

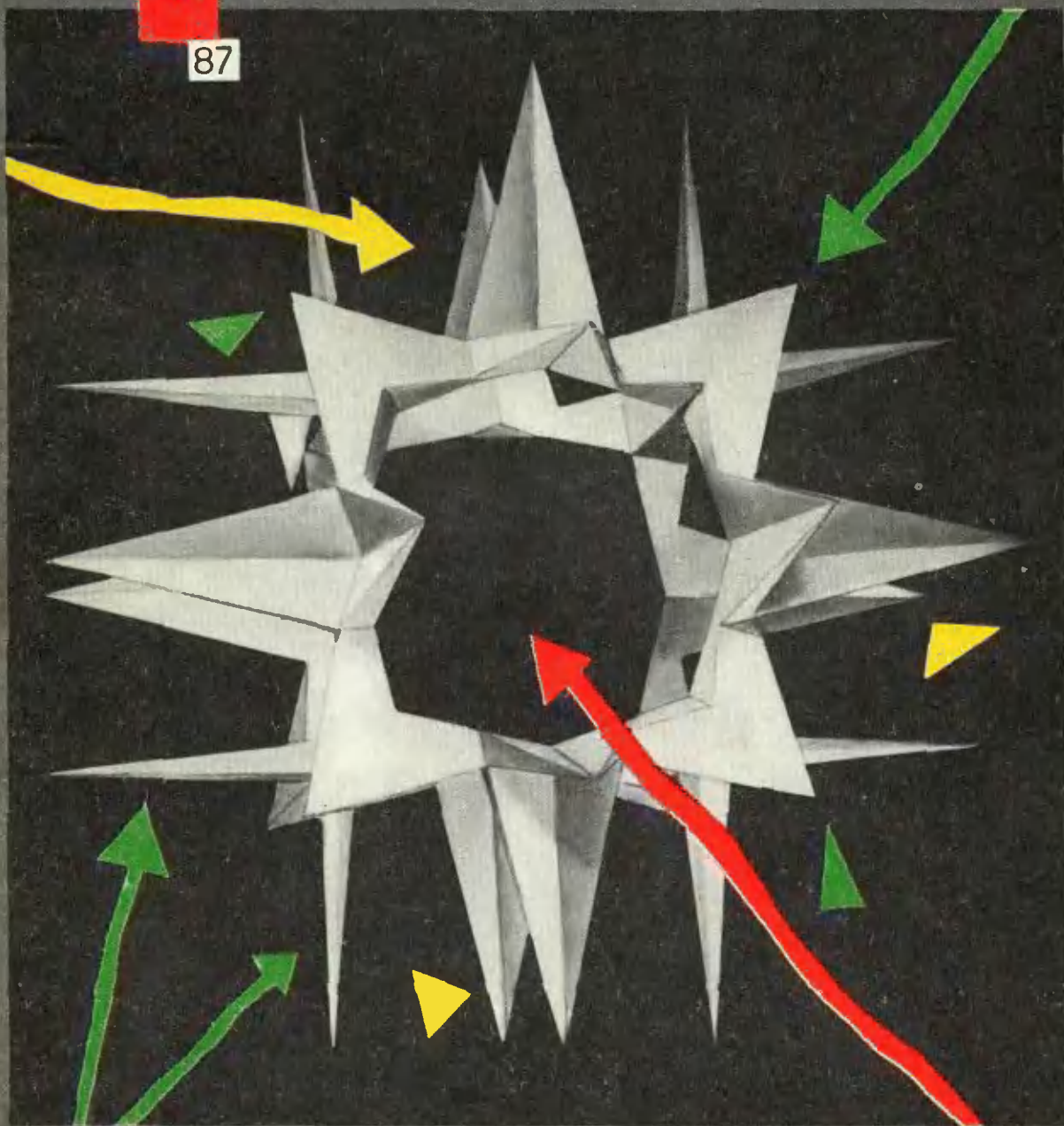
ISSN 0130 - 2221

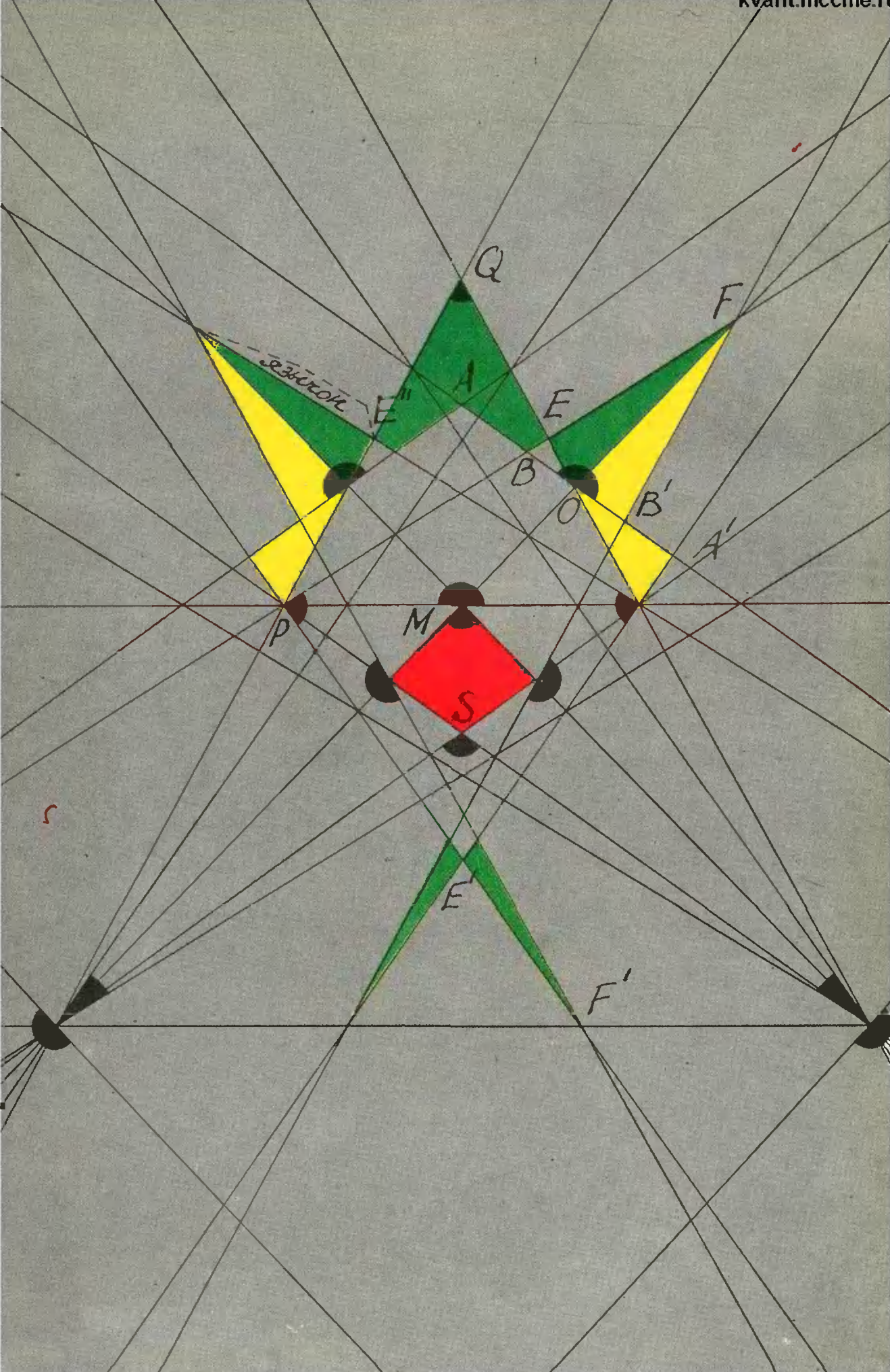
Квант

Научно-популярный
физико-математический
журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

87





Основан в 1970 году

Научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция физико-
математической литературы

В номере:

- 2 А. И. Кострикин. Простые группы
8 А. Б. Сосинский. Конечные группы
13 С. Г. Семенчинский. Эффект Холла: год 1879 — год 1980
19 Д. Г. Крутогин. Путешествие по микрокомпьютеру

Задачник «Кванта»

- 22 Задачи М1026 — М1030; Ф1038 — Ф1042
24 Решения задач М1006 — М1009; Ф1017 — Ф1022
32 Трехзначные числа и орграфы

«Квант» для младших школьников

- 37 Задачи
38 Н. А. Родина. О чем могут рассказать цифры

Школа в «Кванте»

- 41 Математика 8, 9, 10
Лаборатория «Кванта»
43 М. П. Бронштейн. Изобретатели радиотелеграфа

Практикум абитуриента

- 48 В. Е. Белонучкин. Маневрирование в космосе

- 52 Варианты вступительных экзаменов

- 57 Ответы, указания, решения

«Квант» улыбается (18, 51)

Наша обложка (36)

Смесь (36)

Шахматная страничка

Парадоксальные находки ЭВМ (3-я с. обложки)

Наша обложка



На первой странице обложки показан многогранник, построенный по эпилору, приведенному на второй странице обложки. О том, как построить такой многогранник, рассказано на с. 36.

ПРОСТЫЕ ГРУППЫ

Член-корреспондент АН СССР
А. И. КОСТРИКИН

В конце 1980 г. математический и околomатематический мир облетела новость первостепенной важности: конечные простые группы классифицированы! На обложку одного математического журнала был вынесен список 26 известных «спорадических» групп. Этот список, воспроизводимый ниже в чуть измененном виде (см. таблицу), кочевал на протяжении пяти лет по алгебраическим конференциям и сам по себе не был новостью. Но — и это самое существенное — под списком помещено яркое примечание: ...«классификация конечных простых групп завершена; других спорадических групп нет». На обложке слово «известных» перед списком было красноречиво зачеркнуто.

Непосвященному читателю значение таинственной таблицы чисел, сопровождаемой не менее таинственными терминами, вряд ли о чем говорит. Более того, специализация наук такова, что для большинства математиков кое-какие разъяснения тоже необходимы.

Время от времени в каждой области человеческого знания происходят кардинальные изменения. В нашем случае специалисты склонны говорить о сенсации века. О полной драматических поворотов истории этого события — наш рассказ.

Галуа и группа уравнения

Все началось более 150 лет тому назад. Студент-первокурсник парижской высшей Нормальной школы Эварист Галуа решает едва ли не важнейшую математическую задачу своего времени: он дает полный ответ на вопрос о разрешимости в радикалах алгебраических уравнений любых степеней*). Гениальность Галуа проявляется

*) Именно, с каждым алгебраическим уравнением Галуа связывает некоторый объект — «группу уравнения»; уравнение оказывается разрешимым в радикалах (т. е. его корни выражаются через коэффициенты уравнения с помощью арифметических операций и извлечения корней) в том и только в том случае, когда группа уравнения обладает некоторым просто проверяемым свойством. Подробнее об этом см. «Квант», 1986, № 12, с. 2.

ся не только в неожиданном и исчерпывающем решении древней проблемы: он переносит центр тяжести исходной задачи на методы ее решения. А этим методам, связанным с понятием *группы* данного уравнения, суждено проникнуть во все без исключения разделы математики, в физику, химию, кристаллографию...

Но злой рок преследует работы Галуа. В Парижской академии наук дважды теряют его рукописи. В очередном варианте работы не могут разобратся рецензенты-академики. А сразу после смерти двадцатилетнего юноши на дуэли (обстоятельства дуэли сродни политическому убийству) чудом уцелевший окончательный вариант его работы ... не принимает к публикации ни один научный журнал.

Клейн и Ли: группы в геометрии и в анализе

Лишь 35 лет спустя, когда яркий образ студента-республиканца и математика стал постепенно исчезать из человеческой памяти, идеи Галуа получили признание. Сначала, в 1846 году, Ж. Лиувилль опубликовал его работу в своем научном журнале. Работа, однако, была оценена по достоинству не сразу. Первым, видимо, ее значение понял французский алгебраист Камиль Жордан. Но широкому проникновению идей теории групп в математическую науку мы в первую очередь обязаны двум начинающим математикам, его ученикам: Феликсу Клейну и Софусу Ли.

И здесь не обошлось без политики. Начавшаяся в 1870 году франко-прусская война привела к гибели почти всего тиража книги Жордана о теории Галуа и на долгие годы разъединила француза Жордана и немца Клейна. А ни в чем не повинный норвежец Ли и вовсе оказался за решеткой: подталкиваемые волной шовинистического угара, набравшей силу с первых дней войны 1870 г., не в меру бдительные французские граждане определили, что светловолосый голу-

боглазый красавец, сосредоточенно заносивший таинственные знаки в небольшой блокнот и говорящий с акцентом, конечно же — немецкий шпион.

В тюрьме недалеко от Парижа созревают глубокие идеи Софуса Ли о применении теории групп в анализе, в частности — в дифференциальных уравнениях. Зарождаются основы теории, плодотворно развивающейся и по сей день, — *теории групп Ли*. А у себя на родине Клейн обдумывает роль групп в геометрии. Роль эта оказывается определяющей для самих оснований геометрической науки, и Клейн разъясняет это с блеском в своей знаменитой *эрлангенской программе*.*)

Задача классификации конечных групп

Группы выступают не только в качестве метода в различных областях математики, но постепенно становятся самостоятельным предметом изуче-

ния. Особенно это касается конечных групп, изучение которых идет еще от самого Галуа. Математиками XIX столетия ставилась задача их классификации: предьявить полный список, без повторов, всех конечных групп.**) Насколько это трудно, свидетельствует тот факт, что настойчивые усилия по составлению каталогов конечных групп заводят в тупик даже при сравнительно небольших порядках групп (порядок $|G|$ — число элементов в группе G). Например, списка групп порядка $1024=2^{10}$ до сих пор нет.

Поэтому задачу классификации стоит ослабить. Подобно тому, как белки составлены из аминокислот, химические соединения состоят из атомов или натуральные числа являются произведением простых, конечные группы тоже строятся (хотя и весьма сложным образом) из элементарных составляющих: именно, из так назы-

*) Для понимания математической части дальнейшего текста достаточно знать, что такое конечная группа (в частности, циклическая группа и группа перестановок) и гомоморфизм. Об этом написано на с. 9, 11.

*) См. «Квант», 1975, № 12, с. 6.

Спорадические конечные простые группы			
Группа	Год открытия	Порядок группы	Авторы
M_{11}	1861	$2^4 3^2 5 \cdot 11 = 7920$	{ Матье
M_{12}	1861	$2^6 3^3 5 \cdot 11 = 95040$	
M_{22}	1873	$2^3 3^2 5 \cdot 11 = 443\,520$	
M_{23}	1873	$2^3 3^2 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 = 10\,200\,960$	
M_{24}	1873	$2^{10} 3^3 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 = 244\,823\,040$	Янко Хигман, Симс Холл, Уелс Маклафлин Судзуки Хигман, Мак-Кей
J_1	1965	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 = 175\,560$	
HS	1967	$2^3 3^2 5^2 7 \cdot 11 = 44\,353\,000$	
$J_2 = HJ$	1967	$2^3 3^5 7 = 604\,800$	
Mc	1968	$2^3 3^4 5^7 \cdot 11 = 898\,128\,000$	
Sz	1968	$2^{11} 3^7 5^2 7 \cdot 11 \cdot 13$	
$J_3 = HJM$	1968	$2^7 3^5 \cdot 17 \cdot 19 = 50\,232\,960$	
Co_1	1968	$2^{21} 3^9 5^4 7^2 11 \cdot 13 \cdot 23$	
Co_2	1968	$2^{18} 3^6 5^3 7 \cdot 11 \cdot 23$	
Co_3	1968	$2^{10} 3^7 5^3 7 \cdot 11 \cdot 23$	
$He = HNM$	1968	$2^{10} 3^3 5^2 7^3 \cdot 17$	Хелд, Хигман и др.
F_{22}	1969	$2^{17} 3^9 5^2 7 \cdot 11 \cdot 13$	
F_{23}	1969	$2^{18} 3^{13} 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$	
F_{24}	1969	$2^{21} 3^{16} 5^2 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$	
$Ly = LyS$	1970	$2^8 3^7 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$	{ Фишер
Ru	1972	$2^{14} 3^3 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$	
$O = O'NS$	1973	$2^9 3^4 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$	
$F_2 = B$	1973	$2^4 3^{13} 5^6 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \times$ $\times 31 \cdot 47$	Лионс, Симс Рудвалнс, Конвей и др. О'Нэн, Симс Фишер, Симс и др.
$F_3 = E$	1974	$2^{15} 3^{10} 5^3 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$	
$F_4 = O$	1974	$2^{14} 3^6 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$	
$M = F_1$	1974	$2^{46} 3^{20} 5^9 7^6 11^2 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \times$ $\times 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$	
J_4	1975	$2^{21} 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \times$ $\times 37 \cdot 43$	Конвей, Янко и др.

ваемых *простых групп*. И поэтому первоочередной становится *задача классификации конечных простых групп*.

Известно, что любая конечная группа является подгруппой одной из групп перестановок S_n , $n=1, 2, \dots$ (см. с. 9 этого номера). Поэтому поиск простых конечных групп можно начать с исследования подгрупп группы S_n .

Но что же такое простая группа? Назовем гомоморфизм $\alpha: G \rightarrow H$ *упрощающим*, если в его образе $\alpha(G) \subset H$ более одного элемента, но меньше, чем в G . Конечная группа G называется *простой*, если у нее нет упрощающих гомоморфизмов.

Самый очевидный пример простой группы — это *циклическая группа* Z_p любого простого порядка p :

$$Z_p = \{z, z^2, \dots, z^p = e | z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & (p-1) & p \\ 2 & 3 & \dots & p & 1 \end{pmatrix}\} \subset S_p.$$

Действительно, если бы существовал упрощающий гомоморфизм $\alpha: Z_p \rightarrow H$, то один из не равных e элементов $w \in Z_p$ перешел бы в единицу, но тогда и любой элемент из Z_p перешел бы в единицу (подумайте, почему) и $\alpha(Z_p) = \{e\}$ — противоречие! Простота p здесь существенна, ибо группу Z_m при составном m можно гомоморфно отобразить на Z_k , где k — делитель m .

Простейшие простые группы:
две алгебраические серии

Простых конечных групп Z_p бесконечно много (так как простых чисел бесконечно много), так что группы Z_p образуют (бесконечную) *серию* конечных простых групп. Имеется еще одна легко описываемая серия простых групп, так называемые *знакопеременные группы* A_n , $n=1, 2, \dots$, тоже

алгебраического происхождения. Опишем эти группы.

Рассмотрим группу S_n . Ее элемент $t \in S_n$ называется *транспозицией*, если он оставляет на месте все элементы $1, 2, \dots, n$ кроме двух, которые он переставляет местами. Примеры:

$$S_5 \ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \times & & & \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, S_4 \ni \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \times & & \\ & & \times & \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что любая перестановка может быть представлена в виде композиции транспозиций; перестановка $\sigma \in S_n$, которую можно представить в виде композиции четного числа транспозиций, называется *четной*; множество всех четных перестановок очевидно образует подгруппу группы S_n , которая и называется *знакопере-*

Cig monster

$2^6 \cdot 3^{20} \cdot 5^9$
 $7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17$
 $19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$
 $41 \cdot 47 \cdot 59$
 71

женной группой n -й степени и обозначается через A_n . Можно доказать, что в группе A_n имеется $n!/2$ элементов и что при $n > 4$ группа A_n — простая. Таким образом, *знакопеременные группы*

$$A_n, n = 5, 6, 7, \dots,$$

составляют вторую серию конечных простых групп.

Шестнадцать геометрических серий

Конечные простые группы не исчерпываются сериями Z_n и A_n . Имеется еще 16 других серий конечных простых групп. Они устроены уже более сложно. Группы этих серий, как правило, — конечные подгруппы «групп Ли». Можно сказать, что они скорей геометрической, чем алгебраической природы. В их открытии участвовало много математиков. Основополагающую роль сыграли работы француза К. Шевалле, выполненные вскоре после войны и завершенные в пятидесятые годы. Бесконечные геометрические серии охватывают основную массу типичных простых групп и допускают много разных описаний, приспособленных для тех или иных целей.

Спорадические простые группы

Задолго до того как задача выявления всех 18 бесконечных серий конечных простых групп уступила перед натиском исследователей, было известно о существовании изолированных простых групп, названных *спорадическими*. До 1965 г. их было всего пять, и все они были связаны с именем французского математика-аналитика Э. Матье. Слово «группа» не фигурировало в названиях его работ периода 1861—1873 гг., где были описаны функции и комбинаторные структуры в пространствах размерностей 12 и 24 с очень специальной и красивой симметрией. Управляют этой симметрией пять групп, носящих теперь название *групп Матье* (см. таблицу на с. 3). Интересно, что в наше время группы

Матье послужили основой для конструирования высокоэффективных корректирующих кодов.

В целом же пять простых групп Матье простояли особняком, полузабытые, около столетия, пока в 1965 г. З. Янко из Гейдельберга не нашел еще одну простую группу, тоже не укладывающуюся ни в какую бесконечную серию. Но найдена она была не случайным образом, а в ходе решения одной специальной классификационной задачи. Подобными задачами занимались десятки других математиков. Успех З. Янко, открывшего впоследствии еще три спорадические группы, послужил своего рода катализатором. Как грибы после дождя, для постороннего наблюдателя — без всякой причины, непонятно откуда, с помощью ЭВМ и без, стали появляться все новые спорадические простые группы. Имена удачливых «грибников», в сокращенном виде повторяемые названиями самих «грибов» — спорадических групп, приведены в уже упомянутой таблице, второй столбец которой указывает на год находки. Этот год не всегда совпадает с годом фактического построения группы.

«Большой монстр» и «бэби монстр»

Наибольшая из спорадических групп F_1 , или M , заслуживает отдельного рассказа. Ее существование впервые

Baby monster

24. 3¹³ 5⁶ 7²
11 · 13 · 17 · 19 ·
23 · 31 · 47

было предсказано независимо Б. Фишером, Дж. Томпсоном и Р. Гриссом еще в 1974 г. Строгую конструкцию этой группы лишь в 1981 г. предложил Грисс, основываясь на некотором семействе поворотов в пространстве размерности 196883 (!) Число элементов этой — с позволения сказать — простой группы равно $808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\,757\,005\,754\,368 \cdot 10^9$ (примерно 10^{54}). Неудивительно, что математики окрестили ее «big monster» («большой монстр») и долго подбирались к доказательству ее существования. Примечательно, что Грисс обошелся без помощи ЭВМ и тем самым избавил от первоначальных компьютерных родов многие другие спорадические группы, оказавшиеся «детенышами» (т. е. подгруппами) монстра F_1 . К ним относится, в частности, группа F_2 , известная под названием «baby monster» и ранее реализованная перестановками в S_n при n , близком к $14 \cdot 10^9$ (!). С течением времени были обнаружены поразительные связи монстра с классическими разделами математики (такими, как теория чисел) и получили широкое распространение «фантазии на тему монстра», не исключающие далеких параллелей между симметрией типа F_1 и новейшими физическими теориями.

Теория и интуиция

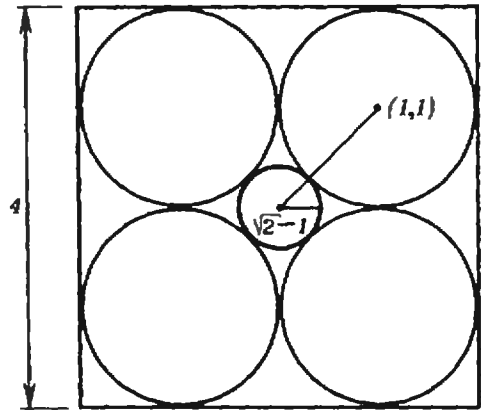
Хотя ажиотаж вокруг упомянутых выше конструкций возник немалый, не нужно думать, что поиск рекордных спорадических групп превратился в бессмысленное спортивное соревнование, сродни популярным в США конкурсам по количеству студентов, поместившихся в телефонную будку. Построение спорадических групп проходило на пути глубочайшей интуиции и разумных догадок, предписываемых классификационной теорией, которая была развита на протяжении 25 лет целым рядом крупных математиков. В самом начале этого удивительного периода в истории алгебры стоят Дж. Томпсон и У. Фейт, доказавшие, что *всякая простая группа нечетного порядка (т. е. с нечетным числом элементов) должна быть циклической группой Z_p для некоторого простого p* . Это доказательство заняло 250 страниц сухого журнального тек-

ста (!), но зато оно содержало в зародыше всю последующую теорию.

Помимо общих теоретико-групповых соображений, конструирование каждой отдельной спорадической группы основывалось на глубокой идее из других разделов математики. Так, в работах Дж. Конвея, открывшего три спорадические группы, используются одновременно и теория кодирования, и замечательные результаты о плотной упаковке сфер в многомерной геометрии. А тут обычная трехмерная интуиция часто отказывает.

Почувствительный пример *)

Рассмотрим квадрат со стороной длиной 4 с центром в начале координат плоскости R^2 . В его четыре угла впишем четыре окружности радиуса 1, так как показано на рисунке. Каж-



дая окружность касается двух других, и вся конфигурация симметрична относительно начала координат. Добавим теперь окружность с центром в начале координат, касающуюся четырех вписанных внешним образом. Точка $(1; 1)$ — центр окружности в правом верхнем углу. Расстояние между центром внутренней окружности и центром единичной окружности в правом верхнем углу равно $\sqrt{2}$. Следовательно, радиус центральной окружности должен быть $\sqrt{2} - 1$.

Перейдем теперь в трехмерное пространство R^3 и повторим процесс, начав с куба ребром 4 с центром в начале координат и поместив в его 8 углов сферы радиуса 1. Каждая из сфер касается трех других, а все 8 симметричны относительно начала. Добавим теперь сферу с центром в начале координат, касающуюся восьмью вписанных внешним образом. Ее радиус легко вычислить, снова обратив внимание на центр $(1; 1; 1)$ сферы в правом верхнем углу куба, который находится на расстоянии $\sqrt{3}$ от начала. Поскольку внутренняя сфера касается этой единичной сферы, ее радиус должен быть $\sqrt{3} - 1$.

Продолжим в том же духе! В пространстве R^3 рассмотрим n -мерный куб с ребром 4 с центром в начале координат и поместим в его

*) По Дж. Ивкгу (*The Mathematical Intelligencer*, 1980, 3, № 1, с. 45—46).

2^n углов единичные сферы*). Каждая касается n других, и все они симметричны относительно начала. Поместим сферу с центром в начале координат, касающуюся внешним образом n вписанных. Чему равен ее радиус? То же рассуждение показывает, что он должен быть $\sqrt{n-1}$.

Например, в R^{10} радиус внутренней сферы равен $\sqrt{10-1} \approx 2,16$. Но ... минуточку! Что случилось? «Внутренняя» сфера выглядит как куба!

Этот поразительный факт противоречит нашей интуиции. Но он верен. И дает некоторое представление о неожиданностях, поджидающих исследователей теории простых групп.

Вместо заключения: решена ли проблема классификации конечных простых групп?

Так или иначе, было найдено всего 26 спорадических групп. Но все ли? Какова их роль в системе всех конечных простых групп? Стоят ли они особняком или образуют начало новой серии? Или начало нескольких серий? На все эти вопросы могла дать ответ только глубоко развитая теория. Такая теория была создана международным коллективом математиков. После многолетних настойчивых усилий специалисты постепенно пришли к выводу, что *весь список конечных простых групп должен состоять из 18 известных серий и еще 26 отдельно стоящих, и тоже известных, спорадических групп.*

Вводные слова нашего рассказа, основанные на сообщениях (и даже рекламных интервью в газетах) двух ведущих специалистов М. Ашбахера и Д. Горенштейна, категоричны и оптимистичны. Но тот же Ашбахер несколько раньше писал: «Я верю, что существует не слишком много групп, которые ожидают своего открытия. Однако если бы я держал пари, у меня не нашлось бы дополнительных аргументов». Все дело в том, что текста доказательства как такового нет, а многие его куски попросту аккуратно не записаны. Рассчитывать на появление связного текста в ближайшие годы не приходится. Арифметической суммой из 5 или 15 тысяч журнальных страниц, написанных почти за три десятилетия сотнями специалистов во многих странах мира, можно пользоваться лишь как черновым материалом, содержащим множество

неточностей. Ими было недосуг заняться, а между тем из каждой дырки, по мнению пессимистов, готова выскочить спорадическая группа. Как пишет Дж. Конвей, начинается длительный период «ревизионизма», идейного пересмотра и упрощения доказательств, после завершения которого потомкам останутся ... несколько толстых, тщательно подготовленных томов.

В последние годы начато издание трехтомного сочинения Д. Горенштейна, содержащего детальный набросок (всего-то!) в принципе осуществленной программы, которая привела к впечатляющим результатам и коренным образом перестроила теорию конечных групп. Наиболее интересный вводный том издан в переводе на русский язык.*)

Итак, драматическая история простых групп еще не окончена. Скорее всего, таинственные тысячи страниц сплошного, тщательно подготовленного текста никто не напишет, да и достоверность их в любом случае вышла бы за рамки обычных математических стандартов. Сила математики — в ее единстве, и кто знает, на каком пути и какими средствами будут даны убедительные, легко проверяемые аргументы в пользу с таким трудом полученных выводов. Проблема заключается не только в перечислении всех конечных простых групп, но и в том, чтобы развить удобный сопутствующий аппарат, который имел бы общематематическое значение. Первые обнадеживающие связи с конечной геометрией и с теорией комплексных групп Ли уже обнаружены. Во всяком случае, конечные простые группы, о которых мы так много узнали в XX веке, продолжают оставаться чрезвычайно интересной и интригующей областью современной алгебры, ждущей молодых исследователей и свежих идей.

*) О том, что такое n -мерный куб, можно прочитать в «Кванте» 1986, № 6, с. 7.

*) Горенштейн Д. *Конечные простые группы. Введение в их классификацию.* М.: Мир, 1985 г.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

Кандидат физико-математических наук
А. Б. СОСИНСКИЙ

Понятие группы, в частности, конечной группы — одно из важнейших понятий математики. И вместе с тем одно из самых распространенных и наиболее полезных для приложений.

Без конечных групп нельзя, например, указать, какие алгебраические уравнения разрешимы в радикалах, а какие — нет, описать, как устроены кристаллы, создавать коды, исправляющие ошибки. Об этом, однако, мы здесь рассказывать не будем, а ограничимся простейшими примерами конечных групп.

Иллюстрации: группы действий

Непустой набор некоторых действий, которые можно последовательно выполнять, называют *группой*, если в этом наборе для каждого действия обязательно присутствует обратное к нему, а результат последовательного выполнения любых двух действий тоже является действием из этого набора.

В качестве иллюстрации рассмотрим действия солдата, выполняющего команды строевой подготовки (рис. 1). Эти



Рис. 1.

четыре действия составляют группу $R(\square) = \{С, П, Л, К; \circ\}$. Так, результат последовательного выполнения действий П и К (направо и кругом) будет совпадать с результатом действия Л (налево); это записывается в виде равенства $К \circ П = Л$. Точно так же $Л \circ Л = П \circ П = К$, $Л \circ П = П \circ Л = К \circ К = С$. Остальные соотношения в группе можно извлечь из ее *таблицы умножения*, показанной на рисунке 1. Особую роль играет здесь действие С, которое можно назвать «ничегонеделание». (Такое действие обязательно есть в любой группе: мы его получим, выполнив произвольное действие, а затем обратное к нему.) У нас действия П и Л обратны друг к другу, действие К — обратно к самому себе, и т. д.

Рассмотрим другую группу, тоже состоящую из поворотов. Именно — группу поворотов пятиконечной звезды $\Pi(\star)$

относительно ее центра (рис. 2). «Ничегонеделание» (в этом случае — поворот на 0°) обозначено через R_0 , а остальные повороты (на $72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$) — через R_1, R_2, R_3, R_4 . Здесь $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2 = R_3$,



Рис. 2.

$R_3 \circ R_3 = R_1, R_1 \circ R_4 = R_0$ (последнее означает, что R_4 обратно к R_1) и т. д. Набор

$$\Pi(\star) = \{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4; \circ\}$$

образует группу.

Рассмотрим, наконец, «группу надевания носка» (рис. 3), состоящую из следующих действий:

О = «Оставь, как есть»,

П = «Сними и надень на другую ногу»,

В = «Сними, выверни и надень на ту же ногу»,

П' = «Сними, выверни и надень на другую ногу».

Здесь ничегонеделание — это О, далее $П \circ В = П', П \circ П = В \circ В = П' \circ П' = О, П' \circ П = В$ и т. д.

Снова получается группа $H = \{О, П, В, П'; \circ\}$, состоящая, как и $R(\square)$, из четырех действий. Группы H и $R(\square)$, однако, принципиально разные: у них таблицы умножения отличаются не только обозначением элементов, но и своим строением. Так, по диагонали таблицы умножения H стоит одно и то же действие О, в то время как на этой диагонали у $R(\square)$ стоят разные элементы.

Подозреваю, что у самых серьезных читателей нарастает возмущение: какая-то там строевая подготовка, надевание носков — что за глупости такие, не научно это все! Спешу возразить: научно, даже очень. Знаете, как на самом деле называется набор действий солдата? *Циклическая группа 4-го порядка или группа вычетов по модулю 4*. А наше «надевание носков» — *группа Клейна*. Повороты же звезды — это одна из так называемых *простых конечных групп*, о которых в этом номере «Кванта» написана целая статья (см. с. 2), а в других журналах — тысячи статей.



Рис. 3.

Группы симметрий геометрических фигур

С каждой геометрической фигурой F можно связать вполне определенную группу $S(F)$, называемую *группой самосовмещений* или *группой симметрий* этой фигуры: по определению, ее набор действий состоит из всех перемещений, совмещающих фигуру F саму с собой. Например, $S(\square)$ состоит из 8 действий: четырех поворотов квадрата (относительно его центра, в том числе на 0°) и четырех отражений (относительно двух диагоналей и двух «средних линий» квадрата).

В группе $S(\triangle)$ самосовмещений правильного треугольника — 6 действий, в группе $S(\square)$ прямоугольника — 4. Таблица умножения группы $S(\square)$ изображена на рисунке 4.

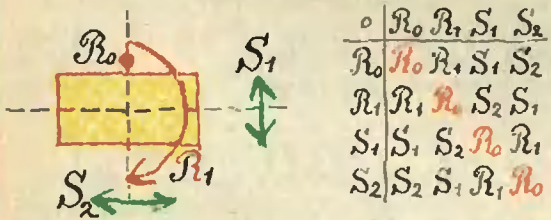


Рис. 4.

Если сравнить таблицу умножения для группы $S(\square)$ с таблицей умножения для группы H , можно заметить, что эти таблицы отличаются только обозначением действий. Если переименовать действия так:

$$O \rightarrow R_0, \quad \Pi \rightarrow R_1, \quad B \rightarrow S_1, \quad \Pi' \rightarrow S_2,$$

то одна таблица превратится в другую. Группы с совпадающими (при подходящем переименовании действий) таблицами умножения называются *изоморфными*. Мы сейчас установили, что группы $S(\square)$ и H изоморфны (их обычно в честь Ф. Клейна обозначают буквой K), а ранее заметили, что эти группы не изоморфны группе $R(\square)$ действий солдата.

Читатель, возможно, догадался, почему мы обозначили группу действий солдата через $R(\square)$: она изоморфна *группе поворотов квадрата* относительно его центра на углы $2k\pi/4$, $k=0, 1, 2, 3$. Эта группа — частный случай (при $n=4$) *группы поворотов правильного n-угольника* (относительно его центра), которая

еще называется *циклической группой n-го порядка* и обычно обозначается через Z_n .

В алгебре группы изучают «с точностью до изоморфизма», т. е. не различают изоморфные группы: алгебраисту не интересно, как называется группа и ее действия, ему важно знать структуру таблицы умножения группы.

Группы перестановок и их подгруппы

Рассмотрим конечный набор предметов — скажем, пять. Обозначим предметы цифрами, а весь набор через $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Перестановкой* $i \in S_5$ этих предметов называется любое взаимно однозначное отображение $i: N_5 \rightarrow N_5$, т. е., попросту говоря, перенумерация предметов. *Новый номер $i(k)$ k-го предмета* мы будем обозначать через i_k . Для наглядности перестановку i обычно представляют в виде таблицы:

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix}.$$

Это позволяет легко находить произведение перестановок i и j . Например, если

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

то $k(3) = (i \circ j)(3) = i(j(3)) = i(5) = 2$, так что

$$i \circ j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(обратите внимание, что при $k=i \circ j$ сначала выполняется j , а потом i , причем это не все равно: $i \circ j \neq j \circ i$ — проверьте!) Также легко находить обратные перестановки («чтением снизу вверх»):

$$i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что S_5 образует группу, состоящую из $5! = 120$ перестановок. Эта группа называется *группой перестановок пяти предметов* или *симметрической группой пятой степени*. Совершенно аналогично определяется *симметрическая группа S_n n-й степени* для любого натурального n .

Группы перестановок интересны в частности тем, что содержат много *подгрупп* (т. е. частей, которые сами являются группами). В группах перестановок содержатся подгруппы, изоморфные всем нашим ранее рассмотренным группам. Заинтере-

$$\text{Группа } \mathbb{Z}_{12} = \{ \mathbb{R}^{2\pi/12} = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3, \dots, \mathbb{Z}^{10}, \mathbb{Z}^{11}, \mathbb{Z}^{12} = e \}$$

- 1 элемент II порядка : $\{\mathbb{Z}^6, e\} \cong \mathbb{Z}_2$
- 2 элемента III порядка : $\{\mathbb{Z}^4, \mathbb{Z}^8, e\} \cong \mathbb{Z}_3$
- 2 элемента IV пор. : $\{\mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}^6, \mathbb{Z}^9, e\} \cong \mathbb{Z}_4$
- 2 элемента VI пор. : $\{\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^4, \mathbb{Z}^6, \mathbb{Z}^8, \mathbb{Z}^{10}, e\} \cong \mathbb{Z}_6$
- 4 элемента XII пор. : $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^5, \mathbb{Z}^7, \mathbb{Z}^{11}$

$$\text{Группа } S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} : \text{всего } 4! = 24 \text{ перест.} \right\}$$

- 1 элем. II пор. $\{(12), (13), (14), (23), (24), (34), e\} \cong \mathbb{Z}_2$
- $A_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cong \mathbb{Z}_2$
- 3 элем. III пор. $\{(123), (124), (134), (234), (132), (142), (143), (243), e\} \cong \mathbb{Z}_3$
- 6 элем. IV пор. $\{(2341), (3412), (4123), e\} \cong \mathbb{Z}_4$
- $\{(2431), (4312), (3124), e\} \cong \mathbb{Z}_4$
- $\{(12), (34), (12), (34), e\} \cong K$ (гр. Клейна)
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} : i_n \in \{1, 2, 3\} \right\} \cong S_3 \cong S(\Delta)$

$$\text{Группа } S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix} : 5! = 120 \text{ элементов} \right\}$$

- Есть элементы порядков II, III, IV, V, VI;
- пример элемента порядка VI: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
- Есть подгруппы, изоморфные $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6$.
- Есть подгруппы, изоморфные S_3, S_4 , и K .
- Есть подгруппы, изом. A_4 (12^{го} порядка).
- Есть единственная подгруппа A_5 порядка 60.

сованный читатель может в этом убедиться, проштудировав рисунок 5.

Рассматривая этот рисунок, читатель наверняка обратит внимание на красивые числовые закономерности, которые на нем проявляются. В частности, если назвать *порядком группы* число ее элементов, а *порядком элемента* g — наименьшее число k , для которого $g^k = e$, то можно сформулировать следующую теорему.

Теорема Лагранжа. *Порядок любой подгруппы, также как порядок любого элемента группы, является делителем порядка группы.*

Доказательство (не очень сложное) мы здесь не приводим.

Взаимоотношения групп: гомоморфизмы

Группы изучают не каждую саму по себе, а в их взаимодействии. Назовем *гомоморфизмом* $\gamma: G \rightarrow H$ группы G в группу H всякое отображение, ставящее в соответствие каждому действию g из G вполне определенное действие $h = \gamma(g)$ из H , если для любых g и g' из G выполняется

$$\gamma(g \circ g') = \gamma(g) \circ \gamma(g').$$

(Коротко говорят так: гомоморфизм — это отображение, сохраняющее операцию \circ .)

Бестолковый солдат, который игнорирует команды «кругом» и «смирно», а в ответ на команды «налево» и «направо» поворачивается кругом, тем самым задает гомоморфизм

$$\beta: R(\square) \rightarrow Z_2 = \{C, K; \circ\}$$

по правилу $\beta(C) = \beta(K) = C$, $\beta(\Pi) = \beta(\text{Л}) = K$. Задумавшийся солдат, не реагирующий ни на какую команду, определяет *тривиальный гомоморфизм* в *тривиальную группу*:

$$\alpha: R(\square) \rightarrow \{e\}.$$

Нетривиальные гомоморфизмы не всегда существуют. Например, любой гомоморфизм $\alpha: Z_5 \rightarrow Z_2$ или $\beta: Z_5 \rightarrow Z_6$ — тривиален.

Абстрактные группы и теорема Кэли

До сих пор мы рассматривали вполне конкретные группы, состоящие из действий — поворотов, симметрий и других

Рис. 5. Подгруппы циклической группы Z_{12} и групп перестановок S_4 и S_5 . Красным выделены циклические подгруппы Z_k , зеленым — так называемые знакопеременные группы (A_4 и A_5). В описании групп S_n цифры в круглых скобках обозначают циклы, т. е. перестановки, меняющие цифры по кругу, например $(123) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ (т. е. } 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 4) \text{ или}$$

$$(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, (13)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

преобразований. Но к понятию группы можно подходить с более формальных, общих позиций; группы тогда считаются состоящими из элементов произвольной природы, а умножение — тоже произвольная операция (не обязательно композиция действий). Получается следующее аксиоматическое определение. Множество G элементов произвольной природы, в котором задана *бинарная операция* $*$ (состоящая в том, что каждой паре элементов $a, b \in G$ ставится в соответствие их *произведение* $c = a * b$, тоже являющееся элементом G) называется (*абстрактной*) *группой*, если

1°. операция $*$ *ассоциативна*, т. е. для любых $a, b, c \in G$

$$a * (b * c) = (a * b) * c;$$

2°. в G имеется единственный *нейтральный элемент* $e \in G$, для которого

$$a * e = e * a = a$$

при любом $a \in G$;

3°. для каждого $a \in G$ существует единственный *обратный элемент* $a^{-1} \in G$ такой, что

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e.$$

Это общее определение позволяет сразу получить много новых примеров групп. Так, целые числа Z образуют группу (в качестве $*$ берем операцию $+$, нейтральный элемент — это 0, а обратным к $a \in Z$ служит $(-a)$); ненулевые действительные числа $R \setminus \{0\}$ образуют группу относительно умножения и т. д.

Однако по существу абстрактный подход ничего нового не дает: оказывается, что любая абстрактная группа изоморфна некоторой группе действий. Мы докажем это здесь лишь для конечных групп.

Теорема Кэли. *Всякая конечная группа G изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок S_n .*

Доказательство. Пусть $G = \{e = g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Каждому элементу $g_k \in G$ поставим в соответствие перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

где i_1 — номер элемента $g_k * g_1 = g_k * e$ (на самом деле $i_1 = k$), i_2 — номер элемента $g_k * g_2, \dots, i_n$ — номер элемента $g_k * g_n$. Тогда все i_s различны (т. е. действительно получается перестановка) и соответствие

$$g_k \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

задает гомоморфизм $h: G \rightarrow S_n$ (это следует из ассоциативности), притом h отображает G взаимно однозначно на подгруппу $h(G) \subset S_n$ (это следует из аксиом 2° и 3°).

$$\frac{h}{2e^2}$$

$$\frac{h}{4e^2}$$

$$\frac{h}{6e^2}$$



ЭФФЕКТ ХОЛЛА: ГОД 1879 — ГОД 1980

Кандидат физико-математических наук
С. Г. СЕМЕНЧИНСКИЙ

Нобелевская премия по физике в 1985 году была присуждена ученому из ФРГ профессору Клаусу фон Клитцингу за цикл работ по физике полупроводников. Основным результатом этих работ было открытие квантового эффекта Холла — эффекта, в котором оказались «замешанными» классический эффект Холла, известный уже сто лет, квантовые законы поведения электронных систем, сформулированные в середине XX века, необычные свойства «двумерных» структур, впервые обнаруженные в 1966 году, и МОП-транзисторы, создание которых относится к пятидесятым годам. Открытие К. фон Клитцинга заинтересовало физиков самых различных специальностей, поскольку оно открыло новые возможности измерения фундаментальных констант и создания нового эталона сопротивления.

В чем суть этого открытия? Чтобы понять это, начнем с открытия столетней давности.

Классический эффект Холла

В 1879 году американский физик Эдвин Холл обнаружил, что если проводник с током поместить в магнитное поле, перпендикулярное току, то в проводнике возникнет электростатическое поле, направленное перпендикулярно магнитному полю и току (рисунок 1).

Напряженность этого поля мы можем рассчитать. Ток в проводнике — это направленное движение электронов. Величина тока и средняя скорость этого движения связаны соотношением $v = I/(nes)$, где n — концентрация электронов в проводнике, e — заряд электрона, s — площадь сечения проводника. Поместим прямоугольный образец, по которому течет ток I , в магнитное поле с индукцией B (см. рисунок 1). На движущиеся электроны со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $F = evB$, направленная перпендикулярно \vec{v} и B .

В результате действия этой силы электроны будут смещаться к боковой грани образца, так что на одной из граней возникнет избыток электронов, а на другой — недостаток. Это приведет к возникновению электростатического поля, перпендикулярного току, — его называют полем Холла. Перемещение электронов поперек тока прекратится, как только сила, действующая на электрон со стороны поля Холла, сравняется с силой Лоренца: $E_x e = evB$, откуда $E_x = vB$, или

$$E_x = \frac{IB}{nes}$$

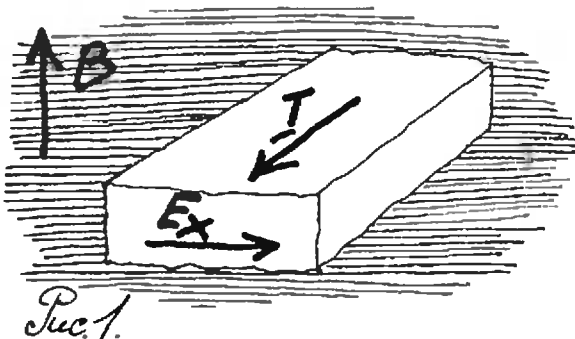
Холловское поле создает на гранях проводника разность потенциалов, равную

$$U_x = E_x b = \frac{IBb}{nes} = \frac{IB}{nea}$$

где b — ширина проводника, a — его толщина. Эту разность потенциалов на гранях можно непосредственно измерять в экспериментах, и такие измерения дают очень важные сведения о количестве электронов в единице объема проводника, так как отношение напряжения Холла U_x к току I , пропускаемому через проводник, как следует из приведенных рассуждений, зависит от n . Это отношение обычно называют холловским сопротивлением и обозначают R_x :

$$R_x = \frac{U_x}{I} = \frac{B}{nea} \quad (1)$$

Как видно из формулы (1), R_x пропорционально индукции магнитного



поля B и обратно пропорционально концентрации электронов n .

Наличие магнитного поля сказывается и на обычном сопротивлении проводника (на сопротивлении протекающему току) — оно, как правило, увеличивается.

Качественно это можно пояснить следующим образом. Причиной электрического сопротивления является рассеяние электронов на препятствиях, встречающихся на их пути, — на примесях, на дефектах кристаллической решетки и т. д. При столкновениях с препятствиями направления скоростей электронов могут изменяться произвольным образом. Однако в промежутках между столкновениями электроны разгоняются электрическим полем — проекции их скоростей вдоль поля растут. Таким образом, в проводнике устанавливается отличная от нуля средняя скорость дрейфа электронов вдоль поля — по проводнику течет ток. При наличии магнитного поля траектории движения электронов между столкновениями искривляются, и в результате скорость их дрейфа несколько уменьшается. Следовательно, при той же разности потенциалов уменьшается ток, т. е. растет сопротивление. Следует, однако, отметить, что холловское поле частично ослабляет описанный эффект (а иногда и компенсирует его полностью).

За сто лет, прошедших со дня открытия эффекта Холла, в его изучении было сделано много. Было выяснено, как влияет на холловское сопротивление присутствие примесей в материале образца, наличие носителей другого знака, изменения температуры и т. д. Однако формула (1) все это время, в основном, не вызвала сомнений у физиков.

И вот в 1980 году К. фон Клитцинг обнаружил, что в особых системах, называемых двумерными электронными слоями, зависимости холловского сопротивления от индукции магнитного поля и концентрации электронов совсем не такие, как это предписывает формула (1). И сопротивление току в двумерном электронном слое при наличии магнитного поля ведет себя по-особенному.

Причины этих «необычностей» кроются в свойствах самого объекта, на котором они наблюдались.

Двумерный электронный слой

Что это такое? Как его создать?

Оказывается, двумерный слой электронов возникает в электронных приборах, имеющих самое широкое применение, — в полевых МОП-транзисторах. Этот прибор схематически изображен на рисунке 2. Пластина полу-

проводника — например кремния — покрыта слоем диэлектрика (оксидом кремния), на который сверху напылен так называемый затвор — пленка металла (обычно алюминия; по первым буквам слов металл — оксид — полупроводник прибор и назван МОП-транзистором). Если к затвору приложить положительное напряжение относительно полупроводника, то электроны, находящиеся в полупроводнике, притянутся к затвору. Но пройти сквозь оксид они не смогут и образуют вблизи него тонкий слой (его толщина 20—30 Å, т. е. $\sim 10^{-9}$ м). Этот слой можно назвать двумерным — в том смысле, что в двух измерениях вдоль слоя электроны могут двигаться свободно, в то время как отойти вглубь полупроводника им не дает электростатическое поле затвора.

Затвор и слой образуют плоский конденсатор, емкость которого можно с достаточной точностью считать равной $C = \epsilon_0 \epsilon S/d$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость оксида, d — его толщина, S — площадь слоя. Заряд слоя можно определить по формуле $Q = CU_z$, где U_z — напряжение между затвором и полупроводником. Таким образом, число электронов в слое

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{CU_z}{e} = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{de} U_z \quad (2)$$

зависит лишь от напряжения на затворе и, в отличие от числа свободных электронов в полупроводнике, не зависит от температуры. Следовательно, при понижении температуры вплоть до абсолютного нуля слой не исчезнет. Сопротивление же полупро-

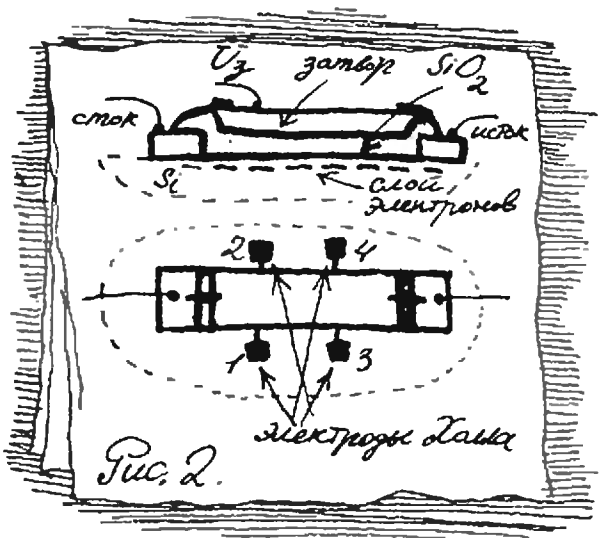


Рис. 2.

водника станет бесконечным, так как его собственные носители тока исчезнут — полупроводник станет изолятором. Теперь ничто не мешает нам изучать свойства двумерного слоя, измеряя падение напряжения между контактами к слою. Ток через образец при этом пропускают между контактами, называемыми, по вполне понятным причинам, истоком и стоком (см. рисунок 2). Если нас интересует холловское сопротивление R_x , то его можно определить, измерив напряжение U_x между контактами 1 и 2 или 3 и 4 и разделив результат на величину тока I . Информацию о сопротивлении протекающему току R можно получить, измеряя напряжение между контактами 1 и 3 или 2 и 4. Для измерения холловского сопротивления такого двумерного слоя надо, разумеется, поместить его в магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости слоя. Но в достаточно сильном поле под действием силы Лоренца электроны будут двигаться по окружностям с одной и той же частотой вращения

$$\omega = Be/m, \quad (3)$$

где m — масса электрона.

Таким образом, мы получили электронную систему, в которой движение электронов ограничено в любом из направлений — в плоскости слоя их закручивает магнитное поле, а уйти из этой плоскости им не дает электрическое поле затвора.

С точки зрения классической физики двумерный проводник качественно не отличается от трехмерного. Ток через такой проводник все так же связан с дрейфом электронов (вдоль слоя). Холловское сопротивление должно определяться по формуле (1), с той, однако, разницей, что под n надо понимать количество электронов, приходящихся на единицу площади, и в знаменателе, таким образом, уже не будет толщины проводника:

$$R_x = \frac{B}{ne}. \quad (4)$$

Ничего необычного не должно происходить и с сопротивлением протекающему через слой току — оно должно возрастать с увеличением B . Однако ...

Квантовые причуды двумерного слоя

С точки зрения квантовой механики, однако, у такой системы электронов

должны возникнуть принципиально новые свойства. Вы, вероятно, знаете, что энергия микрочастицы, которая движется в ограниченной области пространства, согласно квантовой теории не может быть произвольной. Например, при движении электронов в атоме энергия электронов может принимать лишь определенные значения W_0, W_1, W_2, \dots и не может — промежуточные. В этом случае говорят, что возникают разрешенные уровни энергии W_0, W_1, W_2, \dots . То же происходит и с электронами, вращающимися в магнитном поле. Оказывается, их энергия может быть равна только дискретным значениям

$$W_i = \left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{h\omega}{2\pi}, \quad (5)$$

где i — целое число, а ω — частота вращения, определяемая формулой (3). Эти разрешенные уровни энергии принято называть уровнями Ландау.

Согласно законам квантовой механики, электроны, находящиеся в одном и том же месте пространства, должны хоть чем-нибудь отличаться — иметь разные энергии, разные спины и т. д. Попробуем подсчитать, сколько электронов с энергией W_0 ($i=0$) — это нижний уровень Ландау — может поместиться на единице площади. Пусть электрон вращается по окружности радиуса r с частотой ω , определяемой формулой (3). Его кинетическая энергия равна $m\omega^2 r^2/2$. Приравняем эту энергию W_0 :

$$\frac{h\omega}{4\pi} = \frac{m\omega^2 r^2}{2}, \text{ или } \frac{h}{4\pi} \frac{Be}{m} = \frac{m}{2} \frac{B^2 e^2}{m^2} r^2.$$

Отсюда находим, какая площадка приходится на один электрон с энергией W_0 : $\pi r^2 = h/(2Be)$. На этой же площадке может разместиться еще один электрон с той же энергией W_0 , но с противоположно направленным спином — так велит принцип Паули (тот же принцип Паули, который участвует в «расселении» электронов в атоме). Другие электроны с энергией W_0 могут поместиться рядом, так, чтобы «орбиты» электронов не перекрывались. Таким образом, на единице площади можно разместить $n = \frac{2}{\pi r^2} = \frac{4Be}{h}$ электронов с энергией W_0 .

В наших расчетах мы пользовались чисто механической моделью движения электронов в магнитном поле. Точный квантово-механический рас-

чет показывает, что плотность электронов одинакова для всех уровней Ландау и равна

$$n_{\text{л}} = 2Ve/h. \quad (6)$$

(Как видите, мы ошиблись всего в два раза, что совсем не так плохо для использованной нами грубой модели.)

А теперь вернемся к двумерному электронному слою в МОП-транзисторе. Число n электронов на единице площади слоя можно изменять, меняя напряжение на затворе U_g (см. формулу (2)). При увеличении U_g электроны постепенно заполняют уровень Ландау: когда (при некотором U_g) окажется, что всем электронам не хватает места на нижнем уровне Ландау, они начнут заполнять следующий уровень (с $i=1$, затем с $i=2$ и т. д.).

Как сказывается квантованность энергии электронов на токе, текущем вдоль слоя? Пока на уровне Ландау есть свободные места, электроны, сталкиваясь с препятствиями (неоднородностями в образце), могут перескакивать на эти свободные места, оставаясь на том же энергетическом уровне. Такие перескоки, как мы уже говорили, приводят к уменьшению средней скорости направленного коллективного движения электронов, т. е. в этом случае ток в двумерном слое испытывает сопротивление. Если же электроны полностью заполняют уровни от нулевого до $i-1$ -го, а i -ый уровень пуст, то единственная для электрона возможность изменить состояние — это перейти на i -ый уровень. Но для этого ему нужна дополнительная энергия $W_i - W_{i-1} = \frac{1}{2\pi} h\omega$ (см. формулу 5)). Если бы температура была высокой, электрон мог бы получить необходимую порцию энергии из энергии тепловых колебаний. Эта энергия по порядку величины равна kT (k — постоянная Больцмана). Если же температура настолько низкая, что $kT \ll \frac{1}{2\pi} h\omega$, то электрону неоткуда взять энергию для перехода на следующий энергетический уровень. Это значит, что у электрона не осталось больше никакой возможности реагировать на препятствия, и он на них не реагирует. Поэтому сопротивление протекающему току в момент, когда заполнено целое число i уровней Ландау, становится равным нулю.

Квантовый эффект Холла

Но мы отвлеклись от основного предмета нашего разговора — от эффекта Холла.

Итак, в 1980 году, когда классическому эффекту Холла было уже сто лет, К. фон Клитцинг обратил внимание на необычное поведение холловского сопротивления и сопротивления току в двумерном электронном слое. Насколько оно было необычным, видно из рисунка 3: вместо плавной зависимости от напряжения U_g (или, что эквивалентно, — от n) — она приведена пунктирной линией на кривой $R_x(U_g)$ наблюдались «ступеньки» — участки, где R_x оставалось постоянным в довольно широком интервале U_g . Значение R_x на ступеньках оказалось независимым ни от каких параметров системы: оно определяется только фундаментальными физическими постоянными — постоянной Планка h и зарядом электрона e — и для ступеньки с номером N

$$R_x = \frac{1}{N} \frac{h}{2e^2}. \quad (7)$$

Иными словами, сопротивление Холла квантуется!

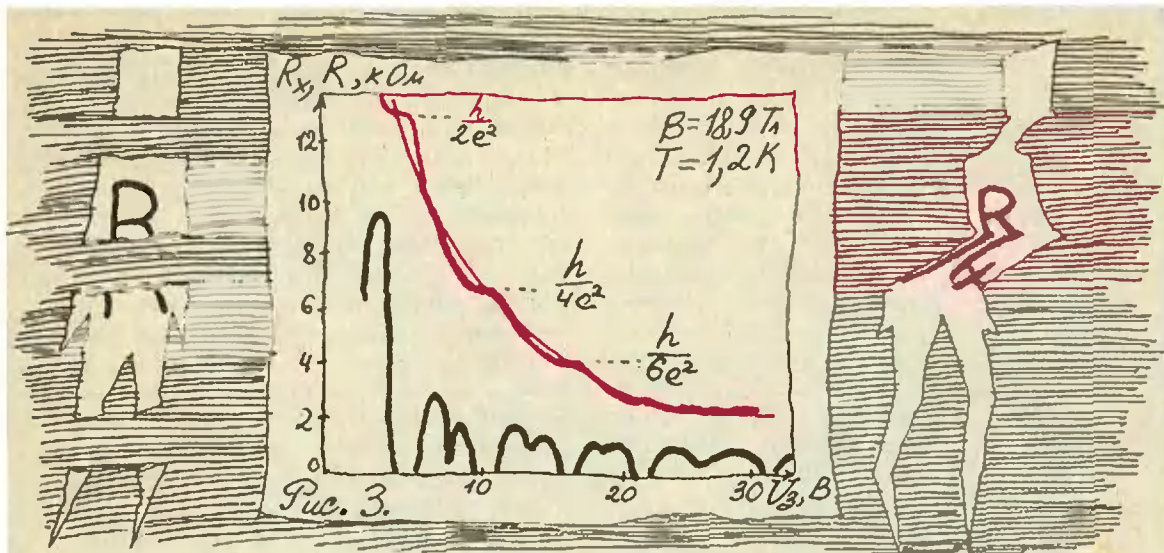
Теперь, когда мы познакомились с квантовым характером поведения электронов в двумерном слое, попытаемся разобраться в этих фактах.

Давайте определим значение холловского сопротивления $R_x = B/(ne)$ (см. формулу (4)) для того же особого в жизни двумерного слоя случая, когда заполнено точно i уровней Ландау. На единице площади при этом находятся $n = in_{\text{л}} = i(2Ve/h)$ электронов (см. формулу (6)), и

$$R_x = \frac{1}{i} \frac{h}{2e^2}.$$

— мы получили формулу (7)!

Посмотрим еще раз на рисунок 3. На нем приведена также полученная экспериментально зависимость сопротивления току ($R(U_g)$). Как видно из рисунка, при некоторых значениях U_g сопротивление R падает практически до нуля. Мы уже выяснили, что такая ситуация возможна в тех случаях, когда электроны в слое заполняют целое число уровней Ландау и не имеют возможности приобрести дополнительную энергию для перехода на следующий уровень. И в этой ситуации, как видно из рисунка 3, холловское сопротивление определяется



лишь фундаментальными константами. Но из того же рисунка 3 видно, что сопротивление R продолжает оставаться нулем в некотором интервале изменения U_s и, следовательно, n . А ведь наши выводы относились лишь к ситуации, когда заполнено точно целое число уровней Ландау, т. е. к некоторым точным значениям концентрации $n = in_{\text{Л}}$. То же относится и к кривой $R_x(U_s)$, на которой в тех местах, где $R_x = h/(2ie^2)$, образуются почему-то ровные «полочки». Эти «подозрительные» места на графиках объясняются тем, что реальный полевой транзистор далеко не идеален. В частности, не постоянна толщина оксида. Это приводит к тому, что при одном и том же напряжении на затворе в разных местах слоя возникает разная концентрация электронов. При постепенном увеличении U_s концентрация будет изменяться по всему слою, оставаясь где-то немного больше, а где-то — немного меньше средней. Рано или поздно на некоторых участках n достигнет значения $in_{\text{Л}}$. Как только возникнет «дорожка» с такой концентрацией от истока до стока, весь ток пойдет по ней — ведь сопротивление дорожки равно нулю. Если мы слегка увеличим U_s , то где-то появится другая дорожка с концентрацией $in_{\text{Л}}$, и весь ток потечет по ней. И до тех пор, пока не исчерпаются все такие пути от истока до стока, R будет равно нулю и будет длиться «плато» $R_x = h/(2ie^2)$. При дальнейшем увеличении U_s все повторяется с той лишь разницей, что следующая

«ступенька» будет соответствовать $n = (i+1)n_{\text{Л}}$ и R_x будет равно $h/(2(i+1)e^2)$.

Итак, мы немного разобрались в причинах, вызывающих квантование холловского сопротивления в двумерном слое. Не следует, однако, думать, что все здесь совершенно ясно. До сих пор физики еще не нашли ответов на многие вопросы, и главный из них — в чем причина той чрезвычайно высокой точности выполнения равенства (7), которая экспериментально наблюдается при конечной (не нулевой) температуре.

Уже в 1982 году группой американских физиков было показано, что с точностью 10^{-7} (т. е. до седьмого знака после запятой) равенство (7) справедливо. Предел ли это?

Сейчас принято считать, что R_x отличается от $h/(2ie^2)$ примерно на столько же, на сколько R отличается от нуля. Это было установлено для таких экспериментальных условий, когда поддаются измерению как R , так и отличие R_x от $h/(2ie^2)$. Можно предположить, что такая связь между R_x и R существует и тогда, когда ни то, ни другое уже прямым измерениям не поддается, так как они становятся слишком малыми. Однако всегда есть возможность оценить R , например, по времени затухания в образце токов Фуко. Возбудить токи можно, скажем, изменяя магнитное поле. Такие эксперименты, проведенные группой советских физиков в 1984 году, дали удивительный результат. Они показали, что при температуре 0,4 К в маг-

нитном поле с индукцией 9 Тл вихревой ток «живет» столько, сколько длится эксперимент, то есть часы. За это время ток затухает столь незначительно, что оценка полного времени его затухания дает многие годы. Оценки сопротивления R , сделанные по результатам этих экспериментов, дают значение $R \approx 10^{-11}$ Ом. Это, возможно, означает, что равенство (7) выполняется лучше, чем до пятнадцатого знака!

Новый эталон ома?

Открытие эффекта квантования холловского сопротивления вызвало огромный интерес у физиков. Интерес этот понятен — сейчас известно не так много способов измерения фундаментальных физических постоянных, и появление новых возможностей в этом направлении всегда в конечном итоге приводит к уточнению значений этих постоянных, что крайне важно для всех направлений физики. Однако не меньший интерес к этому открытию проявили и специалисты в области измерений — метрологи. Интерес метрологов вызван тем, что они разглядели в эффекте квантования холловского сопротивления способ поддержания точных знаний электрического сопротивления. Вы знаете, конечно, что у единиц всех основных физических величин есть эталоны. Такой эталон есть и у единицы электрического сопротивления «Ом». Эталон

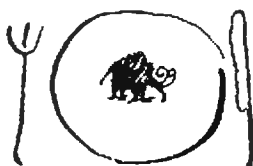
представляет собой набор проволочных сопротивлений, и измеряя любое сопротивление любым прибором, мы, в конечном итоге, сравниваем его с сопротивлением этой группы катушек. Но у такого эталона есть недостатки. Во-первых, его сопротивление, пусть незначительно, но все же изменяется со временем, что очень существенно сказывается на той точности, с которой можно верить измерениям сопротивления. Во-вторых, такой эталон может быть только один — если мы заведем два одинаковых эталона, а их значения через некоторое время перестанут совпадать, то нам все равно придется выбрать, кто из них «главный». В-третьих, эталон может пропасть — скажем, он может погибнуть от стихийного бедствия, и это сразу нарушит стройность всей системы измерения электрического сопротивления. Если же создать эталон 1 Ом на основе эффекта квантования холловского сопротивления, то все перечисленные недостатки исчезнут. Поэтому во многих странах сейчас ведутся работы по созданию эталона, основанного на квантованном эффекте Холла. Уже достигнуто соглашение, что переход на такие эталоны начнется, как только в лабораториях по крайней мере трех стран удастся воспроизвести квантованные значения R_H , отличающиеся между собой не более, чем на $2 \cdot 10^{-7}$ Ом. По-видимому, это произойдет скоро.

„Квант“ улыбнется

Новости археологии

По последним данным археологических раскопок, понятие дроби как части целого зародилось еще в эпоху первобытно-общинного строя, когда съесть мамонта целиком было

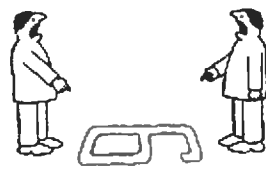
не по силам ни одному дикарю. Впоследствии же с исчезновением мамонтов и в связи с переходом на более мелкую дичь надобность в дробях по-прежнему отпала, и вскоре они вообще вышли из употребления.



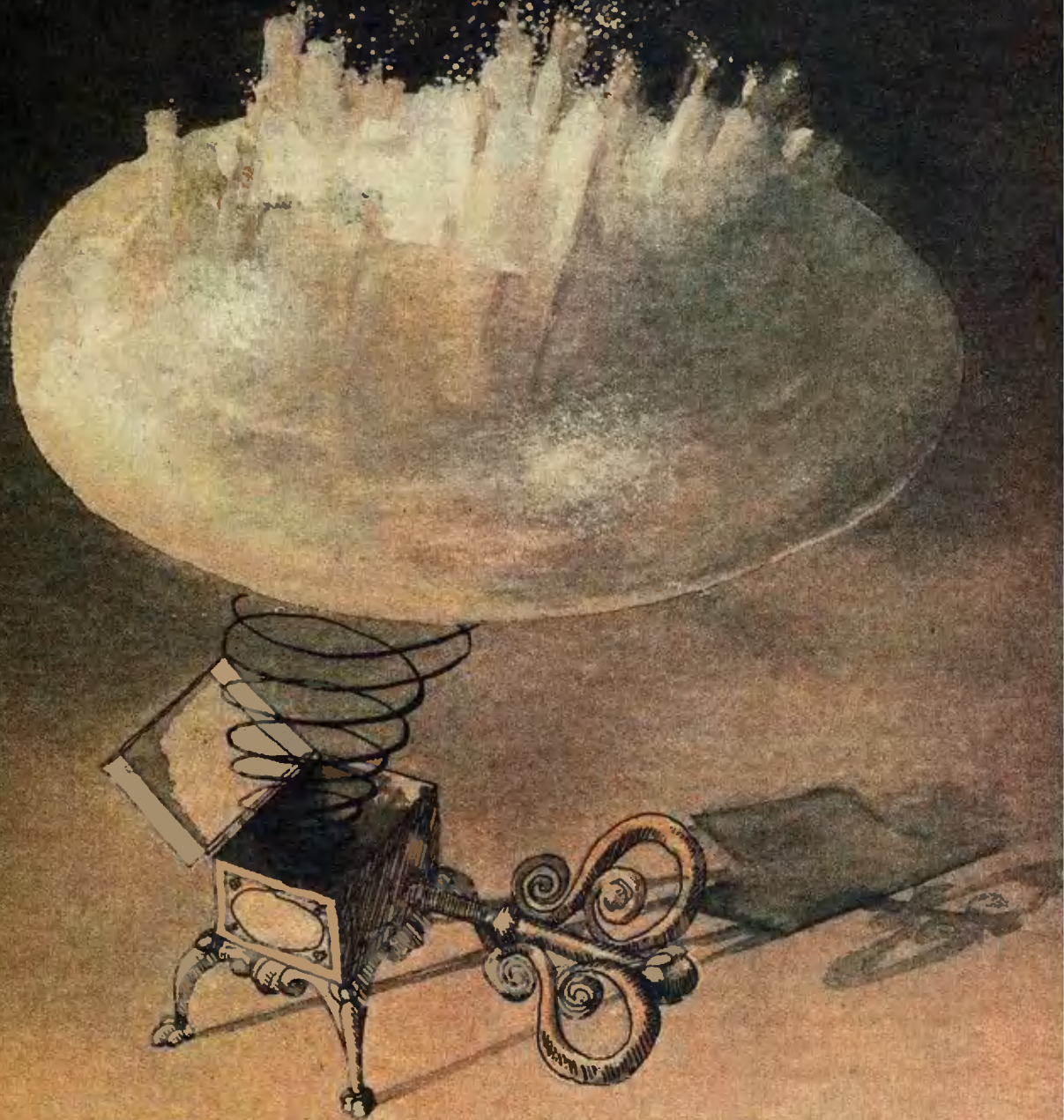
Простота математики

Джон фон Нейман, один из крупнейших математиков нашего столетия, выступая в конце 40-х годов с докладом о будущем электронно-вычислительных машин, сказал, что

математика — только очень маленькая и очень простая часть жизни. Когда в ответ на это аудитория зашумела, фон Нейман добавил: «Если люди не верят в то, что математика проста, то только потому, что они не осознают, как сложна жизнь».



Материалы представил
В. А. Пилуш, Б. Е. Яселов



ПУТЕШЕСТВИЕ ПО МИКРОКОМПЬЮТЕРУ

Кандидат технических наук Д. Г. КРУТОГИН

Год назад мы рассматривали «процесс строительства» большой интегральной схемы (БИС), сравнивая его со строительством города («Квант», 1986, № 2). Тогда мы интересовались в основном технологией строительного

дела, а теперь приглашаем вас познакомиться с самим городом, его структурой, пройтись по отдельным районам и кварталам, осмотреть архитектурные достопримечательности...

Размышления у панорамы

Для знакомства выберем сверхбольшую интегральную схему (СБИС) — например, микросхему однокристалль-

ной микроЭВМ. Такая схема содержит 10^5 — 10^6 отдельных транзисторов. Что умеет делать микроЭВМ, или, как ее часто называют, микрокомпьютер (МК)? Во-первых, считать, т. е. выпол-

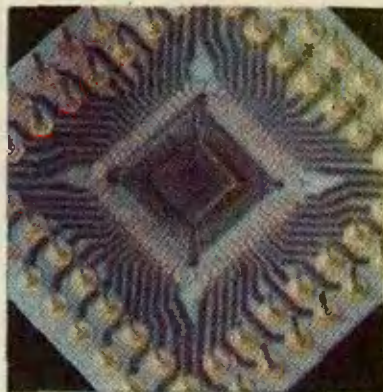
нять математические действия с довольно высокой скоростью — до миллиона простых операций в секунду. Простыми мы будем называть те немногие операции, которые ЭВМ умеет выполнять «от рождения»; в основном это сложение (вычитание) и сравнение. Для выполнения сложных действий нужно сначала научить машину «преобразовывать» эти действия в последовательность простых операций. Во-вторых, выполнять логические операции с такой же быстротой. Не вдаваясь в тонкости логических операций, рассмотрим подходящий пример: требуется составить алфавитный список из заданного множества в один миллион фамилий. Это, в общем, простая, не требующая вычислений работа — нужно сравнить фамилии по первой, затем второй, затем третьей и т. д. буквам, и по результатам сравнений заносить фамилии в список под соответствующими номерами. Для человека эта работа и утомительна, и скучна, и весьма продолжительна. ЭВМ, в том числе микроЭВМ, выполнит эту работу довольно быстро. В-третьих, микрокомпьютер может управлять машинами, производственными агрегатами, процессами. Эта его способность складывается из первых двух, ибо очень упрощенно процесс управления можно представить как расчеты нескольких допустимых вариантов действия, сравнение результатов и выбор оптимального решения.

Понятно, что самая прекрасная СБИС «мертва», бесполезна, если лишена системы питания, средств ввода информации (например, клавиатуры) и отображения результатов (например, экрана или печатающего устройства). Управляющему компьютеру также нужна система связи с исполнительными механизмами. (Так, мозг человека, наш многоцелевой персональный компьютер, бессилён без двусторонней связи с глазами, ушами, ртом, руками.)

Итак, констатируем: СБИС — это мозг компьютера, сложнейшая его часть. Именно СБИС микрокомпьютера будет целью нашего путешествия, и, несколько упрощая, именно СБИС мы будем называть городом МК.

Посмотрите на фотографию, помещенную на этой странице (она сделана с увеличением 1,5): из корпуса СБИС выходит несколько десятков выводов. Это дороги, связываю-

щие город МК с «периферией» — так несколько пренебрежительно называют клавиатуру, дисплей, цифропечатающее устройство и т. п., и дороги, по которым в город поступает питание — постоянное напряжение (чаще всего это 5 В). В случае работы с за-



дачами большой сложности или большого объема (например, тот же список из миллиона фамилий) на помощь привлекается архивная, или внешняя, память; для связи с внешними запоминающими устройствами (ВЗУ) тоже предусмотрены выводы-дороги.

Напомним, что сверхбольшая интегральная схема — очень маленькая. Кристалл кремния — основание СБИС — имеет размер около 5×5 мм, а сама СБИС в корпусе и с выводами — это коробочка не больше 40×25 мм, и весит она 15—20 г. Поэтому для удобства путешествия по городу МК предлагаем вам мысленно уменьшиться в миллион раз. (В сказочной литературе такой прием не раз использовался, хотя коэффициент подобия был поменьше.) При таком уменьшении, когда наш рост стал 1,5—1,8 мкм, экскурсия по СБИС МК — это то же, что в нашем обычном масштабе знакомство с городом площадью около 30 квадратных километров.

Обычно, если есть такая возможность, города осматривают с возвышенной точки (с Останкинской телебашни, с Исаакиевского собора и т. п.). Мы же с вами остановимся на краю корпуса СБИС на высоте около 1000 метров (с учетом масштаба!) над городом МК и отсюда начнем.

Внизу, в долине — наш город. Он построен на берегу моря Физики Твердого Тела, у залива Полупроводников, и, без сомнения, это один из крупнейших населенных пунктов на побе-

режье*). Своеобразие нашего города, так же, например, как города Сочи или Юрмала, в том, что он построен для приема и обслуживания большого количества туристов. Постоянное население города только этим и занимается. Как это часто бывает, в таком городе постоянных жителей намного меньше, чем гостей. Город МК — новостройка, подобные крупные схемы-ансамбли созданы в течение последних пяти лет. Впервые столь крупный город построен на одной площадке. Ранее задачи туристского обслуживания решались целым комплексом небольших поселков, расположенных иногда в сотнях километров друг от друга (не забудьте умножить на 10^{-6} !). Представляете, сколько было переездов?

Слово о словах

Теперь следует пояснить, о каких туристах идет речь. Туристами в МК являются отрезки (элементы) информации, для которых хорошо подходит название «машинное слово». Это никак не те стихийные толпы отдыхающих-«дикарей», которые летом рвутся наудачу в приморские города-курорты. Наши туристы — частицы организованного информационного потока, называемого программой работы ЭВМ. Потеря любого слова угрожает разрушить смысл всей программы, но и лишних слов быть не должно. (В этом отношении хорошая программа подобна хорошим стихам.)

Ну, а постоянные жители города, кто они? Это тоже машинные слова, «прописанные», или записанные, в самом МК. Они необходимы для того, чтобы упростить обращение с программами.

Слова машинные, как и слова обычные, несут некоторую конкретную информацию. Для себя мы можем разделить машинные слова на две группы: слова-команды (что сделать) и слова-данные (это числа или логические величины, то, чем распоряжаются, чем оперируют команды; их еще называют операндами, по созвучию с командами). Но это — для себя,

а для электронных схем МК любое машинное слово — всего лишь последовательность единиц и нулей, а точнее, высоких (обычно более 2,5 В) и низких (менее 0,5 В) напряжений на входах транзисторных элементов. Таким образом, машинные слова — это серии электрических импульсов, пробегающих по дорогам и кварталам МК.

Задача каждого отдельного импульса — включить тот или иной транзистор в логическом или запоминающем элементе ЭВМ. В свою очередь, каждое такое включение приводит к перемещению по кристаллу МК зарядовых пакетов — электронов и дырок. Так информация в МК обретает физически зримую форму пакетов заряженных частиц, которые целенаправленно продвигаются по микросхеме, пока, наконец, появление импульсов напряжения на выходных контактах МК не известит о завершении процесса переработки информации и получении результата.

И еще немного о словах. Мы обычно почти не затрудняемся в выборе слов для выражения своих мыслей. У всех ЭВМ, и в том числе у нашего МК, есть жесткий порядок — можно пользоваться словами одной определенной длины: например, из 8 или 16 букв притом буквы — это 0 или 1 (такие буквы называют битами). Для сравнения отметим, что большие ЭВМ «разговаривают» словами в 64 и 128 бит, а лучшие микрокомпьютеры пока лишь 32-битовые. Конечно, словарь коротких слов (8- или 16-битовых) менее выразителен, зато намного компактнее. Для «карманной» ЭВМ нужен и карманный словарь!

В общении человека с машиной есть неизбежные трудности. Составление программ на машинном языке — дело трудоемкое, оно требует определенного навыка. Нам гораздо удобнее общаться с машиной на языке, логически близком к человеческому (скажем, русскому или английскому). Таких языков-посредников для задач разного назначения создано несколько десятков: это фортран, алгол, кобол и т. д. Ну, а там, где используются несколько разных языков, не обойтись без переводчика... Но разговор о переводчиках и о бюро переводов, которое есть в нашем городе, мы продолжим в следующем номере.

*) По берегам залива Полупроводников вы проши, если читали книгу «Знакомство с полупроводниками» М. Е. Левинштейна и Г. С. Симиной, выпущенную в Библиотеке «Квант» (вып. 33, с. 238).

Задачи

M1026—M1030, Ф1038—Ф1042

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 апреля 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2-87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1026, M1027» или «Ф1038». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию, имя и домашний адрес просим писать печатными буквами.

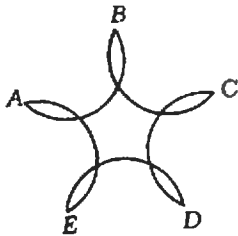


Рис. 1.

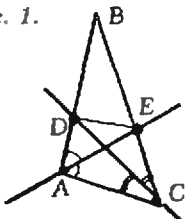


Рис. 2.

M1026. а) Пять равных дуг AB, BC, CD, DE, EA расположены так, что каждая делится соседними на три равные части (рис. 1). Найдите величину каждой дуги (в градусах).

б) Тот же вопрос для «розетки» из n равных дуг, каждая из которых делится соседними на три равные части.

А. В. Швецов

M1027. Докажите, что число $1985!! + 1986!!$ делится на 1987. (Через $n!!$ обозначается произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих ту же четность, т. е. $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$)

В. В. Произволов

M1028. а) На плоскости заданы две пересекающиеся прямые, и на них отмечено по одной точке (D и E). Постройте треугольник ABC , у которого биссектрисы CD и AE лежат на данных прямых, а их основания — данные точки D и E (рис. 2).

б)* Докажите, что если при этом $\angle CDE = 30^\circ$, то один из углов треугольника ABC равен 60° или 120° .

М. Волчкевич, ученик 10 кл. (Москва)

M1029. Среди n членов арифметической прогрессии удалось выбрать k членов, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Докажите, что $n \geq 2^{k-1}$.

В. Ф. Лев

M1030. Для выпуклого многогранника M обозначим через $S(M)$ сумму площадей его граней, через $P(M)$ — сумму произведений длин всех его ребер на соответствующие им внешние углы многогранника (внешний угол при данном ребре — это угол между перпендикулярами к граням, примыкающим к ребру, и направленными во внешнюю область многогранника; он равен 180° минус величина соответствующего двугранного угла). Докажите, что если многогранник M_1 лежит внутри многогранника M_2 , то

а) $S(M_1) \leq S(M_2)$;

б) $P(M_1) \leq P(M_2)$.

А. В. Гончаров

Ф1038. Три одинаковые нерастяжимые нити прикреплены на одинаковых расстояниях друг от друга к кольцу радиусом r_0 и аналогичным образом — к кольцу радиусом $2r_0$. Нити пропущены через третье кольцо радиусом r_0 (рис. 3). Кольцо 1 закреплено в горизонтальной плоскости, и вся система находится в равновесии. Найти расстояние между центрами колец 2 и 3. Все кольца сделаны из одной и той же проволоки. Трением пренебречь.

В. П. Бородин

Ф1039. К бруску, лежащему на наклонной плоскости, прикреплена нить, перекинута через проволочную петлю; на другом конце нити висит грузик (рис. 4). При этом брусок неподвижен. Когда грузик качнули, брусок начал двигаться. Объясните явление.

Г. В. Меледин

Ф1040. Три одинаковые проводящие пластины площадью S каждая расположены параллельно друг другу

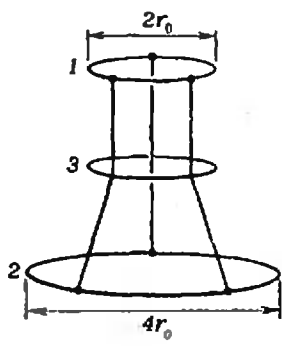


Рис. 3.

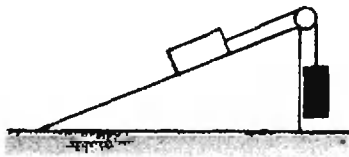


Рис. 4.

на расстояниях d_1 и d_2 (рис. 5). Вначале на пластине 1 находился заряд Q , а пластины 2 и 3 были незаряжены. Затем пластины 2 и 3 присоединяют к батарее с напряжением U , пластины 1 и 3 соединяют проводником. Найти установившиеся заряды на пластинах.

В. Н. Иванченко

Ф1041. Проводящий стержень длиной l и массой m подвешен на двух невесомых жестких стержнях длиной h к горизонтальной оси (рис. 6). Эта рамка находится в однородном вертикальном магнитном поле, индукция которого B . Через рамку пропускают импульс тока I_0 малой длительности τ . Определить максимальное отклонение рамки от вертикальной плоскости. Смещение рамки за время τ очень мало.

В. В. Паи

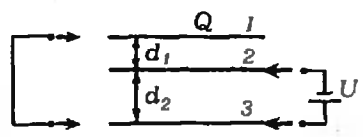


Рис. 5.

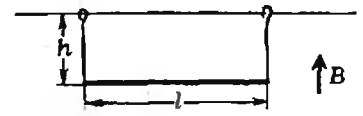


Рис. 6.

Ф1042. Оцените, на каком расстоянии железнодорожные рельсы кажутся слившимися. Предполагается, что вы, хорошо представляя физику наблюдаемого явления, можете сами задать числовые значения необходимых величин.

П. И. Зубков

Problems

M1026—M1030; P1038—P1042

M1026. a) Five equal arcs AB, BC, CD, CE, EA are chosen so that each is divided by its neighbours into three equal parts (see figure рис. 1). Find the magnitudes of all the arcs (in degrees).

b) Same question for a «flower» made up of m equal arcs, each of which is also divided into three equal parts by its neighbours.

A. V. Shvetsov

M1027. Prove that the number $1985n! + 1986n!$ is divisible by 1987. (Here $n!$ denotes the product of all natural numbers no greater than n and of the same parity, i. e. $n! = n(n-2)(n-4)\dots$)

V. V. Proizvolov

M1028. a) The points D and E are chosen on two intersecting lines in the plane. Construct the triangle ABC whose bisectors CD and AE lie on the given lines, their intersection points with the opposite sides being D and E (see figure рис. 2).

b)* Prove that if, under these conditions, $\angle CDE = 30^\circ$, then one of the angles of triangle ABC equals 60° or 120° .

M. Volchkevich, 10th form student

M1029. Among n terms of an arithmetical progression we succeeded in choosing k terms constituting an increasing geometric progression. Prove that $n \geq 2^{k-1}$.

V. F. Lev

M1030. For any convex polyhedron M denote by $S(M)$ the total area of its faces and by $P(M)$ the sum of the products of lengths of all its edges by the corresponding exterior angles of the polyhedron (the exterior angle at the given edge is the angle between the perpendiculars to the faces intersecting at that edge and directed outward). Prove that if the convex polyhedron M_1 is contained in the polyhedron M_2 , then

a) $S(M_1) \leq S(M_2)$; b) $P(M_1) \leq P(M_2)$. A. B. Goncharov

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than April 15th 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original prob-

Задача "Квант"

lem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

P1038. Three identical inelastic strings are fixed at equal distances from each other on a ring of radius r_0 and, in a similar way, on a ring of radius $2r_0$. The strings pass through a third ring of radius r_0 (see figure pic. 3). The ring 1 is fixed in the horizontal plane and the whole system is in equilibrium. Find the distance between the centres of the rings 2 and 3. All the rings are made of the same wire. Friction is negligible.

V. P. Borodin

P1039. A string passing through a wire loop is fixed to a slab placed on an inclined plane; a small weight hangs on the other end of the string (see figure pic. 4). Initially the slab is motionless. When the weight is pushed, the slab begins to move. Explain this phenomenon.

G. V. Meledin

P1040. Three identical conducting plates of area S each are placed parallel to each other at the distances d_1 and d_2 (see figure pic. 5). Initially plate 1 has the charge Q , the plates 2 and 3 are uncharged. Then the plates 2 and 3 are connected to a battery of tension U and the plates 1 and 3 are joined by a conductor. Find the established charges on the plates.

V. N. Ivanchenko

P1041. A conducting rod of length l and mass m is suspended by two weightless rigid rods of length h to a horizontal axis (see figure pic. 6). This frame is in a homogeneous vertical magnetic field of induction B . An impulse of current I_0 passes through the frame during the brief time interval τ . Determine the maximal inclination of the frame away from the vertical position. The motion of the frame during the interval τ is very small.

V. V. Pay

P1042. Estimate the distance at which railroad tracks seem to come together. It is assumed that you understand the physics of the phenomenon and can choose appropriate numerical values of the magnitudes involved.

P. I. Zubkov

Решения задач

M1006—M1009; Ф1017—Ф1022

M1006. Через две вершины треугольника проведены две прямые, разбивающие его на три треугольника и четырехугольник. а) Могут ли площади всех четырех частей быть равными?

б) Какие три из этих частей могут иметь равные площади? Во сколько раз отличается от них площадь четвертой части?

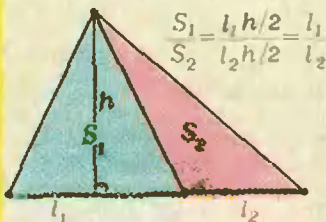


Рис. 1.

В решении много раз будет использована следующая почти очевидная

Лемма. Отношение, в котором прямая, проведенная через вершину треугольника, делит его площадь, равно отношению, в котором она делит его основание (см. рис. 1).

а) Ответ: не могут. Если бы даже только три треугольника разбиения были равновелики (предположение о величине площади четырехугольника нам и не нужно), то по лемме отрезки, разбивающие данный треугольник, должны были бы делить друг друга пополам (рис. 2), т. е. были бы диагоналями параллелограмма. Но это невозможно, поскольку две противоположные стороны этого «параллелограмма» лежат на пересекающихся прямых — сторонах данного треугольника.

б) Ответ: равновеликими могут быть четырехугольник и любые два треугольника разбиения; отношение площади 4-й части к площади каждой из трех равновеликих частей может быть равно либо 3, либо $\sqrt{5}-2$.

Введем обозначения, как на рисунке 3. Из решения задачи а) видно, что одна из равновеликих частей — это четырехугольник $CLPK$, другая — один из треугольников APL и BPK ; будем считать, что это треугольник APL (случай треугольника BPK рассматривается точно так же). Третья часть — это треугольник BPK или APB ; эти два случая надо рассмотреть отдельно.

Задачник "Квант"

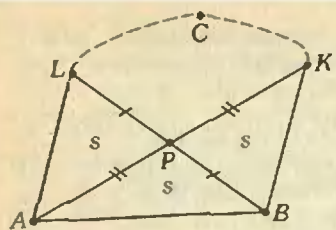


Рис. 2.

Обозначим площадь трех равновеликих частей через s ($s=S_{CLPK}=S_{APL}$), площадь 4-й части через s_1 . Чтобы найти искомое отношение s_1/s , выразим двумя способами отношения, в которых точки L и K делят стороны AC и BC , через площади с помощью леммы:

$$\frac{CL}{LA} = \frac{S_{CLB}}{S_{LAB}} = \frac{S_{CLP}}{S_{LAP}},$$

$$\frac{CK}{KB} = \frac{S_{CKA}}{S_{KBA}} = \frac{S_{CKP}}{S_{KBP}}. \quad (*)$$

а входящие сюда площади — через s , s_1 и $x=S_{CPL}$.

В первом случае (рис. 3, а) имеем:

$$\frac{2s}{s+s_1} = \frac{x}{s}, \quad \frac{2s}{s+s_1} = \frac{s-x}{s}.$$

Отсюда легко найти, что $x=s/2$, $s_1/s=3$.

Во втором случае (рис. 3, б) система запишется так:

$$\frac{s+s_1}{2s} = \frac{x}{s}, \quad \frac{2s}{s+s_1} = \frac{s-x}{s_1}.$$

Первое из этих уравнений дает $x=(s+s_1)/2$; подставляя это выражение во второе уравнение, получим, что отношение s_1/s удовлетворяет квадратному уравнению $(s_1/s)^2+4(s_1/s)-1=0$, т. е. $s_1/s=\sqrt{5}-2$.

Остается еще проверить, что если разделить стороны треугольника ABC в отношениях

$$CL : LA = CK : KB = 2s : (s+s_1) = 1 : 2$$

в 1-м случае и

$$CL : LA = BK : KC = (s+s_1) : 2s = (\sqrt{5}-1)/2$$

во 2-м случае, то соответствующие три части разбиения действительно будут равновелики. Пользуясь равенствами (*), это совсем легко сделать в 1-м случае и несколько сложнее во 2-м. Мы приведем для 2-го случая другое рассуждение, поясняющее, почему в нашей зада-

че возникло число $a=(\sqrt{5}-1)/2$. (Число $\tau = \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ — это знаменитое «золотое сечение».)

Заметим, что наше утверждение является, как говорят, *аффинным*, т. е. содержит только такие геометрические понятия и величины, которые сохраняются при параллельном проектировании: прямая, отношение длин отрезков одной прямой, равенство площадей и т. п. (Напротив, такие понятия, как величина угла, отношение длин сторон треугольника или, скажем, биссектриса, не сохраняются при проекции — и не входят в наше утверждение.) А поскольку любой треугольник можно с помощью некоторой параллельной проекции превратить в треугольник заданной формы (подумайте, почему!), наше утверждение достаточно проверить только для треугольников какого-то одного, наиболее удобного вида. В качестве такого «хорошего» треугольника возьмем треугольник ABC , образованный двумя диагоналями и стороной правильного пятиугольника (рис. 4). Нетрудно показать, что отношение стороны правильного пятиугольника к его диагонали равно a . Отсюда ясно, что на рисунке 4

$$CL : LA = BK : KC = BD : AC = a;$$

и в то же время $S_{APB} = S_{APL} = S_{CKPL}$, поскольку очевидно, что $BP=PL$, а треугольник APL просто равеноставлен с четырехугольником $CKPL$.

Г. А. Гальперин.
А. П. Савин

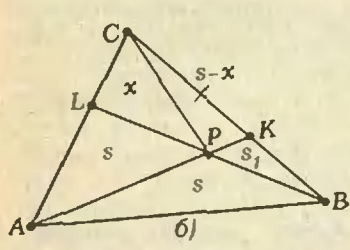
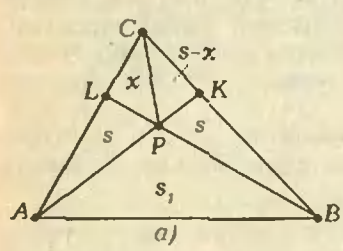


Рис. 3.

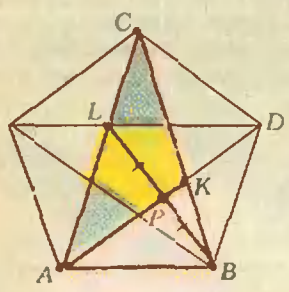


Рис. 4.

M1007. Докажите, что треугольники с длинами сторон a, b, c и a_1, b_1, c_1 подобны, если и только если

$$\frac{\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1}}{a + b + c} = \frac{\sqrt{a_1a} + \sqrt{b_1b} + \sqrt{c_1c}}{a_1 + b_1 + c_1}$$

M1008. Лестница состоит из $2n+1$ ступеней. На n нижних ступенях лежит по одному камню. Двое по очереди таскают камни. Первый может переложить любой камень вверх на первую свободную ступеньку, а второй — переложить камень на одну ступеньку вниз, если она свободна. Цель первого — положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли второй ему помешать?

M1009. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает прямые BC и

После возведения обеих частей доказываемого равенства в квадрат и несложных преобразований оно приводится к виду

$$(\sqrt{ab_1} - \sqrt{a_1b})^2 + (\sqrt{ca_1} - \sqrt{c_1a})^2 + (\sqrt{bc_1} - \sqrt{b_1c})^2 = 0,$$

и следовательно, оно равносильно равенствам $a/a_1 = b/b_1 = c/c_1$, т. е. подобию треугольников.

Другое доказательство можно получить, заметив, что левая часть равна скалярному произведению векторов с координатами $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ и $(\sqrt{a_1}, \sqrt{b_1}, \sqrt{c_1})$ и не может быть больше правой части, которая равна произведению длин этих векторов; равенство возможно лишь, когда угол между векторами нулевой, т. е. они пропорциональны друг другу.

По существу, мы использовали во втором рассуждении так называемое *неравенство Коши—Буняковского*:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \leq \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)},$$

которое обращается в равенство, лишь когда наборы чисел (x_1, \dots, x_n) и (y_1, \dots, y_n) пропорциональны (у нас $n=3$, $(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$, $(y_1, y_2, y_3) = (\sqrt{a_1}, \sqrt{b_1}, \sqrt{c_1})$).

В. П. Чичин, В. И. Дубровский

Ответ: может.

Во избежание путаницы будем номера действующих лиц задачи (их «имена») писать с большой буквы. Правило действия Второго такое: он всякий раз кладет камень на ступень, освободившуюся после хода Первого (это всегда возможно, поскольку камень на следующей ступени либо лежал еще до хода

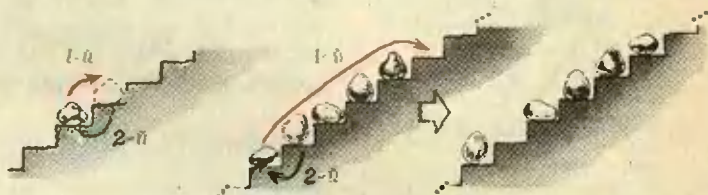


Рис. 1.

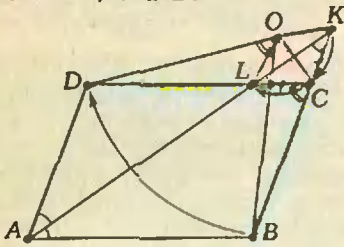
Рис. 2.

Первого — и остался там после этого хода, либо оказался там в результате хода Первого). Если Второй будет следовать этому правилу, то после любого хода Первого и ответа Второго или ничего не изменится (рис. 1), или на некотором участке лестницы, все ступени которого, кроме верхней, заняты, освобождается вторая снизу ступень и ставится камень на верхнюю (рис. 2). Ясно, что при этом нижняя ступень всегда остается занятой и не может образоваться группа из двух или более идущих подряд пустых ступеней (не считая, конечно, ступеней над верхним камнем, с самого начала свободных). Следовательно, число свободных ступеней, лежащих ниже верхнего (n -го) камня, перед любым ходом Первого не превосходит $n-1$, т. е. две верхние ступени будут свободны, и Первый не сможет занять верхнюю ступень.

С. Л. Елисеев, Н. И. Константинов

Обозначим центр окружности CKL через O ; нам достаточно доказать, что $\angle BOD = \angle BCD$ (см. рисунок). Заметим сначала, что отрезки AB и BK , а также LC

CD в точках K и L соответственно. Докажите, что центр окружности, проведенной через точки C, K и L , лежит на окружности, проведенной через точки B, C и D .



и CK равны, поскольку в треугольнике ABK равны углы при стороне AK ($\angle BAK = \angle KAD = \angle AKB$), и прямая LC параллельна AB . Отсюда, в частности, следует равенство треугольников OKC и OLC ($OK = OL, KC = CL$). Повернем плоскость вокруг точки O так, чтобы треугольник OKC совпал с треугольником OLC . Тогда луч KC совместится с лучом CL , поэтому угол между этими лучами, т. е. $\angle BCD$, равен углу поворота. В то же время точка B при этом повороте перейдет в D , так как $KB = AB = CD$, следовательно, угол BOD также равен углу поворота; тем самым равенство углов BOD и BCD доказано.

Рисунок на полях иллюстрирует случай, когда $AB > BC$, а угол BAD — острый, однако наше рассуждение без каких-либо изменений применимо и во всех других случаях.

И. Ф. Шарыгин

Ф1017. Крупнейший в мире советский телескоп имеет в качестве объектива зеркало диаметром $D=6$ м. Какое время потребуется, чтобы, сравнивая полученные на этом телескопе фотоснимки, можно было заметить взаимное вращение нашей Галактики и туманности Андромеды вокруг общего центра масс? Расстояние до Андромеды $R=1,42 \cdot 10^{11} R_0$, где R_0 — радиус орбиты Земли. Массы Галактики и Андромеды равны, соответственно, $M_G=2,5 \cdot 10^{11} M_0, M_A=3,6 \cdot 10^{11} M_0$, где M_0 — масса Солнца. Фотографирование ведется в видимом свете для длины волны $\lambda=5 \cdot 10^{-7}$ м.

Минимальное угловое расстояние между двумя объектами, при котором их можно наблюдать раздельно, определяется дифракцией и равно приблизительно λ/D . Чтобы можно было заметить, что Андромеда изменила свое положение, она должна сдвинуться именно на такой угол:

$$\varphi_0 \approx \frac{\lambda}{D} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{6} \text{ рад} \approx 8 \cdot 10^{-8} \text{ рад.} \quad (1)$$

Если период обращения Галактики и Андромеды вокруг общего центра масс равен T , то поворот на угол φ_0 происходит за время

$$\tau = \frac{T}{2\pi} \varphi_0. \quad (2)$$

Период T можно найти из обобщенного (в школьном учебнике астрономии он называется уточненным) III закона Кеплера:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \left(\frac{M_1+m_1}{M_2+m_2}\right) = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3.$$

Записывая его для систем Земля — Солнце и Галактика — Андромеда и пренебрегая массой Земли, получаем:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \left(\frac{M_G+M_A}{M_0}\right) = \left(\frac{R}{R_0}\right)^3, \quad (3)$$

где $T_0=1$ год (земной).

Из уравнений (1), (2) и (3) находим:

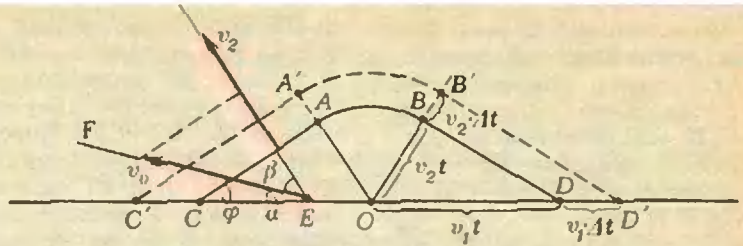
$$\tau = \frac{\lambda}{2\pi D} T_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{3/2} \left(\frac{M_0}{M_G+M_A}\right)^{1/2} \approx 10^3 \text{ лет.}$$

В. Е. Белонучкин

Ф1018. Катер, привязанный у берега большого озера (береговая линия — прямая), неожиданно отвязался, и ветер погнало его с постоянной скоростью $v_0=2,5$ км/ч под углом $\alpha=15^\circ$ к берегу. Сможете ли вы догнать катер, если ваша скорость

Пусть в момент обнаружения обрыва катера вы находились на берегу в точке O (см. рисунок), а катер, оторвавшись в точке E , движется по прямой EF , составляющей с линией берега угол $\alpha=15^\circ$, со скоростью $v_0=2,5$ км/ч. Чтобы ответить на вопрос задачи, построим границу области достижимости — той области, в которой спустя время t после начала вашего движения вы можете оказаться, «комбинируя» ходьбу и плавание. Эта граница (см. рисунок) представляет собой дугу AB окружности радиусом $|OA|=$

на берегу $v_1=4$ км/ч, в воде — $v_2=2$ км/ч? При какой скорости катера это вообще возможно?



$=|OB|=v_2t$ и два отрезка касательных к этой окружности — CA и DB , причем $|OC|=|OD|=v_1t$ (подробно о построении этой границы рассказывалось в статье «Об оптимальных траекториях движения» в «Кванте» № 6 за 1982 год, с. 30). Спустя время Δt граница области достижимости займет новое положение $C'A'B'D'$, причем $|CC'|=|DD'|=v_1 \cdot \Delta t$, $|AA'|=|BB'|=v_2 \cdot \Delta t$. Легко понять, что если проекция скорости катера на направление OA (в этом направлении распространяется со скоростью v_2 плоский участок границы области достижимости) будет больше скорости v_2 , то вы никогда не догоните катер. Минимальное значение скорости катера, при которой догнать катер уже невозможно, определяется из условия (см. рисунок)

$$v_{\min} \cos \beta = v_2, \text{ где } \beta = \varphi - \alpha.$$

Поскольку $\varphi = \arcsin \frac{v_2}{v_1} = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ$, $\cos \beta = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, и

$$v_{\min} = v_2 \sqrt{2} \approx 2,8 \text{ км/ч.}$$

При движении катера со скоростью $v_0=2,5$ км/ч ($v_0 < v_{\min}$) проекция скорости катера на направление OA меньше v_2 , поэтому, как бы долго вы ни задержались на берегу, при правильной стратегии передвижения догнать катер можно (граница области достижимости обязательно нагонит катер).

С. С. Кротов

Ф1019. В большой сосуд с жидкостью, плотность которой ρ_1 , опущен маленький цилиндрический сосуд с площадью основания S , в дно которого вставлена трубочка длиной l (рис. 1); стенки сосудов жестко скреплены между собой. В маленький сосуд наливают подкрашенную жидкость плотностью ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) до высоты H так, что уровни жидкостей в большом и малом сосудах совпадают. В некоторый момент времени отверстие в трубочке открывают. Тяжелая жидкость начинает вытекать в большой сосуд, через некоторое время легкая жидкость из большого сосуда втекает в маленький сосуд; затем процесс повторяется. Какая масса тяжелой жидкости вытечет из маленького сосуда в первый раз? Какая

После открытия отверстия в трубочке жидкость плотностью ρ_2 будет вытекать в большой сосуд до тех пор, пока давление в точке A (рис. 2) со стороны жидкости плотностью ρ_1 не станет равно давлению жидкости плотностью ρ_2 . Из этого условия легко находится масса жидкости, которая вытечет из маленького сосуда в первый раз.

Для этого запишем условия равновесия (см. рис. 2):

$$\rho_1 g(H+l) = \rho_2 g(h+l) = \rho_2 g(H - \Delta h + l), \quad (1)$$

где $\Delta h = (H-h)$ — понижение уровня жидкости в маленьком сосудае. Отсюда

$$h = \frac{\rho_1}{\rho_2} H - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} l, \quad \Delta h = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} (H+l),$$

и

$$\Delta m = \rho_2 \cdot \Delta h \cdot s = (\rho_2 - \rho_1)(H+l)s$$

(s — площадь основания маленького сосуда).

Для упрощения дальнейшего решения сделаем некоторые предположения.

1. Площадь сечения большого сосуда настолько велика, что если жидкость вытекает из маленького сосуда или втекает в него, то уровень жидкости в большом сосудае не меняется.

2. Диаметр трубочки и длина ее настолько малы, что объем этой трубочки по сравнению с объемами сосудов можно пренебречь, т. е. когда жидкость из

масса тяжелой жидкости будет вытекать каждый раз в дальнейшем? Какая масса легкой жидкости будет вытекать каждый раз в маленький сосуд? Считать, что жидкости не смешиваются; поверхностным натяжением пренебречь.

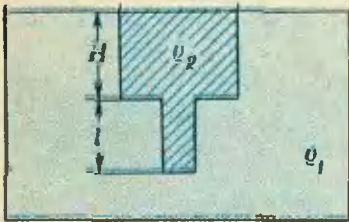


Рис. 1.

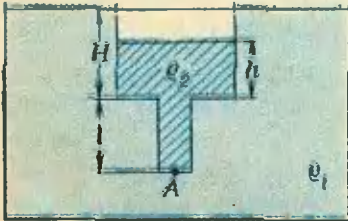


Рис. 2.

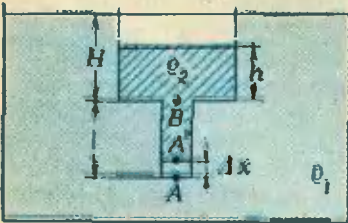


Рис. 3.

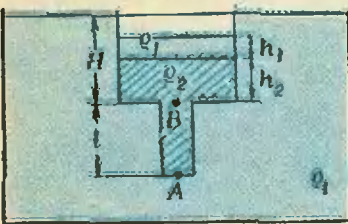


Рис. 4.

трубочки вытекает, уровень жидкости в маленьком сосуде не меняется.

На первый взгляд может показаться, что, после того как давления в точке A выравняются, процесс должен остановиться; но это не так. Такое положение неустойчиво. Предположим, что жидкость плотностью ρ_1 втечет в трубочку на небольшую высоту Δx (рис. 3); тогда давление в точке A' со стороны жидкости плотностью ρ_1 будет больше, чем давление в точке A' со стороны жидкости плотностью ρ_2 .

Действительно, давление в точке A' со стороны жидкости плотностью ρ_1 будет равно $p_1 = \rho_1 g(H + l - \Delta x)$, а со стороны жидкости плотностью ρ_2 — $p_2 = \rho_2 g(h + l - \Delta x)$; разность этих давлений

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\rho_2 - \rho_1)g \cdot \Delta x$$

будет двигать жидкость вверх, поскольку $\rho_1 g(H + l) = \rho_2 g(h + l)$ — условие равновесия (см. (1)). Жидкость плотностью ρ_1 будет вытекать в маленький сосуд до тех пор, пока давления сверху и снизу в точке B (см. рис. 3) не выравняются. Жидкость плотностью ρ_1 будет всплывать над жидкостью плотностью ρ_2 (по условию задачи они не смешиваются).

Зapiшем условие равенства давлений в точке B :

$$\rho_1 g H = \rho_1 g \Delta h_1 + \rho_2 g h, \quad (2)$$

где Δh_1 — высота жидкости плотностью ρ_1 , которая втекла в маленький сосуд.

Из (1) и (2) находим: $\Delta h_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} l$, и

$$\Delta m_1 = (\rho_2 - \rho_1) l s.$$

Теперь, когда стала ясна причина перетеканий жидкостей из одного сосуда в другой, напишем уравнения равновесия в более общем случае. Предположим, что равновесие в точке B наступает в момент, когда

$$\rho_1 g H = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2, \quad (3)$$

где h_1 — высота жидкости плотностью ρ_1 и h_2 — высота жидкости плотностью ρ_2 в маленьком сосуде (рис. 4). Мы уже знаем, что положение равновесия неустойчиво, и жидкость будет вытекать из маленького сосуда, пока давления в точке A не выравняются, а это значит, что

$$\rho_1 g(H + l) = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g(h_2' + l). \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем: $\Delta h_2 = h_2 - h_2' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} l$, и

$$\Delta m_2 = (\rho_2 - \rho_1) l s.$$

Когда давления в точке A равны, положение неустойчиво, и жидкость плотностью ρ_1 будет вытекать в маленький сосуд до тех пор, пока давления в точке B не выравняются, а это значит, что

$$\rho_1 g H = \rho_1 g h_1' + \rho_2 g h_2'. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получаем: $\Delta h_3 = h_1' - h_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} l$, и

$$\Delta m_3 = (\rho_2 - \rho_1) l s = \Delta m_2.$$

Значит, каждый раз из маленького сосуда будут вытекать и втекать одинаковые массы жидкости

$$\Delta m = (\rho_2 - \rho_1) l s.$$

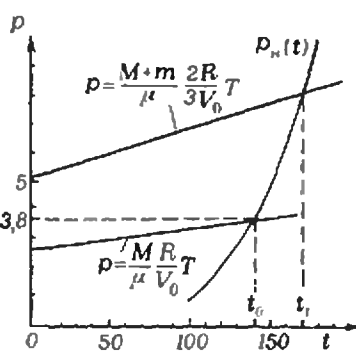
Заметим, что объемы жидкостей, которые вытекают и вытекают из сосуда, будут разные; почему это так, подумайте самостоятельно.

В. Е. Скорозаров

Задачник "Квант"

Ф1020. Подвижный поршень делит цилиндр на две одинаковые части объемом $V_0=10^{-3} \text{ м}^3$. В одной части находится сухой воздух, в другой — водяной пар и $m=4 \text{ г}$ воды. При медленном нагревании цилиндра поршень приходит в движение. После смещения поршня на $1/4$ длины цилиндра движение прекратилось. Какая масса водяных паров находилась в сосуде до нагревания? Какова масса воздуха, находящегося в сосуде, и его начальная температура? При какой температуре поршень перестал двигаться? Зависимость давления насыщенных паров воды от температуры приведена в таблице.

$t, ^\circ\text{C}$	$p_n \cdot 10^{-5}, \text{Па}$
100	1
120	2
133	3
152	5
180	10



Ф1021. В цепи, показанной на рисунке, $R=100 \text{ Ом}$, $C=10 \text{ мкФ}$, $U_0=10 \text{ В}$, внутреннее сопротивление батареи и сопротивление амперметра пренебрежимо малы. Ключ K периодически замыкает на время $\tau_1=1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ и размыкает на время $\tau_2=20 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. При таком режиме переключений стрелка амперметра практически не дрожит. Какой ток показывает амперметр?

Движение поршня прекратится, когда вся вода испарится; при этом слева и справа от поршня будут газы (воздух и водяной пар), состояния которых описываются уравнением Менделеева—Клапейрона. Легко понять, что до этого при движении поршня уменьшался объем воздуха от V_0 до $V_0/2$, а водяной пар все время оставался насыщенным.

Пусть начальная температура и давление T_0 и p_0 , конечные — T_1 и p_1 , и масса водяного пара до нагревания M . Тогда мы можем записать следующие уравнения: для воздуха —

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_0}{2 T_1}; \tag{1}$$

для пара в начальный момент —

$$p_0 V_0 = \frac{M}{\mu_n} R T_0, \quad p_0 = p_n(t_0), \tag{2}$$

в конце процесса —

$$p_1 \frac{3}{2} V_0 = \frac{M+m}{\mu_n} R T_1, \quad p_1 = p_n(t_1), \tag{3}$$

где μ_n — молярная масса водяного пара. Решая совместно уравнения (1) — (3), находим массу водяного пара до нагревания:

$$M = m/2 = 2 \text{ г.}$$

Пользуясь приведенной в условии таблицей, построим график зависимости $p_n(t)$ для водяного пара (см. рисунок). Тогда температура T_0 определяется из условия пересечения этого графика с прямой $p = \frac{M}{\mu_n} \frac{R}{V_0} T$, а T_1 — с прямой $p = \frac{M+m}{\mu_n} \frac{2R}{3V_0}$. Используя этот графический метод решения, находим:

$$t_0 = 140 ^\circ\text{C}, \quad t_1 = 170 ^\circ\text{C}, \\ p_0 \approx 3,8 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Зная температуру $T_0=413 \text{ К}$ и величину p_0 , из уравнения Менделеева—Клапейрона для воздуха ($\mu_a=29 \text{ г/моль}$) находим массу воздуха M_0 :

$$M_0 = \frac{p_0 V_0 \mu_a}{R T_0} \approx 3,2 \text{ г.}$$

А. И. Буздик

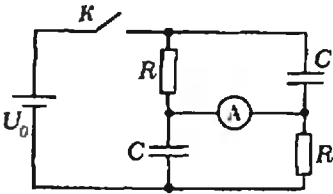
При замыкании ключа конденсаторы почти мгновенно (сопротивление амперметра и внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо малы) заряжаются до напряжения $U_3 = \frac{U_0}{2}$, а при размыкании ключа практически полностью разряжаются. Поясним это. Разряжается каждый конденсатор через резистор R . Ток разряда в первый момент —

$$I_0 = \frac{U_3}{R} = \frac{U_0}{2R}.$$

Если бы этот ток не изменялся, то конденсатор полностью разрядился бы за время

$$\tau = \frac{q}{I_0} = \frac{C U_3}{I_0} = RC.$$

На самом деле ток уменьшается по мере разряда конденсатора, и конденсатор разряжается все медлен-



нее; формально говоря, он полностью не разрядится никогда. Нас же интересует не абсолютно полный его разряд, а такой, при котором просто $U \ll U_0$; для этого достаточно потребовать, чтобы $T_{\text{разр}} \gg \tau$. В нашем случае $T_{\text{разр}} = \tau_2 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ с} \gg \tau = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Рассчитаем заряд, протекший через амперметр при замыкании ключа:

$$q_1 = \frac{U_0}{2R} \tau_1 - C \frac{U_0}{2}$$

(напряжение на резисторах равно $\frac{U_0}{2}$, ток резисторов протекает через амперметр).

При размыкании оба конденсатора разряжаются через амперметр:

$$q_2 = 2 \frac{CU_0}{2}$$

Средний ток

$$I_{\text{ср}} = \frac{q_1 + q_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{-C \frac{U_0}{2} + \frac{U_0}{2R} \tau_1 + CU_0}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{U_0}{2R} \frac{\tau_1 + RC}{\tau_1 + \tau_2} \approx 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

А. Р. Зильберман

Задача 1022 "Черный ящик"

Ф1022. «Черный ящик» содержит катушку, резистор и конденсатор и имеет три вывода. При его исследовании были получены следующие результаты.

В схеме, показанной на рисунке 1, амперметр показал $I_1 = 0,1 \text{ А}$ при частоте генератора $\nu_1 = 1000 \text{ Гц}$; ток через амперметр отставал по фазе от входного напряжения на $\Delta\varphi_1 = \pi/6$. Когда частоту генератора уменьшили в 100 раз, ток возрос менее чем в 2 раза. Частоту генератора вернули к прежнему значению и вместо амперметра в цепь включили вольтметр (рис. 2). Вольтметр

Возможных схем (из упомянутых в условии задачи трех элементов) довольно много — 24. Поэтому нужно вначале их нарисовать и решить — какие из них в принципе могут удовлетворять поставленным условиям. Чтобы не пропустить какой-либо схемы, нужно их разумно классифицировать — например: нарисуем вначале все схемы, в которых к точке 2 («общей») присоединен только резистор, потом — только конденсатор, потом — только катушка. Таких схем всего 12. Затем нарисуем схемы, где к этому выводу подключены ровно два элемента — этих схем 6. Остались еще схемы: ни один из элементов не подключен к общему проводу — их 5, и все три элемента подключены к общему проводу — такая схема одна. (Мы тут не рассматриваем схем, в которых точки 1 или 3 оказываются не подключенными, — понятно почему.)

Довольно простой анализ показывает, что условиям задачи может удовлетворять только схема, приведенная на рисунке 3. В схеме с амперметром, включенным параллельно конденсатору (см. рис. 1), можно «выбросить» конденсатор — амперметр идеальный, значит, ток через конденсатор вообще не идет. На рисунке 4 приведена такая «упрощенная» схема (рис. 4, а) и векторная диаграмма напряжений (рис. 4, б). Из диаграммы имеем:

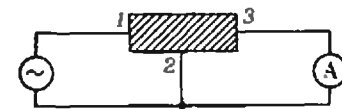


Рис. 1.

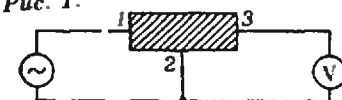


Рис. 2.

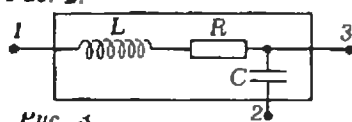


Рис. 3.

$$\frac{X_L}{R} = \text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

откуда

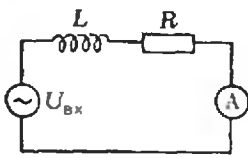
$$X_L = \frac{1}{\sqrt{3}} R \text{ и}$$

$$I_1 \sqrt{R^2 + X_L^2} = I_1 \frac{2R}{\sqrt{3}} = U_0 \Rightarrow I_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{U_0}{R}.$$

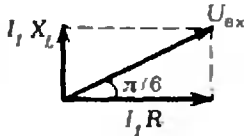
На рисунке 5 приведена схема «черного ящика» с подключенным вольтметром (рис. 5, а) и диаграмма напряжений (рис. 5, б):

Эксперимент "Кванта"

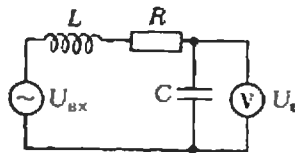
показал $U_1 = 20$ В, а сдвиг фаз между напряжением на вольтметре (U_0) и входным напряжением ($U_{вх}$) опять составил $\Delta\varphi_1 = \pi/6$. Найдите по этим данным параметры элементов «черного ящика». Во сколько раз нужно изменить частоту генератора, чтобы в схеме с вольтметром (см. рис. 2) сдвиг фаз между U_0 и $U_{вх}$ составил $\Delta\varphi_2 = \pi/2$? Измерительные приборы считать идеальными. Внутреннее сопротивление генератора пренебрежимо мало.



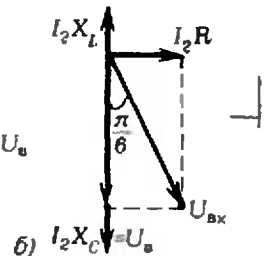
а)
Рис. 4.



б)



а)
Рис. 5.



б)

$$\frac{X_C - X_L}{R} = \sqrt{3} \Rightarrow X_C = R\sqrt{3} + X_L = \frac{4}{\sqrt{3}}R, \quad \frac{X_L}{X_C} = \frac{1}{4};$$

$$U_C - U_L = \frac{3}{4}U_0 = U_{вх} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}U_{вх},$$

откуда

$$\frac{U_0}{I_1} = \frac{2U_{вх}}{\sqrt{3}} \frac{2R}{U_{вх}\sqrt{3}} = \frac{4}{3}R \Rightarrow R = \frac{3}{4} \frac{U_0}{I_1} = 150 \text{ Ом.}$$

Следовательно,

$$L = \frac{X_L}{2\pi\nu_1} = \frac{R}{2\pi\nu_1\sqrt{3}} \approx 14 \cdot 10^{-3} \text{ Гн,}$$

$$C = \frac{1}{2\pi\nu_1 X_C} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\nu_1 \cdot 4R} \approx 0.46 \text{ мкФ.}$$

Сдвиг фаз между U_0 и $U_{вх}$ будет равен $\Delta\varphi_2 = \pi/2$ при частоте генератора

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi\nu_1\sqrt{3}}{R} \frac{2\pi\nu_1 \cdot 4R}{\sqrt{3}}} = 2\nu_1,$$

так что $\nu_1 : \nu = 0,5$.

А. Р. Зильберман

Трехзначные числа и орграфы

Эта заметка посвящена решению задачи M1002 из Задачника «Кванта». Напомним ее условия:

M1002. а)* Рассеянный математик, забыв трехзначный код своего подъезда, нажал кнопки (с цифрами 0, 1, ..., 9) по одной в секунду. Дверь откроется, если три цифры кода в нужном порядке будут набраны подряд (то, что до этого были набраны лишние цифры, не мешает). Математик уверен, что даже в случае «крайнего невезения» (если нужная комбинация встретится последней) он сможет войти в подъезд не позже, чем через 16 мин 42 с (1002 с). Прав ли он? Как он должен действовать, чтобы попасть домой за наименьшее время?

Ответьте на последний вопрос, если

б) исправны только кнопки с цифрами 1, 2, 3 (другие цифры в код не входят).

в)* исправны все кнопки, но математик помнит, что все три цифры кода различны.

Комментарий
к условию задачи

В каждой из трех задач (а, б и в) нужно ответить на два вопроса:

1) за какое наименьшее время t_{\min} можно заведомо — даже в случае «крайнего невезения» — отыскать забытый код?

2) как нужно действовать, чтобы попасть домой за наименьшее время?

В этой заметке мы полностью разберемся с первым вопросом. Второй же вопрос, как мы увидим, нуждается в уточнении; мы приведем некоторый рецепт действий для рассеянного математика и поясним, что в нем надо улучшить.

Идея решения

Различных трехзначных кодов — тысяча; если наби-

рать их один за другим: 001, 002, 003, ..., 998, 999, 000, то, конечно, рано или поздно наткнешься на забытый код. Но на это может уйти 3000 с (50 мин) — почти втрое больше, чем запланированные 1002 с!

Как же уложиться в 1002 с? Да и возможно ли это?

Посмотрите: если нажать подряд кнопки с цифрами от 1 до 9, то за 9 с будут проверены не три кода (123, 456, 789), а семь: 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789. Выписанные коды образуют цепочку: *первые две цифры каждого следующего совпадают с последними двумя цифрами предыдущего.*

Чтобы уложиться в 1002 с, нужно вытянуть в такую же цепочку *все* трехзначные коды — тогда мы начнем набирать первый код в 1-ю секунду, второй — во 2-ю, третий — в 1000-ю.

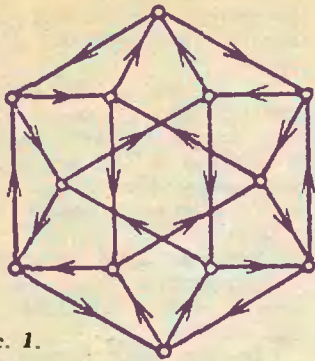


Рис. 1.

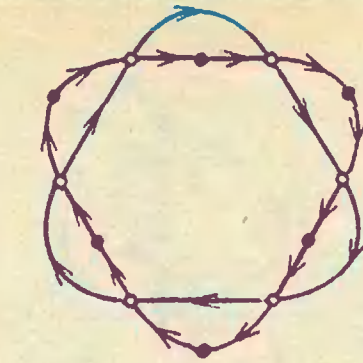
Отсюда, кстати, следует, что в случае «крайнего невезенья» меньше, чем в 1002 с, не уложиться: если нужная комбинация из трех цифр встретится последней, то кнопки с этими тремя цифрами будут нажаты в 1000-ю, 1001-ю и 1002-ю секунды.

Цель ясна: упорядочить все трехзначные коды так, чтобы каждый следующий начинался с двух последних цифр предыдущего, но достижима ли она?

Вот близкая ситуация, где достичь ее не удается.

Пусть известно, что цифры трехзначного кода различны и что это — цифры 1, 2 и 3. Иными словами, нужно проверить всего 6 кодов: 123, 132, 213, 231, 312 и 321. Если удастся вытянуть их в цепочку, то подбор кода займет 8с. Но вытянуть их в одну цепочку нельзя! Они образуют две цепочки (какие?), так что на подбор кода уйдет не 8, а 10с (проверьте!).

Разобраться с возникшим вопросом и организовать последовательную проверку кодов нам поможет специально подобранный ориентированный граф (сокращенно — оргграф). Так называется конечное множество точек (именуемых вершинами оргграфа), если некоторые из них соединены стрелками (дугами, на которых указано направление); в частности, не исклю-



чаются стрелки-петли, соединяющие вершину саму с собой.

Оргграф T_{10}

Построим оргграф, с помощью которого решается задача а). Возьмем 100 точек. Запишем их парами цифр: 00, 01, 02, ..., 98, 99. От точки ab к точке bc проведем стрелку, если $b=d$. Например $13 \rightarrow 38$, $45 \rightarrow 55$; в частности, любую точку с номером из двух одинаковых цифр соединим саму с собой.

Обозначим построенный оргграф T_{10} .

На стрелке от ab к bc напишем трехзначный код abc : $13 \xrightarrow{138} 38, 33 \xrightarrow{333}$. Любой трехзначный код будет написан ровно 1 раз: скажем, 455 будет написано на стрелке от 45 к 55. Тем самым T_{10} содержит 100 вершин и 1000 стрелок со всеми возможными трехзначными номерами. При этом из каждой вершины выходит 10 стрелок и в каждую вершину входит 10 стрелок: из ab выходят стрелки $ab0, ab1, \dots, ab9$, в ab входят стрелки $0ab, 1ab, \dots, 9ab$.

Идя по стрелкам, можно попасть из любой вершины ab в любую вершину cd :

$$ab \xrightarrow{abc} bc \xrightarrow{bcd} cd.$$

Оргграфы, обладающие таким

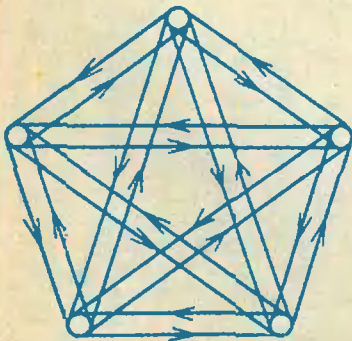
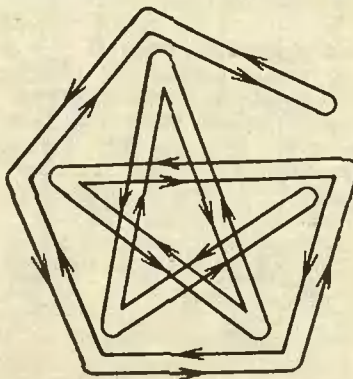


Рис. 2.



свойством, будем называть связными.

Напомним: наша цель — вытянуть все трехзначные коды в цепочку; цель будет достигнута, если мы обойдем T_{10} по стрелкам, пройдя по каждой стрелке ровно 1 раз.

Существование такого обхода обеспечивает

Теорема об эйлеровом цикле

Назовем оргграф правильным, если для каждой его вершины A число стрелок, выходящих из A , равно числу стрелок, входящих в A ; будем обозначать это число p_A .

Примеры: в T_{10} для каждой вершины ab

$$p_{ab}=10;$$

на рисунке 1 изображены два правильных связных оргграфа (или, если хотите, один правильный несвязный оргграф), в них для некоторых вершин $p_A=2$, для других — $p_A=1$.

Теорема. В любом правильном связном оргграфе существует цикл (замкнутый путь по стрелкам), проходящий по каждой стрелке ровно один раз (рис. 2).

Будем называть такие циклы эйлеровыми.

Доказательство теоремы об эйлеровом цикле

Возьмем любую вершину A и пойдем из нее по стрелкам произвольным образом, «сжигая за собой мосты» — стирая стрелки, по которым уже прошли. Поскольку стрелок конечное число, на каком-то шагу мы застрянем — придем в тупик, из которого нет выхода. Застрять в вершине $B \neq A$ мы не можем, так как из B выходит столько же стрелок, сколько входит в B . Значит, тупик — это исходная вершина A .

Итак, наш путь — цикл s , начинающийся и кончающийся в A . Так как мы сразу стирали каждую стрелку, по которой прошли, цикл s ни по какой стрелке не проходит дважды.

Если цикл s содержит все стрелки оргграфа, то он — эйлеров, и теорема доказана.

Если нет, то среди вершин, через которые проходит s , найдется вершина A_1 , из которой торчит нестертая стрелка s_1 (если бы такой вершины не нашлось, наш оргграф оказался бы несвязным, рис. 3).

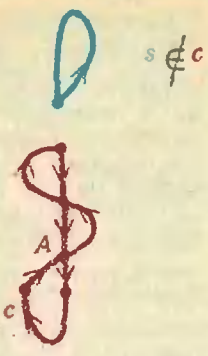


Рис. 3.

Выйдем из A_1 по стрелке s_1 и пойдем по еще не стертým стрелкам, сразу — как и раньше — стирая их за собой. Дойдя до нового тупика (разумеется, это — вершина A_1), получим новый цикл c_1 с началом и концом A_1 .

«Срастим» s_1 и c_1 в один цикл C (рис. 4), для этого прежде, чем проходить часть A_1A цикла c_1 , пройдем по циклу s_1 , а потом уже пройдем путь A_1A .

Если C содержит все стрелки орграфа, то он эйлеров, и теорема доказана. Если нет, то среди вершин, по которым проходит C , найдется вершина A_2 , из которой торчит стрелка s_2 , и т. д.

Последовательно наращивая наш цикл, мы на каком-то шагу исчерпаем все стрелки. Теорема доказана.

Знаючи легко обнаружат, что приведенное доказательство можно сделать более точным и коротким, если использовать метод математической индукции. А вот элегантное доказательство, по

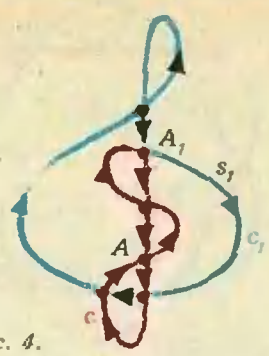


Рис. 4.

существовавшее с приведенным: среди циклов, не проходящих ни по какой стрелке дважды, возьмем самый длинный.

Мы предпочли приведенное доказательство потому, что оно содержит рецепт построения эйлерова цикла.

Найдем t_{min}

Рассмотрим поочередно задачи а), б) и в).

а) Так как T_{10} — правильный связный орграф, в нем существует эйлеров цикл e . Он проходит ровно 1 раз по каждой из 1000 стрелок. Возьмем любой трехзначный номер i , начиная со стрелки с этим номером, обойдем T_{10} по циклу e . Последовательные номера стрелок, по которым проходит e , дают искомую последовательность кодов: она включает все трехзначные коды, и в ней каждый код, кроме 1-го, начинается с двух последних цифр предыдущего.

Цель, которую мы ставили перед собой в задаче а),

достигнута. Тем самым в этой задаче действительно $t_{min} = 1002$ с.

б) Так же, как T_{10} , строится орграф T_3 для решения задачи б); он содержит 9 вершин и 27 стрелок со всевозможными трехзначными номерами из цифр 1, 2, 3 (рис. 5).

Эйлеров цикл в орграфе T_3 существует (рис. 6). Поэтому ответ в задаче б): $t_{min} = 29$ с.

Вообще, если кнопок n и код трехзначный, то соответствующий орграф T_n содержит n^2 вершин и n^3 стрелок, а $t_{min} = (n^3 + 2) c$.

в) Пусть теперь известно, что все цифры забытого трехзначного кода различны. Если кнопок n ($n > 3$), то таких кодов $n(n-1)(n-2)$; при $n = 3$ это 6 кодов, о которых мы говорили, обсуждая идею решения; при $n = 10$ (задача в)) таких кодов 720.

Возьмем $n(n-1)$ точек и занумеруем их парами различных цифр; при $n = 3$ получим 6 точек: 12, 13, 21, 23, 31 и 32; при $n = 10$ получим 90 точек: 01, 02, ..., 09; 10, 12, ..., 19; ..., 90, 91, ..., 98. От ab к dc проведем стрелку, если $b = d, a \neq c$; напомним на ней код abc . Подчеркнем, что по построению a, b и c попарно различны.

Получим правильный орграф D_n : $p_{ab} = n - 2$ для каждой его вершины ab (рис. 7).

При $n > 3$ орграф D_n — связный (проверьте!), при $n = 3$ — несвязный (рис. 8).

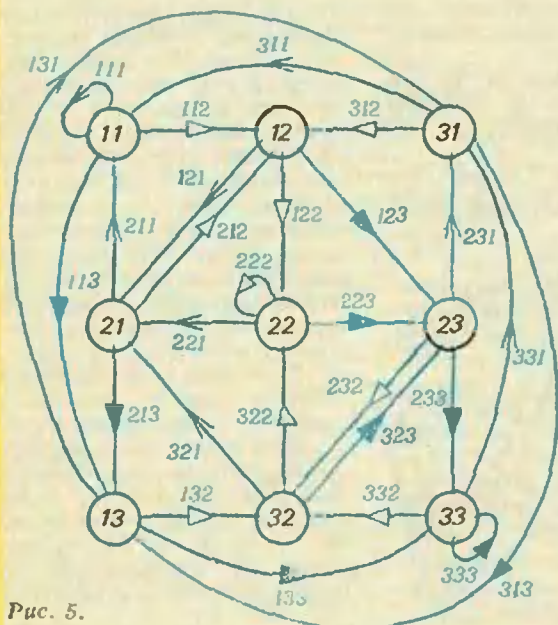


Рис. 5.

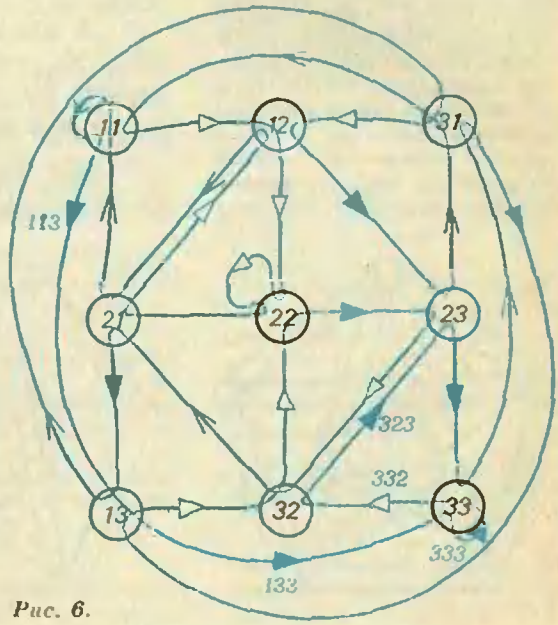


Рис. 6.

Наша обложка

Красивый многогранник, показанный на обложке, обладает *кубической симметрией*. Это значит, что он — как и куб — симметричен относительно девяти плоскостей, одного центра, а также совмещается сам с собой при повороте на углы, кратные $\pi/2$, около трех осей, и на углы, кратные $2\pi/3$, около четырех осей. Произвольную грань многогранника можно поочередно подвергать этим преобразованиям, и она поочередно совместится с 23 другими гранями того же вида.

Создавать подобные многогранники можно с помощью техники, разработанной В. Н. Гамаюновым и связанной с вычерчиванием *эпюров* специального вида (*проектно-графическими чертежами*, см. «Квант», 1982, № 2, с. 39). Мы не будем пояснять здесь построение таких эпюров, а расскажем, как можно сконструировать *модель* показанного многогранника по готовому эпюру.

Для этого следует увеличить эпюр (он приведен на второй странице обложки) до нужного размера и каждую выделенную деталь (кроме красной) аккуратно вырезать

из тонкого картона или плотной бумаги в 24-х экземплярах. Для удобства склейки, стороны деталей можно расширить «язычками», которые друг к другу и приклеиваются, когда соответствующие детали (грани) имеют общее ребро на многограннике. (Впрочем, можно обойтись без язычков и склеивать грани вдоль ребер «липучкой».)

Детали вырезаны. Как понять, с чем склеивать данную деталь? В этом помогают черные дужки, имеющиеся на эпюре. Например, чтобы узнать, к какому ребру приклеивается ребро AB большой зеленой детали, следует найти черную дужку на прямой AB (она расположена в точке O) и повернуть прямую около O на угол, заданный дужкой (здесь — 180°); тогда ребро AB перейдет в ребро $A'B'$ желтой детали: именно к нему следует приклеить ребро AB . Точно так же для ребра EF : ищем дужку на прямой EF , находим ее в точке P и поворачиваем около P на угол 90° , в результате чего EF совмещается с $E'F'$, что и дает необходимую склейку. Аналогично, дужка в 60° в точке Q

указывает, что ребро QE приклеивается к ребру QE , но конечно не к той же грани, а к другому ее экземпляру. И так далее.

Имея готовые детали и зная их схему склейки, остается только запастись клеем, липучкой и терпением, и очень тщательно склеить модель, сверяясь иногда с изображением на обложке.

Двадцать четыре идентичных «острия» нашего многогранника, расположенные парами, расходятся лучами в шести направлениях. На фотографии некоторые из них видны «сбоку» и потому выглядят более тонкими, чем те, которые видны в «анфас» (а некоторые вообще не видны). Сечение каждого острия представляет собой самопересекающийся четырехугольник.

Читателю, возможно, интересно узнать, к чему на эпюре красная четырехугольная деталь. Отвечаем: из нее (вернее, из 24 экземпляров этой детали, склеенных в соответствии с дужками в точках S и M) можно склеить еще один (выпуклый) многогранник, представляющий собой часть «выброшенной середины» нашей конструкции. Образовавшаяся на месте красного многогранника и вокруг него пустота и придает нашей модели легкость и определенное изящество.

Н. В. Лавров

Задача для исследования

а) На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в «крестики-нолики». Выигрывает тот, кто первым поставит подряд *девять* своих знаков по вертикали, горизонтали или диагонали. Докажите, что при правильной игре никто не может выиграть: най-

дите беспронгрышную стратегию для второго игрока.

б) Докажите аналогичное утверждение для следующей игры. На бесконечном поле, составленном из шестиугольников, двое играют в «крестики-нолики». Выигрывает тот, кто первым поставит подряд

семь своих знаков в шестиугольнике, примыкающие друг к другу по сторонам (возможны три направления). в) Верно ли утверждение задачи а) для чисел $m < 9$ и задачи б) для чисел $n < 7$?

О. А. Степанов

Возвращаясь к напечатанному

В заметке В. И. Стомахина «Геометрические преобразования в планиметрических задачах» («Квант», 1986, № 12, с. 16) решение задачи 6 (см. с. 18) верно только в случае, когда все углы треугольника меньше 120° ; если один из углов треугольника больше

или равен 120° , то искомым точкой является вершина этого угла.

Замечание к задаче 7 также справедливо лишь для треугольников ABC , все углы которых меньше 120° . Если же один из углов больше 120° ,

то точка O лежит вне треугольника ABC , и из нее две стороны треугольника видны под углом 60° , а третья — под углом 120° . Если же один угол треугольника равен 120° , то указанные три прямые пересекаются в вершине этого угла.

"Квант" для младших школьников.

Задачи

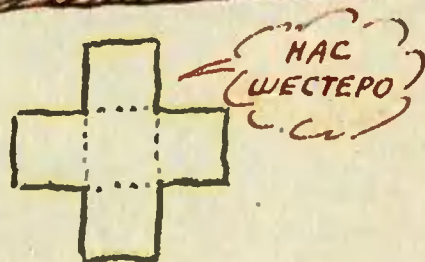
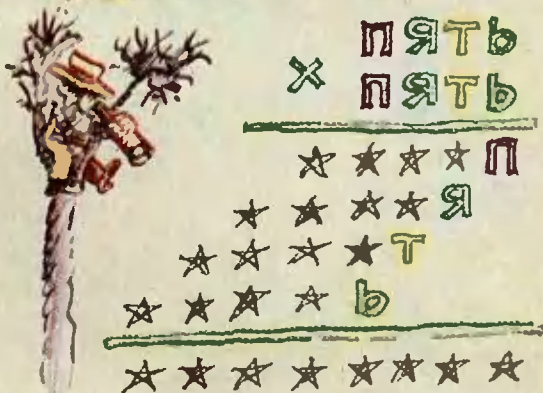
1. У меня дома есть три ведра, каждое из которых вмещает целое число литров. Если вылить полное первое ведро воды во второе, то вода займет там ровно $\frac{2}{3}$ его объема, а если вылить полное первое ведро в третье, то вода займет $\frac{3}{4}$ его объема. Однажды я наполнял водой тридцатилитровую бочку, сначала вылив первое ведро, потом второе, затем третье ведро, но бочка еще не наполнилась. Сколько литров воды можно было еще в нее влить?

2. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. В нем разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые.

3. В Великобритании и США температуру принято измерять по шкале Фаренгейта, по которой температура плавления льда составляет 32° , а температура кипения воды 212° . Существует ли температура, при которой количество градусов по шкале Цельсия и по шкале Фаренгейта будет совпадать?

4. Шеф секретной службы составил следующую инструкцию взаимной слежки для своих семи главных агентов: агент 001 следит за тем, кто следит за агентом 002, агент 002 — за тем, кто следит за агентом 003, и т. д.; агент 007 следит за тем, кто следит за агентом 001. Но вдруг пришел приказ — взять на службу еще агента 008. Сможет ли шеф составить аналогичную инструкцию для восьми агентов?

5. Имеется кубик и шесть одинаковых крестообразных фигур, вырезанных из бумаги (см. рисунок). Площадь каждой бумажной фигуры равна площади одной грани кубика. Можно ли этими кусками бумаги целиком оклеить поверхность кубика?



Эти задачи предложили С. Р. Сефибеков, Б. А. Мукушев, А. П. Савин, Г. А. Гальперин, В. В. Произволов.



О ЧЕМ МОГУТ РАССКАЗАТЬ ЦИФРЫ

*Доктор педагогических наук
Н. А. РОДИНА*

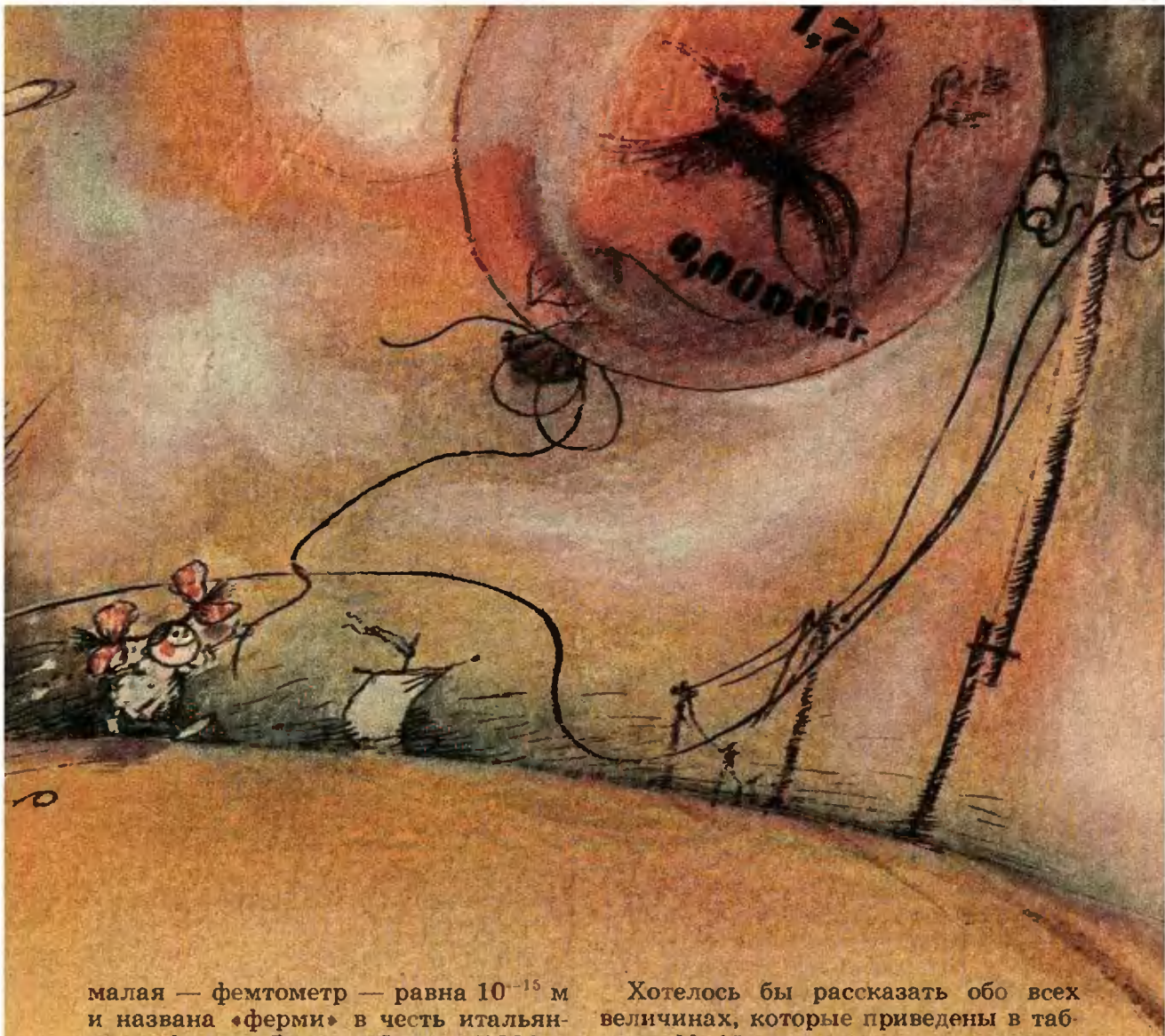
Как вы думаете, сколько энергии расходуется ученик на выполнение домашнего задания? Наверное, этот вопрос многих читателей поставит в тупик: можно ли сосчитать эту энергию? как? Отвечаем: можно; вот ответ: в среднем около 500 кДж. А получили мы этот ответ так. Открыли на странице 118 книгу с таким, казалось бы, прозаическим названием — «Справочник по физике и технике», и...

Дальнейшие действия, читатель, станут вам ясны, если и вы откроете эту книгу. И мы думаем, что если вы это сделаете, то уже не сможете оторваться от ее страниц, хотя основное содержание книги — таблицы, графики, цифры. «Но цифры тоже

имеют свой язык, умеют говорить, рассказывать о различных вещах и явлениях природы...» С этими словами автора книги — Анатолия Сергеевича Еноховича — нельзя не согласиться. Цифры расскажут нам много нового, любопытного...

Вы узнаете, например, что длина инфузории-туфельки — 300 микрометров, а длина реки Нил — самой протяженной реки на Земле — 6700 км, что расстояние между телеграфными столбами составляет 50—60 м (таблица № 19).

А что такое микрометр? В таблице № 13 приведены единицы измерения малых длин. Самая большая из них — микрометр — равна миллионной доле метра, т. е. 10^{-6} м: самая



малая — фемтометр — равна 10^{-15} м и названа «ферми» в честь итальянского физика Энрико Ферми (1901—1954), который в 1942 году осуществил цепную ядерную реакцию в первом ядерном реакторе (и об этом написано в справочнике).

В той же таблице № 19 находим, что диаметр молекулы кислорода составляет 0,3 нанометра ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$). Вычислим, во сколько раз длина инфузории-туфельки больше диаметра этой молекулы: $(300 \times 10^{-6}) : (0,3 \cdot 10^{-9}) = 10^6$. Инфузория, которую можно увидеть только в микроскоп, в миллион раз «длиннее» молекулы! А Нил, оказывается, длиннее Волги в 1,9 раза.

Зная расстояние между телеграфными столбами, можно, заметив время движения машины между столбами, определить ее скорость.

При помощи ручного динамометра можно проверить, соответствует ли сила вашей правой руки среднему значению для вашего возраста (таблица № 58).

Хотелось бы рассказать обо всех величинах, которые приведены в таблице № 19, ведь из нее вы узнаете, что эвкалипты (самые высокие деревья в мире) выше пирамиды Хеопса, а наиболее глубокая пробуренная на Земле скважина глубже Марианской впадины — самого глубокого места в мировом океане.

Автор справочника рассказывает нам и о том, что масса самой маленькой птицы — колибри — равна 1,7 г, а масса крылышка мухи — 0,00005 г.

В таблицу № 30 не успели попасть данные о мировом рекорде в беге на коньках для равнинных катков, установленном в 1984 году И. Железовским на дистанции 1000 м, но там указано время пробега такой же дистанции на высокогорном катке — 1 мин 12,58 с. Зная время, показанное И. Железовским (1 мин 14,3 с), можно вычислить и сравнить скорости этих двух рекордных пробегов.

Состязания, в которых побеждает тот, кто затрачивает на движение

меньшее время, проводятся в беге по дорожке, в беге на коньках, в плавании. В каком из этих видов движения человек показывает абсолютно большую скорость? Почему скорость бега на коньках на дистанции 1000 м больше, чем на 500 м? Может ли человек в каких-нибудь видах спорта превысить скорость движения ласточки (17,5 м/с)? гепарда (31 м/с)?

Из таблицы № 43 мы узнаем, что каждая точка Земли на широте Москвы движется вследствие вращения Земли со скоростью 259 м/с. У точек экватора эта скорость достигает 465 м/с. Почему мы не замечаем этого движения? Или все же существуют явления, позволяющие нам заметить его, как замечаем мы движение поезда, находясь в нем?

Есть ли деревья, которые тонут в воде? Такие деревья существуют, это бакаут («железное дерево») и черное дерево — плотность их древесины больше, чем плотность воды. Эти сведения дают таблицы № 49 и № 55. Эти же таблицы сообщают, что из всех пород дерева самую малую плотность имеет древесина бальзы: она «лучше» всех плавает в воде, из нее, как указано в сноске к таблице № 55, был изготовлен плот «Кон-Тики». Вот почему участники плавания на «Кон-Тики» разыскивали бальзовое дерево в Южной Америке, преодолевая громадные трудности: в сезон дождей они через Анды перебрались в район джунглей и вывезли оттуда двенадцать бальзовых деревьев, девять из которых пошли на сооружение плота (описанию этого путешествия посвящена целая глава в известной книге Т. Хейердала).

А если плот такого же объема, как «Кон-Тики», изготовить не из бальзы, а из сосны, то во сколько раз будет меньше его грузоподъемность (т. е. масса груза, который плот может удержать до полного погружения)? Получить ответ на этот вопрос вам поможет таблица № 55.

Как вы думаете, какие расстояния пробегают от одного соударения до другого молекулы воздуха в комнате? Можно ли такое расстояние отложить на бумаге при помощи остро отточенного карандаша? Оказывается, нельзя: в обычных условиях средняя длина свободного пробега молекул воздуха 60 нанометров (а число соуда-

рений молекул в секунду составляет 7,5 миллиардов). А вот на высоте 80 км над Землей воздух так разрежен, что расстояние между молекулами в среднем равно 4,4 мм (таблица № 105); такой отрезочек можно отложить карандашом на бумаге.

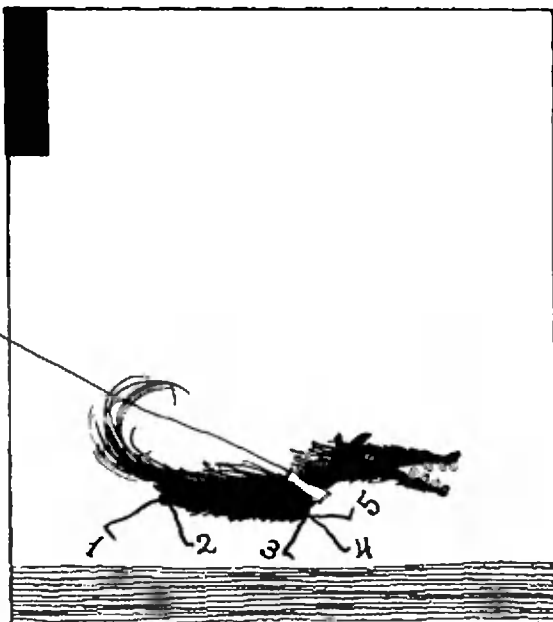
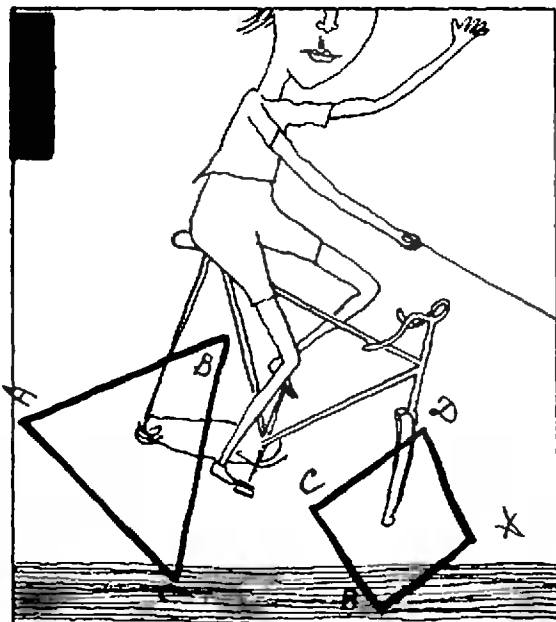
За один киловатт-час электроэнергии мы платим 4 копейки. Но о настоящей «цене» сэкономленного киловатт-часа мы узнаем из таблицы № 203. Такая энергия расходуется на производство 1,5 кг писчей бумаги или 39 кг сахарного песка, на добычу 30 кг нефти или выплавку 0,5 кг стали. На выработку 1 кВт·ч расходуется около 600 г каменного угля.

Справочник будет вам помощником при решении различных практических задач, которые могут возникнуть и на уроке, и дома, и при работе в школьных мастерских или на производстве, и при конструировании и изготовлении различных приборов, моделей...

Есть ли еще подобные книги? В любом справочнике можно найти интересные сведения и необходимые для решения задач таблицы физических величин, таких как плотность, удельная теплоемкость, температура кипения и т. п. Но книга «Справочник по физике и технике. Учебное пособие для учащихся» А. С. Еноховича (М., Просвещение, 1983) — это особый справочник, особая книга. Она учит, заинтересовывает, воспитывает. Ее значение так же велико, как значение книг Я. И. Перельмана, М. И. Блудова.

Создание справочника потребовало от его автора огромного труда. Тысячи данных нужно было разыскать в множестве книг, каждое число проверить, а если нужно, то обновить — ведь развивается техника, растут скорости и мощности машин и электростанций, дальность и длительность космических полетов, коэффициенты полезного действия механизмов... Впервые в справочное пособие по физике включены такие интересные таблицы, как «Скорости движения в живой природе», «Физика человека», данные об автомобилях, тракторах, зерноуборочных комбайнах, о знаменательных событиях в истории физики...

Спасибо автору книги за все это.



Школа «Кванте» ●

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Выручает описанная окружность» предназначена восьмиклассникам, «Лишние условия в конкурсных задачах» — девятиклассникам и десятиклассникам.

Выручает описанная окружность

Хорошо известно, что величина центрального угла равна величине дуги, заключенной между его сторонами, а величина вписанного угла — половине величины дуги, заключенной между его сторонами. При решении планиметрических задач нередко полезно провести окружность, описанную около треугольника или четырехугольника. При этом отмеченные выше свойства можно сформулировать так.

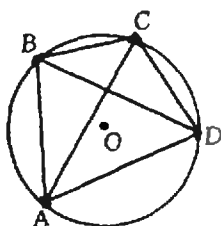


Рис. 1.

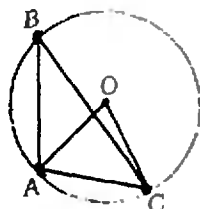


Рис. 2.

I. Если четырехугольник $ABCD$ вписанный (рис. 1), то $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ (а также $\angle DBC = \angle DAC$, $\angle ADB = \angle ACB$, $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$).

II. Если точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD и при этом $\angle ABD = \angle ACD$ или $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, то четырехугольник $ABCD$ — вписанный (см. рис. 1).

III. Если треугольники ABC и AOC лежат по одну сторону от прямой AC и точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , то $\angle AOC = 2\angle ABC$ (рис. 2).

IV. Если треугольники ABC и AOC лежат по одну сторону от прямой AC , $OA = OC$ и $\angle AOC = 2\angle ABC$, то O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (см. рис. 2).

Покажем на примерах, как этими свойствами можно воспользоваться при решении задач.

Пример 1. В треугольнике ABC : $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$. Точка M лежит внутри треугольника, причем $\angle MAC = \angle MCA = 40^\circ$. Найдите $\angle BMC$.

Решение. Так как $\angle AMC = 100^\circ = 2\angle B$, $MA = MC$, по свойству IV точка M — центр окружности, описанной около треугольника ABC

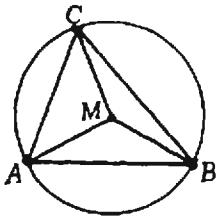


Рис. 3.

(рис. 3). Следовательно, по свойству III $\angle BMC = 2\angle A = 140^\circ$.

Пример 2. В треугольнике ABC : $AB=AC$, $\angle BAC=40^\circ$. Вне треугольника ABC , но внутри угла ABC взята точка M , такая что $\angle AMB=30^\circ$, $\angle BMC=20^\circ$ (рис. 4). Найдите $\angle ABM$.

Решение. По свойству IV точка A — центр окружности, описанной около треугольника BCM . Поэтому $AB=AM$ и $\angle ABM = \angle AMB = 30^\circ$.

Пример 2 можно обобщить на любой треугольник ABC , в котором $AB=AC$, $\angle BAC=2\angle BMC$, $\angle AMB = \alpha$. Тогда $\angle ABM = \alpha$.

Задача 3. В треугольнике ABC : $AB=BC$, $\angle ABC=80^\circ$. Точка M лежит внутри треугольника, причем $\angle MAC=10^\circ$, $\angle MCA=30^\circ$. Найдите $\angle BMC$ (рис. 5).

Решение. Углы BAC и BCA равны 50° . Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника AMC . Тогда по свойству III $\angle AOM=60^\circ$, поэтому треугольник AOM — правильный. Далее, BO — серединный перпендикуляр к отрезку AC (так как $AB=BC$ и $AO=OC$). Прямоугольные треугольники ABK и AOK равны, поскольку $\angle OAK=60^\circ-10^\circ=50^\circ=\angle BAK$. Следовательно, $AB=AO$, но $AO=AM$, поэтому $AB=AM$. В равнобедренном треугольнике ABM углы ABM и AMB равны $(180^\circ-40^\circ):2=70^\circ$. Наконец, $\angle BMC=360^\circ-140^\circ-70^\circ=150^\circ$ (см. рис. 5).

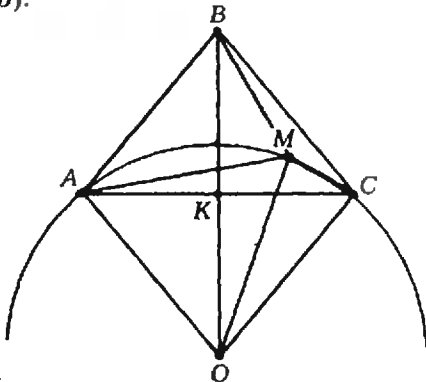


Рис. 5.

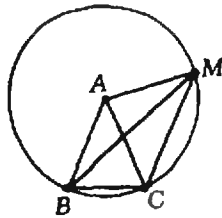


Рис. 4.

В заключение предлагаем пять задач для самостоятельного решения.

Задачи

1. В треугольнике ABC : $\angle A=50^\circ$, $\angle B=60^\circ$. Точки D и E выбраны на сторонах AB и BC так, что $\angle DCA=\angle EAC=30^\circ$. Найдите $\angle CDE$.

2. В треугольнике ABC : $\angle A=30^\circ$, $\angle B=80^\circ$. Точка M лежит внутри треугольника, при этом $\angle MAC=10^\circ$, $\angle MCA=30^\circ$. Найдите $\angle BMC$.

3. В треугольнике ABC : $\angle A=20^\circ$, $\angle C=30^\circ$. Точка K лежит внутри треугольника, при этом $\angle KAC=\angle KCA=10^\circ$. Найдите $\angle BKC$.

4. В треугольнике ABC : $AB=BC$, $\angle C=40^\circ$. Вне треугольника ABC , но внутри угла BAC взята точка M , такая что $\angle AMC=50^\circ$, $\angle ABM=\angle ACM$. Найдите $\angle BCM$.

5. В треугольнике ABC : $\angle A=84^\circ$, $\angle C=78^\circ$. Точки D и E выбраны на сторонах AB и BC так, что $\angle ACD=48^\circ$, $\angle CAE=63^\circ$. Найдите $\angle CDE$.

Д. Ф. Изаак

Лишние условия в конкурсных задачах

В этой заметке речь идет о двух малоудачных задачах по математике, предлагавшихся в свое время (в 1971 году) поступающим в МИФИ и МФТИ и опубликованных вместе с решениями в 1972 году в «Кванте». Вот эти задачи:

Задача 1 (МИФИ, 1971; «Квант», 1972, № 6, с. 52, 75–76). Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найдите это число.

Задача 2 (МФТИ, 1971; «Квант», 1972, № 5, с. 43). Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найдите это число.

На самом же деле для решения задачи 1 достаточно знать лишь второе условие, а для решения задачи 2 — первое условие.

Действительно, записав искомое число в виде $10x+y$ ($1 \leq x \leq 9$, $1 \leq y \leq 9$), в задаче 1 из второго условия получим

$$10x+y=3xy+5 \quad (xy \neq 0).$$

Выразим x через y :

$$x = \frac{5-y}{10-3y}. \quad (*)$$

(Окончание см на с 47)



Матвей Петрович Бронштейн (1906—1938) был физиком-теоретиком очень широких интересов. Он занимался астрофизикой и физикой полупроводников, космологией и ядерной физикой. Важнейшая его ра-

бота относится к квантовой теории гравитации. Прожил Матвей Петрович всего тридцать с небольшим лет, но успел сделать очень многое. Иначе в наше время его не вспоминали бы выдающиеся советские физики, его имя не появлялось бы в физических статьях, написанные им книги не переиздавались бы спустя многие десятилетия и о нем не было бы написано в Большой Советской Энциклопедии.

Кроме научных работ, профессор М. П. Бронштейн оставил нам книги, написанные для любознательных юных читателей. О сложной физике он умел говорить просто, понятно и правильно (а это все не одно и то же). Он рассказывал о науке как о необычайно удивительном и важном деле, чем она и была для него самого. Однако интересна ему была не только наука. Много сил он отдал научно-популярной литературе. И, наверное, не случай-

но. Его отрочество пришлось на трудные годы революции и гражданской войны, и учиться в школе ему не довелось. Главными его учителями были книги и журналы. Учился он любил и сделался — сделал себя! — необычайно образованным человеком, читал на нескольких языках, тремя владел свободно. А кроме всего, он был очень хорошим человеком, и ему хотелось делиться своими знаниями, радостью познания с другими.

Первым выпуском «Библиотечки «Квант» стало переиздание его книги «Атомы и электроны». В библиотеках можно найти также его книги «Солнечное вещество» — о том, как и где (на Солнце!) был обнаружен гелий, и «Лучи Икс» — об удивительном открытии Рентгена. Книга, отрывок из которой здесь приводится, не успела выйти отдельным изданием, она была напечатана только в журнале «Костер» в 1936 году. В этой книге рассказывается, как изучение малоприметной искорки привело к изобретению радио и к другим чудесам, к которым мы довольно быстро привыкаем, но которые от этого не становятся менее замечательными.

Публикацию подготовил Г. Е. Горелик.

Лаборатория „Кванта“

Изобретатели радиотелеграфа

(Главы из книги)

М. П. БРОНШТЕЙН

Кто и когда?

Кто и когда изобрел радио?

Одни на этот вопрос отвечают: изобрел его Александр Степанович Попов, и было это сорок лет тому назад. Другие говорят: радио изобрел итальянец Гульельмо Маркони.

И в самом деле: сорок лет назад и Попов, и Маркони одновременно построили первые в мире радиостанции и начали посылать первые в мире радиотелеграммы.

Но история радио началась значительно раньше, чем была послана первая радиотелеграмма. Ученые, которые своими открытиями и опытами начали историю радио, не посылали и не принимали никаких радиотелеграмм. Они и не стремились к тому, чтобы передавать на расстояние какие-либо сигналы или музыку, или звуки человеческой речи. Как удивились бы

эти первые изобретатели радиотелеграфа, если бы им сказал кто-нибудь, что они изобретают радиотелеграф!

Передача звуков, сигналов, изображений их нисколько не занимала. Их интересовало другое.

Видели ли вы когда-нибудь электрические искры, которые вылетают из наэлектризованных предметов? Блестящие электрические искорки, вспыхивающие на одно мгновение и сейчас же угасающие снова?

Вот с этих-то искорок и началась история радио.

Много десятилетий физики наблюдали электрическую искру, делали с ней опыты, изучали ее свойства. Наконец, они захотели узнать: какой срок проходит от рождения искры до ее смерти? Сколько времени живет электрическая искра?

Вопрос был трудный. Обыкновенно на него отвечали так: она вспыхивает и сейчас же угасает, она живет всего только одно мгновение. Но что такое мгновение? Сотая доля секунды или тысячная доля, или миллионная? Как узнать это, как измерить?

Течение времени ощущает всякий человек. Все мы отличаем минуту от двух минут, секунду от двух секунд и даже десятую часть секунды от це-

лой секунды. Но все, что меньше одной десятой, одной пятнадцатой доли секунды, — все это для нас уже неразлично, все это — и сотая, и тысячная, и миллионная доля секунды — кажется нам совершенно одинаковым. Органы чувств у нас не такие уж быстрые, точные, изощренные. Во всяком промежутке времени, который меньше одной пятнадцатой части секунды, мы не улавливаем никакой длительности. Поэтому-то в нашем ощущении сотая доля секунды сливается с тысячной, тысячная с миллионной. Миг — и все тут.

Ну, а часы? Ведь они для того и сделаны, чтобы измерять время. Не могут ли часы измерить длительность одного мгновения?

Зайдем на фабрику, изготавливающую точные приборы. Мы увидим там и стенные часы, и башенные, и карманные. Мы найдем там и хронометры, которые берут с собой моряки, отправляясь в далекое плавание, и сверхточные часы для астрономических наблюдений, и электрические хронографы, и секундомеры. Но часов, измеряющих миллионные доли секунды, на фабрике мы не найдем.

И все же такие часы существуют. Семьдесят пять лет тому назад их изобрел и построил немецкий физик Вильгельм Феддерсен. Он изобрел их специально для того, чтобы измерить, сколько времени живет электрическая искра.

Он и не подозревал, что, создавая эти часы, он начинает историю радио.



Часы Феддерсена

Часы, построенные Феддерсенем, дожили и до нашего времени. Они хранятся в музее, в немецком городе Мюнхене.

На обыкновенные наши часы они ничуть не похожи. Ни часовой, ни минутной, ни даже секундной стрелки у них нет. О каких стрелках может идти речь, когда нужно мерить миллионные доли секунды? Где найти

стрелку, которая успевала бы сделать в секунду миллион заметных глазу шажков? А шажки эти должны быть заметны — ведь к этому и сводилась задача Феддерсена.

И вот Феддерсен после долгих раздумий сообразил, какая стрелка нужна его часам. Он смастерил ее не из бронзы, не из стали, а из материала, которого до него не употреблял ни один часовщик.

Он построил ее из лучей света.

Возьмем маленькое карманное зеркальце и вынесем его на улицу, на солнечный свет. Лучи солнца отражаются от зеркальца, отскочат от него блестящим ярким зайчиком.

Начнем поворачивать зеркальце. Как быстро забегает зайчик, как танцует он и запрыгает, отражаясь от зеркальца, которое дрожит у меня в руке! Только что он был совсем близко, но вот зеркальце чуть-чуть повернулось, и зайчик уже перебежал на другую сторону улицы и прыгает по стенам, по карнизам, по балконам домов.

Быстро движется зайчик — в сто, в тысячу раз быстрее секундной стрелки часов. А нельзя ли как-нибудь заставить его кружиться не в сто, а в миллион раз быстрее?

Можно. Стоит только сильнее завертеть зеркальце. Лучше вертеть не руками, а машиной — ведь машина проворнее человеческих рук, и к тому же точнее: какую скорость закажешь ей, с такой она и будет работать.

В машине, устроенной Феддерсенем, тяжелая многопудовая гиря, опускаясь, тянула за собой канат. Канат поворачивал вал, на который было насажено зубчатое колесо. Это колесо, вращаясь, цеплялось зубцами за другое зубчатое колесо, другое — за третье, а третье — за нарезку большого стального винта. Постепенно переходя от колеса к колесу, движение все усиливалось, все убыстрялось: первое колесо поворачивалось не очень быстро — делало всего только несколько оборотов в секунду, второе вращалось быстрее, третье еще быстрее. А быстроходнее всех был стальной винт: каждую секунду он успевал совершить целых сто оборотов вокруг своей оси.

Для того чтобы весь этот прибор, набирая скорость, не дрожал и не

трясая, Феддерсен решил укрепить его на прочной подставке. В капитальную стену комнаты он вделал две чугунные балки, а к ним привинтил массивную чугунную коробку, открытую спереди и с боков. Вращающийся винт своего прибора он пропустил сквозь дно и крышку коробки.

Осталось теперь приделать к винту зеркало, от которого отскакивали бы зайчики. Феддерсен купил два вогнутых стекла для очков — обыкновенных очков, какие носят близорукие люди. Эти стекла Феддерсен посеребрил — каждое с одной только стороны. Получились два блестящих вогнутых зеркальца. Феддерсен укрепил их на своем винте так, чтобы одно смотрело в одну сторону, другое — в другую. Когда гиря падала и винт приходил в движение, оба зеркальца, прикрепленные к винту, равномерно и быстро кружились вместе с ним.

Механизм новоизобретенных часов был готов. Но это еще не все. Ведь для часов нужен не только часовой механизм, заставляющий вращаться стрелку, нужен еще и циферблат, чтобы измерять пройденный стрелкой путь.

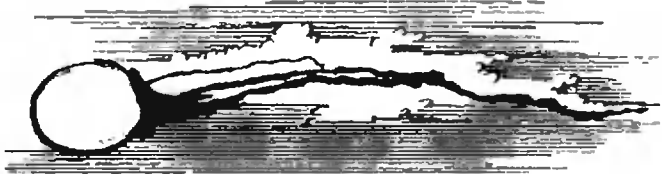
Если стрелка сделана из света, из чего же должен быть сделан циферблат?

Долго думал Феддерсен, долго искал он подходящий для этого дела материал. Наконец, нашел: фотопластинка, чувствительная к свету фотопластинка, будет циферблатом обыкновенных часов. На этом циферблате электрическая искра сама, своими собственными лучами, отметит начало и конец своей короткой жизни. Лучи искры упадут на вращающееся зеркало, стремительный зайчик скользнет по фотографической пластинке и оставит на ней свой след. Чем дольше будет гореть искра, тем длиннее окажется след зайчика. А по длине следа, зная скорость зайчика, уже нетрудно будет сосчитать, сколько времени бежал он по пластинке, — сколько времени горела электрическая искра.

Прибор Феддерсена был закончен. Стальной винт был установлен в чугунной раме, вращающееся зеркало работало исправно, фотографическая пластинка лежала наготове. Наготове была и лейденская банка — источник

электрических искр. Банка эта состоит из трех стаканчиков, вставленных друг в друга: наружный — металлический, средний — стеклянный, а внутренний — опять металлический.

Феддерсен зарядил банку: наружный металлический стаканчик положительным электричеством, а внутренний металлический — отрицательным. Затем проводами он соединил банку с двумя металлическими шариками, поставленными друг против друга. Эти шарики называются разрядником. Внутренний стаканчик банки Феддерсен соединил с одним шариком разрядника, наружный с другим. Теперь оставалось только нажать на кнопку, замыкающую и размыкающую электрическую цепь, чтобы заряд электричества устремился из банки по проводам. Положительный заряд побежит навстречу отрицательному, и между шариками разрядника вспыхнет блестящая тонкая искра.



История искорки

Феддерсен приступил к опытам со своими необыкновенными часами. Он отпустил гирю, приводившую в движение зубчатые колеса и винт. Сейчас же винт и зеркальце начали поворачиваться так быстро, что у Феддерсена замелькало в глазах. С тонким свистом вращалось насаженное на винт маховое колесо. Прислушиваясь к этому свисту, Феддерсен убедился в том, что прибор его действует исправно: звук был все время одной и той же высоты, — значит, ось вращается равномерно, не замедляя и не убыстряя своего движения.

Тогда Феддерсен погасил свет и открыл кассету, в которой была приготовлена фотографическая пластинка, а затем нажал кнопку, замыкающую электрическую цепь. И сейчас же в темноте между шариками разрядника проскочила искра: это электрический заряд устремился из одного металлического стаканчика лейденской банки в другой. В мгновение

ока пробежал он по проводам и яркой электрической искрой пробил себе дорогу от одного шарика к другому.

Искра горела всего только миг, но в течение этого неуловимого мига быстрый отблеск от зеркала успел упасть на фотографическую пластинку. Он пробежал по пластинке со скоростью артиллерийского снаряда и вычертил на ней свой путь.

Тут же на месте, не отходя от прибора, Феддерсен проявил пластинку и отпечатал фотографический снимок. На снимке была явственно видна узкая полоска — след, оставленный зайчиком.

Феддерсен измерил длину полоски — полтора сантиметра. Скорость зайчика была ему известна — 60 000 сантиметров в секунду. Сколько же времени бежал зайчик по пластинке? Длину полоски — 1,5 нужно разделить на скорость движения зайчика — 60 000, получается 0,000025. Итак, значит, двадцать пять миллионов долей секунды — вот сколько времени бежал зайчик по пластинке и столько же времени жила электрическая искра.

Часы Феддерсена с честью выполнили возложенное на них дело. Продолжительность искры была измерена. Задача, которую поставил себе Феддерсен, была решена.

Но, взглядевшись в свой снимок внимательнее, Феддерсен убедился, что часы его совершили еще одно открытие. Они не только измерили длину жизни искры, но еще и узнали, чем наполнена эта короткая жизнь, составили подробную биографию искры.

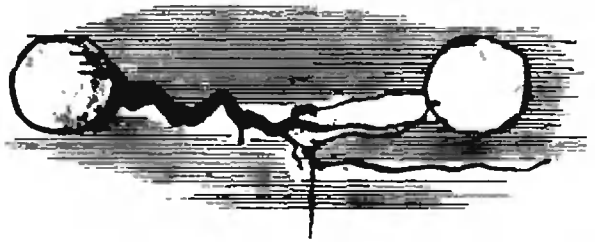
След, вычерченный зайчиком на снимке, оказался не сплошным, а прерывистым. Он состоял из нескольких светлых пятен, отделенных друг от друга темными промежутками.

Значит, электрическая искра, проскочившая между шариками разрядника, вовсе не горела равномерным блеском. В течение всей своей жизни, продолжавшейся всего только 25 миллионов долей секунды, она вспыхивала и угасала несколько раз. Короткие вспышки шли одна за другой так быстро, что человеческий глаз не мог уследить за ними, — несколько вспышек казались глазу одной. И только чудесные часы Феддерсена сумели расчленить мгновение, разло-

жить искру на несколько отдельных вспышек.

Феддерсен сосчитал число вспышек на своем снимке. Их оказалось восемь, и каждая последующая была чуть-чуть слабее предыдущей. Восемь вспышек за двадцать пять миллионов долей секунды! Значит, искра состояла из отдельных искр, загоравшихся и угасавших через каждые три миллионные доли секунды.

Так по записи, сделанной зайчиком, Феддерсен прочитал историю электрической искры, историю, которая от начала до конца продолжалась всего только одно мгновение.



Опыты продолжают

Не один раз повторял Феддерсен свой опыт. Он брал то одну лейденскую банку, то целую батарею из десяти, пятнадцати и даже двадцати лейденских банок. То сдвигал шарики почти вплотную, то раздвигал их на целый сантиметр или на полтора. Менял и самые шарики — брал то железные, то медные, то свинцовые, то золотые. В одних опытах оба шарика были из одного и того же металла, в других — из разных. Провода, которые шли от лейденских банок к шарикам разрядника, Феддерсен брал то короткие и толстые, то длинные и тонкие. И каждый раз он фотографировал отблеск искры во вращающемся зеркальце.

По фотографическим снимкам измерял он, сколько времени длится искра, узнавал, как она вспыхивает, горит и гаснет.

Искры получались разной яркости, разной длины, разной продолжительности, но каждая состояла не из одной только вспышки, а из многих. Вспышки следовали одна за другой через несколько миллионов долей секунды и становились все слабее и слабее, пока искра не угасала.

Почему же электрический заряд прокладывает себе путь между шариками разрядника не одним скачком,

а несколькими судорожными скачками?

Размышляя об этом, Феддерсен вспомнил одну статью о разряде лейденской банки, которую он когда-то читал. Статья эта была написана в 1853 году английским ученым Уильямом Томсоном. Томсон не делал никаких опытов с лейденской банкой, да он и вообще не занимался опытами. Зато он был очень искусным математиком. Он знал физические законы, которые управляют электрическим током, и умел выводить математические следствия из этих законов. И вот Томсон попробовал с помощью вычислений установить — что же собственно происходит с электрическим зарядом, когда заряжают лейденскую банку.

Вычисления Томсона показали: электрический заряд, добежав по проводам от стаканчика лейденской банки до разрядника, совершает прыжок с шарика на шарик и устремляется по проводу снова в банку, но уже в другой стаканчик. Таким образом оба заряда, положительный и отрицательный, меняются местами.

Отрицательный заряд, который был сперва, скажем, во внутреннем стаканчике банки, с разбега перелетит в наружный, а положительный из наружного во внутренний. Таким образом банка не разрядится, а только зарядится по-новому, и электрический ток снова помчится к разряднику, но уже в обратном направлении. То взад, то

вперед станет бегать электрический заряд, перескакивая с одного шарика на другой, — снова со второго на первый и снова с первого на второй.

«Так вот оно в чем дело!» — подумал Феддерсен. Вот почему прибор отметил на снимке не одну искру, а целых восемь. Значит, восемь раз проскакивал электрический ток с шарика на шарик то в одну сторону, то в другую. И каждый раз в разряднике появлялась блестящая вспышка. Кончилась вспышка, и сейчас же появилась другая — это снова прорвался электрический ток, но уже в обратном направлении. Вспышка за вспышкой сверкала в узком пространстве между шариками, пока продолжалась жизнь искры, и с каждой вспышкой менялось направление тока. Пробежал ток в одну сторону — вспышка, пробежал назад — новая вспышка.

Вращающееся зеркало Феддерсена подтвердило догадку Томсона: электрическая искра — это маленький отрезок переменного электрического тока. Через ничтожные промежутки времени, через каждые несколько миллионных долей секунды ток изменяет свое направление.

Так вращающееся зеркало помогло Феддерсену изучить природу электрической искры.

(Начало см. на с. 42)

Выражение $\frac{5-y}{10-3y}$ положительно при $y < \frac{10}{3}$ и $y > 5$; поскольку $1 \leq y \leq 9$, нужно проверить целочисленные значения $y = 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9$. Подставляя последовательно эти значения в выражение $\frac{5-y}{10-3y}$, получим единственное целочисленное значение $x = 2$ при $y = 3$. Поэтому второму условию задачи 1 удовлетворяет единственное двузначное число 23. Это же число не противоречит и первому условию задачи 1, которое, таким образом, является ненужным.

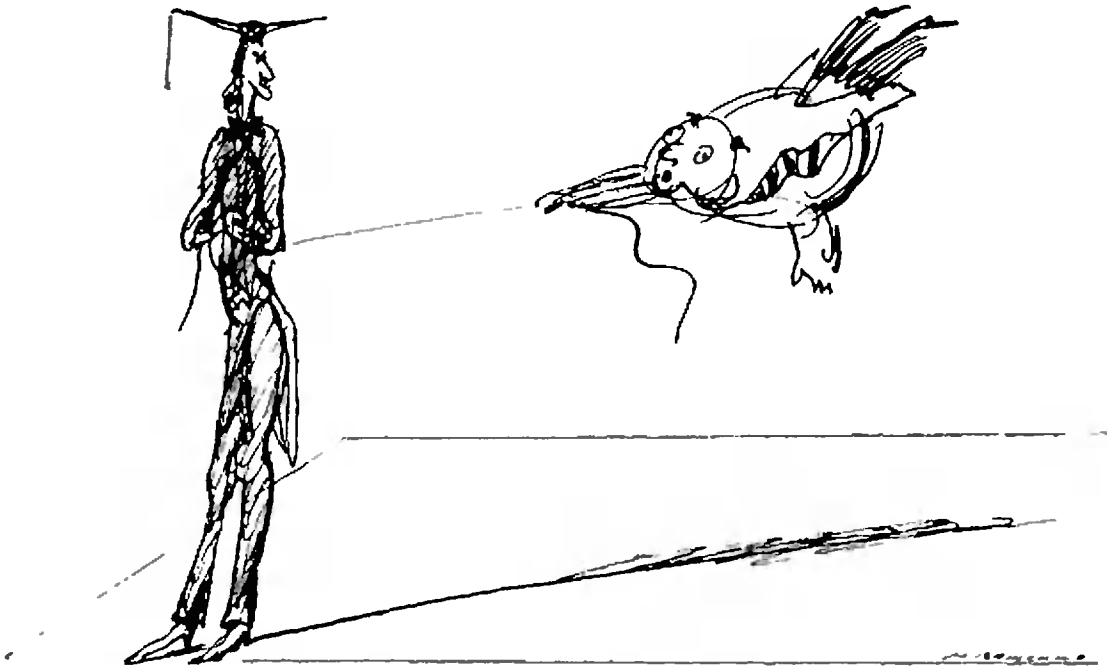
В задаче же 2 первое условие дает

$$10x + y = 3xy + 9, \\ 1 \leq x < 9, 1 \leq y \leq 9. \text{ Отсюда}$$

$$x = \frac{9-y}{10-3y},$$

и после очевидного перебора значений $y = 1, 2, 3$ находим единственное число 63. Оно не противоречит и второму (лишнему в данном случае) условию задачи.

Р. Ю. Винокур



Траектории абитуриента ●

Маневрирование в космосе

Кандидат физико-математических наук
В. Е. БЕЛОНУЧКИН

В предыдущей статье этого автора «Законы Кеплера и школьная физика» («Квант», 1986, № 2) были разобраны некоторые задачи на движение различных космических объектов. В данной статье обсуждается еще несколько, теперь уже более сложных, вопросов на ту же тему.

Вероятно, аналогичные задачи могут встретиться скорее на физических олимпиадах, чем на вступительных экзаменах. Однако мы полагаем, что знакомство с ними окажется для абитуриентов небесполезным.

Большие и малые планеты, кометы, естественные спутники планет миллионы и миллионы лет двигаются по одним и тем же траекториям. Не так обстоит дело с искусственными космическими аппаратами. Спутники переходят с орбиты на орбиту, стыкуются и разделяются, с них осуществляется запуск межпланетных станций.

Каждый маневр в космосе — сложная научно-техническая задача. Для ее решения необходимо учесть мно-

жество различных факторов, провести массу точнейших расчетов, с ювелирной точностью выполнить те операции, которые предписаны результатами расчетов.

Мы рассмотрим простейшие маневры и проведем лишь самые грубые оценки. Наиболее «изошренным» нашим орудием будет второй закон Кеплера, постулирующий, что радиус-вектор тела, свободно движущегося в окрестностях тяготеющего центра, за равные промежутки времени описывает равные площади.

Начнем с широко известной задачи.

Задача 1. *Каким должно быть изменение скорости спутника, обращающегося по околоземной орбите, чтобы он мог навсегда покинуть Землю?*

Для решения этой задачи нам не потребуется даже второй закон Кеплера. Зато мы постараемся вспомнить несколько полезных для дальнейшего формул и соотношений.

Как известно, для движения по околоземной орбите тело должно иметь скорость, равную первой космической $v_{1к} = 7,9$ км/с, а для того чтобы улечь от Земли, необходима вторая космическая скорость («скорость убегает»

ния*) $v_{IIк} = 11,2$ км/с. Изменение скорости, очевидно, должно составить $\Delta v = v_{IIк} - v_{Iк} = 3,3$ км/с. Но давайте вспомним, откуда взялись эти цифры — 7,9 и 11,2 км/с?

Первая космическая скорость определяется из условия, что центростремительное ускорение телу массой m , движущемуся по круговой орбите радиусом R_3 (радиус Земли $R_3 = 6,38 \cdot 10^3$ км), сообщает сила гравитационного притяжения к Земле (телу массой M_3):

$$\frac{mv_{Iк}^2}{R_3} = G \frac{mM_3}{R_3^2}.$$

Заметим, что комбинация GM_3/R_3^2 (G — гравитационная постоянная) как раз определяет ускорение силы тяжести на поверхности Земли $g_0 = 9,8$ м/с². Следовательно, можно записать

$$v_{Iк} = \sqrt{g_0 R_3} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Сложнее обстоит дело со второй космической скоростью. Для ее вычисления нам потребуется выяснить, как зависит потенциальная энергия тела в поле тяготения от расстояния до тяготеющего центра. В нашем случае это можно сказать более простыми словами: надо найти формулу для потенциальной энергии тела в поле тяжести Земли.

Привычное выражение mgH справедливо только на небольших расстояниях от поверхности Земли (это ясно из его вывода, в котором считается, что ускорение силы тяжести постоянно и на любой высоте $g = g_0$). Мы же собираемся улететь от Земли насовсем, на «бесконечность». Как меняется потенциальная энергия тела на больших расстояниях от Земли (или другого достаточно массивного тела)?

В выяснении этого вопроса нам может помочь аналогия с взаимодействием электрических зарядов. Сила кулоновского взаимодействия точечных зарядов q и Q , находящихся на расстоянии R друг от друга, равна kqQ/R^2 , а их взаимная потенциальная энергия равна kqQ/R . Сила тяготения также обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами (материальными точками). Похоже, что потенциальная энергия их взаимодействия будет отличаться от силы только тем, что расстояние в знаменателе должно стоять не во второй, а в первой

степени. Однако мы должны вспомнить, что потенциальная энергия — величина относительная. Однозначный смысл имеет только разность потенциальных энергий, а выбор нулевого уровня энергии — в наших руках. И если в формуле mgH нулевая энергия приписывается телу, находящемуся на поверхности Земли, то величина GmM/R обращается в нуль на бесконечности. На любом конечном расстоянии энергия притяжения меньше, значит, она есть величина отрицательная (еще раз подчеркнем, что это связано только с выбором нулевого уровня).

Итак, окончательно потенциальную энергию тела массы m в поле тяготения тела массы M в зависимости от расстояния R между ними можно записать следующим образом:

$$E_p = - \frac{GmM}{R}.$$

Для того чтобы хотя бы с нулевой скоростью «доползти» до бесконечности, нам надо иметь как минимум нулевую полную энергию. Другими словами, должно быть выполнено неравенство

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{R} \geq 0.$$

Значит, телу для ухода на бесконечность нужна скорость

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR},$$

где g — ускорение силы тяжести на расстоянии R от центра «планеты». Подставляя в эту формулу $g = g_0$ и $R = R_3$, получаем знакомое значение $v_{IIк} = 11,2$ км/с.

Напомним, что при этом значении начальной скорости тело, «брошенное» с поверхности Земли, движется по параболе (отсюда еще одно название второй космической скорости — «параболическая»), если скорость еще больше — по гиперболе. Отметим также, что направление скорости почти не имеет значения, надо лишь чтобы тело не врезалось в Землю. В нашем случае это означает, что скорость может быть направлена перпендикулярно радиусу Земли, проведенному в точку, где находится спутник, может иметь составляющую, направленную по радиусу от центра, но не к Земле. Достаточно ясно, впрочем, что значение Δv будет минимальным тогда,

когда векторы $\vec{v}_{1к}$, Δv , а следовательно, и $\vec{v}_{1к}$ направлены одинаково.

Теперь, разобравшись с расчетной стороной задачи о переводе спутника в ранг межпланетной станции, перейдем к «инженерной». В качестве примера обсудим такой вопрос: Какой надо иметь запас топлива, чтобы космонавты, которые находятся на космической станции, обращающейся вокруг Луны, не потеряли надежду на возвращение на Землю?

Рассмотрим конкретную задачу.

Задача 2. *Какую часть массы станции, летающей вокруг Луны по круговой орбите радиусом $2R_L$ ($R_L = 1,74 \cdot 10^3$ км — радиус Луны), должно составлять топливо, чтобы в результате кратковременной работы двигателя можно было выйти из поля тяготения Луны? Скорость истечения продуктов сгорания топлива из реактивного двигателя $u = 4$ км/с. Ускорение силы тяжести на поверхности Луны $g_L = 1,64$ м/с².*

Сначала надо узнать первую (круговую) и вторую (параболическую) космические скорости для тела, находящегося в поле тяготения Луны на расстоянии $2R_L$ от ее центра. Круговая скорость $v_k = \sqrt{gR} = \sqrt{g_L R_L / 2} = 1,19$ км/с. Параболическая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше: $v_n = 1,69$ км/с. Следовательно, скорость станции надо изменить на величину $\Delta v = 0,5$ км/с.

Пересядем в систему координат, которая имеет скорость станции перед моментом включения двигателя. В этой системе продукты сгорания топлива, очевидно, будут иметь скорость u , а станция должна получить скорость Δv , направленную в противоположную сторону. Запишем закон сохранения импульса:

$$x m u = (1 - x) m \Delta v$$

(x — искомая доля массы m , которую составляет топливо), откуда получаем $x = \Delta v / (u + \Delta v) = 0,11$ (то есть 11 %).

Правомерность нашего решения, однако, требует некоторых пояснений. Во-первых, станция (и газы) находится в поле тяжести Луны, и ее импульс за время работы двигателя может измениться под действием этого поля. Поэтому вправе ли мы пользоваться законом сохранения импульса? Наше

оправдание заключается в том, что двигатель работает непродолжительное время, реально — минуту-другую. Период же обращения станции вокруг Луны, как нетрудно сосчитать (он равен $2\pi \cdot 2R_L / v_k$), более 5 часов. Сила тяжести за такое время создает изменение скорости станции всего в несколько метров в секунду (расчет рекомендуем провести самостоятельно), а этим можно пренебречь.

Во-вторых, продукты сгорания выбрасываются двигателем постепенно, по мере сгорания топлива, и скорость станции в течение этого промежутка времени меняется. Действительно, скорость газов относительно исходной системы отсчета непостоянна, ведь u — скорость относительно ракеты. Но мы не зря «перебрались» с Земли на Луну. На нашей орбите необходимое изменение скорости станции заметно меньше скорости газов, и мы не делаем существенной ошибки, считая, что все продукты сгорания имеют одну и ту же скорость. Вот если бы мы обсуждали старт с околоземной круговой орбиты, где Δv почти равно u , такой расчет был бы слишком грубым.

Наконец, третье обстоятельство, наименее очевидное. Нужна ли в данном случае параболическая скорость? Казалось бы, космонавтам достаточно добраться до той точки, где притяжение к Земле сильнее притяжения к Луне, а на бесконечность уходить не обязательно. Какую скорость для этого должен иметь корабль? Луна уступает Земле по массе в 81 раз, значит, точка «пересадки» из сферы притяжения к Луне во владения Земли в 9 раз ближе к Луне, чем к Земле, то есть она находится на расстоянии около 38 000 км от Луны (расстояние от Земли до Луны 384 000 км), а это в 22 раза больше радиуса Луны. Из закона сохранения энергии

$$m \frac{v^2}{2} - m \frac{g_L}{4} \cdot 2R_L = -m \frac{g_L}{(22)^2} \cdot 22R_L$$

найдем

$$v = v_n \sqrt{10/11} = 1,61 \text{ км/с}$$

— полученная скорость несколько меньше параболической. Как видим, разница невелика, однако и этот выигрыш оказывается призрачным. Действительно, мы исходили из того, что в точке пересадки скорость может быть равной нулю. Очевидно, что ка-

сательная составляющая скорости (так называемая секториальная скорость) в этой точке также обратится в нуль. Следовательно, эта последняя должна быть нулевой и сразу же по окончании работы двигателя, то есть скорости \dot{v} должна быть направлена по радиусу от центра Луны. А тогда дополнительная скорость Δv равна совсем не $v - v_k$, а $\sqrt{v^2 + v_k^2} = 2 \text{ км/с}$! Вот вам и выигрыш!

И все-таки выиграть можно. Оказывается, «выгодна» та орбита, у которой точка старта с круговой орбиты является периселением, а точка «пересадки» — апоселением (для Земли — Геи — это перигей и апогей, а для Луны — Селены — периселений и апоселений).

Попробуем рассчитать эту орбиту.

Задача 3. Какую скорость должен иметь корабль на минимальном удалении от Луны $R_1 = 2R_L$, если максимальное его удаление от Луны $R_2 = 22R_L$? (Влиянием тяготения Земли можно пренебречь.)

Запишем для корабля в точках, соответствующих расстояниям R_1 и R_2 , закон сохранения энергии и второй закон Кеплера:

$$\frac{mv_1^2}{2} - G \frac{mM_L}{R_1} = \frac{mv_2^2}{2} - G \frac{mM_L}{R_2},$$

$$v_1 R_1 = v_2 R_2.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM_L(1/R_1 - 1/R_2)}{1 - R_1^2/R_2^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\kappa_L R_L(R_L/R_1 - R_L/R_2)}{1 - R_1^2/R_2^2}} = 1,62 \text{ км/с}.$$

Итак, вместо $v_n - v_k = 0,5 \text{ км/с}$ оказывается достаточным изменение скорости на величину $v_1 - v_n = 0,43 \text{ км/с}$. В переводе на вопрос о запасе топлива это означает, что вместо 11% надо иметь 9,7%. Как видим, разница есть, хотя и небольшая.

Впрочем, вас ждет еще одно разочарование. Предположим, что космонавты достигли рассчитанной «точки пересадки». Скорость корабля в этот момент можно определить, используя все тот же второй закон Кеплера:

$$v_2 = v_1 R_1 / R_2 = 0,15 \text{ км/с}.$$

Но ведь это скорость относительно Луны! А Луна сама движется относительно Земли. В сферу притяжения Земли корабль попал — он оторвался от Луны. Но насколько близко ему удастся подойти к Земле? Сколько еще потребуется топлива, чтобы все-таки до нее добраться? Эти вопросы вынесены в упражнения для самостоятельного решения.

У п р а ж н е н и я

1. Найдите скорость корабля (см. задачу 3 в статье) относительно Земли при переходе из сферы притяжения Луны в сферу притяжения Земли.

2. Точка «перехода» является апогеем орбиты корабля. Насколько близко к Земле он подходит в перигее? Влиянием тяготения Луны можно пренебречь.

3. Какой дополнительный запас топлива надо иметь на корабле, чтобы достигнуть Земли, то есть перейти на орбиту, перигей которой находится на земной поверхности? (Предполагается, что переход на новую орбиту происходит путем кратковременного включения двигателя в апогее старой, то есть сразу после входа в сферу притяжения Земли.)

„Квант“ улыбнется

Ни малейшей работы!
В конце 90-х годов прошлого века Р. Вуд работал помощником профессора Висконсинского университета В. Сноу, который был большим энтузиастом лекционных демонстраций. Вуд рассказывает:

«Иллюстрируя разницу между силой и работой, которая определяется как произведение силы на путь, Сноу обычно упирался в край лекционного стола и толкал его изо всей силы. «Я нажимаю, жму, жму, жму! — лицо его стаио-

вилось красным, на лбу выступил пот... — Никакого движения нет — я жму и жму, и не совершаю ни малейшей работы!» — и он чуть не падал от усталости.»

Материал представил
Б. Е. Явлов



Варианты ступенчатых экзаменов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2 \sin \left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{3} = 0.$$

2. Окружность радиуса 2 касается окружности радиуса 4 в точке В. Прямая, проходящая через точку В, пересекает окружность меньшего радиуса в точке А, а большего радиуса — в точке С. Найдите длину отрезка ВС, если длина отрезка АС равна $3\sqrt{2}$.

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{3^4} \log_3^2 x \leq \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} \log_3 x}.$$

4. Путь из села в город идет сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 9 часов утра выехал автомобилист и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Автомобилист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге в $1\frac{1}{2}$ раза, а мотоциклист — в $1\frac{2}{3}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считать равномерным). Они встретились в 12 часов, автомобилист приехал в город в 14 часов 20 минут, а мотоциклист приехал в село в 16 часов. Определите, сможет ли автомобилист приехать в город до 14 часов 40 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.

5. Найдите все значения a , при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b-6)y - 8z = 8 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z) .

6. В основании пирамиды $PQRST$ лежит четырехугольник $QRST$, у которого стороны QR и ST параллельны, длина стороны QR равна 6, длина стороны QT равна 4, а величина угла RQT равна 120° . Длина ребра PQ равна $2\sqrt{14}$. Найдите объем пирамиды, если известно, что через прямые QR и ST можно провести две плоскости, не совпадающие с основанием пирамиды и пересекающие пирамиду по равным четырехугольникам.

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_5((x+1)(x+3)) \leq 1.$$

2. Найдите координаты точки, лежащей на прямой $-4x - 3y = 25$ и наименее удаленной от начала координат.

3. Число двухкомнатных квартир в доме в четыре раза больше числа однокомнатных,

а число трехкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить в пять раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

4. В окружности радиуса $R = \sqrt{6}$ проведены хорда MN и диаметр MP . В точке N проведена касательная к окружности, которая пересекает продолжение диаметра MP в точке Q под углом в 60° . Найдите длину медианы QD треугольника MQN .

5. Решите уравнение

$$2\sqrt{3} \sin 5x - \sqrt{3} \sin x = \cos 24x - \cos x + 2 \cos 5x - 6.$$

6. Найдите значения a и b , при которых наибольшее значение функции

$$y(x) = \left| \frac{9 \cdot 5^x + 5^{-x} - 2}{4 \cdot 5^x + 5^{-x} + 2} + (a-b) \frac{3 \cdot 5^x - 1}{2 \cdot 5^x + 1} + 2a + b \right|$$

на отрезке $[-1; 1]$ является наименьшим.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x.$$

2. Решите неравенство

$$x - 1 > \frac{4x}{3-x}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y = x, \\ 2 \sin x + \sin 2x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}. \end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$x \log_2(x^2) + 1 = 2x + 2 \log_4 x.$$

5. В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M , делящая отрезок SB в отношении 3:5, считая от точки S . Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

6. В треугольнике ABC проведена высота $АН$ длины h , медиана AM длины l и биссектриса AN . Точка N — середина отрезка $МН$. Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC .

Вариант 4

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_3(x-8) = 2 - \log_3 x.$$

2. Три одинаковых комбайна, работая вместе, убрали первое поле, а затем два из них убрали второе поле (другой площади). Вся работа заняла 12 часов. Если бы три комбайна выполняли половину всей работы, а затем оставшаяся часть сделал один из них, то работа заняла бы 20 часов. За какое время два комбайна могут убрать первое поле?

3. Найдите все значения x из интервала $\left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$, при которых производная функции

$$f(x) = \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos x \right) \cos x \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

равна нулю.

4. На стороне AB треугольника ABC взята точка D , а на стороне AC — точка E так, что длина отрезка AE равна длине отрезка BD и равна 2. Прямые BE и CD пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника BOC , если длина каждой из сторон AB и BC равна 5, а длина стороны AC равна 6.

5. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|y+3|} = 1 - \sqrt{5|x|}, \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Вариант 5

(биологический факультет)

1. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

2. Решите неравенство

$$2^x - 1 < 6 \cdot 2^{-x}.$$

3. Два лыжника вышли с линии старта одновременно с постоянными скоростями по одному и тому же маршруту, причем скорость первого лыжника составила $7/6$ скорости второго. Вслед за ними через 20 минут отправился третий лыжник, который, двигаясь со скоростью 18 км/час, догнал второго лыжника на 30 минут раньше, чем первого. Какова скорость первого лыжника?

4. В треугольнике ABC длина стороны AC равна $3\sqrt{3}$, длина стороны BC равна $\sqrt{13}$. Точка M лежит на стороне AC , точка N лежит на стороне BC , причем прямые MN и AB параллельны. Отрезок MC в 2 раза длиннее отрезка AM . Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке R , лежащей между точками M и N , причем радиус окружности, описанной около треугольника AMR , равен $\sqrt{6} + 3\sqrt{3}$. Найдите длину стороны AB .

5. Найдите все значения b , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 10y^2 = b^4 - 6b^3 + 9b^2 - 19 + \sqrt{85}, \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 6

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$\sin x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

2. Решите неравенство

$$\log_5(1-x) < \log_5(x+3).$$

3. При одновременной работе двух насосов разной мощности бассейн наполняется водой за 8 часов. После ремонта насосов производительность первого из них увеличилась в 1,2 раза, а второго — в 1,6 раза, и при одновременной работе обоих насосов бассейн стал наполняться за 6 часов. За какое время будет наполняться бассейн одним первым насосом после ремонта?

4. Найдите площадь треугольника, образованного осью абсцисс и двумя касательными, проведенными из точки $A(0; 3)$ к графику функции $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$.

5. В треугольнике ABC точка M делит сторону BC пополам, а точка K лежит на стороне AC , причем длина отрезка AK в 4 раза меньше длины стороны AC . Отрезки AM и BK пересекаются в точке O . Длина отрезка AM равна 5,

длина отрезка BK равна 10. Найдите длину отрезка MK , если величина угла AOB равна 135° .

Вариант 7

(географический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x-1}{x^2+6x-4} > \frac{1}{6}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{x^2} \sqrt{5} + \log_x \frac{1}{125} = \frac{11}{8}.$$

3. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно наполняться водой, причем в первую цистерну поступает 120 литров воды в минуту, а во вторую — 40. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, а объем воды в третьей цистерне в два раза меньше, чем во второй, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Сколько литров воды поступает за одну минуту в третью цистерну?

4. В выпуклом четырехугольнике $ABKC$ длина стороны AB равна $\sqrt{3}$, длина диагонали BC равна 1, а величины углов ABC , BKA и BKC равны 120° , 30° и 60° соответственно. Найдите длину стороны BK .

5. Для каждого значения a , удовлетворяющего неравенствам $0 < a < 1$, найдите наименьшее значение выражения $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - a(x - y)$ при условии $\sin(\pi xy) = 0$.

Вариант 8

(геологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x.$$

2. Длины сторон AB , BC и AC треугольника ABC образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите отношение высоты треугольника ABC , опущенной из вершины A , к радиусу вписанной окружности.

3. Решите уравнение

$$\frac{2 \cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3.$$

4. Студенческий строительный отряд оборудовал прямоугольную спортплощадку площадью 0,1 га, установив с противоположных более длинных сторон — трибуны, а с двух других сторон — проволочную сетку. Стоимость установки одного погонного метра трибун и сетки равны соответственно 7 руб. и 3 руб. На установку трибун и сетки израсходовано 820 рублей. Найдите длины сторон спортплощадки.

5. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} > \frac{1}{x} - \frac{1}{b}.$$

6. При всех значениях параметра $p \leq 9$ найдите решения уравнения

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{15} \sin x - \frac{3\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{7} \sin^2 x + \frac{3\pi}{14}\right) + \\ + \cos^2\left(\frac{5\pi}{14} - \frac{\pi}{7} \cos(2x)\right) = \\ = 6 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{15} \sin x + \frac{2\pi}{5}\right) - p \end{aligned}$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

Вариант 9

(отделение политической экономики
экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$5^{x+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}.$$

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4 \sin y = -11, \\ -2x + 5 \sin y = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

3. Найдите все действительные решения уравнения

$$\sqrt{3x+4}(9x^2+21x+10)=0.$$

4. В прямоугольнике $ABCD$, где $|AB|=6$, $|AD|=3\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, расположены две окружности. Окружность радиуса 2 с центром в точке K касается сторон AB и AD . Окружность радиуса 1 с центром в точке L касается стороны CD и первой окружности. Найдите площадь треугольника CLM , если M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L .

5. Линию, связывающую города A и B , обслуживают самолеты трех типов. Каждый самолет первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найдите число действующих на линии самолетов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 8.

6. В пирамиде $SABC$ ребра SC , BC и AC равны соответственно $\frac{1}{6}\sqrt{93}$, 3 и 4. Известно, что угол ABC тупой, ребро SC перпендикулярно к плоскости основания ABC , а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен $\frac{8}{\sqrt{15}}$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S , точку пересечения медиан треугольника ABC и центр окружности, вписанной в этот треугольник.

Вариант 10

(отделения экономической кибернетики
и планирования народного хозяйства
экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$2^{|x+1|} = (\sqrt{2})^{-2x+3}.$$

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 6 \sin x + 7 \log_3 3 = -10, \\ -5 \sin x + 2 \log_3 3 = 0,5. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{-25x^2+15x-2}(8x^2-6x+1) \geq 0.$$

4. В окружность радиуса $2\sqrt{7}$ вписана трапеция $ABCD$, причем ее основание AD является диаметром, а угол BAD равен $\frac{\pi}{3}$. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P такой, что $AP:PD=1:3$. Найдите площадь треугольника BPE .

5. В течение нескольких дней двое рабочих изготавливали специальные детали, причем ежедневная выработка деталей у каждого рабочего была постоянной. В итоге за все эти дни второй

рабочий изготовил на k деталей больше, чем первый, где число k удовлетворяет неравенствам $127 \leq k \leq 132$. Если бы первый рабочий увеличил ежедневную выработку в 2 раза, то за то же количество дней он изготовил на 77 деталей больше, чем второй. Сколько дней рабочие изготавливали детали? Какова была ежедневная выработка у каждого из них?

6. В наклонной треугольной призме $PQRP_1Q_1R_1$ площадь боковой грани PP_1R_1R равна 64, а косинусы двугранных углов при ребрах PP_1 и QQ_1 равны соответственно $\frac{\sqrt{10}}{4}$ и $\frac{1}{4}$.

В эту призму помещена треугольная призма $DEFD_1E_1F_1$ так, что вершины D , E , F лежат на отрезках PQ , QR , RP , а вершины D_1 , E_1 , F_1 — на отрезках P_1Q_1 , Q_1R_1 , R_1P_1 соответственно. Известно, что призма $DEFD_1E_1F_1$ имеет наименьшую площадь боковой поверхности среди всех так расположенных призм. Найдите площадь боковой поверхности призмы $DEFD_1E_1F_1$.

Вариант 11

(отделение прикладной социологии
философского факультета)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 7y = 5, \\ 2x + 3y = -6. \end{cases}$$

2. Найдите площадь ромба $ABCD$, если тангенс угла ABC равен $\sqrt{8}$, а длина диагонали BD равна 3 см.

3. Решите уравнение

$$2 \sin^2 x - 5 \cos x = 4.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_3 x - 2} > \frac{1}{\log_3 x}.$$

5. Найдите все пары целых чисел x , y , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < \frac{15}{2}. \end{cases}$$

Вариант 12

(факультет психологии)

1. Найдите $\operatorname{tg}^2 2\beta$, если $\cos \beta = -\frac{\sqrt{7}}{6}$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{3x-3} = 5-2x.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\lg x^2 - 2}{4 - 3 \lg x^4} > -\frac{1}{2}.$$

4. Имеются три слитка сплавов, содержащих золото. Вес каждого слитка — 1 кг. Если сплавить 500 г первого сплава и 200 г второго сплава, то в получившемся слитке будет содержаться столько же золота, сколько его содержится в 300 г третьего сплава. Количество золота в данных слитках, взятые в порядке номеров сплавов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго сплава нужно взять, чтобы в них содержалось столько же золота, сколько его содержится в 300 г третьего сплава?

5. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Продолжения боковых сторон трапеции AD и BC за точки D и C пересекаются в точке E . Периметр треугольника DCE и длина основания трапеции AB равны соответственно 60 и 20, величина угла ADC равна β . Найдите радиус окружности.

6. Найдите наименьшее из значений, которые принимает выражение $x + 5y$, если x, y положительны и удовлетворяют неравенству

$$x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leq 0.$$

Вариант 13

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Решите неравенство

$$x + 3 + \frac{4}{x-1} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\cos^2 x - \cos 2x = \sin x.$$

3. Из заготовки, имеющей форму шара с диаметром 12, вытачивается прямой цилиндр с высотой h . При каком значении h объем вытасываемого цилиндра максимален?

4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 8, а величина угла ACB равна 60° . Прямая, параллельная стороне AB , пересекает сторону AC в точке D , а сторону BC в точке E . Длины отрезков BC и DC равны, а длина отрезка DE равна 3. Найдите длину стороны BC .

5. В ящике находятся 13 красных шаров и 17 белых шаров. Разрешается производить в любом порядке и в любом количестве следующие операции:

а) увеличить на 2 число красных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых шаров;

б) увеличить на 1 число красных шаров и одновременно увеличить на 2 число белых шаров;

в) уменьшить на 2 число красных шаров и одновременно увеличить на 1 число белых;

г) уменьшить на 1 число красных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых.

Можно ли, совершая такие действия, добиться того, чтобы в ящике оказалось 37 красных и 43 белых шаров? Ответ обоснуйте.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Тело массой M свободно падает без начальной скорости с высоты H (рис. 1). На высоте h в него попадает другое тело массой m , которое в момент соударения имеет лишь горизонтальную составляющую скорости. Оба тела слипаются. Через какое время после этого соударения тела упадут на землю? Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения равно g .

2. У трех невесомых одинаковых пружин одни концы соединены вместе, а противоположные закреплены на потолке в точках, яв-

ляющихся вершинами равностороннего треугольника со стороной $a = 0,2$ м (рис. 2). В нерастянутом состоянии пружины располагаются горизонтально, а при подвешивании к точке соединения пружин груза массой $M = 0,6$ кг эта точка опускается на $H = 0,2$ м. Найдите жесткость одной пружины. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

3. Прибор для измерения плотности серной кислоты (ареометр) представляет собой стеклянный баллончик объемом V_0 с припаянной к нему длинной цилиндрической трубочкой сечением $S = 10$ мм², в которую помещена шкала (рис. 3). На дне баллончика находится свинцовый груз. Общая масса ареометра $m = 3$ г. Деления шкалы ареометра нанесены через $\Delta \rho = 0,01$ г/см³. Каково расстояние между штрихами Δh (в мм) вблизи деления, соответствующего плотности $\rho = 1,23$ г/см³?

4. Два одинаковых баллона заполнены газом при температуре $T = 300$ К. В одном баллоне находится кислород под давлением $p_1 = 7 \cdot 10^4$ Па, в другом — гелий под давлением $p_2 = 2,5 \cdot 10^5$ Па. В некоторый момент весь гелий из второго баллона перекачивают в первый. Какую плотность будет иметь смесь газов при той же температуре? Для кислорода $M_1 = 32$ кг/кмоль, для гелия $M_2 = 4$ кг/кмоль; $R = 8,31 \cdot 10^3$ Дж/(кмоль · К).

5. В цилиндре с поршнем содержится идеальный газ массой m с молярной массой M . Этот газ в исходном состоянии 1 имел температуру T_1 (рис. 4). Его нагревают до температуры T_2 так, что давление газа растет линейно с ростом объема. Затем газ охлаждают при постоянном объеме до температуры T_3 . При этом давление газа уменьшается до исходного давления (то есть давления в состоянии 1). На заключительном этапе цикла газ сжимают при постоянном давлении до исходного состояния. Чему равна работа, совершенная газом за цикл?

6. В теплоизолированный сосуд (калориметр), содержащий $m_1 = 0,4$ кг воды при температуре $T_1 = 290$ К, брошено $m_2 = 0,05$ кг мокрого снега (снег с водой). В результате температура воды в сосуде установилась на $\Delta T = 5$ К ниже исходной. Сколько воды было в мокром снеге? Теплоемкость сосуда $C = 0,16$ кДж/К, удельная теплоемкость воды $c_1 = 4,2$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления снега $\lambda = 334$ кДж/кг.

7. Два конденсатора емкостью $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ подключены к источнику постоянного напряжения, как показано на рисунке 5. Сопротивления резисторов $R_1 = 300$ Ом, $R_2 = 100$ Ом, $R_3 = 100$ Ом. При разомкнутом клю-

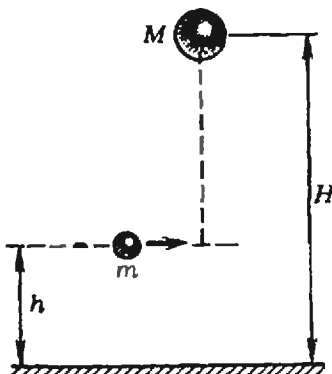


Рис. 1.

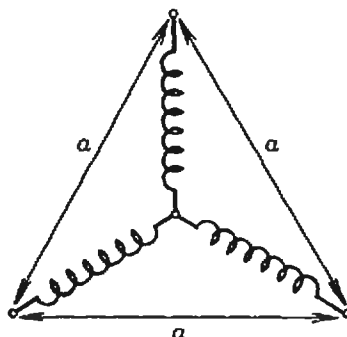


Рис. 2.

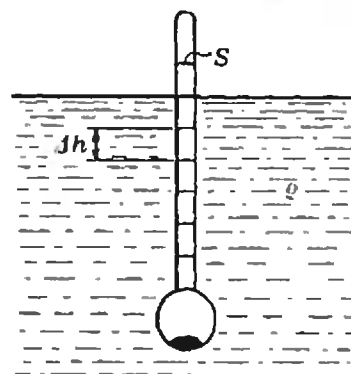


Рис. 3.

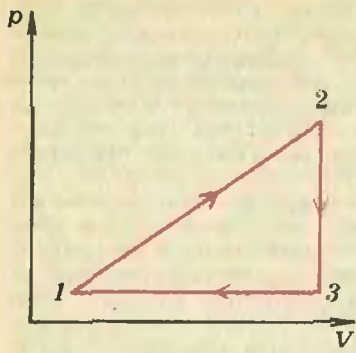


Рис. 4.

че конденсатор емкостью C_2 имеет заряд $Q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл. Какой заряд установится на конденсаторе емкостью C_1 , если ключ K замкнуть? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

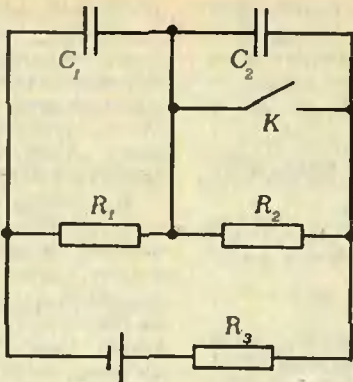


Рис. 5.

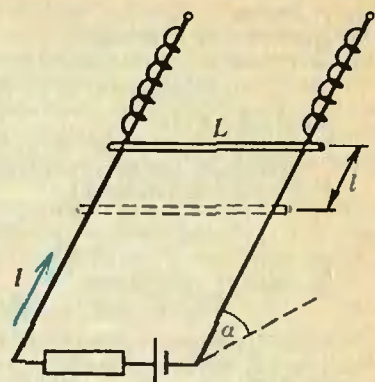


Рис. 6.

8. На два гладких проводящих рельса, составляющих угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом, положена проводящая перемычка длиной $L = 10$ см, к которой прикреплены две одинаковые невесомые пружины жесткостью $k = 0,5$ Н/м каждая, надетые на рельсы (рис. 6). Верхние концы пружин закреплены на рельсах на одинаковой высоте. К нижним концам рельсов присоединен через резистор источник питания, так что по цепи течет ток $I = 5$ А. В определенный момент включается однородное магнитное поле, направленное вертикально вверх, медленно возрастающее по модулю от нуля до некоторого максимального значения B и далее остающееся постоянным. При этом положение равновесия перемычки смещается вдоль рельсов на расстояние $l = 1$ см. Определите величину B . Сопротивлением рельсов пренебречь.

9. Стеклообразная равнобедренная трехгранная призма с прямым углом ABC гранью AC опущена неглубоко в жидкость (рис. 7). При каких значениях показателя преломления стекла горизонтальный луч света, падающий на боковую грань AB и попадающий на горизонтальную грань AC , полностью отражается от границы стекло — жидкость? Жидкость прозрачна, ее показатель преломления $n_{ж} = 1,515$.

10. Оптическая система состоит из тонкой линзы с фокусным расстоянием F и плоского зеркала, расположенного за линзой параллельно ее оптической оси OO' (рис. 8). На прямой AB , перпендикулярной плоскости зеркала и проходящей через ось линзы, находится точечный источник света S . Расстояние от источника до линзы равно d ($d > F$), а до оси линзы — H ($H \ll d$). На каком расстоянии должно находиться зеркало от оси линзы, чтобы изображение, получаемое с помощью линзы и зеркала, было на оптической оси линзы?

и верхней ее половин относились как 1:2, а шар не касался стенки?

3. Однородный стержень длиной $l = 1$ м и массой $m = 0,8$ кг несет на концах два маленьких шарика, массы которых $m_1 = 0,2$ кг и $m_2 = 0,25$ кг. Стержень может поворачиваться вокруг горизонтальной оси, находящейся на расстоянии $l_1 = 0,3$ м от шарика меньшей массы. Чтобы стержень был расположен горизонтально, под шарик большей массы подставляется опора. Найдите силу, действующую на опору.

4. Два одинаковых сосуда соединены трубкой пренебрежимо малого объема, в которую помещена теплоизолирующая перегородка. В одном из сосудов находится газ при температуре $t_1 = 27^\circ\text{C}$ и некотором давлении, в другом — тот же газ при температуре $t_2 = 227^\circ\text{C}$ и том же давлении. Во сколько раз изменится давление газа в сосудах, если довести температуру газа в каждом из них до одного и того же значения $t_3 = 127^\circ\text{C}$, а перегородку удалить?

5. Газ, взятый в количестве $\nu = 5$ моль, сначала нагревают при постоянном объеме так, что абсолютная температура газа возрастает в $n = 3$ раза, а затем сжимают при постоянном давлении, доводя температуру до первоначального значения $T = 100$ К. Какая работа совершена при сжатии? Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К).

6. В двух вершинах равностороннего треугольника помещены одинаковые заряды $q_1 = q_2 = q = +4$ мкКл. Какой точечный заряд

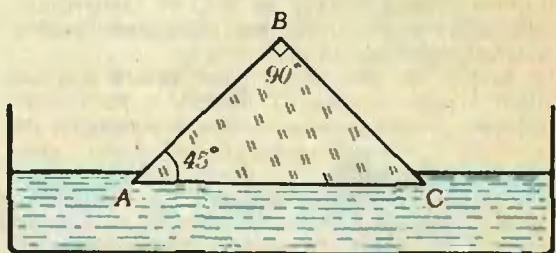


Рис. 7.

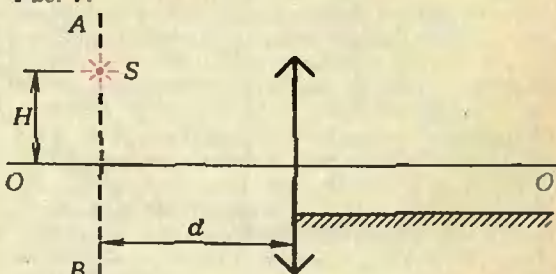


Рис. 8.

Геологический факультет

1. Ракета запущена вертикально вверх с поверхности Земли и на участке разгона имела постоянное ускорение $a = 19,6$ м/с². Какое время падала ракета с ускорением $g = 9,8$ м/с² после достижения наибольшей в полете высоты, если на участке разгона движение продолжалось в течение времени $t = 1$ мин?

2. Однородный шар массой $m = 7$ кг привязан за веревку к гвоздю, вбитому в стену. Какую горизонтальную силу нужно приложить к середине веревки, чтобы натяжения нижней

необходимо поместить в середину стороны, соединяющей заряды q_1 и q_2 , чтобы напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника оказалась равной нулю?

7. Источник с ЭДС $\mathcal{E}=50$ В и с внутренним сопротивлением $r=1,2$ Ом должен питать дуговую лампу с сопротивлением $R=6,0$ Ом, требующую для нормального горения напряжения $U=30$ В. Определите сопротивление резистора, введенного последовательно в цепь лампы для ее нормального горения.

8. Точечный источник света расположен на дне водоема глубиной $h=0,6$ м. В некоторой точке поверхности воды вышедший в воздух преломленный луч оказался перпендикулярным лучу, отраженному от поверхности воды обратно в воду. На каком расстоянии от источника на дне водоема достигнет дна отражен-

ный луч? Показатель преломления воды $n=4/3$.

9. Точечный источник света описывает окружность в плоскости, перпендикулярной оптической оси тонкой собирающей линзы, фокусное расстояние которой $F=7$ см. Изображение источника на экране расположено на расстоянии $f=0,35$ м от линзы. Каково отношение размеров изображения и источника?

10. Мнимое изображение предмета в рассеивающей линзе находится от нее на расстоянии в два раза меньшем, чем предмет. Найдите расстояние от линзы до изображения, если фокусное расстояние линзы F известно.

Публикацию подготовили А. Н. Боголюбов, Б. Б. Буховцев, В. Я. Галкин, Л. А. Муравей, И. Н. Сергеев, С. С. Чесноков

Ответы, указания, решения

Выручает описанная окружность (см. с. 41)

- 40°. Указание. См. рисунок 1: $AK=KB$, поэтому $\angle ABK=20^\circ$; $\angle KDE=\angle KBE=60^\circ-20^\circ=40^\circ$.
- 110°. Указание. См. рисунок 2: треугольник BOC — правильный, BM — серединный перпендикуляр к отрезку OC ; $\angle BMC=180^\circ-30^\circ=40^\circ$.
- 60°. Указание. См. рисунок 3: треугольник AOB — правильный, OK — серединный перпендикуляр к отрезку AC , BK — серединный перпендикуляр к отрезку AO .
- 80°. Указание. По свойству IV точка B — центр окружности, описанной около треугольника AMC (сделайте рисунок). Обозначив $\angle BCM$ через x , из равнобедренного треугольника BCM находим, что $\angle MBC=180^\circ-2x$; $\angle ABM=280^\circ-2x$; $\angle ACM=x+40^\circ$. Из условия $\angle ABM=\angle ACM$ находим $x=80^\circ$.
- 81°. Указание. См. рисунок 4: треугольник DOE — правильный, где O — центр окружности, описанной около треугольника CDE , OA — серединный перпендикуляр к отрезку

CD , треугольники AOE и ADE равны, $\angle CDO= \angle EAO=21^\circ$, так что $\angle CDE=60^\circ+21^\circ=81^\circ$.

Маневрирование в космосе

1. Расстояние от Земли до Луны $R=3,84 \times 10^5$ км $=60 R_3$. Круговая скорость на таком расстоянии равна скорости Луны $v_{\text{Л}}=v_{\text{Л}}/\sqrt{60}=1,02$ км/с. Скорость корабля на расстоянии от Луны $R_2=22R_{\text{Л}}$ найдем из второго закона Кеплера: $v_2=v_1 R_1/R_2=0,15$ км/с (здесь $v_1=1,62$ км/с и $R_1=2R_{\text{Л}}$ — см. задачу 3 в статье). Скорость корабля относительно Земли $v=v_{\text{Л}} \pm v_2$, т. е. в лучшем случае $v=v_{\text{Л}}-v_2=0,87$ км/с.

2. Найденная в предыдущей задаче скорость v — это скорость v_a в апогее той орбиты, которую корабль опишет вокруг Земли. Расстояние в апогее $R_a=3,456 \cdot 10^5$ км $=54,17 R_3$. Из этих данных (как в задаче 3 в статье) находим расстояние в перигее: $R_p=26,5 R_3$. Таким образом, запаса топлива в количестве 9,7 % от массы корабля хватает лишь на то, чтобы, оторвавшись от Луны, попасть в дальние окрестности Земли.

3. Зная расстояние в апогее $R_a=54,17 R_3$, с помощью закона сохранения энергии и второго закона Кеплера найдем скорость в апогее v'_a , при которой перигей орбиты лежит на расстоянии R_p от центра Земли: $v'_a=v_{\text{Л}}/\sqrt{R_a/R_3(1+R_p/R_3)}=0,2$ км/с. Скорость надо изменить на величину $\Delta v'=v_a-v'_a=0,67$ км/с. Для этого надо израсходовать $\Delta v'/(v+\Delta v')=0,143$, т. е. 14,3 % массы, которую имеет корабль в апогее, а это 12,9 % исходной массы корабля. Окончательно получаем, что в этом варианте перелета на Землю топливо должно составлять 22,6 % массы корабля на окололунной орбите.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $x = \frac{\pi^2}{36} (1+12n)^2 \quad (n \in \mathbb{Z})$.

2. 2√2. Указание. Рассмотрите случаи внешнего и внутреннего касания и заметьте, что последний случай невозможен.

3. $]0; 3^{-2\sqrt{3}}] \cup [3^{\sqrt{3}}; \infty[$.

4. Нет. Решение. Пусть O — точка, где грунтовая дорога переходит в шоссе, x , y и z — расстояние от нее до села, до города и до места встречи соответственно, а u и v — ско-

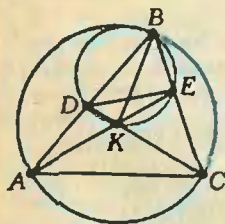


Рис. 1.

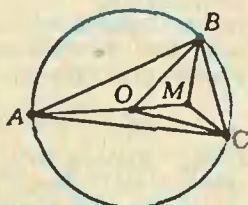


Рис. 2.

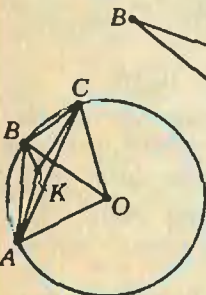


Рис. 3.

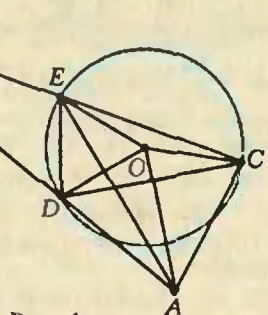


Рис. 4.

рости автомобилиста и мотоциклиста на грунтовой дороге. Тогда время, за которое автомобиль проедет весь путь с первоначальной скоростью, равно $t = \frac{x+y}{u}$. Если встреча произошла на шоссе или в точке O , то из условия задачи имеем

$$t = \frac{x+z}{u} + \frac{y-z}{u} > \frac{x+z}{u} + \frac{3}{2} \frac{y-z}{1,5u} > 3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3} > 5 \frac{2}{3}.$$

Значит, в этом случае ответ на вопрос задачи отрицателен. Если же встреча произошла на грунтовой дороге, то

$$\begin{cases} \frac{x-z}{u} = 3, \\ \frac{x-z}{v} = 4, \\ \frac{x}{u} + \frac{y}{\frac{3}{2}u} = \frac{16}{3}, \\ \frac{x}{v} + \frac{y}{\frac{5}{3}v} = 7, \end{cases}$$

откуда, в частности, следует, что $v = \frac{3}{4}u$.

Если $a = \frac{x}{u}$, $\beta = \frac{y}{u}$, то $a + \frac{2}{3}\beta = \frac{16}{3}$, $a + \frac{3}{5}\beta = \frac{21}{4}$, поэтому $a = \frac{9}{2}$, $\beta = \frac{5}{4}$ и $t = a + \beta = \frac{23}{4} > 5 \frac{2}{3}$, то есть ответ и в этом случае отрицательный.

5. $-\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$. Решение. Выражая x из первого уравнения исходной системы и подставляя его во второе, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x = by - az^2, \\ (b+2)(2b-3)y = 2abz^2 + 8z + 8. \end{cases}$$

Если в $b \notin \left\{-2; \frac{3}{2}\right\}$, то система совместна при любом значении a (достаточно взять $z=0$). Если $b=-2$, то система имеет решение тогда и только тогда, когда имеет корни уравнение $-4az^2 + 8z + 8 = 0$, то есть при $a > -\frac{1}{2}$. Аналогично, при $b = \frac{3}{2}$, получим,

что $a < \frac{2}{3}$.

6. $28\sqrt{3}$. Решение. Пусть две указанные в задаче плоскости пересекают пирамиду по равным четырехугольникам $QRST'$ и $Q'R'ST$

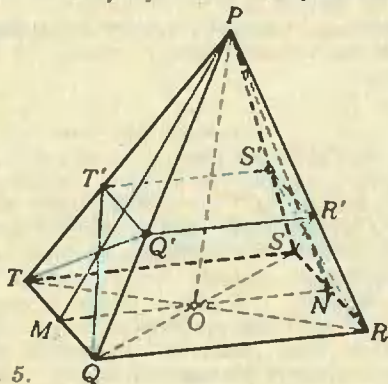


Рис. 5.

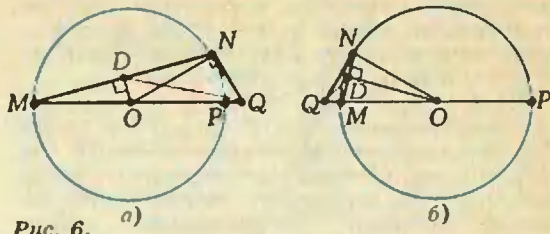


Рис. 6.

(рис. 5). Так как $QR \parallel ST$, то плоскость $QRST'$ параллельна прямой ST и $S'T' \parallel ST$. Аналогично получаем, что $Q'R' \parallel QR$. Равные четырехугольники $QRST'$ и $Q'R'ST$ являются трапециями, поскольку $Q'R' \parallel QR \parallel ST \parallel S'T'$ (если, например, еще и $QT' \parallel RS'$, то $Q'T \parallel R'S$ и плоскости PQT и PRS параллельны, что невозможно). Поэтому $QR = ST$ (ибо $QR > Q'R'$), следовательно, $Q'R' = S'T'$ и $QRST, Q'R'ST'$ — параллелограммы. Так как $QT \parallel RS$ и $Q'T' \parallel R'S'$, от $QT \parallel Q'T'$ и $RS \parallel R'S'$ (иначе плоскости PQT и PRS параллельны). Заметим, что $QT' \neq Q'T$, поскольку в противном случае трапеция $QTT'Q'$ была бы равнобедренной, и в силу равенства трапеций $QRST'$ и $Q'R'ST$, аналогично, равнобедренной была бы трапеция $RSS'R'$, следовательно, медианы SM, SN равнобедренных треугольников PRT, PRS были бы перпендикулярны прямым $QT \parallel RS$ и прямая QT была бы перпендикулярна плоскости PMN , а значит, и прямым $MN \parallel QR$ (т. е. $RQT = 90^\circ \neq 120^\circ$). Таким образом, $QT' = R'S$, $Q'T = RS'$ и так как $QT = RS$, $Q'T' = R'S'$, то трапеции $QTT'Q', RSS'R'$ равны, следовательно, равны и треугольники PQT, PRS , откуда $PQ = PS, PT = PR$. Если O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $QRST$, то PO — медиана каждого из равнобедренных треугольников PQS, PRT , откуда PO — высота пирамиды $PQRST$.

Из данных задачи получаем

$$QS^2 = RS^2 + RQ^2 - 2RS \cdot RQ \cdot \cos 60^\circ = 28,$$

$$PO^2 = PQ^2 - \left(\frac{QS}{2}\right)^2 = 49.$$

Итак, искомый объем пирамиды равен

$$\frac{1}{3} PO \cdot QT \cdot QR \cdot \sin 120^\circ = 28\sqrt{3}.$$

Вариант 2

$$1. [-2 - \sqrt{6}; -3[0] - 1; \sqrt{6} - 2].$$

2. $(-4; -3)$. Указание. Задача сводится к отысканию точки минимума функции

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = \frac{25}{9}(x^2 + 8x + 25).$$

3. 132. Указание. Если n_1, n_2, n_3 — количество одно-, двух-, трехкомнатных квартир, то $n_2 = 4n_1, n_3 = kn_1, 5n_3 - n_2 = 22, n_1 + n_2 + n_3 \geq 100$, где k — некоторое натуральное число. Отсюда $n_1(5k - 4) = 2 \cdot 11, n_1(5 + k) \geq 100$.

4. $\sqrt{\frac{5}{2}}(2 \pm \sqrt{3})$. Указание. Пусть O — центр окружности. Возможны 2 случая (см. рис. 6 а), б)). В обоих из них $NQ = \sqrt{2}$. В первом случае $\widehat{QND} = 105^\circ$, а $ND = \sqrt{6} \cos 15^\circ$, во втором $\widehat{QND} = 15^\circ$, $ND = \sqrt{6} \sin 15^\circ$. Осталось применить теорему косинусов.

5. $x = \pi/3 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Указание. Перепишите уравнение в виде

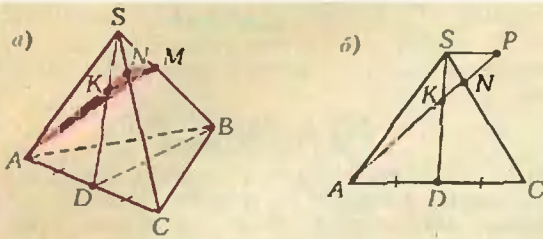


Рис. 7.

$$\sqrt{3+\cos^2 24x} \left(\frac{\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{3+\cos^2 24x}} + \frac{\cos 24x \cos x}{\sqrt{3+\cos^2 24x}} \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 5x - \frac{1}{2} \cos 5x \right) = 6,$$

или

$$\sqrt{3+\cos^2 24x} \sin(x+\varphi) - 4 \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = 6, \quad (*)$$

где $\varphi = \varphi(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и находится из условия

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+\cos^2 24x}}, \quad \sin \varphi = \frac{\cos 24x}{\sqrt{3+\cos^2 24x}}.$$

Левая часть (*) не больше 6, поэтому (*) равносильно системе

$$\begin{cases} \cos^2 24x = 1, \\ \sin(x+\varphi) = 1, \\ \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = -1, \end{cases}$$

которая в свою очередь, равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} \cos 24x = 1, \\ \sin(x+\varphi) = 1, \\ \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = -1, \\ \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin \varphi = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 24x = -1, \\ \sin(x+\varphi) = 1, \\ \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = -1, \\ \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin \varphi = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

6. $a = -\frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{6}$. Указание. Пусть

$$t = \frac{3(5^x - 1)}{5^x + 1}, \quad (\text{при } x \in [-1; 1] \text{ область значений } t \text{ — тоже промежуток } [-1; 1]).$$

$p = a - b$, $q = 2a + b$. Задача свелась к отысканию таких p и q , для которых наибольшее значение функции $g(t) = |t^2 + pt + q|$ на отрезке $[-1; 1]$ является наименьшим.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 + pt + q$ и ее значения $f(0) = q$, $f(-1) = 1 - p + q$, $f(1) = p + q + 1$. Пусть $\alpha = f(-1) - f(0) = 1 - p$, $\beta = f(1) - f(0) = 1 + p$. В зависимости от знака p , либо $\alpha > 1$, либо $\beta > 1$. Отсюда следует (докажите это!), что наибольшее значение функции $|f(t)|$ не меньше, чем $1/2$, причем может быть равно $1/2$ лишь при $p = 0$. Итак, $f(t) = t^2 + q$. Для функции $t^2 - 1/2$ максимум модуля в точности равен $1/2$, если же $q > -1/2$ или $q < -1/2$, то он больше $1/2$. Итак, $p = 0$, $q = -1/2$.

Вариант 3

1. $\{-1; 4\}$. 2. $\{3; +\infty\}$.

$$3. \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, & x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, & x = \pi + 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z}, & n \geq 0, \\ y = \log_3 x. \end{cases}$$

4. $\{1/2, 2\}$.

5. $9/95$. Указание. Секунная плоскость пересекает пирамиду по треугольнику ANM (см. рис. 7, а) так, что $MK \parallel BD$.

В плоскости ASC через точку S проведем прямую, параллельную AC (см. рис. 7, б).

Поскольку $\triangle AKD \sim \triangle KSP$, $\frac{SP}{AD} = \frac{SK}{KD} = \frac{SM}{MB} =$

$$= \frac{3}{5}. \text{ Поэтому } (\triangle ANC \sim \triangle NSP) \frac{SN}{NC} = \frac{SP}{AC} =$$

$$= \frac{5}{2AD} = \frac{3}{10} \text{ и, следовательно, } \frac{SN}{SC} = \frac{3}{13}.$$

Отношение объемов пирамид $ASNМ$ и $ASBC$ равно отношению площадей их оснований,

$$\text{то есть равно } \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SM}{SB} = \frac{3}{13} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{104},$$

$$\text{откуда окончательно } \frac{V_{ASNМ}}{V_{ASBC}} = \frac{9}{95}.$$

6. $\frac{l^2 - h^2}{2h}$. Решение. Пусть S — точка пересечения высот треугольника ABC , O — центр описанной окружности (см. рис. 8), сразу же введем обозначения $AS = x$, $MN = NH = y$, $BC = a$, $AN = d$, $OA = R$.

Поскольку AA' делит пополам дугу BC , постольку $OA' \perp BC$ и точка M лежит на OA' . Отсюда следует, что четырехугольник $MANA'$ — параллелограмм ($MH = NH$, $A'M \parallel AN$).

Поэтому $MA' = HA = h$, $NA' = NA = d$. Проведем отрезки ON и OA : $ON \perp A'A$, так как $A'N = NA$ и $A'O = OA = R$.

Из прямоугольных треугольников MAN и NAH соответственно получаем: $l^2 = h^2 + 4y^2$ и

$$d^2 = h^2 + y^2, \text{ откуда } d^2 = \frac{3h^2}{4} + \frac{l^2}{4}.$$

Из подобия треугольников $\triangle NMA'$ и $\triangle ONA'$ следует: $\frac{h}{d} = \frac{d}{R}$, или $Rh = d^2$.

Поэтому

$$Rh = \frac{3h^2 + l^2}{4}. \quad (*)$$

Далее из прямоугольного треугольника COM получаем

$$\frac{a^2}{4} = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2$$

или, используя (*),

$$\frac{a^2}{4} = \frac{h^2 + l^2}{2}. \quad (**)$$

Но $\triangle SCH \sim \triangle AHB$, поэтому $\frac{SH}{CH} = \frac{HB}{AH}$ или

$$\frac{h-x}{\frac{a}{2} - 2y} = \frac{2y}{h}, \text{ откуда с учетом (*) и (**)}$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

$$\frac{a}{2} + 2y = \frac{a}{2} - 2y$$

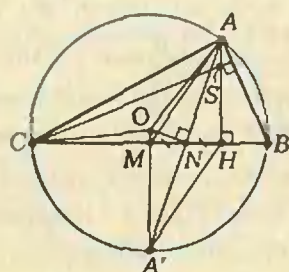


Рис. 8.

(**) окончательно получим $x = \frac{l^2 - h^2}{2h}$.

Вариант 4

1. 9. 2. 9ч. 3. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}$, $\pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3}$.

4. 4. Указание: $S_{ABC} = 12$, поэтому $S_{BCE} = \frac{2}{3} S_{ABC} = 8$. Пусть K — точка на AD такая, что $AK \parallel AB$. Тогда $\frac{EK}{BD} = \frac{OE}{OB}$, но $\frac{EK}{AD} = \frac{EC}{AC} = \frac{2}{3}$, то есть $EK = BD = 2$. Поэтому

$BO = OE$ и $S_{BOC} = \frac{1}{2} S_{BCE}$.

5. $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{128}$. Решение. С помощью замены $u = \sqrt{5|x|}$, $v = \sqrt{|y+3|}$, приведем систему к виду

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^4+v^4=16a, \\ u>0, \\ v>0. \end{cases} \quad (*)$$

Каждой паре положительных значений u, v соответствуют 4 различных пары значений $x = \pm \frac{u^2}{5}$, $y = -3 \pm v^2$. Если при некотором значении a исходная система имеет ровно 4 решения, то системе (*) при этом не может удовлетворять ни одна пара (u, v) , для которой $u > 0$, $v > 0$, $u \neq v$ (в противном случае пара (v, u) соответствовало бы еще 4 решения (x, y) исходной системы, а всего решений было бы не меньше 8). Поэтому искомые значения a должны обеспечивать такие решения (u, v) системы (*), для которых либо $u=0$, либо $v=0$, либо $u=v$. В первых двух случаях необходимо, чтобы величина a приняла значение $\frac{1}{16}$, а в последнем — значение

$\frac{1}{128}$. С другой стороны, при $a = \frac{1}{16}$ система (*) имеет только 2 решения $(1; 0)$, $(0; 1)$ (если $u, v \in]0; 1[$, то и $u^4 + v^4 < u + v$, и равенства $u^4 + v^4 = 16a = 1 = u + v$ невозможны), которым соответствует ровно 4 решения исходной системы. Наконец, при $a = \frac{1}{128}$ система (*) тоже имеет только 1 решение $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (поскольку для любого решения (u, v) этой системы величина $w = u - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - v$ должна удовлетворять условию $\frac{1}{8} = (w + \frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2} - w)^4 = \frac{1}{8} = 3w^2 + w^4$, т. е. $w=0$), которому также соответствует ровно 4 решения исходной системы.

Вариант 5

1. $-\pi$. 2. $]-\infty; \log_2 3[$. 3. 14 км/ч. 4. 7. Указание. По теореме синусов для равнобедренного треугольника AMR получим $\sin \widehat{MAR} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, откуда $\cos \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, и, пользуясь теоремой косинусов для треугольника ABC , найдем $AB = \frac{1}{2}(9 \pm 5)$; значение $AB = 2$ следует отбросить, так как $\frac{2}{3} AB = MN > MP = AM = \sqrt{3}$.

5. $b < -1$ или $b > 4$. Решение. Пусть $a = -b^4 + 6b^3 + 9b^2 - 19 + \sqrt{85}$. Найдем сначала все значения a , при которых совместна система

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 10y^2 = a, \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 4. \end{cases}$$

Если $a < 0$, то $x^2 + 9y^2 + (x-y)^2 = a < 0$, поэтому $a = 0$, $x = y = 0$ и система решений не имеет. Пусть $a > 0$. Умножив первое уравнение на -4 , а второе на a и сложив их, получим равносильную систему

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 10y^2 = a, \\ (a-8)x^2 + 2(a+4)xy - (3a+40)y^2 = 0. \end{cases}$$

Переходя к переменным x и $t = \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$, так как иначе $y = 0$ и $a = 0$), получаем систему

$$\begin{cases} (2-2t+10t^2)x^2 = a, \\ (3a+40)t^2 - 2(a+4)t - (a-8) = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение имеет решение t тогда и только тогда, когда $(a+4)^2 + (3a+40)(a-8) \geq 0$, т. е. при $a \geq -3 + \sqrt{85}$. При этом первое уравнение разрешимо относительно x , так как $2-2t+10t^2 > 0$ при любом t . Итак, искомые значения b удовлетворяют неравенству $b^4 + 6b^3 + 9b^2 - 19 + \sqrt{85} \geq -3 + \sqrt{85}$, или $(b^2 - 3b)^2 - 16 \geq 0$, откуда $(b^2 - 3b + 4)(b + 1) \times (b - 4) \geq 0$.

Вариант 6

1. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $]-1; 1[$. 3. 10 ч. 4. 6.

Указание. В уравнение касательной $y = (x_0 - 1)(x - x_0) + \frac{x_0^2}{2} - x_0 + 5$ к графику в точке с абсциссой x_0 подставьте $x = 0$, $y = 3$ и найдите x_0 .

5. $\sqrt{13} + 6\sqrt{2}$. Указание. Проведите через точку M прямую, параллельную прямой BK , и воспользуйтесь подобием треугольников для нахождения длин отрезков OM и OK ; примените теорему косинусов для треугольника OMK .

Вариант 7

1. $]-3 - \sqrt{13}; -3 + \sqrt{13}[$. 2. $\frac{1}{25}$. 3. 80. 4. $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

Указание. Докажите, что $\widehat{BCK} = 90^\circ + \widehat{BAK}$, и, пользуясь теоремой синусов для треугольников ABK , BCK , получите соотношения

$$\operatorname{tg} \widehat{BAK} = \frac{1}{3}, \quad BK = \frac{\cos \widehat{BAK}}{\sin 60^\circ} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \widehat{BAK}} \cdot \sin 60^\circ}.$$

5. $-\frac{a}{2}$, если $a \in]0; 2 - \sqrt{2}[$; $1 - 2a$, если $a \in]2 - \sqrt{2}; 1[$.

Решение. Равенство $\sin \pi xy = 0$ равносильно условию $xy = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $n \geq 0$, то наименьшее значение выражения $A = \frac{1}{2}(x-y)^2 -$

$-a(x-y) + xy \sqrt{\frac{1}{2}((x-y)-a)^2 - \frac{a^2}{2}} + n$ достигается при $x-y = a$, $xy = 0$ (т. е. $n = 0$) и

равно $-\frac{a^2}{2}$. Пусть $n < 0$. Тогда при $x-y > 0$

имеем $\frac{x-y}{2} \geq \sqrt{-xy} = \sqrt{-n} > a$ и $A \geq -2n -$

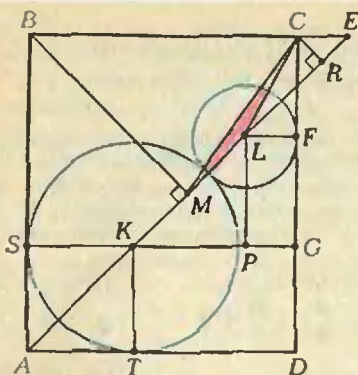


Рис. 9.

$-2a\sqrt{-n+n} = -n - 2a\sqrt{-n} = (\sqrt{-n} - a)^2 - a^2 \geq (1-a)^2 - a^2 = 1-2a$, причем равенство $A=1-2a$ достигается при $x=-y$, $xy=1$ (т. е. при $n=1$). Таким образом, наименьшее значение A совпадает с меньшим из двух чисел $1-2a$ или $-\frac{a^2}{2}$. Так как неравенство

$1-2a < -\frac{a^2}{2}$ справедливо лишь при $2-\sqrt{2} < a < 2+\sqrt{2}$, то в случае $0 < a < 2-\sqrt{2}$ меньшим будет число $-\frac{a^2}{2}$, а в случае $2-\sqrt{2} < a < 1$ — число $1-2a$.

Вариант 8

1. $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). 2. 3. Указание. Пусть $BC=a$. Тогда периметр P треугольника ABC равен $3a$, а его площадь

$$S = \frac{1}{2} Pr = \frac{3}{2} ar = \frac{1}{2} ah.$$

3. $\left\{ \log_{3/2} \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right\}$

4. 50 м. 20 м.

5. $[-a; 0] \cup [0; \frac{2a^2b}{a^2+b^2}]$ при $a \leq b$. $[-a; 0] \cup [0; a]$ при $a > b$. Указание. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{b} < 0, & \frac{1}{x} - \frac{1}{b} \geq 0, \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} \geq 0, & \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} > \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right)^2. \end{cases}$$

6. $\frac{3\pi}{2}$ при $p=9$; при $p < 9$ корней нет.

Указание. Положив $\alpha = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{15} \sin x$, $\beta = \frac{5\pi}{14} - \frac{\pi}{7} \cos 2x$, приведите уравнение к виду $\sin^2 \beta - 3\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha \sin \beta + 6\operatorname{tg}^2 \alpha = p+1$

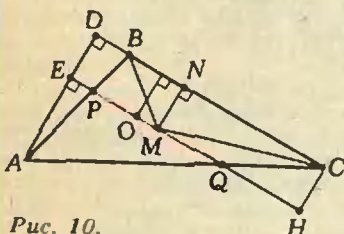


Рис. 10.

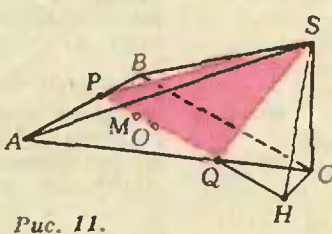


Рис. 11.

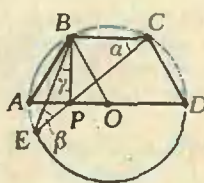


Рис. 12.

или $(\sin \beta - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha)(\sin \beta - \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha) = p+1$. (1)

Затем убедитесь, пользуясь ограничениями на α и β , что $2\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - \sin \beta \geq 2$, а $2\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - \sin \beta \geq 5$. Поэтому левая часть уравнения (1) не меньше 10.

Вариант 9

1. $\{1/2\}$. 2. $\left\{ (-3; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n) \right\}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

3. $\{-4/3; -2/3\}$.

4. $\frac{3}{4}(4\sqrt{2}-5)$. Указание. Поскольку (см. рис. 9) $KP = SG - SK - PG = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, то

$\cos \widehat{LKP} = \sqrt{2}/2$, т. е. $\widehat{LKP} = \pi/4 = \widehat{KAT}$. Следовательно, точки A, K и L лежат на одной прямой. Опустим перпендикуляр CR и AE . Тогда $S_{CLM} = \frac{1}{2} ML \cdot CR$. Осталось найти ML и CR .

5. По 2 самолета каждого типа. Указание. Количества x, y, z самолетов 1, 2 и 3 типа соответственно удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 230x + 110y + 40z = 760, \\ 27x + 12y + 5z = 88, \\ x + y + z \leq 8. \end{cases}$$

из которой следует, что $x+y=4$, $z \leq 4$. Случай $z=4$, $z=3$ и $z=1$ невозможны.

6. $\sqrt{3}$. Указание. Пользуясь формулами $\sin B = \frac{AC}{2R} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin A = BC/2R = \frac{3\sqrt{15}}{16}$,

найдем $AB = \frac{AC}{\sin B} \cdot \sin C = \frac{AC}{\sin B} \cdot \sin(A+B) = 2$ (см. рис. 10). Далее, $r = \frac{S}{p} = \sqrt{15}/6$. Вы-

сота h , опущенная из вершины A на BC , равна $\frac{2S}{BC} = \frac{\sqrt{15}}{2} = 3r$. Поэтому точка M пересечения медиан удалена от BC на то же расстояние, что и O — центр вписанной окружности, т. е. на $\sqrt{15}/6$. Это значит, что секущая плоскость пересекает плоскость основания по прямой, параллельной BC (см. рис. 11). Для вычисления площади треугольника SPQ найдите его высоту SH из треугольника SCH .

Вариант 10

1. $\{1/4\}$. 2. $\{(-1)^{n+1} \pi/6 + \pi n; 1/3\}$, ($n \in \mathbb{Z}$).

3. $[1/5; 1/4] \cup \{2/5\}$.

4. $3\sqrt{3}$. Указание. Пусть O — центр окружности, описанной около трапеции $ABCD$ (см. рис. 12). Треугольник ABO — равнобедренный и потому $AP = \frac{1}{4} AD = \frac{1}{2} AO$. Это значит, что треугольник ABP — прямоугольный и $BP = \frac{\sqrt{3}}{2} R$. Треугольник PBC тоже прямоугольный, а $BC = \frac{1}{2} AD = R$, $PC = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot R$.

Пусть $\widehat{BCP} = \alpha$, $\widehat{BEC} = \beta$, $\widehat{EBP} = \gamma$. Имеем $\sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$. Поэтому $\sin \gamma = \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}/2\sqrt{7}$. Для вычисления BE воспользуйтесь теоремой синусов, а для нахождения площади — формулой

$$S_{BPE} = \frac{1}{2} BE \cdot BP \sin \gamma = \frac{3\sqrt{3}}{28} R^2 = 3\sqrt{3}.$$

5. 11 дней; выработка первого 19 деталей, второго — 31. Указание. Пусть n, d_1, d_2 — соответственно число дней работы и ежедневные выработки первого и второго рабочих. Эти числа удовлетворяют системе

$$\begin{cases} n(d_1 - d_2) = k, \\ 127 \leq k \leq 132, \\ n(2d_1 - d_2) = 7 \cdot 11; \end{cases}$$

из третьего условия видно, что либо $n = 7$, либо $n = 11$, причем $n = 7$ не удовлетворяет условию.

6. 72. Решение. Проведем плоскость, перпендикулярную к боковым ребрам призмы $PQRP_1Q_1R_1$ и $DEFD_1E_1F_1$. Получившиеся в сечении треугольники обозначим через ABC и KLM (см. рис. 13). Положим $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{CBA} = \beta$ и $\widehat{ACB} = \gamma$. Из условий задачи $\sin \alpha = \sqrt{6}/4$, $\sin \beta = \sqrt{15}/4$, а, значит, $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta) = 3\sqrt{6}/8$. Пусть S — площадь боковой поверхности призмы $DEFD_1E_1F_1$. Имеем $S = PP_1 \cdot P_{KLM}$, где P_{KLM} — периметр треугольника KLM . Следовательно, условие минимальности S равносильно условию минимальности P_{KLM} среди периметров всех треугольников, вписанных в треугольник ABC ; легко видеть, что он остроугольный ($\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma > 0$). Ниже будет доказано, что при выполнении условия минимальности

$$P_{KLM} = 2AC \sin \alpha \sin \gamma, \quad (*)$$

откуда $S = 2PP_1 \cdot AC \sin \alpha \sin \gamma = 2 \cdot 64 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \times \frac{3\sqrt{6}}{8} = 72$.

Докажем формулу (*). Решим сначала вспомогательную задачу. Пусть M — произвольная точка на основании AC треугольника ABC , а M' и M'' — точки, симметричные ей относительно сторон AB и BC (см. рис. 14). Тогда $BM' = BM = BM''$, следовательно, треугольник $M'BM''$ — равнобедренный. Кроме того, $M'BA = ABM$ и $MBC = CBM''$. Отсюда $\widehat{M'BM''} = 2\beta$. Обозначим через K и L — точки пересечения отрезка $M'M''$ со сторонами AB и BC . Пусть K' и L' — две произвольные точки на AB и BC . Очевидно, что периметр треугольника

KLM , равный длине отрезка $M'M''$, меньше периметра треугольника $K'ML'$, равного длине ломаной $M'K'L'M''$. При этом

$$P_{KLM} = M'M'' = 2BM \sin \beta. \quad (**)$$

Остается минимизировать выражение (**) выбором точки M на стороне AC . Ясно, что минимум достигается в случае, когда M — основание высоты, опущенной из вершины B на AC . Тогда формула (**) принимает требуемый вид (*).

В а р и а н т 11

1. $(-11 \frac{2}{5}; 5 \frac{3}{5})$; 2. $\frac{9\sqrt{2}}{8}$; 3. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

($n \in \mathbb{Z}$).

4. $[0, 1[\cup]9; \infty[$.

5. $(-7; 7)$, $(-6; 6)$. Указание. Первое неравенство системы преобразуется к виду

$$(x+6)^2 + (y-7)^2 < \frac{3}{2},$$

поэтому пара целых чисел $|x+6|$ и $|y-7|$ совпадает либо с парой $(1; 0)$, либо с парой $(0; 1)$.

В а р и а н т 12

1. $\frac{203}{121}$.

2. $\frac{7}{4}$.

3. $] -\infty; -10^{\frac{1}{3}}[\cup]1; 0[\cup]0; 1[\cup]10^{\frac{1}{3}}; \infty[$.

4. 500.

5. $\frac{60 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{5 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}$. Указание. Используя

свойства касательной к окружности, получите равенства $EK = EM = \frac{1}{2} P_{DCE}$, $AK = AN = r \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ (r — радиус окружности), $BM = BN = AB - AN$, а затем примените теорему косинусов для треугольников ABE .

6. $7\sqrt{3}$. Указание. Пусть $t = x + 5y$. Подставляя в исходное неравенство $x = t - 5y$, получим неравенство $56y^2 - 16ty + t^2 + 21 \leq 0$, которое имеет решения тогда и только тогда, когда $D/4 = 8(t^2 - 147) \geq 0$. Наименьшее положительное t , удовлетворяющее этому условию, равно $7\sqrt{3}$. При этом $x = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$.

В а р и а н т 13

1. $] -\infty; -1[\cup] -1; 1[$.

2. $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{2} + 2\pi m (n, m \in \mathbb{Z})$.

3. $4\sqrt{3}$.

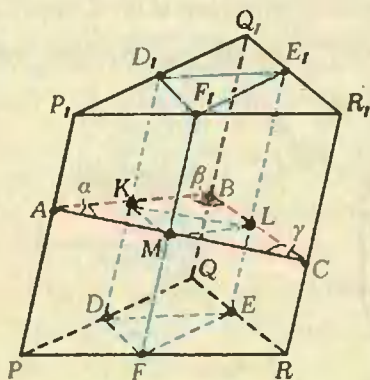


Рис. 13.

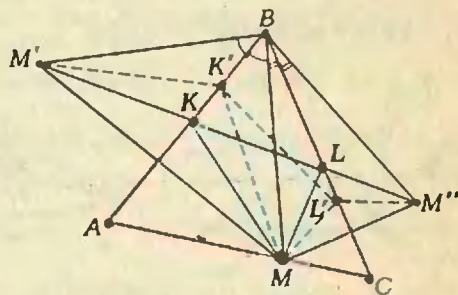


Рис. 14.

4. $\frac{24}{7}$. Указание. Воспользуйтесь теоремой косинусов для треугольника CDE , подобного треугольнику ABC .

5. Нет. Указание. Количества k, l, m, n операций а), б), в), г) соответственно удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 13 + 2k + l - 2m - n = 37, \\ 17 - k + 2l + m - 2n = 43, \end{cases}$$

из которой, умножая второе уравнение на 2 и складывая с первым, получим $5(l - n) = 76$, что невозможно.

Физика

Физический факультет

$$1. t = \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 (H-h) + h} - \frac{M}{M+m} \sqrt{H-h} \right).$$

$$2. k = \frac{Mg}{3H(1 - 1/\sqrt{1 + 3(H/a)^2})} = 20 \text{ Н/м.}$$

$$3. \Delta h = \frac{m\Delta\rho}{\rho(\rho - \Delta\rho)S} \approx \frac{m\Delta\rho}{\rho^2 S} = 2 \text{ мм.}$$

$$4. \nu = (p_1 M_1 + p_2 M_2) / (RT) = 1,3 \text{ кг/м}^3.$$

$$5. A = \frac{1}{2} \frac{mR}{M} \left(T_2 - \frac{T_1 T_2}{T_3} - T_3 + T_1 \right).$$

$$6. m_2 = m_2 - (c_1 m_1 \Delta T + c_2 m_2 (T_0 - T_1 + \Delta T) + C \Delta T) / \lambda = 0,03 \text{ кг.}$$

$$7. Q_1 = Q_2 \frac{C_1 R_1 (R_1 + R_2 + R_3)}{C_2 R_2 (R_1 + R_3)} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

$$8. B = 2kl / (IL \cos \alpha) = 0,04 \text{ Тл.}$$

$$9. n_c > \sqrt{2(n_{жк} - 0,5)^2 + 0,5} = 1,6.$$

$$10. h = HF / (2(d - F)).$$

Геологический факультет

$$1. t = \tau \sqrt{a^2 + ag/g} = 2,45 \text{ мин.}$$

$$2. F = mg \sqrt{3} = 118,8 \text{ Н.}$$

$$3. F = \left(m_2 + \frac{ml/2 - (m + m_1)l_1}{l - l_1} \right) g = 3,85 \text{ Н.}$$

$$4. \frac{p'}{p} = \frac{T_3(T_1 + T_2)}{2T_1 T_2} = \frac{16}{15} = 1,07.$$

$$5. A = (n - 1) \sqrt{RT} = 8310 \text{ Дж.}$$

$$6. q_3 = -(3\sqrt{3}/4)q = -5,2 \text{ мкКл.}$$

$$7. R' = (Z - U)R/U - r = 2,8 \text{ Ом.}$$

$$8. l = 2h/n = 0,9 \text{ м.}$$

$$9. \alpha = (f - F)/F = 4.$$

$$10. f = F/2.$$

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 1)

1. Заметим, что сумма площадей левого сектора и полукруга равняется площади щита, поэтому непокрытая ими площадь равняется площади, покрытой дважды.

2. ШЕПНУЛ = 628750 или 682750.

3. Можно разжечь костер рядом с трубой и проследить, с какой стороны труба будет сильнее нагреваться. В ту сторону и течет вода.

4. Из сравнения первой и третьей полок следует, что объем средней банки равен 3 литрам. Сравнив вторую и третью полки, замечаем, что на третьей полке стоит половина того, что стоит на второй полке, и еще три средних банки. Таким образом, половина объема варенья на полке умещается в трех средних банках, что составляет 9 литров. Значит, на одной полке

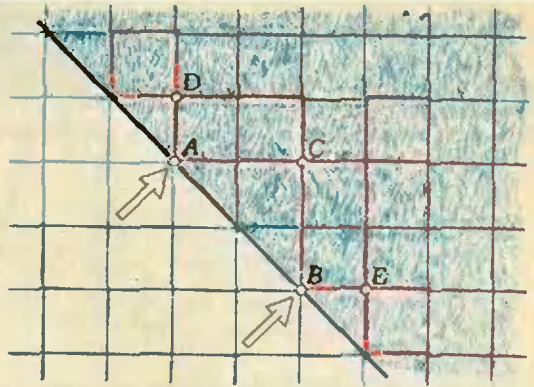


Рис. 15.

стоит 18 литров, а на всех трех полках — 54 литра варенья.

5. Будем считать, что сторону квадрата каждый джентльмен проходит за одну минуту. Заметим, что если первый джентльмен входит в парк по дорожке AD (см. рис. 15), то выходит из парка по дорожке CA , и наоборот; аналогично, если второй джентльмен входит в парк по дорожке BE , то выходит по дорожке CB , и наоборот. Если первый джентльмен пошел по AC , а второй по BC , то через 2 минуты они встретятся в точке C . Если первый джентльмен пошел по AD , а второй по BC , то он обязан идти к точке D , поскольку в противном случае он не сможет туда попасть, не проходя дважды по одной дорожке, и тогда джентльмены встречаются в точке D через 5 минут после входа в парк. Маршруты, начинающиеся с AD и BE , обратны маршрутам первого случая, и джентльмены встречаются в точке C за 2 минуты до выхода из парка, а маршруты, начинающиеся с AC и BE , обратны маршрутам второго случая, и встреча произойдет за 5 минут до выхода джентльменов из парка.

На круги свои
(см. «Квант» № 1)

1. Конечность количества принимаемых значений в последовательности, каждый следующий член которой равен сумме кубов цифр предыдущего числа, вытекает из следующих двух утверждений:

1. Если число меньше 3000, то и сумма кубов его цифр меньше 3000.

2. Если число больше или равно 2000, сумма кубов цифр этого числа меньше самого числа. Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для задачи с суммой квадратов цифр. Возможны следующие периодические последовательности: пять последовательностей с периодом 1 — неподвижные точки 1, 153, 370, 371 и 407; две с периодом 2 — 919-1459 и 136-244; две с периодом 3 — 133-55-250 и 217-352-100.

2. Здесь будет один период из 150 чисел, включающий все натуральные числа от 1 до 100 и все четные числа от 102 до 200, а также один период длины 1 с неподвижной точкой 101.

Вычисление расстояний и углов
(см. «Квант» № 1)

1. 4 см.

2. $\arccos \frac{5\sqrt{3}}{18}$.

3. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{2}, \frac{a^3 \sqrt{15}}{4}$. Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\vec{AB} = \vec{m}, \vec{AC} = \vec{n}, \vec{BC}' = \vec{p}$ и обозначим через t неизвестный нам косинус угла между векторами \vec{m} и \vec{n} . В таблице приведены

	\vec{m}	\vec{n}	\vec{p}
\vec{m}	a^2	0	$a^2 t \sqrt{6}$
\vec{n}	0	a^2	0
\vec{p}	$a^2 t \sqrt{6}$	0	$6a^2$

скалярные произведения векторов этого базиса. Пусть $B'H$ — высота призмы. Тогда $\vec{B'H} = \vec{BH} - \vec{BB}' = x\vec{m} + y\vec{n} - (\vec{m} - \vec{n} + \vec{p}) = (x-1)\vec{m} + (y+1)\vec{n} - \vec{p}$. Неизвестные x, y, t находятся из системы уравнений, получающейся из условий: $\vec{B'H} \cdot \vec{BH} = \sqrt{3} \cdot \vec{BH}, \vec{B'H} \cdot \vec{m} = 0, \vec{B'H} \cdot \vec{n} = 0$. Эта система имеет два решения: $x=1, y=-1, t=0$ и $x=-\frac{1}{2}, y=-1, t=-\frac{\sqrt{6}}{4}$, откуда находятся два возможных значения объема призмы.

4. $\frac{3\sqrt{3}}{256} a^3$.

5. а) $\frac{a\sqrt{15}}{3}$; б) $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. Решение. Пусть O — центр основания пирамиды. образуем базис из векторов $\vec{OS} = \vec{m}, \vec{OB} = \vec{n}, \vec{OC} = \vec{p}$. Эти векторы попарно взаимно перпендикулярны, а длины их легко находятся: $|\vec{m}| = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, |\vec{n}| = |\vec{p}| = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Зададим положение точек M и N на отрезках BD и SC равенствами $\vec{OM} = x\vec{n}$ ($-1 \leq x \leq 1$) и $\vec{SN} = y \cdot \vec{SC} = y(\vec{p} - \vec{m})$ ($0 \leq y \leq 1$). Тогда $\vec{MN} = (1-y)\vec{m} - x\vec{n} + y\vec{p}$. Так как прямая MN параллельна плоскости SAD , $\vec{MN} = z \cdot \vec{SA} + t \cdot \vec{SD} = -(z+t)\vec{m} - t\vec{n} - z\vec{p}$. Сравнивая два разложения вектора \vec{MN} в базисе $(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p})$, приходим к системе уравнений $1-y = -z-t, x=t, y=-z$. Выразим y, z и t через x : $y = \frac{x+1}{2}, z = -\frac{x+1}{2}, t = x$. Следовательно, $\vec{MN} = \frac{1}{2}((1-x)\vec{m} - 2x\vec{n} + (x+1)\vec{p})$, откуда $MN = \frac{a}{2} \sqrt{6x^2 - 6x + 4}$. Если $DM:DB = 1:3$, то $x = -\frac{1}{3}, MN = \frac{a\sqrt{15}}{3}$. Наименьшее значение MN принимает при $x = \frac{1}{2}$. Это значение равно $\frac{a\sqrt{10}}{4}$.



Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:

А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. В. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонovich,
С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:

А. М. Балдин, С. Т. Беляев,
Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко,
Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев,
Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. В. Иванов,
В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин,
А. А. Логунов, В. В. Можжев, В. А. Орлов,
Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев,
А. Л. Стасенко, И. К. Суриц, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. Н. Виленкин, А. А. Егоров,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. В. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:

Ю. А. Ващенко, М. В. Дубах, С. В. Иванов,
Т. Н. Кольченко, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров,
И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурин, П. И. Чернуцкий,
В. В. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Н. Е. Румянцева

Сдано в набор 17.12.86. Подписано к печати 29.1.87
Т-05233. Бумага 70×108/16. Печать офсетная
Усл. кр.-от. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,50
Тираж 204 933 экз.
Цена 40 коп. Заказ 3499

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

193006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

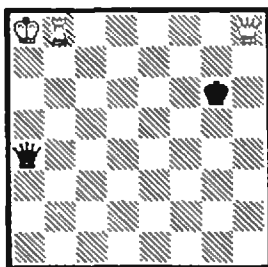
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ПАРАДОКСАЛЬНЫЕ НАХОДКИ ЭВМ

В «Кванте» № 1 за этот год мы рассказали об анализе ЭВМ окончания «два слона против коня», которое является объективно сложным. Следующий пример весьма необычен.



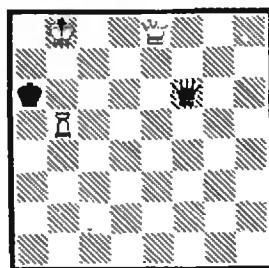
Оценка эндшпиля «ферзь и ладья против ферзя» не вызывает сомнений, однако в данном случае белые, как это ни удивительно, матуют только на 67-м ходу, причем при наилучшей игре обеих сторон уйти королю от преследования и разменять ферзей удается лишь на 55-м ходу. Этот рекорд установила специальная программа, созданная К. Томпсоном, автором программы «Белл», третьей «чемпионки» мира по шахматам среди ЭВМ. Посмотрите, как белый король после долгих мытарств скрывается от преследования черного ферзя.

1. Kрb7 Фb5+ 2. Kрc7 Фc5+ 3. Kрд7 Фd5+ 4. Kре7 Фe5+ 5. Kре6 Фe6+ 6. Kре5 Фe5+ 7. Kре4 Фe2+ 8. Kрд4 Фd1+ 9. Kрc4 Фe2+ 10. Kрb4 Фd2+ 11. Кра3 Фd3+ 12. Кра4 Фa6+ 13. Kрb4 Фd6+ 14. Kрc3 Фg3+ 15. Kрb2 Фf2+ 16. Kрb3 Фf7+ 17. Kрc3 Фf3+ 18. Kрb4 Фf4+ 19. Кра5 Фd2+ 20. Лb4 Фd5+ 21. Лb5 Фa2+ 22. Kрb6 Фe6+ 23. Кра7 Фe7+ 24. Лb7 Фa3+ 25. Kрb8 Фd6+ 26. Лc7 Фb6+ 27. Kрc8 Фa6+ 28. Kрд7 Фd3+ 29. Kрc6 Фe4+ 30. Kрд6 Фd3+ 31. Kрc5 Фa3+ 32. Kрc4 Фa6+ 33. Kрд5 Фb5+ 34. Kрд4 Фb6+ 35. Лc5 Фd6+ 36.

Лd5 Фb4+ 37. Kре5 Фe7+ 38. Kрf4 Фf7+ 39. Kре4 Фf5+! 40. Kрд4 (40. Л:f5 пат!) 40...Фf4+ 41. Kрc3 Фe7+ 42. Kрд3 Фg3+ 43. Kрc4 Фe7+ 44. Лc5 Фf7+ 45. Kрb4 Фb7+ 46. Лb5 Фe7+ 47. Кра4 Фa7+ 48. Kрb3 Фf7+ 49. Kрc3 Фf3+ 50. Kрb4 Фf4+ 51. Кра5 Фd2+ 52. Кра6 Фa2+ 53. Kрb7 Фf7+ 54. Kрb8 Фf4+ 55. Фe5 Фe5+.

Черные могли оттянуть размен ферзей (55...Фf8+ 56. Kрc7 Фf7+ 57. Kрд8 Фf8+ 58. Фe8+), но тогда мат дастся быстрее 67 ходов. 56. Л:e5. Ладья матует одинокого короля не позднее 16-го хода, а в данном случае достаточно десяти. 56...Kрf6 57. Лc5 Kре7 58. Лc6 Kрд7 59. Kрb7 Kре7 60. Kрc8 Kрf8 61. Kрд7 Kрf7 62. Лb6 Kрf8 63. Kре6 Kрg7 64. Kре7 Kрh8 65. Лg6 Kрh7 66. Kрf7 Kрh8 67. Лh6X.

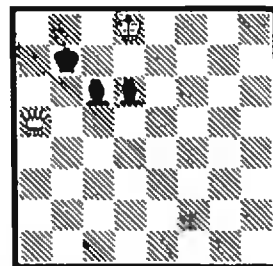
Итак, нанесен еще один удар по правилу 50 ходов, причем рекорд вновь установлен компьютером. Вот другая занятая позиция с тем же соотношением сил.



На сей раз белые при своем ходе вообще не могут выиграть! При движении ладьи черные сооружают патовое гнездо (1. Лe5 (b7) Фd8+!, 1. Лd5 Фb6+ 2. Kрc8 Фb7+ и 3...Ф:d5), у ферзя нет удачных отступлений, а королю не уйти от шахов. Другое дело, если ход черных, тогда им не избежать поражения. Таким образом, перед нами редчайшая картина взаимного цугцванга при решающем материальном превосходстве одной из сторон. Удивительнее всего, что данную позицию (как и две следующие) обнаружил компьютер. При этом программа установила, что это — единственная конструкция взаимно-

го цугцванга в борьбе ферзя и ладьи против ферзя. Разумеется, симметрия не в счет: точно так же фигуры могут разместиться и в трех других углах доски.

Окончание «ферзь против двух легких фигур — двух слонов или слона и коня» выиграно для сильнейшей стороны (и быстрее чем за 50 ходов), но теории известны и исключения — противнику удается соорудить неприступную крепость. Исследуя эти окончания, машина и здесь в первую очередь интересовалась необычными позициями взаимного цугцванга. Вновь оказалось, что такие конфигурации единственны (опять с точностью до симметрии). Рассмотрим следующую позицию



Примечательно, что при своем ходе белым не справиться с черным королем (на отступление ферзя следует Сe7+), а черные, делая ход, быстро проигрывают, из-за шаха ферзем с c7 или по линии «b».

А вот другая парадоксальная позиция.

Белые: Кра8, Фf8; черные: Kрд5, Са6, Кс6.

Вновь, начиная, белые не могут освободить своего короля (1. Фа3 Сс8!), а если ход черных, клубок их фигур мгновенно рассыпается.

Какую еще пользу от компьютеров можно ожидать в исследовании пятифигурных окончаний? Из окончаний, которые могут представить проблему для человека (особенно для этюдистов), осталось, пожалуй, лишь «ферзь и легкая фигура против ферзя».

Конкурсные задания

3. Белые: Кра8, Фf6, Кс4; черные: Kрд7, Фh5. Белые начинают и выигрывают.

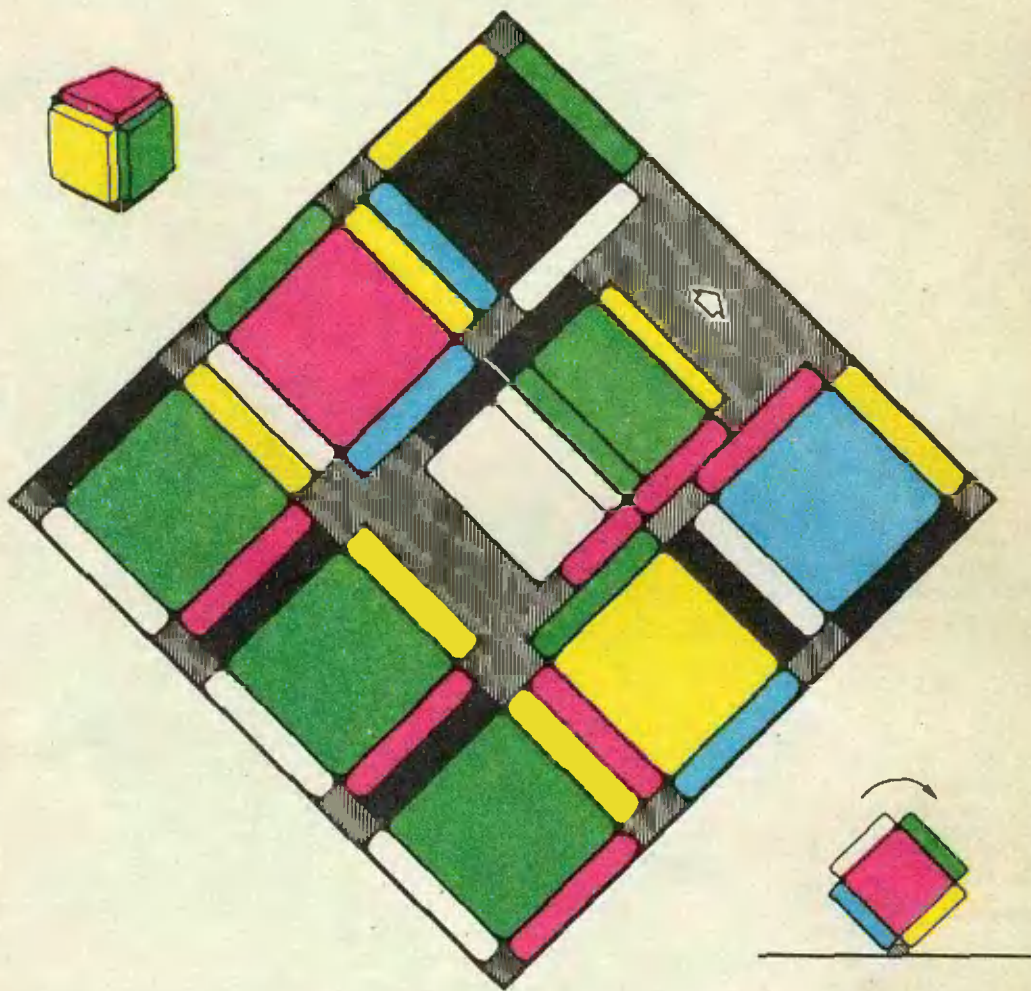
4. Белые: Kрh1, Фа3, Сe4; черные: Kрh8, Фg7. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 20 апреля 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 3. 4».

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Вроде незамысловатое это занятие — катать кубик по плоскости. Но если вы соедините его с известной игрой «15», получится качественно новая интересная игра-головоломка. Для этого квадратные фишки в игре «15» надо заменить на равные кубики, по-прежнему оставив одно место свободным; «ход» состоит в том, что один из кубиков перекатывается через ребро на свободное

получить разные виды «перевертышей» — так назвали свой вариант этой игры А. Дремов и Г. Шевцова. Их «перевертыши» и показаны на рисунке. Каждый кубик здесь раскрашен в 6 цветов наподобие кубика Рубика; на гранях сделаны квадратные выступы, которые вместе с порожками, наклеенными на дно коробки, облегчают перекатывание и к тому же позволяют видеть цвет не только верхней, но и



место. Конечно, кубики надо тем или иным способом разметить; теперь можно решать задачу, типичную для всех головоломок этого сорта (той же игры «15», кубика Рубика, «вавилонской башни»,... — в последние годы их появилось великое множество): отыскивать цепочку ходов, которая переводит одно данное расположение кубиков в другое. Меняя разметку кубиков, размеры и форму поля, можно

боковых граней каждого кубика. Будем считать «правильным» такое расположение кубиков, при котором на всех кубиках грани одного цвета обращены в одну и ту же сторону, а нижний угол пустой; имеется 24 таких расположения (почему?). Сколько ходов вам понадобится, чтобы перейти от одного правильного расположения к другому? (Нам известно решение в 100 ходов.)