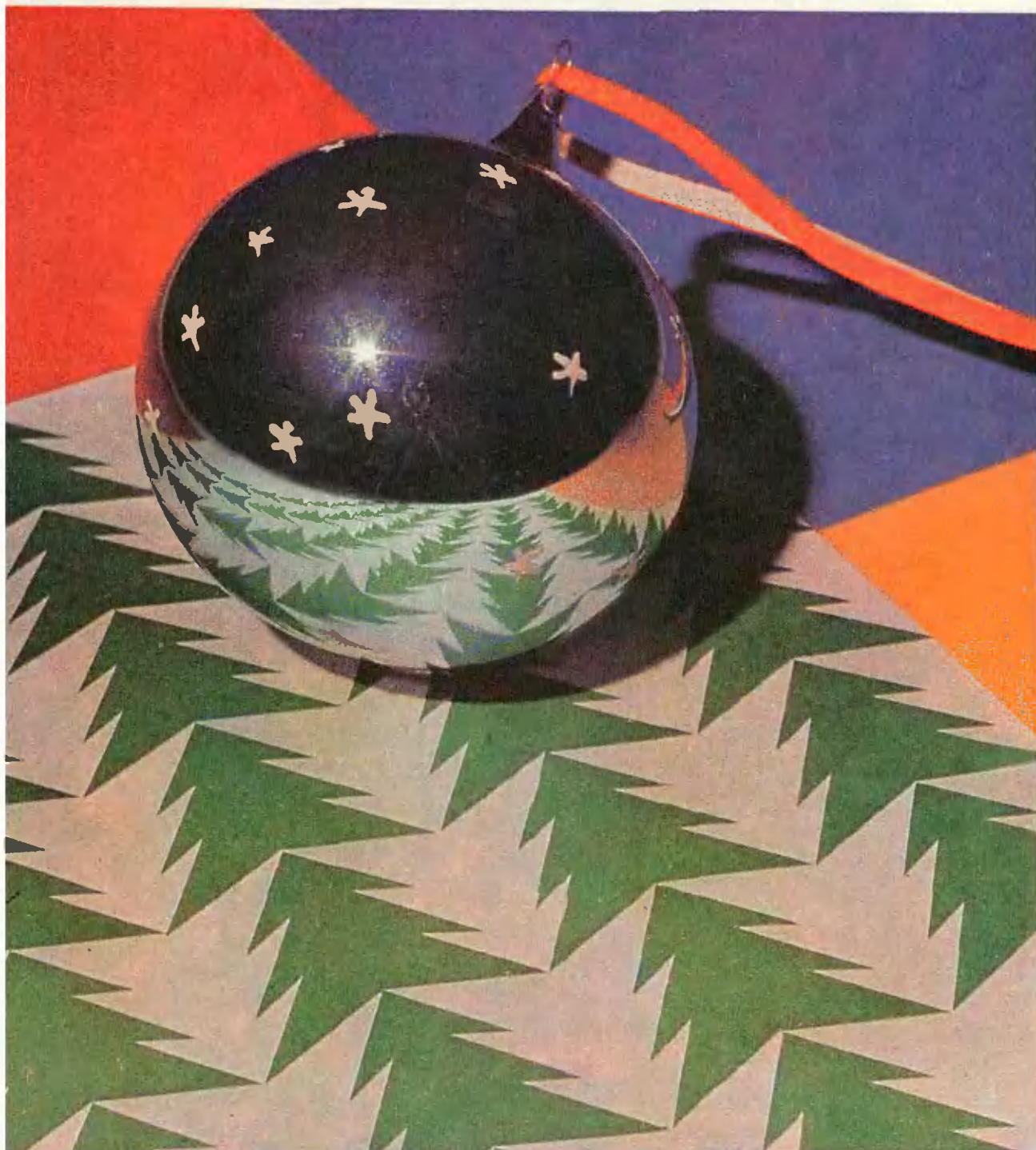
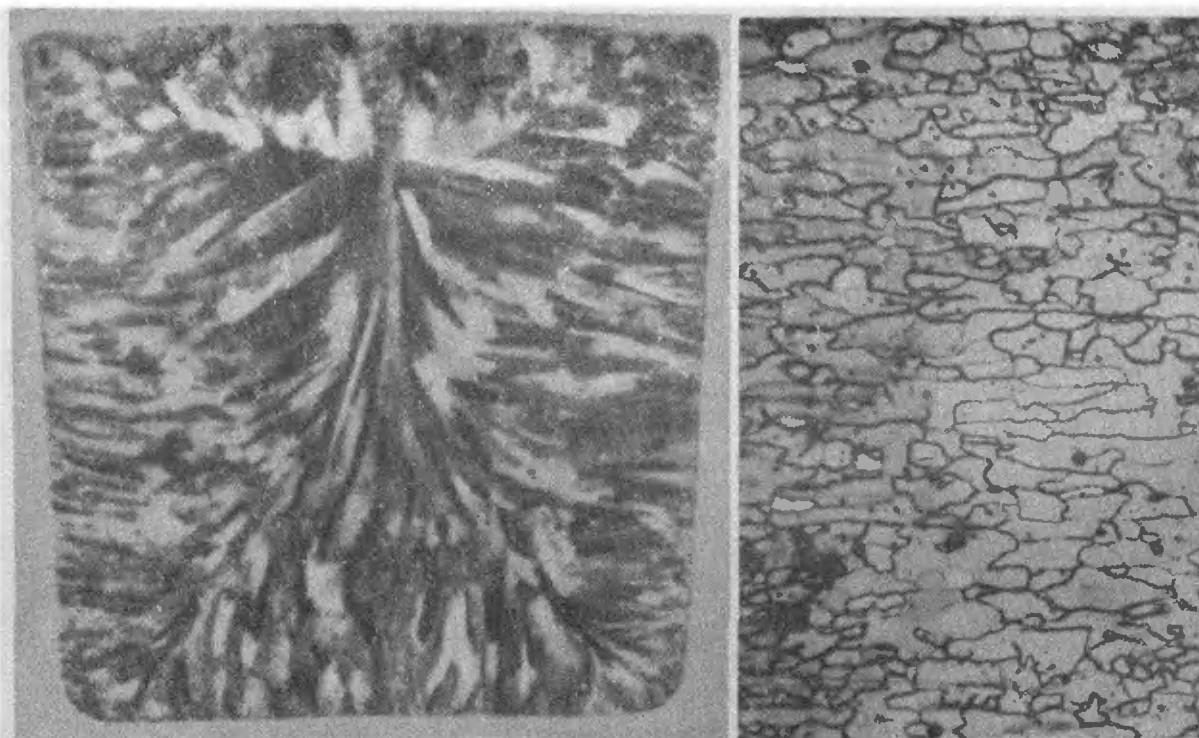


Квант

12
1985

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*





На верхнем левом снимке — поперечное сечение медного слитка. Подобная структура возникает в процессе затвердевания расплава. На фото справа (увеличение 200) иная структура. Она возникла при прокатке слитка — зерна-кристаллики вытянулись вдоль направления прокатки. На нижнем фото, полученном с помощью электронного микроскопа (увели-

чение 1000). — картина разрушения, вызванного наличием в металле «опасных» примесей, скапливающихся на границах между зернами-кристаллами.

Какую роль играют в жизни металла межзеренные границы? Этому вопросу посвящена статья А. Л. Петелина и А. И. Федосеева в этом номере журнала.



Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант 12 1985

Основан в 1970 году



Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

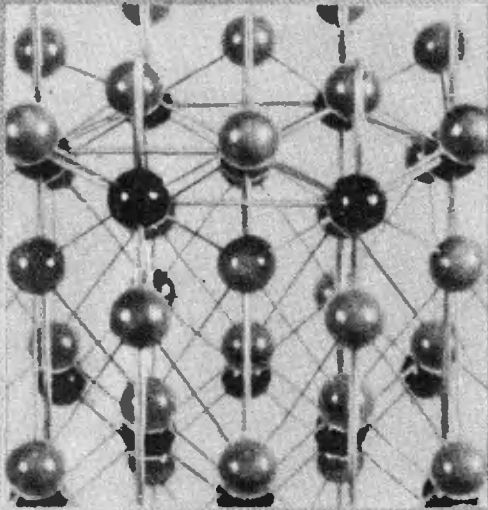


В НОМЕРЕ:

IN THIS ISSUE:

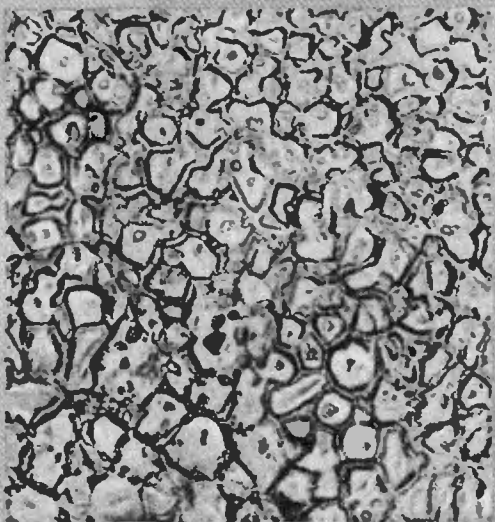
- | | | | |
|----|--|----|--|
| 2 | <i>А. Л. Петелин, А. И. Федосеев.</i>
Как живут кристаллы в металле | 2 | <i>A. L. Petelin, A. I. Fedoseev.</i>
How crystalls live in metals |
| 8 | <i>А. Б. Гончаров.</i> Арифметика гауссовых чисел | 8 | <i>A. B. Goncharov.</i> The arithmetic of Gaussian numbers |
| 14 | Математический кружок
<i>Л. Пинтер, Й. Хегедюш.</i> Упорядоченные наборы чисел и неравенства | 14 | Mathematics circle
<i>L. Pinter, Y. Hegedüs.</i> Ordered sequences of numbers and inequalities |
| 16 | Наш календарь
Формула Бальмера | 16 | Our calendar
Balmer's formula |
| 18 | Школа в «Кванте»
Математика 9—10 | 18 | Kvant's school
Mathematics 9—10 |
| 21 | «Квант» для младших школьников | 21 | Kvant for younger school children |
| 22 | Задачи
<i>Л. Карролл.</i> Безумное чаепитие | 22 | Problems
<i>L. Carroll.</i> The mad tea party |
| 26 | Задачник «Кванта» | 26 | Kvant's problems |
| 28 | Задачи М956—М960; Ф968—Ф972 | 28 | Problems M956—M960; P968—P972 |
| 36 | Решения задач М936—М940; Ф948—Ф952 | 36 | Solutions M936—M940; P948—P952 |
| 36 | Список читателей, приславших правильные решения | 36 | List of readers who have sent correct solutions |
| 38 | Полупроводниковые элементы вычислительной техники
IV. Как изготавливают транзисторы в интегральных схемах | 38 | Semiconducting elements in computers
IV. How the transistors in a chip are made |
| 40 | Практикум абитуриента
<i>Е. И. Бутиков.</i> Интерференция света | 40 | College applicant's section
<i>E. I. Butikov.</i> Interference of light |
| 46 | Олимпиады
<i>Т. А. Сарычева, А. А. Фомин.</i> XXVI Международная математическая олимпиада | 46 | Olympiads
<i>T. A. Sarycheva, A. A. Pomin.</i> The 26th International mathematics olympiad |
| 48 | <i>О. Ф. Кабардин, В. А. Орлов.</i> XVI Международная физическая олимпиада | 48 | <i>O. F. Kabardin, V. A. Orlov.</i> The 16th International physics olympiad |
| 52 | Информация
Заочная физико-техническая школа при МФТИ | 52 | Information
Moscow physico-technical institute's correspondence school |
| 55 | Ответы, указания, решения | 55 | Answers, hints, solutions |
| 62 | Напечатано в 1985 году
Смесь (37, 45)
Шахматная страничка
Шахматные квартеты (3-я с. обложки)
Наша анкета (4-я с. обложки) | 62 | Printed in 1985
Miscellaneous (37, 45)
The chess page
Chess quartets (3rd cover page)
Our questionnaire (4th cover page) |

На нашей новогодней обложке можно увидеть и математические, и физические мотивы: замощение плоскости симметричными фигурами и отражение плоского узора в сферическом зеркале.



Как живут кристаллы в металле

Кандидат физико-математических наук
А. Л. ПЕТЕЛИН,
А. И. ФЕДОСЕЕВ



Когда речь заходит о кристаллах, то обычно представляют себе красивые многогранники, сверкающие в лучах света. Однако встречающиеся в природе кристаллические материалы чаще всего не обладают столь совершенными формами. Как правило, это поликристаллы — вещества, состоящие из множества плотно упакованных мельчайших кристалликов, по-разному ориентированных в пространстве.

Такую структуру обычно имеют и металлы. Она формируется уже в процессе кристаллизации, когда зародыши кристалликов возникают в различных точках жидкого металла, зерна кристаллики растут, встречаются и теснят друг друга. Постепенно расплавленный металл превращается в поликристалл.

Многие важные свойства металла зависят не только от устройства отдельных зерен, но и от того, как они упакованы в поликристалле, каковы границы между зернами. Физические процессы, происходящие на этих границах, порой оказывают определяющее влияние на свойства металла.

Лазейки для примесей

Чтобы придать стали нужные свойства, ее подвергают термической обработке — закалке (резкому охлаждению от высокой температуры) и отпуску (повторному нагреву до менее высокой температуры). Закалка делает сталь упругой и твердой; отпуск смягчает сталь, придает ей пластичность. Меняя химический состав стали, температуры закалки и отпуска, люди на протяжении тысячелетий научились добиваться нужного сочетания прочности, пластичности, твердости и т. д.

За последние полвека условия эксплуатации стальных деталей сильно ужесточились, и инженеры все чаще стали замечать, что и после отпуска, проведенного по всем правилам, некоторые виды стали все равно

Так выглядит под микроскопом (увеличение 500) плоский срез куска меди. (При протравливании поверхности среза кислотой на границах между отдельными кристалликами травление идет быстрее — там образуются углубления). Не напоминает ли вам это кукурузные зернышки в початке? Может быть, именно поэтому говорят, что металл имеет зернистую структуру?

остаются хрупкими. В результате неожиданно выходили из строя детали, возникали аварии. Сравнительно недавно выяснилось, что за это явление, получившее название отпускной хрупкости, ответственны именно границы зерен. При определенных температурах отпуска на границах собираются вредные примеси — фосфор и сера; концентрация их в этих местах возрастает в десятки и сотни раз. Границы становятся хрупкими, и под нагрузкой по ним развиваются трещины. (На второй странице обложки приведена фотография излома металла на границе зерен, полученная с помощью электронного микроскопа.)

Другой пример. Медь, благодаря своей высокой электропроводности, — один из самых распространенных металлов в электротехнике. Чистая медь легко окисляется. Для того чтобы предохранить ее от окисления, было предложено на поверхность медного провода наносить тончайший слой серебра. По оценкам при температуре до 200 °С, когда почти не происходит ни испарение серебра, ни его проникновение (диффузия) внутрь меди, такой слой должен был бы сохраняться сотни лет. Однако на практике не прошло и месяца, как серебро с поверхности медного провода исчезло. Выяснилось, что за это чудесное исчезновение также несут ответственность границы зерен. Дело в том, что они служат каналами ускоренной диффузии.*) Зерна в медном проводе очень мелкие, и на поверхность выходит большое число границ между ними. Их оказывается достаточно, чтобы даже при сравнительно низкой температуре (около 200 °С) все атомы серебра за короткий промежуток времени просочились по ним внутрь провода и «растворились» в меди.

Как устроена граница?

Можно с полной определенностью сказать, что истоком всех свойств межзеренных границ является их строение, структура. Поэтому и знакомство с границами мы начнем с

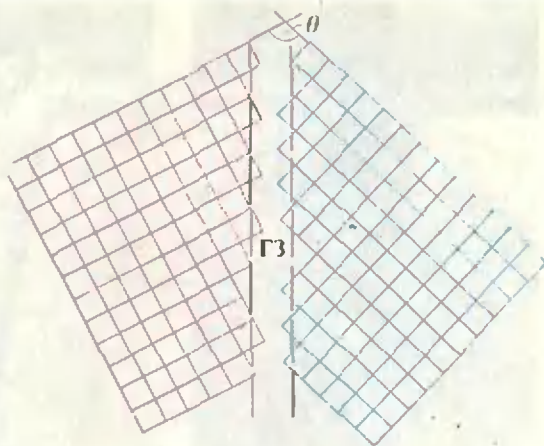


Рис. 1. Зона контакта двух зерен. φ — угол разворота зерен друг относительно друга.

их структуры, со способа укладки атомов между отдельными зернами.

Рассмотрим два зерна металла, находящиеся в контакте друг с другом. Для простоты будем считать, что атомы каждого зерна расположены в узлах плоской квадратной решетки; зерна лежат в одной плоскости, но развернуты друг относительно друга на некоторый угол (рис. 1). Область между зернами и есть, собственно, граница зерен. В дальнейшем мы будем обозначать ее ГЗ.

Итак, слева от границы — четкая структура, порядок, справа — порядок. А что же в самой ГЗ? Проще и, казалось бы, естественнее всего предположить, что на границе вообще нет никакого порядка, атомы располагаются как им вздумается, хаотично, кристаллическая структура отсутствует; металл в области ГЗ — твердое аморфное вещество. От порядка к порядку через беспорядок — так можно кратко сформулировать это предположение.

Первая теория межзеренных границ, появившаяся в начале нашего века, так и называлась — теория аморфного цемента. Она смогла объяснить некоторые свойства металлов, например, зернограницное проскальзывание. При определенной температуре (своей для каждого металла и сплава) зерна под действием незначительных нагрузок могут почти беспрепятственно скользить друг относительно друга, как будто их разделяют жидкие прослойки. Согласно теории аморфного цемента этими «прослойками» являются аморфные ГЗ: при нагревании они размягчают-

*) О диффузии в твердых телах вы можете прочитать в статье Б. С. Бокштейна «Атомы блуждают по кристаллу» в «Кванте». № 11 за 1982 год.

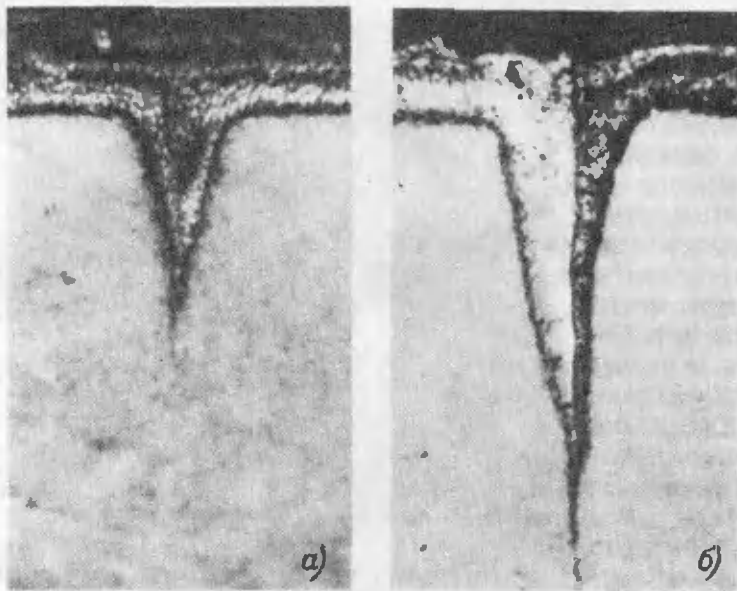


Рис. 2. Диффузионное проникновение цинка (он на фотографиях более темный) в алюминий по ГЗ (увеличение 400). На фото а) угол разворота между зернами 37° , а на фото б) — $38,5^\circ$. Время, за которое выросли эти диффузионные клинья, около 100 часов. (Фотографии сделаны на кафедре физической химии Московского института стали и сплавов.)

ся, как воск, становятся прекрасной «смазкой», и взаимное смещение зерен происходит даже при незначительных нагрузках.

Однако большинство зернограничных эффектов теория аморфного цемента объяснить не смогла.

Сравнительно недавно (около сорока лет назад) английский физик Н. Мотт предложил модель межзеренных границ, согласно которой в ГЗ могут образовываться кристаллические области — в аморфной речке могут существовать кристаллические островки. В рамках этой модели, названной «островковой», хорошо описывались многие свойства ГЗ, и в частности — миграция границ, их способность перемещаться по образцу.

Согласно теории Мотта перемещение границ происходит за счет расплавления или растворения группы атомов с одной стороны границы (из одного зерна) и выделения такой же группы атомов по другую сторону границы (на втором зерне).

Для того чтобы этот процесс стал более наглядным, представим себе ручей, текущий по поверхности ледника в горах. Дневное солнце подтопило снег в верховьях ледника, и вода, стекая вниз, проложила на своем пути ложбинку во льду — русло. Один берег ручья находится на солнце, температура там плюсовая, вода подмывает берег, кусочки льда обрушиваются в воду и тают. Другой берег ручья в тени, от солнца его загорживает близкая вершина. В тени мо-

роз — такие контрасты часто бывают в горах, — и вода постепенно замерзает на берег. В результате того, что солнечный берег все время подтаивает, а теневой замерзает, русло ручья перемещается в сторону солнечного берега, ручей старается целиком выйти из тени горы. «Движущая сила» такого перемещения — разность температур между солнечным и теневым берегами.

Миграция границы зерен по Мотту напоминает смещение ледникового ручья. (Кстати, одной из движущих сил миграции ГЗ в металле также может быть разность температур.) Теоретический анализ показал, что при таком механизме миграции «плавится» и переходит из зерна в зерно не один атом, а сразу целая группа атомов — кристаллический «островок».

Одним из основных выводов островковой теории является плавная, без скачков, зависимость физических свойств ГЗ от угла разворота зерен — чем больше угол разворота, тем меньше «хороших» островков, так что с увеличением угла структура ГЗ все время ухудшается.

А теперь обратим внимание на рисунок 2. На нем представлены две фотографии цинка, проникшего в алюминий по границе зерен. Скорость диффузии по ГЗ много больше, чем во всем объеме, это мы уже отмечали. Поэтому цинк проник вдоль границ значительно дальше, чем по зернам, — возникли диффузионные клинья. Две фотографии — две границы с очень

близкими углами разворота зерен. Но как они отличаются! Глубина проникновения по двум почти одинаковым границам совершенно разная! В рамках островковой модели это вызывает удивление.

В целом зависимость глубины проникновения при диффузии по ГЗ от угла разворота зерен выглядит так, как показано на рисунке 3, — она немонотонна. В свете этих экспериментальных результатов ни о какой плавности изменения свойств ГЗ говорить уже не приходится.

Порядок и беспорядок на границе

Внести относительную ясность в вопрос о том, почему свойства ГЗ так сильно зависят от угла разворота зерен, помог геометрический подход к проблеме контакта двух кристаллических решеток, начало которому было положено в работах английских кристаллографов М. Кронберга и Ф. Вильсона в 1947 году. Остановимся на этом подходе подробнее.

Нам по-прежнему достаточно будет рассматривать плоские квадратные кристаллические решетки.

Будем разворачивать две квадратные сетки друг относительно друга вокруг оси, перпендикулярной плоскости сеток, постепенно увеличивая угол разворота. При некоторых, вполне определенных, углах разворота вдоль линии контакта сеток возникнут узлы, общие для обеих сеток, — совпадающие узлы (на рисунке 4 они помечены красным цветом). Эти узлы

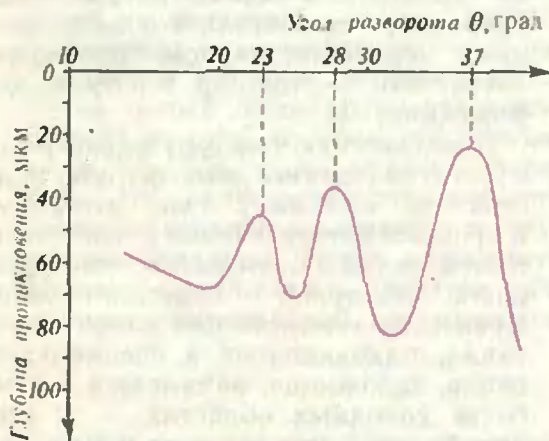


Рис. 3. Зависимость глубины проникновения при диффузии по ГЗ от угла разворота зерен. Кривая построена по экспериментальным результатам, полученным при диффузии цинка в алюминий.

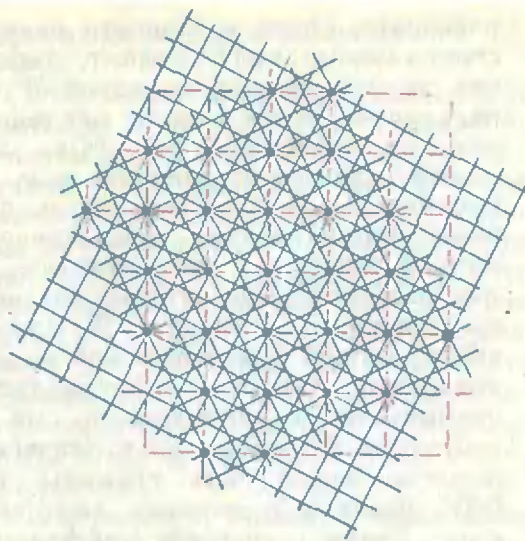


Рис. 4. Схема возникновения РСУ. Красные точки — совпадающие узлы.

расположены на плоскости с определенной периодичностью и образуют так называемую решетку совпадающих узлов (далее мы будем обозначать ее РСУ).

Для двух граничащих зерен есть несколько так называемых специальных, «хороших» углов разворота, при которых возникают РСУ с большими плотностями совпадающих узлов.*) Граница зерен в случае таких углов имеет преимущество по сравнению с границами без РСУ — она более упорядочена, значительная часть узлов находится на местах, обусловленных кристаллическими решетками обоих зерен.

Остается только один вопрос: «чувствует» ли реальная ГЗ в металле, что есть такие специальные углы разворота? Ведь пока что речь шла только о плоской геометрической модели ГЗ, не учитывалось, что атомы имеют конечные, а не точечные размеры, что между ними существует взаимодействие, что они могут смещаться относительно кристаллической решетки...

Вернемся к фотографиям на рисунке 2. Межзеренная граница с меньшей глубиной проникновения цинка (рис. 2, а) — это граница с углом

*) Нахождение хороших углов — красивая геометрическая задача, связанная с нахождением точек с целочисленными координатами на окружности. Этому вопросу посвящены часть статьи А. Б. Гончарова «Арифметика гауссовых чисел» (см. с. 13) и «Задачи для исследования» (с. 45) в этом номере журнала.

разворота, почти в точности равным специальному углу. Значит, диффузия по границе зерен с решеткой совпадающих узлов идет медленнее, чем по границам без РСУ. Это подтверждается и зависимостью на рисунке 3 — все минимумы глубины проникновения при зернограницной диффузии соответствуют углам разворота, при которых, согласно вычислениям, возникает РСУ. С точки зрения нашей геометрической модели это можно объяснить — специальные границы более упорядочены, они по структуре ближе к кристаллической решетке зерен, чем границы без РСУ. Поэтому и скорость диффузии в них ближе к скорости диффузии в решетке.

Самым впечатляющим подтверждением того, что решетки совпадающих узлов реально существуют на границах зерен, является прямое наблюдение расположения атомов на границе, ставшее возможным только в последнее время благодаря развитию высокоразрешающей электронной микроскопии. На рисунке 5 приведена фотография атомного строения ГЗ с углом разворота, близким к специальному, полученная на электронном микроскопе. Сравните рисунки 4 и 5. Не правда ли, замечательное сходство простой геометрической схемы и физического объекта — межзеренной границы, которую эта схема моделирует?

Геометрическая модель — первый шаг на пути построения общей теории границ зерен. Она дает представление об их структуре только при разориентировках, отвечающих специальным углам, остальные границы остаются неохваченными этим рассмотрением. Сейчас на основе модели РСУ разработаны физические модели, учитывающие искажения кристаллических решеток при ориентациях, на несколько градусов отличающихся от специальных. Однако, как устроены ГЗ с углами разворота, далекими от специальных, пока остается неясным.

Структура и текстура

До сих пор мы говорили об отдельных зернах и о том, как на границах между зернами из хаоса возникает порядок. В металле зерен очень много, причем их расположе-

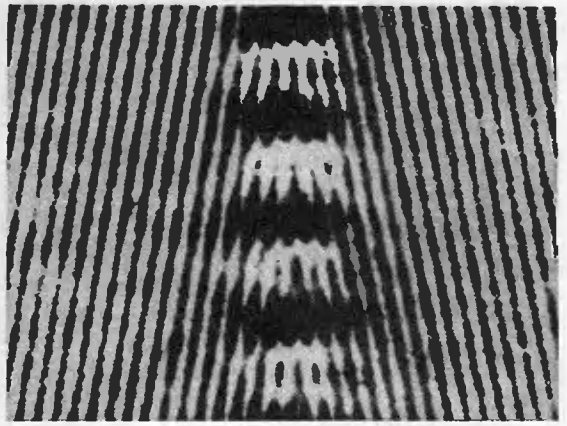


Рис. 5. Атомное строение границы, близкой к специальной. Фотография сделана с помощью электронного микроскопа; увеличение 10^6 .

ние и форма, как правило, не бывают совершенно случайными. Практически всегда имеется какая-то преимущественная ориентация кристаллических зерен. В таких случаях говорят, что материал обладает текстурой (от латинского слова *textura* — ткань, упорядоченная структура).

Причины возникновения текстур и сами текстуры бывают различные. На 2-ой странице обложки этого номера приведены две фотографии явно выраженных текстур. Одна из них возникла в металле после значительных деформаций: металлический слиток «прокатали» между двумя твердыми цилиндрами-валками так, что получился тонкий лист (такой метод обработки металлов давлением и называют прокаткой). В результате зерна вытянулись вдоль направления прокатки и сплюснулись в направлении, перпендикулярном плоскости листа. Это — пример текстуры деформации.

Определенную текстуру имеют и сами слитки (верхнее левое фото на 2-ой странице обложки). Она возникает в процессе затвердевания расплавленного металла и называется ее текстурой роста, текстурой кристаллизации. Процесс кристаллизации жидкого металла, находящегося в специальной ванне, изложнице, начинается в наиболее холодных областях — у стенок. Вначале формируется множество мелких кристалликов, ориентированных беспорядочно. Разрастаясь во все стороны, они как бы «натываются» на своих растущих соседей, после чего дальнейший свободный рост их воз-

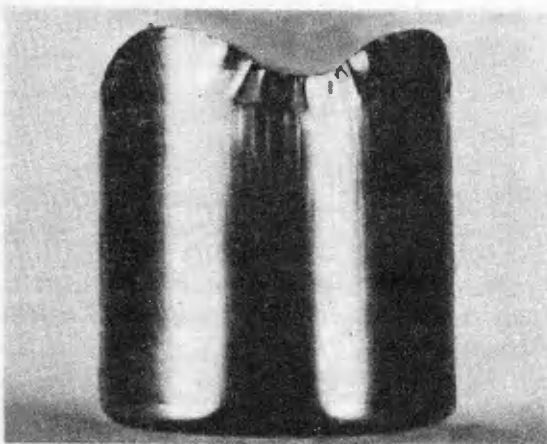


Рис. 6. Образование фестонов при вытяжке алюминиевого листа (штрихи на металле указывают направление прокатки).

можен лишь по направлению к центру слитка. Это приводит к образованию столбчатых кристаллов, которые заполняют весь объем слитка. Первое объяснение столбчатой структуры отливок дал еще в 1878 году замечательный русский ученый-металловед Д. К. Чернов.

Наличие той или иной текстуры оказывает существенное влияние на механические свойства металла. Представьте себе, что из листа металла, например, алюминия, полученного прокаткой, предстоит сделать какое-либо изделие. Скажем, кастрюлю — что может быть проще? Обычно для этого лист «натягивают» на цилиндр нужного диаметра, пуансон (такую операцию называют вытяжкой). Но после прокатки механические свойства листа вдоль различных направлений неодинаковы — вдоль которых металл вытягивается легче. В результате в процессе вытяжки образуется полый цилиндр с «ушками», фестонами (рис. 6). Фестоны приходится обрезать и отправлять в переплав. Эта трудоемкая «лишняя» операция — вредное последствие текстуры деформации. Чтобы уменьшить фестоны, металл после прокатки подвергают специальной термической

обработке, которая изменяет его текстуру.

Совсем необычно ведут себя зерна металла в процессе так называемой сверхпластической деформации. Металлы и их сплавы обычно не очень пластичны: например, образец из меди может увеличить свою длину при растяжении примерно на 50 %, а затем обязательно появляется узкое место — шейка, и металл разрывается на две части. Но есть такие сплавы, которые без разрушения могут удлиняться на 1000 % и более, испытывая сверхпластические деформации.

В отличие от обычной деформации при такой деформации зерна не вытягиваются в направлении действия силы. Они скользят друг по другу, перекатываются, подобно морским камушкам в прибое. Важную роль в этом процессе играет явление, о котором мы уже говорили, — зернограничное проскальзывание. Оно осуществляется тем легче, чем больше межзеренная поверхность, то есть чем меньше размер зерен. Кроме того, важно, чтобы температура деформации была достаточно высокой (обычно не ниже половины температуры плавления сплава) и выдерживалась определенная скорость деформации.

Сверхпластические сплавы используют, когда требуется изготовить из цельного листа металла деталь очень сложной формы (например, в самолетостроении).

* * *

Наш рассказ о зернах металла подошел к концу. Будем надеяться, нам удалось убедить читателя в том, что, во-первых, эта проблема — важна, во-вторых, — интересна. Добавим еще и в-третьих — недостаточно изучена. До сих пор нет количественной теории, полностью описывающей структуру и свойства поликристаллических металлов. Путь к этой цели еще предстоит найти.

К нашим читателям

Подписка на журнал «Квант» принимается без ограничений в течение всего года в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи.

Индекс журнала в каталоге «Союзпечати» 70465.

Арифметика гауссовых чисел

А. Б. ГОНЧАРОВ

Об одной из красивейших арифметических теорий, построенной великим немецким математиком К. Ф. Гауссом, рассказано в этой статье. Гауссовы числа (точки с целыми координатами на плоскости) можно определенным образом складывать и умножать. Возникающая при этом теория делимости, которая напоминает обычную арифметику целых чисел, но имеет и свои характерные особенности, восхищает внутренней стройностью и красотой. Однако теория гауссовых чисел не просто изящная математическая изюшка — это и полезный аппарат, позволяющий находить красивые доказательства различных фактов из теории чисел (пифагоровы тройки, число представлений натурального числа в виде суммы двух квадратов), и даже кристаллографии (см. статью А. Л. Петелина и А. И. Федосеева в этом номере «Кванта»).

Натуральные числа 0, 1, 2, 3, ... являются основой всей математики. Относительно сложения они устроены весьма просто, а именно: $1, 2=1+1, 3=1+1+1, \dots$, так что единственным исходным кирпичом является 1.

Вводя в игру вычитание, мы попадаем в область целых чисел $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Относительно же умножения тот же ряд целых чисел устроен уже гораздо сложнее. А именно, простейших кирпичей, из которых строятся умножением все ненулевые целые числа, бесконечно много — это все простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, Натуральные числа, большие 1, получаются из них умножением: 2, 3, 2×2 , 5, 2×3 , 7, $2 \times 2 \times 2$, 3×3 , Для того же, чтобы умножением получить все целые рациональные числа, надо еще привлечь обе единицы 1 и -1 .

Следующая теорема объясняет, в каком смысле простые числа являются строительным материалом для мультипликативного (то есть относящегося к умножению) построения натуральных чисел.

Основная теорема арифметики целых чисел. Каждое ненулевое це-

лое число a представляется в виде произведения

$$a = \varepsilon p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n} \quad (1)$$

где $n \geq 0$, p_i — различные простые числа, e_i — положительные целые числа, а ε — одна из единиц. Это представление определено однозначно с точностью до порядка сомножителей.

Если простые числа p_1, p_2, \dots, p_n располагать в порядке возрастания (что естественно), то равенство (1) полностью определяется числом a : и число ε (равное ± 1), и простые множители $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, и их показатели e_1, e_2, \dots, e_n однозначно определяются выбором a .

Эта теорема*) была известна еще в древности.

Долгое время математики получали доказательства арифметических теорем о натуральных числах, работая лишь с целыми числами. Однако в начале XIX века Гаусс обнаружил, что некоторые вопросы теории чисел только тогда выступают во всей своей ясности и естественной красоте, когда область арифметики распространяется также и на «числа», которые мы сейчас называем целыми гауссовыми. Что это за числа?

Гауссовы целые числа G — это просто пары целых чисел

$$G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\},$$

которые складываются и умножаются по следующим правилам

$$(a; b) + (c; d) = (a+c; b+d), \quad (2)$$

$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac-bd; ad+bc). \quad (3)$$

Для наглядности можно представить себе множество G как «целочисленную решетку на плоскости», то есть как множество всех точек на координатной плоскости, у которых и абсцисса, и ордината — целые (рис. 1), или — что то же самое — как множество всех векторов с началом O и концами в этих точках. Тогда сложение гауссовых чисел (2) представляется как обычное сложение векторов по правилу параллелограмма, а вот умножение выглядит несколько сложнее — читателю, не зна-

*) Доказательство можно найти в «Кванте», 1972, № 6, с. 30; впрочем, вы легко его получите сами, пользуясь дальнейшей теорией (см. замечание на с. 11).

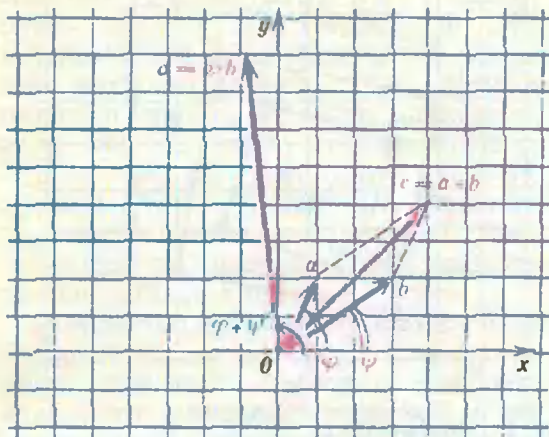


Рис. 1.

Сложение и умножение гауссовых чисел

Упражнение 1. а) Выполните действия $(3+2i)(5-i)/(3+i)$.

б) Решите уравнение $(3+i)z=5+7i$

в) Объясните, почему при умножении $a \cdot b$ происходит сложение углов φ и ψ .

комому с формулой (3), мы советуем проделать упражнения, указанные в подписи к рисунку 1 (чтобы привыкнуть к этому умножению).

Читатели, знакомые с комплексными числами, конечно же узнали в формуле (3) обычную формулу умножения комплексных чисел и догадались, что гауссовы числа представляют собой часть $G \subset C$ комплексных чисел C . Для понимания этой статьи, однако, не требуется предварительного знакомства с комплексными числами и формулой (3).

По традиции, гауссовы числа $z \in G$ записывают не в виде пар $z=(a; b)$, а в виде сумм $z=a+bi$, где i обозначает единичный вектор оси Oy , то есть пару $(0; 1)$. Пары вида $(a; 0)$, то есть целые точки, лежащие на оси

Ox , принято записывать коротко в виде a , пары же вида $(0; b)$, то есть целые точки оси Oy , в виде bi .

Обратите внимание, что

$$i^2=(0; 1) \cdot (0; 1)=(-1; 0)=-1.$$

Таким образом, в области гауссовых чисел иногда удается извлечь корень из отрицательных чисел; так,

$$\sqrt{-1}=\pm i, \sqrt{-9}=\pm 3i \text{ и т. п.}$$

Каждому гауссовому числу $z=a+bi \in G$ можно сопоставить его сопряженное $\bar{z}=a-bi \in G$ (см. рисунок 2 и упражнение к нему) и его норму — число $N(z)=a^2+b^2 \in Z$ (рис. 3)*.

Пользуясь сопряженными числами, нормой и формулой (3), легко получить правило для деления гауссовых чисел $z=a+bi$ и $w=c+di$. Именно

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{N(w)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i. \quad (4)$$

К сожалению, это деление, так же, как деление в области целых чисел, часто выводит за пределы рассматриваемой области. Так:

$$(1+2i) : (3-2i) = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5} i \notin G.$$

Как и целые числа, гауссовы числа относительно сложения (и вычитания) устроены просто: они складываются из простейших кирпичиков — 1 и i . Например

* Впрочем, норма и сопряжение определены точно также и для любых точек: $(x; y)=x+iy$, $x, y \in R$.

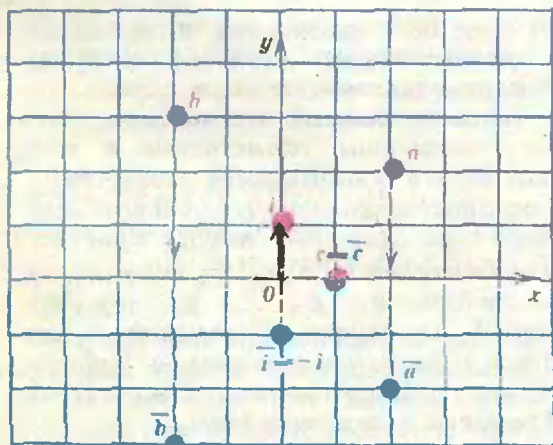


Рис. 2.

Сопряженные гауссовых чисел

Упражнение 2. Докажите аддитивность и мультипликативность сопряжения: $\overline{a+b}=\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{ab}=\overline{a} \cdot \overline{b}$.

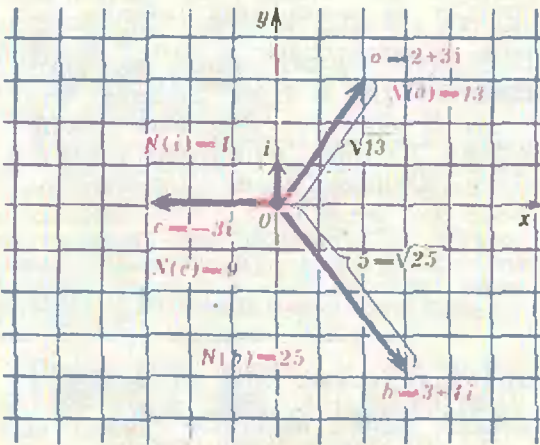


Рис. 3.

Норма гауссовых чисел

Упражнение 3. Докажите мультипликативность нормы: $N(ab)=N(a) \cdot N(b)$.

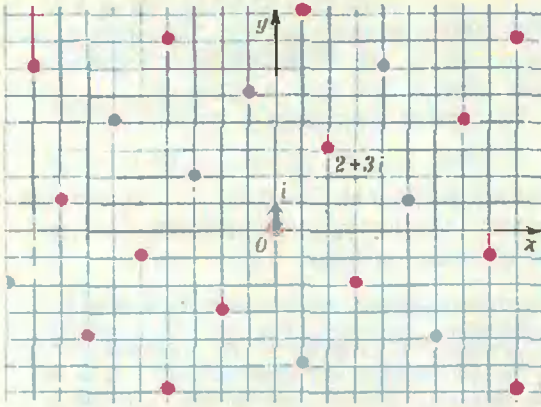


Рис. 4. Гауссовы числа, делящиеся на $2+3i$.

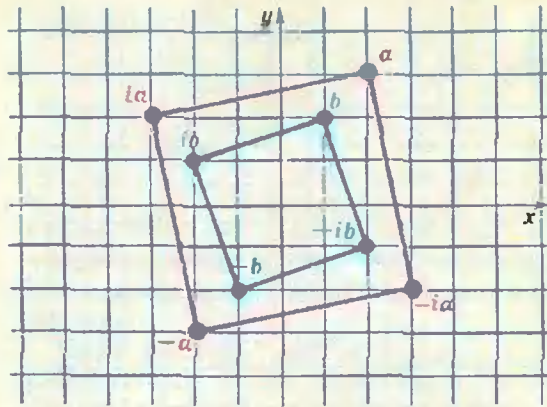


Рис. 5. Союзные числа.

$$5-3i = 1+1+1+1+1+(-i) + (-i) + (-i).$$

Оказывается, что у гауссовых чисел есть своя «основная теорема арифметики», которая сводит исследование мультипликативного строения гауссовых чисел к изучению простых гауссовых чисел.

Простые гауссовы числа и делимость. Если для двух гауссовых чисел a, b найдется третье число $c \in G$ такое, что $a = b \cdot c$, говорят, что a делится на b (запись $a : b$) или b делит a (запись $b | a$). Например $2 : 1+i$ ибо $2 = (1+i) \cdot (1-i)$. На рисунке 4 показаны гауссовы числа, которые делятся на $2+3i$.

Упражнение 4. а) Проверьте, что $1+i : 1-i$. б) Докажите, что для гауссовых чисел выполнены обычные свойства делимости:

$$\begin{aligned} a : b &\Rightarrow ac : bc, \\ ac : bc, c \neq 0 &\Rightarrow a : b, \\ a : b, b : c &\Rightarrow a : c. \end{aligned}$$

в) Отметьте на координатной плоскости все гауссовы числа, которые делятся на $3-2i$.

В области целых чисел из соотношений $a : b$ и $b : a$ следует, что $a = \pm b$. В области гауссовых чисел, это уже не так, например $a : \pm a$, $a : \pm ia$. Однако верно следующее:

$$\begin{aligned} a : b, b : a &\Rightarrow \\ \Rightarrow a = \pm b \text{ или } a = \pm ib &\quad (5) \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $a | b = c$, тогда c и $c^{-1} = b | a$ гауссовы числа. Очевидно

$$1 = N(1) = N(c \cdot c^{-1}) = N(c)N(c^{-1}),$$

откуда $N(c) = N(c^{-1}) = 1$ (ибо $N(c)$ и $N(c^{-1})$ обычные целые положительные числа). Но существует лишь 4 гауссовых числа с нормой 1 — числа $1, -1, i, -i$, которые мы в дальнейшем будем называть *единицами*.

Назовем два гауссовых числа *союзными*, если их частное — одно из единиц (рис. 5). Гауссово число называется *простым*, если она не имеет других ненулевых делителей, кроме союзных с ним чисел и единиц. Например, числа 3 и $2+3i$ — простые, а число 5 — нет: $5 = (2+i)(2-i)$. (Для доказательства простоты чисел 3 и $2+3i$ нужно воспользоваться соотношением $N(a)N(b) = N(ab)$ и перебрать все гауссовы числа, чья норма является делителем нормы данных чисел.)

Упражнение 5. Разберитесь, какие простые числа от 2 до 30 — простые гауссовы.

Основная теорема арифметики гауссовых чисел. Каждое ненулевое гауссово число g представляется в виде

$$g = \epsilon \cdot g_1^{e_1} g_2^{e_2} \dots g_n^{e_n} \quad (6)$$

где ϵ — одна из единиц, g_1, g_2, \dots, g_n — различные (то есть не союзные) простые гауссовы числа, а e_1, e_2, \dots, e_n — положительные показатели. Такое разложение единственно в том смысле, что всякое другое разложение g на простые множители имеет вид $a = \epsilon' \cdot h_1^{e'_1} h_2^{e'_2} \dots h_n^{e'_n}$, где набор простых сомножителей h_1, h_2, \dots, h_n отличается от набора g_1, g_2, \dots, g_n перестановкой элементов и заменой некоторых из них на союзные, а наборы показателей состоят из тех же чисел, отличаясь лишь порядком.

Доказательство. Чтобы доказать существование разложения (6), проведем индукцию по норме $N(g)$ числа g . База индукции: единственные числа с нормой 1 —

единицы $\pm 1, \pm i$. Шаг индукции: пусть $N(g)=n$ и утверждение уже доказано для гауссовых чисел с нормой меньше n . Если g — простое гауссово число, все уже доказано, если нет, то $g=b \cdot c$, где $N(b)>1, N(c)>1$. Так как $N(g)=N(b) \cdot N(c)$, получаем $N(b)<n$ и $N(c)<n$. Согласно предположению индукции, b и c разлагаются на простые сомножители, значит данное число a — тоже.

Доказательство единственности разложения на простые сомножители сложнее и основано на возможности деления с остатком в области целых гауссовых чисел. А именно, справедлива

Лемма о делении с остатком. Для каждой пары гауссовых чисел $a \neq 0, b$ существует такое гауссово число c (неполное частное числа b на a), что $N(b-ca) < N(a)$.

(Напомним, что при делении целых чисел остаток меньше делимого. Для гауссовых чисел надо сравнивать нормы.)

Доказательство. Пусть $b/a = x+iy$ — частное чисел b и a (полученное по формуле (4)). Это число $x+iy$ не обязательно гауссово (x или y могут быть не целыми), но ему можно сопоставить точку $(x; y)$ на плоскости Oxy (рис. 4). В качестве искомого числа c рассмотрим ближайшее к $(x; y)$ гауссово число. Тогда $(x; y)$ лежит в единичном квадрате с центром в точке c , поэтому расстояние между c и $b/a = x+iy$ заведомо меньше 1, а значит то же верно для нормы их разности (квадрата этого расстояния), то есть $N((b/a)-c) < 1$. Поэтому

$$N(b-ca) = N\left(a\left(\frac{b}{a}-c\right)\right) = N(a)N\left(\frac{b}{a}-c\right) < N(a),$$

что и требовалось.

Вернемся к доказательству теоремы. Для удобства переобозначим $a=a_0, b=a_1$ и произведем следующую последовательность делений с остатком

$$\begin{aligned} a_0 &= q_1 a_1 + a_2, \text{ где } N(a_2) < N(a_1), \\ a_1 &= q_2 a_2 + a_3, \text{ где } N(a_3) < N(a_2), \\ a_{n-2} &= q_{n-1} a_{n-1} + a_n, \text{ где } N(a_n) < N(a_{n-1}), \\ a_n &= q_n a_{n-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Этот процесс продолжается до тех пор, пока нормы остатков еще больше 0. Так как эти нормы целочисленны и монотонно убывают, через конечное число шагов мы обязательно получим в остатке 0. Через a_n мы и обозначили последний остаток, отличный от 0.

Если пройти последовательность равенств (7) снизу вверх, то легко убедиться, что

$$a_n | a_{n-1}; a_n | a_{n-2}; \dots; a_n | a_1; \hat{a}_n^2 | a_0.$$

Пройдя ее сверху вниз, легко доказать, что

$$x | a_0, x | a_1 \Rightarrow x | a_2; x | a_3; \dots; x | a_n. \tag{8}$$

Спускаясь по последовательности (7), мы получаем далее, что a_2, \dots, a_n представляются в виде $a_i = x a_0 + y a_1$. В частности,

$$a_n = x_n a_0 + y_n a_1. \tag{9}$$

Замечание. Таким образом, число a_n служит наибольшим общим делителем чисел a_0 и a_1 в том смысле, что всякое (гауссово) число, делящее a_0 и a_1 , либо соизмерно с a_n , либо имеет норму, меньшую $N(a_n)$.

Приведенный алгоритм для нахождения наибольшего общего делителя называется алгоритмом Евклида. Из него легко следует

Лемма Евклида. Если p — простое гауссово число, то

$$ab : p \Rightarrow (a : p \text{ или } b : p).$$

Доказательство. Допустим, например, что a не делится на p . Воспользуемся (8), где положено $a_0=a, a_1=p$. Тогда $a_n = \varepsilon$ — единица (ибо $a_n | p, a_n | a_0$). Отсюда $\varepsilon = x_n a + y_n p$, значит

$$1 = (\varepsilon^{-1} x_n) a + (\varepsilon^{-1} y_n) p.$$

Умножая на b , получаем:

$$(\varepsilon^{-1} x_n) ab + (\varepsilon^{-1} y_n) pb = b.$$

Согласно условию леммы, $ab : p$, откуда $b : p$, что и требовалось доказать.

Теперь уже легко закончить доказательство единственности разложения на простые сомножители. В самом деле, если предположить существование равенства $p_1 \cdot \dots \cdot p_n = q_1 \cdot \dots \cdot q_m$, где p_i, q_j — простые, то, пользуясь леммой, можно последовательно сокращать по одному множителю слева и справа, откуда следует $n=m$ и совпадение (с точностью до единиц) сокращенных простых сомножителей.

Замечание. Читатели, знакомые с обычным доказательством основной теоремы арифметики целых чисел, наверняка заметили, что изложенное выше доказательство для целых гауссовых чисел отличается от обычного только присутствием нормы в алгоритме Евклида. Остальные же читатели теперь без труда могут приспособить это доказательство для случая целых чисел.

Пифагоровы тройки — это тройки натуральных чисел (a, b, c) , которые служат длинами сторон прямоугольного треугольника, то есть удовлетворяют условию теоремы Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$. Наша ближайшая цель — применить гауссовы числа

к поиску этих троек. Имеем:

$$c^2 = (a+bi)(a-bi).$$

Разложим c и $a+bi$ на простые сомножители:

$$c = \varepsilon p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_n^{r_n}, \\ a+bi = \bar{\varepsilon} q_1^{f_1} \cdot \dots \cdot q_m^{f_m} s_1^{k_1} \cdot \dots \cdot s_l^{k_l},$$

где $\bar{q}_i = q_i$, $\bar{s}_j \neq s_j$. Тогда

$$c^2 = \varepsilon^2 p_1^{2e_1} \cdot \dots \cdot p_n^{2e_n} = \\ = a^2 + b^2 = \bar{\varepsilon} \varepsilon q_1^{2f_1} \cdot \dots \cdot q_m^{2f_m} \cdot s_1^{k_1} \cdot \dots \cdot s_l^{k_l} \cdot \bar{s}_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \bar{s}_l^{k_l}.$$

Из основной теоремы сразу следует, что k_i — четные числа, то есть $k_i = 2r_i$ ($i=1, \dots, l$). Поэтому

$$c = d(u+iv)(u-iv),$$

где $d = q_1^{2f_1} \cdot \dots \cdot q_m^{2f_m}$,

$$\text{и } u+iv = s_1^{r_1} \cdot \dots \cdot s_l^{r_l}.$$

Тогда

$$c^2 = d^2(u+iv)\overline{(u+iv)}^2 = \\ = [d(u+iv)]^2 \overline{[d(u+iv)]^2}.$$

Снова воспользовавшись однозначностью разложения на простые сомножители, получаем

$$a+bi = d(u+iv)^2 = d(u^2 - v^2) + (2duv)i;$$

откуда следует, что каждая пифагорова тройка представима в виде

$$a = d(u^2 - v^2); \quad b = duv; \quad c = d(u^2 + v^2),$$

где u и v — произвольные натуральные числа.

Простые гауссовы числа. Основная теорема арифметики гауссовых чисел во многом сводит их изучение к изучению их простых сомножителей. Поэтому важно иметь описание всех простых гауссовых чисел.

Теорема 1. Простые гауссовы числа суть (А) $1+i$ и союзные с ним числа; (Б) простые натуральные $p=4k+3$, $k \in \mathbb{N}$ и союзные с ними числа; (В) множители $a+bi$ простого натурального p вида $4k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

Упражнение 6. Нарисуйте на плоскости все гауссовы простые числа, по норме меньшие 10.

Доказательство. Рассмотрим любое простое гауссово число q .

Лемма. Каждое простое гауссово число q — делитель ровно одного натурального простого числа p .

Доказательство леммы. В самом деле, q делит $N(q)$ и, следовательно, делит его некоторый простой сомножитель. С другой стороны, q не может делить два различных простых l и r , ибо всегда найдутся такие целые m и n , что $ml+nr=1$. (Докажите!)

Итак, данное простое гауссово число q делит некоторое обычное

(целое!) простое число p , то есть $q=a+bi|p$ или $q \cdot t=p$, значит $N(q)N(t)=p^2$. Поэтому, либо $N(t)=1$ и тогда t — единица, а q соизно с p , либо

$$N(q)=a^2+b^2=p, \quad t=\bar{q}=a-bi. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь 3 случая.

1) Если $p=2$, то $p=1^2+1^2=(1+i)(1-i)=i(1-i^2)$; числа $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ суть союзные между собой простые гауссовы числа (это — случай (А) теоремы).

2) Если $p=4k+3$, равенство (10) невозможно, так как квадрат любого целого числа при делении на 4 дает в остатке 0 или 1. Поэтому простые числа вида $4k+3$ остаются простыми в области гауссовых чисел (случай (Б)).

3) Если $p=4k+1$, воспользуемся следующим утверждением:

Критерий Эйлера. Если $p=4k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ — простое, то существует натуральное x , для которого $p|x^2+1$, то есть $p|(x+i)(x-i)$.

Доказательство этого утверждения мы здесь не приводим, оставляя его в качестве задачи для читателя. Указание: примените малую теорему Ферма (см. «Квант», 1985, № 6, с. 19, см. также «Квант», 1973, № 1, с. 4).

Таким образом, в нашем случае p не является простым гауссовым. Значит, p делится на некоторое простое гауссово число $g=a+bi$. Тогда по основной теореме p делится и на союзное число $a-bi$. Если p к тому же делится еще на какое-то число $c+di$, не союзное с $a+bi$, то p делится и на $c-di$. Но тогда p делится на $(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)=$

$$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

и не может быть простым (в обычном смысле). Значит, в нашем случае

$$p=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=N(g). \quad (11)$$

Мы получили утверждение (В) теоремы 1, которая тем самым доказана.

Число представлений числа в виде суммы квадратов. Мы не только перечислили все простые гауссовы числа, но в сущности сумели доказать (см. (11), основную теорему и теорему 1) такое утверждение:

Теорема 2. Простое натуральное $p > 2$ представимо в виде суммы квадратов тогда и только тогда, когда оно имеет вид $4k+1$, и в этом случае такое представление единственно.

Найдем теперь число разложений $n = a^2 + b^2$ для произвольного натурального n . Нам будет удобно считать различными разложения, отличающиеся изменением знаков у a - и b или порядком слагаемых. Тогда это число будет равным числу точек с целыми координатами на окружности радиуса \sqrt{n} с центром O .

Теорема 3. Число целых точек на окружности радиуса \sqrt{n} , $n \in \mathbb{N}$ или (что то же самое) число разложений целого числа n на сумму двух квадратов равно учетверенному избытку числа делителей n вида $4k+1$ над числом делителей вида $4k+3$.

Например, легко видеть, что окружности радиусов $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, 5 проходят через 4, 4, 4, 12 точек соответственно (проверьте, что во всех трех случаях это число равно соответствующему учетверенному избытку). Более сложный пример разобран на рисунке 6.

Доказательство. Представим n в виде $n = 2^{\alpha} q_1^{a_1} \dots q_k^{a_k} \cdot p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_m^{e_m} \cdot p_m^{e_m}$.

где $q_i = q_i > 0$ и p_i, p_i — простые гауссовы числа (p_i и p_i — несоюзные). Пусть $n = a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$. Из основной теоремы легко следует, что $a+bi$ союзно с числом

$$(1+i)^{\alpha} \cdot q_1^{a_1/2} \dots \cdot q_k^{a_k/2} \cdot p_1^{f_1} \cdot \dots \cdot p_1^{e_1-f_1} \cdot \dots \cdot p_m^{f_m} \cdot p_m^{e_m-f_m} \quad (12)$$

где $0 \leq f_j \leq e_j$.

Отсюда видно, что число представлений n в виде суммы двух квадратов равно

$$\begin{cases} 0 & \text{— если среди чисел } a_i \text{ есть нечетные числа,} \\ 4(e_1+1) \cdot \dots \cdot (e_m+1) & \text{— если все } a_i \text{ четные} \end{cases} \quad (13)$$

(4 получается в результате того, что выражение (12) отличается от $a+bi$ на единицу, а единиц всего 4).

С другой стороны, любой нечетный делитель x числа n имеет разложение на простые гауссовы числа вида

$$x = q_1^{b_1} \cdot \dots \cdot q_k^{b_k} \cdot p_1^{f_1} \cdot \dots \cdot p_m^{f_m} \cdot p_m^{f_m}$$

где $b_1 \leq a_1, \dots, b_k \leq a_k; f_1 \leq e_1, \dots, f_m \leq e_m$.

Но q_i — натуральные числа, являющиеся простыми гауссовыми, поэтому q_i имеет остаток 3 при делении на 4 и

$$(b_1 + \dots + b_k) : 2 \Leftrightarrow x = 4k+1 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Отсюда уже легко вывести (выведите!), что избыток числа делителей вида $4k+1$ над числом делителей вида $4k+3$ равен

$$\begin{cases} 0, & \text{если среди чисел } a_i \text{ есть нечетное,} \\ (e_1+1) \cdot \dots \cdot (e_m+1), & \text{если все } a_i \text{ — четные числа.} \end{cases} \quad (14)$$

Сравнивая (13) и (14), получаем доказательство теоремы.

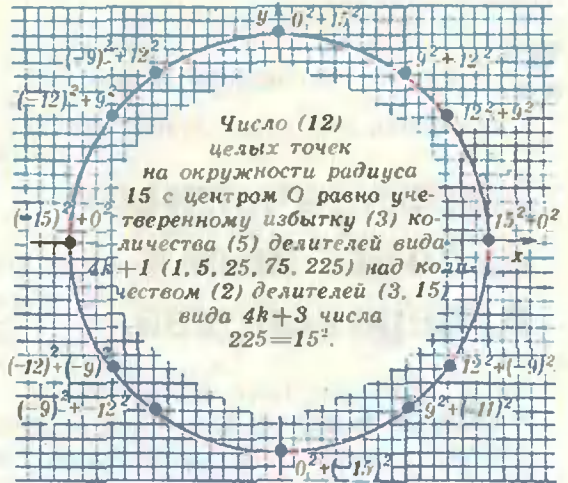


Рис. 6.

Заключение. Мы не объяснили, откуда возникла изложенная выше теория. А дело было так: в 1796 году девятнадцатилетний Гаусс доказал *квадратичный закон взаимности*, являющийся одной из прекраснейших жемчужин теории чисел. Об истории его возникновения и доказательстве рассказано в статье С. Г. Гиндикина «Золотая теорема» (в «Кванте», 1973, № 1).

Квадратичный закон взаимности позволяет исчерпывающим образом исследовать уравнение вида $x^2 - a \equiv 0 \pmod{b}$, то есть найти все $x \in \mathbb{N}$ такие, что число $x^2 - a$ делится нацело на b .

Естественно, что аналогичную теорию Гаусс хотел иметь и для уравнений более высокой степени, например $x^4 - a \equiv 0 \pmod{b}$, и поэтому начал поиски «биквадратичного закона взаимности». И тут-то выяснилось, что хотя это уравнение первоначально изучается в области натуральных чисел, законченный результат практически невозможно даже сформулировать (!) без целых гауссовых чисел. Впоследствии (1832 г.), Гаусс писал:

«После того, как мы начали исследовать эти вопросы в 1805 г., (...) мы скоро пришли к убеждению, что (...) для общей теории необходимо в некотором смысле бесконечно расширить область высшей арифметики. Как только мы вступаем в эту область, тотчас же обнаруживается подход к индуктивному нахождению весьма простых и исчерпывающих всю теорию теорем; однако доказательства их скрыты столь глубоко, что их удалось извлечь на свет только после бесплодных попыток».

Область, о которой пишет Гаусс, и есть теория тех чисел, которые сейчас носят его имя.



Упорядоченные наборы чисел и неравенства

Л. ПИНТЕР, И. ХЕГЕДЫШ

Родители Коли хранят бумажные деньги в конвертах. Однажды они достали три конверта и положили их перед ним. В одном из конвертов лежали рубли, в другом — трешки, а в третьем — пятерки. Родители попросили Колю вытащить из одного из конвертов две, из другого три, а из оставшегося конверта четыре бумажки.

Как Коле выбрать конверты, чтобы получить наибольшую возможную сумму, и как — чтобы набрать сумму, наименьшую из возможных? Чтобы найти набранную сумму при произвольном выборе конвертов, нужно в таблицу 1 в нижнюю строку вместо вопросительных знаков поставить числа 2, 3, 4 в соответствующем порядке, затем взять произведения чисел по столбцам и сложить их.

1	3	5
?	?	?

Таблица 1

Если Коля хочет набрать наибольшую сумму, то он должен вытащить четыре бумажки из конверта с пятерками, три бумажки из конверта с трешками и две бумажки из конверта с рублями:

$$5 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 31.$$

Если Коля хочет набрать наименьшую возможную сумму, то он должен вытащить наименьшее число бумажек, то есть две, из конверта с пятерками, три — из конверта с трешками и четыре — из конверта с рублями, то есть

$$5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 23.$$

Упорядоченные тройки

В общем виде эту задачу можно сформулировать так. Пусть даны две тройки положительных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \\ b_1, b_2, b_3.$$

Рассмотрим сумму

$$S = a_i b_j + a_j b_k + a_k b_i,$$

где i, j, k — это числа 1, 2, 3, написанные в каком угодно порядке. Как выбрать этот порядок, чтобы сумма S оказалась наибольшей (соответственно наименьшей) из возможных?

Ясно, что если наибольшее из чисел a умножить на наибольшее из чисел b , среднее из чисел a на среднее из чисел b и наконец наименьшее из чисел a на наименьшее из чисел b и сложить эти произведения, то получится максимальное из возможных значение S (если среди чисел a или среди чисел b имеются равные, то это максимальное значение S получается не единственным способом). Если же наибольшее из чисел a умножить на наименьшее из чисел b , среднее — на среднее и т. д., то получаем наименьшее возможное значение S .

Пользуясь этим методом, можно просто решить задачу М762 (см. «Квант», 1982, № 9)*).

Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c справедливы неравенства:

$$a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \\ + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}. \quad (1)$$

Докажем сначала первое неравенство. Запишем две тройки чисел

$$a^2, b^2, c^2, \\ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}.$$

Поскольку числа a, b, c положительны, наибольшее из чисел первой тройки расположено над наименьшим из чисел второй тройки, наименьшее из чисел первой тройки расположено над наибольшим из чисел

* См. также статью С. В. Дворянинова и Э. А. Ясиного «Как получаются симметричные неравенства» («Квант», 1985, № 7), где эти неравенства доказаны другим способом.

второй тройки. Поэтому для данных троек сумма

$$a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c}$$

является минимальной, и следовательно,

$$a^2 \frac{1}{a} + b^2 \frac{1}{b} + c^2 \frac{1}{c} \leq a^2 \frac{1}{b} + b^2 \frac{1}{c} + c^2 \frac{1}{a}, \tag{2}$$

$$a^2 \frac{1}{a} + b^2 \frac{1}{b} + c^2 \frac{1}{c} \leq a^2 \frac{1}{c} + b^2 \frac{1}{a} + c^2 \frac{1}{b}. \tag{3}$$

Складывая неравенства (2) и (3), получим:

$$2(a+b+c) \leq a^2 \frac{1}{b} + b^2 \frac{1}{c} + c^2 \frac{1}{a} + a^2 \frac{1}{c} + b^2 \frac{1}{a} + c^2 \frac{1}{b} = \frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b}.$$

Чтобы получить второе из неравенств (1), рассмотрим тройки чисел

$$a^3, b^3, c^3, \\ \frac{a}{abc}, \frac{b}{abc}, \frac{c}{abc}.$$

Под наибольшим (соответственно наименьшим) из чисел первой тройки записано наибольшее (наименьшее) число второй тройки. Поэтому

$$a^3 \frac{a}{abc} + b^3 \frac{b}{abc} + c^3 \frac{c}{abc} \geq a^3 \frac{b}{abc} + b^3 \frac{c}{abc} + c^3 \frac{a}{abc} = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}, \tag{4}$$

$$a^3 \frac{a}{abc} + b^3 \frac{b}{abc} + c^3 \frac{c}{abc} \geq a^3 \frac{c}{abc} + b^3 \frac{a}{abc} + c^3 \frac{b}{abc} = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}. \tag{5}$$

Складывая неравенства (4) и (5), получаем

$$2\left(\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}\right) \geq \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b},$$

что и требовалось.

Упражнения

Докажите неравенства:

- $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$.
- $a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$.
- $\frac{a^2b}{c} + \frac{a^2c}{b} + \frac{b^2a}{c} + \frac{b^2c}{a} + \frac{c^2a}{b} + \frac{c^2b}{a} \geq 6abc$

(здесь $a > 0, b > 0, c > 0$).

- Если $a_1 > a_2 > a_3 > a_4, b_1 > b_2 > b_3, to$

$$3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \geq (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3).$$

- Если $a > 0, b > 0, c > 0$, то

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} > \frac{3}{2}.$$

Некоторые обобщения

Пусть теперь даны два набора из n чисел

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n, \\ b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n. \tag{A}$$

Рассмотрим всевозможные суммы вида $i \sigma = a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \dots + a_nb_{i_n}$, где i_1, i_2, \dots, i_n — некоторая перестановка чисел $1, 2, \dots, n$.

Число таких сумм конечно, и поэтому среди них есть наибольшая S и наименьшая s . Нетрудно сообразить, что $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$, а $s = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1$.

Докажем это. Предварительно заметим, что для любых четырех чисел a, b, c, d таких, что $a \geq b$ и $c \geq d$, выполнено неравенство

$$ac + bd \geq ad + bc, \tag{*}$$

которое равносильно очевидному неравенству

$$(a-b)(c-d) \geq 0.$$

После этого замечания наше утверждение доказывается без труда. В самом деле, если в некоторой сумме σ имеются слагаемые a, b_q и a_kb_p , для которых $e < k, q > p$, то есть $b_p \geq b_q$, то, переставив числа b_p и b_q , мы получим не меньшую сумму σ' со слагаемыми a, b_p и a_kb_q .

Последовательно проводя такие перестановки, мы приходим к сумме S , поэтому $S \geq \sigma$.

Аналогично, если $b_q \geq b_p$, то, меняя эти числа местами, получим сумму, не большую σ .

Так как в результате нескольких перестановок мы можем прийти к сумме s , то $\sigma \geq s$.

Итак, для всякой суммы σ

$$s \leq \sigma \leq S, \tag{B}$$

причем равенство в (B) возможно лишь тогда, когда в одном из наборов a_1, \dots, a_n , либо b_1, \dots, b_n есть равные числа.

Подводя итоги, можно сформулировать общий метод доказательства неравенств: если наборы чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n одинаково упорядочены (то есть из $a_k \geq a_l$ следует, что $b_k \geq b_l$), то $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \dots + a_nb_{i_n}$, (здесь i_1, i_2, \dots, i_n — произвольная перестановка номеров $1, 2, \dots, n$).

Некоторые замечательные неравенства

1. Неравенство Коши:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = G.$$

Доказательство. Можно считать, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Рассмотрим наборы чисел

$$\frac{a_1}{G}; \frac{a_1 a_2}{G^2}, \dots, \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{G^n} = 1,$$

$$\frac{G}{a_1}; \frac{G^2}{a_1 a_2}, \dots, \frac{G^n}{a_1 \dots a_n} = 1.$$

Эти наборы противоположно упорядочены. Поэтому

$$\begin{aligned} n &= \frac{a_1}{G} \cdot \frac{G}{a_1} + \frac{a_1 a_2}{G^2} \cdot \frac{G^2}{a_1 a_2} + \dots + \frac{a_1 \dots a_n}{G^n} \cdot \frac{G^n}{a_1 \dots a_n} \leq \\ &\leq \frac{a_1}{G} \cdot 1 + \frac{a_1 a_2}{G^2} \cdot \frac{G}{a_1} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{G^n} \times \\ &\times \frac{G^{n-1}}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{G}. \end{aligned}$$

2. Неравенство Чебышева. Если $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > i$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$, то

$$\begin{aligned} n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) &\geq \\ &\geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n). \end{aligned}$$

Доказательство. Сложив n неравенств

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \\ a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_n b_1, \\ a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1}, \end{aligned}$$

получим требуемое.

Замечание. Так же доказывается, что, если $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, то $n(a_1 b_1 + \dots) \leq (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)$.

3. Неравенство о среднем квадратическом:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Доказательство. Можно считать, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Применяя неравенство Чебышева к случаю $a_i = b_i$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$, получим $n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$, откуда без труда получим требуемое неравенство.

Упражнения

6. Если a_1, a_2, \dots, a_n — стороны выпуклого n -угольника ($n \geq 3$), то

$$\frac{a_1}{p-2a_1} + \frac{a_2}{p-2a_2} + \dots + \frac{a_n}{p-2a_n} \geq \frac{n}{n-2}$$

(здесь $p = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ — периметр n -угольника).

7. Если a_1, a_2, \dots, a_n неотрицательны, то $n(a_1^{k+m} + a_2^{k+m} + \dots + a_n^{k+m}) \geq (a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k) \times (a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m)$.

8. Если a, b, c положительны, то

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

9. (Обобщение задачи М762.) Если a_1, \dots, a_n положительны, то

$$\begin{aligned} (n-1)(a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k) &\leq \frac{a_2^k + a_3^k + \dots + a_n^k}{a_1^{k-m}} + \\ &+ \frac{a_1^k + a_3^k + \dots + a_n^k}{a_2^{k-m}} + \dots + \frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_{n-1}^k}{a_n^{k-m}}. \end{aligned}$$

здесь $k > m > 0$.

Наш календарь

Формула Бальмера

«Как только я увидел формулу Бальмера, мне все сразу же стало ясно», — так обычно рассказывал Н. Бор о завершающем этапе своей работы над созданием квантовой теории атома.*)

В этом году исполнилось 100 лет с тех пор, как эта

формула, которой суждено было сыграть выдающуюся роль в истории науки, стала известна широким кругам ученых. Впервые она была опубликована Бальмером в 1884 году, но о ней почти никто не знал, пока в 1885 году не появилась статья в немецком физическом журнале.

Швейцарец Иоганн Якоб Бальмер (1825—1898), получив университетское математическое образование, с 60-х по 90-е годы прошлого века преподавал математику в Базеле в гимназии для девочек и вел занятия по начертательной геометрии в местном университете.

Круг интересов Бальмера был очень широк — философия и литература, музыка и архитектура, древняя история и история естествознания, медицина... Но как прирожденного математика его больше всего увлекали поиски математической гармонии, конкретно — закономерных числовых отношений: в формах кристаллов, в геометрических параметрах знаменитых памятников архитектуры и т. п. Именно эта увлеченность «магией чисел» и привела базельского преподавателя к его замечательному открытию.

Вот задача, которую ре-

*) Об этом этапе жизни и деятельности выдающегося датского физика-теоретика Н. Бора (1885—1962) рассказывается в статье В. А. Фабриканта «Первые шаги Нильса Бора в науку», опубликованной в десятом номере нашего журнала за этот год. (Примеч. ред.)

шил Бальмер. Даны четыре числа

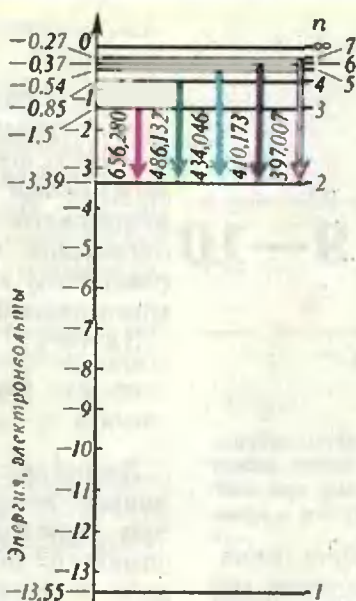
$$6562,10; 4860,74; \\ 4340,10; 4101,2.$$

Требуется найти «закон», которому они следуют.

Тот, кто захочет решить эту задачу самостоятельно (а для этого ничего, кроме элементарной математики, не потребуется), должен здесь на время прервать чтение заметки, поскольку чуть дальше приводится ответ.

Числа, закономерность следования которых нашел Бальмер, — это длины волн (в 10^{-10} м) четырех линий в видимой области спектра атома водорода. В физике Бальмер был самое большое дилетантом и к постановке задачи пришел случайно — прослушав лекцию профессора физики по спектральным исследованиям. Надо сказать, что серия линий водородного спектра физикам-профессионалам была хорошо известна по меньшей мере с 1868 года. Но в попытках установить спектральный закон физики неизменно руководствовались, как оказалось впоследствии, не имеющей к делу никакого отношения акустической аналогией: линии серии уподобляли обертонам звука и искали для них выражения вида λ/n , где λ — некоторая основная длина волны, а n — целое число. При этом для спектров различных элементов получали различные наборы целых чисел, между которыми никакой связи не усматривалось.

Вероятно, Бальмеру помогло то, что он не был физиком. Не отягощенный никакими предвзятыми представлениями, он лишь искал простую формулу, максимально точно воспроизводящую обнаруженную экспериментаторами последовательность длин волн спектральной серии. И результатом этих поисков стала знаменитая «формула Бальмера»:



$$\lambda = d \frac{n^2}{n^2 - 2^2}.$$

Здесь λ — длина волны спектральной линии, d — некоторая постоянная (равная $3645,6 \cdot 10^{-10}$ м), а n — целые числа. Приведенные четыре водородные линии получаются из этой формулы подстановкой для n значений 3, 4, 5 и 6 соответственно. Как ученый пришел к этой формуле, не известно, но имеются косвенные указания на то, что он опирался на довольно несложное геометрическое построение.

Получив свою формулу, удивительно точно описывающую четыре водородные линии, Бальмер все же сомневался — нашел ли он физическую закономерность или его результат есть лишь следствие поразительного совпадения. Пролистав популярный справочник по новейшим научным достижениям, он узнал, что известна еще одна, пятая линия водородной серии с длиной волны $3969 \cdot 10^{-10}$ м (это уже невидимая ультрафиолетовая область спектра). Подставив в свою формулу $n=7$, Бальмер получил $\lambda=3969 \cdot 10^{-10}$ м! Этот успех существенно подкрепил его доверие к формуле, и он показал ее коллеге по Базельскому уни-

верситету, профессору физики. Тот отнесся к открытию с большим интересом и сообщил Бальмеру, что на самом деле известны еще девять линий в ультрафиолетовой части водородного спектра. Не составило большого труда убедиться, что и эти линии великолепно описываются «волшебной» формулой (при подстановке $n=8, 9, \dots, 16$). Сомнений в том, что найден какой-то новый фундаментальный закон природы, больше не оставалось.

В 1890 году шведский физик И. Ридберг (1854—1919) записал формулу Бальмера несколько по-иному:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = R c \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

(ν — частота спектральной линии, c — скорость света, а R — фундаментальная физическая постоянная, которую теперь называют «постоянной Ридберга»). Именно в этой записи формула Бальмера предстала перед Бором в феврале 1913 года. Приняв во внимание выражение для энергии кванта $h\nu$ (h — постоянная Планка), Бор сразу же разгадал физический смысл формулы, оставшийся совершенно таинственным почти три десятилетия. А смысл этого предельно точный и ясный — спектральные линии соответствуют квантам электромагнитного излучения, испускаемым электронами при перескоках с орбиты с номером n ($n=3, 4$ и т. д.) на более близкую к ядру 2-ю орбиту.

Очень часто повторяют два утверждения: 1) крупнейшие научные открытия ученые совершают только в молодости; 2) к таким открытиям нельзя прийти путем «игры с цифрами», не задумываясь о сути явлений. История открытия Бальмера наглядно демонстрирует, что бывают и исключения.

Б. Е. Явлов



Математика 9—10

Метод интервалов

Эта статья предназначена девятиклассникам и десятиклассникам. Она также может быть использована абитуриентами при подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

В школьном курсе алгебры неравенствам отводится значительное место: сначала это — линейные неравенства, потом — квадратичные, потом — неравенства, в которых участвуют логарифмические, показательные и тригонометрические функции. Постепенно неравенства усложняются — появляются всевозможные комбинации функций, изучаемых в школе. В этой статье мы на нескольких примерах проиллюстрируем один важный метод решения неравенств, который обычно называют «методом интервалов». Мы будем рассматривать здесь неравенства, правая часть

которых равна нулю, а левая часть представлена в виде произведения или частного функций с известными промежутками знакопостоянства. Метод интервалов основан на следующей очевидной идее: знак произведения (частного) определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).

Задача 1. Решить неравенство

$$\frac{(2x-1)(x^2-x-2)}{3-x} < 0.$$

Линейная функция с ненулевым угловым коэффициентом меняет знак при переходе через корень, причем справа от корня знак функции совпадает со знаком углового коэффициента (рис. 1); квадратный трехчлен с положительным дискриминантом тоже меняет знак при переходе через каждый корень, причем правее большего корня знак квадратного трехчлена совпадает со знаком его старшего коэффициента (рис. 2).

Эти соображения приводят к следующей схеме решения неравенства.

1. Находим корни каждого «сомножителя»: $x = \frac{1}{2}$; $x = -1$, $x = 2$; $x = 3$.

Наносим найденные корни на числовую ось (рис. 3).

2. Числовая ось разбилась на пять промежутков. На самом правом из них знак каждого сомножителя совпадает со знаком его старшего коэффициента: $2x-1 > 0$, $x^2-x-2 > 0$, $3-x < 0$.

Следовательно, дробь на этом промежутке отрицательна.

3. При переходе через каждый из отмеченных корней один и только один из сомножителей меняет знак, и потому каждый раз меняется знак дроби. Учитывая это, расставляем в этих промежутках знаки (как показано на рисунке 3).

4. Выбираем промежутки, на которых дробь отрицательна.

Ответ:

$$]-\infty; -1[\cup]\frac{1}{2}; 2[\cup]3; +\infty[.$$

Задача 2. Решить неравенство

$$\frac{4-x^2}{(5x-2)\lg x} \geq 0.$$

Будем решать это неравенство по той же схеме, но не на всей оси, а на промежутке $]0; +\infty[$ — области оп-

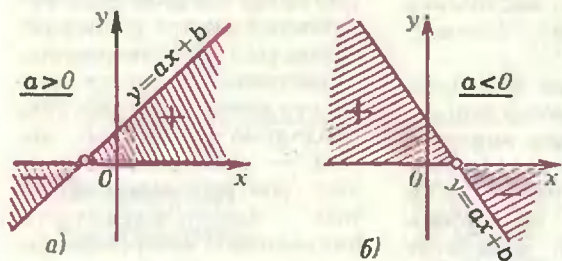


Рис. 1.

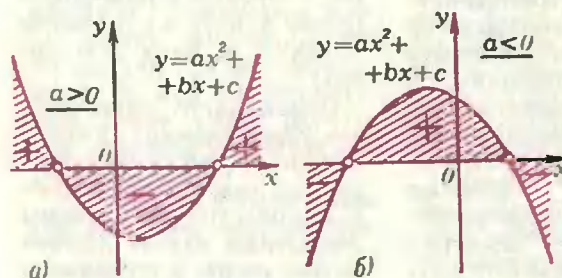


Рис. 2.

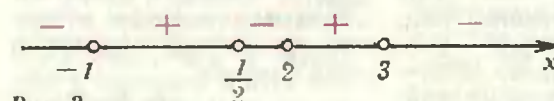


Рис. 3.

ределения логарифмической функции.

1. Корни «сомножителей»: $x=2$; $x=0,4$; $x=1$ (рис. 4).

2. Полуось $]0; +\infty[$ разбилась на четыре промежутка. На самом правом из них $4-x^2 < 0$, $5x-2 > 0$, $\lg x > 0$. Следовательно, на этом промежутке левая часть неравенства отрицательна.

3. При переходе через каждый корень меняет знак один и только один из сомножителей. Учитывая это, составляем знаки на остальных промежутках (рис. 4).

4. Мы решили строгое неравенство. Остается присоединить к полученному множеству решений корни уравнения

$$\frac{4-x^2}{(5x-2)\lg x} = 0,$$

то есть корни числителя дроби (входящие в область определения неравенства).

Ответ: $]0; 0,4[\cup]1; 2]$.

Задача 3. Решить неравенство

$$\frac{(10x-2)(x^2-5x+7)}{x+3} \leq 0.$$

Решение изображено на рисунке 5. Квадратный трехчлен в числителе дроби не имеет корней и потому не меняет знак, который совпадает со знаком его старшего коэффициента.

Ответ: $] -3; \lg 2]$.

Задача 4. Решить неравенство

$$(x^2-2x-3)(6+x-x^2) \geq 0.$$

1. Находим корни сомножителей: $x=-1$, $x=3$, $x=-2$, $x=3$.

2. При $x > 3$ левая часть неравенства отрицательна.

3. При переходе через точку $x=3$ оба сомножителя меняют знак ($x=3$ — их общий корень), так что знак произведения не меняется.

При переходе через каждый из двух других корней левая часть, как и в предыдущих примерах, меняет знак (рис. 6).

Ответ: $[-2; -1] \cup \{3\}$.

Из этой задачи видно, что, применяя метод интервалов, необходимо следить за тем, сколько сомножителей меняют знак при переходе через данный корень. Возможны сомножители, которые не меняют знак при переходе через свой корень (например, квадратный трехчлен с дискриминантом, равным нулю).



Рис. 4.



Рис. 5.



Рис. 6.



Рис. 7.

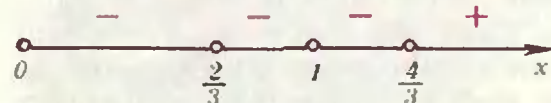


Рис. 8.

Задача 5. Решить неравенство

$$\frac{4x^2-4x+1}{2x^2-5x+2} \leq 0.$$

$x = \frac{1}{2}$ — корень и числителя, и

знаменателя дроби. Однако при переходе через этот корень меняет знак лишь знаменатель; поэтому в этой точке дробь меняет знак (рис. 7).

Ответ: $] \frac{1}{2}; 2]$.

Проверьте себя, решив следующую задачу:

Задача 6. Решить неравенство

$$\frac{(1+x-2x^2)\lg x}{(4-3x)(9x^2-12x+4)} < 0.$$

Ответ: $]0; \frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}; 1[\cup]1; \frac{4}{3}[$ (рис. 8).

В рассмотренных примерах мы имели дело с линейной, квадратичной, показательной и логарифмической функциями, промежутки знакопостоянства которых изучаются в школьном курсе. Однако метод интервалов можно применять и в более сложной ситуации.

Идея решения следующих неравенств основана на интуитивно ясной теореме, точное доказательство которой дается в курсах математического анализа: *если функция непрерывна на промежутке и не имеет в этом промежутке корней, то она сохраняет в этом промежутке знак.*

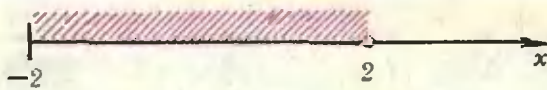


Рис. 9.



Рис. 10.

Задача 7. Решить неравенство

$$\sqrt{x+2} > x. \quad (1)$$

Функция $y = \sqrt{x+2} - x$ определена и непрерывна на промежутке $[-2; +\infty[$.

Найдем корни этой функции, то есть решим уравнение

$$\sqrt{x+2} = x. \quad (2)$$

Возведя обе части уравнения (2) в квадрат, приходим к квадратному уравнению $x^2 - x - 2 = 0$ с корнями $x = -1$, $x = 2$. Проверка показывает, что корнем уравнения (2) является только $x = 2$. Эта точка разбивает область определения неравенства (1) на два промежутка: $[-2; 2[$ и $]2; +\infty[$. На каждом из этих промежутков функция $y = \sqrt{x+2} - x$ сохраняет знак, то есть либо все точки такого промежутка удовлетворяют неравенству (1), либо ни одна из них этому неравенству не удовлетворяет. Поэтому достаточно подставить в неравенство (1) по одной точке из каждого промежутка. Выберем точки $x = -2$ и $x = 7$. Так как $x = -2$ удовлетворяет неравенству (1), а $x = 7$ этому неравенству не удовлетворяет, множеством решений неравенства (1) является промежуток $[-2; 2[$ (рис. 9).

Ответ: $[-2; 2[$.

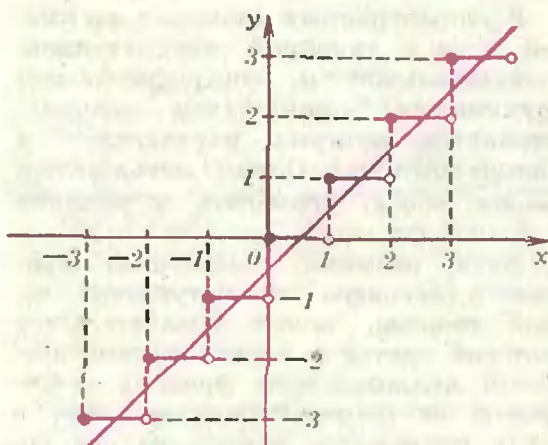


Рис. 11.

Задача 8. Решить неравенство

$$x\sqrt{10-x^2} > x^2 - 6.$$

1. Область определения функции

$$\sqrt{10-x^2}: [-\sqrt{10}; \sqrt{10}].$$

2. Решаем уравнение:

$$\begin{aligned} x\sqrt{10-x^2} &= x^2 - 6, \\ x^2(10-x^2) &= (x^2 - 6)^2; \\ x^4 - 11x^2 + 18 &= 0. \end{aligned}$$

Получаем четыре корня: $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm 3$. Проверка оставляет два корня: $x = -\sqrt{2}$, $x = 3$ (рис. 10).

3. Подставляем в неравенство числа $x = -\sqrt{10}$, $x = 0$, $x = \sqrt{10}$. Число $x = 0$ удовлетворяет неравенству, а числа $x = \pm\sqrt{10}$ ему не удовлетворяют.

Ответ: $[-\sqrt{2}; 3]$.

Как известно, линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая и тригонометрические функции, а также их композиции и функции, получаемые из них с помощью арифметических действий, непрерывны в своей области определения. Поэтому метод интервалов можно применять при решении практически всех неравенств школьного курса. Метод интервалов позволяет представить множество решений неравенства в виде объединения промежутков, границы которых — либо корни соответствующего уравнения, либо граничные точки области определения неравенства.

Требование непрерывности существенно для применения метода интервалов. В этом можно убедиться на следующей задаче.

Задача 9. Решить неравенство

$$[x] \leq x - \frac{1}{2}.$$

Построим графики левой и правой части неравенства (рис. 11). Корнями уравнения $[x] = x - \frac{1}{2}$ являются чис-

ла вида $k + \frac{1}{2}$, где k — любое целое число. В то же время множество решений неравенства — объединение промежутков вида $[k + \frac{1}{2}; k + 1[$, гра-

ничными точками которых являются, в частности, все целые числа, которые не являются при этом ни корнями уравнения, ни граничными точками области определения.

Ю. И. Ионин, В. Б. Некрасов

Задачи

1. В числовом ребусе (см. рисунок) использовано 7 букв. Расшифруйте этот ребус, если известно, что ни одна из букв не заменяет цифры 1 и что одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным — разные.

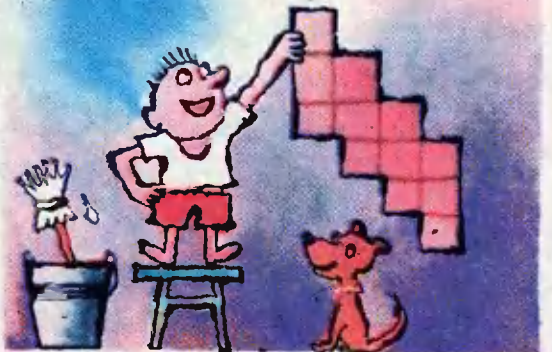
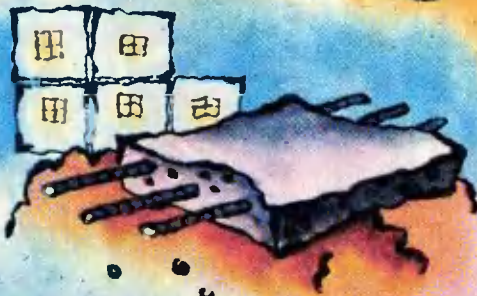
2. Бак был полон воды. Эту воду поровну перелили в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объема, во втором бидоне вода заняла $\frac{2}{3}$ его объема, а в третьем бидоне — $\frac{3}{4}$ его объема. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объеме бака возможна такая ситуация?

3. Всем известно, что такое железобетон: железную арматуру заливают бетоном, который, застывая, образует с металлом очень прочную конструкцию. Почему в качестве арматуры используется железо?

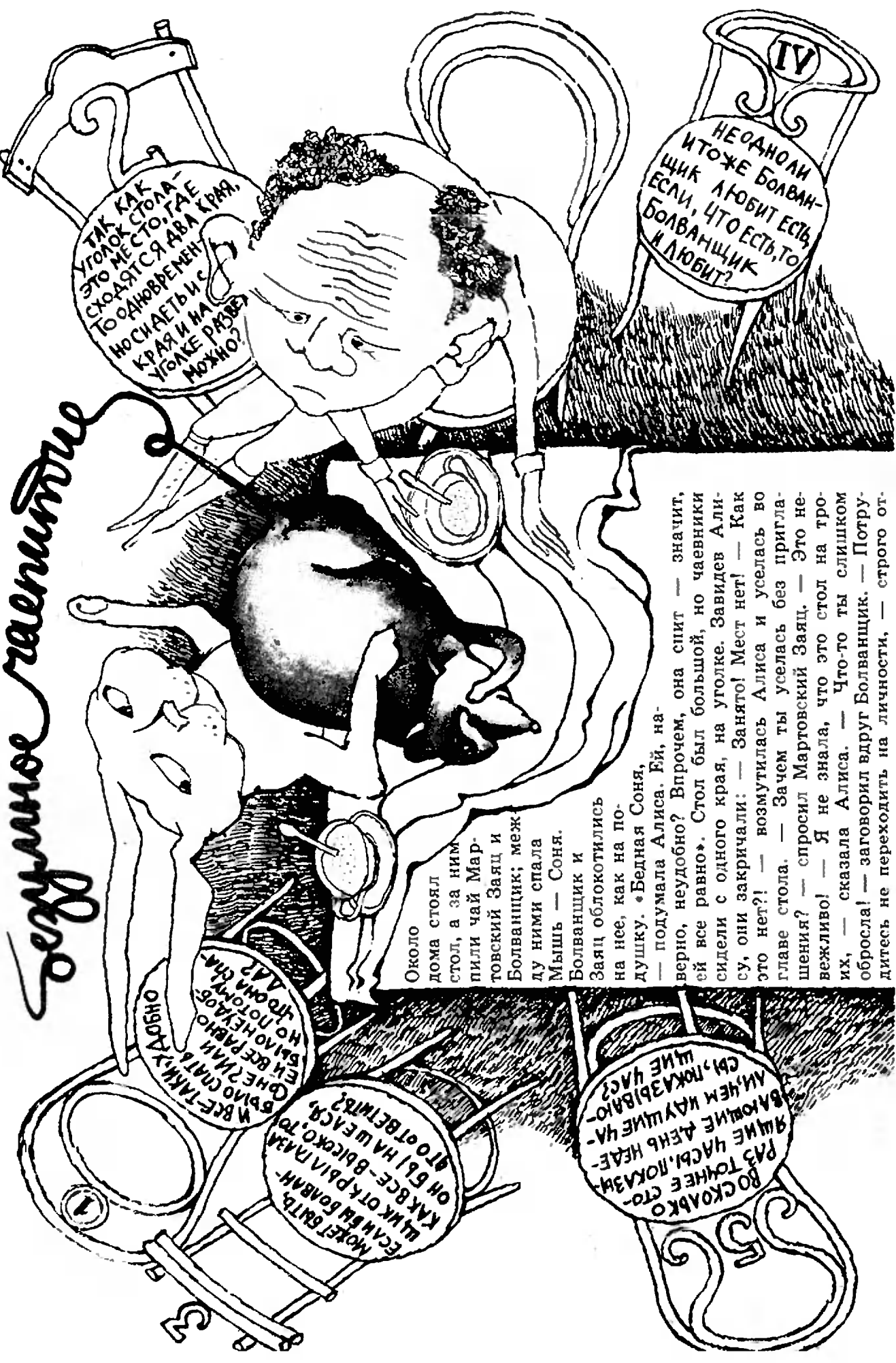
4. На рисунке изображен кусок бумаги. Можно ли оклеить этим куском бумаги, не разрезая его, какой-нибудь кубик?

5. Сумма цифр 20-значного числа N равна 10, сумма цифр числа $7N$ равна 70, сумма цифр числа $19N$ равна 19. Найдите N .

Эти задачи нам предложили Н. К. Антонович, С. Р. Сефибеков, А. П. Савин, Н. П. Долбин, Д. В. Фукс.



Безумное гашение



Около
дома стоял
стол, а за ним
пили чай Мар-
товский Заяц и
Болванчик; меж-
ду ними стала
Мышь — Соня.
Болванчик и
Заяц облокотились
на нее, как на по-
душку. «Бедная Соня,
— подумала Алиса. Ей, на-
верно, неудобно? Впрочем, она спит — значит,
ей все равно». Стол был большой, но чавники
сидели с одного края, на углуке. Завидев Али-
су, они закричали: — Заяц! Мест нет! — Как
это нет?! — возмутилась Алиса и уселась во
главе стола. — Зачем ты уселась без пригла-
шения? — спросил Мартовский Заяц. — Это не-
вежливо! — Я не знала, что это стол на тро-
их, — сказала Алиса. — Что-то ты слишком
обросла! — заговорил вдруг Болванчик. — Потру-
дись не переходить на личности. — строго от-

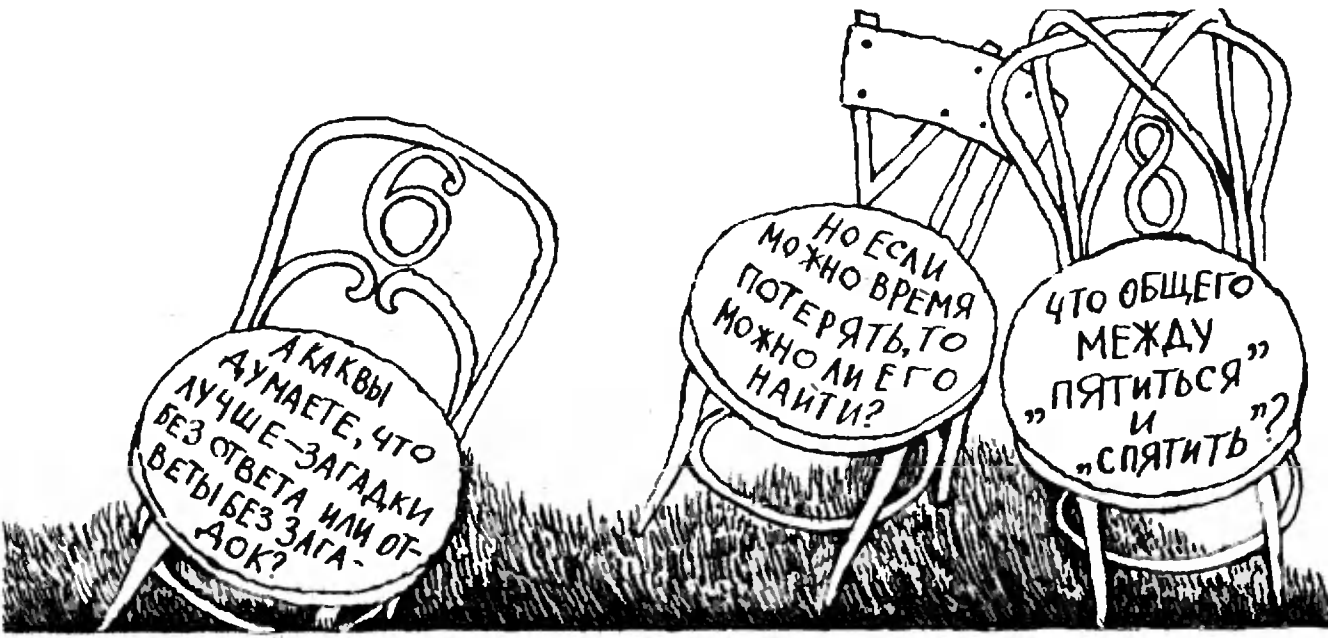
ТАК КАК
УГОЛОК СТОЛА —
ЭТО МЕСТО, ГДЕ
СХОДЯТСЯ ДВА КРАЯ,
ТО ОДНОВРЕМЕННО
НОСИТ ДВА КРАЯ,
КРАЯ И НА
УГОЛКЕ РАЗВЕР-
МОЖНО?

НЕОДНОЛИ-
ИТОЖЕ БОЛВАН-
ЩИК ЛЮБИТ ЕСТЬ,
ЕСЛИ, ЧТО ЕСТЬ, ТО
БОЛВАНЩИК
И ЛЮБИТ?

ВРЕ-ТАМКА ДАЮЩИ
ВМО СНАТЯ ДАЮЩИ
ОМЕРИАННО
ЭН ВЕРИАННО
НО ПОТЕРЯНО
ЛА? ДА?

МОЖЕТ БЫТЬ
ЕСЛИ В БОЛВАН-
ЩИК ОТ КРАЯ ПИЛИ
КАК ВСЕ — ВЫСОКО, ТО
ОН БЫ НАШЕЛСЯ,
А ВОТ ВЕТНИК?

ВО СКОРБКО
РАЗ ТОЧНЕЕ СТО-
ЯШМЕ ЧАСЫ, ПОКАЗЫ-
ВАЮЩИЕ ДЕНЬ НЕДЕ-
АЩЕ КАУЩИЕ ЧА-
АЩЕ ПОКАЗЫВАЮ-
ЩИЕ ЧАС?

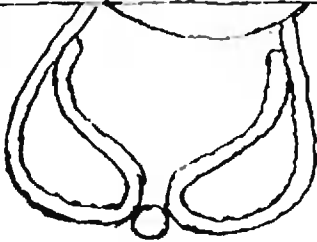


ветила Алиса. Болванщик широко открыл глаза и не нашелся, что ответить. — Чем ворон похож на конторку? — спросил он. — Это я могу отгадать, — сказала она. — Ты хочешь сказать, что думаешь, будто знаешь ответ? — спросил Мартовский Заяц. — Совершенно верно, — согласилась Алиса. — Так бы и сказала, — заметил Мартовский Заяц. — Нужно всегда говорить то, что думаешь. — Я так и делаю, — поспешила объяснить Алиса. — По крайней мере я всегда думаю то, что говорю... а это одно и то же... — Совсем не одно и то же, — возразил Болванщик. — Так ты еще скажешь, будто «Я вижу то, что ем» и «Я ем то, что вижу» одно и то же! С минуту все сидели молча. Алиса пыталась вспомнить то, что она знала про воронов и конторки. Первым заговорил Болванщик. — Какое сегодня число? — спросил он, вынимая из кармана часы. Алиса подумала и ответила: — Четвертое. Отстают на два дня, — вздохнул Болванщик. — Какие смешные часы! — заметила Алиса. — Они показывают число, а не час! — А что тут такого? — пробормотал Болванщик. — Разве твои часы показывают год? — Конечно, нет. — Отгадала загадку? — спросил Болванщик. — Нет. Какой же ответ? — Понятия не имею, — сказал Болванщик. — И я тоже, — подхватил Мартовский Заяц. Алиса вздохнула. — Если вам нечего делать, — сказала она с досадой, — придумали бы что-нибудь получше загадок без ответа. А так только попусту теряете время. — Если бы ты знала Время так же хорошо, как я, — сказал Болванщик, — ты бы этого не сказала. Его не потеряешь! — Не понимаю, — сказала Алиса. — Еще бы! — презрительно встряхнул головой Болванщик. — Ты с ним небось никогда и не разговаривала! Мы с ним поссорились в марте — как раз перед тем, как этот (он показал ложечкой на Мартовского Зайца) спятил. С тех пор, — продолжал грустно Болванщик, — время для меня палец о палец не ударит! и на часах все шесть... Тут Алису осенило. — Поэтому

3. Одинажды Болванщик забыл завести свои настенные часы, и они остановились. Желая знать точное время, он отправился к Мартовскому Заяцу, у которого были точные часы, и, вернувшись от него, установил на своих часах точное время. Как он мог это сделать? Локом отправляете в бочку молока. Что бавляете это в чай, а затем ложку чая с бочка молока. Вы берете ложку молока и до на 2 минуты в сутки или которые спешат 1. Какие часы лучше — которые спешат

Зайца

окажется больше: чай в молоке или молока в чае?

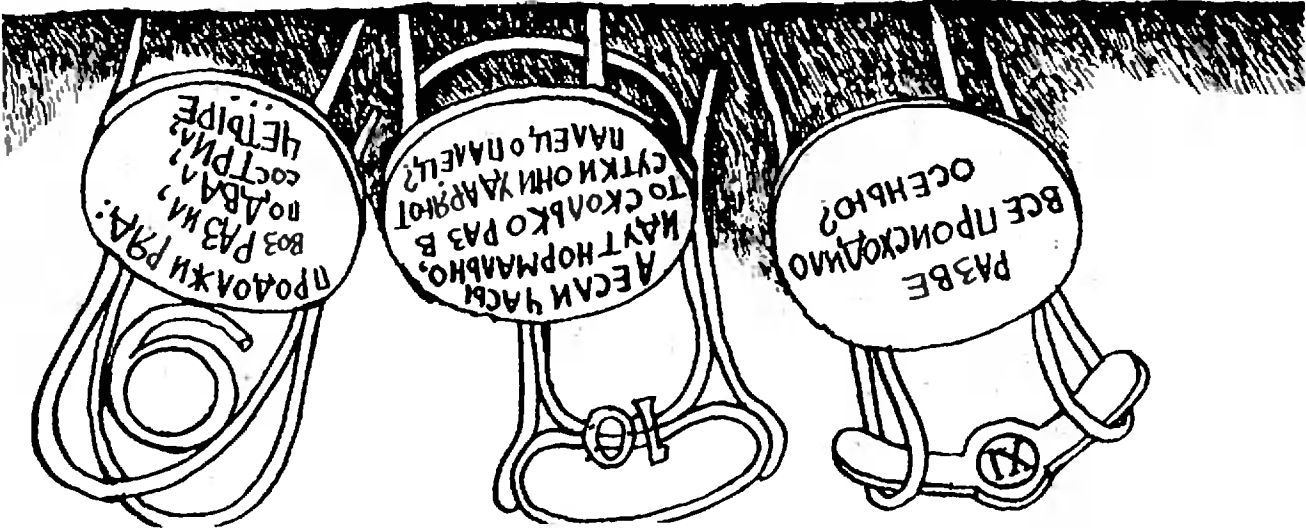


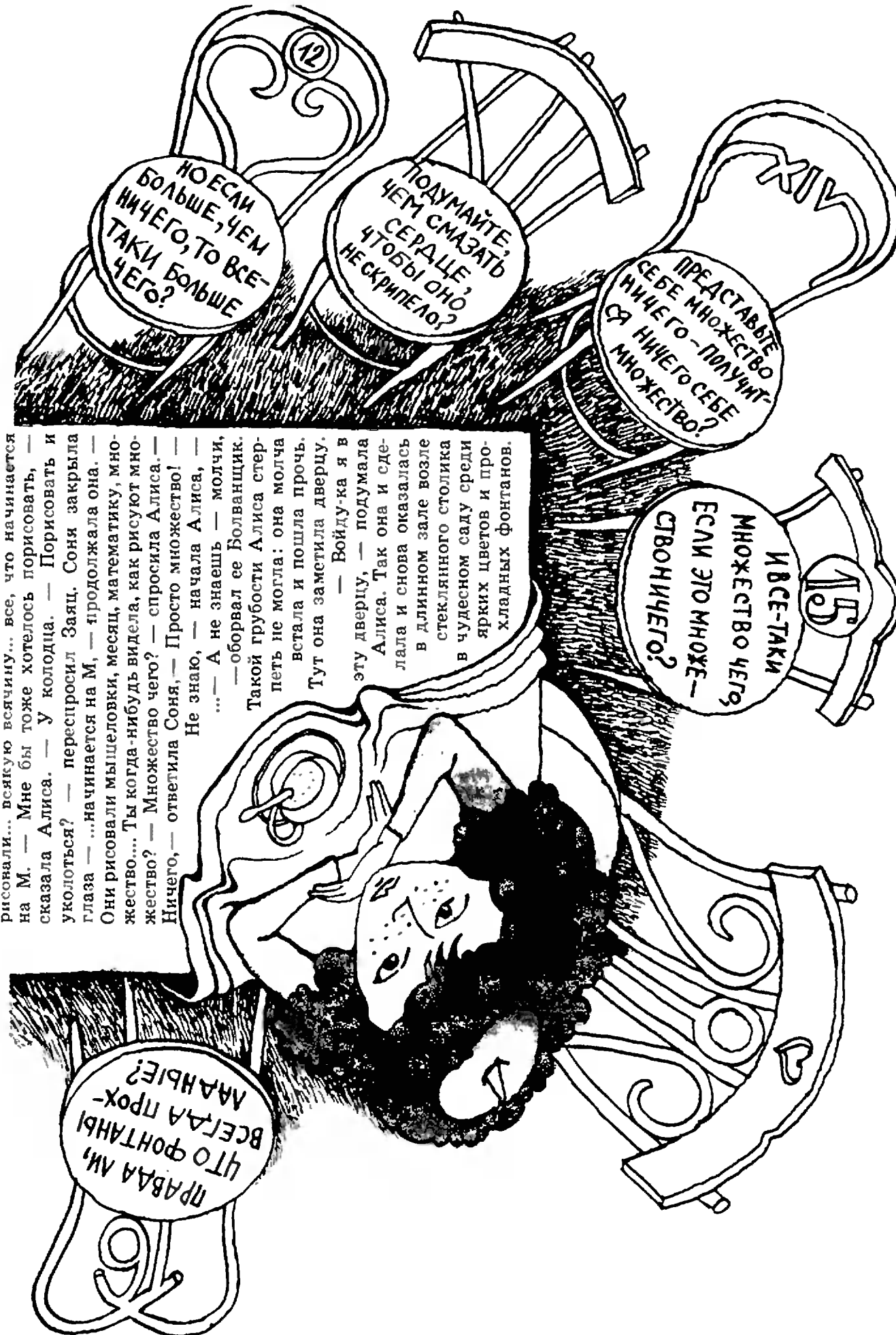
Задачи

4. Как нарисовать математику? Подумайте и пришлите нам рисунки.

5. Часы, которые отстают на 1 минуту в сутки, в данный момент показывают точное время. Когда они покажут точное время в следующий раз?

здесь и накрыто к чаю? — спросила она. — Да, — отвечал Болванщик со вздохом. — Здесь всегда пора пить чай. Мы не успеваем даже посуду вымыть! — Выпьем чашку и пересядем к следующей. — А когда дойдете до конца, тогда что? — рискнула спросить Алиса. — А что, если мы переменим тему? — спросил Мартовский Заяц и широко зевнул. — Надоели мне эти разговоры. Я предлагаю: пусть барышня расскажет нам сказку. — Боюсь, что я ничего не знаю, — испугалась Алиса. — Тогда пусть рассказывает Соня, — закричал Заяц. — Соня, проснись! Рассказывай сказку! — Да, пожалуйста, расскажите, — подхватила Алиса. — Жили-были три сестрички, — быстро начала Соня, — звали их Элли, Леси и Тилли, а жили они на дне колодца... А что они ели? — спросила Алиса. Ее всегда интересовало, что люди едят и пьют. — Кисель, — ответила, немного подумав, Соня. — А почему они жили на дне колодца? — Выпей еще чаю, — сказал Мартовский Заяц, наклоняясь к Алисе. — Еще? — переспросила Алиса с обидой. — Я пока ничего не пила. — Больше чаю она не желает, — произнес Мартовский Заяц в пространство. — Ты, верно, хочешь сказать, что меньше чаю она не жаждет: гораздо легче выпить больше, а не меньше, чем ничего, — сказал Болванщик. — Вашего мнения никто не спрашивал, — сказала Алиса. — А теперь кто переходит на личности? — спросил Болванщик с торжеством. Алиса не знала, что на это ответить. Она налила себе чаю и намазала хлеб маслом. — Мне нужна чистая чашка, — сказала Болванщик. И он пересел на соседний стул. Соня села на его место, Мартовский Заяц — на место Сони, а Алиса скрепя сердце — на место Заяца. Выиграл при этом один Болванщик; Алиса, напротив, сильно проиграла, потому что Мартовский Заяц только что опрокинул себе в тарелку молочник. Алисе не хотелось опять обижать Соню, и она осторожно спросила: — Я не понимаю... Как же они там жили? — Чего там не понимаешь, мать, — сказал Болванщик. — Живут же рыбы в воде. А эти сестрички жили в киселе! — Но почему? — спросила Алиса Соню. — А еще они





рисовали... всякую всячину... все, что начинается на М. — Мне бы тоже хотелось порисовать, — сказала Алиса. — У колодца. — Порисовать и уколется? — переспросил Заяц. Соня закрыла глаза — ...начинается на М, — продолжала она. — Они рисовали мышеловки, месяц, математику, множество.... Ты когда-нибудь видела, как рисуют множество? — Множество чего? — спросила Алиса. — Ничего, — ответила Соня. — Просто множество! —

Не знаю, — начала Алиса, — ... — А не знаешь — молчи, — оборвал ее Ёлванщик. Такой грубости Алиса стерпеть не могла: она молча встала и пошла прочь. Тут она заметила дверцу. — Войду-ка я в эту дверцу, — подумала Алиса. Так она и сделала и снова оказалась в длинном зале возле стеклянного столика в чудесном саду среди ярких цветов и прохладных фонтанов.

12
НО ЕСЛИ БОЛЬШЕ, ЧЕМ НИЧЕГО, ТО ВСЕ ТАКИ БОЛЬШЕ ЧЕГО?

ПОДУМАЙТЕ, ЧЕМ СМАЗАТЬ СЕРДЦЕ, ЧТОБЫ ОНО НЕ СКРИПЕЛО?

ЖИВ
ПРЕДСТАВЬТЕ СЕБЕ МНОЖЕСТВО НИЧЕГО — ПОЛУЧИТСЯ НИЧЕГО СЕБЕ МНОЖЕСТВО?

15
И ВСЕ-ТАКИ МНОЖЕСТВО ЧЕГО, ЕСЛИ ЭТО МНОЖЕСТВО НИЧЕГО?

16
ПРАВДА ЛИ, ВСЕГДА ПРОХЛАДНЫЕ?

задачник кванта

Задачи

M956—M960; Ф968—Ф972

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 февраля 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M956, M957» или «Ф968». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M957 и M958 (в немного измененной формулировке) предлагались на XXVI Международной математической олимпиаде.

M956. На плоскости проведены четыре окружности одинакового радиуса так, что три из них проходят через точку A и три — через точку B (рис. 1). Докажите, что четыре точки их попарного пересечения, отличные от A и B , — вершины параллелограмма.

В. и И. Каповичи, ученики 10 класса

M957. Докажите, что из 1985 различных натуральных чисел, все простые делители которых содержатся среди первых 9 простых чисел 2, 3, ..., 23, можно выбрать четыре числа, произведение которых — четвертая степень целого числа.

M958*. Пусть $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$ — целые числа. Докажите, что количество нечетных коэффициентов у многочлена

$$(1+x)^{i_1} + (1+x)^{i_2} + \dots + (1+x)^{i_n}$$

не меньше, чем у многочлена $(1+x)^n$.

M959*. В стране между некоторыми парами городов установлено авиационное сообщение. Докажите, что можно закрыть не более $1/(k-1)$ часть авиалиний таким образом, что среди любых k городов найдутся два, не соединенные между собой авиалинией, если а) $k=3$; б) k — любое натуральное число.

А. А. Разборов

M960*. Если разность между кубами двух последовательных натуральных чисел — квадрат некоторого натурального числа n , то число n представляется в виде суммы квадратов двух последовательных натуральных чисел.

а) Докажите это утверждение.

б) Вот один пример таких чисел: $8^3 - 7^3 = (2^2 + 3^2)^2$; приведите еще хотя бы один пример.

в) Докажите, что таких примеров существует бесконечно много.

Р. Лайнесс (Великобритания)

Ф968. На три параллельных оси, соединенных жесткими стержнями, насажены три зацепленных шестеренки с радиусами r_1 , r_2 и r_3 (рис. 2). Оси B и C вращаются вокруг неподвижной оси A с угловой скоростью ω_0 ; при этом размеры треуголь-

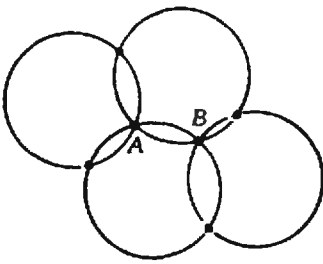


Рис. 1.

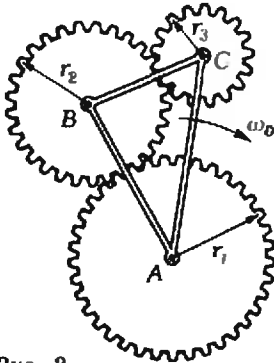


Рис. 2.

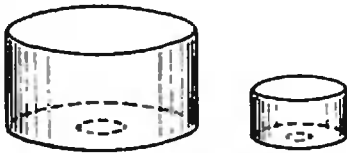


Рис. 3.

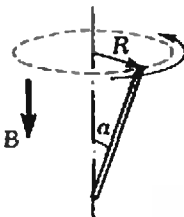


Рис. 4.

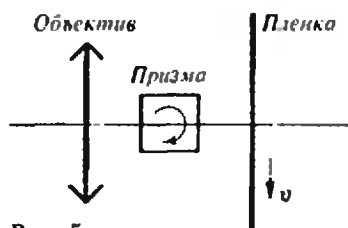


Рис. 5.

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually

ника ABC остаются неизменными, а шестеренка радиуса r_3 движется поступательно. С какой угловой скоростью вращается шестеренка радиуса r_1 ?

В. Вангелов (г. Бургас, НРБ)

Ф969. Две банки, сделанные из одного и того же материала, имеют одну и ту же геометрическую форму, причем все линейные размеры одной банки в k раз меньше, чем другой (рис. 3). В дне каждой банки сделано отверстие. Банки одновременно опускают на воду. Какая банка утонет скорее? Во сколько раз?

И. К. Соболев

Ф970. В тонкостенной непрозрачной сферической оболочке находится шар, радиус которого в несколько раз меньше радиуса оболочки. Предложите способ определения плотности вещества, из которого сделан шар. Масса оболочки неизвестна.

С. А. Хорозов

Ф971. В магнитном поле, индукция \vec{B} которого вертикальна, вращается около вертикальной оси так, как показано на рисунке 4, металлический стержень. Угловая скорость вращения равна ω , R и α заданы. Найти разность потенциалов на концах стержня.

Л. Г. Маркович

Ф972. В высокоскоростном кино съемочном аппарате, применяемом для съемки быстропротекающих процессов, пленка движется непрерывно со скоростью v . Для предотвращения смазывания изображения между пленкой и объективом установлена четырехгранная стеклянная призма с показателем преломления n , вращающаяся с постоянной угловой скоростью (рис. 5). Пренебрегая расфокусировкой изображения, определите, при какой угловой скорости изображение на пленке не смазывается. Определите толщину призмы d при условии, что экспонирование изображения одного кадра проводится в пределах $(-\alpha_0, \alpha_0)$ ее угла поворота, а минимальный размер различимых деталей изображения равен δ .

А. А. Ланидес

Problems

M956—M960; P968—P972

M956. Four circles of the same radius are drawn on the plane so that three pass through the point A and three through the point B (Fig. 1). Prove that the four pairwise intersection points (other than A and B) are the vertices of a parallelogram.

V. and I. Kapovich, 10th form students

M957. Prove that it is possible to choose four numbers whose product is the fourth power of an integer from any distinct 1985 natural numbers whose prime divisors are all contained in the set $\{2, 3, \dots, 23\}$ of the first nine primes.

M958*. Suppose $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$ are integers. Prove that the number of odd coefficients of the polynomial

indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 15th, 1986 to the following address: - USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS)**. Problems M957 and M958 (in somewhat different formulations) were proposed at the 26th International mathematics olympiad.

$$(1+x)^1 + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^n$$

is no less than that of the polynomial $(1+x)^n$.

M959*. In some country some pairs of cities are joined by airlines. Prove that it is possible to shut down no more than the $1/(k-1)$ th part of the airlines so that among any set of k cities at least one pair is not joined by any airline, if

- a) $k=3$;
b) k is any natural number.

A. A. Razborov

M960*. If the difference between the cubes of two successive natural numbers is the square of some natural number n , then n can be presented as the sum of squares of two successive integers.

- a) Prove this statement.
b) Here is an example of such numbers: $8^3 - 7^3 = (2^2 + 3^2)^2$; find at least one other example.
c) Prove that there are infinitely many such examples.

R. Lyness (United Kingdom)

R968. Three interlocking cogwheels of radii r_1, r_2, r_3 rotate about three parallel axes joined by rigid rods (Fig. 2 p. 29). The axes B and C rotate around the fixed axis A with angular velocity ω , the size of triangle ABC remaining unchanged, while the cogwheel of radius r_3 moves parallel to itself. What is the angular velocity of the cogwheel of radius r_1 ?

V. Vangelov (Burgas, Bulgaria)

P969. Two punctured cans made from the same material have the same shape, all the linear measurements of one of them being k times less than that of the other (Fig. 3). The bottoms of the cans have holes. The cans are placed simultaneously on water. Which will sink faster? How much faster?

I. K. Sobolev

P970. A thin-walled spherical shell contains a ball whose radius is several times less than that of the shell. Find a method for determining the density of the material from which the ball is made. The mass of the shell is unknown.

S. A. Khorozov

P971. A metal rod rotates about a vertical axis in a magnetic field with vertical induction B as shown on Figure 4. The angular velocity is ω , R and a are given. Find the difference of potential at the extremities of the rod.

L. G. Markovich

P972. In a high-speed movie camera used for filming rapidly evolving processes, the film moves continuously with velocity v . In order to avoid blurring, a quadrangular glass prism with refraction coefficient n is placed between the film and the lens; the prism rotates with constant angular velocity (Fig. 5). Neglecting the defocussing effect, determine the angular velocity for which the image will not blur. Determine the prism's thickness if the exposure of one square takes place within the limits $(-\alpha_0, \alpha_0)$ of the prism's rotation angle and the minimal size of distinguishable details is δ .

A. A. Lapides

Решения задач

M936 — M940; Ф948 — Ф952

M936. Докажите, что за $3n+1$ взвешиваний на чашечных весах без гирь можно выделить самый легкий и самый тяжелый из $2n+1$ камней, если а) $n=3$; б) n — любое натуральное число.

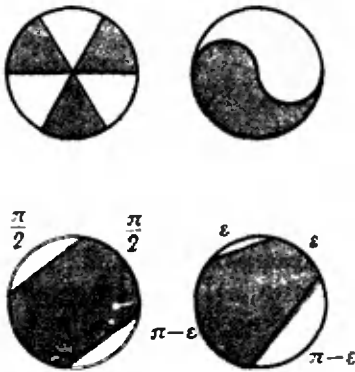
Приведем решение сразу для $2n+2$ камней. Разобьем камни произвольно на пары. За $n+1$ взвешиваний мы найдем в каждой паре более легкий и более тяжелый камень. Ясно, что самый тяжелый из всех $2n+2$ камней находится среди $n+1$ более тяжелых (назовем их «группой Т», остальные — «группой Л»). Поэтому мы можем найти самый тяжелый камень не более чем за n взвешиваний: начав с произвольной пары камней из группы Т,

мы отбрасываем более легкий и сравниваем более тяжелый с новым камнем из группы T ; после отбрасывания n камней останется нужный — самый тяжелый. Аналогично за n взвешиваний из группы J выделяется самый легкий камень.

Можно предложить и много других правильных алгоритмов, позволяющих выбрать самый тяжелый и самый легкий камень из $2l + 2$ за $3l + 1$ взвешиваний. Оставляем читателям более трудную задачу: выяснить, за какое наименьшее число взвешиваний можно выбрать самый тяжелый и самый легкий из N камней. (Похожая задача: за сколько попарных сравнений можно выбрать $k = 2, 3, \dots$ самых тяжелых из N камней — обсуждается в статье «Кто поедет в Рио» Г. Адельсона-Вельского, И. Бернштейна и М. Гервера («Квант», 1972, № 8, с. 2), а также в ряде книг о сортировке и поиске — например, в т. 3 книги Д. Кнута «Искусство программирования» (М.: «Мир», 1978).)

С. В. Фомин,
Н. Б. Васильев

М937. Существует ли такая фигура F , что ею нельзя накрыть полукруг радиуса 1, а двумя ее экземплярами можно накрыть круг радиуса 1, если F — а) произвольная фигура; б) выпуклая фигура?



◆ Ответ на оба вопроса а) и б) положительный. Примеры представлены на рисунке. Для ответа на вопрос а), кроме разнообразных вариантов фигуры в виде «пропеллера» или древнекитайского символа «Янь и инь», годится и такой вырожденный пример: из круга радиуса 1 с центром O выкалываются три точки — вершины равностороннего треугольника с центром O . Для ответа на вопрос б) подходит такая фигура: окружность радиуса 1 с центром O разбивается на четыре дуги величиной $\epsilon, \epsilon, \pi - \epsilon, \pi - \epsilon$ и строится «выпуклая оболочка» двух несмежных дуг. (Левый нижний рисунок соответствует $\epsilon = \pi/2$.) Заметим, что при малом ϵ построенная фигура имеет площадь, сколь угодно близкую к площади полукруга.

Доказательство, что построенная фигура не покрывает полукруг, во всех случаях опирается на такое соображение: концы диаметра полукруга находятся на расстоянии 2, следовательно, их могут закрыть лишь такие две точки построенной фигуры, которые являются диаметрально противоположными точками круга радиуса 1, из которого мы ее вырезаем; таким образом, наша фигура должна была бы содержать целый полукруг с центром O радиуса 1.

Тот факт, что двумя экземплярами фигуры можно покрыть круг, очевиден (во всех примерах достаточно повернуть фигуру относительно центра круга на некоторый угол или отразить от некоторой прямой, проходящей через центр).

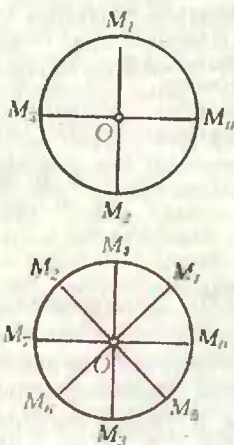
Н. Б. Васильев

М938. Радиус круга с центром O равномерно вращается, поворачиваясь за одну секунду на угол $360^\circ/n$ (где n — натуральное число, большее 3). В начальный момент он занимает положение OM_0 , через секунду — положение OM_1 , еще через 2 секунды — поло-

◆ Докажем, что радиусы $OM_0, OM_1, \dots, OM_{n-1}$ делят круг на n равных секторов в том и только в том случае, когда $n = 2^k$ (k — натуральное число; на рисунках изображены случаи $k = 2$ и $k = 3$).

Поскольку все точки $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ попадают в вершины правильного n -угольника с центром O , для того, чтобы n радиусов $OM_0, OM_1, \dots, OM_{n-1}$ делили круг на равные секторы, необхо-

жение OM_2 , еще через 3 секунды после этого — положение OM_3 и т. д., еще через $n-1$ секунд — положение OM_{n-1} .
 а) Докажите, что если n — степень 2, то радиусы OM_1, \dots, OM_{n-1} делят круг на n равных секторов.
 б) Возможно ли это при других значениях n ?



димом и достаточно, чтобы никакие два из этих радиусов OM_i и OM_j не совпали, то есть суммарный угол φ_{ij} от OM_i до OM_j (отсчитываемый при вращении радиуса) не был кратен $360^\circ = 2\pi$, где $\alpha = 360^\circ/n$.

Угол от OM_0 до OM_j равен $\alpha(1+2+\dots+j) = \alpha j(j+1)/2$, поэтому угол φ_{ij} от OM_i до OM_j , где $0 \leq i < j \leq n-1$, равен

$$\varphi_{ij} = \alpha \frac{j(j-1)}{2} - \alpha \frac{i(i-1)}{2} = \alpha \frac{(j-i)(j+i-1)}{2},$$

то есть радиусы M_i и M_j совпадают, если и только если $\varphi_{ij}/\pi\alpha = (j-i)(j+i-1)/2n$ — целое число.

Докажем отдельно а) достаточность и б) необходимость условия $n=2^k$ для того, чтобы $(j-i)(j+i-1)$ не делилось на $2n$ ни при каких $0 \leq i < j \leq n-1$.

а) Если $n=2^k$, то, поскольку $j-i$ и $j+i-1$ — числа разной четности, $j-i < n=2^k$ и $j+i-1 < 2^{k+1}$, произведение $(j-i)(j+i-1)$ не делится на $2^{k+1} = 2n$.

б) Пусть n — не степень двойки: $n=2^{m-1}(2q+1)$, где m и q — натуральные числа. Предъявим i и j , при которых $(j-i)(j+i-1)$ делится на $2n = 2^m(2q+1)$. Если $2^{m-1} > q$, полагаем

$$\begin{cases} i+j+1=2^m, \\ j-i=2q+1, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} j=2^{m-1}+q < n, \\ i=2^{m-1}-q-1 \geq 0. \end{cases}$$

Если $2^{m-1} \leq q$, полагаем

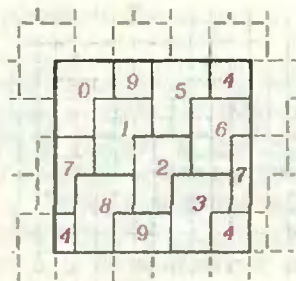
$$\begin{cases} i+j+1=2q+1, \\ j-i=2^m, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} j=q+2^{m-1} < n, \\ i=q-2^{m-1} \geq 0. \end{cases}$$

В. В. Произволов

М939. В клетки таблицы 10×10 записывают каким-либо образом цифры 0, 1, ..., 9 так, чтобы каждая цифра встречалась 10 раз.

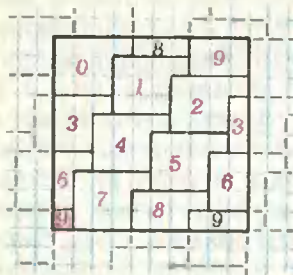
а) Можно ли это сделать так, чтобы в каждой строке и каждом столбце встречалось не более 4 различных цифр?

б)* Докажите, что найдется строка или столбец, в котором встречается не менее 4 различных цифр.



♦ Ответ на вопрос а) положительный. Два примера изображены на рисунках: соответствующие разбиения квадрата 10×10 на 10 частей по 10 клеток в каждой, занумерованных цифрами 0, 1, 2, ..., 9, удовлетворяют условию задачи а). Эти примеры интересны тем, что если мысленно склеить верхнюю сторону квадрата с нижней, а левую — с правой, то все 10 областей, занятых цифрами 0, 1, ..., 9, окажутся одинаковыми — они получаются друг из друга параллельными переносами (на рисунке кусочки областей, примыкающие снаружи к границе исходного квадрата 10×10 , показаны пунктиром).

б) Пусть цифра k ($k=0, 1, 2, \dots, 8$ или 9) встречается в q_k столбцах и r_k строках. Если предположить, что в каждом столбце встречается не более 3 разных цифр, то число разных пар (цифра k ; номер столбца, где встречается k) будет не более 30, поэтому $q_0 + q_1 + \dots + q_9 \leq 30$. Аналогично, если в каждой строке не более 3 разных цифр, то $r_0 + r_1 + \dots + r_9 \leq 30$. С другой стороны, поскольку каждая цифра стоит в 10 клетках, то $q_k r_k \geq 10$ и поэтому $q_k + r_k \geq 2\sqrt{q_k r_k} > 6$, так что $(q_0 + r_0) + \dots + (q_9 + r_9) \geq 7 \cdot 10 = 70$. Полученное противоречие показывает, что в некотором столбце или в некоторой строке должно быть не менее 4 разных цифр. Аналогично можно доказать, что если клет-



М940*. а) Квадрат разбит на прямоугольники. Назовем «цепочкой» такое множество этих прямоугольников, что их проекции на одну из сторон квадрата целиком покрывают эту сторону без перекрытий. Докажите, что любые два прямоугольника входят в некоторую цепочку.

б) Докажите аналогичное утверждение для куба, разбитого на прямоугольные параллелепипеды (в определении цепочки сторону квадрата можно заменить на ребро куба).

в) Верно ли, что любые два параллелепипеда в разбиении куба принадлежат одному «слою» — множеству параллелепипедов, проекции которых на некоторую грань заполняют ее целиком, не надевая друг на друга?

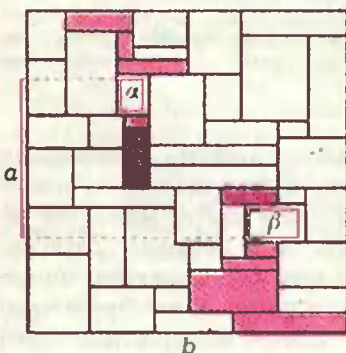


Рис. 1.

ки таблицы $N \times N$ раскрашены в N цветов так, что клеток каждого цвета ровно N , и $N > (n-1)^2$, то найдется строка или столбец, в котором есть клетки n разных цветов (в нашей задаче было $N=10$, $n=4$).

Предлагаем читателям доказать, что эта оценка точная, и подумать над возможными обобщениями этой задачи (например, для прямоугольных таблиц, на трехмерный случай).

Н. Н. Константинов,
Л. Д. Курайдчик

◆ Будем называть прямоугольники (в пункте б) — параллелепипеды), на которые разбит квадрат (куб), «кирпичами», а сам квадрат (соответственно, куб) — «домом». Удобно считать, что «дом» — произвольный прямоугольник (прямоугольный параллелепипед).

Оба утверждения а) и б) можно доказывать примерно одинаково — индукцией по числу n кирпичей, составляющих дом. Мы подробно изложим доказательство а), а затем укажем дополнительные соображения, которые нужны в пункте б).

Для $n \leq 2$ кирпичей утверждение очевидно. Предположим, что для числа кирпичей, меньшего n , оно доказано. Пусть α и β — два из n кирпичей, составляющих дом, которые мы хотим соединить цепочкой. Будем говорить, что цепочка идет «вдоль стороны a », если проекция составляющих ее кирпичей на a покрывают a в один слой. Заметим, что достаточно построить часть цепочки между α и β , идущей вдоль a (указать кирпичи, проекции которых на a заполняют в один слой отрезок между проекциями кирпичей α и β), — после этого ее легко дополнить до целой цепочки: для этого достаточно дойти от α и β по направлению a до перпендикулярных к a сторон и включить в цепочку встретившиеся при этом кирпичи (рис. 1).

Случай, когда кирпичи α и β можно пересечь одной прямой, параллельной стороне дома, очевиден: все кирпичи, пересекаемые такой прямой, образуют нужную цепочку. Поэтому можно считать, что для каждой стороны дома найдется прямая, разделяющая кирпичи α и β . В этом случае найдется вершина кирпича α , ближайшая к β , — обозначим ее A . Среди примыкающих к ней кирпичей найдется, кроме α , еще по крайней мере один кирпич γ , для которого A служит вершиной и который примыкает к α по стороне. Он отделен от α некоторой прямой l (идущей по сторонам α и γ , рис. 2).

Разрезав дом вместе с кирпичами этой прямой l , мы получим содержащий кирпичи γ и β , но меньший исходного (по числу кирпичей) дом. В нем, по предположению индукции, можно соединить γ и β цепочкой; нас интересует ее часть $\gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta, \beta$ от γ до β . Если она идет вдоль направления l , то можно заменить в ней γ на α , и нужная нам часть цепочки от α до β готова: $\alpha, \delta_1,$

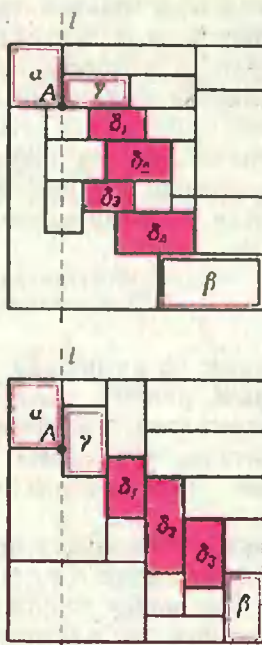


Рис. 2.

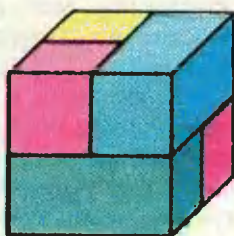


Рис. 3.

$\delta_2, \dots, \delta, \beta$ (мы пользуемся здесь тем, что A — ближайшая к β вершина α , рис. 2, а). Если же цепочка $\gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta, \beta$ идет в перпендикулярном l направлении, то к ней можно просто добавить α (рис. 2, б).

Перейдем к решению б). Здесь случай, когда кирпичи α и β можно пересечь плоскостью, параллельной грани дома, сводится к пункту а). Остается случай, когда α и β разделены тремя плоскостями, параллельными разным граням дома. Через ближайшую к β вершину A кирпича α проходят три плоскости его граней. Они делят пространство на 8 октантов, и каждый из примыкающих к A кирпичей занимает один, два или четыре из них (в окрестности A). Поскольку число $8-1=7$ нечетно, среди них найдется, кроме α , еще один кирпич γ , для которого A служит вершиной (занимающий один октант) и который отделен от α некоторой плоскостью p .

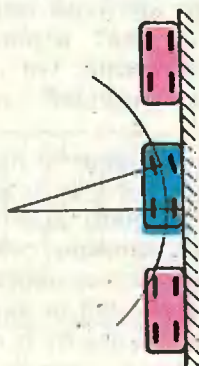
Дальше рассуждение проводится так же, как в пункте а): плоскость отсекает меньший дом, содержащий γ и β ; остается рассмотреть два случая — когда существующая по предположению индукции цепочка от γ до β идет в направлении, параллельном плоскости p или перпендикулярном ей.

в) Это утверждение, вообще говоря, неверно. Простой пример — куб $2 \times 2 \times 2$, составленный из двух кубиков $1 \times 1 \times 1$, примыкающих к противоположным вершинам куба, и трех параллелепипедов $2 \times 1 \times 1$ (рис. 3). Легко видеть, что кубики здесь не принадлежат одному слою.

Аналогичный пример дома $3 \times 3 \times 3$ из трех кубиков $1 \times 1 \times 1$, расположенных по диагонали, и шести кирпичей $2 \times 2 \times 1$ легко представить себе владельцы «кубика Рубика».

Н. Б. Васильев,
А. И. Гольберг

Ф948. Известно, что в небольшой «просвет» между машинами, стоящими у тротуара, рекомендуется заезжать задним ходом, а не передним. Почему?



Пусть машина заехала в небольшой просвет между двумя стоящими у тротуара машинами (см. рисунок). Поставим вопрос так: как легче машине теперь выехать — передним или задним ходом?

При повороте руля сразу поворачиваются передние колеса, а задние сначала сохраняют прежнюю ориентацию; так что при любом маневрировании машины центр окружности, по которой она в данный момент движется (вперед или назад), всегда лежит на прямой, проходящей через центр задних колес.

На рисунке показана траектория, по которой машина может выехать из просвета. Видно, что при выезде задним ходом она скорее заденет соседнюю машину, чем при выезде передним ходом.

Легко понять, что выезд машины — это обращенный во времени въезд. Следовательно, заезжать в небольшой просвет между машинами следует задним ходом.

С. С. Кротов,
Г. Я. Макишев

Ф949. Одинаковы ли показания термометров, один из которых помещен у поверхности кипящей жидкости, а другой — в ее глубине?

Чтобы образовавшийся в жидкости при кипении пузырек, наполненный насыщенным паром, не схлопнулся, давление внутри пузырька должно быть равно внешнему давлению, то есть давлению окружающей жидкости. Если пузырек находится в глубине жидкости и высота столба жидкости над ним равна h , то внешнее давление равно

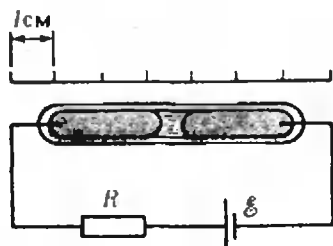
$$p = p_0 + \rho gh,$$

где p_0 — давление над поверхностью жидкости. Следовательно, чем глубже находится пузырек, тем большим должно быть давление p_n насыщенного пара в пузырьке, чтобы он не схлопывался. Но большему значению давления p_n соответствует более высокая температура. Значит, существование пузырьков в глубине кипящей жидкости возможно при более высокой температуре, чем вблизи поверхности.

Оценим, насколько отличается температура T_h на глубине $h = 0,5$ м от температуры T_0 на поверхности кипящей воды. Дополнительное давление на этой глубине $\Delta p = \rho gh \approx 5 \cdot 10^3$ Па. Считая, что над поверхностью воды давление равно нормальному атмосферному, то есть $p_0 = 1,033 \cdot 10^5$ Па, из таблицы зависимости давления насыщенного пара от температуры находим, на сколько температура водяного пара должна быть выше 100°C , чтобы давление его было больше p_0 на $5 \cdot 10^3$ Па: $\Delta T \approx 1^\circ\text{C}$.

Т. С. Петрова

Ф950. В запаянной капиллярной трубке находятся два столбика ртути, разделенные капелькой водного раствора электролита HgI_2 . Внутренний диаметр трубки $d = 0,3$ мм. Трубка подключена последовательно с резистором с сопротивлением $R = 390$ кОм к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В (см. рисунок). Через какое время капелька сместится на одно деление шкалы?



Протекание электрического тока в электролите связано с переносом массы. В данном случае на катоде происходит восстановление металлической ртути из раствора электролита, а на аноде — окисление ртути, то есть переход ее в раствор электролита. В соответствии с законом электролиза Фарадея масса ртути, которая выделится на катоде за время t , равна

$$m = \frac{1}{F} \frac{M}{n} It,$$

где $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль — число Фарадея, $M = 0,201$ кг/моль — молярная масса ртути, $n = 2$ — валентность ртути, I — протекающий ток. Этот ток практически определяется сопротивлением R , так как по сравнению с ним сопротивление металлической ртути и электролита и внутреннее сопротивление источника ничтожно малы. Поэтому $I = \mathcal{E}/R$, и

$$m = \frac{M\mathcal{E}}{FnR} t. \quad (1)$$

Выделение ртути на катоде и растворение ее на аноде приводит к смещению капельки электролита в сторону анода на расстояние l такое, что

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4} l, \quad (2)$$

где $\rho = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м³ — плотность ртути.

Из (1) и (2) находим время, за которое капелька электролита сместится на расстояние l :

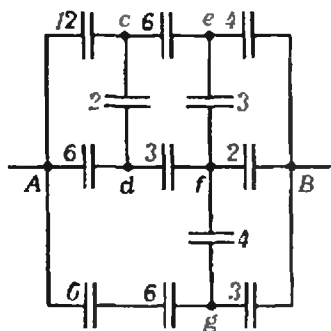
$$t = \frac{\pi d^2 F n_0 R l}{4 M \epsilon}.$$

Подставив значения, приведенные в условии, и $l = 1$ см, получим $t = 100$ ч.

Подобные ртутные часы нашли применение в электронной технике в качестве малогабаритных времязадающих устройств, счетчиков времени наработки. Их используют также для измерения заряда — построения кулонметров.

Е. Н. Юносов,
И. В. Яминский

◆
Ф951. Определить емкость системы конденсаторов, приведенной на рисунке. У каждого конденсатора указано значение его емкости, измеренной в микрофарадах.



Представить исходную схему как систему параллельно и последовательно соединенных конденсаторов не удастся. В таких случаях необходимо, как говорят, упростить схему. Напомним, что под этим подразумевают.

Обычно, исходя из соображений геометрической или физической симметрии, какие-то узлы схемы разъединяют или, наоборот, соединяют, какие-то конденсаторы удаляют и т. п., добиваясь того, чтобы новая схема из последовательно и параллельно соединенных конденсаторов была эквивалентна исходной, то есть чтобы при подаче на исходную и преобразованную схемы одинаковых напряжений схемы заряжались одинаково, — в этом случае емкости схем одинаковы, и рассчитывают емкость именно преобразованной схемы.

В основе применения описанного выше метода лежит теорема единственности, суть которой в нашем случае сводится к следующему. Если на схему подать некоторое напряжение, то напряжения (и, соответственно, заряды) на всех конденсаторах примут единственно возможные значения. Приведем не очень строгое доказательство этой теоремы методом от противного.

Предположим, что существуют две возможности зарядам «рассеяться» на конденсаторах схемы при подаче на нее напряжения U_0 . Это означает, что по крайней мере на одном из конденсаторов, например, с емкостью C_0 , заряды в первом и во втором случаях будут разные. Подадим на схему включенные навстречу источники напряжения U_0 и $-U_0$ (то есть суммарное напряжение, поданное на схему, равно нулю). Вследствие принципа суперпозиции схема независимым образом «отреагирует» на напряжения U_0 и $-U_0$; в первом случае на конденсаторе C_0 окажется заряд q_0 , а в ответ на напряжение $-U_0$ конденсатор зарядится зарядом q'_0 с противоположной полярностью, причем $|q_0 + q'_0| \neq 0$. Таким образом, на схему было подано нулевое напряжение, работа внешних источников была равна нулю, а на конденсаторе C_0 оказался запас электрической энергии $\frac{(q_0 + q'_0)^2}{2} \neq 0$. Противоречие.

Обратимся теперь к нашей схеме. Пропорциональность значений емкостей горизонтальных участков схемы наталкивает на следующую стратегию — упрощение схемы путем удаления конденсаторов между парами точек: c и d , e и f , f и g . Действительно, если удалить конденсаторы и подать на упрощенную схему некоторое напряжение, то потенциалы соответствующих точек будут одинаковыми: $\varphi_c = \varphi_d$, $\varphi_e = \varphi_f = \varphi_g$ (покажите это самостоятельно!). Вернем на место удаленные конденсаторы. Перераспределения зарядов на других конденсаторах схемы вследствие теоремы единственности не произойдет. Поэтому емкости исходной и преобразованной схем будут одинаковы.

Емкость преобразованной схемы равна

$$C_{AB} = 1 : \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) + 1 : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + 1 : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2} \text{ мкФ.}$$

А. И. Буздин.
С. С. Кротов

◆
Ф952. Наблюдатель рассматривает удаленный предмет и фотографию этого предмета, сделанную из той точки, в которой находится наблюдатель. Что ему кажется большим — предмет или его фотографическое изображение? Во сколько раз? Фотография была сделана аппаратом, объектив которого имеет фокусное расстояние $F = 3$ см; при печати снимка было сделано увеличение $k = 2.5$.

◆
Размер изображения предмета на сетчатке глаза прямо пропорционален $\text{tg } \varphi$, где φ — угол зрения для данного предмета. Поэтому видимое увеличение при рассматривании предмета на фотографии равно

$$\Gamma = \frac{\text{tg } \varphi_1}{\text{tg } \varphi},$$

где φ_1 — угол зрения, под которым виден предмет на фотографии, φ — угол зрения при непосредственном рассматривании предмета. Если l — размер предмета на снимке, а D — расстояние, с которого рассматривается снимок, то $\text{tg } \varphi_1 = l/D$. Найдем l .

При фотографировании удаленных предметов резкое изображение получается в фокальной плоскости. Поэтому расстояние от объектива до фотопленки в этом случае должно быть равно фокусному расстоянию F . Размер изображения на фотопленке равен $l_1 = F \text{ tg } \varphi$. После печатания размер изображения на фотографии станет равным $l = k l_1 = k F \text{ tg } \varphi$.

Таким образом,

$$\Gamma = \frac{kF}{D}.$$

При нормальном зрении D не меньше 25 см. Подставив для оценки $D = 25$ см, получим $\Gamma = 0,3$ — при рассматривании фотографии предмет кажется примерно в 3 раза меньшим, чем при непосредственном наблюдении.

Б. С. Рыбин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач M911—M925; Ф923—Ф937, справились с задачами M911, M912, M914, M916, M917, M918, Ф924, Ф930, Ф933 и Ф934. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Р. Агаширипов (с. Хурай Аз. ССР) 13; *А. Аксенов* (Великие Луки) 13, 15; *М. Александров* (Москва) 15, 19, 20, 22, 23; *Р. Алексеев* (Магнитогорск) 13, 15; *А. Алшев* (с. Караякая Аз. ССР) 19; *М. Альт* (Одесса) 13, 19—21; *А. Арутюнян* (с. Верения Гр. ССР) 13, 15, 20; *С. Аршава* (Северодонецк) 13; *А. Асташкевич* (Томск) 13, 15, 22-25; *Е. Баланова* (Рига) 19; *А. Барабанов* (Киев) 13; *А. Баран* (Киев) 23; *Н. Безденежных* (Нижний Тагил) 13, 15; *Р. Безрукавников* (Калуга) 20; *А. Белопольский* (Киев) 19, 22, 23; *А. Бендерский* (п. Черноголовка Московской обл.) 22; *В. Берездивин* (Донецк) 13, 15; *И. Биндер* (Ленинград) 19, 24, 25; *Е. Богомол* (Алма-Ата) 15; *М. Бойко* (Киев) 19; *В. Быков* (Киев) 20; *И. Вайнштейн* (Калинин) 15, 19, 20; *Р. Валиев* (Фрунзе) 13; *Я. Варшавский* (Харьков) 13, 15, 19, 20, 23, 24; *В. Васильев* (Воткинск) 19; *Т. Васильева* (Ленинград) 12, 13, 15; *М. Векслер* (Ленинград) 24; *И. Верный* (Киев) 19; *Р. Видгон* (Баку) 13; *С. Волков* (Нижний Тагил) 19; *В. Ворошило* (Львов) 13; *Г. Габибзаде* (с. Ленинкэнд Аз. ССР) 15; *Т. Газарян* (Ереван) 13, 15, 19, 20; *Д. Гамарник* (Тбилиси) 13, 15, 19, 20; *А. Гамаюнов* (Полтава) 13; *Т. Гамбарян* (Баку) 13; *Г. Гевондян* (с. Меликюх Арм. ССР) 13, 15; *О. Гекдельман* (Харьков) 13, 19; *Р. Гендлер* (Ташкент) 13, 19, 21—23, 25; *О. Геупель* (Дрезден, ГДР) 21; *М. Годин* (Ленинград) 19; *В. Годлевский* (Киев) 13, 19; *Р. Гой* (Львов) 23; *Г. Горбатенко* (Арзамас) 13, 22; *А. Гороховский* (Киев) 13, 19, 21—23; *Ю. Грабооский* (Киев) 13; *Д. Гребнева* (Алма-Ата) 15; *Н. Григорьева* (Андропов) 13, 20, 22, 23, 25; *А. Григорян* (Ереван) 13, 15, 20; *А. Давтян* (Ереван) 13, 15, 20; *Ю. Дейкало* (Киев) 19; *А. Дементьев* (Нальчик) 19; *М. Добрицын* (Москва) 13, 15, 19—25; *А. Донченко* (Киев) 13; *В. Душацкий* (Киев) 19; *А. Дынников* (Жуковский) 13, 15, 19, 20, 22—24; *И. Дынников* (Жуковский) 13, 15, 19—25; *В. Жданов* (Москва) 19; *В. Журивлев* (Гайворон) 13, 15, 20, 21; *П. Задорожный* (Киев) 13; *Р. Зайнуллин* (Белорецк) 19; *Д. Зайцев* (Киев) 13, 19, 22, 23; *А. Запольский* (Москва) 23; *А. Захаров* (Гатчина) 19; *Н. Захарова* (Алма-Ата) 15; *К. Зварич* (Хмельницкий) 19; *А. Иванов* (Первомайск Николаевской обл.) 13, 15, 19, 20, 22—24; *С. Иванов* (Севастополь) 19; *М. Игнатьев* (Саратов) 13, 19, 22; *С. Исмаилов* (Баку) 19, 23; *А. Кадач* (Усть-Каменогорск) 19; *А. Калыбаева* (Алма-Ата) 15; *В. и И. Капович* (Хабаровск) 13, 15, 19, 20; *А. Каринский* (Невинномысск) 15; *А. Карнаухов* (Устинов) 13; *О. Кирнасовский* (Винница) 13, 19; *А. Киселев* (Ленинград) 12, 13, 19, 20, 22; *И. Кича* (Киев) 19; *П. Кларк* (Тула) 19; *Д. Клионский* (Ленинград) 19; *А. Колинский* (Гайворон) 13, 15, 20, 21; *И. Козуля* (Жуковский) 13, 19; *Ю. Конд-*

ратенко (Киев) 19; *А. Кононенко* (Киев) 19—21, 23; *Н. Маньч*, *Э. Корчали* (Баку) 13; *А. Красота* (Киев) 19; *Б. Круглик* (Харьков) 13, 19, 21; *Н. Крылов* (Ленинград) 13, 19; *О. Крылов* (п. Эльдикан ЯАССР) 15, 24; *М. Кукс* (Львов) 13, 19; *А. Кулиев* (Баку) 13; *М. Куринной* (Харьков) 13, 15, 19, 21—24; *М. Курнев* (п. Грибановский Воронежской обл.) 13; *Е. Курская* (Алма-Ата) 15; *С. Кутайцев* (Конаково) 19; *А. Кухарский* (Киев) 13, 19, 20; *А. Кучеравый* (Запорожье) 19; *Н. Кушлевич* (Москва) 13, 15, 19, 20, 22, 24; *С. Кярис* (Молейтай) 13, 15, 19; *С. Лакатош* (Москва) 19; *И. Ларцев* (Донецк) 13, 15, 19; *Л. Леняшин* (Ленинград) 13, 15, 19; *О. Лимешко* (Куйбышев) 13, 19, 23; *Л. Лиознов* (Москва) 19; *А. Литвак* (Ленинград) 13, 19; *М. Литвинов* (Киев) 13, 15, 21, 23; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 13; *М. Макаров* (Севастополь) 20; *Н. Манычкин* (Москва) 19; *Ю. Махлин* (Москва) 19; *Мачарадзе* (Тбилиси) 13; *Н. Мельник* (Гайсин) 19; *В. Меньков* (Мончегорск) 13, 15; *Б. Меркулов* (Куйбышев) 13, 15; *В. Мехрабов* (Баку) 13, 15; *И. Мехрабов* (Баку) 13, 15; *З. Мехтиев* (с. Челикар ДАССР) 13; *А. Минасян* (Ереван) 15; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 19; *Г. Михалкин* (Ленинград) 13, 19, 22, 23; *Е. Мокшин* (Магнитогорск) 15; *М. Мунькин* (Алма-Ата) 15; *Д. Муралашвили* (Тбилиси) 13, 15, 19, 20; *С. Мушинский* (Новосибирск) 19; *А. Нагорный* (Слуцк) 15; *С. Настенко* (Киев) 13; *О. Никифорин* (Ивано-Франковск) 25; *О. Ниц* (Одесса) 13, 19, 21; *А. Новичков* (Жуковский) 13, 15, 18—20, 23; *О. Овецкая* (Донецк) 13, 15, 19; *Е. Орынбасаров* (Алма-Ата) 15; *А. Осолодкин* (Петрозаводск) 13; *В. Парьев* (п. Красногвардейское Белгородской обл.) 19; *Д. Пастур* (Харьков) 13, 15, 19, 20; *О. Пашко* (Ангарск) 19; *И. Пачин* (Алма-Ата) 15; *Я. Печатников* (Ленинград) 13, 15, 19; *М. Пивень* (Коростень) 13; *С. Пиунихин* (Москва) 13, 19; *В. Плотников* (Курск) 19; *С. Полинов* (Магнитогорск) 13, 15; *М. Померанцев* (Черкасы) 13, 19—21, 23; *В. Попеня* (Алма-Ата) 15; *И. Портной* (Одесса) 21, 23; *А. Пришляк* (Киев) 13, 19, 23, 25; *А. Радаев* (Алма-Ата) 15; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 13, 15, 19—23, 25; *Е. Растигеев* (Барнаул) 19, 22, 23; *В. Ратнюк* (Евпатория) 13, 18, 19; *М. Рзаев* (Баку) 13; *М. Ровинский* (Москва) 19; *А. Розанов* (Киев) 19; *Д. Розман* (Севастополь) 13; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) 13, 19; *К. Ромец* (Киев) 19; *С. Рубан* (Днепропетровск) 15, 19; *А. Рывчин* (Киев) 19; *М. Рябов* (Первомайск Горьковской обл.) 19; *Д. Садыгов* (с. Гаравелли Аз. ССР) 19; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 23; *И. Самовол* (Гайворон) 15, 20, 21, 23; *Б. Самойлов* (Киев) 19; *М. Сапожников* (Ленинград) 13; *Ю. Свирид* (Минск) 19; *Р. Сефибеков* (с. Кашкент ДАССР) 13; *С. Сефибеков* (с. Кашкент ДАССР) 13, 15; *Р. Сибилев* (Ленинград) 13, 19, 22; *И. Симоненко* (Великие Луки) 13, 15, 19, 21—24; *А. Смирнов* (Алма-Ата) 23; *М. Соколова* (Ленинград) 13, 15; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 13, 15, 19, 21, 22; *В. Судакос* (Тбилиси) 13, 15, 19, 23; *Р. Сулейманов* (Алма-Ата) 15; *Д. Тамаркин* (Горький) 13, 15, 20, 22, 24, 25; *Б. Тё* (Алма-Ата) 15; *К. Тищенко* (Минск) 13; *Ю. Томилов* (Винница) 13; *Г. Топровер* (Волгоград) 19; *Д. Туляков* (Жданов) 15, 19, 20, 22; *Ю. Тышко* (Ленинград)

(Продолжение см. на с. 51)

Решение задачи о сфере, касающейся боковых ребер пирамиды

Решение задачи с 4-й страницы обложки прошлого номера «Кванта» мы начнем с обоснования двух свойств рассматриваемой конфигурации:

1) центр Z сферы лежит на высоте пирамиды;

2) любая плоскость α , проходящая через вершину S и касающаяся сферы, пересекает плоскость прямоугольника $ABCD$ по касательной l к описанной около него окружности.

Очевидно, что боковые ребра пирамиды равны между собой. Поскольку и расстояния от вершины пирамиды до точек A', B', C', D' касания боковых ребер со сферой также равны между собой, четырехугольник $A'B'C'D'$ гомотетичен $ABCD$ (см. чертеж на обложке) с центром S и коэффициентом гомотетии $|SA'| : |SA|$. Прямая l при этой гомотетии перейдет в прямую l' пересечения плоскостей α и $A'B'C'$, а описанная окружность прямоугольника $ABCD$ — в описанную окружность прямоугольника $A'B'C'D'$, то есть в окружность ω , по которой плоскость $A'B'C'$ пересекается со сферой. Таким образом, достаточно доказать, что прямая SZ перпендикулярна плоскости $A'B'C'$ ($(A'B'C') \parallel (ABC)$) и что прямая l' касается окружности ω . Для доказательства заметим, что точки A', B', C', D' , а также точка K' касания плоскости α с данной сферой лежат на одинаковом расстоянии от S , то есть на другой сфере — с центром S и радиусом $|SA|$. Но пересечение этих двух сфер есть окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной их линии центров. Ясно, что эта окружность и есть наша окружность ω . Следовательно, $(SZ) \perp (A'B'C')$. Кроме того, поскольку плоскость α имеет единственную общую точку с данной сферой — точку K' , прямая l' имеет единственную общую точку K' с окружностью ω , то есть касается ее, что и требовалось доказать. Подчеркнем, что рассуждения, подобные проведенным нами, доказывающие порой почти очевидные, но необходимые в решении факты, являются неотъемлемой частью решений большинства стереометрических задач на вычисление и часто вызывают более серьезные затруднения, чем сами вычисления. Поэтому мы

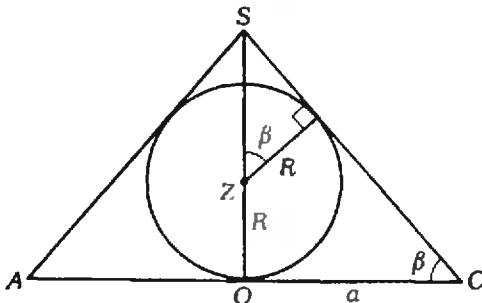


Рис. 1.

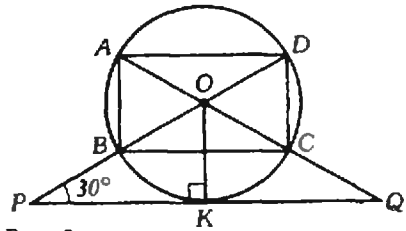


Рис. 2а.

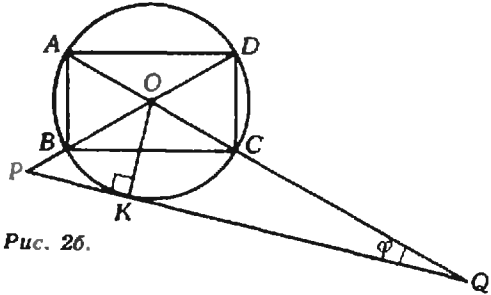


Рис. 2б.

уделили им здесь основное внимание, а вычисления приведем без подробностей.

Из утверждения 1) следует, что плоскость SAC пересекает сферу по окружности радиуса R , вписанной в $\triangle SAC$ (рис. 1). Положим

$$\widehat{SCA} = \beta, |SO| = h, |OC| = a,$$

тогда, поскольку угол между диагоналями прямоугольника $ABCD$ равен 60° ($|AC| = 2|AB|$), объем V пирамиды равен

$$V = \frac{2}{3} ha^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} h^3 \operatorname{ctg} \beta,$$

но $h = R + R/\cos \beta$ (см. рис. 1), а $\cos \beta = |OC| : |SC| = |DC| : |SC| = 2 \cos \alpha$. Подставляя эти выражения в формулу для объема и выполняя несложные преобразования, получим ответ к первой части задачи:

$$V = \frac{(1 + 2 \cos \alpha)^2 \cdot R^3}{2\sqrt{3} \cos \alpha (1 - 2 \cos \alpha)}.$$

Переходя ко второй части задачи, мы можем забыть о «стереометрическом происхождении» прямой $l = (PQ)$ (благодаря утверждению 2)) и проводить все рассуждения в плоскости ABC (рис. 2).

В случае а) треугольник POQ — равнобедренный с углом при основании 30° (рис. 2а), поэтому $|OP| = 2|OK| = 2|OB|$, а значит, ответ на вопрос а) —

$$|BP| : |BD| = 1 : 2.$$

В случае б) (рис. 2б) обозначим через φ угол OQP : тогда

$$\begin{aligned} \angle OPQ &= 60^\circ - \varphi, \sin \varphi = |OK| : |OQ| = \\ &= |OC| : (|OC| + 6|OC|) = 1/7, |OK| : |OP| = \\ &= \sin(60^\circ - \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi = \frac{11}{14}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем ответ на вопрос б):

$$\begin{aligned} \frac{|BP|}{|BD|} &= \frac{|OP| - |OB|}{2|OB|} = \frac{1}{2} \left(\frac{|OP|}{|OK|} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11} = \frac{3}{22}. \end{aligned}$$



IV. Как изготавливают транзисторы в интегральных схемах

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН,
кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН

В прошлых номерах журнала мы рассказали о принципах работы транзисторов. Сегодня речь пойдет о том, каким образом изготавливают современные транзисторы.

В технологии изготовления полевых и биполярных транзисторов так много общего, что достаточно рассмотреть ее на примере только биполярного транзистора, устройство которого несколько сложнее.

На рисунке 1 показана конструкция биполярного транзистора — элемента интегральной схемы (ИС), используемой в ЭВМ. Эта конструкция так сильно отличается от показанного на рисунке 2 схематического изображения транзистора, обсуждавшегося в предыдущей статье, что на первый взгляд трудно поверить, что это один и тот же прибор. Тем не менее, взглядевшись внимательно, нетрудно увидеть на рисунке 1 то же чередование $n-p-n$ -областей, что и на рисунке 2.

Конструкция, показанная на рисунке 1, называется планарной, то есть плоской (от английского слова *plane* — плоский): все операции по изготовлению такого транзистора производятся с одной стороны кремниевой (или арсенид-галлиевой) плоской пластины. Планарная технология при изготовлении интегральной схемы является единственно возможной. Во-первых, поскольку при изготовлении ИС на одной пластине размещаются десятки и сотни тысяч транзисторов размером в несколько микрон, точно совместить отдельные элементы каждого транзистора с двух сторон пластины было бы невозможно. Во-вторых, планарная технология позволяет использовать сравнительно толстые (толщиной сто и более микрон) пластины полупроводника. Такие пластины обладают достаточной механической прочностью и удобны в работе. При двусторонней технологии понадобились бы пластины толщиной в доли микрона. Работать с пластинами такой толщины практически нельзя.

Существует довольно много способов изготовления ИС. Одна из широко распространенных технологий, по которой создаются кремниевые БТ, в упрощенном виде показана на рисунке 3.

1. Поверхность кремниевой пластины окисляется. На ней образуется слой двуокиси кремния SiO_2 . Затем поверх окисла наносится тонкий слой светочувствительного полимера — фоторезиста. Фоторезист обладает способностью изменять свои химические свойства под действием света.

К покрытой фоторезистом полупроводниковой пластине прижимается стеклянная пластинка с нанесенным на ней рисунком, составленным из прозрачных и непрозрачных участков, — фотошаблон. После этого фоторезист освещается через фотошаблон, и те участки фоторезиста, на которые попадает свет, приобретают способность растворяться в определенных травителях. Эта операция называется фотолитографией. Она — одна из самых важных в процессе изготовления всех ИС.

Когда пластина с засвеченным фоторезистом погружается в травитель, происходит растворение участков фоторезиста, на которые попадал свет, а также находящийся под ними участков двуокиси кремния. На полупроводниковой пластине в этих местах открываются области чистой поверхности кремния — «окна». Затем в другом травителе, растворяющем незасвеченный фоторезист, но не растворяющем SiO_2 , удаляется оставшийся фоторезист. В результате поверхность пластины представляет собой сочетание «окон» с участками, защищенными слоем прочной, устойчивой к высокой температуре двуокиси кремния — «маской».

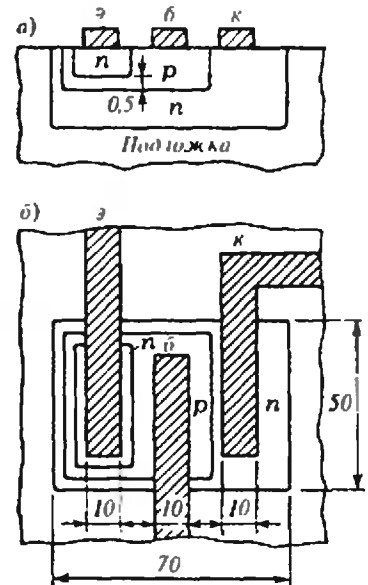


Рис. 1. Планарный биполярный транзистор — элемент ИС на БТ.

а) Транзистор в разрезе.

б) Вид на транзисторную структуру сверху.

Приведены типичные размеры транзистора в мкм; толщина на базе $W=0,5$ мкм.

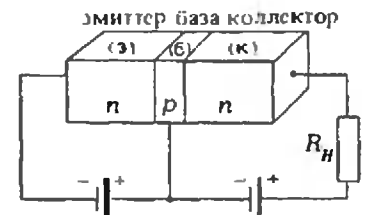


Рис. 2. Схематическое изображение биполярного транзистора.

Современные биполярные транзисторы

Верхний ряд — мощные транзисторы, выдерживающие напряжение между коллектором и базой ~ 1000 В и способные пропускать токи в десятки ампер.

Средний ряд — мощные транзисторы, предназначенные для усиления и генерации сверхвысокочастотных (СВЧ) колебаний. Современные СВЧ транзисторы способны работать на частотах до нескольких десятков гигагерц ($1 \text{ ГГц} = 10^9 \text{ Гц}$).

Нижний ряд — приборы в пластмассовых корпусах. Их появление привело к резкому удешевлению транзисторов. Подлинную революцию в развитии ЭВМ произвело появление интегральных схем (ИС). Внизу справа показана ИС в корпусе. Основа прибора — кремниевая пластина размером 2×3 мм (в центре). На такой пластине размещается до 10^6 БТ.

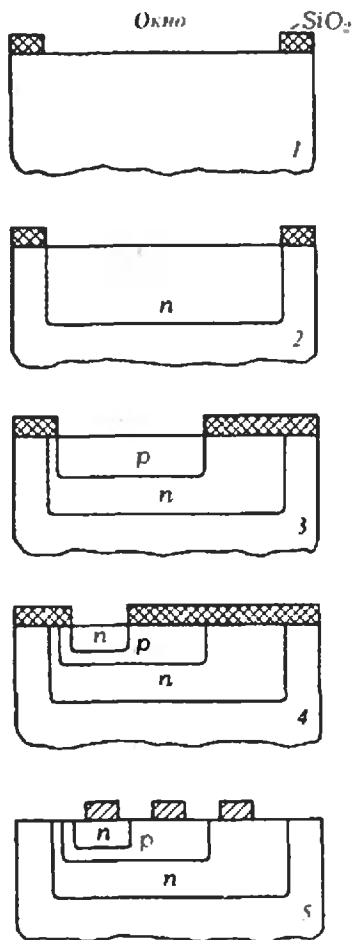


Рис. 3. Этапы изготовления биполярного транзистора.

2. Теперь в пластину при высокой температуре с помощью процесса диффузии вводят атомы мышьяка (As) или сурьмы (Sb), образующих в Si донорную примесь. Там, где поверхность пластины защищена маской SiO_2 , атомы примеси не достигают кремния. Таким образом, донорная примесь попадает в кремний только в окнах.

Так одновременно создаются коллекторные области проводимости n -типа всех БТ, входящих в ИС.

3. Маска SiO_2 удаляется путем химического травления и создается новая маска с окнами, соответствующими расположению базовых областей транзистора. Через эти окна проводится диффузия бора (В), являющегося акцептором. Концентрация акцепторов берется больше, чем концентрация доноров, так что те области полупроводника, куда попадает бор, будут областями p -типа. Происходит, как говорят, перекомпенсация. Акцепторная примесь (В) перекомпенсирует донорную.

4. Снова аналогичным методом создаются окна в SiO_2 -маске и диффузией донорной примеси формируются эмиттерные n -области. При этом также используется метод перекомпенсации имевшейся здесь акцепторной примеси.

5. На поверхности полученной $n-p-n$ -структуры формируются контакты из алюминия. Для этого пластина покрывается тонкой алюминиевой пленкой толщиной в несколько десятых долей микрона. Затем производится фотолитография с использованием фотошаблона, на котором контактные области и необходимые соединения сделаны непрозрачными. Далее участки засвеченного фоторезиста и находящейся под ним пленки алюминия растворяют в травителях. Полученные таким образом алюминиевые проводники служат элементами, осуществляющими необходимые электрические соединения в ИС.

В больших интегральных схемах (БИС) на каждой пластине расположены десятки тысяч одинаковых транзисторов. В сверхбольших интегральных схемах (СБИС) — сотни тысяч и даже миллионы. И все технологические операции при изготовлении всех транзисторов ИС производятся одновременно. Пластина целиком покрывается окислом. Затем сразу во всех тех местах, куда нужно ввести примесь, в окисле вскрываются окна (то есть сразу изготавливается, например, миллион коллекторов) и так далее. Именно благодаря этой интегрально-групповой технологии все транзисторы имеют одинаковые параметры, а вся ИС стоит лишь немного дороже одного транзистора.



Интерференция света

Кандидат физико-математических наук
Е. И. БУТИКОВ

Волновые свойства света наиболее отчетливо обнаруживают себя в явлениях интерференции и дифракции. Эти явления характерны для волн любой природы. Они сравнительно легко наблюдаются на опыте, например, для звуковых волн или волн на поверхности воды, но для наблюдения интерференции или дифракции света необходимо выполнение определенных условий. О них, в частности, и пойдет речь в этой статье.

Под интерференцией света понимают процесс наложения нескольких световых пучков, при котором результирующая интенсивность света*) в каждой точке не равна сумме интенсивностей отдельных пучков. В некоторых местах интенсивность оказывается больше суммарной, в других меньше, то есть образуются чередующиеся светлые и темные участки — возникает *интерференционная картина*.

Простейший пример интерференции дает наложение двух монохроматических волн одинаковой частоты и с одним и тем же направлением колебаний в складывающихся волнах. В результате в каждой точке происходят колебания с той же частотой и неизменной во времени амплитудой, зависящей, однако, от положения этой точки.

Пусть амплитуды складывающихся колебаний одинаковы, тогда для результирующего колебания $E(t)$ получим

$$\begin{aligned} E(t) &= E_1(t) + E_2(t) = \\ &= a \cos(\omega t + \varphi_1) + a \cos(\omega t + \varphi_2) = \\ &= 2a \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right), \quad (1) \end{aligned}$$

то есть амплитуда $A = 2a \left| \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right|$ зависит от разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ складывающихся колебаний и принимает значения от удвоенной амплитуды $2a$ каждой из волн (в точках, где колебания совпадают по фазе) до нуля (в точках, где колебания происходят в противофазе). Энергия колебаний, а следовательно, и интенсивность света I пропорциональна квадрату их амплитуды: $I \sim A^2$. Как видно из формулы (1), результирующая интенсивность I в зависимости от положения точки наблюдения принимает значения от нуля до учетверенной интенсивности отдельной волны $I_0 \sim a^2$:

$$\begin{aligned} I &= 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \\ &= 2I_0(1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (2) \end{aligned}$$

Множества точек пространства, которым соответствует одинаковая интенсивность (в частности, максимальная или минимальная), образуют поверхности, зависящие от свойств и расположения источников света.

Вопрос 1. Два одинаковых точечных источника расположены на некотором расстоянии друг от друга. Какой вид имеют в этом случае поверхности максимальной и минимальной интенсивности?

Разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ в данной точке зависит от разности хода l волн от синфазных источников: $l = l_1 - l_2$. Если разность хода равна целому числу длин волн: $l = k\lambda$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то волны приходят в точку наблюдения в фазе и при сложении дают колебания с максимальной амплитудой. Если же разность хода равна нечетному числу полуволн: $l = (2k + 1)\lambda/2$, то волны приходят в противофазе и «гасят» друг друга. Таким образом, поверхности максимумов и минимумов определяются условиями $l_1 - l_2 = \text{const}$.

В любой плоскости, содержащей источники, например в плоскости чертежа на рисунке 1, множество точек, разность расстояний до которых от двух заданных точек — в данном случае от источников S_1 и S_2 — одинакова, представляет собой гиперболу

*) Интенсивность света — это световой поток, переносимый пучком света через единичную площадку в направлении нормали к ней. Освещенность экрана и почернение фотопластинки, помещенных в пучок света, пропорциональны его интенсивности.

(S_1 и S_2 — ее фокусы). Из симметрии ясно, что в пространстве множество точек, удовлетворяющих условию $l_1 - l_2 = \text{const}$, соответствует поверхности вращения гиперболы вокруг прямой, проходящей через источники, — так называемый гиперboloид вращения. Форма интерференционных полос на каком-нибудь экране дается линиями пересечения таких гиперboloидов с плоскостью экрана.

Например, на экране A , перпендикулярном к проходящей через источники S_1 и S_2 прямой, интерференционные полосы имеют вид концентрических окружностей (см. рис. 1). На экране B полосы имеют форму гипербол. Когда расстояния от источников до экрана B много больше расстояния между источниками, в небольшой окрестности точки O интерференционные полосы практически можно считать параллельными прямыми, отличающимися на одинаковые расстояния друг от друга.

Задача 1. Найдите расстояние между соседними интерференционными максимумами на экране B , удаленном на $L=1$ м от источников S_1 и S_2 , если они находятся на расстоянии $d=0,5$ мм друг от друга (рис. 2). Длина волны света $\lambda=5 \cdot 10^{-7}$ м. По какому закону изменяется освещенность экрана при переходе от максимума к минимуму интерференционной картины?

Проведем в точку наблюдения P прямую SP из середины отрезка S_1S_2 и обозначим через θ угол, образуемый этой прямой с направлением SO на центр интерференционной картины. При малых θ разность хода $l = l_1 - l_2$ можно найти, опуская перпендикуляр из S_2 на прямую SP до пересечения с S_1P : $l = d \cdot \theta$. Полагая здесь l равным целому числу длин волн $k\lambda$, находим направление θ_k на максимум k -го порядка:

$$\theta_k = k \frac{\lambda}{d}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Угловое расстояние $\Delta\theta = \theta_{k+1} - \theta_k$ между соседними максимумами равно λ/d , а расстояние h между ними на экране B получим, умножая $\Delta\theta$ на L :

$$h = L\Delta\theta = \frac{\lambda L}{d} = 10^{-3} \text{ м} = 1 \text{ мм}.$$

Отсюда ясно, что расстояние L , а значит, и интерференционные полосы тем шире, чем ближе друг к другу расположены источники.

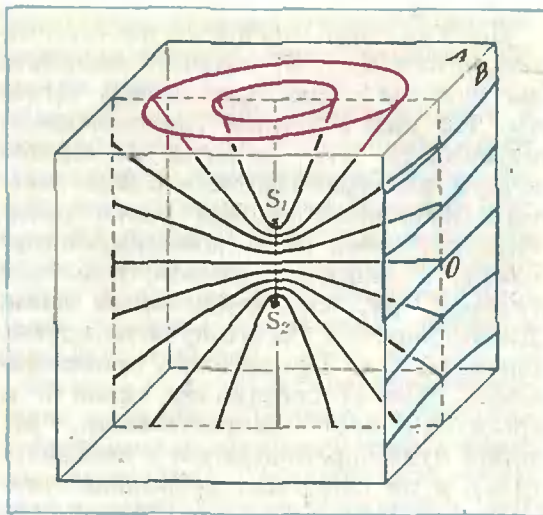


Рис. 1.

Чтобы найти закон изменения интенсивности вдоль прямой OB , достаточно в формуле (2) выразить разность фаз складывающихся колебаний $\varphi_1 - \varphi_2$ через положение точки наблюдения P на экране:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (l_1 - l_2) = \frac{0\pi d}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d\theta.$$

Таким образом, получается, что освещенность экрана зависит от направления θ на точку наблюдения по синусоидальному закону

$$I(\theta) = 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi d}{\lambda} \theta)). \quad (4)$$

График этой функции показан в правой части рисунка 2.

Ослабление световых колебаний в одних местах интерференционной картины и усиление в других не связано с какими-либо превращениями энергии колебаний. Это хорошо видно из формулы (4), согласно которой среднее по всем направлениям значение интенсивности равно $2I_0$, то есть суммарной интенсивности от двух источников.

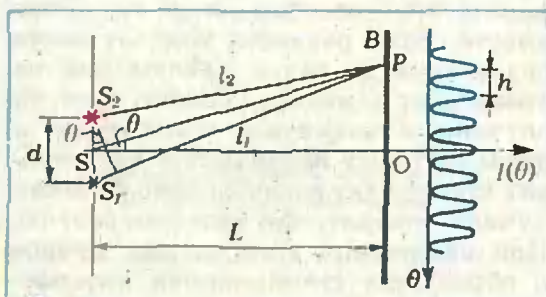


Рис. 2.

До сих пор предполагалось, что источники S_1 и S_2 создают *монохроматические* волны одинаковой частоты. Но для обычных (не лазерных) источников свет никогда не бывает строго монохроматическим. Испускаемая отдельным атомом волна представляет собой не бесконечную синусоиду, а лишь ее отрезок, или, как говорят, *цуг* синусоидальных волн. Длительность τ такого цуга не превышает 10^{-8} с. Предельная протяженность цуга ct составляет около 3 м ($c=3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, с которой цуги перемещаются в пространстве), и он содержит несколько миллионов «гребней» и «впадин» ($ct/\lambda \approx \approx 10^7$ при $\lambda=5 \cdot 10^{-7}$ м).

Если даже считать все цуги, испускаемые различными атомами источника, одинаковыми и характеризовать их одной и той же длиной волны λ , соотношения фаз между ними совершенно случайны, так как акты спонтанного испускания света атомами происходят в случайные моменты времени. Таким образом, свет реальных источников можно рассматривать как хаотическую последовательность синусоидальных волновых цугов. При наложении пучков света от разных источников фазовые соотношения между световыми колебаниями в любой точке за время наблюдения успевают многократно измениться случайным образом. В результате сложения большого числа колебаний со случайными фазами энергия результирующего колебания в каждой точке будет равна сумме энергий складывающихся колебаний, то есть не произойдет характерного для интерференции перераспределения энергии в пространстве.

Отсюда ясно, что для наблюдения интерференции света нужны специальные условия: свет от *одного и того же источника* нужно разделить на два пучка (или несколько пучков) и затем каким-либо способом свести эти пучки вместе. Если разность хода от места разделения до точки наблюдения не превышает длины отдельного цуга, то случайные изменения амплитуды и фазы световых колебаний в двух пучках происходят согласованно. О таких пучках говорят, что они *когерентны*. При наложении когерентных пучков и образуется стационарная интерференционная картина.

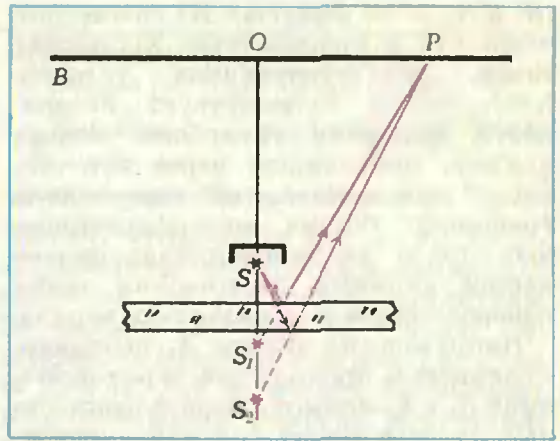


Рис. 3.

Впервые объяснение интерференции света на основе волновых представлений было дано английским ученым Томасом Юнгом в самом начале XIX века. Поставленный им опыт с двумя отверстиями подробно описан в учебнике («Физика 10», § 69). Когерентность световых пучков от отверстий в этом опыте обеспечивается их происхождением из одного первичного пучка.

Другой способ получения когерентных световых пучков основан на использовании отражения первичного пучка от двух поверхностей тонкой прозрачной пластинки.

Вопрос 2. *Какую форму имеют интерференционные полосы на экране В, плоскость которого параллельна краям пластинки (рис. 3)?*

В каждую точку наблюдения P приходят две волны, разность хода которых можно найти, построив изображения точечного источника S в верхней и нижней гранях пластинки. Для простоты можно пренебречь

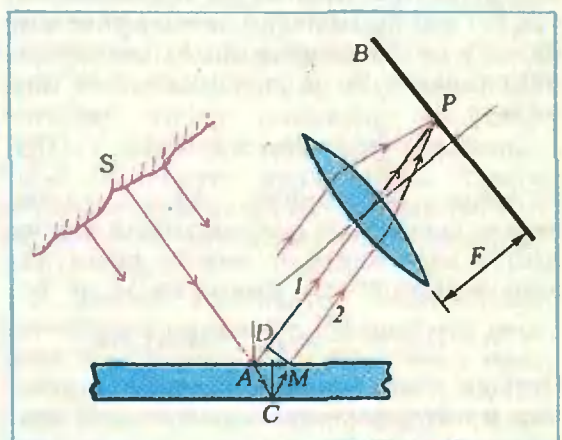


Рис. 4.

преломлением света в пластинке и рассматривать S_1 и S_2 как изображения источника в плоских зеркалах, образуемых гранями пластинки. Линии равной интенсивности образуются при пересечении экрана B гиперболоидом вращения с фокусами в точках S_1 и S_2 . Поэтому интерференционные полосы имеют вид концентрических колец с центром в точке O .

В опытах с точечным первичным источником S экран для наблюдения интерференционных полос может располагаться в любом месте, где перекрываются вторичные пучки. В случае протяженного источника интерференционные полосы, создаваемые разными его элементами, обычно смещены друг относительно друга, и вся картина оказывается смазанной. Но при определенных условиях можно наблюдать интерференцию и от протяженных источников.

Задача 2. Экран B расположен в фокальной плоскости собирающей линзы (рис. 4). На линзу падает свет от протяженного источника S , отраженный двумя гранями плоскопараллельной стеклянной пластинки. Покажите, что интерференционные картины на экране B , создаваемые разными элементами источника S , совпадают друг с другом.

В каждую точку P экрана приходят лучи, которые до линзы, а значит, и до пластинки были параллельны друг другу, то есть имели вполне определенный наклон к граням пластинки. Рассмотрим один из лучей, идущих от источника. От точки A разделения луча на отраженный и преломленный до точки наблюдения P луч 2 («преломленный») проходит дополнительно расстояние $AC + CM$ в стекле, а в воздухе его путь меньше, чем у луча 1 («отраженного»), на отрезок AD . (От точек D и M оба луча проходят через линзу в точку P за одинаковое время, то есть их оптические пути здесь одинаковы.) Отсюда ясно, что разность хода параллельных лучей 1 и 2, интерферирующих в точке P , не зависит от положения точки A падения первичного луча на пластинку. Поэтому результат интерференции (максимум, минимум или некоторое промежуточное значение интенсивности) будет одинаковым для всех пар лучей, порожденных разными элементами протяженного источника. На-

блюдаемую в таких условиях интерференционную картину называют *полосами равного наклона*.

Другой пример интерференции в случае протяженного источника света дают хорошо знакомые радужные полосы в тонких пленках масла или бензина на поверхности воды, в тонких слоях прозрачных окислов, образующихся на поверхности металлов в процессе закалки, в тонких пленках мыльных пузырей.

Вопрос 3. Объясните происхождение интерференционных полос при наблюдении поверхности тонкой пленки, освещаемой протяженным источником света (таким, например, как пасмурное небо).

Когда мы смотрим в точку P на поверхности пленки, на сетчатке глаза возникает изображение этой точки, создаваемое только теми лучами, которые проходят сквозь зрачок, то есть распространяются в пределах узкого конуса с вершиной в P (рис. 5). Рассмотрим луч 1, образующий угол θ с нормалью к пленке. Он приходит из некоторого элемента S источника, направление на который составляет такой же угол θ с нормалью (в соответствии с законом отражения). Второй когерентный с ним луч 2 приходит в P из того же элемента S после отражения от нижней поверхности пленки (пренебрегаем для простоты преломлением в пленке, то есть считаем $n \approx 1$). Найдем разность хода лучей 2 и 1:

$$l_2 - l_1 \approx AB + BP - CP = \\ = \frac{2h}{\cos \theta} - 2h \operatorname{tg} \theta \sin \theta = 2h \cos \theta. \quad (5)$$

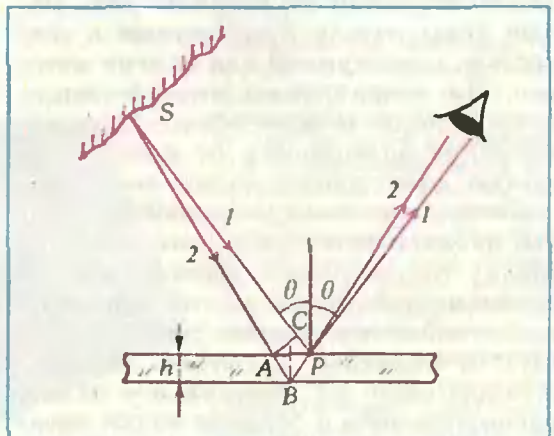


Рис. 5.

Угол θ имеет разные значения для пар лучей, приходящих от разных элементов источника, но в глаз наблюдателя попадают только те лучи, для которых угол θ лежит в узком интервале. Поэтому согласно формуле (5) разность хода для точки P будет практически одинакова у всех пар интерферирующих лучей, создающих изображение точки P на сетчатке глаза.

Если толщина пленки плавно изменяется от точки к точке, то контур каждой интерференционной полосы проходит по тем местам пленки, где ее толщина имеет одно и то же значение (при условии, конечно, что $\cos \theta$ в достаточной степени одинаков для всей области наблюдения). По этой причине такие полосы называют *полосами равной толщины*. Их можно наблюдать, в частности, в тонкой прослойке воздуха между поверхностями двух прозрачных пластинок. Когда направление наблюдения близко к нормальному, переход от какого-либо максимума к соседнему соответствует изменению толщины прослойки на половину длины волны (см. выражение (5)).

Задача 3. *Какой угол α образуют между собой две плоские поверхности стекла, если в монохроматическом свете с длиной волны $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м интерференционные полосы проходят параллельно друг другу на расстоянии $a = 2$ см?*

Толщина клиновидной прослойки между плоскостями при перемещении перпендикулярно ребру клина на расстояние a изменяется на величину $\Delta h = \alpha a$. Полагая $\Delta h = \lambda/2$, находим

$$\alpha = \frac{\lambda}{2a} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \approx 0,05' = 3''.$$

Таким способом можно измерять малые углы между плоскостями с точностью, недоступной для других методов. По искривлению интерференционных полос можно обнаружить отклонение поверхности от плоской на малую долю длины волны света.

Кольцевые полосы равной толщины, наблюдаемые в воздушном зазоре между соприкасающимися выпуклой поверхностью линзы малой кривизны и плоской поверхностью стекла, называются *кольцами Ньютона*. В отраженном свете их центральное пятно, расположенное в области точки касания, темное. Это объясняется тем, что при толщине воздушной прослойки,

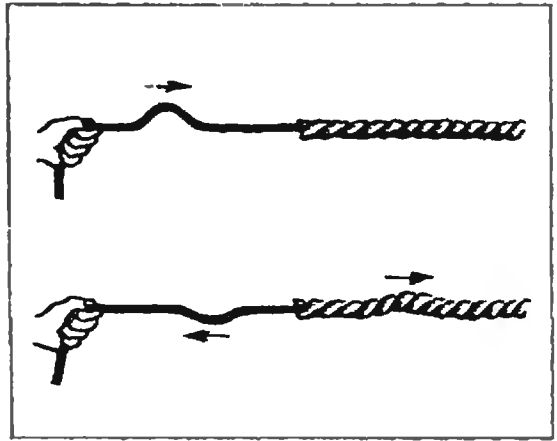


Рис. 6.

много меньшей длины волны, разность фаз интерферирующих волн обусловлена различием в условиях отражения: фаза волны, отражающейся от оптически более плотной среды, изменяется на противоположную, а отражающейся от оптически менее плотной среды остается неизменной.

Получить представление о характере изменения фазы волны при отражении можно с помощью следующей механической аналогии. Привяжите конец тонкой веревки к толстой и резким движением руки вверх и вниз пошлите вдоль тонкой веревки короткий поперечный импульс (рис. 6). Вы увидите, что отраженный от места соединения веревок импульс имеет противоположную полярность, в то время как прошедший в толстую веревку импульс (аналог световой волны, проникающей в оптически более плотную среду) имеет ту же полярность, что и падающий импульс. Если же послать к месту соединения импульс по толстой веревке, то отраженный назад и прошедший в тонкую веревку импульсы будут иметь ту же полярность, что и падающий.

Вопрос 4. *Можно ли наблюдать кольца Ньютона в проходящем свете?*

В принципе, интерференционная картина возникает и в этом случае. В проходящем свете распределение интенсивности, в соответствии с законом сохранения энергии, будет дополнительным по отношению к отраженному свету: центр картины будет светлым, а затем будут идти чередующиеся темные и светлые кольцевые полосы. Однако из-за малого коэффициента отражения на границе стекло — воздух ($\sim 0,04$) интенсивности интерферирующих лучей (прошедшего прямо без отражения и испытавшего два отражения) сильно различаются. В результате интерференционные максимумы и минимумы образуются на равномерном светлом фоне, и картина

получается гораздо менее контрастной, чем в отраженном свете.

Упражнения

1. В каких пределах заключена результирующая интенсивность I при интерференции двух когерентных волн различной интенсивности I_1 и $I_2=4I_1$?
2. Для увеличения интенсивности интерференционной картины в опыте Юнга вместо точечных отверстий в первом и втором экранах используют длинные параллельные между собой щели. Объясните, почему это не приво-

дит к ухудшению четкости интерференционных полос.

3. Кольца Ньютона наблюдаются в воздушном зазоре, образованном плоской поверхностью и сферической поверхностью радиусом $R=1$ м. Чему равен радиус пятого темного кольца в монохроматическом свете с длиной волны $\lambda=6 \cdot 10^{-7}$ м? Наблюдение ведется в отраженном свете.

4. Объясните происхождение радужной окраски пленок бензина на поверхности воды и мыльных пленок в отраженном белом свете. Почему пленки должны быть очень тонкими? Почему на просвет такие пленки практически бесцветны?

Задачи для исследования

Пересечение решеток

Отметим на координатной плоскости Oxy точки с целочисленными координатами — узлы решетки. Наложим на эту плоскость лист плотной прозрачной бумаги и перенесем на него (другим цветом) решетку узлов. Повернем теперь эту вторую решетку на некоторый угол α вокруг точки $O=(0; 0)$ так, чтобы выполнялось условие совпадения: некоторый узел повернутой решетки (отличный от O) совпадает с узлом исходной.

Например, на рисунке 1 узел (1; 3) черной решетки совпадает с узлом (-1; 3) голубой. При этом совпадают и многие другие узлы — они отмечены красным цветом, и пересечение двух решеток само оказывается более крупной решеткой (в статье А. Л. Петелина и А. И. Федосеева она названа «решеткой совпадающих узлов», коротко РСУ), то есть узел M принадлежит обеим решеткам, если $\vec{OM} = k\vec{p} + l\vec{q}$, где k и l — любые целые чис-

ла, а $\vec{p}=(2; 1)$ и $\vec{q}=(-1; 2)$ — «базисные векторы» (стороны квадратной ячейки красной решетки).

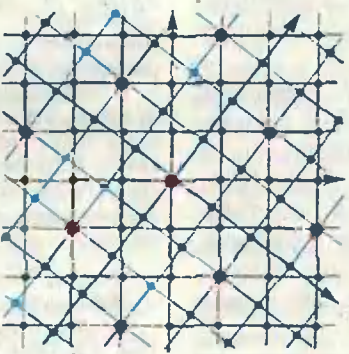


Рис. 1.

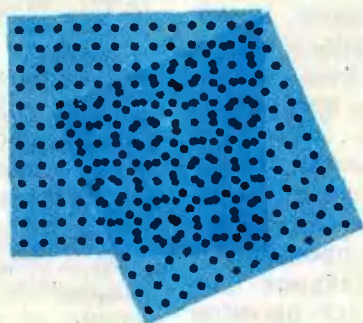


Рис. 2.

- а) Нарисуйте РСУ для поворота, при котором узел (8; 1) переходит в узел (7; 4). Каковы в этом случае $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, базисные векторы РСУ?
- б) Докажите, что для того, чтобы при повороте на угол α выполнялось условие совпадения, необходимо и достаточно, чтобы $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ были рациональными числами.
- в) Докажите, что если это условие выполнено, то совпавшие узлы всегда образуют квадратную решетку.
- г) Укажите, как при этом найти ее базисные векторы.
- д) Перечислите все такие углы α , для которых площадь S_n ячейки РСУ не превосходит 50.

Очень советуем смастерить на прозрачных листках две одинаковые решетки узла (по образцу рисунка 2), положить их друг на друга и понаблюдать за красивыми «почти периодическими» узорами, которые неожиданно возникают и перестраиваются друг в друга при произвольном смещении одного листка относительно другого. Попробуйте понять, почему возникают новые узоры, в каком смысле они периодичны, как они перестраиваются друг в друга, словом, попробуйте создать большую «математическую теорию» этих явлений.



XXVI Международная математическая олимпиада

Т. А. САРЫЧЕВА,
кандидат физико-математических наук
А. А. ФОМИН

XXVI Международная математическая олимпиада (ММО) проходила в Финляндии в городах Хельсинки, Хейнола и Йоутса с 29 июня по 10 июля 1985 года. Популярность этого соревнования увеличивается, число стран-участниц растет постоянно и довольно быстро, что создает определенные трудности для стран — организаторов. В этом году впервые приняли участие в ММО Иран, Исландия, Китайская Народная Республика, Турция, а также присутствовал наблюдатель от Индии.

От 31 страны в ММО приняли участие полные команды по 6 школьников, от Италии и Кувейта — по 5, от Испании и Туниса — по 4, от Исландии и Китая — по 2, от Ирана — 1 участник. Таким образом, в умении решать задачи соревновались 209 школьников из 38 стран всех частей света.

Жюри олимпиады, состоявшее из руководителей команд, работало с 29 июня в небольшом живописном городке Хейнола в 140 км севернее Хельсинки над составлением задач. После соревнования, проходившего в два тура 4 и 5 июля, члены жюри переехали в еще более маленький город Йоутсу, где уже несколько дней размещались школьники в прекрасно оборудованной гостинице в сосновом бору на берегу большого озера. В Йоутсе проходила проверка и координация работ. Последние два дня участники олимпиады провели в Хельсинки, где состоялось закрытие олимпиады, несколько экскурсий,

а также веселый заключительный вечер, в котором школьники смогли продемонстрировать свои таланты в песнях, танцах, шутках.

Организаторы олимпиады прекрасно справились со всеми трудностями. Особенно нужно отметить четкую и самоотверженную работу председателя жюри Илло Лайне, главного координатора Юхи Ойкконена, секретаря олимпиады и руководителя комитета по отбору задач Матти Лехтинена, председателя оргкомитета Хеймо Латы.

По традиции в каждый из двух дней соревнования предлагалось по 3 задачи на 4,5 часа работы. Каждая задача оценивалась в 7 очков.

Первый день

1 (Великобритания). Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, вокруг которого можно описать окружность. Некоторая окружность с центром на стороне AB касается остальных трех сторон. Докажите, что $|AD| + |BC| = |AB|$.

2 (Австралия). Даны взаимно простые целые числа n и k ($0 < k < n$). Каждое из чисел множества $M = \{1, 2, \dots, n-1\}$ окрашивают либо в голубой, либо в белый цвет, так чтобы выполнялись следующие условия:

а) для каждого i из множества M числа i и $n-i$ должны быть окрашены в один цвет;
б) для каждого i из M , отличного от k , числа i и $|k-i|$ должны быть окрашены в один цвет.

Докажите, что все числа множества M будут окрашены в один цвет.

3 (Нидерланды). Для любого многочлена $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ с целыми коэффициентами обозначим через $w(P)$ число коэффициентов, которые являются нечетными числами. Пусть $Q_i(x) = (1+x)^i$ для $i = 0, 1, 2, \dots$. Докажите, что если целые числа i_1, i_2, \dots, i_n удовлетворяют условию $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$, то

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_1}).$$

Второй день

4 (Монголия). Дано множество M , состоящее из 1985 различных натуральных чисел. Простые делители каждого числа из множества M не превосходят 26. Докажите, что из множества M можно выбрать четыре попарно различных числа, произведение которых является четвертой степенью некоторого целого числа.

5 (СССР). Дан треугольник ABC и окружность с центром O , проходящая через вершины A и C , которая повторно пересекает отрезки AB и BC в различных точках K и N соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников ABC и KBN , имеют ровно две общие точки B и M . Докажите, что угол OMB прямой.

6 (Швеция). Для каждого действительного числа x_1 строим последовательность x_1, x_2, \dots полагая

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(x_n + \frac{1}{n}\right)$$



Команда СССР на XXVI Международной математической олимпиаде в Хельсинки.

для всех $n \geq 1$. Докажите, что существует одно и только одно значение x_1 , для которого $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ при всех n .

Команда СССР, состоявшая в этом году из школьников разных городов и разных республик нашей страны, завоевала в трудной борьбе одну золотую, две серебряные и две бронзовые медали.

Ольга Леонтьева из Ленинграда, набрав 36 очков, вошла в шестерку лучших, которые были награждены помимо золотых медалей персональными компьютерами. Ольга была единственной девочкой на олимпиаде, попавшей в число четырнадцати первых призеров.

Олег Бондаренко из г. Горловки Донецкой области и Анатолий Малеванец из Красного Луча Ворошиловградской области, оба воспитанники ФМШ при КГУ, набрав по 29 очков, получили серебряные медали. Воспитанник ФМШ при МГУ Лев Иванов из Саратова, получив 21 очко, возглавил список третьих призеров, в число которых попал и Дмитрий Бибин из Витебска (16 очков). Мати Пентус из Таллина (9 очков) ограничился дипломом участника. Мати, простудившийся накануне олимпиады, выступил ниже своих возможностей, однако, как было сказано на церемонии закрытия, на Международной математической олимпиаде есть победители, но нет побежденных.

Подкомитет жюри, состоявший из шести руководителей команд стран, предложивших задачи, рассмотрел вопрос о специальных призах за оригинальные решения задач. Хотя школьниками были найдены прекрасные

решения, в том числе ранее не известные жюри, в особенности по геометрическим задачам, подкомитет решил специальных призов никому не присуждать, так как ни одно из этих решений не было уникальным, а повторялось в ряде работ.

ММО — это соревнование школьников, а не стран. Тем не менее, можно отметить, что школьники социалистических стран выступают традиционно очень хорошо. В числе шести команд, набравших в совокупности наибольшее число очков, пять команд социалистических стран: Румыния (201), Венгрия (168), Болгария (165), Вьетнам (144), СССР (140). Хорошо выступила также команда США (180). Кроме того в десятку лучших вошли команды ФРГ (139), ГДР (136), Франции (125), Великобритании (121).

Всем, кто присутствовал на церемонии закрытия в университете Хельсинки, кто видел счастливые лица победителей и слышал горячие аплодисменты, было понятно, какую большую роль играют ММО в деле развития математического образования в мире, в деле укрепления доверия и дружбы между народами.

Следующая, XXVII Международная математическая олимпиада школьников состоится в Варшаве в июле 1986 года.

XVI Международная физическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
О. Ф. КАБАРДИН,
кандидат педагогических наук
В. А. ОРЛОВ

XVI Международная олимпиада школьников по физике проходила в Югославии с 23 по 30 июня в курортном городе Порторож на берегу Адриатического моря.

Для участия в олимпиаде прибыли команды из 20 стран: Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, Вьетнама, ГДР, Исландии, Канады, Кубы, Нидерландов, Норвегии, Польши, Румынии, Советского Союза, Турции, Финляндии, ФРГ, Чехословакии, Швеции, Югославии. Впервые в олимпиаде приняли участие команды Канады и Турции. Кроме того, на олимпиаде были представлены наблюдатели из Италии, Китая и США.

По международному статуту физической олимпиады каждая страна может послать команду из пяти школьников. В команду СССР вошли*): Виктор Барзыкин — выпускник с. ш. № 82 п. Черноголовка Московской обл.,

Георгий Григорьев — выпускник ФМШ № 2 г. Киева,

Юрий Жестков — выпускник РФМШ г. Алма-Аты,

Тарас Иваненко — выпускник с. ш. № 145 г. Киева,

Олег Черп — выпускник с. ш. № 50 г. Минска.

Руководителями команды были авторы этой статьи — научные сотрудники Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР.

Организация и проведение XVI Международной физической олимпиа-

ды были поручены югославскому Союзу математических и физических обществ, Обществу математиков, физиков и астрономов СР Словении, Исполнительному Совету СР Словении, Национальному комитету по науке и технике, Министерству науки и технологии СР Словении. Председателем оргкомитета олимпиады был назначен профессор Люблянского университета Антон Мольк, генеральным секретарем — Боян Голли.

Теоретический тур олимпиады проводился в Портороже, а экспериментальный тур — в городе Колер.

Для подготовки задач и проведения теоретического тура были привлечены также ученые Люблянского университета.

Уточнение условий задач, их решений и критериев оценок, а также утверждение результатов проверки работ проводилось на заседаниях Международной комиссии, в которую наряду с председателем оргкомитета и генеральным секретарем входили руководители команд всех стран.

Участникам олимпиады было предложено решить 3 теоретические задачи (за 5 часов) и выполнить 2 экспериментальных задания (за 4 часа). Вот их условия*):

Теоретический тур

Задача 1

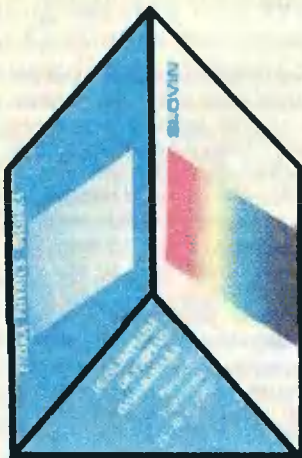
Юный радиолюбитель поддерживает радиосвязь с двумя девушками, проживающими в разных городах. Он намерен сконструировать такую систему антенн, которая позволила бы ему разговаривать с одной из девушек (живущей в городе В) с оптимальным качеством связи, но таким образом, чтобы вторая девушка (живущая в городе А) их разговор слышать не могла, и наоборот. Система антенн собирается из двух вертикальных антенн, излучающих с одинаковой интенсивностью во всех горизонтальных направлениях.

Определите расстояние l между антеннами, угол φ_0 между плоскостью, проходящей через обе антенны, и направлением на север, и разность фаз $\Delta\varphi$ электрических сигналов, излучаемых антеннами. Расстояние между антеннами должно быть минимальным.

Найдите численное решение в случае, если юноша имеет радиостанцию, работающую на частоте $\nu = 27$ МГц, а система антенн установлена в Портороже. Используя карту, юноша выяснил, что углы между направлением на север

*)) Решения этих задач, приведенные в разделе «Ответы, указания, решения», подготовлены при участии членов нашей команды: В. Барзыкина — теоретическая задача 1, Ю. Жесткова — теоретическая задача 2, Т. Иваненко — теоретическая задача 3, Г. Григорьева — экспериментальная задача 1, О. Черпа — экспериментальная задача 2.

*)) О том, как формируется наша команда, можно прочитать в статье С. С. Кротова «XV Международная физическая олимпиада» («Квант», 1984, № 12).



Команда Советского Союза на XVI Международной физической олимпиаде. Слева направо: Т. Иваненко, В. Барзыкин, Г. Григорьев, Ю. Жестков, О. Черп.

и направлениями на города A (Копер) и B (Буне) составляют $\varphi_1=72^\circ$ и $\varphi_2=157^\circ$ соответственно.

Задача 2

В длинном бруске, имеющем форму разностороннего параллелепипеда ($a > b \gg c$) и сделанном из полупроводникового материала In Sb, течет ток I в направлении ребра a . Брусочек находится в магнитном поле, направление вектора индукции \vec{B} которого совпадает с ребром c . Переносчики тока в In Sb — электроны, которые движутся в электрическом поле с напряженностью \vec{E} со средней скоростью $v = uE$ (коэффициент u называется подвижностью электронов). При наличии магнитного поля необходимо учитывать действие силы Лоренца на электроны — направление вектора напряженности в этом случае не будет параллельно электрическому току. Этот феномен известен как «эффект Холла».

а) Определите модуль и направление вектора напряженности электрического поля в бруске.

б) Вычислите разность потенциалов между противоположными точками на поверхности бруска в направлении ребра b .

в) Получите аналитическое выражение для постоянной компоненты разности потенциалов, найденной в пункте б), если сила тока и индукция магнитного поля меняются по законам: $I = I_0 \sin \omega t$, $B = B_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

г) Спроектируйте (и объясните) электрическую цепь, в которой возможно использование результата в) для измерения потребления мощности электрическим аппаратом, включенным в сеть переменного тока.

Используйте такие данные: подвижность электронов в In Sb $u = 7,8 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, концентрация электронов $n = 2,5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$, $I = 1 \text{ А}$, $B = 0,1 \text{ Тл}$, $b = 1,0 \text{ см}$, $c = 1 \text{ мм}$.

Задача 3

В космическом исследовательском проекте запуска космического корабля за пределы Солнечной системы обсуждаются две возможности:

1. Аппарат запускается со скоростью, достаточной для выхода за пределы Солнечной системы, непосредственно с орбиты Земли.

2. Аппарат приближается к одной из внеш-

них планет, с ее помощью изменяет направление движения и приобретает скорость, необходимую для выхода за пределы Солнечной системы.

Можно считать, что во всех случаях корабль движется под действием гравитационного поля только Солнца или планеты, в зависимости от того, чье поле сильнее в данной точке.

а) Определите минимальную скорость корабля v_a и ее направление относительно вектора орбитальной скорости Земли для реализации проекта 1.

б) Предположим, что корабль запущен в направлении, определенном в пункте а), но с другой скоростью v_0 относительно Земли. Определите скорость аппарата, когда она пересекает орбиту Марса (то есть найдите параллельную и перпендикулярную составляющие этой скорости относительно орбиты Марса), при условии, что в этот момент Марс находится далеко от аппарата.

в) Предположим, что аппарат вошел в гравитационное поле Марса. Определите минимальную стартовую скорость аппарата v_0 с орбиты Земли, необходимую для выхода из Солнечной системы после воздействия на него гравитационного поля Марса. (Вас не должно интересовать точное положение Марса во время взаимодействия с аппаратом.) Намек: из результата а) вы знаете оптимальную величину и направление скорости аппарата, необходимой для выхода за пределы Солнечной системы. Найдите связь между этой скоростью и компонентами скорости до вхождения аппарата в гравитационное поле Марса, то есть компонентами, определенными вами в б). Будет ли сохраняться энергия аппарата?

г) Определите максимально возможную часть сэкономленной энергии в проекте 2 по сравнению с проектом 1.

Примечания. 1) Можно считать, что все планеты вращаются вокруг Солнца по окружностям в одном направлении и в одной плоскости. Сопротивление воздуха, вращением Земли вокруг своей оси и энергией, затраченной при выходе из гравитационного поля Земли, пренебречь. 2) Численные данные: скорость Земли вокруг Солнца равна $v_0 = 30 \text{ км/с}$, отношение расстояний от Земли и Марса до Солнца равно $2/3$.

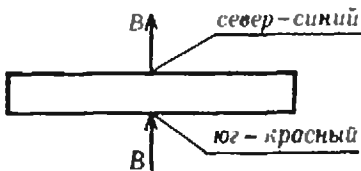


Рис. 1

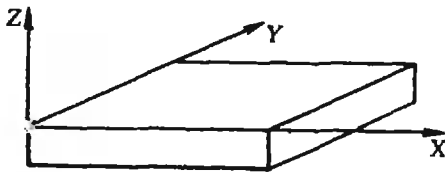


Рис. 2.

Экспериментальный тур

Задача 1

Определите положение центров и ориентацию магнитов, спрятанных в ящике, покрашенном в черный цвет. Магнит изображен на рисунке 1; его координаты x , y и z следует измерять от угла, помеченного красным цветом на рисунке 2. Определите компоненту

вектора магнитной индукции \vec{B} в плоскости XU с помощью предварительно откалиброванной измерительной системы. Определите наибольшее значение магнитной индукции, созданной вашим магнитом.

Оборудование: постоянный магнит, такой же, как спрятанные в ящике; источник напряжения (0—24 В); измерительная катушка (1400 витков, $R=230$ Ом); черный ящик со спрятанными магнитами; две катушки для создания магнитного поля (8800 витков в каждой, $R=990$ Ом); вольтметр (с диапазонами измерения 1 В, 3 В, 10 В, рекомендуемыми для использования); электронная схема; амперметр; переменное сопротивление ($R_{\max}=3,3$ кОм); соединительные провода; пластина с отверстиями для крепления катушек; резиновые кольца для различного употребления, например для крепления катушек; деревянные палочки для тех же целей; линейка; нитки.

Инструкция

Для исследования можно применить любой не разрушающий магниты метод. Конечный ответ должен содержать результаты измерений, формулу, графики и рисунки (последние должны использоваться вместо комментариев, где это возможно).

Правильное использование измерительной системы показано на рисунке 3. При подключении катушки 1 через электронную схему 2 к вольтметру 3 максимальное отклонение стрелки вольтметра пропорционально изменению магнитного потока через катушку.

Задача 2

Исследуйте процесс ускорения и замедления медного диска, вращаемого мотором переменного тока. Измеряя время полуоборота диска, найдите зависимость угла поворота, угловой скорости и углового ускорения диска от времени. Определите вращающий момент сил и мощность мотора как функцию угловой скорости.

Оборудование: мотор переменного тока с выключателем и медным диском; индуктив-

ный датчик; многоканальный секундомер с компьютером.

Инструкция

Индукционный датчик регистрирует движение двух железных стержней на диске, когда они ближе 0,5 мм от него, и посылает сигнал на секундомер. Секундомер подключен к компьютеру таким образом, что он регистрирует момент времени прохождения железного стержня под датчиком и запоминает его. Для включения секундомера нужно нажать последовательно кнопки «5» и «6» на пульте управления компьютера.

Компьютер высвечивает результаты в графической форме. По вертикальной оси представлены интервалы времени между двумя последовательными моментами регистрации железного стержня, по горизонтальной оси — номера интервалов.

При нажатии кнопки «7» компьютер выдает результаты измерений в виде таблицы. В первой колонке таблицы показан номер измерения, во второй — время, прошедшее с момента начала измерений, в третьей — представлены интервалы времени между последующими моментами прохождения железных стержней около индукционного датчика.

Каждая задача теоретического и экспериментального туров оценивалась в 10 баллов.

За первую задачу теоретического тура 10 баллов получили 12 участников (3 — из СССР), за вторую задачу 9,5 баллов (высший балл) получил лишь один участник (из СССР), за третью задачу 10 баллов получили 2 участника (1 — из СССР). Абсолютно лучший результат после теоретического тура был у школьника из Чехословакии П. Шпаниеля — 29 баллов. У Г. Григорьева был второй результат — 27,5 баллов. Далее следовали Т. Иваненко и Р. Бадами (Великобритания) — по 27 баллов. Лучший командный результат после выполнения задач теоретического тура был у команды СССР — 121,0, у команд ФРГ и Великобритании, занявших 2 и 3 места, — 99,5 и 94,5 баллов соответственно.

Максимальное число баллов за первое экспериментальное задание получил школьник из Швеции Х. Свенсон (8,5), за второе задание — школьник из Великобритании Д. Маккэй (9,5) и из Румынии К. Малуреану

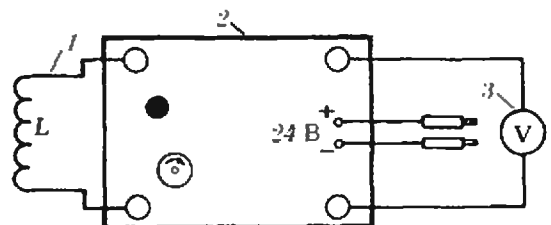


Рис. 3.

(9). Д. Маккей был лучшим и по сумме баллов за экспериментальные задания (15,5). Лучший командный результат за выполнение эксперимента оказался у команды Великобритании — 61, второй результат показала команда ФРГ — 58, затем — команды СССР и Швеции — по 55,5 баллов.

После подведения общих итогов лучшая сумма баллов (42,5) оказалась у П. Шпаниеля (Чехословакия). Он награжден дипломом I степени. Дипломы I степени получили также Р. Бадами из Великобритании (40,5) и 3 участника советской команды: Г. Григорьев (38,5), В. Барзыкин (38) и Т. Иваненко (38). Ю. Жестков получил диплом II степени (33), О. Черп — диплом III степени (29). Общее число первых премий 5, вторых — 6, третьих — 17. В неофициальном командном зачете команда СССР заняла первое место, набрав 176,5 баллов. Остальные команды по сумме баллов расположились следующим образом: ФРГ (157,5), Великобритания (155,5), Румыния (141,5), Чехословакия (131,0), ГДР (128), Нидерланды (123), Швеция (123), Польша (119), Венгрия (113,5), Болгария (110,5), Югославия (108,5), Вьетнам (103,5), Финляндия (89,5), Турция (84,0), Австрия (79,5), Канада (66,0), Норвегия (61,0), Исландия (44,0 — 4 участника), Куба (44,0).

Т. Иваненко получил специальный приз за оригинальное решение третьей задачи теоретического тура. В. Барзыкин получил специальный приз как самый юный участник олимпиады.

Во время олимпиады ее участникам была предложена интересная культурная программа. Школьники познакомились с достопримечательностями города-курорта Порторож, которому скоро исполнится 100 лет, старинного города Копер, посетили конный завод в Липице, знаменитую Постойнскую пещеру (по ее многокилометровым тоннелям ходят поезда туристов), Морской музей и аквариум в Пиране. Для участников олимпиады были организованы концерты классической музыки и народных танцев, морская прогулка на лодках вдоль побережья Адриатического моря и ежедневные купания в море.

Во время проведения олимпиады проходили дружеские беседы между школьниками разных стран. Советский школьник О. Черп дал интервью для Словенского телевидения, а Т. Иваненко — для газеты «Приморские новости» (г. Пиран).

Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» поздравляют всех членов советской команды с большой победой и желают им дальнейших творческих успехов.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 36)

15; М. Фарадже (Баку) 13; Н. Федин (Омск) 13, 15; В. Филомоненко (Свердловск) 15; Л. Филипченко (Алма-Ата) 15; Е. Финк (Ленинград) 19, 21, 23, 25; В. Цвиркунов (Киев) 19, 20, 22; А. Чагиров (Алма-Ата) 13; С. Чебуков (Симферополь) 13, 15; Г. Чевардин (Челябинск) 13, 19; И. Шадрин (Алма-Ата) 15; М. Шакаев (Алма-Ата) 15; Ю. Шамрук (д. Новый Двор Гродненской обл.) 24; С. Шарпов (Киев) 13; С. Шейнин (Молодечно) 19; Б. Шойхет (Москва) 19; Г. Шпитальник (Ленинград) 19, 24; П. Шрабштейн (Москва) 19; Б. Шраер (Ленинград) 13, 19; В. Шульга (Евпатория) 13, 19; Э. Ясиновский (Куйбышев) 13, 15; В. Яхинц (Ташкент) 15.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 25, 28; К. Абилкаров (Алма-Ата) 25, 26; И. Абрамчук (Винница) 25, 26; Г. Адейшвили (с. Габанери Гр. ССР)

25; Э. Алиев (Сумгаит) 29; С. Анатолюев (Ярославль) 28; В. Апальков (Харьков) 23, 25, 27, 35; С. Бакин (Орел) 25, 26; Р. Бакиров (Первоуральск) 29; А. Барабаш (Канев) 23; Д. Барц (Харьков) 25, 28, 32; К. Бедов (Челябинск) 23, 25, 28, 32; Ю. Белобородов (Челябинск) 25; С. Белолов (Красноярск) 23, 25; М. Белопольская (Киев) 35; А. Белопольский (Киев) 23, 25, 26, 28, 31, 32, 35; И. Бена (Васлуй, СРР) 35; А. Беренгольц (Кишинев) 23; Л. Блинов (Черновцы) 29; С. Бобылев (Березники) 23, 25; С. Болдырев (Мытищи) 23, 25, 28, 29, 32; Ю. Боровский (Киев) 25, 26, 35; Ш. Бреннер (Хуст) 25, 26, 28, 29; А. Буга (Ульяновск) 32; М. Валиев (Самарканд) 29; И. Ванин (Москва) 23, 25; И. Верный (Житомир) 23, 29, 31; А. Вилькоцкий (Минск) 25; А. Володько (Одесса) 23, 25, 28; А. Волошин (ст. Ивановка Кирг. ССР) 28; А. Гамаюнов (Полтава) 32, 37; О. Гендельман (Харьков) 25, 28, 32; С. Гершиков (п. Першотравневое Донецкой обл.) 28, 32; В. Глухов (Сарапул) 23; М. Годин (Ленинград) 26; А. Гольдин (Киев) 25; Л. Гольдштейн (Киев) 23, 25, 35; В. Гринберг (Москва) 23, 25, 27, 28, 32; Л. Гуревич (Кемерово) 28;

(Окончание см. на с. 54)



Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1986/87 учебный год.

Цель школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по углублению своих знаний по физике и математике. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно нужна.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит фамилии руководителей и поименный список членов кружка (по классам, с указанием итоговых оценок за вступительное задание). Все материалы по организации кружков следует выслать в адрес ЗФТШ до 25 мая 1986 года.

Учащиеся ЗФТШ и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а работы членов кружка проверяют его руководители.

С учащимися Москвы проводятся очные занятия по физике и математике (по программе ЗФТШ) два раза в неделю в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ). Набор в эти группы проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 408-51-45).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетрадной обложки наклейте лист бумаги, заполненный по образцу:

1. Область (край или АССР)
2. Фамилия, имя, отчество
3. Класс
4. Номер и адрес школы
5. Профессия родителей и занимаемая должность:
отец
мать
6. Подробный домашний адрес

*Курская область
Гончаров Олег Витальевич
восьмой
Курчатовская средняя школа № 2*

*слесарь
машинист котельных установок
307239, Курская обл., г. Курчатов, ул. Космонавтов, д. 10, кв. 76.*

Внизу начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№									
Ф.									
М.									

Для получения ответа на вступительное задание вложите в тетрадь конверт с вашим домашним адресом.

Срок отправления решения — не позднее 1 марта 1986 года (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1986 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Пермской, Псковской и Ярославской областей, Карельской, Коми и Удмуртской АССР высылают работы по адресу: 198904 г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Кемеровской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской и Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской и Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062 г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, 4—9 — для учащихся восьмых классов, 8—14 — для учащихся девятых классов.

В задании по математике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, 3—9 — для учащихся восьмых классов, 6—12 — для учащихся девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Спортсмены бегут колонной длины l по одному с одинаковой скоростью v . Навстречу бежит тренер со скоростью $u < v$. Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, поворачивает и бежит назад с той же скоростью v . Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?

2. Гидравлический пресс, заполненный водой, имеет поршни сечением $S_1 = 100 \text{ см}^2$ и $S_2 = 10 \text{ см}^2$. На больший поршень становится человек массой $M = 80 \text{ кг}$. На какую высоту поднимется после этого малый поршень?

3. В цилиндрический сосуд с площадью сечения $S = 200 \text{ см}^2$ и высотой $h = 30 \text{ см}$ налито $V = 4 \text{ л}$ воды. В сосуд опускают стержень сечением $s = 100 \text{ см}^2$, высота которого равна высоте сосуда. Какую минимальную массу должен иметь стержень, чтобы он опустился до дна сосуда?

4. Пулемет с водяным охлаждением ствола дает 600 выстрелов в минуту. Заряд пороха в патроне $m = 3,2 \text{ г}$, 28 % выделяемого количества теплоты идет на нагревание воды в кожухе ствола. Через какое время вода закипит, если ее было налито $V = 4 \text{ л}$ при температуре $t = 20^\circ \text{C}$? Теплота сгорания пороха $q = 4 \times 10^6 \text{ Дж/кг}$, удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ \text{C)}$.

5. В кастрюлю налили холодной ($t = 10^\circ \text{C}$) воды и поставили на электроплитку. Через 10 минут вода закипела. Через какое время она полностью испарится? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ \text{C)}$, удельная теплота парообразования $L = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$.

6. За последнюю секунду свободно падающее без начальной скорости тело пролетело $3/4$ всего пути. Сколько времени падало тело?

7. Вокруг планеты по круговой орбите вращается спутник. Определите радиус орбиты, если период обращения спутника равен T , а масса планеты M .

8. Электрический утюг имеет мощность $P_1 = 750 \text{ Вт}$ при питании от сети с напряжением $U_1 = 127 \text{ В}$, а комнатный обогреватель имеет мощность $P_2 = 1 \text{ кВт}$ при том же напряжении. Какая мощность будет выделяться в каждом приборе, если их включить последовательно в сеть с напряжением $U_2 = 220 \text{ В}$? Сопротивление приборов не изменяется.

9. Цирковой гимнаст падает с высоты $H = 1,5 \text{ м}$ на упругую предохранительную сетку. Каково будет максимальное провисание гимнаста в сетке, если в случае спокойно лежа-

щего в сетке гимнаста провисание равно $a = 0,1 \text{ м}$?

10. Изучая дорожное происшествие, автоинспектор установил, что след торможения автомобиля, ехавшего по асфальтовой дороге, имеет длину $L = 60 \text{ м}$. С какой скоростью ехал автомобиль, если коэффициент трения колес об асфальт при торможении $\mu = 0,5$?

11. Найдите формулу соединения азота с кислородом, если $m = 1 \text{ г}$ его в газообразном состоянии в объеме $V = 1 \text{ л}$ при температуре $t = 17^\circ \text{C}$ создает давление $p = 314 \text{ гПа}$.

12. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $p = b/V^n$, где b и n — некоторые постоянные, причем $0 < n < 1$?

13. Некоторую массу m идеального газа с молярной массой M нагревают в цилиндре под поршнем так, что температура изменяется пропорционально квадрату давления ($T \sim p^2$) от значения T_1 до значения T_2 . Определите работу, совершенную газом при этом процессе.

14. В откачанном герметически закрытом сосуде объема $V = 1 \text{ л}$ находится открытая колбочка, содержащая $m = 10 \text{ г}$ воды. Сосуд прогревают при температуре $t = 100^\circ \text{C}$. Какая масса воды испарится?

Математика

1. Какое из двух чисел больше:

$$\frac{10^{1985} - 1}{10^{1986} - 1} \quad \text{или} \quad \frac{10^{1986} - 1}{10^{1987} - 1} ?$$

2. Расстояние между пунктами A и B равно 5 км . Через A проходит прямолинейная дорога, образующая с прямой AB угол α , $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Два туриста одновременно вышли из

A и одновременно прибыли в B , но первый двигался из A в B через поле по прямой, а второй сначала шел по дороге, а затем свернул и тоже пошел через поле напрямик. В поле туристы шли со скоростью 4 км/ч , а по дороге — 6 км/ч . Какой путь прошел второй турист?

3. Натуральное число оканчивается на 3. Если эту цифру переставить в начало числа, то оно удвоится. Найдите наименьшее такое число.

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведены высоты CD и медиана CE . Найдите отношение длин катетов треугольника ABC , если известно, что $AB = 3DE$.

5. Найдите все трехзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

6. Изобразите на координатной плоскости множество точек с координатами $(p; q)$, для ко-

торых уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных положительных корня и $2q - p < 4$.

7. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N , а медиану AD — в точке O . Найдите отношение $AO:OD$, если $MO = 3ON$.

8. Решите неравенство:

$$\frac{1}{x^2 - x} \leq \frac{1}{|x|}.$$

9. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно вышли две группы туристов. Первая группа идет со скоростью 4 км/ч переходами длительностью не более 6 часов, а вторая — со скоростью 6 км/ч переходами длительностью не более 2 часов. Известно, что после перехода длительностью t часов, прежде чем двигаться дальше, первая группа должна от-

дыхать не менее t часов, а вторая — $2t$ часов. Через какое наименьшее возможное время группы встретятся, если расстояние между A и B равно 48 км?

10. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна l , острый угол равен α . Найдите площадь трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2' \cdot y + 3' \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{3}, \\ 3' \cdot y - 2' \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

12. На координатной плоскости даны точки $A(3; -4)$ и $B(4; -2)$. Точка C лежит на окружности $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \frac{16}{5}$. Найдите координаты точки C , при которых площадь треугольника ABC будет наименьшей.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 36)

Д. Дворников (Донецк) 29; А. Деревянкин (Хабаровск) 32; Б. Добровольский (Тбилиси) 35; А. Дода (Корсунь-Шевченковский) 23, 25; А. Донченко (Киев) 23, 25, 27; Д. Дорфеев (Липецк) 28; В. Душацкий (Донецк) 35; А. Дынико (Жуковский) 23, 25, 28, 29, 32, 35; И. Дынико (Жуковский) 23, 25; М. Ермаков (Рига) 25, 29; С. Ефремов (Запорожье) 25, 26, 31, 37; А. Жариков (Киев) 23, 25, 27—36; В. Жеваков (п. Черноголовка Московской обл.) 25; О. Заблуда (Киев) 25, 26, 32; О. Заборонский (Москва) 23, 27; В. Заводянный (с. Калининское Херсонской обл.) 25, 27; Л. Запольский (Москва) 29; А. Захаров (Гатчина) 28, 29; Н. Захарова (Алма-Ата) 35; В. Зелов (Алма-Ата) 25, 35; И. Иванов (Калуга) 29; С. Иванов (Уфа) 23, 28, 28, 31, 32; Р. Исаенко (Сыктывкар) 28; П. Кадури (Киев) 23; В. Калацкий (Солигорск) 29; А. Карнаухов (Устинов) 23, 25; Д. Кашин (Москва) 23, 25; М. Кельмансон (Москва) 25, 27; Д. Киреев (Москва) 29; А. Кириленко (Запорожье) 23, 29; В. Кирьяшкин (Саратов) 23, 28, 29, 32, 35; А. Киселев (Ленинград) 29; М. Кишиневский (Ташкент) 32, 35; П. Кларк (Тула) 23—27, 28, 31, 35; А. Кленов (Тейково) 23; А. Климов (Донецк) 25, 32, 35; В. Коллегов (Березники) 25; А. Кононенко (Киев) 25, 26; А. Краковский (Харьков) 29; К. Купцов (Саратов) 23; Д. Кучулория (Тбилиси) 25, 26, 28; Д. Кушнер (Мытищи) 25, 29; С. Лакагом (Москва) 32; А. Левенштейн (Донецк) 23, 26; Л. Лиознов (Москва) 23, 29, 35; В. Литвин (Днепропетровск) 25—27; М. Литвинов (Киев) 29, 32; А. Лобковский (п. Черноголовка Московской обл.) 23, 25; К. Лопик (Фрунзе) 25; И. Лугач (Винница) 23, 28; С. Лукьянов (с. Владимировка Кировоградской обл.) 23, 25, 27; И. Луценко (Донецк) 23, 25, 27; П. Лушников (Москва) 25—27, 31; Т. Малащенко (Воткинск) 29; Г. Марченко (Саратов) 28, 35; Ю. Махлин (Москва) 25, 28, 31; З. Мачарадзе (Тбилиси) 23, 25; В. Мелик-Алавердян (Ереван) 23, 25, 32, 35; Р. Мирзафатихов (п. Аксуек Джамбулской обл.) 29;

Е. Михалюк (Минск) 23, 27; А. Мишаненко (Новосибирск) 25; Д. Могилевцев (Шклов) 25, 29; С. Молчанов (Свердловск) 27; А. Мудрик (Брест) 23; С. Мягчилов (Одесса) 23—27; С. Настенко (Киев) 31; А. Недачин (Киев) 23; И. Никитин (Горький) 23—28, 31, 32, 35; Г. Николаишвили (Тбилиси) 25, 29; С. Новиков (Херсон) 26, 27; А. Оводенко (Донецк) 23; И. Оводов (п. Менделеево Московской обл.) 23; О. Осауленко (Киев) 25, 26; Р. Паламарчук (Нежин) 31; С. Пан (Алматы) 27, 29; А. Паньчев (Магадан) 27—29; А. Парецкий (Минск) 27, 28; В. Песоцкий (д. Дворец Брестской обл.) 23; Е. Петров (Минск) 27, 29; К. Писарчук (Рязань) 35; С. Пиунхих (Москва) 27—29, 31; И. Погорелов (Донецк) 23, 26; В. Поляков (Кстово) 29; О. Посудневский (Береза) 23, 25, 26, 28, 29, 31, 35; А. Пугилин (Минск) 25, 29; А. Пучков (Ленинград) 35; Е. Растигеев (Барнаул) 28; С. Рахамов (Казань) 28, 35, 37; А. Розенвайн (Киев) 25—27, 32; Е. Рознощик (Киев) 27, 32; Н. Ромец (Кировоград) 25, 27; С. Рося (Минск) 23, 25—29, 35; А. Рубанов (Москва) 32; Ю. Рыбалочка (Киев) 23, 27, 29, 31, 35; Р. Сагайдак (с. Матугов Черкасской обл.) 28; Т. Сагайдак (Киев) 23, 35, 37; В. Сакбаев (Алма-Ата) 25, 35; Б. Самойлов (Киев) 23, 29, 31, 35; А. Сиваченко (Москва) 25, 28; М. Ситников (Климовск) 23, 28, 29, 35; А. Скачков (Тула) 29; М. Скоробогатов (Киев) 26; А. Снежко (Запорожье) 26, 29; С. Соляник (п. Протвино Московской обл.) 28; А. Сомов (Киев) 25; А. Сотников (Губкин) 25, 28; А. Стеценко (Харьков) 28, 29; С. Стрельников (Салават) 27; И. Стрешенский (Киев) 35; И. Суконников (Винница) 32, 35; Д. Сумаков (Грозный) 27; В. Сысоев (Киев) 32; Л. Таджиков (Душанбе) 32; В. Тарнецкий (Алма-Ата) 35; С. Толмачев (Минск) 23, 25, 28; С. Тужанский (Винница) 25, 26, 32, 36; С. Ушаков (Ярославль) 28; Н. Федин (Омск) 26, 27; М. Федоров (Ульяновск) 23, 25, 28; С. Федосеенко (Комсомольск-на-Амуре) 28; Г. Финкельштейн (п. Черноголовка Московской обл.) 25, 26, 28, 31, 35; В. Фокин (Хабаровск) 32; А. Хафизов (п. Красногорский Мар. АССР) 23, 28; Н. Чеховской (Орск) 25, 28, 32; В. Шаповалов (Донецк) 23, 32; Г. Швец (Киев) 23, 25—31, 35; И. Шендерович (Северодвинск) 29, 32; А. Шуляк (с. Молодецкое Черкасской обл.) 23, 29, 32; М. Юдин (Запорожье) 26, 29; О. Юсупов (Киев) 23—32; В. Яйлиян (Киев) 25.



Упорядоченные наборы чисел и неравенства

1. Пары чисел $(|a|^3, |b|^3)$ и $(|a|, |b|)$ упорядочены одинаково. Поэтому

$$a^4 + b^4 > |a|^3 \cdot |a| + |b|^3 \cdot |b| > |a|^3 \cdot |b| + |b|^3 \cdot |a| > a^3 b + b^3 a.$$

2. Тройки чисел a^2, b^2, c^2 и bc, ac, ab противоположно упорядочены. Поэтому

$$a^2 bc + ab^2 c + abc^2 < a^3 b + b^3 c + c^3 a.$$

3. Рассматривая противоположно упорядоченные тройки

$$(a^2 b^2, b^2 c^2, c^2 a^2); \left(\frac{c}{ab}; \frac{a}{bc}; \frac{b}{ac}\right),$$

получаем неравенства:

$$\frac{a^3 b}{c} + \frac{b^3 c}{a} + \frac{c^3 a}{b} > a^2 b^2 \cdot \frac{c}{ab} + b^2 c^2 \cdot \frac{a}{bc} + c^2 a^2 \cdot \frac{b}{ac} = 3abc,$$

аналогично, $\frac{ab^3}{c} + \frac{c^3 b}{a} + \frac{ca^3}{b} > 3abc$, складывая

которые, приходим к требуемому.

4. Сложите 3 неравенства

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &< a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_1, \\ a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 &< a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_1, \\ a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_3 b_2 &< a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_1. \end{aligned}$$

5. Воспользуйтесь упражнением 4 для троек

$$(a, b, c) \text{ и } \left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right).$$

6. Решается аналогично предыдущему с использованием неравенства Чебышева.

7. Наборы чисел a_1^k, \dots, a_n^k и $a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m$ одинаково упорядочены.

8. Тройки чисел (a^3, b^3, c^3) и $\left(\frac{1}{b^3 c^3}, \frac{1}{a^3 c^3}, \frac{1}{a^3 b^3}\right)$

одинаково упорядочены. Поэтому

$$\frac{a^5}{b^2 c^3} + \frac{b^5}{a^3 c^3} + \frac{c^5}{a^3 b^3} > \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3}.$$

Тройки (a^2, b^2, c^2) и $\left(\frac{1}{a^3}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{c^3}\right)$ упорядочены противоположно. Поэтому

$$\frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

9. Пусть $k=2, m=1$. Так как наборы

$$a_1^2, \dots, a_n^2 \text{ и } \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$$

противоположно упорядочены,

$$\begin{aligned} a_1^2 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2^2 \cdot \frac{1}{a_2} + \dots + a_n^2 \cdot \frac{1}{a_n} &< \\ &< a_1^2 \cdot \frac{1}{a_2} + a_2^2 \cdot \frac{1}{a_1} + \dots + a_n^2 \cdot \frac{1}{a_1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2^2 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2^2 \cdot \frac{1}{a_2} + \dots + a_n^2 \cdot \frac{1}{a_n} &< \\ &< a_1^2 \cdot \frac{1}{a_3} + a_2^2 \cdot \frac{1}{a_n} + \dots + a_n^2 \cdot \frac{1}{a_2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1^2 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2^2 \cdot \frac{1}{a_2} + \dots + a_n^2 \cdot \frac{1}{a_n} &< \\ &< a_1^2 \cdot \frac{1}{a_n} + a_2^2 \cdot \frac{1}{a_1} + \dots + a_n^2 \cdot \frac{1}{a_{n-1}}. \end{aligned}$$

Осталось сложить полученные неравенства. Общий случай аналогичен разобранным.

«Квант» для младших школьников

1. $46523 + 46523 = 93046$.

2. Если обозначить через w объем бака, а через x, y и z объемы бидонов, то получим соотношение: $\frac{w}{3} = \frac{x}{2} = \frac{2y}{3} = \frac{3z}{4}$, или $4w = 6x = 8y = 9z$.

Наименьшее общее кратное чисел 4, 6, 8 и 9 равно 72, поэтому каждое из чисел в последней цепочке равенств должно быть кратно 72. Наименьший объем бака мы получим в том случае, когда каждое из них равно 72, откуда $w=18, x=12, y=9, z=8$.

3. Дело в малой разнице коэффициентов теплового расширения железа и бетона; этим объясняется прочность железобетонных конструкций.

4. См. рисунок 1.

5. Пусть наше число N равно $\overline{a_1 \dots a_{20}}$. Тогда $7N = 7a_{20} + 70a_{19} + 700a_{18} + \dots + 70 \dots 0a_1$.

Очевидно, что сумма цифр суммы нескольких чисел не превосходит суммы сумм цифр этих чисел. Но сумма цифр числа $70 \dots 0a_2$ равна сумме цифр числа $7a_2$, последняя же равна самому числу $7a_2$, если $a_2=0$ или 1, и меньше $7a_2$, если $a_2 > 1$ (сумма цифр любого числа, большего или равного 10, меньше этого числа). Значит, сумма цифр числа $7N$ ровно в 7 раз больше суммы цифр числа N (а именно это верно для нашего N), только если все цифры числа N равны 0 или 1. Значит, N составлено из 10 единиц и 10 нулей. Умножим теперь столбиком такое число на 19.

$$\begin{array}{r} \dots 0110111 \\ \times \quad 19 \\ \hline \dots 0990999 \\ \dots 0110111 \\ \hline \dots 2092109 \end{array}$$

Ясно, что наибольшая возможная сумма цифр результата будет $10 \cdot 1 + 10 \cdot 9 = 100$, и она уменьшается на 9 всякий раз, как единица оказывается под девяткой. У нас сумма равна $19 = 100 - 81$, то есть единица оказывается под девяткой 9 раз. Но это возможно, только если все единицы в числе N идут подряд. Значит,

$$N = \overline{1 \dots 10 \dots 0}$$

10 10

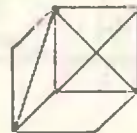
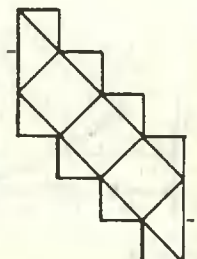


Рис. 1.



Безумное чаепитие

Задачи

1. Часы, которые стоят, так как они чаще показывают точное время.
2. Одинаковые количества.
3. Болванщик должен завести свои часы, запомнить их показания и отправиться к Мартовскому Зайцу. У Зайца он должен посмотреть на часы и тут же отправиться назад. Придя домой и снова посмотрев на свои часы, он узнает, сколько времени он отсутствовал. Теперь Болванщик должен установить на своих часах время, равное времени, которое он знает, уходя от Зайца, плюс половину времени, затраченного им на дорогу туда и обратно.
4. Как нарисовать математику? Присылайте нам рисунки, так как мы этого делать пока не умеем. Некоторые из вас, по-видимому, знают, что математики изображают произвольные множества кружочками на плоскости.
5. Через 720 суток, то есть почти через 2 года.

Интерференция света

1. В точках максимумов световые колебания в каждом из пучков происходят в одинаковой фазе, и их амплитуды складываются, а в точках минимумов — в противофазе, и амплитуды вычитаются. Поэтому $I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 = 9I_1$, $I_{\min} = (\sqrt{I_2} - \sqrt{I_1})^2 = I_1$. Таким образом, результирующая интенсивность лежит в пределах между I_1 и $9I_1$.

3. Выразим толщину воздушного зазора h через расстояние r до точки касания (радиус соответствующего кольца) и радиус сферы (рис. 2):

$$h = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R(1 - \sqrt{1 - (r/R)^2}) \approx r^2 / (2R)$$

(здесь мы воспользовались тем, что $r/R \ll 1$). Так как смещению на одну полосу соответствует увеличение толщины зазора на $\lambda/2$, то пятое темное кольцо соответствует толщине $h_5 = 5\lambda/2$. Подставляя h_5 в предыдущее выражение, находим радиус искомого кольца:

$$r_5 = \sqrt{5\lambda R} \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 1,7 \text{ мм.}$$

XXVI Международная математическая олимпиада

1. Пусть E — точка на отрезке AB такая, что $AE = AD$, а F — точка пересечения биссектрис углов BCD и $CD A$, по условию лежащая на AB . Точки C, D, E и F лежат на одной окружности (если E лежит на отрезке AF , то $\angle DEA = \angle DCE = (180^\circ - \angle A)/2$), откуда следует, что $EB = CB$ (поскольку $\angle CED = \angle ECB = (180^\circ - \angle B)/2$).

2. Будем вместо слов «окрашены в один цвет» писать значок \sim и называть число m из M «периодом», если выполнено условие: для каж-

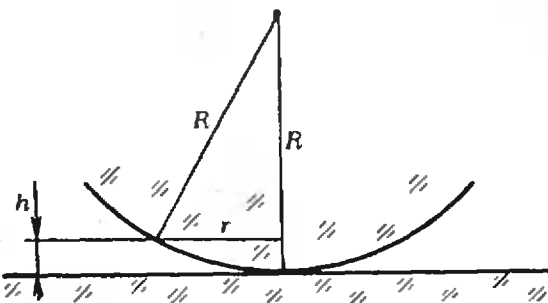


Рис. 2.

дого i из M , отличного от m , $i \sim |m - i|$ (это название оправдывается тем, что при $i > m$ будет $i \sim i - m$). По условию, взаимно простые числа n и k — периоды. Нетрудно доказать, что если $m_1 < m_2$ — периоды, то $m_2 - m_1$ — тоже период:

если $i < m_2 - m_1$, то $i \sim m_1 + i \sim m_2 - m_1 - i$;
 если $m_2 - m_1 < i < m_2$, то $i \sim m_2 - i \sim -m_2 + m_1 + i$;
 если $i = m_2$, то $i \sim m_2 - m_1 \sim m_2 - (m_2 - m_1) = m_1$;
 если $i > m_2$, то $i \sim i - m_2 \sim -m_2 + m_1 + i$.

Пользуясь этим свойством, мы можем от пары взаимно простых периодов (n, k) перейти к такой же паре $(n, n - k)$, у которой большее число станет меньше, от нее спуститься дальше и т. д., пока мы не придем к паре, содержащей период 1. Поскольку 1 — период, $1 \sim 2 \sim 3 \sim \dots \sim n$. (Проделанный «спуск» — вариант алгоритма Евклида для отыскивания наибольшего общего делителя чисел n и k .)
 4. Первое решение (рис. 3). Пусть P — точка пересечения прямых AC и KN . Поскольку $\angle KMA = \angle BMA - \angle BMK = \angle BCA - \angle BNK = \angle KPA$, точки M, P, A, K лежат на одной окружности. Далее,
 $\angle AMP = \angle AKP = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle AMB$

(четырехугольник $ACNK$ — вписанный). Следовательно, точка M лежит на отрезке BP . Выразим через $BO = b, PO = p$ и радиус R описанной около $ACNK$ окружности произведения

$$BM \cdot BP = BK \cdot BA = b^2 - R^2, \\ PM \cdot PB = PK \cdot PN = p^2 - R^2$$

и сложим эти равенства: $BP^2 = b^2 + p^2 - 2R^2$, тогда

$$BM^2 - PM^2 = \left(\frac{b^2 - R^2}{BP}\right)^2 - \left(\frac{p^2 - R^2}{BP}\right)^2 = \\ = \frac{(b^2 + p^2 - 2R^2)(b^2 - p^2)}{BP^2} = b^2 - p^2 = BO^2 - PO^2,$$

откуда $OM \perp BP$.

Второе решение (рис. 4). Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABC и KNB ; они лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BM . Нам достаточно доказать, что при гомотетии с центром B и коэффициентом $1/2$ прямая OM переходит в этот серединный перпендикуляр, то есть что отрезок BO делится отрезком O_1O_2 пополам. Для этого покажем, что OO_1BO_2 — параллелограмм.

Заметим, что $BO_1 \perp KN$ (из равнобедренного треугольника AO_1B получаем, что $\angle KBO_1 = (180^\circ - \angle AO_1B)/2 = 90^\circ - \angle ACB$, но $\angle ACB = 180^\circ - \angle AKN = \angle BKN$, следовательно, $\angle KBO_1 + \angle BKN = 90^\circ$; в случае, когда точки O_1 и C лежат по разные стороны от AB , это рассуждение нужно немного изменить). Аналогично доказывается, что $BO_2 \perp AC$. Но OO_2 и OO_1 — серединные перпендикуляры к KN и AC . Таким образом, $BO_1 \parallel OO_2$ и $BO_2 \parallel OO_1$, что и требовалось доказать.

Если вам удастся найти более короткие и красивые решения, напишите в «Квант» автору задачи И. Ф. Шарыгину.

6. Условие $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ эквивалентно та-

$$1 - \frac{1}{n} < x_n < 1. \quad (1)$$

Определим функцию f_n на отрезке $[0; 1]$ равенством $f_n(x_1) = x_n$ и обозначим через a_n и b_n

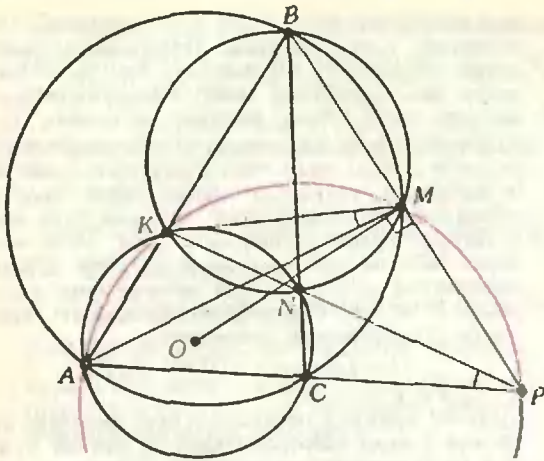


Рис. 3.

решения уравнений $f_n(a_n)=1-1/n$ и $f_n(b_n)=1$. (Эти решения существуют и единственны, причем $a_n < b_n$, так как функция f_n непрерывна, возрастает и принимает на концах отрезка значения $f_n(0)=0$ и $f_n(1) > 1$.) Тогда (1) равносильно условию

$$a_n < x_1 < b_n, \quad (2)$$

которое должно выполняться при всех $n > 1$. Последовательность (a_n) возрастает, поскольку $f_{n+1}(a_{n+1}) = 1 - 1/(n+1) > 1 - 1/n = f_n(a_n) = f_{n+1}(a_n)$, аналогично доказывается, что (b_n) убывает; обе последовательности ограничены. Следовательно, каждая из этих последовательностей имеет предел — соответственно, a и b , $a < b$. Переходя к пределу в (2), получаем, что число x_1 удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда $a < x_1 < b$.

Остается доказать единственность x_1 , то есть равенство $a=b$. Заметим, что разность $f_n(b) - f_n(a)$ возрастает:

$$f_{n+1}(b) - f_{n+1}(a) = (f_n(b) - f_n(a))(f_n(b) + f_n(a) + \frac{1}{n}) > f_n(b) - f_n(a)$$

(мы использовали неравенство $f_n(a) + 1/n > f_n(a_n) + 1/n = 1$). Поэтому $b - a = f_1(b) - f_1(a) < f_n(b) - f_n(a) < f_n(b_n) - f_n(a_n) = 1/n$ при всех n , а значит, $b - a = 0$.

XVI Международная физическая олимпиада

Теоретический тур

Задача 1

На рисунке 5 показаны положения антенн 1 и 2 (расстояние между которыми r) и направления на города A и B (угол между которыми ψ). Полные фазовые сдвиги колебаний, возбуждаемых обеими антеннами в некоторой точке, а направления A и B равны

$$\Delta(A) = 2\pi \frac{r \cos \alpha}{\lambda} + \Delta\varphi, \quad (1)$$

$$\Delta(B) = 2\pi \frac{r \cos(\psi - \alpha)}{\lambda} + \Delta\varphi, \quad (2)$$

где λ — длина волны передатчика, $\Delta\varphi$ — разность фаз колебаний в антеннах, α — угол между плоскостью, проходящей через обе антенны, и направлением на город A. Запишем условия минимума интенсивности в городе A и максимума интенсивности в городе B:

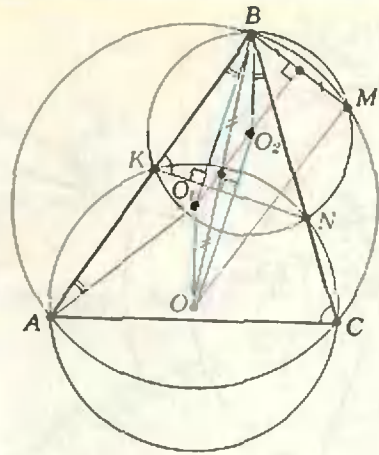


Рис. 4.

$$\Delta(A) = (2n + 1)\pi, \quad (3)$$

$$\Delta(B) = 2\pi k, \quad (4)$$

где k и n — целые числа. Из выражений (1) — (4) следует

$$\Delta(B) - \Delta(A) = 2\pi \frac{r}{\lambda} (\cos(\psi - \alpha) - \cos \alpha) = (2(k - n) - 1)\pi,$$

откуда

$$r = \frac{\lambda}{4 \sin(\psi/2)} \frac{2(k - n) - 1}{\sin(\alpha - \psi/2)}.$$

Расстояние r между антеннами минимально, если $k = n$ и $\alpha - \psi/2 = -\pi/2$. В этом случае

$$r_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\psi/2)}, \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{\psi - \pi}{2}, \quad (6)$$

то есть нормаль к плоскости, проходящей через антенны, является биссектрисой угла ψ . Из выражений (1), (3), (5) и (6) найдем

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Изменение знака $\Delta\varphi$ (от $\pi/2$ до $-\pi/2$) приводит к противоположному эффекту: максимальная интенсивность излучения будет в направлении A, а минимальная — в направлении B. На рисунке 6 показаны положения антенн, направление на север N, а также направления на данные города A и B. Из этого рисунка видно, что

$$\psi = \psi_2 - \psi_1 = 85^\circ,$$

$$r_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\psi/2)} = \frac{c}{4\nu \sin(\psi/2)} \approx 4,1 \text{ м.}$$

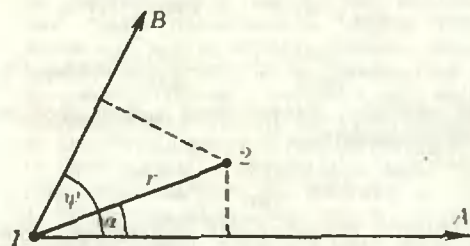


Рис. 5.

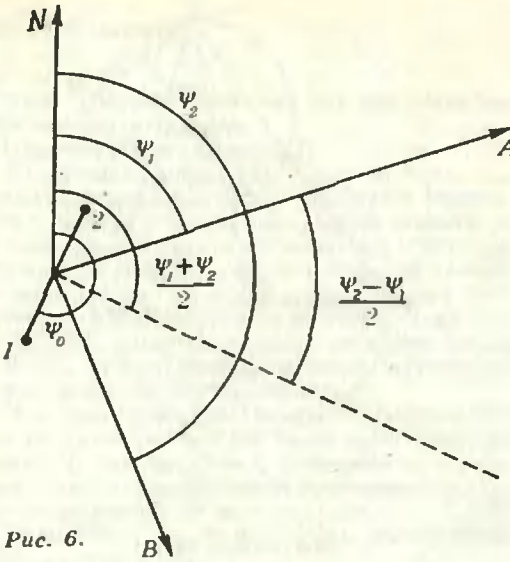


Рис. 6.

$$\psi_0 = 90^\circ + \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = 204,5^\circ.$$

Обсуждение случая $\psi_1 \cong \psi_2$ предоставляется читателю.

Задача 2

а) Под действием силы Лоренца происходит перераспределение электронов по поверхности бруска. Электроны двигаются до тех пор, пока сила \vec{F}' , действующая на них со стороны электрического поля с напряженностью \vec{E}' , которое создается возникшими поверхностными зарядами, не уравновесит силу Лоренца \vec{F}_L (рис. 7):

$$F_L = F', \quad e v B = e E', \\ E' = v B.$$

Полиная напряженность \vec{E}_n электрического поля в бруске равна (рис. 8):

$$\vec{E}_n = \vec{E}' + \vec{E}^c.$$

Так как сила тока I в бруске равна $I = nevcb$, то

$$v = \frac{I}{necb}, \quad E' = vB = \frac{IB}{necb}, \quad E = \frac{v}{u} = \frac{I}{necbu}.$$

Тогда

$$E_n = \sqrt{E'^2 + E^2} = \frac{I}{necb} \sqrt{\frac{1}{u^2} + B^2} \approx 4,1 \text{ В/м}, \\ \alpha = \text{arctg}(E'/E) = \text{arctg}(Bu) \approx 38^\circ.$$

б) В направлении ребра b возникнет напряжение

$$U = E' b = \frac{IB}{nec} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ В}.$$

в) Разность потенциалов U будет изменяться по закону

$$U = \frac{IB}{nec} = \frac{1}{nec} I_0 \sin \omega t \cdot B_0 \sin(\omega t + \varphi) = \\ = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \varphi - \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos(2\omega t + \varphi).$$

Таким образом, напряжение имеет постоянную составляющую

$$U_n = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \varphi.$$

г) Мощность, потребляемая аппаратом, равна $P = IU \cos \varphi_1$, где I и U — действующие значения силы тока и напряжения, φ_1 — разность

фаз колебаний силы тока и напряжения. Постоянная составляющая напряжения вдоль ребра b бруска $U_0 \sim I_0 B_0 \cos \varphi_2$, где φ_2 — разность фаз колебаний тока и индукции магнитного поля. Если аппарат включить так, как показано на рисунке 9, то при выполнении условия $R \gg \omega L$ сила тока в катушке, а значит и индукция магнитного поля, будет пропорциональна напряжению на аппарате, сила тока в бруске будет пропорциональна силе тока через аппарат и $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. В этом случае постоянная составляющая напряжения вдоль ребра b бруска будет пропорциональна мощности, потребляемой аппаратом:

$$U_0 \sim I_0 B_0 \cos \varphi \sim IU \cos \varphi = P.$$

Задача 3*)

а) Если принять потенциальную энергию аппарата в поле тяготения Солнца равной нулю при бесконечном удалении от Солнца, то для выхода космического аппарата за пределы Солнечной системы с орбиты Земли необходимо, чтобы в момент старта его полная энергия была больше или равна нулю:

$$E = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{r_1} \geq 0, \quad v^2 \geq \frac{2GM}{r_1}, \quad (1)$$

где m — масса аппарата, r_1 — радиус земной орбиты, M — масса Солнца, v — скорость аппарата относительно Солнца. Орбитальная скорость Земли v_0 определяется из второго закона Ньютона:

$$G \frac{mM}{r_1^2} = m \frac{v_0^2}{r_1}, \quad v_0^2 = G \frac{M}{r_1}. \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2) получаем

$$v^2 \geq 2v_0^2, \quad v \geq \sqrt{2}v_0.$$

С другой стороны, между стартовой скоростью

*) Решение этой и следующих задач несколько выходит за рамки программы по физике для нашей средней школы. (Примеч. ред.)

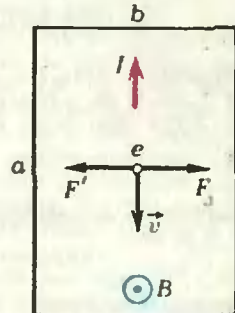


Рис. 7.

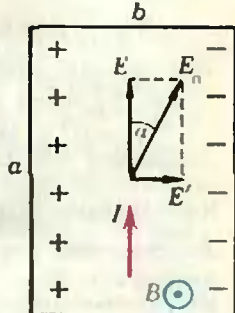


Рис. 8.

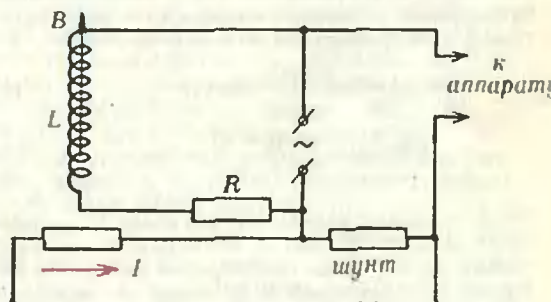


Рис. 9.

\vec{v}_a и скоростями \vec{v} и \vec{v}_0 существует соотношение (рис. 10) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_a$. Из рисунка 10 ясно, что $v \leq v_0 + v_a$, то есть

$$v_a \geq v - v_0 \geq (\sqrt{2} - 1)v_0. \quad (3)$$

Следовательно, минимальное значение искомой скорости

$$v_a = v_0(\sqrt{2} - 1) \approx 12,4 \text{ км/с}$$

достигается при угле φ между векторами \vec{v} и \vec{v}_0 , равном нулю ($\varphi = 0$).

б) Для нахождения параллельной \vec{v}_1 и перпендикулярной \vec{v}_\perp составляющих скорости аппарата \vec{v} в момент пересечения орбиты Марса (рис. 11) воспользуемся законами сохранения момента импульса и энергии:

$$m(v_0 + v_6)r_1 = mv_1r_2, \\ \frac{m(v_0 + v_6)^2}{2} - G \frac{mM}{r_1} = \frac{m(v_1^2 + v_\perp^2)}{2} - G \frac{mM}{r_2},$$

где r_2 — радиус орбиты Марса. Отсюда находим

$$v_1 = \frac{r_1}{r_2}(v_0 + v_6), \quad (4)$$

$$v_\perp = \sqrt{(v_0 + v_6)^2(1 - r_1^2/r_2^2) - 2v_0^2(1 - r_1/r_2)}. \quad (5)$$

в) Перейдем в систему отсчета, связанную с Марсом. Из потенциальности гравитационного поля следует, что в этой системе аппарат, выйдя из гравитационного поля Марса, имеет тот же модуль скорости, что и при входе в поле: $v'_i = v_i$, а только изменяется направление скорости (рис. 12). Для того чтобы после облета Марса корабль покинул Солнечную систему, необходимо, чтобы его скорость v'_i удовлетворяла неравенству, аналогичному неравенству (3):

$$v'_i \geq (\sqrt{2} - 1)v_M, \quad (6)$$

где v_M — орбитальная скорость Марса, равная

$$v_M = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} = v_0 \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}. \quad (7)$$

При входе в гравитационное поле Марса корабль имеет скорость v_i , которую можно определить из выражения (рис. 13)

$$v_i = \sqrt{v_\perp^2 + (v_1 - v_M)^2}. \quad (8)$$

Из соотношений (6), (7) и (8), условия $v_i = v'_i$ и значений v_\perp и v_1 из пункта б) получаем выражение для стартовой скорости корабля v_k относительно Солнца:

$$v_k \geq v_0 \left(\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{3/2} + \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 + 2 - 2\sqrt{2} \frac{r_1}{r_2}} \right).$$

Отсюда минимальная скорость запуска v_a относительно Земли равен

$$v_a = v_k - v_0 = v_0 \left(\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{3/2} + \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 + 2 - 2\sqrt{2} \frac{r_1}{r_2}} - 1 \right) \approx 0,185 v_0 \approx 5,5 \text{ км/с}.$$

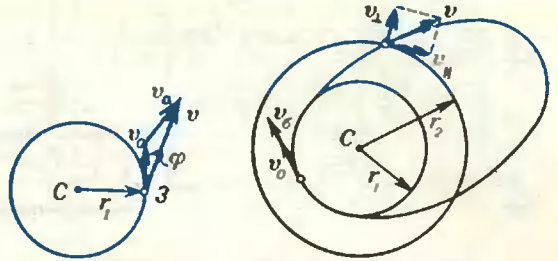


Рис. 10.

Рис. 11.

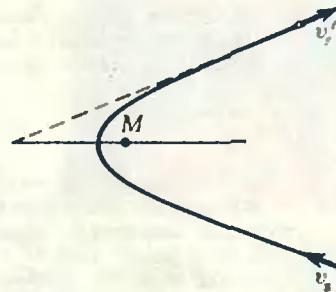


Рис. 12.

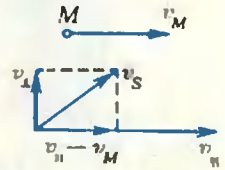


Рис. 13.

Энергия аппарата в системе отсчета, связанной с Солнцем, при таком способе запуска не сохраняется — она возрастает за счет изменения кинетической энергии Марса.

г) Сбереженную часть энергии можно определить по формуле

$$\alpha = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{v_a^2 - v'_a{}^2}{v_a^2} \approx 0,8 = 80 \%$$

Однако для практических целей более важно другое отношение

$$\beta = \frac{m_1 - m_2}{m_1},$$

где m_1 и m_2 — массы топлива, необходимые для разгона аппарата в первом и втором случаях. В соответствии с формулой Циолковского

$$m = m_0(e^{v_0/u} - 1)$$

(m_0 — полезная масса аппарата, u — скорость истечения газов относительно аппарата) получаем

$$\beta = \frac{e^{v_a/u} - e^{v'_a/u}}{e^{v_a/u} - 1}$$

— ответ перестает быть однозначным и зависит от величины u . При $u \gg v_a$ $\beta \approx 0,55$; для современных ракет, у которых $u \approx 5 \text{ км/с}$, $\beta \approx 0,81$.

Экспериментальный тур

Задача 1

Для выполнения работы необходимо было собрать измерительную схему, изображенную на рисунке 3 в статье. Так как электронная схема обеспечивала только пропорциональность между максимальным отклонением стрелки вольтметра U и изменением магнитного потока $\Delta\Phi$ через катушку, надо было найти коэффициент пропорциональности между ними, то есть откалибровать измерительную систему. С этой целью составлялась дополнительная электрическая цепь по рисунку 14. Катушки L_1 и L_2 закреплялись на пластине таким образом, чтобы одна служила продолжением другой (с малым зазором) при одинаковом направлении магнитных полей. В результате

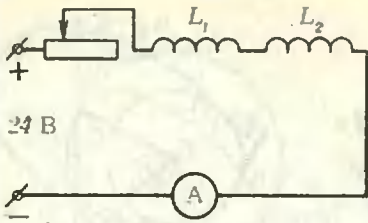


Рис. 14.

с достаточно большой точностью можно было принять, что индукция магнитного поля в середине такой «объединенной» катушки определяется выражением

$$B_0 = \mu_0 \frac{In}{l}$$

где I — ток, n — число витков в катушке, l — ее длина, μ_0 — магнитная постоянная. Если внести измерительную катушку в зазор между катушками L_1 и L_2 и резко убрать ее, то максимальное отклонение стрелки прибора U_0 будет пропорционально изменению магнитного потока через катушку, а следовательно, индукции B_0 магнитного поля:

$$U_0 \sim \Delta\Phi \sim \Delta B \sim B_0, U_0 = \alpha B_0$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{U_0}{B_0} = \frac{U_0 l}{\mu_0 I n}$$

(Жюри снижало оценку, если не проводилось экспериментальное доказательство зависимости $U/B = \text{const}$ для различных значений U и B). Положение центров магнитов в «черном ящике» можно было определить при помощи пробного магнита, подвешенного на нити (рис. 15). Координату z можно было определить, измеряя B_z на определенной высоте над пробным магнитом и сравнивая эту величину с полем в плоскости XY над центрами магнитов. С помощью измерительной схемы определялась зависимость поля B_z от x и y .

По формуле $B_{\text{max}} = U_{\text{max}}/\alpha$ измерялось максимальное значение индукции магнитного поля пробного магнита.

Задача 2

Включив электромотор и запустив секундомер, подключенный к компьютеру, получают на дисплее компьютера таблицу $\varphi - t - \Delta t$, где φ — угол поворота диска, t — время, прошедшее от начала измерений, Δt — время полуоборота диска. По этой таблице строится график $\varphi(t)$ при ускорении и замедлении диска (кривые a и b на рисунке 16). Затем составляются новые таблицы для построения графиков $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \pi/\Delta t = \pi/(t_2 - t_1),$$

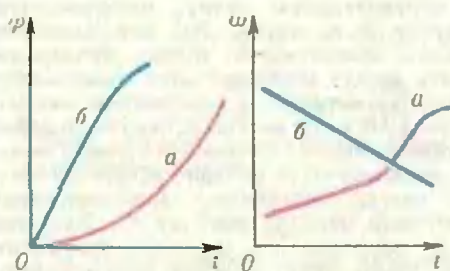


Рис. 16.

Рис. 17.

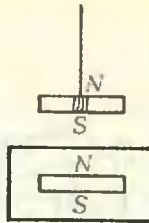


Рис. 15.

где t_1 и t_2 — времена регистрации двух последовательных проходов стержня около индукционного датчика. Средняя угловая скорость ω рассчитывается для момента времени $t = (t_1 + t_2)/2$. Графики зависимости $\omega(t)$ при ускорении и замедлении диска представлены на рисунке 17 (кривые a и b). Далее рассчитываются значения углового ускорения β . Среднее угловое ускорение на интервале времени от $(N-1)$ -й до $(N+1)$ -й регистрации стержня равно

$$\beta_N = \frac{\omega_{N+1} - \omega_{N-1}}{((t_N - t_{N-1}) + (t_{N+1} - t_N))/2},$$

где ω_{N-1} — угловая скорость на интервале от t_{N-1} до t_N , а ω_{N+1} — на интервале от t_N до t_{N+1} . Графики зависимости $\beta(t)$ для ускорения и замедления приведены на рисунке 18 (кривые a и b). Момент сил при ускорении мотора равен $M_{\text{уск}} = I\beta_{\text{уск}}$, где I — момент инерции диска. Так как $M_{\text{уск}} = M_{\text{вр}} - M_{\text{тр}} = M_{\text{вр}} - I\beta_{\text{зам}}$, то $M_{\text{вр}} = I(\beta_{\text{уск}} + \beta_{\text{зам}})$. Эти выражения позволяют построить графики $M_{\text{вр}}(\omega)$, $M_{\text{тр}}(\omega)$ и $M_{\text{уск}}(\omega)$ (кривые $a, б, в$ на рисунке 19). Графики зависимости мощности мотора от угловой скорости строятся, исходя из формул $P_{\text{вр}} = M_{\text{уск}}\omega$, $P_{\text{тр}} = M_{\text{тр}}\omega$, $P_{\text{уск}} = M_{\text{вр}}\omega$ (кривые $a, б$ и $в$ на рисунке 20).

Избранные школьные задачи

(см. «Квант» № 11)

1. 15. Указание. Обозначьте $1/11 = a$, $1/13 = b$ и перепишите сумму в виде

$$(2+a)(3-b) + (1+2a)(2+b) + (1-a)(7+b).$$

2. $x=1/993$, $y=1/992$, $z=1/994$. Указание. $a+b+c=3 \cdot 993$, где $a=1/x$, $b=1/y$, $c=1/z$. 4. 7 ч. 50 мин.

5. Указание. $0 = (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab+bc+ca) \cdot (a+b+c) - 3abc$.

6. Обозначьте

$$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \dots \cdot \frac{100}{102},$$

$$y = \frac{2}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{10} \cdot \dots \cdot \frac{101}{103},$$

$$z = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{9}{11} \cdot \dots \cdot \frac{102}{104}.$$

Поскольку $k/(k+2) > n/(n+2)$ при $k > n > 0$, имеем $x < y < z$. Поэтому

$$\begin{aligned} x^3 < xyz &= \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104} = \\ &= \frac{2}{103 \cdot 104} < \frac{2}{100 \cdot 100} = \frac{1}{5000} < \frac{1}{17^3}. \end{aligned}$$

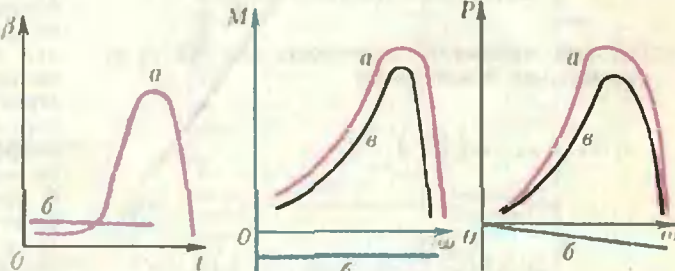


Рис. 18.

Рис. 19.

Рис. 20.

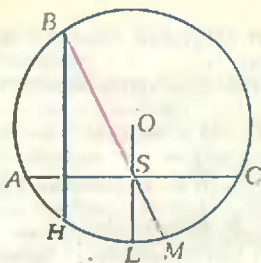


Рис. 21.

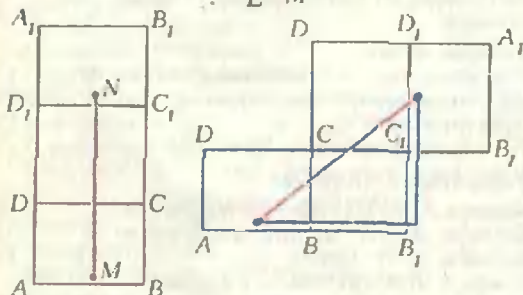


Рис. 22.

Рис. 23.

откуда $x < \frac{1}{17}$.

7. $a+b, \sqrt{r}, ab, ar, \sqrt{a+\sqrt{b}}, \sqrt{a+\sqrt{r}}$.
 8. 5/2. Указание. Положите $x = \frac{a^2+b^2}{ab}$ и докажете, что $x \geq 2$.

9. Указание. Пусть N, L, M — точки пересечения с окружностью высоты, биссектрисы и медианы, O — центр окружности. Соедините точки O и L , после чего проведите через N прямую, параллельную OL : тогда вершина B искомого треугольника — точка пересечения этой прямой с окружностью. Соедините точки B и M ; пусть S — точка пересечения прямых BM и OL . Проведя через S хорду, перпендикулярную радиусу OL , получите вершины A и C искомого треугольника (см. рисунок 21).

10. $|\vec{BA}_1 + \vec{BA}_2 + \dots + \vec{BA}_8| = 4$. Указание. $\vec{BA}_i = \vec{BO} + \vec{OA}_i$, где O — центр окружности ($i=1, 2, \dots, 8$), поэтому $\vec{BA}_1 + \vec{BA}_2 + \dots + \vec{BA}_8 = 8 \cdot \vec{BO} + (\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_8)$. Докажите, что $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_8 = \vec{0}$.

11. $2^{2001x} + 2^{2002x} \geq 2\sqrt{2^{2001x} \cdot 2^{2002x}} = 2^{1+\frac{1}{2} \cdot 2001x} = 2^{1+\frac{2001}{2}x} > 2^{1-\frac{1}{2}}$.

12. 2 корня. Указание. Перепишите данное уравнение в виде $(\ln x)/x = (\ln 3)/3$ и покажите, что функция $(\ln x)/x$ на промежутке $]0; 1[$ возрастает, а на промежутке $]1; \infty[$ убывает.

13. Указание. Пусть $\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}, \vec{AD} = \vec{d}$, тогда $\vec{CD} = \vec{d} - \vec{c}, \vec{BD} = \vec{d} - \vec{b}, \vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$. По условию $\vec{d} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, поэтому $\vec{d} \cdot \vec{b} = \vec{d} \cdot \vec{c}$.

14. $\sqrt{1658}$. Указание. На рисунках 22, 23 представлены фрагменты развертки параллелепипеда и два возможных варианта для пути из M в N . В случае рисунка 22 длина пути равна 42, в случае рисунка 23 длина пути равна $\sqrt{1658}$.

«Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 11)

1. Из условия задачи следует уравнение $(10x+y) - (10y+x) = x+y$, где x и y — цифры

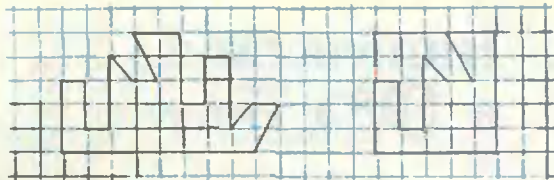


Рис. 24.

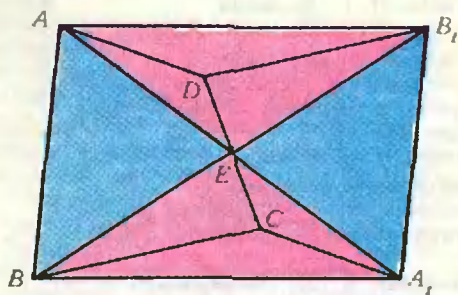


Рис. 25.

первого двузначного числа. Отсюда $x=5y$, а учитывая, что x и y — цифры, получаем $x=5, y=4$. Искомый номер 54—45.

2. См. рисунок 24.
 3. Сила трения пропорциональна силе нормального давления. Рассмотрим книгу, по которой скользит вытаскиваемая книга. Сила трения ее о лежащую под ней книгу больше, чем о скользящую по ней, на величину, пропорциональную весу одной книги. Именно поэтому она и остается на месте. Тем более остаются на месте книги, лежащие под ней.

4. На 3 оканчиваются только кубы чисел, последняя цифра которых равна 7. Кроме того, какую бы цифру мы ни поставили вместо звездочки, получившееся число будет меньше, чем 30^3 , но больше, чем 20^3 . Следовательно, наше число должно быть равно 27^3 . Чтобы найти искомую цифру, можно не возводить 27 в куб; достаточно заметить, что число $19 \cdot 83$ должно делиться на 9, следовательно, сумма его цифр должна делиться на 9, что возможно лишь при $\ast = 6$.
 5. Отразим четырехугольник $ABCD$ относительно точки E (рис. 25). Четырехугольник ABA_1B_1 , где A_1 и B_1 — симметричные точкам A и B точки, — параллелограмм (AA_1 и BB_1 — его диагонали). Заметим, что и в параллелограмме ABA_1B_1 и в шестиугольнике $ABCA_1B_1D$ площади синих и красных частей (см. рис. 25) равны. Но синие части в шестиугольнике и в параллелограмме одинаковы. Значит, должны быть одинаковы и красные части. Отсюда следует, что точки C и D лежат, соответственно, на отрезках BA_1 и AB_1 , то есть стороны BC и AD данного четырехугольника параллельны.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 9)
 Задание 17 (С. Веселенчук, 1985 г.). 1. Фд7! Кр:h7 2. Кf6x, 1...Kpf8 2.Л:h8x, 1...g6 2.Фf7x, 1...Ф:h7 2.Фe8x.
 Задание 18 (А. Семенов, 1985 г.). Многие читатели нашли более короткий путь к цели: 1.Лa4 Кр:b2 2.Лb4+ Кра3 3.Крc3 Кра2 4.Лa4+ Крb1 5.Лa8 Крc1 6.Лa1x. Однако этот путь ... ошибочный. Дело в том, что в начальной позиции ход черных (иначе невозможно указать их предыдущий ход), и решение совсем иное: 0...Кр:a2 1.Крc3 Крb1 2 — 5.g4—g5—g6—g7 Крb1 6.g8!i Кра2 7.Лa8+ и 8.Лa1x.

Напечатано в 1985 году

День советской науки	4	2		
«Кванту» — 15 лет	1	2		
К нашим читателям	1	3		
Памяти И. К. Кикоина	2	2		
С новым учебным годом!	9	2		
40 лет Великой Победы	5	2		
<i>Гнеденко Б. В.</i> Математика и математики в Великой Отечественной войне	5	9		
<i>Кикоин И. К.</i> Физики — фронту	5	3		
Статьи по математике				
<i>Бродский Я. С., Слипченко А. К.</i> Функциональные уравнения и группы	7	23		
<i>Бушмелев А. В., Лавренченко С. А.</i> Многогранники-торы	2	3		
<i>Вавилов В. В.</i> Об одной формуле Христиана Гюйгенса	11	9		
<i>Гиндикин С. Г.</i> Звездный век циклоиды	6	8		
<i>Гончаров А. Б.</i> Арифметика гауссовых чисел	12	8		
<i>Земляков А. Н.</i> Введение в стереометрию, или «Аксиоматические игры»	9	14		
<i>Ляшко О. В.</i> Почему не уменьшится сопротивление	1	10		
<i>Петров Ю. С.</i> Висячие мосты	8	22		
<i>Понтрягин Л. С.</i> Обобщение чисел	2	6		
<i>Понтрягин Л. С.</i> Обобщение чисел	3	2		
<i>Почуев В. Р.</i> Приближенные вычисления и формула Тейлора	4	3		
<i>Привень А. И.</i> Не беда, что нет функций	6	20		
<i>Розов Н. Х., Сендов Бл. Х.</i> Предыстория рождения компьютера	9	3		
<i>Сендов Бл. Х., Розов Н. Х.</i> История рождения компьютера	10	8		
<i>Соловьев Ю. П., Сосинский А. Б.</i> Геометрия скользящих векторов	8	9		
<i>Трофимов В. В.</i> Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки	5	22		
<i>Успенский В. А., Семенов А. Л.</i> Решимые и нерешимые алгоритмические проблемы	7	9		
Статьи по физике				
<i>Авилон В. В.</i> Физика + Математика + ЭВМ	11	2		
<i>Асламазов Л. Г.</i> Соотношение неопределенностей	7	2		
<i>Ашкинази Л. А.</i> Что же такое электризация трением?	6	16		
<i>Болотовский Б. М.</i> Что мы видим?	6	2		
<i>Варламов А. А., Маларовский А. И.</i> Переговорная трубка длиной в экватор?	2	13		
<i>Городецкий Е. Е., Есипов В. С.</i> Конвекция и самоорганизующиеся структуры	9	8		
<i>Мазин И. И.</i> Приглашение в парную (или Физика в бане)	8	18		
<i>Марочник Л. С.</i> Свидание с кометой	5	16		
<i>Петелин А. Л., Федосеев А. И.</i> Как живут кристаллы в металле	12	2		
<i>Склокин Ф. Н.</i> Белая мгла, или Не верь глазам своим	1	16		
<i>Стасенко А. Л.</i> О функциях распределения	4	8		
<i>Тарасов Л. В.</i> Мирные профессии лазерного луча	1	4		
<i>Фабрикант В. А.</i> Парадокс Вавилова	3	6		
<i>Фабрикант В. А.</i> Первые шаги Нильса Бора в науке	10	2		
<i>Фабрикант В. А.</i> Что такое нелинейная оптика	8	2		
<i>Филонович С. Р.</i> Роберт Гук	7	16		
<i>Штейнберг А. С.</i> Репортаж из мира сплавов	3	8		
Новости науки				
Еще один тип радиоактивности	10	14		
Миллисекундные пульсары	2	12		
Пульсирующее Солнце	4	12		
Топ-кварк и тигренки Топ	1	41		
Лаборатория «Кванта»				
<i>Боровой А. А.</i> Пузырьки в жидкости	2	19		
<i>Боровой А. А.</i> Мостик из бумаги	6	22		
<i>Боровой А. А.</i> Осмос	11	15		
<i>Бялко А. В.</i> Пинг-понг... в умывальнике	3	15		
<i>Варламов А. А.</i> Из старых опытов	7	30		
<i>Коломейцев Е. Э.</i> Опыты со светящимися веществами	9	19		
<i>Тарасов Л. В., Тарасов М. Л.</i> Струя воды и... движущийся кораблик	7	28		
Математический кружок				
<i>Белый С. Б., Ровенский Е. А.</i> Обобщенная задача о ферзях	8	26		
<i>Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л.</i> Пары чисел и действия с ними	1	19		
<i>Гашков С. Б.</i> Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника	10	15		
<i>Дворянинов С. В., Ясиновский Э. А.</i> Как получаются симметричные неравенства	7	33		
<i>Крейн М. Г.</i> Диофантово уравнение А. А. Маркова	4	13		
<i>Пинтер Л., Хегедыш И.</i> Упорядоченные наборы чисел и неравенства	12	14		
Наш календарь				
Игорь Евгеньевич Тамм	7	27		
Открытие рентгеновских лучей	8	25		
Три знаменитые работы Альберта Эйнштейна	11	26		
Формула Бальмера	12	16		
Школа в «Кванте»				
Физика 8, 9, 10				
Абсолютно черное тело	2	26		
Две загадки бета-распада	5	30		
Диа- и парамагнетизма	4	19		
Импульс и кинетическая энергия	5	28		
Инерция и инертность	11	20		
Какой из трех законов Ньютона важнее?	1	25		
Как увидеть невидимое?	3	20		
Когда к телу приложены параллельные силы	2	23		
Лучи и волны	11	23		
На что способен микроскоп?	1	27		
О музыкальных звуках и их источниках	9	26		
О простых машинах	4	17		
Опыты Резерфорда и явление радиоактивности	4	20		
Открытие электрона	3	18		
О числе Фарадея и удельном заряде заряженной частицы	2	25		
Правнла Кирхгофа	1	26		
Скин-эффект	5	30		

Стробоскопический эффект и измерение ускорения	9	23	<i>Буддин А. И., Кротов С. С.</i> Повторим гидростатику	2	48
Хаотичность молекулярного движения и тепловые машины	9	24	<i>Буддин А. И., Кротов С. С.</i> Фазовые превращения	7	54
Электрический диполь и его электрический момент	11	21	<i>Бугилов Е. И.</i> Интерференция света	12	40
Математика 8, 9, 10			<i>Габович И. Г., Горништейн П. И.</i> Сколько корней имеет уравнение?	3	43
Векторы в геометрических задачах	10	21	<i>Зильберман А. Р.</i> Повторим колебания	10	48
Еще 13 доказательств теоремы о биссектрисе	2	29	<i>Козел С. М.</i> Парадоксы плоского конденсатора	8	52
Метод интервалов	12	18	<i>Овчинников О. Ю.</i> Механическая работа и механическая энергия	5	46
О теореме Лагранжа	2	30	Варианты вступительных экзаменов		
Откуда взять уравнение	4	22	Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1984 году	6	48
Отражение кривых и преобразование формул	1	29	Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена	4	57
С помощью обратной функции	5	34	Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова	4	54
Избранные школьные задачи	1—5,10,11		Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина	4	56
«Квант» для младших школьников			Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)	5	53
Задачи	1	— 12	Московский архитектурный институт	5	55
Фестиваль задач	8	32	Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана	5	52
<i>Болтянский В. Г.</i> Отгадать день рождения	11	28	Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина	1	57
<i>Гуревич Г. А.</i> Криптограмма Жюль Верна	9	30	Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова	2	54
<i>Кротов С. С.</i> О давлении и законе Паскаля, или Почему у сыра круглые дыры	1	36	Московский инженерно-физический институт	3	50
<i>Кэрролл Л.</i> Бег по кругу и длинный рассказ	2	32	Московский институт стали и сплавов	3	51
<i>Кэрролл Л.</i> Безумное чаепитие	12	22	Московский институт электронного машиностроения	1	56
<i>Кэрролл Л.</i> Билль вылетает в трубу	6	28	Московский физико-технический институт	1	55
<i>Кэрролл Л.</i> Поросянок и перец	8	36	Московский энергетический институт	3	53
<i>Кэрролл Л.</i> Сияя гусеница дает совет	7	38	Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола	5	51
<i>Родина Н. А.</i> О всемирном тяготении, приливах и отливах	8	30	Олимпиады		
<i>Семенов А. В.</i> Трение: вредное, полезное, интересное...	10	26	XI Всероссийская олимпиада школьников	10	52
<i>Тучинский Л. И.</i> Может ли быть невозможное?	4	30	XIX Всесоюзная олимпиада по математике	11	51
Калейдоскоп «Кванта»	1, 3—6, 9—11		XIX Всесоюзная олимпиада по физике	11	54
Задачник «Кванта»			Задачи юбилейной Московской городской математической олимпиады	9	58
Победители конкурса «Задачник «Кванта»	3	24	Заочная олимпиада по программированию	6	26
Призеры конкурса «Задачник «Кванта»	5	15	XXVI Международная математическая олимпиада	12	46
Задачи М901 — М960; Ф913 — Ф972	1—12		XVI Международная физическая олимпиада	12	48
Решения задач М884 — М940; Ф894 — Ф952	1—12		Новосибирская областная олимпиада по физике	9	58
Список читателей, приславших правильные решения	3, 6, 9, 12		Информация		
Задача о восьми точках	3	39	Братиславская летняя школа юных программистов	1	51
Кляксы на плоскости	9	47	Вечерняя математическая школа при МГУ	2	18
Равномерные расположения	7	51	Вечерняя физическая школа при МГУ	8	50
Искусство программирования					
<i>Абрамов С. А.</i> Самый знаменитый алгоритм	11	44			
<i>Ершов А. П.</i> Алгоритмический язык	10	42			
<i>Ершов А. П.</i> Компьютер — алгоритм — алгоритмический язык	9	50			
Полупроводниковые элементы вычислительной техники					
I. Первое знакомство	9	56			
II. Полевые транзисторы	10	46			
III. Биполярные транзисторы	11	48			
IV. Как изготавливают транзисторы в интегральных схемах	12	38			
Практикум абитуриента					
<i>Болибрух А. А., Уроев В. М., Шабунин М. И.</i> Метрические соотношения в треугольнике	4	48			

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе	1	54	Нильс Бор и «Журнал шутилой физики»	10	20
Заочная физико-техническая школа при МФТИ	12	52	Околонаучная информация	8	51
Заочная физическая школа при МГУ	4	53	По страницам журнала «Альфа»	11	47
Заочная школа при НГУ	8	60	Рыбная ловля глазами ученого	4	47
Латвийские открытые олимпиады и летняя школа «Альфа»	3	47	Сказки	1	40
Ленинградская юношеская астрономическая экспедиция	5	21	Что написано на конденсаторе?	6	47
VII Московский турнир юных физиков	8	57	Это любопытно!	8	51
Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу	1	52	Смесь		
Новый прием на заочное отделение Малого мехмата	1	53	Встреча с читателями журнала	8	8
Традиционный праздник юных математиков	8	28	Задачи для исследования	11	19
Турнир имени М. В. Ломоносова	11	25	Задачи наших читателей	6	19
VIII Турнир юных физиков	8	58	Курьезное совпадение	11	8
Физико-математическая конференция школьников	9	61	Невозможный тетраэдр	8	17
Шестой турнир городов	11	50	Советуем купить	4	11
Игры и головоломки			Советуем прочесть	5	55
Африканская головоломка	8	21	Формула площади сегмента	7	8
Задача о доминировании ферзей	7	60	Формула площади сегмента	4	46
Кроссворд	10	41	Шахматная страничка		
Уголок коллекционера	10	24	Возвращение фигур	3	3-я с. обл.
«Квант» улыбается			Вычисления на шахматной доске	5	..
Вокруг «Алисы»	9	55	Гексагональные шахматы	10	..
... и в плутоватости почасту упражнялись	3	49	Задачи на гексагональной доске	11	..
Названия коллективов в естественных науках	7	53	Инерционность мышления	6	..
			Парадоксы пешечного эндшпиля		2
			Рейтинги	9	..
			Фантастика на шахматной доске	1	..
			Фигуры на своих местах	4	..
			Цилиндрические шахматы	7	..
			Шахматные квартеты	12	..
			Шахматы на параллельных досках	8	..
			Наша анкета	12	4-я с. обл.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леопольд, В. А. Лешковцев, Ю. А. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, И. В. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Поталов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Валихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Е. Ю. Иванов, Л. З. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Суриц, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

103006 Москва К-6.

ул. Горького, 32/1, «Квант»
тел. 250-33-54

Номер оформили:

Е. В. Винодарова, М. Б. Дубих, С. Г. Захаров, Т. Н. Кольченко, Д. А. Крымов, И. Е. Смирнов, Е. К. Тенчурнина, В. Б. Юдин

Фото представили:

В. П. Марковский, В. И. Савела

Сдано в набор 18.10.85. Подписано к печати 21.11.85.

Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8

Бумага 70×108 1/16

Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,56. Т-22334

Тираж 173 335 экз.

Цена 40 коп. Заказ 2791

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорожова

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области



Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гнк.

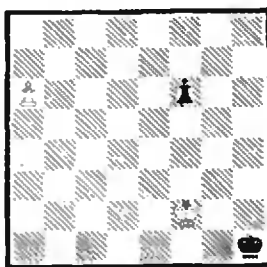
ШАХМАТНЫЕ КВАРТЕТЫ

Чем меньше фигур на доске, тем охотнее мы решаем задачу или этюд. Поскольку два места забронированы королями, четыре фигуры — минимальный материал, позволяющий создать достойное произведение шахматного искусства. Напомним два самых популярных квартета, уже встречавшихся на наших страничках.

Р. Рети, 1921 г. Белые: Крh6, п. с6; черные: Кра6, п. h5. Белые начинают и делают ничью.

Ж. Барбье, Ф. Сааведра, 1895 г. Белые: Крb6, п. с6; черные: Кра1, Лd5. Белые начинают и выигрывают.

Читателям, не знакомым с решением данных этюдов, остается только позавидовать... Этюды эти составлены давно, да и вообще трудно предположить, что при столь стремительном развитии шахматной теории и шахматной композиции могли еще быть не реализованы какие-нибудь ресурсы четырех персонажей на шахматной доске. Но шахматы неисчерпаемы — и то и дело на свет появляются новые оригинальные квартеты. Приведем несколько примеров, придуманных сравнительно недавно.



Э. Погосянец, 1970 г. Белые начинают и дают мат в 5 ходов.

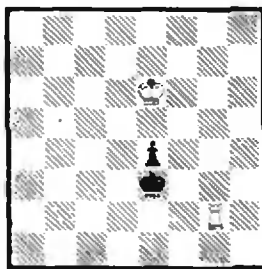
1. a7 Kph2 2. a8Л! Kph3 3. Ла4! f5 4. Лf4! (если бы пешка превратилась в ферзя, сейчас был бы пат) 4... Kph2 5. Лh4×.

Вот еще один похожий пример.

Э. Погосянец, 1977 г. Белые: Крf3, п. b7; черные: Крh3, п. h4. Белые начинают и дают мат в 4 хода.

1. b8Л! Kph2 2. Крf2! Kph3 3. Лb4! Kph2 4. Л:h4×; 2... Kph1 3. Лh8 h3 4. Л:h3×.

Борьба ладьи против пешки фундаментально исследована ЭВМ, компьютер умеет безошибочно разыгрывать любую позицию такого типа. Однако в огромном множестве положений выделить квартет, отличающийся своим изяществом, иначе говоря, заслуживающий право называться этюдом, машина пока не в состоянии...



Ю. Авербах, 1980 г. Белые начинают и выигрывают.

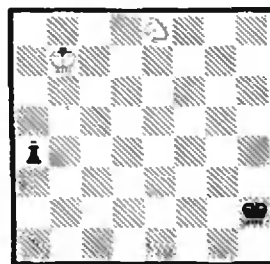
Автор этюда — гроссмейстер и крупный специалист в области эндшпиля. 1. Лg5! Неожиданное вступление, ведущее к двум симметричным вариантам: 1... Kpd2 2. Лd5+! Kpc2 3. Ле5! Kpd3 4. Крf5! e3 5. Крf4 e2 6. Крf3 с выигрышем пешки; 1... Крf2 2. Лf5+! (вновь шах необходим, чтобы выиграть темп) 2... Крg2 3. Ле5! Крf3 4. Крd5 e3 5. Крd4 e2 6. Крd3 и т. д.

Сочетание «пешка против ладьи» проиллюстрируем забавной задачей на кооперативный мат.



А. Грин, 1969 г. Кооперативный мат в 4 хода.

В «кооперативах» начинают черные, которые помогают белым поставить мат в заданное число ходов. 0... 0—0—0! 1. b5 Kpb7 2. b6 Кра6 3. b7 Ла8! 4. baФ×. Засада ферзя в сверхминиатюре выглядит весьма неожиданно.



Э. Погосянец, 1984 г. Белые начинают и делают ничью.

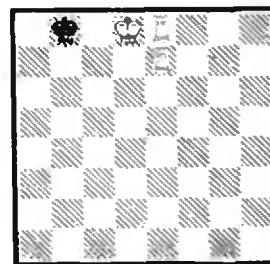
Коню придется немало потрудиться, чтобы остановить пешку. 1. Кf6! a3 2. Kg4+ Kpg1 3. Ke3 a2 4. Kc2 Kpf2 5. Крc6! Крe2 6. Крd5! Крd2 7. Ka1 Крc3 8. Крe4! Крb2 9. Крd3 Кр:a1 10. Крc2 пат.

Н. Гречишкин, 1984 г. Белые: Крe3, Ch3, п. h5; черные: Крe8. Белые начинают и выигрывают.

Этюд имеет и теоретическое значение. Черному королю осталось сделать всего один шаг, и он скроется в спасительном углу. Но... 1. Ce6! Крe7 2. h6 Kpf6! 3. Cf5! Крf7 4. Ch7! Kpf6 5. Крf4. и слон перехитрил короля, вынужденного пропустить пешку в ферзь.

Конкурсные задания

Учитывая, что этот номер новогодний, в качестве ключевых конкурсных заданий предлагаем две задачи-шутки.



23. Белые начинают и дают мат в полхода.

24. Придумайте квартет «король и ферзь против короля и ферзя», в котором бы любой шах ферзем (и белым, и черным) вел бы к его потере.

Срок отправки решений — 25 февраля 1986 г. (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 23, 24»).

Индекс 70465

Цена 40 коп.

Наша анкета

Дорогие читатели! Для улучшения работы журнала нам хотелось бы знать ваше мнение о материалах, опубликованных в «Кванте» в 1985 году. Просим ответить на вопросы нашей анкеты.

1. Место учебы (город, село, класс, курс) или работы (профессия, специальность) и возраст.

2. Наиболее и наименее интересные, по вашему мнению, статьи по математике этого года.

3. Наиболее и наименее интересные статьи по физике этого года.

4. Самая удачная и неудачная, на ваш взгляд, обложка журнала в этом году.

5. Какие рубрики журнала вам нравятся, какие новые рубрики следовало бы ввести?

6. Какие материалы этого года помогли в вашей учебе; что вы искали в «Кванте» в 1985 году, но не нашли?

7. О чем хотели бы вы прочитать на страницах нашего журнала в 1986 году?

Ответы посылайте на отдельном листе бумаги, сохранив нумерацию вопросов, до 20 февраля 1986 года.

