ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1988

Квант

1988

1

Основан в 1970 году

Научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-
математической литературы

В номере:

Дорогие читатели!

Многие из вас хорошо знакомы с нашим журналом, с его разделами и материалами. Но есть и такие, кто в этом году впервые стал подписчиком «Кванта». Мы надеемся, что каждый из вас найдет для себя в журнале что-то нужное и интересное.

В каждом номере мы рассказываем о достижениях науки и ее практических применениях, о фундаментальных понятиях физики и математики. В рубрике «Новости науки» помещаем сообщения о новейших научных достижениях. Тем, кто любит физические эксперименты и хочет научиться делать простые приборы, предназначены материалы рубрики «Лаборатория «Кванта». Любителям математических задач — статьи «Математического кружка». В разделе «Школа в «Кванте» вы найдете статьи, которые разъясняют наиболее трудные для понимания вопросы школьного курса.

Каждый месяц мы предлагаем читателям нестандартные, на наш взгляд, задачи по физике и математике. Решение этих задач, помещаемых в рубрике «Задачник «Кванта», требует умения мыслить самостоятельно, творчески. Ежегодно журнал проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Победители конкурса награждаются Дипломом «Кванта» и получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Многие материалы журнала предназначены будущим абитуриентам. Это статьи раздела «Практикум абитуриента» и задачи рубрики «Варианты вступительных экзаменов».

В каждом номере журнала вы найдете рубрику «Квант» для младших школьников». Здесь мы даем занимательные задачи, требующие не столько конкретных знаний, сколько сообразительности, внимательности, умения мыслить логически. Статьи, публикуемые в этом разделе, интересны, как правило, и старшеклассникам.

Регулярно появляются в журнале материалы, рассказывающие об олимпиадах школьников и учащихся ПТУ, информация о заочных и вечерних школах при различных вузах страны...

Объем нашего журнала достаточно большой, и рассказать коротко о его содержании трудно. Сегодня вы знакомитесь с первым номером. Понравится ли он вам? Чего вы вообще ждете от журнала? О чем хотели бы прочитать на его страницах? Мы надеемся узнать это из ваших писем.

ПРОГРАММЫ ПЕРЕБОРА

Член-корреспондент АПН СССР
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

Не правда ли, паровоз «бегает» лучше человека — во всяком случае, быстрее? И если нужно попасть в другой город, вы с удовольствием прибегнете к его помощи. Есть у человека и много других помощников. Роботы переносят тяжелые детали к месту обработки, средства связи помогают передавать информацию, часы отвечают на вопрос «сколько времени?» и т. д.

А есть новые, сравнительно недавно появившиеся помощники, облегчающие человеку интеллектуальную деятельность. Это — компьютеры. Они не только могут быстро произвести расчет, но и справляются с задачами, при размышлении над которыми человек производит перебор вариантов, осуществляет поиск путей решения, выполняет логические операции. Конечно, компьютер не в буквальном смысле «мыслит» так же, как человек (ведь и паровоз «бегает» по-своему, а не шагает, как мы). Хотя свою «мыслительную» деятельность компьютер послушно выполняет в соответствии с программой, заранее составленной человеком, но, благодаря огромному быстродействию, со многими задачами он справляется гораздо быстрее человека. И не только с вычислительными задачами, но и с такими, для решения которых приходится подумать и поломать голову. Рассмотрим пример.

Задача 1. *Сколько существует двузначных чисел, сумма квадратов цифр которых делится на 13?*

Конечно, для решения можно осуществить «тупой» перебор: двузначных чисел не так уж много, и если их одно за другим перебрать и проверить, для каких из них сумма квадратов цифр делится на 13, то мы сможем найти ответ. Однако это долго и скучно. И мы применяем логическое рассуждение, позволяющее более легко и красиво получить решение. Для этого составим следующую табличку:

цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ее квадрат	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
остаток	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3

В нижней строке записаны остатки от деления чисел второй строки на 13. Надо подобрать две цифры, сумма квадратов которых делится на 13, т. е. две цифры, стоящие в верхней строке, для которых сумма соответствующих чисел нижней строки равна 13. Например, можно взять цифры 1 и 5 (под ними в нижней строке стоят 1 и 12); получаем два двузначных числа 15 и 51, удовлетворяющих требуемому условию. Можно также взять цифры 1 и 8 (под которыми также подписаны 1 и 12) — это дает еще два искомых числа (18 и 81). Еще одну комбинацию цифр составляют 2 и 3 (под ними записаны 4 и 9), что дает еще два числа (23 и 32). Наконец, можно скомбинировать одну из цифр, под которой записано число 3, с цифрой, под которой записано число 10. Всего получаем 14 искомых чисел:

15 и 51, 18 и 81, 23 и 32, 46 и 64,
47 и 74, 69 и 96, 79 и 97.

Хотя здесь надо было немножко подумать и сообразить, как найти путь решения, но, конечно, такое решение лучше, чем «тупой» перебор.

А что если бы мы, подобно компьютеру, могли выполнять сотни тысяч или даже миллионы операций в секунду? Целесообразно ли было бы в этом случае ломать голову над поиском пути решения? Не проще ли было бы при таком быстродействии просто перебрать числа от 10 до 99? Видимо, проще!

Рассмотрим на примере задачи 1, как с помощью компьютера решаются задачи перебора. Мы приведем программу на весьма распространенном и употребительном языке программирования Бейсик (см. учебник информатики для 10 кл, с. 71). Но прежде дадим описание имеющейся в Бейсике *встроенной функции* INT. Вот пример записи:

A=INT(56/13)

Она означает, что переменной A присваивается значение, равное целой части дроби 56/13 (от английского слова *integer* — целый). Так как 56/13= =4,30769..., будем иметь A=4.

Теперь приведем программу *) решения задачи 1:

```
10 FOR N=10 TO 99
20 A=INT(N/10)
30 B=N-10*A
40 S=A*A+B*B
50 R=S-13*INT(S/13)
60 IF R=0 THEN PRINT N;
70 NEXT N
80 END
```

Комментарий. Строки программы пронумерованы, причем не подряд, а через 10 номеров. Этот прием очень удобен: если в процессе записи программы обнаружится, что вы пропустили какие-либо операции, нужные для решения, то их можно будет потом записать в виде строк с промежуточными номерами.

Строка 10 содержит оператор цикла, который как раз предназначен для осуществления перебора. Он означает приказ осуществить последовательный перебор всех натуральных чисел от 10 до 99 (т. е. всех двузначных чисел) и для каждого из них осуществить деятельность, указанную в последующих строках. Строка 70 — окончание деятельности, проводимой с очередным двузначным числом, т. е. приказ перейти к следующему числу.

Теперь рассмотрим промежуточные строки 20—60, описывающие деятельность, проводимую с числом N. Строка 20 содержит встроенную функцию INT, о которой было сказано выше. Таким образом, переменной A присваивается значение, равное целой части числа N/10, т. е. A — цифра десятков двузначного числа N. Следовательно (звездочкой в Бейсике обозначается умножение), 10*A есть число N, округленное до десятков, т. е. число, получающееся, если в N последнюю цифру заменить нулем. Теперь ясно (строка 30), что B — цифра единиц числа N. Таким образом (строка 40), переменной S присваивается значение, равное сумме квадратов цифр двузначного числа N. Строка 50 означает, что переменной R присваивается значение, равное остатку от деления числа S на 13. Наконец, строка 60 завершает деятельность с очередным числом N: если остаток равен нулю, т. е. сумма квадратов цифр числа N делится на 13, то НАПЕЧАТАТЬ число N. Если же остаток не равен нулю (иначе говоря, если условие, содержащееся в строке 60, не выполнено), то эта строка игнорируется, т. е. мы переходим к следующей строке. Заметим, что в конце строки 60 стоит точка с запятой. Это означает (в соответствии с синтаксисом языка Бейсик), что следующее число будет печататься рядом, в той же строке.

Когда компьютер выполнит проверку для всех требуемых чисел (и напечатает на дисплее те из них, которые дают решение задачи), он переходит к следующей строке 80, т. е. работа программы на этом заканчивается.

Если у вас есть доступ к компьютеру (например, во время экскурсии на вычислительный центр), попросите программиста войти в режим интепретатора языка Бейсик и наберите эту программу, а затем наберите директиву RUN (по-английски — бежать), означающую указание осуществить «пробежку» по программе. Через пару секунд вы увидите на дисплее двузначные числа, сумма квадратов цифр которых делится на 13. Только они будут расположены не парами, как в «ручном» решении, а по возрастанию.

Задачи

2. Найдите двузначное число, равное сумме цифры его десятков и квадрата цифры единиц.

3. Если к сумме цифр двузначного числа прибавить квадрат этой суммы, то снова получится это двузначное число. Найдите все такие числа.

*) Программы в этой статье написаны на языке Бейсик MSX.

4. Квадрат трехзначного числа оканчивается тремя цифрами, которые как раз составляют взятое число. Найдите все такие числа.

5. Найдите четырехзначное число, которое при делении на 133 дает в остатке 125, а при делении на 134 дает в остатке 111.

6. Припишите к 523*** три такие цифры справа, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, на 8 и на 9.

7. Припишите к ***999 три такие цифры слева, чтобы полученное шестизначное число делилось на 13, на 17 и на 19.

Рассмотрим теперь еще одну задачу, решение которой позволит нам познакомиться с дальнейшими приемами программирования на языке Бейсик.

Задача 8. *Долгожитель (т. е. человек, проживший более ста лет) заметил, что если к сумме квадратов цифр его возраста прибавить число его дня рождения (т. е. какое-то из чисел от 1 до 31), то получится как раз его возраст. Сколько лет долгожителю?*

Вот программа для решения этой задачи:

```
10 FOR K=1 TO 9
20 FOR L=0 TO 9
30 FOR M=0 TO 9
40 N=100*K+10*L+M
50 S=K*K+L*L+M*M
60 IF N<S+1 GO TO 90
70 IF N<S+32 THEN PRINT N;
80 NEXT M
90 NEXT L
100 NEXT K
110 END
```

Комментарий. Здесь вместо одного используются три вложенных друг в друга цикла. Рассмотрим строки 10, 20, 90, 100:

```
10 FOR K=1 TO 9
20 FOR L=0 TO 9
...............
90 NEXT L
100 NEXT K
```

Начав деятельность при $K=1$, мы сразу же попадаем во внутренний цикл (строки 20 и 90), и пока он не закончится, мы не перейдем через строку 90 дальше, т. е. не перейдем к следующему значению K. Таким образом, при $K=1$ мы переберем все значения $L=0,1, \ldots, 9$, затем перейдем к $K=2$ и снова переберем все значения $L=0,1, \ldots, 9$ и т. д. Отсюда ясно, что строки 10, 20, 90, 100 обеспечивают перебор всех пар K, L (в указанных пределах). Далее, внутри имеется еще третий цикл по M (строки 30, 80). Вместе эти три цикла дают перебор всех троек K, L, M (в указанных пределах). Теперь строка 40 показывает, что в результате этого мы перебираем все трехзначные числа от 100 до 999.

Строки 50—70 предназначены для проверки, годится ли исследуемое трехзначное число в качестве возраста долгожителя. Прежде всего вычисляется S — сумма квадратов цифр этого трехзначного числа (строка 50). Если $N<S+1$, то рассматриваемое трехзначное число не годится и, более того, увеличивая цифру единиц M, мы подавно будем получать непригодные числа. Поэтому в строке 60 применен оператор *условного перехода:* если $N<S+1$ то ПЕРЕЙТИ к строке 90. Если же условие $N<S+1$ не выполнено, т. е. $N>S$, то надо еще проверить, на сколько единиц число N больше S. Если N превосходит S на 32 или более, то разность $N-S$ не может быть числом дня рождения. Поэтому лишь при условии $N<S+32$ число N годится в качестве возраста долгожителя (и тогда его следует напечатать).

Введите эту программу в компьютер, и вы узнаете возраст долгожителя: ему 109 лет.

Задачи

9. Найдите трехзначное число, квадрат которого оканчивается тремя одинаковыми цифрами, отличными от нуля.

10. Подставьте в записи 42*4* вместо звездочек такие цифры, чтобы полученное пятизначное число делилось на 72.

11. Найдите четырехзначное число, являющееся точным квадратом, у которого две первые цифры одинаковы и две последние тоже одинаковы.

Указание. В языке Бейсик имеется встроенная функция SQR, которая предназначена для извлечения квадратного корня; иначе говоря, оператор M=SQR(A) присваивает переменной M значение, равное квадратному корню из значения переменной A.

12. В магазине имеется мастика в ящиках по 16 кг, 17 кг, 21 кг. Как некоторой организации получить 185 кг мастики, не вскрывая ящики?

13. Великий математик Пьер Ферма, много занимавшийся вопросами теории чисел, высказал гипотезу, что все числа вида

$$2^{(2^n)}+1 \qquad (*)$$

(n натуральное) являются простыми. При $n=1$, 2, 3, 4 справедливость этого утверждения несложно проверяется, а при $n=5$ проверка «вручную» становится слишком трудной. Однако другой великий математик, Леонард Эйлер, остроумным искусственным приемом установил, что как раз при $n=5$ утверждение Ферма является ошибочным, т. е. число (*) оказывается в этом случае составным. Напишите программу, позволяющую при $n=5$ убедиться в правильности утверждения Эйлера, т. е. найти делитель числа (*), отличный от этого числа и единицы.

Указание. По обычной программе, написанной на языке Бейсик, компьютер производит расчеты с шестью значащими цифрами. Между тем число (*), получающееся при $n=5$, имеет 10 значащих цифр. Учтите это при составлении программы. Запись 2∧16 означает: возвести 2 в 16-ю степень.

14. Найдите все трехзначные числа, равные сумме кубов своих цифр.

15. В трехзначном числе зачеркнули первую цифру слева; когда полученное двузначное число умножили на 7, получилось исходное трехзначное число. Найдите его.

16. В трехзначном числе, все цифры которого нечетны, зачеркнули среднюю цифру. Оказалось, что полученное двузначное число является делителем исходного числа. Найдите все такие трехзначные числа.

Указание: строка

10 FOR A=1 TO 9 STEP 2

означает, что A пробегает числа с шагом 2 (т. е. 1, 3, 5, ...).

17. Сумма цифр трехзначного числа кратна 7. Само число также делится на 7. Найдите все такие числа.

Указание: запись R<>0 означает, что R не равно нулю.

18. Четырехзначное число, а также число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, оба являются точными квадратами. Найдите эти числа.

19. Решите следующие арифметические ребусы (вместо каждой буквы надо подставить некоторую цифру, причем одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а различные буквы — различные цифры):

а) КТО + КОТ = ТОК;

б) $\text{АВВА} = \text{АА}^2 + \text{ВВ}^2$;

в) КИО * ИО = ТОКИО.

20. Найдите все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении числа на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Нередко при решении задач на компьютере применяются *рабочие переменные*, которым в программе отводится роль «счетчиков», «накопителей», «хранителей» промежуточных результатов. Рассмотрим это на следующих примерах.

Задача 21. *Найдите наибольшее значение суммы* M^2+N^2, *когда* M *и* N *пробегают все значения от* 1 *до* 100, *удовлетворяющие условию* $|N^2-MN-M^2|=1$.

Решение дается следующей программой:

```
10 P=0
20 FOR M=1 TO 100
30 FOR N=1 TO 100
40 IF ABS(N*N-M*N-M*M)<>1 GO TO 90
50 S=M*M+N*N
60 IF S>P THEN P=S
70 IF S>P THEN K=M
80 IF S>P THEN L=N
90 NEXT N
100 NEXT M
110 PRINT P,K,L
120 END
```

Комментарий. Здесь использована встроенная функция ABS, предназначенная для нахождения модуля (или, как раньше говорили, абсолютной величины) числа; иначе говоря, оператор H=ABS(Q) присваивает переменной H значение $|Q|$. Далее, P, K, L — рабочие переменные («хранители»), предназначенные для того, чтобы в процессе работы программы некоторое время сохранять полученные промежуточные результаты. Переменная P предназначена для хранения достигнутого значения M^2+N^2: первоначально P=0 (строка 10), а каждый раз, когда (при наложенных на M, N условиях) получается сумма квадратов, большая, чем она была раньше, переменной P присваивается новое значение, равное этой сумме квадратов. Одновременно переменные K, L получают (и хранят до следующего изменения) те значения M, N, при которых это большее значение суммы квадратов было получено. После всего перебора печатается наибольшее значение суммы квадратов и те M, N, при которых оно было достигнуто. Заметим, что между буквами P, K, L поставлены в строке 110 запятые (а не точки с запятыми): при таком способе печати выносимые на дисплей числа отстоят друг от друга дальше (каждое число занимает 15 позиций).

Задача 22. *Сколько существует «счастливых» шестизначных билетиков (т. е. таких, у которых сумма* *трех первых цифр равна сумме трех последних)?*

Возможно, читатель лихо напишет программу, содержащую шесть вложенных циклов (первая цифра пробегает значения от 0 до 9, вторая — тоже от 0 до 9 и т. д.). Но не будем спешить. Такая написанная «в лоб» программа требует очень много машинного времени, а оно слишком дорого! В самом деле, всего имеется миллион возможностей, и каждую из них надо обсчитать (найти сумму первых трех цифр, сумму трех последних, сравнить). Получаются десятки миллионов операций! Составим, однако, программу более идейно. Сумма первых трех цифр (и сумма трех последних) может принимать значения от 0 до 27. Если, скажем, имеется 75 комбинаций первых трех цифр, дающих сумму цифр 14 (и столько же комбинаций последних трех цифр, дающих сумму цифр 14), то это даст 75*75 «счастливых» билетиков: каждую из таких комбинаций первых трех цифр можно сопоставить с каждой комбинацией последних трех. Значит, следует подсчитать, сколько имеется комбинаций трех цифр, дающих сумму цифр S, где S может меняться от 0 до 27, возвести это число комбинаций в квадрат и просуммировать эти квадраты по S от 0 до 27. Эта сумма и даст искомое число счастливых билетиков (правда, увеличенное на единицу, поскольку билета с номером 000000 не бывает). При таком способе написания программы потребуется перебрать 28*10*10*10 = = 28 000 возможностей, т. е. существенно меньше миллиона! Но продолжим упрощение идейной линии программы. Если мы для некоторого S ищем количество комбинаций трех цифр, дающих сумму S, то достаточно перебрать возможности только для двух цифр: если сумма первых двух цифр не превосходит S, но отличается от S не более, чем на 9, то третья цифра однозначно определится (как разность между S и суммой двух первых цифр). Значит, при таком подходе нужно будет перебрать лишь 28*10*10 = 2800 возможностей. Наконец, заметим, что если мы имеем некоторый счастливый билетик, то, дополняя все его цифры до 9, мы тоже получим счастливый билетик (например, взяв билетик 457 268, мы получим, дополняя цифры до 9, билетик 542 731). Но если сумма цифр (как первых трех, так и последних трех) во взятом счастливом билетике была S, то в билетике, получающемся дополнением цифр до 9, эта сумма цифр будет равна 27—S. Следовательно, достаточно придавать для S значения от 0 до 13, а потом удвоить найденное число счастливых билетиков (и еще надо не забыть вычесть единицу). Это означает перебор лишь 14*10*10 = 1400 возможностей. При такой идее программы даже «слабенький» компьютер через несколько секунд даст ответ! Как видите, думать над идеей составления программы надо серьезно, и здесь есть содержательные логико-математические задачи. Вот эта программа:

```
10 P=0
20 FOR S=0 TO 13
30 Q=0
40 FOR K=0 TO 9
50 FOR L=0 TO 9
60 IF K+L>S GO TO 90
70 IF K+L<S+10 THEN Q=Q+1
80 NEXT L
90 NEXT K
100 P=P+Q*Q
110 NEXT S
120 PRINT 2*P-1
130 END
```

К о м м е н т а р и й. Здесь Q — рабочая переменная, играющая роль «счетчика»: каждый раз, когда первые две цифры K, L пригодны для получения требуемой суммы S, эта возможность засчитывается, т. е. новое значение переменной Q (строка 70) равно ее прежнему значению, увеличенному на 1. Переменная P — «накопитель»: если мы уже подсчитали, сколько имеется возможностей осуществления данной суммы S (п о с л е д н е е значение переменной Q как раз будет давать это число возможностей), то надо возвести это число возможностей в квадрат и п р и б а в и т ь этот

(Окончание см. на с. 34)


1
2
3
4
5
6

В этом номере мы публикуем статью известного физика-теоретика, специалиста по физике твердого тела, профессора М. И. Каганова. В ней автор на простых примерах знакомит читателя с тонким, граничащим с интуицией искусством оценок, без которого невозможна работа сегодняшнего физика-теоретика на его пути к неведомому.
Статья написана в системе единиц СГС (сантиметр — грамм — секунда). В школе эту систему уже давно не изучают, однако профессиональные физики обычно пользуются именно ею (а не знакомой школьникам СИ). Дело в том, что при написании формул в этой системе единиц появляющиеся в них коэффициенты имеют ясный физический смысл. Подумав, редакция не решилась переводить формулы статьи в СИ, так как при этом аромат настоящей физики, веющий от нее, был бы безвозвратно утерян.

МНОГО ИЛИ МАЛО?

(Рассуждения физика-теоретика о числах)

Доктор физико-математических наук
М. И. КАГАНОВ

Однажды я задумался, сколько книг человек может прочитать за жизнь. Оценил я это число так. Скажем, человек читает 60 лет. В году 52 недели. Пусть в неделю человек прочитывает две книги. Значит, около 100 в год. Итого примерно 6000 книг за жизнь. Это число, не обсуждая, как оно получилось, я назвал разным людям. «Так мало!» — сказали одни. «Неужели так много?!» — удивились другие. И я подумал: в нас нет запрограммированной чувственной оценки чисел. Только сравнивая одно число с другим, только придавая числу определенный смысл, мы ощущаем его величину. Число прочитанных книг, конечно, имеет вполне определенный смысл (это не просто безымянные 6000), но ощутить его (оценить, сказать — много это или мало) может только тот, кто сумеет подобрать сравнение, например, задумавшись: «А сколько книг в неделю (месяц, год,...) читаю я?»...

Физика имеет дело с именованными величинами. Любая физическая величина имеет размерность. Существует специальный раздел физики, изучающий принципы размерности, системы единиц, эталоны этих единиц и т. д. Должен признаться, всегда этот раздел физики мне казался достаточно скучным. Может быть, из-за того, что из него много фактов надо держать в голове: как связаны между собой джоуль и эрг, чем отличается эрстед от гаусса, сколько кулонов в единице заряда по системе СГС и т. д., и т. п. Но, как ни грустно, без этого обойтись нельзя. Приходится, переходя от одних значений к другим, выражать их в определенных единицах и притом в одинаковых. Сравнивая магнитное поле, созданное сверхпроводящим соленоидом, с магнитным полем Земли, оба поля надо выразить в одних единицах: в гауссах или в теслах — безразлично, отношение полей от этого не зависит. А ведь именно отношения физических величин нам, как правило, и важны, так как именно они (безразмерные отношения) определяют то, что физики любят называть «физикой явления». Эту мысль мы разовьем ниже, а сейчас еще несколько слов о размерных величинах.

Задумывались ли вы о том, почему все физические величины могут быть выражены через единицы длины (сантиметр), времени (секунду) и массы (грамм)? Это относится и к электрическим, и к магнитным величинам, и к тепловым, и к оптическим.*) В физике нет величин, которые нель-

*) Например, размерность тока — $[I]=[Q]/\text{с}$, а размерность заряда Q можно найти, воспользовавшись законом Кулона: $[Q]^2/[R]^2=[F]$, где F — сила. Так как $[F]=\text{г}\cdot\text{см}/\text{с}^2$, то $[Q]=\text{г}^{1/2}\cdot\text{см}^{3/2}/\text{с}$. Отсюда $[I]=\text{г}^{1/2}\cdot\text{см}^{3/2}/\text{с}^2$. Так размерность всех электрических величин можно выразить через грамм, сантиметр и секунду.

зя было бы записать через сантиметр, секунду и грамм. Ответ на вопрос, почему все физические величины выражаются через грамм, сантиметр и секунду, может показаться неожиданным. Дело в том, что это связано с определением физики. Физика занимается теми явлениями, которые могут быть описаны с помощью сантиметра, секунды и грамма. Сантиметр и секунда нужны для описания движения в пространстве (кинематика), а грамм необходим для связи этого движения с силой, вызывающей движение (динамика). Вспомните, что по закону Ньютона сила равна ускорению, умноженному на массу. Конечно, существует множество явлений, которые мы не можем описать с помощью физических величин. Например, всё, что относится к развитию человеческого общества — к истории, экономике и т. п. Исследование этих явлений, требующее иногда сложных математических методов, не принадлежит физике. И конечно, физика не исчерпывается измерениями. Фундаментальную роль в ней играют представления, положения, законы, иногда выраженные в виде математических уравнений, а иногда ограничивающиеся словесной формулировкой. Вот яркий пример: все тела состоят из молекул, молекулы из атомов, атомы из ядер и электронов, а ядра из протонов и нейтронов. В этой фразе — огромная информация, концентрация многовекового изучения природы, изучения, основанного на измерении величин, которые (все!) могут быть выражены через сантиметр, секунду и грамм.

К основным законам природы, несомненно, следует отнести законы сохранения. Кроме хорошо известных — закона сохранения энергии и импульса — существуют и более экзотические. Например, закон сохранения барионного заряда, утверждающий, что число частиц типа протон или нейтрон не изменяется при взаимодействии между частицами.*)

*) Античастицам приписывается барионный заряд обратного знака (у протона и нейтрона барионный заряд равен 1, у антипротона и антинейтрона —1).

Или другой пример: состояние атомных и субатомных частиц характеризуется некоторой величиной, которую называют волновой функцией. Чаще всего ее обозначают греческой буквой ψ. Волновая функция ψ — функция координаты $\vec{r}$. Так как все точки пустого пространства эквивалентны, то любую точку можно избрать за начало координат. Так вот, функция $\psi(\vec{r})$ согласно уравнениям квантовой механики может быть либо четной, либо нечетной —

$$\text{либо } \psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r}),$$
$$\text{либо } \psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r}),$$

причем, что бы с частицей ни происходило, это свойство волновой функции сохраняется. Говорят, что существует закон сохранения четности. Если у частицы четная волновая функция, то такой частице можно приписать четность +1, если волновая функция нечетная — то —1. Кроме того, волновая функция нескольких не взаимодействующих друг с другом частиц есть произведение волновых функций отдельных частиц, а ее четность — произведение четностей отдельных частиц. Это дает возможность обобщить закон сохранения четности на весьма сложные случаи. Например: сталкиваются две частицы — четная и нечетная, а в результате рождаются новые частицы; если их две, то одна из них должна быть четной, а другая нечетной, а если три, то все они могут быть нечетными. Для нас важно: сохраняется безразмерное число +1 или —1.

Но для проверки этого и подобных утверждений необходимы измерения. Для этого что-то должно двигаться за счет действия на это «что-то» каких-то сил. И мы опять приходим к физическим величинам, размерность которых может быть сведена к сантиметру, секунде, грамму. Я очень не хотел бы, чтобы меня восприняли как «врага» безразмерных чисел. Наоборот: одна из задач этой статьи — убедить читателя в пользе и даже необходимости безразмерных

комбинаций размерных величин. Более того. Истинно безразмерные числа, т. е. не являющиеся комбинациями размерных величин, тоже часто встречаются в физике. Трудно найти формулы, в которые не входят трансцендентные числа e и π, не говоря уже просто о самых различных численных множителях, входящих в любую формулу.

Вернемся к физическим величинам, обладающим той или иной размерностью. Задача физической теории — связать различные физические величины соотношениями, которые допускают экспериментальную проверку. Например, желая проверить, как изменяется со временем путь s, проходимый частицей, движущейся с постоянным ускорением a, мы должны сравнить свои измерения с формулой

$$s(t)=v_0t+\frac{at^2}{2}=v_0t\left(1+\frac{at}{2v_0}\right), \quad (1)$$

где v_0 — начальная скорость частицы. Это — очень простая формула. Но и она (как все формулы в физике!) требует, чтобы все входящие в нее величины имели соответствующие размерности: если s измеряется в сантиметрах, а t — в секундах, то v_0 — в см/с, а a — в см/с^2. Но пусть мы хотим не только проверить эту формулу, но и выяснить: как сказывается на характере движения частицы ускорение? Для этого удобна вторая форма записи (когда v_0t мы вынесли за скобки). Из нее видно: сначала (при $t\ll 2v_0/a$) роль ускорения незначительна — частица практически движется с постоянной скоростью v_0, зато потом (при $t\gg 2v_0/a$) частица «забывает», какая у нее была начальная скорость,— ее движение определяется ускорением. Как видите, нельзя однозначно ответить на вопрос, большое или маленькое ускорение у частицы. Ответ зависит от того, какой этап движения нас интересует. А выяснили мы это, сравнив с единицей безразмерное отношение $at^2/2v_0t=at/2v_0$. Строго говоря, отбрасывая первое или второе слагаемое, надо было бы учесть, с какой точностью измеряет пройденный путь наш прибор, и разрешить себе пренебрегать соответствующим слагаемым только в том случае, если оно окажется меньше относительной ошибки измерения. Мы больше не будем вдаваться в подобные тонкости, хотя они очень важны при анализе реальных экспериментов.

При решении реальных задач мы часто должны упрощать — без этого попросту задачу решить нельзя. Упрощение всегда основано на пренебрежении малыми членами по сравнению с большими. Но для того чтобы что-то отбросить, надо произвести сравнение членов, а сравнивать можно только величины одной размерности. Сказанное формулирует первое (основное) правило пользования размерными величинами. Многие физики так боятся это правило нарушить, что, начиная решать задачу, сразу обезразмеривают входящие в нее величины.

Вернемся к движению частицы с постоянным ускорением. Давайте время будем измерять в единицах $2v_0/a$ (т. е. введем вместо времени t «безразмерное время» $\tau=at/2v_0$), а пройденный путь — в единицах $2v_0^2/a$ (т. е. введем «безразмерную длину» $\sigma=\frac{a}{2v_0^2}s$). Тогда формула (1) предельно упростится:

$$\sigma=\tau(1+\tau). \quad (2)$$

Переход от формулы (1) к формуле (2) и называется обезразмериванием. Преимущество такого подхода очевидно: изучив зависимость σ от τ, мы узнаем, как движется частица с любым постоянным ускорением, какую бы начальную скорость она ни имела.

Надо признаться: в сложных случаях не всегда рекомендуют обезразмеривать формулы, так как, проверяя размерность *до* и *после* вычисления, легко найти ошибку или убедиться, что вычисление, по-видимому, проделано правильно.

Для того чтобы сформулировать еще одно правило, которое необходимо учитывать при упрощениях, основанных на существовании в формуле (в уравнении) малой величины, чуть усложним формулу (1), считая, что в момент времени $t=0$ тело находилось в точке с координатой s_0:

$$s(t)=s_0+v_0t+at^2/2. \qquad (1')$$

Теперь расстояние будем измерять в единицах s_0, а время — в единицах s_0/v_0. Тогда

$$\sigma=1+\tau+\varepsilon\tau^2, \qquad (2')$$

где $\varepsilon=as_0/2v_0^2$ — безразмерная величина.

Прежде всего обратим внимание на то, что, избери мы прежние единицы для времени и расстояния, мы получили бы другое уравнение —

$$\sigma=\sigma_0+\tau(1+\tau),$$

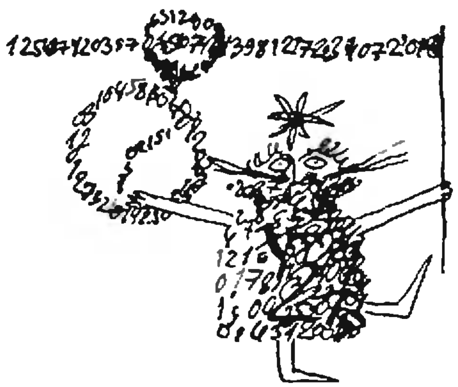
с другой безразмерной величиной $\sigma_0=as_0/2v_0^2$, входящей в формулу. Уже этот факт достоин подчеркивания: как правило, есть разные способы обезразмеривания, и нужно выбирать тот, который удобнее. Итак, пусть безразмерная величина ε в уравнении (2′) очень мала ($\varepsilon\ll1$); ну, скажем, $\varepsilon\approx10^{-3}$ или и того меньше. На минуточку представьте себе, что ε стоит множителем не перед τ^2, а перед какой-нибудь сложной функцией «безразмерного времени» τ. Сколь упростилась бы формула, если бы, воспользовавшись тем, что величина ε мала, мы отбросили слагаемое, содержащее ε. Но мы понимаем (вернувшись от (2′) к (2)), что это означало бы полностью пренебречь ускорением, или, в более общих терминах, пренебречь специфическими чертами изучаемого движения.*)

Именно этого делать нельзя! Выливать воду из ванночки надо осторожно — можно выплеснуть купающегося в ней ребеночка.

До сих пор мы имели дело с известным законом движения и манипулировали входящими в формулу известными величинами. Теперь подумаем о значительно более сложной проблеме. Давайте мысленно перенесемся в доквантовую эру. Опыты Резерфорда показали: во-первых, атом — сложная система, масса атома сосредоточена в его положительно заряженном ядре, причем масса ядра M в тысячи раз превышает массу отрицательно заряженного электрона m (электрон уже открыт, и заряд его измерен, он равен $e=-4{,}8\cdot10^{-10}$ ед. заряда СГСЕ$=-1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл), во-вторых, внутри атома (на расстояниях $\sim1\,\text{Å}=10^{-8}$ см) действует закон Кулона.

Итак, мы знаем, что внутри атома, состоящего из тяжелого ядра — протона и легкого электрона (для простоты ограничимся атомом водорода), действует закон Кулона. Кроме того, известно (было известно и в доквантовую эру!), что все атомы водорода одинаковы, т. е. имеют одинаковые размеры ($\sim10^{-8}$ см). Обозначим размер атома водорода через a_0. И постараемся понять: почему $a_0\sim10^{-8}$ см? Для этого выразим a_0 через характеристики составных частей атома — заряд e и массы электрона m и протона M. Массу протона, по-видимому, можно исключить, считая, что протон покоится, а электрон движется вокруг него (в действительности обе частицы движутся вокруг общего центра тяжести, но поправки, связанные с этим, весьма малы). Остаются величины m и e. Но легко проверить (про-

*) Не говорю уже о формальной неправильности пренебрежения слагаемым $\varepsilon\tau^2$ при больших значениях τ. Думаю, это совершенно понятно. И все же: $\varepsilon\tau^2$ становится порядка единицы или больше ее только при $\tau\gtrsim1/\sqrt{\varepsilon}$. Это время стремится к бесконечности, когда $\varepsilon\to0$. Представим себе, что мы изучаем некий процесс, который длится небольшое конечное время, а выяснилось, что слагаемое $\varepsilon\tau^2$ достигает значения единицы тогда, когда наш процесс уже давно закончился. Конечно, в этом случае без зазрения совести это слагаемое можно опустить.



верьте!), что из них нельзя «построить» комбинацию размерности длины.

Вывод таков: классическая физика не может установить «природу» размеров атома. К этому, в настоящее время хорошо известному, выводу можно прийти и другими путями. И известен «выход из положения». Его обеспечила квантовая, или атомная, механика. Не входит в нашу задачу рассказывать о квантовой механике в этой статье. Напомним только, что квантовая механика ввела в физику новую мировую постоянную — постоянную Планка $\hbar$, равную $\sim 10^{-27}$ г · см^2/с, и вернемся к атому водорода. В нашем распоряжении теперь три величины: m, e и $\hbar$, а из них легко построить величину размерности длины:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ см.} \qquad (3)$$

Мы без оговорок приравняли выведенную комбинацию размеру a_0, так как с хорошей точностью она действительно равна размеру атома водорода.

Теперь несколько серьезнее задумаемся о логике вывода формулы (3). Не решая задачи, не задумываясь над тем, какими уравнениями описывается движение электрона в атоме, только зная, какие величины (a_0, e, $\hbar$, m) должны входить в неизвестное уравнение, мы решаемся сделать вывод, зафиксированный формулой (3). Какие у нас для этого основания?

Ясно, что уравнение, которое нам придется решать для определения размера атома, будет содержать в виде неизвестной величины (x) безразмерную комбинацию*), т. е. $x = a_0 me^2/\hbar^2$, а величина x должна быть найдена путем решения какого-то уравнения, скажем $f(x)=0$. Но откуда у нас уверенность, что корень этого уравнения порядка единицы? Ведь легко себе представить, что x_0 — корень уравнения $f(x_0)=0$ — какое-нибудь огромное или, наоборот, очень маленькое число. А тогда $a_0 = x_0\hbar^2/me^2$ либо значительно больше, либо значительно меньше истинных размеров атома; т. е., попросту говоря, ничего о размере атома мы сказать не можем. Здесь нас выручают интуиция, привычка, опыт. В большинстве случаев искомый корень уравнения действительно оказывается порядка единицы, и тогда наши соображения, основанные на анализе размерности, подтверждаются точным расчетом.

Но бывает и иначе.

В моей практике встретился такой случай. С моим учителем И. М. Лифшицем мы теоретически исследовали свойства вещества, в котором происходят деления радиоактивных ядер (свойства тепловыделяющих элементов реактора). Это непростая задача — выяснить, как влияют на свойства тела происходящие в нем (в случайных местах, в случайные моменты времени!) радиоактивные распады. Но оказалось, что, зная энергию, которую несут осколки ядер, можно воспользоваться соображениями размерности и оценить (прикинуть) результат сравнительно просто. Интуиция подсказала, что результат следует проверить точным расчетом. Оказалось, точное значение отличается от оценки (прикидки) множителем $(2\pi)^{-5} \approx 10^{-4}$(!). Я думаю, что если бы точный расчет был более сложен, чем это было в действительности, и нам пришлось бы ограни-

*) Сколько-нибудь сложная функция, аргумент которой — размерная величина,— вообще бессмысленная вещь. Ведь, как правило, функция задается рядом. Например, $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$ А складывать можно только величины одной размерности.

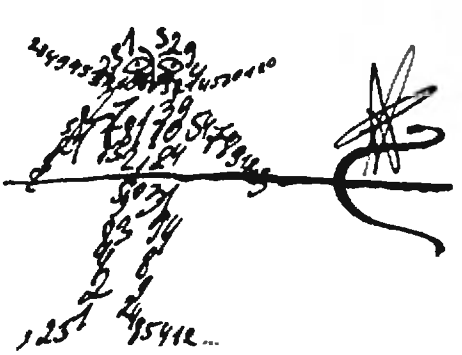
читься оценками, то мы в конце концов нашли бы (и без расчета) множитель $(2\pi)^{-5}$ — ведь его появление отнюдь не случайность ...

А вот другой — противоположный — пример. И. М. Лифшиц и А. В. Погорелов (вы знаете А. В. Погорелова как автора учебника и книг по геометрии) исследовали закономерности деления тяжелых ядер. Аналогия с каплями обычной жидкости и соображения размерности помогли сравнительно просто решить задачу и получить ответ с точностью до безразмерного множителя. Авторам хотелось думать, что неизвестный безразмерный множитель близок к единице (насколько я помню, И. М. Лифшиц был в этом уверен). А. В. Погорелов сконструировал специальный прибор, позволяющий с помощью «обычной» жидкости измерить ту величину, которую оценили теоретически. Оказалось, что искомый множитель равен 1,1 (!).

Что следует из этих двух примеров? Только то, что надо проявлять осторожность при оценках, основанных на соображениях размерности. Проявлять осторожность, но ни в коем случае не отказываться от методов, основанных на этих соображениях.

Когда речь идет об области физики, занимающейся такими явлениями, для понимания которых достаточно использовать известные законы природы (т. е. они описываются с необходимой точностью известными уравнениями), методы размерности служат наводящими соображениями, подспорьем интуиции. С бо́льшими или меньшими трудностями можно произвести соответствующий расчет и получить точный ответ. Соображения размерности приобретают особую роль, когда физик выходит в непознанную область, когда нет строгих уравнений, на которые можно опереться, и можно только прикидывать, оценивать и угадывать. Эта деятельность физиков-теоретиков требует особого чутья, основанного на глубоком знании всей структуры физики, понимании того, что можно подвергать сомнению (пересмотру), а что незыблемо, отказ от чего разрушает (буквально) все здание физики. Наука значительно более консервативна, чем кажется тем, кто смотрит на нее со стороны, восхищается ее успехами, кому кажется, что наука все может, что ей все доступно. Наука описывает реально существующий Мир, управляемый реально существующими законами. Эти законы наука постепенно, в мучительных поисках постигает. Построение логически непротиворечивой картины Мира — столь сложная задача, что надо с трепетной осторожностью относиться к каждой детали этой картины, непрестанно задавая себе вопрос, не нарушу ли я что-то во всей картине, если предположу нечто новое, необходимое (как мне кажется) для объяснения какого-то факта?..

Я понимаю, что последний абзац выглядит совершенно абстрактным. И все же не хочу приводить примеры — главным образом потому, что не чувствую себя специалистом в той физике, из которой эти примеры следовало бы черпать: из физики элементарных частиц, из космологии. Хочу только обратить внимание на следующее. Одну и ту же размерность имеют совершенно различные величины: расстояние между Москвой и Нью-Йорком и размер атома водорода, время обращения Нептуна вокруг Солнца и период колебаний атомов в молекуле водорода, масса протона и масса электрона и т. д., и т. п.— примеры можно множить до бесконечности. Разделив размерную величину на величину той же размерности, мы получим безразмерное число. Можно задать вопрос: почему получилось именно это число, а не какое-нибудь другое? Ясно, что так как число отношений бесконечно, то и число вопросов тоже бесконечно. Надо ли все их задавать? И нужно ли на них отвечать? — Ответ дает только опыт. Опыт отдельного человека и опыт всей физики. В ходе развития науки перечень вопросов изменяется вместе с перечнем ответов на них, причем,



естественно, вопросы несколько опережают ответы, правда, опережают не слишком значительно. Дело в том, что правильно сформулированный вопрос, как правило, несет в себе ответ. Иногда вопрос выглядит совершенно невинным, а ответ на него очень сложен. Чего уж проще: почему отношение массы протона M_p к массе электрона m_e равно 1838? А ответ на этот вопрос, насколько я знаю, не известен. Или другое знаменитое число — так называемая постоянная тонкой структуры

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

Постоянную тонкой структуры так и называют — одна сто тридцать седьмая! Почему 1/137 — современная наука даже не формулирует. Но использует α многократно. Относительная малость заряда ($e^2 = \hbar c/137 < \hbar c$) приводит буквально к бесконечному числу следствий.

137, а тем более 1838 — числа, значительно большие единицы. Могут ли они быть следствием теории, корнем какого-либо уравнения? А ведь можно указать пример, который приводит к буквально астрономическому числу. Отношение силы электростатического отталкивания друг от друга двух протонов к силе гравитационного притяжения между ними — $e^2/(M_p^2 G)$,— конечно, безразмерное число. Оно равно 10^{36} (!). Решая такое уравнение, можно надеяться получить такое фантастическое число? Сейчас делается попытка построить суперфизику, объединяющую все взаимодействия между частицами. По-видимому, она — эта будущая наука — должна «выдать» в виде ответа это грандиозное число. Возможно, правда, в этом не будет ничего удивительного: просто (?!) искомой величиной будет не само отношение, а, скажем, $\ln\ln(e^2/(M_p^2 G)) \approx \approx 4{,}4$. Но это уже не соображение, а фантазирование... А я хотел бы предостеречь читателя от различных неоправданных сравнений величин одной размерности и обнаружения каких-то мистических соотношений. Попытка ответить на вопрос, чему должно быть равно то или другое отношение двух размерных физических величин, должна основываться на глубоком знании предмета — озарение здесь не поможет, поверьте мне!

* * *

Эти рассуждения трудно закончить. В любой области своей деятельности физик (и теоретик, и экспериментатор) сталкивается с числами. Одними он должен воспользоваться, другие должен определить. Встречаясь с числами всегда и везде, он привыкает к ним и часто пользуется ими, не задумываясь, откуда они возникли, почему они такие, а не другие. Это означает, что он — физик — хорошо знает свою область, что у него есть интуиция, что он умеет почти бессознательно выбрать из физики (из огромного запаса накопленного в ней знания) именно то, что нужно для понимания изучаемого явления. Но если его спросить, почему он отбросил все остальное, он задумается и, *аргументируя* числами, покажет, что отброшенное не должно играть существенной роли. Иногда он ошибается. И если ошибка не тривиальна, то понимание ошибки, ликвидация противоречия может привести к открытию... Об этом стоит помечтать...

НУЖНА ЛИ АЛЬПИНИСТУ ФИЗИКА?

Кандидат технических наук
А. Б. ГЕЛЛЕР

Люди, покоряющие горные вершины, обычно романтики. А сами горы с их белыми вершинами настолько величественны, что любые слова о физических объяснениях тех или иных явлений, возникающих в горах, о расчетах и обоснованиях каких-то конкретных ситуаций иногда кажутся смешными. Чем-то вроде формулы для стихов или алгоритма для создания живописного полотна.

И все-таки мы попытаемся решить одну такую задачу и на ее примере показать, как физика помогает альпинистам. Пребывая еще на равнине, сидя за письменным столом, можно решать вопросы безопасности в горах. Итак, мы собираемся в горы. Разумеется, мы должны хорошо подобрать и подогнать необходимое снаряжение, запастись скальными и ледовыми крючьями, хорошими веревками...

Альпинистская веревка, как и большинство других предметов снаряжения в современном спорте,— сложное инженерное «сооружение». Мы расскажем в этой статье, почему альпинистам нужны специальные веревки и как они «работают» в горах. Но сначала обсудим типичную и, увы, нередко возникающую при восхождениях или на тренировках ситуацию.

На рисунке 1 схематически показано движение связки-двойки. Первый альпинист, назовем его Алексеем, поднялся по скале на высоту $L=5$ м выше второго, которого зовут Виктором. Алексей забил в точке A крюк, который является точкой страховки, а затем поднялся еще на $l_0=2{,}5$ м. Внезапно Алексей сорвался. Виктор же очень прочно закрепил свой конец веревки, и Алексей повис на ней.

Вопрос, который нас интересует: какими свойствами должна обладать веревка, чтобы Алексей остался невредим?

Конечно, первым делом (пока мы еще дома) стоит заглянуть в какой-нибудь справочник, где приводятся характеристики спортивного снаряжения. Так мы узнаем, что для веревки диаметром 10 мм прочность, т. е. сила, которую нужно приложить, чтобы порвать ее, равна $P=1{,}5\cdot10^4$ Н. Известно также, что максимальное усилие, которое выдерживает человеческое тело,— $F_{max}=5\cdot10^3$ Н. Нам понадобится еще масса альпиниста с рюкзаком M. Будем считать, что $M=100$ кг, это вполне разумная оценка.

Казалось бы, для безопасности Алексея достаточно, чтобы веревка была прочной. Тогда при падении он останется цел, так как веревка не порвется. Но вспомним, что человек, упавший с высоты 10 м (высота третьего этажа), чаще всего разбивается, если падает на твердую землю. Если же он упадет на стог сена или в глубокий сугроб, то скорее всего отделается просто испугом. Срыв альпиниста, повисшего на нерастяжимой веревке, тоже приведет к удару в конце его полета, даже если он и не долетит до основания скалы. Поэтому напрашивается вывод: скорость, которую приобрел человек при падении, нужно погасить

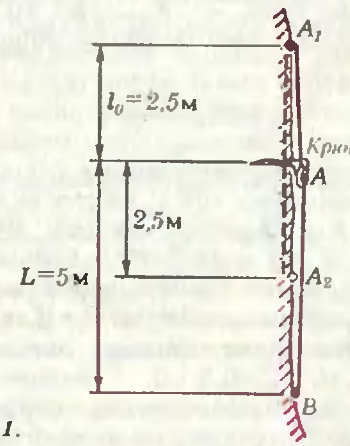


Рис. 1.

плавно. Вот мы и попробуем понять, как это сделать.

Можно считать, что при срыве скорость Алексея в точке A_1 равна нулю и его падение почти до точки A_2 есть просто свободное падение (веревка не натянута!). В точке A_2 его скорость равна $v_0=gt$, где t — время падения. За это время Алексей пролетит расстояние $gt^2/2=2l_0$; так что $t=\sqrt{4l_0/g}$, и $v_0=g\sqrt{4l_0/g}=2\sqrt{gl_0}$.

Скорость v_0 гасится более или менее плавно где-то вблизи точки A_2 за счет растяжения веревки. В тот момент, когда веревка натянулась и начала растягиваться, скорость Алексея $v=v_0$, а когда удлинение веревки стало максимальным и падение прекратилось, $v=v_к=0$. Если время, за которое будет «погашена» скорость, обозначить Δt, то средняя сила, действующая на альпиниста за это время,— $F_{ср}=\frac{M(v_0-v_к)}{\Delta t}$. Величина $\frac{v_0-v_к}{\Delta t}=\frac{v_0}{\Delta t}=a$ имеет смысл среднего ускорения, с которым происходит «торможение». Очевидно, что чем больше начальная скорость и чем меньше время торможения, тем больше сила $F_{ср}$. Но тогда из того, что мы сказали, следует, что веревка, связывающая Алексея и Виктора, должна быть такой, чтобы время Δt до остановки Алексея было достаточно большим. Что значит — достаточно большое время торможения? А это значит, что во всяком случае средняя сила $F_{ср}$, действующая на Алексея со стороны веревки, должна быть меньше, чем то максимальное усилие, которое может выдержать человеческое тело — $F_{max}=5\cdot 10^3$ Н. Итак, должно выполняться неравенство

$$F_{max}\geqslant F_{ср}=\frac{Mv_0}{\Delta t},$$

отсюда $\Delta t\geqslant Mv_0/F_{max}$ (Заметим, кстати, что $a=\frac{v_0}{\Delta t}\leqslant\frac{F_{max}}{M}=\frac{5\cdot 10^3 \text{ Н}}{10^2 \text{ кг}}=50$ м/с^2, а это значит, что a может быть и больше $g\approx 10$ м/с^2. Для нашего конкретного примера легко получить, что $\Delta t\geqslant 0{,}2$ с.)

Что же может обеспечить необходимое время Δt, а следовательно, и безопасность альпинистов? Только способность веревки хорошо растягиваться. Для упрощения расчетов будем считать, что такое торможение при растяжении веревки есть процесс равнозамедленного движения. Тогда путь, пройденный Алексеем до его задержания (остановки), равен удлинению веревки $\Delta l=a(\Delta t)^2/2$. Подставив сюда $a=v_0/\Delta t$, получим $\Delta t=2\Delta l/v_0$. Комбинируя же эту последнюю формулу с написанным выше неравенством для Δt, придем к неравенству

$$\Delta l\geqslant\frac{Mv_0^2}{2F_{max}}=\frac{M\cdot 4gl_0}{2F_{max}}=\frac{2Mgl_0}{F_{max}}.$$

Такова оценка для расстояния, на котором скорость должна быть погашена, чтобы не причинить вреда альпинисту. (При $l_0=2{,}5$ м и $M=100$ кг $\Delta l\geqslant 1$ м.) Разделим теперь обе части неравенства для Δl на длину веревки до растяжения $L+l_0$. Отношение $\varepsilon=\Delta l/(L+l_0)$ называется относительной деформацией или просто деформацией. Если в правую часть неравенства

$$\varepsilon\geqslant\frac{2Mgl_0}{(L+l_0)F_{max}}$$

подставить числовые значения для нашей конкретной ситуации, получится, что $\varepsilon\geqslant 0{,}13$.

Можно утверждать теперь, что Алексей при срыве не пострадает, если деформация альпинистской веревки больше 13 %. На самом деле хорошая современная альпинистская веревка имеет деформацию при нагрузках порядка 10^4 Н около 40—45 %.

Казалось бы, все теперь ясно. Мы возьмем с собой в горы веревку с необходимыми для безопасности характеристиками, а Виктор может, не задумываясь, жестко закреплять ее.

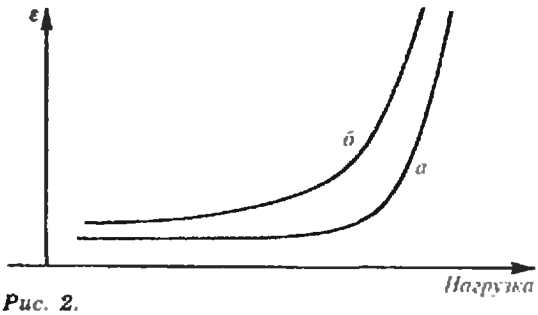


Рис. 2.

Но теперь представьте себя в роли альпиниста, которому необходимо подняться по такой веревке. Это часто приходится делать в альпинистской практике. Идущий первым прокладывает путь по сложному рельефу, используя весь арсенал альпинистской техники. Затем он закрепляет веревку, а все остальные участники восхождения поднимаются уже по ней. Естественно, что веревка под нагрузкой, которая создается альпинистом, растягивается. Чем дальше альпинист находится от точки закрепления, тем больше будет абсолютное удлинение веревки. Ощущения у лезущего по такой веревке будут примерно такие же, как у альпиниста, «подвешенного на резиночке». Это, поверьте, не очень приятно, особенно когда вокруг острые камни! Хорошо бы иметь веревку, у которой зависимость деформации от нагрузки изображается кривой *а* на рисунке 2. Тогда при малых нагрузках веревка почти не растягивалась бы. Это позволяло бы подниматься по закрепленной веревке, как по канату в спортивном зале. При больших нагрузках, наоборот, нам «выгоден» быстрый рост деформации. В самом деле, если область нагрузок, при которых ε быстро растет, примерно та же, что и нагрузки после срыва альпиниста, то веревка «работает» как резина, «принимая рывок на себя».

В природе не существует материалов, которые обладали бы такими характеристиками. Однако сочетания различных материалов позволяют сконструировать веревку, которая обеспечит альпинистам и необходимую безопасность, и удобства при подъеме. Кривая *б* на рисунке 2 — схематическая характеристика реальной веревки.

Разрез такой альпинистской веревки изображен на рисунке 3. Наружная оплетка ее изготовлена специальным образом. Достаточно жесткие и прочные капроновые нити (иногда их заменяют лавсановыми) располагаются под углом к оси веревки. Под нагрузкой эти нити меняют свое направление и постепенно располагаются почти параллельно оси. Внутренняя часть веревки представляет собой сочетание (пучок) нескольких таких же оплеток, но меньшего диаметра. Нити внутри каждой такой оплетки очень прочные, они почти не изменяют свою длину вплоть до разрушения. Количество нитей подбирают так, чтобы они выдерживали нагрузку примерно $3 \cdot 10^3$ Н. При срыве альпиниста, как только нагрузка на веревку превысит эту величину, внутренние жесткие и прочные нити рвутся, а вся веревка в целом растягивается. Разрываясь, жесткие нити оказываются первыми «гасителями» кинетической энергии падающего тела. Существенная часть этой энергии переходит в работу, затраченную на разрыв нитей. Веревкой, которой пользуются после срыва, вполне безопасно можно страховать напарника, а вот подниматься по ней будет, как мы теперь уже понимаем, неудобно.

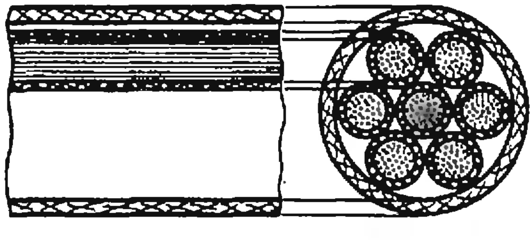


Рис. 3.

Главный вывод, к которому мы пришли, таков: идеальная альпинистская веревка должна быть не только очень прочной, но и хорошо деформироваться. К сожалению, пока промышленность выпускает мало такой веревки. И многим спортсменам-альпинистам приходится пользоваться обычной капроновой веревкой (лет тридцать назад, когда таких веревок тоже было мало, альпинисты пользовались прочными сизалевыми канатами). Прочность у капроновой веревки вполне достаточная, а вот деформация маловата. Она не превышает 15—20% при нагрузках порядка 10^4 Н. Что же это получается? Неужели альпинисты сознательно подвергают свою жизнь опасности, используя непригодное снаряжение?

Ответить на этот вопрос нам опять помогут опыт и физика. Но сначала скажем еще несколько слов о превращениях энергии при подъеме и падении Алексея.

Когда Алексей поднимался выше страхующего его Виктора, он с каждым шагом увеличивал свою потенциальную энергию относительно точки страховки (или относительно Виктора). После срыва эта потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию свободно падающего альпиниста. После падения на всю длину свободной веревки Алексей начинает ее растягивать. Его кинетическая энергия переходит теперь уже в энергию деформации веревки. Ситуация могла бы быть похожей на движение альпиниста на растягивающейся пружине или резинке, если бы веревка была идеально упругой. Будь это так, альпинист после остановки при падении начал бы двигаться снова вверх. Однако такой колебательный процесс на самом деле не реализуется. Под нагрузкой отдельные волокна, из которых сделана веревка, взаимодействуют между собой — трутся друг о друга. Кроме того, и при растяжении волокон выделяется тепло. Колебания, о которых мы могли бы подумать, реально затухают, не успев начаться. Кинетическая энергия упавшего Алексея переходит в тепло, выделяющееся в веревке. Ну а если упругие свойства веревки таковы, что она не может обеспечить плавное замедление упавшего спортсмена? Но тогда такое торможение может осуществить партнер по связке, страхующий своего товарища! Для этого Виктору достаточно «протравить», выпустить под натяжением какую-то часть веревки. Надежность правильной страховки, оказывается, не в том, чтобы как можно прочнее, жестче закрепить веревку, если товарищ сорвался, а в том, чтобы успеть правильно и вовремя регулировать ее натяжение. Как мы уже поняли, в случае хорошей альпинистской веревки происходит переход кинетической энергии падения в тепловую и упругую энергию веревки. Для «плохой» веревки (прочной, но нерастяжимой) та же кинетическая энергия в значительной степени переходит в тепло при трении веревки о руки страхующего. Тепло это может быть довольно большим, поэтому одно из основных правил в альпинизме — «Страхуй в рукавицах!»

Достаточно простые рассуждения показывают, что это правило придумано совсем не зря. Так как мы хотим получить лишь оценку величины выделяющегося тепла, примем условно, что вся энергия падения альпиниста переходит за счет трения веревки о руки страхующего в тепло. Кинетическая энергия падающего альпиниста к моменту, когда начинает «работать» веревка или страхующий его товарищ, равна

$$E_к = Mv_0^2/2 = 2Mgl_0.$$

Подставляя $l_0 = 2{,}5$ м, $M = 100$ кг, $g \approx \approx 10$ м/с^2, получим $E_к \approx 5 \cdot 10^3$ Дж. Вот эта-то энергия и должна перейти в тепло Q. Много это или мало? Давайте посмотрим, какое количество воды можно было бы вскипятить, подведя к нему $Q = 5 \cdot 10^3$ Дж. Тепло, необходимое для нагрева воды от $t_1 = 20$ °C до $t_2 = 100$ °C, равно $Q = cm(t_2 - t_1)$. Теплоемкость воды $c = 4{,}2$ Дж/(г · °C), поэтому $m = Q/(c(t_2 - t_1)) \approx 15$ г. Не так уж и мало!

Конечно, мы сделали сейчас довольно грубую оценку. Реально же нужно иметь в виду, что нагреваются не только руки страхующего, но и сама веревка. Но важнее другое. Человеческое тело сравнительно плохо проводит тепло (физик сказал бы: обладает плохой теплопроводностью). Поэтому при страховке голыми руками нагревается и «обжигается» тонкий слой ткани рук. У слова «обжигается» здесь можно было бы кавычки опустить. А вот чтобы не обжечь руки на самом деле, нужно страховать в рукавицах. Теплопроводность материала, из которого сшиты рукавицы, еще меньше, чем тела альпиниста.

Таковы физические основы страховки в горах. Знать их полезно, конечно, не только альпинистам. И теперь вы сами уже наверняка однозначно ответите на вопрос, который стоит в заголовке этой статьи. Удачных вам восхождений!

Задачник „Кванта"

Задачи

М1081 — М1085, Ф1093 — Ф1097

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 апреля 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1081» или «Ф1093». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1081. Докажите, что предпоследняя цифра числа 3^n при любом натуральном $n>2$ четна.

В. И. Плачко

М1082. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что равенство

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(AO^2+BO^2+CO^2+DO^2)$$

выполнено тогда и только тогда, когда либо диагонали AC и BD перпендикулярны, либо одна из них делится точкой O пополам.

А. П. Савин

М1083. Наибольшее из неотрицательных чисел a_1, a_2, ..., a_n равно a.

а) Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$

б) Когда в нем достигается равенство?

Л. Г. Ханин

М1084. Две окружности на плоскости пересекаются в точках A и B. Докажите, что можно выбрать такую точку C, что любая окружность с хордой AC будет пересекать данные окружности (второй раз) в точках, одинаково удаленных от C (причем $C\neq B$).

В. Протасов, ученик 10 класса (Москва)

М1085*. Несколько попарно скрещивающихся прямых, расположенных в пространстве, проектируются на горизонтальную плоскость. Их проекции изображены так, чтобы в точках пересечения было видно, какая точка расположена выше, а какая ниже. Может ли получиться проекция, изображенная на рисунке 1(а—в)?

С. Л. Табачников

Ф1093. Автомобиль массой $m=1200$ кг, тормозя при выключенной передаче, катится вниз с постоянной скоростью по наклонному участку шоссе с углом наклона α $\left(\sin\alpha=\frac{1}{14}\right)$. Каждое из четырех колес автомобиля имеет внешний радиус R и жестко скреплено с тормозным барабаном радиусом $r=\frac{5}{12}R$, к которому прижимаются с одинаковой силой N тормозные колодки A и A' (рис. 2). Найти N, если коэффициент трения скольжения между барабаном и колодками $k=0{,}4$. Проскальзывание между шинами и шоссе отсутствует.

В. И. Чивилёв

Ф1094. Узкая трубка постоянного сечения образует квадрат со стороной l, закрепленный в вертикальной

Задачник «Кванта»

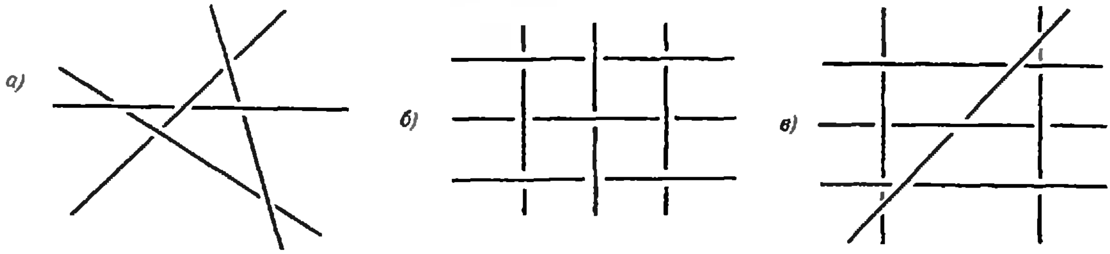


Рис. 1.

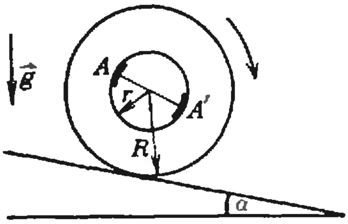


Рис. 2.

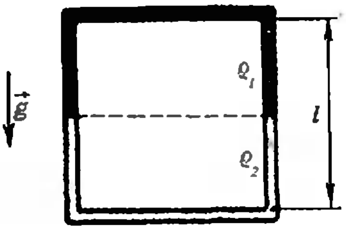


Рис. 3.

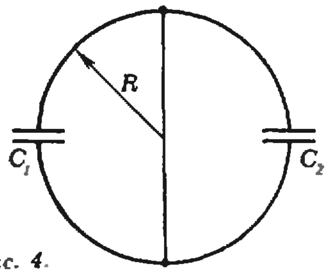


Рис. 4.

плоскости. Трубка заполнена равными объемами двух не проникающих друг в друга жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 3). Вначале более плотная жидкость заполняла верхнюю часть трубки. В некоторый момент жидкости пришли в движение. Найти их максимальную скорость. Трения нет. Ускорение свободного падения равно g.

Г. В. Меледин

Ф1095. Рассеянный велосипедист не заметил, как случайно наехал на вертикальную стенку. Оценить, при какой минимальной скорости шина при ударе деформируется до металлического обода. Предполагается, что вы, хорошо представляя явление, можете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно правильно их числовые значения и получить числовой результат.

Г. В. Федотович

Ф1096. Проволочное кольцо радиусом R имеет проводящую перемычку, расположенную вдоль диаметра. В левую и правую полуокружности включены конденсаторы C_1 и C_2 (рис. 4). Кольцо помещено в нарастающее линейно со временем магнитное поле с индукцией $B(t)=B_0t/T$, перпендикулярное его плоскости. В некоторый момент времени перемычку убирают и затем прекращают изменять поле. Найти заряды, установившиеся на конденсаторах.

Г. В. Федотович

Ф1097. Для уменьшения доли отраженного света от поверхности стекла на нее наносят тонкую пленку, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла (просветление оптики). Какой наименьшей толщины пленку с показателем преломления $n=4/3$ надо нанести на поверхность стекла, чтобы при падении (нормально к поверхности) света, содержащего излучение двух длин волн с $\lambda_1=700$ нм и $\lambda_2=420$ нм, отраженный свет был максимально ослаблен для обеих длин волн?

В. И. Чивилёв

Problems

M1081—M1085, P1093—P1097

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones,

M1081. Prove that the next to last digit of the number 3^n for any natural $n>2$ is even.

V. I. Plachko

M1082. The diagonals of the convex quadrilateral *ABCD* intersect at the point *O*. Prove that the relation

Задачник „Кванта"

but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than April 15th, 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(AO^2+BO^2+CO^2+DO^2)$$

hold if and only if either the diagonals AC and BD are perpendicular or O is the midpoint of one of them.

A. P. Savin

M1083. The largest of the non-negative numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ equals a.

a) Prove the inequality

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n} \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$

b) When does it become an equality? *L. G. Khanin*

M1084. Two circles in the plane intersect at the points A and B. Prove that there exists a point C such that any circle with chord AC will intersect the given circles (the second time) at points equidistant from C.

V. Protasov, 10th form student (Moscow)

M1085*. Several non-intersecting and non-parallel lines in space are projected on the horizontal plane. Their projections are drawn so that we can see, at the intersection points, which of the lines is higher, which is lower. Are the projections shown on the figure 1 (*а*), *б*), *в*)) possible?

S. L. Tabachnikov

P1093. An automobile of mass $m=1200$ kg, bracking with the gearshift in neutral, rolls down with constant velocity along an inclined section of the road, whose angle of inclination is α ($\sin\alpha=1/14$). Each of the auto's four wheels is of exterior radius R and is rigidly connected to the brake drum of radius $r=5R/12$ to which the brake shoes A and A' are pressed with equal force N (figure 2). Find the normal force N if the sliding friction coefficient between the drum and the brake shoes is $k=0.4$. The tires don't slide on the road. *V. I. Chivilev*

P1094. A thin pipe of constant section has the shape of a square of side l, fixed in a vertical plane. The pipe is filled by two liquids (which don't mix) of equal volume whose densities are ρ_1 and ρ_2 (see figure 3). Originally the heavier liquid occupied the top of the pipe. At some moment the liquids came into motion. Find their maximum velocity. The acceleration of gravity is g. *G. V. Meledin*

P1095. An absent-minded cyclist did not notice how he rode head on into a brick wall. Estimate for what minimal velocity the tire will be deformed right up to the wheel. It is assumed that you correctly understand the phenomenon, find the relevent magnitudes and correctly estimate their numerical values, so as to obtain a numerical answer.

G. V. Fedotovich

P1096. A wire ring of radius R has a conducting connection along a diameter. Capacitors C_1 and C_2 are connected to the semicircles as shown on the figure 4. The ring is placed in a linearly increasing magnetic field of induction $B(t)=B_0t/T$ perpendicular to the ring's plane. At some moment the connection is removed and then the field stops changing. Find the charges established on the capacitors.

G. V. Fedotovich

P1097. In order to decrease the amount of light reflected by a glass surface, the latter is covered by a thin film of lesser refraction index than that of glass. What least thickness of film of refraction index $n=4/3$ will insure that light falling perpendicularly to the surface and containing light waves of wavelengths $\lambda_1=700$ nm and $\lambda_2=420$ nm will be minimally reflected for both wavelengths? *V. I. Chivilev*

Задачник „Кванта"

Решения задач

М1061—М1064, Ф1073—Ф1077

М1061. *В стране, где больше двух городов, некоторые пары городов соединены непересекающимися дорогами. Известно, что для любых трех городов A, B, C по этой сети дорог можно проехать из A в B, не заезжая в C. Докажите, что на всех дорогах можно установить одностороннее движение так, что из каждого города можно будет проехать в любой другой, двигаясь по установленным направлениям.*

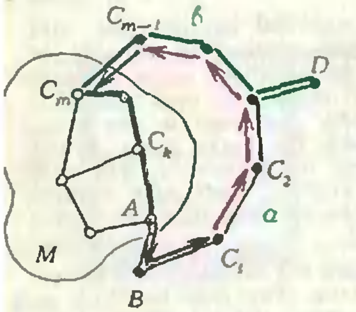


Рис. 1.

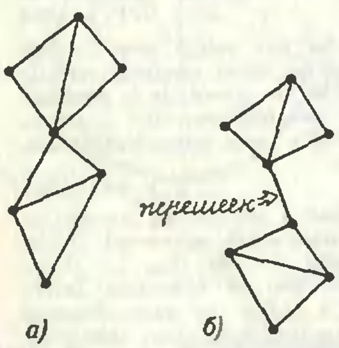


Рис. 2.

Будем устанавливать направления на дорогах постепенно. Пусть это уже сделано для дорог, соединяющих города из некоторого множества M так, что требование задачи выполнено: *из любого города этого множества можно проехать в любой другой из них, следуя по выбранным направлениям.* (Для начала можно считать, что M состоит из одного города, а направления нигде не установлены.) Докажем, что если еще не все города входят в M, то можно выбрать направления еще на нескольких дорогах и увеличить M с соблюдением этого требования.

Ясно, что найдется дорога, соединяющая город A из M с городом B, не входящим в M. Построим путь $c = BC_1C_2...C_kA$ из B в A, не проходящий по дороге AB. Для этого возьмем любой город D, отличный от A и B, и рассмотрим путь a из A в D, не проходящий через B, и путь b из D в B, не проходящий через A (рис. 1). В качестве c можно взять путь, идущий сначала по a — до первого города, общего для a и b, — а потом по b. Пусть C_m — первый из городов C_1, ..., C_k, входящий в M (если таких городов нет, положим $m=k+1$, $C_m=A$). Выберем направления на дорогах AB, BC_1, C_1C_2, ..., $C_{m-1}C_m$ по порядку: от A к B, от B к C_1 и т. д., и присоединим к M города B, C_1, ..., C_{m-1}. Наше условие на нарушится, так как из любого присоединенного города можно попасть в «старое» множество M (дойдя до C_m) и в любой из них можно попасть из M (через A).

Повторяя этот процесс, мы включим в M все города. На оставшихся после этого «неотрегулированных» дорогах (если такие еще будут) направления движения установим произвольно.

Можно рассуждать несколько иначе, доказав сначала, что в условиях задачи любые два города соединены двумя путями, идущими по разным дорогам (это утверждение составляло содержание одной из задач Всесоюзной олимпиады).

Наша задача дает только достаточное условие. Оказывается, верна такая теорема: для того чтобы на дорогах можно было расставить стрелки так, чтобы, двигаясь в предписанных ими направлениях, можно было доехать из любого города в любой другой, необходимо и достаточно, чтобы исходная сеть дорог была связной и не имела перешейков (т. е. после закрытия любой дороги из каждого города можно было бы добраться до любого другого, рис. 2). Эту не очень сложную теорему доказал в 1939 г. Г. Роббинс*), известный, в частности, как соавтор Р. Куранта по замечательной книге «Что такое математика».

В. Е. Колосов, Н. Б. Васильев

*) См. теорему 4.4.1 в книге А. А. Зыкова «Введение в теорию графов». — М.: Наука, 1987.

М1062. *а) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки E и D. Прямые BD и CE пересекаются в точке M, AM и BC — в точке P, AM и DE — в точке N. Докажите, что*

$$\frac{PN}{NA}=2\cdot\frac{PM}{MA}.$$

б) На ребрах SA, SB и SC тетраэдра $SABC$ взяты точки D, E и F. Плоскости ABF, BCD и CAE пересекаются в точке M, прямая SM пересекает плоскости ABC и DEF в точках P и N. Докажите, что

$$\frac{PN}{NS}=3\cdot\frac{PM}{MS}.$$

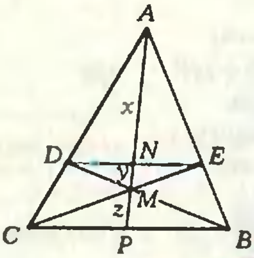


Рис. 1.

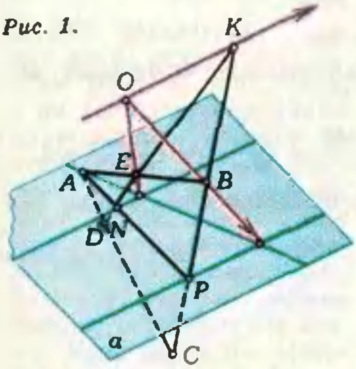


Рис. 2.

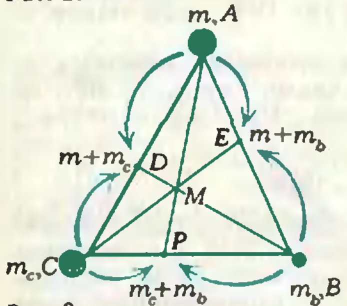


Рис. 3а.

а) Пусть сначала $DE\parallel BC$ (рис. 1). Положим $AN=x$, $NM=y$, $MP=z$, тогда

$$\frac{PN}{NA}:\frac{PM}{MA}=\frac{z+y}{x}\cdot\frac{x+y}{z}=$$

$$=\frac{xz+y(x+y+z)}{xz}=1+\frac{y}{z}\cdot\frac{x+y+z}{x}=2,\qquad (*)$$

поскольку из гомотетичности треугольников MBC и MDE, ABC и ADE следует, что

$$\frac{y}{z}=\frac{MN}{MP}=\frac{DE}{BC}=\frac{AN}{AP}=\frac{x}{x+y+z}.$$

Общий случай сводится к рассмотренному частному с помощью центральной проекции. Предположим, что прямые DE и BC пересекаются в точке K. Проведем через AP произвольную плоскость α, не совпадающую с ABC, и выберем точку O так, чтобы прямая OK была параллельна α (рис. 2). При центральной проекции из центра O на плоскость α все точки прямой AP проектируются сами на себя (и отношения PN/NA и PM/MA сохраняются), а прямые DE и BC, очевидно, проектируются в параллельные — как говорят, точка K «уходит на бесконечность». В результате из произвольной конфигурации, удовлетворяющей условию задачи, получается рисунок 1. Эта задача относится к проективной геометрии, в которой изучаются свойства фигур, сохраняющиеся при центральных проекциях. Пример понятия из этой области геометрии — *двойное отношение* произвольных четырех точек P, A, N, M одной прямой, равное, по определению, величине в левой части (*). Попробуйте доказать, что оно действительно не меняется при центральных проекциях.

Можно решать задачу и с помощью центра масс (о применении этого понятия в геометрии см. статью В. Г. Болтянского и М. Б. Балка «Центр тяжести облегчает решение» в «*Кванте*» № 4 за 1984 г.). Поместим в вершину A некоторую массу m, а в вершины B и C — такие массы m_b и m_c, чтобы центр всех трех масс попал в точку M. Для этого надо взять $m_b=(AE/BE)m$, $m_c=(AD/BD)m$. (Действительно, центр масс m и m_b — это точка E, поэтому общий центр лежит на отрезке CE; аналогично показывается, что он лежит и на BD.) Центр масс m_b и m_c лежит на пересечении AM и BC, т. е. в точке P, причем $PM/MA=$ $=m(m_b+m_c)$ (рис. 3, *а*). Теперь добавим в точку A еще одну массу m. Общий центр масс сместится из M в некоторую точку отрезка MA. В то же время, группируя одну массу m с m_c, а другую — с m_b (рис. 3, *б*), находим, что он должен лежать на DE, т. е. в точке N. Наконец, группируя m_c и m_b, получаем, что $PN/NA=$ $=2m(m_b+m_c)=2PM/MA$.

б) Эта задача тоже проективная, и ее можно было бы решать аналогично предыдущей — свести к случаю $DEF\parallel ABC$. Но обосновать такое решение в рамках элементарной геометрии трудно. Приведем векторное решение (рис. 4).

Для любой точки X обозначим вектор $\overline{SX}$ через $\overline{X}$.

Задачник „Кванта"

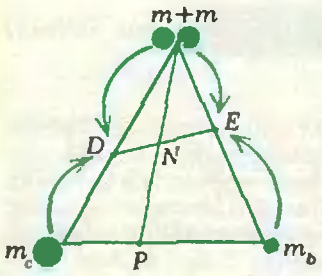


Рис. 3б.

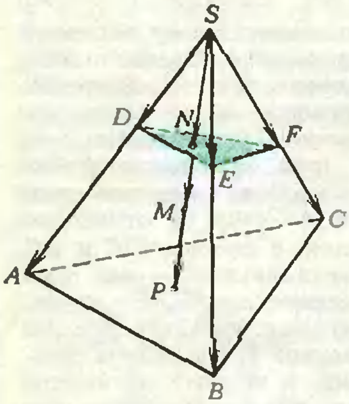


Рис. 4.

Пусть $\overline{P}=m\overline{M}=n\overline{N}$, $\overline{A}=\alpha\overline{D}$, $\overline{B}=\beta\overline{E}$, $\overline{C}=\gamma\overline{F}$ (т. е. $m=SP:SM$, $n=SP:SN$ и т. д.). Разложим вектор $\overline{P}$ по некомпланарным векторам $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$:

$$\overline{P}=x\overline{A}+y\overline{B}+z\overline{C}. \qquad (1)$$

Тогда

$$x+y+z=1. \qquad (2)$$

Действительно, вектор $\overline{AP}$ лежит в плоскости ABC, поэтому при некоторых y_1 и z_1 $\overline{AP}=y_1\overline{AB}+z_1\overline{AC}=y_1(\overline{B}-\overline{A})+z_1(\overline{C}-\overline{A})$, значит, $\overline{P}=\overline{A}+\overline{AP}=(1-y_1-z_1)\times\overline{A}+y_1\overline{B}+z_1\overline{C}$. А так как коэффициенты в (1) определяются однозначно, $y_1=y$, $z_1=z$, $x=1-y-z$. Таким образом, равенство (2) — это необходимое (а также и достаточное) условие того, что точка P лежит в плоскости ABC.

Запишем это условие для точки N в плоскости DEF и для точки M, которая лежит в трех плоскостях — ABF, BCD и CAE. Из разложения $n\overline{N}=\overline{P}=x\alpha\overline{D}+y\beta\overline{E}+z\gamma\overline{F}$ получаем, что $x\alpha/n+y\beta/n+z\gamma/n=1$, т. е.

$$x\alpha+y\beta+z\gamma=n; \qquad (3)$$

из разложения $m\overline{M}=\overline{P}=x\overline{A}+y\overline{B}+z\gamma\overline{F}$ — что

$$x+y+z\gamma=m.$$

И, аналогично, — еще два равенства:

$$\alpha x+y+z=m,$$
$$x+\beta y+z=m.$$

Складывая три последних равенства и учитывая (2) и (3), находим, что

$$n+2=3m.$$

Остается выразить отношения отрезков в условии задачи через m и n:

$$\frac{PN}{NS}:\frac{PM}{MS}=\frac{PS-NS}{NS}:\frac{PS-MS}{MS}=\frac{n-1}{m-1}=\frac{3m-3}{m-1}=3.$$

Задачу б) можно решать и с помощью центра масс, как задачу а).

В. Н. Дубровский

М1063. *Сколько существует различных целых чисел, которые можно представить в виде разности $a-\bar{a}$, где a — n-значное натуральное число ($10^{n-1}\leqslant a<10^n$), $\bar{a}$ — число, полученное при записи цифр a в обратном порядке? Например, если $a=1917$, то $a-\bar{a}=1917-7191=-5724$. Укажите*

Ответ: а), б) $18\cdot 19=342$; в) $18\cdot 19^{\frac{n}{2}-1}$ при четном n, 1 при $n=1$, $18\cdot 19^{\frac{n-3}{2}}$ при остальных нечетных n.

Пусть a — n-значное число, $a=a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}10^{n-2}+\ldots+a_0$, тогда $\bar{a}=a_0\cdot 10^{n-1}+a_1\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$ и

$$a-\bar{a}=d_1(10^{n-1}-1)+d_2(10^{n-2}-10)+\ldots+d_k(10^{n-k}-10^{k-1}), \qquad (1)$$

где $k=n/2$ при четном n и $k=(n-1)/2$ при нечетном n, а $d_i=a_{n-i}-a_{i-1}$. Поскольку $1\leqslant a_{n-1}\leqslant 9$, $0\leqslant a_i\leqslant 9$ при $i=0, 1, \ldots, n-2$, числа d_i удовлетворяют нера-

ответ для: а) $n=4$; б) $n=5$; в) любого натурального n.

Задачник „Кванта"

венствам

$$-8\leqslant d_1\leqslant 9,\quad -9\leqslant d_l\leqslant 9 \text{ при } l=2,\ 3,\ \ldots,\ k. \qquad (2)$$

Таким образом, любая разность $a-a$ представима в виде (1), где коэффициенты d_l выбираются из интервалов (2), что можно сделать $18\cdot 19^{k-1}$ способами. Поскольку для каждого из таких наборов $d_1, \ldots, d_k$, очевидно, можно указать числа a, удовлетворяющее (1), причем, как будет показано, коэффициенты $d_1, \ldots, d_k$ в (1) определяются однозначно, число значений разности $a-a$ тоже равно $18\cdot 19^{k-1}$.

Итак, докажем единственность представления (1) (при условиях (2)). Пусть для каких-то двух наборов $d_1, \ldots, d_k$ и $d'_1, \ldots, d'_k$ значения выражений в правой части (1) совпадают. Приравнивая нулю разность этих выражений и полагая $r_l=d_l-d'_l$, получим

$$r_1(10^{n-1}-1)+r_2(10^{n-2}-10)+\ldots+r_k(10^{n-k}-10^{k-1})=0. \qquad (3)$$

Ясно, что $|r_l|\leqslant 18$. Допустим, что $r_1\neq 0$, тогда $r_1=\pm 10$, так как все слагаемые в (3), кроме первого, делятся на 10. Подставим в (3) $r_1=\pm 10$:

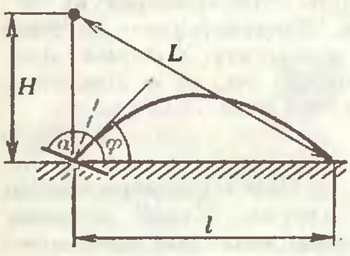
$$10^{n-1}-1=|r_2(10^{n-3}-1)+\ldots+r_k(10^{n-k-1}-10^{k-2})|<$$
$$<18(10^{n-3}+10^{n-4}+\ldots+1)<2\cdot 10^{n-2}.$$

Но $10^{n-1}-1>2\cdot 10^{n-2}$ при всех $n\geqslant 2$, поэтому r_1, а значит, и первое слагаемое в (3) равно нулю. Повторяя это рассуждение для $r_2, r_3, \ldots, r_k$, получим, что $r_2=\ldots=r_k=0$, т. е. $d_l=d'_l$ при всех l.

Г. О. Эльстинг

Решения задачи М1064 см. на с. 30.

Ф1073. *Маленький упругий мячик отпускают с высоты $H=1$ м над полом, а на его пути закрепляют пластинку, от которой он отскакивает. Какая скорость будет у мячика в момент удара о пол? Как нужно расположить пластинку, чтобы мячик ударился о пол как можно дальше от начальной точки? Чему равно это максимальное расстояние?*



Скорость мячика в момент удара о пол не зависит от того, где и как установлена пластинка (удар о пластинку упругий), и определяется из закона сохранения энергии:

$$mgH=m\frac{v^2}{2}\Rightarrow v=\sqrt{2gH}.$$

Определим, где и как нужно установить пластинку, чтобы расстояние от начальной точки траектории мячика до места его удара о пол было максимальным.

Понятно, что пластинка должна быть установлена так, чтобы сразу после удара вектор скорости мячика был направлен под углом $\varphi=45^\circ$ к горизонту. Значит, угол между векторами скоростей мячика непосредственно перед ударом и сразу после удара — 45°, нормаль к пластинке должна составлять с горизонтом угол $45^\circ+22{,}5^\circ=67{,}5^\circ$, т. е. пластинка должна быть установлена под углом $\alpha=90^\circ+67{,}5^\circ=157{,}5^\circ$ к горизонту.

Очевидно, что дальность отлета мячика будет тем больше, чем больше скорость мячика в момент удара. А эта скорость тем больше, чем дальше находится пластинка от начальной точки траектории мячика. Следовательно, пластинка должна быть установлена на полу (см. рисунок). При этом скорость мячика сразу после удара будет $v=\sqrt{2gH}$, дальность отлета мячика от пластинки будет

$$l=\frac{v^2}{g}=2H,$$

и следовательно, максимальное расстояние между начальной и конечной точками траектории мячика —

$$L=\sqrt{l^2+H^2}=H\sqrt{5}\approx 2{,}24\ \text{м}.$$

А. В. Хельвас

Ф1074. *Папа Карло сделал для Буратино колпак из тонкой жести. Колпак имеет форму конуса высотой $H=20$ см с углом $\alpha=60°$ при вершине. Будет ли этот колпак держаться на голове у Буратино, если эта голова — гладкий шар диаметром $D=15$ см?*

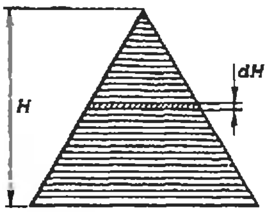


Рис. 1.

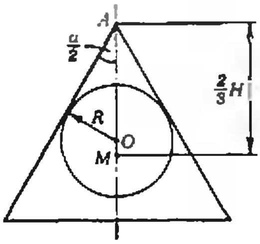


Рис. 2.

Для решения задачи нам необходимо, во-первых, определить положение центра масс колпака. С этой целью разобьем мысленно колпак на стопку узких колец одинаковой ширины dH (рис. 1). При этом масса колец нарастает линейно вниз от вершины к основанию колпака. Центр масс каждого кольца находится на его оси. «Сплющим» мысленно колпак так, что каждое кольцо превратится в равнобедренную трапецию, а весь конус превратится в равнобедренный треугольник. Центр масс каждой составной части колпака останется на месте (на оси), поэтому и центр масс всей системы останется на месте. Но, как известно, центр масс треугольной пластины находится в точке пересечения медиан. Следовательно, центр масс колпака находится на его оси на расстоянии $^2/_3\ H$ от вершины.

Положение равновесия системы будет устойчивым, если при небольшом ее смещении из положения равновесия центр масс поднимается (потенциальная энергия системы увеличивается); тогда система, предоставленная сама себе, возвращается в исходное положение равновесия.

В нашем случае для того, чтобы колпак занимал устойчивое положение равновесия на голове Буратино, его центр масс (точка M на рисунке 2) должен оказаться ниже центра головы Буратино (точка O). Следовательно, должно выполняться условие $AM>AO$, т. е.

$$\frac{2}{3}H>\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}\Leftrightarrow\frac{2}{3}H>\frac{R}{\frac{1}{2}},$$

или $H>3R=22{,}5$ см. А по условию $H=20$ см. Значит, колпак не будет держаться на голове Буратино.

С. С. Кротов

Ф1075. *Выполняя лабораторную работу, студент опустил в сосуд с водой кипятильник, включил его в сеть и стал каждые три минуты записывать температуру. Данные этого опыта приведены в таблице 1. Затем он охладил воду, положил в сосуд не-*

Из приведенных таблиц видно, что температура не линейно зависит от времени. Следовательно, необходимо учитывать теплоотвод в комнату, который пропорционален разности температур сосуда и комнаты. Уравнение теплового баланса при этом имеет вид

$$c\cdot\Delta t=W\cdot\Delta\tau-\alpha(t-t_0)\cdot\Delta\tau,$$

где c — теплоемкость сосуда со всем его содержимым, t — температура сосуда, τ — время, $W=IU$ — мощность кипятильника, α — коэффициент пропорциональ-

большой металлический образец и вновь провел измерения. Результаты этого опыта приведены в таблице 2.
Определите по этим данным теплоемкость образца. Напряжение в сети $U=35$ В, ток через кипятильник $I=0{,}2$ А, температура в комнате $t_0=20°$С.

Таблица 1 t, °С	*Таблица 2* t, °С
25,2	22,6
26,4	23,8
27,6	25,0
28,7	26,0
29,7	27,0
30,6	28,0
31,5	28,9
32,3	29,8
33,1	30,6

ности. Так как в этом уравнении два неизвестных — c и α, выберем два различных значения температуры t (t_1 и t_2), найдем вблизи них значения величин $k_1=\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau}\right)_1$ и $k_2=\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau}\right)_2$ и запишем теперь уже два уравнения:

$$c\,k_1=W-\alpha(t_1-t_0),$$
$$c\,k_2=W-\alpha(t_2-t_0).$$

Отсюда найдем c:

$$c=W\frac{(t_2-t_0)-(t_1-t_0)}{k_1(t_2-t_0)-k_2(t_1-t_0)}.$$

Подставляя в это выражение данные из таблицы 1, найдем теплоемкость сосуда с водой:

$$c_1\approx 770\text{ Дж/К}.$$

Воспользовавшись таблицей 2, найдем теплоемкость сосуда с образцом:

$$c_2\approx 890\text{ Дж/К}.$$

Теплоемкость образца —

$$c=c_2-c_1\approx 120\text{ Дж/К}.$$

Так как ищется маленькая разница двух больших величин, определенных неточно, при расчетах допустим довольно значительный разброс результатов: от 100 до 130 Дж/К.

Л. П. Баканина

Ф1076. *Для исследования солнечной батареи используется многопредельный вольтметр (он состоит из чувствительного микроамперметра и набора добавочных резисторов). Подключив его к батарее на пределе 1 В, мы получаем показание $U_1=0{,}7$ В. Переключив вольтметр на предел 10 В, мы получим показание $U_2=2{,}6$ В. Что получилось бы на пределе 100 В? Известно, что при неизменном освещении солнечная батарея ведет себя как обычный источник, последовательно к которому подключен резистор большого сопротивления.*

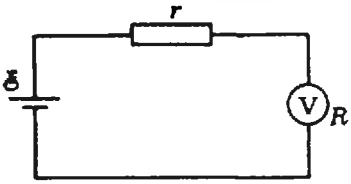
Это совсем простая задача. Обозначим сопротивление вольтметра на пределе 1 В через R_1. Тогда на пределе 10 В его сопротивление $R_2=10\,R_1$, а на пределе 100 В — $R_3=100\,R_1$. Обозначим ЭДС батареи $\mathcal{E}$, ее внутреннее сопротивление — r. Тогда имеем (см. рисунок):

$$U_1=\frac{\mathcal{E}}{r+R_1}R_1=\frac{\mathcal{E}}{1+\frac{r}{R_1}};\quad U_2=\frac{\mathcal{E}}{1+\frac{r}{10R_1}};$$

$$U_3=\frac{\mathcal{E}}{1+\frac{r}{100R_1}}.$$

Решая совместно эти уравнения, находим:

$$U_3\approx 3{,}6\text{ В}.$$



А. Р. Зильберман

Ф1077. *По одной из гипотез звезды образуются из межзвездной среды (космическая пыль) путем сжатия под действием гра-*

Рассмотрим частицу пыли сферического облака, находящуюся на расстоянии R от центра облака. На нее, как известно, действуют силы тяготения со стороны только тех частиц, которые находятся внутри сферы радиусом R (см., например, решение задачи 87 в книге *витационных сил. Оцените время образования звезды из гигантского сферического облака космической пыли плотностью $\varrho=2\cdot 10^{-20}$ г/см^3. Можно считать, что при сжатии частицы не обгоняют друг друга. Гравитационная постоянная $G=6{,}67\times 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.*

И. Ш. Слободецкого и В. А. Орлова «Всесоюзные олимпиады по физике»). Поскольку, по условию задачи, частицы не обгоняют друг друга, суммарная масса, притягивающая нашу частицу, остается неизменной. Предположим, что вся эта масса сосредоточена в центре облака. Тогда задача сведется к нахождению времени падения частицы на притягивающий центр.

Будем рассматривать движение частицы к центру как предельный случай движения по очень вытянутому эллипсу, большая полуось которого равна $R/2$, и сравним это движение с обращением по круговой орбите радиусом R. Воспользуемся третьим законом Кеплера:

$$\frac{T_к^2}{T_э^2}=\frac{R^3}{(R/2)^3},$$

где $T_к$ — период движения по круговой орбите, $T_э$ — по эллиптической орбите. Период $T_к$ найти легко с помощью второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$\frac{mv^2}{R}=F_т=G\frac{mM}{R^2}=G\frac{m\varrho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2},$$

откуда $$T_к=\frac{2\pi R}{v}=\sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}},$$ и

$$T_э=\frac{T_к}{2^{3/2}}=\sqrt{\frac{3\pi}{8G\varrho}}.$$

Мы получили, что период $T_э$ не зависит от R. Следовательно, и время падения частицы на притягивающий центр (время образования звезды), равное половине периода обращения по эллиптической орбите, не зависит от радиуса облака космической пыли и равно

$$\tau=\frac{T_э}{2}=\sqrt{\frac{3\pi}{32G\varrho}}\approx 1{,}5\cdot 10^{13}\ \text{с}\approx 10^6\ \text{лет}.$$

В. Е. Скороваров

Самопересечения замкнутой ломаной

В этой заметке мы приведем решение задачи М1064 и обсудим некоторые близкие задачи.

М1064. *Какое максимальное количество точек самопересечения может иметь замкнутая n-звенная плоская ломаная, если: а) n нечетно; б) n четно? (Предполагается, что никакие три вершины не лежат на одной прямой и что никакие три звена не пересекаются в одной точке.)*

Ответ: а) $n(n-3)/2$; б) $n(n-4)/2+1$.

Надо доказать, что рассматриваемое число самопересечений не может быть больше указанных значений, и привести примеры ломаных, для которых эти значения достигаются.

Ясно, что два звена ломаной пересекаются не более чем в одной точке и что смежные звенья не пересекаются (т. е. не имеют общих точек, кроме общей вершины). Всего замкнутая n-звенная ломаная имеет $n(n-1)/2$ пар звеньев, в том числе n пар смежных звеньев. Таким образом, число точек самопересечения не превосходит

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}.$$

Если n нечетно, то n-звенная ломаная с таким числом самопересечений существует: достаточно в правильном n-угольнике провести все n диагоналей, наименее удаленных от центра (см. рисунок 1 для $n=5$ и $n=7$). Эти звенья составляют замкнутую n-звенную ломаную, все не-

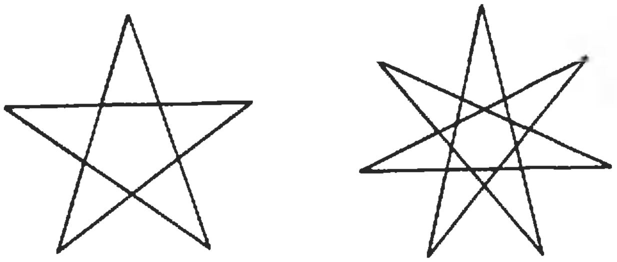


Рис. 1.

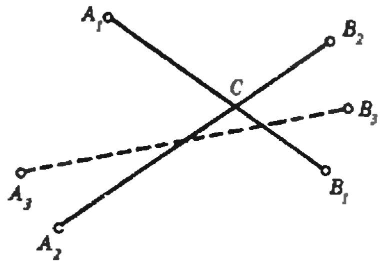


Рис. 2.

смежные звенья которой пересекаются (в разных точках). Задача а) решена.

Пусть теперь n четно. Занумеруем вершины данной n-звенной ломаной подряд, начиная с любой, и обозначим через A множество вершин с четными номерами и через B множество вершин с нечетными номерами. Любое звено ломаной идет из некоторой точки множества A в некоторую точку множества B. Пусть l — прямая, содержащая некоторое звено. Если это звено пересекает все несмежные с ним звенья, то все вершины с четными номерами лежат по одну сторону от l (мы не принимаем, конечно, во внимание вершин рассматриваемого звена, которые лежат на l). Значит, множества A и B лежат по разные стороны от прямой l и при этом имеют с ней по одной общей точке. Таких прямых существует не более двух. Этот факт представляется мне очевидным, но для любителей строгих рассуждений я приведу его доказательство (см. рис. 2).

Пусть есть три такие прямые. Точнее, пусть A_1, A_2, $A_3 \in A$ и B_1, B_2, $B_3 \in B$ — такие точки, что множества A и B лежат по разные стороны от каждой из прямых A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3. Так как точки A_2, B_2 лежат по разные стороны от прямой A_1B_1, а точки A_1, B_1 лежат по разные стороны от прямой A_2B_2, то пересекаются *отрезки* A_1B_1 и A_2B_2; пусть C — точка пересечения.

Точка A_3 лежит по ту же сторону от прямой A_1B_1, что точка A_2, и лежит по ту же сторону от прямой A_2B_2, что точка A_1; значит, она содержится в угле A_1CA_2. По аналогичным причинам точка B_3 лежит в угле B_1CB_2. Значит, прямая A_3B_3 не пересекает хотя бы один из отрезков CA_1, CA_2 и не пересекает хотя бы один из отрезков CB_1, CB_2. Пусть она не пересекает CA_i и CB_j (на рисунке это CA_2 и CB_1); тогда точки A_i и B_j лежат от нее по одну сторону, что противоречит предположению.

Итак, имеется не более двух звеньев, которые пересекают все несмежные с ними звенья. Значит, по крайней мере $n-2$ звена не пересекают хотя бы одно из несмежных с ними звеньев; следовательно, имеется по крайней мере $(n-2)/2$ пар непересекающихся несмежных звеньев и общее число точек самопересечения не превосходит

$$\frac{n(n-3)}{2}-\frac{n-2}{2}=\frac{n(n-4)}{2}+1.$$

Остается при любом четном n построить n-звенную ломаную с $n(n-4)/2+1$ самопересечениями.

Проведем в правильном n-угольнике все диагонали, ближайшие к его центру, но не проходящие через центр. (При четном $n/2$ они образуют замкнутую ломаную, при нечетном $n/2$ — две замкнутые ломаные, симметричные друг другу относительно центра.) Каждая из этих диагоналей пересекает все несмежные с ней диагонали, кроме одной — параллельной ей; это дает $n(n-4)/2$ пересечений. Сотрем две параллельные диагонали, а их концы соединим крест-накрест. (См. рисунок 3 для $n=6$ и $n=12$. Тонкие сплошные линии — это ближайшие к центру не проходящие через центр диагонали правильного n-угольника. Пунктирные линии — выбрасываемые диагонали. Жирные сплошные линии — диагонали, которыми они заменяются. Сплошные тонкие и жирные линии составляют нашу ломаную.) Число пересечений увеличится на 1, причем, как легко проверить, n проведенных отрезков образуют замкнутую ломаную. Задача б) решена.

Приведем еще несколько задач, по форме похожих на разобранную задачу. Прежде всего, можно расширить класс рассматриваемых ломаных, разрешив ломаной распадаться на несколько замкнутых ломаных. Чтобы придать задаче более естественную форму, мы сформулируем ее так. *На плоскости фиксированы n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые из этих точек соединены отрезками, причем каждая точка соединена ровно с двумя другими. Каково наибольшее возможное чис-*

(Окончание см. на с. 34)

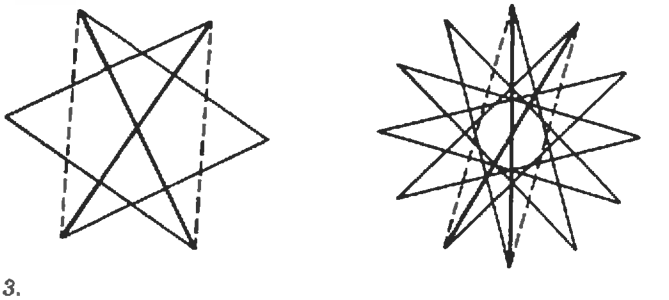
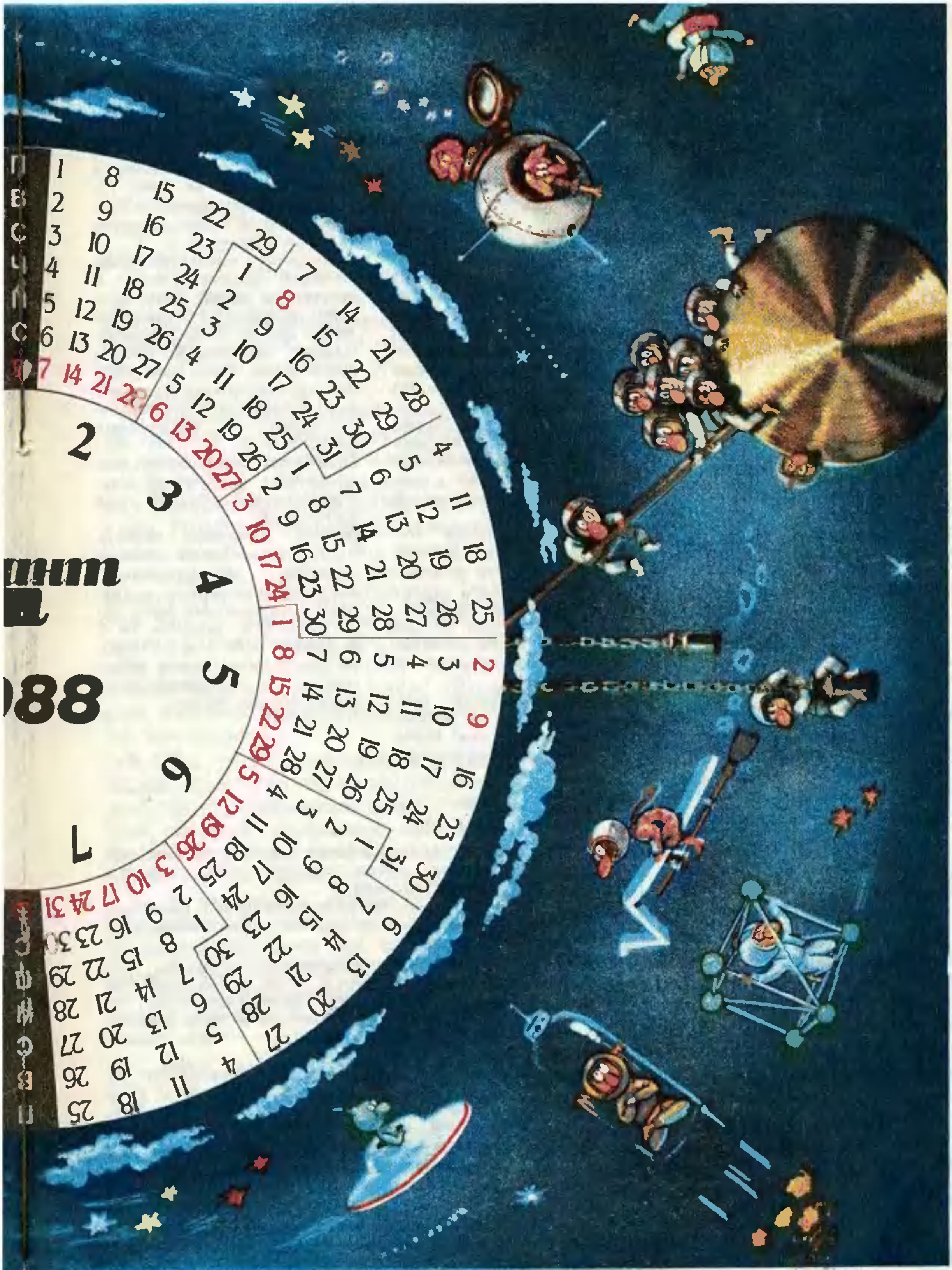


Рис. 3.



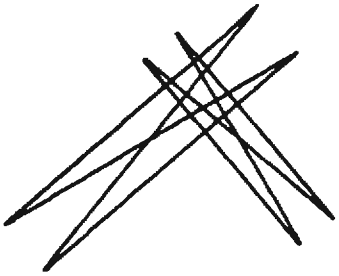


Рис. 4.

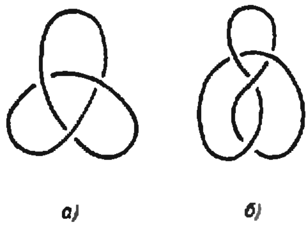


Рис. 5.

ло точек пересечения этих отрезков (общие концы не считаются точками пересечения)?

В этой задаче ответ не совпадает с предыдущим ответом. Например, на рисунке 4 показана ситуация, в которой $n=8$, а число точек пересечения равно 18. В то же время число точек самопересечения 8-звенной замкнутой ломаной, по доказанному, не превосходит 17.

Различные задачи можно поставить в связи с самопересечениями пространственных ломаных. Вообще-то ясно, что у n-звенной замкнутой пространственной ломаной число точек самопересечения не может быть больше, чем максимальное число точек самопересечения в плоском случае: спроектировав ломаную на подходящую плоскость, мы получим n-звенную плоскую ломаную, у которой самопересечений не меньше, чем до проектирования. С другой стороны, если даны три звена нашей ломаной, любые два из которых пересекаются или имеют общий конец, то эти три звена лежат в одной плоскости. Это наблюдение позволяет доказать без труда, что n-звенная ломаная с предельным числом самопересечений обязательно является плоской. Ввиду этого возникают два содержательных пространственных аналога нашей задачи.

1. *Каково наибольшее возможное число точек самопересечения n-звенной замкнутой пространственной ломаной, про которую дополнительно известно, что: а) она не является плоской, б) никакие три ее звена не лежат в одной плоскости?*

Задача б) интересна тем, что в ее решении (во всяком случае, известном мне) более простым является случай четного n, а не нечетного, как для плоской ломаной.

Впрочем, резонно возразить, что для пространственной ломаной самопересечения вообще являются противоестественными. Зато для нее естественны заузливания (я не привожу никаких определений, их можно найти, например, в «Кванте» № 3 за 1981 г.). В качестве простого упражнения читатель может доказать такое утверждение.

Замкнутая пространственая ломаная, имеющая менее 6 звеньев, не может быть заузлена; замкнутая 6-звенная ломаная может быть заузлена. Однако заузленная 6-звенная ломаная может быть только «трилистником» (см. рис. 5, *а*). Следующий по сложности узел — «восьмерка» (см. рис. 5, *б*).

2. *Каково наименьшее число звеньев заузленной пространственной ломаной типа восьмерки?*

Вообще интересно связать минимальное число звеньев ломаной, принадлежащей данному типу узлов, с другими инвариантами этого типа узлов (см. «Квант» № 3 за 1981 г. и № 7 за 1975 г.). Об этом можно сказать слишком много, и поэтому я не скажу больше ничего.

Д. Б. Фукс

Программы перебора

(Начало см. на с. 7)

квадрат к ранее подсчитанному числу счастливых билетиков для меньших значений S. Это осуществляется в строке 100. Наконец, когда цикл по S (от 0 до 13) завершен, нужно удвоить полученное число P и вычесть 1.

Задачи

23. Сколько слагаемых суммы $1+2+3+\ldots$ ... надо взять, чтобы получилось трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

24. Сколько есть целых чисел от 1 до 1988, которые не делятся ни на одно из чисел 6, 10, 15?

25. Найдите наименьшее натуральное число M, обладающее тем свойством, что сумма квадратов одиннадцати последовательных натуральных чисел, начиная с M, является точным квадратом.

26. Сколькими способами можно разменять рубль медными монетами (достоинством 1, 2, 3, 5 копеек)?

27. В последовательности 19886138... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предыдущих цифр. Через сколько цифр снова встретится начальная комбинация 1988 (иначе говоря, сколько цифр в периоде)?

28. Пусть X — сумма кубов десяти последовательных натуральных чисел, а Y — сумма этих же натуральных чисел. Докажите, что X^2-Y^2 делится на 300.

29. Определите а) наибольшее, б) наименьшее значение отношения трехзначного числа к сумме его цифр. Для каких чисел это наибольшее (наименьшее) значение достигается?

30. Найдите четырехзначное число, в четыре раза меньшее числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

„Квант" для младших школьников

Задачи

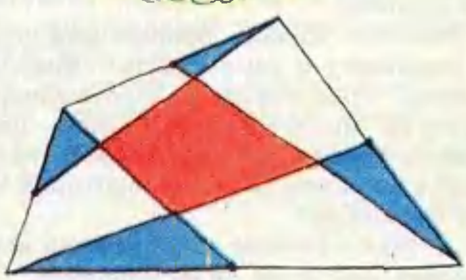
1. Моему племяннику в x^2 году исполнится x лет. В каком году он родился?

2. Бревно положили одним концом на одни весы, а другим концом — на другие. Первые весы показали 200 кг, а вторые — 100 кг. Сколько весит бревно? Где находится его центр тяжести?

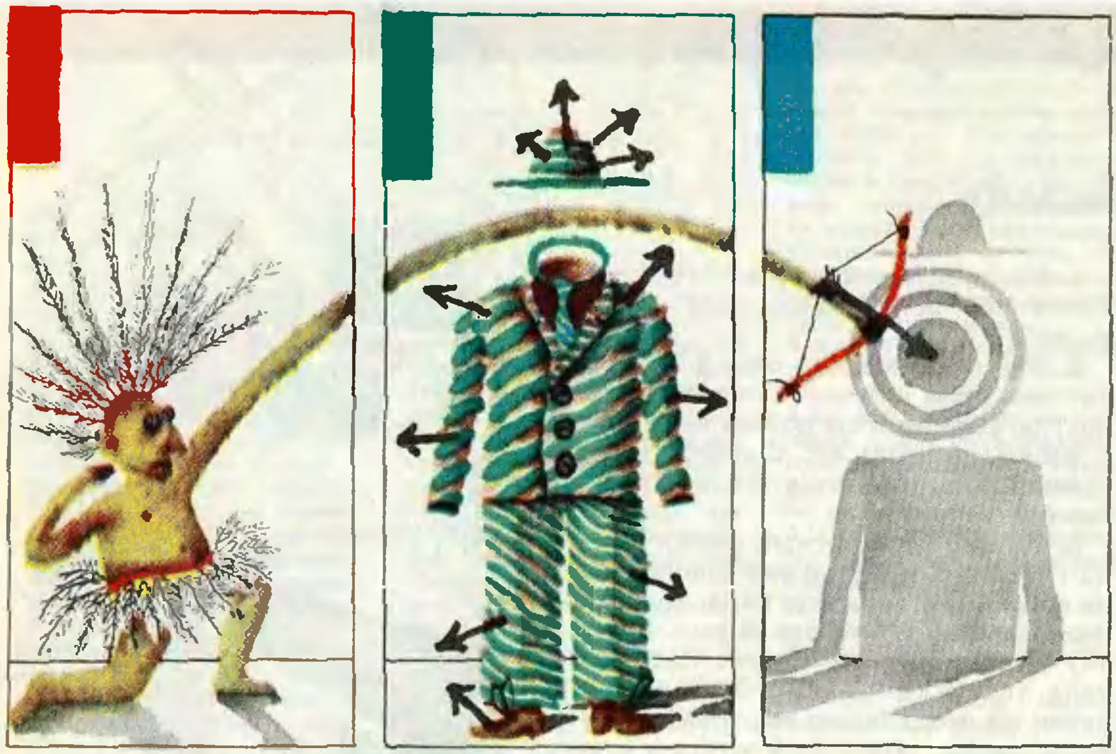
3. Кощей Бессмертный зарыл клад на глубину 1 м. Этого ему показалось не достаточно, он отрыл клад, углубил колодец до 2 м и снова зарыл. Этого ему опять показалось мало, он отрыл клад, углубил колодец до 3 м и зарыл. Затем он проделал то же, углубив колодец до 4 м, потом до 5 м, 6 м и т. д. Известно, что колодец глубиной n метров Кощей вырывает за n^2 дней. Известно также, что на 1001-й день Кощей умер от непосильной работы. На какой глубине остался клад? (Временем, нужным для закапывания колодца, пренебречь.)

4. Два числа называются зеркальными, если одно число получается из другого перестановкой цифр в обратном порядке. Например, 123 и 321. Произведение двух зеркальных чисел равно 92 565. Какие это числа?

5. В выпуклом четырехугольнике отметили середины сторон и соединили их с вершинами так, как показано на рисунке. Покажите, что площадь красного четырехугольника равна сумме площадей синих треугольников.



Эти задачи нам предложили Л. Д. Курляндчик, В. Д. Вьюн, Д. Б. Фукс, А. В. Васин, В. В. Произволов.



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Об одной удивительно живучей ошибке» предназначена восьмиклассникам, «Проводники в электростатическом поле» — девятиклассникам, «Интерференция и интерферометры» — десятиклассникам.

Об одной удивительно живучей ошибке

Представим себе такую сценку на уроке физики.

Учитель. Камень брошен под углом к горизонту и движется по параболической траектории (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Какие силы действуют на камень в тот момент, когда он оказывается в некоторой точке параболы?

Ученик. Прежде всего камень испытывает действие силы тяжести. (Небольшая пауза.) Кроме того, на камень *действует сила бросания,* направленная по касательной к траектории.

Учитель. Как известно, сила есть мера взаимодействия тел. Сила тяжести обусловлена притяжением камня к Земле. Тут все ясно. А какое тело действует на камень с силой бросания?

Ученик. Предположим, что камень бросили рукой. Значит, рука и обусловливает силу бросания.

Учитель. Но ведь взаимодействие между камнем и рукой прекратилось, как только камень оказался в полете. Можно накопить скорость, энергию; силу же накопить нельзя. Прекратилось взаимодействие — и в тот же момент исчезла и соответствующая сила.

Ученик (немного растерянно). Получается, что на камень в полете действует только сила тяжести?

Учитель. Именно так. Если, разумеется, не принимать во внимание взаимодействие камня с воздухом.

Приведенная сценка является очень типичной. И не только в школе. Из года в год многие абитуриенты дают на поставленный вопрос неправильный ответ — тот самый, который дал и наш ученик. Ошибку нередко допускают также студенты, сдавая экзамен по механике.

Живучесть и распространенность рассматриваемой ошибки объясняется не только плохим знанием физики. Есть здесь, как представляется, и причины психологического характера. Во-первых, на уровне житейских ситуаций мы привыкли к тому, что для поддержания движения тела на него необходимо действовать какой-нибудь силой. При этом забывается, что сила нужна лишь для компенсации трения. Во-вторых, мы живем в достаточно быстром ритме и часто, ох как часто, желаем получить результат немедленно. При этом мы просто не хотим принимать во внимание... инерцию, инертность.

— В каком направлении в данный момент времени действует сила, в таком направлении и должен лететь в этот момент камень. Изменится направление силы, тотчас должно стать другим и направление движения. Если бы на камень действовала только сила тяжести, он должен был бы лететь вниз. А он летит не вниз, значит, кроме силы тяжести есть еще сила.— Возможно, примерно такие мысли мелькают в нашей голове, и возникает та самая ошибка.

Мы любим критиковать инертность, отождествляем ее с ленью, нежеланием действовать. Однако встанем на точку зрения физики и попробуем представить, как выглядел бы мир, в котором инерция вдруг исчезла. Чтобы тело двигалось в таком мире, надо было бы все время прикладывать к нему силу. Прекратилось воздействие — тут же прекратилось движение. Сила направлена вправо — тело движется вправо. Направление силы сменилось на противоположное — и в тот же момент тело движется уже в обратном направлении. Можно сказать, что здесь все определяется только данным моментом времени (только силами, действующими в данный момент), важны лишь сиюминутные воздействия, сиюминутные указания. Здесь нет «памяти» о прошлом, прошлое нисколько не влияет на настоящее. И соответственно настоящее совершенно не влияет на будущее. Мир без инерции — это мир, где нет причинно-следственных связей.

Но вернемся к нашему камню. Когда его бросали, на него, конечно, действовали какой-то силой. Теперь он в полете, но «помнит» о прошлом: характер его движения (в частности, высота и дальность полета) определяется не только силой тяжести, но также и той силой, которая действовала на камень раньше. Именно поэтому камень не летит вниз, а следует по параболической траектории. Говоря строгим языком науки, движение камня в данный момент определяется как силой, действующей на него в этот момент, так и начальными условиями — направлением и модулем скорости, которую он имел в начальный момент полета. Недаром задачи такого типа обычно начинаются словами: «Тело бросили с такой-то скоростью под таким-то углом к горизонту...» Эти самые начальные условия как раз и выражают результат действия сил в прошлом. Через них прошлое влияет на настоящее.

Очевидно, что изменение приложенной к телу силы приводит к изменению движения тела. Важно, однако, что изменение движения тела происходит с учетом того, как оно двигалось раньше. Сила определяет непосредственно не скорость тела, а ускорение, т. е. изменение скорости. Получается, что знаменитый второй закон Ньютона — тот самый, где впервые в физике появляется масса (мера инертности тела),— есть по сути дела закон, выражающий принцип причинности в механике.

Вот к каким глубоким выводам можно прийти, обсуждая движение камня, брошенного под углом к горизонту.

Л. В. Тарасов

Проводники в электростатическом поле

«Хочу сообщить вам новый и страшный опыт, который никак не советую повторять... Вдруг моя правая рука была поражена с такой силой, что все тело содрогнулось, как от удара молнии. ...Одним словом, я думал, что пришел конец ... Ради французской короны я не согласился бы еще раз подвергнуться столь жуткому сотрясению...» Это слова из воспоминаний лейденского профессора Мушенбрека, приведенные в книге В. Карцева «Приключения великих уравнений». Мушенбрек в 1745 году ставил опыты по электричеству и получил простейший конденсатор, названный впоследствии лейденской банкой. Во время опытов профессор и подвергся «столь жуткому сотрясению» в результате разряда конденсатора через человеческое тело, являющееся, как известно, проводником.

Тот факт, что в природе существуют проводники, обогащает окружающий нас мир разнообразными электрическими явлениями, среди которых есть и далеко небезопасные. Проводники занимают важное место при изучении электромагнетизма.

Рассмотрим подробно случай, когда заряженный неподвижный проводник находится во внешнем электростатическом поле (созданном посторонними неподвижными зарядами). В проводнике рано или поздно все заряды перестанут перемещаться, и наступит равновесие (так как в противном случае мы получили бы вечный двигатель в результате непрерывного выделения тепла при движении зарядов). Для такого заряженного и помещенного во внешнее электростатическое поле проводника будут справедливы утверждения, приведенные ниже.

1. Поле внутри проводника. В любой точке внутри проводника напряженность электрического поля равна нулю. Действительно, при невыполнении этого условия свободные заряды в проводнике под действием сил поля пришли бы в движение, и равновесие было бы нарушено.

2. Распределение заряда в проводнике. Для того чтобы ответить на вопрос о распределении заряда в проводнике, нам надо уточнить некоторые свойства силовых линий электростатического поля. Напомним, что силовая линия электрического поля (в том числе и электростатического) — это воображаемая линия в пространстве, проведенная так, чтобы касательная к ней в каждой точке совпадала с вектором напряженности электрического поля в этой точке. Опыт изучения электростатических полей дает основание заключить, что силовые линии этих полей непрерывны и не замкнуты, они могут начинаться только на положительных зарядах и оканчиваться только на отрицательных и не могут начинаться (заканчиваться) в точке пространства, где нет зарядов. При графическом изображении поля некоторой системы зарядов число силовых линий, начинающихся или заканчивающихся на каком-либо заряде, пропорционально модулю этого заряда. Отсюда следует, что из любого заряда обязательно выходят (или входят в него) силовые линии.

После сказанного о силовых линиях возвратимся к вопросу о распределении заряда в проводнике. Выделим мысленно произвольный достаточно малый объем ΔV внутри проводника (рис. 1). Предположим, что этот объем имеет заряд (для определенности, положительный). Тогда из выделенного объема будут выходить силовые линии, т. е. вблизи него будет существовать электрическое поле. Но поля внутри проводника нет. Поэтому выделенный объем должен быть нейтрален. А поскольку этот объем взят нами в произвольном месте внутри проводника, то можно утверждать, что вся «внутренность» проводника нейтральна и, следовательно, весь заряд проводника находится на его поверхности.

3. Поле снаружи проводника вблизи его поверхности. Вектор напряженности электростатического поля в лю-

Рис. 1.

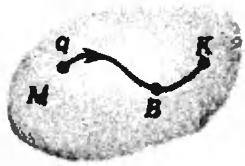


Рис. 2.

бой точке снаружи проводника вблизи его поверхности направлен перпендикулярно поверхности, что другими словами можно сказать так: силовые линии поля входят в проводник и выходят из него под прямым углом к поверхности проводника. В противном случае существовала бы составляющая вектора напряженности поля вдоль поверхности проводника, на свободные заряды на поверхности проводника действовала бы сила, имеющая составляющую вдоль поверхности. В результате этого по поверхности проводника стали бы двигаться заряды, что нарушило бы равновесие.

4. Распределение потенциала в проводнике. Покажем, что разность потенциалов любых двух точек проводника, включая точки поверхности, равна нулю. Пусть есть произвольные точки M и K внутри проводника. Перенесем мысленно из точки M в точку K пробный заряд q по некоторой траектории MBK, лежащей внутри проводника (рис. 2). Силы поля не совершат работы над перемещаемым зарядом q, так как поля внутри проводника нет. Поэтому разность потенциалов $\varphi_M - \varphi_K = 0$. Если точки M и K, одна или обе, лежат на поверхности проводника, то доказательство того, что разность потенциалов между ними равна нулю, аналогично.

Так как разность потенциалов любых двух точек проводника равна нулю, то потенциал всех точек проводника, включая точки поверхности, один и тот же. Поэтому говорят о потенциале проводника, не указывая конкретной его точки. Поскольку все точки поверхности проводника имеют одинаковый потенциал, поверхность проводника будет эквипотенциальной поверхностью.

5. Полость внутри проводника. Удалим из внутренней области проводника часть вещества. Так как удаляемое вещество нейтрально, то следует ожидать, что электростатическое поле во всех точках вне проводника, внутри проводника и в возникшей полости не изменится. И это будет действительно так, причем на внутренней поверхности проводника (на поверхности полости) зарядов не будет. Весь заряд проводника сосредоточится на внешней поверхности проводника, а наличие полости внутри проводника не скажется на распределении заряда по внешней поверхности. Поле в полости и в проводнике будет отсутствовать. Потенциал всех точек проводника и полости окажется одинаков.

Короче говоря, полый проводник, имеющий заряд и помещенный во внешнее электростатическое поле, ведет себя так же, как и соответствующий сплошной. Доказательство этого утверждения приводить не будем, но заметим, что оно подтверждено многочисленными опытами, проведенными еще Г. Кавендишем (1731—1810) в конце XVIII века и М. Фарадеем (1791—1867) в начале XIX века.

В. И. Чивилёв

Интерференция и интерферометры

Световая волна, прошедшая через тело (или отраженная от его поверхности), несет огромную информацию об этом теле: его размерах, плотности, форме и т. д. Но проблема состоит в том, что эта информация зашифрована в характеристиках волны, меняющихся с колоссальной скоростью как в пространстве, так и во времени. Ведь электромагнитная волна, частным случаем которой является свет, представляет собой распространяющиеся колебания электрического и магнитного полей. Скорость распространения $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, а частота колебаний напряженности электрического поля (E) или индукции магнитного поля (B) в световой волне порядка 10^{14} Гц.

В этой ситуации единственный способ извлечь информацию — это сравнить прошедшую через тело волну с другой (стандартной, или, как ее называют иначе, опорной волной), поле в которой колеблется с такой же частотой. Тогда фактор времени как бы исключается, и из картины, быстро меняющейся во времени, мы получаем устойчивую статическую картину. Именно такую картину мы можем наблюдать при интерференции когерентных волн.

Чтобы разобраться в том, что именно происходит при интерференции, нам надо кое-что вспомнить. Прежде всего: волна наряду со скоростью распространения c и частотой ω (или периодом колебаний $T=2\pi/\omega$) характеризуется длиной волны $\lambda=cT=2\pi c$.

Хотя величина напряженности электрического поля E в каждой точке волны непрерывно меняется, значения напряженностей в двух различных точках однозначно связаны друг с другом. Так, например, если расстояние между двумя точками равно или кратно длине волны λ (иногда говорят: кратно четному числу полуволн), то значения напряженностей в этих точках всегда одинаковы. (Все время меняются, но все время остаются равными.) В точках, расстояние между которыми равно $\lambda/2$ (или кратно нечетному числу полуволн), значения напряженностей отличаются только знаком (рис. 1).

Теперь легко понять, что́ происходит при интерференции волн. Рассмотрим две плоские волны равной амплитуды и длины, распространяющиеся под некоторым углом друг к другу. Слово «плоская» означает, что поверхностями равной напряженности (или равной фазы) в такой волне являются плоскости. На рисунке 2 показаны два источника таких волн S_1 и S_2 и плоскости равной напряженности в какой-то момент времени. Будем считать, что источники синхронизированы так, что в любой момент времени напряженности E_1 и E_2 в точках, где эти источники расположены, одинаковы: $E_1=E_2$.

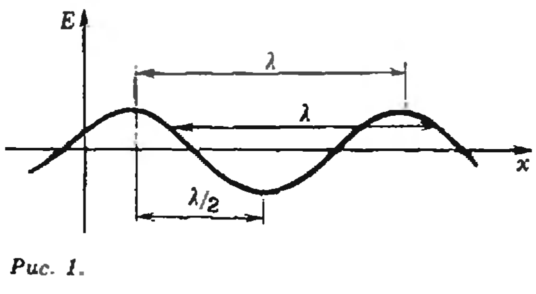


Рис. 1.

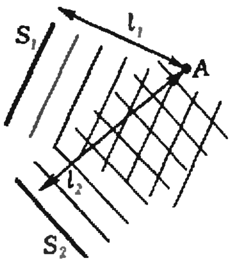


Рис. 2.

Возьмем в пространстве произвольную точку A. Расстояние от этой точки до источников S_1 и S_2 обозначим соответственно через l_1 и l_2. Здесь нам придется рассмотреть несколько вариантов.

Предположим для начала, что на длине l_1 укладывается четное, а на длине l_2 — нечетное число полуволн. Тогда напряженность первой волны в точке A равна напряженности в месте расположения источника этой волны: $E_{A1}=E_1$, а напряженность второй волны в точке A противоположна по знаку напряженности в месте расположения второго источника: $E_{A2}=-E_2$. Но так как $E_1=E_2$ (условие синхронизации источников), то очевидно, что $E_{A1}=-E_{A2}$ и суммарная напряженность в такой точке равна нулю. Напомним еще раз: все напряженности колеблются со временем, но указанные равенства сохраняются во все моменты времени. Совершенно аналогичная ситуация будет, если на длине l_1 укладывается нечетное, а на длине l_2 — четное число полуволн. Раз суммарная напряженность, создаваемая обеими волнами, в точке A равна нулю, то и освещенность в этой (и аналогичных ей точках) будет нулевая.

Если количество полуволн, укладывающихся на расстояниях l_1 и l_2, одинаковой четности (либо на обоих расстояниях четное, либо на обоих нечетное), то напряженности первой и второй волн в точке A всегда одинаковы и взаимно усиливаются. В таких точках освещенность будет максимальной.

Можно сформулировать общее правило: если разность хода — разность l_1 и l_2 — двух волн до некоторой точки равна нечетному числу полуволн, то освещенность в этой точке минимальна:

$$l_1-l_2=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

— условие минимума.

В случае, когда разность хода равна четному числу полуволн, освещенность в соответствующей точке будет максимальна:

$$l_1-l_2=2k\frac{\lambda}{2}$$ — условие максимума.

Поместим теперь на пути этих интерферирующих волн экран. Очевидно, что на нем возникнут чередующиеся темные и светлые полосы, соответствующие условиям минимумов и максимумов освещенности. Это и есть интерференционная картина.

Очень важно подчеркнуть, что интерференционная картина определяется не столько тем, какой путь проходит каждая из интерферирующих волн до той или иной точки экрана, сколько тем, какое количество полуволн укладывается на этом пути. Это важно потому, что скорость световой волны (а значит, и длина волны) зависит от показателя преломления той среды, в которой волна распространяется: $\lambda=vT=(c/n)T$. Здесь $v=c/n$ — скорость света в среде, а n — показатель преломления среды. Понятно поэтому, что если на пути одной из волн (например, первой) поставить какой-нибудь прозрачный предмет, то число полуволн, укладывающихся на расстоянии l, изменится из-за изменения длины волны внутри тела. Интерференционная картина при этом деформируется, причем тем сильнее, чем больше толщина предмета.

Возвращаясь к началу нашей заметки, можно сказать, что с помощью интерференции мы перевели информацию о прозрачном теле из быстро меняющихся характеристик волны в статические характеристики интерференционной картины.

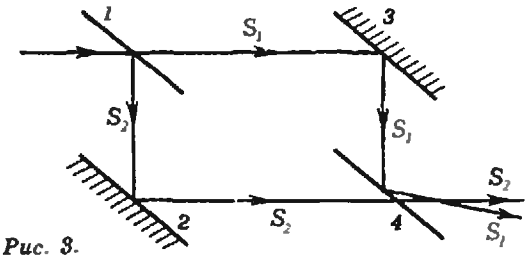


Рис. 3.

Практически это делается с помощью интерферометров. Существует довольно много типов таких приборов. В задачу любого интерферометра входит формирование двух (или более) когерентных волн и последующее их сведéние с целью получения интерференционной картины.

Схема одного из интерферометров (он называется интерферометром Маха—Цендера) приведена на рисунке 3.

Плоская волна падает на полупрозрачное зеркало *1* и частично отражается, а частично проходит сквозь него. Тем самым мы получаем две когерентные волны S_1 и S_2. Сведéние их осуществляется с помощью обычных зеркал *2* и *3* и полупрозрачного зеркала *4*. Отражение от зеркал *2* и *3* волны падают на полупрозрачное зеркало *4*. Волна S_2 проходит сквозь зеркало *4*, а волна S_1 отражается от него. Всегда можно подобрать положение зеркал так, чтобы на выходе зеркала *4* получить две волны, распространяющиеся друг по отношению к другу под некоторым, как правило небольшим, углом. Тогда в соответствии со сказанным выше на экране Э возникнет интерференционная картина. Помещая теперь на пути одной из волн (S_1) изучаемый прозрачный объект, мы будем наблюдать искажение этой картины, по которому и можно судить о свойствах этого объекта.

Е. Е. Городецкий, А. А. Лапидес

Математический кружок

Разберем все варианты

С. М. ЛЬВОВСКИЙ,
кандидат физико-математических наук
А. Л. ТООМ

Метод тут примерно такой, как при поисках одной горошины в мешке гороха: прежде всего необходимо терпение, молодой человек.
К. Чапек. «Купон»

Когда в младших классах ученики впервые начинают решать задачи по математике, им специально подбирают такие задачи, которые решаются заранее преподанными методами, и получается один определенный ответ. На олимпиадах подбирают задачи, которые имеют неожиданное, но простое и красивое решение.

Но Природа не считается с нашими вкусами. Поэтому профессионал-математик, решая задачи, возникающие в ходе развития естествознания, постоянно сталкивается с задачами, которые то не имеют решения, то имеют много решений, то требуют непривычных, а подчас и громоздких, «некрасивых» методов решения.

Таким «некрасивым» методом ученики младших классов часто считают *метод перебора*. Некоторые даже думают, что метод перебора — это «неправильный» метод, и им решать задачи якобы нельзя. На самом деле задачу можно решать любым способом, лишь бы получить верный и обоснованный ответ. Найти все ответы и доказать, что других нет,— это и значит решить задачу. А оказаться этих ответов может сколько угодно: один, несколько, ни одного или бесконечно много.

Конечно, метод перебора случаев, о котором идет речь в этой заметке, необходимо применять с умом, а не как попало. Прежде всего заметим, что любой перебор, который один человек или все человечество когда-либо сможет осуществить,— это конечный перебор, и никакая вычислительная техника этого не изменит. Но даже конечный перебор осуществим лишь в ограниченных пределах. Фактически при решении задач «вручную», при помощи авторучки и бумаги, можно перебрать десяток, ну — сотню вариантов. Компьютер увеличивает это число до тысяч, ну — миллионов. Однако сплошь и рядом возникают задачи, решение которых методом перебора приводит к гораздо большему числу вариантов. Уже простые настольные игры типа шахмат дают такое число позиций, с которым не справится никакая машина. Поэтому искусство программирования, как и искусство решать математические задачи, включает умение сокращать перебор до осуществимых масштабов.

Сплошной перебор всех вариантов осуществим лишь в самых простых случаях. Дж. Свифт остроумно высмеял его в своей книге «Путешествия Гулливера». В пятой главе третьей части он описывает машину, осуществлявшую перебор всевозможных словосочетаний (см. рис. 1): «Профессор показал мне множество фолиантов, исписанных подобными отрывочными фразами; на основании этого богатейшего материала профессор рассчитывал составить полный обзор всех искусств и наук». Сатира Свифта метила во вполне реальную цель: создание «думающих» машин, связанное с идеей перебора. Еще в XII веке рыцарь-монах Раймунд Луллий сконструировал машину для механического доказательства всех положений Христианства и отправился с ней к маврам, уверенный, что эта «наука» обратит их в истинную веру. Идеи Луллия интересовали Джордано Бруно и Лейбница, мечтавшего о таком прогрессе науки, который позволит не спорить, а вычислять.

Великий немецкий ученый Лейбниц (1646—1716), бывший старшим современником Свифта (1667—1745), всю жизнь развивал идею «всеобщей характеристики», т. е. равного по точности математике описания всех процессов человеческого мышления. В полной мере эта идея не осуществлена по сей день и, может быть, никогда не будет осуществлена. Но математизация многих сторон человеческой деятельности, несомненно, происходит. А вместе с этим все более широкое применение получают и основные математические идеи, в том числе идея перебора вариантов.

Задача 1. *На складе стоят 5 станков массой соответственно* 1500 *кг,* 1020 *кг,* 800 *кг,* 750 *кг и* 600 *кг. Требуется увезти часть из них на машине грузоподъемности 3 тонны, загрузив ее максимально, но не перегрузив. Какие станки надо погрузить на машину?*

Решение. Предположим, что мы решили не брать самый тяжелый станок. Тогда масса остальных станков $1020+800+750+600=3170$ кг, что больше трех тонн. Значит, придется оставить еще какой-нибудь станок. Мы захватим самый большой вес, если оставим самый легкий станок — в 600 кг. Надо, конечно, еще

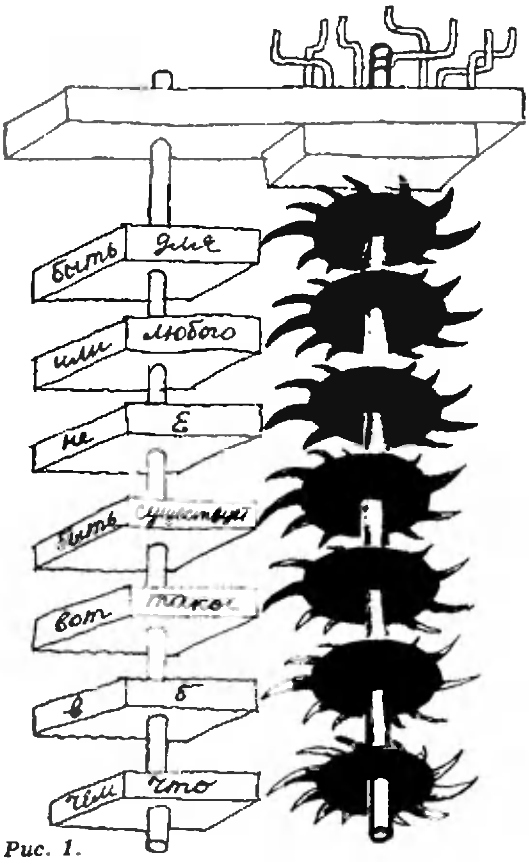


Рис. 1.

проверить, сможет ли трехтонка увезти оставшиеся станки: $1020+800+$ $+750=2570$ кг<3 т. Итак: если не брать самый тяжелый станок, то мы увезем, самое большее, 2570 кг. Пусть теперь мы погрузили на машину станок в 1500 кг; тогда в машине еще остается места на 1500 кг. Уложиться в эти 1500 кг можно взяв только один станок, что даст нам, самое большее, 1020 кг (а всего в грузовике будет 2520 кг), либо взять два станка, что даст, самое большее, $800+600=$ $=1400$ кг, а всего на грузовике будет 2900 кг.

Сравнивая все варианты, мы видим, что последний — наилучший. Итак, надо погрузить станки массой

1500 кг, 800 кг, и 600 кг.

Подобный прямой перебор не всегда возможен. Чаще приходится применять его в сочетании с другими методами. Вот пример.

Задача 2.*) *Найдите все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:*

— первая цифра в 3 раза меньше последней его цифры;

— сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой второй и третьей его цифр, делится на 8 без остатка.

Здесь прямо применить метод перебора значило бы перебрать все трехзначные числа и выбрать из них те, которые удовлетворяют условию. Делать это вручную — все равно, что искать иголку в стоге сена или нужную горошину в мешке гороха. Правда, с помощью компьютера перебрать все трехзначные числа недолго, но «спортивнее» решать простые задачи простыми средствами: это заставит нас выработать приемы сокращения перебора; кстати, эти приемы резко увеличат наши возможности, когда у нас будет компьютер.

Данную задачу мы начнем решать алгебраически и прибегнем к перебору лишь тогда, когда удастся свести ее к немногим случаям.

*) Предлагалась на вступительном экзамене в МГУ (факультет психологии) в 1984 г.

Решение. Пусть x — цифра сотен, y — цифра десятков искомого числа. Тогда цифра его единиц равна $3x$. Очевидно, $3x\leqslant 9$, откуда $x\leqslant 3$. Нулем первая цифра числа быть не может. Значит, x не может равняться ничему иному, кроме 1, 2 и 3. Эти три возможности мы рассмотрим по отдельности, но сначала запишем второе условие, обозначая тремя точками ($\vdots$) выражение «делится на»:

$$((100x+10y+3z)+(100x+30x+y))\vdots 8,$$

т. е.

$$(200x+33x+11y)\vdots 8.$$

Мы нарочно оставили $200x$ и $33x$ отдельными слагаемыми. Так легче заметить, что $200x$ можно отбросить (так как $200\vdots 8$) и записать это условие так:

$$(33x+11y)\vdots 8,$$

или

$$11(3x+y)\vdots 8.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы $3x+y$ делилось на 8. Теперь приступим к перебору, который вполне осуществим, так как состоит всего из трех случаев.

1) $x=1$. Тогда $3+y\vdots 8$. Это будет при $y=5$.

2) $x=2$. Тогда $6+y\vdots 8$. Это будет при $y=2$.

3) $x=3$. Тогда $9+y\vdots 8$. Это будет при $y=7$.

Итак, задача имеет три ответа: 153, 226, 379.

Задача 3. *Решите в натуральных числах уравнение*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Напомним, что *натуральными* называются целые положительные числа. Решить уравнение в натуральных числах — значит найти все его решения, в которых неизвестные принимают натуральные значения. Сплошным перебором, рассматривая все тройки натуральных чисел по отдельности, решить эту задачу вообще невозможно: таких троек бесконечно много. Поэтому, прежде чем приступить к перебору, необходимо как-то свести дело к конечному числу случаев. Нам будет удобнее провести перебор, если мы чуть-чуть изменим условие задачи.

Задача 3'. *Решите в натуральных числах систему*

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1, \\ x\leqslant y\leqslant z. \end{cases}$$

Решение задачи 3'. Очевидно,

$$\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z}.$$

Предположим сначала, что $x>3$. Тогда

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z},$$

откуда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3},$$

что противоречит условию. Итак, x не может равняться ничему иному, кроме 1, 2 и 3. (Видите, как резко мы сократили перебор!)

1) $x=1$. Тогда

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0,$$

чего не может быть.

2) $x=2$. Тогда

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}.$$

Если $y>4$, то

$$\frac{1}{4}>\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z},$$

откуда

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{4}+\frac{1}{4},$$

чего не может быть. Итак, y не может равняться ничему иному, кроме 2, 3 и 4. Подставляя каждое из этих значений, убеждаемся, что $y=2$ не годится, а два другие значения дают два ответа: (2, 3, 6) и (2, 4, 4).

3) $x=3$. Тогда

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}.$$

Если $y>3$, то

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z},$$

откуда

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3},$$

чего не может быть. Итак, в данном случае надо рассмотреть для y только одно значение 3, что дает еще один ответ: (3, 3, 3).

Все случаи разобраны. Задача 3' решена. Она имеет три ответа: (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3).

В отличие от нее, задача 3 имеет другой список ответов, получающихся из этих всевозможными перестановками. Вот ответ задачи 3:

(2, 3, 6), (2, 6, 3), (3, 2, 6),
(3, 6, 2), (6, 2, 3), (6, 3, 2),
(2, 4, 4), (4, 2, 4), (4, 4, 2), (3, 3, 3).

(В каждом из этих ответов первое число — значение x, второе — значение y, третье — значение z.)

В задачах, которые мы до сих пор разбирали, необходимо было найти все ответы, удовлетворяющие данному условию. Но бывают задачи, в которых спрашивается только, существует ли объект, для которого выполняются определенные условия. Для того чтобы доказать, что такого объекта не существует, необходимо разбирать все случаи или проводить общее рассуждение. Для того же чтобы доказать, что такой объект существует, достаточно привести всего один пример. Вот две задачи такого типа.

Задача 4. *Известно, что для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ выполняются следующие три условия:*

$$\angle A=\angle A',\ AB=A'B',\ BC=B'C'.$$

Могут ли треугольники ABC и $A'B'C'$ быть неравны?

Ответ: могут.

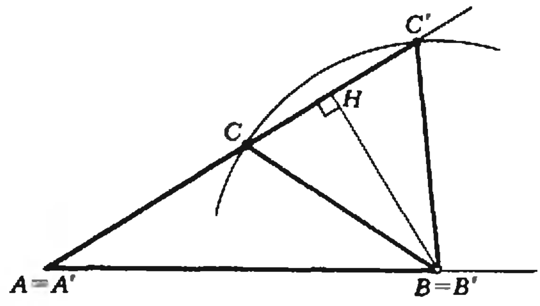


Рис. 2.

14
21
28
35
42
49
56
63
70
77
84
91
98

Рис. 3.

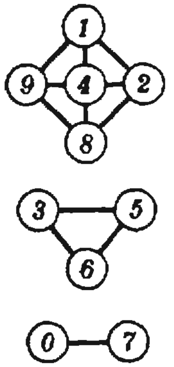


Рис. 4.

Доказательство. Построим два неравных треугольника, для которых верны равенства в условии. Возьмем острый угол A и отложим на одной его стороне отрезок AB (рис. 2). Проведем окружность с центром B и радиусом, который меньше, чем AB, но больше, чем расстояние от точки B до другой стороны угла. Эта окружность пересечет другую сторону угла в двух точках, которые мы обозначим C и C'. Треугольники ABC и ABC' не являются равными, хотя для них выполняются три написанные выше условия.

Задача 5. *Можно ли выписать по кругу k различных цифр так, чтобы из каждых двух соседних можно было составить число, делящееся на 7? Здесь k целое, $3 \leqslant k \leqslant 10$.*

Фактически здесь предлагается восемь различных задач для восьми различных значений k. Но решать их удобно все вместе при помощи следующего приема.

Выпишем все двузначные числа, делящиеся на 7 (рис. 3). Затем нарисуем на бумаге все десять цифр и соединим линиями те из них, которые составляют какое-нибудь из написанных чисел (рис. 4). Расставить требуемым образом k цифр — все равно, что обойти k различных кружков и вернуться в начало пути.

Как видите, все цифры распались на три «островка». Теперь ясно, что больше пяти цифр расставить требуемым образом нельзя. А три, четыре или пять цифр расставить можно. Запишите требуемые расстановки самостоятельно.

Задачи

1. О треугольнике ABC были сделаны четыре утверждения:
а) треугольник ABC равносторонний;
б) треугольник ABC прямоугольный;
в) $AB = BC$;
г) $AB = 2AC$.
Известно, что два из этих утверждений верны, а два другие неверны. Чему может равняться периметр треугольника ABC, если самая короткая его сторона равна единице?

2. Найдите два числа, квадрат каждого из которых на единицу больше другого числа.

3. Чему может равняться периметр треугольника ABC, если известно, что $\angle A = 60°$, $AB = 8$, $BC = 7$?

4. Решите в целых положительных числах уравнение
$$x^2+y^2+z^2+xyz=20.$$

5. Улитка проползла отрезок длиной в метр и остановилась. Потом повернула на 90°, проползла еще отрезок длиной в метр и остановилась. Так она сделала 6 раз подряд: проползла 6 прямолинейных отрезков длиной в метр, поворачивая после каждого на 90° вправо или влево. Каково может быть расстояние между началом и концом ее пути?

6. Найдите все трехзначные числа, каждое из которых в 19 раз больше суммы своих цифр.

7. На солнечной поляне греются ужи, воробьи, мыши, жуки и пауки. У всех вместе ног вчетверо больше, чем голов. Если ужи уползут, то ног останется впятеро больше, чем голов. У мышей и жуков вместе ног впятеро больше, чем голов. У жуков и пауков вместе сто ног. Сколько каких животных на поляне? (Надеемся, что все знают, сколько у кого ног: у ужа — 0, у воробья — 2, у мыши — 4, у жука — 6, у паука — 8.)

8. Расстояние AB равно 225 км. В 12 часов дня из A в B выезжает автобус и одновременно из B в A выезжает автомобиль. Автобус прибывает в B в 6 часов вечера того же дня, причем делает в пути 4 остановки через равные промежутки времени на 15 минут каждую. Автомобиль едет весь путь без остановок и встречает автобус на расстоянии 90 км от A. Какова может быть скорость автомобиля?

9. Можно ли расположить цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по кругу так, чтобы из каждых двух соседних цифр можно было составить простое двузначное число? (Напоминаем, что натуральное число называется простым, если оно имеет ровно два делителя: себя и единицу.)

10. Найдите три числа, квадрат каждого из которых на 3 больше, чем сумма двух других чисел.

11. Все вершины некоторого четырехугольника лежат внутри квадрата, сторона которого равна 1.
а) Может ли периметр этого четырехугольника быть больше 5?
б) Может ли периметр этого четырехугольника быть больше 6?

12. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Спустя некоторое время из пункта A вслед пешеходу выехал велосипедист. Проехав час,

он догнал пешехода, сразу повернул назад, приехал в A, сразу поехал в B и прибыл туда одновременно с пешеходом. Пешеход потратил 6 часов на путь от A до B. Во сколько раз скорость велосипедиста больше скорости пешехода?

13. Две взаимно перпендикулярные прямые разрезают окружность на четыре дуги, две наименьшие из которых содержат 30° и 45°. Сколько градусов содержат две другие дуги?

14. На экране кино винт самолета кажется неподвижным. Сколько оборотов в секунду мог делать винт во время съемки? Съемка велась с частотой 24 кадра в секунду. У винта 2 лопасти.

15. В океане расположены 5 островов A, B, C, D, E. Некоторые расстояния между ними известны: $AB=BC=CA=3$ км, $CD=DE=EC=8$ км, $BD=11$ км. Каково расстояние AE?

16. Три отрезка длиной 1 проходят через одну точку. Их концы служат вершинами несамопересекающегося шестиугольника. Может ли его периметр быть: а) больше 5? б) больше 6?

17. Существует ли многоугольник площадью в квадратный сантиметр, который нельзя поместить ни в какой прямоугольник площадью в квадратный километр?

18. а) Картонный пакет молока имеет форму треугольной пирамиды, все шесть ребер которой имеют длину a. Опишите, как разрезать его так, чтобы после разворачивания получился картонный прямоугольник, и вычислите его длину и ширину.

б) Существует ли неправильная треугольная пирамида, которую можно разрезать так, чтобы после разворачивания получился прямоугольник?

19. Можно ли расположить девять цифр от 1 до 9 в клетки квадратной таблицы размером 3×3 клетки так, чтобы в каждых двух соседних (имеющих общую сторону) клетках стояли две цифры, из которых можно составить число, делящееся на 7 или на 13?

20. Можно ли расставить девять цифр от 1 до 9 в клетки квадратной таблицы размером 3×3 клетки так, чтобы сумма цифр в каждой строке и в каждом столбце была одна и та же?

О дальнейшей работе Заочной школы программирования

Заочная школа программирования завершает публикацию учебных материалов в «Кванте» и первый цикл занятий — рассказ о языке программирования Лого. Конечно, в четырех уроках на страницах журнала трудно было сделать этот рассказ полным. О некоторых типовых механизмах программирования, существующих, в частности, в Лого (операции ввода, обработке логических знаний, понятии файла и др.), вы узнаете из последующих уроков, изучая другие языки программирования (Рапиру, Си, Пролог).

Следующие уроки Заочной школы будут рассылаться учащимся ЗШП один раз в месяц в виде отдельных брошюр размером 21×15 см. Поэтому в свои письма вам следует вкладывать конверты соответствующего размера (допускаются самодельные) со своим точным адресом и с наклеенной на них 10-копеечной маркой.

В школе создано 9 секций. Задания 5-го и последующих уроков следует высылать по адресу соответствующей секции. Мы сообщаем нашим читателям адреса секций ЗШП, указывая в скобках, какие районы и области страны соответствуют определенной секции.

Московская секция ЗШП: 109028 Москва, В. Вузовский пер., 3/12, МИЭМ (Москва и Московская область).

Северо-Западная (*Ленинградская*) секция ЗШП: 190000 Ленинград, ул. Герцена, 67, ЛИАП, кафедра ЭВМ (Ленинградская, Архангельская, Брянская, Вологодская, Калининская, Калужская, Мурманская, Новгородская, Псковская, Смоленская, Тульская области; прибалтийские республики и Белоруссия, Карельская и Коми АССР).

Южная (*Симферопольская*) секция ЗШП: 333036 Симферополь, ул. Ялтинская, 4, Симферопольский университет (Курская, Белгородская, Воронежская, Липецкая, Тамбовская, Ростовская области и Краснодарский край; Украина и Молдавия).

Уральская (*Свердловская*) секция ЗШП: 620219 Свердловск, ул. К. Либкнехта, 9, Пединститут (Свердловская, Челябинская, Оренбургская, Пермская, Курганская области; Башкирская и Удмуртская АССР).

Поволжская (*Горьковская*) секция ЗШП: 603019 Горький, Кремль, Обком ВЛКСМ (Горьковская, Владимирская, Ивановская, Костромская, Рязанская, Астраханская, Волгоградская, Ульяновская, Саратовская, Пензенская, Кировская, Куйбышевская области; Татарская, Марийская, Мордовская и Чувашская АССР).

Среднеазиатская (*Алма-Атинская*) секция ЗШП: 480051 Алма-Ата, пр. Ленина, 114, Республиканский Дворец пионеров (Казахстан и республики Средней Азии).

Кавказская (*Тбилисская*) секция ЗШП: 380002 Тбилиси, ул. Камо, 52, ВЦ Министерства просвещения (Грузия, Армения, Азербайджан; Ставропольский край; Дагестанская, Северо-Осетинская, Чечено-Ингушская и Калмыцкая АССР).

Сибирская (*Красноярская*) секция ЗШП: 660036 Красноярск, Академгородок, ВЦ СО АН СССР (Новосибирская, Кемеровская, Омская, Тюменская области; Красноярский край и вся территория, восточнее Красноярского края).

Переславская секция ЗШП: 152140 Переславль-Залесский, а/я 46 (Ярославская область).

Наш календарь

Генрих Герц и электромагнитные волны

Выдающийся немецкий физик Генрих Герц родился в 1857 году в Гамбурге в семье адвоката. Уже в школьные годы у чрезвычайно хрупкого здоровьем мальчика обнаружилась разносторонняя одаренность — он обладал удивительной памятью, великолепными способностями к рисованию, языкам, техническому творчеству (так, он собственноручно изготовил отличный спектроскоп и другие физические и астрономические приборы), проявлял острый интерес к точным наукам и ботанике. В 1880 году Герц окончил Берлинский университет, блестяще защитив докторскую диссертацию по теоретической электродинамике. Его научным руководителем был в ту пору первый физик Европы Г. Гельмгольц (1821—1894), у которого он последующие три года проработал ассистентом.

Гельмгольц, за свою долгую жизнь занимавшийся множеством проблем физиологии, физики и техники, в это время особенно интересовался электродинамикой. Он разработал свой вариант теоретической электродинамики, соперничавший с предложенными ранее теориями В. Вебера (1804—1891) и Дж. К. Максвелла (1831—1879). В 1879 году Берлинская академия наук по инициативе Гельмгольца выдвинула конкурсную задачу: «Установить экспериментально, существует ли связь между электродинамическими силами и диэлектрической поляризацией». Решение этой задачи, по мысли Гельмгольца, должно было дать ответ, какая из электродинамических теорий соответствует истине. Разумеется, он надеялся, что победа будет за его собственным детищем. Не удивительно, что Гельмгольц предложил взяться за эту задачу Герцу, которого считал самым талантливым из своих многочисленных учеников — тем более, что годом ранее тот уже получил премию Берлинского университета за экспериментальное исследование по электродинамике.

Герц попытался решить задачу, используя электрические колебания, возникающие при разряде конденсаторов и индукционных катушек. Однако сколько-нибудь определенных результатов молодому ученому получить не удалось. И было ясно почему: требовались значительно более высокочастотные — или, как говорили тогда, более быстрые — колебания, чем те, которые умели возбуждать физики в то время.

В 1883 году Герц получил место доцента в Кильском университете, а в 1885 году стал профессором экспериментальной физики Высшей технической школы в Карлсруэ.

Со слов ученого известно, что, потерпев в Берлине неудачу с гельмгольцевской задачей, он все же сохранял надежду отыскать путь к ее решению, и с тех пор все, связанное с электрическими колебаниями, неизменно привлекало его пристальное внимание. Этот устойчивый интерес и сыграл главную роль в том, что сделанное осенью 1886 года случайное наблюдение не только послужило для Герца поводом вернуться к отложенной «до лучших времен» задаче и решить ее, но и стало отправной точкой его пути к замечательному открытию — экспериментальному обнаружению электромагнитных волн.

Что же это было за наблюдение?

В Карлсруэ Герц получил в свое распоряжение физический кабинет с богатой коллекцией научных приборов. Наряду с другими приборами из этого арсенала, ученый в демонстрационных опытах на лекциях использовал и пару индукционных катушек с тонко регулируемым с помощью микрометрического винта искровым промежутком между металлическими шариками на концах обмотки (рис. 1). «Меня поразило,— рассказывал впоследствии Герц, вспоминая, как отлаживал лекционные демонстрации с этими катушками, что для возбуждения искры в одной из катушек не обязательно было подсоединять к другой мощную батарею. Напротив, достаточно было маленькой лейденской банки или даже разряда небольшого индуктора — лишь бы [в искровом промежутке первичной катушки] проскочила искра». Надо сказать, что этот вывод отнюдь не был сделан что называется «сходу». Чтобы утвердиться в нем, Герц доводил ширину искрового промежутка вторичной катушки до сотых долей миллиметра, стал работать в затемненном помещении, наблюдал за крохотными и призрачными искорками через лупу.

Проведя серию в принципе простейших, но глубоко продуманных опытов, Герц пришел к твердому убеждению: искры во вторичной катушке возбуждаются искровым разрядом в первичной катушке не за счет простого индукционного эффекта, а вследствие того, что первичный разряд порождает как раз те самые «очень быстрые электрические колебания», недоступность которых в свое время не позволила ему решить конкурсную задачу Берлинской академии.

Разобравшись в природе явления, ученый понял, как можно эффективно генериро-

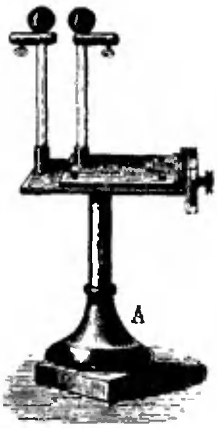


Рис. 1

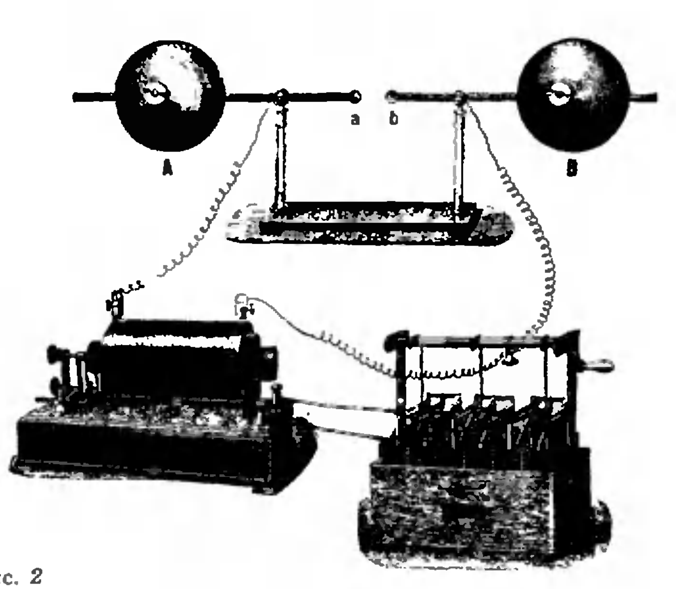


Рис. 2

вать и регистрировать эти колебания. Так в ноябре 1886 года появились простые устройства, вскоре получившие у физиков названия «вибратор Герца» и «резонатор Герца». На рисунке 2 показан вибратор Герца, включенный в последовательную цепь с гальванической батареей и катушкой Румкорфа (высоковольтный трансформатор с низкочастотным механическим прерывателем на входе первичной обмотки). В одном из первых вибраторов, собранных ученым, на концы снабженного посередине искровым промежутком медного провода длиной 2,6 м и диаметром 5 мм были насажены подвижные жестяные шары диаметром 0,3 м. В качестве резонатора использовалась также снабженная искровым промежутком квадратная рамка из медного провода общей длиной 3 м и диаметром 2 мм. Геометрические параметры вибратора и резонатора (кратчайшее расстояние между ними составляло 0,3 м) опытным путем подбирались таким образом, чтобы достигался резонанс, которому соответствовала максимальная длина искры (около 3 мм) в искровом промежутке резонатора.

Воспользовавшись выведенной У. Томсоном (Кельвином) еще в 1853 году формулой для периода собственных колебаний электрического колебательного контура $T=2\pi\sqrt{LC}$ (L и C — соответственно индуктивность и емкость колебательного контура) и справедливо полагая, что в данном случае основной вклад в индуктивность вибратора дает прямой медный провод, а в емкость — концевые жестяные шары, Герц получил для периода колебаний значение $1{,}77\times\times10^{-8}$ с. Таким образом он с удовлетворением убедился, что его «очень быстрые» колебания действительно более чем в 100 раз «быстрее» самых высокочастотных электрических колебаний, зарегистрированных до него.

Путь к решению задачи Гельмгольца был открыт, и уже летом 1887 года Герц справился с ней следующим простым и эффективным образом. Включив свой вибратор и разместив рядом с ним резонатор, он установил, что искра в искровом промежутке последнего по существу одинаковым образом реагирует на приближение к нему как металлической пластины, так и диэлектрического блока (в первом опыте это была стопка книг длиной 1,5 м, шириной 0,5 м и высотой 1 м, а в последующих использовались асфальт, сухой песок, парафин и другие непроводящие материалы). Но в случае металлической пластины влияние на резонатор связано с высокочастотными токами в металле. Значит, высокочастотные токи возбуждаются и в диэлектрике. Из этого сразу же следовало, что теория Вебера должна быть отброшена.

Однако полученные результаты согласовались не только с гельмгольцевской, но и с максвелловской теорией, к которой Герц чувствовал все возраставшее доверие. Одно из важнейших различий между этими теориями состоит в том, что в случае пустого пространства электрические и магнитные воздействия по Гельмгольцу передаются от точки к точке мгновенно (дальнодействие), а по Максвеллу — посредством распространяющихся с конечной скоростью (близкодействие), равной скорости света в вакууме, электромагнитных волн, отличающихся от световых только более низкой частотой. И Герц задался целью экспериментально выяснить, какое из этих представлений верное.

Снова помогло довольно случайное наблюдение. Экспериментируя со своей излюбленной системой вибратор — резонатор, ученый заметил, что, казалось бы, совершенно естественная картина с ослаблением искры в резонаторе по мере его удаления от вибратора как-то странно нарушается, когда резонатор оказывается вблизи стен помещения или рядом с железной печкой. Лишь после напряженных размышлений и дополнительных опытов Герц осознал, что дело тут в отражении от стен волн, порождаемых в пространстве «очень быстрыми электрическими колебаниями» в вибраторе. А коль скоро это так, то странное поведение искры в резонаторе вблизи стен есть не что иное, как следствие интерференции падающих и отраженных волн. Закрепив на стене заземленный металлический лист (было выяснено, что таким образом условия отражения улучшаются) и установив на некотором расстоянии от него вибратор, Герц стал медленно перемещать резонатор в направлении, перпендикулярном стене. При этом оказалось, что периодически через равные расстояния резонатор попадает в «мертвые зоны», в которых искра отсутствует даже при самых узких зазорах между шариками искрового промежутка. Это говорило о том, что в таких зонах, как писал Герц, «каждое колебание уничтожается другим колебанием, вышедшим позднее, но достигшим той же точки по более короткому пути. Если, однако, более короткий путь требует меньше времени, чем более длинный, то распространение происходит с конечной скоростью». Удвоенное расстояние между мертвыми зонами — это длина волны. В одном из первых подобных опытов непосредственно измеренная длина волны λ составила 4,5 м. По формуле $T=\lambda/c$, где c — скорость света, Герц нашел для периода колебаний значение $1{,}5\times10^{-8}$ с, которое с учетом точности измерений вполне удовлетворительно согласовывалось со значением $1{,}4\times10^{-8}$ с, найденным для вибратора по формуле $T=2\pi\sqrt{LC}$.

Итак, электромагнитные волны в пустом пространстве, открытые Максвеллом «на кончике пера» еще в 1864 году, в 1888 году стали, наконец, физической реальностью. Позже Герц писал: «Эти опыты очень просты в принципе, но тем не менее они влекут за собой важнейшие следствия. Они рушат всякую теорию, которая считает, что электрические силы перепрыгивают пространство мгновенно. Они означают блестящую победу теории Максвелла. Последняя уже не связывает удаленные друг от друга физические события. Насколько маловероятным казалось ранее ее воззрение на сущность света, настолько трудно теперь не разделить это воззрение ⟨...⟩. Наши опыты сами неуклонно поднимали нас на высоту того горного перевала, который, согласно теории, соединяет область света с областью электричества. Остается пройти несколько шагов дальше и исследовать спуск в область уже изученной оптики».

Эти вызвавшие подлинный восторг всего научного мира «последние шаги» были сделаны Герцем все в том же 1888 году и, конечно, с помощью все той же «неразлучной пары» вибратор — резонатор. Только теперь и вибратор, и резонатор, которым придавалась линейная конфигурация (в сущности та же, что используется в современных дипольных телевизионных антеннах, «украшающих» крыши наших домов), были установлены каждый вдоль фокальной линии параболически изогнутого жестяного листа. Освоившись с техникой возбуждения и регистрации электромагнитных волн, Герц отказался от использования в вибраторе больших металлических шаров относительно высокой электрической емкости и перешел тем самым в более высокочастотную область с длинами волн 0,4—0,5 м.

С помощью усовершенствованной таким образом установки Герц сразу же удостоверился в том, что, подобно световым, его «электрические лучи» поддаются фокусировке параболическими «зеркалами», при этом расстояния, до которых «прощупывается волна», возросли до 16 м. Затем ученый легко продемонстрировал прямолинейность распространения — при перегораживании пути от вибратора к резонатору металлическим экраном искры в искровом промежутке резонатора исчезали. В то же время оказалось, что изоляторы для электромагнитных волн прозрачны. Столь же легко была продемонстрирована полная аналогия с законом отражения света — для этого вибратор и резонатор устанавливали по одну сторону заземленного металлического листа, игравшего роль зеркала, и проверяли равенство углов падения и отражения.

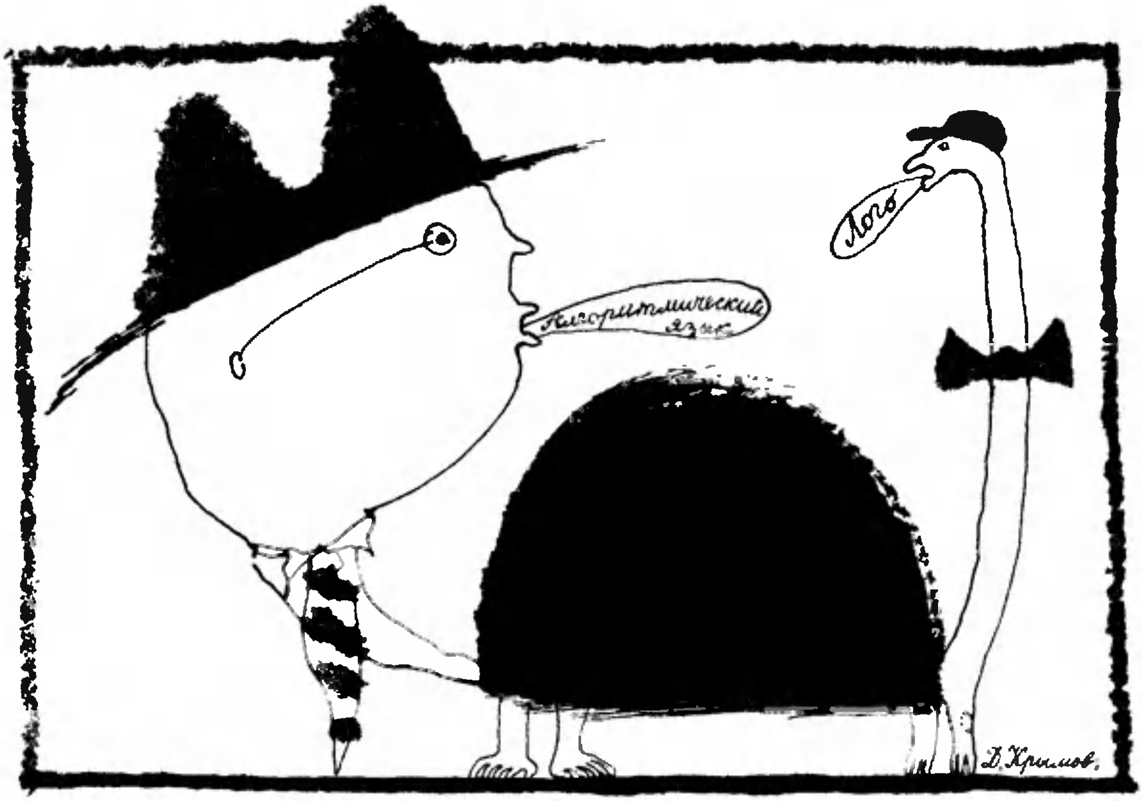
Далее Герц доказал, что, подобно световым, электромагнитные волны поперечны — при повороте резонатора на 90° относительно вибратора искры в приемном устройстве исчезали.

Оставалось еще продемонстрировать возможность преломления. Для этого Герц использовал призму из асфальта массой свыше тонны и с сечением в форме равнобедренного треугольника со стороной 1,2 м и углом при вершине 30°. Согласно максвелловской теории показатель преломления электромагнитных волн в немагнитном диэлектрике определяется соотношением $n=\sqrt{\varepsilon}$, где ε — диэлектрическая проницаемость. Направив «электрический луч» на асфальтовую призму, Герц зарегистрировал его отклонение на 22°, что соответствовало вполне приемлемому значению показателя преломления 1,69.

Герц умер 1 января 1894 года, не дожив до 37 лет. Но как много он успел сделать! Помимо тех работ, которые были упомянуты выше, он провел очень важные исследования катодных лучей, придал уравнениям Максвелла форму, близкую к той, в которой они записываются в наши дни (а исходных трудах Максвелла «опознать» эти уравнения не так-то просто), построил остроумную, хотя и не получившую дальнейшего развития систему механики, свободную от понятия силы, положил начало теоретическому анализу электродинамики движущихся тел — в конечном счете этот анализ завершился в 1905 году созданием специальной теории относительности. Но, конечно, главное научное достижение Герца — экспериментальное открытие электромагнитных волн, великое открытие, в огромной степени обогатившее физику и породившее радио, телевидение, радиолокацию — области техники, без которых наша жизнь теперь просто немыслима.

Важно отметить, что ничего нового по сравнению с тем теоретическим и экспериментальным «багажом», которым располагали физики лет за 10—20 до герцевских исследований, для открытия не понадобилось. Открыть то, что было буквально под руками у множества ученых, но неизменно оставалось незамеченным, Герцу удалось лишь благодаря его филигранному владению искусством физического эксперимента, неистощимой и острой наблюдательности, дотошности и глубокой физической интуиции.

Б. Е. Явелов



Искусство программирования

Язык Лого

А. А. ДУВАНОВ, Ю. А. ПЕРВИН

Урок 4: Структура данных в Лого

Алгоритмический язык и Лого

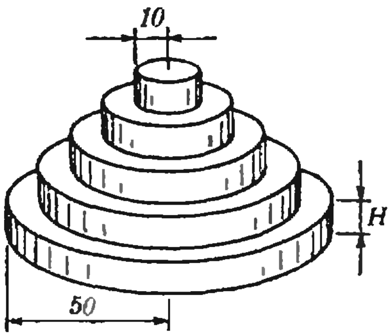
Те из читателей, которые проходят информатику в школе, наверняка сравнивают описываемый в учебнике алгоритмический язык и знакомый по «Кванту» Лого. Легко увидеть сходство обоих языков в средствах графики, условных командах, команде присваивания. Соотношения циклов в Лого и алгоритмическом языке сложнее. От цикла ДЛЯ алгоритмического языка легко перейти к циклу ПОВТОРИ. Так, вычислить объем «пирамиды», составленной из нескольких колец, можно с помощью цикла ДЛЯ:

```
V:=0
ДЛЯ R ОТ 10 ДО 50 ШАГ 10
НЦ
  V:=V+3.14*R**2*H
КЦ
```

На Лого это программируется так:

```
СДЕЛАЙ" V 0
ПОВТОРИ 5
  [СДЕЛАЙ" V СЛОЖИ УМНОЖЬ УМНОЖЬ
УМНОЖЬ R R H 3.14 V]
```

А вот цикл ПОКА, существующий в алгоритмическом языке, не имеет прямого аналога в Лого. В таком цикле вслед за словом ПОКА записывается условие. Это условие — ключ, открывающий вход в тело цикла: если условие истинно, то выполняются команды цикла и вновь проверяется условие; если же условие нарушается, машина переходит к выполнению команды, следующей за циклом. В школьном учебнике информатики приведен алгоритм вычисления НОД с помощью цикла ПОКА. Для того чтобы в Лого реализовать действия, повторяющиеся не фиксированное число раз, а зависящие от



некоторого условия (включающего переменную), надо воспользоваться рекурсией. Используйте эту подсказку для выполнения следующего задания.

Задача 1. Напишите на Лого функцию вычисления НОД двух чисел.

Основное сходство, которое роднит алгоритмический язык и Лого, состоит в возможности составлять описания сложного действия из более простых. Такие описания в Лого называются *процедурами*, а в алгоритмическом языке — вспомогательными алгоритмами. Столь же близки понятия *функции* в обоих языках.

Важно, однако, остановиться на различиях. Одним из таких различий является способ возврата значения функции в вызывающую программу. В Лого для этого используется команда ВЕРНИ a. Она заканчивает выполнение функции и возвращает в программу значение выражения a. В алгоритмическом языке нет специальных средств возврата. Выход из функции производится после выполнения последней команды. В качестве результата возвращается значение специальной переменной ЗНАЧ, которая совпадает по типу с типом функции.

В большинстве языков программирования существуют возможности представления и обработки литерных величин, как они называются в алгоритмическом языке. В Лого для величин такого типа существует простое название — «слово». *Слово* — это конечная упорядоченная последовательность символов, отличающихся от пробела. Слову в программе предшествует кавычка, которая не входит в счет символов слова. Слово может быть пустым — в таком слове нет ни одного символа, его обозначение — кавычка, за которой следует пробел (в алгоритмическом языке литерная переменная окаймляется парой кавычек). Примеры слов Лого: "НАДЯ — в слове 4 буквы; "Y — отдельный символ считается словом, состоящим из одного этого символа; "1918—1988 — слово из 9 символов.

Ранее слова были использованы для обозначения имен переменных. По команде СДЕЛАЙ "КЛЕТКА 1 переменная КЛЕТКА получает значение 1. Команда СДЕЛАЙ "КЛЕТКА "СЛОН делает значением переменной КЛЕТКА слово СЛОН. В алгоритмическом языке последняя команда имела бы вид: КЛЕТКА:="СЛОН"

Такие разные слова!

Представьте разговор двух мальчиков. Сережа рассказывает:

—АВВА — это имя, которое я дал своей собаке.

— Забавное имя,— говорит Антон,— а как оно пишется?

— «АВВА» — это так: сначала «А», потом «В», еще «В» и в конце опять «А».

— Она знает свое имя? — интересно узнать Антону.

Сережа рад продемонстрировать способности своей собаки:

— Ну, конечно! АВВА! Вот и она!

Трижды в этом разговоре употреблено слово АВВА и каждый раз — в разной своей роли. АВВА — это имя собаки; «АВВА» — это слово, представляющее собой последовательность букв в строгом порядке; АВВА! — это команда собаке немедленно явиться к своему хозяину. В устной речи разное использование слов можно отметить интонацией. Если же такой разговор надо записать, то для различения разных ролей слова потребуются специальные обозначения — знаки препинания.

В Лого дело обстоит точно так же. Для распознавания смысла используемых в программе слов применяют такие синтаксические правила:

— двоеточие ставят перед именем величины для того, чтобы обозначить значение, принимаемое этой величиной в текущий момент; так :ОТМЕТКА есть значение переменной ОТМЕТКА;

— кавычки ставят перед словом, представляющим собой цепочку символов; по положению такого слова в команде (по контексту) судят о смысле обозначаемого слова; так, в команде присваивания СДЕЛАЙ "КЛЕТКА "СЛОН слово в последней позиции — "СЛОН с кавычкой в начале — есть литерная константа, а слово в предшествующей позиции — "КЛЕТКА — есть имя переменной КЛЕТКА; сравните команду СДЕЛАЙ "КЛЕТКА :СЛОН, где переменная КЛЕТКА получает значение, которое имела переменная с именем СЛОН;

— перед вызовами процедур и функций (так же, как перед командами и операциями) не ставятся ни двоеточие, ни кавычка; запись КЛЕТКА :СЛОН означает вызов процедуры КЛЕТКА с параметром СЛОН.

Займемся обработкой списков

Программисты часто используют термин «данные». Этот термин можно считать синонимом понятия «информация». Обрабатываемая машиной информация может быть организована по-разному. Это либо единичные символы, либо их упорядоченный конечный набор — слово, либо упорядоченная группа слов — *список*, либо какой-нибудь другой более сложный способ объединения символов, слов и списков. Организованную по тому или иному способу информацию называют *структурой данных*.

В алгоритмическом языке каждая структура данных должна быть описана с помощью специального имени — типа величины — нат, вещ, лит и т. д. В Лого нет описания типов, однако каждая из структур алгоритмического языка имеет свои аналоги в Лого. Для представления таблиц и более сложных структур данных Лого использует списки, расширяющие понятие табличной величины алгоритмического языка.

Обработка списков требует совсем иных операций, чем арифметические расчеты. Пусть необходимо запомнить в памяти ЭВМ информацию об учениках класса — список сведений по каждому ученику. Для работы с такой структурой полезно иметь операции, которые позволят вставлять, удалять, находить, изменять элементы списка.

Выборка первого элемента структуры — ПЕРВЫЙ α (или ПРВ α). Аргумент этой операции — слово или список, результат — первый элемент структуры. Например,

ПРВ "ЛОГО = "Л,
ПРВ [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ] = "ЛОГО

Структура без первого элемента — КРОМЕПЕРВОГО α (или КПРВ α). Аргумент этой операции — слово или список, результат — структура без первого элемента. Например,

КПРВ "ЛОГО = "ОГО
КПРВ [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ] = [ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ]

Последний элемент структуры — ПОСЛЕДНИЙ α (или ПСЛ α). Аргумент этой операции — слово или список, результат — последний элемент структуры. Например,

ПСЛ "ЛОГО = "О
ПСЛ [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ] = "ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Структура без последнего элемента — КРОМЕПОСЛЕДНЕГО α (или КПСЛ α). Аргумент операции — слово или список, результат — структура без последнего элемента. Например,

КПСЛ "ЛОГО = "ЛОГ
КПСЛ [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ] = [ЛОГО ЯЗЫК]

Включение элемента в начало структуры — ВНАЧАЛО $\alpha\beta$ (или ВНАЧ $\alpha\beta$). Первый аргумент — включаемый элемент, второй — изменяемая структура. Например,

ВНАЧ "Л "ОГО = "ЛОГО
ВНАЧ "ЛОГО [ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ] = [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ]

Включение элемента в конец структуры — ВКОНЕЦ $\alpha\beta$ (или ВКОН α β). Первый аргумент — включаемый элемент, второй — изменяемая структура. Например,

```
ВКОН "О "ЛОГ = "ЛОГО
ВКОН "ПРОГРАММИРОВАНИЯ [ЛОГО ЯЗЫК] = [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ]
```

Определение длины структуры — ДЛИНА a. Аргумент этой операции — слово или список; результат — число элементов в структуре. Например,

```
ДЛИНА "ЛОГО = 4
ДЛИНА [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ] = 3
ДЛИНА [[РУЧКИ 3] [ТЕТРАДИ 2] [ПЕНАЛЫ 5]] = 3
```

Для анализа структур данных в Лого, кроме ранее введенных, используются следующие виды условий над структурами:

```
ЧИСЛО? СЛОВО? СПИСОК? ПУСТО?
```

Эти условия проверяют, является ли структура числом, словом, списком или она пуста.

Итак, данные об учениках класса хранятся в виде списка:

```
КЛАСС=
   [[ИВАНОВ ПЕТЯ ПОЛЕВАЯ 35 17]
   [ДАНИЛОВ САША ПУШКИНА 58 2]
         ...]
```

Нужно составить список фамилий всех учеников класса. «Досье» Иванова достанем из списка КЛАСС операцией ПРВ :КЛАСС:

```
[ИВАНОВ ПЕТЯ СТАРОСТА ПОЛЕВАЯ 35 17]
```

Из этого списка нам снова нужен первый элемент:

```
ПРВ ПРВ :КЛАСС = "ИВАНОВ
```

Фамилии мы будем собирать в списке ФАМ:

```
СДЕЛАЙ "ФАМ ВКОН ПРВ ПРВ :КЛАСС :ФАМ      (1)
```

Команда (1) удлиняет список ФАМ на один элемент. Слово ИВАНОВ добавляется в его конец. А как быть с Петровым? Очень просто: надо укоротить список КЛАСС:

```
СДЕЛАЙ "КЛАСС КПРВ :КЛАСС      (2)
```

и снова выполнить команду (1). А дальше? Все повторяется: за командой (1) нужна команда (2) и т. д., пока весь список КЛАСС не исчерпается. Вот как выглядит описание нужной функции:

```
ЭТО ФАМИЛИИ :КЛАСС :ФАМ
    ПОВТОРИ ДЛИНА :КЛАСС
       [СДЕЛАЙ "ФАМ ВКОН ПРВ ПРВ :КЛАСС :ФАМ
        СДЕЛАЙ "КЛАСС КПРВ :КЛАСС
       ]
    ВЕРНИ :ФАМ
КОНЕЦ
```

Составив такое описание, получаем желаемый список фамилий при помощи команды

```
ВЫВЕДИ ФАМИЛИИ :КЛАСС []      (3)
```

Построенная функция — не единственная, которая решает поставленную задачу. Можно предложить ее рекурсивный вариант:

```
ЭТО ФАМИЛИИ :КЛАСС :ФАМ
   ЕСЛИ ПУСТО? :КЛАСС [ВЕРНИ :ФАМ]
   СДЕЛАЙ "ФАМ ВКОН ПРВ ПРВ :КЛАСС :ФАМ
   ВЕРНИ ФАМИЛИИ КПРВ :КЛАСС :ФАМ
КОНЕЦ
```

Здесь команда

```
ЕСЛИ ПУСТО? :КЛАСС [ ВЕРНИ :ФАМ ]
```

обеспечивает окончание рекурсии, когда список КЛАСС будет исчерпан. Команда

```
СДЕЛАЙ "ФАМ ВКОН ПРВ ПРВ :КЛАСС :ФАМ
```

добавляет очередную фамилию в список ФАМ. Команда

```
ВЕРНИ ФАМИЛИИ КПРВ :КЛАСС :ФАМ
```

делает рекурсивный вызов функции ФАМИЛИИ с укороченным списком КЛАСС.

Задачи 2 и 3. Напишите два варианта функции АДРЕС (рекурсивный и с командой цикла), которая по фамилии выдавала бы в качестве своего значения адрес ученика. Например, результатом вызова АДРЕС :КЛАСС "ИВАНОВ должен быть список [ПОЛЕВАЯ 35 17], а результатом вызова АДРЕС :КЛАСС "ДАНИЛОВ — список [ПУШКИНА 58 2]. Функция должна предусматривать выдачу сообщения [ТАКОГО УЧЕНИКА НЕТ] в случае ошибочной фамилии.

Задача 4. Напишите функцию, вычисляющую общее число слов в списке. Ясно, что стандартная функция ДЛИНА не всегда сработает правильно. Например, число элементов в списке [[ВАСЯ ПЕТЯ] КОЛЯ] — два, в то время как число слов — три.

Внимание! О дальнейшем порядке работы ЗШП читайте на с. 47.

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{2}{3}\sqrt{x+9}-\sqrt{\frac{x^2+8x}{x+9}}=\frac{3}{\sqrt{x+9}}.$$

2. Найдите все значения a, при которых расстояние между вершинами парабол $y=x^2+ax+\frac{2}{3}$ и $y=3x^2+5ax+\frac{19}{12}a^2$ больше $\frac{\sqrt{29}}{3}$.

3. Окружность с центром в точке пересечения диагоналей AC и BD равнобедренной трапеции $ABCD$ касается меньшего основания BC и боковой стороны AB. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что ее высота равна 16, а радиус окружности равен 3.

4. Найдите все решения уравнения

$$\frac{4\cos 4\pi x}{1+3\operatorname{ctg}^2\pi x}=-1,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\log_7\log_{\frac{11}{16}}\left(\frac{11}{32}-\frac{13}{8}x-x^2\right)<0.$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AD=2$, $BC=1$, высота трапеции равна 3. Высота пирамиды проходит через точку O пересечения диагоналей трапеции, $SO=\frac{4}{\sqrt{5}}$. Точка F лежит на отрезке SO, причем $SF:FO=1:3$. Цилиндр, ось которого параллельна апофеме грани SAD, расположен так, что точка F является центром его верхнего основания, а точка O лежит на окружности нижнего основания. Найдите площадь части верхнего основания цилиндра, лежащей внутри пирамиды.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_2(-\sin x)-\log_4\cos x=-\frac{1}{2}+\log_4 3.$$

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбраны точки K и L так, что $AK=KL=LB$. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $CK=\sqrt{2}\,CL$.

3. Касательная к графику функции $y=\frac{27}{2}x^4-\frac{1}{2}$ образует с осью абсцисс угол, равный $\operatorname{arctg} 2$, и пересекает в точках A и B окружность с центром в начале координат. Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AB=1$.

4. Дано уравнение

$$x^2+3xy+3ay^2+\left(\frac{9}{2}-a\right)y+4x+5=0.$$

Найдите все значения a, при которых:

1) это уравнение имеет хотя бы одно решение при $y=2$;

2) найдется хотя бы одна пара чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющая этому уравнению.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) точка P — середина апофемы SD грани SBC. На ребре AB взята точка M так, что $MB:AB=2:7$. Сфера, центр которой лежит на прямой MP, проходит через точки A, C и пересекает прямую BC в точке Q так, что $CQ=m$. Найдите объем пирамиды $SABC$, если известно, что радиус сферы равен $\frac{m}{\sqrt{3}}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Арбуз взвешивают в салоне самолета на пружинных весах один раз перед взлетом, а другой — во время полета самолета вдоль меридиана. Какой должна была бы быть скорость самолета, чтобы показания весов в полете уменьшились на 1/16 по сравнению с их показаниями перед взлетом? Радиус Земли принять равным $R=6400$ км. Вращением Земли вокруг своей оси и высотой полета самолета по сравнению с радиусом Земли пренебречь.

2. Один моль одноатомного идеального газа совершает замкнутый цикл, состоящий из процесса с линейной зависимостью давления от объема, изохоры и изобары (рис. 1). Найдите количество теплоты, подведенное к газу на участках цикла, где температура газа растет. Температура газа в состояниях *1* и *2* равна $T_1=300$ К, отношение объемов на изобаре $V_3/V_1=5/2$, направление обхода цикла указано стрелками. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

3. При замкнутом ключе K (рис. 2) вольтметр V_1 показывает $U_1=0{,}8\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ — ЭДС бата-

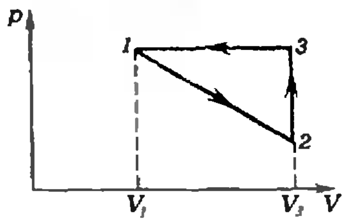


Рис. 1.

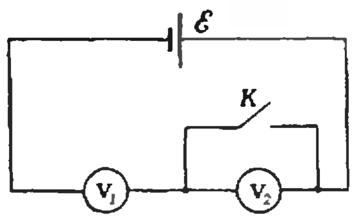


Рис. 2.

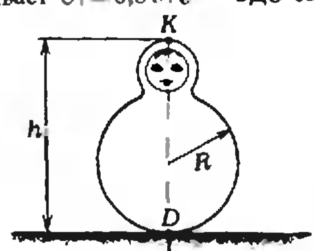


Рис. 3.

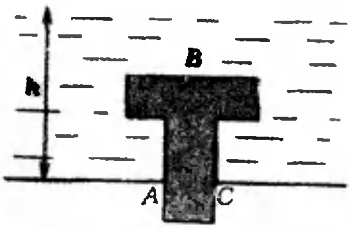


Рис. 4.

реи). Что покажут вольтметры V_1 и V_2 при разомкнутом ключе, если их сопротивления равны?

4. Пучок лазерного излучения мощностью $W=100$ Вт падает на непрозрачную пластинку под углом $\alpha=30°$. Пластинка поглощает 60 % падающей энергии, а остальную энергию зеркально отражает. Найдите абсолютную величину силы, действующей на пластинку со стороны света. Скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

Вариант 2

1. Детская игрушка-неваляшка (ванька-встанька) представляет собой фигуру высотой $h=21$ см и массой $M=300$ г с симметричным распределением массы относительно оси KD, причем поверхность нижней части неваляшки есть часть сферы радиусом $R=6$ см (рис. 3). Если неваляшку поставить на шероховатую плоскую поверхность, наклоненную под углом $\alpha=30°$ к горизонту, то неваляшка занимает устойчивое положение равновесия, при котором ее ось KD отклоняется от вертикали на угол $\beta=45°$. Какую наименьшую массу пластилина надо прикрепить к макушке неваляшки в точке K, чтобы она потеряла устойчивость на горизонтальной поверхности стола?

2. Подводная опора, забитая в глинистый грунт водоема глубиной $h=3$ м, представляет из себя два соосных цилиндра различных диаметров (рис. 4). Найдите силу, действующую на опору со стороны воды в водоеме, если площадь сечения цилиндра меньшего диаметра, забитого в грунт, $S=1$ м^2, объем части опоры ABC, находящейся в воде, $V=4$ м^3, плотность воды $\rho=1$ г/см^3.

3. Проволочное кольцо, состоящее из двух разнородных тонких проводников в форме полуокружностей одинаковой длины L с равными площадями сечения проводников s, равномерно вращается с частотой ν в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}_0$. Ось вращения кольца проходит по его диаметру и составляет прямой угол с вектором магнитной индукции. Найдите мощность тепловых потерь в кольце, если удельные электрические сопротивления проводников равны ρ_1 и ρ_2.

4. На плоскопараллельную стеклянную пластинку, нижняя грань которой посеребрена, падает под углом $\alpha=30°$ узкий пучок света, содержащий излучение двух длин волн (рис. 5). Показатель преломления стекла для одной длины волны равен n_1, а для другой — $n_2 (n_2>n_1)$. В результате преломления на верхней грани, однократного отражения от нижней и еще одного преломления на верхней грани из пластинки выходят два пучка света. Найдите расстояние между пучками, вышедшими из пластинки, если ее толщина H.

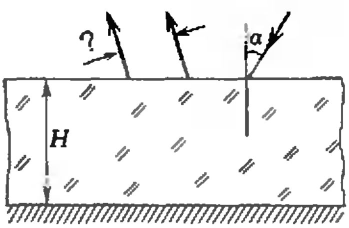


Рис. 5.

Публикацию подготовили
К. А. Букин, В. Н. Дерябкин, В. И. Чивилёв

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$1+\frac{5a-3}{x-a}=\frac{5(2a+1)(1-a)}{(x-a)(x-3a+1)}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2\sin x-4\cos x}=\sqrt{1-2\operatorname{ctg} x}.$$

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Верно ли, что плоскости ABC_1 и A_1B_1D перпендикулярны? Дайте обоснование ответа.

4. Какие неравенства называются равносильными? Равносильны ли неравенства $x^2-x<6$ и $(x^2-x)(x^2+1)<6(x^2+1)$? Верно ли, что для произвольных функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)\cdot h(x)>g(x)\cdot h(x)$ равносильны?

5. При каких значениях a уравнение

$$(a+1-|x-1|)(a+x^2-2x)=0$$

имеет ровно три корня?

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{a+x}{ax^2}=\frac{1}{x(a-1)}+\frac{1}{a(a-1)}.$$

2. При каких значениях x производная функции $y=15\sin x-10\sin 3x+3\sin 5x$ равна нулю?

3. Прямая параллельна плоскости. Верно ли, что все точки прямой равноудалены от плоскости? Дайте обоснование ответа.

4. Приведите определение, изложите с обоснованием свойства функции $y=\cos x$ и построение ее графика.

5. График функции $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось x в двух точках, одна из которых лежит между точками (2; 0) и (3; 0), а другая — между точками (—5; 0) и (—4; 0). Этот же график пересекает ось y в точке, лежащей между точками (0; —7) и (0; —6). Определите знаки a, b, c. Что больше: $|a|$ или $|c|$? $|a|$ или $|b|$?

Публикацию подготовил
В. А. Тонян

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Физика

Задачи устного экзамена

1. Конькобежец массой $M=60$ кг бросает в горизонтальном направлении камень массой $m=2$ кг со скоростью $v=15$ м/с. На какое расстояние откатится при этом конькобежец, если известно, что коэффициент трения полозьев о лед $\mu=0{,}02$?

2. Льдина площадью поперечного сечения $S=1$ м^2 и высотой $h=0{,}4$ м плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

3. Резиновая камера содержит воздух при температуре $t_1=27$ °С и нормальном атмосферном давлении. На какую глубину нужно опустить камеру в воду, чтобы ее объем уменьшился вдвое? Температура воды $t_2=4$ °С.

4. В комнате объемом $V=75$ м^3 затопили печь, и температура поднялась с $t_1=16$ °С до $t_2=21$ °С. Давление воздуха в комнате не изменилось и осталось равным $p_0=1$ атм. Какая масса воздуха ушла при этом из комнаты?

5. В сосуд, содержащий $V_1=4{,}6$ л воды при $t_1=20$ °С, бросают кусок стали массой $m_2=10$ кг, нагретый до $t_2=500$ °С. Вода нагревается до $t_3=100$ °С, и часть ее обращается в пар. Найдите массу образовавшегося пара. Удельная теплоемкость воды $c_1=4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r=2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость стали $c_2=460$ Дж/(кг·К).

6. Лампа мощностью $P=500$ Вт рассчитана на напряжение $U_1=110$ В. Определите величину дополнительного сопротивления, позволяющего включить ее в сеть с напряжением $U_2=220$ В без изменения ее мощности.

7. Вольтметр, подключенный к зажимам источника тока, показал $U_1=6$ В. Когда к тем же зажимам подключили лампочку, вольтметр стал показывать $U_2=3$ В. Что покажет вольтметр, если вместо одной подключить две такие же лампочки, соединенные последовательно?

8. Электродвигатель подъемного крана работает под напряжением $U=380$ В и потребляет ток $I=20$ А. Каков КПД установки, если груз массой $m=1$ т кран поднимает равномерно на высоту $h=19$ м за $t=50$ с?

9. Луч света падает на поверхность воды под углом $\alpha_1=40°$. Под каким углом должен упасть луч на поверхность стекла, чтобы угол преломления оказался таким же? ($n_в=1{,}3$; $n_с=1{,}6$.)

10. Какой длины волны свет падает на поверхность металлической пластины с работой выхода $A=10^{-18}$ Дж, если скорость фотоэлектронов $v=3\cdot10^6$ м/с? Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовил *О. Ю. Овчинников*

Информация

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова принимаются на индивидуальное обучение учащиеся седьмых классов общеобразовательных школ и СПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Цель ВЗМШ — рассказать своим ученикам о многих интересных вещах, связанных со школьным курсом математики, научить решать самые разнообразные задачи, приучить самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге. Всем успешно окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик») выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить первое задание. Преимуществами пользуются ребята, проживающие в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах.

Задание 1. *Изучите статью С. М. Львовского и А. Л. Тоома «Разберем все варианты» в этом номере журнала и постарайтесь решить задачи 1—12 для самостоятельного решения.* Чтобы быть принятым в ВЗМШ, не обязательно решить все 12 задач.

Решения задач следует выполнить на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не надо сворачивать ее в трубку. На обложку тетради наклейте листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	*Московская*
Фамилия, имя ученика	*Иванов Петр*
Год рождения	*1974*
Класс и школа	*7 класс «Б» школы № 2*
Ф. И. О. учителя математики	*Орлов Борис Петрович*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 3, мать — медсестра*
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	*123456 Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1*

В тетрадь надо вложить два листка бумаги размером 6×14 см с четко написанным почтовым адресом, фамилией и именем ученика.

Задачи в решениях должны идти в том же порядке, что и в статье: сначала условие, потом решение.

Срок отправки задания № 1 — не позднее 15 марта 1988 г. (по почтовому штемпелю).

Для того чтобы задание было зачтено, нужно решить бо́льшую часть задач. Если вы успешно выполните это задание, то, начиная с сентября 1988 г., будете получать все дальнейшие задания, которые содержат теоретический материал и задачи для самостоятельного решения, а также контрольные задачи. Все дальнейшие контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать без ограничений с любого месяца в любом отделении связи; подписной индекс 70465; журнал распространяется только по подписке).

Задание № 1 надо выслать по адресу: 119823 Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ, на прием или по адресу соответствующего филиала. Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Ижевск, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Ташкент, Фрунзе, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Магнитогорск, Орел, Павлодар, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в Дубне — при Объединенном институте ядерных исследований, в Могилеве — при областном Дворце пионеров и школьников, и Заочная физико-техническая школа — при Московском институте стали и сплавов.

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), присылают свои работы по адресу: 197136 Ленинград, Чкаловский пр., 25а, С-З ЗМШ. На прием.

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик». Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1988 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1988 г. начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе (соответственно для учащихся I и II курсов СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться в 1988/89 учебном году. Заявление должно быть заверено директором школы (СПТУ) и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Без контрольной работы, только по заявлениям, принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзной и республиканских, а также победители краевых и областных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием на заочное отделение учащихся седьмых классов общеобразовательных школ. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в сентябре. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно закончившие 8-й или 9-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверения об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ являются аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 15 апреля выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;

2) фамилия, имя учащегося;

3) школа и класс (полное название);

4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);

5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и пришлите по адресу: 119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечания

1. Для школьников 7—10 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 939-39-43.

2. Для школьников Казахстана и Молдавии действуют филиалы МММФ МГУ: при математическом факультете Казахского государственного университета и при факультете математики и кибернетики Кишиневского государственного университета. Их адреса:

480012 Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи, 47/39, КазГУ, математический факультет, филиал МММФ МГУ;

277003 Кишинев, ул. Садовая, 60, КГУ, факультет математики и кибернетики, филиал МММФ МГУ.

Задачи вступительной работы на Малый механико-математический факультет в 1988 году

1. Найдите наименьшее натуральное число $x>1$, которое при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 дает в каждом случае остаток 1.

2. Что больше: $\sqrt{3}$ или $\sqrt[3]{5}$?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy+vz=1987, \\ yz+zx=1988, \\ xy+zx=1989. \end{cases}$$

4. Докажите, что если $a+b>2$, то $a^8+b^8>2$.

5. Дано уравнение $x_1^{11}+x_2^{11}+\ldots+x_{1987}^{11}=1988$.

а) Найдите все решения в натуральных числах.

б) Докажите, что целых решений бесконечно много.

6. Найдите на гипотенузе прямоугольного треугольника такую точку, чтобы сумма квадратов ее расстояний до катетов была наименьшая.

7. Группа из 11 учеников 7-го класса, среди которых были мальчики и девочки, пошла на дискотеку. Они танцевали, стоя равномерно по кругу и бросая друг другу серпантин. Докажите, что найдется мальчик и два его приятеля (или девочка и две ее подружки), с которыми он (или она) может быть соединен бумажными лентами равной длины.

8. Докажите, что если в четырехугольнике каждый из углов больше 89°, то каждый из них меньше 93°.

9. Проведены две окружности с центром O радиусами r и R: ОКР (O, r) и ОКР (O, R), причем $R>r$. Из точки O выпущены лучи OA_1, OA_2 и OA_3: луч OA_3 лежит внутри острого угла между OA_1 и OA_2. Пусть ОКР $(O, r)\cap OA_1=E$, ОКР $(O, R)\cap OA_1=B$, ОКР $(O, r)\cap OA_3=D$, ОКР $(O, R)\cap OA_2=C$, причем точки B, D и C лежат на одной прямой. Найдите отношение $\overset{\frown}{COD}:\overset{\frown}{EDB}$.

10. Чему равна предпоследняя цифра квадрата целого числа, если последняя цифра равна пяти?

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые, девятые и десятые классы на 1988/89 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике, а также в профориентации по профилю МИСиСа.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры общей физики и кафедры теоретической физики МИСиСа.

Работа школы организована следующим образом. Четыре-пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач, а также профориентационные материалы. Присланные учащимися работы проверяются и вместе с оценками и комментариями отправляются учащимся.

Учащиеся, успешно окончившие школу в полном объеме, получают удостоверение, которое дает преимущество при поступлении в МИСиС.

Занятия в ЗФТШ начнутся с 1 октября. Для зачисления в школу необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного домашнего адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по математике и физике. Заявление и справку вместе с решением первого (вступительного) задания по математике, о котором написано в статье «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» в этом номере журнала, нужно выслать не позднее 5 мая по адресу: 117049 Москва, Ленинский пр., 4, МИСиС, ЗФТШ.

Несколько слов о самом институте. Московский институт стали и сплавов готовит инженерные и научные кадры для металлургической и машиностроительной промышленности и ряда новых отраслей науки и техники. На многих кафедрах института обучение строится так, что студенты уже с первого курса приобщаются к самостоятельной научной работе.

Поступив в МИСиС, вы сможете заниматься теорией и экспериментом в области физики твердого тела, исследовать свойства вещества при низких температурах, изучать высокотемпературные процессы в жидкостях и твердых телах, создавать сплавы с новыми свойствами и новые полупроводниковые приборы.

Поправка

В «Кванте» № 11 за 1987 г. на с. 49 неверно даны условия упражнений 8 и 9. Правильные условия таковы:

8 (МФТИ, 1986). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x=\sin 2y, \\ 2\sin(4x+8y)\times \\ \times\sin(3x+10y)+ \\ +5\cos(7x+2y)=4. \end{cases}$$

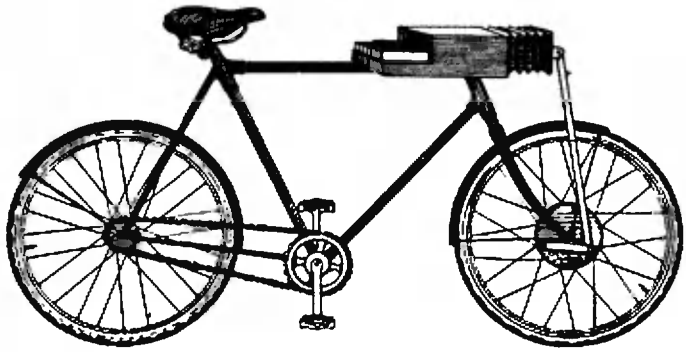
9 (МФТИ, 1982). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\, x\cdot \sin y+ \\ +2\,\mathrm{ctg}\, x\cdot \cos y=\sqrt{5/2}, \\ 2\mathrm{ctg}\, x\cdot \sin y- \\ -\mathrm{tg}\, x\cdot \cos y=\sqrt{5/2}, \end{cases}$$

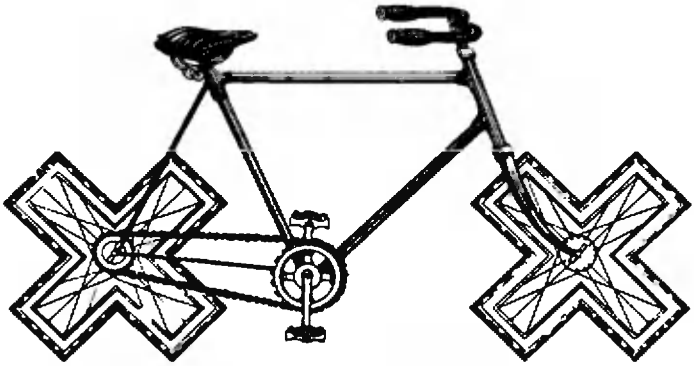
удовлетворяющие условиям $\pi/2<x<3\pi/2$, $0<y<\pi$.

„Квант" улыбается

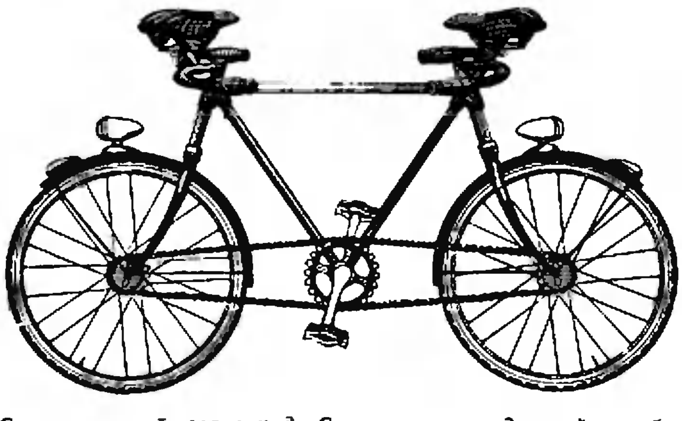
Велосипед придумали давно. Но жизнь предъявляет все новые требования. И нет предела человеческой изобретательности!



Велосипед-гармошка. Руль заменен баяном, что позволяет музыкантам совершенствовать свое искусство на ходу.



Велосипед для езды по ступенькам лестницы.



Симметричный велосипед. Специально созданный, чтобы одинаково двигаться в обоих направлениях.

Из «Каталога несуществующих объектов»

Ответы, указания, решения

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. 9/5. 2. $a\in(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$.

3. 512/3. **Указание.** Пусть $AD=a$. Так как BD — биссектриса угла B, треугольник ABD равнобедренный ($AB=AD$, рис. 1). Из подобия $\triangle BOC \backsim \triangle AOD$ следует, что $BC=\dfrac{3}{13}a$. Из прямоугольного треугольника ABH находим a.

4. $\{-1/3;\ -2/3;\ -5/4;\ -4/3\}$. **Указание.** Заменой $y=\cos 2x$ уравнение приводится к виду $y(4y^2-4y-3)=0$. Выбираем корни этого уравнения, содержащиеся во множестве решений неравенства $(-11/8;\ -7/8)\cup(-3/4;\ -1/4)$.

5. $\arccos 35/37+12/37-2/27$. **Решение.** Рассмотрим сечение SMN пирамиды плоскостью, перпендикулярной основаниям AD и BC трапеции $ABCD$ (рис. 2). Так как $MN=3$ и $OM/ON=2$, $OM=2$, $ON=1$. Из треугольников MSO и MSN получаем $\angle MSO=\arccos 2/3$, $\angle MSN=\arccos 1/\sqrt{21}$. Из точки F проведем прямую FL, перпендикулярную SM. $FL=SF\sin\angle MSO=1/3$, $FK=1$. Из прямоугольного треугольника FPO находим радиус цилиндра $PO=1$. Так как $PO=FK$, цилиндр имеет единственную общую точку K с гранью SBC. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, содержащей верхнее основание цилиндра (рис. 3), — это трапеция $K_1L_1L_2K_2$ с основаниями K_1K_2, лежащем в плоскости SAD, и L_1L_2, лежащем в плоскости SAD. Так как $\triangle SAD\backsim\triangle SL_2L_1$ и $\triangle SBC\backsim\triangle SK_2K_1$, получаем $L_1L_2=2/9$, $K_1K_2=2/3$ и $\angle L_1K_1K_2=\operatorname{arctg}6$. Отсюда следует, что прямые K_1L_1 и K_2L_2 пересекаются в точке Q, лежащей на окружности. Осталось найти площадь фигуры $L_1L_2N_2KN_1$, для чего следует найти площадь сектора FN_1K и площади треугольников N_1QF и QL_1L_2.

Вариант 2

1. $x=-\pi/3+2\pi k\ (k\in Z)$.

2. $\angle B=\arccos\sqrt{2/3}$. **Указание.** Пусть $\angle B=\varphi$, $BL=c$, $CL=a$, тогда

$$\begin{cases} a^2=c^2+3c^2\cos^2\varphi\\ 2a^2=4c^2-3c^2\cos^2\varphi,\end{cases}$$

откуда $\cos\varphi=\sqrt{3}/2$.

3. $3/2\sqrt{5}$. **Указание.** Касательная $y=2x-1$ пересекает ось Ox в точке $C(1/2;\ 0)$. Опустив из точки O перпендикуляр OK на хорду AB, находим его длину из треугольника OKC, а затем из треугольника OKB — радиус окружности.

4. 1) $a\leqslant 11/10$; 2) $a\leqslant\dfrac{3}{2}$, $a\geqslant 15/2$. **Указание.** 2) Если неравенство $D(y,a)=(9-12a)y^2+(6+4a)y-4\geqslant 0$ (*) имеет решения, то требуемая пара (x,y) существует. При $a=3/4$ неравенство становится линейным. Для того чтобы неравенство (*) имело решения, необходимо и достаточно, чтобы либо $(2a+3)^2+4(9-12a)\geqslant 0$, либо $a<3/4$ и $(2a+3)^2+4(9-12a)<0$.

5. $\dfrac{45}{1024}\sqrt{3}m^3$. **Решение.** Пусть SO — высота пирамиды $SABC$, K — центр сферы, K_1 — проекция этой точки на плоскость ABC. Примем прямые BO и SO за координатные оси y и z соответственно, а прямую, перпендикулярную плоскости SOB,— за ось x. Оси x и y изображены на рисунке 4. Положим $AB=a$, $SO=h$, тогда, проводя необходимые вычисления, получим $A\left(-\dfrac{a}{2};\ \dfrac{-a\sqrt{3}}{6};\ 0\right)$, $P\left(\dfrac{a}{8};\ \dfrac{a\sqrt{3}}{24};\ \dfrac{h}{2}\right)$, $M\left(-\dfrac{a}{7};\ a\dfrac{4\sqrt{3}}{21};\ 0\right)$.

По условию сфера проходит через точки A и C, поэтому ее центр K лежит в координатной плоскости yz. Так как K лежит на прямой MP, то $\overrightarrow{MK}=\lambda\overrightarrow{MP}$ при некотором λ. λ находим из условия принадлежности конца вектора $\overrightarrow{OM}+\lambda\overrightarrow{MP}$ плоскости yz. Получаем $\lambda=\dfrac{8}{15}$ и $K(0;\ a\sqrt{3}/9;\ 4/15h)$. Найдем связь между a и m. Сечение сферы плоскостью ABC — окружность, радиус которой определяем по формуле расстояния: $AK_1=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{13}{3}}a$ (см. рис. 4). В треугольнике AQC имеем $AQ=2AK_1\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}a$, и, применяя теорему косинусов, получаем уравнение $m^2+a^2-ma=\left(\dfrac{\sqrt{13}}{3}a\right)^2$, откуда $a=\dfrac{3}{4}m$. Высоту пирамиды h находим из уравнения $AK=\dfrac{m}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $h=$

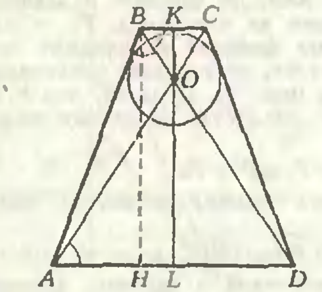


Рис. 1.

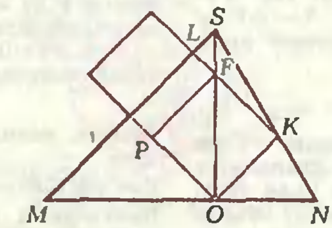


Рис. 2.

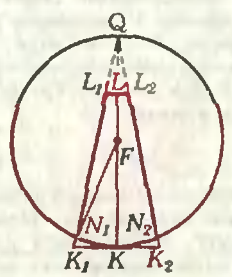


Рис. 3.

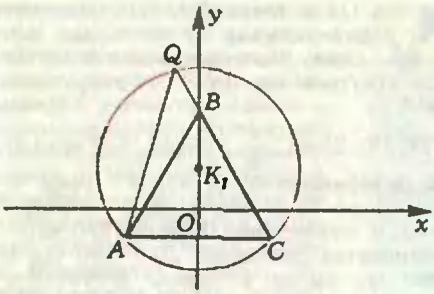


Рис. 4.

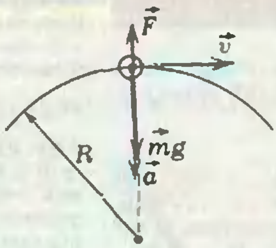


Рис. 5.

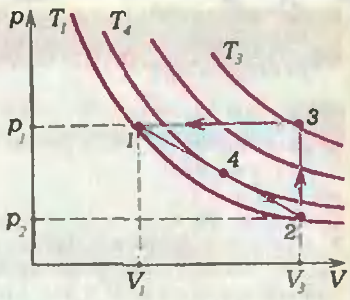


Рис. 6.

$=\frac{5}{4}a$, и объем пирамиды равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\times$ $\times\frac{5}{4}a=\frac{45}{1024}\sqrt{3}m^3$.

Физика

Вариант 1

1. Арбуз движется по окружности радиусом R со скоростью v, равной скорости самолета, и имеет центростремительное ускорение $a=v^2/R$, направленное к центру окружности (рис. 5). На арбуз действуют сила тяжести mg и сила упругости со стороны пружинных весов $F=15mg/16$. Уравнение второго закона Ньютона, записанное в проекциях на радиальное направление, имеет вид $mg-F=ma$. Подставив в последнее равенство выражения для F и a, получаем после простых преобразований

$$v=\sqrt{gR}/4\approx 2\text{ км/с}.$$

2. Для нахождения участков цикла, где температура растет, проведем ряд изотерм (рис. 6). Теперь наглядно видно, что температура растет на участке $2-3$ и на участке $1-4$ — части процесса $1-2$. Причем температура T_4 является максимальной для процесса $1-2$. Пусть T_3 — температура газа в точке 3, а p_1 и p_2 — давления в точках 1 и 2. Выразим T_3 и p_2 через T_1 и p_1. Для точек 3 и 1 $V_3/T_3=V_1/T_1$, откуда $T_3=T_1V_3/V_1$. По условию $V_3/V_1=5/2$, поэтому $T_3=5T_1/2$. Для точек 2 и 1 $p_2V_3=p_1V_1$, таким образом, $p_2=p_1V_1/V_3=2p_1/5$. Используя первый закон термодинамики для участка $2-3$, найдем количество теплоты, подведенное к газу на этом участке:

$$Q_{23}=\frac{3}{2}R(T_3-T_1)=\frac{9}{4}RT_1.$$

Для определения температуры T_4, давления p_4 и объема V_4 запишем уравнение прямой для процесса $1-2$ в виде $p=AV+B$, где $A=(p_1-p_2)/(V_1-V_3)=-2p_1/(5V_1)$, $B=(p_2V_1-p_1V_3)/(V_1-V_3)=7p_1/5$. Итак, искомое уравнение прямой

$$p=-\frac{2}{5}p_1\frac{V}{V_1}+\frac{7}{5}p_1.$$

Исключая из этого уравнения давление p с помощью уравнения Менделеева—Клапейрона $pV=RT$, записанного *для одного моля газа*, получаем зависимость температуры от объема в процессе $1-2$:

$$T=-\frac{2}{5}\frac{p_1}{V_1R}V^2+\frac{7}{5}\frac{p_1}{R}V.$$

Исследование на экстремум этой зависимости дает, что температура максимальна при $V=V_4=7V_1/4$ и равна $T=T_4=49T_1/40$. При этом $p_4=RT_4/V_4=7p_1/10$.

Согласно первому закону термодинамики подведенное к газу на участке $1-4$ количество теплоты $Q_{14}=\Delta U+A$, где ΔU — изменение внутренней энергии газа, а A — работа газа. Поскольку

$$\Delta U=\frac{3}{2}R(T_4-T_1)=\frac{27}{80}RT_1,$$

$$A=\frac{p_1+p_4}{2}(V_4-V_1)=\frac{51}{80}p_1V_1=\frac{51}{80}RT_1,$$

имеем

$$Q_{14}=\frac{27}{80}RT_1+\frac{51}{80}RT_1=\frac{39}{40}RT_1.$$

Окончательно суммарное количество теплоты, подведенное к газу на участках, где его температура растет, равно

$$Q=Q_{23}+Q_{14}=\frac{129}{40}RT_1\approx 8\text{ кДж}.$$

3. Пусть R — сопротивление одного вольтметра, r — внутреннее сопротивление источника. При замкнутом ключе ток через вольтметр V_1 равен $\mathcal{E}/(R+r)$, а напряжение на нем равно $\mathcal{E}R/(R+r)$. По условию задачи

$$\mathcal{E}R/(R+r)=0{,}8\mathcal{E}.$$

Отсюда $r=R/4$. При разомкнутом ключе показания вольтметров одинаковы и равны

$$U=\frac{\mathcal{E}}{2R+r}R=\frac{4}{9}\mathcal{E}.$$

4. Пусть $\vec{P}_1$ есть импульс фотонов, падающих в единицу времени на пластинку, $\vec{P}_2$ — импульс отраженных фотонов за единицу времени и $\vec{P}$ — импульс, полученный пластинкой за это же время (рис. 7). Понятно, что $P_1=W/c$, $P_2=0{,}4P_1=0{,}4W/c$. По закону сохранения импульса

$$\vec{P}_1=\vec{P}_2+\vec{P}.$$

Отсюда, используя теорему косинусов, получаем

$$P=\sqrt{P_1^2+P_2^2-2P_1P_2\cos(180^\circ-2\alpha)}=\sqrt{1{,}56}W/c.$$

Полученный пластинкой в единицу времени импульс и есть сила F, действующая на пластинку:

$$F=\sqrt{1{,}56}\,W/c\approx 4{,}16\cdot 10^{-7}\ \text{Н}.$$

Вариант 2

1. Ясно, что центр масс неваляшки находится в некоторой точке C на ее оси симметрии (рис. 8). Пусть $OC=x$. На неваляшку на наклонной плоскости действуют сила тяжести $M\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}$. Так как неваляшка находится в равновесии, то сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через точку касания A с наклонной плоскостью, должна быть равна нулю; поэтому точки C и A находятся на одной вертикали. По теореме синусов для треугольника OCA

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin(180^\circ-\beta)},\ \text{откуда}\ x=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}R.$$

На горизонтальной поверхности стола при увеличении массы неваляшки на массу пластилина m игрушка потеряет устойчивость (завалится), если центр масс системы неваляшка — пластилин достигнет точки O, т. е. при условии

$$Mx=m(h-R).$$

Отсюда с учетом полученного выражения для x находим искомую массу пластилина

$$m=\frac{R}{h-R}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}M\approx 85\ \text{г}.$$

2. Сила, действующая на опору со стороны воды (в проекции на ось X, направленную вертикально вверх),

$$F=F_A-pS.$$

Здесь $F_A=\rho gV$ — архимедова (выталкивающая) сила, которая действовала бы на часть опоры ABC, если бы эта часть со всех сторон была окружена водой, p — давление в жидкости на глубине h, которое складывается из атмосферного давления $p_0\approx10^5$ Па и добавочного давления ρgh со стороны воды: $p=p_0+\rho gh$. Таким образом,

$$F=\rho g(V-hS)-p_0S\approx-9\cdot10^4\ \text{Н}.$$

Знак «минус» у проекции силы на ось X означает, что сила, действующая со стороны воды на опору, направлена вниз.

Заметим, что без учета атмосферного давления $F=\rho g(V-hS)\approx10^4$ Н и сила направлена вверх.

Неучет абитуриентами атмосферного давления при решении задачи не считался существенной ошибкой.

3. Магнитный поток Φ через кольцо меняется со временем t по гармоническому закону $\Phi=B_0S\cos(2\pi\nu t)$, где $S=L^2/\pi$ — площадь кольца. В кольце, имеющем сопротивление $R=L(\rho_1+\rho_2)/s$, возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}=-\Phi'=2\pi\nu B_0S\sin(2\pi\nu t)$ и ток $i=\mathcal{E}/R=2\nu B_0Ls\sin(2\pi\nu t)/(\rho_1+\rho_2)$. Действующее значение тока

$$I=\frac{\sqrt{2}\nu B_0Ls}{\rho_1+\rho_2},$$

следовательно, мощность тепловых потерь в кольце

$$P=I^2R=\frac{2\nu^2B_0^2L^3s}{\rho_1+\rho_2}.$$

4. Ход лучей показан на рисунке 9. Из рисунка $AC=H\,\mathrm{tg}\,\beta_1$. Так как $\sin\beta_1=\sin\alpha/n_1$, то $AC=H\sin\alpha/\sqrt{n_1^2-\sin^2\alpha}$. Аналогично $BC=H\sin\alpha/\sqrt{n_2^2-\sin^2\alpha}$, $KM=2AB=2(AC-BC)$, $x=KM\cos\alpha=2(AC-BC)\cos\alpha$. Подставив найденные ранее выражения для AC и BC, находим расстояние x между вышедшими из пластинки пучками:

$$x=2H\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2-\sin^2\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{n_2^2-\sin^2\alpha}}\right)=$$

$$=H\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{4n_1^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{4n_2^2-1}}\right).$$

Московский институт электронного машиностроения

Вариант 1

1. $\{a-2;\ 4-2a\}$ при $a\neq-1/2,\ 4/3,\ 1$; $\{5\}$ при $a=-1/2$; $\{-2/3\}$ при $a=4/3$; $\{-1\}$ при $a=1$. Указание. Уравнения приводятся к системе

$$\begin{cases}x^2-(2-a)x-2a^2+8a-8=0,\\ x\neq a,\\ x\neq 3a-1.\end{cases}$$

2. $x_1=\mathrm{arctg}\,2+\pi m$, $x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ $(m,n\in\mathbb{Z})$.

Указание. Уравнение равносильно системе $2\sin x-4\cos x=1-2\,\mathrm{ctg}\,x$, $1-2\,\mathrm{ctg}\,x\geqslant0$.

3. Верно: прямая A_1D перпендикулярна плоскости ABC_1.

4. а) Неравенства равносильны, если множества их решений совпадают.

б) Данные неравенства равносильны.

в) Неверно. Например, если $f(x)=x^2+1$, $g(x)=1$, а $h(x)=-1$.

5. $a=1$ и $a=-1$. Пусть $y=|x-1|$. Тогда $(y-a-1)(y^2-1+a)=0$, откуда $y=a+1$, $y\geqslant0$, либо $y^2=1-a$, $y\geqslant0$.

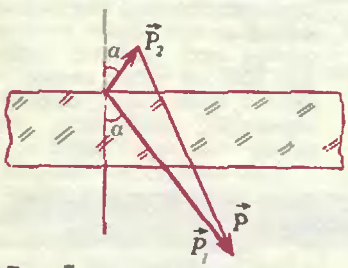


Рис. 7.

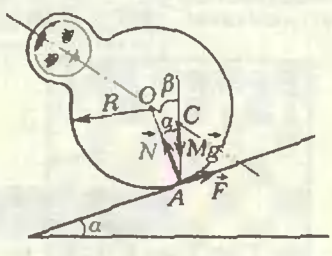


Рис. 8.

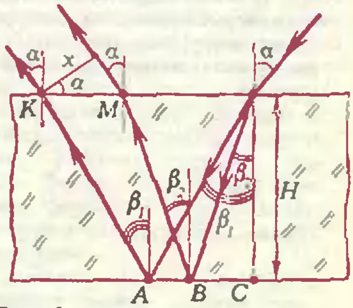


Рис. 9.

Первая система имеет решение при $a \geqslant -1$, вторая при $a \leqslant 1$. Если $a \neq \pm 1$, число решений данного уравнения либо 2, либо 4.

Вариант 2

1. $(a;\ a-1)$ при $a \neq 0$, $a \neq 1$.

2. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(2l+1)\ (k, l \in Z)$.

3. Верно. Пусть A — фиксированная, а B — произвольная точки на прямой l, M и N — проекции этих точек на плоскость α. Тогда $AM \parallel NB$, точки A, B, M, N лежат в одной плоскости и $AM = BN$.

5. $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$; $|a| < |b|$, $|a| < |c|$.

Указание. Из условия следует, что $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < -1$, $\left|\frac{c}{a}\right| = |x_1x_2| > 8$. Поскольку $c = f(0) < 0$, $\frac{c}{a} = x_1x_2 < 0$, получаем $a > 0$. Наконец, $-\frac{b}{a} < 0$ и потому $b > 0$.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

1. $s = m^2v^2/(2\mu gM^2) = 0{,}625$ м.
2. $A = gSh^2(\rho_в - \rho_л)^2/(2\rho_в) = 8$ Дж.
3. $h = \frac{p_0}{\rho g}\left(2\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = 8{,}5$ м.
4. $m = \frac{p_0VM}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = 1{,}5$ кг.
5. $m = (c_2m_2(t_2 - t_л) - c_1m_1(t - t_1))/r = 0{,}13$ кг.
6. $R = (U_2 - U_1)U_1/P = 24{,}2$ Ом.
7. $U_3 = 2U_1/3 = 4$ В.
8. $\eta = mgh/(UIt) = 0{,}5 = 50\ \%$.
9. $\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{n_c}{n_в}\sin\alpha_1\right) = 52^\circ$.
10. $\lambda = \frac{hc}{A + mv^2/2} = 3{,}9 \cdot 10^{-8}$ м.

Шахматная страничка
(см. «Квант», 1987, № 10)

Задание 19 (А. Гурвич, 1952 г.). **1. Крd5 Кd2 2. Крd4 К:b3+ 3. Крс3 Кс1! 4. Крd2! Кb3+ 5. Крс2 Ка1+ 6. Крс1!!** (6. Крb2? Сс4! 7. Кр:а1 Сb5 8. Крb2 Крf6 9. Крс3 Кре5 с позиционной ничьей, коня b8 как будто не существует) **6... Крf7 7. Крb2! Сс4 8. Кс6 Сd5 (b5) 9. Кd4!**, и белые выигрывают.

Задание 20 (Р. Рей, 1925 г.). **1. Лf4 Ке6** (1... Сd6 2. Лf6 Ке4 3. Ле6 Кс3+ 4. Крс4, и все кончено) **2. Лf6 Кd4+ 3. Крс4 Сg7 4. Лg6 Кf5 5. Лg5 Ке3+ 6. Крd3 Сh6 7. Лh5+.** Любопытное движение белых и черных фигур (оно называется систематическим) привело в конечном итоге к выигрышу слона благодаря геометрическим мотивам.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Л. Рябов,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. В. Дубах, С. В. Иванов, А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов,
В. М. Лукин, С. Ф. Лухин, Т. М. Макарова, А. С. Махов,
Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Корректор О. М. Березина

Сдано в набор 18.11.87. Подписано к печати 17.12.87.
Т 24293. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр от. 22,10. Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 6,82
Тираж 191 375 экз. Цена 40 коп. Заказ 3184

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

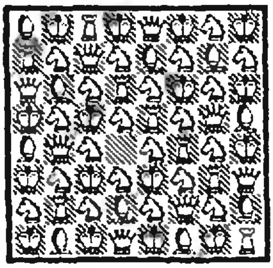
Шахматная страничка

НОВЫЕ РЕКОРДЫ

Напомним сначала несколько рекордов, относящихся к классике шахматной математики. На обычной доске можно расставить так, чтобы одноименные фигуры не угрожали друг другу, самое большее 8 ферзей, или 8 ладей, или 14 слонов, или 16 королей, или 32 коня. Эти рекорды являются абсолютными, то есть побить их невозможно. Однако возникает ряд интересных вопросов, связанных с компоновкой тех или иных рекордных позиций на одной диаграмме. Гроссмейстер занимательной математики Г. Дьюдени придумал позицию, которая объединяет сразу три рекорда: на доске одновременно умещаются 8 ферзей, 8 ладей и 14 слонов. Кроме того, на ней находятся также 21 конь и 8 королей (и те и другие не угрожают друг другу). Итак, мы имеем три рекорда (для ферзей, ладей и слонов), а всего на доске — 59 фигур. Это достижение держалось с прошлого века и считалось незыблемым. И лишь в 1986 году В. Попову из Донецка удалось улучшить его на одну фигуру (см. «Квант», 1986, № 6). В. Попову удалось разместить на одной доске 8 ферзей, 8 ладей, 14 слонов и 21 коня (пока все, как у Дьюдени), но королей стало на одного больше — 9, и общее число фигур — 60. Четыре не занятых поля находились на одной диагонали, что придало позиции своеобразную симметрию.

После этой публикации в редакцию поступило множество писем, в которых читатели предлагали свои позиции, увеличивая общее число фигур. Сразу скажем, что рекорд В. Попова побит не был, при 8 ферзях, 8 ладьях и 14 слонах (требование Дьюдени) количество остальных фигур увеличить не удалось (60).

Многие рекордсмены отказались от того, чтобы на одной диаграмме было сразу три рекорда, это позволило им увеличить общее число фигур до 61, 62 или даже 63. Но и с тремя рекордами (правда, для другого набора фигур) прислано немало позиций, содержащих 61 или 62 фигуры. Суперрекорд установил Бабамурат Курбанов из Таджикистана.



По-прежнему имеем 8 ферзей и 8 ладей, а третий рекорд установлен не для слонов, а для королей — 16. Коней столько же, сколько у Дьюдени и Попова — 21, и еще 10 слонов. Итого, на доске 63 фигуры!

Подводя итоги дискуссии о позиции Дьюдени, заметим, что здесь еще осталось много вопросов.

1. Можно ли увеличить общее число фигур (60) с сохранением трех рекордов для ферзей, ладей и слонов?

2. Можно ли увеличить количество рекордов, представленных на одной диаграмме (вместо трех — четыре или все пять)?

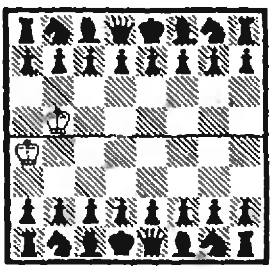
3. Можно ли заполнить фигурами всю доску (одноименные фигуры не должны угрожать друг другу)?

Ради заполнения всей доски можно пойти на уменьшение числа рекордов (вместо трех — два или один) или вообще отказаться от них.

Приведем еще два рекорда, установленные читателем журнала. Следующие две задачи были опубликованы в «Кванте», 1987, № 7.

а)

б)



Р. Таварнани, 1986 г.

а) За какое (наименьшее) число ходов белый король может попасть с b5 на d8?

б) Белый король переставлен с b5 на h5, и доска повернута на 180°. За какое наименьшее число ходов белый король может попасть с a4 на e1?

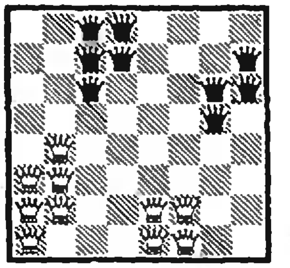
Автор привел «партии», состоящие соответственно из 8 и 12 ходов («Квант», 1987, № 7). Г. Копылов из Брянска укоротил их, первую на один ход, а вторую сразу на три!

а) 1. Крс4 е5 2. Крb3 с5 3. Кра4 Фg5 4. Кра5 а6 5. Крb6 Кре7 6. Крс7 Крf6 7. Крd8, и цель достигнута.

б) 1. Кра5 Ка3 2. Кра6 b1С 3. Крb6 Сb2 4. Крс5 Сh8 5. Крd5 Крс1 6. Кре4 Крb2 7. Кре3 Фс1 8. Кр:f2 d1С 9. Кре1, и вновь король на желанном поле.

В ряде стран проводятся международные конкурсы на составление шахматно-математических задач. Следующая «задача о 19 ферзях» была отмечена специальным призом на одном из них в 1980 году.

Расставить 10 белых и 9 черных ферзей так, чтобы ни один из них не находился под ударом ферзя противоположного цвета.



Автор позиции В. Франген считал, что это решение единственное (повороты и зеркальные отражения доски не в счет). Однако уже после подведения итогов конкурса он нашел принципиально иную расстановку. Снимем с доски белого ферзя e2 и вместо него добавим черного на h5. Теперь изменим цвет всех ферзей и в результате получим еще одну рекордную позицию.

Может быть, читателям удастся найти другие расстановки 19 ферзей?

Е. Я. Гик

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Вы заметили, что на глобусе, изображенном на 1-й с. обложки, Антарктида «переехала» поближе к Африке? А при желании мы могли бы отправить ее в Азию или в Америку ... Этот необычный глобус был изобретен не кем иным, как Эрне Рубиком, вслед за его знаменитым волшебным кубиком. Здесь предлагается перепутать 30 квадратных кусочков поверхности глобуса, передвигая их цепочками по 12 штук вдоль экватора и двух меридианов, а потом восстановить первоначальный порядок. В прошлом году почти все последние страницы обложек «Кванта» были отданы рассказам о перестановочных головоломках и принципах их решения. Чтобы не повторяться, мы сейчас остановимся только на некоторых отличительных особенностях глобуса Рубика.

Прежде всего заметим, что любая пара диаметрально противоположных квадратиков

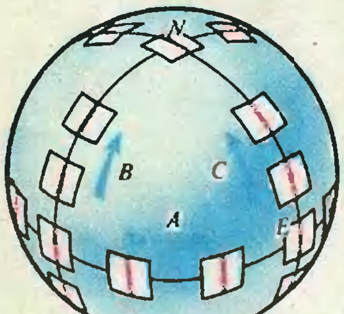


Рис. 1.

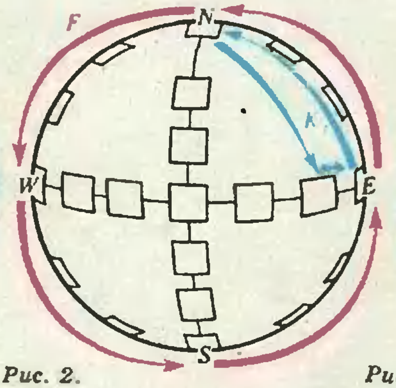


Рис. 2.

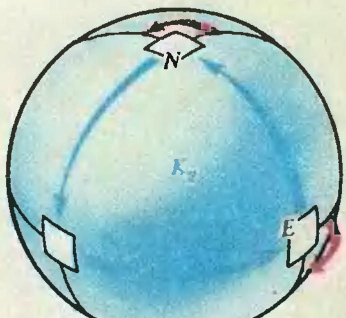


Рис. 3.

движется всегда согласованно: можно представлять их как основания жесткой четырехугольной призмы. Поэтому достаточно следить только за 15 квадратиками — по одному из каждой пары, например, за северным полушарием и половиной экватора (рис. 1). «Сборку» глобуса можно вести в таком порядке: северное полушарие без экватора и полюса N — экватор без пары E, W (рис. 2) — пара E, W — пара N, S. Первая трудность встретится при сборке экватора. Здесь работает показанная синими стрелками на рисунке 2 операция $K_1=AC^{-3}A^{-1}C^3$, где A — поворот экватора на 1 квадратик по стрелке (рис. 1), C^{-3} — поворот меридиана NE на 3 квадратика против часовой стрелки (рис. 1) и т. д. Но этой операции хватает только, чтобы загнать квадратики на свои места, при этом они могут оказаться повернутыми относительно правильного положения. Развернуть их так, как нужно, позволяет операция K_2K_3 (поворот E и S на 90°, N и W — на —90°; см. красные стрелки на рисунке 3), где $K_2=B^{-3}A^{-3}B^3A^3$, $K_3=C^{-3}A^3C^3A^{-3}$ (K_2 циклически переставляет три пары квадратиков по синим стрелкам — рис. 3, K_3 возвращает их обратно повернутыми иначе). Когда установлено все, кроме E, N, W и S, нужно с помощью операции $F=(K_1A)^5A^5$ (рис. 2) отправить на место квадратик E и повернуть его описанным выше способом. Остается пара N, S, для которой имеется, казалось бы, 8 разных положений: N может быть на северном или южном полюсе и на каждом из мест допустимы 4 поворота. В действительности возможны только 2 варианта: либо N и S стоят правильно, либо повернуты около оси NS на 180°, причем «плохой» вариант исправляется операцией $(K_2K_3R)^2$, где R — поворот всего глобуса на 180° вокруг оси NS. Поясним, почему N (и S) нельзя повернуть на 90° (то, что N не может оказаться на южном полюсе, доказывается с помощью понятия четности перестановки; см обложку «Кванта» № 11, 1987 г.)

Пусть глобус собран. Проведем на каждом квадратике черту вдоль меридиана (на полюсах — вдоль NE; рис. 1). Будем двигать квадратики и следить за числом пар, для которых нарисованная черта оказывается перпендикулярна меридиану (в частности, на полюсах — меридиану NE). Нетрудно доказать, что оно всегда будет четным. Но при повороте одной пары на 90° вокруг ее оси четность этого числа изменяется.

С точки зрения математики интересно не только придумать алгоритм «сборки» глобуса, но и описать все возможные расположения квадратиков. Попробуйте это сделать: докажите, что их число равно $2\cdot 8^{14}\cdot 15!$

В. Н.