ISSN 0130-2221

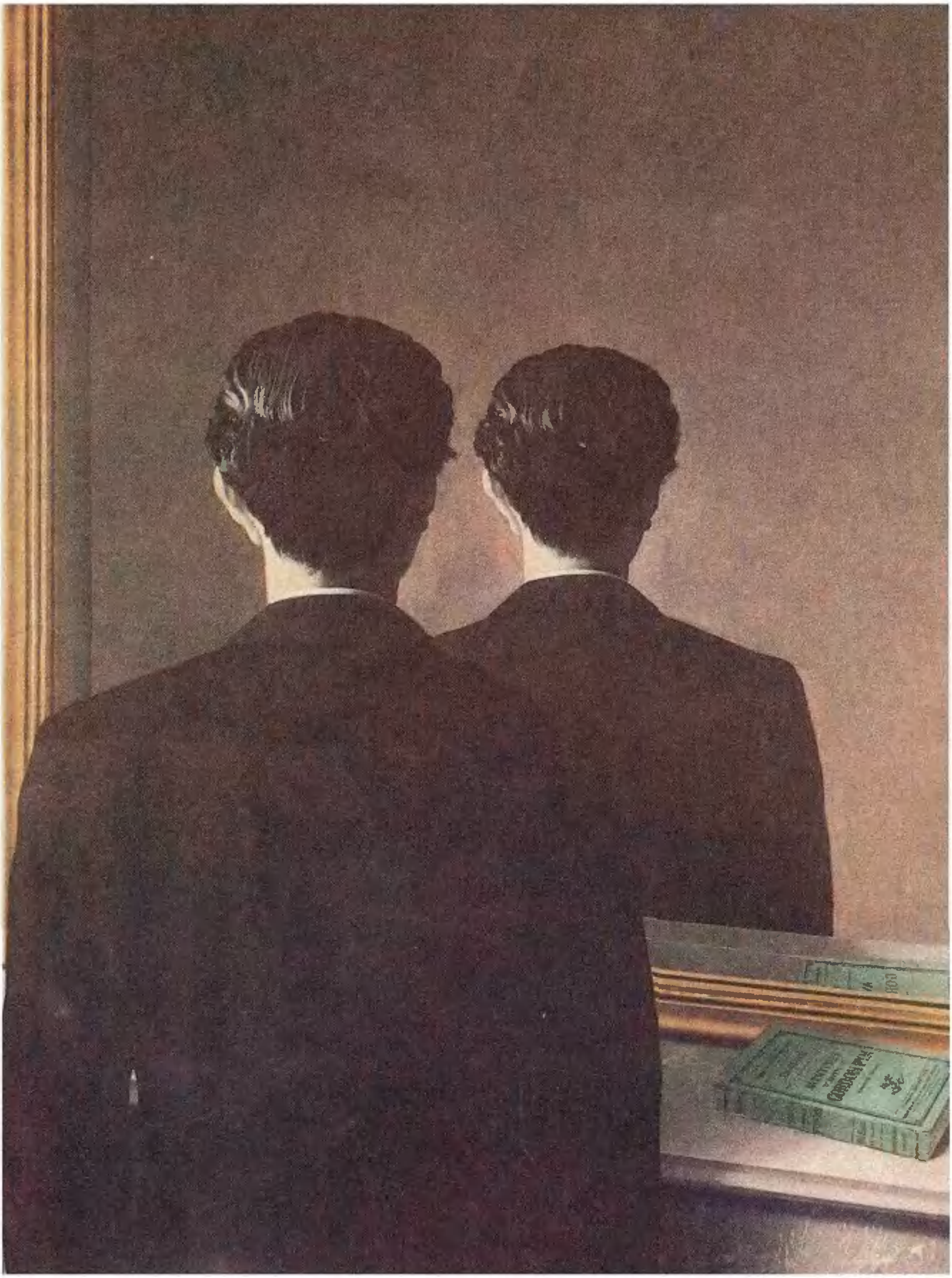
Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Наблюдение и фотосъемка быстропротекающих процессов

1988



Квант

Основан в 1970 году

1988

2

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

1 *На фотографии запечатлен один из моментов падения капли в воду. О том, как можно получить такую фотографию, рассказывается в рубрике «Лаборатория «Кванта».*

2 *«Запрещенное воспроизведение» — так назвал свою картину бельгийский художник Рене Магрит (1898—1967). С точки зрения геометрической оптики такое «воспроизведение» действительно запрещено. Зеркало и глаз «работают» по строгим законам отражения и преломления. А хорошо ли вы знакомы с этими понятиями? Проверить себя вам поможет «Калейдоскоп «Кванта».*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Головоломка «Кольца Рубика».*

Когда эта статья уже готовилась к публикации, не стало одного из ее авторов — умер выдающийся физик-теоретик, трижды Герой Социалистического Труда Яков Борисович Зельдович. Это был человек необыкновенного таланта и эрудиции, внесший огромный вклад в самые различные области физики. Многое делал он и для обучения молодежи, для популяризации научных знаний.

В издательстве «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» готовится к печати книга Я. Б. Зельдовича (в соавторстве с М. Ю. Хлоповым) «Драма идей в познании природы». Статья, которую мы предлагаем сегодня нашим читателям, появилась в результате работы авторов над этой книгой.

ПУТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ

Академик Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ,
доктор физико-математических наук
М. Ю. ХЛОПОВ

Электрический заряд

Еще в древности было известно, что если потереть кусок янтаря, он способен притягивать мелкие предметы. Этот забавный факт терялся в ряду многообразных явлений природы, интересовавших мыслителей древности... Позднее возник термин «электричество», а в XVIII веке было установлено, что существуют два вида наэлектризованных тел. Тела́ одного и того же типа взаимно отталкиваются, два тела разных типов — притягиваются.

Американский ученый Б. Франклин (1706—1790), занимавшийся исследованиями электричества, обратил внимание на показавшееся ему странным явление. Заряженный шарик, помещенный внутрь заряженного металлического куба, не испытывал никакого действия заряда куба. Своим недоумением по этому поводу Франклин поделился с Дж. Пристли (1733—1804), и тот высказал догадку, что, возможно, дело в том, что электрическая сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами — в полной аналогии с широко известным в ту пору законом всемирного тяготения Ньютона. Из этого закона, в частности, следовало, что гравитационная сила, действующая со стороны однородной сферы на тело, которое находится внутри нее, равна нулю.

Согласно закону Ньютона сила гравитационного взаимодействия двух тел оказывалась пропорциональной произведению их масс. В случае электрических тел электрическое воздействие было тем больше, чем больше заряжены тела. Естественно было ожидать, что электрическая сила определяется количеством электричества, содержащегося в электрически заряженных телах,— их электрическим зарядом. В 1785 году Ш. Кулону (1736—1806) удалось измерить силу электрического взаимодействия, которая оказалась обратно пропорциональной квадрату расстояния между зарядами. Зависимость силы от заряда Кулон фактически постулировал. Он предположил, что сила пропорциональна произведению зарядов тел. Для силы $F_э$ взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга, получался закон

$$F_э \sim \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

аналогичный закону всемирного тяготения Ньютона —

$$F_{гр} \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Такой закон позволял правильно количественно объяснить многие наблюдавшиеся электрические явления.

Электрический ток и магнитные явления

Электрический разряд — в буквальном смысле слова яркий пример электрического тока. Но в нашей обыденной жизни мы встречаем бурное грозовое электричество не так уже часто. Когда речь заходит об электрическом токе, нам скорее всего приходит на ум ток в проводах, приносящий свет электрических лампочек, голоса друзей в телефоне, мировые события в телевизоре. Однако в физику «тихий» ток проводов пришел значительно позже тока электрического разряда. Первые опыты по изучению тока проводились именно с разрядами. Изучая разряды молнии или лейденской банки — прообраза современного конденсатора,— Франклин и итальянский физик Дж. Беккариа (1716—1781) наблюдали магнитное действие электрического тока. Железные предметы, находившиеся рядом с проводниками, по которым проходил электрический разряд, намагничивались. Было ясно, что электрические и магнитные явления как-то связаны.

Аналогия в поведении полюсов магнитов и электрических зарядов была очевидной — одноименные полюса, как и одноименные заряды, отталкивались, разноименные — притягивались. Экспериментальные методы, развитые Кулоном, позволили ему измерить силу взаимодействия двух магнитов. Она оказалась обратно пропорциональной квадрату расстояния; как и в случае силы электростатического взаимодействия двух зарядов, Кулон постулировал, что магнитная сила пропорциональна произведению «магнитных зарядов» полюсов. Однако между электрическим зарядом и «магнитным зарядом» пóлюса магнита имелось одно отличие. При электризации тела мы получаем изолированный электрический заряд определенного знака. А в результате намагничивания нельзя получить изолированный магнитный полюс — обязательно получаются сразу два разноименных полюса. Намагниченное тело не может обладать изолированным «магнитным зарядом» определенного знака.

Но различия не очень смущали. Слишком сильна была традиция механики Ньютона. Казалось естественным, что между двумя малыми телами все силы, независимо от их природы, действуют единообразно — по прямой, соединяющей тела; и с расстоянием все силы убывают одинаково — обратно пропорционально квадрату расстояния между телами. Привлекало изящное единое описание всех дальнодействий — гравитационного, электрического, магнитного. Тогда различие сил проявлялось бы только в разных мерах их воздействия: гравитационная сила пропорциональна произведению масс тела, электрическая — электрических зарядов, магнитная — магнитных зарядов.

В начале XIX века благодаря изобретению А. Вольта (1745—1827) электрической батареи стало возможным изучать действие постоянного тока. Вместо кратковременных токов электрического разряда в лабораториях появился непрерывный электрический ток в проводах, соединяющих полюса батареи. Целых двадцать лет, имея в своем распоряжении непрерывный ток, физики искали магнитную силу тока. Силу, действующую по прямой между магнитом и током.

Бенджамин Франклин.

И не нашли. А в 1820 году появилась статья датского физика Х. Эрстеда (1777—1851). Всего несколько страниц латинского текста. Эрстед описывал отклонение магнитной иглы под действием постоянного тока прямого провода. Сила действовала не вдоль прямой, соединяющей провод и магнит. Магнитная сила тока оказалась не отталкивающей или притягивающей, а «поворачивающей».

Исследования Эрстеда продолжил и развил французский физик и математик А. М. Ампер (1775—1836). Он построил первую теорию электродинамики (термин Ампера), задуманную как продолжение дела Ньютона. Но ньютоновское описание действия на расстоянии уже дало первую трещину — нарушалось единообразие такого описания. Пройдет еще немного времени, и сама идея действия на расстоянии будет отвергнута в работах Фарадея и Максвелла.

Шарль Огюстен Кулон.

Электрические напряженность и потенциал

Закон Кулона определил силу взаимодействия зарядов. Но как осуществляется это взаимодействие? Можно было бы просто сказать, что два заряда действуют друг на друга на расстоянии по закону Кулона, и не вдаваться в размышления о том, какие невидимые нити соединяют заряды, какие невидимые пружины притягивают разноименные заряды и расталкивают одноименные. Так поступил в свое время Ньютон, изучая тяготение: «Причину этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю... Довольно того, что тяготение на самом деле существует и действует согласно изложенным нами законам и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря». Но чтобы упростить расчет силы взаимодействия неточечных заряженных тел, оказалось удобным, чисто формально, ввести некоторую характеристику окружающего заряд пространства — электрическую напряженность $\vec{E}$ — силу, с которой рассматриваемый заряд подействовал бы на пробный единичный заряд, помещенный в данную точку. Если же мы поместим в эту точку заряд q, то на него подействует сила $\vec{F}=q\vec{E}$. Напряженность электрического поля — вектор. Она, вообще говоря, меняется от точки к точке — и по абсолютной величине, и по направлению.

Мы можем приписать каждой точке пространства, окружающего данный источник электрической силы (точечный заряд, заряженное тело или систему заряженных тел), еще одну характеристику — электрический потенциал — потенциальную энергию взаимодействия пробного единичного заряда, помещенного в эту точку, с источником силы. При перемещении пробного единичного заряда из одной точки в другую электрическая сила совершает работу, по абсолютной величине равную разности электрических потенциалов двух точек. Если мы выберем значение потенциала в какой-то точке пространства за начало отсчета величины потенциала и (это наиболее естественно) положим значение потенциала в ней равным нулю, то, определяя работу электрической силы при перемещении единичного заряда из этой точки в любую другую точку, мы тем самым определим потенциал любой точки пространства.

В определении потенциала есть элемент произвола. Ведь мы не проводили расчет потенциала в начальной точке отсчета — мы просто положили его равным нулю. Если бы мы положили его равным не нулю, а какой-то величине φ_0, то и потенциалы всех остальных точек пространства изменились бы на величину φ_0. Получается, что потенциал определяется неоднозначно — он определяется с точностью до выбора значения потенциала в точке начала отсчета, а это значение мы можем выбрать каким хотим — от него работа электрической силы не зависит.

В физике наряду с измеримыми величинами есть величины очень удобные, но прямо не измеримые. Эти величины можно менять (преобразовывать) так, что при этом физические следствия не меняются. Например, значения координат точки x, y, z зависят от выбора начала координат, от того, как ориентированы оси координат. А вот непосредственно измеряемое расстояние между двумя точками ни от выбора начала координат, ни от направления осей координат не зависит. Такой же удобной, но зависящей от выбора начала отсчета величиной является электрический потенциал.

Итак, есть две характеристики пространства, окружающего заряженное тело. Они говорят о том, что было бы, если бы мы помещали пробный единичный заряд в разные точки пространства. Одна — электрическая напряженность — говорит об электрических силах, которые действовали бы на этот заряд в различных точках пространства; другая — электрический потенциал — говорит о потенциальной энергии, которой обладал бы такой заряд в разных точках.

Обе характеристики связаны друг с другом. Математическое описание свойств электрической силы приводит к некоторому удобному приему — расчет электрической силы, действующей на данный заряд, упрощается, если предположить, что источник электрической силы не непосредственно действует на данный заряд на расстоянии, но каким-то образом преобразует окружающее его пространство. Оказывается удобным приписать действие данного заряда на другие заряды особому состоянию пространства, окружающего данный заряд,— его электрическому полю. Электрический потенциал является скалярной характеристикой этого поля. Электрическая напряженность — векторной характеристикой.

Как мы скоро убедимся, электрическое поле — это не просто удобный математический прием, а физическая реальность.

Здесь же заметим следующее. Казалось бы, электрический потенциал — более удобная величина. Значительно проще связать с каждой точкой одно число (электрический потенциал), чем задавать в каждой точке вектор электрической напряжен-

Ханс Кристиан Эрстед.

ности, то есть три числа (три проекции этого вектора). Но, во-первых, электрический потенциал определен неоднозначно — с точностью до постоянной. А во-вторых, существуют такие электрические поля, для которых можно определить электрическую напряженность, а электрический потенциал определить нельзя. Такие поля появляются в электродинамике — разделе физики, рассматривающем движущиеся заряды. Электростатическое поле — поле неподвижных зарядов — потенциально, можно ввести его электростатический потенциал. Казалось бы, если заряды движутся, то такой потенциал будет просто меняться со временем в соответствии со смещением зарядов. Но движущиеся заряды — это электрический ток, а электрический ток обладает и магнитным воздействием. А это, как мы увидим дальше, может приводить и к электрическому воздействию. И такое воздействие будет уже непотенциальным.

Андре Мари Ампер.

Электромагнитная индукция

Если электрический ток обладает магнитным действием, то не может ли магнит быть источником тока? Нельзя ли «превратить магнетизм в электричество»? Таким вопросом задался английский физик М. Фарадей (1791—1867), и поиски ответа привели его к открытию явления электромагнитной индукции — возникновения электрического тока в проводящем контуре при изменении магнитного потока через контур.

Изучая это явление в разных аспектах, Фарадей вводит понятие «магнитных кривых». «Под магнитными кривыми я понимаю линии магнитных сил, хотя и искаженные соседством полюсов; эти линии вырисовываются железными опилками; к ним касательно располагались бы магнитные стрелочки»,— так определил Фарадей «магнитные кривые». Сегодня мы называем их линиями магнитной индукции. В противоречие с традицией Фарадей придал физический смысл формальному понятию силового поля. То, что было принято рассматривать только как условную характеристику пространства, удобную для описания дальнодействия, Фарадей стал рассматривать как реальную физическую среду. «Фарадей своим мысленным взором видел линии сил, проходящие через все пространство, там, где математики видели центры сил, притягивающиеся на расстоянии. Фарадей видел среду там, где они не видели ничего, кроме расстояния. Фарадей искал источник явлений в реальных процессах, происходящих в среде»,— так спустя тридцать лет писал Дж. К. Максвелл (1831—1879) во введении к своему «Трактату об электричестве и магнетизме».

Но интуитивно ясные соображения Фарадея не могли убедить его современников. Одно дело — экспериментальные результаты, другое — их теоретическая интерпретация, даваемая Фарадеем. «Я заявляю, что с трудом могу себе представить, чтобы кто-нибудь, кто практически и количественно знает совпадение наблюдений и вычислений, основанных на законе действия на расстоянии, мог хотя бы мгновение колебаться в выборе между этим простым и точным действием, с одной стороны, и чем-то столь неясным и неопределенным, как линия сил, с другой стороны»,— так писал в 1855 году известный ученый Эри. Это мнение разделяло большинство физиков, стремившихся объяснить электромагнитные явления на основе законов действия на расстоянии.

Требовалось перевести качественные соображения Фарадея на математический язык, на язык уравнений. И это сделал великий шотландец Дж. К. Максвелл.

Электромагнитное поле

Итак, в середине XIX века выявились два противоположных подхода к описанию электромагнитных явлений. Встал вопрос о том, действуют ли магниты или заряженные тела непосредственно на расстоянии или существует некоторая среда, передающая воздействие одного магнита (или провода с током) на другой, одного электрически заряженного тела на другое.

«Когда мы наблюдаем, что одно тело действует на другое на расстоянии, то прежде чем принять, что это действие прямое и непосредственное, мы обыкновенно исследуем, нет ли между телами какой-нибудь материальной связи; и если находим, что тела соединены нитями, стержнями или каким-либо механизмом, способным дать нам отчет в наблюдаемых действиях одного тела на другое, мы предпочитаем скорее объяснить действия при помощи этих промежуточных звеньев, нежели допустить понятие о прямом действии на расстоянии.

Так, когда мы, дергая за проволочку, заставляем звонить колокольчик, то последовательные части проволоки сначала натягиваются, а затем приходят в движение, пока, наконец, звонок не зазвонит на расстоянии посредством процесса, в котором принимали участие все промежуточные частицы проволоки одна за другой. Мы можем заставить колокольчик звонить на расстоянии и иначе: например, нагнетая воздух в длинную трубку, на другом конце которой находится цилиндр с поршнем, движение которого передается звонку. Мы можем также пользоваться проволокой, но вместо того, чтобы дергать ее, можем соединить ее на одном конце с электрической батареей, а на другом — с электромагнитом, и таким образом заставим колокольчик звонить посредством электричества.

Здесь мы указали три различных способа приводить звонок в движение. Но во всех этих способах есть то общее, что между звонящим лицом и звонком находится непрерывная соединительная линия и что в каждой точке этой линии совершается некоторый физический процесс, посредством которого действие передается с одного конца линии на другой. Процесс передачи не мгновенный, а постепенный; так что после того, как на одном конце соединительной линии дан импульс, проходит некоторый промежуток времени, в течение которого этот импульс совершает свой путь, пока не

Майкл Фарадей.

Джеймс Клерк Максвелл.

достигнет другого конца»,— писал Максвелл в своей статье «О действиях на расстоянии». И далее отмечал: «Кому свойства воздуха не знакомы, тому передача силы посредством этой невидимой среды будет казаться столь же непонятной, как и всякий другой пример действия на расстоянии, и однако в этом случае мы можем объяснить весь процесс и определить скорость, с которой действие передается от одного участка среды до другого.

Почему же не можем мы допустить, что знакомый нам способ сообщения движения посредством толчка и тяги нашими руками является видом и наглядным примером всякого действия между телами, даже в тех случаях, когда мы не можем заметить между телами ничего такого, что видимо принимало бы участие в этом действии».

Работы Фарадея и Максвелла утверждали физическую реальность электромагнитного поля. Пространство, окружающее заряды, как бы оживало. Оно оказывалось в особом состоянии, обладало особыми свойствами. Открытие электромагнитной индукции позволило к этим свойствам подойти. Электрические и магнитные явления оказывались действительно взаимосвязаны. Но связь эта раскрывалась только в нестационарных процессах, через изменение со временем электрических и магнитных характеристик.

Покоящийся заряд окружает только электрическое поле. Движущийся заряд окружают и электрическое поле, и магнитное поле. Если электрический ток постоянный, постоянно и магнитное поле. Такое поле действует в свою очередь только на движущиеся заряды — на токи. Таким образом, поле постоянного тока осуществляет только магнитное действие токов. Иное дело, когда ток переменный. В этом случае магнитное поле тока тоже оказывается переменным. И закон электромагнитной индукции определяет электрическое действие такого поля — оно (поле) оказывается источником электрического поля, движущего заряды в проводе, вызывающего в этом проводе электрический ток.

Итак, электрическое поле может существовать и вне прямой связи с зарядами — его источником может быть переменное магнитное поле. Такое электрическое поле действует на заряды. Значит, его можно характеризовать силой, действующей на единичный пробный заряд, т. е. электрической напряженностью. И сила эта будет совершать работу над пробным электрическим зарядом, движущимся в таком электрическом поле. Но в отличие от случая электростатического поля — поля неподвижных зарядов,— в электрическом поле переменного магнитного поля работа электрической силы зависит от пути, по которому пробный заряд перемещается. В этом поле работа по замкнутому контуру не равна нулю. Поэтому с каждой точкой пространства нельзя связать величину электрического потенциала — работы по перемещению единичного пробного заряда из некоторой начальной точки в данную. Такая величина не имеет смысла —

(Окончание см. на с. 25)

О КОНСЕРВНОЙ БАНКЕ, ПРУЖИНЕ И ПРОКАТНОМ СТАНЕ

Доктор технических наук
Б. А. ПРУДКОВСКИЙ

Будем считать, что вам не раз приходилось вскрывать консервные банки. И время от времени вы задавались вопросом: неужели металлический лист, из которого сделана банка, нельзя изготовить потоньше? Тогда, например, из материала для одной консервной банки можно было бы сделать две или даже три. В чем же дело? Почему металлурги не экономят металл? Давайте попробуем разобраться.

Консервные банки делают из стального тонкого листа — жести. Жесть *получают холодной прокаткой*. Нужно сказать, что с наиболее раннего достоверного упоминания о применении прокатки для деформирования металла прошло более 500 лет. В 1486 году великий художник, архитектор, ученый и инженер Леонардо да Винчи изобразил прокатный стан для получения тонкой ленты из золота и серебра, идущей на украшения. Такой стан имел два гладких валка диаметром около 40 мм, которые вращали вручную. Сущность процесса прокатки с тех пор принципиально не изменилась (рисунок 1, *а*). В зазор между вращающимися в разные стороны валками затягивается металлическая полоса, толщина которой (h_0) больше величины этого зазора (S_0). Полоса под действием валков испытывает пластическую деформацию изменения формы и должна выходить из валков с толщиной, равной, казалось бы, величине зазора между ними (увеличиваясь при этом в длине и оставаясь той же ширины B). Однако фактически толщина прокатанной полосы (h_1) бывает всегда больше зазора между валками. Почему?

Деформация полосы происходит в *результате действия сил, приложенных* к ней со стороны валков. Каждый валок действует на полосу, и согласно третьему закону Ньютона полоса действует на валок с такой же по величине силой; ее называют силой сопротивления деформированию или просто сопротивлением деформированию. Под действием этой силы происходит упругая деформация валков и других деталей прокатного стана, первоначально установленный зазор между валками увеличивается, и на столько же увеличивается толщина прокатанной полосы. Другими словами, мы всегда получаем толщину по-

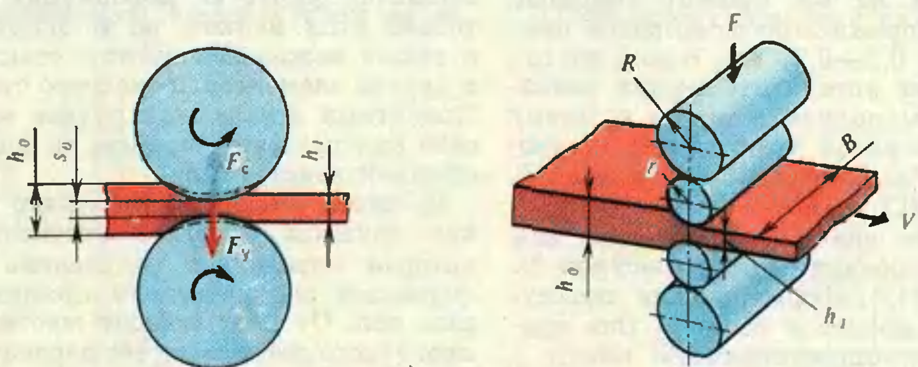
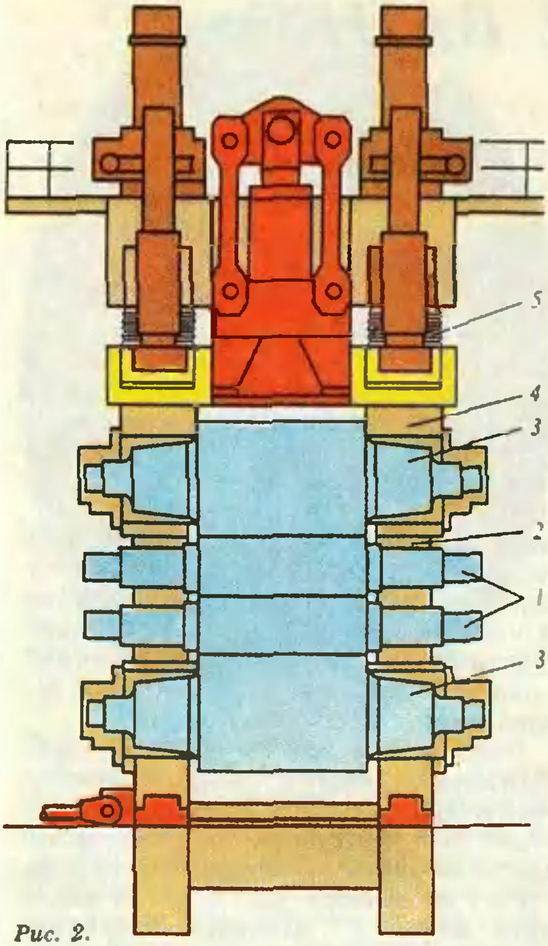


Рис. 1. *а)* *б)*



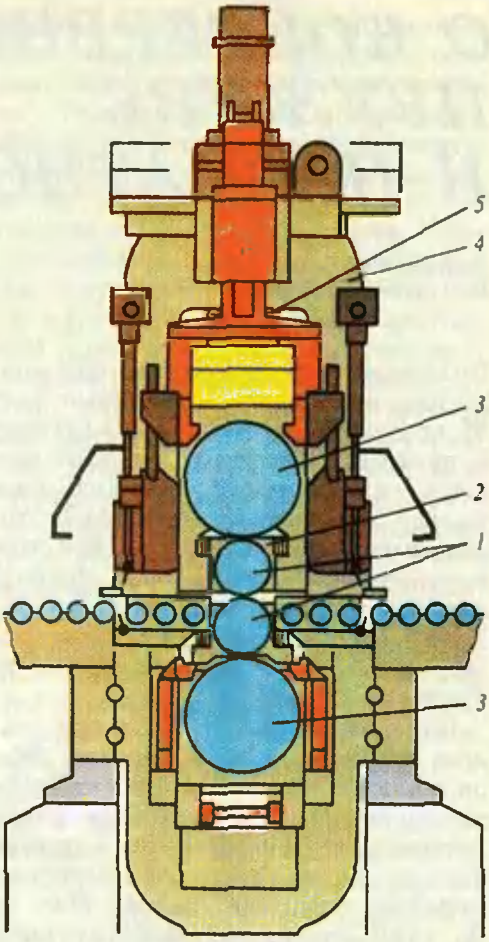


Рис. 2.

лосы несколько бо́льшую, чем зазор (S_0) между валками. Для уменьшения деформации рабочих валков применяют опорные валки (рисунок 1,*б*).

Ну хорошо, скажете вы, тогда надо сделать зазор между валками меньше требуемой толщины жести и получить нужную толщину. Логично! Хотя это лишь один из способов.

Но так ли все просто? Толщина жести «нормальной» консервной банки равна 0,2—0,25 мм. Какой же зазор нужно установить между валками, чтобы получить такую толщину листа? А какой зазор нужно установить, чтобы получить лист толщиной, скажем, 0,1 мм?

Давайте сначала посмотрим, как устроен прокатный стан (рисунок 2). Валки (*1*), деформирующие полосу, не могут висеть в воздухе. Они крепятся на подшипниках (*2*) вместе с опорными валками (*3*) в раме, называемой станиной прокатного стана (*4*). Требуемый зазор между валками при прокатке устанавливается с помощью винтов, которые называют нажимными винтами (*5*).

Сила сопротивления деформированию, действующая на рабочие валки со стороны прокатываемой полосы, вызывает упругую деформацию не только этих валков, но и опорных, а также нажимных винтов, станины и других элементов прокатного стана. Прокатный стан в этом случае ведет себя как пружина, правда, не совсем обычной конструкции.

Из курса физики известно, что всякая пружина обладает жесткостью, которая определяет ее степень деформации под действием приложенных сил. От чего зависит жесткость прокатного стана, если его рассматривать как пружину? Упрощенно можно сказать, что (как и жесткость пружины) она зависит от его конструкции. Например, стан с двумя валками обладает значительно меньшей жесткостью по сравнению со станом, имеющим четыре валка, два из которых являются опорными. Есть и более жесткие станы, с бо́льшим числом опорных валков.

Теперь ясно: чтобы определить величину зазора, необходимого для получения жести заданной толщины, нужно знать величину жесткости прокатного стана. Как же ее найти? Есть, конечно, расчетные методы, но для уже существующего стана ее проще измерить.

Установим нажимными винтами какой-либо зазор S_0 между рабочими валками. Теперь с помощью распорного устройства будем каждый раз увеличивать этот зазор на величину ΔS и измерять динамометром силу упругости стана. На рисунке 3 результаты нескольких таких измерений представлены в виде графика зависимости силы упругости F_y от величины зазора между рабочими валками. Эта зависимость изображается прямой линией, так как деформации деталей прокатного стана упругие и справедлив закон Гука.

Тангенс угла α характеризует жесткость стана. Чем больше $\operatorname{tg} \alpha$, тем больше жесткость. Конечно, в идеале угол α должен был бы стремиться к $\pi/2$, но... все тела деформируются.

Теперь посмотрим, что происходит в реальном процессе прокатки. Мы уже говорили, что согласно третьему закону Ньютона валки действуют на прокатываемую полосу с такой же по величине силой, с какой полоса действует на валки. Эту силу мы назвали сопротивлением деформированию. Но как найти ее величину? Очевидно, что для прокатного стана, обладающего определенной жесткостью, его упругая деформация будет зависеть от сопротивления деформированию прокатываемой полосы. Если на одном и том же стане прокатывать полосы из алюминия, меди и стали, то упругая деформация стана в каждом конкретном случае будет разной. При прокатке алюминия она будет меньше, при прокатке меди — больше, а при прокатке стали — еще больше. Почему? Вспомним диаграмму растяжения металлов. Для алюминия, меди и стали построены такие диаграммы. С их помощью можно рассчитать силу сопротивления деформированию для каждого конкретного металла или сплава. Таким образом, эта сила в основном зависит от механических свойств материала прокатываемой полосы.

Но при прокатке происходит в основном сжатие металла между валками, а не растяжение. Предположим, что мы сжали валками полосу толщиной h_0 и шириной B на величину Δh и зафиксировали силу F_c, которая нам для этого потребовалась. На рисунке 4 результаты нескольких таких опытов представлены в виде графика зависимости силы F_c от толщины полосы h. Эта зависимость уже не линейная, так как происходит пластическая деформация полосы. Сила F_c — это, с некоторыми допущениями, не что иное, как сопротивление деформированию полосы.

Давайте подумаем, как нам посту-

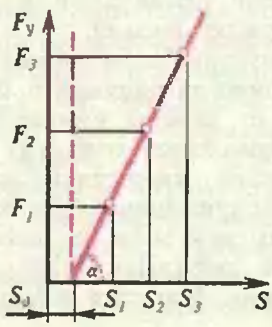


Рис. 3.

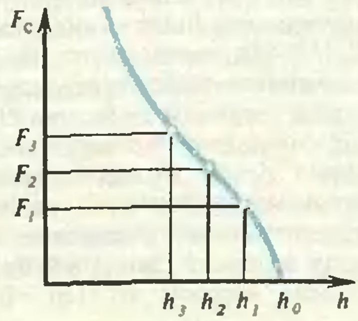


Рис. 4.

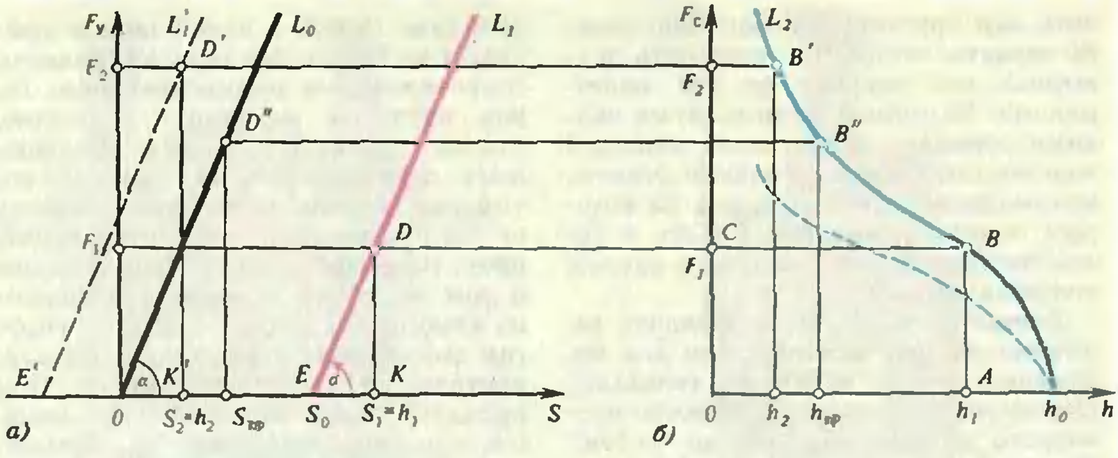


Рис. 5.

пить дальше. С одной стороны, на основании опытов, проведенных на прокатном стане без полосы, мы нашли жесткость стана. С другой стороны, на основании опытов по сжатию полосы в валках мы нашли величину ее сопротивления деформированию. Теперь мы можем ответить на поставленный ранее вопрос: какой зазор S_0 следует установить между валками, чтобы получить толщину полосы, равную h_1? Предположим, что мы хотим получить полосу толщиной h_1 на прокатном стане, жесткость которого определяется значением $\operatorname{tg}\alpha$ из рисунка 3. Для этого сначала мы должны найти по графику зависимости $F_c(h)$ силу сопротивления деформированию полосы, соответствующую ее прокатке от толщины h_0 до h_1. Далее необходимо эту силу приравнять силе упругости стана (согласно третьему закону Ньютона) и с учетом жесткости стана определить необходимую величину зазора S_0.

Рисунок 5 поясняет, как проводится эта операция. На рисунке даны совместно графики зависимости $F_y(S)$ и $F_c(h)$. Из точки A на рисунке 5, б восстановим перпендикуляр до пересечения с кривой L_2 (точка B). Из точки B проведем горизонталь до пересечения с перпендикуляром, восстановленным из точки K (рисунок 5, а), соответствующей величине S_1 зазора между валками, который будет равен толщине полосы h_1 ($S_1=h_1$). Через точку D пересечения горизонтали BD и вертикали KD проведем прямую L_1, параллельную L_0 и определяющую пружину прокатного стана с заданной жесткостью $\operatorname{tg}\alpha$. Тогда точка E пересечения прямой L_1 с осью S и дает нам необходимую величину S_0 зазора между валками, который следует установить перед прокаткой, чтобы получить заданную толщину полосы, равную h_1.

Предположим теперь, что нам надо получить полосу толщиной h_2 (см. рисунок 5, б). Проведя аналогичные рассуждения, мы окажемся в точке E', что соответствует отрицательному зазору между валками. Следовательно, такой процесс прокатки мы осуществить не сможем и данный прокатный стан позволяет в пределе получить минимально возможную толщину полосы, равную $h_{пр}$. Таким образом, для каждого прокатного стана есть своя предельная минимальная толщина полосы, зависящая в основном от свойств прокатываемого металла и размеров полосы. Полосу с толщиной меньше этой предельной на данном стане получить нельзя.

А если нужна более тонкая полоса? Посмотрите на рисунок 5. Увеличивая угол α, можно уменьшать предельно возможную толщину полосы. Значит, надо увеличить жесткость стана, в первую очередь — жесткость валков, так как доля их деформации в упругой деформации всего стана очень велика. Мы уже говорили, что этого можно добиться, используя опорные валки, число которых в реальных станах достигает восемнадцати (по девять на каждый рабочий валок).

Как вы догадываетесь, консервные банки отнюдь не основная продукция, которую изготовляют из стальной полосы. Например, для кинескопов цветных телевизоров нужна полоса из специальной стали толщиной 0,15 мм с допустимыми отклонениями от этой толщины ± 3 мкм. Конечно, технология получения такой полосы существенно отличается от технологии получения полосы для изготовления консервных банок. Более жесткими являются и прокатные станы.

При изготовлении конденсаторов и прокладок в магнитных головках для малогабаритной аппаратуры необходима фольга (тончайшая лента) из алюминия, тантала и бериллиевой бронзы толщиной 1—3 мкм. Как получить такую ленту? Надо отметить, что она, как правило, довольно узкая, 400—600 мм по ширине (в то время как полоса для консервных банок достигает 1,5 м в ширину). Конечно, для более узкой полосы сопротивление деформированию меньше, чем для широкой. Для прокатки такой узкой и тонкой ленты используют чрезвычайно жесткие двадцативалковые прокатные станы; прокатка производится в двух рабочих валках длиной 400—1200 мм, каждый из которых опирается на пирамиду из опорных валков. А вообще станы листовой прокатки определяются длиной валка (шириной полосы); так что когда говорят «стан 1700», то это означает, что длина рабочей части валков 1700 мм.

Есть еще один путь уменьшения предельно возможной толщины полосы. Он сводится к изменению формы кривой L_2 (см. рисунок 5, б), т. е. к уменьшению силы сопротивления деформированию. Этого можно достигать различными путями: изменением условий трения между валками и полосой с помощью смазок, натяжением полосы во время прокатки, уменьшением ее ширины и другими способами. Проводят определенную термическую обработку металла (отжиг), снижающую сопротивление деформированию, что, кстати, широко используется при производстве ленты для кинескопов. Однако все мероприятия, связанные с повышением жесткости стана и уменьшением сопротивления деформированию, как правило, связаны с дополнительными затратами. Так, полоса для кинескопов стоит значительно дороже полосы, идущей на изготовление консервных банок. Стоимость тончайших лент из некоторых металлов иногда в 20 раз больше стоимости золота той же массы. Вот и нужно думать: что выгоднее — прокатывать более толстую и более дешевую жесть или более тонкую и более дорогую. Очевидно, в каждом конкретном случае нужно исходить из реальных возможностей.

Не так давно на Карагандинском металлургическом комбинате пущен в эксплуатацию новый стан, позволяющий получать жесть толщиной 0,18 мм. Для консервных банок начинает использоваться тонкий лист из алюминиевых сплавов. Сопротивление деформированию при прокатке алюминия значительно ниже, чем при прокатке стали. Так что вопрос с консервными банками будет решен. Но дело, как мы уже говорили, не только в консервных банках, хотя без них иногда не обойтись. Дело в другом. Проблема деформаций инструмента при обработке металлов давлением является очень серьезной проблемой. В нашем случае инструментом были валки, и прокатка — один из процессов обработки металлов давлением. Таких процессов существует очень много, и они постепенно вытесняют обработку металлов резанием, так как более экономичны и малоотходны. Однако точность размеров изделий при обработке давлением, особенно в холодном состоянии, существенным образом зависит от жесткости инструмента и самих обрабатывающих агрегатов. Задача повышения жесткости еще далека от решения и ждет своего часа.

Математика и поэзия, физики и лирики... Нет, «Квант» не намерен раздувать тлеющее пламя этой полемики. Напротив, мы считаем, что глубокое эстетическое начало, заложенное в сущности математических наук, приближает их и к музыке, и к поэзии. Доказательство тому — публикуемые ниже две статьи. Их авторы — известные математики-исследователи — выступают в неожиданной для себя роли «исследователей поэзии». В первой статье рассказано, какие неожиданные прозрения возникают у поэтов, когда они в своем творчестве обращаются к научной тематике. А вторая демонстрирует своеобразие формально-математического подхода к теории стихосложения. В ней автор излагает строгие правила для определения размера русского стиха.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ В ПОЭЗИИ

Доктор физико-математических наук
М. И. БАШМАКОВ

Есть много свидетельств тому, как искусство вдохновляет человека науки. Более удивительно, что наука может быть источником художественного вдохновения. Перелистывая сборники стихов русских поэтов начала нашего века, я наткнулся на глубокие и, наверно, не всегда осознанные связи математических образов и поэтического мышления.

Для любого человека входом в математику является понятие числа. Магия чисел широко отражена в искусстве. Но вслушайтесь в следующие строки Николая Гумилева:

А для низкой жизни были числа,
Как домашний подъяремный скот,
Потому что все оттенки смысла
Умное число передаст.

Наступление на нашу жизнь цифровых устройств необычайно расширило оттенки смысла, передаваемые числами. Оказалось — считать легче, чем измерять, аналоговые устройства стали вытесняться цифровыми; так, вместо громоздких и деформирующихся грампластинок мы скоро будем слушать цифровые записи музыки на так называемых «компактных дисках».

Вот еще стихи о числах:

Вам поклоняюсь, вас желаю, числа!
Свободные, бесплотные, как тени,
Вы радугой связующей нависли
К раздумиям с вершины вдохновенья!
(Брюсов)

Я всматриваюсь в вас, о числа,
И вы мне видитесь одетыми в звери, в их шкурах,
Рукой опирающимися на вырванные дубы.
Вы дарует единство между змееобразным движением
Хребта вселенной и пляской коромысла,
Вы позволяете понимать века, как быстрого хохота зубы
Мои сейчас вещеобразно разверзлися зеницы
Узнать, что будет Я, когда делимое его — единица.
(Хлебников)

Но поэтические образы идут не только от чисел и цифр — поэты не чуждаются ни буквенных формул, ни интегралов. Вот два примера:

Я дух механики. Я вещества
Во тьме блюду слепые равновесья.
Я полюс сфер — небес и поднебесья,
Я гений числ. Я счетчик. Я глава.
Мне важны формулы, а не слова.
(Волошин)

Здесь что? Мысль роль мечты играла,
Металл ей дал пустой рельеф;
Смысл — там, где змеи интеграла
Меж цифр и букв, меж d и f!
(Брюсов)

Марина Цветаева, гуляя с дочерью, нашла «счастливый» листок клевера из четырех лепестков. Позже родились стихи.

Мы спим — и вот, сквозь каменные плиты,
Небесный гость в четыре лепестка.
О мир, пойми! Певцом — во сне — открыты
Закон звезды и формула цветка.

Мне не известно, знала ли Цветаева законы Менделя, позволяющие определить частоту появления различных форм цветка, знала ли она явление филлотаксиса, дающее математическое описание расположения листьев и лепестков, и можно только гадать, какие законы звезд были знакомы ей — может быть, формула Тициуса—Боде для радиусов орбит планет Солнечной системы? И если не во сне, то как Вольтер смог предугадать открытие двух спутников Марса («Микромегас»), а Андрей Белый — атомную бомбу («Первое свидание»)?

Осип Мандельштам написал загадочное восьмистишье:

И я выхожу из пространства
В запущенный сад величин,
И мнимое рву постоянство
И самосогласье причин.
И твой, бесконечность, учебник
Читаю один без людей —
Безлиственный, дикий лечебник,—
Задачник огромных корней.

Не знал же он современную физику, для которой «запущенные векторные поля» с трудом раскручиваются с помощью «бесконечномерных линейных пространств» и которой так тяжело рвать причинно-следственные связи!

Иначе обстоит дело с Велимиром Хлебниковым — он получил математическое образование, из которого мог бы почерпнуть сведения о пространствах дробных размерностей, изложенные в этих строчках:

О дробных степенях пространства
Кто думал по ночам —
Его, как свое убранство,
Я подаю очам.

Только в математической литературе пространства дробных размерностей (так называемые *фрактали*) появились совсем недавно, через полстолетия после написания этого стихотворения.

Валерию Брюсову давно был тесен наш трехмерный мир:

Высь, ширь, глубь. Лишь три координаты.
Мимо них, где путь? Засов закрыт.
С Пифагором слушай сфер сонаты,
Атомам дли счет, как Демокрит.

Но живут, живут в N измереньях
Вихри воль, циклоны мыслей, те,
Кем смешны мы с нашим детским зреньем,
С нашим шагом по одной черте.

Сколько измерений потребует единая теория поля? По одной гипотезе $N=26$, а может быть, и этого мало. Поистине, как сказал Ф. И. Тютчев,

Нам не дано предугадать,
Как слово наше отзовется.

О СТИХОТВОРНЫХ РАЗМЕРАХ

Доктор физико-математических наук
Д. Б. ФУКС

Общеизвестно, что большинство русских стихов подчиняется силлаботоническому строю. Грубо говоря, это означает, что в каждой строке стихотворения между соседними ударными слогами располагается одно и то же (фиксированное для данного стихотворения) число безударных слогов и первое ударение приходится на один и тот же по порядку слог. Например, в стихах, написанных наиболее распространенным в русской поэзии размером — ямбом — все четные слоги каждой строки должны быть ударны, а нечетные — безударны:

Люблю́ тебя́, Петра́ творе́нье...

Легко заметить, однако, что сформулированное правило нуждается в уточнениях. Попробуем, например, с его помощью

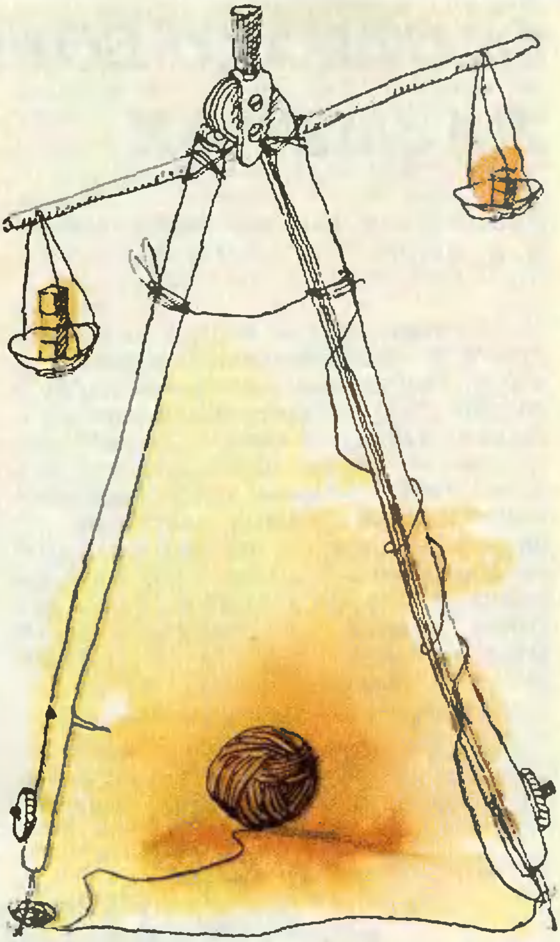
расставить ударения в эталонных строках русского ямба:

Мой дя́дя са́мых че́стных пра́вил,
Когда́ не в шу́тку за́немо́г...

Мы наблюдаем сбои в обе стороны: слова *мой* и *не* вовсе не получили ударений, а в слове *занемог* их оказалось два. Если мы продвинемся в чтении «Евгения Онегина» (или «Медного всадника») дальше, то мы увидим, что эти отклонения от правила все же не вполне произвольны. Имеется, в действительности, только одно ограничение. Чтобы его сформулировать, занумеруем в каждой строке слоги по порядку. Тогда если один или более слогов некоторого слова получат четные номера, то среди этих слогов должен присутствовать ударный слог этого слова. Высказывание «стихотворение написано ямбом» в точности означает, что выполнено это условие. Убедитесь в качестве упражнения, что «Евгений Онегин» написан ямбом, а «Василий Теркин» — нет. (Усердный читатель, который продвинется в исследовании «Евгения Онегина» достаточно далеко, возможно, будет обескуражен его 26-й строкой. Он найдет разъяснение в следующем пункте, правда, написанное мелким шрифтом.)

Определение размера. Мы постулируем, что рассматриваемый текст (стихи) разбит на *строки*, строки разбиты на *слова*, состоящие из слогов (слова типа «в» или «к» мы игнорируем). Слоги в каждой строке занумерованы подряд, начиная с первого. Один из слогов каждого слова является *ударным* (это тот слог, на который падает ударение при обычном чтении слова).

Как нередко случается с аксиомами, это утверждение лишь приближенно отражает действительность. Во-первых, бывают слова с двумя (и более?) ударениями: *самогоноварение*, *двоякопериодический* и т. п. Однако, это — длинные, неуклюжие слова, которые редко встречаются в стихах. Во-вторых, в некоторых словах, таких как *или*, *через*, *перед* и т. п., ударение может переместиться на другой слог. Это часто происходит в стихах, примером может служить упоминавшаяся 26-я строка из «Евгения Онегина» — *Или блистали, мой читатель*; вспомните еще *Через леса, через моря колдун несет богатыря*. Такой перенос ударения возможен и в разговорной речи — скажите: «Течет река, через нее переброшен мост», и вы услышите, что в слове *через* ударение падает на второй слог. В-третьих, наконец, некоторые группы слов, например, «на́ дом» в фразе «Задание на дом» образуют так называемые ритмические группы, которые следует приравнивать к словам. Подробности см. в статье А. Н. Колмогорова и А. В. Прохорова «Модель ритмического строя русской речи, приспособленная к изучению метрики классического русского стиха» в сборнике «Русское стихосложение» (М.: Наука, 1985). Мы игнорируем здесь все эти аномалии, вводя следующее золотое правило: все формулируемые ниже правила имеют исключения, нужно только чтобы число этих исключений было мало.



Зафиксируем два натуральных числа n и $k \leqslant n$ и отметим в каждой строке слоги с номерами k, $k+n$, $k+2n$, ...; эти слоги по определению считаются *сильными слогами* (n, k)-*размера*. Говорят, что *строка подчиняется* (n, k)-*размеру*, если выполнено следующее условие*):

Если некоторое слово содержит хотя бы один сильный слог (n, k)-размера, то и его ударный слог является сильным слогом (n, k)-размера. Другими словами: если ударный слог некоторого слова не является сильным, то это слово вообще не содержит сильных слогов.

* Это условие стиховеды часто называют *правилом запрета переакцентуации*. Оно впервые было четко высказано известным лингвистом Р. Якобсоном в двадцатых годах, а затем изучено и развито в стиховедческих работах А. Н. Колмогорова и его учеников (см., например, цитированную выше статью).

Например, обсуждавшийся выше ямб — это (2,2)-размер.

Стихотворение подчиняется (n, k)*-размеру*, если каждая его строка подчиняется (n, k)-размеру. При чтении стихотворения сильные слоги выделяются более или менее отчетливыми ударениями. Но еще раз подчеркнем: не следует путать, и тем более отождествлять, сильные и ударные слоги. Сильный слог не обязан быть ударным (первый слог слова *занемог* из второй строки «Евгения Онегина»), а ударный — сильным (слово *не* в той же строке). Помещенное в рамку правило как раз и указывает, когда сильный слог обязан быть ударным, т. е. когда на слог с определенным номером в строке действительно падает ударение при правильном чтении.

Подробнее (n, k)-размер называется *n-сложным размером с k-й сильной долей.*

Упражнение 1. а) Докажите, что если в строке, подчиненной (n, k)-размеру, сильный слог принадлежит слову, содержащему не больше n слогов, то этот слог является ударным. б) Если в строке отсутствуют слова, содержащие больше n слогов, то условие подчиненности этой строки (n, k)-размеру равносильно тому, что все сильные слоги — ударны.

Заметим, что наша терминология не вполне согласуется с принятой в стиховедении. В частности, то, что мы называем размером, чаще называют *метром*, а размер включает в себя еще и число сильных слогов в строке, или, как говорят, число *стоп*. Например, ямб — это метр, а пятистопный ямб — это размер.

Классические размеры. *Классическими размерами* русской поэзии по определению считаются двухсложные и трехсложные размеры. Таким образом, классических размеров пять. Вот их названия:

Размер	Название	Перевод названия (с греческого)
(2,1)	Хорей	Плясовой
(2,2)	Ямб	?
(3,1)	Дактиль	Палец *)
(3,2)	Амфибрахий	Двоякократкий**)
(3,3)	Анапест	Обратный ***)

Примеры трех из пяти классических размеров мы находим в хрестоматийных стихах Пушкина:

Ямб:

Я помню чудное мгновенье...

Еще одно последнее сказанье...
Унылая пора, очей очарованье...

*) Палец имеет три фаланги: первая длинная, две другие короткие.

**) Сильную долю окружают две слабые («краткие») доли.

***) Обратный дактилю.

Хорей:

Буря мглою небо кроет...
Царь с царицею простился...
Долго ль мне гулять на свете...

Амфибрахий:

Сижу за решеткой в темнице сырой...
Кавказ подо мною. Один в вышине...
Как ныне сбирается вещий Олег...

С дактилем нам поможет Лермонтов:

Тучки небесные, вечные странники...

А у Некрасова мы с легкостью находим образцы всех трехсложных размеров:

Дактиль:

В мире есть царь, этот царь беспощаден...
Дня не проводит Мазай без охоты...

Амфибрахий:

Савраска увяз в половине сугроба...
Есть женщины в русских селеньях...

Анапест:

Выдь на Волгу, чей стон раздается...
Что ты жадно глядишь на дорогу...

Какой размер лучше? Если Вы спросите у приятеля: «Ты подписался на журнал «Квант»?» (кстати, сделать это можно и теперь), то, скорее всего, вы сделаете ударения на словах «подписался» и «Квант», оставив безударными слова «ты», «на» и «журнал». Итого, 2 ударения на 9 слогов. Я думаю, это — норма для разговорной речи: одно ударение на 4—5 слогов. Если вы отвечаете урок или читаете речь по бумажке, ударений будет больше (это явление описывается словом «бубнить»). Когда вы читаете «с выражением» стихи, ударений будет еще больше: *примерно треть всех слогов будут ударными.* Это обстоятельство побудило некоторых критиков второй половины прошлого века сделать вывод, что наиболее подходящими для русского стихосложения размерами являются трехсложные размеры.

Действительно, трехсложные размеры занимают значительное место в творчестве поэтов указанного времени, прежде всего, Некрасова и его окружения. Но верно и другое. Пушкин почти не пользовался трехсложными размерами: 80 % его стихов написаны ямбом, 15 % — хореем, а трехсложными размерами — совсем немного, причем это по большей части пародии, эпиграммы и т. п. (Справедливости ради нужно сказать, что среди немногих стихов Пушкина, написанных трехсложным размером, есть весьма известные; кроме упомянутых выше можно назвать *Раздайтесь, вакхальны напевы...*, *Смотрю, как безумный, на черную шаль...* и некоторые другие. Кстати, среди трехсложных размеров Пушкин явное предпочтение отдавал амфибрахию; чем объяснить это, я не знаю.) Двухсложными размерами написаны многие стихи Лермонтова и почти все стихи Тютчева. Предпочтение двухсложным размерам (а среди них — ямбу) отдавали такие современные Некрасову поэты как Фет и Майков, не говоря уже о более поздних поэтах.

Попробуем разобраться, в чем причина этого.

Двухсложный размер против трехсложного. Если мы прочтем стихотворение, написанное ямбом или хореем, и сделаем ударения на всех сильных слогах, то получится считалка, например:

Вы́шел ме́сяц и́з тума́на,
Вы́нул но́жик и́з карма́на...

Чтобы привести количество ударений к норме, относительно которой мы выше согласились (одно ударение на 3 слога), мы должны пропустить — или приглушить — ударения на части сильных слогов. Это придает двухсложным стихам много замечательных качеств. Первое из них — разнообразие. В зависимости от того, какие именно сильные слоги выделяются ударениями, стихотворная строка может звучать совершенно по-разному. Сравиите, например:

Под насыпью, во рву некошенном...
(Блок)

Тебе ль меня придется хоронить...
(Шекспир в переводе Маршака)

Трудно поверить, что размеры этих строк одинаковы, но это так! Более того, одно и то же стихотворение, написанное ямбом или хореем, может звучать в ритмическом отношении совершенно по-разному у разных исполнителей. Второе качество — близость к разговорной речи. Возможность не барабанить с одинаковой силой все сильные слоги позволяет приглушить ритм стиха, тем самым приблизив его к прозе самого высокого качества. Лично я не могу себе представить, как «роман в стихах» мог бы быть написан трехсложным размером. Наконец, третье — выделение части сильных слогов в двухсложном размере само может подчиняться какому-нибудь арифметическому правилу, создавая дополнительный ритм. Например, если в стихотворении, подчиненном двухсложному размеру, приглушить все четные сильные слоги и выделить иечетные (или наоборот), то размер стихотворения станет четырехсложным! Но об этом мы поговорим потом.

Контрдоводы трехсложного размера. Мы уже говорили, что, читая стихи, написанные трехсложным размером, мы принуждены более или менее равномерно выделить ударениями все сильные слоги. В результате оказывается, что стихи, написанные одинаковыми по числу слогов одноименными трехсложными размерами, очень похожи друг на друга. Сравните, например:

Ты твердишь, что я холоден, замкнут
и сух,
Да, таким я и буду с тобой:
Не для ласковых слов я выковывал
дух,
Не для дружб я боролся с судьбой...
(Блок)

Мне на шею бросается век-волкодав,
Но не волк я по крови своей.
Запихай меня лучше, как шапку,
в рукав
Жаркой шубы сибирских степей...
(Мандельштам)

Авторам стихов, написанных трехсложным размером, приходится мириться с его однообразием, которое, впрочем, придает стихам некоторую торжественность («Вакхическая песнь» Пушкина), а в других случаях роднит стихотворение с задушевной русской песней (вспомните *Когда я на почте служил ямщиком* и *Славное море, священный Байкал*, и *Бродяга к Байкалу подходит*, и даже *Наверх вы, товарищи, все по местам*, и даже *Вы жертвою пали в борьбе роковой!*).

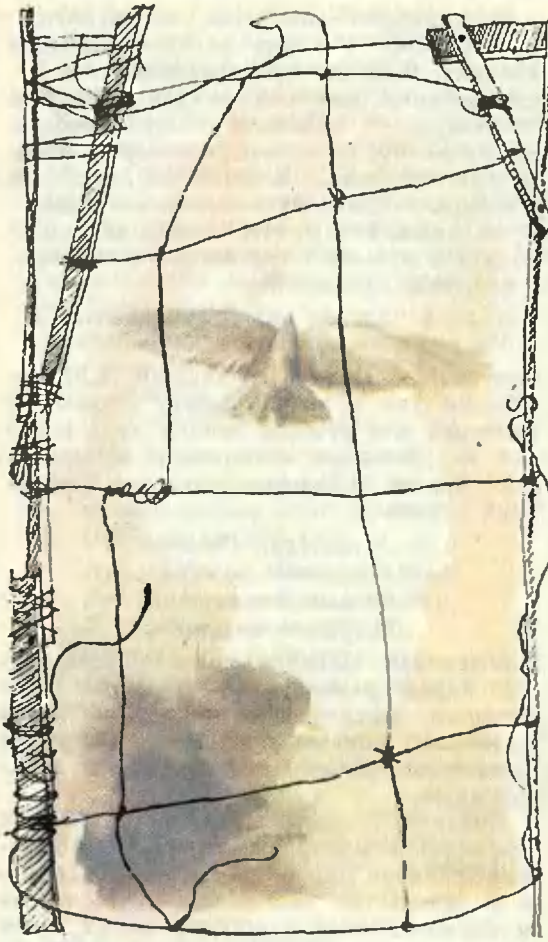
Но нет ли способа побороть тягучее однообразие трехсложного размера? Такой способ есть, и он очень стар: нужно не следовать трехсложному размеру строго, а систематически нарушать его ритм. Примером такого видоизмененного трехсложного размера может служить гекзаметр — едва ли не самый древний из стихотворных размеров. Образцом гекзаметра может служить лицейская эпиграмма Пушкина:

Внук Тредьяковского Клит гекзаметром песенки пишет...

Сильными слогами гекзаметра являются 1-й, 4-й, 7-й, 9-й, 12-й и 15-й слоги; таким образом, гекзаметр представляет собой смесь дактиля и анапеста. А вот интересный пример из Лермонтова:

Они любили друг друга так долго и нежно,
С тоской глубокой и страстью
безумно-мятежной!
Но, как враги, избегали признанья
и встречи,
И были пусты и хладны их краткие речи.

Это — дактиль, но без ударения на 1-м слоге. Согласитесь, что размер этого стихотворения не назовешь однообразным или скучным. Сходный размер встречается у Фета:



Измучен жизнью, коварством надежды,
Когда им в битве душой уступаю,
И днем, и ночью смежаю я вежды
И как-то странно порой прозреваю.

У более поздних поэтов так или иначе модифицированный трехсложный размер встречается очень часто. Я ограничусь одним примером из Гумилева:

Уронила девушка перстень
В колодец, колодец ночной.
Простирает легкие персты
К холодной воде ключевой.
Возврати мне перстень, колодец,
В нем красный цейлонский рубин...

В этом стихотворении четные строки написаны амфибрахием, а нечетные — модифицированным амфибрахием: ударение со 2-го слога перенесено на 3-й.

Неклассические размеры. В нашем определении (n, k)-*размера* n *может* быть любым натуральным числом (хотя естественно брать его не слишком большим, скажем, чтобы в строке было не меньше двух сильных слогов). Что можно сказать о (n, k)-размере с $n \neq 2$ и 3?

Начнем с $n=1$. Очевидно любой текст подчиняется (1,1)-размеру: все слоги сильные. Читать такие стихи — значит, скандировать (шай-бу-шай-бу!). Стихи в этом роде *существуют*, например: *Не-ест-не-пьет-мень-шой-сы-нок* (Некрасов), *Ко-си-ко-са-по-ка-ро-са* (Твардовский). Но они редки.

Более интересны *размеры* с $n>3$, особенно с $n=4$ и 5.

Совмещение размеров. Прежде чем обратиться к ним, зададимся вопросом: может ли одна и та же строка подчиняться двум разным размерам? Наше определение не исключает такую возможность. Например, строчка, составленная из одних односложных слов, подчинялась бы любому размеру.

Упражнение 2. а) Докажите, что строчка, *подчиненная* одновременно ямбу и хорею, состоит из односложных слов. б) Докажите, что строчка из 9 слогов, подчиненная двум разным трехсложным размерам, содержит *по крайней* мере 6 слов.

Практически это означает, что разные двухсложные размеры, как и разные трехсложные размеры, совместить невозможно. *Казалось бы*, совместить двухсложный размер с трехсложным легче, хотя и при этом возникают серьезные ограничения на длину слов.

Упражнение 3. *Докажите*, что *если* строчка подчиняется одновременно хорею и дактилю, то 4-й слог входит в состав либо односложного слова, либо слова, состоящего по крайней *мере из 4-х слогов.*

Набоков приводит пример строки, подчиненной ямбу и амфибрахию: *Таинственный и неземной.* Но строка — это еще не стихотворение. К *тому же сильные* слоги двухсложного и трехсложного размеров, совмещенных в одном стихотворении, были бы совершенно различны, и это стихотворение (если бы оно существовало) можно было бы прочесть двумя совершенно разными способами. Можно высказать уверенность, что ни в одном поэтическом сборнике вы такого стихотворения не найдете.

Другое дело — совмещение двухсложного и четырехсложного размеров, и причина в том, что 4 делится на 2. Например, что нужно для того, чтобы строка, подчиненная ямбу, подчинялась также, скажем, (4,2)-размеру? Нужно, *чтобы* в слове, содержащем более одного четного слога, ударение приходилось на слог, номер которого не делится на 4. Выбросьте последнее «не», и вы получите условие подчиненности ямба (4,4)-размеру. Поскольку слов, содержащих несколько четных *слогов, в стихотворении* может быть не так уж много, это условие представляется вполне выполнимым. Для примера заметим, что из 14 строк первой строфы «Евгения Онегина» 13 подчиняются (4,4)-размеру и 7 подчиняются (4,2)-размеру. Наоборот, что нужно для того, чтобы строка, подчиненная (4,2)-размеру, подчинялась ямбу? Нужно, чтобы в словах, не содержащих сильных слогов (4,2)-размера, но содержащих (тогда уж единственный) четный слог, этот слог был ударным. (Например, если 3-й и 4-й слоги такой строки составляют слово, то в этом слове ударение должно падать на 4-й, а не на 3-й слог.) И это представляется вполне выполнимым.

Четырехсложные размеры. Теперь мы можем обратиться к их рассмотрению. Каждому четырехсложному размеру мы поставим в соответствие *сопряженный* с ним двухсложный размер: для (4,1)- и (4,3)-размера таковым, по определению, считается хорей, для (4,2)- и (4,4)-размера — ямб. Далее, если строка подчиняется четырехсложному размеру, мы будем говорить о ее размере как о *несамостоятельном* четырехсложном, если она подчиняется также сопряженному двухсложному размеру, и как о *самостоятельном* — в противном случае.

Начнем с самостоятельного четырехсложного размера. Должен признаться, что *убедительных примеров русских стихов, подчиненных самостоятельному четырехсложному размеру, мне не известно.* Вероятно, их и нет — к такому выводу можно прийти, читая статью стиховеда Л. Е. Ляпиной «Русские пеоны» в уже цитировавшемся сборнике «Русское стихосложение». (*Пеоны* — ученое название четырехсложных размеров; а пятисложные по-ученому называются *пентонами.*) Отчего это так? В поисках ответа попробуем сконструировать строчку, подчиненную самостоятельному четырехсложному размеру:

Написал сорок статей я в журнал «Квант».

Эта строчка подчиняется (4,3)-размеру, но не подчиняется хорею. Ее чтение вызывает явное затруднение: ударения в словах *сорок* и *журнал* кажутся стоящими не на месте. В чем дело? Вероятно, в том, что, как уже было сказано, примерно треть слогов в стихотворении должны быть ударными; поэтому сильных слогов не достаточно, и к ним приходится добавлять хотя бы слабые дополнительные ударения. По ритмическим соображениям эти ударения хочется расположить в середине интервала между сильными слогами, а это и значит, что четырехсложный размер стремится к несамостоятельности.

Несамостоятельный же четырехсложный размер — очень распространенное явление. Если вы сомневаетесь в его существовании (как сомневались некоторые стиховеды — полемика с ними составляет основное содержание цитировавшейся выше статьи Л. Е. Ляпиной), спросите у любого ученика музыкальной школы — и он скажет вам, что четырехдольный размер в музыке встречается очень часто, в частности, в песнях:

Я ли в поле да не травушка была...
Уж как я ль мою коровушку люблю...

(все это — несамостоятельный (4,3)-размер, он, как и трехдольный, весьма характерен для русской песни). Если и это вас не убеждает, полистайте Пушкина. Вот образец (4,2)-размера из его юношеских стихов:

В пещéрах Геликóна
Я нéкогда рождён;
Во ѝмя Аполлóна
Тибýллом окрещён...

Знаменитая «Зимняя дорога» Пушкина (*По дороге зимней, скучной...*) мне тоже кажется написанной четырехсложным размером; однако композитор Свиридов предпочел прочесть эти стихи как двухсложные.

Более того, часто (можно сказать, как правило) четырехсложному размеру бывает подчинена только часть стихотворения, и переходы от четырехсложного ритма к двухсложному и обратно могут нести смысловую или изобразительную нагрузку. Это легко прослеживается, например, в поэме Некрасова «Кому на Руси жить хорошо» (несамостоятельный (4,2)-размер).

Пятисложные размеры. Поскольку 5 — простое число, пятисложный размер может быть только самостоятельным. Где искать его? Казалось бы, в стихах еще более тягучих и распевных, чем русские песни и лирика Некрасова. Может быть, подойдут народные сказания? И точно, многие строки этого рода подчинены пятисложному размеру:

Ох ты гóй еси, добрый мóлодец...

или

То не мýж с женой, то не брáт с сестрой —
Добрый мóлодец с красной дéвицей.

Более последовательный пятисложный размер (хотя тоже не без отступлений) можно найти в подделках под сказительный стиль, стилизациях, написанных профессиональными поэтами, скажем в «Купце Калашникове» Лермонтова:

Как сходѝлися, собирáлися
Удалые бойцы москóвские

На Москву-реку, на кулачный бой...
И приехал царь со дружиною,
Со боярами и опричниками...

Все это, кстати, (5,3)-размер.

Казалось бы все ясно. Но позволю себе привести совсем другой пример. В последний год своей жизни Гумилев написал поэму «Дракон», состоящую из 12 частей по 5 четверостиший в каждой. Приведу полностью первую часть, описывающую восход солнца на океанском берегу, а вы определите размер.

Из-за свежих волн океана
Красный бык приподнял рога.
И бежали лани тумана
Под скалистые берега.

Под скалистыми берегами,
В многошумной сырой тени
Серебристыми жемчугами
Оседали на мох они.

Красный бык изменяет лица,
Вот широко крылья простер,
И парит огромная птица,
Пожирающая простор.

И к вратам голубой кумирни
По открытой тропе небес
Он выходит, стрелок и лирник,
Ключ держа от тайн и чудес.

Дуйте ветры, чтоб волны пели,
Чтоб в лесах гудели стволы,
Дуйте ветры в трубах ущелий,
Возглашая ему хвалы.

Ответ: (5,3)-размер.

Действительно, предположим, что данное стихотворение подчиняется (n, k)-размеру. Во всех 20 строчках 3-й и 8-й слоги являются ударными (в своих словах). Имеется 7 строк, в которых слово, содержащее 3-й слог, имеет более 3 слогов. Значит, либо 3-й слог является сильным, либо $n \geqslant 5$. Аналогичное верно и для 8-го слога. Далее, 3-й и 8-й слоги являются одновременно сильными только в пятисложном размере. Легко проверить, что стихотворение действительно подчиняется (5,3)-размеру и не подчиняется другим пятисложным размерам. Размеры с $n>5$ мы исключаем из рассмотрения (см. ниже).

Для убедительности добавлю, что из наших 20 строк 5 подчиняются (3,3)-размеру, 3 подчиняются (4,1)-размеру, 1 подчиняется (4,4)-размеру, все 20 подчиняются (5,3)-размеру, 10 подчиняются (5,5)-размеру (это — издержки нашего определения, см. с. 18) и ни одна не подчиняется ни одному другому (n, k)-размеру с n, не бо́льшим 5. Такую информацию выдала бы нам машина, если бы мы прибегли к ее помощи.

Но где же в «Драконе» протяжная певучесть «Купца Калашникова»? Основная причина ее отсутствия состоит в том, что почти в каждой строке «Дракона», кроме

основных ударений на 3-м и 8-м слогах, имеется достаточно отчетливое дополнительное ударение либо на 5-м, либо на 6-м слоге. Дополнительные ударения прослеживаются и в других стихах Гумилева, написанных пятисложным размером, а также у Ахматовой и Цветаевой. В каком-то смысле и здесь можно было бы говорить о несамостоятельности (пятисложного) размера, но уточнить этот смысл, оставаясь в рамках строгой силлаботоники, *нельзя.*

К стихам Цветаевой, например, трудно подходить с тем определением размера, которое дано в начале статьи и которым мы все время пользуемся. Многие ее стихи написаны индивидуальным *размером* с фиксированными, но не составляющими арифметической прогрессии номерами сильных слогов, скажем 3, 6, 8, как в стихотворении

Юный месяц идет к полуночи:
Час монахов — и зорких птиц,
Заговорщиков час — и юношей,
*Час любовников и убийц.**)

*) Такие размеры называются *логаэдрами.*

Четыре, пять, что дальше? Дальше — 6. Бывают ли шестисложные размеры? Может быть. Так, правда с некоторой натяжкой, можно назвать шестисложным размер отдельных мест в «Купце Калашникове»:

Схоронили его за Москвой-рекой...
Промеж Тульской, Рязанской,
Владимирской...

Но число 6 имеет слишком много делителей, и шестисложный размер, скорее всего, будет распадаться в двух- или трехсложные (приведенные выше строчки — не исключение). Почти всякое стихотворение, написанное трехсложным размером, будет подчиняться и шестисложному, но это не оказывает влияния на звучание стиха.

Вообще, говоря о (n, k)-размерах с большими n, следует, во-первых, иметь в виду, что чересчур далеко расставленные сильные слоги вряд ли смогут создать определяющий ритм стиха, а во-вторых, принимать во внимание следующее, чисто арифметическое обстоятельство.

Упражнение 4. Пусть m — число слогов в строке. а) Если $n \geqslant k > m$, то строка заведомо подчиняется (n, k)-размеру (сильных слогов нет — сравните со случаем $n=k=1$, с. 21). б) Если $k \leqslant m < k+n$, то условие подчиненности (n, k)-размеру не зависит от n и сводится к тому, что k-й слог ударен.

Поэтому целесообразно считать (это можно добавить к нашему определению), что число слогов в строках стихотворения, подчиненного (n, k)-размеру (хотя бы в большинстве строк) не меньше $k+n$. (Например, бессмысленно искать (5,5)-размер в «Драконе» Гумилева — см. с. 23.)

На практике все это означает, что (n, k)-размеров с n, большим 5, не бывает, так что мы можем закончить наш разговор. За его пределами остались многочисленные отступления от силлаботоники, которыми богата русская поэзия. Но эти отступления находятся и за пределами нашего арифметического подхода к стихотворным размерам.

Упражнение 5. Определите размер следующих стихотворений:

а) *Вам теперь пришлось бы бросить ямб картавый.*
Нынче наши перья — штык да зубья вил,—
Битвы революций посерьезнее «Полтавы»
И любовь пограндиознее онегинской любви.
(Маяковский)

б) *Я мечтою ловил уходящие тени,*
Уходящие тени погасавшего дня,
Я на башню всходил, и дрожали ступени,
И дрожали ступени под ногой у меня.
(Бальмонт)

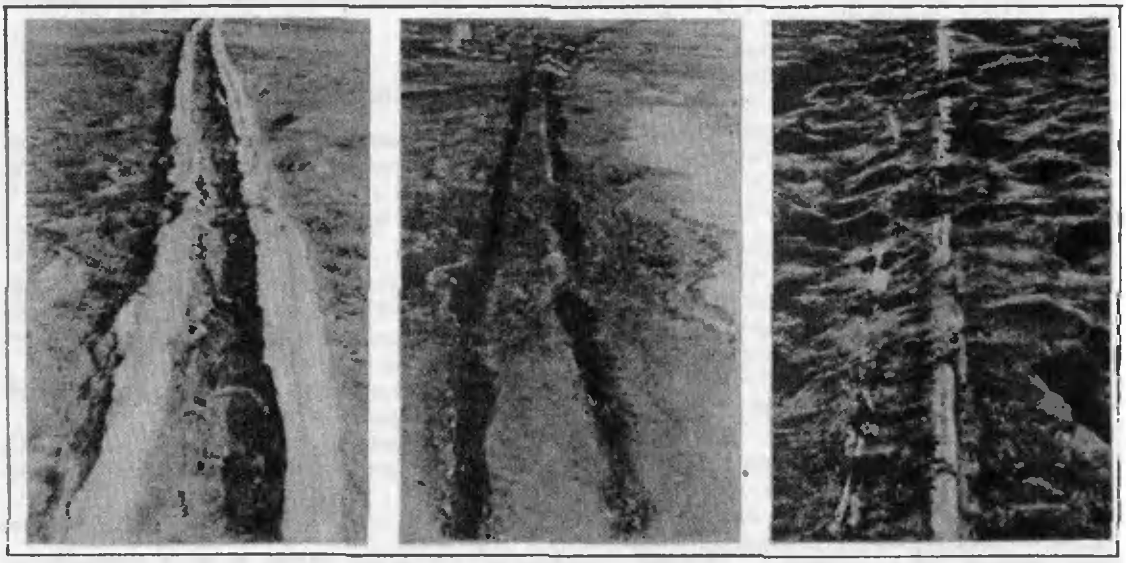
в) *Ветер злой, ветр крутой в поле*
Заливается,
А сугроб на степной воле
Завивается.
При луне (на версте мороз —
Огонечками!)
Про живых ветер весть пронес
С позвоночками.
(Фет)

г) *Как трехсотая, с передачею,*
Под Крестами будешь стоять
И своей слезою горячею
Новогодний лед прожигать.
(Ахматова)

д) *Над широкою рекой,*
Пояском-мостком перетянутой,
Городок стоит небольшой,
Летописцем не раз помянутый.

Знаю, в этом городке
Человечья жизнь настоящая,
Словно лодочка на реке,
К цели ведомой уходящая.
(Гумилев)

Мартовская лыжня



Эти три фотографии были сделаны в одно и то же время, и лыжни эти были расположены рядом. Но посмотрите, какие они разные! Одна — светлая, выступающая над окружающим снегом, как рельсы. Другая, темная, утоплена в снегу. А третья, полупропавшая, совсем необычна: тонкие, прозрачные ледяные кромки, словно подвешенные в воздухе, как «хрустальный мост» над грязным снегом...

Чем объясняется такое разнообразие видов лыжных следов? Мы предлагаем вам подумать над этим, понаблюдать мартовские лыжни. А в одном из следующих номеров журнала своими соображениями на этот счет поделится автор фотографий — кандидат физико-математических наук А. В. Митрофанов.

Пути электромагнитной теории

(Начало см. на с. 2)

ведь работа зависит от пути перемещения заряда. Электрическое поле, возникающее при электромагнитной индукции, нельзя характеризовать электрическим потенциалом. Это поле — непотенциальное.

В заключение отметим фундаментальное значение того, что источником электрического поля является переменное, а не постоянное магнитное поле.

В самом деле, если бы постоянное магнитное поле было источником электрического поля, то был бы возможен «вечный двигатель». В проводах, находящихся в таком поле, в этом случае протекал бы ток, который, в свою очередь, создавал бы магнитное поле, а оно, в свою очередь, создавало бы ток в новых проводниках, и т. д. В результате одиночный провод с током становился бы бесконечным резервуаром энергии. Поэтому тот факт, что постоянное магнитное поле не обладает электрическим действием, с необходимостью следует из невозможности «вечного движения».

Теория Максвелла не только объединила накопленные к середине XIX века разрозненные научные знания об электрических и магнитных явлениях. На ее основе была развита теория света как электромагнитного излучения, построена теория электромагнитных волн. Из максвелловских уравнений вышла теория относительности, а в сочетании с квантовой физикой — атомная физика, теория сверхпроводимости, квантовая электродинамика.

Росток электромагнитной теории Максвелла вырос в могучее древо современной фундаментальной физики.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1086—М1090, Ф1098—Ф1102

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1086» или «Ф1098». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1086. С числом разрешается производить две операции: «увеличить в 2 раза» и «увеличить на 1». За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить: а) число 100? б) число n?

М. В. Сапир

М1087. Рассмотрим треугольник ABC, точку M в плоскости этого треугольника и проекции A_1, B_1, C_1 точки M на высоты, проведенные из вершин A, B, C соответственно. Докажите, что

а) существует одна и только одна точка M, для которой отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны;

б) для такой точки M длины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 равны диаметру вписанной в треугольник ABC окружности.

А. Х. Джафаров

М1088. Докажите, что если числа p, q, r рациональны и $pq+qr+pr=1$, то $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)$ — квадрат рационального числа.

Иштван Варга (Румыния)

М1089. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ площадью S диагонали пересекаются в точке O. Пусть K, L, M, N — центры окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA. Докажите, что произведение периметров четырехугольников $ABCD$ и $KLMN$ не меньше $4S$.

Д. Ю. Бураго, Ф. Л. Назаров

М1090. Докажите, что

а) для любых положительных чисел a, b и c справедливо неравенство

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geqslant\sqrt{a^2+ac+c^2};$$

б) неравенство из п. а) обращается в равенство, если и только если $1/a+1/c=1/b$.

Ю. В. Дейкало

Ф1098. Детский пистолет, который можно представить в виде пружины конечной массы, прикрепленной к неподвижной стене, выстреливает шариком, сообщая ему скорость v. Если выстрелить шариком вдвое большей массы, его скорость будет $v\sqrt{2/3}$. Какова будет скорость шарика утроенной массы?

П. И. Зубков

Ф1099. В горизонтально закрепленной открытой с концов трубе сечением S находятся два поршня (рис. 1). В исходном состоянии левый поршень соединен с неподвижной стенкой недеформированной пружиной жесткостью k. Давление p_0 газа между поршнями равно внешнему давлению, расстояние H от правого поршня до края трубы равно расстоянию между поршнями. Правый поршень медленно вытягивают к краю трубы. Какую силу нужно приложить к поршню, чтобы удержать его в крайнем положении? Трение пренебрежимо мало, температура постоянна.

В. П. Бородин

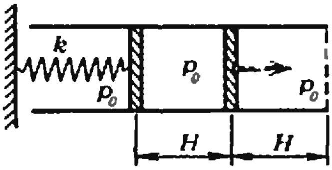


Рис. 1.

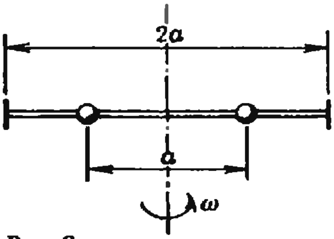


Рис. 2.

Ф1100. Достаточно длинный капилляр, погруженный в сосуд с водой, герметически закрывают сверху. При этом уровень жидкости в капилляре понижается на $\Delta h = 4$ см. Чему равна относительная влажность воздуха у поверхности воды в сосуде, если температура окружающего воздуха 20 °С?

Л. Г. Маркович

Ф1101. Легкий горизонтальный стержень длиной $2a$ может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Одинаковые массивные шары насажены на стержень и могут перемещаться вдоль него без трения и упруго отражаться от упоров на его концах (рис. 2). Сначала шары закреплены на расстояниях $a/2$ от оси. Стержень раскручивают до угловой скорости ω_0, после чего шары одновременно освобождают. По каким траекториям будут двигаться шары? За какое время стержень совершит полный оборот? Построить график зависимости $\omega(t)$. Размеры шаров много меньше длины стержня.

А. Ю. Алексеев

Ф1102. Лазерный луч падает на прозрачную плоскопараллельную пластину, одна поверхность которой закрашена так, что может рассеивать свет во всех направлениях. На пластине видна следующая картина: светлая точка в центре, темный круг с резко очерченной границей, а вокруг — светлый ореол. Объясните явление.

А. М. Шалагин

Problems

M1086—M1090, P1098—P1102

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than May 1st, 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate

M1086. Two operations may be carried out with numbers: doubling and adding 1. In what least number of these operations can the number 0 be transformed into the number a) 100? b) n?

M. V. Sapir

M1087. The point M in the plane of triangle ABC is perpendicularly projected to the points A_1, B_1, C_1 of the altitudes drawn from the vertices A, B, C respectively. Prove that
a) there exists one and only one point M for which the line segments AA_1, BB_1, CC_1 are equal;
b) the lengths of the segments AA_1, BB_1, CC_1 for such a point M equal that of the diameter of the incircle of ABC.

A. H. Djafarov

M1088. Prove that if p, q, r are rational numbers and $pq+qr+pr=1$, then $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)$ is the square of a rational number.

Ishtvan Varga (Rumania)

M1089. In the convex quadrilateral $ABCD$ of area S the diagonals intersect at the point O. Suppose K, L, M, N are the centres of the incircles of triangles AOB, BOC, COD, DOA. Prove that the product of the perimeters of $ABCD$ and $KLMN$ is no less than $4S$.

D. Yu. Burago, F. L. Nazarov

cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

Задачник „Кванта"

M1090. Prove that
a) for all positive numbers a, b, c we have the inequality

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geqslant\sqrt{a^2+ac+c^2};$$

b) this inequality becomes an equality of and only if $1/a+$ $+1/c=1/b$.

Yu. V. Deykalo

P1098. A toy pistol, which may be viewed as a spring of finite mass fixed to a wall, shoots a little ball which leaves the pistol with velocity v. If the shot is made with a ball of twice larger mass, the velocity will by $v\sqrt{2/3}$. What is the velocity of a ball of triple mass?

P. I. Zubkov

P1099. Two pistons are contained in a horizontal cylinder (of section S), open at both ends (see fig. Рис. 1, p. 27). In the initial state the left hand side piston is connected to a wall with a non-deformed spring of elasticity k; the pressure of gas p_0 between the pistons is equal to the external pressure, the distance H from the right hand side piston to the edge of the cylinder is the same as the one between the pistons. The right hand side piston is slowly pulled to the edge of the cylinder. What force must be applied to the piston in order to keep it in this extreme position? Friction is negligible, temperature is constant.

V. P. Borodin

P1100. A sufficiently long capillary tube, hermetically closed at the top, is placed in a receptacle containing water. The water level in the tube rises by $\Delta h=4$ cm. What is the relative humidity of air near the water's surface, if the surrounding air temperature is 20 °C?

L. G. Markovich

P1101. A light horizontal rod of length $2a$ freely rotates about a vertical axis passing through its centre. Identical massive balls slide along the rod without friction, bouncing off elastically from stops at its extremities (see fig. Рис. 2, p. 27). Initially the balls are fixed at the distance $a/2$ from the axis. The rod is rotated with angular velocity ω_0 and then the balls are simultaneously released. Describe the trajectories of the balls. What amount of time will be required for the rod to accomplish a complete rotation? Plot the graph of the function $\omega(t)$. The size of the balls is much less than the length of the rod.

A. Yu. Alekseev

P1102. A laser ray falls on a transparent plate bounded by parallel planes, one of which is painted so that it disperses light in all directions. The following picture is then visible on the plate: a light point in the middle surrounded by a dark circle with a clearly delimited boundary with a light halo around it. Explain this phenomenon.

A. M. Shalagin

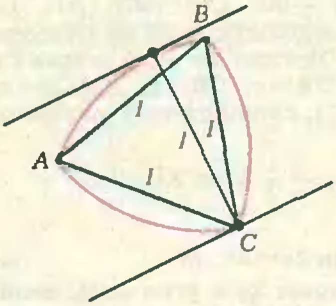
Решения задач

M1066—M1069, Ф1078—Ф1082

M1066. *Шесть точек расположены на плоскости так, что все попарные расстояния между ними не больше 1. Докажите,*

Соединим попарно все точки отрезками и окрасим синим цветом отрезки длины 1 и красным — отрезки длины меньше 1. Тогда хотя бы один из треугольников, образованных этими отрезками (быть может, вырожденный), окажется одноцветным. Это утвержде-

что из них можно выбрать три точки, попарные расстояния между которыми строго меньше 1.



ние, справедливое при любой раскраске отрезков в 2 цвета, в разных вариантах можно встретить во многих сборниках олимпиадных задач. Для его доказательства рассмотрим 5 отрезков, выходящих из какой-то одной данной точки P. Среди них найдутся 3 одноцветных, например синих — PA, PB и PC. Если треугольник ABC красный, то все в порядке. Если нет, то у него есть синяя сторона, но тогда ее концы вместе с точкой P являются вершинами синего треугольника.

Итак, пусть ABC — одноцветный треугольник. Если его стороны меньше 1 (т. е. красные), то A, B, C — искомые точки. Пусть он синий, т. е. правильный треугольник со стороной 1. Тогда остальные три точки D, E, F лежат в криволинейном треугольнике, являющимся пересечением трех единичных кругов с центрами A, B и C. Эта фигура называется *треугольником Рело*. Очевидно, что она имеет постоянную ширину 1, т. е. ее проекция на любую прямую есть отрезок длины 1 (см. рисунок). При этом расстояние между двумя точками треугольника Рело может равняться 1 только в том случае, когда одна из них совпадает с вершиной. *А поскольку точки* D, E, F *отличны* от A, B, C, попарные расстояния между ними меньше 1.

С. Г. Сальников

М1067. *Докажите, что для неотрицательных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $x^2+y^2+z^2=1$, выполнено неравенство*

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Докажем, что

$$\frac{t}{1-t^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}t^2 \qquad (*)$$

при всех t, $0\leqslant t<1$. На этом интервале неравенство $(*)$ равносильно неравенству

$$f(t)=\frac{3\sqrt{3}}{2}t(1-t^2)\leqslant 1,$$

которое доказывается с помощью стандартного исследования функции $f(t)$. (Производная $f'(t)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(1-3t^2)$ имеет на $[0;\ 1]$ единственный корень $t=1/\sqrt{3}$, причем $f(0)=f(1)=0<f(1/\sqrt{3})=1$. Следовательно $1/\sqrt{3}$ — точка максимума $f(t)$ на $[0;\ 1]$.)

В силу $(*)$ левая часть доказываемого неравенства не меньше, чем

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2};$$

равенство достигается лишь при $x=y=z=1/\sqrt{3}$.

В. Э. Матизен

М1068. *Дан угол AOB (A и B — точки на сторонах угла). Постройте прямую l, проходящую через вершину O, так чтобы*

Эта задача имеет изящное геометрическое решение с неожиданной интерпретацией на языке комплексных чисел. Но сначала приведем самое бесхитростное — тригонометрическое решение.

Заметим, что рассматриваемые площади не изме-

площади треугольников AOC и BOD, где C и D — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую l, были равны.

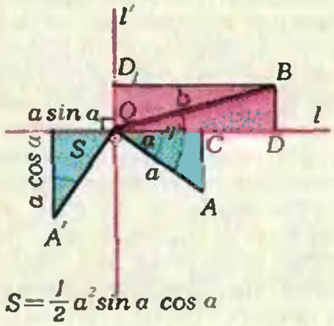


Рис. 1.

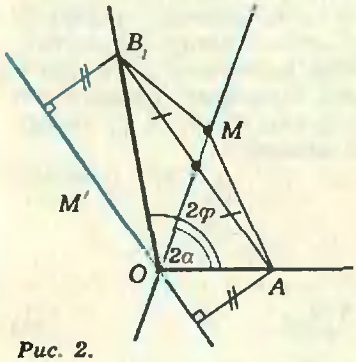


Рис. 2.

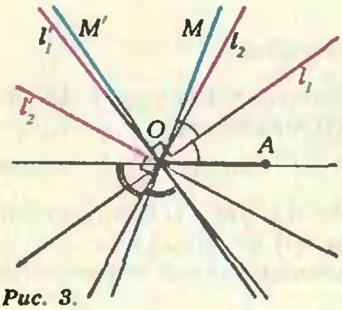


Рис. 3.

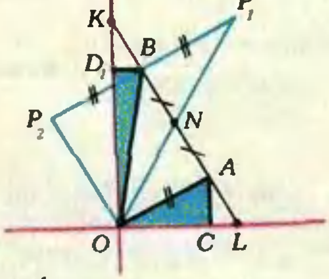


Рис. 4.

Задачник «Кванта»

нятся, если заменить прямую l на перпендикулярную ей или если повернуть любой из отрезков OA и OB вокруг O на угол $\pm 90^\circ$ или 180° (рис. 1). Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi = \angle AOB \leqslant \pi/2$ и точка C лежит по одну сторону с B относительно OA. Пусть $OA = a$, $OB = b$, $\angle AOC = \alpha$, тогда, как легко видеть (рис. 1), площади треугольников AOC и BOD

$$S_{AOC} = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\alpha, \quad S_{BOD} = \frac{1}{4} b^2 \sin 2|\alpha - \varphi|$$

равны; следовательно,

$$\sin 2|\alpha - \varphi| : \sin 2\alpha = a^2 : b^2. \qquad (*)$$

Рассмотрим угол AOB_1 величины 2φ и угол AOM величины 2α (рис. 2); очевидно, $\angle B_1OM = 2|\alpha - \varphi|$. Заметим, что

$$S_{B_1OM} : S_{AOM} = (OB_1 \sin \angle B_1OM) : (OA \sin \angle AOM) = OB_1 \sin 2|\alpha - \varphi| : a \sin 2\alpha.$$

Поэтому, если взять $OB_1 = b^2/a$, то в силу $(*)$ треугольники B_1OM и AOM будут равновелики. А это выполняется только для двух прямых: прямой OM, проходящей через середину отрезка AB_1, и прямой OM', параллельной AB_1 (высоты треугольников B_1OM и AOM, опущенные на OM, должны быть равны).

Итак, вообще говоря, задача имеет 4 решения (рис. 3): биссектрисы углов AOM и AOM' и перпендикулярные им прямые — внешние биссектрисы (вспомните замечание в начале решения). Исключение составляет случай $\varphi = \pi/2$, когда либо нет решений (при $OA \neq OB$), либо годится любая прямая (при $OA = OB$).

На рисунке 4 показано совершенно другое, чисто геометрическое решение. Построим середину N отрезка AB и отложим на прямой AB отрезки NL и NK, равные NO. Тогда две из искомых прямых — это OL и OK (две другие прямые получаются таким же построением с заменой отрезка OA на равный и перпендикулярный ему отрезок OA'). В самом деле, опустим из A перпендикуляр AC на OL, а из B — перпендикуляр BD_1 на OK. Достаточно доказать, что площади треугольников AOC и BOD_1 равны. Поскольку $AL = BK$, площади треугольников ALO и BKO равны, а $\triangle ALC = \triangle KBD_1$; но $S_{AOC} = S_{ALO} - S_{ALC}$, а $S_{BOD_1} = S_{BKO} - S_{KBD_1}$.

Второму решению можно придать несколько иной вид. Отложим от точки B векторы $\overrightarrow{BP_1} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BP_2} = -\overrightarrow{OA}$. Легко видеть (рис. 4), что OK и OL — это биссектрисы углов, образованных прямыми OP_1 и OP_2 ($\angle P_2OK = \angle OKN = \angle KON = \angle KOP_1$). Еще 2 решения — это биссектрисы углов между OQ_1 и OQ_2, где $\overrightarrow{BQ_1} = -\overrightarrow{BQ_2} = \overrightarrow{OA'}$ (рис. 4, 5); именно это последнее построение указал автор задачи, сопроводив его весьма изысканным обоснованием. (Пусть, как показано на рисунке 5, KL — диаметр окружности OQ_1Q_2, проходящей через B, тогда OL — биссектриса угла Q_1OQ_2, $OK \perp OL$. В то же время, $2S_{OBD} = DO \cdot BD = BE \cdot BD =$

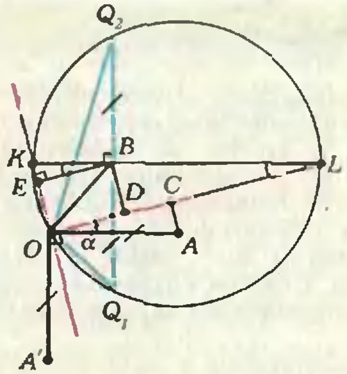


Рис. 5.

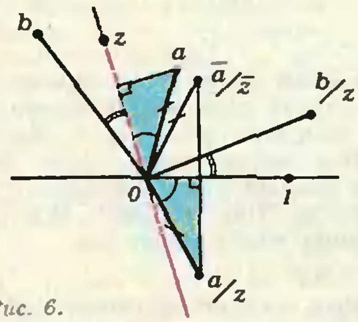


Рис. 6.

Задачник „Кванта"

$=KB\cos\alpha\cdot BL\sin\alpha$, но $KB\cdot BL=BQ_1^2=OA^2$, а $OA^2\sin\alpha\cos\alpha=AC=CO=2S_{OAC}$.

Как же связаны все эти столь разные построения? Найти объяснение помогают комплексные числа. (Мы рассчитываем здесь на читателей, знакомых с комплексными числами и их геометрической интерпретацией.) Пусть точкам O, A и B отвечают числа нуль, a и b. Искомую прямую l будем задавать ее точкой z, $|z|=1$ (рис. 6). Поскольку $2OC=|a/z+\bar{a}/\bar{z}|$, $2AC=|a/z-\bar{a}/\bar{z}|$, площадь $S_{AOC}=|a^2/z^2-\bar{a}^2/\bar{z}^2|/8$ и, аналогично, $S_{BOD}=|b^2/z^2-\bar{b}^2/\bar{z}^2|/8$. Числа под знаком модуля в двух последних равенствах чисто мнимые, поэтому равенство $S_{AOC}=S_{BOD}$ эквивалентно условию $\bar{a}^2/\bar{z}^2-\bar{a}^2/\bar{z}^2=\pm(b^2/z^2-\bar{b}^2/\bar{z}^2)$, или $(b^2\pm a^2)/z^2=(\bar{b}^2\pm\bar{a}^2)/\bar{z}^2$. А это значит, что $z^2=\pm t(b^2\pm a^2)$, где t — некоторое положительное действительное число, т. е. $z_{1,2}=r\sqrt{b^2\pm a^2}$ и $z_{3,4}=ir\sqrt{b^2\pm a^2}$, где $r=1/|\sqrt{b^3\pm a^2}|$. Числа b^1+a^2 и b^2-a^2 задают, соответственно, прямую, содержащую медиану треугольника OAB_1, и прямую, параллельную AB_1, из первого построения (см. рис. 2); извлечению *квадратного корня* отвечает проведение биссектрис углов AOM и AOM'. Второе построение (см. рис. 4, 5) получим, если разложить подкоренные выражения на множители: $b^2-a^2=(b-a)(b+a)$, $b^2+a^2=(b-ia)(b+ia)$. Числа $b\pm a$ и $b\pm ia$ — это точки P_1, P_2, Q_1 и Q_2, а среднее геометрическое $\sqrt{uv}$ двух чисел u и v задает биссектрису угла между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Например, $z_1=r\sqrt{b^2+a^2}$ лежит на биссектрисе угла Q_1OQ_2.

Р. О. Бурдин, В. Н. Дубровский

М1069. *В некотором городе разрешены только парные обмены квартирами (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах). Докажите, что любой сложный обмен квартирами нескольких семей можно осуществить за два дня. (Предполагается, что и до, и после обмена каждая семья живет в отдельной квартире.)*

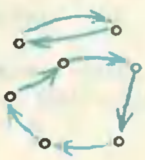


Рис. 1.

Изобразим каждую квартиру точкой на плоскости, а переезд из одной квартиры в другую — стрелкой, соединяющей соответствующие точки. Ясно, что в любой точке одна стрелка начинается и одна кончается. Поэтому, если выйти из любой вершины и двинуться по стрелкам, мы все время будем попадать в новые точки, пока *не вернемся* к началу пути (это неизбежно, так как число точек конечно). Проделаем то же самое, исходя из других точек. Мы обнаружим, что все стрелки образуют несколько непересекающихся замкнутых колец — циклов (рис. 1). Следовательно, достаточно доказать утверждение задачи для «циклического обмена» квартир.

Пусть надо осуществить обмен $A_1\to A_2\to\ldots\to A_n\to A_1$ — переселить жильцов квартиры A_1 в квартиру A_2, A_2 — в A_3 и т. д. В первый день произведем парные обмены $A_1\leftrightarrow A_{n-1}$, $A_2\leftrightarrow A_{n-2}$, ..., т. е. $A_k\leftrightarrow A_{n-k}$ (мы считаем, что $A_0=A_n$); жильцы квартир A_n и, при четном n, $A_{n/2}$ пока никуда не переезжают. Во второй день — обмены $A_1\leftrightarrow A_n$, $A_2\leftrightarrow A_{n-1}$, ..., т. е. $A_k\leftrightarrow A_{n+1-k}$. В результате жильцы квартиры A_k переедут в квартиру $A_{n+1-(n-k)}=A_{k+1}$ при $k=1$, ..., $n-1$, а из квартиры A_n — в $A_{n+1-n}=A_1$, что нам и нужно. Эту схему обменов наглядно иллюстрирует рисунок 2. Если

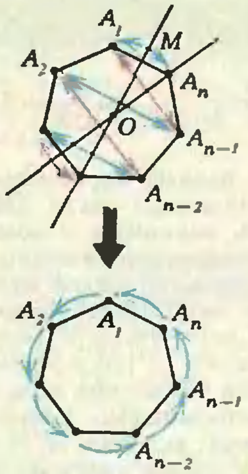


Рис. 2.

Задачник «Кванта»

A_1, ..., A_n — вершины правильного n-угольника с центром O, то первой серии обменов отвечает симметрия относительно оси OA_n, а второй — симметрия относительно оси OM, где M — середина стороны A_nA_1. Нетрудно доказать, что композиция (последовательное выполнение) двух симметрий относительно осей, пересекающихся в точке O под углом α, есть поворот вокруг O на угол 2α; в нашем случае на угол $2\pi/n$. При этом вершины многоугольника переставляются по циклу.

Н. Н. Константинов, А. И. Шнирельман

Ф1078. *Длинная тонкая нить с грузом на конце переброшена через блок и привязана к носу модели лодки, которая может плыть по длинному прямолинейному каналу с водой (рис. 1). Лодку и груз отпускают, и скорость лодки (в см/с) записывают каждую секунду. К сожалению, сохранился только конец этой записи: 5, 65; 6, 44; 6, 96; 7, 31; 7, 54; 7, 70; 7, 80; 7, 86; 7, 91. Определите по этим данным скорость лодки через 0,1 секунды после того, как ее отпустили.*

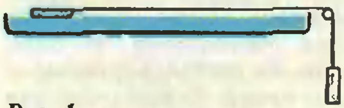


Рис. 1.

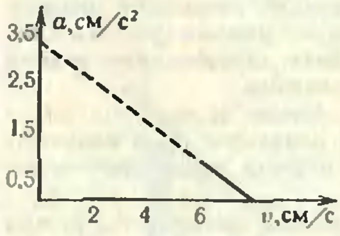


Рис. 2.

При движении тела обтекаемой формы с небольшой скоростью в жидкости возникает сила сопротивления, прямо пропорциональная скорости этого тела. Если массы лодки и груза равны соответственно M и m, скорость движения лодки в данный момент времени — v, а ее ускорение — a, то (по второму закону Ньютона) уравнение движения лодки имеет вид:

$$(M+m)a=mg-Av, \qquad (*)$$

где A — некоторая константа, характеризующая силу сопротивления.

Уравнение (*) описывает движение с переменным по величине ускорением. Для нахождения зависимости скорости от времени необходимо, вообще говоря, интегрировать (*). Однако нам требуется найти скорость лодки спустя весьма короткое время после начала движения. При этом вкладом второго члена в правой части уравнения (*) можно пренебречь и считать, что лодка движется с некоторым начальным постоянным ускорением a_0. Само уравнение движения наводит на мысль, как использовать данные задачи для ее решения. Зависимость ускорения a от скорости v есть уравнение прямой в координатах a, v. Поэтому, экстраполируя (*) к значениям $v\to 0$, мы и получим начальное ускорение a_0.

Для построения зависимости $a(v)$ можно приращение скорости на каждом промежутке времени длительностью 1 с считать равным ускорению. За скорость движения на каждом из указанных промежутков времени можно принять ее среднее значение. Полученная таким образом зависимость $a(v)$ —

a (см/с²)	0,79	0,52	0,35	0,23	0,16	0,1	0,06	0,05
v (см/с)	6,04	6,71	7,14	7,42	7,62	7,75	7,83	7,88

— приведена на рисунке 2 (сплошная линия). Начальное ускорение a_0, получающееся из графика при $v\to 0$, равно $\sim 3{,}5$ см/с².

Таким образом, спустя 0,1 с после начала движения скорость лодки равна примерно 0,35 см/с.

А. А. Шеронов

Ф1079. *Если полностью открыт кран холодной воды, а кран горячей воды закрыт (рис. 1), то ванна наполняется за время $t_1=8$ мин; если при этом на выходное отверстие насадить шланг с душем на конце, то время наполнения увеличится до $t_2=14$ мин. Когда кран холодной воды закрыт, а кран горячей открыт полностью, время наполнения ванны $t_3=12$ мин; при тех же условиях, но с душем на конце — $t_4=18$ мин. За какое время наполнится ванна, если полностью открыты оба крана? А если при этом насажен шланг с душем?*

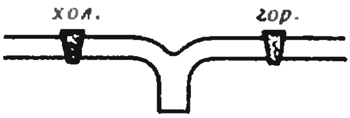


Рис. 1.

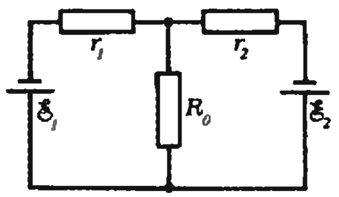


Рис. 2.

Задачник „Кванта“

Время, за которое наполняется ванна, определяется давлением воды, которое создает насос, и сопротивлением труб, по которым вода поступает в ванну. Сопротивление определяется силами вязкого трения и не зависит от перепада давления, и, очевидно, надо считать, что за время наполнения ванны давление и сопротивление в рассматриваемой системе не изменяются.

Пусть объем ванны равен V; тогда скорость наполнения ванны холодной водой —

$$v_х=\frac{V}{t_1}=V\frac{p_х}{R_х},$$

где $p_х$ — давление холодной воды в системе, $R_х$ — сопротивление подводящих труб холодной воды.

Аналогично, скорость наполнения ванны горячей водой —

$$v_г=\frac{V}{t_3}=V\frac{p_г}{R_г}$$

($p_г$ — давление горячей воды, $R_г$ — сопротивление труб, по которым течет горячая вода).

Ясно, что если открыть полностью краны горячей и холодной воды, то скорость наполнения ванны станет равна сумме $v_х$ и $v_г$, и время, за которое ванна наполнится, —

$$T_1=\frac{V}{v_х+v_г}=\frac{t_1t_3}{t_1+t_3}=4{,}8\text{ мин}.$$

Если на выходное отверстие насадить шланг с душем, то скорость наполнения ванны будет определяться еще и сопротивлением шланга $R_ш$, и при одном открытом кране (холодном или горячем) будет равна, соответственно,

$$v'_х=\frac{V}{t_2}=V\frac{p_х}{R_х+R_ш},\quad v'_г=\frac{V}{t_4}=V\frac{p_г}{R_г+R_ш}.$$

Эта запись подсказывает «электрический» аналог нашей задачи. Представим себе, что резистор с сопротивлением R_0 ($R_ш$) подключен к батарее с ЭДС $\mathscr{E}_1$ ($p_х$) и внутренним сопротивлением r_1 ($R_х$). Тогда ток, текущий через резистор, равен $I_1=\mathscr{E}_1/(r_1+R_0)$. Если резистор подключен к батарее с ЭДС $\mathscr{E}_2$ ($p_г$) и внутренним сопротивлением r_2 ($R_г$), то ток через R_0 равен $I_2=\mathscr{E}_2/(r_2+R_0)$. Понятно, что нахождение скорости v наполнения ванны при открытых двух кранах и насаженном шланге с душем аналогично нахождению тока I через резистор R_0, подключенный к двум батареям по схеме, приведенной на рисунке 2. Воспользуемся этой аналогией:

$$I=\frac{\mathscr{E}_1/r_1+\mathscr{E}_2/r_2}{1+R_0/r_1+R_0/r_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=V\frac{p_х/R_х+p_г/R_г}{1+R_ш/R_х+R_ш/R_г}.$$

Таким образом, время наполнения ванны при открытых двух кранах с душем —

Задачник „Кванта"

$$T=\frac{V}{v}=\frac{1+R_ш/R_х+R_ш/R_г}{p_х/R_х+p_г/R_г}=$$

$$=\frac{t_1t_3}{t_1+t_3}\left(\frac{t_2}{t_1}+\frac{t_4}{t_3}-1\right)=10{,}8 \text{ мин.}$$

В. Е. Скороваров

Ф1080. *Тонкостенный сосуд непрерывно откачивают насосом, однако из-за наличия микротрещины в стенке сосуда в нем устанавливается неизменное давление $p_у=0{,}001$ мм рт. ст. Снаружи нормальное атмосферное давление $p_0=760$ мм рт. ст., относительная влажность воздуха $\varphi=80\,\%$. Найдите давление паров воды в сосуде. Давление насыщенных паров воды при данной температуре $p_н=17{,}5$ мм рт. ст.*

Рассмотрим стационарный режим, когда давления паров воды и сухого воздуха в сосуде не меняются со временем. Обозначим установившееся давление паров воды в сосуде через $p_{уп}$, а через $p_{ув}$ — установившееся давление сухого воздуха. Установившееся давление влажного воздуха в сосуде $p_у$ равно сумме этих парциальных давлений:

$$p_у=p_{уп}+p_{ув}. \qquad (1)$$

Поскольку температура воздуха остается неизменной, то условие сохранения давления для каждой из двух компонент требует, чтобы количество молекул каждого газа (паров или сухого воздуха), попадающих в сосуд за единицу времени, было равно количеству молекул газа, уходящих из сосуда за это же время. Число молекул газа, проходящих через микротрещину, пропорционально произведению их концентрации на среднюю скорость теплового движения молекул этого газа. В свою очередь, это произведение пропорционально наружному давлению, деленному на $\sqrt{\mu}$, где μ — молярная масса газа. Число же молекул газа, забираемых насосом за единицу времени, пропорционально давлению этого газа в сосуде. Таким образом, пренебрегая молекулами, которые покидают сосуд через микротрещину $\left(p_у\ll p_н\frac{\varphi}{100}\right)$, для молекул паров воды и сухого воздуха можно записать:

$$\frac{p_{оп}}{\sqrt{\mu_п}}\sim p_{уп},\ \frac{p_{ов}}{\sqrt{\mu_в}}\sim p_{ув}.$$

Из этих двух соотношений получаем:

$$\frac{p_{ув}}{p_{уп}}=\frac{p_{ов}}{p_{оп}}\sqrt{\frac{\mu_п}{\mu_в}}. \qquad (2)$$

Подставляя $p_{ув}$ из (2) в (1), найдем установившееся давление паров воды в сосуде:

$$p_{уп}=\frac{p_у}{1+\frac{p_{ов}}{p_{оп}}\sqrt{\frac{\mu_п}{\mu_в}}}=\frac{p_у}{1+\sqrt{\frac{\mu_п}{\mu_в}}\frac{p_0-p_н\varphi/100}{p_н\varphi/100}}\approx$$

$$\approx\frac{\varphi p_н p_у}{100p_0}\sqrt{\frac{\mu_в}{\mu_п}}\approx2{,}34\cdot10^{-5} \text{ мм рт. ст.}$$

В. В. Можаев

Задачник «Кванта»

Ф1081. *Для очистки воздуха от пыли, которая в обычных условиях оседает очень медленно, можно использовать тот факт, что пылинки заряжены.*

В первом опыте стеклянный цилиндр (рис. 1) с пыльным воздухом помещают в электрическое поле напряженностью $E_1=1\times10^4$ В/м, направленное вдоль оси цилиндра. Через время $t_1=2$ мин вся содержавшаяся в цилиндре пыль осела на дно. Во втором опыте вдоль оси цилиндра натягивают тонкую проволоку и соединяют ее с источником высокого напряжения. Известно, что в этом случае напряженность поля $E\sim1/r$, где r — расстояние до оси. Напряжение источника подбирают так, чтобы напряженность электрического поля у стенок цилиндра была, как и в первом опыте, $1\cdot10^4$ В/м. Считая пылинки одинаковыми, а заряды пылинок равными, определите время оседания всей пыли на стенки цилиндра во втором опыте. Пыли в воздухе немного, так что объемным зарядом можно пренебречь.

На пылинку в электрическом поле действует сила $F=qE$, где q — заряд пылинки. Эта сила уравновешивается силой сопротивления воздуха $F_c=kv$ (v — скорость движения пылинки). В первом опыте напряженность электрического поля постоянна вдоль цилиндра, и скорость пылинок $v_1=\frac{qE_1}{k}$, а время, за которое весь воздух очистится,—

$$t_1=\frac{H}{v_1}=\frac{Hk}{qE_1}. \qquad (*)$$

Во втором опыте пылинки движутся в поле, напряженность которого падает по мере удаления от оси цилиндра: $E(r)=E_1R/r$; скорость пылинок также убывает с ростом r: $v(r)=\frac{q}{k}\frac{R}{r}E_1$. Пользуясь определе-

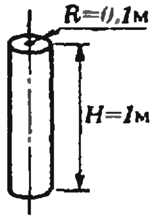


Рис. 1.

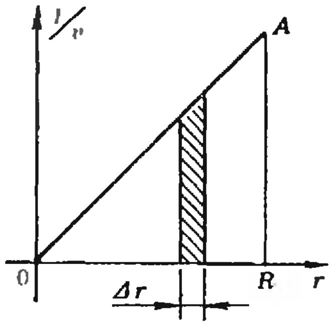


Рис. 2.

нием скорости $v=\frac{\Delta r}{\Delta t}$, можно записать: $\frac{\Delta r}{v(r)}=\Delta t$. График зависимости $\frac{1}{v(r)}$ от r — прямая линия (рис. 2). Величина $\Delta t=\frac{\Delta r}{v(r)}$ численно равна площади заштрихованной трапеции. Чтобы найти полное время движения пылинки t_x от оси до боковой стенки цилиндра, необходимо просуммировать все интервалы Δt, т. е. найти площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой OA:

$$t_x=\frac{1}{2}R\frac{1}{v(R)}=\frac{Rk}{2qE_1}.$$

Подставляя значение k/q, найденное из (*), получим:

$$t_x=t_1\frac{R}{2H}=6\text{ с.}$$

А. И. Буздин

Ф1082. *В схеме, приведенной на рисунке 1, замыкают ключ К. Найти максимальный ток через катушку. Найти максимальное напряжение на*

Максимальный ток через катушку соответствует моменту, когда ЭДС индукции равна нулю, т. е. в этот момент параллельно подключенный конденсатор C_2 разряжен, напряжение на конденсаторе C_1 равно U_0 (рис. 2). С учетом работы батареи запишем закон сохранения энергии:

конденсаторе C_1. Неидеальностью элементов схемы можно пренебречь.

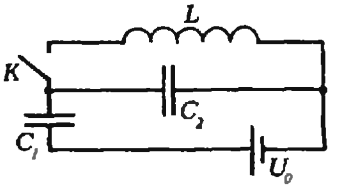


Рис. 1.

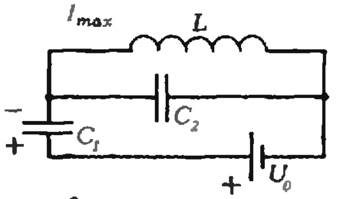


Рис. 2.

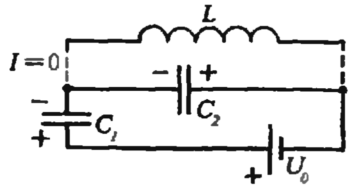


Рис. 3.

Задачник „Кванта"

$$\frac{LI_{max}^2}{2}+\frac{C_1U_0^2}{2}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\frac{U_0^2}{2}+A_1.$$

Заряд, протекший через батарею, равен изменению заряда конденсатора C_1, и

$$A_1=\Delta q\cdot U_0=\left(C_1U_0-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_0\right)U_0.$$

Таким образом,

$$I_{max}=\frac{C_1U_0}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}.$$

Второй вопрос немного сложнее. Сумма напряжений на конденсаторах равна напряжению батареи и постоянна. Поэтому в тот момент, когда напряжение U_1 на конденсаторе C_1 максимально, напряжение $U_2=U_0-U_1$ на конденсаторе C_2 должно быть минимально (и отрицательно), а значит, в этот момент ток через катушку должен быть равен нулю (рис. 3). Снова запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{C_1U_1^2}{2}+\frac{C_2(U_0-U_1)^2}{2}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\frac{U_0^2}{2}+A_2,$$

где

$$A_2=\left(C_1U_1-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_0\right)U_0.$$

Отсюда находим максимальное значение напряжения на конденсаторе C_1:

$$U_{1max}=U_0\left(1+\frac{C_1}{C_1+C_2}\right).$$

А. Р. Зильберман

Задача на исследование

Преобразование степени бинома

Докажите, что для нечетных n разность $(x+y)^n-x^n-y^n$ представляется в виде многочлена $P_n(u, v)$ от двух переменных $v=x^2y+y^2x$, $u=x^2+y^2+xy$. (Для некоторых n эти многочлены указаны в таблице. Заметим, что P_n имеет лишь около $n/6$ отличных от 0 коэффициентов, и все они положительны.) Выведите соотношения между коэффициентами многочленов, позволяющие вычислять их последовательно; одно такое соотношение покажем на примере, взятом из таблицы: $196=2\cdot 133-85+15$.

Попробуйте найти другие закономерности, которым удовлетворяют коэффициенты этих многочленов. Было бы интересно найти аналогичные представления для четного n, а также для многочленов с большим числом переменных.

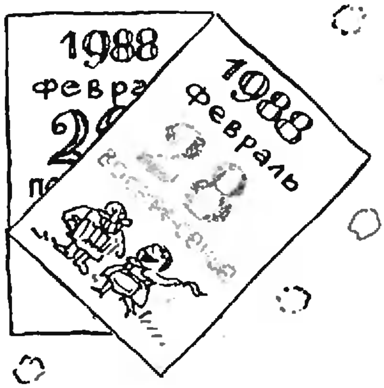
Дьердь Фарраи. Будапешт

n	$P_n(u, v)$
1	0
3	$3v$
5	$5uv$
...	...
15	$v(\underline{15}u^6+50u^3v^2+3v^4)$
17	$uv(17u^6+\underline{85}u^3v^2+17v^4)$
19	$u^2v(19u^6+\underline{133}u^3v^2+19v^4)$
21	$v(21u^9+\underline{196}u^6v^2+147u^3v^4+3v^6)$
...	...

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Листок календаря частично закрыт предыдущим листком (см. рисунок). Какая его часть больше: открытая или закрытая?



2. Некоторое целое число A возведено в куб. Покажите, что по крайней мере одно из чисел : $A^3 - A$ или $A^3 + A$ — делится на 10.

3. Почему птицы в мороз распушают перья?

4. Трехзначное число начинается с цифры 7. Из него получили другое трехзначное число, переставив эту цифру в конец числа. Полученное число оказалось на 117 меньше предыдущего. Какое число рассматривалось?

5. Впишите в клеточки цифры 1, 2, ..., 9 (каждую по одному разу) так, чтобы произведение оказалось наибольшим.

Эти задачи нам предложили: *А. М. Домашенко, Г. А. Гальперин, А. П. Савин, Н. К. Антонович, Л. П. Мочалов.*

О ПОЛЬЗЕ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ КОВБОЕВ

Кандидат физико-математических наук
А. С. ЯРСКИЙ

Билл явился к мистеру Кону сразу после обеда. В это время техасское солнце превращает все техасские сыры в плавленые, всю техасскую воду — в кипяченую и заставляет всех техасских жителей мечтать о какой-нибудь более скорой и не столь мучительной кончине.

К тому моменту, как температура Билла упала ниже точки кипения железа, а весь лед в доме полностью иссяк, Билл обрел, наконец, способность выговаривать слова:

— Понимаете, мистер Кон, все дело в этом Стенли! Мы с ним, можно сказать, приятели. И спорили до последнего времени только один раз.

— А как было дело? — мистер Кон изо всех сил старался не заснуть.

— Видите ли, мистер Кон, Стенли куда-то собрался, кажется, в Натчез — это в верховьях Ред-Ривер. Ну, я там бывал и говорю ему:

— Туда, мол, семь суток пути верхом.

— Ага,— говорит Стенли,— а до Батон Руж?

— Сутки,— говорю.

— А до Лафайетта?

— Примерно четверо суток. И дорога не легкая.

— А до... — и тут он называет ещё какой-то городишко — сколько?

— Я там не бывал,— говорю,— но, думаю, суток десять—двенадцать.

— Знаете, Билл,— говорит Стенли,— все эти четыре города лежат как по заказу — в вершинах прямоугольника.

— Ну и что? — говорю я.

— А то! — отвечает Стенли.— Я знаю, сколько пути до... — тут он опять назвал тот же городишко.

— Ты что,— говорю я ему,— был там?

— Нет,— говорит он,— не был.

— Так откуда же ты можешь знать?

— Знаю,— говорит,— туда около восьми суток!

Ну, слово за слово, мистер Кон, вывел я своего иноходца и... ровно через восемь суток оказался в этом городишке, век бы его не видать. А еще через восемь суток Стенли мне объяснил, что есть какая-то там «теорема»...*). Выходит, за ней-то я и мотался на Ред-Ривер.

— Ваш Стенли — неглупый малый! — жара, кажется, немного спала и мистер Кон слегка приободрился.

— Даже чересчур неглупый.— Билл недовольно хмыкнул.

И вот, мистер Кон, несколько дней назад подходит ко мне этот Стенли, заводит разговор о погоде, о ценах на скот, а потом и говорит:

— Слушайте, Билл, как вы думаете, найдется ли в наших местах такая лошадь, с которой вам не справиться, а подо мной она пойдет?

Я, не задумываясь, говорю ему:

— Что ж, Стенли, на такой лошади я, так уж и быть, помогу тебе добраться до ближайшего кладбища.

А он опять за свое:

*) Если $ABCD$ — прямоугольник и S — произвольная точка, то $SA^2+SC^2=SB^2+SD^2$.

— Сдается мне, Билл, что есть такая лошадь.

— Ладно,— говорю,— ставлю десять против одного, что такой лошади нет. Выкладывай доллар и не морочь мне голову.

— Не торопитесь, Билл,— говорит он,— и приготовьте десять долларов. Ответ стоит у вас в конюшне. Смотрите!

Тут он берет тетрадь, в которой я веду счета, открывает ее на чистой странице и пишет:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}. \qquad (10)$$

Я, мистер Кон, его спрашиваю:

— Слушай, Стенли, а что это ты начал счет с десяти — тут справа, в скобках?

— Это ваш мне долг,— говорит он,— где же его записывать, как не в бухгалтерской книге?

— Ты что-то очень спешишь,— говорю я ему.— Я, правда, давно не хожу в школу, но эта твоя лошадь под номером десять хромает на все четыре ноги. И мою десятку ты получишь не раньше, чем это животное сделает хотя бы один шаг.

— Оно этот шаг сделает,— говорит Стенли и пишет:

$$\frac{8}{2}-\frac{9}{3}=\frac{8-9}{2-3}.$$

— Проверьте,— говорит,— предъявленный счет и раскошеливайтесь...

Скажите, мистер Кон, вы когда-нибудь видели человека, который свалял дурака и тут же в этом признался? А ненужные десять долларов видели?..

— Слушай, Стенли,— говорю я,— ставлю еще десятку, что больше твой мерин не сделает ни шагу!

— Выкладывайте,— говорит он,— и вот вам расписка в получении:

$$\frac{5}{3}-\frac{9}{9}=\frac{5-9}{3-9}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3}.$$

Проиграть две скачки подряд — такого со мной еще не бывало, мистер Кон. Но тут я вспомнил наш со Стенли уговор и решил, что еще не все потеряно.

— Слушай, Стенли,— говорю я ему,— под тобой этот конь ходит, не

спорю. Но ты говорил, что мне на нем не усидеть. Ставлю двадцать против твоих двадцати, что и у меня этот мустанг пойдет по струнке.

— Принято,— отвечает Стенли.

Так вот, мистер Кон, эту скачку я тоже проиграл... Вам, мистер Кон, в своей школе и за неделю не заработать столько, сколько этот паршивец Стенли огреб за пару часов... А главное, я никак не могу взять в толк, какого дьявола хромая лошадь, то есть, я хотел сказать — неверная формула дает верные ответы? Вот с этим я, собственно, к вам и пришел!..

* * *

— Наука требует жертв! — изрек мистер Кон.— И вы, Билли,— одна из этих жертв!.. Во-первых, кто вам сказал, что неверная формула не может давать верных результатов? Че-пу-ха! *Даже самый большой на свете враль может случайно сказать правду!..* Во-вторых, пока вы тут продували один заезд за другим, я нашел подоплеку вашего позора. Взгляните-ка на формулу

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\left(2-\frac{b}{d}\right).$$

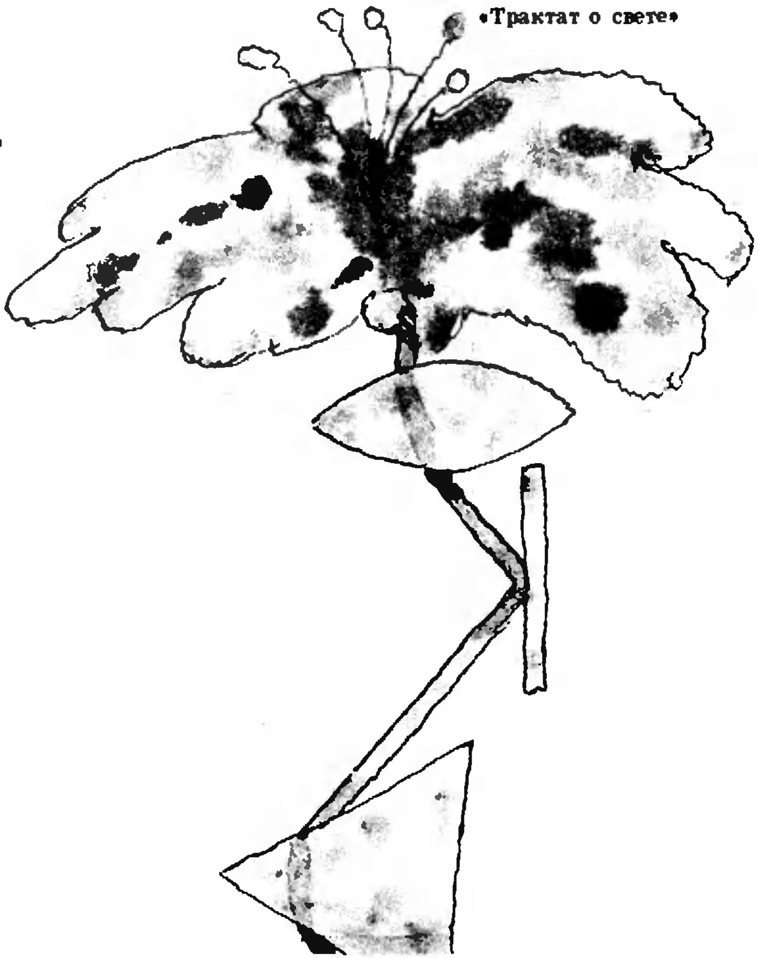
Неважно, каким именно путем я к ней пришел. Важно, что это — *та же самая формула* (10). Несколько преобразованная, конечно. Вы, Билли, можете взять любые b и d, вычислить по ним a и c — и все! Просто и безот-

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Мне хочется верить, что те,
кто любят познавать причины явлений...
найдут некоторое удовлетворение при
ознакомлении с различными изложенными
здесь размышлениями о свете...

Х. Гюйгенс.
«Трактат о свете»



Вопросы и задачи

1. Почему блестят воздушные пузыри в воде?

2. Можно ли разжечь костер при помощи льда?

3. Почему даже в чистой воде человек видит плохо?

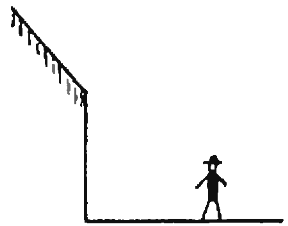
4. Аквалангист, плавающий под водой, видит рыбака на берегу, а рыбак лишь в редких случаях может увидеть аквалангиста. Почему?

5. Какую характеристику неизвестного вещества достаточно определить, чтобы узнать скорость света в нем?

6. Человек приближается к плоскому зеркалу со скоростью 2 м/с. С какой скоростью он приближается к своему изображению?

Вопросы и задачи

8. Постройте изображение человека в плоском зерка-

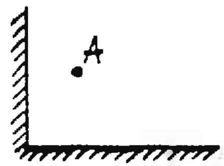


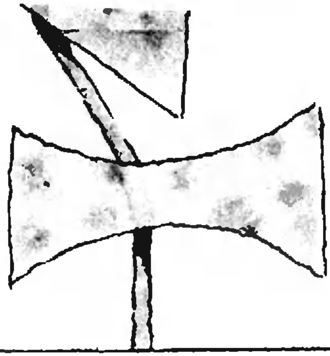
ле в случае, показанном на рисунке.

9. Чем объясняется блеск драгоценных камней?

10. Почему днем не видно звезд?

11. Сколько изображений точки A (см. рисунок)





А так ли хорошо знакомы вам понятия

Отражение и преломление

Эти понятия, такие простые на первый взгляд,— глубокие и неотъемлемые представления одного из важнейших разделов физики — оптики. В физике мало таких областей, в которых с начала их развития были получены столь крупные научные результаты, что и по сей день сохранили свое значение. Именно поэтому исследования по оптике оказали очень большое влияние на становление других разделов естествознания, заставили пересмотреть основные положения классической физики и сыграли существенную роль при зарождении теории относительности и квантовой теории.

Мы надеемся, что нынешний выпуск «Калейдоскопа» поможет вам по-иному взглянуть на некоторые привычные явления и приборы, например на линзу или фотоаппарат, а может быть, побудит серьезно задуматься о механизме человеческого зрения — в общем, поможет вам открыть для себя и в оптике что-то новое и интересное.

7. Луч прожектора в тумане виден хорошо, а в ясную погоду — хуже. Почему?

Любопытно, что...

...весьма точные измерения углов преломления света в разных средах произвел еще Клавдий Птолемей (140 год н. э.) Однако установить соотношение между углами падения и углами преломления ему не удалось.

...полное внутреннее отражение в естественных монокристаллах является более совершенным, чем отражение от специально изготовляемых металлических зеркал, где всегда происходит некоторое поглощение энергии падающего пучка.

...своей известностью, причем не только в научных кругах, Ньютон при жизни более всего был обязан своим оптическим исследованиям, а самым популярным его произведением была «Оптика», которая в течение многих десятилетий оставалась энциклопедией науки о свете.

можно получить в системе из двух взаимно перпендикулярных зеркал?

12. Чтобы лучше видеть, близорукие люди щурят глаза. Как это объяснить?

Микроопыт

Предложите опыт, с помощью которого можно отличить очки для дальнозорких от очков для близоруких. Проведите его.

Что читать в «Кванте»

об отражении и преломлении (публикации последних лет)

1. «Принцип Ферма» — 1984, № 1, с. 36;
2. «Дела и проделки феи Морганы» — 1984, № 8;
3. «Несколько опытов с объективом» — 1984, № 11;
4. «Что такое радуга» — 1984, № 12, с. 20;
5. «Лучи и волны» — 1985, № 11, с. 23;
6. «Оптические приборы» — 1986, № 10;
7. «А что будет, если...?» — 1986, № 12.
8. «Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...» — 1987, № 12.

казно! Пример? Пожалуйста. Назовите любые два числа. Два и семь? Прекрасно. Берем $b=2$, $d=7$ и вычисляем:

$$\frac{a}{c}=\frac{2}{7}\left(2-\frac{2}{7}\right)=\frac{2}{7}\cdot\frac{12}{7}=\frac{24}{49}.$$

Берите теперь $a=24$, $c=49$ или $a=48$, $c=98$... Проверяйте:

$$\frac{24}{2}-\frac{49}{7}=\frac{24-49}{2-7};$$

$$\frac{48}{2}-\frac{98}{7}=\frac{49-98}{2-7}.$$

Можете, кстати, удвоить, утроить — хоть удесятерить оба знаменателя или числителя:

$$\frac{24}{6}-\frac{49}{21}=\frac{24-49}{6-21}.$$

Мистер Кон удовлетворенно перевел дух. Билл внимательно просмотрел написанное и подвел итог:

— От силы двадцать. Больше мне на всем этом не отыграть!

— Это как сказать! — возмутился мистер Кон.— Конечно, этот ваш Стенли может знать открытую мной закономерность. Но одну вещь он наверняка не сможет сделать — просто потому, что это невозможно! Предложите ему, Билл, такой вопрос: Может ли лошадь под номером 10 поднять голову?!! А говоря попросту, *пусть добьется равенства (10) при* $a>c$! Но не забудьте, Билл, все эти a, b, c и d — целые положительные числа. Вам ясно?

Возможно ли равенство (10) при $a>c$?

Хмурое лицо Билла несколько прояснилось.

— Если все так, как вы говорите, мистер Кон, то я возьму с него по пять долларов за каждый час, пока он будет ломать голову. Пятерка в час — это по совести.

— Не жадничайте, Билл,— возразил мистер Кон.— Речь идет о пожизненном доходе! Даже пятьдесят центов в час составят в сутки приличную сумму в двенадцать долларов!..

Мистер Кон ненадолго задумался.

— Знаете, Билл, предложите это *невыполнимое* задание кому-нибудь побогаче Стенли. Иначе идея не проживет и трех дней.

— Это уж моя забота,— заявил Билл.— Хотел бы я, однако, додуматься, *почему* эта лошадь не может поднять голову?.. И еще одно. Мистер Кон, а если он и это знает?

— Тогда,— мистер Кон начал накаляться,— тогда пусть найдет несократимые дроби a/b и c/d и сохранит условие (10)!

Возможно ли равенство (10), если $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — несократимые дроби?

— Хорошо,— сказал Билл,— но если он и об этом наслышан?

— Все,— отрезал мистер Кон,— меняем пластинку! Скажите, Билли, нравится вам дробь

$$\frac{19}{95}?$$

— Дробь как дробь...— Билл немного помолчал.— Кажется, она сокращается...

— Да,— завопил мистер Кон,— сокращается!!! Но как!!! Просто вычеркиваются одинаковые цифры — последняя в числителе и первая в знаменателе:

$$\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5}.$$

Проверяйте!!! А вот вам еще:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}.$$

И еще:

$$\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}.$$

На лице Билла появилось странное выражение. Он взял карандаш и под-

рагивающей рукой стал писать:

$$\frac{5\cancel{5}}{\cancel{5}5}=\frac{7\cancel{7}}{\cancel{7}7}=\frac{3\cancel{33}}{\cancel{33}3}.$$

— Посмотрите, мистер Кон,— сказал он тихо,— это я сам придумал...

— Эти примеры тривиальны,— безапелляционно заявил мистер Кон,— и мы их исключим из рассмотрения. Так вот, пусть этот ваш Стенли придумает *еще одну дробь*, которая сокращается по такому способу, и чтобы она, разумеется, не состояла из одинаковых цифр. Знайте, Билл: *если в числителе и знаменателе стоят двузначные числа, то таких дробей всего четыре!* Три из них я вам написал. А четвертую пусть ищет Стенли...

Какую дробь не назвал мистер Кон? И только ли одну?

Да, чуть не забыл. Если в числителе несколько раз повторить последнюю цифру, а в знаменателе — столько же раз первую его цифру, то наше неправильное сокращение даст верный результат. Смотрите и можете проверить:

$$\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1\cancel{99}}{\cancel{99}5}=\frac{1\cancel{999}}{\cancel{999}5}=\frac{1}{5}.$$

Пусть Стенли попробует сосчитать устно, чему равно

$$\frac{16666666666}{66666666664}?$$

Ну, Билл, этого, я думаю, вам хватит?

$$\frac{\overbrace{1666\ldots6}^{1000\,раз}}{\underbrace{666\ldots6}_{1000\,раз}4}=\frac{1}{4};\quad \frac{4\overbrace{999\ldots9}^{3000\,раз}}{\underbrace{999\ldots9}_{3000\,раз}8}=\frac{4}{8}$$

ПОЧЕМУ?

— Да, мистер Кон, спасибо. Но,— Билл смущенно поднялся,— у меня... я сейчас... пока не отыграюсь...

— Сколько? — лаконично спросил мистер Кон.

Билл совсем смутился, вытер лоб и глубоко вздохнул.

— Если можно, три семьдесят три.

— Три доллара? — Мистер Кон удивленно хмыкнул.— Возьмите сорок — на первое время.

— Нет, мистер Кон, на то, что я задумал, мне нужно ровно три семьдесят три!.. Все верно. Спасибо, мистер Кон...

* * *

Примерно через неделю к мистеру Кону, как и следовало ожидать, заявился Стенли. Внешний его вид говорил о том, что ни для Билла, ни для кого-либо другого Стенли уже не мог служить источником дохода.

— Рад с вами познакомиться,— сказал мистер Кон,— присаживайтесь. Ну, рассказывайте, как ваши дела?

— Как вам сказать, мистер Кон, дела идут... Вот зашел показать вам одну штуку.

Стенли подошел к столу, взял лист бумаги и написал:

$$\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

— Довольно хитрая вещь,— сказал он.— Число неправильно выносишь из-под корня, а результат все равно правильный... Но у меня этот фокус не прошел: Билл все понял за пять минут и даже написал общую формулу!.. Это спутало все мои планы... Ну, да не об этом речь. Я, собственно, зашел, чтобы... ну...

Какую формулу написал Билл?

— Сколько вам дать, Стенли? — напрямик спросил мистер Кон.

— Если вас это не слишком обременит, дайте мне,— Стенли перевел дух,— три доллара семьдесят три цента. Верну через пару дней.

— Знаете, Стенли,— заметил мистер Кон, протягивая деньги,— я уже второй раз слышу эту нелепую сумму — 3.73. Что, в конце концов, она означает?

— Да так, пустяки, мистер Кон, мелочь...— Стенли покраснел, пробормотал еще что-то невразумительное и поспешно попрощался.

* * *

Через несколько дней мистер Кон был вынужден съездить по делу в ближний городишко. Возле магазина ему бросилось в глаза рекламное объявление:

НОВИНКА
М. Я. Гардельман
Живая математика для миллионов
Полезные и занимательные
приложения
Цена: 3 доллара 73 цента

А в углу кто-то приписал:

$$\frac{3\cancel{\frac{1}{4}}}{4\cancel{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{4}.$$

Какая формула скрывается за таким сокращением?

Информация

Компьютерный клуб «СПРАЙТ»

Четыре года назад, когда школьный компьютер был такой же редкостью, как заморский овощ — картофель во времена Петра I, в нашей школе начал работать факультатив по программированию. Редкостный овощ у нас не произрастал: чтобы поработать на настоящей ЭВМ, мы ездили в вычислительный центр Свердловского пединститута. Через год школьный компьютер перестал быть диковинкой, и у нас в школе появилась первая вычислительная машина — «Электроника ДЗ-28». Сначала одна, а следом за ней и другая. Еще через год в школе появился целый выводок из двенадцати новеньких «Роботронов». Для вылупившихся малышей пришлось срочно оборудовать дисплейный класс. Впрочем, сейчас это не более удивительно, чем жареная картошка на ужин.

Если прийти вечером в дисплейный класс свердловской школы № 121 на заседание компьютерного клуба «СПРАЙТ», то можно попасть на лекцию «ЭВМ в медицине» или на спор о современной музыке, на встречу со специалистом по машинной графике или разговор о творчестве французских импрессионистов, на демонстрацию программ или на вечер поэзии.

Каждый год к нам в клуб приходят новые ребята. Приходят, чтобы научиться программировать, освоить новую технику. Обучение самых младших ведется по «новосибирской» методике А. П. Ершова — Г. А. Звенигородского. Для этого мы перенесли на наши школьные машины исполнители «Муравей» и «Шпага», описанные в книге Г. А. Звенигородского «Первые уроки программирования» (М.: Наука, 1986. Серия: Библиотечка «Квант»). Занятия у старших и более опытных проходят в форме семинара, когда каждый по очереди изучает тему и объясняет остальным. Старшие члены клуба учат младших. Наш выпускник Коля Мохов, теперь уже студент университета, будучи десятиклассником, занимался с группой пятиклассников. Ныне это стало традицией.

Групповой портрет с Роботроном.

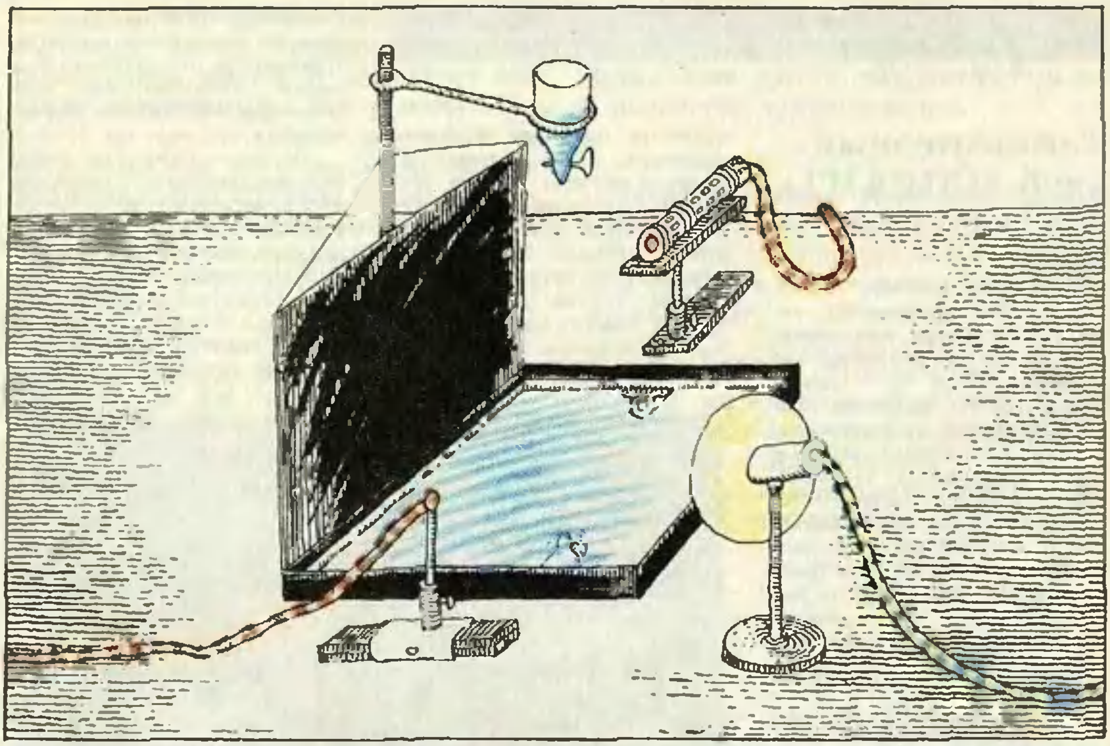
За два—три года занятий в клубе ребята успевают изучить несколько языков программирования, поработать на различных машинах. Многие из них начинают сами создавать программы, могут грамотно провести весь комплекс работ — от постановки задачи совместно с заказчиком до оформления документации. Одно из основных направлений нашей работы — разработка обучающих программ по различным предметам. За три года были сделаны программы для уроков математики, химии, информатики, русского и английского языка. Многие из них нашли применение в школе и пединституте.

Члены нашего клуба — непременные участники и нередко призеры олимпиад по программированию, научно-практических конференций школьников и конкурсов профессионального мастерства, которые проводятся в городе. Принимали они участие и в работе Ленинградской конференции «Школьная информатика».

В летние каникулы наши старшеклассники работали программистами в вычислительных центрах. На летних школах юных программистов в г. Новосибирске мы нашли немало друзей и единомышленников. Особенно подружились с членами компьютерного клуба «Виртуал» из г. Кургана. Мы ездим друг к другу в гости, делимся планами и идеями.

Клуб не замыкается на машинах и программах. Мы ходим в походы, любим театр, говорим о музыке и о книгах, стараемся не пропускать интересных фильмов и выставок. Мы не только учимся программировать, но и стараемся создать в клубе атмосферу дружелюбия, внимания и духовной близости людей. И, кажется, у нас это получается.

И. И. Данилина,
М. Е. Ковалев



Лаборатория «Кванта»

Наблюдение и фотосъемка быстропротекающих процессов

С. М. БЕЛОУСОВ, Р. Н. ГЕРАСИМОВ

Подтолкнула нас к этой работе книга Дж. Дариуса «Недоступное глазу», в которой мы прочитали про скоростную фотосъемку и увидели интересные фотографии.

Мы решили собрать установку, позволяющую получать фотографии быстропротекающих процессов. А чтобы эти процессы можно было также наблюдать непосредственно глазом, установку мы сделали стробоскопической. Блок-схема нашей установки изображена на рисунке 1.

В качестве объекта исследования был взят процесс падения капель на поверхность воды.

Очередная капля, падая в воду, прерывает лазерный луч, затемняя при этом фотодиод. Электрический импульс с фотодиода попадает на таймер (регулируемая задержка), который нужен для того, чтобы можно было наблюдать разные фазы исследуемого процесса. Задержанный импульс поступает на усилитель-формирователь, откуда, усиленный во много раз, идет на поджиг лампы-вспышки.

Для того чтобы капля не была на фотографии размазанной, нужно достаточно малое время экспозиции. Это время (τ) легко оценить, исходя из следующих соображений. Капля, падающая в воду с высоты $H = 20$ см, имеет скорость у поверхности воды

Эта статья, написанная ленинградскими школьниками, рассказывает о большой и интересной работе, которую провели авторы — ученики 9 класса ФМШ № 45 при ЛГУ — на базе Научно-исследовательского института физики ЛГУ.

$v=\sqrt{2gH}=2$ м/с. Радиус капли $r\approx$ ≈ 3 мм. Тогда можно считать неразмазанными снимки, где за время вспышки капля пролетает $h\approx 0{,}1-$ $0{,}2$ мм, откуда $\tau=h/v\approx 100$ мкс. Значит, время вспышки должно быть меньше 100 мкс. Как выяснилось, обычная фотовспышка не годится — там время вспышки ≈ 1 мс. В качестве лампы-вспышки мы выбрали маломощный строботрон ИСШ-15 и использовали время вспышки $\approx 20-$ 40 мкс.

Для наблюдения падения капель в воду оказались необходимы сравнительно большие времена задержки. Это обусловлено тем, что для синхронизации использовался момент, когда капля пересекает луч лазера, проходящий на высоте $H=10$ см над поверхностью воды (при меньших высотах брызги, возникающие при падении в воду, также попадают в луч и приводят к дополнительным вспышкам лампы). Считая, что скорость падения капли $v=2-3$ м/с, получаем, что минимальное время задержки $\tau_{min}=h/v\approx 50-30$ мс. Максимальное время задержки определяется длительностью процессов, происходящих при падении капли, и составляет $\tau_{max}=\tau_{min}+\tau_{проц}\approx 300$ мс. «Неподвижность» наблюдаемой картины определяется стабильностью времени задержки. Считая, что положение капли в момент вспышки должно быть фиксировано с точностью $\Delta h=0{,}2-$ $0{,}3$ мм, получаем, что время задержки должно быть задано с точностью $\Delta\tau=$ $=\Delta h/v\approx 0{,}1$ мс. Таким образом, для стробоскопического наблюдения неподвижной капли, «висящей» над самой водой, необходима высокая стабильность задержки. Чтобы удовлетворить эти требования, мы использовали осциллограф С1-64.

На рисунке 2 показана электрическая схема установки, собранной нами из стандартных приборов.*)

Источником света служил юстировочный гелий-неоновый лазер ОКГ-13. Лазерный луч проходил над поверхностью воды и попадал на фотодиод ФД-3. Ток фотодиода, усиленный транзистором КТ608Б поступал на вход осцил-

*) Разумеется, установку можно видоизменить (упростить, усовершенствовать). Здесь мы полагаемся на творчество читателей. (*Примеч. ред.*)

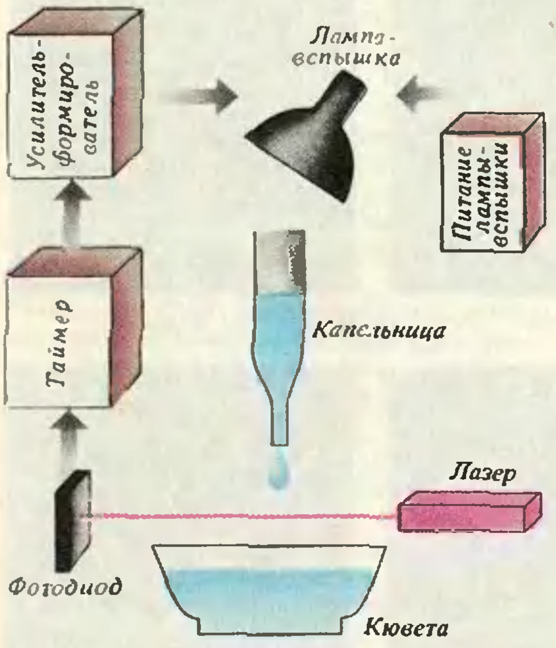


Рис. 1. Блок-схема установки, в которой мы использовали лазер ОКГ-13, фотодиод ФД-3 и лампу-вспышку ИСШ-15.

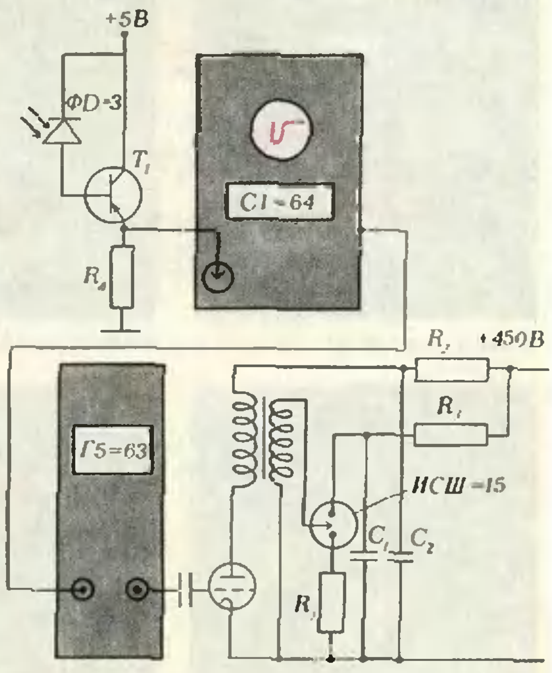


Рис. 2. Электрическая схема установки: $R_1=1$ кОм, $R_2=1000$ кОм, $R_3=10$ кОм, $R_4=$ $=510$ Ом, $C_1=0{,}07$ мкФ, $C_2=13$ мкФ.

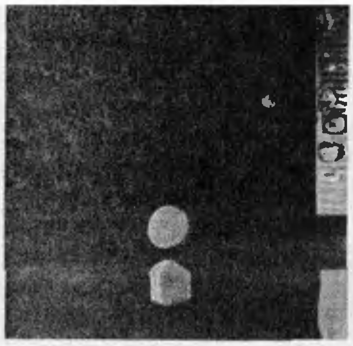


Фото 1. $\tau=0$.

Фото 2. $\tau=9$ *мс.*

Фото 3. $\tau=19$ *мс.*

Фото 4. $\tau=34$ *мс.*

Фото 5. $\tau=59$ *мс.*

Фото 6. $\tau=96$ *мс.*

Фото 7. $\tau=135$ *мс.*

Фото 8. $\tau=154$ *мс.*

Фото 9. $\tau=169$ *мс.*

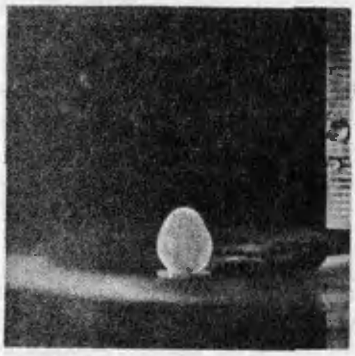


Фото 10. $\tau=188$ *мс.*

Фото 11. $\tau=228$ *мс.*

Фото 12. $\tau=262$ *мс.*

лографа С1-64. Импульс тока, возникающий при падении капли через лазерный луч, приводил к запуску развертки А. Через время T, определяемое положением ручек «длительность развертки А» и «задержка развертки Б», осциллограф вырабатывал импульс запуска задержанной развертки (развертка Б). Этот импульс поступал на вход внешнего запуска импульсного генератора Г5-63. Импульс, сформированный генератором, поступал на схему поджига лампы-вспышки. Время задержки задавалось многооборотным потенциометром в пределах от 0 до 400 мкс и отсчитывалось с точностью до 1 мкс.

Мы фотографировали падение капли в воду с разных высот. Наиболее удачной и полной получилась серия фотографий капель, падающих с высоты 37,5 см. Фотографии этой серии идут последовательно, как стадии происходящего процесса. На фотографиях видна линейка с миллиметровыми делениями, она задает масштаб. Все фотографии сделаны в одном масштабе. Время τ, которое приводится в подписях к фотографиям, отсчитывается от момента касания каплей воды. Фотосъемка велась с помощью фотоаппарата «Зенит» на пленку «Аэрофото» (1400 ед.).

Приведем краткие описания фотографий.

Падая в воду, капля колеблется и из-за этого имеет несферическую форму. Капля, зависшая над водой, запечатлена на фото 1 и 2. Над каплей на фотографии 1 видна маленькая капелька. Это — так называемый шарик Плато, возникающий при отрыве капли от капельницы.

Ударяясь о воду, капля выдавливает находящуюся под ней жидкость вверх по своим краям в тонкий цилиндр. На фото 2 видно начало этого процесса. Жидкости на краях все увеличивающегося цилиндра энергетически выгоднее собраться в капли. Из соображений симметрии ясно, что капли должны быть расположены по краям цилиндра равномерно. Поэтому и получаются такие красивые фотографии, как фото 3, где цилиндр похож на корону.

Под действием сил тяжести и поверхностного натяжения корона начинает опадать (фото 4). Когда корона опадет совсем, на ее месте образуется воронка, через некоторое время воронка схлопывается, и из ее центра начинает расти столбик (фото 5).

Столбик растет и утолщается и в какой-то момент достигает наибольшей высоты (фото 6).

Под действием сил поверхностного натяжения на столбике образуется перемычка, и столбик распадается на капли, которые падают обратно в жидкость. Последовательные стадии распада столбика на капли показаны на фото 7—9. При стробоскопическом наблюдении мы заметили, что в зависимости от толщины и высоты столбика он распадается на разное число капель. (Распад столбика обусловлен тем, что при образовании капель их суммарная поверхностная энергия оказывается меньшей, чем у столбика.) При этом оказалось, что число капель, на которые распадался столбик, не зависит от коэффициента поверхностного натяжения, а определяется только отношением диаметра к высоте столбика.

После того как капли от распавшегося столбика упали в воду, снова образуется воронка, из центра которой затем вырастает столбик (фото 10—12).

Литература

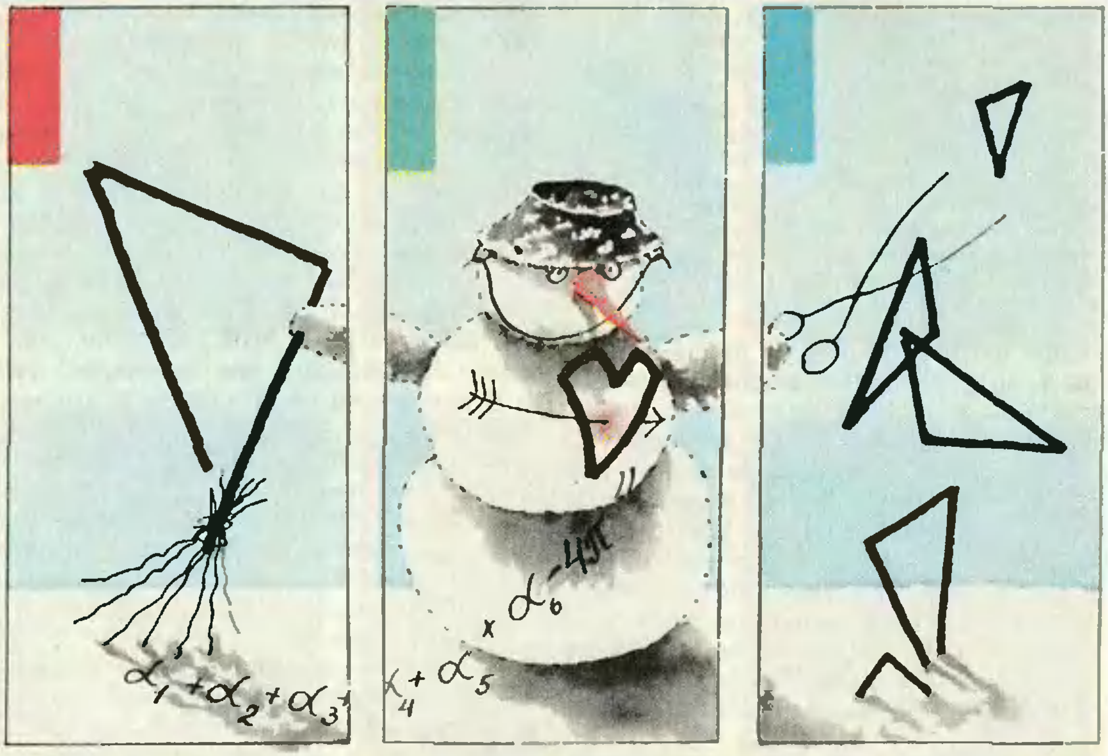
1. Дж. Дариус. Недоступное глазу — М.: Мир, 1986.

2. Я. Е. Гегузин. Капля.— М.: Наука, 1973.

3. Опыты в домашней лаборатории.— М.: Наука, 1984.— (Серия: Библиотечка «Квант», вып. 4).

4. Я. Е. Гегузин. Пузыри.— М.: Наука, 1985.— (Серия: Библиотечка «Квант», вып. 46).

5. Альбом течений жидкостей и газов.— М.: Мир, 1986.



Школа в „Кванте"

Математика 6—10

Публикуемые ниже заметки объединены общим сюжетом: в них идет речь о сумме углов многоугольника — выпуклого и произвольного, плоского и «сферического». Попутно обсуждаются теорема Эйлера о карте на плоскости (и на сфере) и вытекающая из нее более известная теорема Эйлера о многогранниках. Хотя первая заметка адресована учащимся 6—8 классов, вторая — девятиклассникам, а третья — десятиклассникам, мы рекомендуем все же читать их подряд. Все три заметки подготовлены Н. Б. Васильевым и В. Л. Гутенмахером.

Сумма углов

Сумма углов треугольника

Один из первых геометрических фактов, которые мы узнаем — теорема о том, что в любом треугольнике сумма углов равна 180°. Этот факт можно проверить экспериментально: вырезать из бумаги произвольный треугольник, оторвать от него два угла и приложить к третьему — они составят вместе развернутый угол в 180°. На той же идее — собрать три угла в одной вершине — основано и доказательство теоремы (рис. 1): если через вершину треугольника провести прямую, параллельную противоположной стороне — основанию, то два образовавшихся угла будут равны углам при основании.

О «пятом постулате» Евклида

В этом нашем рассуждении использован «пятый постулат» Евклида — аксиома, утверждающая единственность прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку. Пары накрест лежащих углов при параллельных прямых равны*), и отсюда следует теорема о сумме углов треугольника. Разумеется, из теоремы о сумме углов треугольника в свою очередь можно вывести «пятый постулат» — они эквивалентны друг другу. Более двух тысяч лет понадобилось, чтобы выяснить, что отрицание пятого постулата — возможность провести через точку более одной прямой, не пересекающей данной,— вместе со всеми

*) См. «Геометрию 6—10» (М.: «Просвещение», 1986), с. 41.

другими аксиомами геометрии приводит к новой непротиворечивой теории: геометрии Лобачевского. В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника всегда меньше 180°. В этой геометрии чем больше треугольник, тем больше разность между 180° и суммой углов треугольника — эта разность пропорциональна площади треугольника.

Геометрия в близком нам мире вполне согласуется с обычной геометрией Евклида. Однако геометрия Лобачевского оказалась глубоко связанной с теорией относительности. О геометрии Лобачевского можно прочитать в статье К. Л. Самарова, В. М. Уроева «Модель Пуанкаре» в «Кванте» № 6 за 1984 год.

Теорема о внешнем угле

Можно собрать углы треугольника вместе иным, чем на рисунке 1, образом, продолжив одну его сторону за вершину и проведя из этой вершины луч, параллельный противоположной стороне (рис. 2). Таким образом доказывается, что *внешний угол треугольника (смежный с внутренним) равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов*. По существу это — вариант теоремы о сумме углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника используется при доказательстве многих утверждений. Напомним лишь одно, применяющееся особенно часто: *величина вписанного угла равна половине величины дуги, на которую опирается этот угол*, т. е. половине величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу (в учебнике А. В. Погорелова «Геометрия 6—10» этот факт завершает курс 6 класса).

О величине угла

В обыденной жизни под углом понимается острая геометрическая фигура (угол стола, угол дома). Говоря об экспериментальной проверке теоремы о сумме углов треугольника, мы имели в виду угол как часть плоскости, заключенную между двумя лучами (кусок бумаги). Сложение углов — прикладывание одного угла к другому — привело нас к необычному углу, стороны которого лежат на одной прямой: *развернутому* углу в 180°.

Прикладывание нескольких больших углов может привести к тому, что начнет получаться какая-то двухслойная фигура. Возникает естественный вопрос: что такое угол, например, в 380°? Такие углы рассматриваются в курсе тригонометрии (см. «Алгебру — 8», с. 131); их удобно использовать при измерении поворотов.

Рассмотрим в качестве примера вращение ручки радиоприемника, используемой для его настройки. Повернув эту ручку на сколько-то градусов, мы попадем на нужную волну. При этом поворот от какой-то метки на 20° — это для настройки радиоприемника не то же самое, что поворот на 380°, хотя соответствующие положения ручки совпадают. Более того, вращать ручку *можно в ту и другую* сторону — поэтому нужно ввести кроме положительных (отвечающих, скажем, поворотам против часовой стрелки) еще и отрицательные углы. Суммой двух углов будет поворот, который получается, если повернуть ручку сначала на один угол, а потом на второй.

Попробуем с такой точки зрения рассмотреть сначала сумму углов треугольника, а затем многоугольника.

Сумма углов многоугольника

Представим себе линейку, скользящую по сторонам треугольника (рис. 3, *а*). Возле каждой вершины линейка поворачивается на величину, равную внешнему углу треугольника, а после полного обхода вокруг треугольника — скажем, против часовой стрелки — линейка возвращается на прежнее место, сделав один полный оборот — на 360°. Итак, сумма внешних углов треугольника равна 360° (рис. 3, *б*).

Точно такое же рассуждение применимо к любому выпуклому n-уголь-

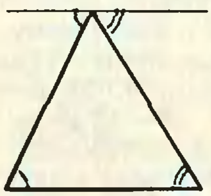


Рис. 1.

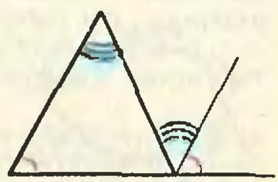


Рис. 2.

нику: *сумма внешних его углов равна 360°* (рис. 4).

Поскольку каждый внешний угол в сумме со смежным ему внутренним дает 180°, сумма всех внутренних углов n-угольника равна $180°n-360°=$ $=180°(n-2)$.

Этот результат в учебнике доказывается иначе: выпуклый n-угольник можно разбить диагоналями, проведенными из одной вершины, на $n-2$ треугольника; сумма всех их углов, равная, очевидно, сумме всех n углов n-угольника, в $(n-2)$ раза больше суммы углов одного треугольника.

Такую же сумму углов имеет и любой, не обязательно выпуклый n-угольник. Но доказательство несколько сложнее.

Если пытаться обойти «сложный» многоугольник по контуру и подсчитывать сумму внешних углов — углов поворота, то, во-первых, нужно будет учитывать направления поворота: углы поворота против часовой стрелки считать положительными, а по часовой стрелке — отрицательными (такие повороты соответствуют внутренним углам, большим 180°); во-вторых, не так уж очевидно, что в результате обхода многоугольника (несамопересекающейся ломаной) общий поворот составит один полный оборот на 360°. Заметим, что при обходе самопересекающейся ломаной на рисунке 5 — пятиугольной звезды — линейка делает два полных оборота, т. е. сумма внешних углов при вершинах звезды

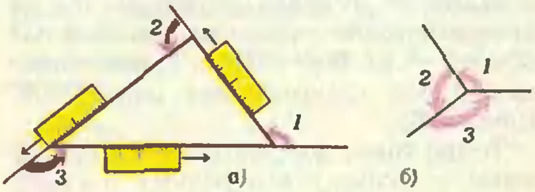


Рис. 3.

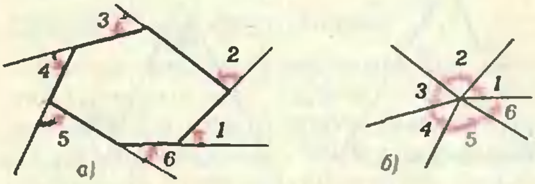


Рис. 4.

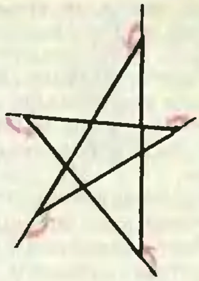


Рис. 5.

равна 720° (а значит, сумма внутренних ее углов всегда равна $180°\times$ $\times 5-720°=180°$; проверьте этот результат, рассмотрев треугольники и выпуклый пятиугольник, из которых состоит звезда).

Доказать теорему о сумме углов любого многоугольника (не обязательно выпуклого) можно методом разрезания. Но об этом — в следующей заметке.

О разрезаниях многоугольников и теореме Эйлера

Под многоугольником мы теперь понимаем кусок плоскости, вырезаемый несамопересекающейся замкнутой ломаной. Начнем с того, что, как и пообещали в предыдущей заметке, докажем теорему о сумме углов любого многоугольника (не обязательно выпуклого) методом разрезания.

Конечно, найти вершину, из которой «видны» все остальные вершины (как для выпуклого многоугольника) в общем случае уже нельзя. Не совсем очевидно даже, что можно найти хоть одну диагональ, целиком лежащую внутри n-угольника. Но этот факт верен.

Лемма. *Из любой вершины невыпуклого многоугольника, угол при которой больше 180°, можно провести диагональ, целиком лежащую внутри этого многоугольника.*

Рассмотрим всевозможные лучи, идущие из такой вершины внутрь многоугольника (рис. 1). Они «освещают», быть может, частично, по крайней мере две стороны многоугольника. В самом деле, все лучи, которые освещают одну сторону, заполняют угол, меньший 180°. Итак, угол многоугольника (больший 180°) разбивается по крайней мере на два угла, которые образованы лучами, освещающими разные стороны многоугольника. Тогда луч, разделяющий два таких угла, направлен в вершину многоугольника — по диагонали, целиком находящейся внутри многоугольника.

С помощью многократного использования леммы любой n-угольник можно разрезать на треугольники. Но мы должны проследить еще за количеством треугольников. Как и многие другие теоремы, в которых участвует произвольное натуральное число n, оформить доказательство удобнее всего с помощью математической индукции.

О математической индукции

Здесь принцип математической индукции мы используем в таком виде. Пусть некоторое утверждение, в формулировке которого участвует натуральное число n, справедливо для $n=n_0$ и из того, что оно справедливо для всех n таких, что $n_0 \leqslant n < N$, следует его справедливость для $n=N$. Тогда оно верно для всех натуральных $n \geqslant n_0$.

Докажем по индукции нужное нам утверждение.

Теорема. *Сумма углов произвольного (не обязательно выпуклого) n-угольника равна $180°(n-2)$.*

Для $n=3$ это верно. Пусть наше утверждение справедливо для всех $n<N$ ($n \geqslant 3$). Рассмотрим некоторый N-угольник. По лемме его можно разрезать диагональю на два многоугольника. Пусть в одном из них K сторон от большого N-угольника — т. е. он $(K+1)$-угольник, в другом $N-K$ остальных сторон — и он тем самым $(N-K+1)$-угольник. По предположению индукции их суммы углов равны $180°(K-1)$ и $180°(N-K-1)$. Складывая, получаем, что сумма всех углов N-угольника составляет $180°(K-1)+180°(N-K-1)=180°(N-2)$. Теорема доказана.

Заодно мы можем сделать такой вывод: *при любом разрезании*

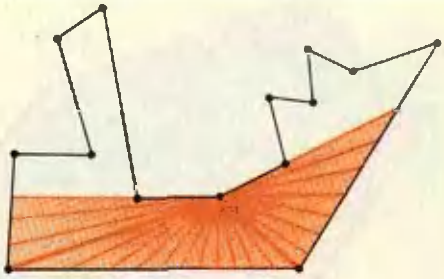


Рис. 1.

n-угольника на треугольники диагоналями число этих треугольников всегда равно $n-2$ — ведь сумма всех углов всех треугольников, с одной стороны, равна $180°\,t$, где t — число треугольников, а с другой — сумме углов n-угольника, т. е. $180°(n-2)$.

Об аддитивности

Мы пользуемся в этом рассуждении тем, что величина «суммы углов» обладает следующим свойством: при разрезании многоугольника диагоналями сумма углов целого равна сумме углов частей; подобным свойством обладает еще одна геометрическая характеристика фигур: площадь.

Разрезая многоугольник на части и подсчитывая разными способами сумму углов, мы можем получать интересные равенства, в которых «сумма углов» не упоминается, а фигурируют лишь количества многоугольников, число вершин, сторон. В следующих примерах мы условимся говорить лишь о «правильных» разрезаниях многоугольника, при которых каждые два многоугольника имеют лишь общую сторону, или общую вершину, или вообще не имеют общих точек (случай, когда вершина одного из многоугольников попадает на сторону другого, не допускается).

Пусть n-угольник разрезан на T треугольников, причем внутри n-угольника лежат еще k «узлов» — общих вершин нескольких треугольников. Подсчитав двумя способами сумму углов, учитывая, что у каждого внутреннего узла собраны углы с суммой 360°, получим такую формулу: $T=n+2k-2$.

Еще более общую формулу, относящуюся уже к произвольной карте из многоугольников, сформулируем в виде теоремы.

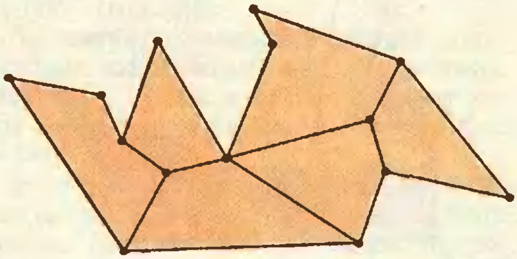


Рис. 2.

Т е о р е м а   Э й л е р а   о   к а р т е. *Пусть на плоскости выбрано B точек, и они соединены P отрезками так, что образовался многоугольник, разбитый на M других многоугольников правильным образом (рис. 2). Тогда $B-P+M=1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть большой (внешний) многоугольник имеет n сторон (и n вершин), а число сторон тех M многоугольников, на которые он разрезан,— $n_1, n_2, ..., n_M$. Из B вершин карты n вершин лежат на границе, а $(B-n)$ — внутри большого многоугольника. Подсчитав двумя способами общую сумму углов всех M многоугольников, получим равенство

$$180°(n_1-2)+...+180°(n_M-2)=$$
$$=180°(n-2)+360°(B-n),$$

откуда

$$n_1+n_2+...+n_M-2M=2B-n-2.$$

Заметим теперь, что в сумме n_1+ $+n_2+...+n_M+n$ каждый из P отрезков участвует дважды — он служит стороной двух многоугольников (либо — двух внутренних, либо — одного из внутренних и внешнего), поэтому $n_1+n_2+...+n_M+n=2P$. Отсюда и получается нужное равенство $B-P+$ $+M=1$.

Более известна легко вытекающая отсюда теорема Эйлера, относящаяся уже не к плоским картам, а к выпуклым многогранникам в пространстве.

Т е о р е м а   Э й л е р а   о   м н о г о г р а н н и к а х. *Для любого выпуклого многогранника с B вершинами, P ребрами и $Г$ гранями верно равенство: $B-P+Г=2$.*

В таблице на рисунке 3 приведено несколько конкретных примеров. Для доказательства формулы для многогранника достаточно представить себе, что его проволочный каркас (с прозрачными гранями) «сфотографирован» из точки C, расположенной вблизи одной из граней, но вне многогранника,— или, говоря более математическим языком, сделать центральную проекцию каркаса многогранника из точки C на плоскость. Тогда на «фотографии» получится плоская карта из многоугольников с B вершинами и P ребрами-отрезками, причем число M внутренних многоугольников карты будет равно $Г-1$, поскольку одна грань — вблизи которой был расположен центр проекции — при отображении перейдет в весь внешний многоугольник. На рисунке 4 изображены карты для куба, четырехугольной пирамиды и октаэд-

		В	*Р*	*Г*
Куб		8	12	6
Тетраэдр		4	6	4
5-угольная пирамида		6	10	6
Октаэдр		6	12	8
Додекаэдр		20	30	12
Всегда В−Р+Г=2				

Рис. 3.

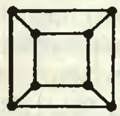
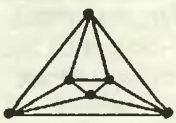
	В	*Р*	*М*
	8	12	5
	5	8	4
	8	12	7
Всегда В−Р+М=1			

Рис. 4.

ра. Из формулы $B-P+M=1$ для карты получаем формулу $B-P+\Gamma=2$ для многогранника.

Общая теорема Эйлера

Использование суммы углов для доказательства теоремы Эйлера — прием красивый, но несколько искусственный. На самом деле теорема Эйлера верна и для более общей ситуации — например, для произвольной карты с B вершинами, P ребрами и Γ странами на сфере, причем «ребрами» могут служить любые отрезки кривых, лишь бы каждая страна имела границу из нескольких идущих цепочкой ребер (в частности, внутри страны не должно быть «дыр», относящихся к другим странам). Одна из возможных идей доказательства теоремы в такой большей общности — индукция, основанная на «стягивании» одной из стран в точку.

Сумме углов многоугольника на сфере и теореме Эйлера для карты на сфере посвящена следующая заметка.

Сумма углов сферического многоугольника

На сфере мы будем рассматривать многоугольники, стороны которых — дуги больших кругов. Такой многоугольник можно получить как пересечение сферы с многогранным углом, вершина которого лежит в центре сферы O (рис. 1). Величиной угла многоугольника на сфере естественно считать угол между касательными к его «сторонам», проведенными из вершины; поскольку касательные перпендикулярны радиусу, проведенному в вершину из точки O, угол многоугольника на сфере равен двугранному углу при этом радиусе.

Аналогия между «суммой углов» и площадью, которую мы вскользь упомянули в предыдущей заметке, здесь становится осязаемой: одна величина просто выражается через другую.

Теорема. *Площадь многоугольника на сфере пропорциональна разности между суммой его углов и $180°(n-2)$, где n — число вершин многоугольника.*

Коэффициент пропорциональности зависит лишь от радиуса сферы. Примем радиус сферы за единицу (тогда площадь сферы равна 4π) и условимся

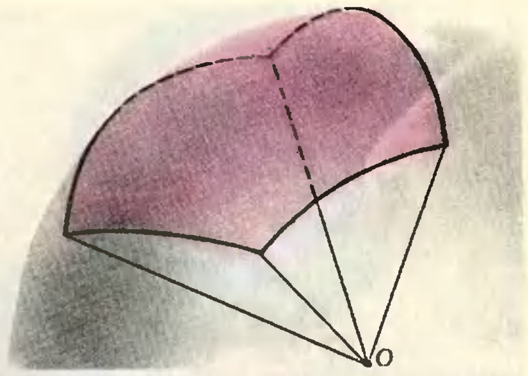


Рис. 1.

углы измерять не в градусах, а в радианах ($180°$ соответствуют π радианам). Тогда площадь n-угольника на сфере равна $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n-\pi(n-2)$, где α_1, α_2, ..., α_n — его углы.

В частности, *площадь треугольника на единичной сфере с углами* α, β, γ *равна* $\alpha+\beta+\gamma-\pi$.

Проверим формулу $S=\alpha+\beta+\gamma-\pi$ для осьмушки сферы, вырезаемой из нее тремя взаимно перпендикулярными плоскостями, проходящими через центр: у этой осьмушки три угла по $\pi/2$ каждый, и по формуле ее площадь равна $3\pi/2-\pi=\pi/2$ — действительно, это $1/8$ часть от 4π, площади всей сферы.

Доказать эту теорему достаточно для сферического треугольника: общая формула получится из этого частного случая так же, как и при доказательстве теоремы о сумме углов плоского n-угольника,— с помощью разрезания и математической индукции.

Продолжив стороны сферического треугольника, мы получим три больших круга, разбивающих сферу на 8 треугольников (удобно представить себе три пересекающиеся в центре O плоскости этих больших кругов, делящих пространство на 8 трехгранных углов,— каждый из них высекает на сфере треугольник). Обозначим углы нашего треугольника через α, β и γ, его площадь — через S, площади соседних с ним треугольников (примыкающих к сторонам, лежащим против углов α, β и γ соответственно) — через a, b и c (рис. 2). Вместе с каждым из соседних треугольников наш тре-

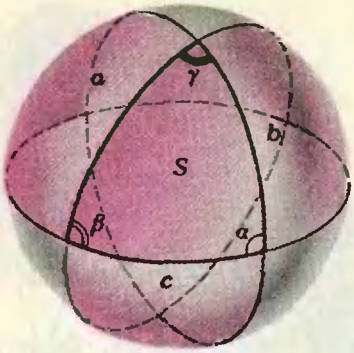


Рис. 2.

угольник образует дольку — часть сферы, ограниченную двумя большими полукругами. Площадь такой дольки, очевидно, пропорциональна углу между плоскостями этих полукругов: площадь дольки с углом раствора θ равна 2θ ($\theta=2\pi$ соответствует полной сфере). Поэтому $S+a=2\alpha$, $S+b=2\beta$, $S+c=2\gamma$. Теперь заметим, что 8 треугольников на сфере попарно симметричны друг другу, поэтому $a+b+c+S=2\pi$. Сложив первые три равенства и вычтя из суммы четвертое, получим $2S=2\alpha+2\beta+2\gamma-2\pi$, откуда $S=\alpha+\beta+\gamma-\pi$. Это и есть нужная формула для сферического треугольника.

Телесный угол. В физике (реже — в геометрии) бывает полезно мерить величину «телесного угла», образуемого многогранной (и вообще, конической) поверхностью с вершиной O: телесный угол измеряется площадью, высекаемой этой поверхностью на единичной сфере с центром O. (Единица этой величины называется «стерадиан».) Наша теорема выражает величину телесного многогранного угла через величины его двугранных углов.

Для карты на сфере, образованной дугами больших кругов, теорему Эйлера также можно доказать с помощью подсчета суммы углов. При этом нужно воспользоваться формулой, выражающей сумму углов многоугольника через его площадь и число сторон, $S=$*(сумма углов)*$-\pi(n-2)$, и учесть, что сумма всех углов вместе равна $2\pi B$, где B — число вершин карты: $4\pi=2\pi B-\pi(2P-2\Gamma)$.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Может ли денежная сумма A рублей B копеек в целое число k раз превосходить денежную сумму B рублей A копеек ($0\leqslant A<100$, $0\leqslant B<100$)? Если да, то во сколько раз?

2. Найдите все пары натуральных чисел, сумма квадратов которых равна 16 000.

3. Найдите положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} xy(x+y)=6, \\ yz(y+z)=12, \\ zx(z+x)=30. \end{cases}$$

4. С помощью двусторонней линейки а) проведите биссектрису данного угла, б) удвойте данный угол.

5. В остроугольном треугольнике из разных вершин провели медиану, биссектрису и высоту. Могут ли точки их пересечения лежать в вершинах равностороннего треугольника?

Девятый класс

6. Решите уравнение $(16x^{200}+1)(y^{200}+1)=16(xy)^{100}$.

7. На плоскости расположены два непересекающихся круга. Найдите множество точек A на плоскости таких, что любая прямая, проходящая через A, пересекает хотя бы один из кругов.

8. В треугольнике ABC средняя по величине сторона отличается от каждой из остальных сторон на 1. Найдите эти стороны, если биссектриса угла C пересекается с медианой угла B под прямым углом.

9. Докажите, что $\cos(\sin\alpha)>\sin(\cos\alpha)$ при всех α.

10. Натуральные числа a, b, c, d удовлетворяют равенству $a+b=c+d=1000$. Когда сумма $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}$ принимает наибольшее значение?

Десятый класс

11. Найдите приближенные значения корней уравнения

$$0{,}001x^3+x^2-1=0$$

с точностью до 0,1.

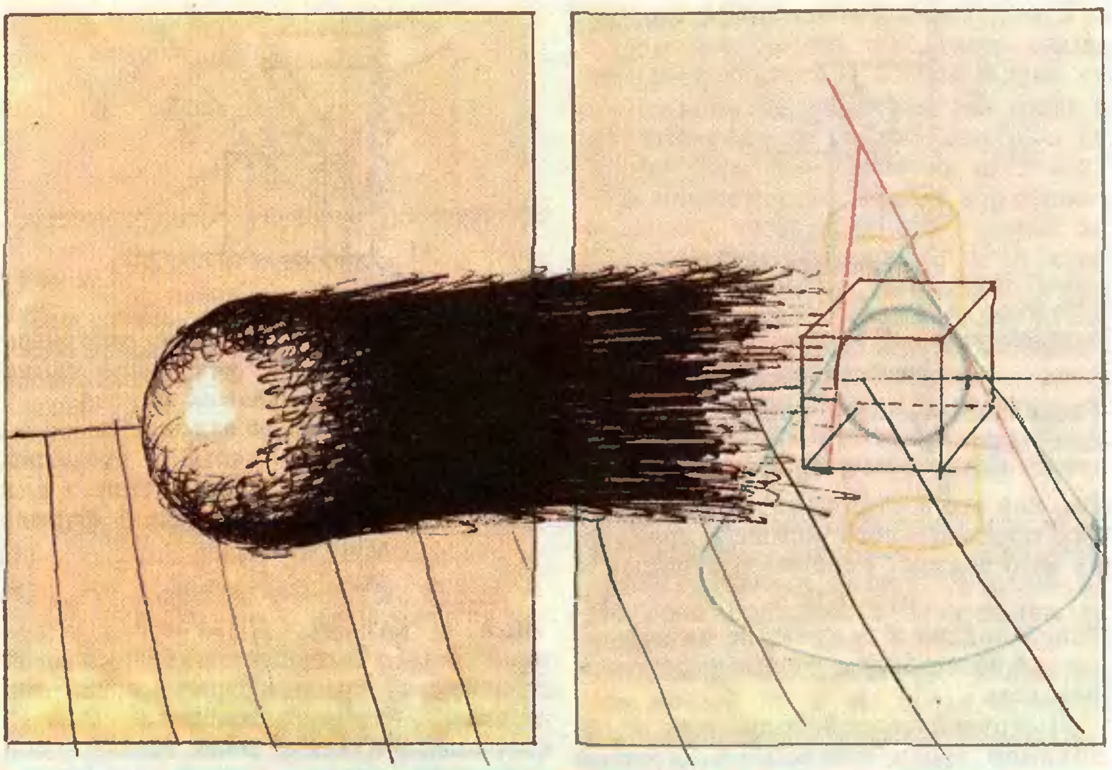
12. Найдите объем пространственной фигуры, образованной пересечением двух круговых цилиндрических поверхностей радиусом R, оси которых пересекаются а) под прямым углом, б) под углом α.

13. Можно ли в прямоугольнике размером 20×25 разместить 120 квадратов размером 1×1 так, чтобы любая окружность диаметром 1 внутри прямоугольника пересекала хотя бы один из этих квадратов?

14. Докажите, что если положительные числа x и y связаны равенством $x^y+y^x=x^x+y^y$, то $x=y$.

15. Касательные в точке $x=0$ к графикам функций $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)/g(x)$ пересекают ось абсцисс под одним и тем же углом. Найдите наибольшее значение $f(0)$.

Публикацию подготовил *Г. А. Гальперин*



Практикум абитуриента

Кинематические связи в задачах динамики

Кандидат физико-математических наук
А. И. ЧЕРНОУЦАН

В задачах по механике часто встречается ситуация, когда движение тел не является свободным. Ограничения могут создавать твердые поверхности, нерастяжимые нити, жесткие стержни и т. п. В простейших случаях мы учитываем подобные ограничения автоматически, часто даже не оговаривая их существования. Например, ускорение тела на плоскости мы направляем вдоль плоскости (учитывая наличие твердой поверхности), скорости буксира и баржи считаем одинаковыми (принимая во внимание присутствие нерастяжимого троса) и т. д. Однако иногда возникает необходимость выразить эти ограничения в виде специального уравнения, которое мы будем называть «кинематической связью». Начнем с такой задачи.

Задача 1. *Найдите ускорения призмы массой m_1 и куба массой m_2, изображенных на рисунке 1, а. Трением пренебречь.*

Запишем второй закон Ньютона для каждого тела (в проекции на направление, совпадающее с соответствующим ускорением):

$$m_1g - N\sin\alpha = m_1a_1, \qquad (1)$$

$$N\cos\alpha = m_2a_2. \qquad (2)$$

Мы учли, что по третьему закону Ньютона $\vec{N}_{12} = -\vec{N}_{21}$, т. е. $N_{12} = N_{21} = N$. Написанные два уравнения содержат три неизвестных. Третье уравнение — кинематическая связь между a_1 и a_2 — должно отразить тот факт, что куб и призма остаются все время в контакте друг с другом. Это можно сделать несколькими способами.

1) Рассмотрим два близких положения системы, разделенные промежутком времени Δt (рис. 1, б). В треугольнике ABC сторона AB равна перемещению призмы Δx_1, а сторона BC —

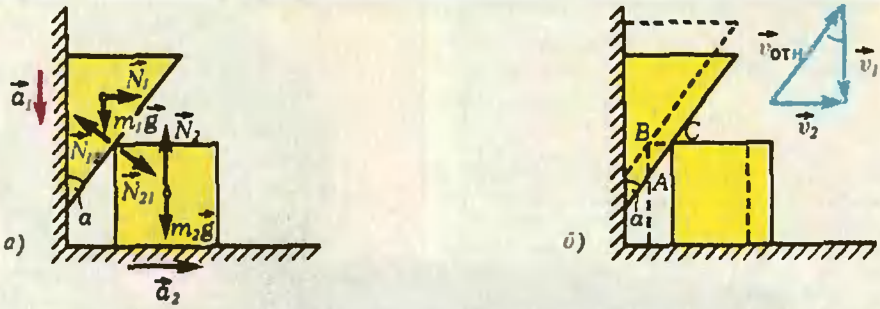


Рис. 1.

перемещению куба Δx_2. Имеем

$$\Delta x_2=\Delta x_1 \operatorname{tg}\alpha.$$

Разделив обе части равенства на Δt, получаем

$$v_2=v_1 \operatorname{tg}\alpha.$$

Так как это соотношение справедливо для произвольного момента времени, из него следует искомое соотношение

$$a_2=a_1 \operatorname{tg}\alpha. \qquad (3)$$

Такой подход к получению кинематической связи будем называть прямым методом.

2) Другой способ получения необходимой связи основан на переходе в такую систему отсчета, где условие контакта становится тривиальным. В системе отсчета, связанной с призмой (см. рис. 1, *б*), скорость куба $\vec{v}_{\text{отн}}$ направлена вдоль ее поверхности, т. е. под углом α к вертикали. Записывая закон сложения скоростей

$$\vec{v}_2=\vec{v}_{\text{отн}}+\vec{v}_1,$$

из соответствующего векторного треугольника получаем

$$v_2=v_1 \operatorname{tg}\alpha, \text{ и } a_2=a_1 \operatorname{tg}\alpha.$$

Решаем совместно уравнения (1)—(3) и находим

$$a_1=\frac{m_1}{m_1+m_2 \operatorname{tg}^2\alpha}g,$$

$$a_2=\frac{m_1 \operatorname{tg}\alpha}{m_1+m_2 \operatorname{tg}^2\alpha}g.$$

В этой задаче второй метод выглядит несколько искусственно. Однако в некоторых случаях именно правильный выбор системы отсчета позволяет существенно упростить проблему кинематических связей. Вот пример.

Задача 2. *Клин высотой h с углом наклона α стоит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 2). Масса клина m_1. С вершины клина начинает соскальзывать без трения брусок массой m_2. Найдите ускорение клина и время соскальзывания бруска.*

Начнем со второго закона Ньютона. Запишем его для клина в проекции на горизонтальное направление, а для бруска пока что в векторной форме:

$$N \sin\alpha=m_1 a_1, \qquad (4)$$

$$\vec{N}_{21}+m_2\vec{g}=m_2\vec{a}_2. \qquad (5)$$

Как и раньше, $\vec{N}_{12}=-\vec{N}_{21}$, $N_{12}=N_{21}=N$. Выбор направления осей для бруска связан с решением вопроса о кинематической связи.

Кинематическая связь между ускорениями должна отразить тот факт, что в процессе движения брусок все время остается на поверхности клина. Записать это в виде прямого уравнения оказывается непросто. Вместо этого перейдем в систему отсчета, связанную с клином. В этой системе скорость бруска $\vec{v}_{\text{отн}}$ и его ускорение $\vec{a}_{\text{отн}}$ направлены вдоль клина. Тогда из закона сложения скоростей $\vec{v}_2=\vec{v}_{\text{отн}}+\vec{v}_1$ получаем закон сложения ускорений (см. рис. 2)

$$\vec{a}_2=\vec{a}_{\text{отн}}+\vec{a}_1. \qquad (6)$$

Отсюда видно, что от неизвестных a_1 и a_2 удобнее перейти к неизвестным a_1 и $a_{\text{отн}}$, решив тем самым проблему кинематической связи. Подставляя равенство (6) в уравнение (5) и проектируя это уравнение на направления вдоль поверхности клина и перпендикулярно к ней, получаем

$$m_2 g \sin\alpha=m_2(a_{\text{отн}}-a_1\cos\alpha), \qquad (5')$$

$$N-m_2 g\cos\alpha=-m_2 a_1 \sin\alpha. \qquad (5'')$$

Из уравнений (4), (5′) и (5″) находим

$$a_1=\frac{m_2 \sin\alpha\cos\alpha}{m_1+m_2 \sin^2\alpha}g,$$

$$a_{\text{отн}}=\frac{(m_1+m_2)\sin\alpha}{m_1+m_2\sin^2\alpha}g.$$

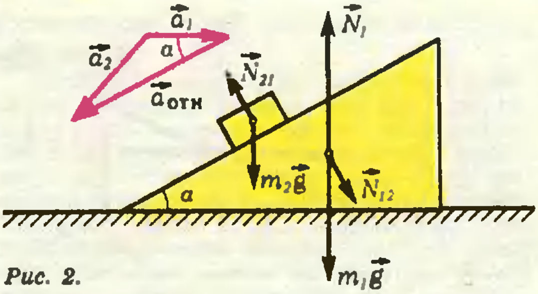


Рис. 2.

Для ответа на второй вопрос задачи нам не надо искать a_2, так как время соскальзывания выражается как раз через $a_{отн}$:

$$\frac{a_{отн}t^2}{2}=\frac{h}{\sin\alpha}.$$

Отсюда находим

$$t=\sqrt{\frac{2h}{a_{отн}\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{2h(m_1+m_2\sin^2\alpha)}{(m_1+m_2)\sin^2\alpha g}}.$$

Как уже говорилось, ограничение на движение может определяться не только прямым контактом рассматриваемых тел, но и наличием в системе соединительных элементов — стержней, нитей и т. п. В большинстве случаев, даже если в условии это не оговорено, соединительные элементы считаются идеальными, т. е. нити — невесомыми и нерастяжимыми, стержни — невесомыми и абсолютно жесткими, для блоков кроме невесомости предполагается также отсутствие трения на оси. (На самом деле слово «невесомый» означает, что масса данного элемента пренебрежимо мала по сравнению с массами других тел системы, слово «нерастяжимый» — что удлинение элемента мало́ по сравнению с перемещениями тел системы и т. д.) Перед тем, как разбирать конкретные примеры, выясним, что́ следует из идеальности соединительных элементов. Рассмотрим три частных случая.

1. Невесомость нити. Напишем второй закон Ньютона для участка нити массой $\Delta m_н$ (рис. 3, *а*):

$$T-T'=\Delta m_н a.$$

Так как $\Delta m_н=0$, то $T=T'$, т. е. сила натяжения не меняется вдоль нити.

2. Невесомость подвижного блока и отсутствие трения на его оси. Для раскручивания невесомого блока, в котором нет трения, не нужен вращательный момент. Из этого следует, что натяжение одной и той же нити по обе стороны блока одинаково (рис. 3,*б*), кроме того $T'-2T=0$, т. е. $T'=2T$.

3. Невесомость стержня. Это условие означает, что сумма сил и сумма моментов сил, действующих на стержень, равны нулю. Например, если к стержню приложены две силы, то они равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль стержня (рис. 3, *в*). (В отличие от нити, стержень может быть не только в растянутом, но и в сжатом состоянии.)

Нерастяжимость и жесткость нитей и стержней приводит к появлению кинематических связей, которые мы разберем отдельно в следующих задачах.

З а д а ч а 3. ***Найдите ускорения грузов массой m_1 и m_2 после перерезания верхней нити (рис. 4). Нити и блок считать идеальными.***

Выберем положительное направление оси вертикально вниз и запишем второй закон Ньютона для обоих тел:

$$T+m_1g=m_1a_1, \qquad (7)$$
$$m_2g-2T=m_2a_2 \qquad (8)$$

(мы учли свойства блока и нити, описанные выше).

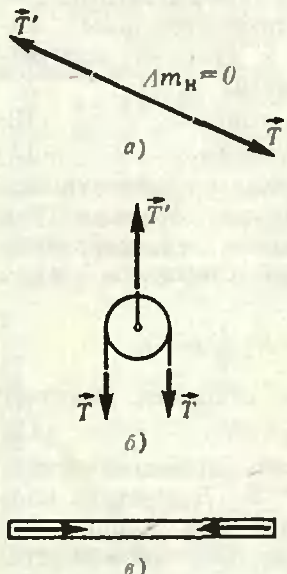


Рис. 3.

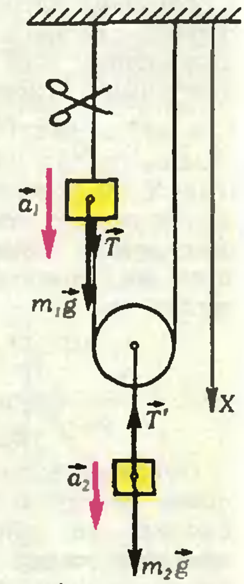


Рис. 4.

Для нахождения кинематической связи между a_1 и a_2 применим, как мы его назвали, прямой метод. Запишем длину нити в виде

$$l = x_2 + \pi R + (x_2 - x_1),$$

где x_1 — координата груза массой m_1, x_2 — координата центра блока, R — его радиус, и учтем, что длина нити при движении грузов не изменяется. Тогда для перемещений грузов получим соотношение

$$2\Delta x_2 - \Delta x_1 = 0,$$

откуда

$$2v_2 - v_1 = 0,$$
$$2a_2 - a_1 = 0. \qquad (9)$$

Решая уравнения (7)—(9) совместно, находим

$$a_1 = 2a_2 = \frac{2(m_2 + 2m_1)}{m_2 + 4m_1} g.$$

(Обратите внимание на то, что $a_1 > g$. Подумайте, почему получился такой ответ.)

Задача 4. *Невесомый стержень с одинаковыми грузами массой m на концах шарнирно закреплен на оси, которая делит его длину в отношении 2:1 (рис. 5). Стержень удерживают в горизонтальном положении и в некоторый момент освобождают. Найдите ускорения грузов сразу после этого, а также давление стержня на ось в этот момент.*

Запишем второй закон Ньютона для грузов, выбрав положительные направления осей в сторону соответствующих ускорений:

$$mg - N_1 = ma_1, \qquad (10)$$
$$N_2 - mg = ma_2, \qquad (11)$$

где N_1 и N_2 — силы, действующие на грузы со стороны стержня. Так как сумма моментов сил, действующих на невесомый стержень, равна нулю, то

$$N_1 \frac{2}{3} l - N_2 \frac{1}{3} l = 0,$$

где l — длина стержня. Отсюда

$$N_2 = 2N_1. \qquad (12)$$

Осталось записать кинематическую связь между a_1 и a_2. Для этого изобразим на рисунке 5 положение стержня через малый промежуток времени Δt после начала движения. Из подобия получаем

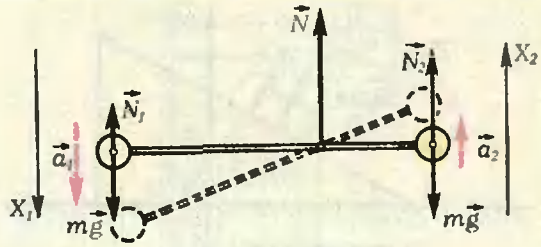


Рис. 5.

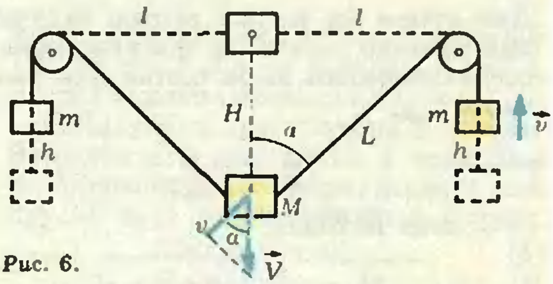


Рис. 6.

$$x_1 = 2x_2,$$

откуда

$$v_1 = 2v_2,$$
$$a_1 = 2a_2. \qquad (13)$$

Решая совместно уравнения (10)—(13), находим

$$a_1 = 2a_2 = \frac{2}{5} g,$$
$$N_2 = 2N_1 = \frac{6}{5} mg.$$

Так как сумма сил, действующих на невесомый стержень, равна нулю, то сила реакции оси (равная по модулю силе давления на ось) равна

$$N = N_1 + N_2 = \frac{9}{5} mg.$$

* * *

Во многих задачах, рассчитанных на применение закона сохранения энергии, требуется найти скорости тел к определенному моменту времени. В этом случае надо установить кинематические связи не между ускорениями, а между скоростями тел. При решении таких задач полезно использовать тот факт, что полная работа, совершаемая любым идеальным соединительным элементом, равна нулю. Физическая причина этого состоит в том, что в таком элементе не может запасаться никакая энергия — ни кинетическая (его масса равна нулю), ни потенциальная (элемент не деформируется).

Последнее утверждение требует пояснения. Может показаться, что даже при малой деформации очень жесткого стержня (или другого элемента) потенциальная энергия его деформации $E_p = kx^2/2$ может быть велика — ведь она пропорциональна жесткости стержня k. Но если учесть, что сила $F = kx$, возникающая при деформации, остается конечной при $k \to \infty$ (она определяется движением тел, закрепленных на стержне), то потенциальная энергия $E_p = F^2/(2k)$ при больших k оказывается очень малой.

Задача 5*). *Груз массой M сначала удерживают на уровне блоков, а затем освобождают (рис. 6). Считая нити и блоки идеальными, размеры блоков малыми по сравнению с расстоянием $2l$ между ними, а массу m грузиков, висящих на концах нитей, известной, найдите скорость груза в тот момент, когда нити составляют угол α с вертикалью. Полученный ответ исследуйте.*

К рассматриваемому моменту груз массой M опустился на $H = l \operatorname{ctg} \alpha$, а грузики массой m поднялись на $h = l/\sin\alpha - l$ каждый. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{MV^2}{2} + 2\frac{mv^2}{2} - MgH + 2mgh = 0. \quad (14)$$

Для того чтобы найти связь между v и V, можно, например, применить прямой метод. Из рисунка 6

$$l^2 + H^2 = L^2.$$

Дифференцируя по времени (и учитывая, что $l' = 0$), находим

$$2H \cdot H' = 2L \cdot L'.$$

Так как $L' = v$, $H' = V$, а $H/L = \cos\alpha$, то получаем искомую связь

$$v = V \cos \alpha. \quad (15)$$

Однако проще получить это соотношение из следующих соображений. Раз расстояние L от груза массой M до блока в рассматриваемый момент увеличивается со скоростью v (с такой скоростью вытягивается нить), то проекция скорости $\vec{V}$ этого груза на направление нити должна быть равна v. Учитывая, что скорость $\vec{V}$ направлена вертикально, получаем уравнение (15).

Из уравнений (14) и (15) находим

$$V = \sqrt{2gl\,\frac{M\cos\alpha + 2m(\sin\alpha - 1)}{\sin\alpha(M + 2m\cos^2\alpha)}}.$$

Выясним, будет ли центральный груз все время опускаться (мы считаем нити очень длинными) или при каком-то α он остановится и начнет подниматься. Уравнение $V = 0$ (условие остановки) преобразуется к виду

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2m - M}{2m + M},$$

т. е. остановка и обратное движение грузов происходят только при $M < 2m$. Если $M > 2m$, то центральный груз будет все время перевешивать и его скорость будет неограниченно возрастать ($V \to \infty$ при $\alpha \to 0$ — проверьте это сами). Если же $M = 2m$, то при опускании центрального груза система все ближе подходит к равновесию, ускорения грузов стремятся к нулю, а их скорости — к предельному значению $V_\infty = \sqrt{gl}$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Хотелось бы обратить внимание на то, что при использовании закона сохранения энергии сила натяжения нити вообще не вошла в расчеты.

Последний пример иллюстрирует методы получения кинематических связей при движении твердых стержней (или других твердых связей). Напомним, что при движении твердого тела расстояние между любыми двумя его точками не изменяется.

Задача 6. *Невесомый стержень длиной l с грузами массой m на концах соскальзывает по сторонам прямого двугранного угла (рис. 7, а). Найдите скорости грузов в тот момент, когда стержень составляет с горизонтом угол α. Трения нет. В начальный*

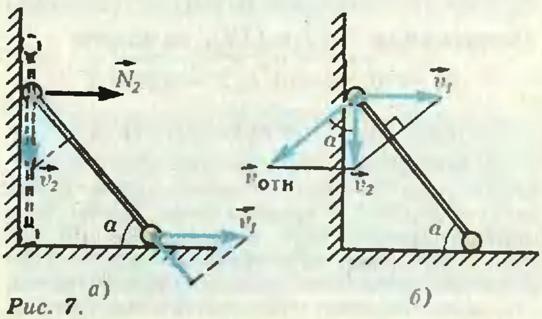


Рис. 7.

*) Эта и следующая задачи по своему уровню несколько выходят за пределы задач, предлагаемых обычно на вступительных экзаменах в вузы. Однако знакомство с ними для абитуриентов окажется небесполезным.

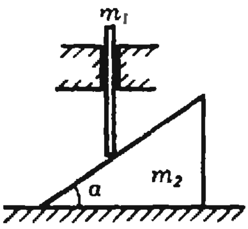


Рис. 8.

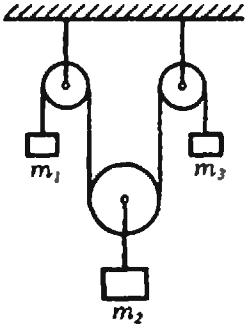


Рис. 9.

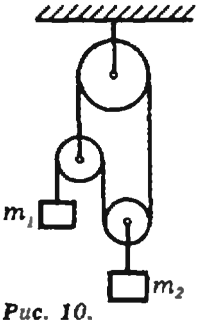


Рис. 10.

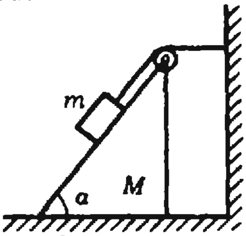


Рис. 11.

момент стержень находился в вертикальном положении.

Из закона сохранения энергии получаем

$$mg(l-y)=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}, \qquad (16)$$

где $y=l\sin\alpha$ — координата второго груза в рассматриваемый момент. Для получения кинематической связи можно применить прямой метод, как это было сделано в предыдущей задаче (проделайте это сами). Быстрее же и нагляднее кинематическая связь получается из таких соображений. Раз расстояние между грузами остается неизменным, то в каждый момент скорость, с которой первый груз «удаляется» от второго, равна скорости, с которой второй груз «приближается» к первому. Иначе говоря, проекции скоростей грузов на стержень в любой момент времени одинаковы (см. рис. 7, *а*):

$$v_1\cos\alpha=v_2\sin\alpha. \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (16), находим

$$v_1=\sqrt{2gl\sin^2\alpha(1-\sin\alpha)}\ ,$$

$$v_2=\sqrt{2gl\cos^2\alpha(1-\sin\alpha)}\ .$$

В кинематике твердого тела часто используется «разложение» сложного движения на поступательное и вращательное. Чтобы продемонстрировать этот метод, применим его для получения кинематической связи (17). В системе отсчета, связанной с первым грузом, стержень совершает чисто вращательное движение. Значит, в этой системе скорость второго груза $\vec{v}_{отн}$ направлена перпендикулярно стержню. Применяя закон сложения скоростей $\vec{v}_2=\vec{v}_{отн}+\vec{v}_1$ (см. рис. 7, *б*), получаем соотношение (17).

Может показаться, что найденные выражения для скоростей дают полное решение задачи. Однако в этой задаче содержится поучительный подвох, разбором которого мы и закончим статью.

Решение было бы полным, если бы второй груз не мог оторваться от вертикальной стены. (Для этого можно было бы, например, посадить грузы на гладкие штанги, а стержень присоединить к ним шарнирно). Однако в нашем варианте задачи (см. рис. 7, *а*) при некотором угле произойдет отрыв второго груза от вертикальной стены, после чего найденный ответ будет неприменим. Дело в том, что горизонтальный импульс системы определяется только движением первого груза, скорость которого, в соответствии с выражением для v_1, до некоторого угла возрастает, а потом начинает убывать. Это означает, что в какой-то момент должна изменить направление внешняя горизонтальная сила, действующая на систему. Но есть только одна горизонтальная сила — сила реакции вертикальной стенки, которая не может изменить свое направление. Таким образом, в тот момент, когда реакция стенки обращается в нуль, происходит отрыв второго груза от стенки. Дифференцируя выражение для v_1 по времени, находим, что v_1 максимальна при $\sin\alpha=2/3$. При угле $\alpha=\arcsin(2/3)$ и происходит отрыв стержня от вертикальной стенки.

Упражнения

1. Найдите ускорения стержня и клина, изображенных на рисунке 8. Трения нет.

2. Найдите натяжение нити в системе, изображенной на рисунке 9.

3 (для любителей каверз и ловушек). Чему равны ускорения грузов в системе, изображенной на рисунке 10?

4. Найдите ускорение клина на рисунке 11. Трения нет. Указание. Примените метод, использованный при решении задачи 2 в статье.

Стереометрические задачи с шарами

Кандидат физико-математических наук
М. Р. ЛИБЕРЗОН

В этой статье обсуждаются задачи о комбинациях тел в пространстве, в которые входят один или несколько шаров. Указанную в задаче совокупность тел бывает трудно изобразить на чертеже, но это и не нужно: для решения достаточно построить плоские чертежи, получающиеся в сечении данной пространственной фигуры плоскостями или при проектировании ее на плоскости. При этом главное — правильно выбрать плоскости. Универсального способа для такого выбора не существует; нужно, конечно, стараться, чтобы секущие плоскости проходили через как можно большее количество узловых точек — центров шаров, точек касания и т. д., — а при проектированиях сохранялись (или изменялись контролируемым образом) данные длины и углы.

Напомним несколько простых геометрических фактов, которые часто используются при выборе плоскостей.

Утверждение 1. *Радиусы, проведенные в точку касания двух шаров, лежат на одной прямой. Расстояние между центрами касающихся шаров равно сумме или разности их радиусов.*

Утверждение 2. *Если плоскость проходит через центры касающихся шаров, то она содержит точку касания.*

Утверждение 3. *Пусть шар касается боковой поверхности прямого кругового цилиндра. Если плоскость проходит через ось цилиндра и центр шара, то она содержит точку касания.*

Утверждение 4. *Пусть шар касается боковой поверхности прямого кругового конуса. Если плоскость проходит через высоту конуса и центр шара, то она содержит точку касания.*

В качестве примеров разберем несколько задач, предлагавшихся в разное время на вступительных экзаменах в МГУ.

Задача 1. *В пространство, заключенное между сферической поверхностью и плоскостью, проходящей через ее центр, вложено три одинаковых шара радиусом r так, что каждый шар касается двух других, сферической поверхности и указанной плоскости. Найдите радиус сферической поверхности.*

Решение. Проекции центров данных шаров на данную плоскость являются вершинами правильного треугольника со стороной $2r$; центр сферической поверхности лежит в центре этого треугольника; расстояние от этого центра до любой вершины треугольника равно $2r/\sqrt{3}$ (рис. 1).

Проведем плоскость через центр O сферической поверхности и центр A одного из данных шаров перпендикулярно к данной плоскости. В сечении получится фигура, изображенная на рисунке 2. На этом рисунке точка M — проекция точки A на данную плоскость, P — точка касания данного шара с центром A и данной сферической поверхности. В прямоугольном треугольнике AOM известны длины катетов: $AM=r$, $MO=2r/\sqrt{3}$. Следо-

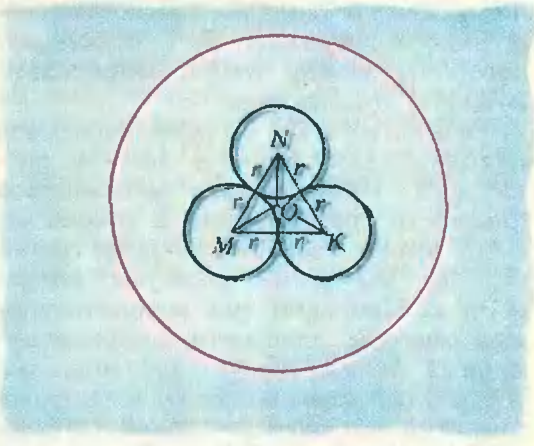


Рис. 1.

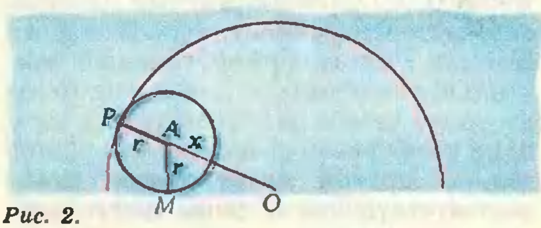


Рис. 2.

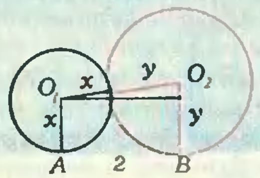


Рис. 3.

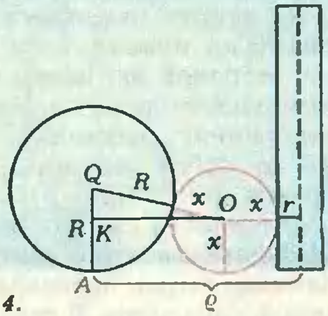


Рис. 4.

вательно, $AO=\sqrt{r^2+\frac{4r^2}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}r$ и мы можем найти нужный радиус:

$$OP=OA+AP=\frac{\sqrt{21}}{3}r+r=\frac{3+\sqrt{21}}{3}r.$$

Задача 2. *В треугольнике ABC сторона AB равна 2, сторона BC равна 4 и $\angle B=60°$. Три шара касаются плоскости треугольника ABC соответственно в точках A, B, C и попарно касаются между собой. Определите радиусы этих шаров.*

Решение. По теореме косинусов находим длину стороны AC: она равна $\sqrt{12}$. Пусть шары, касающиеся плоскости треугольника в точках A, B, C, имеют своими центрами точки O_1, O_2, O_3, а их радиусы равны x, y, z. Проведем три вспомогательные секущие плоскости, перпендикулярные к плоскости треугольника ABC: одну через точки O_1 и O_2 (сечение этой плоскостью нашей фигуры изображено на рисунке 3), другую через точки O_2 и O_3 и третью через точки O_1 и O_3 (сечения этими плоскостями устроены аналогично). В каждом сечении лежит прямоугольный треугольник, у которого длина гипотенузы равна сумме радиусов двух шаров, один катет равен разности этих радиусов, а другой катет равен длине соответствующей стороны треугольника ABC. Записав теорему Пифагора для каждого из этих треугольников, мы получим систему трех уравнений с тремя неизвестными, из которой находим $x=\sqrt{3}/2$, $y=2\sqrt{3}/3$, $z=2\sqrt{3}$.

Задача 3. *На плоскости лежит шар радиусом R. Эту же плоскость пересекает прямой круговой цилиндр радиусом r, причем образующие цилиндра перпендикулярны к плоскости. Центр шара удален от оси цилиндра на расстояние $\rho>R+r$. Найдите минимально возможный радиус шара, который касался бы одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.*

Решение. Проведем вспомогательную плоскость через ось цилиндра и центр Q заданного шара. Центр O шара, радиус которого мы ищем, лежит, очевидно, в этой плоскости. В сечении (рис. 4) расположен прямоугольный треугольник OKQ, в котором длины всех сторон выражаются через данные задачи R, r, ρ и искомый радиус x. Теорема Пифагора дает уравнение для вычисления x; решая это уравнение, получаем $x=(\sqrt{R+\rho-r}-\sqrt{R})^2$.

Задача 4. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1\parallel BB_1\parallel CC_1\parallel DD_1$). В угол A куба вписан шар радиусом $R=0{,}5$. Найдите радиус шара, вписанного в угол C куба и касающегося данного шара, при условии, что ребро куба $a=1{,}5$.*

Решение. Пусть Q — центр шара, вписанного в угол A. Существуют три шара, вписанных в угол C и касающихся заданного шара. Один из них касается основания куба $ABCD$

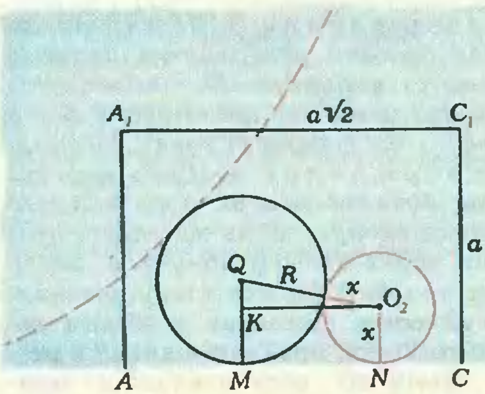


Рис. 5.

в той же точке, что заданный шар, и содержит его внутри себя. Центр этого шара обозначим через O_1. Точка O_1 находится над точкой Q. Еще два шара, радиусы которых мы должны найти, касаются шара Q внешним образом и расположены по разные стороны от него: меньший ближе к вершине C, больший дальше от нее. Обозначим их центры буквами O_2 и O_3 соответственно.

(Заметим, что только самый маленький шар O_2 помещается внутри куба. Средний шар O_1 и большой шар O_3 «вылезают» за его пределы и могут касаться не граней куба, а их продолжений.)

Найдем радиусы этих трех шаров. Проведем вспомогательную плоскость через вертикальные ребра AA_1 и CC_1. В этой плоскости лежат центры всех шаров, точки касания их между собой и с плоскостью $ABCD$. Рассмотрим сечение этой плоскостью шаров O_2 и Q (рис. 5). В треугольнике O_2KQ не известна только длина катета KO_2. Но $KO_2 = MN$, а расстояние между точками M и N мы находим из проекции на плоскость основания $ABCD$ (рис. 6):

$$MN = AC - AM - NC = a\sqrt{2} - R\sqrt{2} - x\sqrt{2} = \sqrt{2}(a - R - x).$$

Воспользовавшись теоремой Пифагора для треугольника O_2KQ, мы получим уравнение

$$(R + x)^2 = (R - x)^2 + 2(a - R - x)^2,$$

которое имеет два корня (напомним, что по условию $R = 0{,}5$, $a = 1{,}5$): $(3 - \sqrt{5})/2$ и $(3 + \sqrt{5})/2$.

Что означает наличие двух корней? Нарисуйте сечение и проекцию для шаров O_3 и Q, аналогичные показанным на рисунках 5 и 6. Убедитесь в том, что радиус большого шара O_3 находится из уравнения, которое отличается от написанного только знаками внутри скобок в правой части. Эта разница уничтожается при возведении в квадрат. Значит, полученные два корня — это длины радиусов шаров O_2 и O_3 соответственно.

Для вычисления радиуса шара O_1 достаточно рассмотреть проекцию на плоскость основания $ABCD$, показанную на рисунке 7. Искомый радиус равен длине катета равнобедренного прямоугольного треугольника MPC, гипотенуза которого находится так:

$$MC = AC - AM = a\sqrt{2} - R\sqrt{2} = \sqrt{2}(a - R) = \sqrt{2}.$$

Отсюда радиус шара O_1 равен 1.

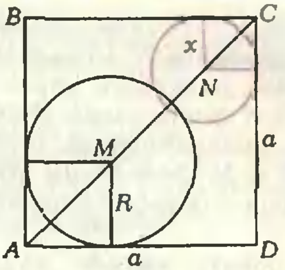


Рис. 6.

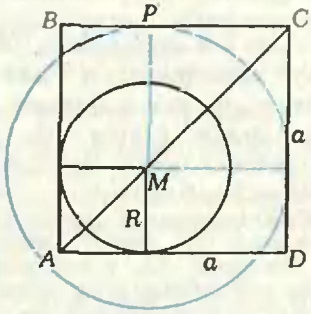


Рис. 7.

Задача 5. *На основании прямого кругового цилиндра лежат три шара радиусом r. На них лежит четвертый шар того же радиуса. Каждый из этих четырех шаров касается боковой поверхности конуса и трех других шаров. Найдите высоту конуса.*

Решение. Введем следующие обозначения: S — вершина конуса; P — центр верхнего шара; A — центр одного из шаров, лежащих на основа-

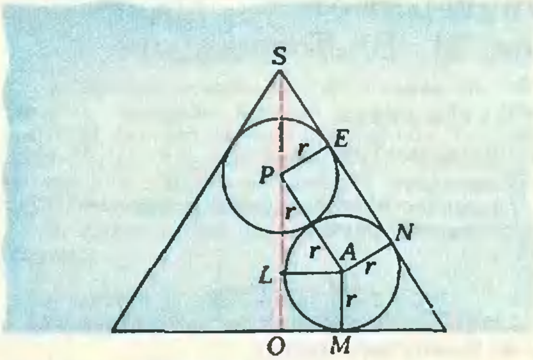


Рис. 8.

нии конуса; M — точка касания этого шара с основанием. Проведем вспомогательную плоскость через высоту конуса SO и центр шара A. Сечение имеет вид, показанный на рисунке 8; буквами E и N обозначены точки касания шаров с боковой поверхностью конуса.

Будем искать высоту конуса SO как сумму длин отрезков SP, PL и LO. Из прямоугольного треугольника PLA

$$PL=\sqrt{PA^2-LA^2}=\sqrt{PA^2-OM^2},$$

а величину отрезка OM находим в точности так же, как в первой задаче, спроектировав шары на плоскость основания конуса (см. рис. 1). Получим $PL=2r\sqrt{6}/3$.

Из подобия треугольников SEP и PLA

$$SP=\frac{PE\cdot PA}{LA}=r\sqrt{3}.$$

Так как $LO=r$, окончательно имеем

$$SO=r(\sqrt{3}+2\sqrt{6}/3+1).$$

Упражнения

1. В правильную треугольную пирамиду с ребром основания длиной a и двугранным углом при основании, равным 60°, вложено три шара одинаковых радиусов так, что каждый шар касается двух других, плоскости основания и двух боковых граней пирамиды. Найдите радиус каждого шара.

2. Два шара касаются плоскости P в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами шаров равно 10. Третий шар касается внешним образом двух данных шаров, а его центр O лежит в плоскости P. Известно, что $AO=BO=2\sqrt{10}$, $AB=8$. Определите радиус третьего шара.

3. На плоскости лежит прямой круговой цилиндр радиусом R и, не пересекаясь с ним, лежит шар радиусом r. Расстояние от оси цилиндра до центра шара равно ρ. Найдите минимальный возможный радиус шара, который бы касался одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.

4. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1$). В угол A куба вписан шар радиусом $R=0{,}5$. Найдите радиус шара, вписанного в угол C_1 куба и касающегося данного шара, если ребро куба $a=1{,}5$.

5. В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности конуса и остальных четырех шаров. Найдите объем конуса, если радиус каждого шара равен r.

6. В двугранный угол величиной 60° вписаны два шара радиусом R, касающиеся друг друга. Найдите радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося обоих данных шаров.

7. В прямом круговом конусе расположены два одинаковых шара радиусом r, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый шар касается боковой поверхности конуса и другого шара. Высота конуса в 4/3 раза больше радиуса основания. Найдите объем конуса.

Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{1}{2}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3})<2.$$

3. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4, причем $AC=BC$. На прямой AB взята точка D, удаленная от прямых AC и BC на расстояния 11 и 3 соответственно. Найдите косинус угла DBC.

4. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/ч, а другой — на 20 км/ч, то они также прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 часа раньше. Найдите скорости поездов.

5. Найдите все пары значений a и b, для которых система

$$\begin{cases} x^2-y^2+a(x+y)=x-y+a, \\ x^2+y^2+bxy-1=0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений (x, y).

6. Сфера касается ребер AS, BS, BC и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L, M и N соответственно. Найдите длину отрезка KL, если $MN=7$ с, $NK=5$ с, $LN=2\sqrt{29}$ с и $KL=LM$.

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}+3y=9, \\ x-1=(\sqrt{x}+1)y. \end{cases}$$

2. Существуют ли действительные значения a, для которых

$$a^2-4a+\sqrt{3}=-a\sqrt{2}\ ?$$

Если такие значения существуют, то сколько их?

3. Решите неравенство

$$\log_{(x+1)^2}8+3\log_4(x+1)\geqslant 9\frac{1}{4}.$$

4. Решите уравнение

$$(2+3\cos 2x)(\sqrt{2\cos 2x+3\sin x+3-2\sin x+1})=0.$$

5. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Масса маленького блока 0,2 тонны, большого — 3,6 тонны, большой блок занимает место 14 маленьких. Найдите минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

6. В пирамиде $ABCD$ проведено сечение $KMLN$ так, что точка K лежит на ребре AD, точка M — на ребре DC, точка N — на ребре AB, точка L — на ребре BC, O — точка пересечения диагоналей KL и MN четырехугольника $KMLN$. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найдите отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$4\cdot OL=3\cdot OK,\ 25\cdot ON=24\cdot OM,$$
$$DK\cdot NA-KA\cdot BN=KA\cdot NA.$$

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{2x}\geqslant\frac{1}{1-x}.$$

2. Решите уравнение

$$4^{\sin x}+2^{5-2\sin x}=18.$$

3. Известно, что $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{4\pi}{3}$.

Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

4. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-2x)}.$$

5. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B — прямой) взята точка D так, что площади треугольников ABD и BDC соответственно в три и четыре раза меньше площади треугольника ABC. Длины отрезков AD и DC равны соответственно a и c. Найдите длину отрезка BD.

6. Шар радиусом 2 вписан в правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S. Второй шар радиусом 1 касается первого шара, основания пирамиды и боковых граней BSC и CSD. Найдите объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре SC.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$(1+2\sin x)\sin x=\sin 2x+\cos x.$$

2. Решите неравенство

$$4\log_2 x+\log_2\left(\frac{x^2}{8(x-1)}\right)\leqslant 4-\log_2(x-1)-\log_2^2 x.$$

3. Стороны треугольника лежат на осях координат и на касательной к графику функции $y=x^2+2x+1$ в точке, абсцисса a которой удовлетворяет условию $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 0$. Найдите значение a, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

4. Основанием четырехугольной пирамиды $FABCD$ является квадрат $ABCD$. На ребре AF взята точка E такая, что отрезок CE перпендикулярен ребру AF. Проекция O точки E на основание пирамиды лежит на отрезке AC и делит его в отношении $AO:OC=\gamma$. Найдите разность объемов пирамид $FABCD$ и $EABD$, если известно, что $\angle ADF=90°$, а $AB=a$.

5. Найдите все значения p, при каждом из которых множество решений неравенства

$$(p-x^2)(p+x-2)<0$$

не содержит ни одного решения неравенства

$$x^2\leqslant 1.$$

Вариант 5

(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$7\sin\left(2x-\frac{5}{2}\pi\right)+9\cos x+1=0.$$

2. Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта B, расположенного ниже по течению относительно пункта A. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет по течению. Найдите, какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.

3. Решите неравенство

$$\frac{3\log_{0,5}x}{2-\log_{0,5}x}\geqslant 2\log_{0,5}x+1.$$

4. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2CD=3RD$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника APQ, если $AD=2BC$.

5. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 9x^2-6xy+y^2+6x-13y+3=0, \\ 13x^2+6xy+10y^2+16x+2y-4ax-6ay+a^2-2a+3=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 6
(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$5\sin 2x = \sin 9x - \sin 5x.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{2x+3} \geqslant x.$$

3. Один турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 часа быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость в 1,5 раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите скорость второго туриста.

4. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найдите радиус второй окружности, если длина отрезка AB равна 4.

5. Найдите такое значение x из промежутка $-1 \leqslant x \leqslant 2$, что точка с абсциссой x и ординатой

$$y = \sqrt{4 - 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3}$$

удалена на наименьшее расстояние от начала координат.

Вариант 7
(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$7^x - 14 \cdot 7^{-x} = 3^{\log_3 2} + 3.$$

2. Решите неравенство

$$y^2 + 3|y| < 10.$$

3. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность радиуса $2\sqrt{5}$, отсекающая от прямой BC отрезок $4\sqrt{5}$ и касающаяся прямой AC в точке A. Из точки B проведен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите площадь треугольника ABC, если $BF = 2$.

4. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} \sin(2x+y) = 0, \\ \cos(x+y) = 1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям

$$-\pi \leqslant x \leqslant \pi, \quad -2\pi \leqslant y \leqslant -\pi.$$

5. Найдите все натуральные значения b, при каждом из которых выражение $\frac{1}{x+y+3}$ имеет смысл для всех пар чисел (x, y), где $x < 0$ и $y < 0$, для которых выражение $\lg(xy - b)$ также имеет смысл.

Вариант 8
(геологический факультет)

1. Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями 10 и 12.

2. Решите уравнение

$$4\sin^2 x + 4\cos x = 1.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{1-x} \geqslant -3.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3. \end{cases}$$

5. В 7 часов утра от первого причала отплыли две лодки. Сначала они плыли 8 км по озеру, каждая с постоянной скоростью, а затем 5 км по течению реки до второго причала. Первая лодка прибыла на место не позднее 9 часов 50 минут, а вторая — не ранее 10 часов 40 минут того же дня. Чему равна скорость каждой лодки в стоячей воде, если скорость течения реки — 2 км/ч, а скорость второй лодки в стоячей воде составляет 75 % от скорости первой лодки в стоячей воде?

6. На продолжении ребра SK за точку K правильной четырехугольной пирамиды $SKLMN$ с вершиной S взята точка A так, что расстояние от точки A до плоскости SMN равно 24. Найдите длину отрезка KA, если $SL = 2\sqrt{41}$, $MN = 16$.

Вариант 9
(отделение политической экономии экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0.$$

2. В магазине продано 12 тонн орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб., и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

3. Решите неравенство

$$\frac{|2-x| - x}{|x-3| - 1} \leqslant 2.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) > 3.$$

5. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $\frac{AK}{KB} = \frac{3}{2}$, а $\frac{AM}{MC} = \frac{4}{5}$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC, делит отрезок BM.

Вариант 10
(отделения экономической кибернетики и планирования народного хозяйства экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$(2\sin x - 1)\sqrt{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0.$$

2. В магазине продано 10,5 тонны орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб., и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 33 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

3. См. задачу 3 варианта 9.

4. См. задачу 4 варианта 9.

5. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что

$$\frac{AK}{KB}=\frac{2}{3} \text{ и } \frac{AM}{MC}=\frac{4}{5}.$$

Найдите отношение, в котором точка пересечения прямых KC и BM делит отрезок BM.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 11
(факультет психологии)

1. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на 3/2 больше, чем сумма ее первых трех членов. Пятый член прогрессии равен ее третьему члену, умноженному на 4. Найдите ее четвертый член, если известно, что знаменатель прогрессии положителен.

2. Решите уравнение

$$\log_2(x^2-2x-1)-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)=1.$$

3. Бригада маляров белила потолки в классе и в актовом зале школы, причем площадь потолка в актовом зале в три раза больше, чем площадь потолка в классе. В той части бригады, которая работала в актовом зале, было на 6 маляров больше, чем в той части, которая работала в классе. Когда побелка всего потолка в актовом зале закончилась, та часть бригады, которая была в классе, еще работала. Какое наибольшее число маляров могло быть в бригаде, если все они начали работать одновременно и работали с одинаковой производительностью?

4. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{4}-\cos x}=\sqrt{\frac{3}{4}-\cos 3x}.$$

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD, AOD равны соответственно 20, 40, 60. Найдите угол BAO, если известно, что $AB=15$, $AO=8$, а угол BOA больше $31°$.

6. Докажите, что все решения неравенства

$$\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x^2-1}>2$$

удовлетворяют неравенству

$$x+2\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x^4-2x^2+1}>1+2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

Вариант 12
(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Решите уравнение

$$2\cos 2x+4\cos x=\sin^2 x.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{5-x^2}(2x^2-8x-2)=1+\log_{5-x^2}2.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{2x^2-15x-17}>x+3.$$

4. Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки O, M, E, C лежат на одной окружности. Найдите AB, если $BE=AM=3$.

5. Решите неравенство

$$\frac{9}{3x+2}>\frac{1+\log_3(x+6)}{x}.$$

Физика

Физический факультет

1. По штанге может без трения скользить муфта, прикрепленная пружиной к оси OO' (рис. 1). При вращении штанги с постоянной угловой скоростью ω положение равновесия муфты смещается вдоль штанги. Какому условию должна удовлетворять угловая скорость ω, чтобы это смещение было мало́ по сравнению с длиной пружины в недеформированном состоянии? Масса муфты m, жесткость пружины k.

2. По горизонтальной поверхности прямолинейно с постоянной скоростью движется гладкая полусфера радиусом R (рис. 2). В некоторый момент времени вершина полусферы касается нижней точки маленького шарика, который до этого момента удерживался, а в момент касания отпускается. При каком мини-

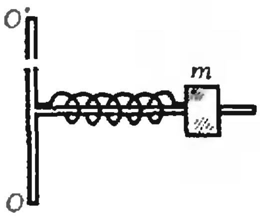


Рис. 1.

Рис. 2.

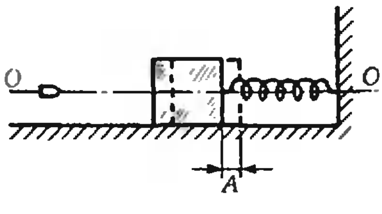


Рис. 3

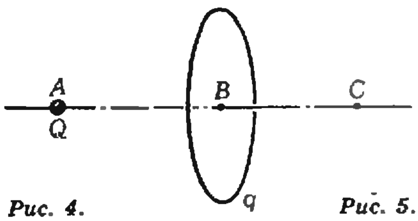


Рис. 4.

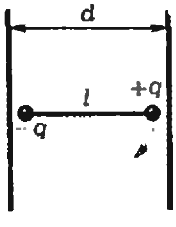


Рис. 5.

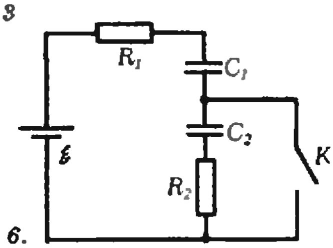


Рис. 6.

мальном значении скорости полусферы она не будет мешать свободному падению шарика? Ускорение свободного падения g.

3. На абсолютно гладкой горизонтальной поверхности лежит куб, связанный пружиной с вертикальной стенкой (рис. 3). Прямая OO' проходит через середины противоположных сторон куба и осевую линию пружины. Летящая в направлении OO' пуля попадает в середину стороны куба и застревает в нем. Куб начинает при этом колебаться с периодом T и амплитудой A. Чему была равна скорость пули перед ударом? Масса куба M, масса пули m. Закон Гука выполняется.

4. В баллоне находилось $m=0{,}3$ кг гелия. Через некоторое время в результате утечки гелия и уменьшения абсолютной температуры на 10 % давление в баллоне уменьшилось на 20 %. Какое число молекул гелия просочилось из баллона? $N_A=6\cdot 10^{23}$ 1/моль, $M_{He}=0{,}004$ кг/моль.

5. Влажный воздух, масса которого (вместе с водяными парами) m, занимает объем V при температуре T и давлении p. Давление насыщенных паров при этой температуре p_0. Молярная масса сухого воздуха M_1, водяных паров — M_2. Определите относительную влажность воздуха. Насыщенные пары рассматривать как идеальный газ.

6. Положительный заряд q равномерно распределен по тонкому кольцу радиусом r_0. Точечный положительный заряд Q движется вдоль оси AC, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр B (рис. 4). Какую минимальную скорость этот заряд должен иметь в точке A, отстоящей от центра кольца B на расстояние d, чтобы достигнуть точки C, лежащей на оси AC за кольцом? Масса заряда m. Потенциал точечного заряда q_0 в точке, находящейся на расстоянии r от заряда, равен $\varphi=q_0/(4\pi\varepsilon_0 r)$.

7. В средней части плоского конденсатора, расстояние между пластинами которого $d=10$ см, расположен вдоль поля диэлектрический стержень длиной $l=1$ см (рис. 5). На концах стержня имеются два точечных заряда одинаковой величины $q=10^{-11}$ Кл, но противоположного знака. Определите разность потенциалов между пластинами конденсатора, если для этого, чтобы повернуть стержень на 90° вокруг оси, проходящей через его центр (т. е. расположить поперек поля), необходимо совершить работу $A=3\cdot 10^{-10}$ Дж.

8. Какую работу совершит источник постоянного тока с ЭДС $\mathscr{E}=100$ В, включенный в схему, изображенную на рисунке 6, после замыкания ключа K к моменту времени, когда процесс дозарядки конденсатора емкостью C_1 уже завершится? $C_1=2\cdot 10^{-5}$ Ф, $C_2=2\times 10^{-5}$ Ф.

9. Два плоских зеркала составляют двугранный угол $\alpha=120°$. В плоскости, делящей угол пополам, расположен точечный источник света S (рис. 7). Расстояние между первыми мнимыми изображениями источника равно H. Чему будет равно расстояние между изображениями, если угол α уменьшить в два раза?

10. На переднюю грань плоскопараллельной пластинки, изготовленной из стекла с показателем преломления n, падает сходящийся световой пучок, имеющий вид конуса с углом при вершине γ (рис. 8). Диаметр освещенного пятна на передней грани пластинки D. При какой толщине пластинки диаметр выходного пятна будет равен $D/2$?

Механико-математический факультет

1. Граната массой $m=1$ кг разорвалась на высоте $H=6$ м над землей на два осколка. Непосредственно перед разрывом скорость гранаты была направлена горизонтально и по модулю равна $v=10$ м/с. Один из осколков массой $m_1=0{,}4$ кг полетел вертикально вниз и упал на землю под местом разрыва со скоростью $v_1=40$ м/с. Чему равен модуль скорости второго осколка сразу после разрыва?

2. Между двумя кубиками массами m и M находится сжатая пружина (рис. 9). Если кубик массой M удерживать на месте, а другой кубик отпустить, то он отлетит со скоростью v. С какой скоростью будет двигаться кубик массой m, если оба кубика освободить одновременно? Деформация пружины в обоих случаях одинакова. Трением и массой пружины пренебречь.

3. Алюминиевая спица длиной $L=25$ см и площадью поперечного сечения $S=0{,}1$ см^2 подвешена на нити за верхний конец (рис. 10). Нижний конец опирается на горизонтальное дно сосуда, в который налита вода. Длина погруженной в воду части спицы $l=10$ см. Найдите силу, с которой спица давит на дно сосуда, если известно, что нить расположена вертикально. Плотность алюминия $\rho_a=2{,}7$ г/см^3, плотность воды $\rho_в=1$ г/см^3.

4. В чайник налили воду при температуре $t=10$ °С и поставили на электроплитку. Через время $\tau_1=10$ мин вода закипела. Через какое время вода полностью выкипит? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r=2{,}3$ МДж/кг. Температура кипения воды $t_к=100$ °С.

5. Вертикально расположенный цилиндрический сосуд, закрытый подвижным поршнем

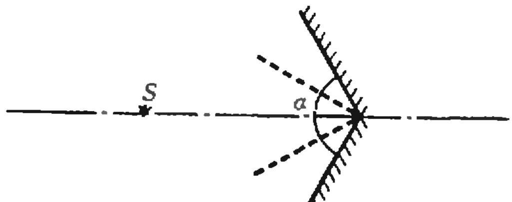


Рис. 7.

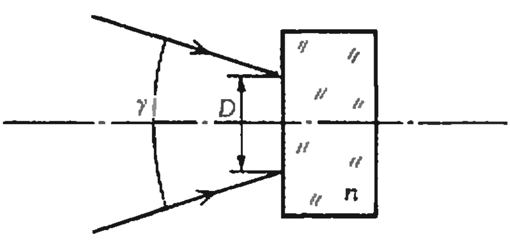


Рис. 8.

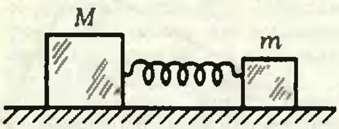


Рис. 9.

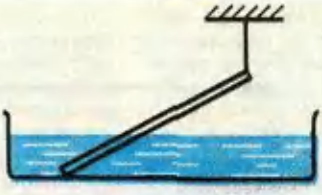


Рис. 10.

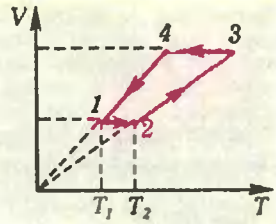


Рис. 11.

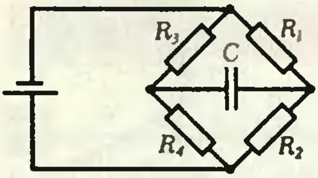


Рис. 12.

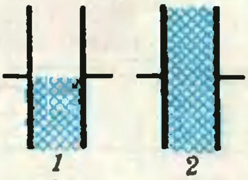


Рис. 13.

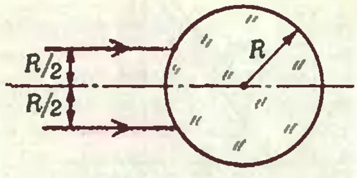


Рис. 14.

массой $M=2$ кг, содержит идеальный газ при температуре $T_1=300$ К. На поршень помещают тело массой $m=100$ г и нагревают газ так, чтобы поршень занял первоначальное положение. Найдите температуру нагретого газа. Атмосферное давление не учитывать.

6. С идеальным газом массой $m=20$ г и молярной массой $\mu=28$ г/моль совершается циклический процесс, изображенный на рисунке 11. Какую работу совершает газ за один цикл? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К), $T_1=300$ К, $T_2=496$ К. При расширении газа на участке 2—3 его объем увеличивается в два раза.

7. В схеме, приведенной на рисунке 12, где $R_1=60$ Ом, $R_2=20$ Ом, $R_3=40$ Ом и $R_4=20$ Ом, батарею и конденсатор поменяли местами. Во сколько раз изменится при этом заряд конденсатора?

8. В двух одинаковых плоских конденсаторах пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=3$: в одном наполовину, в другом полностью (рис. 13). Найдите отношение емкостей этих конденсаторов.

9. Луч света падает в центр верхней грани стеклянного кубика. Чему равен максимальный угол падения, при котором преломленный луч еще попадает на нижнюю грань кубика? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

10. Два параллельных луча света, расстояние между которыми равно радиусу R основания круглого прямого прозрачного цилиндра, падают на боковую поверхность этого цилиндра (рис. 14). Лучи параллельны основанию цилиндра. Найдите показатель преломления материала цилиндра, при котором лучи пересекаются на его поверхности.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Определите силу, с которой молоток действует на гвоздь при ударе, исходя из следующих данных: масса молотка $m=1$ кг, скорость молотка непосредственно перед ударом $v=5$ м/с, в результате удара гвоздь входит в дерево на глубину $l=2{,}5$ см. Считать силу сопротивления дерева постоянной, массой гвоздя по сравнению с массой молотка пренебречь.

2. На горизонтальной плоскости лежит деревянный брусок массой $M=4$ кг, прикрепленный к вертикальной стенке пружиной жесткостью $k=100$ Н/м (рис. 15). В центр бруска попадает пуля массой $m=10$ г, летящая горизонтально и параллельно пружине, и застревает в нем. Определите скорость пули, если максимальное сжатие пружины после удара $\Delta l=30$ см. Трением бруска о плоскость пренебречь.

3. Браслет массой $M=80$ г сделан из сплава золота и серебра. Вычислите массу золота, содержащегося в браслете, располагая следующими данными: плотность золота $\rho_1=19{,}3$ г/см^3, плотность серебра $\rho_2=10{,}5$ г/см^3. При погружении браслета в воду, находящуюся в сосуде с вертикальными стенками и площадью основания $S=25$ см^2, уровень воды поднимается на $h=2$ мм.

4. Нагретый металлический порошок высыпают в жидкость массой m_1, находящуюся при температуре T_1. Масса порошка m_2, его удельная теплоемкость c_2. Когда установилось тепловое равновесие, оказалось, что температура системы равна T, а масса жидкости уменьшилась на Δm. Удельная теплоемкость жидкости c_1, ее удельная теплота парообразования r, температура кипения $T_к$. Найдите температуру, которую имел нагретый порошок.

5. В вертикально расположенном цилиндре постоянного сечения под невесомым подвижным поршнем находится воздух. На поршень помещают гирю массой $m=10$ кг. На сколько переместится поршень, если температура воздуха в цилиндре поддерживается постоянной? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, площадь сечения поршня $S=100$ см^2, расстояние от ненагруженного поршня до дна цилиндра $h_0=100$ см.

6. Два сосуда, объемы которых V_1 и V_2, содержали одинаковый одноатомный газ с молярной массой М. В сосуде объемом V_1 масса газа равнялась m_1 при температуре T_1, а в сосуде с объемом V_2 — соответственно m_2 при температуре T_2. Сосуды соединяют трубкой. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом

Рис. 15.

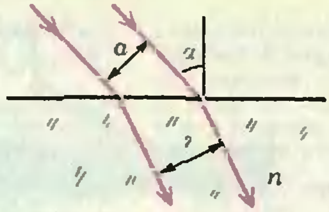


Рис. 16.

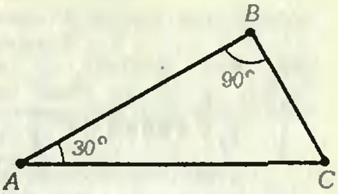


Рис. 17.

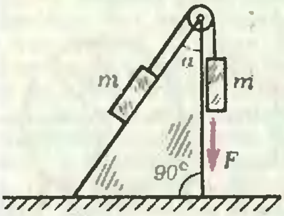


Рис. 18.

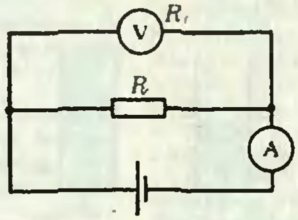


Рис. 19.

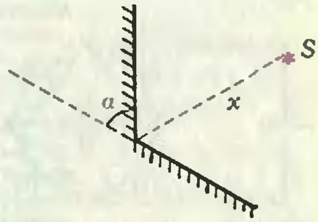


Рис. 20.

с окружающей средой, найдите давление, установившееся в сосудах.

7. *Две лампы имеют мощности* $P_1=20$ Вт и $P_2=40$ Вт при стандартном напряжении сети. При их последовательном включении в сеть с другим напряжением оказалось, что в первой лампе выделяется та же мощность, что и при стандартном напряжении. Какая мощность выделяется при этом во второй лампе? Изменением сопротивления нитей ламп с температурой пренебречь.

8. Конденсатор емкостью $C=10$ мкФ разряжается через цепь из двух параллельно включенных резисторов сопротивлениями $R_1=10$ Ом и $R_2=40$ Ом. Какое количество теплоты выделится на резисторе с меньшим сопротивлением, если конденсатор был заряжен до напряжения $U=100$ В?

9. Пучок параллельных лучей шириной $a=3$ см падает под углом $\alpha=45°$ из воздуха на плоскую границу среды с показателем преломления $n=1{,}5$. Какова будет ширина пучка в среде (рис. 16)?

10. Луч света отражается от плоского зеркала, падая на него под углом $\alpha=30°$. На какое расстояние сместится отраженный от зеркала луч, если поверхность зеркала закрыть стеклом толщиной $d=3$ см? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

Геологический факультет

1. Два тела начали одновременно двигаться из точки A в точку C. Первое тело двигалось из точки A сначала в точку B, а затем в точку C; второе — сразу в точку C с постоянной скоростью v (рис. 17). В любой момент времени тела находились на прямой, перпендикулярной AC. Найдите среднюю скорость движения первого тела, если в треугольнике ABC угол BAC равен 30°, а угол ABC — 90°.

2. На неподвижной наклонной плоскости с углом α укреплен невесомый блок, который может вращаться без трения (рис. 18). Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, соединенная с грузами массой m. Один груз может скользить без трения по наклонной плоскости. На второй груз действует сила F. Определите силу давления на ось блока.

3. Дубовый шар лежит в сосуде с водой так, что половина его находится в воде и он касается дна. С какой силой шар давит на дно сосуда, если его вес в воздухе $P=6$ Н? Плотность дуба $\rho=800$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в=1000$ кг/м^3.

4. Для нагревания некоторого количества идеального газа с молярной массой $M=28$ кг/кмоль на $\Delta T=14$ К при постоянном давлении потребовалось количество теплоты $Q_1=10$ Дж. Чтобы охладить газ до исходной температуры при постоянном объеме, необходимо от него отнять количество теплоты $Q_2=8$ Дж. Найдите массу газа. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31\times10^3$ Дж/(кмоль·К).

5. В сосуд, содержащий $m_1=0{,}6$ кг воды при температуре $t_1=10$ °С, опускают $m_2=0{,}8$ кг льда, взятого при $t_2=-20$ °С. Пренебрегая теплообменом с окружающей средой и теплоемкостью сосуда, определите температуру и состав содержимого в сосуде. Удельная теплоемкость воды $c_1=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплоемкость льда $c_2=2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\times10^5$ Дж/кг.

6. Электрон влетает посередине между обкладками плоского конденсатора параллельно пластинам со скоростью $v=10^7$ м/с. Расстояние между пластинами $d=3$ см, длина пластин $L=8$ см, разность потенциалов между пластинами $U=300$ В. Сможет ли электрон вылететь из конденсатора? Электрон движется в вакууме. Отношение заряда электрона к его массе $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг. Силами тяготения пренебречь.

7. Каково сопротивление R_1 вольтметра, если в цепи, изображенной на рисунке 19, вольтметр показывает $U=50$ В? Показания амперметра $I=0{,}1$ А. Сопротивление $R=1000$ Ом. Сопротивлением амперметра пренебречь.

8. Горизонтальный металлический стержень длиной $l=0{,}5$ м равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов, с частотой $n=5$ с$^{-1}$. Определите разность потенциалов между концами стержня, если вертикальная составляющая магнитного поля Земли $B=5\cdot10^{-5}$ Тл.

9. Точечный источник света S находится на биссектрисе угла между двумя плоскими зеркалами (рис. 20). Найдите расстояние x от источника света до вершины угла, если расстояние между изображениями источника $l=0{,}35$ м и угол $\alpha=60°$.

10. Между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками имеется небольшой воздушный зазор. Сквозь пластинки проходит луч монохроматического света, падающий нормально к поверхности пластин. При этом в воздушном зазоре укладывается $N=20$ длин волн света. Сколько длин волн того же света уложится в этом зазоре, если его заполнить жидкостью с показателем преломления $n=1{,}3$?

Публикацию подготовили А. Н. Боголюбов, В. В. Морозов, И. Н. Сергеев, А. А. Склянкин, А. Н. Соколихин, А. Г. Сухарев, С. С. Чесноков

Ответы, указания, решения

О стихотворных размерах

1. а) Такое слово не может содержать двух сильных слогов и поэтому его ударный слог обязан быть сильным. б) Поскольку никакое слово не содержит более одного сильного слога, иначе условие принимает вид: если слово содержит сильный слог, то его ударный слог совпадает с этим сильным слогом.

2. а) Если слово содержит более одного слога, то оно содержит как сильный слог ямба, так и сильный слог хорея. Значит, его ударный слог должен быть сильным слогом как ямба, так и хорея, но таких слогов нет. б) Аналогично предыдущему, никакое слово не содержит сильных слогов обоих размеров. Тогда никакое слово не содержит и двух сильных слогов одного размера, потому что между сильными слогами одного размера обязательно присутствует сильный слог другого размера. Значит, в строке слов не меньше, чем сильных слогов двух размеров, т. е. не меньше 6.

3. Если слово, содержащее 4-й слог, не односложно, то оно содержит 3-й или 5-й слог, т. е. содержит сильный слог хорея. Значит, ударный слог этого слова должен быть сильным слогом хорея и дактиля, а значит слово содержит 1-й или 7-й слог.

4. а) Сильных слогов нет — условие выполняется автоматически. б) В строке имеется единственный сильный слог, номер которого равен k и не зависит от n.

5. а) Хорей. б) Нечетные строки — анапест, четные — модифицированный анапест (с ударениями на 3-м, 6-м, 10-м и 13-м слогах). в) Анапест (впрочем, нечетные строки содержат только $5<3+3$ слогов). г) (5,3)-размер. д) (5,3)-размер (хотя 1-я и 5-я строки содержат только $7<5+3$ слогов).

О пользе математики для ковбоев

1. Формулу $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\left(2-\frac{b}{d}\right)$ можно привести к виду $\frac{a}{c}=1-\left(\frac{b}{d}-1\right)^2$. Так как квадрат любого числа неотрицателен, правая часть формулы не больше 1, откуда $a\leqslant c$ (a и c — положительные числа).

2. Исходное равенство $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$ можно привести к виду

$$ad^2=2bcd-b^2c. \qquad (1)$$

Пусть, от противного, $(a, b)=1$ и $(c, d)=1$ (символом (x, y) обозначается наибольший общий делитель чисел x и y). Обозначим $(a, c)=A$, $(b, d)=B$. Тогда $a=\bar{a}A$, $c=\bar{c}A$, $b=\bar{b}B$, $d=\bar{d}B$, где $(\bar{a}, \bar{c})=1$ и $(\bar{b}, \bar{d})=1$. Подставив эти выражения в (1), после чего сократив на AB^2, получим

$$\bar{a}\bar{d}^2=2\bar{b}\bar{c}\bar{d}-\bar{b}^2\bar{c}.$$

Правая часть делится на $\bar{b}$. Поэтому $\bar{a}\bar{d}^2$ делится на $\bar{b}$. Но $(\bar{a}, \bar{b})=1$ и $(\bar{d}^2, \bar{b})=1$. Следовательно, $\bar{b}=1$. Аналогично доказывается, что $\bar{d}=1$. Отсюда $b=d$ и, согласно (1), $a=c$. Но тогда

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}-\frac{a}{b}\neq\frac{a-a}{b-b},$$

так как на ноль делить нельзя.

3. Обозначим $\overline{ab}=10a+b$; $\overline{bc}=10b+c$, где a, b, c — отличные от нуля цифры. По условию задачи

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}=\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}.$$

Отсюда

$$9ac=9ab+b\,(a-c). \qquad (2)$$

Следовательно, $b\,(a-c)$ делится на 9. Так как a и c — ненулевые цифры, то $|a-c|\leqslant 8$. Следовательно, либо $a-c=0$, либо b делится на 3. В первом случае из (2) следует, что и $b=a$ — все цифры одинаковы. Остаются следующие возможности: а) $b=3$, $c=\frac{10a}{3a+1}$; б) $b=6$; $c=\frac{20a}{3a+2}$; в) $b=9$; $c=\frac{10a}{a+1}$.

Придавая a значения 1, 2, ..., 9, получим все четыре искомые дроби $\frac{16}{64}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{19}{95}$, $\frac{49}{98}$. При остальных значениях c выражения для c приводят либо к дробным значениям c, либо к совпадению всех цифр искомой дроби.

4. То же условие (2) можно переписать в виде

$$9a+b=10\,\frac{ab}{c}.$$

Обозначим $p=\underline{11\ldots1}$ (n единиц). Тогда $9p+1=10^n$. Пусть $x=\overline{abb\ldots b}$ (n цифр b), $y=\overline{bb\ldots bc}$ (n цифр b). Тогда $y=10bp+c$; $x=10^n a+bp=(9p+1)a+bp=(9a+b)p+a=\frac{10ab}{c}\,p+a=\frac{a}{c}(10bp+c)=\frac{a}{c}\,y$. Следовательно, $\frac{x}{y}=\frac{a}{c}$.

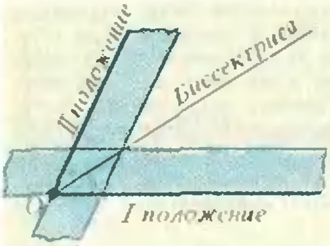


Рис. 1.

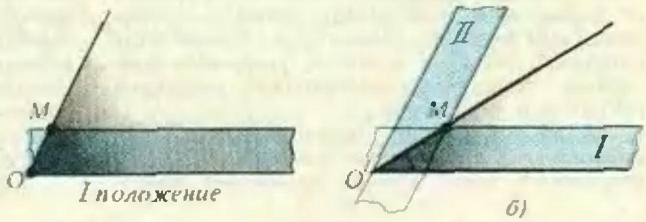


Рис. 2.

5. $\sqrt[c]{a+\frac{a}{a^2-1}}=a\sqrt[c]{\frac{a}{a^2-1}}$ — формула, описывающая вынесение из-под корня целой части числа.

6. $\frac{a+1/b}{b+1/a}=\frac{a}{b}$.

Избранные школьные задачи

1. $k=1$ $(A=B)$, либо $k=100$ $(B=0)$. Решение. Пусть $k=(100A+B)/(100B+A)$ — целое. Очевиден ответ $k=1$, $A=B$. Пусть $k\neq1$, $A\neq B$. Тогда $A/B=(100k-1)/(100-k)$; считаем $k\neq100$. Можно ли сократить дробь $(100k-1)/(100-k)$ так, чтобы как числитель, так и знаменатель, стал меньше 100? Если можно, то и дробь $(100k-1)/(100-k)-1=$ $=101(k-1)/(100-k)$ тоже можно сократить аналогичным образом. Но $100-k$ и 101 не имеют общих делителей, т. к. 101 — простое, а $100-k<100$. Поэтому после сокращения получаем несократимую дробь вида $101\cdot a/b$, числитель которой больше 100 — противоречие. Остается случай $k=100$, для которого $B=0$.

2. $104^2+72^2=120^2+40^2=16\,000$. Решение. Квадрат четного числа делится на 4, квадрат нечетного дает при делении на 4 остаток 1. Поэтому, если $x^2+y^2=16\,000$, то $x=2m$, $y=2n$. Тогда $m^2+n^2=4000$, и аналогично $m=2m_1$, $n=2n_1$, $m_1^2+n_1^2=1000$; $m_1=2m_2$, $n_1=2n_2$, m_2^2+ $+n_2^2=250=4\cdot62+2$. Значит, m_2 и n_2 — оба нечетные, и если $m_2\geqslant n_2$, то $125\leqslant m_2^2<250$. Однако в этом промежутке существуют ровно два квадрата нечетных чисел: $m_2=13$ и $m_2=15$. Отсюда легко получается ответ.

3. $x=2$, $y=1$, $z=3$. Указание. Сумма всех уравнений дает равенство $x^2y+y^2x+y^2z+$ $+z^2y+z^2x+zx^2=48$, а их произведение после раскрытия скобок и учета выписанного равенства дает $(xyz)^2(48+2xyz)=2160$. Обозначив $t=xyz$, получаем кубическое уравнение t^3+ $+24t^2-1080=0$, имеющее корень $t_1=6$. Уравнение $t^3+24t^2-1080=(t-6)(t^2+30t+180)=0$ имеет еще два корня: $t_{2,3}=-15\pm3\sqrt5$, которые нам не годятся, поскольку мы ищем положительные решения системы. Заменами $xy=\frac{6}{z}$, $yz=\frac{6}{x}$, $zx=\frac{6}{y}$ исходная система сводится к линейной, из которой $y=x/2$, $z=3x/2$.

4. а) Решение показано на рисунке 1. б) Сначала прикладываем линейку к одной стороне угла с вершиной O и находим точку M пересечения второй стороны линейки со второй стороной угла (рис. 2, a). Затем кладем линейку так, чтобы точки O и M оказались на разных ее сторонах, и проводим две параллельные прямые по обеим сторонам линейки. В результате получаем удвоенный угол (рис. 2, $б$).

5. Пусть AH — высота, BM — медиана, CK — биссектриса в треугольнике ABC. Если треугольник XYZ — равносторонний (рис. 3), то из треугольника XHC находим $\angle XCH=$ $=30°$. Тогда $\angle ACB=2\cdot\angle XCH=60°$. Из треугольника BYH находим $\angle CBM=30°$. Поэтому $\angle BMC=90°$, т. е. BM — медиана и высота в треугольнике ABC. Следовательно, $AB=BC$. Значит, треугольник ABC — равнобедренный с углом 60° при основании, поэтому он равносторонний, а тогда точки X, Y, Z обязаны совпадать — противоречие.

6. $x=\pm1/\sqrt[50]{2}$, $y=\pm1$ (4 решения). Указание. Поделим обе части уравнения на $4(xy)^{100}$:

$$\left(4x^{100}+\frac{1}{4x^{100}}\right)\left(y^{100}+\frac{1}{y^{100}}\right)=4.$$

Поскольку каждая из скобок не меньше 2, получаем $4x^{100}=1$, $y^{100}=1$.

7. Искомое множество состоит из точек плоскости, принадлежащих синим кругам и четырем красным криволинейным треугольникам, образованным окружностями и всеми внутренними и внешними касательными к ним (рис. 4).

8. Пусть CK — биссектриса, BM — медиана, BM и CK перпендикулярны. Обозначим $BC=a$. Треугольник MBC — равнобедренный, т. к. CO одновременно и высота, и биссектриса в нем (рис. 5). Значит, $AC=2a$, а тогда $2a-a<AB<$ $<2a+a$. Могут ли стороны AC и BC отличаться на 1, т. е. может ли AC быть средней по величине стороной? Если $AC-BC=1$, то $a=1$, и тогда $1<AB<3$, т. е. средней стороной является AB, а не AC. Значит, $AC-$ $-BC\neq1$. Остается случай, когда AB — средняя сторона. Тогда $AC-BC=2$, т. е. $a=2$, поэтому $AC=2a=4$, $BC=a=2$ и $AB=3$. Для треугольника ABC со сторонами 2, 3, 4 выполняются все условия задачи ($\angle BCA=\arccos 11/16$).

9. Заметим, что при замене α на $(-\alpha)$ и увеличения α на $2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$ обе части неравенства не меняются. Поэтому достаточно ограничиться углами α из I и II квадрантов. Но для $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$ имеем

$$\sin\alpha\leqslant\alpha\Rightarrow\cos(\sin\alpha)\geqslant\cos\alpha\geqslant\sin(\cos\alpha),$$

поскольку косинус на этом промежутке убывает; а для $\alpha\in]\frac{\pi}{2};\pi]$ имеем $\sin\alpha\geqslant0$, $\cos\alpha\leqslant0$ и $\cos(\sin\alpha)\geqslant0\geqslant\sin(\cos\alpha)$. Остается

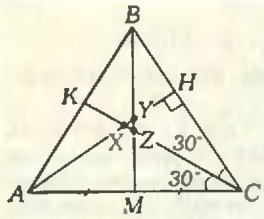


Рис. 3.

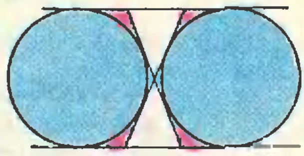


Рис. 4.

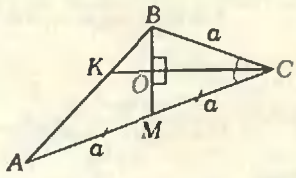


Рис. 5.

заметить, что в указанных двойных неравенствах хотя бы одно — строгое.

10. Сумма $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$ максимальна, когда одно из слагаемых равно 999. Решение. Пусть $\frac{a}{c}\geqslant\frac{b}{d}$. Тогда $\frac{b}{d}\leqslant\frac{a+b}{c+d}\leqslant\frac{a}{c}$, т. е. $\frac{b}{d}\leqslant 1$. Пусть $a\leqslant 998$, тогда $\frac{a}{c}\leqslant 998$, так что $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}\leqslant 999$. Но если $\frac{a}{c}=999$ (при $a=999$, $c=1$), то $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}>999$.

11. $0,9<x_1<1$; $-1,1<x_2<-1$; $-1000<x_3<-999,9$. Решение. $f(x)=0,001x^3+x^2-1=f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=0,001x^3$, $f_2(x)=x^2-1$. Корни $f_2(x)=0$ — это $(+1)$ и (-1), а при $|x|<2$, $|f_1(x)|<0,01$. Поэтому два корня $f(x)$ равны $x_1\approx+1$, $x_2\approx-1$: $f(+1)=0,001>0$, $f(0,9)<0\Rightarrow 0,9<x_1<1$, и аналогично, $-1,1<x_2<-1$. Заметим теперь, что уравнение $0,001x^3+x^2=0$ имеет корень (-1000), причем $f(-1000)=-1<0$, а $f(-999,9)>0$, стало быть, $-1000<x_3<-999,9$.

12. а) Плоскость, в которой лежат обе оси цилиндров, начнем двигать параллельно самой себе, и при каждом ее положении фиксировать сечение цилиндров. Предварительно впишем в пересечение цилиндров шар радиусом R. В каждом сечении будут получаться квадраты со вписанными в них кругами (рис. 6). Отсюда следует, что тело, являющееся пересечением цилиндров, как и вписанный в него шар, «соткано» из указанных сечений; следовательно, объем этого тела так относится к объему вписанного в него шара, как площадь квадрата относится к площади вписанного в него круга: $\frac{V}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{(2R)^2}{\pi R^2}$. Отсюда $V=16/3R^3$. б) $V=\frac{16R^3}{3\sin\alpha}$.

13. Ответ: *нельзя*. Докажем, что в данном прямоугольнике при любом расположении квадратов будет существовать окружность диаметром 1, не пересекающая квадратов. Для этого ее центр не должен располагаться ближе чем на 1/2 к сторонам прямоугольника или к одному из квадратов. Присоединив к каждому квадрату размером 1×1 точки, находящиеся от него на расстоянии, не превосходящем 1/2, получим фигуру (квадрат со скругленными вершинами) площади $3+0,25\pi$. Эти фигуры не могут покрыть прямоугольника 19×24, даже если они не будут накладываться друг на друга, так как $120(3+0,25\pi)<19\times24$. Поэтому для центра искомой окружности в прямоугольнике остается место.

14. Если $x>y$, то $x^x-x^y=y^x-y^y\Rightarrow x^y(x^{x-y}-1)=y^y(y^{x-y}-1)\Rightarrow 1<\left(\frac{x}{y}\right)^y=\frac{y^{x-y}-1}{x^{x-y}-1}<1$ — противоречие. Аналогично, не может выполняться неравенство $x<y$. Значит, $x=y$.

15. Обозначим $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательных. Тогда

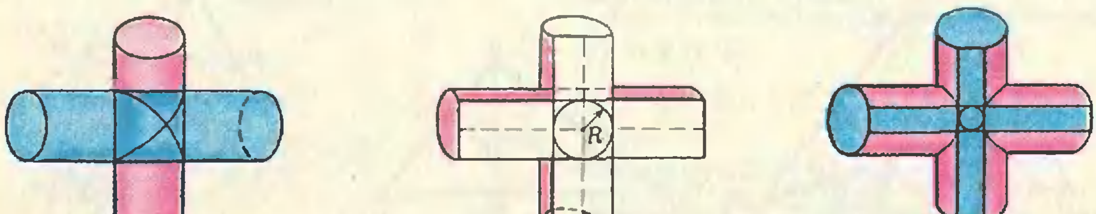
$$f'(0)=g'(0)=\frac{f'(0)g(0)-f(0)g'(0)}{g^2(0)}=k,$$

откуда $\frac{k\cdot g(0)-k\cdot f(0)}{g^2(0)}=k$ и $g(0)-f(0)=g^2(0)$. Обозначим $g(0)=t$, тогда последнее равенство переписывается в виде $t^2-t+f(0)=0$. Это уравнение имеет решение $t=g(0)$. Значит, его дискриминант $D=1-4f(0)\geqslant0$. Отсюда $f(0)\leqslant1/4$; $\max f(0)=1/4$.

Кинематические связи в задачах динамики

1. $a_1=\frac{m_1\sin^2\alpha}{m_1\sin^2\alpha+m_2\cos^2\alpha}g$,

$$a_2=\frac{m_1\sin\alpha\cos\alpha}{m_1\sin^2\alpha+m_2\cos^2\alpha}g.$$



а) б) в)

Рис. 6.

2. $T=\dfrac{4m_1m_2m_3}{4m_1m_3+m_2(m_1+m_3)}\,g$.

3. $a_1=a_2=g$.

4. $a=\dfrac{m\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)}\,g$.

Стереометрические задачи с шарами

1. $a/8$.
2. 4.
3. $(\varrho^2-(R-r)^2)/4(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2$.
4. $(7\pm3\sqrt{3})/4$; $(5\pm\sqrt{3})/4$.
5. $(1+2\sqrt{2})^2\pi r^3/3$.
6. $R(5\pm\sqrt{13})/3$.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{3}{\pi(\pm1+6m)}+\pi n,\ n,\ m\in\mathbf{Z}$.

2. $(-3;\ -1)$.

3. 3/4. **Указание.** Рассмотрите три случая расположения точки D: на стороне AB или ее продолжениях за точки A и B. Составив соотношения для площадей треугольников ABC, ADC и BDC, найдите в первом случае $AB:BC$ и докажите, что два последних случая невозможны.

4. 50 км/ч, 40 км/ч. **Указание.** Если скорости поездов равны u и v, причем $u>v$, а время их движения равно t, то справедливы равенства

$$\begin{cases} t(u-v)=60, \\ (t-2)((u+25)-(v+20))=60, \\ (t-2)(u+25)=tu \end{cases}$$

(случай $(t-2)((u+20)-(v+25))=60$ невозможен, так как $(t-2)(u-v-5)<t(u-v)=60$).

5. $\{(1;\ -2);\ (-1;\ -2);\ (a;\ 2)\}$, $a\in\mathbf{R}$. **Указание.** Чтобы система

$$\begin{cases} (x-y+a)(x+y-1)=0, \\ x^2+y^2+bxy-1=0 \end{cases}$$

имела не менее 5 решений, необходимо и достаточно, чтобы одна из систем

$$\begin{cases} y=x+a, \\ (b+2)x^2+a(b+2)x+(a^2-1)=0 \end{cases}$$

или $\begin{cases} y=1-x, \\ (2-b)x^2+(b-2)x=0 \end{cases}$

имела не менее 3 решений. Это возможно только при

$b+2=a(b+2)=a^2-1=0$ или $2-b=b-2=0$.

6. 9. **Решение.** Заметим вначале, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости. Действительно, пусть через точку S проведена плоскость α (рис. 7), параллельная плоскости LMN и пересекающая прямые AC и BC в точках E и F. Тогда в силу равенства соответствующих отрезков касательных и параллельности соответствующих прямых имеем $AK=AN$ и $KS=SL=SB-LB=FB-MB=FM=CM-CF=CN-CE=NE$. Поэтому $NK\parallel\alpha$ и точка K принадлежит плоскости LMN. Итак, четырехугольник $KLMN$ — вписанный и $KL=LM$, откуда $\angle LNK=\angle LNM=\varphi$. По теореме косинусов для треугольников LNK и LNM получаем

$$KL^2=116+25-4\sqrt{29}\cos\varphi\cdot5=$$
$$=116+49-4\sqrt{29}\cos\varphi\cdot7,$$

следовательно,

$$4\sqrt{29}\cos\varphi=12,\ KL^2=81.$$

Вариант 2

1. $(9;\ 2)$.
2. Не существуют.
3. $(0;\ \sqrt[6]{2}-1)\cup(63;\ \infty)$.
4. $x=(-1)^n\arcsin\sqrt{5/6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.
5. 20 рейсов. **Решение.** Достаточно рассмотреть 3 типа загрузки машины блоками: 1) 0 больших и 44 маленьких блока, 2) 1 большой блок и 30 маленьких; 3) 2 больших и 14 маленьких блоков. Если m_1, m_2, m_3 — количества рейсов, соответствующих 1, 2 и 3 способу загрузки машины, то $44m_1+30m_2+14m_3\geqslant510$, $m_1+2m_2\geqslant24$. Нужно найти набор с наименьшим значением $m_1+m_2+m_3$. Если в требуемом наборе $m_1\geqslant1$ и $m_3\geqslant1$, то пару рейсов с загрузками 1 и 3 типа можно заменить парой рейсов со второй загрузкой и при этом увезти еще 2 маленьких блока. Поэтому можно считать, что $m_1=0$ или $m_3=0$. Если $m_3=0$, то $m_2\geqslant24$. Если $m_1=0$, то

$$\begin{cases} 15m_1+7m_2\geqslant255, \\ m_1+2m_2\geqslant24. \end{cases}$$

Умножая второе неравенство на 8 и складывая его с первым, получим $m_1+m_2\geqslant20$. При $m_2=16$, $m_3=4$ получим $m_1+m_2+m_3=20$.

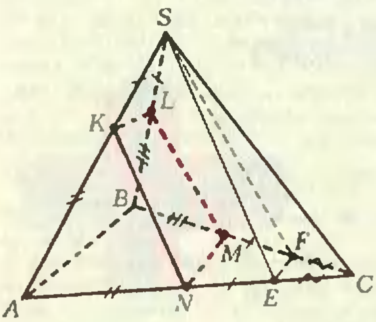


Рис. 7.

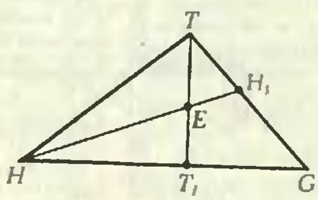


Рис. 8.

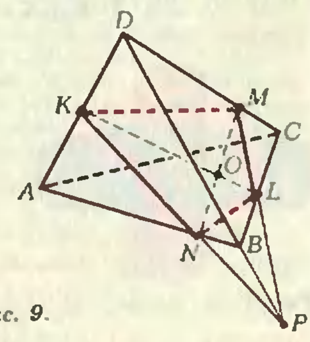


Рис. 9.

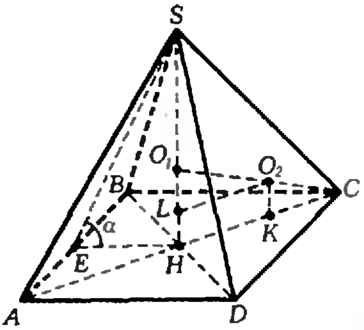


Рис. 10.

6. 213/67. Указание. Лемма. Если в треугольнике HGT (рис. 8) $HE:EH_1=\lambda$, $TE:ET_1=\mu$, то

$$\frac{GT}{T_1H}=\frac{\mu+1}{\lambda\mu-1}. \qquad (*)$$

Доказательство. Проведем $FT_1\parallel GT$. Тогда

$$\frac{GT_1}{T_1H}=\frac{FH_1}{HF}=\frac{EH_1+EF}{HE-EF}=\frac{1+\dfrac{EF}{EH_1}}{\dfrac{HE}{EH_1}-\dfrac{EF}{EH_1}}=\frac{\mu+1}{\lambda\mu-1}.$$

Пусть прямые KN и ML (рис. 9) пересекаются в некоторой точке P, лежащей на прямой BD. Точка B расположена между точками D и P (это следует из леммы). Из треугольника PKM с помощью $(*)$ получим $PN:NK=21/4$ и $PN:PK=21/25$; $PL:LM=6$ и $PL:PM=6/7$. Пусть $AN:NB=x$, тогда

$$DK:KA=\frac{25}{21x-4} \text{ и } \frac{25}{21x-4}-\frac{1}{x}=1,$$

откуда $x=2/3$, после чего находим $\dfrac{DB}{BP}=$

$$=\frac{x+1}{\dfrac{21}{4}x-1}=\frac{2}{3} \text{ и } DK:KA=5/2. \text{ Из } \triangle DPC$$

получим $DM:MC=3$, $CL:LB=\dfrac{5}{9}$. Пусть $V_{ABCD}=V$. Осталось заметить, что

$$V_{PKDM}=\frac{DK}{DA}\cdot\frac{DP}{DB}\cdot\frac{DM}{DC}V=\frac{75}{56}V,$$

$$V_{PNBL}=\frac{PB}{PD}\cdot\frac{PL}{PM}\cdot\frac{PN}{PK}\cdot V_{PKDM}=\frac{81}{140}V,$$

откуда $V_{PKDM}-V_{PNBL}=\dfrac{213}{280}V$, после чего искомое отношение находится без труда.

Вариант 3

1. $(0;\ 1/3]\cup(1;\ \infty)$.

2. $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

3. $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=-\sqrt{5}$.

4. $[-1/3;\ 0)\cup(2/3;\ 1]$.

5. $\sqrt{\dfrac{3a^2+8c^2}{35}}$. Указание. Пусть расстояние DE и DF от точки D до катетов AB и BC равны p и q соответственно. Тогда $BD^2=p^2+q^2$, $AB=4q$, $BC=3p$. Применяя теорему Пифагора к треугольникам ADE и DFC, получим систему

$$\begin{cases} p^2+9q^2=a^2, \\ 4p^2+q^2=c^2. \end{cases}$$

6. 1024/9; $2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{34}}{4}$. Указание. Пусть O_1 и O_2 — центры шаров (рис. 10), $\angle O_1CH=\varphi$, $\angle SEH=\alpha$. Проведем $O_2L\parallel HC$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi=O_1L:O_2L=1/(2\sqrt{2})$, $CH=4\sqrt{2}$, $CD=8$, $\operatorname{tg}(\alpha/2)=1/2$, $\operatorname{tg}\alpha=4/3$, $HS=16/3$. Для отыскания двугранного угла достаточно найти высоту треугольника SHC.

Вариант 4

1. $x_1=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $x_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi m$, $n, m\in Z$.

2. $(1;\ 2]$.

3. $-1/3$. Указание. Площадь треугольника $S(a)=\dfrac{1}{4}(1-a\sqrt{1-a^2})$ при $a\in[-1/2;\ 0]$.

4. $\dfrac{a^3\sqrt{2}(\gamma+2)}{6\sqrt{\gamma(\gamma+1)}}$. Указание. Докажите, что FC — высота пирамиды $FABCD$, и найдите длины отрезков FC и EO.

5. $(-\infty;\ 0]\cup[3;\ \infty)$. Решение. Требуется найти все значения p, для которых неравенство

$$(p-x^2)(p+x-2)\geqslant 0$$

справедливо при всех значениях $x\in[-1;\ 1]$. Подставляя в него значения $x=-1$ и $x=0$, получаем необходимые условия

$$\begin{cases} (p-1)(p-3)\geqslant 0, \\ p(p-2)\geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $p\leqslant 0$ или $p\geqslant 3$. С другой стороны, если $p\leqslant 0$, то $p-x^2\leqslant 0$, $p+x-2\leqslant -1$, а если $p\geqslant 3$, то $p-x^2\geqslant 2$, $p+x-2\geqslant 0$, т. е. в обоих случаях при $-1\leqslant x\leqslant 1$ неравенство выполняется.

Вариант 5

1. $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

2. $2/5$.

3. $(0{,}25;\ 0{,}5]\cup[2;\ \infty)$.

4. $10/3$. Решение. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке E (рис. 11), тогда $EP:AP=3$, $ER:DR=2$, $S_{AED}=40$. Для площадей $S_{APQ}=x$, $S_{DRQ}=y$, $S_{AQD}=z$, $S_{EPQ}=3x$,

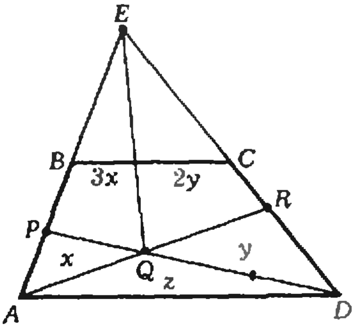


Рис. 11.

$S_{ERQ}=2y$ получим систему

$$\begin{cases} x+3x+2y=2(y+z), \\ 3x+2y+y=3(x+z), \\ x+3x+2y+y+z=40. \end{cases}$$

5. $\left[\frac{2}{3}-\sqrt{2};\ \frac{2}{3}+\sqrt{2}\right]$. Решение. Система приводится к виду

$$\begin{cases} (3x-y+2)^2=3(2x+3y+\frac{1}{3}), \\ (3x-y+2)^2+(2x+3y+1-a)^2=2, \end{cases}$$

а после введения обозначений $u=3x-y+2$, $v=2x+3y+\frac{1}{3}$, $b=a-\frac{2}{3}$ — к виду

$$\begin{cases} u^2=3v, \\ u^2+(v-b)^2=2. \end{cases}$$

Для существования решения последней системы необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$3v+(v-b)^2=2$$

имело хотя бы один неотрицательный корень, т. е. чтобы значение квадратного трехчлена $v^2+(3-2b)v+b^2-2$ при $v=0$ было неположительным. Таким образом, получаем условие $b^2\leqslant 2$, или $-\sqrt{2}\leqslant a-\frac{2}{3}\leqslant\sqrt{2}$.

Вариант 6

1. $x=\pi n/2$, $n\in\mathbf{Z}$.
2. $[-1{,}5;\ 3]$.
3. 4 км/ч.
4. 8. Указание. Докажите, что угол между прямыми, соединяющими точку B с центрами окружностей, является прямым, а длина отрезка AB равна среднему геометрическому радиусов.
5. 1. Решение. Квадрат расстояния между точками $(x;\ y)$ и $(0;\ 0)$ равен

$$f(x)=x^2+\left(4-2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+4$$

при всех значениях $x\in[-1;\ 2]$, для которых

$$4-2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\geqslant 0.$$

Так как $f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$, то наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 2]$ достигается в точке $x=1$ (при $x=1$ подкоренное выражение $f(x)=f(1)>0$).

Вариант 7

1. 1. 2. $(-2;\ 2)$. 3. $5\sqrt{5}/3$. Указание. Докажите, что центр O окружности лежит на продолжении стороны BC за точку B, $AF=BF$, а затем воспользуйтесь подобием треугольников AOC и BFC.

4. $(-\pi;\ -\pi)$, $(0;\ -2\pi)$, $(\pi;\ -\pi)$. Указание. Среди решений системы

$$\begin{cases} x=(n-2m)\pi, \\ y=(4m-n)\pi \end{cases}\quad n,\ m\in\mathbf{Z},$$

отберите те, для которых выполнены условия

$$\begin{cases} n-2m=l, \\ 4m-n=k, \end{cases}$$

где $l\in\{-1;\ 0;\ 1\}$, $k\in\{-2;\ -1\}$.

5. 3, 4, 5, ... Решение. Требуется найти все значения b, для которых система

$$\begin{cases} x+y=-3, \\ xy>b, \\ x<0, \\ y<0 \end{cases}$$

не имеет решений. Значения $b=1$ и $b=2$ не годятся, поскольку при $x=y=-1{,}5$ имеем $xy>2$. Если же $b\geqslant 3$, то система несовместима, ибо из ее условий вытекает противоречие:

$$3<xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=2{,}25.$$

Вариант 8

1. $(6+\sqrt{3})/4$.
2. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.
3. $(-\infty;\ 1)\cup[4/3;\ \infty)$.
4. $\{(6;\ 4/3);\ (2;4)\}$.
5. 4 км/ч, 3 км/ч. Указание. Если u и v — скорости первой и второй лодок соответственно, то

$$\begin{cases} \frac{8}{x}+\frac{5}{x+2}\leqslant\frac{17}{6}, \\ \frac{8}{y}+\frac{5}{y+2}\geqslant\frac{11}{3}, \\ y=\frac{3}{4}x. \end{cases}$$

6. $3\sqrt{41}$. Указание. Проведите через точку A прямую, параллельную KL. Пусть B — основание перпендикуляра, опущенного из точки S на эту прямую, P — точка пересечения KL и SB, SPQ — осевое сечение пирамиды $SMNKL$. Найдите высоту PR треугольника SQP, проведенную из вершины P, и воспользуйтесь подобием треугольников KSP и ASB $(SP:SB=PR:24)$.

Вариант 9

1. $x=(-1)^n\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.
2. 5,5 т, 4 т, 2,5 т первого, второго и третьего сорта соответственно.
3. $(-\infty;\ 2)\cup\{3\}\cup(4;\ \infty)$.
4. $(2;\ 5/2)\cup(5/2;\ 3)$.
5. 18/7. Указание. Пусть $KL\parallel BC$, а O — точка пересечения BM и KL. Тогда $BO:OM=LC:ML$; $LC:AL=KB:AK$.

Вариант 10

1. $x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi m$; $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $m,\ n\in\mathbf{Z}$.
2. 6 т, 3 т, 1,5 т каждого сорта.
5. 27/10. Пусть $KL\parallel BM$ и точка L лежит на стороне AC. Тогда $BO:OM=(BM-OM):OM$, $OM:KL=MC:CL$, $AK:BM=AL:AM$.
6. 4/3. Указание. Если $(x,\ y)$ — решение системы, то и $(-x,\ y)$ — тоже решение. Для единственности решения необходимо условие $x=0$.

Вариант 11

1. 1/2.
2. 4.

3. 10. Указание. Для выполнения условий задачи необходимо и достаточно, чтобы число n маляров, белививших класс, удовлетворяло неравенству $\frac{1}{n} > \frac{3}{n+6}$.

4. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = \pi + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Указание. Отберите те корни уравнения $\cos x = \cos 3x$, которые удовлетворяют неравенству $\cos x \leqslant 3/4$.

5. $30°$. Указание. Используя соотношение $S_{AOB} \cdot S_{DOC} = S_{AOD} \cdot S_{BOC}$, получите равенство

$$S_{AOB} = 20 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 \cdot \sin \angle BAO,$$

где $\angle BAO < 150°$.

6. Указание: Пусть $u = \sqrt{x-1} + 1$; $v = \sqrt{x^2-1} - 1$. Из неравенств $u^2 + v^2 \geqslant 2uv$ и $u + v > 2$ следует, что $2(u^2+v^2) > u^2 + v^2 + 2uv > 4$.

Вариант 12

1. $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{19}-2}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. -1.

3. $(-\infty; -8{,}5) \cup (\sqrt{185} - 9)/2; \infty)$.

4. $2\sqrt{3}$. Указание. Докажите, что углы AMC и BEC прямые, а треугольник ABC равносторонний.

5. $(-2/3;\ 0)$. Решение. При $-2/3 < x < 0$ неравенство справедливо, так как

$$2 - \frac{6}{3x+2} < -1 < \log_3\left(6 - \frac{2}{3}\right) < \log_3(6+x);$$

при остальных значениях x оно не выполняется: если $-6 < x < -\frac{2}{3}$, то

$$2 - \frac{6}{3x+2} > 2 > \log_3\left(6 - \frac{2}{3}\right) > \log_3(6+x);$$

если $0 < x < 3$, то

$$2 - \frac{6}{3x+2} < 1\frac{5}{11} < 1{,}5 < \log_3 6 < \log_3(6+x);$$

если $x \geqslant 3$, то

$$2 - \frac{6}{3x+2} < 2 = \log_3 9 \leqslant \log_3(6+x).$$

Физика

Физический факультет

1. $\omega < \sqrt{k/m}$.

2. $v_{\min} = \sqrt{Rg}$.

3. $v = \frac{m+M}{m} \frac{2\pi}{T} A$.

4. $\Delta N = mN_A/(9M_{He}) = 5 \cdot 10^{24}$.

5. $\varphi = \frac{pVM_1 - mRT}{(M_1 - M_2)Vp_э}$.

6. $v_{\min} = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + d^2}}\right)}$.

7. $U = Ad/(ql) = 300$ В.

8. $A = \mathscr{E}^2 C_1^2/(C_1 + C_2) = 0{,}1$ Дж.

9. $H' = H \sin 120°/\sin 60° = H$.

10. $h_1 = D\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(\gamma/2)}}{4 \sin(\gamma/2)}$; $h_2 = 3h_1$.

Механико-математический факультет

1. $v_2 = \sqrt{m^2v^2 + m_1^2(v_1^2 - 2gH)}/(m - m_1) \approx 30{,}6$ м/с.

2. $v' = v\sqrt{M/(m+M)}$.

3. $F = \frac{1}{2}\left(L\rho_a - \left(1 - \frac{l}{2L}\right)l\rho_в\right)Sg = 0{,}025$ Н.

4. $\tau_2 = \tau_1 r/(c(t_к - t)) = 61$ мин.

5. $T_2 = T_1(1 + m/M) = 315$ К.

6. $A = m/MR(T_2 - T_1) = 1162$ Дж.

7. $\alpha = \frac{q_2}{q_1} = \frac{(R_3+R_4)(R_1+R_2)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)} = 1{,}2$.

8. $C_1/C_2 = (1+\varepsilon)/(2\varepsilon) = 2/3$.

9. $\alpha_{\max} = \arcsin(n\sqrt{3}/3) = 60°$.

10. $n = 1/\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 1{,}93$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $F = mv^2/(2l) = 500$ Н.

2. $v = \Delta l\sqrt{(M+m)k}/m = 600$ м/с.

3. $m_1 = (M - Sh\rho_2)\rho_1/(\rho_1 - \rho_2) \approx 60{,}3$ г.

4. $T_2 = T + (r\Delta m + c_1\Delta m(T_к - T) + c_1 m_1(T - T_1))/(m_2 c_2)$.

5. $\Delta h = h_0(Sp_0/(Sp_0 + mg) - 1) = -8{,}9$ см.

6. $p = \frac{(m_1T_1 + m_2T_2)R}{(V_1 - V_2)M}$.

7. $P_2' = P_1^2/P_2 = 10$ Вт.

8. $Q_1 = \frac{CU^2}{2(1 + R_1/R_2)} \approx 4 \cdot 10^{-2}$ Дж.

9. $a' = \frac{a\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} \approx 3{,}74$ см.

10. $l = d \sin 2\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right) \approx 1{,}17$ см.

Геологический факультет

1. $v_{ср\,1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)v$.

2. $F_д = (F + 2mg\cos^2(\alpha/2))\cos(\alpha/2)$.

3. $F_д = P(1 - \rho_в/(2\rho)) = 2{,}25$ Н.

4. $m = (Q_1 - Q_2)M/(R\Delta T) \approx 0{,}48$ г.

5. $t = 0$ °C; $m_{воды} = 575$ г; $m_{льда} = 825$ г.

6. Нет, не сможет ($y = eUL^2/(2mdv^2) \approx 5{,}6 \cdot 10^{-2}$ м $> d/2 = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м).

7. $R_1 = RU/(IR - U) = 1000$ Ом.

8. $U = \pi Bl^2 n \approx 2 \cdot 10^{-4}$ В.

9. $x = l/(2\sin\alpha) \approx 0{,}2$ м.

10. $N' = Nn = 26$.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 1)

1. В 1980 году. Племянник родился в (x^2-x)-м году. Так как в этом году x лет ему еще не исполнилось, то $x^2-x\leqslant 1988\leqslant x^2$. Следовательно, $x=45$.
2. Бревно весит 300 кг. Центр тяжести бревна вдвое ближе к первым весам, чем ко вторым.
3. На глубине 0. Через 1 день после начала работы Кощей зарыл клад на глубину 1 м, через $2^2=4$ дня после этого — на глубину 2 м, через $3^2=9$ дней после этого — на глубину 3 м, и т. д. Через $1+2^2+3^2+\ldots+13^2=819$ дней он зарыл клад на глубину 13 м. Зарыть клад на глубину 14 м он не успел, *поскольку* $819+14^2=1015>1001$, но отрыть клад и доставить его на поверхность он успел, поскольку $819+13^2=988<1001$.
4. 165 и 561. Разложим данное число на множители: $92565=3\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 11\cdot 17$. Если число делится на 3, то и зеркальное число делится на 3, то же с делимостью на 11 (докажите). Значит, оба наших числа делятся на 3 и 11 и одно из них делится на 17. Это последнее делится, таким образом, на $3\cdot 11\cdot 17=561$. Если бы оно было больше 561, оно было бы по крайней мере четырехзначно, второе число тоже было бы по крайней мере четырехзначно и их произведение было бы заведомо больше данного. Значит, одно из наших чисел должно быть равно 561. Тогда другое будет равно 165. Проверка показывает, что это действительно так: $165\cdot 561=92565$.
5. Проведем прямую AC (рис. 12). Площади треугольников ACC_1 и BCC_1 равны между собой, и площади треугольников CAA_1 и DAA_1 равны между собой. Значит, площадь четырехугольника AC_1CA_1 равна половине площади четырехугольника $ABCD$. Аналогично, площадь четырехугольника BD_1DB_1 равна половине площади четырехугольника $ABCD$. Значит, часть четырехугольника $ABCD$, которую четырехугольники AC_1CA_1 и BD_1DB_1 не покрывают (синие треугольники), имеет такую же площадь, как часть, которую они покрывают дважды (красный четырехугольник).

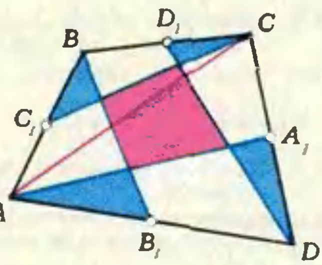


Рис. 12.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович, С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, Б. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Л. Рябов, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. В. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, Е. К. Тенчурина, И. Е. Смирнова, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Т. С. Вайсберг

Сдано в набор 15.12.87. Подписано к печати 22.01.88.
Т-04519. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-от. 27,30. Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 8.21.
Тираж 194 368 экз. Цена 40 коп. Заказ 3470

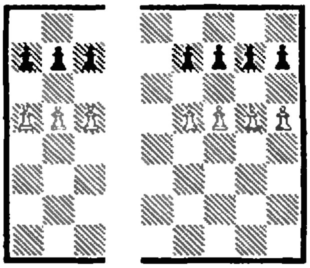
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

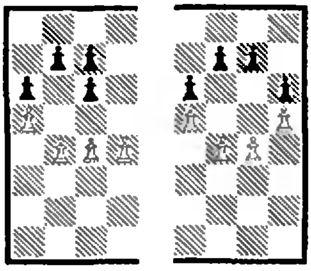
ПЕШЕЧНОЕ ПРОТИВОСТОЯНИЕ

Теория пешечных окончаний — специфическая область шахмат. Четкая логика, почти математические закономерности — вот свойства, характерные для таких окончаний. В качестве иллюстрации обратимся к теме прорыва.



Слева — классическое пешечное трио (предполагается, что короли находятся вдали от основного места событий). Решает только прорыв центральной пешки: **1. b6!** и далее 1...ab 2. c6! bc 3. a6, или 1...cb 2. a6! ba 3. c6, и в обоих случаях белая пешка проскакивает в ферзи. Если ход черных, то они предотвращают прорыв: 1...b6!, но не 1...a6? 2. c6! и не 1...c6? 2. a6!

На том же рисунке справа — пешечный квартет. Тут можно начать с любой пешки: 1. h6 gh (1...g6 2. e6!) 2. e6 fe 3. g6; 1. g6 hg (1...fg 2. h6! gh 3. f6) 2. f6 ef 3. ef gf 4. h6; аналогично решает 1. e6 и 1. f6. Легко убедиться, что черные не в состоянии предотвратить прорыв и при своем ходе.

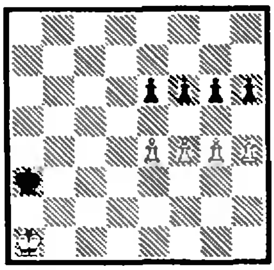


Здесь слева — окончание, типичное для испанской партии при размене слона b5 на коня c6. Опять прорыв единственный **1. c5!**, затем **2. b5!** (но не 2. d5? cd 3. b5 c6!) **2...ab** (2...cb 3. d5 и 4. d6) **3. d5! cd 4. c6!** И на сей раз черные даже при своем ходе без помощи короля не могут предупредить прорыв.

На том же рисунке справа пешечное противостояние образует два полушария. Знатокам известно, что такая структура характерна для защиты Каро-Канн. Решений — два с тремя пешечными жертвами: **1. g5**, затем **2. f5!**, вынуждая 2...ef 3. g6!, или 2...hg 3. f6! Возможно и симметричное **1. f5!**, а затем **2. g5!** и т. д. И в данном примере черные не могут помешать прорыву при своем ходе. Последние два противостояния показывают, как важно еще в дебюте позаботиться о расположении пешечных цепей, чтобы в эндшпиле «не ударить в грязь лицом».

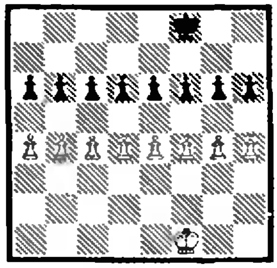
Вернем теперь на доску королей и рассмотрим два настоящих этюда, связанных с пешечным противостоянием.

Б. Горвиц, И. Клинг, 1851 г. Выигрыш.

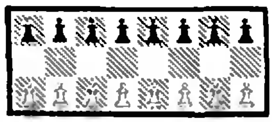


В этой старинной позиции решает только **1. h5!** Ничего не дает 1. e5? fe 2. h5 ef! 3. hg f3, 1. f5? ef 2. h5 fe 3. hg e3, 1. g5? fg 2. h5 gf! 3. hg f3. **1...gh** (или 1...g5 2. e5! fe 3. f5 e4 4. f6!) **2. e5! fe 3. f5! hg 4. f6! g3 5. f7 g2 6. f8Ф+** — ферзь появился на доске с шахом, в этом как раз все дело. На практике, как мы видим, роль королей не так мала.

П. Катиньоль, 1981 г. Выигрыш.



Перед нами рекордное противостояние пешек. Все восемь белых и восемь черных пешек выстроились в две шеренги и готовы вступить в рукопашную. Но с какой пешки начать? Здесь также необходимо учесть положение черного короля. Сначала белым надо взорвать центр, чтобы первыми провести прорыв на ферзевом фланге (это вынудит черного короля потерять время на переброску влево), а затем — на королевском, куда тот вернуться не успеет. Вот это рассуждение в действии: **1. d5! ed 2. ed cd**, и на абордаж! — **3. a5! ba 4. b5! ab 5. cb Крe7 6. b6 Крd7 7. b7 Крc7**, теперь новый прорыв по классическому образцу — **8. g5! fg** (8...hg 9. f5! gf 10. h5) **9. h5! gh 10. f5 a4 11. f6 a3 12. f7 a2 13. b8Ф+! Кр:b8 14. f8Ф+!** с победой.



Что случилось, как пешки могли оказаться на крайних горизонталях?! Нет, ошибки не произошло. Просто мы от «чистых» шахмат перешли в область шахматной математики. Вот игра, придуманная Т. Доусоном.

Пешки, расставленные на крайних горизонталях доски 3×8, ходят и бьют по обычным правилам. Превращения запрещены, а взятие обязательно. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход, то есть все его оставшиеся пешки запатованы.

Попробуйте разобраться, кто победит и какова выигрышная стратегия, а также проанализировать эту игру на доске 3×n. В следующий раз мы вернемся к этой теме.

Е. Я. Гик

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Недавно в Венгрии появилась новая головоломка Эрно Рубика («зацепи кольца»), еще более таинственная, чем знаменитый кубик Рубика (который, впрочем, многим уже успел надоесть). Если перегибать и разгибать исходный прямоугольник 2×4, на котором изображены три незацепленных кольца, новая головоломка Рубика непостижимым образом принимает самые разнообразные формы (некоторые из них показаны в виде черно-белых схем на рисунке). Секрет конструкции, однако, очень прост: головоломка состоит из 8 квадратов, изрезанных сетью диагональных пазов и скрепленных малозаметными замкнутыми прозрачными нейлоновыми нитями; нити спрятаны в пазах, но при изгибании-разгибании перескакивают из одного паза в другой, как показано на рисунке слева (перескакивание на самой головоломке не видно, ибо оно происходит между прижатыми друг к другу квадратами). Но значительно сложнее р е ш и т ь головоломку: прямоугольник 2×4 превратить в «квадрат 3×3 без уголка» (показанный в середине рисунка), на котором кольца... зацеплены.