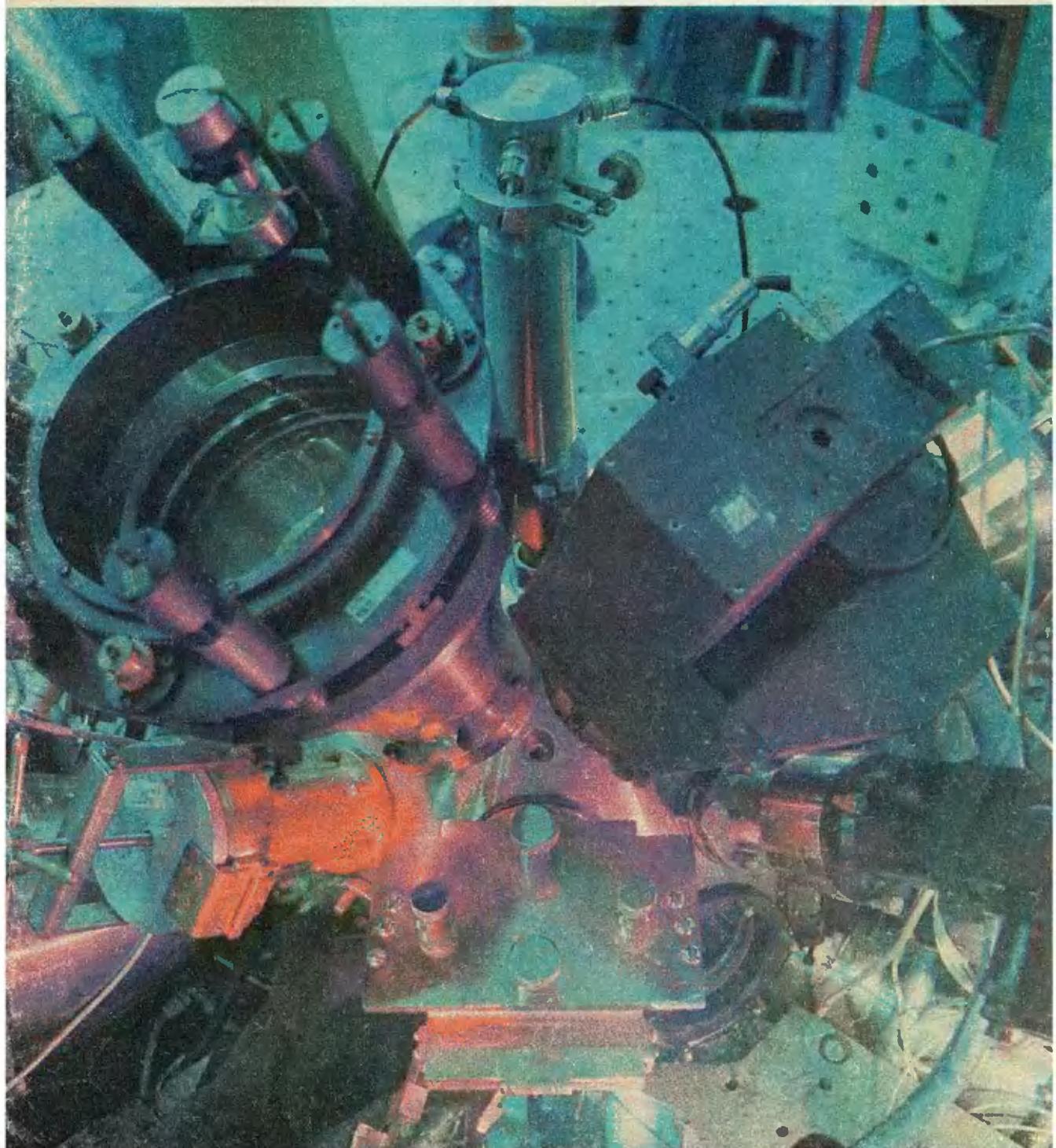


Квант

2
1980

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*



Широким фронтом ведутся в нашей стране работы по управляемому термоядерному синтезу. Одно из перспективных направлений в этой области — лазерный термоядерный синтез (ЛТС). На первой странице обложки показана центральная часть многоканальной лазерной системы «Дельфин» для исследований по ЛТС (Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР).

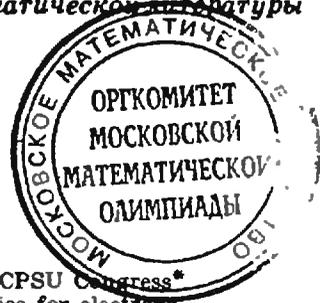
С помощью гигантской кольцевой антенны радиотелескопа АН СССР (диаметр кольца 600 м; фото внизу) астрономы могут одновременно принимать радиолучение планет Солнечной системы, отдельных звезд и иных, чрезвычайно удаленных от нас, объектов Вселенной. РАТАН-600 — мировой рекордсмен по информативности.

О некоторых других крупных научно-технических разработках рассказывается на первых страницах этого номера.





Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы



В НОМЕРЕ:

IN THIS ISSUE:

2	Навстречу XXVII съезду КПСС Д. Г. Крутогин. Города для электронов	Awaiting the 27th CPSU Congress* D. G. Krutogin. Cities for electrons
13	В. И. Арнольд. Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения	V. I. Arnold. Evolutionary processes and ordinary differential equations
21	Лаборатория «Кванта» Я. Е. Гегузин. Кардиограмма ртутного сердца	Kvant's lab Ya. E. Geguzin. Cardiograms of mercury hearts
24	Школа в «Кванте» Математика 9, 10	Kvant's school Mathematics 9, 10
28	Новости науки Новый метр	Science news The new meter
29	«Квант» для младших школьников Задачи	Kvant for younger school children Problems
30	А. С. Александров. Загадка этрусков	A. S. Alexandrov. The Etruscan mystery
32	Калейдоскоп «Кванта»	Kvant's kaleidoscope
35	Задачник «Кванта» Задачи M966 — M970; Ф978 — Ф982	Kvant's problems Problems M966 — M970; P978 — P982
38	Решения задач M946 — M950; Ф958 — Ф962	Solutions M946—M950; P958 — P962
44	Полупроводниковые элементы вычислительной техники VI. Логические схемы на транзисторах	Semiconducting elements in computers VI. Logical transistor networks
46	Искусство программирования Л. Ф. Штернберг. Программирование на микрокалькуляторе: простейшие программы	The art of programming L. F. Shternberg. Programming your pocket calculator: simplest programs
49	Практикум абитуриента В. Е. Белонучкин. Законы Кеплера и школьная физика	College applicant's section V. E. Belonuchkin. Kepler's laws and school physics
52	Варианты вступительных экзаменов	Entrance examination problems
57	Наша обложка (27) Ответы, указания, решения Шахматная страничка ЭВМ и шахматный кодекс (3-я с. обложки)	Our cover page (27) Answers, hints, solutions The chess page Computers and chess rules (3rd cover page)

Навстречу XXVII съезду КПСС

Развивать теоретическую и прикладную математику, информатику и кибернетику, физику элементарных частиц, атомного ядра и твердого тела, микро- и квантовую электронику и оптику, радиофизику, а также исследования в области атомной и термоядерной энергетики, преобразования и передачи электроэнергии, освоения нетрадиционных источников энергии.

Из проекта Основных направлений экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года

КПСС будет продолжать совершенствовать систему народного образования с учетом потребностей ускорения социально-экономического развития, перспектив коммунистического строительства, требований, выдвигаемых прогрессом науки и техники.

Из проекта новой редакции Программы КПСС

Наша страна живет в ожидании выдающегося события — очередного XXVII съезда Коммунистической партии Советского Союза. Съезд рассмотрит и утвердит важнейшие документы — новую редакцию Программы КПСС, Устав КПСС с предлагаемыми изменениями и Основные направления экономического и социального развития на 1986—1990 годы и на период до 2000 года, — которые были представлены для всенародного обсуждения.

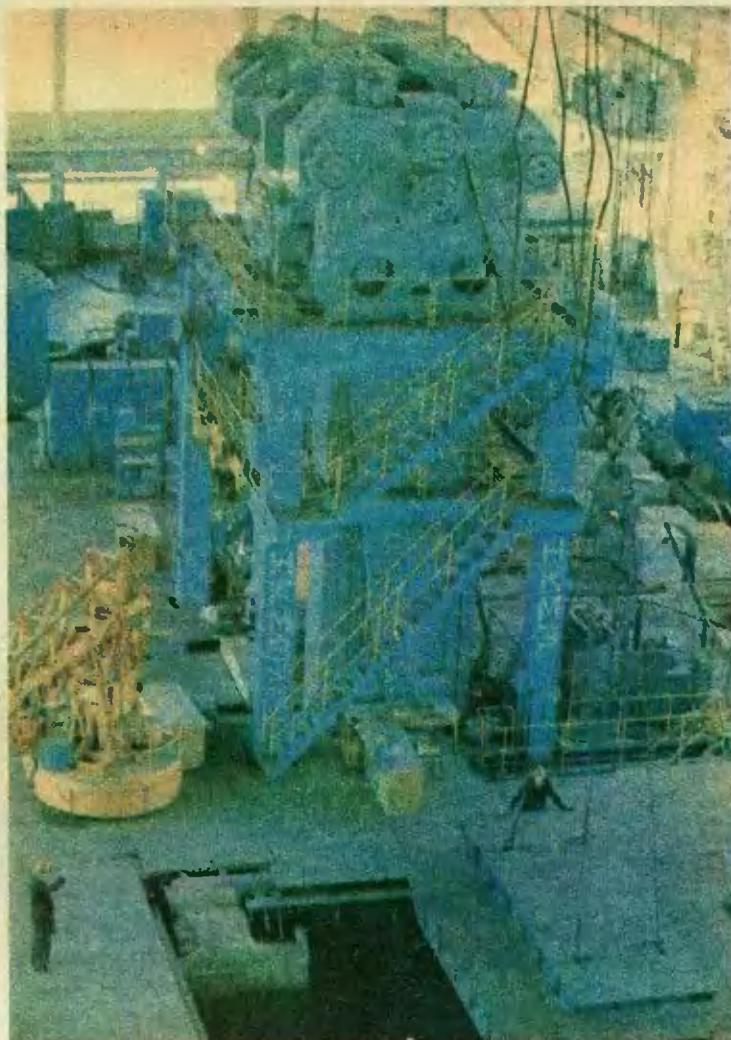
Грандиозные задачи поставлены в этих документах. За пятнадцать лет предстоит практически удвоить все основные показатели нашей экономики, увеличить производительность труда в 2,3—2,5 раза, выйти на самые передовые позиции в мировом хозяйстве. Такое ускоренное развитие невозможно без активной помощи науки. Проведенный анализ показал, что все необходимое для этого уже родилось в ходе величайшей научно-технической революции, которой ознаменована вторая половина XX века. Атомная энергетика, большая химия, информатика и вычислительная техника, новые методы обработки материалов, комплексная механизация и автоматизация производства, биотехнология, «зеленая революция» в сельском хозяйстве — вот путь, по которому мы будем идти в эти годы.

Физика и математика играют решающую роль в научно-технической революции. Они должны внести огромный вклад в интенсификацию народного хозяйства и создание материально-технической базы будущего коммунистического общества. Советские ученые успешно работают над обширным комплексом физико-математических проблем, занимая по ряду направлений ведущие позиции. Они внесли крупный вклад в исследования космоса, изучение природы элементарных частиц и управляемых термоядерных реакций, в лазерную технику, физику твердого тела, физику высоких давлений и низких температур. Успешно развивается информатика. Выполнены выдающиеся исследования по многим разделам современной математики.

Ускоренное развитие экономики тесно связано с совершенствованием подготовки научных и производственных кадров. А это накладывает немалые требования на среднюю школу и систему профессионально-технического образования. Второй год в нашей стране успешно осуществляется реформа среднего образования. Одна из ее задач — приблизить молодежь к научно-технической революции, обеспечить активное участие молодежи в коренной перестройке производительных сил нашей страны.

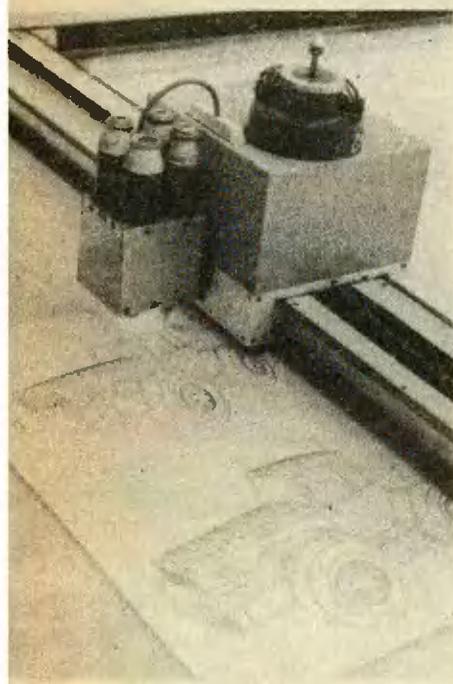
Задачи, сформулированные в подготовленных к съезду документах, долговременные. Трудиться над их решением придется и вам, наши юные читатели. И мы хотим помочь вам лучше подготовиться к этим сложным и интересным делам.

На этой и следующих страницах помещены фотографии, иллюстрирующие некоторые достижения науки и техники в нашей стране



1 ↑ 2 ↑

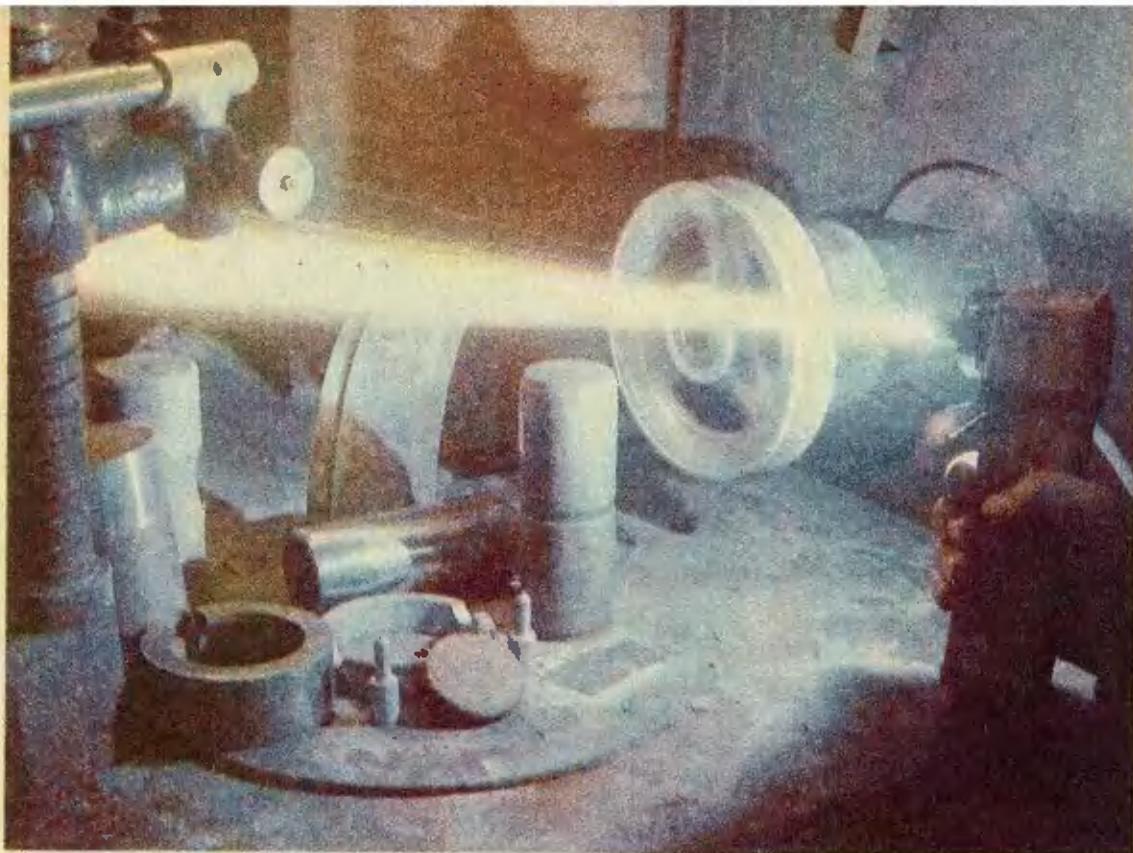
3 ↓



1. Чертежи будущего трактора создаются графопостроителем, входящим в комплекс ЕС-7054. ЭВМ позволяет за несколько секунд рассчитать и изобразить объект в любом ракурсе.

2. Мощный гидравлический пресс, используемый для создания высоких давлений при получении промышленных алмазов.

3. В этой установке протекает процесс, с помощью которого ученые моделируют фотосинтез: под действием света в растворе должны образоваться соединения с большим запасом химической энергии.



4↑

5↓

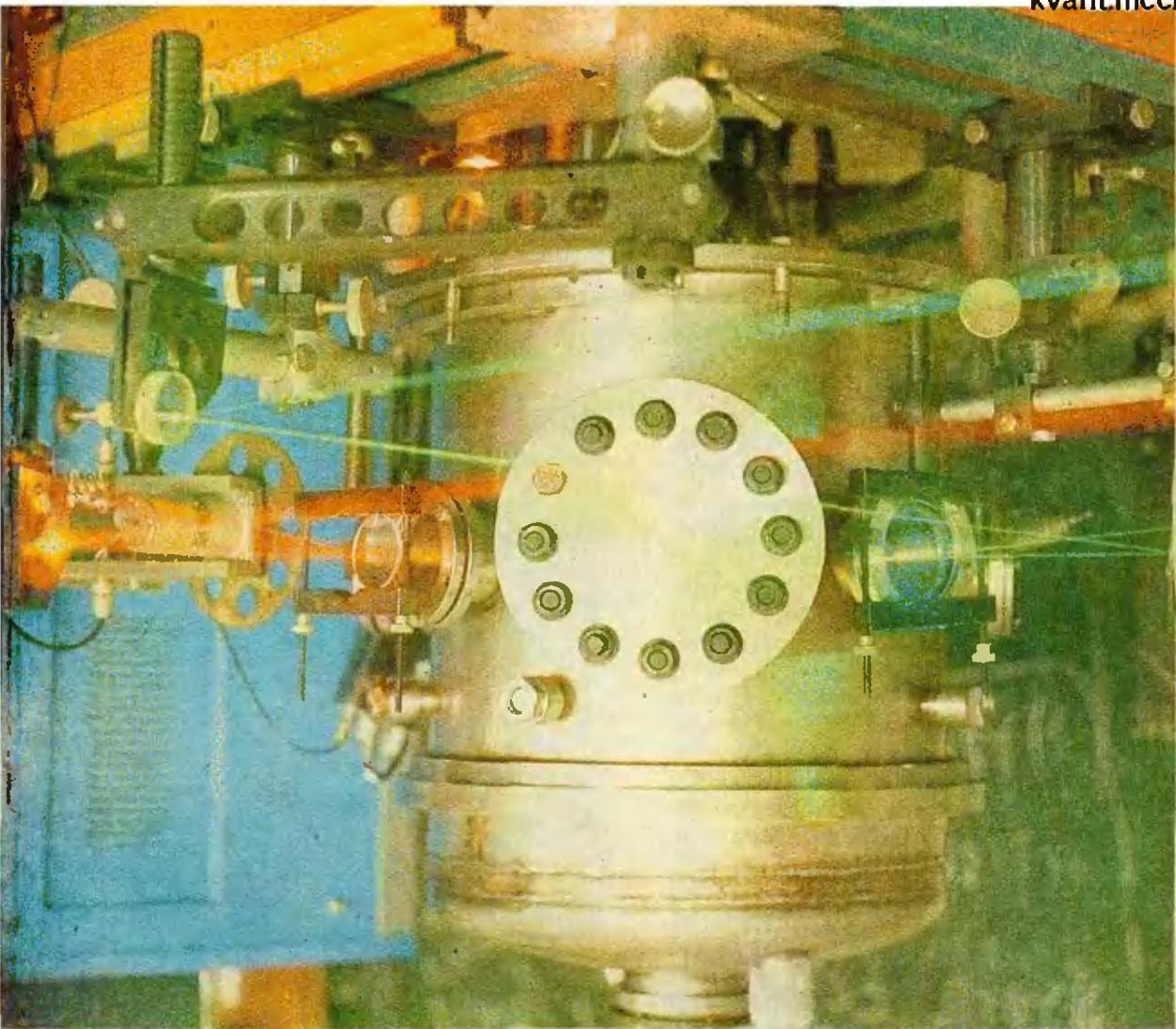
4. Так производят плазменное напыление на детали сельскохозяйственных машин. Вырывающаяся из сопла плазма содержит тончайший порошок. Он с силой «нашлепывается» на деталь, устраняя поверхностные дефекты и придавая детали твердость и жаростойкость.

5. Внутренний вид Серпуховского ускорителя на 76 ГэВ. Недавно здесь была открыта новая частица — глюбол, с помощью которой физики надеются «заглянуть» вглубь частиц, еще вчера казавшихся элементарными.

6. Космическая станция «Вега» на испытательном стенде. В июне прошлого года две такие станции, направляющиеся к комете Галлея, передали на Землю ценную научную информацию о Венере.

7. Первая в мире опытно-промышленная установка У-25 с магнетогидродинамическим генератором проектной мощностью 20 мегаватт. На таких установках происходит прямое преобразование тепловой энергии в электрическую.

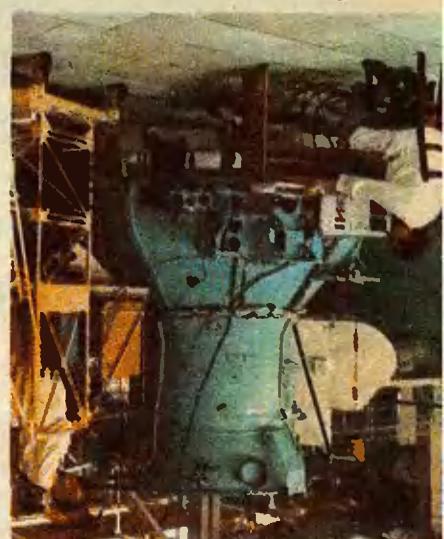
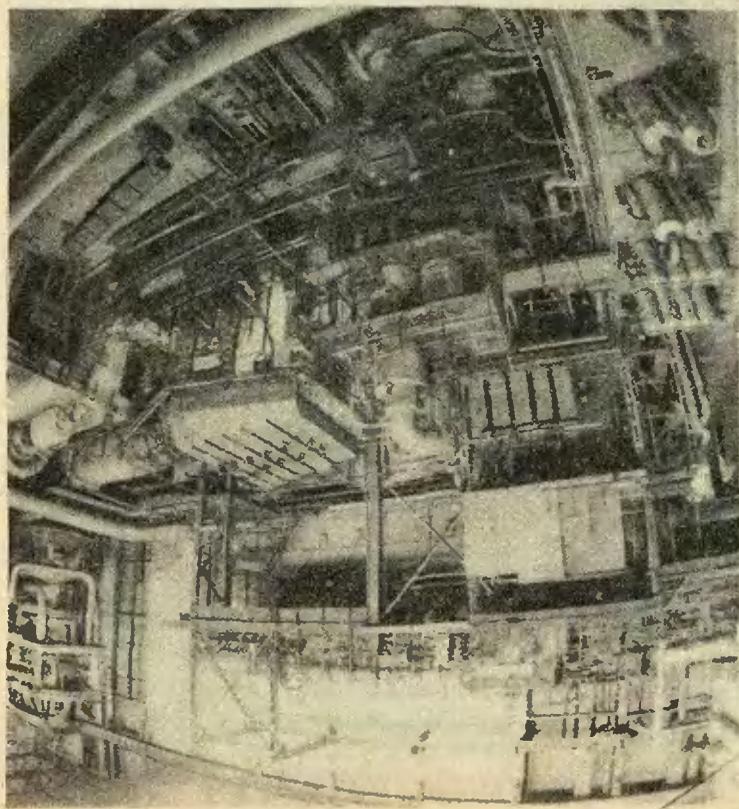
8. Одна из профессий лазерного луча — разделение изотопов. Различные изотопы



18 ↑

7 ↓

9 ↓



данного химического элемент
та поощают оптическое из-
лучение испарительно (в он-
редельных интервалах на-
стор). Для создания подобн-
того излучения сужают ла-
зеры с высокой частотой.

Осуществить комплекс мероприятий по совершенствованию технологии производства. Расширить в двенадцатой пятилетке в 1,5—2 раза применение прогрессивных базовых технологий...

Организовать массовый выпуск персональных компьютеров. Обеспечить рост объема производства вычислительной техники в 2—2,3 раза. Высокими темпами наращивать масштабы применения современных высокопроизводительных электронно-вычислительных машин всех классов.

Из проекта Основных направлений экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года

Города для электронов

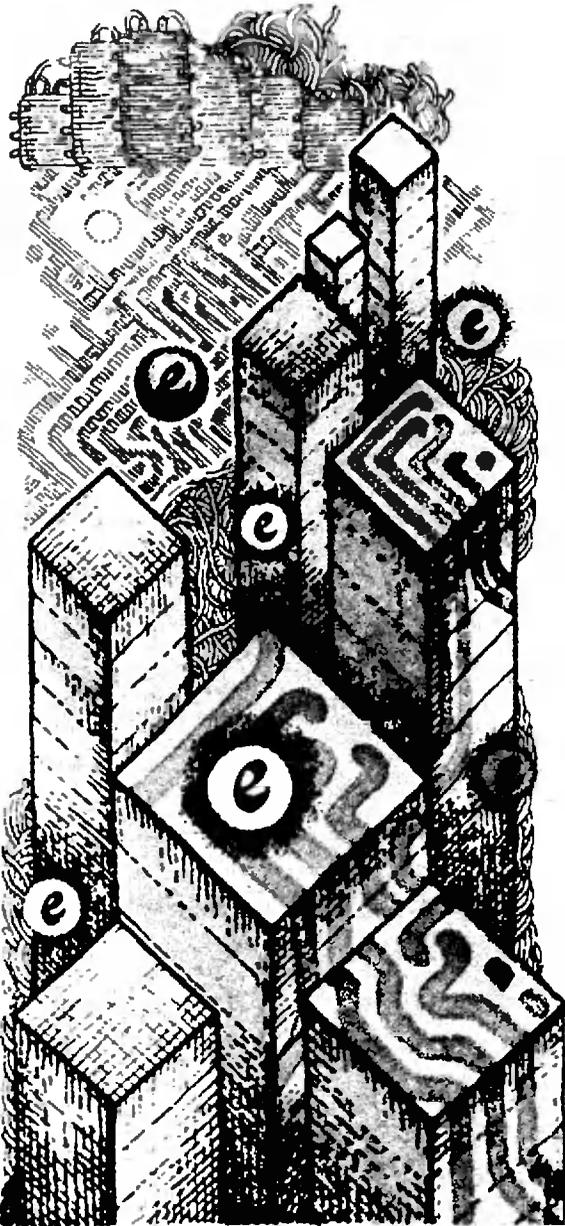
Кандидат технических наук
Д. Г. КРУТОГИН

Интегральные полупроводниковые схемы стали в последние годы основным структурным элементом твердотельной электроники. Даже опытный радиолюбитель теперь вместо сборки усилителя из деталей предпочитает использовать готовую микросхему. Тем более так поступают профессиональные конструкторы. В бытовой радиоаппаратуре, например в телевизоре, число микросхем достигает десятков, в специальной — сотен и тысяч штук на изделие. Многоэлементные интегральные схемы называются большими — сокращенно БИС. Применение таких схем оказывается особенно эффективным в вычислительной технике.*)

Как делаются микросхемы? Давайте проследим за основными этапами изготовления БИС, постараемся оценить и трудности, и достижения в их технологии.

БИС под микроскопом напоминает своей четкой планировкой карту большого города. Вот и сравним построение БИС с возведением города, города для электронов.

* От редакции. Этим вопросам посвящен цикл статей под рубрикой «Полупроводниковые элементы вычислительной техники», который публикуется в «Кванте», начиная с 9-го номера 1985 года.



Что нам стоит город построить?

Сначала мы его нарисуем. Любое строительство начинается с общей идеи, с плана. И план, и детальные рабочие чертежи должен подготовить архитектор. Архитекторами БИС являются инженеры-схемотехники. Они создают и план всего «города» — электрическую схему БИС, и проект «типового квартала» — схему отдельного узла, и чертеж конкретного «дома» — основного элемента схемы — транзистора.

Электрическая схема БИС может содержать сотни, тысячи и даже сотни тысяч отдельных элементов — диодов, триодов, резисторов, конденсаторов. Чем больше разнотипных элементов, тем больше сложностей при последующем изготовлении схемы. Поэтому уже на этапе проектирования схему стоит упростить. Существенное упрощение достигается благодаря уникальным свойствам полупроводникового триода — транзистора. Оказывается, при различных способах включения его можно использовать или как диод, или как сопровитвление (резистор), или как конденсатор с постоянной или регулируемой емкостью, или как собственно транзистор.

За счет такой универсальности транзистора можно всю электрическую схему представить как схему из транзисторов, работающих в том или ином режиме. На вид схема усложняется (да и какой радиолобитель поставит вместо резистора триод?), но таковы законы микроэлектроники — при технической реализации большой микросхемы это усложнение обернется упрощением технологического процесса: делать придется в общем однотипные элементы — транзисторы, соединяя их в схему токопроводящими дорожками (проводами).

Однако только по плану микросхему не сделаешь, хотя и без плана не обойтись. Для начала работы нужен точный чертеж микросхемы — топологическая схема. «Топология» дословно — «описание места». На топологической схеме каждый элемент микросхемы, каждая часть транзистора или проводника обретает форму, размеры, положение. Топологическая схема — то же самое, что проект строительства; в отличие от плана, проект — уже руководство к дей-

ствию. Но между планом и проектом в архитектуре и строительстве стоят две науки о земле — география и геология; иначе говоря, проект, опять же в отличие от плана, должен быть «привязан» к месту строительства. Нельзя построить ни дом, ни квартал, не зная, на что будут опираться эти дома, куда потекут дождевые воды или подуют ветры. Архитектор большой микросхемы тоже должен подумать о фундаменте, об опорной площадке БИС. От выбора фундамента во многом зависит и последующая технология строительства.

На чем стоит БИС?

Чаще всего в качестве строительной площадки для БИС используется пластина из монокристаллического особо чистого кремния. Чтобы ее получить, кремниевый монокристалл диаметром 100—150 мм и длиной 200—300 мм алмазной пилой нарезают на пластины толщиной 0,4—0,5 мм.

Полученные диски тщательно шлифуют и полируют алмазными же пастами до подлинно зеркального блеска. Но и блеск не радует технологов, ибо, несмотря на отсутствие царапин, поверхностные слои атомов кремния в пластине искажены, изуродованы контактом с частицами алмазного абразива. Как ни малы эти частицы (~0,1 мкм), они все-таки в сотни раз больше межатомных расстояний. Созданные ими в кристаллической решетке дефекты (вмятины, микроскопические трещины, сдвиги) неглубоки (по сравнению с толщиной пластины); но расположены они как раз там, где в готовой микросхеме должны двигаться электроны. Для них эти дефекты — то же, что ямы и горы строительного мусора на городских магистралях. Говорить об интенсивном движении в таких условиях не приходится.

Поэтому последняя обработка поверхности пластины — химическая полировка — «нежно» удаляет нарушенные слои кристалла полупроводника, растворяя их. После этого отполированную пластину тщательно моют в специально подготовленной деионизованной воде, сушат — и вот, наконец, стройплощадка для БИС готова.

За время обработки пластина похудела — теперь ее толщина 250—

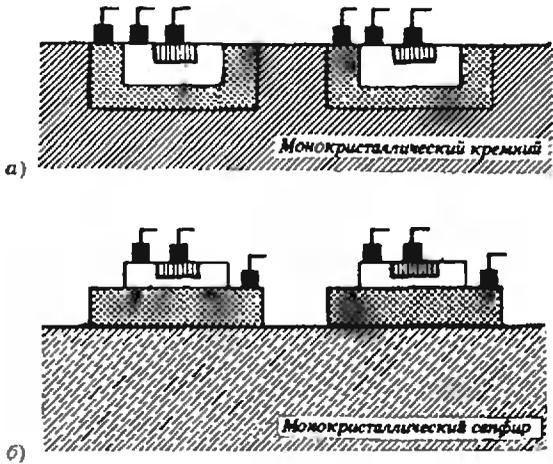


Рис. 1. Таков основной элемент интегральной схемы — транзистор — при «строительстве» на кремниевой пластине (а) и на фундаменте из сапфира (б).

300 мкм. Способ получения пластин не очень экономичен: алмазная пила толщиной 300 мкм, а затем шлифовка переводят в опилки более 60 % объема монокристаллического кремниевое слитка, полученного ценой немалых усилий и энергетических затрат. Да и толщина готовой пластины будет использована плохо. Полезная глубина, то есть толщина тех слоев, в которых потекут нужные нам токи, не превысит 1 мкм. Но сделать пластины более тонкими, к сожалению, нельзя — они будут разрушаться при обработке.

В качестве стройплощадки для БИС можно использовать пластинку диэлектрика — оксида алюминия (Al_2O_3), называемого в обиходе сапфиром. Пластинку сапфира полируют так же тщательно, как кремниевую, а затем на нее наносят монокристаллический слой кремния нужной толщины. Сапфир выбран в качестве подложки потому, что расположение атомов на поверхности кристалла сапфира при определенном направлении среза очень близко к структуре кристаллической решетки кремния. Это обстоятельство позволяет вырастить на поверхности сапфира тонкий кристаллический слой кремния — рабочую область будущего транзистора. Комбинация слоев «кремний на сапфире» — ее обозначают КНС — широко используется в технологии изготовления БИС. Она обладает важным преимуществом: сапфир — прекрасный диэлектрик, он обеспечивает пол-

ную электрическую изоляцию отдельных элементов схемы. С точки зрения топологии микросхемы эти элементы в кремниевой схеме подобны блиндажам, врытым в землю, а в КНС-структуре они подобны домикам (рис. 1).

В рамках нашей аналогии современная БИС эквивалентна городу из 100—150 тысяч домов-транзисторов с развитыми системами коммуникаций (дороги, электроснабжение и т. п.). Размеры этого города — от 2×3 мм до 6×8 мм. И на такой стройплощадке мы будем возводить все дома одновременно. Более того, на одной кремниевой пластине мы будем одновременно строить 100—150 БИС-городов (в зависимости от размеров пластины и площади микросхемы). Наша «городная» стройплощадка в натуральную величину выглядит примерно так, как на рисунке 2.

Возможно, у читателя возник вопрос: а почему бы не делать микросхему на кристалле размером, скажем, 15×15 мм — это ведь тоже немного для пластины диаметром 150 мм, а емкость БИС возрастет на порядок. Оказывается, на кристалле увеличенного размера почти наверняка найдется дефект атомной решетки, способный полностью вывести из строя БИС. На поверхности площадью 1—2 см² даже у самой лучшей на сегодня пластины встречается хотя бы один дефект. Так что приходится довольствоваться «малым».

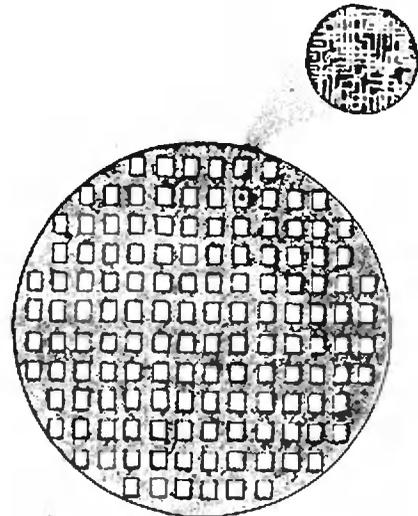


Рис. 2. Примерно так выглядит в натуральную величину «стройплощадка», на которой одновременно возводится до сотни «городов»-БИС. А чтобы разглядеть план отдельного «квартала», необходимо увеличить его в сотни раз.

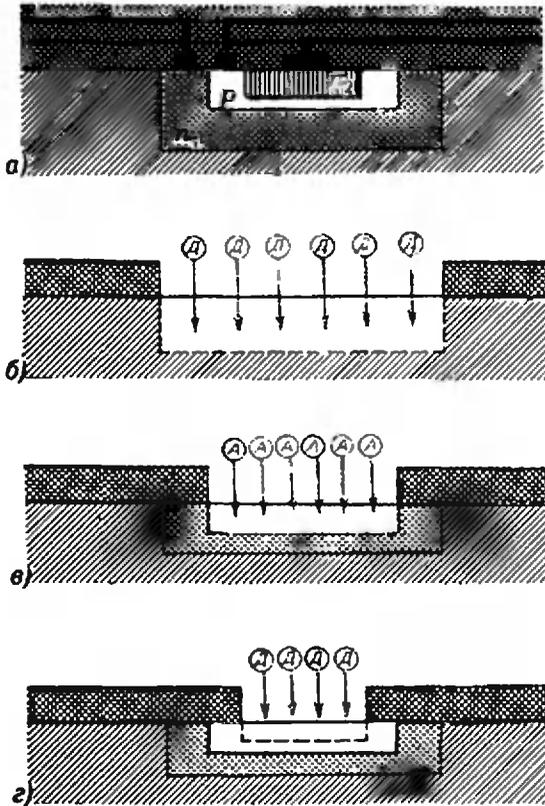


Рис. 3. Постепенно возводятся этажи дома-транзистора (а): сначала коллектор (б), потом база (в), потом эмиттер (г)...

Строить начинаем с ... окон

Итак, мы приступаем к строительству. Дома в нашем городе не низенькие. Посмотрите на рисунок 3, а: три «этажа» в рабочей области транзистора, два этажа металлической разводки да плюс несколько этажей межслойной изоляции; так что в доме-транзисторе по крайней мере 5—7 этажей.

Общее число операций, совершаемых при строительстве интегральной микросхемы, достигает сотни, но при этом некоторые операции повторяются многократно. Мы рассмотрим важнейшие моменты в процессе изготовления БИС.

Рабочие области транзистора — коллектор, база, эмиттер — образуются при легировании кремния соответствующими примесями элементов III и V групп периодической системы. Ввести в твердое тело чужеродные атомы можно, используя явление диффузии. Если пластину кремния нагревать в паре летучего соединения легирующего элемента — например, в парах BH_3 или AsH_3 , — то часть атомов B или As проникнет в кремний.

(Такой процесс называют диффузионным легированием.) Чтобы примеси проникали не всюду, а лишь в места, предусмотренные топологией БИС, надо защитить поверхность пластины экраном, непроницаемым для примесных атомов. В экране надо оставить «окна»: через них на очередной этаж будут поступать «стройматериалы» — атомы примесей (доноры и акцепторы) будут проникать в кремний, формируя рабочие области транзистора (см. рисунок 3, б—г).

Таким экраном для кремния оказался его собственный оксид SiO_2 . Достаточно «толстый» слой оксида легко образуется на поверхности кремния при температуре около 1000°C ; он непроницаем для примесных атомов; устойчив при температуре диффузии; прочно держится на кремнии. Растворение SiO_2 в кислоте (травление) позволяет проделать в нем окна для последующей диффузии. (Далеко не всегда технологом так везет. Например, прекрасный полупроводниковый материал — арсенид галлия GaAs — не образует такого защитного слоя при окислении, и его экранирование превращается в отдельную проблему.)

Легко ли «прорубить окно»?

Прежде чем протравливать окна в SiO_2 , надо защитить от растворения остальную часть оксидной пленки (на этом этапе защитный слой сам нуждается в защите). Здесь включается важнейшая в технологии микроэлектроники процедура — фотолитография. Цель ее — «раскрыть» защитный слой SiO_2 в соответствии с топологической схемой БИС.

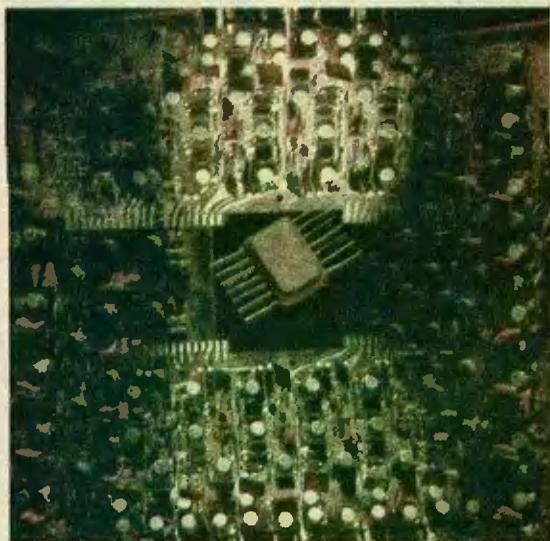
Фотолитография — это совокупность операций, связанных с применением светочувствительных составов, подобных тем, которые наносят на фотопленку или фотобумагу. Составы эти называют фоторезистами. Глагол «to resist» в английском языке означает «сопротивляться». Засвеченный фоторезист легко растворяется в травящих растворах, незасвеченный — «сопротивляется» травлению. (Можно подобрать и такой состав, который, наоборот, становится устойчивым после засвечивания.)

На специальной центрифуге жидкий резист тонким ровным слоем размазывается по поверхности окисленной пластины кремния и подсушива-

ется. Затем на пластину, так же как при обычной контактной фотопечати, накладывается стеклянная пластинка, в которой прозрачны лишь отдельные участки — на месте будущих окон. Эта пластинка называется фотошаблоном и заслуживает отдельного рассказа. Но сначала закончим разговор о кремниевой пластине. После наложения фотошаблона производят экспонирование (засвечивание). Экспонированные (через прозрачные окна) участки фоторезиста, растворяясь при травлении, открывают доступ травителю к пленке SiO_2 ; в ней образуются необходимые нам окна, то есть незащищенные участки поверхности чистого кремния, через которые будет идти диффузия. Фоторезист сделал свое дело, и теперь остатки его удаляют. Фотолитографирование, включающее нанесение, экспонирование, травление и удаление фоторезиста, на этом закончилось. Но после диффузии все надо будет начинать сначала.

Портрет будущей БИС

Кто вбивает первый колышек на будущей стройплощадке? Геодезист. Без геодезистов с их нивелирами и теодолитами не осуществить ни один строительный проект. Изготовление фотошаблона — это своего рода «геодезические работы» на микросхемной стройке.



Такова готовая БИС — город из множества домов-транзисторов, спрятанный в небольшую коробочку. Ее компактность и элегантность особенно бросается в глаза на фоне схем, построенных на основе прежних технологий.

Фотошаблоны — это «позтажные» планы, причем во всем БИС-городе нет двух одинаковых этажей. Размеры плана — приблизительно 5×5 мм. И на такой площадке надо «уложить» до 10^6 элементов. Выполнить подобную задачу без ошибок даже на чертеже удобных размеров, «увязать» чертежи соседних этажей БИС не в состоянии ни один самый аккуратный и старательный конструктор. Даже если бы такой человек нашелся, то слишком долго пришлось бы ему эту работу делать. Рабочие чертежи БИС проектируются на ЭВМ по специальным программам, а потом проверяются по не менее сложным контрольным программам. Готовый чертеж несколько раз переснимают с уменьшением на фотопластинки, доводя его размеры до «натуральной величины» — до размера микросхемы, и многократно размножают, с тем чтобы готовый фотошаблон соответствовал площади кремниевой пластины и позволял экспонировать на нее сразу несколько десятков, а то и сотен «изображений» микросхемы.

Таким образом, фотошаблон — это микротрафарет для разметки этажей. И сколько этажей — столько и фотошаблонов.

Когда белый свет не мил

Если на площадке размером 5×5 мм нужно разместить 10^6 транзисторов, то каждому из них отводится менее 25 мкм^2 . Область эмиттера — самая маленькая рабочая область в транзисторе — должна иметь размеры около 2×3 мкм; ширина металлических проводников — порядка 1 мкм. Возникает вопрос: с какой точностью можно выдержать эти размеры при «строительстве»?

Прежде всего они должны быть соблюдены при изготовлении фотошаблонов. Точность, которую обеспечивает метод фотолитографии, ограничена длиной волны света, используемого при экспонировании. При падении света на край щели в шаблоне происходит дифракция. Как известно, из-за дифракции границы геометрической тени всегда несколько размыты. Четкость изображения зависит от длины волны света — чем меньше длина волны, тем лучше качество изображения. В этом плане синий и фиолетовый свет предпочтительнее, чем

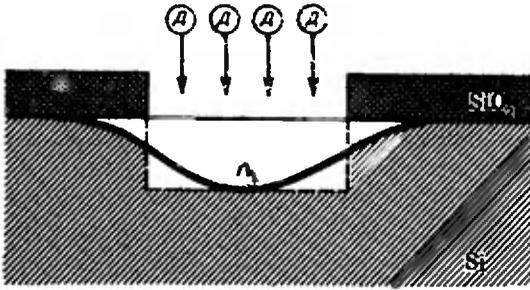


Рис. 4. Вот к чему приводит боковая диффузия: за пределами рабочей области (коллектор, база, эмиттер) концентрация примеси не сразу спадает до нуля, а постепенно.

красный. А чтобы нарисовать полосу шириной 1 мкм с точностью хотя бы $\pm 0,1$ мкм, видимый свет (длина волны от $8 \cdot 10^{-7}$ м до $4 \cdot 10^{-7}$ м, то есть от 0,8 мкм до 0,4 мкм) вообще не годится. Можно использовать более короткие электромагнитные волны, например, рентгеновские; но этот метод, называемый рентгенолитографией, имеет свои неудобства.

Обнадеживающие перспективы сулит «засвечивание» резиста электронным лучом — так называемая электронная литография. Электронный пучок движется по шаблону примерно так же, как по экрану телевизора или осциллографа. Отклоняющие системы могут переместить его в любую точку шаблона, а управляя «яркостью» пучка, можно регулировать засветку резиста. Конечно, здесь используются уже не фотоэмульсия, а специальные вещества, разрушаемые электронным пучком.

Оказалось, что электронная засветка слоя оксида кремния ускоряет его травление в кислоте в несколько раз. Это позволяет отказаться от резистных масок и формировать окна прямо в оксидном защитном слое. Пучок электронов нужно сделать необычайно узким и перемещать с точностью до 0,1—0,2 мкм, постоянно регулируя яркость. Какой оператор, даже работая с микроскопом, выполнит эту задачу одинаково успешно миллионы раз по всей площади подложки? Никакой. Эту работу можно доверить только ЭВМ, сопряженной с электронно-лучевым прожектором. (Вот, кстати, пример срачивания ЭВМ с исполнительным агрегатом!) Заложенный в ее памяти проект шаблона, ранее ею же и рассчитанный, ЭВМ превращает в трафарет для разметки БИС. При этом повышается точность изготовления окон.

Шаблоны — главный планировочный инструмент микросхемной технологии; благодаря им БИС-строительство из индивидуального становится массовым, или, как говорят специалисты, групповым.

Будем считать, что шаблоны изготовлены, с их помощью на пластине кремния в защитном слое оксида проделаны окна, и мы можем приступить к формированию рабочих областей.

Атомы отпускаются поштучно

Диффузионное легирование, о котором говорилось выше, широко применяется в микроэлектронике. Основное достоинство этого метода — его простота. Но есть у него и недостатки. Вот один из них: атомы примесного элемента, попадающие через окна в решетку кремния, движутся в общем хаотически и, значит, не обязательно перпендикулярно плоскости пластины. В результате вместо ожидаемой четкой формы области коллектора, такой, как на рисунке 3, б, мы получим нечто иное (рис. 4). Искаженные боковые области $p-n$ -перехода ухудшают параметры схемы. Другой недостаток диффузионного легирования: концентрация вводимых примесей ограничена. При определенном значении концентрации наступает насыщение; предел растворимости некоторых примесей в кремнии очень мал.

Распределение примеси по глубине кристалла при диффузионном легировании всегда оказывается таким, как показано на рисунке 5, и изменить его так, чтобы за пределами рабочей области концентрация примеси резко падала, не удается. Вот поэтому на смену диффузионному легированию пришел процесс, называемый ионной имплантацией, или ионным внедрением. Суть его в том, что легирующие примесные ионы разгоняются в вакууме электрическим полем и, имея значительную скорость, обрушиваются на мишень — пластину кремния. Чем выше энергия ионов, тем глубже проникают они внутрь мишени («глубже» — на доли микрона). Число примесных ионов легко контролировать по величине тока, создаваемого ими в полете. Изменяя направление ионного пучка электрическим или магнитным полем, можно добиться равномерного распределения примеси по нужной площадке. При

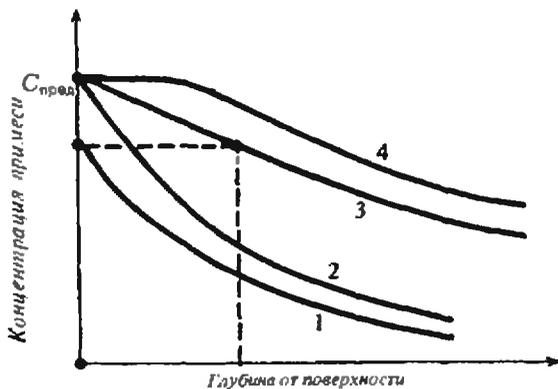


Рис. 5. Распределение концентрации примеси по глубине при диффузионном легировании. Красными линиями обозначен желательный профиль концентрации. Изменяя начальную концентрацию примеси на поверхности (сравните кривые 1 и 2), температуру (для кривой 2 она меньше, чем для 3) или продолжительность процесса диффузии (для кривой 3 в несколько раз меньше, чем для 4), можно получить необходимую концентрацию на заданной глубине.

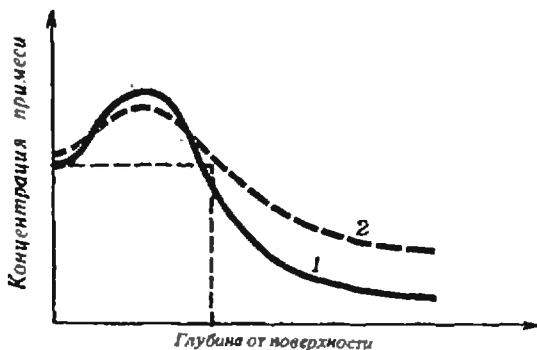


Рис. 6. При ионной имплантации распределение концентрации по глубине зависит от энергии и дозы ионов (кривая 1). Максимальная концентрация может превышать предельное значение, характерное для процесса диффузии. Пунктирная кривая 2 показывает распределение примеси после обработки, устраняющей поверхностные дефекты ионной бомбардировки.

ионной имплантации практически нет бокового проникновения, и профиль распределения примеси по глубине (рис. 6) получается более выгодным, чем при диффузионном легировании.

У метода ионной имплантации есть и свои неприятные стороны. Ионы примеси обычно входят в решетку с энергиями в сотни тысяч электрон-вольт, и за каждым ионом остается след причиненных им разрушений — сдвинутых или выбитых со своих равновесных положений атомов кристалла. При больших дозах имплантации приповерхностные слои материала так искажаются, что теряют подобие кристаллической структуры, становятся аморфными. Чтобы отчасти вос-

становить порядок, пластину приходится подвергать дополнительной обработке.

Легирование полупроводников методом ионной имплантации позволяет существенно повысить плотность упаковки транзисторов в микросхеме (за счет точного выполнения заданных размеров рабочих областей).

Транзистор у телефона

Итак, последовательным повторением операций защиты поверхности, нанесения масок и легирования мы создали плотную упаковку транзисторов на пластине БИС. Однако самой схемы у нас пока нет. Мы построили много отдельных домов, но это еще не город. Необходима система коммуникаций; к домам-транзисторам надо подвести энергоснабжение и линии связи. Делают это опять-таки с помощью фотолитографии. На поверхность кристалла наносят металлическую разводку и контактные площадки. Разводка сложных микросхем бывает и неоднослойной; тогда «этажность» растет за счет слоев разводки и слоев изоляции.

Сечение «проводка» металлической разводки — порядка 1×2 мкм. Представьте, какой бедой обернется для БИС попадание под слой металла ничтожной микронной пылинки, заметить которую можно только в микроскоп! Обрыв цепи выведет из строя участок схемы, а может быть, и всю схему целиком. Не менее опасно попадание пылинки в рабочую область при легировании. Чтобы этого не случилось, в цехах, где «собирают» микросхемы, день и ночь борются за чистоту. Мощнейшие фильтры отлавливают пылинки, каждый работник прежде, чем попасть в цех, проходит под воздушным «обеспыливающим» душем, несколько раз в день проводится влажная уборка. Внутри такого чистого цеха есть особо чистая комната, в которой установлены герметичные боксы — в них и рождаются микросхемы.

Главным источником возможного загрязнения и вообще самым ненадежным звеном в технологическом процессе является человек. Даже при максимальной добросовестности он может ошибиться, допустить неточность. К чему это приведет? Пусть каждую из сотни операций по сборке БИС человек выполняет с надежностью 99%. Какая часть готовой продукции будет гарантировано надежна? Микросхема калькулятора дает ответ за секунды: $0,99^{100} \approx 0,36$ — чуть больше трети.

Поэтому очень нужно отстранить человека от непосредственного участия в изготовлении микросхемы. Решение этой задачи — еще один шаг на пути совершенствования технологии БИС.

(Окончание см. на с. 20)

Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения

В. И. АРНОЛЬД

«Уравнение было очень сложное, но профессор с присущей ему скромностью назвал его обыкновенным».

Из газетного интервью с математиком.

Дифференциальные уравнения — одно из основных орудий математического естествознания. Изобрел их Исаак Ньютон (1642—1727). Задачи по существу приводящие к дифференциальным уравнениям появлялись и до Ньютона. Однако решать их умели лишь такие гении, как президент французской Академии наук Х. Гюйгенс (1629—1695) и учитель Ньютона, математик и богослов, проповедник английского короля И. Барроу (1630—1677). После Ньютона их решают любые студенты и даже школьники.

Ньютон считал свое изобретение настолько важным, что зашифровал его в виде анаграммы*), смысл которой в современных терминах можно вольно передать так: «полезно» решать дифференциальные уравнения (так как ими выражаются законы природы).

В другой, более длинной анаграмме Ньютон зашифровал также и придуманный им рецепт решения всех уравнений, в том числе и дифференциальных.

Теория дифференциальных уравнений перерабатывает вопросы естество-

знания в геометрические задачи о кривых, определенных векторными полями (см. ниже) подобно тому, как декартов метод координат превращает вопросы об алгебраических уравнениях в задачи о линиях и поверхностях.

Состояния процесса

Чтобы изучить какой-либо процесс, нужно прежде всего уметь описывать множество всевозможных состояний этого процесса. Посмотрим, как это делается, на примерах.

1. Движение точки по прямой. Опыт показывает, что для определения движения материальной точки по прямой в отсутствие внешних сил достаточно задать в начальный момент ее скорость и положение на прямой. Поэтому множество всех ее состояний математик отождествляет с координатной плоскостью $(s; v)$: каждой точке на этой плоскости отвечает материальная точка, движущаяся со скоростью v и занимающая положение с координатой s , и обратно — каждому состоянию отвечает своя точка плоскости (рис. 1).

2. Колебания маятника. Состояние плоского маятника тоже описывается двумя параметрами, например углом отклонения θ от вертикали и угловой скоростью ω маятника (рис. 2). Стало быть, множеством состояний маятника снова будет плоскость? Не совсем. Дело в том, что при изменении угла θ на 2π маятник возвращается в прежнее положение. Поэтому множество состояний здесь — цилиндрическая поверхность (рис. 2).

3. Положение возов на двух дорогах. Города A и B соединены двумя непересекающимися дорогами, на каждой из которых находится воз; нас интересует их взаимное расположение. Положение воза на первой дороге (рис. 3) можно определить числом — долей расстояния от A до B (по первой дороге), заключенной между A и возом; аналогично, воз на второй дороге определяется такой же долей по второй дороге. Поэтому интересующее нас множество состояний описывается точками $(x; y)$ единичного квадрата $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$.

Множества состояний процесса в теории дифференциальных уравнений называют *фазовыми пространствами*.

*) *baccdael3eff713l9n4o4qrr4s9i12vx* Расшифровка: *Data aequatione quocunqve fluentes quantitates involuente fluxiones invenire et vice versa*, то есть «по данному уравнению, содержащему сколько-нибудь функций, найти производную и обратно». Эта анаграмма содержится в знаменитом «втором письме» Ньютона секретарю Королевского общества (английской академии наук) Ольденбергу от 24 октября 1676 г. Письмо предназначалось Лейбницу (1646—1716) и содержало сообщение об изобретении математического анализа. Переписку с Лейбницем, жившим в Германии, Ньютон вел через Ольденбурга (которого впоследствии заключили в Тауэр за связь с иностранцами).

Итак, каждая точка фазового пространства (*фазовая точка*) изображает состояние процесса. А само течение конкретного процесса изображается линией в фазовом пространстве; эти линии называются *фазовыми траекториями*.

Введение фазового пространства процесса геометризует теорию — вопросы о ходе процесса превращаются в вопросы о поведении фазовых траекторий. Получающиеся геометрические задачи могут быть трудными. Однако бывает и так, что уже одно введение фазового пространства позволяет решить трудную задачу.

Задача (Н. Н. Константинов). Из города *A* в город *B* ведут две пересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из *A* в *B* и связанные веревкой некоторой длины, меньшей $2l$, смогли проехать из *A* в *B*, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза с сеном радиуса l , центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Фазовым пространством здесь служит единичный квадрат. Начальное положение машин (в городе *A*) соответствует левому нижнему углу квадрата, а движение машин из *A* в *B* изображается кривой, ведущей в противоположный угол (см. рис. 3). Точно так же начальное положение возов соответствует правому нижнему углу квадрата, а движение возов изображается кривой, ведущей в противоположный угол квадрата (левый верхний). Но всякие две кривые в квадрате, соединяющие разные пары противоположных вершин, пересекаются. Поэтому, как бы ни двигались возы, наступит момент, когда пара возов займет положение, в котором была в некоторый момент времени пара ма-

шин. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше $2l$. Итак, разминуться не удастся.

В рассмотренной задаче не участвовали дифференциальные уравнения, но ход рассуждений близок к тому, чем мы будем заниматься дальше: описание хода процесса как линии подходящего фазового пространства часто оказывается чрезвычайно полезным.

Общая схема теории дифференциальных уравнений такова. Поскольку начальное состояние рассматриваемых нами процессов определяет их будущий ход, оно определяет и скорость изменения состояния, то есть скорость движения фазовой точки. Зависимость скорости движения фазовой точки от ее положения (или локальный закон эволюции процесса) как раз и выражается, по Ньютону, дифференциальным уравнением. Геометрически это уравнение изображается векторами, приложенными к каждой фазовой точке и указывающими, куда и с какой скоростью из этой точки выходить. Вместе все эти векторы составляют *векторное поле фазовой скорости* (см. например, рисунки 5,11 ниже). Теория дифференциальных уравнений должна по векторному полю описывать ход процесса, то есть находить траектории движения фазовых точек, отвечать на вопросы о характере их движения (например, на такие вопросы: будут ли траектории ограничены? возвращаются ли они к исходной точке?). Значение этих вопросов для изучения процесса очевидно.

Уравнение математического маятника

Согласно законам механики угловое ускорение маятника пропорционально моменту силы тяжести (рис. 4)

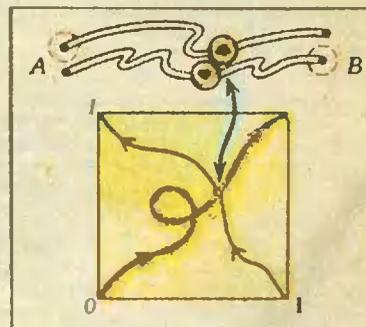
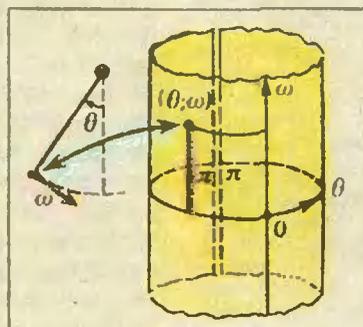
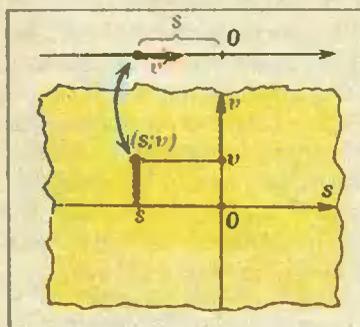


Рис. 1. Движение по прямой.

Рис. 2. Колебания маятника.

Рис. 3. Задача о двух возах на двух дорогах.

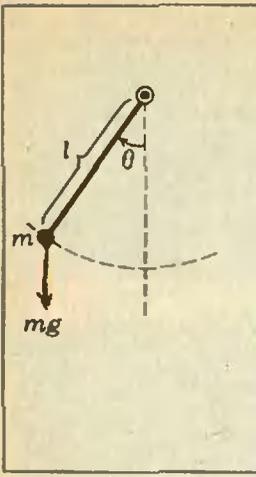


Рис. 4. Математический маятник.

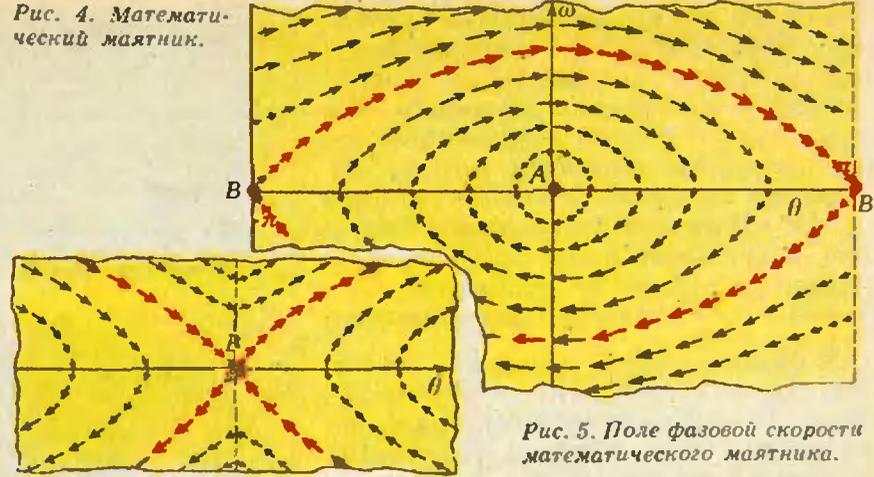


Рис. 5. Поле фазовой скорости математического маятника.

$$I\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta,$$

где m — масса, l — длина, θ — угол отклонения; точка сверху означает производную по времени t (здесь и всюду ниже), две точки — вторую производную*), $I = ml^2$ — момент инерции. Знак минус в уравнении объясняется тем, что момент стремится уменьшить отклонение. После сокращения получим $\ddot{\theta} = -k \sin \theta$, где $k = g/l$. Коэффициент k можно сделать равным 1 подходящим выбором масштаба времени (поделив t на \sqrt{k}). Тогда уравнение математического маятника примет вид

$$\ddot{\theta} = -\sin \theta. \tag{1}$$

Фазовым пространством маятника является цилиндр $(\theta; \omega)$, где $\omega = \dot{\theta}$ — угловая скорость. Мы можем записать уравнение (1) в виде системы

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\omega} = -\sin \theta, \tag{2}$$

в которую входят только первые производные неизвестных θ и ω . Эта система выражает локальный закон эволюции состояния маятника: скорость изменения выражена через само состояние.

Решить уравнение (1) (или систему (2)), оказывается, не так легко. Если ограничиться небольшими углами θ (малые колебания), то $\sin \theta \approx \theta$. Поэтому при малых θ пользуются вместо (1) приближенным уравнением $\ddot{\theta} = -\theta$. Оно называется *уравнением малых колебаний маятника*. Его решения $\theta = C \sin(t + \varphi)$ вам известны из курса физики: при малых углах отклонения плоский математический маятник совершает гармонические (синусоидальные) периодические колебания. Вопрос о том, насколько меняется этот вывод при переходе к

«истинному» уравнению маятника (1), нуждается в специальном исследовании.

Вспользуемся фазовым пространством системы (2) — цилиндром $(\theta; \omega)$. В каждой точке фазового пространства построим *вектор фазовой скорости*, то есть вектор с координатами $(\dot{\theta}; \dot{\omega}) = (\omega; -\sin \theta)$ — геометрический эквивалент закона природы (1). Полученная картина — *поле фазовой скорости* — изображена на рисунке 5 (для наглядности мы разрезали цилиндр по образующей и развернули его).

На этой картине можно разглядеть следующее. В двух точках фазовая скорость равна нулю. Точке A отвечает нижнее (устойчивое) положение равновесия, точке B — верхнее (неустойчивое) положение равновесия. При малых значениях θ , $\dot{\theta}$ видно, что точки фазового пространства перемещаются по замкнутым кривым, похожим на окружности (малые колебания), при увеличении θ замкнутые кривые увеличиваются и растягиваются в подобие эллипсов (колебания большой амплитуды)*. Особую роль играют траектории, помеченные крас-

*Замкнутость фазовых траекторий означает периодичность колебаний (трение мы не учитываем). Замкнутость вытекает из следующей теоремы Гюйгенса («закон сохранения энергии»): $E = \dot{\theta}^2 / 2 - \cos \theta$ при движении не меняется. Доказательство: $\dot{E} = \dot{\theta} \ddot{\theta} + \dot{\theta} \sin \theta = 0$. Доказательство самого Гюйгенса было, конечно, иным: он не знал анализа. Однако не следует недооценивать силу методов предшественников Ньютона. Гюйгенс или Барроу нашли бы, скажем, значение предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x}$$

мгновенно из геометрических соображений (редко кто из современных математиков справляется с вычислением этого предела за час).

ными стрелками: упавший из положения неустойчивого равновесия маятник совершает полный оборот и вновь замирает в верхнем положении. Эта траектория отделяет колебания от (неравномерных) вращений, которые совершает маятник, если его скорость при $\theta=0$ превышает в наших безразмерных единицах число 2.

Караси (нормальное размножение)

В большом пруду разводят карасей. Караси не мешают друг другу, корма им хватает. Как будет меняться число карасей $x(t)$ с течением времени t ? Скорость прироста карасей при этих условиях оказывается пропорциональной количеству особей; поэтому можно написать

$$\dot{x} = kx, \quad k > 0. \quad (3)$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением нормального или мальтузианского размножения**. (Напомним, что \dot{x} обозначает производную по времени.)

Теорема существования. Любая функция вида $x = Ce^{kt}$, где C — постоянная, является решением уравнения (3).

Доказательство: подставьте в уравнение.

Из доказанной теоремы следует

Теорема единственности. Других решений у уравнения (3) нет.

Доказательство. Любую функцию можно записать в виде $x(t) = C(t)e^{kt}$. Тогда $\dot{x} = C\dot{e}^{kt} + kx$. Поэтому для выполнения равенства $\dot{x} = kx$ необходимо и достаточно, чтобы $\dot{C} = 0$, то есть чтобы C было константой.

Графики решений уравнения называются *интегральными кривыми*. Эти кривые лежат в пространстве — времени, то есть на плоскости с координатами $(t; x)$. Для вычерчивания интегральных кривых полезна заготовка, которая называется *полем направлений* уравнения и состоит из маленьких отрезочков, приложенных в каждой точке пространства — времени под углом к оси времени, тангенс которого равен правой части урав-

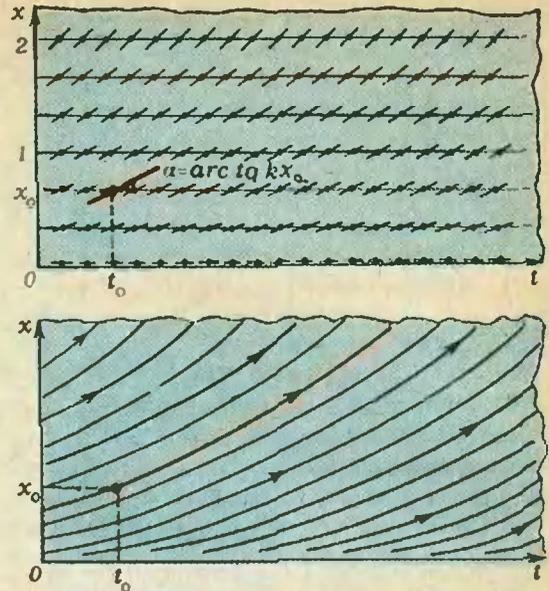


Рис. 6. Поле направлений уравнения нормального размножения $\dot{x} = kx$ и решение, проходящее через начальную точку (t_0, x_0) .

нения (kx для уравнения (3), см. рис. 6). Интегральная кривая в каждой своей точке касается соответствующего отрезка и, наоборот, кривая, всюду касающаяся наших отрезков, будет графиком решения (в этом и состоит геометрический смысл дифференциального уравнения).

Мы только что доказали, что *через каждую точку пространства — времени проходит ровно одна интегральная кривая $x = Ce^{kt}$ уравнения (3)*. Эта формула выражает закон нормального размножения: для удвоения количества карасей всегда требуется одно и то же время независимо от их количества. Период удвоения населения Земли в настоящее время около 40 лет. Следовательно, число живущих сейчас людей больше числа умерших за 1000 лет и было бы больше числа всех когда-либо умерших людей, если бы скорость прироста не менялась. Время существования человечества получается тогда порядка 2000 лет; следовательно, скорость прироста населения раньше была меньше.

Замечания 1. Наши рассуждения основывались на угадывании решений $x = Ce^{kt}$. Найти эти решения можно следующим более систематическим образом. Тангенс угла наклона интегральной кривой уравнения $\dot{x} = v(x)$ к оси t равен $v(x)$. Значит, тангенс угла наклона к оси x равен $1/v(x)$. Вдоль интегральной кривой (если она нигде не параллельна оси t) можно выразить t в виде функции от x . Обозначая производную по x штрихом, получим $t' = 1/v(x)$. Значит, t есть первообразная от

*В некоторых случаях скорость размножения оказывается пропорциональной не числу особей, а числу пар. Такое аномальное размножение гораздо медленнее обычного при малой плотности населения (например, китам некоторых видов трудно найти пару). Напротив, при больших x размножение со скоростью, пропорциональной x^2 , приводит к «взрыву» за конечное время: график $x(t)$ имеет вертикальную асимптоту (почему?). Эта ситуация реализуется в уравнениях химической кинетики, где скорость реакции пропорциональна количеству каждого из реагентов.

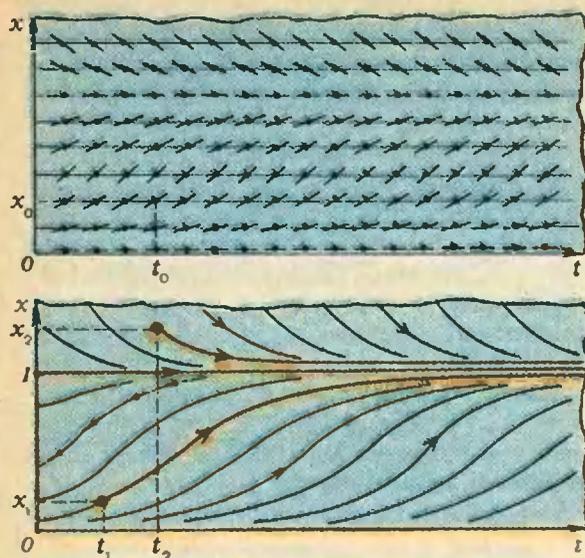


Рис. 7. Поле направлений и графики решений логистического уравнения $\dot{x}=(1-x)x$. Решения $x=1$ и $x=0$ отвечают положениям устойчивого и неустойчивого равновесия.

$1/v$. Это позволяет выразить t через x , а затем и x через t . (Разумеется, прямые пространства — времени, где $v(x)=0$, приходится выкидывать, чтобы не делить на нуль.) При $v(x)=kx$ получаем $t'=1/kx$, $kt=\ln|x|+\text{const}$, $x=Ce^{kt}$.

2. Теорема единственности, утверждающая, что не совпадающие интегральные кривые не пересекаются, — чрезвычайно удивительный факт, противоречащий наглядной очевидности и физическому опыту. Например, интегральные кривые уравнения (3) при $k=1$, проходящие через точки $(0; 0)$ и $(0; 1)$ при $t=-5$ на глаз неразличимы, а при $t=-30$ между ними не умецаются и атомы. Тем не менее математики считают их непересекающимися и при $t=-10^{10}$.

3. В физической литературе последнего времени подвергается сомнению данный Ньютоном в 1684 году вывод законов Кеплера из (указанного ему Гуком в письме от 6 января 1680 г.) закона всемирного тяготения: этот вывод неявно использует не доказываемую Ньютоном теорему единственности для уравнения движения. В действительности, однако, единственность следует из существования решения, зависимость которого от начальной точки выражается дифференцируемой функцией. Доказательство единственности в этом случае аналогично приведенному выше для уравнения размножения, нужное же решение Ньютон предъявил. В письме Галлею о своей дискуссии с Гуком Ньютон дал описание разницы между подходами математиков (Ньютона) и физиков (Гука) к естествознанию, остающееся актуальным и сегодня: «Математики, которые все открывают и устанавливают и проделывают всю работу, должны довольствоваться ролью сухих вычислителей и чернорабочих; другой, который всего лишь все схватывает и на все претендует, присваивает себе все изобретения как своих последователей, так и своих предшественников». В обязанности Гука как куратора Королевского общества входило доказывать опытами на сженедельных заседаниях общества по 2 или 3 новых закона природы, что

он и делал в течении 40 лет. Доказываемые законы могли быть открыты и другими, но Гук насчитывал до 500 законов, открытых лично им. Естественно, он не все успевал обосновывать математически.

Вернемся, однако, к нашим карасям. Через некоторое время карасей станет столь много, что им не будет хватать корма и им станет тесно; дальнейший прирост уже не будет удовлетворять уравнению (3).

Караси при нехватке пищи (логистическая кривая)

Если наш пруд с карасями невелик, или если число карасей в большом пруду сильно возросло, конкуренция из-за пищи приводит к уменьшению скорости прироста. Простейшее предположение состоит в том, что коэффициент k зависит от числа карасей линейно, то есть $k=a-bx$ (при не слишком больших x всякую гладкую функцию можно аппроксимировать линейной). Мы приходим, таким образом, к уравнению размножения с учетом конкуренции: $\dot{x}=(a-bx)x$. Коэффициенты a и b можно превратить в единицы выбором масштабов t и x . Мы получаем так называемое логистическое уравнение

$$\dot{x}=(1-x)x. \tag{4}$$

Поле направлений уравнения (4) в пространстве — времени показано на рисунке 7, а, а рядом, на рисунке 7, б, показаны графики решений. S-образные интегральные кривые в полосе $0 < x < 1$ называются логистическими кривыми. Мы видим, что

1) процесс имеет два положения равновесия: $x=0$ и $x=1$;

2) между прямыми $x=0$ и $x=1$ поле направлено вверх от 0 к 1, а при $x > 1$ — вниз к 1.

Таким образом, положение равновесия 0 неустойчиво (раз появившееся население карасей начинает расти), а положение равновесия 1 устойчиво (меньшее население растёт, большее — убывает). Каким бы ни было начальное число карасей $x > 0$, с течением времени процесс выходит к устойчивому состоянию равновесия $x=1$. У каждого пруда, таким образом (при неизменных прочих условиях), имеется свое «правильное» число карасей, и любая популяция карасей будет к этому числу стремиться.

Ловля карасей

До сих пор мы рассматривали свободную популяцию карасей, развивающуюся по своим внутренним законам. Предположим теперь, что мы карасей вылавливаем (скажем, колхозный пруд регулярно снабжает местный рыбный магазин живой рыбой). Предположим, что скорость отлова постоянна. Мы приходим к дифференциальному уравнению отлова

$$\dot{x} = (1-x)x - c. \quad (5)$$

Величина c характеризует разрешаемую скорость отлова и называется квотой.

На рисунке 8 показаны три разновидности графиков решений уравнения (5) при трех разных c .

Мы видим (рис. 8, а), что при не слишком большой скорости отлова ($0 < c < 1/4$) существует два положения равновесия ($x=A$ и $x=B$ на рисунке). Нижнее положение равновесия A неустойчиво. Если по каким-либо причинам (перелов, болезни) в некоторый момент величина популяции x опустится ниже A , то в дальнейшем вся популяция за конечное время исчезнет. Верхнее положение равновесия B устойчиво — это стационарный режим, на который выходит популяция при постоянном отлове c . Естественно, равновесное население пруда, в котором производится отлов меньше, чем в пруду, в котором лов не ведется.

Если $c > 1/4$ (рис. 8, б), то равновесий нет и все караси будут отловлены за конечное время (завышенный план по продаже живой рыбы в магазине приведет к ее гибели; исторический пример такого рода — истребление стеллеровой коровы).

При $c = 1/4$ (рис. 8, в) имеется одно неустойчивое состояние равновесия

($A=B=1/2$). Отлов с такой скоростью при достаточно большой начальной популяции математически возможен в течение сколь угодно длительного времени, однако сколь угодно малое колебание численности установившейся равновесной популяции вниз (см. точку F) приводит к полному отлову карасей за конечное время (план отлова $c=1/4$ для магазина «Рыба» тоже не годится).

Таким образом, хотя теоретически допустимы любые квоты вплоть до максимальной ($c \leq 1/4$), максимальная квота $c=1/4$ приводит к неустойчивости и недопустима*). Более того, практически недопустимы и близкие к $1/4$ квоты, так как при них опасный порог A близок к установившемуся режиму B (небольшие случайные отклонения отбрасывают популяцию ниже порога A , после чего она погибает).

Оказывается, что все же можно так организовать отлов, чтобы устойчиво получать улов со скоростью $c=1/4$. Посмотрим, как это делается.

Введение обратной связи

Фиксируем вместо абсолютной скорости отлова относительную, то есть фиксируем отлавливаемую за единицу времени долю наличной популяции:

$$\dot{x} = (1-x)x - px. \quad (6)$$

На рисунке 9 показано пространство — время для уравнения (6) (при $p < 1$) и графики некоторых решений. Видно, что нижнее, неустойчивое положение равновесия теперь в точке $x=0$, второе положение равновесия B

*) Важный для экономики вывод математической экологии: стремление максимизировать прибыль, доход или количество продукции чревато возникновением неустойчивости системы.

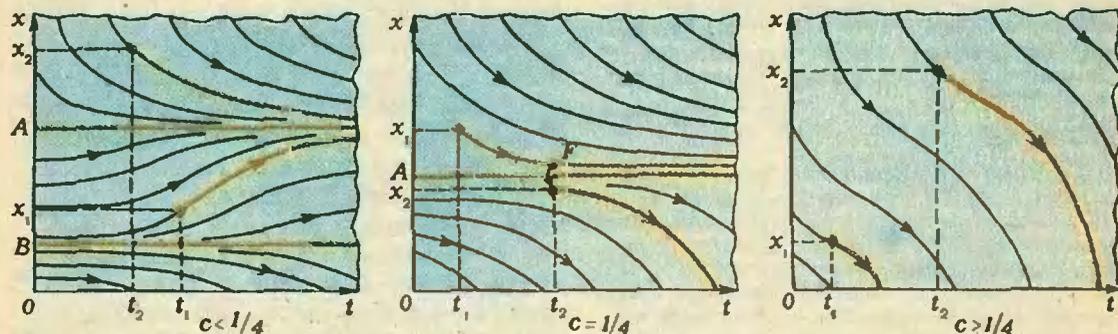


Рис. 8. Решения уравнения отлова $\dot{x} = (1-x)x - c$ при разных значениях квоты отлова c . При $c < 1/4$ любая популяция стре-

мится к устойчивому равновесию $x=A$, при $c=1/4$ положение равновесия неустойчиво, при $c > 1/4$ любая популяция вымирает.

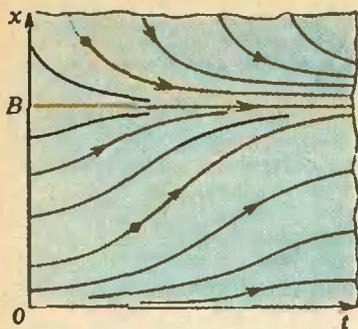


Рис. 9. Решения уравнения отлова с относительной квотой $\dot{x}=(1-x)x-px$ при $p<1$. Любая популяция стремится к устойчивому значению $x=B$.

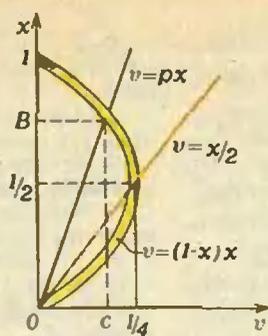


Рис. 10. Нахождение оптимального устойчивого режима отлова с относительной квотой.

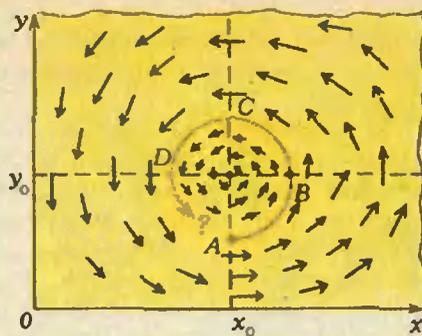


Рис. 11. Поле фазовой скорости в модели «хищник — жертва».

устойчиво при любом p (если только $0 < p < 1$).

После некоторого периода установления популяция карасей выходит на стационарный режим $x=B$. Абсолютная скорость улова устанавливается при этом равной $c=pB$. (Это — ордината точки пересечения графиков функций $v=(1-x)x$ и $v=px$.) Исследуем поведение этой величины при изменении p . При малых относительных выловах (малых p) установившаяся скорость отлова тоже мала; при $p \rightarrow 1$ она тоже стремится к нулю (перелов). Наибольшее значение абсолютной скорости c равно наибольшей ординате графика функции $v=(1-x)x$. Она достигается, когда прямая $v=px$ проходит через вершину параболы (то есть при $p=1/2$) и равно $c=1/4$ (рис. 10).

Выберем $p=1/2$ (то есть назначим относительную квоту так, чтобы установившаяся популяция составляла половину необлавливаемой). Мы достигли, как и было обещано, максимально возможной стационарной скорости отлавливания $c=1/4$, причем система остается устойчивой (возвращается к установившемуся состоянию при малых отклонениях популяции от установившейся*).).

Караси и щуки

В нашем пруду с карасями завелись щуки. Если бы щук не было, караси размножались бы по экспоненте, со скоростью $\dot{x}=kx$ (пруд большой). Но теперь следует учесть карасей, съеденных щуками, и мы предполо-

жим, что число встреч карасей со щуками пропорционально как числу карасей x , так и числу щук y ; тогда для скорости изменения числа карасей получим уравнение $\dot{x}=kx-axy$. Что касается щук, то без карасей они вымирают: $\dot{y}=-ly$, в присутствии же карасей начинают размножаться со скоростью, пропорциональной числу съеденных карасей: $\dot{y}=-ly+bxy$. Мы приходим, таким образом, к системе дифференциальных уравнений простейшей модели системы «хищник — жертва»:

$$\begin{cases} \dot{x}=kx-axy, \\ \dot{y}=-ly+bxy. \end{cases} \quad (7)$$

Эта модель называется моделью Лотка — Вольтерра.

Фазовым пространством этой системы служит угол $x \geq 0, y \geq 0$. Нарисуем на нем поле фазовой скорости системы (рис. 11), то есть к каждой точке $(x; y)$ приложим вектор

$$(kx-axy; -ly+bxy).$$

У этого поля есть особая точка (к ней приложен нулевой вектор), а именно точка $(l/b; k/a)$; она отвечает равновесному количеству карасей и щук, когда прирост карасей уравновешивается деятельностью щук, а прирост щук — их естественной смертностью.

Если начальное число щук меньше $y_0=k/a$ (точка А на рисунке), то количество карасей и щук растет, пока размножившиеся щуки не начнут съедать больше карасей, чем их рождается (точка В), затем число карасей начнет убывать, а число щук продолжит расти, пока нехватка пищи не приведет и щук к вымиранию (точка С); затем число щук уменьшится настолько, что караси снова начнут размножаться (точка D); начавшиеся раз-

* Но для этого планирование должно быть гибким: план уменьшается при неурожае и увеличивается при благоприятных условиях.

множение карасей приведет к тому, что со временем и щуки начнут размножаться.

Но вернемся ли мы к точке A ? Иными словами, будет ли процесс колебаний повторяться периодически? Ответ на этот вопрос может зависеть от выбора начальной точки A (а также от значения параметров системы). К этому вопросу мы вернемся в одном из следующих номеров журнала.

Задачи

1. Найдите уравнение логистической кривой.
2. Являются ли интегральные кривые уравнений (5) и (6) растянутыми логистическими кривыми?
3. Докажите, что интегральные кривые уравнений (5) и (6), расположенные вне полосы между A и B , имеют вертикальные асимптоты.

4. Могут ли пересекаться не совпадающие интегральные кривые логистического уравнения?

5. Докажите, что период T колебания маятника (1) растет с амплитудой.

6. Приближенно сосчитайте период колебания маятника малой амплитуды a .

7. Найдите предел периода колебаний маятника при стремлении амплитуды к π .

8. Докажите, что период колебания маятника равен производной площади, ограниченной фазовой траекторией $\dot{\theta}^2/2 - \cos \theta = E$ по энергии E .

9. Частицы массы 1 начинают двигаться с нулевой скоростью одновременно из всех точек оси x под действием силового поля $F = \sin x$. Через какое время частицы начнут сталкиваться?

Ответы даны на с. 57. Решения можно найти в следующих книгах:

1. В. И. Арнольд. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1984.
2. В. И. Арнольд. *Математические методы классической механики*. М.: Наука, 1974.

Города для электронов

(Начало см. на с. 6)

После формирования разводки и контактов БИС готовы. Каждую из них тщательно проверяют на работоспособность прямо на пластине. Контрольный автомат, управляемый компьютером, опускает на БИС тончайшие иглы-контакты и посылает в схему серию тестовых импульсов тока (как говорят, «прозванивает» схему). Если схема содержит миллион элементов, то число тестовых импульсов — до десятков тысяч. Ответ экзаменуемой схемы принимает ЭВМ. Если БИС отзывается не так, как надо, или молчит, контрольный автомат помечает ее капелькой магнитной краски. После того как кремниевую пластину разделяют на сотни готовых микросхем (это делают алмазным резцом или лазерным лучом), электромагнит выберет меченые забракованные схемы.

А исправные готовые БИС теперь осталось поместить в корпус. Небольшая коробочка из керамики, металла или пластмассы должна оградить микросхему от внешних повреждений, воздействия атмосферы, случайных электрических полей, обеспечить охлаждение работающей микросхемы. Поэтому, несмотря на внешнюю про-

стоту, конструкция корпуса тщательно продумывается и просчитывается. В некоторых типах микросхем стоимость корпуса и работ по «упаковке» достигает трети всей стоимости готовой БИС.

Теперь, когда процесс изготовления микросхемы закончился, кончается и аналогия с градостроительством. Никакой город-новостройка не подвергается испытаниям на устойчивость к стоградусной жаре и к морозу в -60°C , к землетрясению в 9 баллов, к удару при падении с трехметровой высоты; добавьте проверку на герметичность в морском тумане, на выдерживание предельного рабочего режима и т. п. Если БИС все это выдерживает, ее можно передать потребителю.

* * *

Микроэлектроника — это союз многих наук: материаловедения, точной механики, квантовой оптики, электрофизики, фотохимии, кибернетики, ... Нельзя сказать, что здесь главное, что второстепенное. Лучшее, чем располагают сегодня наука и техника, создает технологию производства микросхем. Мы рассмотрели лишь самые типичные и сравнительно простые для понимания элементы технологии. Но и они, и другие варианты технологии БИС полны и явных, и скрытых сложностей. Однако достигнутые успехи и близкие перспективы технологии БИС вселяют надежды на то, что вершины микроэлектронной технологии еще далеко впереди.



Кардиограмма ртутного сердца

Доктор физико-математических наук
Я. Е. ГЕГУЗИН

Из множества особенностей и свойств истинного сердца ртутное обладает лишь одним — способностью пульсировать, периодически меняя свою форму. Ртутному сердцу неведомы ни боль, ни перебои, ни волнения; перед настоящим сердцем оно имеет безусловное и завидное преимущество — может остановиться, сколь угодно долго просуществовать бездействуя, а затем снова ожить.

У нас в лаборатории в шкафу, где хранятся химические реактивы, живет ртутное сердце. Конструкция его совсем проста: фарфоровая чашка с вогнутым дном, на дне чашки — ртуть в виде расплющенной капли-лужицы (диаметром ≈ 4 см). Она залита толстым слоем слабого (5-и процентного) водного раствора соляной кислоты (≈ 50 мл), в котором растворена соль двуххромовокислого калия ($K_2Cr_2O_7$; ≈ 60 мг). Фарфоровая чашка прикрыта плексигласовой пластинкой, в пластинке укреплена гайка, а в ней — винт, заканчивающийся железной проволокой-иглой. Вращая винт, проволоку можно опустить до соприкосновения с поверхностью ртути, и ртутное сердце начнет работать, то есть ритмически пульсировать.*

Чтобы такое сердце работало надежно, проволока должна коснуться поверхности капли-лужицы либо в центре, либо в одной из точек на контуре.

Пульсация ртутного сердца — зрелище впечатляющее: на чистой поверхности капли возникают переливающиеся блики причудливой формы, и контур капли приобретает быстро меняющиеся очертания, которые по-

вторяются в каждом очередном цикле пульсаций. Сердце работает без усталости: мы оставляли его на час, на два, а однажды оставили на ночь — и утром нашли пульсирующим.

Теперь о механизме пульсаций ртутного сердца — лужицы ртути, которая непрерывно вздрагивает от соприкосновения с железной проволокой.

Вначале о двух эффектах, с которыми необходимо ознакомиться, чтобы понять причину периодических сокращений и расширений ртутной капли.

Первый эффект заключается в уменьшении поверхностного натяжения металла, если на его поверхности имеется электрический заряд. Проще всего это понять на примере свободной сферической жидкой металлической капли, скажем капли ртути. Пусть радиус капли R . Если она не заряжена, вещество, находящееся в ее объеме, будет испытывать сжимающее давление $p_{сж} = 2\sigma/R$. Оно связано с искривленностью поверхности (R) и поверхностным натяжением (σ). Допустим теперь, что по поверхности капли распределен заряд, величина которого q . Очевидно, что носители заряда будут отталкиваться друг от друга с силой, величина которой (в соответствии с законом Кулона) пропорциональна квадрату заряда. Это означает, что при неизменном объеме сферической капли (и, следовательно, при постоянном радиусе) наличие на ее поверхности электрического заряда приведет к понижению сжимающего давления. Это обстоятельство может быть представлено как следствие понижения поверхностного натяжения на величину $\Delta\sigma \sim q^2$.

Мы не стремились к тому, чтобы расчет был точен; важно лишь иметь основание утверждать, что величина понижения поверхностного натяжения не зависит от знака заряда, находящегося на поверхности. Поручая тому — квадратичная зависимость $\Delta\sigma$ от величины заряда q .

Все это нам необходимо знать, так как ртуть в растворе соляной кислоты получает заряд, и поэтому поверхностное натяжение на границе ртуть — раствор как бы понижается. (Мы не будем подробно интересоваться

* Ртуть — очень ядовитое вещество, поэтому опыты с ней можно проводить только в физическом кабинете под руководством учителя. (Примеч ред)

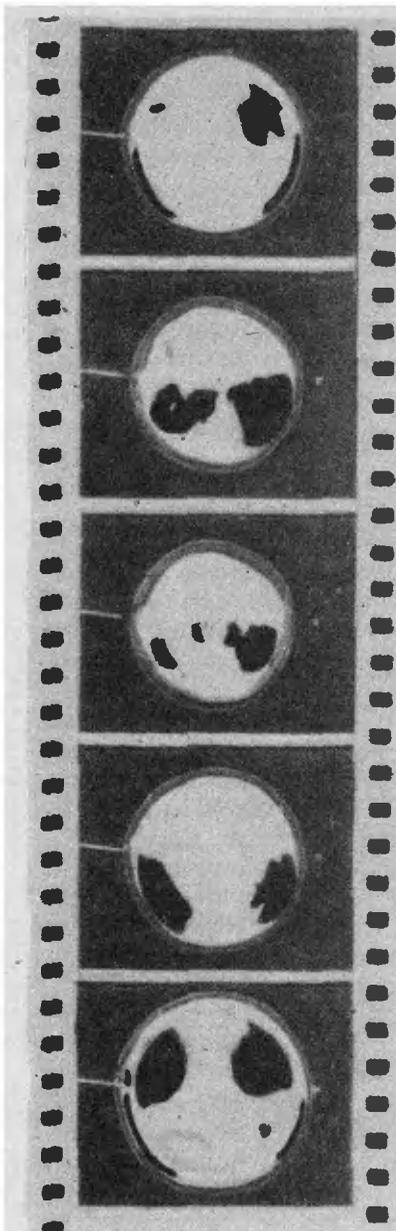


Рис. 1. Пульсации ртутного сердца, когда металлическая проволока-игла касается контура ртутной капли-лужицы.

ся процессами на этой границе, так как они достаточно сложны.)

Описанный эффект влияния заряда на поверхности на величину поверхностного натяжения, который именуется «электрокапиллярный эффект», был открыт и изучен французским физиком Габриэлем Липпманом (1845—1921) и нашел множество практических приложений.

Второй эффект состоит в том, что в момент, когда металлическая игла соприкасается с поверхностью ртути, величина имеющегося на ртути заряда изменяется, следовательно, эффективное поверхностное натяжение также должно измениться. С помощью простого опыта легко убедиться в том, что в момент соприкосновения величина заряда на ртути уменьшается, а вместе с тем уменьшается и то понижение поверхностной энергии, которое наступило, когда капля ртути была залита раствором соляной кислоты. Два последовательных отрицания равносильны одному утверждению: уменьшение понижения означает повышение. В момент прикосновения железной иглы к поверхности ртути ее поверхностное натяжение немного увеличивает. Следствием этого увеличения должно быть некоторое сжатие капли-лужицы, которая на дне чашки под собственной тяжестью расплющилась, и частичное приближение ее формы к сферической. Это отчетливо наблюдается, если в центре капли в ее тело погрузить металлическую иглу: капля-лужица вздрогнет, и ее горизонтальный диаметр уменьшится.

Вот теперь можно понять механизм пульсаций. Начнем со случая, когда железная игла касается ртути в точке на контуре лужицы (рис. 1). В момент соприкосновения иглы с поверхностью ртути — соприкосновения, а не внедрения! — поверхностное натяжение несколько повысится, ртутная лужица уменьшит диаметр, контакт между нею и иглой нарушится. После этого поверхностное натяжение должно возвратиться к значению, которое было до соприкосновения иглы с каплей, то есть понизиться, а радиус ртутной лужицы должен возрасти. Это значит, что лужица соприкоснется с иглой и все начнется снова: сокращение лужицы — нарушение контакта, расширение лужицы — восстановление контакта и т. д.

Интересен механизм возникновения пульсаций в том случае, когда игла прикасается к поверхности ртути не на контуре ртути, а в ее центре, в макушке (рис. 2). Казалось бы, наступающее при этом повышение поверхностного натяжения должно сопровождаться поднятием макушки и образованием ненарушающегося контакта с иглой. В действительности, однако, происходит иное. Макушка лужицы чуть наползает на иглу, а затем под действием силы тяжести отрывается от нее. Этот первый импульс дает толчок колебаниям, капля раскачивается, сердце начинает пульсировать.

Любопытная деталь: при переносе иглы с контура лужицы на ее макушку частота пульсаций уве-

личивается. Это совершенно аналогично повышению частоты колебаний гитарной струны, если пальцем прижать ее к грифу посередине между точками закрепления.

Необходимо подчеркнуть, что ртутное сердце отнюдь не вечный двигатель. Во время его работы расходуется энергия, выделяющаяся при химическом взаимодействии между ртутью, железом, соляной кислотой и двуххромовокислым калием. В этой реакции расходуются исходные компоненты, и она прекратится, когда, скажем, будет «съедена» железная игла. В «невежности» ртутного сердца можно легко убедиться, взяв более тонкую проволочку. Довольно скоро контакт между каплей и проволочкой перестанет воспроизводиться, так как кончик проволоки будет «съеден». Чтобы сердце опять заработало, надо проволочку придвинуть к лужице: явно не вечный двигатель!

Задумали мы снять кардиограмму ртутного сердца. Много сведений из нее не извлечешь, разве только определишь число пульсаций в секунду (а их можно просто посчитать, наблюдая за лужицей, или для верности воспользоваться кадрами кинофильма). То, что ртутное сердце здорово, просто отчетливо видно глазами: оно пульсирует ритмично, без перебоев, явно не уставая (частота пульсаций нашего лабораторного сердца — около 120 ударов в минуту). И все-таки снять кардиограмму любопытно.

Вначале решили воспользоваться работающим сердцем как прерывателем электрической цепи, регистрируя моменты включения и выключения с помощью самопишущего прибора. От этой мысли, однако, отказались, так как любое электрическое вмешательство в ртутное сердце неизбежно исказит его пульсации. Поступили по-иному. Тоненький луч света направлялся на зеркальную поверхность пульсирующей лужицы, а отраженный от нее мечущийся луч подавал сигнал на самописец, который и записал кардиограмму (рис. 3). На кардиограмме видна последовательность чередующихся максимумов и минимумов — четких, строгих, периодических, без перебоев, на зависть любому человеческому сердцу.

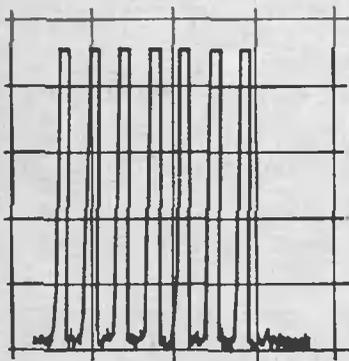


Рис. 3. Кардиограмма ртутного сердца.

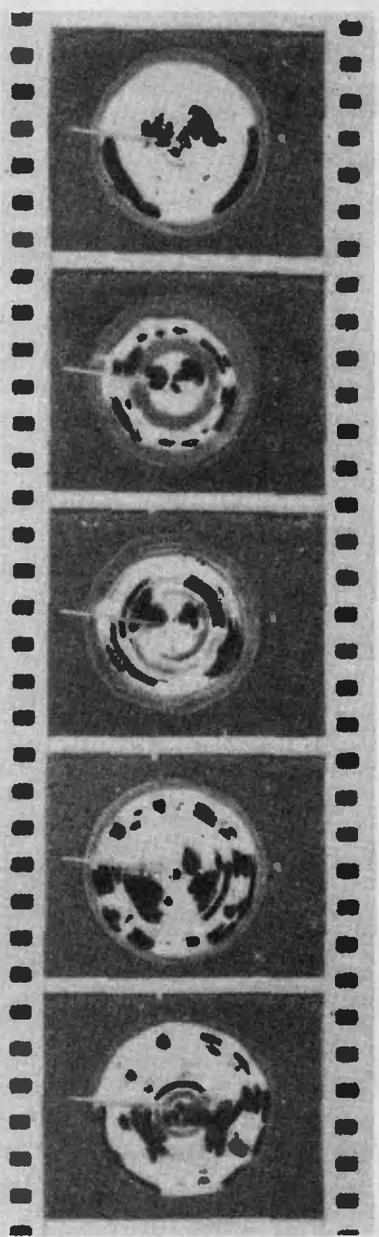


Рис. 2. Пульсация ртутного сердца, когда металлическая проволока-игла касается макушки ртутной капли-лужицы.



Математика 9, 10

Мы публикуем две заметки, адресованные девятиклассникам. Они также могут быть полезны десятиклассникам, готовящимся к вступительным экзаменам в вузы.

Задачи на сравнение чисел

- Какое из двух чисел больше: $\frac{22}{7}$ или 3,14?
 - Они равны.
 - Почему?!
 - Каждое из них равно π.
- Разговор на устном экзамене

В этой заметке разбираются некоторые основные методы установления отношения «больше» или «меньше» между числами, записанными «в неявном виде» — с помощью логарифмов, радикалов и т. п. Подобные задачи часто возникают в ходе выполнения экзаменационных заданий, — и далеко не всегда школьники могут успешно с ними справиться. Широко распространена и та точка зрения, что для решения такой задачи нужно «вычислить» исследуемые числа; и нынешние школьники, «испорченные» прогрессом микроэлектроники, встречая задачу, в которой требуется сравнить два числа, хватаются за микрокалькулятор. Однако, с одной стороны, ясно, что здесь не требуется находить значения чисел с точностью до определенного десятичного знака после запятой. С другой стороны, вычислительный подход может иметь доказательную силу лишь в том случае, когда имеется оценка точности, — без нее легко впасть в ошибку. Верность того или иного знака после запятой нужно обосновывать, а это уже совсем непростая задача. Поэтому предпочтительнее избрать другой способ решения.

Весьма общий метод определения знака неравенства между числами

(или выражениями) α и β заключается в следующем: пытаются подобрать такое число (выражение) γ , для которого, например, $\alpha < \gamma$ и одновременно $\gamma < \beta$. Проиллюстрируем этот метод следующей задачей.

Задача 1. Выясните (не пользуясь таблицами), что больше: $\log_2 3$ или $\log_5 8$?

Решение. Легко проверить, что $1 < \log_2 3 < 2$ и $1 < \log_5 8 < 2$, но отсюда не видно, какой из знаков: «>», «<» «=» следует поставить между числами $\log_2 3$ и $\log_5 8$. Обозначим этот неизвестный пока нам знак «галочкой»: «∨» (знак ∨ называют знаком сравнения) и сравним два логарифма: $\log_2 3 \vee \log_5 8$. Умножим обе части этого неравенства на 2, получим $2 \log_2 3 \vee 2 \log_5 8$. Поскольку $3 < 2 \log_2 3 < 4$, а $2 < 2 \log_5 8 < 3$, получаем, что $2 \log_2 3 > 2 \log_5 8$, откуда и $\log_2 3 > \log_5 8$ (мы воспользовались одним из основных свойств неравенств: если $a > b$, то $ac > bc$, где c — любое положительное число — см. «Алгебра и начала анализа 9—10», с. 257).

Теперь ясно, какое число нужно выбрать в качестве «промежуточного» — это число $3/2$: оно больше одного из данных чисел и меньше другого:

$$\log_5 8 < 3/2 < \log_2 3.$$

Конечно, в этой задаче мы все время неявно пользовались тем обстоятельством, что на промежутке $]0; \infty[$ логарифмическая функция $\log_a x$ при $a > 1$ возрастает.

Задача 2. Что больше:

$$\sqrt{9978} + \sqrt{9981}$$

или

$$\sqrt{9979} + \sqrt{9980}?$$

Решение. Вычтем из одного числа другое:

$$(\sqrt{9981} - \sqrt{9980}) - (\sqrt{9979} - \sqrt{9978}). (*)$$

Каждую разность радикалов умножим и одновременно разделим на их сумму:

$$\frac{(\sqrt{9981} - \sqrt{9980})(\sqrt{9981} + \sqrt{9980})}{\sqrt{9981} + \sqrt{9980}} - \frac{(\sqrt{9979} - \sqrt{9978})(\sqrt{9979} + \sqrt{9978})}{\sqrt{9979} + \sqrt{9978}}.$$

* Более подробно вопросы, относящиеся к задаче 1, см. в «Кванте», 1974, № 3, с. 48—49.

Поскольку $(\sqrt{a+\sqrt{b}})(\sqrt{a-\sqrt{b}})=a-b$, разность (*) равна

$$\frac{1}{\sqrt{9981+\sqrt{9980}}}-\frac{1}{\sqrt{9979+\sqrt{9978}}}$$

Знаменатель первой дроби больше знаменателя второй дроби, откуда следует, что первое число меньше второго:

$$\sqrt{9978+\sqrt{9981}}<\sqrt{9979+\sqrt{9978}}^*.$$

Задача 3. Что больше: 1986^{1985} или 1985^{1986} ?

Решение. Сравним числа, полученные после извлечения корня $(1985 \cdot 1986)$ -й степени из данных чисел: $\sqrt[1986]{1986} \sqrt[1985]{1985}$. Заметим, что это — значения функции $y=x^{1/x}$ при $x=1985$ и $x=1986$. Производная

этой функции $y'=x^{\frac{1}{x}-2} \cdot (1-\ln x)$ отрицательна при $x>e$, так что на промежутке $[e; \infty[$ функция $y=x^{1/x}$ убывает. Поэтому $\sqrt[1986]{1986} < \sqrt[1985]{1985}$, а значит, $1986^{1985} < 1985^{1986}$.

Оценим количество десятичных цифр числа 1986^{1985} : $1 + \lg 1986^{1985} = 1 + 1985 \cdot \lg 1986 \approx 1985 \cdot (\lg 2 + 3) \approx 1985(0,3 + 3) \approx 6550$ цифр! Такое огромное число, большее «ругола» (см. «Квант», 1983, № 7, с. 41), не может вычислить ни одна ЭВМ в мире!

Задачи на сравнение чисел очень часто возникают при решении неравенств. Мы разберем сейчас два примера, после чего предложим несколько неравенств для самостоятельного решения.

Задача 4. Решите неравенство $(2-5^x)(7x^2-10x+3)<0$.

Решение. Будем решать это неравенство методом интервалов (см. «Квант», 1985, № 12, с. 18). Отметим на числовой оси корни сомножителей: $x_1 = \log_5 2$, $x_2 = 3/7$, $x_3 = 1$. Очевидно, $x_3 = 1$ — самый большой корень, и при $x>1$ данное произведение отрицательно. Чередование знаков левой части неравенства показано на рисунке 1 (красными точками отмечены корни x_1 и x_2). Мы видим, что ответ существенно зависит от того, что больше: $3/7$ или $\log_5 2$. Сравним

* Разность (*) равна примерно $0,5 \cdot 10^{-6}$, поэтому ее вычисление на микрокалькуляторе, который воспроизводит 8 значащих цифр на индикаторе (например, на калькуляторе БЭ-86) не дает ответа на поставленный вопрос; — мы получим, что эти числа равны, то есть придем к неверному ответу.

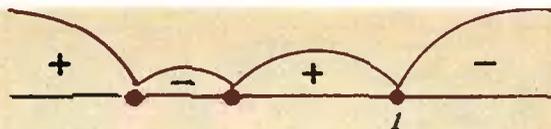


Рис. 1.

их: $3/7 \sqrt{\log_5 2}$. Умножим обе части неравенства на 7:

$$3 \sqrt{7 \log_5 2}$$

или

$$3 \log_5 5^3 \sqrt{7 \log_5 2^7}, \\ \log_5 5 \sqrt{\log_5 2}, \\ 5^3 \sqrt{2^7}$$

Поскольку $5^3 < 2^7$, и каждая наша операция не меняет знака неравенства, мы, произведя все описанные действия в обратном порядке, получим, что $3/7 < \log_5 2$, так что ответ в задаче 4 такой:

$$]3/7; \log_5 2[\cup]1; \infty[.$$

Задача 5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 - 10x + 5 < 0, \\ x^2 + 3x - 2 < 0. \end{cases}$$

Решение. Разложим квадратные трехчлены на линейные множители:

$$\begin{cases} 2(x-a_1)(x-a_2) < 0, \\ (x-b_1)(x-b_2) < 0, \end{cases}$$

где

$$a_1 = (5 - \sqrt{15})/2, \quad a_2 = (5 + \sqrt{15})/2, \\ b_1 = -(3 + \sqrt{17})/2, \quad b_2 = (-3 + \sqrt{17})/2.$$

Решением этой системы служит пересечение интервалов $]a_1; a_2[$ и $]b_1; b_2[$. Таким образом, ответ зависит от взаимного расположения этих интервалов на числовой оси. Очевидно, что $b_1 < a_1$ и $b_2 < a_2$, но числа a_1 и b_2 близки (каждое из них немного больше 0,5). Поэтому реализуется один из двух изображенных на рисунке 2 вариантов в зависимости от того, какое из иррациональных чисел, a_1 или b_2 — больше (разумеется, сравнивать числа надо без применения калькулятора).

Итак, сравним числа a_1 и b_2 , пользуясь основными свойствами неравенств*):

*). Алгебра и начала анализа 9—10». с. 257.

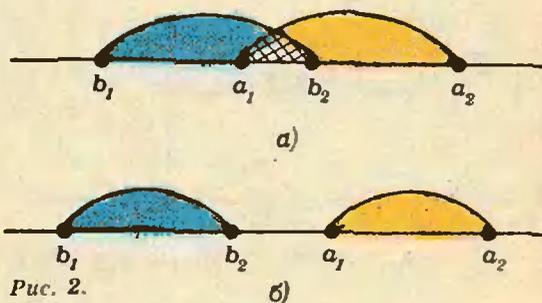


Рис. 2.

	$(5 - \sqrt{15})/2 \sqrt{(-3 + \sqrt{17})/2};$
Умножим на 2 оба числа:	$5 - \sqrt{15} \sqrt{-3 + \sqrt{17}};$
Прибавим по 3 к обоим числам:	$8 - \sqrt{15} \sqrt{-3 + \sqrt{17}};$
Возведем положительные числа в квадрат:	$64 - 16\sqrt{15} + 15\sqrt{17};$
Прибавим к обоим числам по $(16\sqrt{15} - 17)$ и поделим их на 2:	$31 \sqrt{8} \sqrt{15}$
Возведем положительные числа в квадрат:	$961 \sqrt{960}$

Поскольку $961 > 960$, получаем, что $(5 - \sqrt{15})/2 > (-3 + \sqrt{17})/2$. Мы видим, что реализуется случай, изображенный на рисунке 2, б) — интервалы $]a_1; a_2[$ и $]b_1; b_2[$ не пересекаются. Значит, исходная система неравенств решений не имеет.

Упражнения

1. Решите неравенство $|3 + 5x - 2x^2| < \frac{1-x}{2}$.

2. (МИЭМ — 77). Решите неравенство $4^x - 2^{x+1} - 3 < 0$;

Верно ли, что $\sqrt{2}$ является его решением?

3. (МИЭМ — 77). Решите неравенство $\frac{2^{x+1} - 5 \cdot 3^x}{2^x - 3^{x+1}} < 1$.

Верно ли, что $\lg \frac{1}{32}$ является его решением?

4. (МГУ — 75). Решите неравенство $\frac{2x^2 - 11x + 15}{2^x - 6} < 0$.

5. (МГУ — 79). Найдите все решения неравенства $\cos \frac{3}{2} - 4x - x^2 \geq 0$, лежащие в интервале $] -\frac{21}{5}; 0[$.

6. (МГУ — 79). Найдите все решения неравенства $\lg \frac{5}{2} + 6x - x^2 > 0$, лежащие в промежутке $[\frac{1}{4}; 6]$.

7. (МГУ — 79). Решите неравенство $\log_5(x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3 \geq 0$.

8. (МГУ — 79). Решите неравенство $\frac{\log_2(x^2 - 2x - 7)^5 - \log_3(x^2 - 2x - 7)^8}{3x^2 - 13x + 4} \leq 0$.

А. А. Власов

Какой же ответ?

Поводом для написания этой заметки послужила следующая задача:

При каких p уравнение

$$\lg(x^2 + 2px) - \lg(8x - 6p - 3) = 0$$

имеет один корень?

Эта задача, предлагавшаяся на вступительном экзамене по математике в Белорусском технологическом институте им. С. М. Кирова, была в свое время включена в сборник задач, вышедший в 1983 году вторым изданием*). В этом сборнике приведено неполное решение — рассмотрено только один возможный случай.

Чтобы понять, в чем здесь дело, мы сначала разберем более простой пример с точно такой же формулировкой, в котором, нарисовав картинку, можно сразу все увидеть.

Вот этот пример:

При каких p уравнение

$$\frac{\lg px}{\lg(x+1)} = 2$$

имеет один корень?

Решение. Данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} px > 0, \\ x > -1, \\ px = (x+1)^2, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} x > -1, \\ x^2 + \\ + (2-p)x + \\ + 1 = 0. \end{cases}$$

Первый случай. Квадратное уравнение имеет единственный корень (рис. 1).

В этом случае дискриминант уравнения равен нулю, то есть $(2-p)^2 = 4$, откуда $p=0$ и $p=4$. Поскольку значение $p=0$ нам не годится, остается $p=4$. При $p=4$ находим единственный корень $x=1$.

Второй случай. Квадратное уравнение имеет два корня, больший из которых попадает в ОДЗ, а меньший — не попадает.

Таким образом, если x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) — корни квадратного уравнения, то должно быть $x_2 > -1$, а $x_1 \leq -1$ (см. рисунки 2, а, б). Это условие эквивалентно тому, что для функции $f(x) = x^2 + (2-p)x + 1$ должно быть $f(-1) \leq 0$. Отсюда находим $p \leq 0$. Поскольку $px > 0$, значение $p=0$ не годится. Таким образом, ответ в на-

*) Е. А. Островский, И. М. Ангилейко, П. В. Атрашонок, Р. В. Козлова. Задачи по математике на вступительных экзаменах в вузах. Минск: Вышэйшая школа, с. 15.

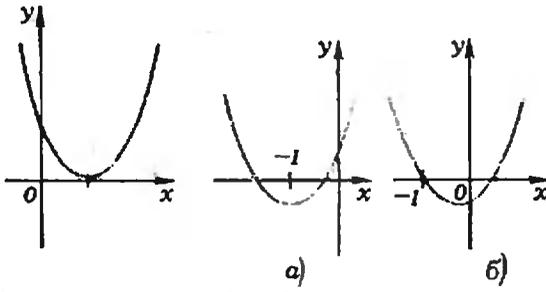


Рис. 1.

Рис. 2.

шем примере:

$$]-\infty; 0[\cup \{4\}.$$

По этой же схеме решается и первая задача, приведенная в начале заметки.

Снова выписываем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} 8x - 6p - 3 > 0, \\ \frac{x^2 + 2px}{8x - 6p - 3} = 1 \end{cases}$$

(ясно, что при выполнении этих условий неравенство $x^2 + 2px > 0$ также выполняется), то есть

$$\begin{cases} 8x - 6p - 3 > 0, \\ x^2 + 2x(p - 4) + 6p + 3 = 0. \end{cases}$$

Снова возможны два случая:

Первый случай. *Квадратное уравнение имеет единственный корень*, то есть дискриминант уравнения равен нулю. Запишем это условие:

$$p^2 - 14p + 13 = 0,$$

откуда $p = 1$ и $p = 13$.

При $p = 1$ получаем $x = 3$; при $p = 13$ получаем $x = -9$. Подставляя найденные значения x и p в неравенство $8x - 6p - 3 > 0$, убеждаемся, что значения $p = 13$, $x = -9$ не годятся. И наоборот, значения $p = 1$,

$x = 3$ этому неравенству удовлетворяют. Таким образом, исходное уравнение при $p = 1$ имеет единственный корень $x = 3$ *).

Второй случай. *Квадратное уравнение имеет два корня, больший из которых попадает в ОДЗ, а меньший — не попадает.*

Из неравенства $8x - 6p - 3 > 0$ следует, что $x > \frac{6p - 3}{8}$, так что если x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) — корни квадратного уравнения $x^2 + 2x(p - 4) + 6p + 3 = 0$, то должно быть $x_2 > \frac{6p + 3}{8}$, а $x_1 \leq \frac{6p + 3}{8}$. Снова, как и в примере

$\frac{\lg px}{\lg(x+1)} = 2$ (см. рис. 2) получаем, что все условия будут выполнены тогда и только тогда, когда для функции $f(x) = x^2 + 2x(p - 4) + 6p + 3$ будет

$$f\left(\frac{6p + 3}{8}\right) \leq 0. \text{ Записав это условие } \left(\frac{6p + 3}{8}\right)^2 + 2 \cdot \frac{6p + 3}{8}(p - 4) + 6p + 3 \leq 0,$$

получим после преобразований

$$(6p + 3)(22p + 3) \leq 0,$$

откуда $-\frac{1}{2} \leq p \leq -\frac{3}{22}$.

Итак, ответ в этой задаче:

$$\left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right] \cup \{1\}.$$

И. Г. Габович
П. И. Горнштейн

* Такой ответ приведен в вышеупомянутом сборнике задач.

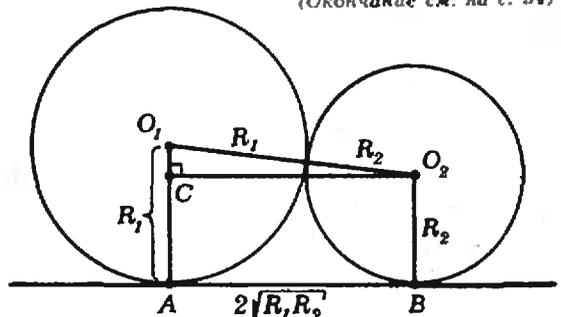
Наша обложка

Обычно решение стереометрической задачи начинается с того, что мы в общих чертах воспроизводим рассматриваемую в ней конфигурацию. В задаче с обложки предыдущего номера представить конфигурацию легче всего прямо по ходу решения. Более того, общий чертеж (приведенный на обложке) нам по сути дела и не понадобится.

Решение основано на следующем полезном утверждении: *две окружности радиусов R_1 и R_2 касаются друг друга внешним образом тогда и только тогда, когда отрезок их общей внешней касательной между точками касания равен $2\sqrt{R_1 R_2}$* (рис. 1). Доказательство этого утверждения очевидно из рисунка 1. Рассматривая окружности в этом утверждении как сечения двух шаров плоскостью, проходящей через их центры, или как сечения шара и цилиндра плоскостью, проходящей через центр шара перпендикулярно оси цилиндра, мы получим условия внешнего касания шаров или ци-

линдра; например, в последнем случае надо, чтобы расстояние от точки касания шара с плоскостью до прямой, по которой цилиндр

(Окончание см. на с. 34)



$$AB^2 = O_2C^2 = (R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2$$

Рис. 1.



Новый метр

То, о чем здесь будет рассказано, не новое открытие в какой-то конкретной области науки. Тем не менее речь пойдет о событии, о котором, безусловно, будет написано во всех учебниках и которое отразится на всей жизни и деятельности человечества.

Более двух лет назад, в октябре 1983 года, Интернациональный комитет мер и весов (его официальное название CIPM — la Comité Internationale des Poids et Mesures) опубликовал рекомендацию ввести новый эталон метра. Приведем начало этого документа:

«Интернациональный комитет мер и весов рекомендует, чтобы метр задавался одним из двух методов —

а) длиной пути l , проходящего в вакууме плоской электромагнитной волной за время t ; длина пути вычисляется по измеренному времени t , используя соотношение $l=ct$ и значение скорости света в вакууме $c=299\,792\,458$ м/с;

б) длиной волны в вакууме λ плоской электромагнитной волны частоты ν ; длина волны вычисляется по измеренной частоте ν , используя формулу $\lambda=c/\nu$ и значение скорости света $c=299\,792\,458$ м/с...».

Вспомним, как определяется метр сейчас. Также официальный документ, принятый в 1960 году 11-й Генеральной конференцией по мерам и весам, гласит: «Метр — длина, равная 1 650 763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86».

А каким был метр до 1960 года?

Согласно первому определению, принятому во Франции во время Великой французской революции, метр был равен десятиллионной доле четверти длины парижского меридиана. В 1799 году был изготовлен и утвержден первый прототип метра в виде платиновой линейки — так называемый архивный метр. Затем в 1872 году Международная метрическая комиссия приняла решение об отказе от «естественного» эталона длины и о принятии архивного метра в качестве эталонной меры длины. Прототип этого метра в виде бруса из сплава платины и иридия с нанесенными на одной из его плоскостей штрихами хранится в Севре (близ Парижа) в Международном бюро мер и весов. Относительная погрешность воспроизведения такого метра составляет около 10^{-7} .

Такое определение метра продержалось почти 80 лет. Лишь к 1960 году оптические методы измерений достигли такого совершенства, что могли конкурировать с простым прикладыванием измеряемого образца к парижскому эта-

лону. Они позволяют воспроизводить метр с точностью порядка 10^{-8} .

Почему же теперь настало время вводить новое определение метра? Одна причина — принципиальная. Новый метод основан на величине скорости света в вакууме — фундаментальной постоянной величине, не зависящей от движения наблюдателя и всегда одинаковой. В новом определении метра скорость света считается заданной, она в точности равна 299 792 458 м/с (подобно тому как до 1960 года метр был точно равен расстоянию между двумя соответствующими штрихами).

Другая причина, техническая, связана с расширением точных методов измерения частоты вплоть до видимой части спектра, в которой оптики умеют измерять длину волны с большей степенью точности (методом интерференции). Начиная с 1982 года, стало возможным измерять частоту и длину волны одной и той же спектральной линии с ошибкой, не превышающей 1—2 единиц в десятом знаке (!). Можно в шутку сказать, что только в последние годы проверили соотношение $c=\lambda\nu$ для видимого света.

Итак, когда рекомендация Интернационального комитета мер и весов будет принята, в физических таблицах будет стоять точное значение скорости света, а длины можно будет измерять с ошибкой, не большей чем две единицы в десятом знаке.

Я. С.

Задачи

1. В этом году я отпраздновал свой день рождения. Число исполнившихся мне лет во многом примечательно.

Если от этого числа отнять 2, то оно разделится на 3, а если от него отнять 3, то оно разделится на 2.

Если к нему прибавить 4, то оно разделится на 5, а если от него отнять 5, то оно разделится на 4.

Если от него отнять 5, то оно разделится на 6, а если от него отнять 6, то оно разделится на 5.

Если к нему прибавить 7, то оно разделится на 8, а если к нему прибавить 8, то оно разделится на 7.

Сколько же лет мне исполнилось?

2. Замените буквы цифрами так, чтобы выполнялись оба равенства:

$$(OH)^3 = \text{ВАНЯ}, \quad B + A + H + Я = OH$$

(одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а разным — разные).

3. Дым, который мы видим, — это мелкие частицы несгоревшего топлива. Их плотность во много раз больше плотности воздуха.

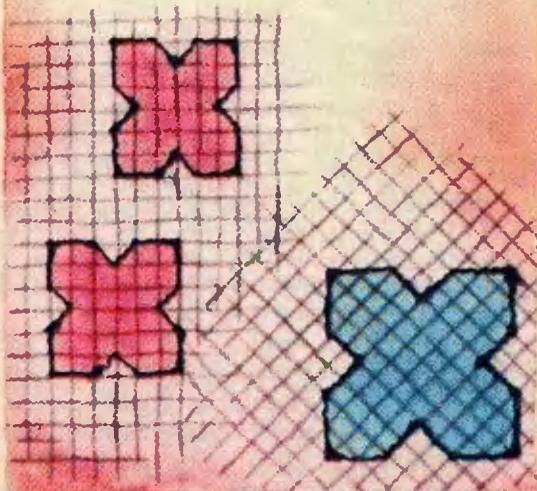
Почему же эти частицы поднимаются вверх?

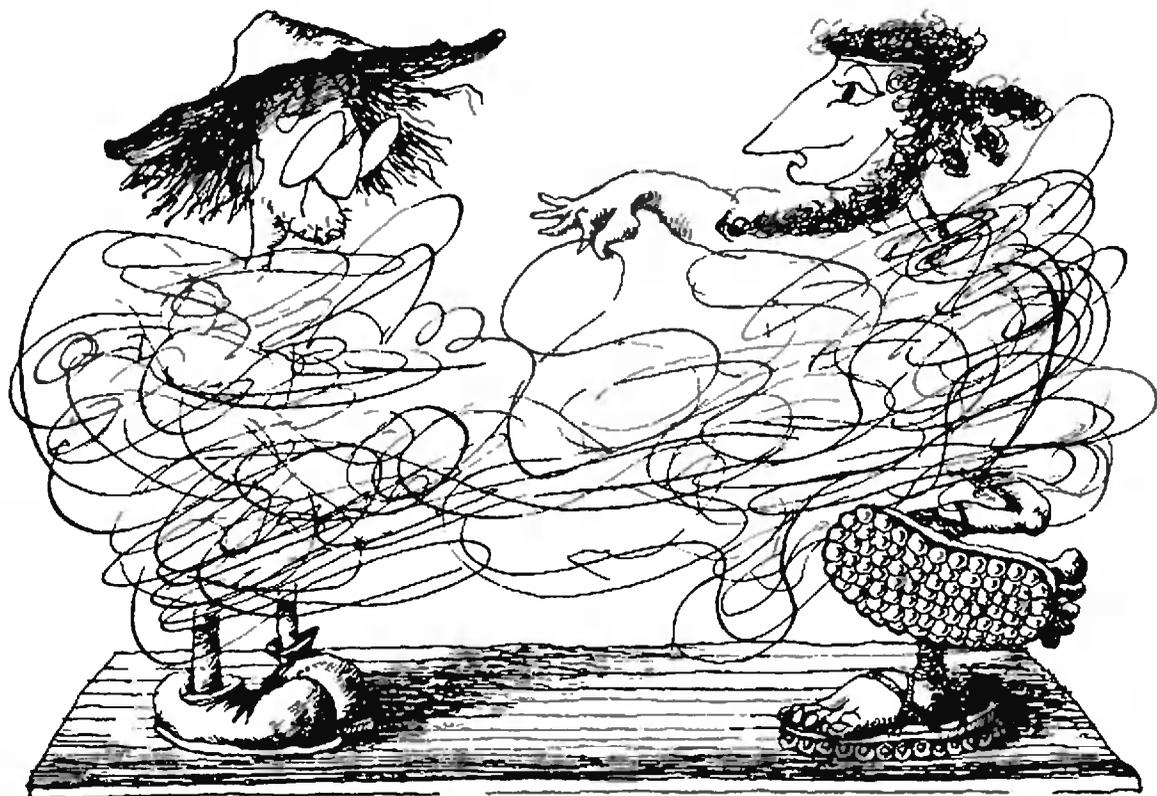
4. На днях я жарил оладьи. Когда я начал переворачивать одну из них, она никак не входила на старое место. Оладьи удалось вновь разместить на сковороде, лишь перевернув их все.

Докажите, что всегда можно уложить перевернутые оладьи на круглой сковороде, на которой они лежали раньше, и приведите пример, в котором нельзя одну из оладий, перевернув, уложить на старое место.

5. Разрежьте каждую из двух маленьких фигур одинаковым образом на четыре части так, чтобы из полученных восьми частей можно было сложить вдвое большую (по площади) подобную фигуру.

Эти задачи предложили В. Д. Вьюн, ученик 10 кл. пос. Славяносербский Ворошиловградской обл. Сергей Ревков, А. П. Савин, А. М. Абрамов, Л. П. Мочалов.





Загадка этрусков

*Кандидат физико-математических наук
А. С. АЛЕКСАНДРОВ*

По крупицам собирают археологи и историки сведения об этрусках, таинственном древнем народе, некогда заселявшем большую часть современной Италии. Примерно к середине I тысячелетия до н. э. их цивилизация достигла культурного и экономического расцвета. Грозную силу представляли собой этрусские города и в военном отношении. Но после изгнания в 510 году до н. э. этрусских царей из Рима, у этрусков в Италии появились в лице римлян опасные соперники. Длительные войны закончились через несколько столетий покорением этрусков, и в начале нашей эры они полностью растворились в пестрой массе народов Римской империи. От них остались лишь немногочисленные надписи на до сих пор не расшифрованном окончательно языке, отдельные памятники выдающегося развития ремесел и искусств

и скурые сообщения римских авторов...

При раскопках городов Этрурии археологам удалось найти самые разнообразные свидетельства высокого уровня развития угасшей цивилизации. Всеобщее восхищение вызвали ювелирные изделия этрусков и среди них в первую очередь так называемые гранулированные украшения — подлинные шедевры безымянных мастеров. Они представляют собой медные пластинки со сложными узорами, выложенными тысячами мельчайших (диаметром около 0,2 мм) золотых шариков. Ни у одного другого народа гранулированные изделия не достигали такой высокой степени совершенства.

К концу I тысячелетия н. э. искусство изготовления подобных украшений было окончательно забыто. Только в XIX веке исследователи предприняли попытки восстановить секреты техники, но — безрезультатно. Долгое время никто не мог объяснить, как можно прикрепить золотую крупинку к медному основанию, не расплавляя ее при этом. Если бы крупинка расплавилась, капля жидкого золота растеклась бы по меди. При охлажде-

нии растекшаяся капля приварилась бы «намертво», но был бы утрачен изысканный внешний вид изделия.



Секрет был раскрыт только в 1933 году. Технология оказалась совсем не простой, и чтобы ее понять, надо предварительно вспомнить явление диффузии.

Диффузией называется проникновение атомов (или молекул) одного вещества в другое. В жидкостях этот процесс можно наблюдать непосредственно. Капнем в воду каплю чернил. В первый момент капля будет иметь четко очерченные контуры. С течением времени они будут все больше и больше расплываться, пока обе жидкости полностью не перемешаются, а капля, как таковая, не исчезнет. Почему это происходит?

Прежде чем ответить, вспомним один очень известный эксперимент. В 1827 году ботаник Броун наблюдал беспорядочное движение частичек цветочной пыльцы в воде. Частички были достаточно малы (их характерный размер около 0,005 мм), и для наблюдений использовался микроскоп. «Маршруты» частичек не подчинялись никакой системе и были столь причудливы, что Броун вначале принял это движение за какое-то особое проявление жизни.

Правильно броуновское движение было объяснено полвека спустя. Молекулы воды постоянно находятся в хаотическом движении. Это они «бомбардируют» с разных сторон огромную (по сравнению с самими молекулами) частицу пыльцы, заставляя ее двигаться случайным образом. Поэтому броуновское движение может служить наблюдаемым доказательством невидимого даже под микроскопом движения молекул.

А теперь вернемся к капле чернил в стакане воды. И молекулы воды, и молекулы чернил беспорядочно перемещаются. Некоторые из молекул воды проникают в чернила, а некоторые молекулы чернил — в воду. То есть происходит взаимная диффузия обеих жидкостей, в результате которой и расплывается капля.

Мы также регулярно наблюдаем диффузию в газах. Именно ей мы

заны тем, что чувствуем запахи веществ, находящихся от нас на расстоянии. Диффузионные процессы могут протекать и в твердых телах, но там они происходят слишком медленно, чтобы быть заметными при комнатной температуре. Однако с ростом температуры движение молекул (или атомов) становится более интенсивным. В частности, капля чернил в горячей воде расплывается быстрее, чем в холодной. Поэтому при длительном выдерживании твердых тел при высоких температурах можно воочию убедиться, что диффузия протекает и в них.

Впервые это удалось сделать в 1896 году английскому металлургу Робертсу-Аустену. Он прижал друг к другу золотой диск и свинцовый цилиндр и поместил их на 10 дней в печь, где поддерживалась температура 200 °С. Когда печь открыли, разъединить диск и цилиндр оказалось невозможно. За счет диффузии золото и свинец буквально «проросли» друг в друга. Сегодня такая технология соединения деталей хорошо известна и носит название диффузионной сварки. Так может быть именно этим способом этруски крепили золотые шарики к меди?

От этого предположения приходится сразу отказаться. Прежде всего, процесс диффузионной сварки следует производить в вакууме (иначе содержащийся в воздухе кислород успеет окислить медь и изделие покроется слоем черной окалины); кроме того, диффузионная сварка требует довольно долгой выдержки при высоких температурах*). Обеспечить выполнение этих условий этруски не могли.

Наиболее правдоподобной представляется иная версия этрусской технологии. Сначала узор из золотых шариков приклеивали к листу папируса, который затем накладывали на медную основу шариками вниз. Затем драгоценный «бутерброд» постепенно нагревали. Во время нагрева успевала произойти незначительная диффузия золота в медь и наоборот.

(Окончание см. на с. 34)

* Робертсу-Аустену повезло, что объектами его опытов были свинец и золото. Эта пара металлов является одним из «реордененов» по темпам их случаев (другие металлические пары низкой температуры как 200 °С той сварки не хватило бы и месяц



Одной из древнейших математических дисциплин является теория чисел, многие задачи которой обладают тем свойством, что они допускают очень простую, понятную всем формулировку, но доказательство задач представляет необычайные трудности.

И. М. Виноградов



Выдающийся советский математик — академик Иван Матвеевич Виноградов (1891—1983) известен замечательными результатами в теории чисел. В своих исследованиях он создал мощный метод аналитической теории чисел — метод тригонометрических сумм. Этим методом удалось решить многие задачи, столетиями не поддававшиеся решению.

Иван Матвеевич Виноградов более пятидесяти лет возглавлял Математический институт им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР — главный штаб советской математической науки. Он — дважды Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий.

Числа простые и...

Давайте оглянемся вокруг: сколько чисел окружает нас! Номер нашего дома, квартиры; номера автобусов, трамваев, на которых мы ездим; температура воздуха, атмосферное давление; уровень наших знаний по математике и по литературе... Я думаю, что вы можете многократно увеличить этот список.

Каждое число мы воспринимаем как степень проявления чего-либо или как показатель принадлежности объекта к тому или иному классу предметов, явлений (поезд данного маршрута, самолет данной марки, например ТУ-134 и т. д.). При этом мы совершенно не задумываемся о самих числах. Конечно, отмечаем при встрече «круглые» числа; некоторые проверяют номера билетиков в автобусе на «счастьливость»: совпадают ли суммы первых и последних трех цифр. Но эти свойства присущи не самим числам, а их представлениям в десятичной записи.

Свойствами чисел люди начали интересоваться очень давно. Еще древние греки делили натуральные числа на *простые* — имеющие лишь два различных делителя, и *составные* — у которых больше двух делителей. Единица имеет только один делитель, поэтому ее не причисляют ни к простым, ни к составным числам.

Древние греки умели доказывать, что простых чи-

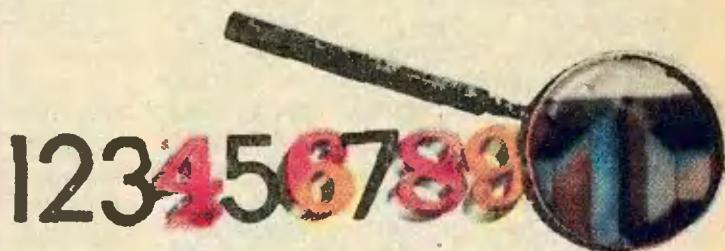
сел бесконечно много. В 1837 году немецкий математик Лежен Дирихле доказал, что в любой арифметической прогрессии со взаимно простыми разностью и первым членом содержится бесконечно много простых чисел.

Свойства делимости помогали грекам в решении уравнений в целых числах. Особенно велики здесь заслуги Диофанта, которого называют последним великим математиком античности. Годы его жизни точно не установлены, но имеются веские основания считать, что он жил в III веке нашей эры.

Задачи теории чисел, несмотря на простоту формулировки, как правило, очень трудны. Так, несколько столетий ждет решения проблема близнецов: «*Конечна или бесконечна совокупность пар простых чисел, отличающихся на 2, то есть таких, как 3 и 5, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31, ... ?*». А сколько труда затрачено на попытки доказать «Великую теорему Ферма!»

Рассмотрение свойств чисел, связанных с их делителями, породило большую область математики, называемую *мультипликативной теорией чисел* (от латинского слова *multiplicatio* — умножать).

Математики рассматривают также свойства чисел, связанные с их представлениями в виде суммы чисел определенного вида. Существует бесконечно



много чисел, являющихся квадратами и суммами двух квадратов одновременно; это — «пифагоровы тройки». Также существует бесконечно много кубов, являющихся суммами трех кубов, и т. д.

В 1742 году в переписке двух академиков Петербургской Академии наук Х. Гольдбаха и Л. Эйлера возникла следующая проблема (она носит название проблемы Гольдбаха): *верно ли, что каждое четное число, большее двух, представляется в виде суммы двух простых чисел, а каждое нечетное число, большее семи, представляется в виде суммы трех простых чисел.* Существенный вклад в решение этих проблем внесли советские математики И. М. Виноградов и Н. Г. Чудаков.

Класс проблем, связанных с представлением чисел в виде сумм чисел заданного вида, получил название *аддитивной теории чисел* (от латинского *additivus* — прилагательный, получающийся в результате сложения).

В противоположность простым числам, математики рассматривают числа, имеющие очень много делителей. Натуральное число называется *сверхсоставным*, если у него больше различных делителей, чем у любого из натуральных чисел, меньших его. Единица со своим единственным делителем является сверхсоставным числом (поскольку нет натурального числа, меньшего ее). Следующим сверхсоставным числом будет простое число 2, имеющее два делителя 1 и 2; далее — число 4 с тремя делителями 1, 2 и 4; потом 6 с четырьмя делителями. Можно было бы предположить, что всякое число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ будет сверхсоставным, но это не так. Попробуйте отыскать следующие десять сверхсоставных чисел.



Для нахождения числа различных делителей у чисел существует формула. Известно, что всякое натуральное число n представляется в виде произведения степеней простых чисел и притом единственным образом:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$$

(эта теорема носит название *основной теоремы*

арифметики). Так вот, число различных делителей числа n равно следующему произведению:

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_s + 1).$$

Числам и их свойствам посвящены многие статьи, опубликованные в «Кванте»; см., например, 1974, № 6, с. 56; 1979, № 4, с. 38; 1981, № 9, с. 18; 1983, № 1, с. 30 и № 7, с. 42.

А. П.

Полезные факты

Признак делимости на 11

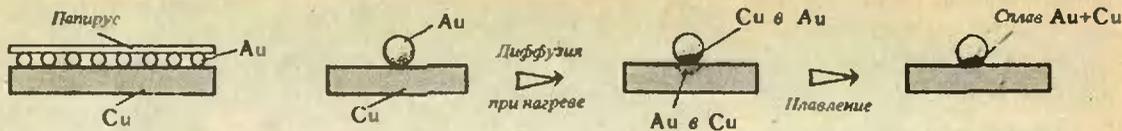
Для того чтобы число, записанное в десятичной системе счисления, делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делилась на 11.

Теорема Вильсона

Число $(n-1)! + 1$ делится на n в том и только в том случае, если n — простое число.

Малая теорема Ферма

Если p — простое число, то для любого натурального числа a число $a^p - a$ делится на p .



(Начало см. на с. 30)

В результате в чрезвычайно узкой зоне контакта шарика и пластины образовывался медно-золотой сплав.

Температура плавления чистого золота — 1063 °С, чистой меди — 1083 °С, а сплавы золота с медью плавятся при более низких температурах. Например, сплав, состоящий из равного количества атомов золота и меди, плавится уже при 910 °С. Именно это обстоятельство является ключевым для разгадки секрета ювелиров Этрурии. Они повышали температуру до того предела, что расплавлялась только зона образовавшегося сплава, а сами золото и медь оставались в твердом состоянии. При последующем охлаждении расплав затвердевал, и крупинка, практически не потеряв своей сферической формы, приваривалась к основанию из меди. Этот процесс одновременно происходил во всех крупинках, и весь приклеенный к папирусу узор оказывался как бы «сведенным» (по аналогии с переводными картинками) на

медь. Папирус при столь высоких температурах сгорал дотла, и изделие было готово. Медь окислиться не успевала, так как процесс происходил достаточно быстро и значительную часть кислорода принимал на себя при сгорании папируса.

Древние ювелирные секреты и сегодня разгаданы не до конца. Остается неясным, например, как этрускам удавалось изготавливать мельчайшие золотые шарики. Но более всего удивляет то, как вообще сумели мастера далекого прошлого выработать столь изощренную технологию. Какой удивительной комбинации случая, опыта и прозрения обязаны этруски своему открытию? Может быть, это когда-нибудь станет известным, а пока мы можем лишь воздать должное исчезнувшему народу и повторить слова древнеримского историка Гая Саллюстия: «Чего люди сумеют добиться, возделывая землю, плавя металл и возводя строения, зависит от их духовной силы».

Наша обложка

(Начало см. на с. 27)

касается той же плоскости, было равно $2\sqrt{R_1R_2}$, где R_1 и R_2 — радиусы шара и основания цилиндра.

Пусть A и C , B и D — точки касания шаров радиусов R_1 и R_2 соответственно с плоскостью, l — прямая, по которой цилиндр касается плоскости. Из приведенного выше ут-

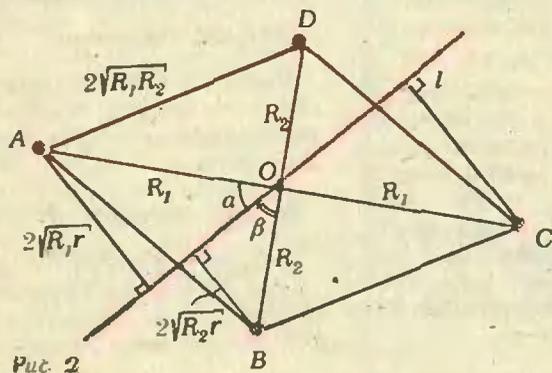


Рис. 2

верждения следует, что

$$AB=BC=CD=DA=2\sqrt{R_1R_2},$$

то есть $ABCD$ — ромб (рис. 2), причем его диагонали равны $2R_1$ и $2R_2$.

Кроме того, точки A и C удалены от прямой l на одно и то же расстояние (равное $2\sqrt{R_1r}$). Следовательно, эта прямая либо проходит через середину O отрезка AC (центр ромба), либо параллельна AC . Последнее невозможно, так как точки B и D также удалены от l на одно и то же расстояние ($2\sqrt{R_2r}$). В итоге получается чертеж, показанный на рисунке 2.

Из прямоугольного треугольника AOB получаем уравнение $AB^2=AO^2+OB^2$, или

$$4R_1R_2=R_1^2+R_2^2. \tag{1}$$

Далее, если α и $\beta=\pi/2-\alpha$ — углы между прямой l и прямыми OA и OB , то $\sin \alpha=2\sqrt{R_1r}/R_1=2\sqrt{r/R_1}$, $\cos \alpha=\sin \beta=2\sqrt{r/R_2}$, следовательно,

$$1=\sin^2 \alpha+\cos^2 \alpha=4r\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \tag{2}$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, получим ответ: $R_1=4r(3\pm\sqrt{3})$, $R_2=4r(3\mp\sqrt{3})$ (знаки выбираются согласованно).

В. Д.

Задачник «Кванта»

Задачи

М966—М970; Ф978—Ф982

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 апреля 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М968, М969» или «Ф980». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта». Новая задача по физике» или «...Новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М966. Докажите, что любой треугольник можно разрезать отрезками на четыре куска, из которых можно составить два подобных ему треугольника.

Л. Д. Курляндчик

М967. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n (включая 1 и n) и через $\varphi(n)$ — количество чисел, меньших числа n и взаимно простых с ним. Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$

$$\sigma(n) + \varphi(n) \geq 2n.$$

В. Ф. Лев

М968. Три многоугольника в пространстве расположены так, что их плоскости пересекаются в одной точке O .

а) Докажите, что найдется плоскость, проекции на которую этих трех многоугольников имеют равные площади.

б) Сколько будет таких плоскостей, проходящих через точку O ?

Н. М. Седракян

М969. Докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Г. Г. Алиханов

М970. На начальной остановке в автобус вошло 32 пассажира, которым нужно ехать до 32 разных остановок, расположенных на расстоянии 1 км друг от друга. Водитель решил провести голосование: какие остановки отменить, а какие сохранить. Он называет остановки в некотором порядке. Пассажир голосует за отмену остановки, если он собирается ехать дальше, против, если собирается выходить на этой остановке, и воздерживается, если — раньше (не учитывая, что при дальнейшем голосовании могут отменить и его остановку). Если за отмену подано больше голосов, чем против, остановку отменяют, а те, кто хотел на ней выходить, решают ехать до ближайшей к ней из еще не отмененных (если таких две — до первой из них). Какое а) наименьшее, б)* наибольшее число остановок может сохраниться в зависимости от порядка, в котором их называет водитель?

С. Л. Елисеев

Ф978. На жестком невесомом стержне ABC длины $3l$ закреплены два одинаковых груза B и C так,

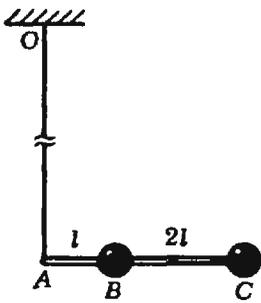


Рис. 1.

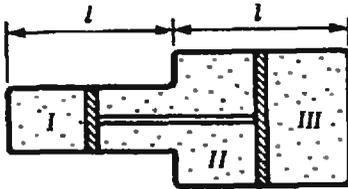


Рис. 2.

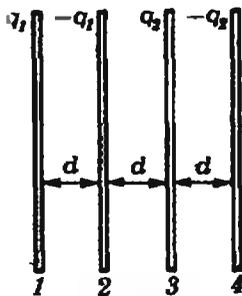


Рис. 3.



Рис. 4.

как показано на рисунке 1: $|AB|=l$, $|BC|=2l$. Стержень подвешен за точку A к очень длинной невесомой нити AO . В начальный момент стержень удерживают в горизонтальном положении, и нить при этом вертикальна; затем стержень отпускают. Какой будет скорость точки A в тот момент, когда стержень будет проходить нижнее положение?

Г. Л. Коткин

F979. В сосуде, имеющем форму двух «состыкованных» цилиндров одинаковой длины l и с площадями сечений S и αS ($\alpha > 1$), находится идеальный газ. Посередине каждого цилиндра находятся поршни, соединенные жестким стержнем (рис. 2); при этом давление в отсеке I равно p , в отсеке III давление равно βp , поршни находятся в равновесии. К системе подвели тепло Q так, что температура возросла, оставаясь во всех отсеках одинаковой. Определите, как изменилось давление в отсеке I . Внутренняя энергия одного моля газа равна cT (c — молярная теплоемкость газа). Теплоемкости цилиндров и поршней пренебрежимо малы; трением пренебречь.

В. С. Фадин

F980. Четыре одинаковых металлических пластины площади S каждая с зарядами $q_1, -q_1, q_2, -q_2$ установлены параллельно друг другу на расстоянии d одна от другой (рис. 3; d много меньше линейных размеров пластин). Внешние пластины 1 и 4 соединяют проводником. Найти разность потенциалов между пластинами 2 и 3 .

Т. В. Федотович

F981. На груз массы M , висящий на пружине, кладут груз массы m (рис. 4), удерживая груз M в первоначальном положении, а затем грузы отпускают. Найти максимальную силу, действующую на груз m со стороны груза M .

П. И. Зубков

F982. Как известно, предельный размер различной детали изображения на киноплёнке определяется размерами кристалликов светочувствительного слоя. С уменьшением размера кристалликов четкость изображения растет. Оцените предельный размер кристалликов, при котором зритель перестает замечать рост четкости изображения на экране кинозала. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно правильные численные значения и получить численный результат.

Г. В. Меледин

Problems

M966—M970; P978—P982

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no

M966. Prove that any triangle can be cut up by line segments into four pieces from which two triangles similar to the original one can be put together.

L. D. Kurtyandchik

M967. Denote by $\sigma(n)$ the sum of all positive integer divisors of the number n (including 1 and n) and by $\varphi(n)$ the quantity

information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Мокса К-6, ул. Гопькоро, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian and English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

of numbers less than n and relatively prime to n . Prove that for any natural number $n \geq 2$

$$\sigma(n) + \varphi(n) \geq 2n.$$

V. F. Lev

M968. Three polygons are situated in space so that their three planes have a single common point O .

- Prove that there exists a plane on which the projections of the three polygons have the same area.
- How many such planes pass through O ?

N. M. Sedrakyan

M969. Prove the inequality

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

G. G. Alikhanov

M970. Thirty two passengers going to 32 different stops enter a bus at its starting point. The distance between stops is 1 km. The driver then decides to hold an election to decide where the bus will stop. He calls out the stops in some order. Each passenger votes against the stop if he intends to get off at a further stop, for the stop if he gets off there and abstains if he gets off before (not taking into consideration that his stop may be cancelled by a later vote). If there are more votes against a stop than for it, this stop is cancelled and all passengers who want to get off there decide to ride to the nearest stop (if there are two, to the first one). What is the a) smallest, b)* largest number of stops which the bus will make, depending on the order in which the driver calls the stops?

S. L. Etiseev

P978. Two identical weights B and C are fixed on a rigid weightless rod ABC of length $3l$ as shown on the picture (Puc. 1, p. 36) $|AB|=l$, $|BC|=2l$. The rod hangs from the point A on a very long weightless string AO . At the initial moment the rod is held in horizontal position, the string being vertical; then the rod is dropped. What will be the velocity of the point A at the moment when the rod passes through its lowest position?

G. L. Kotkin

P979. A vessel, consisting of two connected cylinders of the same length l and section areas S and αS ($\alpha > 1$), contains ideal gas. Two pistons, located in the middle of the two cylinders are joined by a rigid rod (see Puc. 2, p. 36); the pressure in chamber I is p , in chamber III is βp , the pistons are in equilibrium. The amount of heat Q is communicated to the vessel so that the temperature increases but remains equal in the three chambers. Find the change of pressure in chamber I. The internal energy of one mole of gas equals cT (c is the molar heat capacity of the gas). The heat capacity of the cylinders and pistons is negligibly small, friction is negligible.

S. V. Fadin

P980. Four identical metal plates of area S with charges q_1 , $-q_1$, q_2 , $-q_2$ are placed parallel to each other at the distance d from each other (see Puc. 3, p. 36); d is much less than the linear dimensions of the plates. The external plates 1 and 4 are connected by a conductor. Find the difference of potential between plates 2 and 3.

T. V. Fedotovich

P981. A weight of mass m is placed on a weight of mass M hanging on a spring (see Puc. 4); at first the weight M is held in its original position, then the weights are released. Find the maximal force exerted by the weight M on the weight m .

P. I. Zubkov

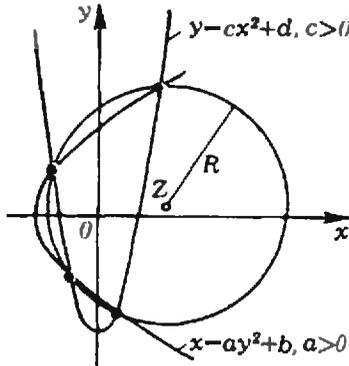
P982. It is known that the limiting size of distinguishable details on movie film is determined by the size of the little crystals of the light-sensitive layer. When the size of these crystals is decreased, the clarity of the image increases. Estimate the limiting size of the crystals for which the viewer ceases to notice the increase of clarity on the screen. It is assumed that you are familiar with the phenomenon, that you can choose the parameters needed to solve the problem, correctly estimate their numerical values and obtain numerical results.

G. V. Meledin

Решения задач

М946—М950; Ф958—Ф962

М946. Две параболы расположены на плоскости так, что их оси взаимно перпендикулярны и параболы пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.



Выберем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы оси парабол были координатными осями (см. рисунок). Тогда уравнение одной из парабол $x = ay^2 + b$ ($a > 0$, $b < 0$), другой $y = cx^2 + d$ ($c > 0$, $d < 0$). Координаты $(x; y)$ точек пересечения парабол удовлетворяют системе уравнений $x = ay^2 + b$, $y = cx^2 + d$. Разделив первое уравнение на a , второе — на c и сложив получившиеся уравнения, приходим после очевидных преобразований к уравнению

$$\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} - \frac{b}{a} - \frac{d}{c}.$$

Поскольку его правая часть положительна, отсюда следует, что точки пересечения парабол лежат

на окружности радиуса $R = \sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} - \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}$ с центром в точке $Z(1/2a; 1/2c)$.

Л. П. Купцов

М947. На доске в строку написаны числа

$$1 \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \dots \frac{1}{10} \frac{1}{11} \frac{1}{12}$$

а) Докажите, что как бы мы ни расставили знаки $+$ и $-$ между этими числами, полученная сумма не будет равна нулю.

б) Какое наименьшее количество написанных чисел необходимо стереть с доски для того, чтобы после некоторой расстановки $+$ и $-$ между оставшимися числами получилась сумма, равная нулю?

В решении обоих пунктов задачи используется следующее утверждение: *сумма двух несократимых дробей a/b и c/d с разными знаменателями не может равняться нулю.* (Если, скажем, $b > d$, то равенство $ad = -bc$ невозможно, так как a взаимно просто с b , а d не делится на b .)

а) Записывая рассматриваемую сумму в виде $\left(1 \pm \frac{1}{2} \pm \dots \pm \frac{1}{10} \pm \frac{1}{12}\right) \pm \frac{1}{11}$, мы видим, что в силу приведенного выше утверждения ни при каком выборе знаков она не обратится в нуль, так как наименьший общий знаменатель дробей в скобках не равен 11.

б) Ответ: 6. Из доказательства пункта а) следует, что дробь $1/11$ надо стереть. Точно так же доказывается, что надо стереть $1/9$, $1/8$, $1/7$. Общий вклад дробей $1/5$ и $1/10$ в сумму, если хотя бы одна из них не стерта, может равняться $\pm 1/5$, $\pm 1/10$ или $\pm 3/10$. Поскольку знаменатели остальных дробей не делятся на 5, и эти две дроби надо стереть. Из оставшихся чисел нулевую сумму составить можно:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = 0.$$

С. В. Резниченко

М948. Правильный треугольник ABC полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками. Докажите, что треугольник ABC можно полностью покрыть четырьмя такими треугольниками (эти треугольники разрешается перемещать).

Возьмем в треугольнике ABC шесть точек — вершины и середины сторон. Хотя бы две из них должны покрываться одним из пяти меньших треугольников, следовательно, сторона такого треугольника не меньше половины стороны треугольника ABC . Поэтому каждый из четырех правильных треугольников, на которые средние линии

разбивают треугольник ABC , можно покрыть одним из данных пяти треугольников.

В. В. Произволов



М949. Даны 1985 гирь с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 1984 г, 1985 г. Можно ли их разделить на пять групп так, чтобы и число гирь, и их суммарная масса были одинаковы во всех пяти группах?

Ответ: можно. Десять гирь с массами $n+1, n+2, \dots, n+10$ граммов можно разделить на пять групп так, чтобы в каждую группу попали две гири с общей массой $2n+11$ граммов. Схема рас-

Таблица 1

Номер группы	I	II	III	IV	V
Массы гирь, входящих в группу	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$
	$n+10$	$n+9$	$n+8$	$n+7$	$n+6$

Таблица 2

Номер группы	I	II	III	IV	V
Массы гирь, входящих в группу	1	2	3	4	5
	10	7	9	6	8
	13	15	12	14	11

пределения приведена в таблице 1. Распределим в соответствии с этой схемой гири с массами от 16 г до 25 г, от 26 г до 35 г, ..., от 1976 г до 1985 г. Оставшиеся 15 гирь можно распределить так, как показано в таблице 2. Существуют и другие схемы распределения гирь.

Е. П. Ерошенков



М950. Двадцать пять коротышек делят садовые участки в Цветочном Городе. Каждый участок представляет собой квадрат 1×1 , и все участки вместе составляют квадрат 5×5 . Каждый коротышка находится в ссоре не более чем с тремя другими коротышками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки двух поссорившихся коротышек не были соседними. (Соседними называются участки, имеющие общую сторону)

Вначале распределим участки произвольно. Будем считать, что на границе двух соседних участков стоит забор, если их хозяева в ссоре. Докажем, что если при этом между участками коротышек A и B стоит забор, то B сможет поменяться участками с каким-то коротышкой C так, что этот забор можно будет снести, а новых заборов ставить не придется. После нескольких таких обменов все заборы будут снесены и получится требуемое распределение.

Достаточно, чтобы коротышка C отличался от A и удовлетворял двум условиям: а) не был в ссоре ни с одним из четырех соседей B ; б) не был соседом ни одного из трех (или менее) коротышек, поссорившихся с B . Условие а) исключает не более чем $4 \cdot 3 = 12$ коротышек, в том числе и B ; условие б) также исключает случай $C=B$ и, кроме него, еще не более чем $3 \cdot 4 - 1 = 11$ коротышек. Учитывая, что $C \neq A$, всего надо исключить не более чем $12 + 11 + 1 = 24$ коротышки, так что остается по крайней мере один коротышка, с которым сможет поменяться B .

С. В. Конягин



Ф958. Космическая станция массой M и состыкованный с ней спутник массой m движутся вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой равен

После расстыковки станция и спутник движутся по эллиптическим орбитам, для которых точка расстыковки (точка A на рисунке) является соответственно апогеем и перигеем.

$1,25R$, где R — радиус Земли. В некоторый момент спутник катапультируется со станции в направлении ее движения и переходит на эллиптическую орбиту с апогеем, удаленным от центра Земли на расстояние $10R$. При каком отношении m/M спутник встретится со станцией, совершив один оборот вокруг Земли?

Пусть T_1 — период обращения спутника по орбите 1 с расстоянием от центра Земли до апогея $10R$, T_2 — период обращения станции по орбите 2 с расстоянием от центра Земли до перигея nR (n — неизвестное число). Сближение спутника и станции в точке A через один оборот спутника произойдет при условии

$$\frac{T_1}{T_2} = k > 1, \text{ где } k \text{ — целое число.}$$

Выражая T_1, T_2 через массы станции M и спутника m , используя для этой цели законы Кеплера, законы сохранения импульса и энергии, найдем возможные соотношения между этими массами, которые приводят к выполнению условия $T_1:T_2 = k$.

По третьему закону Кеплера

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2} = \left(\frac{45}{5+4n}\right)^{3/2} = k, \quad (1)$$

где a_1, a_2 — большие полуоси соответствующих орбит (см. рисунок). Выразим n через массы m и M .

При раздельном движении станции и спутника вокруг Земли сохраняются их полные механические энергии. Так как потенциальная энергия тела массы m в поле тяготения Земли на расстоянии r от центра Земли равна

$$U = -\frac{GmM_3}{r} = -\frac{mgR^2}{r}$$

(g — ускорение свободного падения, M_3 — масса Земли), то из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mgR^2}{5R/4} = \frac{m(v_1')^2}{2} - \frac{mgR^2}{10R}, \quad (2)$$

$$\frac{Mv_2^2}{2} - \frac{MgR^2}{5R/4} = \frac{M(v_2')^2}{2} - \frac{MgR^2}{nR}, \quad (3)$$

где v_1' — скорость спутника в апогее, v_2' — скорость станции в перигее, v_1 и v_2 — скорости, приобретаемые соответственно спутником и станцией в момент расстыковки в точке A (см. рисунок).

Согласно закону сохранения импульса скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 связаны соотношением

$$(M+m)v_0 = mv_1 + Mv_2, \quad (4)$$

где v_0 — скорость станции и спутника до расстыковки. Величину v_0 найдем из уравнения движения станции и спутника как целого (до расстыковки):

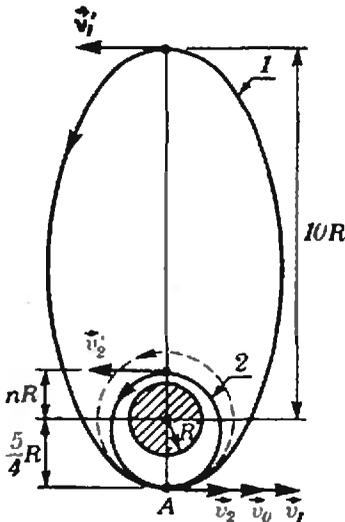
$$\frac{(m+M)v_0^2}{5R/4} = G \frac{(m+M)M_3}{(5R/4)^2},$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_3}{5R/4}} = 2\sqrt{\frac{gR}{5}}. \quad (5)$$

Второй закон Кеплера позволяет установить связь между скоростями v_1 и v_1', v_2 и v_2' :

$$\frac{5}{4} Rv_1 = 10Rv_1', \quad (6)$$



Большие полуоси орбит спутника (1) и станции (2) равны соответственно

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} R + 10R \right) = \frac{45}{8} R,$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} R + nR \right) = \frac{5+4n}{8} R.$$

$$\frac{5}{4} Rv_2 = nRv'_2. \quad (7)$$

Уравнения (2)—(7) однозначно определяют n , v_0 , v_1 , v_2 , v'_1 , v'_2 как функции величин m , M , R , g . Решая систему, найдем

$$n = \frac{5(1-m/3M)^2}{4(2-(1-m/3M)^2)}. \quad (8)$$

Станция не упадет на Землю после запуска спутника, если $n > 1$. Это условие будет выполнено при

$$\frac{m}{M} < 3 - 2\sqrt{2}$$

(случай $m > M$ не рассматривается).

Подставив (8) в (2), получим

$$\frac{m}{M} = 3 - \sqrt{2(9 - k^{2/3})}. \quad (9)$$

Условие $0 < \frac{m}{M} < 3 - 2\sqrt{2}$ накладывает следующие ограничения на допустимые значения k в формуле (9):

$$10 \leq k \leq 18, \quad k < 5^{3/2} \approx 11,2.$$

Таким образом, возможны лишь значения $k = 10, 11$, которым соответствуют отношения масс

$$\frac{m}{M} = 0,0476 \text{ и } \frac{m}{M} = 0,153.$$

А. А. Бирюков

◆
Ф959. При относительной влажности воздуха $r_1 = 50\%$ вода, налитая в блюде, испарилась на открытом воздухе за время $t_1 = 40$ мин. За какое время испарилась бы вода при $r_2 = 80\%$?

Наряду с процессом испарения жидкости идет и процесс конденсации пара. Скорость испарения в обоих случаях (при $r_1 = 50\%$ и при $r_2 = 80\%$) одна и та же (она зависит только от температуры жидкости). Скорость же конденсации пропорциональна концентрации молекул пара в воздухе, то есть пропорциональна относительной влажности, и во втором случае она выше, чем в первом.

Очевидно, что скорость убывания воды равна $v = v_n - v_k$ (v_n , v_k — скорости испарения и конденсации). При 100% влажности $v_n = v_k$.

Учитывая все сказанное, мы можем записать:

$$\text{при } r_1 = 50\% \quad v_{y1} = v_n - v_{k1} = \frac{1}{2} v_n;$$

$$\text{при } r_2 = 80\% \quad v_{y2} = v_n - v_{k2} = \frac{1}{5} v_n.$$

Поскольку $t_2 : t_1 = v_{y1} : v_{y2}$, время t_2 , за которое испарилась бы вода при $r_2 = 80\%$, равно

$$t_2 = \frac{v_{y1} t_1}{v_{y2}} = \frac{5}{2} t_1 = 100 \text{ мин.}$$

Примечание. При недостаточной конвекции воздуха над поверхностью жидкости у самой поверхности образуется слой насыщенного пара, и скорость убывания воды будет меньше. В нашем решении мы этим пренебрегли.

А. Р. Зильберман

Ф960. Для того чтобы получить две совершенно одинаковые катушки, их наматывают на немагнитный сердечник одновременно, используя сложенные вместе провода (рис. 1). Одну из катушек подключают через ключ К к батарее Б с напряжением U_0 , вторую — к резистору R. Ключ замыкают. Рассчитайте мощность тока на резисторе. Нарисуйте график зависимости силы тока через батарею от времени. Через время τ ключ размыкают. Какое количество теплоты выделится в резисторе, начиная с этого момента? Индуктивность каждой из катушек L. Батарею считают идеальной. Сопротивлением проводов пренебречь.

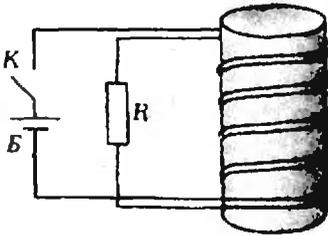


Рис. 1.

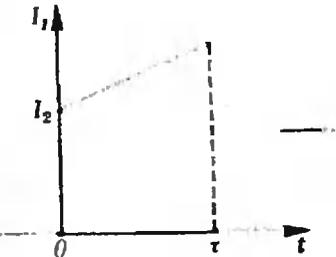


Рис. 2.

Ф961. Для поддержания постоянной температуры воды в проточном аквариуме пользуются двумя одинаковыми нагревателями (см. рисунок). В обычном режиме используют один из них, а если подключают параллельно второй нагреватель, то расход холодной воды приходится увеличивать в три раза. Как нужно изменить расход холодной воды, если нагреватели включены в сеть последовательно? Каким должен быть расход холодной воды, если включена одна спираль мощ-

При расчете ЭДС индукции в цепи каждой катушки нужно учитывать полный магнитный поток через нее, то есть сумму потоков, создаваемых токами обеих катушек.

После замыкания ключа в обеих цепях возникают одинаковые ЭДС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = U_0$, и мощность, выделяющаяся на резисторе, равна

$$P = \frac{\mathcal{E}_2^2}{R} = \frac{U_0^2}{R}.$$

Ток, текущий через 2-ю катушку, равен $I_2 = U_0/R$. Магнитный поток, пронизывающий 1-ю катушку, равен

$$\Phi_1 = LI_1 + LI_2,$$

где I_1 — ток через 1-ю катушку и через батарею. (Поток через каждую катушку, создаваемый током I_2 , один и тот же — катушки намотаны вместе.) Следовательно,

$$\mathcal{E}_1 = U_0 = \left| \frac{d\Phi_1}{dt} \right| = \left| L \frac{dI_1}{dt} + L \frac{dI_2}{dt} \right| = \left| L \frac{dI_1}{dt} \right|$$

(так как $I_2 = \text{const}$). Отсюда

$$I_1 = \frac{U_0}{R} + \frac{U_0}{L} t.$$

График $I_1(t)$ приведен на рисунке 2. Скачок тока в первый момент связан с тем, что полный поток через катушки не должен меняться скачком, и сразу после включения возникает добавочный поток, направленный против потока, создаваемого 1-й катушкой.

К моменту размыкания ключа полный поток через 2-ю катушку равен

$$\Phi_{2\tau} = -LI_2 + LI_{1\tau} = L \frac{U_0}{L} \tau = U_0 \tau.$$

Сразу после размыкания ключа в этой катушке возникнет ток

$$I_p = \frac{U_0 \tau}{L},$$

поскольку поток через катушку не должен меняться скачком. Тепло, которое выделится на резисторе с момента размыкания, —

$$W = \frac{1}{2} LI_p^2 = \frac{U_0^2 \tau^2}{2L}.$$

А. Р. Зильберман

Тепло, получаемое водой от нагревателей, компенсирует тепловые потери — тепло, отдаваемое аквариумом в окружающую среду. Мощность потерь зависит от разности температур воды в аквариуме и окружающего воздуха. Если эти температуры не меняются, то и мощность потерь остается неизменной.

Обозначим секундный расход воды в первом случае (включена одна спираль) Δm . Тогда

$$P = c \cdot \Delta m \cdot (t_2 - t_1) + q, \quad (1)$$

где q — мощность потерь. Во втором случае (включены две спирали, соединенные параллельно) мощность возрастает в два раза, и

ностью $P=100$ Вт? Температура холодной воды $t_1=10^\circ\text{C}$, температура воды в аккумуляме $t_2=27^\circ\text{C}$. Вода быстро перемешивается.



$$2P = c \cdot 3m \cdot (t_2 - t_1) + q. \quad (2)$$

Из (1) и (2) сразу можно получить

$$q = \frac{1}{2} P.$$

Но в том случае, когда спирали будут включены последовательно, выделяемая ими мощность составит как раз $P/2$. Значит, в этом случае воду следует отключить.

Теперь из уравнений (1) и (2) найдем секундный расход воды при условии, что включена одна спираль:

$$\Delta m = \frac{P}{2c(t_2 - t_1)} = \frac{100}{2 \cdot 4,2 \cdot 10^3 \cdot 17} \text{ кг/с} \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с}.$$

А. Р. Зильберман

Ф962. Точечные источники, расположенные на главной оптической оси линзы, образуют равномерно светящуюся нить (проходящую через фокус линзы). Найти закон изменения $E(x)$ освещенности в точках, лежащих на той же оси по другую сторону линзы на больших от нее расстояниях x ($x \gg F$, где F — фокусное расстояние линзы).

Отрезки светящейся нити, расположенные на расстояниях $y > F$ от линзы, дают действительные изображения на оптической оси справа от линзы. Для нахождения освещенности $E(x)$ единицы длины на оптической оси, то есть мощности излучения, падающего на единицу длины, рассмотрим, как происходит преобразование малого отрезка предмета dy в отрезок изображения dx (см. рисунок).

Пусть мощность, излучаемая с единицы длины светящейся нити, равна E_0 . Тогда суммарная мощность излучения, падающего на элемент dx изображения, равна

$$E(x) \cdot dx = E_0 \frac{\Omega(y)}{4\pi} dy. \quad (*)$$

Здесь учтено, что линза фокусирует только часть излучения элемента dy — излучение, попадающее в телесный угол $\Omega(y)$, под которым видна линза из точки y .

Преобразование длины элемента dy предмета в длину элемента dx изображения задается формулой линзы $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F}$. Поэтому dy в формуле (*) можно выразить через dx следующим образом:

$$dy = \left| \frac{dy}{dx} \right| dx = \frac{F^2}{(F-x)^2} dx.$$

(Производная взята по модулю, поскольку длины отрезков и мощности положительны.) Подставляя значение dy в (*) и учитывая, что для $x \gg F$ $y \approx F$ и телесный угол $\Omega(y \approx F)$ не зависит от x , получим

$$E(x) \approx E_0 \frac{\Omega(F)}{4\pi} \frac{F^2}{(F-x)^2} \approx E_0 \frac{\Omega(F) \cdot F^2}{4\pi x^2} \sim \frac{1}{x^2}.$$

М. А. Воронцов, В. Е. Куницын



VI. Логические схемы на транзисторах

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕИН,
кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН

Получив представление об элементарных логических операциях (см. «Квант», 1986, № 1), мы можем теперь познакомиться с тем, как они реализуются с помощью схем на транзисторах.

Простейшая логическая схема, осуществляющая операцию «ИЛИ», показана на рисунке 1. Схема содержит два биполярных транзистора типа « $n-p-n$ ».

Обозначение \llcorner соответствует биполярному транзистору типа $p-n-p$; обозначение \llcorner — транзистору типа $n-p-n$.

Наклонная стрелка соответствует эмиттеру, вертикальная черточка — базе, наклонная черточка без стрелки — коллектору.

Коллекторы обоих транзисторов подсоединены параллельно к «плюсу» источника питания \mathcal{E} . Эмиттеры — к нагрузочному сопротивлению R_H . Если напряжение между базой и эмиттером транзистора равно нулю, то переход база — эмиттер закрыт, ток через него не протекает. Поэтому не течет ток и в цепи коллектор — эмиттер (транзистор закрыт). Из рисунка 1 видно, что если сигнал на входах обоих транзисторов отсутствует, то есть напряжение на обоих входах $U_{вх1}$ и $U_{вх2}$ равно нулю, то оба транзистора закрыты. Ток I через нагрузочное сопротивление R_H не протекает, и сигнал на выходе $U_{вых} = IR_H$ также равен нулю. Если хотя бы одно из напряжений, подаваемых на входы схемы, достаточно для отпириания транзисторов T_1 и T_2 , ток в цепи резко возрастает и выходное напряжение существенно увеличивается.

Кремниевые транзисторы обычно закрыты, если напряжение на переходе база — эмиттер меньше 0,6 В. Поэтому в схеме данного типа уровню «логического нуля» обычно соответствует напряжение U^0 , близкое к нулю, а «логической единице» — $U^1 \approx 0,8$ В.

На рисунках 2 и 3 показаны схемы «И» и «НЕ» на биполярных транзисторах. Рассуждая так же, как при анализе схемы «ИЛИ», легко убедиться, что для схемы «И» выходное напряжение $U_{вых} > 0$ только в том случае, если оба транзистора T_1 и T_2 одновременно открыты, то есть на оба входа подано напряжение, соответствующее логической единице ($U_{вх1} = U^1$, $U_{вх2} = U^1$). В схеме «НЕ» $U_{вых} = U^1$ при $U_{вх} = U^0$ и, наоборот, $U_{вых} = U^0$ при $U_{вх} = U^1$.

Важным недостатком логических схем на основе биполярных транзисторов является то, что в одном из состояний схемы через выходное сопротивление R_H протекает большой ток. В ЭВМ, содержащих миллионы логических схем, это приводит к значительному потреблению мощности, разогреву схем в процессе работы и снижению надежности ЭВМ. Этот недостаток исключен в логических схемах на основе комплементарных*) полевых транзисторов — КМОП-схемах.

Пример КМОП-схемы представлен на рисунке 4.

*) «Комплементарные» в переводе с английского означает «дополняющие».

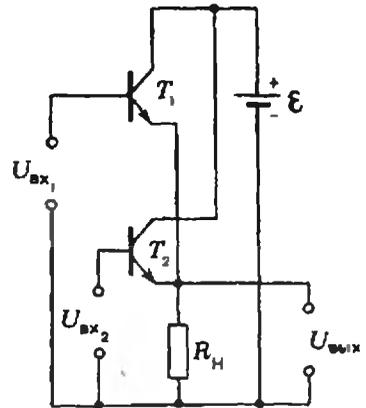


Рис. 1. Пример реализации схемы «ИЛИ» на двух биполярных транзисторах типа $n-p-n$.

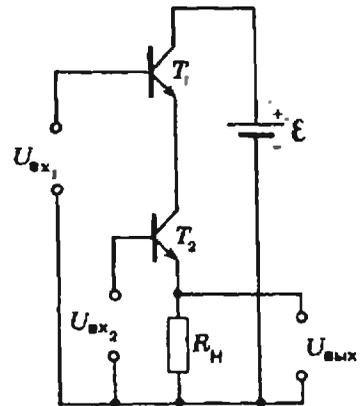


Рис. 2. Пример реализации схемы «И».

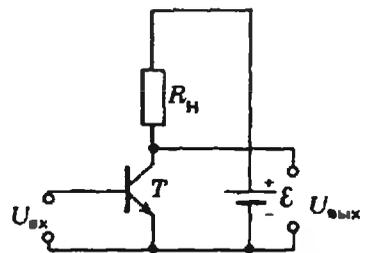
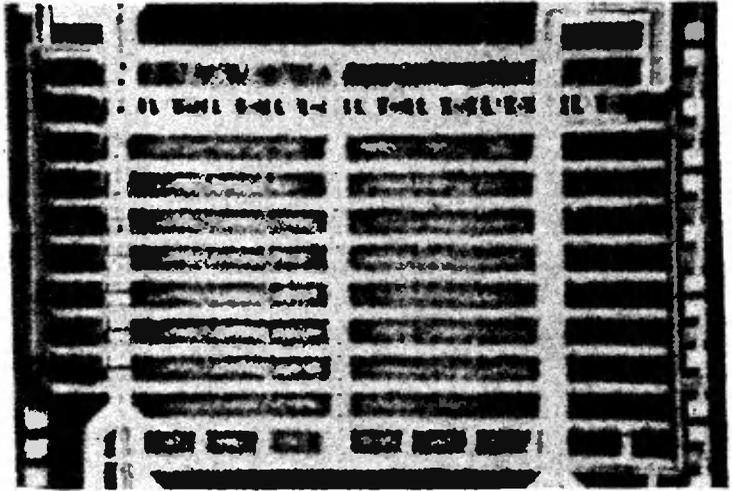


Рис. 3. Пример реализации схемы «НЕ».

В ближайшем будущем появятся ЭВМ, логические схемы которых будут изготовлены из арсенида галлия (Ga As). Эти схемы обладают значительно ббльшим быстродействием.

На микрофотографии показана БИС на основе арсенид-галлиевых полевых транзисторов. Размер БИС — 2,7 × 2,25 мм. Длина затвора транзисторов в БИС ~ 1 мкм. Скорость переключения элементарных логических ячеек БИС — 150 пс. По быстродействию эта схема в четыре раза превосходит лучшую кремниевую БИС аналогичного назначения.

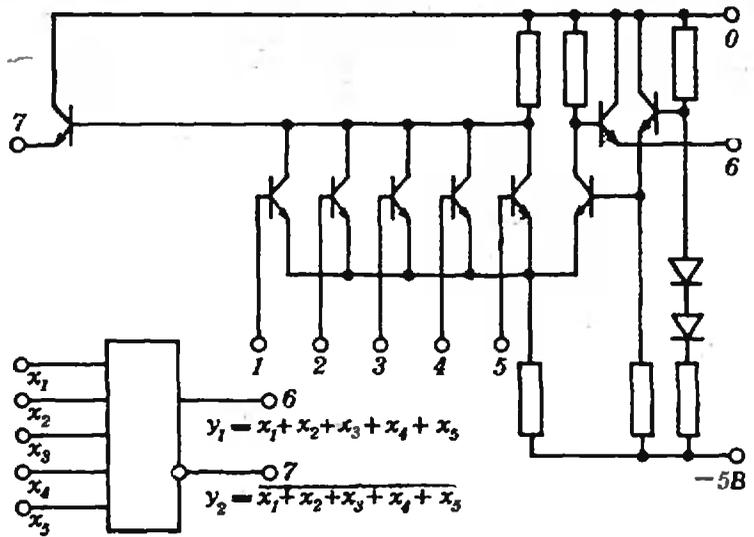


Принципиальная схема и условное обозначение современной логической микросхемы серии К187 на кремниевых биполярных п-р-п транзисторах.

Схема имеет 5 входов и 2 выхода. На одном из выходов (вывод 6) образуется напряжение логической суммы (операция «ИЛИ») сигналов x_1 — x_5 , поступающих на выводы 1—5, на другом выходе (вывод 7) — сигнал, сочетающий операции логического суммирования и инверсии (операция «ИЛИ» — «НЕ»).

Существенное усложнение реальной логической схемы по сравнению с простейшей ячейкой, показанной на рисунке 1, вызвано необходимостью обеспечить высокое быстродействие, малую потребляемую мощность, независимость параметров схемы от колебаний напряжения питания и количества подключаемых к ней других логических схем, требованьями помехоустойчивости логических сигналов на выходе и т. д.

Время срабатывания микросхемы около 10^{-8} с, потребляемый ток ~ 10 мА.



Вертикальная линия обозначает канал транзистора. Отходящие от нее горизонтальные линии — исток (нижняя) и сток (верхняя). Линия, идущая параллельно каналу рядом с ним, обозначает затвор. Вывод затвора изображается на одном уровне с выводом истока.

Используемые в схеме МОП-транзисторы T_1 и T_2 имеют структуру разного типа. Транзистор T_1 нормально открыт, то есть при отсутствии напряжения на затворе проводимость его канала велика; транзистор T_2 нормально закрыт, при нулевом напряжении на затворе ток по его каналу не течет. При достаточно большом положительном напряжении на затворе U^1 нормально открытый транзистор T_1 запирается, а нормально закрытый T_2 — открывается.

В показанной на рисунке 4 схеме при $U_{вх} = 0$ T_1 открыт, а T_2 — закрыт, поэтому все напряжение источника питания падает на транзисторе T_2 ; поскольку выходное напряжение снимается с транзистора T_2 , $U_{вых}$ велико. При $U_{вх} = U^1$ T_1 закрывается, а T_2 — открывается, поэтому $U_{вых} \approx 0$. В обоих состояниях протекающий в цепи ток равен нулю, так как один из транзисторов находится в закрытом состоянии. Поэтому КМОП-схема потребляет энергию от источника только в момент переключения. На основе КМОП-схем созданы микрокалькуляторы и микро-ЭВМ, имеющие рекордно низкое потребление мощности — доли микроватта. Такие микро-ЭВМ могут питаться от фотоэлемента, для работы которого достаточно света неяркой настольной лампы.

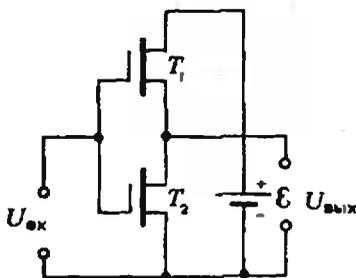


Рис. 4. КМОП-схема «НЕ».

Программирование на микрокалькуляторе: простейшие программы

Кандидат физико-математических наук
Л. Ф. ШТЕРНБЕРГ

В этой статье, предназначенной для девятиклассников, рассказывается, как транслировать (переводить) простейшие (линейные) программы, написанные на учебном алгоритмическом языке, в коды программируемого микрокалькулятора (БЗ-34, МК-56, МК-54). Таким образом, если у вас есть доступ к такому микрокалькулятору, статья поможет вам связать школьный курс информатики с практикой программирования.

Работа калькулятора. У вас в руках программируемый микрокалькулятор. Можно ли считать его вычислительной машиной, пусть маленькой? Давайте посмотрим.

— Память, способная хранить программу, и данные есть? — Да.

— Процессор, способный без вмешательства человека автоматически выполнять заложенную в память программу и обрабатывать данные, есть? — Да.

— Устройство ввода есть? — Да, клавиатура.

— Устройство вывода есть? — Да, индикатор.

Итак, калькулятор — это ЭВМ. Разумеется, маломощная и низкоскоростная, но все же позволяющая выполнять довольно серьезные расчеты и, что для нас самое главное, позволяющая хорошо понять, что происходит в любой ЭВМ — и большой, и малой. Вот поэтому мы и займемся программированием калькулятора. Только как его программировать, если он не понимает нашего алгоритмического языка, а понимает только команды, подаваемые нажатием клавиш? Значит, надо научиться переводить алгоритмы с удобной для нас записи в команды калькулятора.

Из чего же состоит и что умеет сам калькулятор? Его структура* показана на рисунке 1. Пока обратим внимание на 14 регистров памяти, где будут храниться данные; они имеют номера 0,1...9, a , b , c , d (цифр не хватило — взяли буквы); а также на два операционных регистра X и Y — именно над содержимым этих регистров выполняются операции. Прочие регистры нас пока не интересуют. «Лампочки», подсоединенные к регистру X , означают, что содержимое X высвечивается на индикаторе.

С инструкцией к калькулятору вы, конечно, уже ознакомились, с инженерным (непрограммируемым) калькулятором вы тоже знакомы, поэтому описывать назначение клавиш и отдельные операции мы не будем**. Попродуем поработать.

Даны три стороны треугольника $a=3$, $b=4$, $c=5$ и надо вычислить по теореме косинусов косинус угла, лежащего против стороны a .

(Формула: $\cos \alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2bc}$). Включаем

калькулятор и работаем с ним в автономном режиме, то есть как с обычным инженерным калькулятором: нажимаем клавиши, а калькулятор выполняет действия:

Клав.	Инд.	Комментарии
3	3	заносим значение $a=3$
П 0	3	в P0 (регистр 0)
4	4	заносим значение $b=4$
П 1	4	в P1
5	5	заносим значение $c=5$
П 2	5	в P2
Fx ²	25	возводим значение c в квадрат
ИП 1	4	вызываем значение b в X (c^2 при этом уходит в Y)
Fx ²	16	возводим $b=4$ в квадрат
+	41	получаем b^2+c^2
ИП 0	3	вызываем значение a в X (предыдущий результат — в Y)
Fx ²	9	получаем a^2
—	32	получаем значение числителя
П 4	32	и запоминаем его в P4
2	2	начинаем вычислять $2 \cdot b \cdot c$
ИП 1	4	...
×	8	...
ИП 2	5	...
×	40	вычислили $2 \cdot b \cdot c$
ИП 4	32	вызываем числитель в X
X-Y	40	меняем местами X и Y (делить нужно на знаменатель)
÷	0.8	получаем результат

* (Изложение ведется применительно к моделям БЗ-34, МК-56, МК-54.

** (См. «Науки и жизнь» № 2, 4, 6, 8, 10, 12 (1984), № 2, 4, 6 (1985), «Техника — молодежи» № 3 (1985) и др.

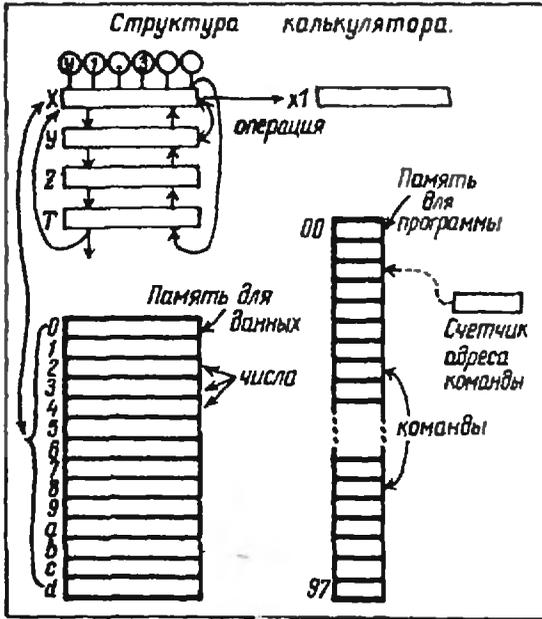


Рис. 1.

Теперь, нажав клавиши В/О, Ф, ПРГ, переведем калькулятор в программный режим (на индикаторе при этом загорятся два нуля на месте порядка числа), а затем нажмем те же самые клавиши в той же последовательности, добавив в конце нажатие клавиши С/П (зачем она нужна, объяснено далее). Теперь нажатие клавиш будет производить совсем другой эффект: калькулятор не выполняет нужные действия, а запоминает их. Для этого у него имеется специальная память под команды, состоящая из 98 ячеек, пронумерованных от 0 до 97 и счетчик адреса, содержащий номер той ячейки, в которую будет записано очередное действие (см. рис. 1). Клавишей В/О (возврат к нулю) в счетчик адреса записывается ноль — его-то мы и видим на индикаторе после перехода в программный режим. Нажатие клавиши (или пары клавиш), которое в автономном режиме вызывало выполнение действия, теперь вызывает запись числового кода этого действия (команды) в ячейку памяти и увеличение счетчика адреса на единицу. Текущее значение счетчика адреса и последние три команды видны на индикаторе. Итак, наша последовательность действий, превращенная в команды, оказалась в памяти калькулятора и представляет собой программу для калькулятора. Ее можно прочитать и при необходимости

исправить ошибки — как это сделать, хорошо описано в инструкции к калькулятору.

Нажмем Ф, АВТ вернем калькулятор в автономный режим. Нажав В/О, занесем ноль в счетчик адреса (этот ноль на индикаторе мы не видим, но в счетчик он занесется). Теперь будем нажимать клавишу ПП. Каждое нажатие вызывает выполнение одной команды из памяти калькулятора — а именно той, адрес которой находится в счетчике адреса; после этого значение в счетчике увеличивается на единицу и при следующем нажатии будет выполняться следующая команда, на индикаторе будут последовательно высвечиваться те же значения, которые приведены в таблице. После 22-го нажатия увидим результат — 0.8.

Таким образом можно проверить программу, но так выполнять ее долго. Для выполнения программы у калькулятора есть третий режим — автоматический. Нажмем В/О, занеся в счетчик адреса ноль, и нажмем клавишу С/П (Стоп/Пуск). Теперь калькулятор также будет выбирать из памяти по одной команде, выполнять их и увеличивать значение счетчика адреса, но уже не будет останавливаться после каждой команды. Результаты на индикаторе будут мигать так быстро, что рассмотреть их нельзя. Для того чтобы увидеть конечный результат, надо остановить автоматическую работу — для этого мы и записали в конец программы команду С/П — при ее выполнении калькулятор переходит из автоматического режима в автономный и можно посмотреть результат.

Итак, наш исполнитель — микрокалькулятор — может работать

- в автономном режиме, исполняя команды по мере их подачи с клавиатуры;
- в программном режиме, запоминающая подаваемые с клавиатуры команды;
- в автоматическом режиме, выполняя введенные в память команды.

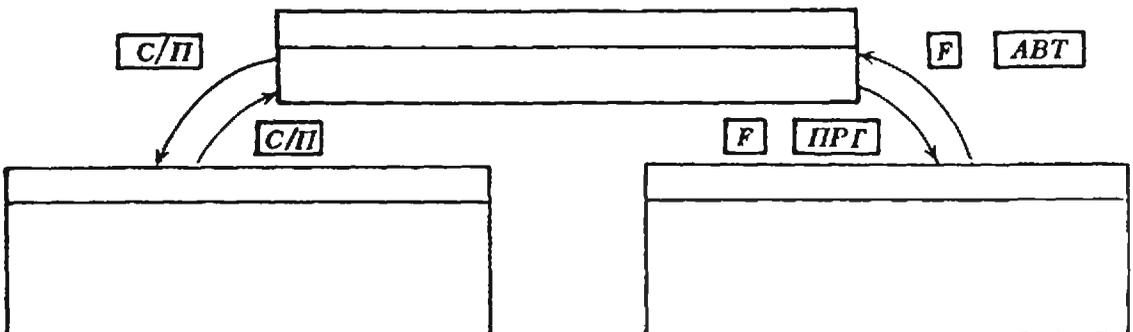


Рис. 2.

Переходы из режима в режим выполняются с помощью клавиш F, ПРГ, АВТ и СП так, как показано на рисунке 2.

Программируем линейный алгоритм. Наш исполнитель понимает весьма своеобразный язык — язык нажатий клавиш, для нас же более удобна и привычна запись на алгоритмическом языке (см. «Квант» 1985, № 9, 10). Чтобы успешно запрограммировать калькулятор, нам надо научиться переводить программу с алгоритмического языка на язык калькулятора — как говорят профессиональные программисты: транслировать ее в код калькулятора (от англ. *translate* — переводить). Вообще-то говоря, современная ЭВМ понимает весьма своеобразный код, но у нее есть свой «встроенный» транслятор, переводящий программу с языка программирования на ее код. Для калькулятора это придется делать вручную.

Запишем нашу программу на алгоритмическом языке.

```
алг КОСИНУС
(вещ a, b, c, k)
  арг a, b, c
  рез k
  нач вещ k
  k :=  $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 
```

кон

Сформулируем теперь правила перевода (трансляции).

1. По служебному слову *вещ* (других типов переменных у калькулятора нет) распределим регистры памяти под переменные, записывая в таблицу, какой регистр соответствует данной переменной.

2. Для запроса значения калькулятор должен остановиться и подождать, пока человек наберет нужное значение, затем занести его в соответствующий регистр, затем подождать следующего значения и т. д. Таким образом, арг программируется последовательностью команд засылки в память, разделенных командами С/П.

3. Присваивание программируется очевидным образом.

4. Если за служебным словом *рез* следует лишь один параметр, *рез* транслировать нет необходимости. Если же таких параметров несколько, то в конце программы, перед словом *кон*, нужно запрограммировать вывод этих параметров последовательностью команд вызова на регистр X вы-

водимых значений, за каждой из которых стоит команда С/П, приостанавливающая вычисления.

5. *Кон* программируется командой С/П.

Отметим, что в программе может оказаться несколько команд С/П. При переходе в автономный режим по команде С/П в счетчике адреса находится адрес следующей команды (это можно проверить, нажав F, ПРГ, то есть перейдя в программный режим, когда значение счетчика адреса видно на индикаторе, затем надо будет вернуться в автономный режим, нажав F, АВТ); если теперь нажать С/П, то начнет выполняться та команда, адрес которой находится в счетчике адреса, то есть следующая за С/П — вычисления пойдут дальше.

Оттранслируем нашу программу.

Адр	Код	Ком	Алгор. язык и комментарии
	$a - P0$ $b - P1$ $c - P2$ $k - P3$		алг КОСИНУС вещ a, b, c, k) алг a, b, c рез k [Рисуем (для себя) таблицу распределения регистров.]
00	40	П0	[Затем вводим a, b, c.]
01	50	С/П	[Перед первой засылкой можно не ставить С/П (перед пуском программы калькулятор в автономном режиме), надо набрать значение a и нажать С/П]
02	41	П1	
03	50	С/П	
04	42	П2	
05	61	ИП 1	$k := (b^2 + c^2 - a^2) / (2bc)$
06	22	F x ²	[Работаем строго по формуле: вычисляем сначала b ² , затем c ² , складываем, и т. д.]
07	62	ИП 2	[Понятно, что результат мы получим, но можно это сделать быстрее: после ввода в регистре X осталось c и его можно сразу использовать.]
08	22	F x ²	[Можно сэкономить несколько команд, если считать, так:
09	10	+	
10	22	F x ²	
12	11	—	
13	44	П 4	
14	02	2	
15	61	ИП 1	$k := (b^2 + c^2 - a^2) / 2 / b / c$
16	12		и запрограммировать сначала деление на 2, затем на b и наконец — на c.]
17	62	ИП 2	
18	12		
19	64	ИП 4	
20	14	X ← Y	
21	13	÷	Получаем результат. <i>кон</i> Не забудьте выключить калькулятор!

Итак, работая по чисто формальным правилам, мы получим программу для калькулятора, но она не будет оптимальной. С одной стороны, по

(Окончание см. на с. 57)



Законы Кеплера и школьная физика

Кандидат физико-математических наук
В. Е. БЕЛОНУЧКИН

На приемных экзаменах в некоторые вузы, например в Московский физико-технический институт, а также на школьных физических олимпиадах нередко встречаются задачи, в которых требуется рассмотреть движение планет (или их спутников) и определить соответствующие параметры их орбит. Большую помощь в решении таких задач может оказать знание законов Кеплера, с которыми учащиеся знакомятся в школьном курсе астрономии.

Вспомним законы Кеплера.

I закон: каждая планета обращается вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

II закон: радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени описывает равные площади.

III закон: квадраты периодов обращения двух планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Если центральным «светилом» является не Солнце, а, например, Земля (или иная планета) и нас интересует движение ее спутников, также можно пользоваться законами Кеплера. Надо просто Солнце заменить на Землю, а планеты — на их спутники.

В этой статье мы рассмотрим несколько задач, решение которых предполагает знание законов Кеплера. Попутно вспомним и другие, в частности количественные, сведения из астрономии; они тоже могут оказаться полезными при выяснении параметров орбит планет, комет, спутников.

* * *

Ровно четверть века назад, 12 апреля 1961 года, человек, говоря сло-

вами К. Э. Циолковского, «вышел из колыбели» в Космос. Юрий Гагарин, первый космонавт Земли, на космическом корабле «Восток» совершил один оборот вокруг Земного шара. Помните ли вы продолжительность этого полета? Если нет, то не можете ли рассчитать ее?

Задача 1. Какова минимально возможная продолжительность полета спутника вокруг Земли?

В силу III закона Кеплера полет вокруг Земли, требующий наименьшего времени, должен проходить по эллипсу с минимальной большой полуосью. Очевидно, что таким эллипсом является окружность (эллипс с совпадающими фокусами), примыкающая к поверхности земного шара.

Продолжительность полета можно вычислить различными способами. Мы выберем, может быть, не самый простой метод, но зато такой, который непосредственно использует законы Кеплера.

Вспомним, что естественный спутник Земли — Луна — совершает один оборот за время (звездный месяц) $T_{\text{Л}} = 27,3 \text{ сут} = 2,36 \cdot 10^5 \text{ с}$. Средний радиус орбиты Луны $r_{\text{Л}} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ км}$, радиус Земли, а следовательно, и радиус «самой быстрой» (по времени) траектории спутника $R_{\text{з}} = r_{\text{мин}} = 6,38 \times 10^3 \text{ км}$. Остается подставить эти данные в выражение III закона Кеплера

$$\frac{T_{\text{мин}}^2}{T_{\text{Л}}^2} = \frac{r_{\text{мин}}^3}{r_{\text{Л}}^3},$$

и мы найдем

$$T_{\text{мин}} = T_{\text{Л}} (r_{\text{мин}} / r_{\text{Л}})^{3/2} \approx 5,06 \cdot 10^3 \text{ с} = 84 \text{ мин} = 1 \text{ ч } 24 \text{ мин}.$$

(Заметим, что полет Ю. А. Гагарина продолжался 1 ч 48 мин, то есть корабль «Восток» сделал чуть более одного витка.)

Конечно, расчет параметров круговых орбит — дело сравнительно несложное. Мы могли бы, например, воспользоваться значением первой космической скорости для спутника, запускаемого с Земли, и, зная радиус его орбиты, вычислить период. Но когда приходится заниматься действительно эллиптическими орбитами, имеющими заметный эксцентриситет, нас могут выручить только законы Кеплера.

Задача 2. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите ра-

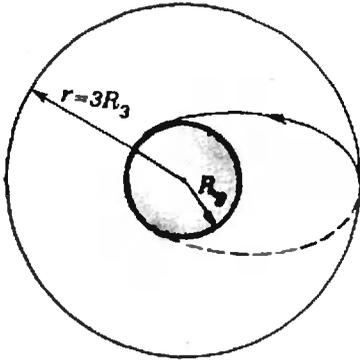


Рис. 1.

диусом $R + 3R_3$ (рис. 1). В результате кратковременного действия тормозного двигателя скорость спутника уменьшилась так, что он перешел на эллиптическую орбиту, касающуюся поверхности Земли. Через какое время после торможения спутник приземлится?

До приземления спутник должен пройти половину эллиптической траектории, большая полуось которой, как нетрудно видеть, равна $2R_3$. Искомое время торможения τ можно найти непосредственно из III закона Кеплера, если использовать результаты предыдущей задачи:

$$\frac{(2\tau)^2}{T_{\min}^2} = \frac{(2R_3)^3}{R_3^3},$$

$$\tau = \frac{1}{2} T_{\min} \cdot 2^{3/2} = \sqrt{2} T_{\min} \approx 7,1 \cdot 10^3 \text{ с} \approx \\ \approx 119 \text{ мин} \approx 2 \text{ ч.}$$

В этом году окрестности Солнца поещает, пожалуй, самая знаменитая комета солнечной системы — комета Галлея. Впервые ученые смогут наблюдать ее не только с помощью приборов, расположенных на Земле: на свидание с кометой советская космическая ракета несет созданную международным коллективом ученых автоматическую станцию «Вега» (она посетит ВЕнеру и комету ГАллея). Ученые постараются как можно подробнее изучить во многом еще загадочную страницу космоса (программа исследований очень обширна) — ведь следующая встреча состоится только через 76 лет!

Давайте и мы проведем небольшое «исследование» кометы.

Задача 3. Минимальное расстояние кометы Галлея от Солнца $r_{\min} = 0,6$ а. е. (1 астрономическая единица = 1 а. е. = $1,5 \cdot 10^8$ км — радиус земной орбиты). Зная период обращения кометы $T = 76$ лет, найдите, насколько далеко она уходит от Солнца.

Мы недаром выбрали в качестве единицы времени год, а единицы длины — расстояние от Земли до Солнца. Ведь проще всего параметры орбиты кометы сравнить с параметрами орбиты Земли.

Из III закона Кеплера найдем большую полуось орбиты кометы Галлея a :

$$a = a_3 \left(\frac{T}{T_3} \right)^{2/3} = r_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{2/3} \approx 17,9 \text{ а. е.}$$

($r_0 = 1$ а. е., $T_0 = 1$ год). Теперь нетрудно определить максимальное удаление кометы от Солнца:

$$r_{\max} = 2a - r_{\min} \approx 35,2 \text{ а. е.} \approx 5,3 \cdot 10^9 \text{ км.}$$

Задача 4. Используя сведения из задачи 3, оцените максимальную и минимальную скорости кометы Галлея.

Перигелий орбиты кометы во много раз ближе к Солнцу, чем афелий. Следовательно, мы не допустим большой ошибки, если будем считать, что вблизи перигелия комета движется не по эллиптической, а по параболической орбите. Это означает, что в перигелии скорость кометы равна так называемой второй космической скорости (или параболической скорости) относительно Солнца, то есть той минимальной скорости, при которой комета может преодолеть гравитационное притяжение Солнца.

Известно, что вторая космическая скорость v_{II} в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической скорости v_I , вычисленной для того же расстояния от центра притяжения.*) Значит, нам надо знать первую космическую скорость для расстояния $r_{\min} = 0,6$ а. е. от Солнца. А вычислить ее можно с помощью законов Кеплера, используя в качестве ориентира Землю и зная, что скорость движения Земли по орбите равна $v_0 = 30$ км/с (если вы не помните это значение, его можно вычислить, поделив длину орбиты на продолжительность периода обращения).

Теперь несколько преобразуем выражение III закона Кеплера — выразим период обращения через скорость и радиус:

*) С выводом этого соотношения можно познакомиться, например, по статье В. В. Можаява «Закон всемирного тяготения» («Квант», 1980, № 3). Там же можно найти метод строгого расчета интересующих нас скоростей и с его помощью убедиться, что мы ошиблись совсем немного.

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(2\pi r_1/v_1)^2}{(2\pi r_2/v_2)^2}, \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{v_2^2}{v_1^2}.$$

Таким образом, первые космические скорости и радиусы орбит (круговых) связаны соотношением

$$v_{11}/v_{12} = \sqrt{r_2/r_1}.$$

Отсюда для кометы Галлея в перигелии получаем

$$v_{1к} = v_0 \sqrt{r_0/r_{\min}},$$

следовательно, интересующая нас скорость кометы в перигелии

$$v_n = v_{1к} = \sqrt{2}v_{1к} = v_0 \sqrt{2r_0/r_{\min}} \approx 55 \text{ км/с}.$$

Скорость в афелии можно вычислить из II закона Кеплера. Равенство площадей, «заметаемых» радиусом-вектором за одинаковые промежутки времени, означает, что длина радиуса-вектора (расстояние от Солнца) и скорость кометы в данной точке обратно пропорциональны друг другу, откуда

$$v_a = v_{1к} r_{\min}/r_{\max} \approx 0,93 \text{ км/с}.$$

Мы видим, что скорость кометы в афелии во много раз меньше скорости в перигелии. Очевидно, комета большую часть периода обращения проводит вдали от Солнца и лишь ненадолго навевывается в его окрестности.

Однако продолжим «исследование» кометы Галлея.

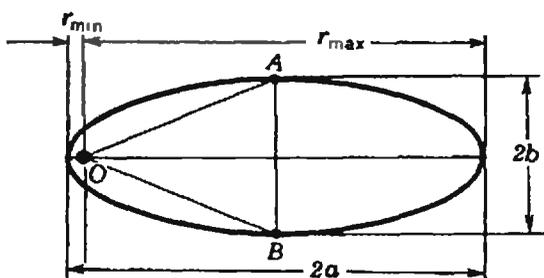


Рис. 2.

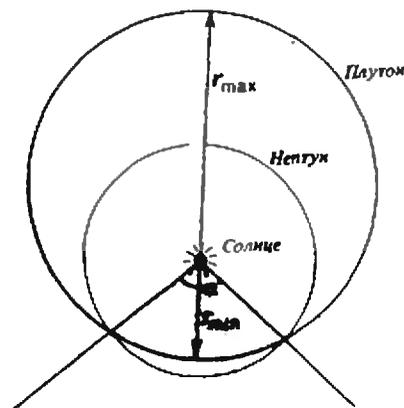


Рис. 3.

Задача 5. Какое время затрачивает комета Галлея на прохождение дальней от Солнца половины своей орбиты и какое — на прохождение ближней половины? Площадь эллипса равна $S_1 = \pi ab$ (a и b — большая и малая полуоси эллипса).

Обратимся к рисунку 2, на котором Солнце находится в точке O . При прохождении дальней половины орбиты радиус-вектор кометы «заметает» площадь верхней половины эллипса и площадь треугольника AOB . Эти площади равны соответственно $S_1 = \pi ab/2$ и $S_2 = b(a-r)$.

Воспользуемся II законом Кеплера, сформулировав его в несколько ином виде — площадь, описываемая радиусом-вектором, изменяется пропорционально времени, и сравним времена прохождения кометой всей орбиты и дальней ее половины:

$$\frac{T_k}{T} = \frac{S}{S_1 + S_2}.$$

Отсюда для искомого времени получаем

$$T = T_k \frac{S_1 + S_2}{S} = T_k \left(\frac{1}{2} + \frac{A - r_{\min}}{\pi a} \right) = \frac{T_k}{2} \left(1 + \frac{r_{\max} - r_{\min}}{\pi(r_{\max} + r_{\min})} \right) \approx 61,5 \text{ года}.$$

Остальные 14,5 лет тратятся на обход ближней к Солнцу половины орбиты. Как видим, эти времена отличаются больше, чем в 4 раза.

Упражнения

1. Орбита космического корабля «Восток» имела следующие параметры: высота в перигее $h = 181$ км, высота в апогее $H = 327$ км. Используя эти данные, уточните период обращения космического корабля Ю. А. Гагарина вокруг Земли.

2. Комета Григга — Скеллерупа относится к группе Юпитера, то есть ее афелий расположен неподалеку от орбиты крупнейшей планеты солнечной системы, а именно на расстоянии 5 а. е. от Солнца. Период обращения кометы 4,9 года. Может ли эта комета пересечь орбиту Земли?

3. Из-за сравнительно большого эксцентриситета орбиты Плутона (большая полуось $a = 5,9 \cdot 10^9$ км, малая полуось $b = 5,73 \cdot 10^9$ км) его расстояние от Солнца заметно меняется — от минимального $r_{\min} = 4,4 \cdot 10^9$ км до максимального $r_{\max} = 7,4 \cdot 10^9$ км. Планета Нептун движется по практически круговой траектории радиуса $R_{II} = 4,5 \cdot 10^9$ км. В результате часть орбиты Плутона, определяемая углом $\alpha = 100^\circ$ (рис. 3), расположена ближе к Солнцу, чем орбита Нептуна.

В 1969 году Плутон перешел с девятого на восьмое место среди больших планет солнечной системы. Когда он вернется на свое законное девятое место?



Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$6 \cos x - \frac{1}{3} = \sqrt{32 \cos x - \frac{17}{9}}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{x-1} + \frac{3}{|x|+1} \geq \frac{1}{|x|-1}$$

3. Некоторая окружность касается прямых AB и BC соответственно в точках D и E . Точка A лежит между точками B и D , а точка C — между точками B и E . Найдите площадь треугольника ABC , если длины сторон AB и AC соответственно равны 13 и 1, а точки A , D , E и C лежат на одной окружности.

4. Из трех значений $p: 0,24\pi; 0,26\pi; 0,6\pi$ — найдите те, при которых уравнение

$$\left(\frac{p-5x}{\pi} + \log_3 \frac{3p}{\pi}\right)(6 \sin(p-x) - \sqrt{18}) = 0$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0 < x < \frac{\pi}{3}$.

5. На плоскости α , проходящей через центр шара радиуса R , задана окружность с центром O_1 и радиусом r_1 , расположенная внутри шара. Все точки этой окружности соединены прямыми с точкой A , принадлежащей шару и удаленной от плоскости α на расстояние R . Множество отличных от A точек пересечения этих прямых с поверхностью шара является окружностью с центром O_2 и радиусом r_2 . Найдите расстояние от точки O_2 до плоскости α , если расстояние между точками A и O_1 равно a .

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$$

2. В трапеции $PQRS$ длина основания QR равна 10, длина диагонали QS равна 19, а величина угла QSP равна 30° . Выясните, что больше: длина основания QR или длина стороны RS .

3. Решите уравнение

$$4 - \cos(2\pi(13x+9)^2) = 5 \cdot \sin[\pi(13x+9)^2].$$

4. Решите неравенство

$$\frac{2 \log_{1-3|x|}(42x^2 - 14|x| + 1)}{\log_{1-3|x|}\left(x - \frac{5}{6}\right)^2} \leq 1.$$

5. Найдите все тройки чисел x, y, z , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - 17} + \sqrt{3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos ly + \cos lz)x + 4} = 0.$$

6. Все ребра тетраэдра $ABCD$ имеют равную длину. На ребрах AB , AC и AD выбраны, соответственно, точки K, L, M так, что длина отрезка KB равна 15, а длина отрезка MD равна 10. Известно, что радиус шара, вписанного в тетраэдр $ABCD$, равен $\frac{5}{2}\sqrt{6}$, а объем пирамиды $AKLM$ равен $375\sqrt{2}$. Найдите сумму радиусов двух шаров: вписанного в пирамиду $AKLM$ и описанного около нее.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$4(\sin 6x + \sin 4x) = \cos x(4 \sin^2 5x - 5).$$

2. Решите неравенство

$$5^{2x - \frac{1}{3}x^2} < 5^{x-2} + (\sqrt{5})^{x^2} + 24.$$

3. На координатной плоскости xOy рассматривается треугольник ABC , у которого вершина A совпадает с началом координат, вершины B и C лежат соответственно на параболе $y = 3x^2 - 10x + 2$ и $y = -2x^2 + 5x - 10$, сторона BC параллельна оси ординат, а абсцисса вершины B принадлежит отрезку $\left[\frac{3}{5}; \frac{3}{2}\right]$.

Какое значение должна иметь абсцисса вершины B , чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

4. Высота пирамиды равна 2, основание пирамиды есть ромб, площадь которого равна 8, а величина острого угла равна $\pi/6$. Некий шар касается плоскости каждой боковой грани в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Докажите, что прямая, соединяющая вершину пирамиды с центром шара, проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Найдите объем шара.

5. Решите систему

$$\begin{cases} |2x + y| + \log_2(|y| - 2x + 5) - 20 = 0, \\ (2x + y)^2 - 7(2x + y)\log_2(|y| - 2x + 5) - 8 \log_2^2(|y| - 2x + 5) = 0. \end{cases}$$

Вариант 4

(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{1-x}{(2-x)(x-3)} + 1 = \frac{1}{2-x}.$$

2. Найдите все корни уравнения

$$3 \cos 2x - 5 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_3(3-2x)} - \frac{1}{4 - \log_3(3-2x)} < 0.$$

4. На гипотенузе LM прямоугольного треугольника LKM лежит точка N . На прямой LM взята точка P так, что точка M находится между точками N и P , а угол NKP прямой. Найдите площадь треугольника NKM , если известно, что площади треугольников LKM и NKP равны a и b соответственно, а величина угла LKP равна φ .

5. Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1?$$

В а р и а н т 5

(факультет почвоведения)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 5y = 93. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\lg(9-x) = -2 \lg\left(\frac{1}{x+3}\right).$$

3. Найдите все корни уравнения

$$\cos x + (1 + \cos x) \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x > 0$.

4. Через точку D основания AB равнобедренного треугольника ABC проведена прямая CD , пересекающая описанную около треугольника ABC окружность в точке E . Найдите длину отрезка AC , если длина хорды CE равна 3 и длины отрезков DE и DC равны.

5. Пусть $x = x_0$ — больший из корней уравнения

$$x^2 + (3ab + 3a - 2)x + 5ab + 5a - 17 = 0.$$

Найдите наибольшее значение x_0 при $a \geq 1$, $b \geq 0$.

В а р и а н т 6

(отделение геологии геологического факультета)

1. Определите, что больше:

$$2^{\log_2 5} - 0, 1 \text{ или } 5^{\log_2 2}.$$

Результат обоснуйте.

2. Решите уравнение

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1} = 1.$$

3. Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготовят за один час 30 деталей?

4. Решите уравнение

$$5 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x - \cos^2 x = 4.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$$

6. Дан куб $ABCD A'B'C'D'$ с ребром длины 4. На середине ребра BC взята точка M , а на ребре $A'D'$ на расстоянии 1 от вершины A' взята точка N . Найдите длину кратчайшего пути между точками M и N по поверхности куба.

В а р и а н т 7

(отделение геофизики геологического факультета)

1. Определите, что больше:

$$3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{3} \log_2 2} \text{ или } 5^{\log_2 3} + \sqrt[10]{10}.$$

Результат обоснуйте.

2. Решите неравенство

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1} \geq 1.$$

3. См. вариант 6, задача 3.

4. Решите уравнение

$$3 \sin x + 5 \cos x = \sqrt{17}.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

6. Конус вращается вокруг оси — прямой, перпендикулярной его высоте и проходящей через вершину. Найдите площадь сечения полученного тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения, если длина образующей конуса равна 5, а длина высоты равна 4.

В а р и а н т 8

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$4 \sin x + \cos 2x = 1.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2(3-x) > 1.$$

3. Две реки с прямолинейными руслами и одинаковой скоростью течения впадают в одном и том же месте в озеро, образуя между собой угол в 60° . От двух причалов, расположенных на разных реках и отстоящих друг от друга на расстоянии 28 км, одновременно вышли байдарка и лодка, скорости которых в стоячей воде соответственно равны 10 км/ч и 3 км/ч. Байдарка достигла озера через 2 ч, а лодка — через 4 ч. Найдите скорость течения рек.

4. Величины углов P, Q, R треугольника PQR составляют арифметическую прогрессию с разностью $(-2\pi/9)$. Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке S . Точки P', Q', R' находятся на отрезках SP, SQ, SR соответственно на одинаковом расстоянии от точки S . Докажите, что величины углов P', Q', R' треугольника $P'Q'R'$ также образуют арифметическую прогрессию. Найдите ее разность.

5. Найдите все числа b , удовлетворяющие условию $-1 \leq b \leq 1$, для которых выражение

$$1 - 2\sqrt{4x^2 + 4bxy + y^2 + 8y + 18}$$

принимает наибольшее значение лишь при одной паре чисел x, y .

В а р и а н т 9

(отделение политической экономии экономического факультета)

1. Найдите все решения неравенства

$$\frac{4x-1}{3x+1} \geq 1.$$

2. Решите уравнение

$$2 \sin x = 3 \operatorname{ctg} x.$$

3. Укажите все a , при которых уравнение

$$\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$$

имеет решения и найдите эти решения.

4. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2}.$$

5. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позже, чем через 40 минут вслед за ним вышел второй. В пункт B сначала пришел один из пешеходов, а другой достиг B не раньше, чем через час после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они прибыли бы в пункт B с интервалом не более, чем в 20 минут. Определите, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B , если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, $|AD| = 3$. Найдите сторону BC .

Вариант 10

(отделение экономической кибернетики
экономического факультета)

1. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{1 - 2 \sin^2 x}.$$

2. Решите неравенство

$$x \log_{1/2}(1/3 - x) \geq |x|.$$

3. В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $|AP| < |AQ|$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $|PQ| = 3$. Найдите $|AC|$.4. В 6 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B , сразу повернул назад и на своем пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов, а прибыл в пункт A не ранее 22 часов того же дня. Найдите время прибытия катера в пункт B , если его собственная скорость (скорость в стоячей воде) вдвое больше собственной скорости лодки.5. Среди всех решений (x, y, z, v) системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geq 6 \end{cases}$$

найдите такие, при которых выражение $x + z$ принимает наибольшее значение.

Вариант 11

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$3 \sin x - 2 \cos^2 x + 3 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$3 \cdot 9^x < 8 \cdot 3^x + 3.$$

3. Три столяра делают шкафы и полки. Все они затрачивают одинаковое время на изготовление 1 шкафа, а полку каждый из них делает за 5 часов. Первый столляр сделал 2 шкафа и 1 полку, второй — 1 шкаф и 2 полки, а третий — 1 шкаф. Известно, что количества времени, затраченные первым, вторым и третьим столярами, образуют соответственно первый, второй и третий члены геометрической прогрессии. Сколько времени тратит столляр на изготовление 1 шкафа?

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = |x^2 + x| + |x^2 + 5x + 6|$$

на отрезке $[-2.5; -0.5]$.5. Отрезок AB имеет длину $2R$ и является диаметром окружности. Длина хорды AC равна $R\sqrt{2}$, а другая хорда той же длины пересекает отрезок AC в точке D и отрезок AB в точке E . Величина угла BED равна α . Найдите площадь треугольника ADE .6. Найдите все значения a , при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x, y , удовлетворяющая уравнению

$$3x^2 + 11xy + 10y^2 = 7$$

и двум неравенствам

$$x + y > 0, 4a^2x - 3ay < 0.$$

Вариант 12

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{2 \cos^2 x} = \cos x, \text{ удовлетворяющие условию } -6 < x < -4.$$

2. Маша, Вера, Таня и Нина собирали грибы. Оказалось, что количества грибов, собранные каждой из них, образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Если бы Таня

нашла столько же грибов, сколько Нина, а Нина нашла бы на двенадцать грибов больше, то количества грибов, собранные девочками, образовали бы в том же порядке геометрическую прогрессию. Сколько грибов нашла Вера?

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x + \sqrt{x-1}) > -1.$$

4. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 15, а длина высоты BD равна 5. На стороне AB взята точка P так, что длины отрезков AP и PB равны соответственно 5,8 и 7,2. Найдите площадь S треугольника BPC , если известно, что $S > 3$.5. Для каждого значения b решите уравнение

$$3 \cos x \sin b - \sin x \cos b - 4 \cos b = 3\sqrt{3}.$$

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Брусok прямоугольной формы соскальзывает без трения с наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту равен α . Во время соскальзывания он последовательно перекрывает находящиеся на некотором расстоянии друг от друга два очень маленьких фотоэлемента 1 и 2 (рис. 1). Определите время, в течение которого передняя грань бруска движется между фотоэлементами, если длина бруска равна l и интервалы времени, на которые брусok перекрывает фотоэлементы, равны t_1 и t_2 соответственно.2. Четыре одинаковых кубика связаны тремя невесомыми и нерастяжимыми нитями и расположены, как показано на рисунке 2. Определите натяжение средней нити (между вторым и третьим кубиками), если масса каждого кубика равна m , а на первом (верхнем) кубике находится добавочный груз массой Δm . Поверхности абсолютно гладкие, трением в осях блоков и их массой пренебречь.

3. Высоко над Землей по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, движутся два спутника. Период обращения первого спутника в 2 раза меньше, чем второго. В некоторый момент времени спутники находятся над одной и той же точкой земной поверхности и расстояние между ними минимально. Определите, во сколько раз возрастет (по сравнению с минимальным) расстояние между спутниками через промежуток времени, равный периоду первого спутника?

4. Два баллона соединены между собой короткой трубкой с краном. Вначале кран закрыт. В одном баллоне находится идеальный газ массой m_1 под давлением p_1 , в другом — такой же газ массой m_2 под давлением p_2 . Температура газов в обоих баллонах одинакова. Какое давление установится в баллонах, если кран открыть? Температура газа не меняется.5. В сосуде с поршнем первоначально находилась смесь воздуха с насыщенным паром. Затем, передвигая поршень, объем, занятый смесью, увеличили в $n_1 = 4$ раза, а массу паров увеличили в $n_2 = 2$ раза (накачивая дополнительно водяные пары в этот объем через специальное приспособление). Температура при этом не изменилась. Считая пар идеальным газом, найдите относительную влажность воздуха в новом состоянии.6. В схеме, изображенной на рисунке 3, конденсатор имеет заряд $Q = 10^{-6}$ Кл. Какой заряд будет на конденсаторе, если ключ K

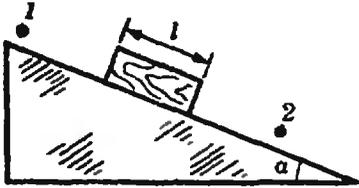


Рис. 1.

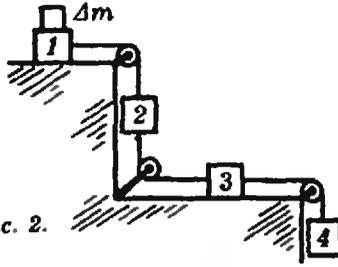


Рис. 2.

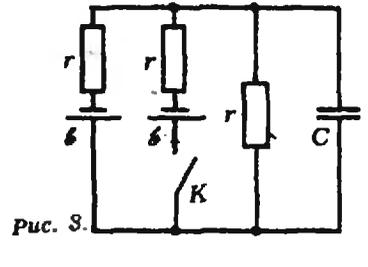


Рис. 3.

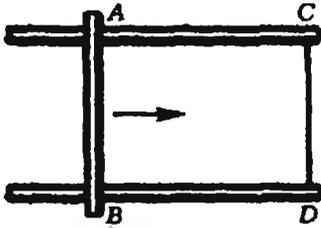


Рис. 4.

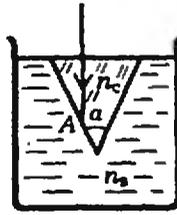


Рис. 5.

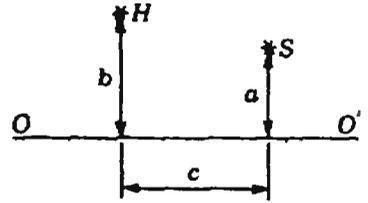


Рис. 6.

замкнуть? Сопротивления всех резисторов одинаковые, а ЭДС источников равные. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

7. К некоторому источнику постоянного напряжения через подводящих провода подключено некоторое внешнее сопротивление. При этом половина мощности, развиваемой источником, выделяется в подводящих проводах, а другая половина — во внешнем сопротивлении. Какая часть мощности, развиваемой источником, будет выделяться в подводящих проводах, если они будут из того же материала и той же длины, но с площадью сечения, в два раза большей? Внешнее сопротивление и источник остаются теми же. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

8. С какой скоростью надо перемещать медный стержень AB вдоль медных рельсов CA и DB (рис. 4), чтобы в течение $t=1$ с температура стальной проволоки CD увеличилась на $\Delta T=0,1$ К? Вся конструкция находится в магнитном поле с магнитной индукцией, направленной перпендикулярно плоскости рельсов и равной $B=1$ Тл. Удельная теплоемкость железа $c=0,46$ кДж/(кг·К), плотность $D=7800$ кг/м³, удельное сопротивление $\rho=5,6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Теплоотдачей пренебречь. Сопротивлением рельсов и стержня пренебречь.

9. Стеклообразная равнобедренная призма (с сечением в виде равнобедренного треугольника) опущена вершиной в воду так, что ее основание горизонтально и совпадает с поверхностью воды (рис. 5). Показатель преломления стекла n_g , показатель преломления воды n_w ($n_g > n_w$). При каких значениях угла (при вершине призмы) α луч света, падающий по вертикали на основание призмы, испытывает полное (внутреннее) отражение на боковой поверхности призмы в точке A ?

10. С помощью тонкой линзы получено изображение H точечного источника S (рис. 6).

Расстояния c , a , b , определяющие положения источника и изображения относительно оптической оси линзы OO' , известны ($b > a$, $b - a \ll c$). Найдите фокусное расстояние линзы.

Механико-математический факультет, факультет вычислительной математики и кибернетики, химический, географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

1. Пуля, выпущенная из винтовки, попадает во вращающийся с частотой $n=50$ 1/с тонкостенный пластмассовый цилиндр диаметром $d=0,2$ м. Определите скорость пули, если выстрел произведен по диаметру цилиндра, а к моменту вылета пули из цилиндра входное отверстие сместилось на $l=0,01$ м.

2. Брусок с массой $m=0,2$ кг находится на гладкой поверхности наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=30^\circ$ с горизонтом. Он удерживается на этой поверхности с помощью невесомой и нерастяжимой нити, расположенной параллельно наклонной плоскости и закрепленной у ее верхнего края (рис. 7). Найдите силу давления груза на наклонную плоскость, если она движется вертикально вверх с ускорением $a=2,2$ м/с². Ускорение свободного падения $g=9,8$ м/с².

3. К потолку подвешен однородный стержень длиной $L=0,8$ м. Пружины в нерастянутом состоянии имеют одинаковую длину, но различные коэффициенты упругости k_1 и k_2 . Найдите соотношение между k_1 и k_2 , если стержень занимает горизонтальное положение (рис. 8). Пружина с коэффициентом упругости k_1 прикреплена к одному концу стержня, а пружина с коэффициентом упругости k_2 прикреплена на расстоянии $a=0,2$ м от другого конца стержня.

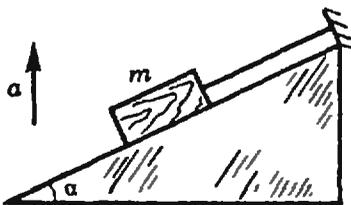


Рис. 7.

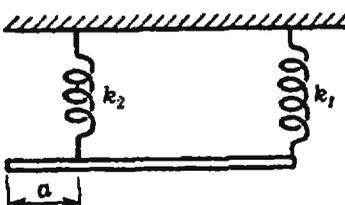


Рис. 8.

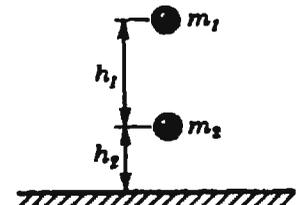


Рис. 9.

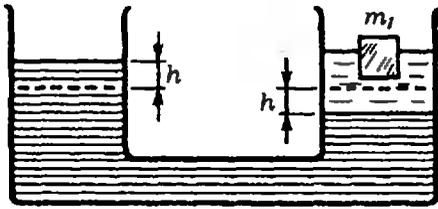


Рис. 10.

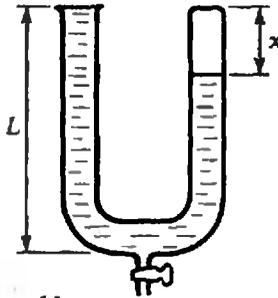


Рис. 11.

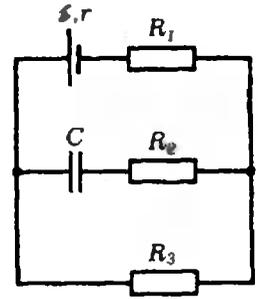


Рис. 12.

4. Тела с массами m_1 и m_2 находятся на одной вертикали на расстоянии h_1 друг от друга, причем тело с массой m_2 расположено на высоте h_2 от горизонтальной поверхности (рис. 9). Тело массой m_1 , падая свободно, соударяется абсолютно неупруго с покоящимся телом массой m_2 , которое в момент удара отпускают. Затем эта система тел абсолютно неупруго соударяется с горизонтальной поверхностью. Пренебрегая изменением импульса тел при их соударении друг с другом, определите, с какой силой система тел действует на поверхность, если продолжительность соударения равна Δt .

5. В двух сообщающихся цилиндрических сосудах с одинаковым поперечным сечением площадью $S=10^{-2}$ м² находится ртуть (рис. 10). В один из сосудов поверх ртути наливают воду массой $m=20$ кг и в нее опускают плавать груз массой $m_1=7,2$ кг. На какое расстояние h переместится уровень ртути во втором сосуде? Плотность ртути $\rho=13,6 \times 10^3$ кг/м³.

6. В цилиндрический сосуд объемом $V=8,31$ м³ накачали вначале газ массой $m_1=3,2$ кг с молярной массой $M_1=0,032$ кг/моль при температуре $T=300$ К, а затем добавили газ массой $m_2=4,4$ кг с молярной массой $M_2=0,044$ кг/моль при той же температуре T . Какое давление установится в сосуде после того, как смесь газов изотермически при температуре T сожмут с помощью поршня до объема $V/3$? Универсальная газовая постоянная $R=8,31$ Дж/(моль · К).

7. В U-образную, запаянную с одного конца трубку с длиной колена L наливается жидкость плотности ρ , причем в запаянном конце остается столб воздуха, а уровень жидкости в открытом колене совпадает с краем трубки (рис. 11). Затем часть жидкости выпускают через кран. При этом уровни жидкости в обоих коленах сравниваются и остаются вливающимися на высоте $L/2$. Какова была первоначальная высота x столба воздуха в запаянном колене трубки? Атмосферное давление p_0 .

8. Восемь точечных зарядов $|q_1|=...=|q_8|=9 \cdot 10^{-6}$ Кл находятся в вершинах куба, сторона которого $a=0,2$ м. Четыре положительных заряда находятся в вершинах нижнего основания, четыре отрицательных — в вершинах верхнего основания куба. Определите напряженность электрического поля в центре куба. Электрическая постоянная $\epsilon_0=8,9 \times 10^{-12}$ Ф/м.

9. Стержень длиной $l=0,20$ м, на концах которого находятся маленькие шарики с зарядами $q_1=2 \cdot 10^{-5}$ Кл и $q_2=5 \cdot 10^{-5}$ Кл, может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Стержень находится в однородном электрическом поле с напряженностью $E=10^7$ В/м. Силовые линии поля гори-

зонтальны и составляют с направлением стержня угол $\alpha=30^\circ$. Какую по величине работу совершат электрические силы, если стержень повернуть так, что силовые линии будут составлять с его направлением угол $\beta=45^\circ$?

10. До какой разности потенциалов зарядится конденсатор в цепи, изображенной на рисунке 12, если ЭДС источника $\mathcal{E}=4,8$ В, внутреннее сопротивление его $r=1$ Ом, $R_1=2$ Ом, $R_2=5$ Ом? Какой заряд будет при этом на обкладках конденсатора, если его емкость $C=2$ мкФ?

11. Во сколько раз КПД η_1 линии электропередачи при напряжении $U_1=200$ кВ больше КПД η_2 линии электропередачи при напряжении $U_2=100$ кВ, если сопротивление линии $R=400$ Ом, а передаваемая мощность $P=10^4$ кВт?

12. Гибкий замкнутый проводник сопротивлением $R=100$ кОм, образующий квадрат со стороной $a=0,1$ м, помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B=5$ Тл. Плоскость квадрата перпендикулярна вектору магнитной индукции. Какой заряд протечет по проводнику, если из квадрата сделать равносильный треугольник, не меняя плоскости его расположения?

13. Светящаяся точка S , находящаяся в среде с показателем преломления $n_1=1,33$, рассматривается из среды с показателем преломления $n_2=1,5$ под наибольшим углом к нормали, проведенной к границе раздела двух сред. Каково будет кажущееся расстояние от точки S до границы раздела сред, если истинное расстояние $h=0,133$ м?

14. Через имеющееся в доске круглое отверстие диаметром $d=10$ см проходит сходящийся пучок света, который дает на экране, расположенном за доской параллельно ей, круглое пятно диаметром $D=5$ см. Если в отверстие вставить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F=30$ см, то пятно превращается в точку. Найдите расстояние между доской и экраном.

15. Спутник, летящий по круговой орбите на высоте $h=100$ км над Землей, сфотографировали неподвижным фотоаппаратом, объектив которого имеет фокусное расстояние $F=0,5$ м, делая выдержку $t=1$ с. Какой длины получится изображение спутника на пластинке? Изменением силы тяжести с высотой пренебречь. Считать, что радиус Земли $R=6300$ км, а ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

Публикацию подготовили
В. С. Панферов, А. С. Пахомов,
И. Н. Сергеев, А. Н. Соколкин

Программирование на микрокалькуляторе

(Начало см. на с. 46)

сравнению с первым вариантом наша программа улучшилась: например, из-за того, что перед нами не было записи на алгоритмическом языке, первый вариант программы не имеет ввода — программа рассчитывает угол только для одного треугольника, что, конечно же, никуда не годится. С другой стороны, вычислительная часть первого варианта получилась лучше из-за того, что учтены некоторые особенности калькулятора: например, то, что после засылки в память значение остается на регистре X и его можно тут же использовать для дальнейшего вычисления. Дело в том, что мы используем очень упрощенный алгоритмический язык: чуть-чуть улучшив его, можно получить оптимальные программы.

Введем возможность записи:

— вывод (выражение), означающий, что надо выражение вычислить и без записи в переменную вывести (на индикатор, печать...);
— промежуточного присваивания: например, $a := (b := c - k) \cdot p$; означает, что разность c и p надо записать в b , а кроме того, умножить на p и записать результат в a ;

— конструкции вида $a := \text{ввод}$ — 4, означающий, что введенное значение не запоминается в переменной, а из него вычитается 4 и запоминается только результат вычитания; и конструкции вида $a2 := (\text{ввод } a)^2$, означающей, что введенное значение запоминается в a , и тут же возводится в квадрат с запоминанием результата в $a2$.

Тогда нашу программу можно очень коротко записать в виде:

алг КОСИНУС

(вещ $a, a2, b, c, k$)

арг $a, a2, b, c$

рез k

нач $a2 := (\text{ввод } b)^2 + (\text{ввод } c)^2 - a2) / 2 / b / c$

кон

а трансляция ее в коды калькулятора даст оптимальную программу (разберитесь в ней самостоятельно);

FX² ПО С/П П1 FX² С/П П2 FX² + ИПО
— 2 ÷ ИП1 ÷ ИП2 ÷ С/П

Инструкция по ее использованию такая же, как у первой программы: набрать значение a , нажать С/П, после остановки набрать значение b , нажать С/П, после остановки набрать c , нажать С/П, после остановки прочитать результат.

Задачи

1. Написать программу, которая по сторонам треугольника a, b, c дает значения в радианах всех трех углов треугольника.

2. Написать программу решения квадратного уравнения в предположении, что дискриминант положителен.

Ответы, указания, решения



Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения

1. $x = e^t / (1 + e^t)$.

2. Нет.

4. Нет.

6. $T \approx 2\pi \left(1 + \frac{a^4}{16} + \dots\right)$.

7. ∞ .

9. $\pi/2$.

Задачи на сравнение чисел
(см. с. 24)

1. $(9 - \sqrt{193})/8$; $(11 - \sqrt{201})/8$].

2.] $-\infty$; $\log_2 3$]; да, так как $\sqrt{2} < \log_2 3$.

3.] $\log_{\frac{2}{3}} 3$; $\log_{\frac{2}{3}} 2$]; нет, так как $\lg \frac{1}{32} > \log_{\frac{2}{3}} 2$.

4.] $-\infty$; $\frac{5}{2} [U] \log_2 6$; 3[.

$$5. \left[-2 - \sqrt{4 + \cos \frac{3}{2}}; 0 \right].$$

$$6. \left[\frac{1}{4}; 3 + \sqrt{9 + \lg \frac{5}{2}} \right].$$

$$7.] -\infty; -2[U] - 2; 2 - \sqrt{15}[U[6; \infty[.$$

$$8.] -\infty; -2[U] 1 + \sqrt{8}; 4[U] 4; +\infty[.$$

Законы Кеплера и школьная физика

1. Большая полуось орбиты «Востока» $a = R_3 + (H + h)/2$. Сравнение с результатами задачи 1 в статье дает

$$T = T_{\min} (a/R_3)^{3/2} \approx 89,4 \text{ мин.}$$

2. По аналогии с задачей 3 в статье найдем минимальное расстояние от кометы до Солнца. Оно оказывается равным 0,8 а. е. Следовательно, комета подходит к Солнцу ближе, чем Земля, и может пересечь ее орбиту.

3. Площадь заштрихованной на рисунке 3 в статье фигуры

$$S_1 \approx \frac{100}{360} \pi \left(\frac{r_{\min} + R_{\text{П}}}{2} \right)^2.$$

Время пребывания Плутона внутри орбиты Нептуна

$$\tau = \frac{S_1}{lab} T = 40 \text{ лет}$$

($T=248$ лет — период обращения Плутона).
Итак, Плутон вновь станет самой далекой планетой в 2009 году.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика
(письменный экзамен)

Вариант 1

1. $x_1 = \pm \arccos \frac{3 + \sqrt{7}}{6} + 2\pi m,$

$x_2 = \pm \arccos \frac{3 - \sqrt{7}}{6} + 2\pi n \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 6 \cos^2 x - 6 \cos x + \frac{1}{3} = 0, \\ 6 \cos x - \frac{1}{3} \geq 0, \end{cases}$$

в которой неравенство следует из равенства.

2. $]-\infty; -3[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[.$

3. $\frac{15\sqrt{3}}{4}.$

Указание. Из конгруэнтности углов BDE и BED вписанного четырехугольника $DACE$ вытекает конгруэнтность углов DAC и ECA , поэтому треугольник ABC равнобедренный. 4. 0,26л; 0,6л.

Решение. При $p=0,6л$ исходное уравнение имеет решение на промежутке $]0; \frac{\pi}{3}[$ так как линейная функция

$$f(x) = \frac{p-5x}{\pi} + \log_3 \frac{3p}{\pi}$$

в этом случае принимает в точках $x=0$ и $x=\frac{\pi}{3}$ значения разных знаков: $f(0)=0,6 + \log_3 1,8 > 0$, $f(\frac{\pi}{3}) = -\frac{16}{15} + \log_3 1,8 < 0$.

Пусть $p=0,24л$. Тогда, с одной стороны, при $x \in]0; \frac{\pi}{3}[$ имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= 0,24 - \frac{5x}{\pi} + \log_3(3 \cdot 0,24) < \frac{1}{4} + \log_3 \frac{3}{4} = \\ &= \frac{1}{4} \log_3 \frac{3^5}{4^4} = \frac{1}{4} \log_3 \frac{243}{256} < 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, если хотя бы для одного из корней

$$x = p - (-1)^n \frac{\pi}{4} - \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

уравнения

$$6 \sin(p-x) - \sqrt{18} = 0 \quad (*)$$

выполнялось бы двойное неравенство

$0 < x < \frac{\pi}{3}$, то имели бы место оценки

$$-1 < \frac{p}{\pi} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} < n < \frac{p}{\pi} - \frac{1}{4} < 0,$$

или оценки

$$0 < \frac{p}{\pi} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} < n < \frac{p}{\pi} + \frac{1}{4} < 1,$$

что невозможно ни при каком целом значении n . При $p=0,26л$ уравнение $(*)$ имеет корень $x=0,26л - \frac{\pi}{4}$, принадлежащий промежутку

$$]0; \frac{\pi}{3}[.$$

5. $\frac{a^2 r_2^2 + r_1^2 r_2^2 - 2R^2 r_1^2}{2Rr_1}.$

Решение. Пусть O — центр сферы. Выберем точку B на прямой OO_2 (перпендикулярной плоскости второй окружности), так, чтобы для некоторой (а значит, для любой) точки K второй окружности прямая BK касалась сферы в точке K . Тогда из прямоугольного треугольника BKO с высотой KO_2 (опущенной на гипотенузу) имеем (рис. 1):

$$|OO_2| = \sqrt{|OK|^2 - |KO_2|^2} = \sqrt{R^2 - r_2^2},$$

$$|BO| = \frac{|OK|^2}{|OO_2|} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r_2^2}},$$

$$|BK| = \frac{|KO_2| \cdot |BO|}{|OK|} = \frac{r_2 R}{\sqrt{R^2 - r_2^2}}.$$

Докажем, что точка C пересечения прямой AB с плоскостью α совпадает с центром O_1 первой окружности. Обозначим через β плоскость, проходящую через точку B параллельно плоскости α , а через L, M — точки пересечения прямой AK с плоскостями α, β соответственно. Пусть N — центр окружности, которая образуется в сечении сферы плоскостью ABK (рис. 1). Тогда прямая AN перпендикулярна прямой LC (а значит, и прямой MB), так как плоскость AON , содержащая два перпендикуляра AO и ON к прямой LC , перпендикулярна этой прямой. Поскольку BK касательная, прямые BK и NK также перпендикулярны. Треугольник ANK равнобедренный, поэтому

$$\widehat{KMB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{KAN} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AKN} = \widehat{BKM},$$

откуда и из подобия треугольников ALC и AMB имеем

$$|LC| = \frac{|AC|}{|AB|} \cdot |BM| = \frac{|AC|}{|AB|} \cdot |BK| = k \frac{r_2 R}{\sqrt{R^2 - r_2^2}},$$

где коэффициент подобия $k = \frac{|AC|}{|AB|}$ не зависит от выбора точки K на второй окружности. Таким образом, точка C равноудалена от всех точек первой окружности, следовательно, является ее центром.

Проведем сечение сферы плоскостью AOO_2 , содержащей перпендикуляр AO , а значит, и перпендикуляр O_2D к плоскости α (см. рис. 2). Из подобия треугольников ALO_1 и AMB с коэффициентом

$$k = \frac{|LO_1|}{|MB|} = \frac{r_1}{|BK|} = \frac{r_1 \sqrt{R^2 - r_2^2}}{r_2 R}$$

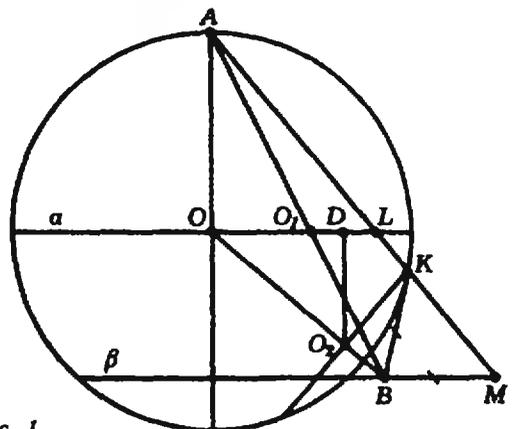


Рис. 1.

получаем $|AB| = \frac{1}{k} |AO_1| = \frac{ar_1 R}{r_1 \sqrt{R^2 - r_1^2}}$. По теореме косинусов для треугольника AOB имеем $\cos AOB = \frac{|AO|^2 + |BO|^2 - |AB|^2}{2|AO||BO|} = \frac{2Rr_1^2 - r_1^2 r_2^2 - a^2 r_2^2}{2Rr_1 \sqrt{R^2 - r_1^2}}$.

Наконец, из прямоугольного треугольника OO_2D получаем

$$|O_2D| = |OO_2| \sin \widehat{O_2O_1D} = -\sqrt{R^2 - r_1^2} \cdot \cos \widehat{AOB}.$$

Вариант 2

1. $\{(1; \log_2 2)\}$. 2. $|RS| > |QR|$. Указание. Из треугольника SQR , по теореме косинусов, получаем

$$|SR|^2 = 461 - 190\sqrt{3} > 10^2 = |QR|^2.$$

3. $x = -\frac{9}{13} \pm \frac{1}{13} \sqrt{\frac{1}{2} + 2n}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0.$

Указание. Подстановкой $y = \sin \pi(13x+9)^2$, уравнение приводится к виду $2y^2 - 5y + 3 = 0$.

4. $-\frac{1}{3}; \frac{-7 - \sqrt{7}}{42} \left[\cup \left[\frac{-15 + \sqrt{197}}{84}; 0 \right] \cup \left[\frac{13 - \sqrt{141}}{84} \right] \cup \left[\frac{13 + \sqrt{141}}{84}; \frac{1}{3} \right].$ Указание.

Поскольку $1 - 3|x| < 1$ при $x \neq 0$, неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \log_{1-3|x|}(4x^2 - 14|x| + 1) \leq \log_{1-3|x|} \left| x - \frac{5}{6} \right| \\ 0 < \left| x - \frac{5}{6} \right| < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{1-3|x|}(4x^2 - 14|x| + 1) \geq \log_{1-3|x|} \left| x - \frac{5}{6} \right| \\ \left| x - \frac{5}{6} \right| > 1. \end{cases}$$

5. $\left\{ \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}; 1; 1 \right); \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}; 7; -9 \right) \right\}.$

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - 17 = 0, \\ 3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos \pi y + \cos \pi z)x + 4 = 0. \end{cases}$$

Рассматривая второе уравнение системы как квадратное относительно x , запишем условие неотрицательности дискриминанта:

$$D = 12(\cos \pi y + \cos \pi z)^2 - 48 \geq 0, \text{ откуда сле-}$$

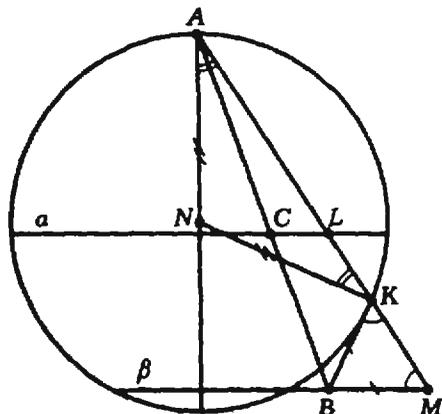


Рис. 2.

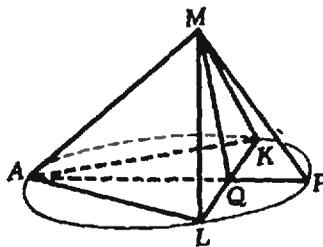


Рис. 3.

дует, что $|\cos \pi y + \cos \pi z| \geq 2$. Это возможно лишь в двух случаях:

$$\begin{cases} \cos \pi y = 1, \\ \cos \pi z = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \cos \pi y = -1, \\ \cos \pi z = -1, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} y = 2k, \\ z = 2l \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}),$$

либо

$$\begin{cases} y = 2n + 1, \\ z = 2m + 1 \end{cases} (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Подставляя $y = 2k, z = 2l$, получим $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}, 7 = 4l^2 - 4k^2 + 10l + 6k$, что невозможно.

В случае $y = 2n + 1, z = 2m + 1$, имеем $x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}, -2n^2 + n + 2m^2 + 7m = 0$. Последнее равенство перепишем следующим образом: $(2n + 2m + 3)(m - n + 2) = 6$. Число $2n + 2m + 3$ нечетное, поэтому для нахождения чисел m и n получаем 4 системы

$$\begin{cases} 2n + 2m + 3 = \pm 1, \\ m - n + 2 = \pm 6 \end{cases}, \begin{cases} 2n + 2m + 3 = \pm 3, \\ m - n + 2 = \pm 2. \end{cases}$$

6. $\frac{15\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{8}{11\sqrt{3} + \sqrt{43}} \right).$ Указание.

Пусть a — длина ребра тетраэдра $ABCD$, а r — радиус вписанного в нее шара. Тогда $r = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{2}{3}}$ и поэтому $a = 30, V_{ABCD} = 2250\sqrt{2}$.

Отношение объемов пирамиды $AKLM$ к объему тетраэдра $ABCD$ равно

$$\frac{V_{AKLM}}{V_{ABCD}} = \frac{|AK| \cdot |AL| \cdot |AM|}{|AB| \cdot |AC| \cdot |AD|} = \frac{1}{3} \frac{|AL|}{|AC|} = \frac{1}{6}.$$

Поэтому $|AL| = \frac{1}{2}|AC| = 15$.

Итак, $|AK| = |AL|$ и треугольник AKL — правильный. Плоскость AKL пересекает описанную около пирамиды $AKLM$ сферу по окружности радиуса $R = \frac{|KL|}{2 \sin \widehat{KAL}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. Пусть Q —

середина стороны KL (рис. 3). Тогда $|AP| = 10\sqrt{3}$. Плоскость AMP проходит через центр описанной сферы (почему?) и поэтому для радиуса этой сферы получаем выражение

$$R_{\text{он}} = \frac{|MP|}{2 \sin \widehat{MAP}}, \text{ но } \sin \widehat{MAP} = \sqrt{\frac{2}{3}}, |MP|^2 = = |AM|^2 + |AP|^2 - 2|AM| \cdot |AP| \cos \widehat{MAP} = = 300, \text{ то есть } |MP| = 10\sqrt{3}.$$

$$\text{Итак, } R_{\text{он}} = \frac{10\sqrt{3}}{2 \sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{15}{2} \sqrt{2}.$$

Для вычисления $R_{\text{вп}}$ — радиуса сферы, вписанной в пирамиду $AKLM$, воспользуйтесь фор-

мулой $R_{\text{вн}} = \frac{3V}{S}$, где S — полная поверхность пирамиды, а V — ее объем.

Вариант 3

- $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi m, x_2 = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$.
- $]-\infty; 3 - \sqrt{3} \cup]3 + \sqrt{3}; \infty[$.

Указание. Обозначьте $y = 5^{2x - \frac{1}{3}x^2}$.
3. 3/5. Указание. Задача сводится к исследованию на максимум функции

$$S(x) = \frac{1}{2} x |3x^2 - 10x + 2| - (-2x^2 + 5x - 10) = \left| \frac{5}{2} x^3 - \frac{15}{2} x^2 + 6x \right|$$

на отрезке $\left[\frac{3}{5}; \frac{3}{2} \right]$.

- $\frac{5\sqrt{5}}{6} \pi$. **Решение.** Пусть (рис. 4) основанием пирамиды $NABCD$ служит ромб $ABCD$, а шар с центром O касается боковых граней пирамиды в точках E_1, E_2, E_3, E_4 , лежащих соответственно на ребрах AB, BC, CD, DA .

Тогда четыре прямоугольных треугольника NOE_i ($i=1, 2, 3, 4$) конгруэнтны, а значит, имеют общую точку H — основание высот EH , опущенных на общую гипотенузу NO . Поэтому прямая NO перпендикулярна плоскости $NE_1E_2E_3E_4$, то есть плоскости основания пирамиды. Поскольку конгруэнтные отрезки EH ($i=1, 2, 3, 4$) перпендикулярны соответствующим сторонам ромба $ABCD$ (ибо лежат соответственно в плоскостях NOE_i), точка H равноудалена от четырех сторон ромба и является точкой пересечения его диагоналей.

Таким образом, получаем $S_{ABCD} = |AB| \times |AD| \sin \hat{A} = |AB|^2 \cdot \frac{1}{2} = 8$, то есть $|AB| = 4$.

$$|E_1H| = \frac{S_{ABCD}}{2|AB|} = 1, |E_1N| = \sqrt{|NH|^2 + |E_1H|^2} = \sqrt{5}, E_1O = \frac{|E_1H|}{|NH|} \cdot |E_1N| = \frac{\sqrt{5}}{2}, V = \frac{4}{3} \times \frac{5\sqrt{5}}{6} \pi$$

- $(-20; 36), (3; 10)$. **Решение.** Делая замену $u = 2x + y, v = \log_3(|y| - 2x + 5)$, получаем систему

$$\begin{cases} v^2 + |u| - 20 = 0, \\ (u+v)(u-8v) = 0, \end{cases}$$

которая равносильна совокупности систем:

- $\begin{cases} u = -v, \\ |v|^2 + |v| - 20 = 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} u = 8v, \\ |v|^2 + 8|v| - 20 = 0. \end{cases}$

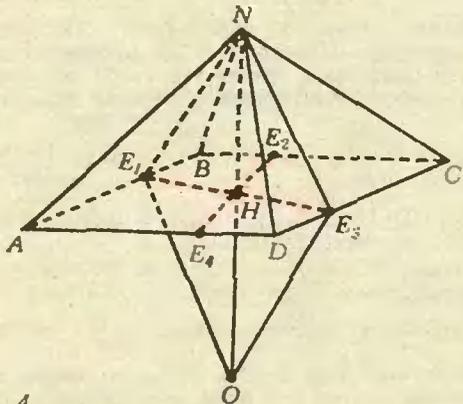


Рис. 4.

В случае а) имеем $(|v| - 4)(|v| + 5) = 0$, то есть $|v| = 4$, и, возвращаясь к переменным x, y , получаем систему

$$\begin{cases} 2x + y = \pm 4, \\ |y| - 2x + 5 = 3^{\pm 4}. \end{cases}$$

Складывая уравнения последней системы, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} |y| + y = 3^{\pm 4} \pm 4 - 5, \\ x = \pm 2 - y/2. \end{cases}$$

из которой, раскрывая знак модуля, находим $y = \frac{1}{2} (3^{\pm 4} - 4 - 5) = 36, x = -2 - 18 = -20$.

В случае б), аналогично, имеем $(|v| - 2) \times (|v| + 10) = 0$, то есть $|v| = 2$ и

$$\begin{cases} 2x + y = \pm 16, \\ |y| - 2x + 5 = 3^{\pm 2}, \end{cases}$$

откуда получаем

$$\begin{cases} |y| + y = 3^{\pm 2} \pm 16 - 5, \\ x = \pm 8 - y/2 \end{cases}$$

и, наконец, $y = 10, x = 3$.

Вариант 4

- (1). 2. $5\pi/3$. 3. $]-311; -11 \cup]1; 1.5[$.

Решение. Обозначим площади треугольников LKP и NKM через c и d соответственно. Тогда из соотношений (см. рис. 5)

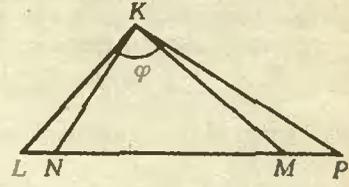


Рис. 5.

$$\begin{aligned} \widehat{NKM} &= \widehat{NKP} + \widehat{LKM} - \widehat{PKL} = \pi - \varphi, \\ cd &= \frac{1}{4} |LK| \cdot |NK| \cdot |MK| \cdot |PK| \cdot \sin \widehat{LKP} \times \\ &\quad \times \sin \widehat{NKM} = ab \sin^2 \varphi, \\ c + d &= S_{LKM} + (S_{MKP} + S_{MKN}) = a + b. \end{aligned}$$

Согласно обратной теореме Виета получаем, что числа c и d представляют собой пару корней уравнения

$$x^2 - (a+b)x + ab \sin^2 \varphi = 0,$$

причем $c > d$, откуда $d = \frac{1}{2} (a+b - \sqrt{(a+b)^2 - 4ab \sin^2 \varphi})$.

4. **Решение.** Положим $x = \sin t$, тогда каждому корню $x \in [0; 1]$ исходного уравнения будет соответствовать ровно один корень $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ уравнения

$$8 \sin t (1 - 2 \sin^2 t) (8 \sin^4 t - 8 \sin^2 t + 1) = 1$$

и наоборот. Преобразуя левую часть с помощью формул понижения степени, получаем уравнение

$$8 \sin t \cos 2t \cos 4t = 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, так как значение $t = \pi/2$ уравнению не удовлетворяет. Поэтому, умножая обе части уравнения на $\cos t \neq 0$, получаем

$$8 \cos t \sin t \cos 2t \cos 4t = \cos t,$$

откуда $\sin 8t = \cos t$.

Выбирая из решений этого уравнения

$$t_1 = \frac{2}{9} \left(\frac{\pi}{4} + \pi n \right), \quad t_2 = \frac{2}{7} \left(\frac{\pi}{4} + \pi m \right) \quad (n, m \in \mathbb{Z}),$$

лишь те, которые удовлетворяют условию $0 \leq t < \pi/2$, получаем ровно четыре различных корня (при $n=0, n=1, m=0$ и $m=1$).

Вариант 5

1. $\{(3; -9)\}$. 2. $\{0\}$.
3. $x = \frac{\pi}{3} + (2n+1)\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Указание. Приведите уравнение к виду

$$\frac{(\cos x - 1) \left(\cos x + \frac{1}{2} \right)}{\cos^3 x} = 0$$

и заметьте, что если $\cos x = 1$, то $\operatorname{tg} x = 0$, а если $\cos x = -\frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg} x > 0$ только при $x = \frac{\pi}{3} + (2n+1)\pi$, где $n \in \mathbb{Z}$.

4. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **Указание.** Треугольники ACD и EAC подобны, так как вписанные углы BAC и AEC опираются на конгруэнтные дуги.

5. 3. **Решение.** Обозначая $p = ab + a$, получаем равенство

$$x^2 + (3p - 2)x + 5p - 17 = 0.$$

где $p \in [1; \infty[$ (действительно: с одной стороны, $a \geq 1, b \geq 0$, поэтому $p \geq 1 \cdot 0 + 1 = 1$; с другой стороны, любое значение $p \geq 1$ можно получить, например, при $b = 0$ и $a = p \geq 1$). Таким образом, среди всех пар чисел $p \geq 1$ и $x = x_0$, удовлетворяющих полученному равенству, нужно найти пару с наибольшим значением x_0 . Для таких пар должно быть:

$$p = \frac{17 + 2x_0 - x_0^2}{3x_0 + 5} \geq 1 \quad (*)$$

($x_0 \neq -\frac{5}{3}$, так как это число не удовлетворяет уравнению ни при каких p). Преобразуя (*), получаем

$$\frac{(x_0 - 3)(x_0 + 4)}{3x_0 + 5} \leq 0,$$

и, следовательно, $x_0 \leq 3$. Наоборот, проверка показывает, что пара чисел $p = 1$ и $x = 3$ удовлетворяет требуемому равенству.

Вариант 6

1. Второе число больше. **Указание.** $2^{\log_2 5} = 5^{\log_2 2}$.

2. $]2; \infty[$. 3. 9. 4. $x_1 = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

5. $\{7\}$. **Указание.** Уравнение приводится к виду $(\sqrt{x+6} + \sqrt{x+2})(\sqrt{2x-1} - 3) = 4$. Умножив левую и правую части на $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}$, получим $\sqrt{2x-1} - 3 = \sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}$.

6. $\sqrt{61}$; один путь. **Указание.** Путь, проходящий через грань $BAA'B'$, короче пути через соседние грани $ABCD$ и $A'ADD'$, в чем можно убедиться, рассматривая развертку куба.

Вариант 7

1. Первое число больше. **Указание.** $3^{\log_3 5} = 5^{\log_3 3}$.

2. $] -\infty; 0[\cup]2; +\infty[$. 4. $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n - \operatorname{arctg} \frac{5}{3}$ ($n \in \mathbb{Z}$). 5. $\{2\}$. **Указание.** Перепишав уравнение в виде

$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{3x^2 - 5x - 1} = \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 4},$$

преобразуем левую и правую части по формуле

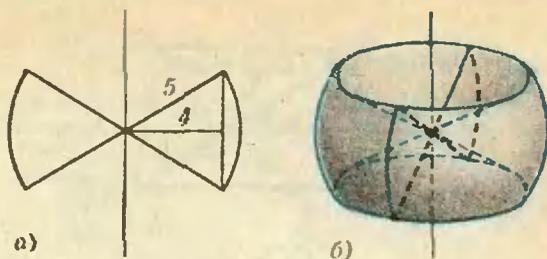


Рис. 5.

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ к виду

$$\frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-7x+3} + \sqrt{3x^2-5x-1}} = \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2-3x+4}}$$

Ясно, что $x = 2$ удовлетворяет уравнению. При $x \neq 2$ левая и правая части имеют разные знаки.

6. 50 $\operatorname{arccos} 4/5$. **Указание.** Осевое сечение тела вращения имеет вид, показанный на рисунке 6,а, и состоит из двух секторов окружности радиуса 5. Само тело показано на рисунке 6,б.

Вариант 8

1. $x = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 2. $]1; 1,5[$. 3. 4 км/ч. **Указание.** Примените теорему косинусов.

4. $-\frac{\pi}{18}$. **Указание.** Воспользовавшись равенствами типа

$$Q'P'S' = \frac{1}{4}(Q + P),$$

получите соотношения

$$P' = \frac{1}{4}(\pi + P), Q' = \frac{1}{4}(\pi + Q), R' = \frac{1}{4}(\pi + R).$$

5. $[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$. **Решение.** Пусть $b \neq \pm 1$.

Преобразуя подкоренное выражение $4x^2 + 4bxy + y^2 + 8y + 18 = (x + by)^2 + (y\sqrt{1-b^2} + \frac{4}{\sqrt{1-b^2}})^2 + (18 - \frac{16}{1-b^2})$,

получаем, что исходное выражение имеет вид $1 - 2\sqrt{A+B^2+C^2}$.

где

$$\begin{cases} 18 - \frac{16}{1-b^2} = A, \\ x + by = B, \\ y\sqrt{1-b^2} + \frac{4}{\sqrt{1-b^2}} = C \end{cases}$$

(заметим, что для любого набора значений $b \in]-1; 1[$, B и C последняя система имеет единственное решение). Если $A \geq 0$ (что равносильно условию $b^2 \leq \frac{1}{9}$), то исследуемое выражение

принимает наименьшее значение $1 - 2\sqrt{A}$ только при $B = C = 0$, то есть при одной паре чисел x, y . Если же $A < 0$, то наименьшее значение равно 1 и достигается уже при $B = 0, C = \pm\sqrt{-A}$, то есть по меньшей мере при двух парах чисел x, y (в действительности же таких пар в этом случае бесконечно много).

При $b = \pm 1$ исходное выражение имеет вид $1 - 2\sqrt{D+B^2}$.

где

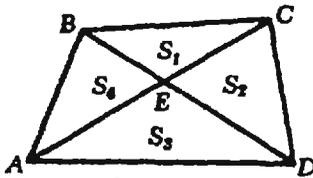


Рис. 7.

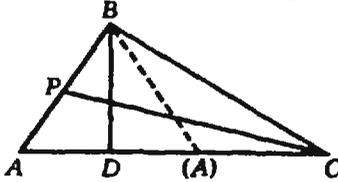


Рис. 8.

$$\begin{cases} 8y + 18 = D, \\ x + by = B. \end{cases}$$

В этом случае наименьшее значение равно 1 и достигается при $D \leq 0$, $B = \pm \sqrt{-D}$, то есть при условиях, которым удовлетворяет не единственная пара чисел x, y .

Вариант 9

- $]-\infty; -1/3[\cup]2; +\infty[$.
- $x = \pm \pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- $x = 4^{\frac{\log_2 a}{\log_2 a + 2}}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 2^{-2/3}$.
- $y_{\min} = y(-3/5) = \frac{7}{23}$.

5. 40 мин и 1 ч. Указание. Обозначим пешеходов буквами α и β , причем α движется быстрее β . Пусть t время, затраченное α при переходе из А в В, а τ — время, затраченное β . По условию $\tau = 3/2t$. По условию $\tau - t \leq \frac{1}{3}$. Если первым вышел из А пешеход α , то, по условию

$$\begin{cases} t/2 \leq \frac{1}{3}, \\ n \leq \frac{2}{3}, \\ t/2 + n \geq 1 \end{cases}$$

(Здесь n — время, через которое β выходит из А после выхода α .) Складывая первые два неравенства, получим $t/2 + n \leq 1$. Поэтому $t/2 + n = 1$, $n = 2/3$, $t = 2/3 = 40$ мин, $\tau = 1$ ч. Если β первым вышел из А и пришел в В, а n — время задержки в А пешехода α , получается система

$$\begin{cases} t/2 \leq 1/3, \\ n \leq 2/3, \\ \tau - (t + n) \geq 1, \end{cases}$$

из которой следует, что $n = t/2 \leq 1$; $n - t/2 \geq 1$, что невозможно. Если же первым в В приходит α , то получается система

$$\begin{cases} t/2 \leq 1/3, \\ n \leq 2/3, \\ s - (t + n) \geq 1, \\ s = 3/2n, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} n + t/2 \leq 1 \\ t/2 - n \geq 1 \end{cases}$$

что тоже невозможно.

6. 3. Указание. Пусть $S_{BEC} = S_1$, $S_{CED} = S_2$, $S_{ADE} = S_3$, $S_{ABE} = S_4$. Так как $S_2 = S_6$, $S_{ABD} = S_{ACD}$, точки В и С равноудалены от стороны AD, $BC \parallel AD$ и $\triangle BEC \sim \triangle AED$ (рис. 7).

Кроме того, $\frac{S_1}{S_6} = \frac{S_1}{S_3}$, то есть $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4 = 1$.

А так как $S_1 + S_2 \leq 2$, имеем $S_1 = S_3 = 1$. Поэтому $\triangle BEC \cong \triangle AED$.

Вариант 10

1. $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 6 \sin x \geq 0 \\ \sin x = 1 - \sin^2 x. \end{cases}$$

2. $]-\infty; -5/3[\cup]0; 1/3[$.

3. 10. Указание. Из условия следует, что BQ — медиана (см. рис. 8). Из точки H проведем $KH \parallel BP$. Тогда $|BH|/|HQ| = 2$ и поэтому $|PK| = 2|KQ|$, значит $|PK| = 2$, кроме того $|AP| = |PK|$, так как $|AE| = |EH|$.

4. 12. 4. Указание. Пусть v скорость катера, u — скорость течения. Условие задачи приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{s}{u+v} = 10, \\ \frac{s}{2v+u} + \frac{s}{2v+u} \geq 16, \\ \frac{s}{2v+u} \leq 6. \end{cases}$$

5. $\left\{ \left(\frac{4}{\sqrt{13}}; \frac{6}{\sqrt{13}}; \frac{9}{\sqrt{13}}; \frac{6}{\sqrt{13}} \right) \right\}$. Указание.

Точка $(x; y)$ лежит на окружности $x^2 + y^2 = 4$, поэтому существует угол α такой, что $x = 2 \cos \alpha$, $y = 2 \sin \alpha$; точно так же, для некоторого угла β будет $z = 3 \cos \beta$, $v = 3 \sin \beta$. Из неравенства получаем $6(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \geq 6$, то есть $\sin(\alpha + \beta) \geq 1$. Поэтому $\sin(\alpha + \beta) = 1$ и $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), $x + z = 2 \cos \alpha + 3 \cos \beta = 2 \cos \alpha + 3 \sin \alpha = \sqrt{13} \sin(\alpha + \varphi)$, где $\varphi = \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$. Максимум $x + z$ достигается

при $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Вариант 11

- $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x_2 = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + \pi m$ ($n, m \in \mathbb{Z}$).
- $]-\infty; 1[$.
- 20 ч.
- 4 и 1,5. Указание. Функция имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} -4x - 6 & \text{при } -2,5 \leq x < -2, \\ 2x^2 + 6x + 6 & \text{при } -2 \leq x \leq -1, \\ 4x + 6 & \text{при } -1 < x \leq -0,5, \end{cases}$$

следовательно, убывает на промежутке $]-2,5; -1,5[$ и возрастает на промежутке $]-1,5; -0,5[$.

$$5. \frac{\sqrt{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)}{4 \sin \alpha \cdot \sin^2 \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} \right)} \cdot R^2. \text{ Реше-}$$

ние. Пусть точка O — центр окружности, а точки D и E лежат на хорде A'C', причем

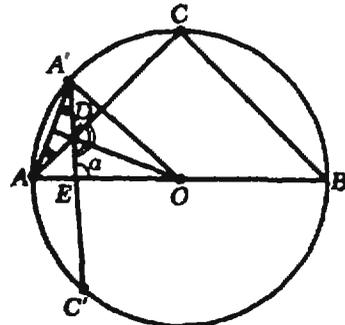


Рис. 9.

точка D расположена между точками E и A' (рис. 9). Заметим, что $\widehat{AC} = \widehat{BC} < \widehat{A'BC'}$. Поэтому $\widehat{AA'C} = \widehat{A'AC'}$ и $\widehat{CA'} = \widehat{AC} - \widehat{A'A} = \widehat{C'A'} - \widehat{A'A} = \widehat{C'A}$, следовательно, вписанные углы $\widehat{CAA'}$ и $\widehat{C'A'A}$ конгруэнтны. Поэтому перпендикуляр к хорде AA' , проведенный через ее середину, содержит обе точки D и O (равноудаленные от точек A, A') и является биссектрисой угла $\widehat{CDC'}$, а значит,

$$\widehat{ADO} = \widehat{ADE} + \frac{1}{2} \widehat{CDC'} =$$

$$= \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(\pi - \alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{8}\pi + \frac{\alpha}{2},$$

поскольку $\widehat{AED} = \pi - \alpha$, $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{4}$.

Далее, имеем

$$\widehat{AOD} = \pi - \widehat{DAO} - \widehat{ADO} = \pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}$$

и, применяя теорему синусов к треугольникам AOD, AED , получаем

$$|AD| = |AO| \frac{\sin \widehat{AOD}}{\sin \widehat{ADO}} = R \frac{\sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$|DE| = |AD| \frac{\sin \widehat{DAE}}{\sin \widehat{AED}} =$$

$$= R \frac{\sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin \alpha}.$$

Наконец, $S = \frac{1}{2} |AD| \cdot |DE| \sin \widehat{ADE}$.

6. $\left] -\frac{5}{11}; -\frac{1}{3} \right[$. Решение. Исходное уравнение приводится к виду

$$(x+2y)(3x+5y) = 7,$$

поэтому целочисленная пара $(x+2y; 3x+5y)$ совпадает с одной из четырех пар: $(1; 7), (-7; -1), (-1; -7)$ и $(7; 1)$ и поэтому уравнение имеет соответственно четыре целочисленных решения $(x; y)$, а именно: $(9; -4), (33; -20), (-9; 4), (-33; 20)$, среди которых только первые два удовлетворяют неравенству $x+y > 0$. Таким образом, требуется найти все значения a , при которых выполнено ровно одно из неравенств:

$$4a^2 \cdot 9 - 3a(-4) < 0$$

или

$$4a^2 \cdot 33 - 3a(-20) < 0.$$

Теперь остается заметить, что первое неравенство выполнено при $a \in \left] -\frac{1}{3}; 0 \right[$; а второе — при $a \in \left] -\frac{5}{11}; 0 \right[$.

В а р и а н т 12

1. $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}$. 2. 6. У к а з а н и е. При составлении уравнений воспользуйтесь свойствами средних членов арифметической и геометрической прогрессий.

3. $\left] 1; 2 \right[$.

4. $\frac{36}{13}(5\sqrt{2}+6)$. Решение. Площади треугольников PBC и ABC , имеющих общую высоту (опущенную из вершины C), относятся как длины соответствующих оснований PB и AB . Поэтому

$$S = \frac{|PB|}{|AB|} S_{ABC} =$$

$$= \frac{|PB|}{|AP|+|PB|} \cdot \frac{1}{2} |BD| \cdot |AC| = \frac{18}{13} |AC|.$$

Из прямоугольных треугольников ABD и CBD по теореме Пифагора имеем

$$|AD| = \sqrt{|AB|^2 - |BD|^2} = 12,$$

$$|DC| = \sqrt{|BC|^2 - |BD|^2} = 10\sqrt{2}.$$

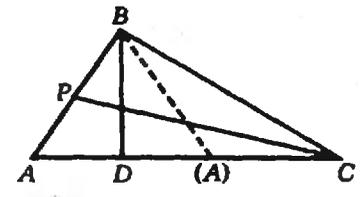


Рис. 10.

откуда (см. рис. 10). $|AC| = |DC| \pm |AD| = 10\sqrt{2} \pm 12$.

Проверка показывает, что условие $S > 3$ выполняется только в случае $|AC| = 10\sqrt{2} + 12$ (неравенство $\frac{18}{13}(10\sqrt{2} - 12) < 3$ устанавливается с помощью извлечения квадратного корня из неравенства $288 < 289$).

5. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$) при $b = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$),

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$) при $b = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

при остальных значениях b решений нет. У к а з а н и е. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin(x+\varphi) = \frac{3\sqrt{3} + 4 \cos b}{\sqrt{8 \sin^2 b + 1}}, \quad (*)$$

где φ удовлетворяет условиям $\cos \varphi = \frac{3 \sin b}{\sqrt{8 \sin^2 b + 1}}$, $\sin \varphi = \frac{\cos b}{\sqrt{8 \sin^2 b + 1}}$. Правая часть (*) положительна и должна быть не больше 1. Это возможно лишь при $\cos b = -\sqrt{3}/2$.

Ф и з и к а
Физический факультет

1. $t = \frac{1}{2} (t_1 - t_2) + \frac{l}{g \sin \alpha} \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right)$.

2. $T_2 = \frac{m \Delta m}{4m + \Delta m} g$.

3. $\frac{l_{\max}}{l_{\min}} = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{4-1}} \approx 4,4$.

4. $p = \frac{p_1 p_2 (m_1 + m_2)}{p_1 m_2 + p_2 m_1}$.

5. $\varphi = \frac{n_2}{n_1} 100\% = 50\%$.

6. $Q' = 4/3Q \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$ Кл.

7. $\alpha = P_{\text{пр}}/P_{\text{вст}} = 1/3$.

8. $v = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{cDQ\Delta T}{\tau}} \approx 0,14$ м/с.

$$9. \alpha \leq 2 \arccos(n_b/n_c).$$

$$10. P = \frac{abc}{(b-a)^2}.$$

Механико-математический факультет, факультет вычислительной математики и кибернетики, химический, географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

$$1. v = \pi n d^2 / l = 628 \text{ м/с.}$$

$$2. N = m(g+a) \cos \alpha \approx 2 \text{ Н.}$$

$$3. k_1 = k_2 / 2.$$

$$4. F = \sqrt{2g(m_1^2 h_1 + (m_1 + m_2)^2 h_2)} / \Delta t.$$

$$5. h = (m_1 + m_2) / (2 \rho S l) = 0.1 \text{ м.}$$

$$6. p = 3 \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT}{V} = 1.8 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$7. x = \frac{\rho_n}{2 \rho g} \left(\sqrt{1 + \frac{2L \rho g}{\rho_n}} - 1 \right).$$

$$8. E = \frac{8 \sqrt{3} |q|}{9 \pi \epsilon_0 a^2} \approx 12 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$$

$$9. A = 1/2 (q_2 - q_1) E l (\cos \alpha - \cos \beta) \approx 4.8 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

$$10. U = \frac{\mathcal{E} R_3}{r + R_1 + R_3} = 3 \text{ В; } q = CU = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

$$11. \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{(U_1^2 - PR) U_2^2}{(U_2^2 - PR) U_1^2} = 1.5.$$

$$12. q = (9 - 4 \sqrt{3}) a^2 B / (9R) = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл.}$$

$$13. h' = h n_2 / n_1 = 0.15 \text{ м.}$$

$$14. l = DF / d = 15 \text{ см.}$$

$$15. l = Ft \sqrt{(R+h)g/h} = 0.04 \text{ м.}$$

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 1)

1. Очевидно, что я окажусь посередине канатной дороги в тот момент, когда количество

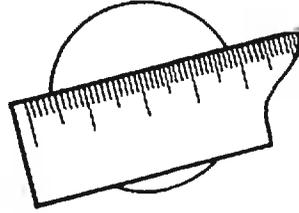


Рис. 10.

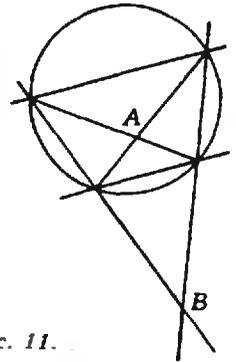


Рис. 11.

кресел впереди и сзади окажется одинаковым. Поскольку всего кресел 96, искомый номер встречного кресла равен $66 - 48 = 18$. (Если бы номер моего кресла был меньше 48, то номер встречного кресла был бы на 48 больше, а не меньше, чем номер моего кресла.)

$$2. 4 + 2 = 8 - 2 = 3 \times 2 = 8 - 2 = 7 - 1 = 6.$$

3. Нужно отметить уровень жидкости во флаконе, заткнуть флакон и перевернуть его.

4. Наложим линейку на окружность так, чтобы по разные стороны были видны дуги разной длины (рис. 10). Затем сделаем построение, как показано на рисунке 11. Прямая AB проходит через центр окружности. Сделаем еще одно такое же построение, наложив линейку по-другому, и мы получим еще одну прямую, проходящую через центр окружности. 5. Из слов Саши следует, что дедушке 75 лет, а внукам вместе 25 лет. Если обозначить возраст Вани через x , возраст Пети через y , а возраст Саши через z , то из высказывания Пети следует, что

$$x + 2y = x + y + y = x + y + (z - 3) = 25 - 3 = 22,$$

что при x , меньшем y , но большем 5, возможно лишь тогда, когда $x = 6$, $y = 8$. Итак, возраст Вани — 6 лет, Пети — 8 лет и Саши — 11 лет.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучный, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. П. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. В. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кирилли, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фадеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. А. Варламов, А. Н. Вилкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. И. Кламова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомиров

Номер оформили:

Е. В. Винодарова, Т. А. Доброхотова, М. Б. Дубак, С. В. Иванов, С. М. Роксвольд, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурин

Фото представили:

В. Т. Брель, ЛАФОКИ

Заведующая редакцией Л. В. Чернопил

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Ишнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор И. В. Гумянцева

103006 Москва К-6,

ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.12.85. Подписано к печати 20.1.86.

Печать офсетная. Усл. кр.-от. 23,8

Бумага 70×108¹/₂.

Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,45. Т-03344

Тираж 199 091 экз.

Цена 40 коп. Заказ 3382

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»

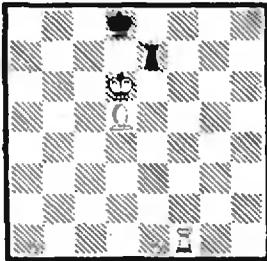
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области



Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЭВМ И ШАХМАТНЫЙ КОДЕКС

На прошлой шахматной страничке мы рассказали о новшествах в шахматном кодексе. Так, в правиле 50 ходов, для эндшпиля «король, ладья и слон против короля и ладьи» число 50 увеличивается до 100.



Перед вами классическая позиция Филадельфа, проанализированная великим французским шахматистом более двухсот лет назад. Для победы белым надо прежде всего отогнать ладью с седьмой горизонтали, где она может объявлять непрерывные шахи.

1. Лf8+ Лe8 2. Лf7 Лe2! Плохо 2... Лh8 3. Лa7 Лh6+ 4. Сe6 или 2... Крс8 3. Лa7 Лd8+ 4. Крс6 Крс8 5. Ла5 Лf8 6. Крс6 3. Лg7. Лe1 4. Лb7 Лc1. Не помогает 4... Крс8 — 5. Ла7 Лb1 6. Лf7 Крс8 7. Лf8+ Кра7 8. Ла8+ Крс6 9. Лb8+ с выигрышем ладьи. 5. Сb3! Лc3. Единственный ход по линии «с» (5... Лe8 6. Лg7), но расположение ладьи на третьей горизонтали в дальнейшем погубит черных. На 5... Крс8 решает 6. Лb4 Крс8 7. Лf4 Лe1 (7... Крс8 8. Сd5 Крс8 9. Ла4) 8. Са4 Крс8 9. Сe6 Лd1+ 10. Сd5 Крс8 11. Ла4.

6. Сe6 Лd3+ 7. Сd5 Лc3 8. Лd7+ Крс8 9. Лf7 Крс8 10. Лb7+ Крс8 11. Лb4 Крс8 12. Сc4!, и все кончено.

Позже известный советский мастер и этюдист Н. Григорьев нашел симметричный выигрышающий вариант: 3. Лh7 Лe1 4. Лb7 Лc1 5. Лf7

Лe1 6. Сf3 Крс8 7. Лf4 Крс8 8. Сb5 Крс8 9. Лb4 и т. д.

Возникают естественные вопросы: всегда ли сильнейшая сторона может оттеснить неприятельского короля на крайнюю линию и можно ли в этом случае создать позицию Филадельфа? Теория не дает четкого ответа на эти вопросы. Кстати, кроме филадельфовой известны и другие выигрышные позиции. Белые: Крс6. Лe1, Сc5; черные: Крс8. Лd7 (позиция Молли); белые: Кра6. Лc1, Са5, черные: Кра8. Лb7 (позиция Лазы); белые: Крс7, Лe7, Сd3, черные: Кра7, Лf6 (позиция Житогорского).

А вот позиция, где белым не удается выиграть. Белые: Крс6. Лd1, Сb5, черные: Крс8, Лc7. Игра может протекать так: 1. Лd8+ Лc8 2. Лd7 Лc2 3. Лf7 Лc3 4. Са4 Лc1 5. Сс6 Лb1+ 6. Крс5 Лb2! Как показывает анализ, другие продолжения ведут к позиции Филадельфа. 7. Сd5 Лh2! 8. Лb7+ Крс8 9. Лe7 Крс8!

Хотя традиционно считается, что данный эндшпиль ничейный, на практике дело чаще всего кончается победой сильнейшей стороны. В. Смыслов — Д. Бронштейн (1949 г.). Белые: Крс5, Лb1, Сc5; черные: Кра5, Лh6. Партия закончилась так: 1. Сe3 Лh5+? 2. Крс4 Лh4+ 3. Сd4 Кра6 4. Лb6+ Кра5 5. Лg6 Лe4 6. Лg1 Кра6 7. Лg7! Черные сдались. Вместо 1... Лh5+ следовало играть 1... Лg6 2. Крс5 Кра6 3. Сf4 Лg4 4. Сd6 Лh4 5. Крс6 Кра5 или 2. Сf4 Лg4 3. Сd6 Лh4 4. Крс6 Лg4, и черные держатся.

Стоит заметить, что анализ рассматриваемого окончания носит вполне математический характер. Утверждать, что данная позиция выиграна, можно только произведя полный, исчерпывающий перебор вариантов — общие соображения здесь не помогают. Забавно, но ничейность позиции можно принять лишь с некоторой оговоркой — ведь отсутствие непосредственного пути к победе еще ничего не доказывает.

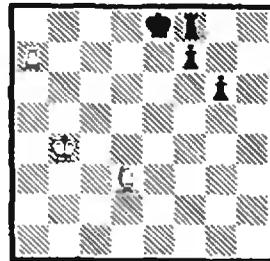
По-видимому, точку в анализе этого эндшпиля когда-нибудь поставит компьютер. Не исключено, кстати, что при этом будут внесены изменения в теорию — окончание признают выигранным, а ничью объявят исключенным из правил. Возможно, обнаружатся такие позиции, в которых для выигрыша нужно более

100 ходов. Тогда снова придется исправлять кодекс.

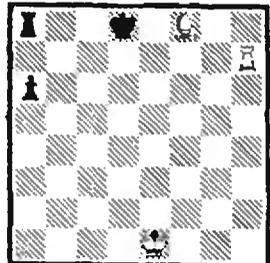
Напомним, что ЭВМ уже обнаружила позицию, где 50 ходов для выигрыша не хватает. Белые: Крс6, Фа6, п.g7; черные: Крс2, Фb1, ход черных. Тонкое маневрирование белого короля и ферзя после упорной защиты черных приводит через 53 хода к такой позиции. Белые: Крс2, Фf2, п.g7; черные: Крс2, Фb3. Здесь черный ферзь вынужден занять пассивное положение 54... Фg8, и после 55. Фb6+ Кра3 56. Фb7 Кра4 57. Крс3 Кра5 58. Фb4+ Кра6 59. Фc4+ белые разменивают ферзей и проводят свою пешку. А вот совсем свежий пример: король и два слона против короля и коня. Учебники утверждают, что одни позиции выиграны, а другие (большинство) ничейны. Машина установила, что выигрыш есть всегда (конечно, позиции, где сильнейшая сторона сразу теряет слона или даже получает мат, не в счет), но иногда требуется 67 ходов. Жаль, что члены ФИДЕ не были знакомы с достижениями ЭВМ, иначе они распространили бы правило 100 ходов и на два указанных класса позиций.

Конкурсные задания

В предлагаемых позициях у черных помимо ладьи есть пешки, и это их подводит.



3. Белые начинают и выигрывают.



4. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 20 апреля 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 3, 4».

От съезда к съезду

Выдающимися успехами ознаменована одиннадцатая пятилетка. Завершено строительство главного пути Байкало-Амурской магистрали, введены в строй тысячекилометровые нефте- и газопроводы, в том числе трансконтинентальный газопровод Уренгой — Ужгород; завершается строительство Саяно-Шушенской ГЭС; проделана большая работа по выполнению Продовольственной программы. Успешно развивалась и наша наука. Проведена серия новых космических полетов на станции «Салют-7», в том числе рекордный полет космонавтов Л. Д. Кизима, В. А. Соловьева и

О. Ю. Атькова, продолжавшийся 237 суток. Многие задачи, над решением которых наш народ трудился в одиннадцатой пятилетке, носят долговременный характер. Они включены в проект новой редакции Программы КПСС и проект Основных направлений экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года. Важнейшие события в жизни нашей страны, естественно, находят свое отражение в филателии, о чем убедительно свидетельствуют воспроизведенные здесь почтовые марки, выпущенные в годы одиннадцатой пятилетки.

В. Рудов

