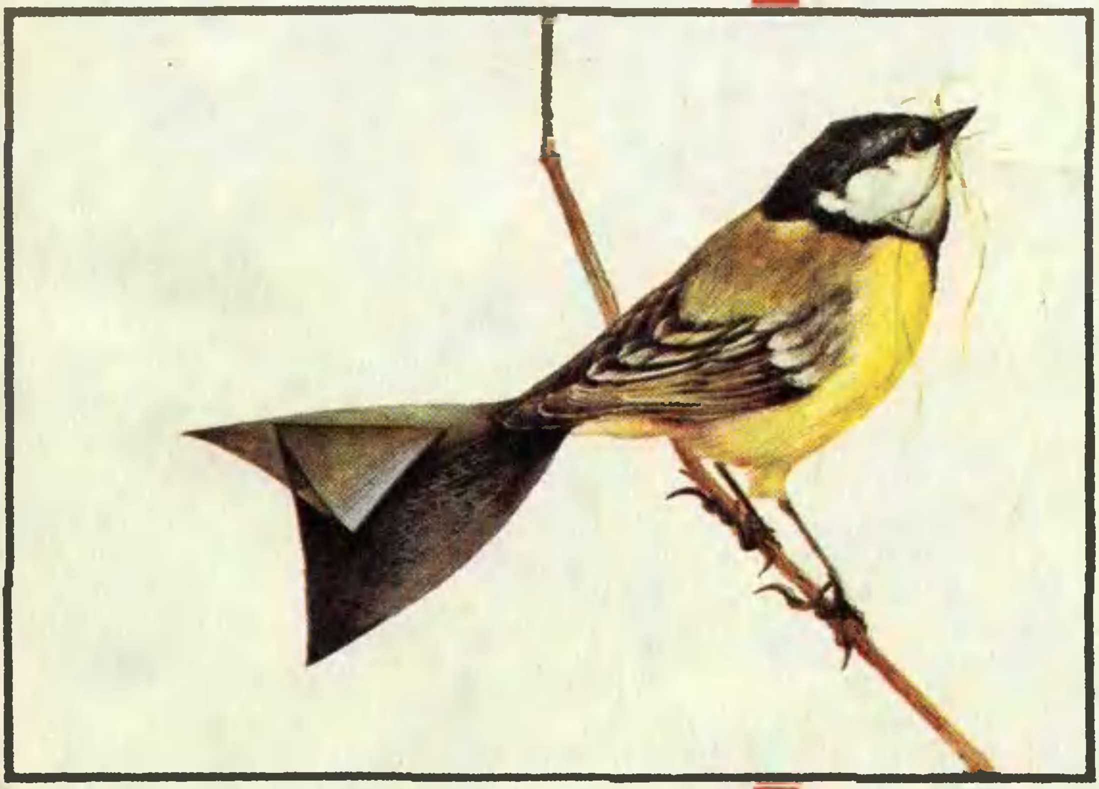
ISSN 0130-2221

Квант

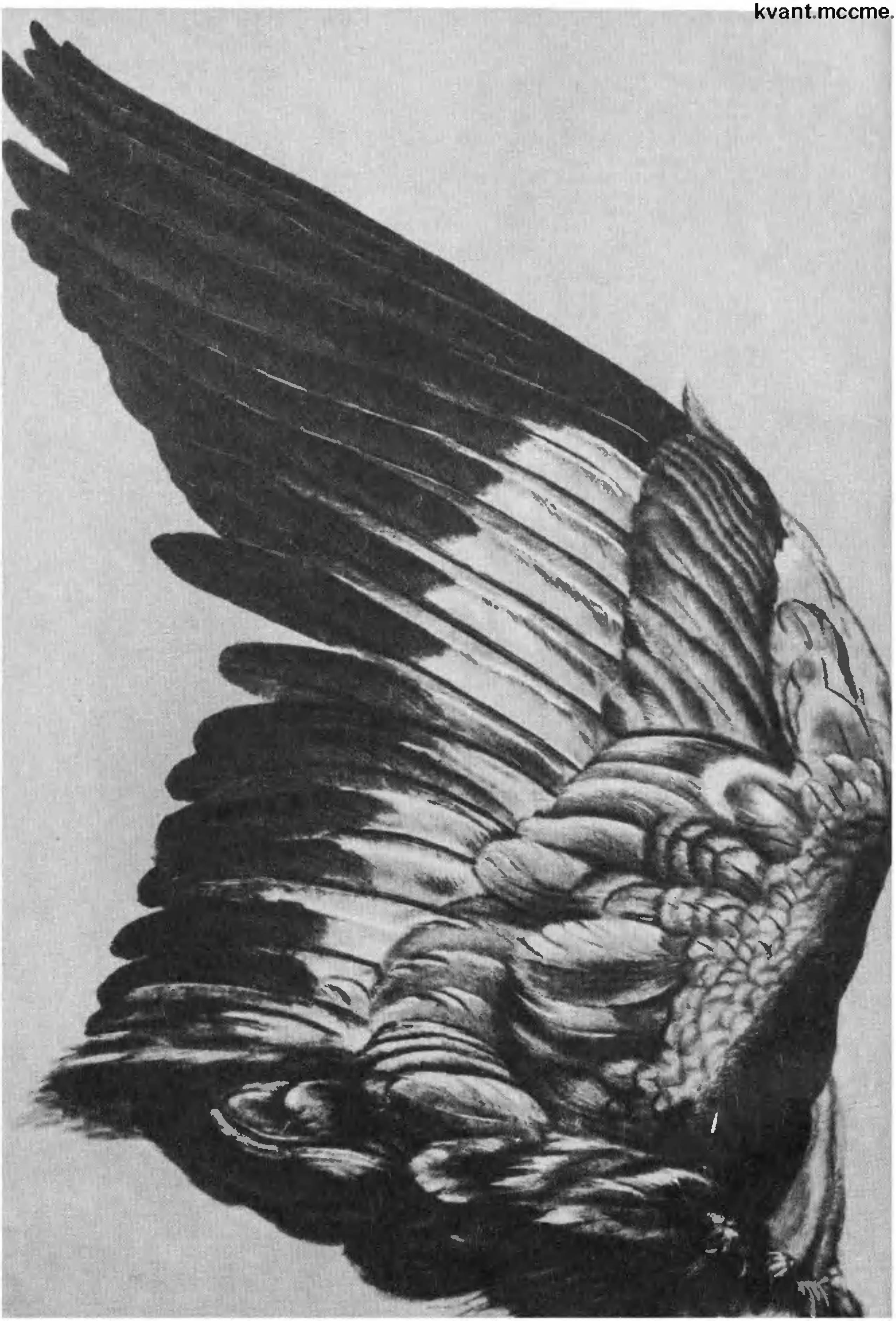
Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Геометрия листа бумаги

1988



Квант

Основан в 1970 году

9 1988

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Александр Александрович ФРИДМАН

(к 100-летию со дня рождения)

Доктор физико-математических наук
В. Я. ФРЕНКЕЛЬ

Трудно определить, к какой области науки можно отнести деятельность замечательного советского ученого Александра Александровича Фридмана. Если обратиться к биографическому справочнику «Физики», то мы найдем в нем обстоятельную статью об Александре Александровиче. Но столь же информативная статья имеется и в аналогичном справочнике «Математики и механики». Наконец, в третьем подобном сборнике биографий «Астрономы» мы также найдем имя Фридмана, а заодно узнаем и о том, что в его честь назван один из кратеров на поверхности Луны. Кем же был этот наш соотечественник, жизнь которого справедливо называют подвигом, а открытие в области космологии — одним из самых революционных в науке, по масштабу приближающимся к тому, что было сделано Коперником? Он был «един в трех лицах», точнее — даже в четырех: и физик, и механик, и математик, и астроном (астрофизик). Созданная им в далеком 1922 году модель меняющейся во времени, расширяющейся Вселенной находится сейчас в центре внимания астрофизиков; она получила экспериментальное подтверждение в ряде работ-открытий, первая из которых была выполнена американским астрономом Э. Хабблом спустя четыре года после смерти Фридмана, а одна из самых существенных — обнаружение пронизывающего Вселенную электромагнитного излучения (получившего название реликтового)— около четверти века тому назад. Пожалуй, именно с момента этого открытия, сделанного американскими физиками Р. Вильсоном и А. Пензиасом, парадоксальные выводы из теории Фридмана, ему самому в свое время казавшиеся чуть ли не курьезом, обрели силу практически неопровержимых фактов, а наука о Вселенной стала стремительно развиваться.

А. А. Фридман родился в Петербурге 16 июня 1888 года. Его отец, тоже Александр Александрович, был артистом балета, дирижером, композитором, учился в Петербургской консерватории у Н. А. Римского-Корсакова. Мать, Людмила Игнатьевна Воячек, дочь известного петербургского композитора, органиста и дирижера И. К. Воячека, была пианисткой. «Ген» музыкальности в Александре Фридмане не проявился: он просто любил музыку, не более. В 1897 году он поступил в приготовительный класс 2-й Петербургской гимназии, располагавшейся неподалеку от дома № 35 по набережной реки Мойки, в котором жила его семья.

В гимназии был сильный преподавательский состав. Достаточно сказать, что двое из учителей были авторами гимназических учебников. Сведения по истории гимназии — самой старой в Петербурге — можно найти в ее материалах, составляющих особый фонд Государственного исторического архива Ленинграда. В этом фонде есть, конечно, сведения и об учениках, и об учителях, и материалы заседаний Педагогического совета гимназии, и даже страшные кондуиты (вспомните «Кондуит и Швамбранию» Льва Кассиля!), в которые пунктуально заносились рапорты классных надзирателей о проступках и шалостях гимназистов.

Если в первом классе Александр Фридман учился более чем средне (по большинству предметов, включая и арифметику, у него стояли тройки), то начиная с третьего класса он —

один из лучших учеников. Другим таким учеником, разделявшим с Александром пальму первенства, был его многолетний друг Яков Тамаркин. Классом старше занимался во 2-й гимназии еще один юноша, имя которого известно, вероятно, читателям «Кванта»,— это был в будущем знаменитый математик академик Владимир Иванович Смирнов, товарищ Фридмана по аспирантуре, соавтор его работ, автор пятитомного курса высшей математики. В одном классе со Смирновым учился еще один необычайно одаренный юноша — Михаил Петелин, также товарищ и соавтор Фридмана. Редкое соцветие талантов, не в последнюю очередь, думается, проявившееся благодаря педагогическим способностям учителей — математиков Я. В. Иодынского и П. Н. Гензеля и физика И. В. Глинки.

В 1903 году (Фридман был тогда в шестом классе) И. В. Глинка организовал в физическом кабинете гимназии внеклассные занятия по физике, а вскоре после этого — физический кружок, собиравшийся три раза в неделю. Наиболее инициативные его участники руководили практическими занятиями своих товарищей. Затем кружок стал несколько торжественно называться «Обществом любителей физики 2-й Санкт-Петербургской гимназии». Гимназисты читали на его заседаниях реферативные доклады, организовали свою кружковую физическую библиотечку, начали издавать рукописный журнал, в котором помещались сделанные учениками обзоры по новейшим достижениям физики.

Фридман был, очевидно, очень привязан к гимназическому физическому кружку и, по воспоминаниям одного из своих товарищей по университету, бывал на его заседаниях, уже став студентом.

Тщетно пытался я найти Александра Фридмана в числе озорников, описанием подвигов которых заполнены ежедневные записи в кондуите 2-й гимназии. Видимо, был он поначалу довольно тихого нрава, потом вместе с Тамаркиным серьезно увлекся математикой, а еще позднее, уже в самых последних классах — революционным движением. Здесь он проявил себя опытным конспиратором: гимназическое начальство и не подозревало, что один из учащихся — член Центрального комитета Петербургской социал-демократической ученической организации. Была у Фридмана и «партийная» кличка — «Лиловый».

Александр Александрович Фридман. (Фото начала 10-х годов.)

Однажды Фридман и Тамаркин, в то время ученики восьмого класса, на уроке были необычайно возбуждены, разговаривали. Их даже выставили из класса. Однако, когда учитель узнал причину такого возбуждения, он не дал «делу» ход. Оказалось, что именно в то утро друзья узнали, что их первый математический труд — статья по теории чисел — принят к печати известным немецким математическим журналом и получил одобрение крупнейшего математика — Д. Гильберта.

Гимназию Фридман окончил с золотой медалью.

В материалах фонда гимназии сохранились задачи, которые были предложены гимназистам на выпускных экзаменах. Приведем две такие задачи (из числа четырех, занесенных в протоколы экзаменационной комиссии), чтобы у современных школьников-старшеклассников создалось представление о степени трудности соответствующей экзаменационной процедуры в мае 1906 года.

Алгебра письменная. Решить в целых и положительных числах неопределенное уравнение $ax+by=c$, в котором a равно корню уравнения

$$\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2},$$

уменьшенному на 5 единиц, b равно пятому члену геометрической прогрессии, в которой все члены положительны, второй больше первого на $1\frac{1}{9}$, а разность между четвертым и первым есть $14\frac{4}{9}$, и, наконец, c равно коэффициенту того члена разложения

$$\left(z\sqrt[4]{z^3}+\sqrt[8]{\frac{1}{z}}\right)^m,$$

который после упрощения содержит пятую степень буквы z и где m равно корню уравнения

$$\frac{\lg x}{2-\lg 5}=1.$$

Геометрия письменная. В полукруге радиусом R проведена хорда CD, параллельная диаметру AB и стягивающая дугу α; из точки D опущен перпендикуляр DE на AB, и точка E соединена с C. Фигура, ограниченная прямыми DE, EC и дугою DC, вращается около диаметра. Определить объем тела вращения, если известно, что $R=23{,}476$ м, а дуга α определяется уравнением $5\cos 2\alpha+13=24\cos\alpha$.

В 1906 году Фридман и Тамаркин — их имена во все годы учения идут рядом, как, скажем, имена Ильфа и Петрова,— поступают на математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета. И тут и им, и их товарищам очень повезло: как раз в этом году в Петербургский университет перевелся из Харьковского университета замечательный математик Владимир Андреевич Стеклов. Вот что Стеклов писал позднее, в 1911 году (этот отзыв хранится в том же архиве, что и материалы гимназии, но в фонде Университета): «Замечу, что выпуск 1910 г. (год окончания Фридманом и Тамаркиным университета,— *В. Ф.*) составляет какой-то исключительный случай. Из выпуска 1911 г. и среди студентов 4-го курса предстоящего выпуска нет ни одного, равного по способностям с гг. Тамаркиным, Фридманом, Булыгиным, Петелиным, Смирновым, Шохатом и др. Не было ни одного такого случая и за мою 15-летнюю преподавательскую деятельность в Харьковском университете. Этим благоприятным случаем необходимо воспользоваться для пользы Университета».

Еще будучи студентами-второкурсниками, Тамаркин и Фридман написали совместно сочинение на соискание золотой медали на тему «Разложение уравнений второй степени в целых числах». Стеклов писал в отзыве на эту работу, что она «обнаружила в авторах редкую для их возраста начитанность, знакомство с предметом и способность к систематическим исследованиям». Сочинение было удостоено золотой медали. Неудивительно, что после успешного окончания курса наук и получения диплома I-й степени Фридман и Тамаркин были оставлены в университете для подготовки к профессорской деятельности (аналог современной аспирантуры). К этому времени относится организация Фридманом и его товарищами «Математического кружка», который в течение четырех лет — с 1910 по 1914 годы — регулярно собирался для изучения и обсуждения различных математических проблем, штудирования книг классиков, для бесед о самих основах любимой науки. Фридман был одним из активнейших членов кружка.

С 1907 года он посещал также заседания кружка новой физики, руководителем которого был проживавший тогда в Петербурге венский физик П. С. Эренфест. Там разбирались новые работы по теории квантов и теории относительности. Фридман уже знал имя Эйнштейна, но вряд ли он подозревал в то время, что его научный путь пересечется с эйнштейновским и что произойдет это сравнительно скоро — в 1922 году.

В преддверии первой мировой войны с А. А. Фридманом произошла некоторая метаморфоза: молодой ученый кабинетного типа, увлекавшийся проблемами теории чисел, математического анализа, основами геометрии и теоретической механикой, под влиянием крупного русского ученого академика Б. Б. Голицына (и с одобрения В. А. Стеклова) увлекся вопросами аэро- и гидродинамики и метеорологии. В 1913 году он начал работать (наряду с преподаванием математики в Горном институте и Институте инженеров путей сообщения) в Главной физической обсерватории. В Павловске, под Петербургом, находился филиал этой обсерватории, и Фридман занимался там изучением поведения воздушных потоков, организовывал подъемы на воздушных змеях приборов, измерявших силу и направление ветров на различных высотах, сам с этой же целью совершал полеты на дирижабле. Пятый — воздушный — океан стал на всю жизнь подлинной страстью Александра Александровича!

Когда началась мировая война, Фридман уже в августе 1914 года поступил добровольцем в действующую армию. Ему было поручено налаживание аэронавигационной служ-

Дом на улице Плеханова (бывшей Казанской), в котором находилась 2-я Петербургская гимназия. Сейчас в этом здании — школа № 232.

В этом доме на Набережной Мойки жила семья А. А. Фридмана. Дом сохранился и ныне находится под охраной государства как памятник архитектуры XIX века.

бы, включавшей в себя и составление инструкций для полетов, и метеорологические прогнозы, и разработку приборов, обеспечивающих безопасность полета. За участие в разведывательных полетах русской авиации на Северном фронте и проявленную при этом храбрость Фридман уже в первые месяцы войны получил Георгиевский крест (к которому позднее присоединился и второй такой крест, и Георгиевское оружие — награда за особое мужество). На фронте Фридман не только продолжает совершать боевые вылеты, но и занимается составлением таблиц прицельного бомбометания — ведь поначалу, когда авиация из разведывательной стала превращаться в бомбардировочную (максимальный вес авиабомбы составлял в то время около 16 кг), было совсем неясно, в какой момент надо сбрасывать бомбу, чтобы она попала в цель.

В сентябре 1925 года приехавший в Ленинград немецкий профессор метеоролог Г. Фиккер рассказал академику В. А. Стеклову, что в минувшую войну он находился в осажденном русскими войсками городе-крепости Перемышле. И вот единственное точное попадание русской бомбы, которое ему довелось наблюдать, произошло с аэроплана, на котором летел Фридман. Это свидетельство неизменно упоминается в немногих публикациях об Александре Александровиче. Неясно, каким же образом Фиккер, находясь в 1915 году в Перемышле, об этом узнал. Ситуация прояснилась, когда мне удалось найти в сентябрьском номере одной из ленинградских газет (за 1925 г.) запись беседы Фиккера с корреспондентом этой газеты. Немецкий ученый рассказал, что впервые встретился с Фридманом летом 1923 года в Германии. В разговоре коллег очень быстро выяснилось, что оба они — по разные стороны от линии фронта — служили во время войны в военной авиации. Фридман помнил точную дату своего наиболее удачного полета над Перемышлем, а Фиккер запомнил день, когда буквально на его глазах там разорвалась бомба, сброшенная с русского военного аэроплана. Даты совпадали! В своем интервью Фиккер сказал: «Так выяснилось точное время и место столь... неприветливого нашего знакомства на поле брани». Знакомства, сменившегося в 23—25 годах тесным сотрудничеством.

В 1917 году Фридман возглавляет в Москве завод «Авиапром», выпускающий авиационные приборы, продолжает составлять таблицы бомбометания. Через год он переезжает в Пермь и становится профессором организованного там Университета, одним из активных создателей его физико-математического общества, научного журнала при этом обществе; выполняет ряд работ по гидродинамике и теоретической механике. В 1920 году он возвращается в Петроград. В городе — страшная нехватка квалифицированных педагогических кадров, и Фридман сразу же оказывается профессором четырех (!) вузов города: Университета, Политехнического института, Института инженеров путей сообщения и Военно-морской академии.

К этому времени он знакомится с последними работами Эйнштейна по приложению уравнений общей теории относительности к Миру в целом. Из уравнений Эйнштейна следовало, что Мир (Вселенная) в целом нестационарен. Это заключение противоречило философским установкам великого физика, полагавшего, что наша Вселенная вечна и не меняется со временем. Поэтому Эйнштейн ввел в соответствующее уравнение дополнительный член (так называемый λ-член), который приводил к стационарному решению. Теперь получался желаемый результат: Мир существовал всегда и будет существовать вечно, проблема «начала» и «конца», прочно ассоциировавшаяся с религиозными учениями и древними легендами, таким образом, не возникала.

Фридман подошел к этой проблеме не предвзято и показал, что уравнения Эйнштейна (взятые без λ-члена) допускают решение, в соответствии с которым расстояние между различными объектами Мира (например, галактиками) меняется во времени, причем оно может как возрастать, так и уменьшаться. Наша Вселенная может долгое время расширяться (название «расширяющаяся Вселенная» однозначно связывается с именем Фридмана и соответствует ныне переживаемой ею фазе). А будет ли это расширение безграничным или же сменится сжатием, зависит от того, какова средняя плотность ρ материи во Вселенной. Если ρ меньше некоторого критического значения $\rho_к \approx \approx 10^{-29}$ г/см^3, то расширение будет продолжаться. Если же $\rho > \rho_к$, то оно сменится сжатием; Вселенная сожмется в «точку», которую называют точкой сингулярности. После этого произойдет «Большой взрыв» — и снова вещество, сконцентрировавшееся до умопомрачительных плотностей, начнет обратное движение к расширению. «Сценарий» того, что произошло после Большого взрыва, уже сейчас во многих деталях сумели воссоздать физики-теоретики и астрофизики. Он блестяще изложен в книге американского физика, лауреата Нобелевской премии Стивена Вайнберга «Первые три минуты». Интересно отметить, что само представление о рождении (или, лучше сказать, возрождении) Вселенной в Большом взрыве впервые было сформулировано американским физиком русского происхождения Г. А. Гамовым, который в 20-е годы учился у Фридмана в Петроградском университете и считал себя его учеником.

Александр Александрович Фридман был первым, кто получил формулы для определения возраста нашей Вселенной и, исходя из очень неточных данных, оценил его в 10 миллиардов лет. По нынешним оценкам он составляет 15—20 миллиардов лет. Космологическая работа Фридмана, вышедшая в свет в 1922 году в ведущем немецком физическом журнале, вызвала возражения Эйнштейна, который, как указывалось, полагал Вселенную стационарной и потому счел ошибочными выводы Фридмана о возможности ее эволюции во времени. Об этом Эйнштейн и написал краткую заметку в тот же журнал. Фридман в конце 1922 года написал Эйнштейну письмо, в котором отстаивал свои взгляды. Содержание письма довел до сведения Эйнштейна петроградский коллега Фридмана — профессор Юрий Александрович Крутков, оказавшийся весной 1923 года за границей. В мае этого года он несколько раз встречался с Эйнштейном, и 18 мая сделал такую полушутливую запись в своем дневнике: «Победил Эйнштейна в споре о Фридмане. Честь Петрограда спасена!». Эйнштейн направил (все в тот же журнал) еще одну заметку, в которой снимал свои прежние возражения против выводов Фридмана и признавал его результаты выдающимися и проливающими новый свет на проблемы космологии. Великому ученому и раньше приходилось делать ошибки, но позднее, в 1931 году, он признался, что более досадной ошибки, чем в случае оценки работы Фридмана, он в своей жизни не совершал.

Фридман не дожил до триумфа своей теории, в которой он «на кончике пера» открыл расширяющуюся Вселенную и, в общих чертах, предсказал возможные пути ее эволюции. Как упоминалось в начале статьи, доказательства пришли позднее. Через четыре года после кончины Александра Александровича американский астроном Э. Хаббл на основе изучения спектров далеких галактик показал, что галактики удаляются от нас со скоростью v, пропорциональной отделяющему их от нас расстоянию r: $\vec{v} = H\vec{r}$. Коэффициент пропорциональности H, не зависящий от $\vec{r}$ (и зависящий, вообще говоря, от времени), получил название постоянной Хаббла. По современным данным H принимают равной 75 км/(с · Мпс). Заметим, что постоянная Хаббла вместе с постоянной всемирного тяготения G определяет величину критической плотности $\rho_к$: $\rho_к = 3H^2/8\pi G \approx \approx 10^{-29}$ г/см^3.

В 1965 году Р. Вильсон и А. Пензиас в США обнаружили реликтовое излучение — зримый след Большого взрыва. Работа Фридмана получила новое и мощное подтверждение.

Мы не будем здесь воспроизводить формулы и рассуждения, которые привели Фридмана к его выводам. Укажем, однако, что в 1934 году оказалось возможным целый ряд важнейших заключений сделать не на сложном языке общей теории относительности, который использовал в своих работах Александр Александрович, а на более простом и привычном ньютоновском языке. Очень ярко об этом рассказал на страницах «Кванта» (№ 3, 1984) замечательный советский физик-теоретик Я. Б. Зельдович, необычайно много сделавший и для глубокого развития идей Фридмана, и для их пропаганды.

В первой половине 20-х годов Фридман продолжал работать одновременно и в области физики атмосферы, и в области теории относительности. В июле 1925 года, будучи директором Главной геофизической обсерватории, он совершил вместе с профессиональным летчиком-аэронавтом П. Ф. Федосеенко героический полет в атмосферу на воздушном шаре; был установлен всесоюзный рекорд высоты (7400 м). Фридман записал свои впечатления о полете. То же сделал и Федосеенко. Замечательные статьи! Из них — особенно, конечно, из статьи Федосеенко — мы узнаем, что мужественный летчик-наблюдатель времен Первой мировой войны, Александр Фридман остался таким же храбрым человеком, став всемирно известным ученым.

Летом 1925 года он впервые за много лет поехал на три недели отдохнуть в Крым. Возвращаясь домой — в Ленинград он приехал 17 августа,— Александр Александрович заболел брюшным тифом и от этой нелепой случайности погиб в 37-летнем возрасте 16 сентября, в расцвете творческих сил и таланта. Газеты откликнулись на это печальное событие рядом публикаций. В частности, «Вечерняя Красная Газета»— предшественница «Вечернего Ленинграда»— 18 сентября напечатала интервью с врачом, лечившим Фридмана. Последний день своей жизни Александр Александрович был в бреду, и бред его, как сказал врач, был очень характерен: «Он говорил о студентах, лекциях, вспоминал о полетах, старался делать какие-то вычисления. Порой казалось, что он читает лекцию». Вот когда ходячая фраза о том, что ученый до последних мгновений жизни думает о своей науке, перестает быть метафорической, а превращается в констатацию истинного положения вещей!

Имя Александра Александровича Фридмана золотыми буквами вписано в историю мировой науки. Его талант и заслуги были признаны при жизни. В 1931 году его работы были удостоены Премии имени В. И. Ленина. Его известность и слава сейчас, с развитием астрофизики, с дальнейшим проникновением в тайны Вселенной, все более и более возрастают.

Рекомендуемая литература

Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. М.: «Наука», 1973. (§ 16 гл. II: «Расширяющаяся Вселенная», с. 118—126).

Новиков И. Д. Эволюция Вселенной. М.: «Наука», 1979.

Зельдович Я. Б. Вселенная. «Квант» № 3, 1984.

Вайнберг С. Первые три минуты. М.: «Наука», 1981.

Зельдович Я. Б. Почему расширяется Вселенная? «Природа» № 2, 1984.

Новиков И. Д. Как взорвалась Вселенная. «Природа» № 1, 1988.

Новиков И. Д. Вселенная как тепловая машина. «Квант» № 4, 1988.

Александр Аркадьевич Борин — известный специалист в области аэродинамики. В течение многих лет он работал в Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ) и в опытных конструкторских бюро ведущим конструктором по особо сложным объектам авиационной техники.

Эту статью А. А. Борин написал по просьбе редакции «Кванта». Так случилось, что она стала его последней работой — в июле 1987 года Александра Аркадьевича не стало.

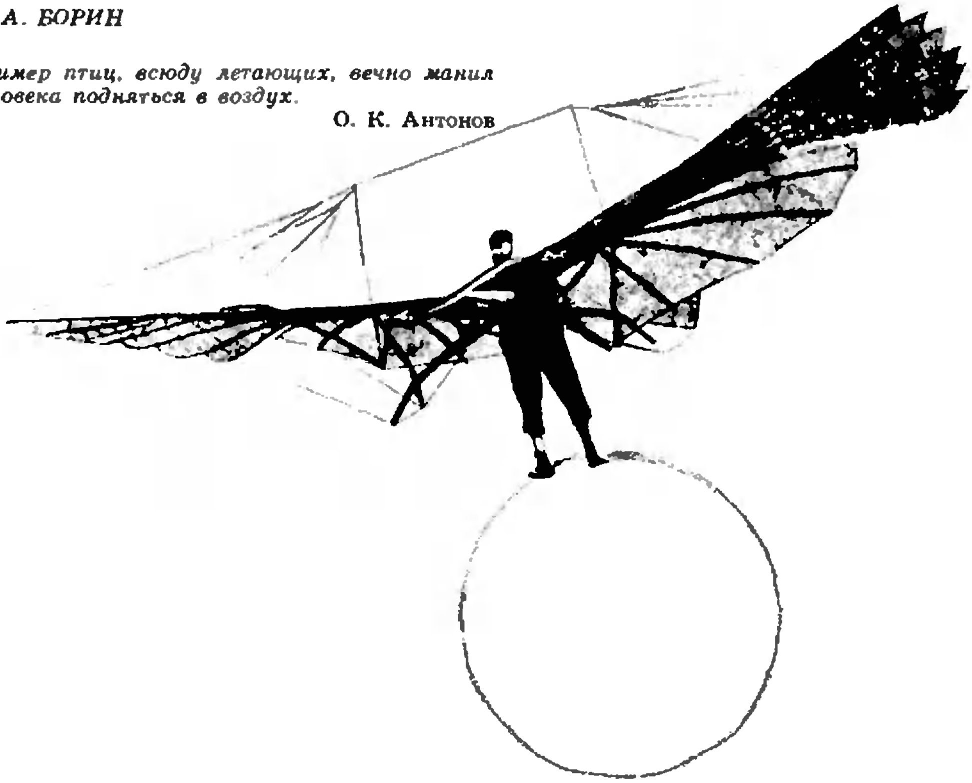
Мы решили опубликовать статью в том виде, в каком она была подготовлена автором. Понимая, что не все в ней доступно нашему читателю, мы попросили члена редколлегии «Кванта» профессора А. Л. Стасенко дать необходимые пояснения по тексту. Они приведены как примечания в конце статьи.

ПОЛЕТ ПТИЦЫ И ПОЛЕТ ЧЕЛОВЕКА

А. А. БОРИН

Пример птиц, всюду летающих, вечно манил человека подняться в воздух.

О. К. Антонов



Спор, длящийся столетия

Мечта о полете — о машущем полете — стара если не как мир, то, во всяком случае, как история развитого человеческого сознания. Древние, имея перед глазами пример птиц, не могли представить себе иной способ полета. Такова и легенда об Икаре.

Такова и первая сохранившаяся в истории попытка осмыслить полет с точки зрения тогдашних научных знаний. Это сделал Леонардо да Винчи. Понадобились еще сотни лет наблюдений и опытов, чтобы прийти к той очевидной для нас мысли, что летать можно и на неподвижном крыле. Теперь же мы прошли по этому пути так далеко, что оставили позади пернатых летунов почти по всем показателям, хотя ни один летательный аппарат не «владеет своим телом» столь совершенно, как птица.

Однако еще на рубеже нашего столетия представления ученых и техников были наивны и далеки от действительности. «Мы встречаем опять беспочвенные попытки летать на аппаратах, наивно имитирующих птиц,

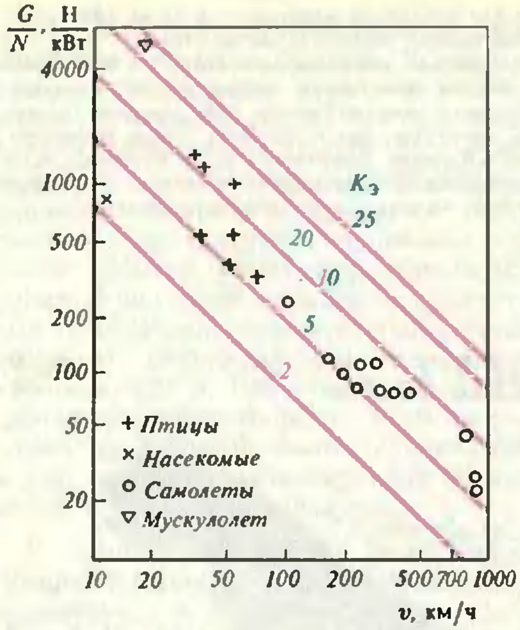


Рис. 1. Зависимость нагрузки на мощность от скорости крейсерского полета.

или новые исследования... частично повторяющие исследования Леонардо...» Так писал об этом времени замечательный советский ученый в области ракетно-космической техники М. К. Тихонравов в своей книге «Полет птиц и машины с машущими крыльями». Более того, точно такие же попытки повторяются в 30-х годах нашего столетия и, по крайней мере в проектах, неистребимо живут до наших дней. Легенда о машущем полете человека жива со времен древних греков, изменилось лишь ее содержание. В завораживающем своей легкостью парении птицы древние мифотворцы видели надежду на осуществление полета, нынешние же — они искушенней, ибо человек полетел,— ищут не достигнутое нами совершенство, свято веря, что творения природы всегда и во всем выше робких созданий разума.

Вопреки бесчисленным неудачам, машущий полет и сегодня привлекает громадное число энтузиастов. Его кажущаяся легкость побуждает любителей строить модели и подавать хитроумные проекты в счастливой уверенности, что именно им известен секрет, который позволит наконец человеку совершить машущий полет.

Но потом наступает разочарование: шагнуть дальше летающих моделей — а их за последнюю сотню лет построено без числа — не удалось пока никому. Случайно ли это? Или постоянные неудачи имеют более глубокие корни? Может ли человек летать в точном смысле «как птица»? И — главный вопрос: будет ли этот способ полета лучше обычного? или хуже?

Крейсерский полет

Крейсерским будем называть горизонтальный полет на режиме, обеспечивающем наибольшую дальность. Достижения миниатюрных существ — птиц — в этой области поражают воображение. Достоверно известно, что в 20-х годах стая чибисов пересекла Атлантику, покрыв 4000 км за 24 часа (средняя скорость 167 км/ч). Стая золотистых ржанок совершила перелет через Тихий океан на 10 000 км со средней скоростью более 100 км/ч.

Не менее впечатляет тот факт, что по нагрузке на единицу мощности (см. примечание[1]) птицы многократно превышают самолеты. Ведь очевидно, что аппарат, способный переносить по 1000Н на каждый киловатт мощности, несравненно выгодней другого, переносящего (при прочих равных условиях) только по 100Н. Следовательно, заявляют адепты машущего полета, по энергетике птица во много раз совершенней самолета.

Но, не забудем,— «при прочих равных условиях»! В чем заключается их равенство?

Как и всякий энергетический процесс, полет птицы (или самолета) подчиняется закону сохранения энергии, который для любого объекта, движущегося с постоянной скоростью v в сопротивляющейся среде, может быть представлен в виде $N\eta_{дв} = F_c v$, где N — потребляемая при движении мощность, $\eta_{дв}$ — КПД движителя, F_c — сила сопротивления среды (на данной скорости). Вводя величину качества[2] $K = G/F_c$ и выражая скорость в единицах км/ч, получаем величину нагрузки на единицу мощности:

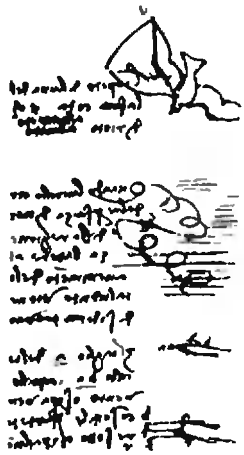
$$\frac{G}{N} = 3600\,\frac{K\eta_{\text{дв}}}{v}.$$

Размерность этой величины — Н/кВт.

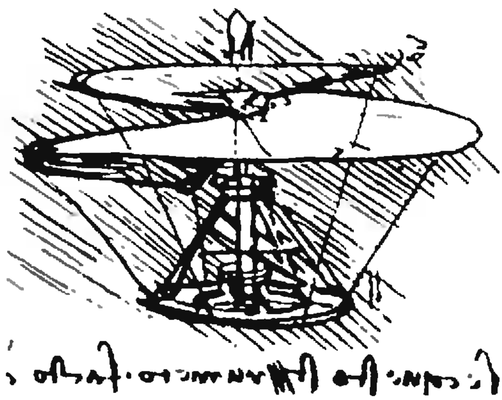
Эта зависимость универсальна: она справедлива для любых движущихся объектов (птица, самолет, поезд, корабль, жидкость, перекачиваемая по трубам) вне зависимости от происхождения силы, приводящей их в движение (мускулатура, тепловой или электрический двигатель, ветер), и от устройства движителя (колесо, винт, машущее крыло, насос). Чтобы решить задачу до конца в каждом конкретном случае, достаточно найти величину «эквивалентного качества» $K_э = K\eta_{\text{дв}}$, поскольку кроме $K_э$ нагрузка на мощность G/N зависит только от скорости v. Таким образом, критерием энергетического совершенства, оценивающим рациональность выбора технического решения или природного устройства объекта, является не нагрузка на мощность, коренным образом зависящая от скорости (не соблюдается «равенство прочих условий»!), а безразмерная величина $K_э$.

Теперь становится ясной причина больших значений G/N у птиц и насекомых. Ее отчетливо иллюстрирует график на рисунке 1. Даже при низком уровне энергетического совершенства (у саранчи, например, $K_э = 2{,}8$, тогда как у хороших самолетов $K_э = 13$ и больше) удельные нагрузки у них выше просто потому, что мала скорость полета. В этом смысле особо показательна точка графика, соответствующая знаменитому мускулолету «Госсамер — Кондор», перелетевшему Ла-Манш. Этот аппарат, построенный по самолетной схеме — неподвижное крыло и винтовой движитель, благодаря очень малой скорости полета ($v = 17{,}8$ км/ч) имеет недостижимую ни для каких птиц нагрузку на мощность 4400 Н/кВт.

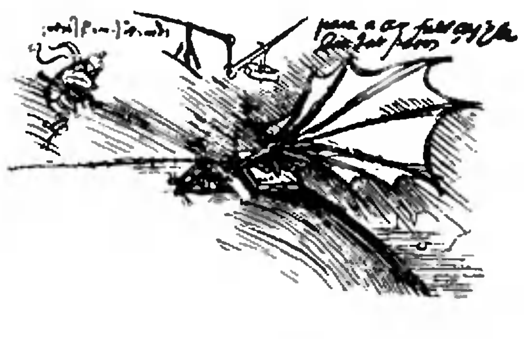
Физический смысл изложенного крайне прост: при затрате определенной мощности переносимый груз тем больше, чем меньше скорость. В этом и заключается «тайна» больших нагрузок на мощность у летающих животных.



Эскиз и описание маневра птицы в воздухе (из работ Леонардо да Винчи).



«...когда этот прибор, сделанный винтом,... быстро приводится во вращение —...винт ввинчивается в воздух и поднимается вверх» — таким текстом сопроводил Леонардо да Винчи этот свой эскиз летательного аппарата.



Леонардо да Винчи. Модель летательной машины.

Итак, критерий энергетического совершенства — $K_э$. Вполне естественно, что величина $K_э$ кардинально влияет на дальность горизонтального полета L. Согласно формуле Бреге,

$$L = -\frac{K_э}{C_у}\,\frac{\lg(1-\bar{m}_{гор})}{\lg e},$$

где $C_у$ — удельный расход горючего, $\bar{m}_{гор} = m_{гор}/m_0$ — относительная масса горючего, m_0 — стартовая масса объекта[3)].

Из формулы видно, что абсолютные размеры и масса не оказывают влияния на дальность полета. Таким образом, сопоставление миниатюрных размеров птиц с покрываемыми ими расстояниями относится скорей к области эмоций, нежели к научной аргументации. При оценке же реально действующих факторов сравнение и здесь не обнаруживает какого-либо преимущества птиц.

Данные о перелетах — бесценный материал для исследователя. Достаточно хорошо измерить пройденное расстояние и относительную потерю массы (а это не представляет затруднений), чтобы получить надежную оценку энергетического совершенства объекта.

К сожалению, этих данных о птицах обычно и недостает. В сведениях об упомянутом перелете ржанок не указаны ни вес птиц, ни скорость ветра; более того, нет никаких указаний на то, что птицы не кормились в пути. Перелет чибисов через Атлантику сопровождался сильным попутным ветром — до 95 км/ч; потеря веса не измерялась. Полные и достоверные экспериментальные данные имеются лишь для одного случая: перелета стаи американских славок Dendroica striata от штата Массачусетс (США) до Бермудских островов (расстояние 1300 км). Скорость полета контролировалась радаром; учитывался ветер на трассе. Потеря массы составила в среднем 0,165 от стартовой.

Соответствующие данные по самолетам: относительная потеря массы устаревшего самолета ЛИ-2 — 0,182 при дальности полета 2090 км, самолета АНТ-25, совершившего в 1937 году перелет Москва — Сан-Джасинто (США) — 0,542 при дальности 13 000 км. Пользуясь известными значениями удельной теплоты сгорания авиационного топлива и «горючего» (жира) птиц, а также термическим КПД, по этим данным можно определить $K_э$: для птицы $K_э = 10{,}6$, для самолета ЛИ-2 $K_э = 8{,}7$, для АНТ-25 $K_э = 13{,}9$. Эти данные подтверждают отсутствие энергетического превосходства птиц. Интересно отметить, что относительной потере массы 0,165 у самолета АНТ-25 соответствует дальность только 3300 км.

Взлет, посадка, висение на месте

Да, скажут ревнители машущего полета, но ведь птица взлетает и садится вертикально, а для самолетов, лишенных этой возможности, мы вынуждены строить дорогостоящие взлетно-посадочные полосы.

Тут, как говорится, ничего не скажешь: осуществить аппарат, взлетающий как вертолет и летящий горизонтально как самолет, мы можем лишь ценой громадного расхода топлива на взлете. Необходимо, однако, внести некоторые уточнения.

Из второго закона Ньютона следует, что подъемная сила P всякого динамического несущего органа (крыла, несущего винта) равна произведению секундной массы отброшенного вниз воздуха $m_в$ на вертикальную скорость отброшенной струи. Обозначив площадь, ометаемую несущим органом (рис. 2), через s и имея в виду, что скорость отброшенной струи v_2 на режиме висения вдвое превышает скорость в плоскости несущего органа v_1, найдем подъемную силу, равную весу аппарата: $P = G = m_в v_2 = 2m_в v_1 = 2\varrho s v_1^2$ (ϱ — плотность воздуха у земли)[4)].

Не вся затрачиваемая энергия идет на отбрасывание струи; учитывая потери ее (на закручивание струи, на трение несущего органа о воздух), введем «относительный КПД» η_0 и найдем мощность, необходимую для поддержания единицы веса:

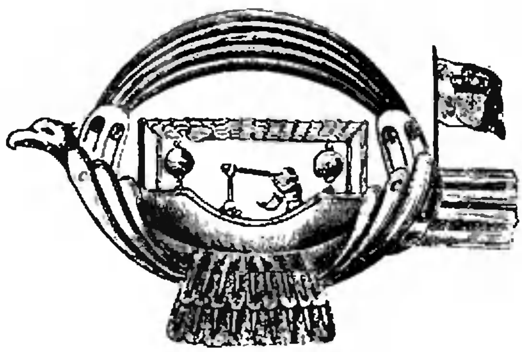
$$\frac{N_{потр}}{G} = \frac{1}{\eta_0\sqrt{2\varrho}}\left(\frac{G}{s}\right)^{1/2}.$$

Очевидно, что определяющим фактором для возможности вертикального взлета и висения является так называемая нагрузка на ометаемую площадь G/s. Отсюда следуют важные выводы, вполне подтверждаемые практикой.

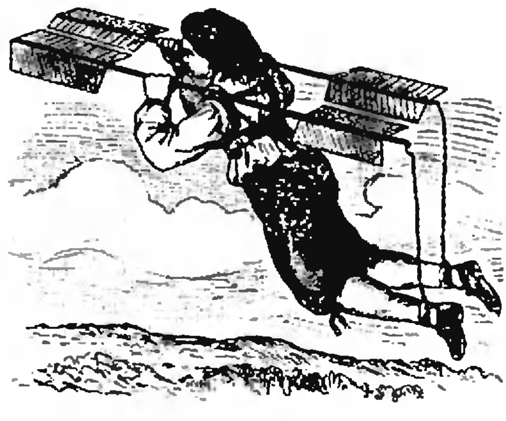
При условии геометрического и кинематического подобия (что удовлетворительно соблюдается в пределах одного биологического вида) ометаемая площадь изменяется пропорционально квадрату линейных размеров, масса — пропорционально кубу; нагрузка на площадь, следовательно, пропорциональна линейному размеру. Это объясняет упомянутый выше факт: вертикальным взлетом и способностью к «трепещущему» полету (зависанию) обладают только сравнительно небольшие птицы — не крупнее голубя. Более крупные — например, вороны — способны осуществлять точечный взлет (с места), пользуясь мощным толчком ногами; еще более крупные — гагара, пеликан, фламинго — взлетают, подобно самолету, с разбегом. Наконец, кондор, альбатрос и другие крупные птицы могут начинать полет, только бросаясь с возвышенных предметов — деревьев, скал, прибрежных дюн.

Кроме того — и это нельзя забывать энтузиастам, мечтающим осуществить вертикальный взлет на искусственном летательном аппарате, — добиться этого можно только при условии движения крыльев в горизонтальной плоскости на режиме взлета — иначе нельзя получить достаточно большую ометаемую площадь. У птиц переход от почти вертикального маха в крейсерском полете к почти горизонтальному при взлете и посадке осуществляется без труда благодаря гибкости и возможности сильно изменять наклон корпуса. Построить же такой натурный искусственный аппарат при сегодняшнем уровне техники не представляется возможным.

Вторым важным фактором, определяющим возможность висения и вертикального взлета, является доступный для данного животного предел удельной располагаемой мощности



Воздушный корабль, построенный французом Лораном в начале XVIII века. Крылья, сделанные из птичьих перьев, должны были приводиться в движение человеком.



В 1786 году француз Бенье испытал свой летательный снаряд с четырьмя крыльями.

Летательная машина Труве (конец XIX века). Модель летала на расстояние около 75 м и с последним взмахом крыльев медленно падала вниз.

$N_{расп}/G$. По оценке биологов он колеблется от 0,0040 до 0,0053 кВт/Н для птиц массой до 10 кг и снижается при дальнейшем увеличении массы. Очевидным условием вертикального взлета является выполнение неравенства $N_{потр} \leqslant N_{расп}$. На рисунке 3 дан график, по которому можно проследить, как выполняется это условие для реальных объектов — животных и летательных аппаратов (масштабы G/s и G/N ($N \equiv N_{расп}$) у вторых для наглядности сдвинуты).

При отсутствии упомянутых выше вредных потерь $\eta_0 = 1$. Этому случаю («идеальная птица») соответствует верхняя наклонная прямая графика. Ниже располагаются прямые с постепенно убывающим значением η_0. Нанося по известным G/s и G/N точку на график, получим характеристику соответствующего ей объекта; очевидно, что отстояние точки от прямой для «идеальной птицы» ($\eta_0 = 1$) является мерой энергетического совершенства объекта на данном режиме. Имеющиеся (к сожалению, немногочисленные) данные для птиц дают величину η_0 от 0,27 до 0,47; для единственного обстоятельно изученного насекомого — дрозофилы — 0,16. У вертолетов η_0 колеблется от 0,38 до 0,68, т. е. по степени энергетического совершенства на режиме висения они заметно превосходят летающих животных.

В этом нет ничего удивительного. Источником больших потерь у животных является неполнота ометания круга на размахе крыла. У птиц к этому добавляется отсутствие упругого элемента в системе корпус — крыло (он есть у насекомых в виде упругого внешнего скелета), из-за чего возникают потери на преодоление инерции крыла при каждой перемене направления взмаха. С другой стороны, у насекомых очень плохая аэродинамика из-за миниатюрных размеров и малых скоростей движения.

Таким образом, главным источником поражающего наши чувства «умения» насекомых и малых птиц взлетать вертикально и совершать трепещущий полет является простонапросто малая нагрузка на ометаемую крылом площадь.

Мы видим, что к обещаниям энтузиастов осуществить искусственный аппарат машущего полета, выполняющий все, что «умеет» птица, надо относиться с большой осторожностью.

Ортоптер

В заключение упомянем о способе полета, подкупающем начинающих

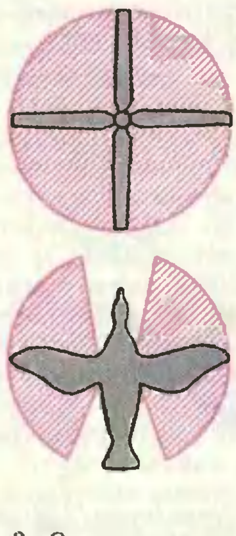


Рис. 2. Ометаемая несущим органом площадь.

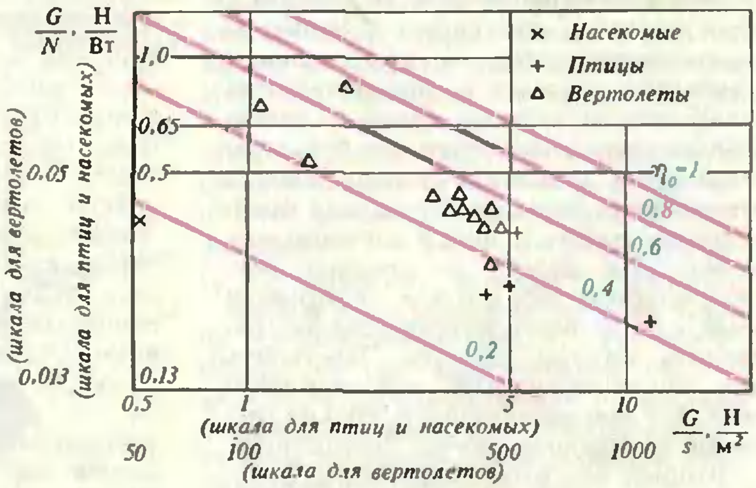


Рис. 3. Зависимость удельной взлетной мощности от нагрузки на ометаемую площадь.

кажущейся очевидностью своей эффективности при взлете и висении: подъемная сила создается прямым ударом сверху вниз плоскостью крыла о воздух; при ходе вверх в крыле открываются клапаны либо оно поворачивается ребром по направлению движения. Аппарат, осуществляющий такое движение, называется ортоптером («прямокрыл»), и различные его варианты фигурируют в сотнях предложений.

Нетрудно видеть, что при таком движении площадь сечения столба воздуха, несущего на себе вес объекта, во много раз меньше площади, ометаемой крылом при горизонтальном его движении. Это, как мы уже знаем, влечет за собой резкий рост потребной мощности. В результате этого, а также из-за некоторых других специфических потерь, такой аппарат уступает по экономической эффективности вертолету в 4-5 раз.

В природе описанным видом летания пользуются только насекомые с очень малой нагрузкой на площадь крыла, например дневные бабочки.

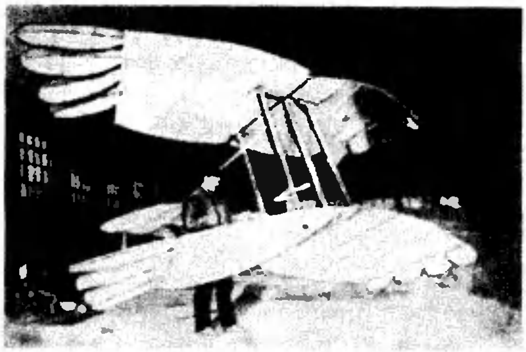
Примечания

[1] Конечно, смешно сравнивать такие характеристики, как, например, вес или мощность воробья с весом и мощностью межконтинентального лайнера,— слишком жалким покажется воробей. Но разумно сравнить значения отношений этих характеристик, узнать, какой вес приходится на единицу мощности. Это отношение G/N и называется нагрузкой на единицу мощности. И вот при таком сравнении воробей окажется большой умницей — при своих слабых силенках он переносит в сто раз больший вес (чем смог бы лайнер). Правда, с меньшей скоростью.

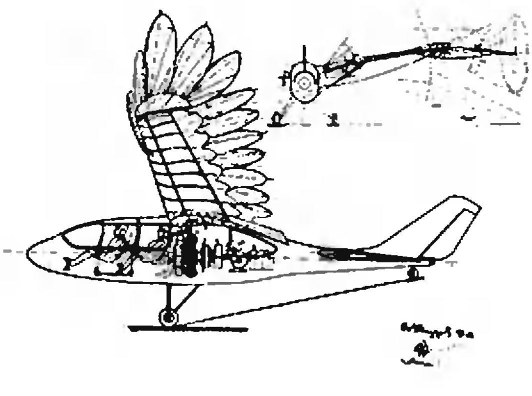
Все сказанное и поясняет рисунок 1.

[2] Сила, действующая на летательный аппарат со стороны воздуха,— аэродинамическая сила — может быть разложена на две составляющие: подъемную силу F_y, перпендикулярную скорости аппарата v, и силу сопротивления F_x, параллельную v. Интуитивно ясно, что чем больше подъемная сила и чем меньше сила сопротивления, тем лучше летательный аппарат выполняет свои функции — поднимать и переносить побыстрее грузы по воздуху, тем, образно говоря, этот аппарат качественнее. Поэтому отношение $K=F_y/F_x$ компонент аэродинамической силы получило название аэродинамического качества (или просто качества) летательного аппарата. В случае горизонтального полета с постоянной ско-

Парусный летательный аппарат Лилиенталя (конец XIX века), поднимавшийся против ветра с возвышенного места.



Первый советский махолет, построенный в 1921 году Б. И. Черановским.



Двухместный махолет с мотором мощностью 150 л. с. и гидравлическим приводом крыльев (проект И. Н. Виноградова; 1962 год).

ростью подъемная сила уравновешивает силу тяжести, а сила тяги двигателя — силу сопротивления.

[3] Формула Бреге, по всей видимости, известна не каждому школьнику. Поэтому приведем ее вывод.

При равномерном горизонтальном полете, как уже говорилось, $F_т v=N\eta_{дв}$. Выразим $F_т$ через подъемную силу $F_y=mg$ и аэродинамическое качество K:

$$\frac{mgv}{K}=N\eta_{дв}. \qquad (*)$$

Величина $N\eta_{дв}$ — это мощность, или секундная работа двигателя против сил сопротивления. Предположим, что в единицу времени двигатель расходует одну и ту же массу топлива μ ($[\mu]$=кг/с). Тогда за время dt масса топлива изменится на $dm=-\mu\,dt$ кг. Разделим обе части равенства (*) на $\mu=-dm/dt$:

$$-\frac{mgv\cdot dt}{K\cdot dm}=\frac{N\eta_{дв}}{\mu}.$$

Но ведь $v\cdot dt=dx$ — перемещение в горизонтальном направлении. Значит, уравнение, описывающее изменение массы вдоль пути, проходимого в горизонтальном полете, имеет вид

$$dx=-\frac{KN\eta_{дв}}{\mu g}\,\frac{dm}{m}.$$

Интегрируя это уравнение от точки старта ($x=0$, $m=m_0$) до конца полета ($x=L$, $m=m_0-m_{гор}$), получим:

$$L=-\frac{K_эN}{\mu g}\ln\left(1-\frac{m_{гор}}{m_0}\right)=-\frac{K_эN}{\mu g}\,\frac{\lg(1-\bar{m}_{гор})}{\lg e}.$$

Теперь осталось обозначить $\mu g/N=C_y$ — и мы получим формулу Бреге.

[4] Поясним этот абзац следующим образом. Изменение кинетической энергии массы воздуха, отбрасываемой вниз в единицу времени, равно

$$N=m_с\left(\frac{v_2^2}{2}-0\right)=m_с\frac{v_2^2}{2}.$$

(Изменением потенциальной энергии этой массы мы пренебрегаем.) С другой стороны, можно рассматривать несущий орган (например, винт вертолета) как вентилятор, преодолевающий перепад давления, создающий подъемную силу. Этот перепад давления прогоняет «отсасываемый» сверху воздух со скоростью v_1, для чего требуется мощность

$$N=Gv_1.$$

Учитывая, что $G=m_с v_2$, из равенства двух выражений для мощности получаем:

$$m_с\frac{v_2^2}{2}=m_с v_2 v_1, \text{ или } v_2=2v_1.$$

Забегая вперед, поясним, как находится мощность, необходимая для поддержания единицы веса — N/G. Из равенства $G=2\rho s v_1^2$ выразим v_1: $v_1=\sqrt{G/2\rho s}$. Подставив это v_1 в равенство $N=Gv_1$, найдем отношение N/G:

$$\frac{N}{G}=\frac{1}{\sqrt{2\rho}}\sqrt{\frac{G}{s}}.$$

Информация

Заказы принимаются...

Мы продолжаем список книг, которые будут выпущены издательством «Наука» в 1989 году и которые могут заинтересовать наших читателей (нумерация соответствует тематическому плану; цена указана ориентировочная; начало см. в № 7 и № 8).

Библиотечка «Квант»

160. Болотовский Б. М. Как излучают электроны и атомы, летящие быстрее света. 50 к.

Если электрон или атом движутся через вещество и их скорость превосходит скорость света в этом веществе, возникает электромагнитное излучение. В книге рассматривается это «сверхсветовое» излучение (эффект Вавилова — Черенкова, эффект Доплера), его свойства и применения.

161. Бялко А. В. Наша планета — Земля. 50 к.

Центральная тема книги — осознание того, почему наша планета при очевидной общности со всей Солнечной системой все же настолько уникальна, что стала единственно известным источником жизни. Круг рассмотренных вопросов очень широк — от происхождения химических элементов до климата Земли и его воздействия на цивилизацию.

162. Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды. 50 к.

Рассказывается о поведении бильярдного шара на столе произвольной формы без луз. Описание этого поведения приводит к решению разнообразных вопросов математики и механики: задач о переливании жидкости, об освещении зеркальных комнат, о пеленге, осциллографе и фигурах Лиссажу, о столкновениях молекул газа в сосуде и др.

163. Гетман В. С. Внуки Солнца. 50 к.

Астероиды, кометы, метеорные тела, в бесчисленном множестве «населяющие» межпланетное пространство, все больше при-

(Окончание см. на с. 29)

ГЕОМЕТРИЯ ЛИСТА БУМАГИ

Доктор физико-математических наук
Д. Б. ФУКС

Возьмите в руки лист бумаги и, не сминая, изогните его. У вас в руках окажется кусочек поверхности, форма которого зависит от того, как вы изогнете лист. Образцы поверхностей, которые могут получиться, показаны на рисунке 1.

Однако далеко не всякая поверхность может быть представлена как изогнутый бумажный лист. Например, общеизвестно, что бумажному листу нельзя придать сферическую форму: если прижать лист бумаги к глобусу, на листе обязательно появятся складки. Лист бумаги можно, не сминая, свернуть в трубочку или в фунтик, но нельзя, избегнув складок, свернуть его вчетверо как носовой платок (рис. 2).

Определение. Поверхности, которые можно представить как изогнутый лист бумаги, называются *развертывающимися.*

Не определение, а бессмыслица, ничего путного из него выйти не может,— скажет Педант и будет прав. Не в том прав, что это определение чем-то плохо, а в том, что читать дальше ему не стоит: ни строгих определений, ни доказательств у нас не будет. Лучше сказать, все доказательства у нас (как в одном древнеиндийском геометрическом трактате) будут, в сущности, состоять из одного слова: смотри!

Все же не для Педанта (он уже захлопнул журнал), а для Вдумчивого Читателя, поясню: физические свойства листа бумаги, существенные для нашего определения,— это его гибкость и нерастяжимость (несжимаемость). Второе означает, что нарисованная на листе линия может при изгибании изменить свою форму, но сохраняет свою длину; первое означает, что никаких других ограничений на характер изгибания не существует.

2

То, что развертывающимися являются далеко не все поверхности, видно уже из того, что

всякая развертывающаяся поверхность является линейчатой.

Это означает, что к изогнутому листу бумаги можно в любом месте приложить спицу так, чтобы она прилегала к бумаге по целому отрезку,

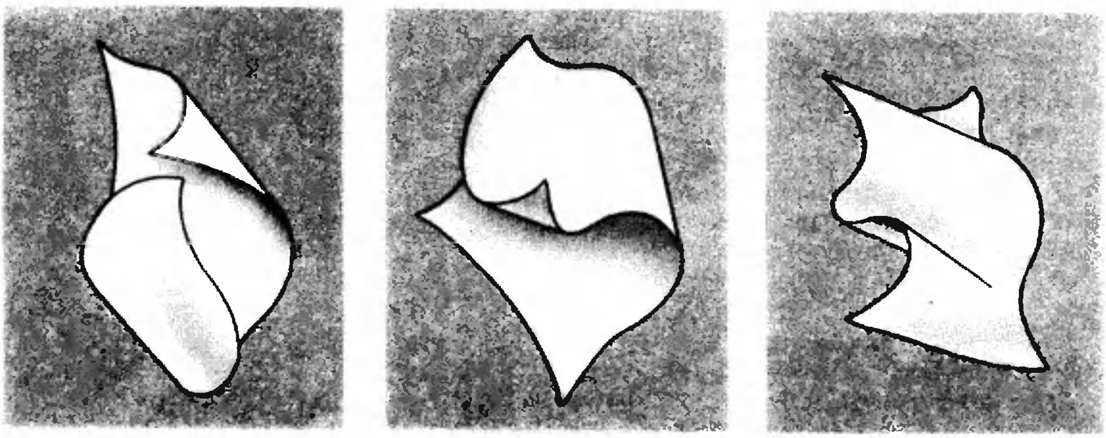


Рис. 1.

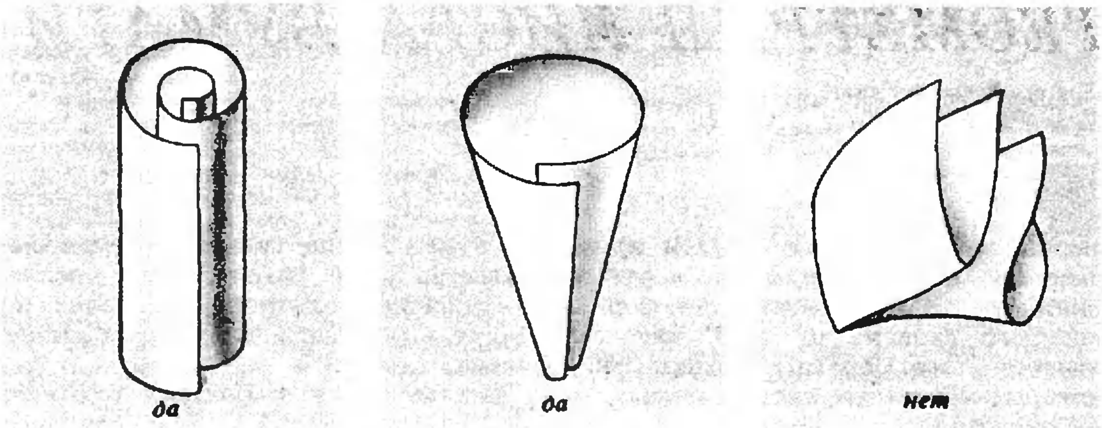


Рис. 2.

с двух сторон охватывающему выбранную точку. (Доказательство: эксперимент — см. рис. 3.) Другими словами, развертывающаяся поверхность состоит из прямолинейных отрезков, содержащихся в ней целиком. Эти отрезки называют прямолинейными образующими или просто образующими поверхности.

Если какая-нибудь точка развертывающейся поверхности является внутренней точкой двух не проходящих одна по другой образующих, то целый кусок вблизи этой точки является плоским (рис. 4). Такой случай мы будем исключать из рассмотрения, т. е. мы предполагаем, что

никакой, даже самый маленький, кусок нашей поверхности не является куском плоскости.

Таким образом, через каждую точку нашей поверхности проходит в точности одна прямолинейная образующая. Эти образующие составляют непрерывное семейство отрезков, заметающее нашу поверхность (см. рис. 5). Некоторые из этих отрезков вырождаются в точки, лежащие на границе нашего куска поверхности. (Последнее замечание — для замаячившей тени Педанта.)

Не следует думать, что всякая линейчатая поверхность является развертывающейся. Линейчатых поверхностей много. Прямолинейный отрезок, как угодно движущийся в пространстве, заметает линейчатую поверхность.

Возьмем какую-нибудь линейчатую поверхность, выберем прямолинейную

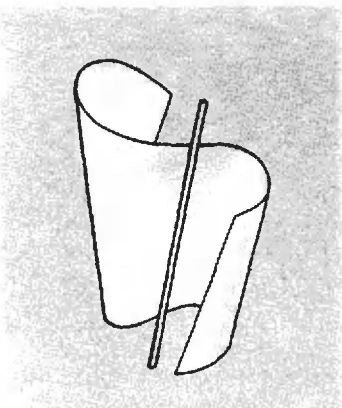


Рис. 3.

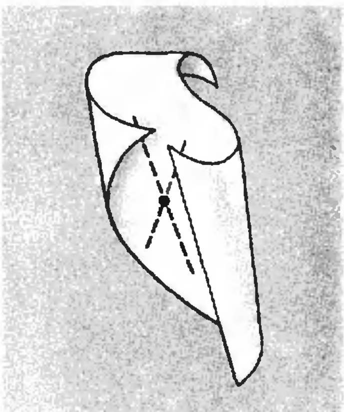


Рис. 4.

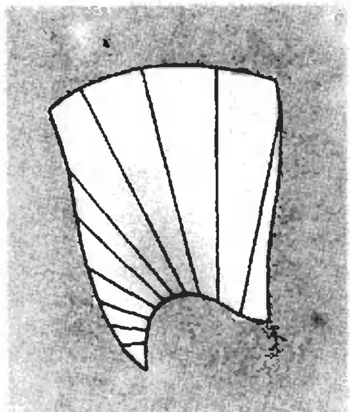


Рис. 5.

Рис. 6.

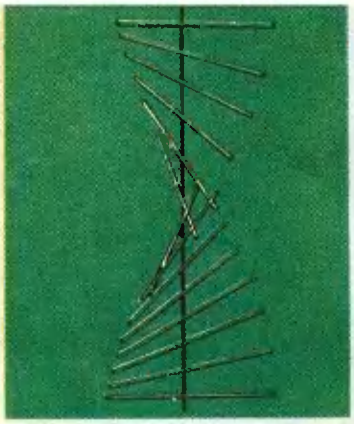


Рис. 7.

Рис. 8.

образующую и через каждую ее точку проведем прямую, которая ей перпендикулярна и касается поверхности (рис. 6). Получится подобие елочной гирлянды (рис. 7): перпендикулярные прямые торчат кто куда, вращаясь вокруг образующей. У развертывающейся же поверхности все прямые, перпендикулярные образующей и касающиеся поверхности, лежат в одной плоскости. Другими словами,

к развертывающейся поверхности не только можно приложить спицу, но можно приложить линейку, касающуюся поверхности по прямой, проходящей через наперед заданную точку (рис. 8).

(Доказательство: эксперимент.) И этого свойства уже достаточно: поверхность, которая им обладает, непременно является развертывающейся.

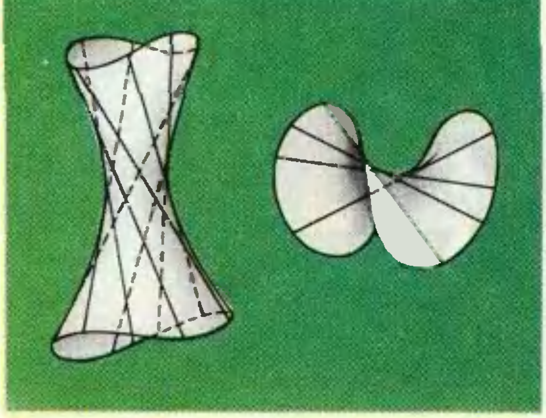


Рис. 9.

Кстати, вы, может быть, слыхали о таких линейчатых поверхностях: однополостном гиперболоиде и гиперболическом параболоиде (рис. 9)? Не слыхали — не надо, нам они не понадобятся. А если слыхали, то примите к сведению, что они не являются развертывающимися (потому хотя бы, что у них через каждую точку проходят две прямолинейные образующие, а для развертывающихся поверхностей такое невозможно — см. выше).

4

Посмотрите еще раз на рисунок 5. Вспомните, что мы имеем дело не с бесконечной поверхностью, а с куском поверхности (не может же лист бумаги быть бесконечным!). Этот кусок разграфлен прямолинейными образующими. Попробуем продолжить эти образующие — в одну или другую сторону. Что получится?

Вопрос этот поначалу кажется невинным. Продолжим образующие поверхности, изображенной на рисунке 5, «вверх» — в ту сторону, куда они расходятся веером. И ничего особенного не произойдет: поверхность будет расти, делаясь чем дальше, тем менее искривленной — более близкой к плоскости (рис. 10).

А если продолжить образующие в другую сторону? Я прошу тебя, читатель: отложи журнал, возьми в руки лист бумаги, изогни его примерно как


Рис. 10.

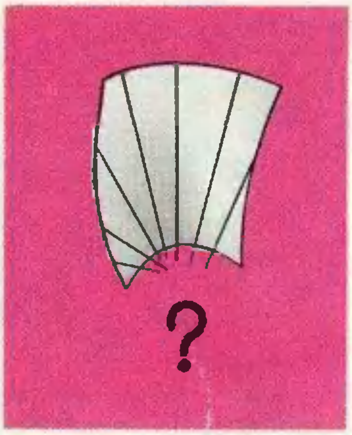


Рис. 11.

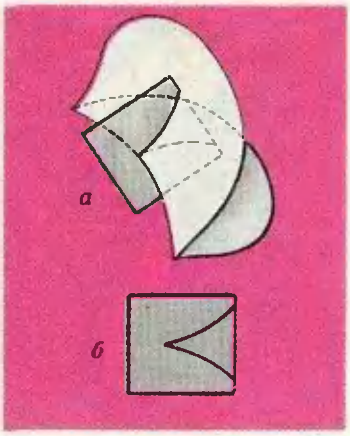


Рис. 12.

на рисунке 5 и попробуй представить себе, какой формы поверхность получится, если продолжить образующие в ту сторону, в которую они сходятся (рис. 11). Потом возьми журнал и узнай ответ. Если ты не знал и угадал, значит ты — Геометр.

А ответ таков: *поверхность не будет гладкой; на ней появится ребро возврата* (рис. 12, *а*). Это — линия, в которой сечение поверхности плоскостью выглядит примерно как показано на рисунке 12, *б*.

5

Я обещал воздерживаться от доказательств. Не потому, что я их вообще не люблю (это, конечно, неправда), и не потому, что доказательства моих утверждений, в частности, последнего утверждения, слишком сложны и не могут быть изложены доступным школьнику образом (это — правда только отчасти). Дело, скорее, в том, что доказательства (во всяком случае, известные мне) теорем этой статьи протекают в области формул: зададим поверхность уравнением, запишем через производные условие развертываемости и так далее, и так далее. Я не хочу излагать такое доказательство: оно вряд ли что-нибудь прояснит. Но все же пусть не доказать утверждение, а убедить читателя в том, что оно верно, я попытаюсь.

Еще раз посмотрите на рисунок 5. Как и всякое изображение пространственной фигуры, он представляет собой проекцию этой фигуры на плоскость — журнальную страницу. Итак, мы имеем семейство прямых на плоскости. Срисуйте его на отдельный лист и продолжите все прямые. Вы увидите, что все прямые сгущаются к некоторой кривой, которой они касаются (рис. 13). В анализе доказывают совсем простую теорему, что такая «огибающая» есть у всякого непрерывного семейства прямых, если только эти прямые не все параллельны и не проходят все через одну точку (похожее верно и для семейств кривых). Вот вы и увидели ребро возврата.

Но,— возражает Вдумчивый Читатель,— это рассуждение, если так его можно назвать, применимо к любой линейчатой поверхности. Скажем,

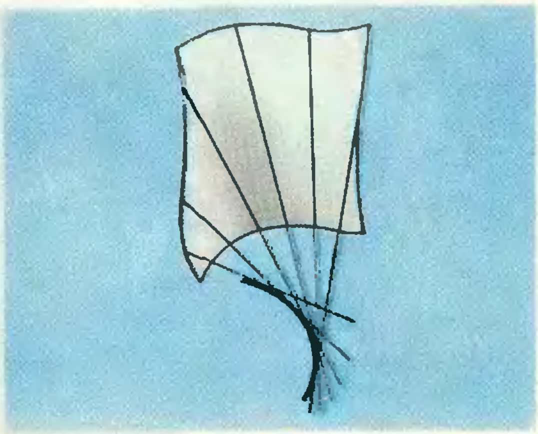


Рис. 13.

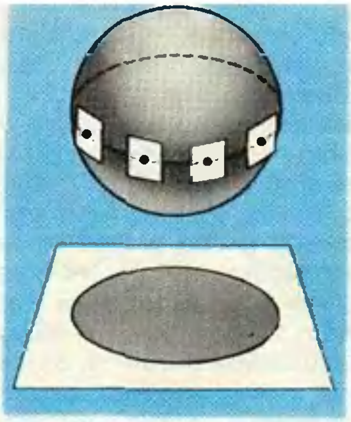


Рис. 14.

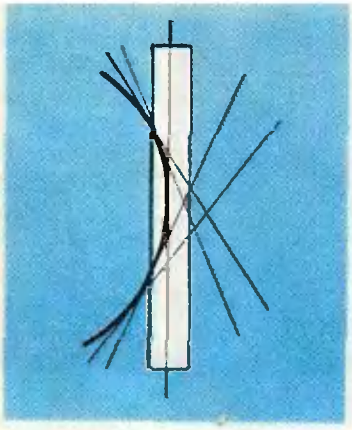


Рис. 15.

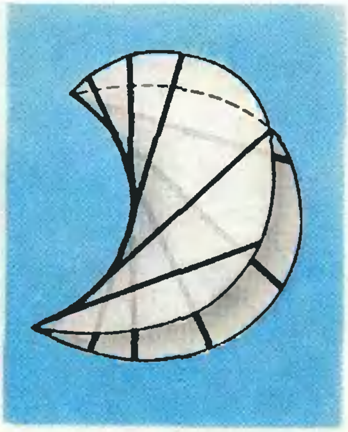


Рис. 16.

на изображении однополостного гиперболоида (рис. 9) тоже присутствует линия, которой касаются спроектированные на чертеж образующие (боковая гипербола), а на поверхности никакого ребра возврата нет.

Вдумчивый Читатель прав, как всегда; но у меня есть в запасе еще один аргумент, который, вероятно, его убедит. Линия, о которой он говорит,— это край изображения поверхности, или, как говорят, ее *видимый контур*. В точках этой линии касательная плоскость к поверхности перпендикулярна чертежу (см. рисунок 14, на котором показан видимый контур сферы). Но у развертывающейся поверхности касательная плоскость во всех точках образующей одна и та же (помните — приложенная линейка!), а в точках, не принадлежащих предполагаемому ребру возврата, она явно не перпендикулярна плоскости чертежа. Значит, она не перпендикулярна ей и в точках этой линии, а расположена как показано на рисунке 15, что с неопровержимостью показывает, что наша линия — ребро возврата.

На все это можно взглянуть с другой стороны: развертывающаяся поверхность (образующие которой не параллельны и не проходят все через одну точку) состоит из прямых, касающихся одной линии — ребра возврата. Это значит, что развертывающуюся поверхность можно получить так: взять пространственную кривую (никакой кусочек которой не является плоским) и провести к ней все касательные (рис. 16). Эти касательные заметут развертывающуюся поверхность, а исходная кривая будет ее ребром возврата. При этом

Рис. 17.


Рис. 18.

Рис. 19.

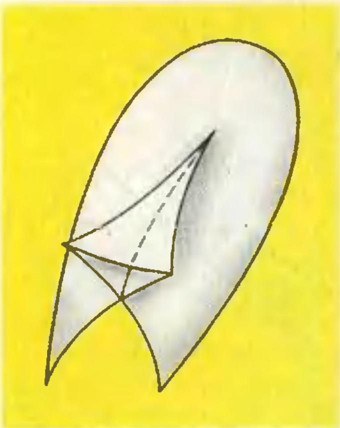


Рис. 20.

Рис. 21.

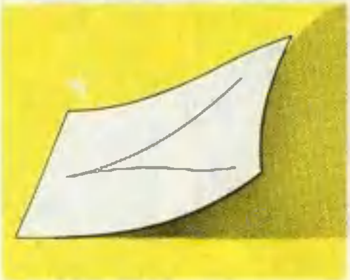


Рис. 22.

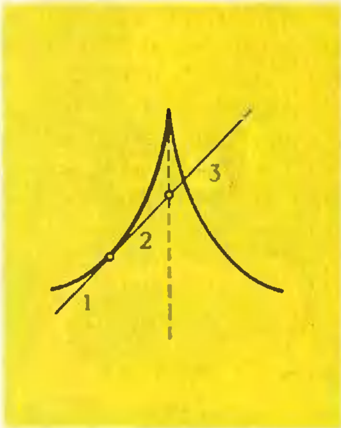


Рис. 23.

всякая нецилиндрическая и неконическая развертывающаяся поверхность может быть так получена (теорема Эйлера).

6

Это все? Нет, как вы сейчас увидите. Увеличим мысленно развертывающуюся поверхность до таких размеров, чтобы по ней можно было ходить, и пойдем по ней перпендикулярно образующим (рис. 17). Образующие касаются ребра возврата, и при нашем движении оно будет либо быстро удаляться от нас, либо быстро приближаться к нам. А в чем может заключаться переход из одного состояния в другое? Посмотрите на рисунок 18. На нем изображен лист бумаги, образующие и два отрезка ребра возврата. А что между ними? Плавная линия, наподобие пунктира на этом рисунке? Нет, эта линия не может всюду касаться образующих. Значит, остается одно:

ребро возврата само имеет точку возврата (рис. 19).

Как же устроена поверхность вблизи этой немыслимой точки? Начнем с картинки. На рисунке 20 показана сама поверхность. Кроме ребра возврата она обязательно имеет линию самопересечения. На рисунке 21 показаны сечения этой поверхности несколькими параллельными плоскостями. Чтобы в какой-то мере убедиться в том, что поверхность выглядит именно так, будем действовать как в теореме Эйлера: возьмем предполагаемое ребро возврата и проведем к нему всевозможные касательные.

Чтобы построить «типичную» пространственную кривую с точкой воз-

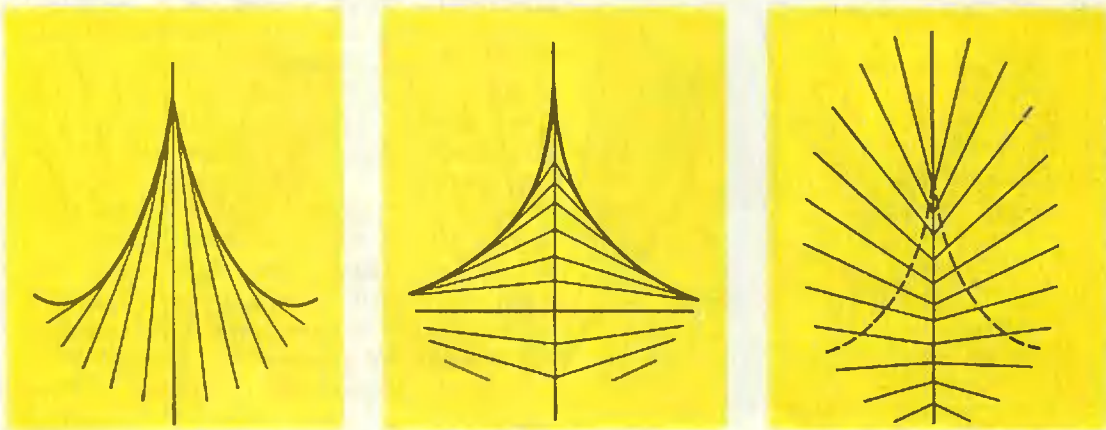


Рис. 24.

врата, возьмем плоскую кривую с точкой возврата и слегка изогнем плоскость (рис. 22). Теперь проведем к этой кривой касательные и посмотрим на получившееся сверху. Каждую касательную разобьем на три части как показано на рисунке 23. Теперь отдельно нарисуем первые, вторые и третьи части всех касательных (рис. 24). На первой картинке получилась верхняя, слегка прогнутая, перепонка между двумя ветвями ребра возврата; на второй картинке получилось сочленение двух кусков между ветвями ребра возврата и линией самопересечения; наконец, на третьей картинке получилась оставшаяся часть поверхности. Заметим, что фигуры, изображенные на второй и третьей картинках, имеют излом вдоль линии самопересечения. Поверхность в целом называется *ласточкиным хвостом* (похоже?).

Итак, произвольным образом изогнутый, но не смятый, лист бумаги превращается, после неограниченного продолжения его прямолинейных образующих, в поверхность, имеющую ребро возврата, которое само имеет, быть может, не одну, точку возврата. Вблизи каждой точки возврата ребра возврата поверхность устроена как ласточкин хвост, в частности, она имеет самопересечения. Вот какую интересную геометрию имеет обыкновенный лист бумаги (см. 4-ю страницу обложки).

7

В заключение — еще несколько слов о ласточкином хвосте. Эта поверхность возникает в трехмерной геометрии очень часто, к ней приводят многие естественные задачи анализа и механики. Но впервые ее изображение (не название: последнее придумано в 60-е годы нашего века знаменитым французским математиком Р. Томом) появилось в прошлом веке на страницах алгебраических книг в следующем контексте.

Рассмотрим уравнение

$$x^n+a_1x^{n-2}+a_2x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}=0.$$

Оно может иметь от 0 до n решений. Например, уравнение

$$x^3+ax+b=0$$

может иметь 3, 2 или 1 решение. Чтобы узнать, сколько именно, нужно нарисовать на плоскости с координатами a, b *«дискриминантную кривую»* $4a^3+27b^2=0$ (рис. 25). Если точка (a, b) лежит внутри фиолетовой зоны, уравнение имеет 3 решения, если она лежит на ее границе, кроме острия,— то 2 решения, в остальных же случаях уравнение имеет 1 решение.

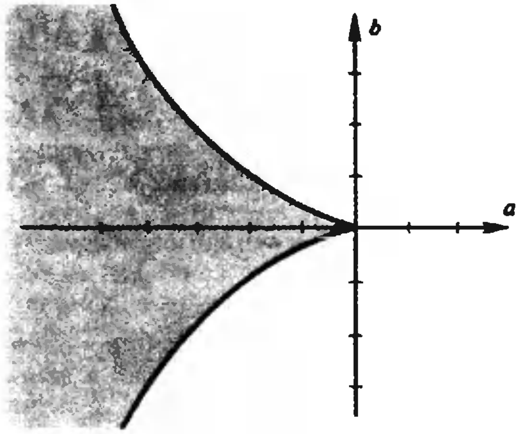


Рис. 25.

Аналогичная задача для уравнения 4-й степени

$$x^4+ax^2+bx+c=0$$

приводит к ласточкиному хвосту: в пространстве с координатами a, b, c расположен ласточкин хвост, подобный тому, который изображен на рисунке 20. Внутри трехгранного пенала лежат точки (a, b, c), для которых наше уравнение имеет 4 решения. На границе пенала, кроме ребра возврата и линии самопересечения, уравнение имеет 3 решения. На этих линиях, исключая вершину, решений 2; столько же решений имеет уравнение для всех (a, b, c), лежащих выше поверхности (со стороны пенала). На всей поверхности, исключая границу пенала, но включая вершину, решение одно, ниже поверхности решений вовсе нет. Подробности читатель может найти в книге Ф. Клейна «Элементарная математика с точки зрения высшей», которая недавно переиздана в издательстве «Наука».

ХИМИЧЕСКОЕ РАЗНООБРАЗИЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

Окружающий нас мир неоднороден. Это относится, правда, только к твердой его части. И атмосфера, и океан хорошо перемешаны — их химический состав по всей Земле почти одинаков. Казалось бы, с течением времени и твердое вещество Земли естественным перемешиванием тоже должно было стать однородным. Однако за 4,5 миллиарда лет существования нашей планеты этого не произошло.

Один источник неоднородности на Земле — биологические процессы. Их мы здесь касаться не будем — описание воздействия жизни на природу планеты с точки зрения физики есть вопрос открытый. Очевидно, по крайней мере, что для самого происхождения жизни нужна начальная химическая неоднородность. В этой статье и пойдет речь о явлениях, приводящих к появлению химического разнообразия Земли, Луны, планет.

Лунные моря и масконы

Посмотрите на Луну в ясную ночь полнолуния. Вы увидите следы, оставленные на ней около 4 миллиардов лет назад, «шрамы» того времени, когда формировались планеты. Это лунные моря и океан Бурь — округлые низменности с размерами, доходящими до четверти лунного диска. Они — последствия столкновений Луны с небесными телами.

Под лунными морями находятся уплотнения, образовавшиеся после ударного сжатия пород при этих столкновениях. Эти уплотнения называются масконами (это сокращение от термина mass concentration (англ.) — концентрация масс). Наибольшие из масконов по объему достигают 10^{-5} от всего объема Луны. Находятся они на глубине до 50 км под ее поверхностью.

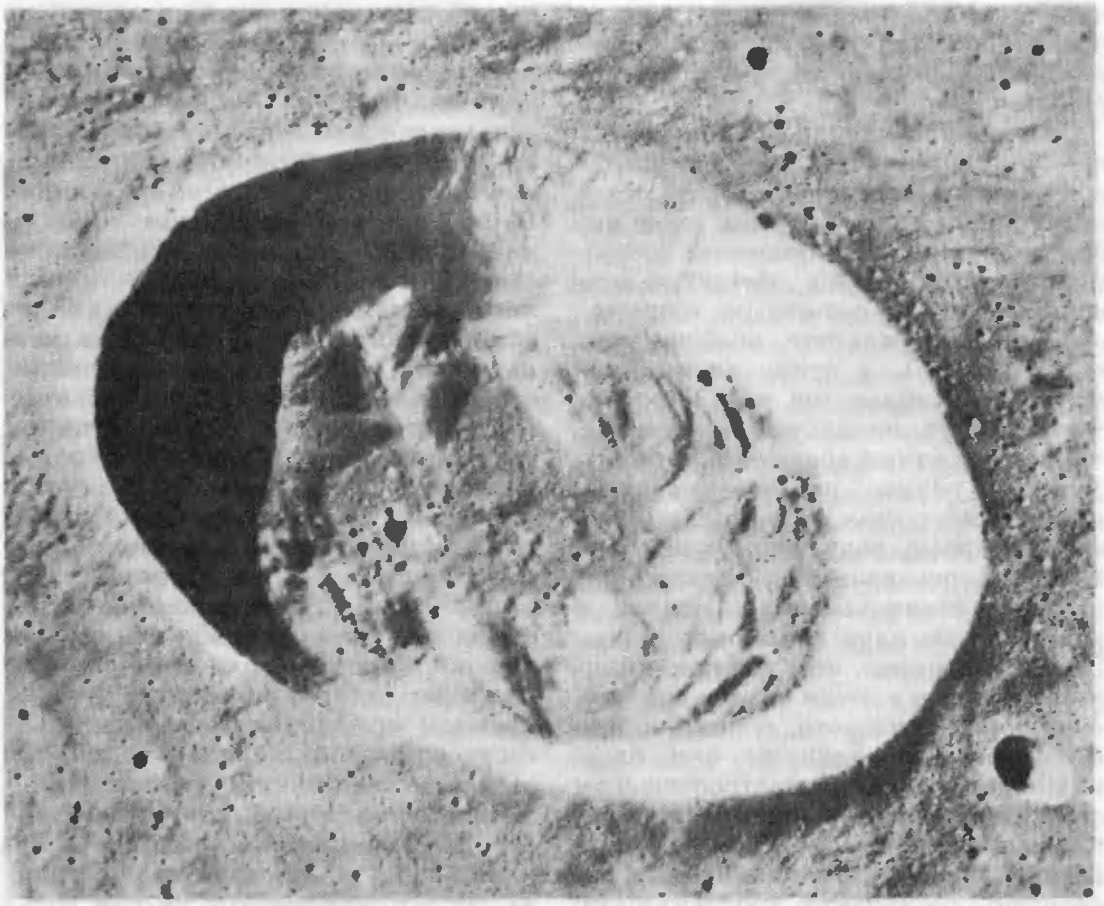
Масконы были обнаружены и исследованы с помощью космических аппаратов, обращавшихся вокруг Луны. «Обращавшихся» — в прошлом времени — потому, что эти аппараты уже прекратили свое существование, упав на Луну. Оказывается, несмотря на отсутствие лунной атмосферы, нельзя создать спутник Луны с неограниченным сроком существования. Высокие орбиты возмущает гравитационное поле Земли. А причина неустойчивости низких орбит — масконы. Они вызывают постепенное опускание периселения (наинизшей точки окололунной орбиты) вплоть до касания с лунной поверхностью.

Процесс, схожий с гравитационным торможением лунных спутников, был характерен и для начальной стадии образования планет. Представьте себе рой небесных тел, связанных между собой силами гравитации. Все они — как бы спутники друг другу. Гравитационное поле такой системы сильно неоднородно, каждое из тел движется под хаотическим воздействием всех остальных и теряет кинетическую энергию на внутреннее трение, на неупругие столкновения. Рой постепенно сжимается. Таким же способом, гравитационным торможением, рой захватывает, делает своими спутниками и пролетающие около него и через него посторонние, первоначально свободные небесные тела. Рой сливается, гравитационное поле образовавшейся протопланеты ускоряет приближение к ней оставшихся тел. Поэтому процесс слияния заканчивается бомбардировкой поверхности молодой планеты оставшимися телами роя. *Следы этих событий* в большом количестве остались не только на поверхности Луны, но и на Меркурии, Марсе, на спутниках планет — на всех небесных телах, не имеющих мощной атмосферы.

Как образовалась Луна?

Среди хаоса столкновений возможно были и катастрофические соударения, приводящие к неожиданным следствиям. Недавно группа американских астрофизиков во главе с А. Камероном выдвинула новую гипотезу образования Луны. Согласно их идее, Луна возникла от слияния осколков столкновения прото-Земли с другой *планетой, по массе* составляющей около 0,12 земной массы (представьте себе столкновение Земли с Марсом!).

На быстродействующей вычислительной машине были рассчитаны варианты столкновений и из последовательных временны́х стадий расчета сделан кинофильм. Компьютерное кино дает возможность «своими глазами» видеть, как *это происходило.* Сперва две планеты сближаются, при этом их тела теряют сферическую форму, вытягиваясь навстречу друг другу гравитационным притяжением. Затем следует удар. Он не был центральным — иначе Земля не приобрела бы после столкновения нужную скорость вращения. По обеим планетам пробегает ударная *волна, нагревая* вещество выше температуры плавления. Оба тела сливаются — образуется Земля; при этом разлетаются осколки. Часть этих осколков выпадает на Землю; а те, у которых скорость велика, уходят за пределы земного



Лунный кратер Бессель; его диаметр 16 км.

притяжения, покидают систему. Но примерно сотая доля полной массы остается на орбитах спутников Земли, а через некоторое время этот рой «мягко» сливается, формируя Луну.

Раньше существовало несколько конкурирующих взглядов на образование Луны. Первый, возникший в прошлом веке, предполагал, что Луна оторвалась от чересчур быстро вращавшейся Земли в том месте, где теперь расположен Тихий океан. Второй подход рассматривал совместное образование Земли и Луны из одного роя малых тел. Наконец, существует гипотеза захвата, согласно которой Луна изначально принадлежала к астероидам и двигалась по независимой орбите вокруг Солнца, а затем в результате сближения была захвачена Землей. Все эти гипотезы были в большой мере умозрительными — конкретных расчетов по ним или не существовало вовсе, или же они делались в неоправданно искусственных предположениях о начальных условиях или сопутствующих обстоятельствах.

Достоинство идеи рождения Луны при столкновении — в простоте исходной картины: нужны только два сталкивающихся тела. Конечно, такое катастрофическое столкновение очень маловероятно, но это обстоятельство нельзя считать серьезным возражением — наша планета вообще уникальна, жизнь, в конце концов, известна пока только на ней. Гипотеза столкновения достаточно естественно объясняет разную среднюю плотность Земли и Луны, их неодинаковый химический состав. Как показывают компьютерные расчеты, Луна образуется, в основном, из силикатных оболочек сталкивающихся планет, а их железные ядра сливаются в ядро Земли. Наконец, эта гипотеза привлекательна и с точки зрения возможного объяснения того, почему Земля и Венера так различны при близких массах. При катастрофическом столкновении Земля оказывается проплавленной насквозь, и тепло, запасенное в ее недрах, в дальнейшем определяет уникальную геологическую историю планеты. «Геологическая» жизнь Венеры намного менее активна.

Конечно, для того чтобы гипотеза стала убедительной теорией, нужно провести еще много вычислений и сравнений с оставшейся нам в наследство реальностью.

Посмотрим теперь, что известно о том первичном веществе, из которого образовались планеты. Свидетелями прошлого могут стать падающие на Землю метеориты.

Почему метеориты такие разные?

Метеориты — это небесные тела, обращающиеся вокруг Солнца, которые сталкиваются с Землей. Если масса метеорита меньше десятка граммов, то при торможении в земной атмосфере он сгорает без твердого остатка. Метеориты с массами от сотен граммов до нескольких тонн сильно тормозятся атмосферой и иногда могут достичь земной поверхности в не слишком измененном виде. Специалисты легко отличают метеориты от пород земного происхождения. Интересно, что более половины из нескольких тысяч найденных на Земле метеоритов было обнаружено на поверхности льда Антарктиды. В центре этого континента есть ледяные поля, на которых испарение льда больше, чем выпадение снега; лед медленно притекает туда из более обильных осадками областей и там испаряется. При этом поток льда приносит все метеориты, накопившиеся в его толще за тысячи лет. Они остаются на поверхности и легко обнаруживаются.

Наконец, метеориты с еще бо́льшими массами (более нескольких тонн) тормозятся относительно слабо и достигают земной поверхности с такой скоростью, что при ударе об нее они сильно изменяются, а на месте их падения остается кратер. (Кратером древние греки называли широкий сосуд для разбавления вина водой.)

Что можно сказать о метеорите по оставшемуся от него кратеру, мы увидим дальше, а сначала расскажем о классификации метеоритов по составу. Метеориты делятся на три больших типа с промежуточными видоизменениями: на каменные, железокаменные и железные.

Довольно редкие разновидности каменных метеоритов — углистые метеориты, или метеориты типа С, считаются первичным материалом Солнечной системы. За исключением летучих газов, в их химическом составе элементы находятся в той же пропорции, что и у Солнца. Они содержат до 20 % воды, несколько процентов углерода и серы. После небольшого нагревания этих метеоритов, удаляющего воду и летучие соединения, остается смесь, содержащая 34 % оксида железа FeO, 33 % оксида кремния SiO_2, 23 % оксида магния MgO. Именно такие элементы, но в измененных пропорциях, и являются основой состава метеоритов других типов, а также астероидов и всех планет земной группы.

Наиболее часто выпадают на Землю другие представители каменных метеоритов — обыкновенные хондриты. Их силикатная структура содержит хондры — зерна размером до нескольких миллиметров. Такую кристаллизацию вещества пока не удалось вызвать искусственно, в земных лабораториях. В хондритах попадаются отдельные вкрапления сплава железа с никелем. Их доля может быть разной, но всегда в хондритах содержание железа оказывается меньшим, чем в прогретом веществе из метеоритов типа С.

Вторая и третья разновидности метеоритов — железокаменные и железные. В них, напротив, доминирует железоникелевый сплав, а каменные включения представляют собой просто застывший расплав, без хондритной структуры.

Очевидно, что такое разнообразие метеоритов как-то связано с условиями их «рождения». Наиболее естественна гипотеза, согласно которой метеориты — это осколки, образовавшиеся при столкновениях астероидов.

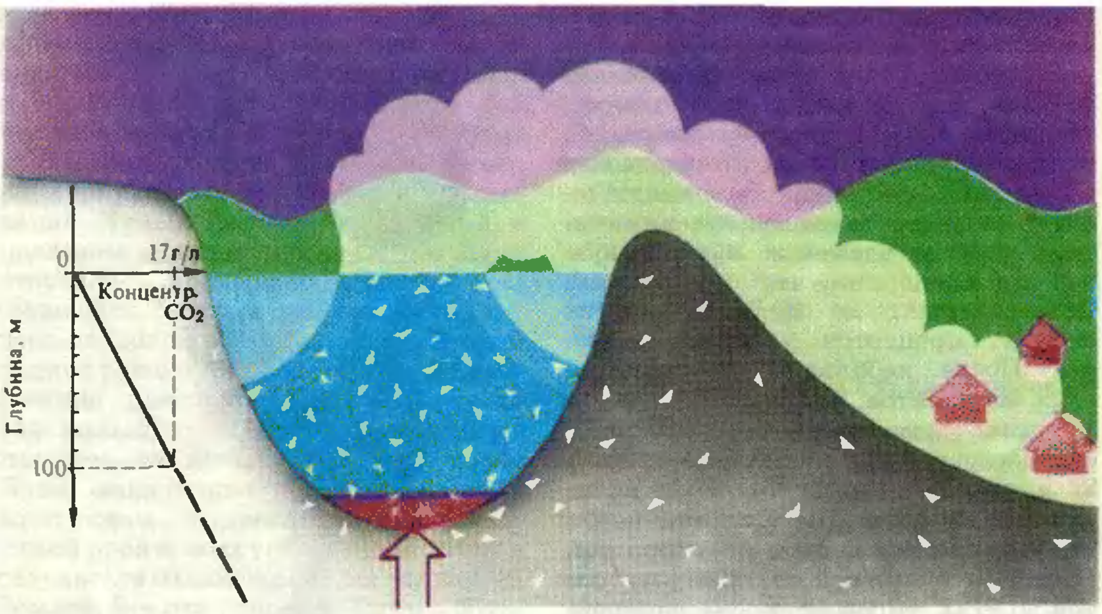
Небесные тела с размерами, превышающими сотни километров, под действием гравитации становятся сферическими по форме. При этом происходит распределение химических элементов по объему тела — его ядро

Возможно, так и происходило столкновение небесных тел, породившее Землю и Луну.

обогащается тяжелыми компонентами, главным образом железом, а оболочка становится силикатной, каменной. Поэтому при столкновениях больших астероидов разлетающиеся осколки могут быть весьма различны по своему химическому составу и кристаллическому строению. Железные и железокаменные метеориты происходят из центральных частей астероидов, которые успели обогатиться тяжелым железом, а часть каменных метеоритов — это застывшие капли и осколки наружных областей астероидов. Метеориты же типа С — это то вещество, которое не прошло гравитационной дифференциации.

Гравитационная дифференциация —

это разделение пород в поле тяжести. Она — главная причина того, что окружающий нас мир не есть одно-



Газовая гравитационная дифференциация привела к трагедии на озере Ниос.

родная смесь веществ в химическом равновесии, а так удивительно разнообразен. Гравитационная дифференциация не только разделяет вещества по их плотности, она приводит к тому, что некоторые химические реакции, энергетически невыгодные в обычных условиях, становятся возможными для больших масс в гравитационном поле.

Представьте себе, что в результате некоторой химической реакции из одного вещества (скажем, сернистого железа) образуются два — одно более легкое (сера), а другое более тяжелое (железо). Энергия, необходимая для поддержания такого разделения, может черпаться из гравитационной энергии, высвобождающейся в результате опускания тяжелого вещества и всплывания легкого. Легким веществом при гравитационной дифференциации может оказаться и газ.

Вот неожиданный пример геофизического явления, вызванного гравитационной дифференциацией. 21-го августа 1986 года из Камеруна пришло трагическое сообщение: ночью из небольшого озера Ниос внезапно вырвалось облако газа, и в нем задохнулись, погибли около двух тысяч человек из близлежащих деревень. Это озеро расположено в вулканическом кратере, поэтому в первых сообщениях причиной катастрофы считалось выделение вулканом каких-то удушающих газов.

После изучения озера стала ясна физика происшедшего. Виновными действительно оказались потухший вулкан и озеро в его кратере. Но вот что поразительно: поведение вулкана было, на первый взгляд, вполне невинно — ни извержения, ни землетрясения не произошло. Газ же, вызвавший внезапную смерть тысяч людей, оказался обыкновенным оксидом углерода CO_2, безобидным в малых концентрациях. Суть явления состояла в следующем.

Ниос — небольшое озеро, но средняя глубина его более 100 м. Вулкан, на котором оно располагается, потух, но в результате остаточных геологических процессов в его недрах медленно выделяется оксид углерода. Этот газ хорошо растворяется в воде, и его растворимость быстро возрастает с увеличением давления. Вспомните, как бурно выделяется углекислый газ, когда открывают бутылку с минеральной водой. В закрытой бутылке давление больше атмосферного. Когда бутылку открывают, давление в ней понижается до атмосферного, растворимость углекислого газа при этом давлении ниже, и «лишний» газ выделяется из раствора.

В бутылке с минеральной водой избыточное давление меньше половины атмосферы, на глубине же 100 м давление равно 10 атм ($\approx 10^6$ Па). При таком давлении и температуре 20 °C в литре воды растворяется 17 г оксида углерода, а вблизи поверхности озера его концентрацию можно считать практически нулевой. Теперь представьте себе, что в озере случайно возникает поначалу небольшой поток вверх глубинной воды, насыщенной углекислым газом. Поднимаясь, жидкость попадает в область меньшего гидростатического давления, где растворимость газа ниже, и начинается выделение углекислого газа. Газ поднимается к поверхности и увлекает с собой окружающую жидкость. Развивается неустойчивость: поток пузырящейся жидкости, стремительно нарастая, рвется к поверхности, а верхние тяжелые воды, бедные углекислым газом, опускаются на дно озера. Происходит гравитационная дифференциация.

Во время катастрофы из озера Ниос выделилось около 10^6 м^3 углекислого газа, а уровень воды в озере понизился почти на 1 м. Углекислый газ тяжелее воздуха, перемешивание такого большого объема газа с воздухом происходит медленно, и поток газа опускался по долинам, где в нескольких деревнях от удушья погибло все живое. Изучение архивов и преданий показало, что трагедии меньшего масштаба от таких «шампанирующих» озер были и в прошлом.

Гравитационная дифференциация приводит к выделению тепловой энергии в недрах и одновременно способствует ее выходу к поверхности, поскольку легкие фракции, подымаясь, несут с собой тепло из недр. Этот перенос тепла и масс выглядел на заре существования Земли как мощные извержения множества вулканов. Извергнутые газы поступали в первичную атмосферу Земли, а лавы формировали ее базальтовую кору.

Кроме вулканических кратеров на Земле обнаружено немало кратеров и ударного происхождения, типа лунных. Разговор о них — в следующем номере.

Информация

Заказы принимаются...

(Начало см. на с. 16)

ковывают внимание ученых и любителей астрономии. Таинственный Икар, знаменитая комета Галлея, тысячи небесных камней, забитых в Землю космическими ударами, многочисленные образцы этих камней в научных лабораториях, потрясающие воображение болиды, огненными шарами проносящиеся по небу, ливни «падающих звезд» — все это связано с удивительными творениями природы, а именно малыми телами Солнечной системы. Их описанию и посвящена эта книга.

164. Гросберг А. Ю., Хохлов А. Р. Физика в мире полимеров. 50 к.

Рассказывается о современном состоянии информационной статистической физики макромолекул. Рассмотрены как фундаментальные вопросы физики синтетических гомополимеров — гибкость полимерной цепи, объемные эффекты и динамические свойства полимерных систем, так и проблемы физики основных биополимеров — ДНК и белков.

167. Кэрролл Л. Логическая игра: Пер. с англ. 50 к.

Сборник логических задач автора известных сказок «Алиса в Стране Чудес» и «Сквозь зеркало и что там увидела Алиса» Льюиса Кэрролла в яркой и занимательной игровой форме знакомит читателя с оригинальным графическим методом решения силлогизмов и соритов.

166. Крутогин Д. Г., Морченко А. Т. Микроэлектроника смотрит в будущее. 50 к.

В книге рассказывается о том, когда, зачем и как появилась микроэлектроника, какие достижения физики и материаловедения обеспечили ее развитие, что дает и может дать она человечеству.

СОУДАРЕНИЕ ТЕЛ

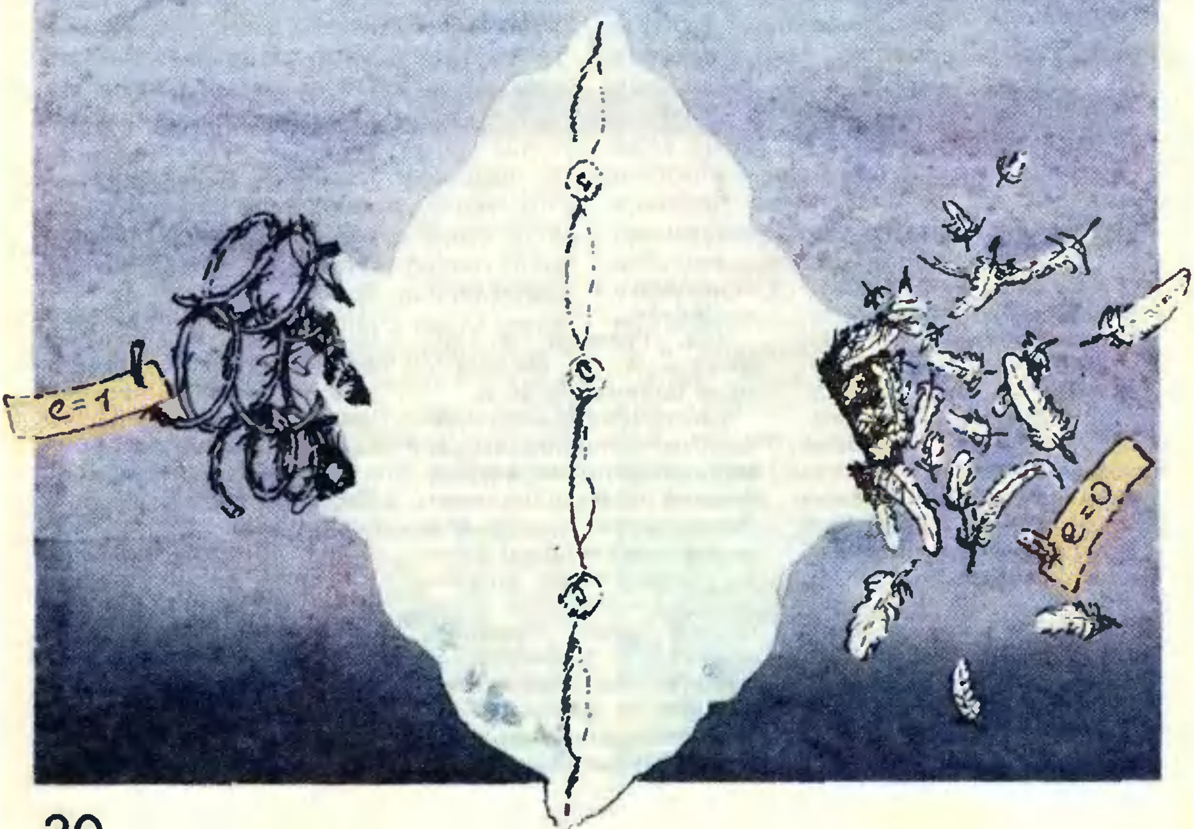
Доктор физико-математических наук
В. В. КОЗЛОВ

Введение

Некоторые физические теории построены по образцу, принятому в математике,— из небольшого числа физических утверждений, которые играют ту же роль, что аксиомы в математических теориях, логически строго выводятся разнообразные следствия. Эта статья посвящена одной такой теории — теории соударения тел. Явление удара хорошо описывается несложной математической моделью. Неудивительно поэтому, что законы удара были установлены до открытия основных принципов динамики.

Еще Галилей поставил ряд опытов для выяснения законов соударения тел. Эти опыты, правда, не привели его к определенным выводам. Современник Галилея, пражский профессор Марци в своем сочинении «De proportione motus» (1639) опубликовал некоторые результаты своих исследований явления удара. В частности, ему было известно, что тело, упруго ударившись о такое же покоящееся тело, теряет свою скорость, сообщая ее этому телу. Первое детальное исследование законов удара было предпринято в 1668 году по предложению Лондонского королевского общества. Три выдающихся механика и математика Валлис, Рен и Гюйгенс представили свои работы, в которых они изложили законы движения соударяющихся тел.

Джон Валлис ограничился, не оговаривая этого, рассмотрением абсолютно неупругого удара. Он исходил из гипотезы о сохранении суммарного импульса сталкивающихся тел.



Кристофер Рен изложил правила расчета упругого удара. Рен, как и Валлис, не привел никаких теоретических рассмотрений, однако для проверки своих правил он проделал ряд простых и убедительных опытов. На эти опыты ссылался Ньютон в своих знаменитых «Математических началах натуральной философии» (1687). Конкурсный мемуар Христиана Гюйгенса был наиболее полным исследованием по теории удара. В нем был намечен вывод соотношений теории удара, основанный на принципе относительности Галилея. Лондонское королевское общество напечатало лишь мемуары Валлиса и Рена. Гюйгенс напечатал свой мемуар в 1669 году в парижском «Журнале ученых».

Сохранение импульса

Рассмотрим ряд задач механики, связанных с исследованием соударения двух тел с массами m_1 и m_2, движущихся по прямой без воздействия каких-либо сил. Пусть v_1 и v_2 — скорости этих тел до удара (рис. 1). Мы будем считать скорость алгебраической величиной: если тело движется вправо, то его скорость положительна, а если влево, то отрицательна. В момент удара на тела действуют только внутренние силы; поэтому их суммарный импульс $m_1v_1+m_2v_2$ сохраняется. Пусть v_1' и v_2' — скорости тел после удара. Из сохранения суммарного импульса получаем соотношение

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'. \qquad (1)$$

Из одного этого уравнения, конечно, нельзя найти v_1' и v_2'. Это и неудивительно: соударения бывают разными. Есть упругие и неупругие. Например, при абсолютно неупругом ударе тела слипаются и движутся затем как одно целое. В этом случае $v_1'=v_2'=v$ и из формулы (1) находим скорость слипшихся тел после удара:

$$v=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}. \qquad (2)$$

Задача 1. Пусть $v_1\leqslant v_2$. Докажите, что $v_1\leqslant v\leqslant v_2$.

Изменение кинетической энергии

Кроме импульса в механике важную роль играет кинетическая энергия, равная $mv^2/2$, где m — масса тела, v — его скорость. Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух тел. В этом случае

$$\Delta T=\left(\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}\right)-\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}$$

называется *потерянной кинетической энергией.*

Следующее утверждение называется *первой теоремой Карно:*

Потерянная кинетическая энергия равна энергии точки массой $\mu=\frac{1}{1/m_1+1/m_2}$, *которая движется со скоростью, равной разности скоростей точек до удара:*

$$\Delta T=\frac{\mu(v_1-v_2)^2}{2}.$$

Задача 2. Докажите первую теорему Карно.

Масса μ называется в механике *приведенной массой системы.* Она равна половине среднего гармонического чисел m_1 и m_2.

Задача 3. Докажите неравенства

$$\mu\leqslant\frac{m_1+m_2}{4},\quad \mu\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{m_1m_2}\ .$$

Введем в рассмотрение *потерянные скорости:* $u_1=v-v_1$, $u_2=v-v_2$, с помощью которых формулируется *вторая теорема Карно:*

Потерянная кинетическая энергия равна суммарной кинетической энергии тел с массами m_1 *и* m_2, *движущихся с потерянными скоростями* u_1 *и* u_2:

$$\Delta T=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2}.$$

Задача 4. Докажите вторую теорему Карно.

Рассмотрим теперь противоположный случай: абсолютно упругий удар. По определению, в этом случае, кроме суммарного импульса, сохраня-

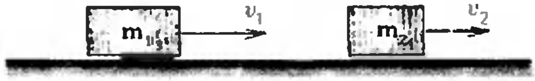


Рис. 1.

Галилео Галилей (1564—1642) — итальянский физик, математик и астроном. В главном сочинении Галилея по математике и физике, написанном в форме диалогов, заложены основы механики: установлены законы статики, равномерного движения, падения тел и колебания маятника. Инквизиция преследовала Галилея за книгу, написанную в поддержку гелиоцентрической системы.

Иоханнес Маркус Марци (1595—1667) — чешский философ, математик, физик, врач, профессор медицины и ректор Пражского университета. Марци развивал экспериментальный метод исследования. Он выяснил, как зависит продолжительность колебания маятника от его длины, и предложил использовать колебания маятника для измерения пульса пациентов.

Джон Валлис (1616—1703) — английский математик и механик, член-основатель Лондонского королевского общества, один из пионеров анализа бесконечно малых. Получил формулу, выражающую число π в виде бесконечного произведения:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots}.$$

Считал арифметику основой математики.

ется еще суммарная кинетическая энергия:

$$m_1v_1^2+m_2v_2^2=m_1(v_1')^2+m_2(v_2')^2.$$

Задача 5. Докажите, что в случае абсолютно упругого удара относительные скорости тел до и после удара равны по величине и противоположны по направлению:

$$v_1-v_2=-(v_1'-v_2'). \qquad (3)$$

Задача 6. Докажите равенства:

$$\begin{aligned} v_1'&=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2,\\ v_2'&=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2. \end{aligned} \qquad (4)$$

В частном случае, когда $m_1=m_2$, эти формулы приобретают наиболее простой вид:

$$v_1'=v_2,\ v_2'=v_1.$$

Следовательно в момент абсолютно упругого удара происходит обмен скоростями. Как уже говорилось, этот эффект был впервые описан Марци.

Абсолютно упругий удар тел равной массы удобно изображать на графиках движения тел, т. е. на графиках зависимости координат от времени (рис. 2). Эта графическая интерпретация используется в следующей задаче.

Задача 7. По прямой движутся с постоянными (не обязательно равными) скоростями несколько одинаковых шариков. Предположим, что соударения между ними абсолютно упругие и в каждом соударении участвуют только два шарика. Докажите, что общее число соударений конечно.

Рассмотрим еще один частный случай, когда масса m_1 много меньше массы m_2. Тогда

$$\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1/m_2-1}{m_1/m_2+1}\approx-1,$$

$$\frac{2m_1}{m_1+m_2}=\frac{2m_1/m_2}{m_1/m_2+1}\approx 0,$$

$$\frac{2m_2}{m_1+m_2}=\frac{2}{m_1/m_2+1}\approx 2,$$

Христиан Гюйгенс (1629—1695) — голландский механик, физик и математик. Первый президент французской Академии наук, был первым иностранным членом Лондонского королевского общества. Гюйгенс — непревзойденный часовой мастер. Он изобрел часы с маятником (ходики) и карманные часы с балансиром.

Кристофер Рен (1632—1723) — английский математик, механик и архитектор, член-основатель Лондонского королевского общества. Рен возглавил строительные работы в Лондоне после грандиозного пожара 1666 года. Его главное достижение в архитектуре — собор св. Павла.

Лазар Карно (1753—1823) — генерал, военный министр французской республики, игравший важную роль во время революции. В народе его называли «организатором побед». Результаты своих исследований по теории удара он изложил в 1783 году в анонимно изданной книге «Опыт о машинах вообще некоего офицера инженерных войск».

так как отношение масс m_1/m_2 близко к нулю. С учетом этих замечаний формулы (4) примут следующий вид:

$$v_1' = -v_1 + 2v_2 = v_2 - (v_1 - v_2), \quad v_2' = v_2. \qquad (5)$$

Следовательно, второе тело не изменит своей скорости, а первое будет двигаться за вторым, отставая от него со скоростью, равной их относительной скорости до удара.

На практике, однако, чаще встречаются случаи, когда в момент удара

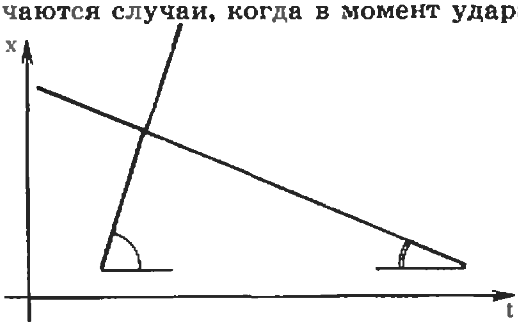


Рис. 2.

тела не слипаются, но и их суммарная энергия не сохраняется. В этой ситуации обычно принимают гипотезу Ньютона, заменяя соотношение (3) следующим соотношением:

$$e(v_1 - v_2) = -(v_1' - v_2').$$

Здесь e — некоторый безразмерный коэффициент, заключенный в промежутке от 0 до 1 и определяемый обычно из эксперимента. Число e называют *коэффициентом восстановления*. При $e=0$ получается абсолютно неупругий удар, а при $e=1$ удар будет абсолютно упругим.

Пусть u_1 и u_2 снова обозначают потерянные скорости.

Величина потерянной энергии в общем случае вычисляется с помощью *обобщенной теоремы Карно:*

$$\Delta T = \frac{1-e}{1+e}\left(\frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}\right).$$

При $e=0$ это утверждение известно нам как вторая теорема Карно; при $e=1$ потери энергии вообще не происходит — удар абсолютно упругий.

Задача 8. Докажите обобщенную теорему Карно.

Адиабатический инвариант

В качестве поучительного применения формул (5) рассмотрим следующую задачу. Шарик движется между двумя стенками, одна из которых неподвижна, а другая приближается к ней со скоростью V (рис. 3; шарик начинает движение от неподвижной стенки). Удар шарика о стенки абсолютно упругий. После столкновения с неподвижной стенкой величина скорости шарика не меняется, а после каждого столкновения с подвижной стенкой скорость шарика (см. формулы (5)) увеличивается на $2V$. Следовательно, энергия шарика тоже увеличивается. Пусть v_0 — величина скорости шарика в начальный момент времени (т. е. момент «нулевого» удара о неподвижную стенку), l_0 — расстояние между стенками в этот момент. Аналогично, через v_n и l_n обозначим величину скорости шарика и расстояние между стенками в момент n-го удара шарика о неподвижную стенку. Положим $I_n=v_nl_n$ ($n=0, 1, 2, ...$).

Задача 9. Докажите, что $I_n=I_0$.

Усложним задачу. Введем функцию $I(t)$, равную произведению величины скорости $v(t)$ шарика на расстояние $l(t)$ между стенками в произвольный момент времени t. Пусть t_0, t_1, ...— моменты удара шарика о неподвижную стенку. Согласно утверждению задачи 9, $I(t_n)=I_0$ для всех $n\geqslant 0$. Однако при остальных значениях t получаем $I(t)\neq I_0$.

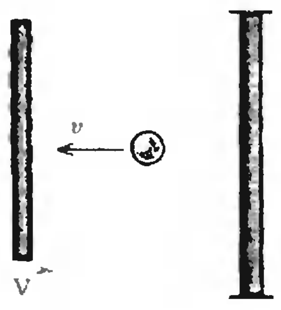


Рис. 3.

Задача 10. Докажите неравенство

$$\left|\frac{I(t)-I_0}{I_0}\right|\leqslant\frac{V}{v_0+V}.$$

Подсказкой к решению этой задачи служит график функции $I(t)$, изображенный на рисунке 4.

Следовательно, если скорость стенки много меньше скорости шарика ($V\ll v_0$), то величина $I(t)$ будет очень мало отличаться от своего первоначального значения I_0. В механике такие величины называются *адиабатическими инвариантами* (в термодинамике адиабатическим процессом называется процесс, проходящий без выделения и поглощения тепла).

Баллистический маятник

В качестве еще одного применения законов удара рассмотрим задачу о баллистическом маятнике, с помощью которого измеряют скорости движущихся тел. Он состоит из трубы массой M, заполненной песком и подвешенной на невесомом тросе длиной l (рис. 5). Снаряд массой m, попадая в трубу, застревает в песке. Происходит очень быстрая потеря скорости снаряда — абсолютно неупругий удар.

Задача 11. Зная максимальный угол отклонения трубы φ, найдите скорость снаряда.

Баллистический маятник изобретен английским механиком Робинсом и описан в книге «Новые принципы пушечной стрельбы» (1742).

Принцип относительности и закон сохранения импульса

Мы решили ряд конкретных задач из механики соударяющихся тел. Теперь снова можно обратиться к основным соотношениям теории удара и обсудить их смысл и происхождение.

В мемуаре Гюйгенса «О движении тел под воздействием удара» закон сохранения импульса выводится из принципа относительности Галилея. Мы воспроизведем рассуждения Гюйгенса для случая абсолютно неупругого удара.

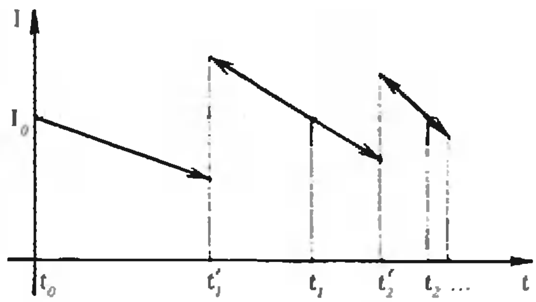


Рис. 4.

Сначала напомним определение инерциальной системы отсчета и формулировку принципа относительности. Под системой отсчета будем понимать платформу, снабженную линейкой и часами. С ее помощью можно определять положение тел на прямой и течение времени. Предположим, что одна система отсчета движется относительно другой с постоянной скоростью. Принцип относительности Галилея утверждает, что все законы механики (в том числе и законы удара) имеют в обеих системах отсчета одинаковый вид. Этот принцип относительности является очень общим: он справедлив и в релятивистской механике. Специфика ньютоновской механики проявляется в том, как связаны системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью.

Эта связь выражается преобразованиями Галилея. Предположим, что в обеих системах производится наблюдение одного и того же тела. Пусть в первой системе отсчета координата тела на прямой равна x, а часы показывают время t; во второй системе значения координаты и времени равны x' и t'. Если v — постоянная скорость движения второй системы отсчета относительно первой, то

$$x = x' + vt' + a, \quad t = \pm t' + b,$$

где a и b — некоторые константы.

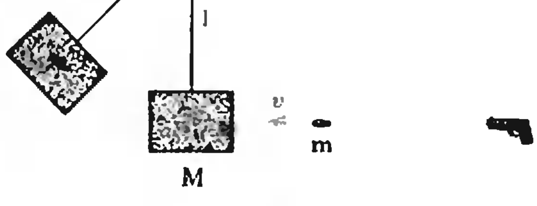


Рис. 5.

Обратимся к выводу формулы (2) для абсолютно неупругого удара.

Рассуждения Гюйгенса включают анализ нескольких случаев.

а) Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, когда сталкиваются два одинаковых тела с массами m, двигавшиеся навстречу друг другу со скоростями v и $-v$. В силу предположения о неупругом характере удара тела слипаются, образуя одно тело массой $2m$. По соображениям симметрии, это тело после удара будет покоиться.

б) Рассмотрим более сложный случай, когда сталкиваются две одинаковые массы m, имеющие до момента удара произвольные скорости v_1 и v_2. Перейдем к новой инерциальной системе отсчета S', которая движется относительно исходной системы S с постоянной скоростью $v = (v_1 + v_2)/2$. В системе S' картина движения тел будет, как в случае а): тела одинаковой массы сближаются с равными по величине скоростями $(v_1 - v_2)/2$ и $(v_2 - v_1)/2$. Согласно принципу относительности и заключению пункта а), после удара тело массой $2m$ будет покоиться в системе S'. Следовательно, относительно исходной системы S оно будет двигаться со скоростью $(v_1 + v_2)/2$. Итак, формула (2) установлена в случае, когда $m_1 = m_2$.

в) Пусть теперь имеются три одинаковых тела каждое массой m (рис. 6). В начальный момент все они покоятся, причем тела *1* и *2* соприкасаются. Предположим, что тела *1* и *2* разлетаются в разные стороны (например, в результате взрыва). Ввиду симметрии их скорости будут равны по величине. Первое тело будет беспрепятственно двигаться влево со скоростью $-v$, а второе будет двигаться вправо со скоростью v и вскоре столкнется с телом *3*. Согласно результату пункта б), тело «*2*+*3*» массой $2m$ будет после удара двигаться вправо со скоростью $v/2$. Если расстояние

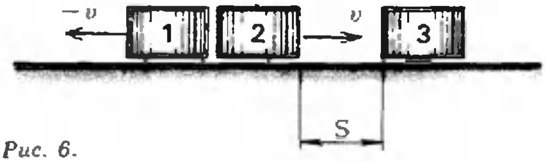


Рис. 6.

между телами очень мало, то столкновение и слипание тел *2* и *3* произойдет практически мгновенно. Поэтому можно считать, что с самого начала тела *2* и *3* образовывали одно целое и мы приходим к следующему выводу: если в начальный момент времени два тела с массами m и $2m$ соприкасались и затем начали разлетаться в разные стороны, то скорость тела массой $2m$ будет в два раза меньше скорости тела массой m.

г) Рассмотрим случай, когда два тела с массами m и $2m$ движутся навстречу друг другу со скоростями v и $-v/2$ соответственно. Утверждается, что после абсолютно неупругого удара слипшееся тело массой $3m$ будет покоиться (в соответствии с формулой (2)). Действительно, мы можем вообразить новую систему отсчета S', в которой часы идут в «обратную сторону». Относительно системы S' все тела будут двигаться в противоположном направлении с той же по абсолютной величине скоростью, поэтому нам остается воспользоваться принципом относительности и результатом пункта в).

д) Теперь обратимся к случаю, когда тела с массами m и $2m$ движутся с произвольными скоростями v_1 и v_2. Как и в рассуждении пункта б), перейдем к новой системе отсчета S', которая движется относительно S со скоростью $v_1+2v_2/3$. Именно с этой скоростью движется их общий центр масс (проверьте!). В системе S' центр масс тел m и $2m$ покоится, тело m подлетает к нему со скоростью

$$v_1'=\frac{v_1+2v_2}{3}-v_1=-\frac{2}{3}(v_1-v_2),$$

а тело $2m$ — со скоростью

$$v_2'=\frac{v_1+2v_2}{3}-v_2=\frac{1}{3}(v_1-v_2).$$

Мы видим, что относительные скорости v_1' и v_2' отличаются знаками и $|v_1'|=|2v_2'|$. Следовательно, согласно пункту г), после столкновения тело массой $3m$ будет покоиться в системе S', а относительно исходной системы S оно будет двигаться со скоростью

$$v=\frac{mv_1+2mv_2}{3m}=\frac{v_1+2v_2}{3}.$$

Таким образом, формула (2) установлена в случае, когда $m_2=2m_1$.

Рассуждая аналогично, мы можем обосновать формулу (2) для случая рационального отношения масс m_1 и m_2. Ее обоснование для иррациональных отношений m_1/m_2 носит уже формальный характер и связано со строгим введением понятия действительного числа. Дело здесь обстоит так же, как с выводом формулы площади прямоугольника со сторонами a и b: для соизмеримых a и b прямоугольник можно разбить на одинаковые квадраты, а если a и b несоизмеримы, то нужно использовать приближение иррациональных чисел рациональными.

С математической точки зрения рассуждения Гюйгенса, быть может, нельзя признать вполне строгими. Но мы и не стремились дать строгое доказательство формулы для абсолютно неупругого удара. У нас была иная цель: показать, что идеи Гюйгенса с необходимостью приводят к закону сохранения импульса. Подчеркнем, что мы исходили лишь из принципа относительности Галилея и не использовали основные принципы динамики Ньютона (например, закон равенства действия и противодействия). Рассуждение Гюйгенса показывает, что закон сохранения импульса следует из симметричности (или инвариантности) законов механики относительно преобразований Галилея. Это отражает общий факт: всякая симметрия законов механики приводит к своему закону сохранения. Например, инвариантность относительно поворотов пространства влечет закон сохранения момента импульса, а инвариантность относительно сдвигов оси времени — закон сохранения энергии. Общая теорема, связывающая симметрии с законами сохранения, была открыта знаменитым немецким математиком Эмми Нётер (1882—1935).

Задачник „Кванта"

Задачи

М1121 — М1125, Ф1133 — Ф1137

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 декабря 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9 — 88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1121» или «Ф1133». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1121 — М1125 предлагались весной этого года на Девятом Турнире городов. Задачи Ф1133 — Ф1137 предлагались на заключительном этапе XXII Всесоюзной олимпиады по физике (Тбилиси, 1988).

М1121. Дан треугольник ABC. Две прямые, симметричные прямой AC относительно прямых AB и BC соответственно, пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BK проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

В. Ю. Протасов

М1122. Решите систему:

$$\begin{aligned}(x_3+x_4+x_5)^5&=3x_1,\\(x_4+x_5+x_1)^5&=3x_2,\\(x_5+x_1+x_2)^5&=3x_3,\\(x_1+x_2+x_3)^5&=3x_4,\\(x_2+x_3+x_4)^5&=3x_5.\end{aligned}$$

Л. Тутеску (Румыния)

М1123. Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороной единица. Будем рассматривать ряды клеток, паралелльные сторонам угла («вертикальные» и «горизонтальные» ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?

В. С. Шевелев

М1124. Боковые стороны, диагонали и продолжения оснований трапеции пересекают прямую l в шести точках, т. е. высекают на прямой l пять отрезков.

а) Докажите, что если крайние (1-й и 5-й) отрезки равны, то соседние с ними (2-й и 4-й) также равны.

б) При каком отношении оснований трапеции можно провести прямую l так, чтобы все пять отрезков были равны?

Э. Г. Готман

М1125. Рассматривается последовательность слов, состоящая из букв A и B. Первое слово в последовательности — «A»; k-е слово получается из $(k-1)$-го с помощью следующей операции: каждое A заменяется на AAB, каждое B — на A (A, AAB, $AABAABA$, ...).

а) Докажите, что каждое слово является началом следующего (тем самым определяется бесконечная последовательность букв: $AABAABAAABAABAAAB$...).

б) *На каком месте в этой последовательности встретится 1988-я буква A?

в) *Докажите, что эта последовательность непериодическая.

В. М. Гальперин

Ф1133. В калориметре медленно остывает расплав исследуемого вещества. Удельная теплота плавления этого вещества (она была определена в предыдущих опытах) $L=200$ кДж/кг. По графику зависимости температуры вещества от времени (рис. 1) определите удельные теплоемкости вещества в твердом и жидком состоянии. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

А. Р. Зильберман

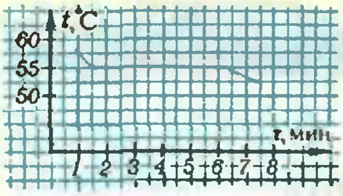


Рис. 1.

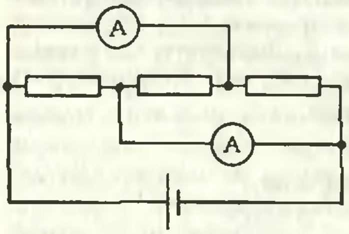


Рис. 2.

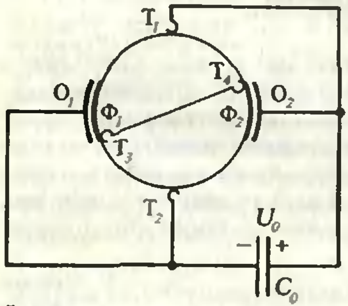


Рис. 3.

Задачник „Кванта"

Ф1134. Исследуя вновь открытую планету, имеющую форму шара радиусом $R=6400$ км и покрытую по всей поверхности океаном глубиной $H=10$ км из обычной воды, ученые установили, что ускорение свободного падения остается с большой степенью точности неизменным при погружении в океан на различные глубины. Определите по этим данным ускорение свободного падения на планете. Гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н$\cdot$м^2/кг^2.

И. И. Воробьев

Ф1135. Горизонтальная площадка с лежащей на ней монетой совершает круговое поступательное движение в горизонтальной плоскости так, что все ее точки описывают окружности радиусом R с угловой скоростью ω. Коэффициент трения между монетой и площадкой μ. Каким будет установившееся движение монеты? Какой след «вычерчивает» она на площадке?

Е. И. Бутиков

Ф1136. В схеме, приведенной на рисунке 2, амперметры показывают токи 0,2 А и 0,3 А. После того как два резистора в схеме поменяли местами, показания амперметров не изменились. Какой ток течет через батарею? Считать напряжение батареи неизменным. Сопротивления амперметров пренебрежимо малы.

А. Р. Зильберман

Ф1137. Электростатический генератор (рис. 3) состоит из непроводящего цилиндра, на который наклеены полоски фольги $Ф_1$ и $Ф_2$, наружных обкладок O_1 и O_2, неподвижных токосъемников T_1 и T_2 снаружи и неподвижной перемычки внутри с токосъемниками T_3 и T_4. В исходном положении полоски фольги находятся напротив наружных обкладок и образуют с ними конденсаторы емкостью C_1 каждый. К внешним обкладкам подключен конденсатор емкостью C_0, заряженный предварительно до напряжения U_0. Каким станет напряжение на этом конденсаторе после N оборотов цилиндра по часовой стрелке? Емкость между обкладками и полосками фольги в раздвинутом состоянии пренебрежимо мала.

И. И. Воробьев

Problems

M1121—M1125, P1133—1137

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that

M1121. A triangle ABC is given. The two lines which are the mirror images of AC with respect to AB and BC intersect at the point K. Prove that BK passes through the centre of the circumcircle of triangle ABC.

V. J. Protasov

M1122. Solve the system of equations:

$$(x_3+x_4+x_5)^5=3x_1,$$
$$(x_4+x_5+x_1)^5=3x_2,$$
$$(x_5+x_1+x_2)^5=3x_3,$$
$$(x_1+x_2+x_3)^5=3x_4,$$
$$(x_2+x_3+x_4)^5=3x_5.$$

L. Tutescu (Rumania)

not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 1 st, 1988 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».
Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we schall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in block letters.

Задачник „Кванта"

M1123. A right angle is divided into an infinite number of unit squares. Consider the rows of squares which are parallel to the sides of the angle (i. e. "vertical" and "horisontal" rows). Is it possible to write a natural number into every square so that every vertical and every horisontal row contain all the natural numbers and every number appears in every row only once?

V. S. Shevelev

M1124. A line l is divided by the lateral sides, the diagonals and the (parallel) lines containing the upper and lower base of a trapezium into five intervals.
a) Prove that if the extreme intervals (i. e. the 1-st and the 5-th) are equal, then their adjacent intervals (i. e. the 2-nd and the 4-th) are also equal.
b) For what ratio of the trapezium's bases is it possible to draw the line l so that all five intervals are equal?

E. G. Gotman

M1125. Consider a sequence of words which consist of the letters A and B. The first word is "A"; to get the k-th word from the $k-1$-th one, we must replace every A by AAB and every B by A (thus the sequence is A, AAB, $AABAABA$....).
a) Prove that every word is the beginning of the next one (so that the infinite sequence $AABAABAAABAABAAAB$... is defined).
b) * At what place will the 1988-th letter A occur?
c) * Prove that this sequence is not periodical.

V. M. Galperin

P1133. A melted sample of a material under experimental study is slowly cooled in a calorimeter. The specific heat of melting for this material (which was determined in previous experiments) is $L=200$ kJ/kg. From the graph showing how the temperature of the material changes in time (see figure Рис. 1) determine the specific heat capacity of the material in hard and liquid state. The calorimeter's heat capacity may be neglected.

A. R. Zilberman

P1134. Studying a newly discovered planet shaped like a sphere of radius $R=6400$ km and entirely covered by an ocean of ordinary water whose depth is $H=10$ km, scientists established that the acceleration of gravity remains unchanged (with a great degree of precision) at various depths in the ocean. Use this data to determine the acceleration of gravity on the planet. The gravitational constant is $G=6{,}67\cdot 10^{-11}$ $\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$.

I. I. Vorobjev

P1135. A horizontal plate with a coin lying flat on it moves circularly so that each of its points describes a horizontal circle of radius R with angular velocity ω. The friction coefficient between coin and plate is μ. What will the established motion of the coin be like? What is its "trace" on the plate?

E. I. Butikov

P1136. In the circuit shown on figure Рис. 2, the ammeters show currents of 0.2 A and 0.3 A. After the two resistors in the circuit have been interchanged, the ammeter readings don't change. What current flows through the battery? The difference of potential of the battery may be assumed constant. The resistance of the ammeters is negligible.

A. R. Zilberman

Замечательные числа.
Дружественные числа и простые числа-близнецы

Каждому из вас многократно приходилось раскладывать числа на множители. Рассмотрим число и сумму всех его делителей, отличных от самого числа. Если эта сумма больше исходного числа, число называют *избыточным*, если меньше — *недостаточным*; в случае же равенства число называют *совершенным*.

Пифагор говорил: «Мой друг тот, кто является моим вторым я, как числа 220 и 284». Эти два числа замечательны тем, что сумма делителей каждого из них равна второму числу. Они были названы *дружественными*.

При $n=2$ и $n=4$ получаются числа, найденные Пифагором и ибн аль-Банной. При $n=7$ получаются числа 9 363 584 и 9 437 056, найденные в 1638 году Р. Декартом (1596—1650), не знавшим теоремы ибн Курры. Этими тремя случаями исчерпываются все значения $n \leqslant 20\,000$, при которых способ ибн Курры дает дружественные числа.

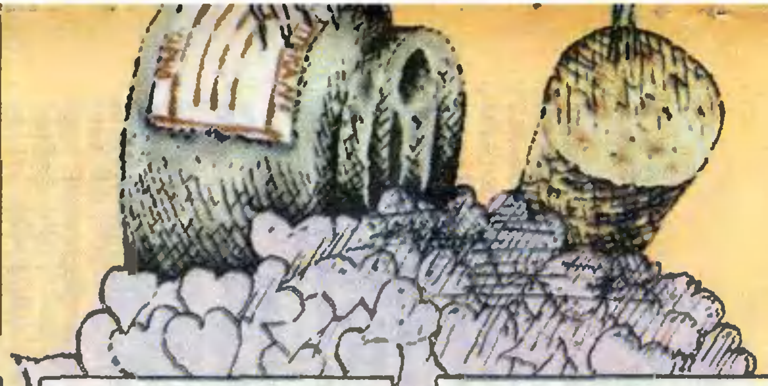
Леонард Эйлер (1707—1783) первым после Декарта получил новые дружественные числа. Всего им открыто 59 пар чисел, среди них были и пары нечетных чисел: $3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 7$ и $3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89$, а также $3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107$ и $3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2\,699$. Он предложил пять методов отыскания дружественных чисел.

В настоящее время известно около 1100 пар дружественных чисел, найденных либо хитроумными способами, либо (в последнее время) простым перебором на ЭВМ. Любопытно, что на долю ЭВМ досталось в этом списке совсем немного чисел — большинство было уже открыто математиками.

Математиков Древней Греции очень интересовали и *простые числа* — числа, имеющие ровно два делителя. Среди них они выделяли *числа-близнецы* — простые числа, отличающиеся на 2: например, 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19.

Принято считать, что сле-

Принято считать, что сле-дующую пару дружественных чисел 17 296 и 18 416 открыл в 1636 году Ферма (1601—1665). Но недавно в одном из трактатов марокканского ученого ибн аль-Банны (1256—1321) были найдены следующие строки: «Числа 17 296 и 18 416 являются дружественными... Аллах всеведущ».



Хотя пока не доказано, что чисел-близнецов бесконечно много, но их количество в заданном отрезке $[x;\ x+a]$ натурального ряда с большой точностью выражается следующей формулой:

$N=Ca/(\ln x)^2$, где $C=1{,}320\ 323\ 631\ 6\ldots$

Задолго до ибн аль-Банны другой арабский математик ибн Курра (836—901) сформулировал следующий способ нахождения некоторых дружественных чисел: если три числа $p=3\cdot 2^{n-1}$, $q=3\cdot 2^n-1$ и $r=9\cdot 2^{2n-1}-1$ — простые, то числа $A=2^n pq$ и $B=2^n r$ будут дружественными.

Многие авторы после ибн Курры изучали дружественные числа, но ничего существенного не открыли. В их сочинениях присутствуют такие рецепты: «Чтобы добиться взаимности в любви, нужно на чем-либо записать числа 220 и 284, меньшее дать объекту любви, а большее съесть самому».

Интервал	По формуле	Фактически
$10^8 - (10^8+1{,}5\cdot 10^5)$	584	601
$10^9 - (10^9+1{,}5\cdot 10^5)$	461	466
$10^{10} - (10^{10}+1{,}5\cdot 10^5)$	374	389
$10^{11} - (10^{11}+1{,}5\cdot 10^5)$	309	276
$10^{12} - (10^{12}+1{,}5\cdot 10^5)$	259	276
$10^{13} - (10^{13}+1{,}5\cdot 10^5)$	211	208
$10^{14} - (10^{14}+1{,}5\cdot 10^5)$	191	186
$10^{15} - (10^{15}+1{,}5\cdot 10^5)$	166	161

В таблице приведены количества чисел-близнецов, вычисленные по формуле, и фактические.

A =90 2364653062 3313066515 5201592687
0786444130 4548569003 8961540360
5363719932 5828701918 5759580345
2747004992 7532312907 0333233826
7840675607 3892061566 6452384945

B =86 2593766501 4359638769 0953818787
1666597148 4088835777 4281383581
6831022646 6591332953 3162256868
3649647747 2706738497 3129580885
3683841099 1321499127 6380031055

A и *B* — самые большие из известных дружественных чисел.

Задачник „Кванта"

P1137. A model of an electroctatic electric machine (see figure Рис. 3) consists of a non-conducting cylinder with two strips of aluminium foil Φ_1 and Φ_2 glued to it, external condensator plates O_1 and O_2, fixed current receivers T_1 and T_2 outside and a fixed connection inside between the receivers T_3 and T_4. In initial position the foil strips are opposite to the external plates, forming two capacitors of capacity C_1 each. A capacitor of capacity C_0, initially charged to U_0, is connected to the external plates. What will the charge on this capacitor be after N clockwise revolutions of the cylinder? The capacity between the external plates and the foil strips when they are not opposite to each other are negligible.

I. I. Vorobjev

Решения задач

M1101 — M1105, Ф1113 — Ф1117

M1101. *На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC нашлись такие точки D и E соответственно, что AD= =BC=EC и треугольник ADE равнобедренный. Каким может быть угол при вершине A?*

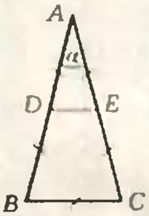


Рис. 1.

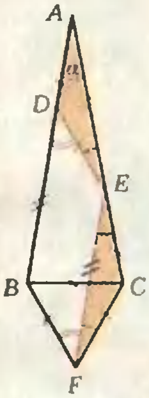


Рис. 3.

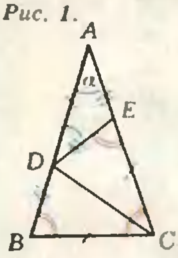


Рис. 2.

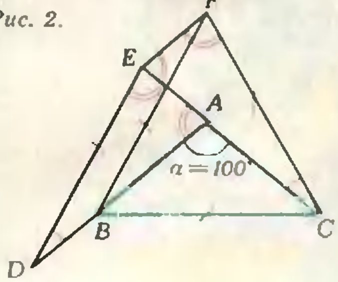


Рис. 4.

Ответ. Возможны три случая: 1) если $AD=AE$, то $\angle A=2\operatorname{arctg}(1/4)$; 2) если $AE=DE$, то $\angle A=36°$; 3) если $AD=DE$, то $\angle A=20°$.

Рассмотрим эти случаи по отдельности. Положим $\angle A=\alpha$.

Случай 1) (рис. 1). Поскольку $AD=AE=EC=BC$, боковая сторона равнобедренного треугольника ABC вдвое больше основания. Очевидно, $\operatorname{tg}(\alpha/2)=BC/(2AC)=1/4$.

Случай 2) (рис. 2). Поскольку $BD=AB-AD=AC-EC=AE=ED$ и $BC=EC$, треугольники BCD и ECD равны (по трем сторонам). Угол DEC является внешним в равнобедренном треугольнике ADE, следовательно

$$\angle ACB=\angle ABC=\angle DEC=2\alpha,$$

а сумма углов треугольника ABC равна $\alpha+2\alpha+2\alpha=5\alpha=180°$, т. е. $\alpha=36°$.

Случай 3) (рис. 3). Достроим треугольник BDE до параллелограмма $BDEF$ и покажем, что $\triangle BCF$ — равносторонний. Из очевидных равенств $\angle CEF=\angle CAB=\alpha$, $CE=AD=DE$ и $EF=BD=AB-AD=AC-EC=AE$ следует, что $\triangle CEF=\triangle DAE$, CEF — равнобедренный треугольник, причем $CF=CE=CB$, $\angle CFE=\angle CEF=\alpha$. Кроме того, $BF=DE=CB$, а $\angle CFE=\angle BDE=2\alpha$, т. к. $BDEF$ — параллелограмм, а BDE — внешний угол треугольника ADE. Итак, $BF=FC=CB$ и $\angle BFC=60°=\angle BFE+\angle EFC=2\alpha+\alpha=3\alpha$. Отсюда получаем, что $\alpha=20°$.

В конце этого рассуждения, записывая равенство $\angle BFC=\angle BFE+\angle EFC$, мы неявно воспользовались тем, что треугольники ABC и FBC лежат по разные стороны от BC и луч FE проходит внутри угла BFC. Но если бы точка F оказалась над основанием BC, то точно так же мы имели бы равенство $3\alpha=\angle BFE+\angle EFC=360°-\angle BFC=300°$, откуда $\alpha=100°$, что невозможно, т. к. α — угол при основании равнобедренного треугольника DEA. (Впрочем, и этот случай можно включить в рассмотрение, если разрешить точкам D и E находиться на продолжениях соответствующих сторон треугольника; рис. 4.)

В. Кириак, В. Н. Дубровский

Задачник „Кванта"

М1102. *Докажите, что существуют n различных натуральных чисел, сумма кубов которых равна кубу натурального числа, если а) n=3, б) n=4, в) n — любое натуральное число, большее 2.*

Приведем примеры наборов из трех и четырех кубов различных натуральных чисел, сумма которых — куб:

а) $3^3+4^3+5^3=6^3$,

б) $1^3+5^3+7^3+12^3=13^3$.

Построить наборы из большего числа кубов можно путем «наращивания»: умножив все кубы в равенстве *а)* на 2^3 (или в равенстве *б)* — на 6^3), мы получим равенство кубов, наименьший из которых 6^3; его можно заменить на $3^3+4^3+5^3$. Таким образом, из *а)* мы получим равенства

$$3^3+4^3+5^3+8^3+10^3=12^3 \quad (n=5),$$
$$3^3+4^3+5^3+8^3+10^3+16^3+20^3=24^3 \quad (n=7)$$

и т. д. для всех нечетных *n*, а из *б)* —

$$3^3+4^3+5^3+30^3+42^3+72^3=78^3 \quad (n=6),$$
$$3^3+4^3+5^3+8^3+10^3+60^3+84^3+144^3=156^3 \quad (n=8)$$

и т. д. для всех четных *n*.

Л. Д. Курляндчик

М1103. *а) На бесконечной плоскости, разбитой на квадратные клетки, некоторое — быть может бесконечное — количество прямоугольников размером 1×2 закрашены в черный цвет так, что никакие два черных прямоугольника не имеют общих точек (даже вершин). Докажите, что оставшуюся часть плоскости можно замостить этими прямоугольниками. б)* Пусть на клетчатой плоскости закрашены несколько прямоугольников*

Покроем исходную (голубую) клетчатую сетку более крупной (черной), разбивающей плоскость на квадраты 2×2 клетки. Каждое черное домино 1×2 либо целиком помещается в одном квадрате 2×2 новой сетки, либо в двух соседних, образующих прямоугольник 2×4, причем другие черные домино в этот участок черной сетки не заходят. В обоих случаях остаток участка легко покрыть домино (на рисунке 1 эти домино обведены розовой линией); пустые клетки 2×2 разбиваются на два домино. Отсюда следует утверждение задачи а).

Аналогично, с помощью сетки из квадратов 2×2 доказывается и утверждение б) для прямоугольников $m\times n$ из четного числа mn клеток. Здесь важно, что белая каемка шириной в одну клетку, остающаяся на участке каждого черного домино $m\times n$, состоит из четного числа клеток (быть может, из двух полосок, в каждой из которых — четное число клеток; рисунок

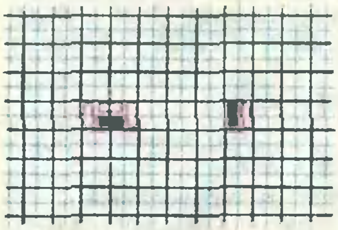


Рис. 1.

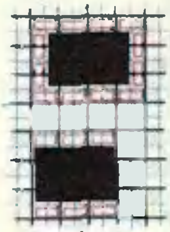


Рис. 2.

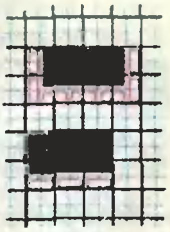


Рис. 3.

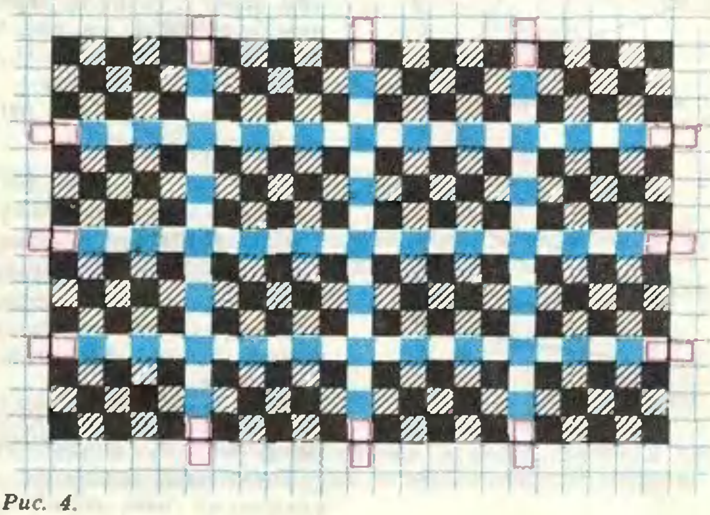


Рис. 4.

размером $m \times n$ клеток, не имеющих общих точек. Докажите, что если mn четно, то оставшуюся часть плоскости можно замостить прямоугольниками размером 1×2, а если mn — нечетно, то это не всегда возможно.

Задачник „Кванта"

2 изображает случаи, когда m и n оба четны, рисунок 3 — когда m четно, а n нечетно).

Докажем теперь, что если mn нечетно и k^2 прямоугольников $m \times n$ размещены рядами с промежутками шириной в одну клетку, как показано на рисунке 4, то при $k \geq 4$ покрыть оставшуюся часть плоскости домино 1×2 нельзя.

Пусть П — весь прямоугольник из $2N-1=(mk+k-1)\times(nk+k-1)$ клеток, содержащий k^2 прямоугольников. Закрасим в шахматном порядке N клеток П, включая условие (внутри прямоугольников — черным, вне — голубым). *В каждом из k^2 прямоугольников «лишняя»* черная клетка, поэтому среди $N-1$ клеток непокрытой ими области П на k^2-1 больше белых клеток, чем голубых. Но каждое домино покрывает одну белую и одну голубую клетку.

Предположим, что вся эта область покрыта домино. Некоторые из них — но не более $4(k-1)$ — могут выходить (на одну клетку) за пределы П, но поскольку *$k^2-1>4(k-1)$ при $k \geq 4$, наше предположение приводит* к противоречию.

М. Хованов

М1104. *В тетраэдре $ABCD$ грани ABC и BCD перпендикулярны, $\angle BAC=90°$. Докажите, что из отрезков, длины которых равны произведениям длин противоположных ребер тетраэдра, можно составить прямоугольный треугольник.*

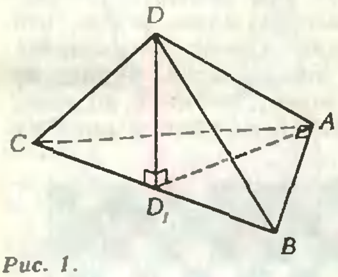


Рис. 1.

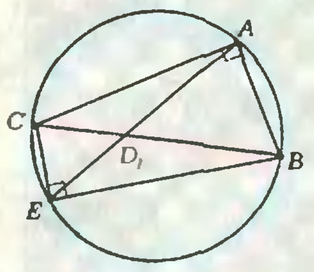


Рис. 2.

Докажем, что

$$(DA \cdot BC)^2=(DB \cdot CA)^2+(DC \cdot AB)^2.$$

Это равенство эквивалентно аналогичному равенству для проекции D_1 точки D на плоскость ABC (рис. 1):

$$D_1A^2 \cdot BC^2=D_1B^2 \cdot CA^2+D_1C^2 \cdot AB^2. \qquad (*)$$

В самом деле, вычитая из первого равенства второе, по теореме Пифагора для треугольников DD_1A, DD_1B и DD_1C получим

$$D_1D^2 \cdot BC^2=D_1D^2 \cdot CA^2+D_1D^2 \cdot AB^2,$$

а это равенство всегда верно, так как в треугольнике ABC угол A прямой.

Доказательство равенства (*) можно провести так. Опишем окружность около треугольника ABC и обозначим через E точку ее пересечения с прямой AD_1 (отличную от точки A; см. рис. 2). Треугольники D_1BE и D_1AC подобны ($\angle ED_1B=\angle CD_1A$, $\angle BED_1=\angle ACD_1$), поэтому $BE:BD_1=CA:AD_1$, или

$$CA^2 \cdot BD_1^2=BE^2 \cdot AD_1^2;$$

аналогично,

$$AB^2 \cdot CD_1^2=CE^2 \cdot AD_1^2.$$

Следовательно, поскольку $\triangle BEC$ прямоугольный,

$$CA^2 \cdot BD_1^2+AB^2 \cdot CD_1^2=(BE^2+CE^2) \cdot AD_1^2=BC^2 \cdot AD_1^2,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что равенство (*) — это, по сути дела, частный случай так называемой «формулы Стюарта» для длины отрезка AD_1 (рис. 2) в произвольном треугольнике ABC:

$$AD_1^2=p \cdot AB^2+q \cdot AC^2-pq \cdot BC^2,$$

где $p=CD_1/BC$, $q=BD_1/BC$.

Читателям, знакомым с преобразованием *инверсии*, укажем на связь нашей задачи с этим преобразованием:

если A_1, B_1 и C_1 — образы точек A, B, C при некоторой инверсии с центром D (т. е. точки A_1, B_1, C_1 лежат, соответственно, на лучах DA, DB, DC и $DA_1 \cdot DA = DB_1 \cdot DB = DC_1 \cdot DC$), то стороны треугольника $A_1B_1C_1$ пропорциональны произведениям противоположных ребер тетраэдра $ABCD$, причем этот треугольник — прямоугольный. (По основному свойству инверсии описанная около треугольника ABC окружность переходит при инверсии в окружность, описанную около треугольника $A_1B_1C_1$; легко видеть, что в нашей задаче сторона B_1C_1 будет диаметром второй окружности.)

В. Н. Дубровский

М1105. *После нескольких прямолинейных разрезов поверхность выпуклого многогранника развернули на плоскость. Получился многоугольник, для которого известно, какие точки его границы «склеиваются», т. е. отвечают одной и той же точке на поверхности многогранника. Каким был исходный многогранник, если при разрезании получился*
а) прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}$,
б) равнобедренный треугольник с углом 120°,
причем в обоих случаях склеиваются точки каждой стороны, симметричные относительно ее середины.

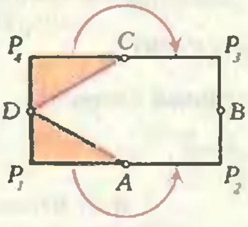


Рис. 1.

а), б) **Ответ** в обеих задачах — правильный тетраэдр.

Покажем, что и в одном, и в другом случае заданную развертку можно переклеить в правильный треугольник, граница которого склеивается по тому же правилу, что и в условии задачи: соединяются точки каждой стороны, симметричные относительно ее середины.

Пусть $P_1P_2P_3P_4$ — прямоугольник, рассматриваемый в задаче а), A, B, C, D — середины его сторон (рис. 1). Разрежем его по отрезкам DA и DC и подклеим сторону AP_1 треугольника AP_1D к отрезку AP_2, а сторону CP_4 треугольника CP_4D к отрезку CP_3, в соответствии с указанным в условии правилом склейки. Получится треугольник DD_1D_2 (рис. 2), в котором должны быть склеены отрезки сторон AD и AD_1, CD и CD_2, BD_1 и BD_2 (очевидно, эти отрезки попарно равны). Ясно, что это — правильный треугольник со стороной 2. Еще проще осуществляется аналогичная переклейка в задаче б) (рис. 3). Остается заметить, что правильный треугольник с указанным способом склейки границы является разверткой правильного тетраэдра, который получается, если перегнуть треугольник по средним линиям.

Строго говоря, нужно еще доказать, что правильный тетраэдр является единственным многогранником с заданной разверткой. Мы еще вернемся к этой задаче и, в частности, докажем его единственность.

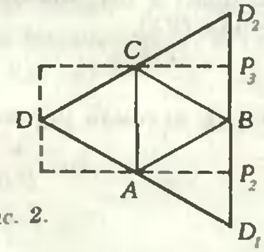


Рис. 2.

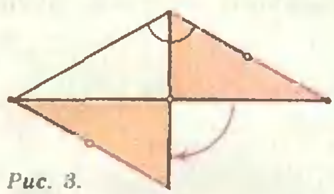


Рис. 3.

Н. П. Долбилин, М. И. Штогрин, В. Н. Дубровский

Ф1113. *Шар радиусом R может свободно вращаться на закрепленной горизонтально оси OO'. Под ша-*

Сначала обсудим качественно, что будет происходить с шаром после прижатия к нему ленты.

Поскольку лента шероховатая, в месте контакта на шар действуют силы трения, которые создают вращаю-

ром, прижимаясь к нему, движется шероховатая жесткая лента, изогнутая в виде полуцилиндра радиусом R (рис. 1). Скорость ленты v направлена горизонтально и перпендикулярно оси OO′. Чему равна установившаяся скорость вращения шара?

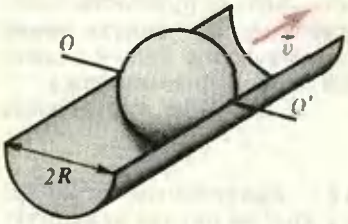


Рис. 1.

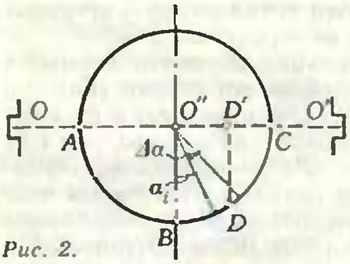


Рис. 2.

щий момент, раскручивающий шар. Когда угловая скорость вращения достигнет величины $\omega=v/R$, точка шара B (рис. 2), максимально удаленная от оси вращения OO', будет иметь линейную скорость, равную скорости ленты: $\omega R=vR/R=v$. Проскальзывание шара относительно ленты в этом месте прекратится, и сила трения (а значит, и ее момент) исчезнет. Однако у всех остальных точек дуги ABC (по которой шар контактирует с лентой) линейная скорость в этот момент меньше, чем v (эти точки ближе к оси вращения), так что шар продолжает разгоняться.

По мере роста угловой скорости шара точка отсутствия проскальзывания перемещается ближе к оси OO', и число участков, имеющих линейную скорость, меньшую v, уменьшается. Вместе с тем, растет число участков, где линейная скорость больше v, сила трения направлена в противоположную сторону и создает момент сил, тормозящий вращение. В какой-то момент разгоняющий и тормозящий моменты сил сравняются, и угловая скорость перестанет изменяться.

Теперь проведем соответствующие расчеты. Прежде всего найдем, в какой точке будет отсутствовать проскальзывание при установившемся режиме.

Будем считать, что лента прижимается к шару во всех местах с одинаковой силой, тогда на любые два одинаковых участка контакта будут действовать одинаковые (по модулю) силы трения. Пусть искомая точка отсутствия проскальзывания — это точка D (см. рис. 2). Рассмотрим небольшой участок дуги вблизи этой точки. Его длина $\Delta l=R\Delta\alpha$; действующая на него сила трения $\Delta F=k\Delta l=kR\Delta\alpha$ (k — некоторая постоянная); ее момент $\Delta M=kR\Delta\alpha\cdot R\cos\alpha$. Суммарный момент сил трения

$$M=\sum_i \Delta M=kR\sum_i R\Delta\alpha\cos\alpha_i,$$

действующий на дугу BC, при установившемся режиме должен быть равен нулю. Это означает, что должна быть равной нулю сумма проекций дуг BD и DC («положительной» и «отрицательной» соответственно) на ось вращения OO':

$$\sum_i R\Delta\alpha\cos\alpha_i=0\Rightarrow O''D'=D'C=R/2,$$

откуда искомая установившаяся угловая скорость

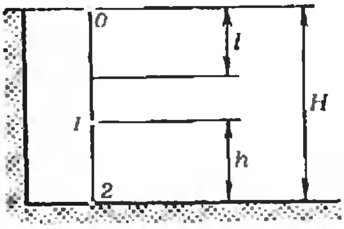
$$\omega=\frac{v}{D'D}=\frac{2v}{\sqrt{3}\,R}\approx 1{,}15\frac{v}{R}.$$

Л. Г. Маркович

Ф1114. *Каскадер падает с высоты H=50 м. К нему пристегнут резиновый шнур, второй конец которого закреплен в месте старта. Длина и жесткость шнура подобраны так, что у земли скорость гасится до нуля. После того как за-*

Введем обозначения для неизвестных параметров: l — длина нерастянутого шнура (очевидно, что $l+h<H$), k — его жесткость, m — масса каскадера, v — искомая скорость. Заметим, что максимальная скорость была у каскадера как раз на высоте h над землей, т. е. в положении равновесия, где сила тяжести mg уравновешена силой упругости шнура $k(H-l-h)$. Выше этой точки сила тяжести доминирует над силой упругости — движение каскадера ускоренное, ниже этой точки преоб-

тухли колебания, каскадер повис на высоте $h=10$ м над землей. Какова была максимальная скорость каскадера во время падения? Сопротивление воздуха не учитывать.



ладает сила упругости — движение замедленное.

Запишем закон сохранения механической энергии для положений *0* и *1* (см. рисунок):

$$mgH=mgh+\frac{1}{2}k(H-l-h)^2+\frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

и для положений *0* и *2*:

$$mgH=\frac{1}{2}k(H-l)^2. \qquad (2)$$

Учтем также условие равновесия на высоте h:

$$mg=k(H-l-h). \qquad (3)$$

Исключив из уравнений (1) — (3) неизвестные параметры m, k и l, найдем v. Проще всего это сделать так. Разделим уравнение (2) на уравнение (3) и найдем $l=\sqrt{H^2-2Hh}$; слагаемое $k(H-l-h)^2/2$ в уравнении (1) перепишем, с учетом равенства (3), в виде $mg(H-l-h)/2$; после чего получим

$$v^2=g(H-h+\sqrt{H^2-2Hh}),$$

и

$$v=\sqrt{g(H-h+\sqrt{H^2-2Hh})}\approx 28 \text{ м/с}.$$

Д. В. Павлов

Ф1115. *Замкнутый сосуд, заполненный газом, разделен на две части непроницаемым горизонтальным поршнем; масса сосуда m, масса поршня M. Вначале сосуд покоится на подставке. Затем подставку толчком выбивают из-под сосуда. С каким ускорением начнет двигаться сосуд? Трением между стенками сосуда и поршнем пренебречь.*

В исходном состоянии равновесие поршня обеспечивается тем, что в нижней части сосуда газ сжат сильнее, чем в верхнем ($p_2>p_1$). Если обозначить через S площадь сечения поршня, то условие его равновесия запишется в виде:

$$(p_2-p_1)S=Mg. \qquad (1)$$

Сразу после выбивания подставки на сосуд в вертикальном направлении действуют три силы: силы давления газа на верхнюю и нижнюю стенки сосуда p_1S и p_2S и сила тяжести сосуда mg. Согласно второму закону Ньютона,

$$ma_0=mg-p_1S+p_2S. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим начальное ускорение:

$$a_0=g\frac{M+m}{m}.$$

С. Ф. Ким, А. И. Латынин

Ф1116. *В две одинаковые химические пипетки набирают до одного и того же уровня воду: в одну — холодную, в другую — горячую. Пипетки опорожняют и считают при этом капли. Из какой пипетки упадет больше капель?*

Капля отрывается от конца пипетки в тот момент, когда сила поверхностного натяжения уже не может уравновесить силу тяжести капли.

С ростом температуры воды коэффициент ее поверхностного натяжения, а значит, и сила поверхностного натяжения, уменьшается. Причем уменьшается довольно заметно — примерно на 20 % при повышении температуры от 20 до 100 °С. Таким образом, сила тяжести горячей капли меньше, чем холодной, а число горячих капель, наоборот, больше.

Задачник „Кванта"

Заметим, что при нагревании происходит еще один процесс — уменьшение плотности воды (связанное с ее расширением). Это обстоятельство, вообще говоря, играет противоположную роль. Но обусловленный им эффект, из-за малого коэффициента теплового расширения воды, оказывается гораздо слабее первого и практически не проявляется.

А. И. Буздин

Ф1117. *Свет от точечного источника A выводится сквозь непрозрачную стенку с помощью световода — тонкой прозрачной палочки с радиусом сечения R (рис. 1); внутренняя часть палочки с радиусом r ($R-r<r$) сделана из материала с показателем преломления n_1, а внешняя оболочка — из материала с показателем преломления n_2 ($n_2<n_1$). Определите диаметр светового пятна на экране, расположенном на расстоянии L от правого торца световода. Источник света находится вблизи центра левого торца световода.*

Как изменится размер пятна, если источник удалить вдоль оси световода на расстояние l от торца?

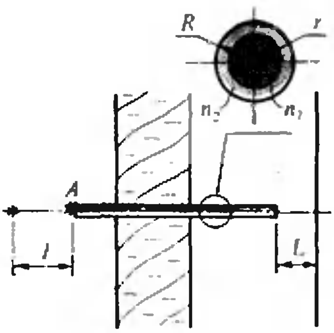


Рис. 1.

Очевидно, что на экран придут те лучи от источника, которые на поверхности соприкосновения сердцевины и оболочки претерпевают полное отражение и оказываются как бы захваченными сердцевиной световода.

Лучи света проходят в сердцевине световода (рис. 2), если угол падения $\alpha\geqslant\alpha_0$, где α_0 — предельный угол полного отражения на границе двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 ($\sin\alpha_0=n_2/n_1$).

После преломления на противоположном от источника торце световода лучи света будут расходиться в виде конического пучка. В соответствии с законами геометрической оптики угол преломления находим из условия

$$\frac{\sin\beta}{\sin(90^\circ-\alpha)}=n_1.$$

Луч света будет испытывать на торце палочки наибольшее отклонение, если угол α минимален, т. е. $\alpha=\alpha_0$. Тогда для максимального угла преломления β_{max} получаем выражение, справедливое при $n_1^2-n_2^2<1$:

$$\sin\beta_{max}=n_1\cos\alpha_0=\sqrt{n_1^2-n_2^2}.$$

Таким образом, зная высоту усеченного конуса (светового пучка) L, радиус меньшего основания r, угол β_{max} между осью конуса и его образующей, легко найти радиус большего основания, или, что то же самое, радиус светового пятна на экране:

$$R_1=r+L\,\mathrm{tg}\,\beta_{max}, \qquad (1)$$

или

$$R_1=r+L\frac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{\sqrt{1+n_2^2-n_1^2}}. \qquad (2)$$

Если $n_1^2-n_2^2\geqslant1$, то лучи света будут выходить под любым углом $\beta\leqslant\pi/2$ и размер светового пятна будет неограничен.

В том случае, когда источник удален на расстояние l от торца световода, в формировании светового пятна могут участвовать лучи, попадающие на левый торец под углами $\gamma\leqslant\gamma_{max}$, где $\mathrm{tg}\,\gamma_{max}=r/l$. Поэтому выходящий пучок не может иметь угол расхождения больший, чем γ_{max}, т. е. $\beta\leqslant\gamma_{max}$ (как при прохождении плоскопараллельной пластины). Если $\beta_{max}\leqslant\gamma_{max}$, то и для этого случая справедлива формула (2). Если $\beta_{max}>\gamma_{max}$, то в формулу (1) вместо β_{max} следует поставить γ_{max}:

$$R_1=r\left(1+\frac{L}{l}\right).$$

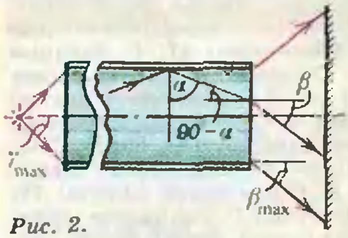


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

Интересно отметить, что плавные изгибы длинной палочки в ее центральной части практически не влияют на величину светового пятна. И еще. Такие световоды позволяют световому сигналу преодолевать не только стену, но и более сложные препятствия. Они весьма перспективны и уже находят широкое применение в технике связи, например при построении помехозащищенного кабельного телевидения в густозастроенных городских районах.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1076 — М1090, Ф1088 — Ф1102, справились с задачами М1076, М1081, М1082, М1086, М1088, М1090, Ф1088, Ф1090, Ф1091, Ф1093 — Ф1095, Ф1098 — Ф1100.

Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

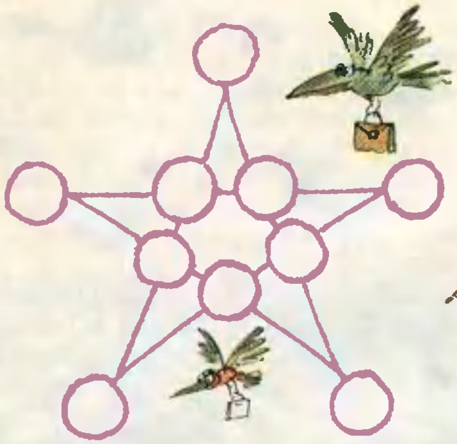
Д. Абдуллаев (Баку) 89; *В. Абраамян* (с. Бюракан АрмССР) 87, 89; *Э. Агаев* (п. Борадыгях АзССР) 89; *К. Адриан* (Каракал, СРР) 77—80; *Н. Адрианов* (Электросталь) 83, 84, 87, 89; *А. Акимов* (Евпатория) 77—80, 83, 87, 89; *А. Акопян* (Ереван) 78, 79, 83, 89; *Г. Аксенов* (Москва) 83; *П. Андрас* (СРР) 87, 89; *В. Андрюшенко* (Винница) 83, 87; *И. Аржанцев* (Киев) 83, 85, 87, 89; *Б. Арясов* (Киев) 83, 89; *Д. Асадов* (Баку) 83, 89; *Ш. Асадов* (с. Кирилавар АзССР) 89; *А. Ахметов* (Алма-Ата) 87; *Ш. Бабаев* (Баку) 83, 89; *Р. Баженов* (Симферополь) 89; *Е. Бакенов* (Караганда) 87; *Л. Бараковская* (Киев) 89; *В. Бараковский* (Омск) 87, 89; *Н. Баринова* (Усть-Каменогорск) 87, 89; *Ю. Безгачева* (Красноярск) 77, 79; *С. Березовский* (Киев) 83, 85; *Н. Билусяк* (с. Менява Ивано-Франковской обл.) 83, 85, 87; *Н. Биядилов* (Алма-Ата) 87, 89; *А. Блинова* (Ленинград) 87; *А. Богданов* (Старый Оскол) 87, 89; *Я. Бойчук* (Киев) 83, 87, 89; *Б. Боранбаев* (Алма-Ата) 87, 89; *Ж. Борашев* (Алма-Ата) 87, 89; *П. Бородин* (Киров) 89; *А. Брейман* (Москва) 83, 84; *Я. Бренер* (Вильнюс) 80; *Д. Бринзан* (СРР) 87; *С. Бутвина* (Житомир) 83—85, 89; *В. Варламов* (Воткинск) 89; *Ц. Василев* (София, НРБ) 78—80; *Е. Васильева* (Химки) 83; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 79, 83, 89; *А. Виницкий* (Калуга) 79, 89; *Т. Вовкивский* (Черновцы) 89; *С. Волошин* (Подгородное Днепропетровской обл.) 89; *О. Волощук* (Гайворон) 89; *В. Волчков* (Шахтерск) 83, 84, 87, 89; *В. Вончурин* (Москва) 87, 89; *М. Всемирнов* (Ленинград) 83, 87; *М. Выборнов* (Киев) 79, 80, 83, 87, 89; *А. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) 89; *С. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) 89; *Б. Гасанов* (Баку) 83, 89; *В. Гацоева* (Орджоникидзе) 87; *В. Горбачев* (Харьков) 87, 89; *Э. Горянский* (Берегово Закарпатской обл.) 89; *И. Григорьев* (Рига) 87, 89; *Ю. Гринфельд* (Москва) 83—85, 87, 89; *А. Гурло* (г. п. Кривичи Минской обл.) 89; *А. Гурман* (Одесса) 89; *К. Давтян* (Ереван) 89; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 83, 87, 89; *Р. Дадашов* (п. Борадыгях АзССР) 89; *А. Даниленко* (Волгоград) 79; *Д. Делич* (Нови Сад, СФРЮ) 89; *В. Демик* (Орджоникидзе) 89; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) 77—79, 83, 87, 89; *Д. Долгопят* (Реутов) 84, 87, 89; *С. Дориченко* (Берогово Закарпатской обл.) 89; *Е. Дорогайкин* (Киев) 83, 89; *Д. Драчев* (Киев) 89; *В. Дробовцев* (Москва) 84; *Б. Дубров* (Минск) 83, 84, 87; *Е. Дуда* (Харьков) 83, 87, 89; *К. Дышлевой* (Черкассы) 83, 84; *Д. Дэмбэрэл* (Улан-Батор, МНР) 89; *А. Ерасов* (Москва) 83; *Е. Ербаулетов* (Алма-Ата) 87, 89; *Д. Ефимов* (Москва) 83; *С. Жарков* (Киев) 87, 89; *О. Жеребцов* (Усинск) 89; *В. Жилинскайте* (Вильнюс) 83—85, 89; *Х. Жумабеков* (с. Джайльма Джамбульской обл.) 87, 89; *Ю. Журавель* (Киев) 79, 83, 87, 89; *Д. Зайнолданов* (Талды-Курган) 84; *Н. Зарубин* (Харьков) 87, 89; *И. Зеленко* (Саратов) 77—79, 84, 85, 87, 89; *Д. Зеленский* (Семипалатинск) 83, 84, 89; *С. Зеленский* (Семипалатинск) 83, 89; *С. Зелик* (Краматорск) 77—80, 83—85, 87; *Г. Зельцман* (Киев) 85; *И. Зефиров* (Химки Московской обл.) 77—79; *И. Зук* (Эссен, ФРГ) 83, 84, 87; *Р. Иванов* (Чебоксары) 89; *М. Игнатьев* (Москва) 83, 84; *С. Измалков* (Харьков) 83, 84, 87, 89; *Н. Ильина* (с. Каменское Уральской обл.) 89; *Д. Ильясов* (с. Коктерек КазССР) 87, 89; *А. Ионес* (Ленинград) 89; *И. Иоппе* (Москва) 83, 84, 87, 89; *А. Исаков* (Алма-Ата) 87, 89; *М. Исмаилов* (п. Ярдымлы АзССР) 89; *А. Кабдолов* (Алма-Ата) 87, 89; *А. Калинин* (Саратов) 79; *В. Калошин* (Харьков) 83—85, 87, 89; *Л. Каминштейн* (Киев) 83, 85, 87, 89; *Н. Капуткина* (Москва) 83, 87; *А. Караваев* (Волгоград) 85; *С. Касаманян* (с/х Аракс АрмССР) 89; *И. Кириллов* (Усть-Каменогорск) 87, 89; *О. Кирнасовский* (Винница) 78, 79; *В. Климов* (Алма-Ата) 83, 87, 89; *А. Клячин* (Волгоград) 78; *В. Клячин* (Волгоград) 79; *Д. Кобыш* (Москва) 89; *Г. Коваль* (Новосибирск) 89; *Т. Ковальчук* (Киев) 89; *С. Коваценко* (Винница) **79, 83, 87, 89**; *О. Коврижкин* (Майкоп) **78, 79, 83**; *А. Козачко* (Винница) **79, 83, 87, 89**; *И. Кокорев* (Ленинград) **77—80**; *М. Колодей* (Омск) **87, 89**; *П. Кононенко* (Иваново) **89**; *А. Копылов* (Черноголовка Московской обл.) **78, 83**; *Д. Коржнев* (Киев) **83, 87, 89**; *Б. Коробейников* (Алма-Ата) **83, 87, 89**; *Д. Коровин* (Иваново) **87, 89**; *А. Короткий* (Днепродзержинск) **83, 87, 89**; *А. Коршков* (Мозырь) **83, 87**; *А. Крапивин* (Харьков) **83**; *И. Крисюк* (Павлодар) **89**; *Г. Кроник* (Ленинград) **79, 89**; *А. Крючков* (Саратов) **85, 87, 89**; *Д. Кудрявцев* (Орджоникидзе) **83, 87, 89**; *К. Кузнецов* (Днепропетровск) **89**; *А. Кулиев* (Фрунзе) **89**; *А. Кулик* (Киев) **83—85, 89**; *А. Кучкаров* (Шават) **87, 89**; *М. Лаба* (Львов) **87, 89**; *Н. Лапуста* (Тернополь) **83**; *Г. Леванов* (Москва) **79, 83, 87, 89**; *М. Левицка* (Гданьск, ПНР) **89**; *С. Лесик* (Донецк) **79, 80, 85, 87, 89**; *М. Либеров* (Москва) **83, 84**; *В. Либо* (Алма-Ата) **83, 87, 89**; *А. Липкин* (Киев) **85, 87, 89**; *Е. Ломовцева* (Белорецк) **84, 87, 89**; *А. Лосев* (Ленинград) **78, 79**; *А. Лукин* (Киев) **89**; *И. Лысюк* (Гайворон) **89**; *А. Ляховецкий* (Одесса) **87**; *С. Ляшенко* (Харьков) **87, 89**; *Д. Макаров* (Пенза) **84**; *С. Макашев* (Алма-Ата) **87**; *П. Макулев* (Пловдив, НРБ) **83**; *А. Малый* (Чебоксары) **83**; *В. Мамедов* (п. Борадыгях АзССР) **89**; *Д. Мамонтов* (Орджоникидзе) **87**; *И. Марков* (Киев) **87, 89**; *В. Марченко* (Минск) **79, 83—85, 87**; *М. Марченко* (Гайворон) **89**; *А. Мельник* (Гайворон) **89**; *А. Мальников* (Краснодар) **89**; *О. Мельников* (Красноярск) **79**; *А. Мельниченко* (Гомель) **89**; *Д. Менагаргишвили* (Тбилиси) **89**; *И. Мерлин* (Уфа) **89**; *Н. Мехтиев* (Кимиль-Кишлак АзССР) **89**; *А. Миронов* (Заволжье) **87**; *В. Мисакян* (Ереван) **87, 89**; *А. Морозова* (Одесса) **78, 84, 87, 89**; *Д. Муравлев* (Орджоникидзе) **87**; *Я. Мустафаев* (Баку) **77—80**; *Р. Мучник* (Винница) **83, 87, 89**; *О. Наумов* (Заволжье) **83**; *В. Нечаев* (Киев) **83**; *А. Никифоров* (Тула) **89**; *А. Николаев* (Киев) **83**; *Д. Никшич* (Киев) **87, 89**; *Е. Нурбеков* (Алма-Ата) **83, 87, 89**; *А. Нургумаров* (Павлодар) **89**; *И. Опульский* (Киев) **83, 85, 87, 89**; *М. Осовский* (Тольятти) **89**; *Е. Останина* (Белорецк) **84, 87, 89**; *В. Острик* (Жданов) **87**; *О. Павлов* (Новосибирск) **78—80**; *А. Панкратьев* (Курск) **84**; *А. Парыгин* (Омск) **87, 89**; *А. Пашоян* (Чаренцаван) **84**; *Е. Перевознюк* (Гайворон) **89**; *А. Петер* (СРР) **77—79**; *И. Петков* (Враца, НРБ) **84, 87, 89**; *З. Петренко* (п. Дружный Минской обл.) **87, 89**; *А. Пилипенко* (Киев) **83, 87, 89**; *О. Пихурко* (Нестеров Львовской обл.) **85**; *В. Плачко* (с. Великая Рустава Винницкой обл.) **83**; *К. Погосян* (Ереван) **85, 89**; *В. Полищук* (Киев) **83, 85, 87, 89**; *И. Поляк* (Ленинград) **83, 87, 89**; *Н. Потупало* (Орджоникидзе) **83**; *Д. Прокофьев* (п. Сертолово Ленинградской обл.) **77—79, 83, 85, 87, 89**; *А. Рабинович* (Винница) **87, 89**; *В. Рагулин* (Москва) **87, 89**; *В. Рагулин* (Челябинск) **83, 84**; *В. Радулеску* (Каракал, СРР) **83**; *Д. Ревин* (Алма-Ата) **87**; *З. Ремус* (Орадеа, СРР) **84, 85, 87, 89**; *О. Рыбалкин* (Орджоникидзе) **87**; *А. Рыжков* (Минск) **84**; *Н. Рябова* (Харьков) **89**; *Б. Сагиндыков* (Алма-Ата) **87**; *Р. Садреев* (Алма-Ата) **87, 89**; *У. Саметов* (с. Коркес Карагандинской обл.) **89**; *И. Селищев* (п. Манченки Харьковской обл.) **83**; *В. Семенцов* (Смоленск) **78, 79**; *А. Серебряков* (Москва) **83, 87, 89**; *С. Сидоренко* (Харьков) **83**; *А. Сизых* (Саяногорск) **89**; *А. Сикорин* (Евпатория) **87**; *Г. Синицын* (Томск) **83**; *М. Скворцов* (п. Черноголовка Московской обл.) **83**; *А. Скопенков* (Саратов) **77—79, 84, 87, 89**; *З. Сланова* (Орджоникидзе) **87**; *А. Смотров* (Хабаровск) **84, 89**; *Ю. Соколов* (Челябинск) **77—80, 84, 89**; *О. Солош* (Запорожье) **79**; *В. Стрижевский* (Одесса) **79**; *С. Тарасов* (Ангарск) **85**; *Г. Тер-Сааков* (Баку) **79, 87, 89**; *С. Тер-Сааков* (Баку) **79, 87, 89**; *С. Тихонов* (Воронеж) **77—80, 83, 85, 87, 89**; *С. Ткачев* (Москва) **83**; *Д. Турсунов* (Караганда) **79, 85, 87, 89**; *А. Тютеньков* (Усть-Каменогорск) **87, 89**; *А. Устинов* (Плавск) **87**; *К. Ушаков* (Киев) **83, 87, 89**; *Ю. Файзуллаев* (Шават) **87**; *П. Федосеев* (Новгород) **77—79**; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) **77—80, 83, 87, 89**; *Р. Фельдман* (Львов) **83**; *В. Фельдшеров* (Алма-Ата) **83, 87, 89**; *В. Филлипов* (Киев) **83, 87, 89**; *Х. Хаджиев* (Ташкент) **89**; *В. Хирламов* (Ленинград) **78**; *М. Хасидовский* (Ташкент) **87, 89**; *Р. Христюк* (Киев) **83, 87, 89**; *Ж. Хужамов* (Шаватский район Хорезмской обл.) **87, 89**; *В. Цветков* (София, НРБ) **83, 89**; *А. Цинкер* (Ташкент) **87, 89**; *М. Цой* (Алма-Ата) **83**; *Д. Цэдэнбаяр* (Улан-Удэ) **89**; *Д. Чайчук* (Саратов) **84, 87, 89**; *М. Чванов* (Киев) **83, 87, 89**; *И. Червоненко* (Харьков) **87, 89**; *Н. Черепанова* (Целиноград) **83, 87**; *С. Черепнин* (Семипалатинск) **83, 89**; *И. Чижиков* (Винница) **83, 87**; *А. Чуприн* (Алма-Ата) **89**; *Д. Шадыкулов* (Алма-Ата) **83, 87, 89**; *Ш. Шамеденов* (Алма-Ата) **87, 89**; *А. Шаповал* (Киев) **83, 85, 87, 89**; *А. Шварцман* (Алма-Ата) **87, 89**; *О. Шведов* (Москва) **77, 79, 87, 89**; *К. Шерниязов* (Кунград) **87, 89**; *С. Шилов* (Ленинград) **87**; *С. Шлыкова* (Орджоникидзе) **87**; *З. Шония* (Тбилиси) **79, 89**; *С. Шпырко* (Ужгород) **78**; *В. Штотланд* (Курск) **83, 87, 89**; *А. Эгамов* (Гороховец) **87, 89**; *В. Эйгес* (Москва) **89**; *Р. Яворский* (Полтава) **87**; *М. Ягмуров* (Алма-Ата) **83, 87, 89**.

Физика

И. и Х. Абдулазизовы (Шеки) **97**; *С. Авдеенко* (Киев) **01**; *С. Агаронян* (Пятигорск) **02**; *В. Аксюк* (п. Черноголовка Московской обл.) **01, 02**; *Р. Акчурин* (Тамбов) **01**; *О. Армоник* (Гродно) **89, 92**; *И. Ашурбеков* (с. Пилиг ДагАССР) **92**; *А. Бабкин* (Киев) **96, 97, 01, 02**; *П. Баев* (п. Протвино Московской обл.) **92, 97**; *Н. Балюнас* (Вильнюс) **01**; *А. Башкатов* (Новополоцк) **96, 97, 02**; *В. Белоног* (Старый Оскол) **96 97, 01**; *В. Берестецкий* (Винница) **96**; *В. Бескровный* (Донецк) **96, 97, 01, 02**; *А. Беспятый* (Киев) **97**; *И. Блайвас* (Ростов-на-Дону) **01, 02**; *В. Бобров* (Железногорск) **01, 02**; *С. Бобровник* (Черновцы) **92, 96, 97, 01, 02**; *С. Бобылев* (Долгопрудный) **92**;

(Продолжение см. на с. 57)

Задачи



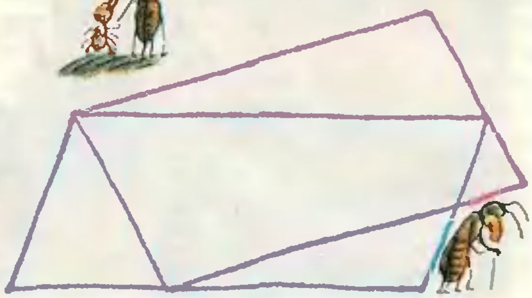
1. Можно ли в кружки звезды на рисунке расставить десять различных натуральных чисел так, чтобы суммы четырех чисел вдоль каждой из пяти прямых были нечетными?

2. Шесть пассажиров автобуса без кондуктора должны уплатить за билеты по 5 копеек. Но у них есть лишь монеты по 10, 15 и 20 копеек. Тем не менее пассажиры справились с задачей. Покажите, что общее число монет у них не меньше восьми. Смогут ли пассажиры решить эту задачу, если монет у них в сумме ровно восемь?

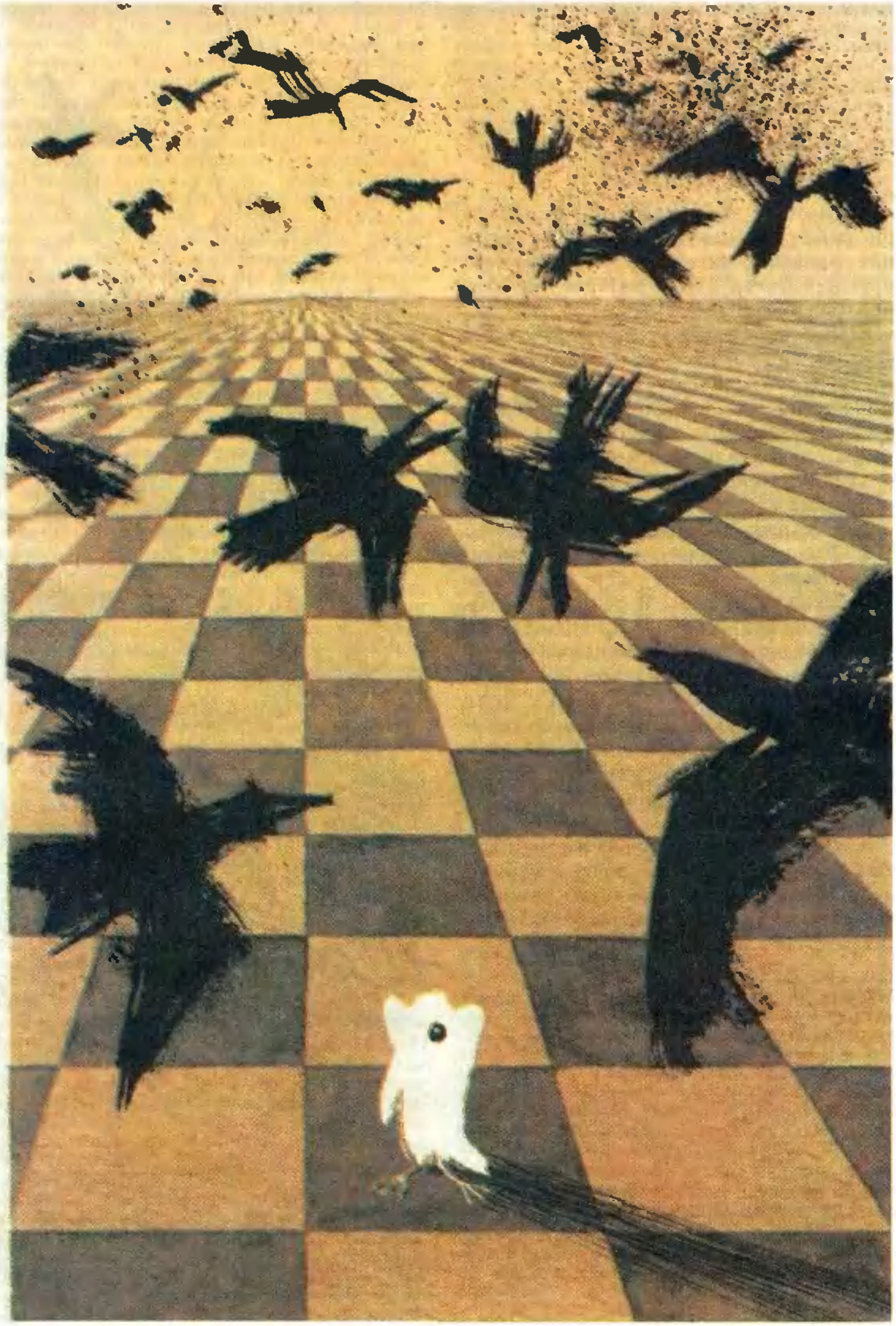
3. Два последовательных двузначных числа сложили и в их сумме переставили цифры. В результате получилось бо́льшее из складываемых чисел. Какие числа складывали?

4. Определите числовое значение слова ТРАНСПОРТИРОВКА, если одинаковые буквы заменить соответственно одинаковыми цифрами, разные — разными, причем так, чтобы были выполнены указанные на рисунке неравенства.

5. Два параллелограмма — красный и синий — имеют общую вершину и еще по одной вершине каждый на стороне другого (см. рисунок). Покажите, что их площади равны.



Эти задачи нам предложили: *А. М. Домашенко, Н. Б. Васильев, Жора Головатенко из Москвы, М. П. Мочалов* и *В. В. Произволов.*



ПРАВИЛО КРАЙНЕГО

Кандидат физико-математических наук
А. Л. РОЗЕНТАЛЬ

Если вы хотите научиться решать математические задачи, вам надо попытаться овладеть более или менее общими подходами, приемами и методами математических рассуждений. Рассмотрим один весьма общий подход, который мы будем называть *правилом крайнего.*

Правило крайнего может быть кратко выражено словами «Рассмотри крайнее!». Это правило есть попросту рекомендация рассмотреть объект, обладающий какими-либо крайними, или, как говорят математики, *экстремальными,* свойствами. Если речь в задаче идет о множестве точек на прямой, то правило «Рассмотри крайнее!» советует нам сосредоточить свое внимание на самой крайней точке множества (самой левой или самой правой). Если в задаче фигурирует некоторый набор чисел, то правило крайнего рекомендует рассмотреть наибольшее или наименьшее из этих чисел. Вот несколько примеров.

З а д а ч а 1. *На плоскости задано некоторое множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего какую-либо пару точек того же множества M. Докажите, что множество M содержит бесконечно много точек.*

Очень часто бывает так, что ключ к решению задачи находят, решая более простую аналогичную задачу. Поэтому, прежде чем решать данную задачу, попробуем решить следующую задачу.

З а д а ч а 2. *На прямой задано множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M. Докажите, что множество M бесконечно.*

Предположим, что множество M конечно. Применим правило крайнего: если множество M — конечно, то среди его точек есть крайние — самая левая и самая правая. Рассмотрим одну из них, например самую левую; обозначим ее буквой A. Точка A — крайняя и потому не может лежать внутри отрезка, соединяющего две другие точки множества M; значит, она не принадлежит M. Полученное противоречие и доказывает, что множество M не может быть конечным.

Приведем еще одно решение этой задачи, использующее правило крайнего. Допустим снова, что множество M конечно, и рассмотрим длины отрезков, соединяющих точки из M. Этот набор чисел конечен. Применим к нему наше правило в форме «Рассмотри наибольшее!» — рассмотрим отрезок BC наибольшей длины. Ясно, что вне отрезка BC нет точек из M, иначе существовали бы отрезки с бо́льшими длинами. Таким образом, все точки множества M лежат на отрезке BC и, значит, ни B, ни C не удовлетворяют условию, т. е. не принадлежат множеству M. Противоречие.

Вернемся теперь к задаче 1. Допустим, что множество M конечно. Снова применим правило крайнего. Для этого зафиксируем положение плоскости и рассмотрим самую левую точку множества M, а если «самых левых» точек несколько, то возьмем самую нижнюю из них. Легко убедиться, что эта точка, обозначим ее через A, не может лежать внутри отрезка, соединяющего две точки множества M. Действительно, если бы такой отрезок существовал, то один из его концов находился бы либо левее точки A, либо на одной вертикали с A, но ниже ее. Ни того, ни другого не может быть в силу выбора точки A.

Здесь, как и в задаче 2, тоже существует решение, основанное на рассмотрении попарных расстояний между точками множества M. Если множество M конечно, то и попарных расстояний конечное число, и среди

Эта статья впервые была опубликована в «Кванте» № 8 за 1976 год. (*Примеч. ред.*)

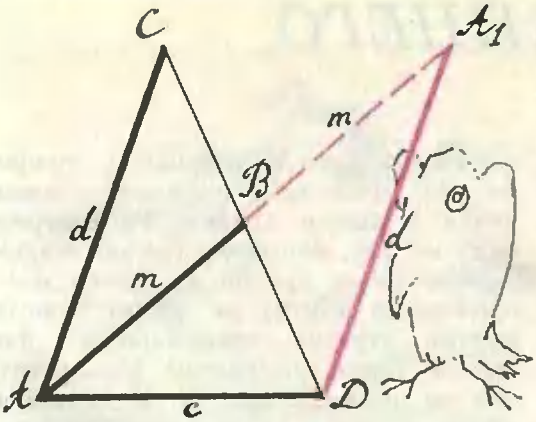


Рис. 1.

них, руководствуясь правилом крайнего, можно отыскать наибольшее. Пусть это будет расстояние между точками A и B. Но точка B является серединой некоторого отрезка CD, концы которого по условию принадлежат множеству M (рис. 1). Тогда легко доказать, что либо AD, либо AC больше AB (сделайте это самостоятельно, воспользовавшись тем, что медиана m, проведенная к одной из сторон треугольника, меньше полусуммы двух других сторон).

З а д а ч а 3. *На полях бесконечной шахматной доски написаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому четырех соседних чисел — верхнего, нижнего, правого и левого. Докажите, что все числа на доске равны между собой.*

Решить эту задачу нам поможет правило крайнего в форме «Рассмотри наименьшее!». Среди натуральных чисел, записанных на полях шахматной доски, непременно существует наименьшее. В этом нетрудно убедиться. Пусть k — одно из данных чисел. Если среди чисел, записанных на доске, имеется единица, то она и является таким наименьшим числом (не существует натуральных чисел, меньших единицы). Если единицы на доске нет, посмотрим, нет ли там двойки. Если есть, то она и является наименьшим числом, если же нет, то поищем на доске тройку, и т. д. Не более чем за k шагов мы отыщем таким образом наименьшее число m. Рассмотрим поле P, на котором оно записано. Обозначим числа, записанные на соседних полях, буквами a, b, c и d. По условию $m=(a+b+c+d)/4$. Отсюда $a+b+c+d=4m$. В силу выбора числа m имеем $a\geqslant m$, $b\geqslant m$, $c\geqslant m$, $d\geqslant m$. Если хоть одно из этих неравенств было бы строгим, то мы имели бы $a+b+c+d>4m$, что противоречит условию. Значит $a=b=c=d=m$.

Таким образом, если на некотором поле записано число m, то и на соседних полях записано число m. Отсюда следует, что на горизонтали, содержащей поле P, записаны одни только числа m. Но любая вертикаль пересекает эту горизонталь, т. е. она содержит число m, и, значит, все числа на вертикалях равны m. Поэтому вообще все числа на доске равны m.

З а д а ч а 4. *На квадратной шахматной доске размером $n\times n$ расставлены ладьи с соблюдением следующего условия: если некоторое поле свободно, то общее количество ладей, стоящих на одной с этим полем горизонтали и на одной с ним вертикали, не меньше n. Докажите, что на доске находится не менее $\frac{n^2}{2}$ ладей.*

Эта задача — трудная. Однако умелое применение правила крайнего может существенно облегчить поиск решения. Именно, правило крайнего наталкивает на мысль рассмотреть ту из линий доски — вертикалей и горизонталей,— на которой стоит меньше всего ладей. Может случиться, что есть несколько таких линий, «одинаково нагруженных» ладьями. Тогда выберем любую из них. Пусть эта линия — горизонталь (в противном случае повернем доску на 90° — вертикали станут горизонталями). Число ладей на этой горизонтали обозначим через k. Если $k\geqslant\frac{n}{2}$, то на каждой из n горизонталей не менее $\frac{n}{2}$ ладей, а всего на доске не менее $\frac{n^2}{2}$ ладей.

Пусть теперь $k<\frac{n}{2}$. На рассматриваемой горизонтали $n-k$ свободных полей, и каждая вертикаль, проходящая через такое свободное поле, содержит, как видно из условия, не менее $n-k$ ладей, а все такие вертикали — не менее $(n-k)^2$ ладей. Остальные k вертикалей содержат не менее чем по k ладей каждая (в силу выбора числа k). Всего на доске стоят не менее чем $(n-k)^2+k^2$ ладей. Остается доказать, что $(n-k)^2+k^2 \geqslant \frac{n^2}{2}$. Это можно сделать разными способами: вот один из них:

$$((n-k)^2+k^2)-\frac{n^2}{2}=\frac{n^2}{2}-2nk+2k^2=$$

$$=2\left(\frac{n^2}{4}-nk+k^2\right)=2\left(\frac{n}{2}-k\right)^2\geqslant 0.$$

Если n — число четное, то можно найти удовлетворяющую условию расстановку, содержащую в точности $\frac{n^2}{2}$ ладей,— достаточно поставить ладьи на все черные поля (или на все белые). Если число n — нечетное, то $\frac{n^2}{2}$ ладей расставить, соблюдая условия задачи, нельзя, так как число $\frac{n^2}{2}$ нецелое, но $\frac{n^2+1}{2}$ ладей расставить можно: одну ладью ставим на одно из угловых полей, а остальные — на поля того же цвета.

Аналогично решается следующая задача.

Задача 5. *Пусть n^2 неотрицательных целых чисел расположены в виде таблицы, содержащей n строк и n столбцов. При этом выполнено следующее условие: если на некотором месте таблицы записан нуль, то сумма чисел столбца и строки, содержащих этот нуль, не меньше n. Докажите, что сумма всех n^2 чисел не меньше $n^2/2$.*

Следующая задача тоже решается с помощью правила крайнего.

Задача 6. *На плоскости заданы n точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три данные точки, не содержащая внутри не одной из данных точек.*

Проведем окружность через каждую тройку точек. Получим некоторое множество окружностей (некоторые из них могут слиться в одну). Требуется доказать, что хотя бы одна из этих окружностей не содержит внутри себя ни одной из данных точек. Правило крайнего может навести на мысль рассмотреть наименьшую окружность (окружность наименьшего радиуса), но это в данном случае ничего не даст (достаточно рассмотреть конфигурацию из таких точек: 4 вершины квадрата и его центр; наименьшей будет окружность, описанная около квадрата, а она условию не удовлетворяет). Поступим иначе. Попробуем решить более простую задачу, а именно, будем искать окружность, проходящую через две из данных точек и не содержащую точек внутри себя. Измерим расстояния между каждыми двумя данными точками и, воспользовавшись правилом крайнего в форме «Рассмотри наименьшее!», возьмем пару точек A и B, находящихся на наименьшем расстоянии друг от друга. Легко убедиться, что окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, удовлетворяет условию: остальные $(n-2)$ данные точки удалены и от A, и от B не менее чем на AB, а потому расположены вне этой окружности. Теперь проведем окружности через точки A и B и через каждую из остальных $(n-2)$ точек. Вот среди этих окружностей выберем наименьшую, как нам подсказывает правило «Рассмотри наименьшее!». Пусть это будет

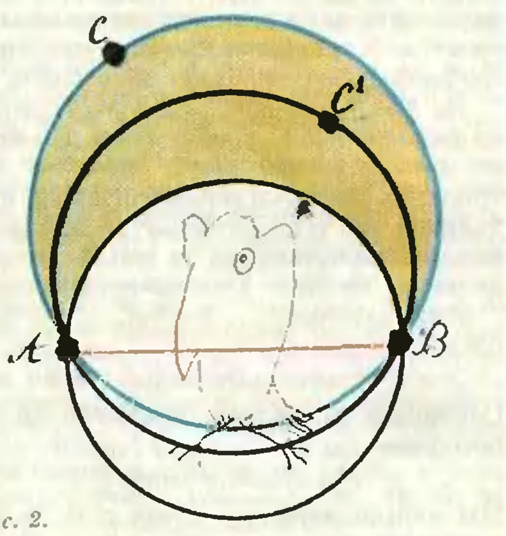


Рис. 2.

окружность, проходящая через точки A, B, C. Она — искомая, потому что любая окружность, проведенная через точки A и B и некоторую точку C' «серпа» (рис. 2), меньше окружности, проходящей через точки A, B, C (докажите это самостоятельно).

Задача 7. *На плоскости проведено n прямых ($n \geqslant 3$). Никакие две из них не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. Эти прямые разрезают плоскость на части. Докажите, что какую бы из n прямых мы ни взяли, хотя бы одна из примыкающих к ней частей плоскости является треугольником.*

Пусть l_1 — одна из данных прямых. Руководствуясь правилом крайнего, из всех точек пересечения остальных прямых выберем ту, которая находится на наименьшем расстоянии от прямой l_1. Пусть в этой точке, обозначим ее буквой P, пересекаются прямые l_2 и l_3. Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что треугольник, образуемый прямыми l_1, l_2 и l_3, составляет одну часть плоскости и, следовательно, удовлетворяет условию задачи.

Задача 8. *Докажите, что не существует четверки натуральных чисел x, y, z, u, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$.*

Допустим, что такие четверки существуют. Рассмотрим ту из них, для которой величина x^2+y^2 минимальна (если есть несколько четверок, у которых эта величина одинакова и минимальна, рассмотрим одну из них, любую). Пусть это будет четверка a, b, c, d. Из уравнения $a^2+b^2=3(c^2+d^2)$ видно, что a^2+b^2 кратно трем. Но легко доказать, что a^2+b^2 делится на три тогда и только тогда, когда и a, и b делятся на три, потому что квадрат числа, не делящегося на три, дает при делении на три в остатке единицу.

Следовательно, $a=3m$, $b=3n$, откуда

$$a^2+b^2=9m^2+9n^2=3(c^2+d^2).$$

Сокращая последнее равенство на 3, получим:

$$c^2+d^2=3(m^2+n^2).$$

Мы нашли четверку чисел c, d, m, n, удовлетворяющую данному уравнению, причем для этой четверки

$$c^2+d^2<a^2+b^2,$$

а это невозможно в силу выбора четверки a, b, c, d.

Задача 9. *На плоскости расположены n прямых ($n \geqslant 3$). Любые две прямые пересекаются и через каждую точку пересечения проходят не менее трех из данных прямых. Докажите, что все прямые пересекаются в одной точке.*

Пусть M — одна из точек пересечения прямых. Допустим, что она — не единственная. Тогда найдется прямая l данной системы, не проходящая через M. Множество точек пересечения прямых, не лежащих на l, непусто — оно содержит, например, точку M. Рассмотрите точку этого множества, ближайшую к l (а если имеется несколько точек, находящихся на минимальном расстоянии от l, то выберете одну из них, любую), и получите противоречие.

Вот еще одна аналогичная задача.

Задача 10. *На плоскости заданы n точек ($n \geqslant 3$). Известно, что на всякой прямой, проходящей через 2 данные точки, расположена по крайней мере еще одна из данных точек. Докажите, что тогда все n точек лежат на одной прямой.*

Развитием правила крайнего является «правило расположения», которое звучит так: «Расположи элементы исследуемого множества в каком-нибудь порядке: возрастания, убывания или в каком-нибудь другом!».

Задача 11. *Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем никакие двое не собрали одинакового числа грибов. Докажите, что есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.*

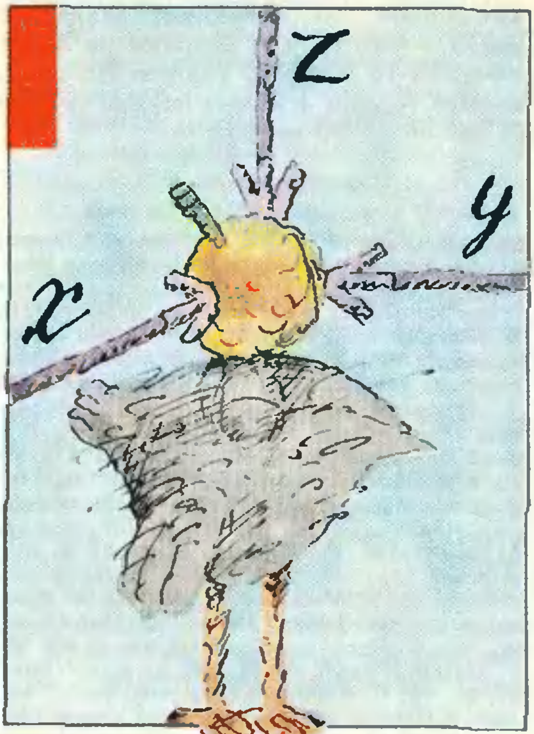
Составим «таблицу первенства», поместив в ней грибников в порядке убывания числа собранных ими грибов. Ясно, что рассматривать надо грибников, занявших первые 3 места — они собрали грибов больше, чем любая другая тройка. Попробуем доказать, что они собрали не менее 50 грибов. Если грибник, занявший 3-е место, собрал 16 грибов или больше, то на 2-м месте — грибник, собравший не менее 17 грибов, а на первом — не менее 18 грибов. Вместе они собрали не меньше 16+ +17+18=51 гриба. Если же грибник, занявший 3-е место, собрал не более 15 грибов, то грибники, занявшие места с 4-го по 7-е, собрали не более 14+13+12+11=50 грибов. На долю первой тройки и в этом случае остается не менее 50 грибов.

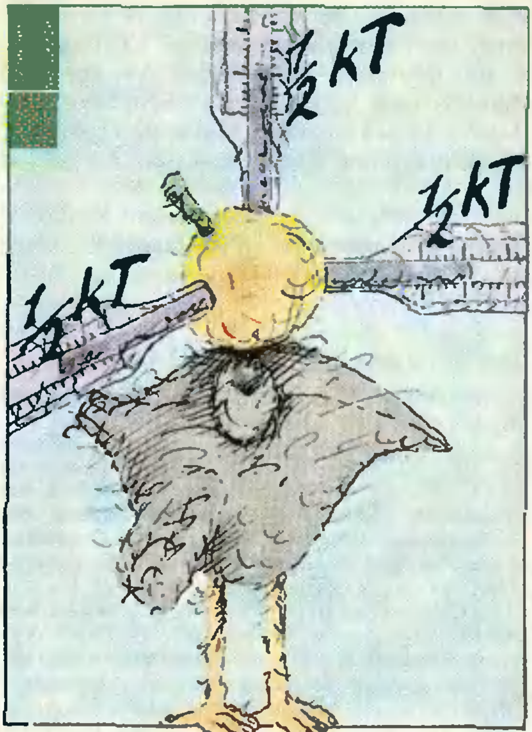
Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 49)

А. Богданов (Мичуринск) 89; *О. Борисенко* (Киев) 97; *А. Бузунов* (Киев) 89, 92; *В. Бурдин* (Пермь) 96, 97; *А. Бучель* (Луцк) 89, 92, 96, 97, 01; *В. Быдзан* (Борисполь) 92; *С. Бычихин* (Евпатория) 02; *Э. Бязрова* (Тбилиси) 96, 01; *М. Выборнов* (Киев) 01; *В. Высоцкий* (Киев) 96, 01, 02; *В. Гавенский* (Баку) 96, 01; *Ю. Гаева* (Киев) 97; *С. Ганжур* (Петропавловск-Камчатский) 96, 02; *П. Гнездилов* (Пятигорск) 02; *В. Горбовец* (Свердловск) 96; *И. Горбунов* (Саратов) 02; *В. Горденчук* (Житомир) 96, 01; *В. Гордиенко* (Винница) 96, 97; *А. Грибов* (Минск) 01; *Ю. Гринфельд* (Москва) 01; *Л. Губанова* (Москва) 96, 97; *А. Гуленок* (Москва) 89, 92; *Б. Гуревич* (Саратов) 92; *В. Гусятников* (Москва) 01; *Б. Дейч* (Харьков) 89, 92, 96, 97, 01, 02; *К. Демьяненко* (Киев) 96, 97, 02; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) 97, 01, 02; *Е. Доценко* (п. Черноголовка Московской обл.) 97; *В. Дядечко* (Винница) 89, 92, 96, 01, 02; *И. Ермолаев* (Запорожье) 92; *Ю. Жданов* (Кострома) 96; *А. Жук* (Ровно) 97, 01, 02; *В. Журавлев* (Донецк) 01; *Е. Задорожная* (Киев) 02; *В. Зайцев* (Борисоглебск) 01; *А. Залеский* (Харьков) 96, 97, 01, 02; *Л. Заломихина* (Старый Оскол) 97; *Ф. Занин* (Старый Оскол) 96, 97; *В. Затушевский* (п. Светлый МолдССР) 01, 02; *Д.* и *С. Зеленские* (Семипалатинск) 96, 97, 02; *Е. Зельцер* (Киев) 96, 02; *А. Зискинд* (Винница) 92; *Д. Золотарев* (Харьков) 96, 01; *Я. Зубков* (Алма-Ата) 92; *К. Зуев* (Вологда) 96, 97, 01, 02; *А. Зуенков* (Донецк) 01; *И. Иоппе* (Москва) 01; *Х. Исрафилов* (Шеки) 97; *С. Казенас* (Алма-Ата) 89, 96, 01; *В. Камчатный* (Киев) 01, 02; *А. Капустин* (Москва) 89, 92; *М. Капустин* (Львов) 01, 02; *Е. Кемель* (Киев) 92; *Д. Кириллов* (Калининград) 96; *В. Клименко* (Первомайск Николаевской обл.) 96; *Г. Коваль* (Новороссийск) 01; *А. Кожевников* (Калуга) 01; *А. Колесник* (Старый Оскол) 92, 96, 97; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 92, 96, 01, 02; *Д. Комисаренко* (Винница) 89; *А. Комник* (Старый Оскол) 92, 96, 97, 01; *В. Кондратьев* (Калининград) 97; *О. Кондратьев* (Брест) 96, 97, 02; *А. Корнев* (Воронеж) 01, 02; *А. Коршков* (Мозырь) 89, 92, 96, 01; *С. Кострыкин* (Старый Оскол) 97; *И. Кравченко* (Харьков) 96, 97, 01, 02; *А. Крайский* (Москва) 96, 01; *К. Краснов* (Киев) 96, 97, 01, 02; *М. Крейнин* (Ухта) 96; *В. Кудреватых* (Киров) 97; *Н. Кузьма* (п. Протва Калужской обл.) 96, 01, 02; *Д. Кузьменко* (Казань) 01; *Ю. Кумпан* (Москва) 97; *Д. Лабутин* (Иваново) 92, 02; *А. Лавров* (Москва) 89; *С. Лапин* (Саратов) 97, 01; *А. Лемперт* (п. Черноголовка Московской обл.) 97, 02; *А. Логунов* (Ульяновск) 97, 02; *Н. Локоть* (п. Заложцы Тернопольской обл.) 92; *С. Луганский* (Москва) 89; *А. Лутовинов* (Мичуринск) 96, 02; *Н. Лысянский* (Новосибирск) 92, 96, 97, 01, 02; *Б. Лянский* (Паневежис) 97; *В. Макеев* (Алма-Ата) 96; *Р. Маяков* (Саратов) 92, 96, 97, 01, 02; *А. Малый* (Чебоксары) 96, 97, 01, 02; *А. Мамаев* (Заволжье) 92, 96, 97, 01; *В. Манжос* (Алма-Ата) 01; *И. Мартин* (Таллин) 01; *К. Матмуратов* (Дружба УзССР) 02; *Д. Мацукевич* (Минск) 01; *А. Мелеховец* (Брест) 92; *И. Мельников* (Бодайбо) 96; *В. Меркер* (Старый Оскол) 92, 97; *С. Меркулов* (Долгопрудный) 96, 97; *Р. Мизюк* (Ровно) 97, 01, 02; *А. Мина* (Киев) 97, 01, 02; *С. Михайлов* (Винница) 96; *С. Михайлов* (Наманган) 96; *П. Михеев* (Старый Оскол) 96, 97, 01; *Я. Михеев* (Киев) 92; *Е. Моисеев* (Запорожье) 92; *Е. Монакова* (Таллин) 92; *М. Мороз* (Киев) 96, 01; *Е. Недув* (Одесса) 01; *А. Новик* (Мозырь) 89, 92, 96, 01; *Ш. Нурматов* (Наманган) 02; *М. Оконь* (Старый Оскол) 92; *А. Окунев* (Гродно) 92; *А. Орловский* (Киев) 89; *А. Павлощук* (Киев) 01; *А. Панас* (Могилев) 97, 02; *Е. Пармузин* (Старый Оскол) 01; *Г. Парсамян* (Ереван) 92; *А. Пасека* (Владивосток) 01; *К. Пенанен* (Одесса) 89, 92; *И. Петков* (Враца, НРБ) 02; *Е. Пивоваров* (Ленинград) 97; *О. Пилипенко* (Киев) 96, 02; *В. Подзоров* (Ташкент) 96; *С. Пожидаев* (Хабаровск) 96; *О. Покрамович* (д. Скоки Брестской обл.) 92; *В. Полищук* (Киев) 96, 97; *С. Польшин* (Харьков) 97; *В. Портной* (Одесса) 96, 97, 01; *А. Пушнов* (Вольск) 01; *И. Рассадин* (Минск) 92, 96, 97, 01; *Т. Рашник* (Киев) 96, 01; *М. Рудай* (Артемовск) 96; *С. Рудницкий* (Одесса) 89, 92, 02; *А. Ружук* (Винница) 89; *К. Ручкин* (Донецк) 01; *А. Рыжов* (Новосибирск) 97, 02; *Д. Самборский* (Истра) 96, 97, 01, 02; *А. Серебряков* (Москва) 01; *К. Скиртач* (Запорожье) 96, 02; *И. Скребков* (Сумгаит) 01; *М. Столяр* (Киев) 92, 96, 97; *М. Субботин* (Старый Оскол) 92, 96, 97, 01; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 01; *Ю. Тарасюк* (Винница) 96, 02; *Н. Тарновский* (Винница) 96, 02; *Д. Тейтельман* (Минск) 92, 96, 97; *С. Тимашов* (Алма-Ата) 01; *С. Титов* (Старый Оскол) 96, 01; *И. Тодощенко* (Пермь) 92, 01, 02; *Д. Толкачев* (Ногинск) 02; *М. Томашевский* (Москва) 01, 02; *М. Турлаков* (Фрунзе) 01; *А. Тутов* (Рига) 02; *К. Убайдуллаев* (к/х «Победа» Наманганской обл.) 96; *Ю. Уваров* (Ленинград) 89, 92, 96, 01, 02; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 92, 97, 01;

(Окончание см. на с. 80)





Школа в „Кванте"

Физика 8, 9 10

Публикуемая ниже заметка «Основная задача кинематики» предназначена восьмиклассникам, начинающим подробное изучение основ механики. Не расстраивайтесь, если вы встретите некоторые еще не совсем привычные для вас понятия. Мы надеемся, что эта заметка будет полезной также и десятиклассникам — при повторении пройденного материала. Она позволит взглянуть на кинематику в целом.
Заметка «Абсолютная температура» предназначена девятиклассникам.

Основная задача кинематики

Но как раз стрела запела,
В шею коршуна задела —
Коршун в море кровь пролил,
Лук царевич опустил...

А. С. Пушкин

Как известно, для того чтобы спасти царевну Лебедь, князю Гвидону не потребовалось ничего, кроме решительности и меткости. Но вот вопрос — а что *такое «меткость»*? *Или* иначе, если бы Гвидон захотел рассчитать свой выстрел, то какой информацией он должен был бы обладать и как ею воспользоваться? Попробуем разобраться.

Прежде всего, разумеется, надо точно знать положение коршуна. Но этого не достаточно. Ведь коршун не сидит на месте и не ждет, пока его подстрелят, он движется. Значит, надо знать характер его движения, т. е. величину и направление скорости, а если она меняется, то как именно это происходит. Кроме того, есть еще и стрела. И о ее движении тоже надо знать все — величину и направление скорости и то, как она меняется с течением времени. Так вот, если бы все эти данные были у царевича в руках, то дело свелось бы к решению основной задачи кинематики.

Все кинематические задачи выглядят более или менее одинаково: *из-*

вестны положение и скорость тела в какой-то момент времени и характер его движения; надо определить положение и скорость этого тела в некоторый другой момент времени. Это — ключевая фраза! В ней «зашифрована» практически вся кинематика, но и скрыто много «подводных камней».

Начнем со слов: «известны положение и скорость тела в какой-то момент времени». Эти слова означают, во-первых, что выбраны тело отсчета и система координат и, во-вторых, что выбрано начало отсчета времени. Другими словами, выбрана система отсчета. А это — важнейший элемент описания любой физической ситуации. Ведь для того, например, чтобы смотреть фильм, нужен экран, на котором будут разворачиваться все события фильма. Так и система отсчета является своеобразным экраном для физических событий.

Пойдем дальше. Мы уже несколько раз употребляли слова «характер движения». Как вы знаете, положение тела в любой момент времени t задается его координатами x, y, z, а изменение координат — вектором перемещения тела $\vec{s}$. Слова «известен характер движения» и означают, что известен вид функции $\vec{s}(t)$ или, что то же самое, вид функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

В природе существует огромное разнообразие типов движения. Простейшие движения описываются простейшими функциями: прямолинейное равномерное движение — линейной функцией $x=x_0+vt$, или $\vec{s}(t)=\vec{v}t$; прямолинейное равноускоренное — квадратичной функцией $x=x_0+v_0t+at^2/2$, или $\vec{s}(t)=\vec{v}_0t+\vec{a}t^2/2$; колебательное — гармонической функцией синуса (или косинуса) $x=x_m\sin\omega t$ и т. д. А попробуйте проследить за какой-нибудь точкой на ободе катящегося колеса или за гимнастом, соскакивающим с перекладины, и вы убедитесь, что для описания таких движений понадобятся гораздо более сложные функции. Но в принципе это можно сделать всегда, и, что очень важно, метод решения основной кинематической задачи универсален и не зависит от типа движения.

Наконец, последняя фраза в формулировке задачи: «определить положение и скорость тела в некоторый (конечный) момент времени». Здесь основная проблема состоит в том, что этот конечный момент времени, как правило, указывается неясно. Очень редко говорится прямо, в какой именно момент времени нужно найти положение и скорость тела. В большинстве случаев этот момент задается каким-то дополнительным условием. (Так, например, в случае единоборства Гвидона с коршуном конечный момент времени определяется «встречей» стрелы с коршуном.) Используя это условие, нужно найти момент времени, в который оно выполняется, а затем уже это время подставить в выражения для перемещения (координаты) и скорости тела.

«Расшифровав» таким образом содержание основной задачи кинематики, мы фактически сформулировали и алгоритм ее решения:

1) Выбрать систему отсчета (всегда желателен рисунок).

2) Определить характер движения.

3) Записать перемещение и скорость (в проекциях на соответствующие оси координат) как функции времени; если в задаче присутствуют несколько движущихся тел, то уравнения движения надо записать для каждого тела отдельно.

4) Используя дополнительные сведения, определить конечный момент времени. Подставить это время в уравнение для интересующей нас величины — и задача решена.

А теперь вернемся к Пушкину. Пусть Гвидон, прежде чем выпустить стрелу, немного посчитает (а заодно и мы вместе с ним).

Исходная информация, которой обладает Гвидон, выглядит так: коршун находится прямо над царевной на высоте H (помните — «бьется лебедь средь зыбей, коршун носится над ней») и камнем пикирует на нее. Предположим, что начальная скорость коршуна равна нулю, Гвидон находится на берегу на расстоянии L от царевны, начальная скорость стрелы равна v_0. Спрашивается, под каким углом к горизонту должен стрелять царевич? Будем решать задачу по порядку.

1) Система координат показана на рисунке, а начало отсчета времени разумно связать с моментом выстрела.

2) Очевидно, что движение коршуна можно считать прямолинейным равноускоренным с ускорением свободного падения $\vec{g}$. Движение стрелы более сложное — его траекторией является парабола, а скорость изменяется и по величине, и по направлению. Однако ситуация упростится, если рассматривать перемещение стрелы в проекциях на оси координат X и Y. Легко видеть, что координата x стрелы с течением времени изменяется так же, как при прямолинейном равномерном движении, а координата y — как при прямолинейном равноускоренном движении, причем с тем же, что и для коршуна, ускорением $\vec{g}$.

3) Запишем уравнения движения обоих тел в проекциях на оси координат X и Y:

$$x_к = L,$$

$$y_к = H - \frac{gt^2}{2},$$

$$x_c = v_0 \cos\alpha \cdot t,$$

$$y_c = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

4) В момент встречи ($t = t_в$) координаты коршуна и стрелы равны:

$$L = v_0 \cos\alpha \cdot t_в,$$

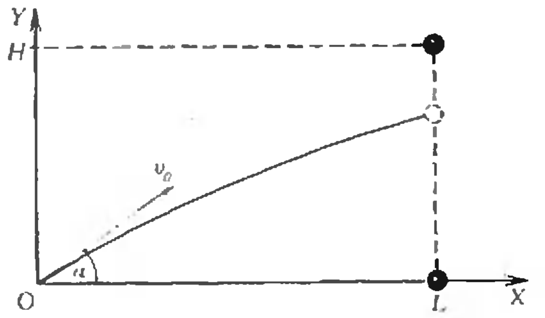
$$H - \frac{gt_в^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t_в - \frac{gt_в^2}{2}.$$

Мы получили два уравнения с двумя неизвестными ($t_в$ и α). Решая их, находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{L}.$$

(В принципе, зная угол α, можно найти время встречи $t_в$, а затем и координаты места встречи.)

Конечно, движение коршуна на самом деле может быть и другим (он ведь все-таки живой!). Но принци-



пиально решение задачи будет выглядеть точно так же. Только окончательные уравнения будут другими.

(Заметим, что похожий метод используется при наведении на цель движущихся ракет. Локатор непрерывно определяет координаты цели, ЭВМ — решая соответствующие уравнения, аналогичные нашим,— находит точку встречи ракеты с целью и вносит коррективы в движение ракеты.)

Что же касается царевича Гвидона, то на самом деле совершенно не ясно, чем бы закончилась вся история, если бы он вместо того, чтобы действовать, начал действительно считать. А если говорить серьезно, то до сих пор остается абсолютной загадкой способность человека мгновенно оценивать столь большое число параметров (H, L, v_0, α) и действовать с такой великолепной точностью. Приходится признать, что вопрос о том, что такое меткость, с которого мы начали разговор, и вопрос о решении основной кинематической задачи — все-таки совершенно разные вопросы.

Е. Е. Городецкий

Абсолютная температура

Теплота! Казалось бы, нет другой такой области физики, где фундаментальные идеи о строении вещества (все тела состоят из взаимодействующих друг с другом молекул, которые находятся в непрестанном движении) касались бы так тесно наших непосредственных ощущений. Но как долог и мучителен был путь понимания даже самых простых вещей. Например того, что́ происходит при нагревании или остывании тел, при контакте двух тел с разными температурами и т. п.

В этой заметке мы коснемся лишь двух основных моментов современного представления о тепловых явлениях с точки зрения молекулярного строения вещества.

Выделим небольшую, но все же макроскопическую часть какого-нибудь тела. Небольшую — это значит, что размеры выделенной области гораздо меньше размеров всего тела. Это нам нужно для того, чтобы в случаях, когда температура меняется вдоль тела, на протяжении нашей области ее всюду можно было бы считать одинаковой. С другой стороны, мы сказали, что область должна быть макроскопической. Это означает, что, несмотря на небольшие размеры, число частиц в ней должно быть все-таки очень большим.

Молекулы, заполняющие выделенную область, движутся с самыми разными скоростями, сталкиваются друг с другом, некоторые из них покидают область, а на их место приходят другие — в общем, идет сложная, можно даже сказать, суетливая жизнь. Понять эту безумную молекулярную «пляску», наблюдая за каждой молекулой отдельно,— занятие совершенно безнадежное, да и ненужное: мы все равно не знали бы, что делать с такой гигантской информацией. К счастью, именно сложность и запутанность молекулярного движения позволяют подойти к описанию ситуации совсем с другой стороны — с точки зрения теории вероятностей.

Предсказания этой теории очень специфичны. Она не может, например, предсказать, кто и с каким временем победит в десятикилометровой лыжной гонке на предстоящих в 1992 году Олимпийских играх. Однако, просмотрев результаты всех предыдущих игр, можно более или менее надежно сказать, что 1—2 % участников гонки покажут время, меньшее 29 минут, а 60—70 % уложатся в интервал от 29 до 31 минуты и т. д. Разумеется, на школьных соревнованиях уровень и распределение результатов будет другим. Вполне очевидно, что ранг соревнований определяет средний уровень результатов (и в этом смысле, как будет видно из дальнейшего, он похож на температуру).

Теория вероятностей, почти ничего не зная о единичных событиях, надежно предсказывает исход большого числа однотипных или повторяющихся событий. Понятно поэтому, что хаотически движущиеся и взаимодействующие друг с другом молекулы являются идеальным объектом для такой теории (теперь ясно, зачем число молекул в выделенной области должно было большим).

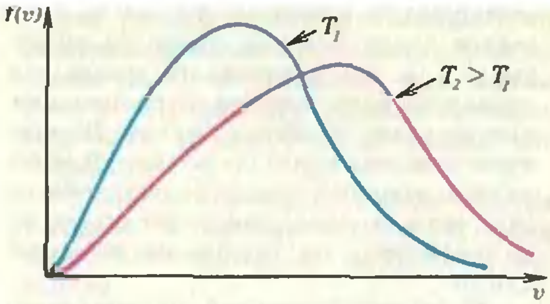
Обсудим такой вопрос: какая часть всех молекул, заполняющих нашу область, имеет скорость, близкую к какой-нибудь заданной скорости v (или, говоря иначе, имеет скорость в интервале от v до $v+\Delta v$)? Для того чтобы сформулировать вопрос точнее, обозначим число частиц, имеющих скорость в данном интервале, через $\Delta N(v)$, а полное число частиц, находящихся в выделенной области, через N. Тогда нам нужно найти отношение $\Delta N(v)/N$.

Если величина допустимого разброса скоростей Δv не слишком велика, то понятно, что $\Delta N(v)$ должно быть пропорционально Δv:

$$\frac{\Delta N(v)}{N}=f(v)\Delta v.$$

Величина $f(v)$ называется функцией распределения молекул по скоростям и является важнейшей характеристикой любой макроскопической системы. Зная $f(v)$, мы можем оценить, сколько процентов всех молекул движутся со скоростью, близкой к такой-то скорости, а сколько — к такой и т. д.

Напомним, что мы начали заметку с вопроса о том, что́ происходит с системой тел на уровне молекул в процессе выравнивания температур. Так вот, оказывается, что пока система не находится в равновесии, столкно-



вения молекул приводят к постоянному изменению функции распределения $f(v)$, но после того как равновесие установилось, столкновения молекул больше не влияют на эту функцию. Явный вид равновесной функции $f(v)$ был найден теоретически в 1860 году выдающимся английским физиком Максвеллом.*)

Как следует из теории (внимание! это первое главное утверждение заметки), функция $f(v)$ в равновесии полностью *определяется температурой* системы T. Этот факт, если вдуматься, кажется странным. Он означает, что система всегда сама придет в нужное состояние, независимо от того, что с ней было в начальный момент времени, лишь бы температура ее была задана. Вы можете «взболтать» газ как угодно, но, будучи предоставленным сам себе, он всегда придет в одно и то же состояние и начисто забудет о том, что с ним было вначале.

На рисунке представлены графики функции $f(v)$ для двух температур T_1 и T_2 ($T_2 > T_1$). Попробуйте самостоятельно объяснить факт «смещения» графика при изменении температуры.

Итак, температура играет основополагающую роль в определении теплового равновесия тел.

Из сказанного становится понятной и еще одна чрезвычайно важная вещь. Раз мы знаем, какая доля молекул с какой скоростью движется, мы *можем вычислять* средние характеристики движения молекул. В частности, среднюю энергию поступательного движения одной молекулы:

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2}kT.$$

Основываясь на этой формуле, часто говорят, что температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул. Это не совсем так. Дело в том, что коэффициент «$^3/_2$», стоящий в выражении для энергии, совершенно не случаен и имеет глубокий смысл. Число «3» связано с тем, что в трехмерном пространстве для определения положения центра масс молекулы необходимо знать три его координаты. Или, говоря иначе, каждая молекула имеет три степени свободы ее поступательного движения. Но, *кроме поступательных*, у молекулы могут быть и другие степени свободы: вращательные, колебательные и т. п.

Оказывается, зная функцию *распределения* молекул по скоростям, можно показать (внимание! это второе главное утверждение заметки), что на любую степень свободы приходится в среднем энергия $^1/_2\,kT$. (Отсюда и получается коэффициент «$^3/_2$» в выражении для средней кинетической энергии поступательного движения молекул.) Другими словами, температура — не мера кинетической энергии поступательного движения молекул, а мера энергии, приходящейся на одну любую степень свободы системы.

Е. Е. Городецкий

*) См. статью Т. С. Петровой «Из жизни молекул», опубликованную в седьмом номере «Кванта» за этот год. (*Примеч. ред.*)

Лаборатория „Кванта"

Жидкий азот и медная гайка

В. В. УТЕШЕВ

Однажды в лаборатории мы наблюдали, как вскипает жидкий азот вокруг упавшей в него медной гайки. Процесс кипения протекал очень интересно и совсем не так, как можно было бы ожидать. Жидкий азот начинал кипеть сразу после погружения в него гайки, но через несколько секунд, перед самым завершением, кипение вдруг резко усиливалось.

Понятно, что причиной кипения является большая разница начальных температур гайки и азота. Но возникает вопрос: почему охлаждение гайки происходит не монотонно, не плавно, как можно было предположить, а имеет два режима разной интенсивности, причем смена режимов происходит очень быстро (скачком)?

Любой процесс кипения всегда связан с передачей тепла. В нашем случае — от гайки к азоту. Поэтому ответ на вопрос о характере кипения можно найти, проанализировав механизм теплопередачи.

Как известно, тепло от одного тела к другому может передаваться разными способами, например с помощью теплопроводности или конвекции. При конвекции перенос тепла осуществляется путем перемещения и перемешивания больших масс вещества, нагретых до разных температур. В противоположность конвекции, при теплопроводности передача тепла не сопровождается перемещением вещества.

В природе конвективные явления встречаются буквально на каждом шагу. Иногда их стараются активно использовать, иногда, наоборот, от них хотят избавиться. Знаете ли вы, например, как устроено осиное гнездо? Это очень сложный лабиринт из множества листиков и различных пленок. Оказывается, такая конструкция максимально избавляет гнездо от конвективных потоков и тем самым хорошо сохраняет тепло. Правда, можно сказать, что существует еще теплопроводность воздуха. Но она, как показывает опыт, играет ничтожную роль в теплопередаче (по сравнению с конвекцией).

В технике, прежде всего во всякого рода охлаждающих системах, конвекция чаще всего играет положительную роль, и ее всячески стараются усилить. В обычном автомобиле, например, именно для этого используется радиатор. При движении автомобиля возникает процесс *искусственной воздушной конвекции* — проникая через радиатор, движущиеся массы воздуха «снимают» тепло с нагретого двигателя.

Самые интенсивные конвективные явления на Земле происходят *в атмосфере*. Температура воздуха на различных высотах меняется в очень широких пределах. Более теплые области воздуха имеют меньшую плотность и поэтому поднимаются вверх, а более холодные, наоборот, опускаются, в результате чего происходит конвекция. Любопытно, что в невесомости разность температур различных воздушных областей не приводит к естественной конвекции, поэтому, например, спичка в космическом корабле не может гореть обычным способом. Она загорается и сразу же гаснет, так как нет конвективного подтока кислорода, необходимого для горения. Однако можно создать искусственную конвекцию, скажем, слегка дуя в сторону спички, и таким образом поддерживать горение.

В физике для количественной характеристики процессов теплопередачи вводится специальная физическая величина — плотность потока тепловой энергии (тепла). Это энергия, проходящая через единицу площади за единицу времени. Для конвекции плотность потока тепла W непосредственно связана с плотностью потока вещества q, т. е. с массой вещества, проходящего через единицу площади за единицу времени: $W \sim q$. При теплопроводности переноса вещества нет, и плотность потока тепла определяется тем, как быстро изменяется температура тела от одного его участка к другому: $W \sim \Delta T/\Delta x$ (здесь T — температура, x — координата).

Теперь вернемся к случаю с гайкой и жидким азотом. Сначала объясним его *теоретически*.

Тепло в гайке распространяется по принципу обычной теплопроводности. В азоте же тепло передается с помощью конвекции за счет движущихся масс испарившегося азота. Но ни один из этих способов теплопередачи не объясняет оригинальный характер кипения жидкого азота. В чем же дело?

Оказывается, самое интересное происходит в месте контакта гайки с жидким азотом, где температура изменяется скачком. На этом контакте *плотность потока энергии* можно представить в виде: $W = \alpha\Delta T$, где α — некий эффективный коэффициент теплопередачи, а ΔT — тот самый скачок температур между азотом и гайкой. Описанным в начале статьи двум режимам кипения соответствуют различные значения α, и переход от одного значения к другому происходит скачком в тот момент, когда температура гайки достигает некоторого определенного значения.

Теперь попробуем разобраться в механизме этого интересного явления чуть подробнее.

При соприкосновении гайки, имеющей температуру 20 °С (293 К), с жидким азотом, его температура —196 °С (77 К), вокруг гайки создается «шуба» из газообразного азота. Этому процессу соответствует определенное значение плотности теплового потока от

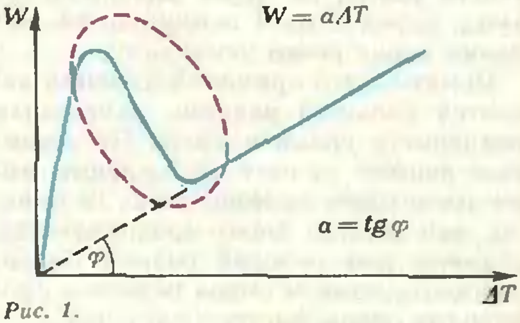


Рис. 1.

Рис. 2.

гайки к жидкому азоту. Когда гайка достаточно охладится и теплового потока не будет хватать для поддержания «шубы», «шуба» распадется (скачком) и сменится большим числом отдельных пузырьков газообразного азота. Теперь часть тепла будет уходить от гайки по-прежнему через газ, а часть — через жидкий азот, который проводит тепло лучше газообразного. Таким образом, здесь наблюдается некая парадоксальная ситуация, когда поток тепла увеличивается с уменьшением разности температур. И происходит это благодаря сильному скачку коэффициента α. (При возрастании потока «шуба» не образуется потому, что температура гайки уже достаточно упала.)

На рисунках 1 и 2 приведены графики зависимости W от ΔT и от времени t. В обведенной области α терпит скачок.

Заметим, что такое же необычное кипение в принципе можно наблюдать и с другими веществами. Например, вместо жидкого азота можно взять обычную воду и бросить в нее сильно нагретую медную гайку. После погружения гайки в воду тоже образуется «шуба», но она распадается так быстро, что заметить смену режимов кипения практически невозможно. Различие в длительности процесса кипения связано с различием в теплоемкостях. Вода по сравнению с жидким азотом имеет огромную теплоемкость и поэтому кипит значительно меньшее время.

Вместо медной гайки можно использовать и какое-нибудь другое нагретое тело. Медь же хороша тем, что имеет большую теплопроводность, вследствие чего гайка успевает остывать однородно по всему объему, создавая необходимые условия для образования «шубы».

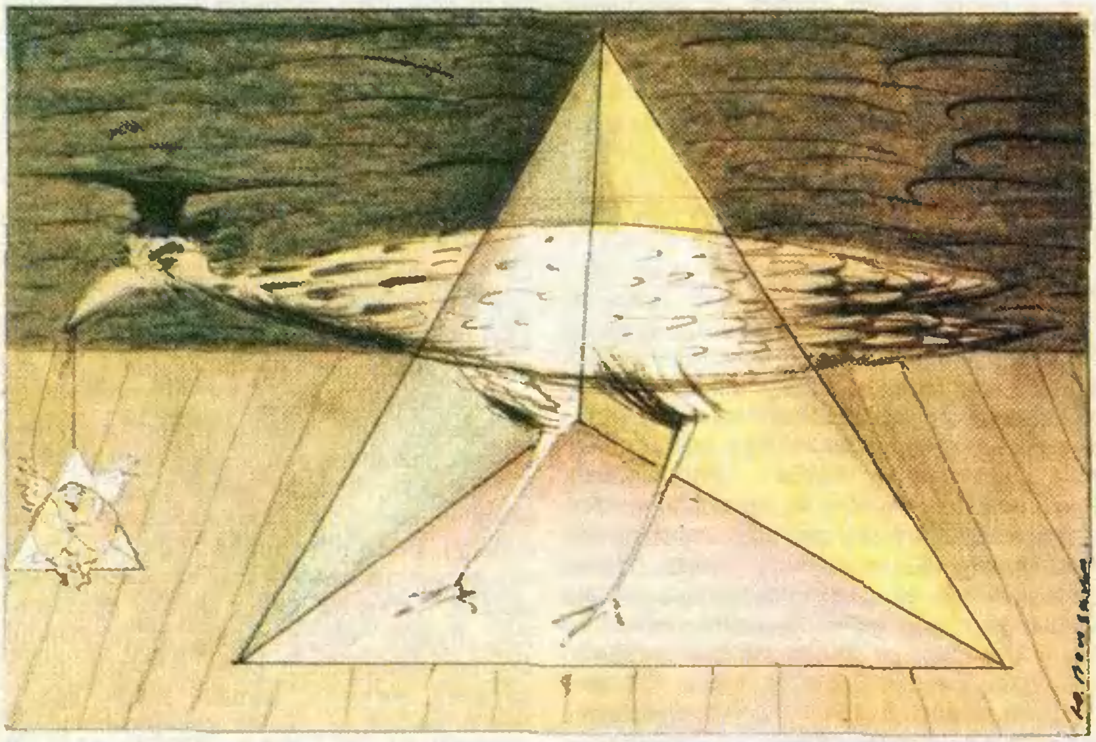
Совершенно аналогичное явление смены режимов теплопередачи можно наблюдать, бросив несколько капель воды на раскаленную сковороду (или плиту). Если сковорода горячая, но ее температура все же не очень большая, капли, упав на поверхность сковороды, будут неподвижны и довольно быстро испарятся. Если же сковорода нагрета сильно, капли воды сразу после падения на ее поверхность соберутся в шарики, которые будут «бегать» по сковороде довольно долго. Это произойдет из-за того, что между сковородой и каплями возникнет паровая подушка (то же самое, что и «шуба» в случае с гайкой), которая затруднит теплопередачу от сковороды к капле и увеличит тем самым время жизни капли.*)

Итак, теплопередача — такое, казалось бы, простое и всем знакомое явление, на самом деле скрывает в себе большие возможности для наблюдения и исследования.

*) Поведение таких «бегающих» капель подробно описано в статье М. Голубева и А. Кагаленко «Капля на горячей поверхности» («Квант», 1977, № 12) и в статье А. Лушкова и Ю. Лужкова «Звезды» из водяной капли» («Квант», 1978, № 7).

Дорогие читатели!

В будущем, 1989 году журнал «Квант», как и прежде, будет распространяться только по подписке. Оформить годовую подписку можно до 1 ноября 1988 года. Подписка принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.



Практикум абитуриента

Из геометрии тетраэдра

В. Э. МАТИЗЕН, В. Н. ДУБРОВСКИЙ

В этой статье речь пойдет главным образом о признаках принадлежности тетраэдра к тому или другому классу. Примеры таких классов — *правильные треугольные пирамиды* и *правильные тетраэдры*, которые можно считать аналогами, соответственно, равнобедренных и равносторонних треугольников. Но в отличие от планиметрии, где можно назвать еще разве что прямоугольные треугольники, в стереометрии интересные классы тетраэдров этим отнюдь не исчерпываются. О двух таких классах уже рассказывалось в «Кванте» (см. «Квант», 1983, № 7, с. 34): это классы *равногранных* и *каркасных* тетраэдров. В класс равногранных тетраэдров входят тетраэдры, все грани которых равны между собой. В класс *каркасных тетраэдров* — *тетраэдры, все ребра которых касаются некоторой сферы*. В статье, опубликованной в 1983 году, обсуждались многочисленные признаки «равногранности» и «каркасности». Знакомство с ней для понимания дальнейшего необязательно (хотя и полезно): мы будем изучать свойства трех других классов тетраэдров.

Ортоцентрический тетраэдр

В отличие от треугольника, высоты которого всегда пересекаются в одной точке — *ортоцентре*, не всякий тетраэдр обладает аналогичным свойством (рис. 1). Тетраэдр, высоты которого пересекаются в одной точке, называется *ортоцентрическим*. Мы начнем изучение ортоцентрических тетраэдров с необходимых и достаточных условий ортоцентричности; каждое из них можно принять за определение ортоцентрического тетраэдра.

Итак, мы докажем эквивалентность следующих свойств тетраэдра:

O1. *Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке.*

O2. *Основания высот тетраэдра являются ортоцентрами граней.*

O3. *Каждые два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны.*

O4. *Суммы квадратов противоположных ребер тетраэдра равны.*

O5. *Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, равны* (эти отрезки называются *бимедианами*).

O6. *Произведения косинусов противоположных двугранных углов равны.*

O7. *Сумма квадратов площадей граней вчетверо меньше суммы квадратов произведений противоположных ребер.*

Обозначим через a, b, c, a_1, b_1, c_1 ребра тетраэдра $ABCD$ ($a=BC$, $a_1=DA$, $b=CA$, ...; рис. 2), через m_a, m_b, m_c — бимедианы (m_a соединяет середины ребер a и a_1 и т. д.); те же буквы обозначают длины соответствующих отрезков — из контекста будет ясно, что имеется в виду — отрезок или его длина. Величины двугранных углов тетраэдра при ребрах a, b, ... обозначим так: $\hat{a}$, $\hat{b}$, ... Сначала рассмотрим тетраэдр, который является ортоцентрическим как бы «наполовину», а именно, докажем равносильность следующих условий:

O1°. *высоты AA_1 и DD_1 пересекаются.*

O2°. *точка D_1 (проекция вершины D на грань ABC) лежит на высоте грани ABC, проведенной из вершины A (или на ее продолжении).*

O3°. *Ребра BC и AD (a и a_1) перпендикулярны.*

O4°. *Бимедианы m_b и m_c равны.*

O5°. $b^2+b_1^2=c^2+c_1^2$.

O6°. $\cos \hat{b} \cdot \cos \hat{b}_1=\cos \hat{c} \cdot \cos \hat{c}_1$.

Установить, что O1°⇔O2°⇔O3°, совсем легко: проектируя прямые AA_1 и AD на грань ABC, мы из теоремы о трех перпендикулярах получим, что каждое из этих трех утверждений эквивалентно перпендикулярности прямых AD_1 и BC (или, возможно, совпадению точек D_1 и A).

Теперь докажем, что O3°⇔O4°⇔O5°. Заметим, что каждые две бимедианы являются диагоналями параллелограмма (рис. 3), стороны которого, будучи средними линиями граней, параллельны двум противоположным ребрам тетраэдра и равны по длине половинам этих ребер. Условия O3° и O4°, т. е. $a \perp a_1$ и $m_b=m_c$, равносильны тому, что соответствующий параллелограмм — прямоугольник. Запишем для двух других аналогичных параллелограммов известное равенство параллелограмма (сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей): $b^2+b_1^2=2(m_c^2+m_a^2)$, $c^2+c_1^2=2(m_a^2+m_b^2)$. Из этих равенств сразу следует, что O4°⇔O5°.

Для доказательства того, что O6°⇔O1°, рассмотрим точки P и P' пересечения плоскостей ADD_1 и ADA_1 с прямой BC. Отношение $k(P)=BP:PC$ равно отношению $S_{AD_1B}:S_{AD_1C}$ площадей треугольников AD_1B и AD_1C (рис. 4). А так как эти треугольники являются проекциями граней ADB и ADC на плоскость ABC, для $k(P_1)$ получаем:

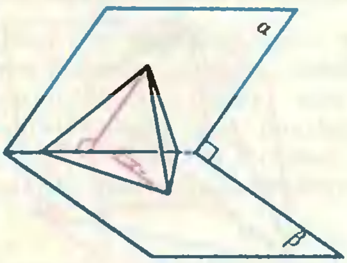


Рис. 1. Неортоцентрический тетраэдр (плоскости α и β перпендикулярны).

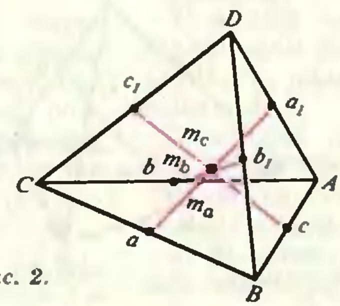


Рис. 2.

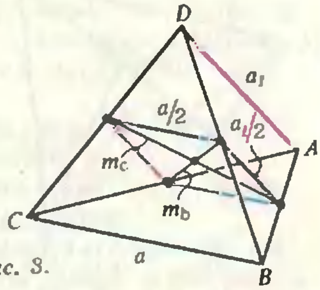


Рис. 3.

$$k(P)=\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}}\cdot\frac{\cos\hat{c}}{\cos\hat{b}}.$$

(Чтобы охватить и случай, когда угол $\hat{b}$ или угол $\hat{c}$ — тупой, будем под $k(P)$ понимать отношение **направленных** отрезков: $\vec{BP}=k(P)\cdot\vec{PC}$. Для точки P' справедлива аналогичная формула:

$$k(P')=\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}}\cdot\frac{\cos\hat{b}_1}{\cos\hat{c}_1}.$$

Условие $O1^\circ$ эквивалентно совпадению точек P и P' или равенству $k(P)=k(P')$, которое легко превратить в $O6^\circ$.

Из равносильности свойств $O1^\circ$ — $O6^\circ$ моментально следует равносильность $O1$ — $O6$. Заминка может возникнуть только, когда мы будем выводить $O1$ из какого-либо другого признака ортоцентричности. Из каждого из свойств $O2$ — $O6$ получается лишь, что для **любой** пары высот выполняется свойство $O1^\circ$ (т. е. любые две высоты пересекаются). Но отсюда уже следует $O1$, потому что, как легко видеть, несколько попарно пересекающихся прямых, не лежащих в одной плоскости, всегда пересекаются в одной точке.

Остается еще условие $O7$. Заметим, что если два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны, то их произведение, очевидно, равно учетверенной площади параллелограмма с вершинами в серединах остальных ребер; если же два противоположных ребра не перпендикулярны, то их произведение больше этой величины. Поэтому эквивалентность $O3$ и $O7$ следует из утверждения задачи М1070, включенной в «Задачник «Кванта» 10-го номера за 1987 год, согласно которому сумма квадратов площадей граней тетраэдра вчетверо больше суммы квадратов площадей трех таких параллелограммов.

Условия $O1$, $O2$, $O3$ можно заменить на формально более слабые. Докажите, что

1. *в $O2$ можно ограничиться только одной высотой, в $O3$ — двумя парами противоположных ребер, а в $O1$ потребовать, чтобы одна из высот пересекалась с двумя другими.*

Еще несколько свойств ортоцентрического тетраэдра связаны с общими перпендикулярами его скрещивающихся ребер. По аналогии с бимедианами мы будем называть их *бивысотами*. Докажите, что

2. *если каждая бивысота пересекается с одной из высот тетраэдра, то он ортоцентрический;*

3. *в ортоцентрическом тетраэдре бивысоты пересекаются в одной точке (в ортоцентре).*

А что можно сказать о тетраэдре, бивысоты которого пересекаются в одной точке? Верно ли, что он будет ортоцентрическим?

Некоторые свойства ортоцентрического тетраэдра удобно доказывать

С помощью скалярного произведения

Зададим направления на ребрах и бимедианах тетраэдра $ABCD$, как показано на рисунке 5; получившиеся векторы будем обозначать теми же буквами: $\bar{a}=\vec{BC}$, $\bar{a}_1=\vec{DA}$ и т. д. Выпишем несколько полезных тождеств, справедливых для **любых** четырех

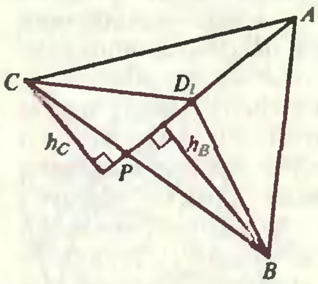


Рис. 4. $\dfrac{S_{AD_1B}}{S_{AD_1C}}=\dfrac{AD_1\cdot h_B}{AD_1\cdot h_C}=\dfrac{BP}{PC}$.

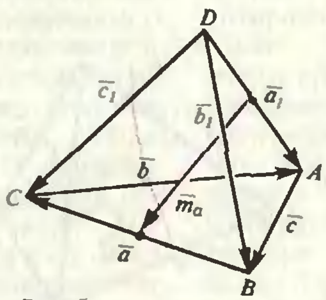


Рис. 5.

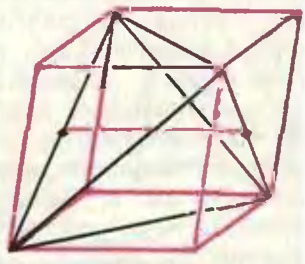


Рис. 6.

точек A, B, C, D:

$$\bar{a}\cdot\bar{a}_1+\bar{b}\cdot\bar{b}_1+\bar{c}\cdot\bar{c}_1=0; \qquad (1)$$
$$2\bar{m}_a=\bar{b}_1-\bar{b}=\bar{c}_1+\bar{c}; \qquad (2)$$
$$m_a^2-m_b^2=\bar{c}\cdot\bar{c}_1; \qquad (3)$$
$$2\bar{c}\cdot\bar{c}_1=b^2+b_1^2-a^2-a_1^2; \qquad (4)$$
$$4m_a^2=b^2+b_1^2+c^2+c_1^2-a^2-a_1^2. \qquad (5)$$

Доказательства этих тождеств сводятся к несложным алгебраическим преобразованиям, и мы оставляем их читателям. Вот два примера геометрических следствий этих тождеств; из (1) вытекает, что высоты треугольника пересекаются в одной точке (возьмите в качестве D точку пересечения двух высот треугольника ABC); из (3), (4) и (5) — равносильность условий О3, О4 и О5 ортоцентричности тетраэдра. Другие примеры можно найти среди следующих задач:

Докажите, что

4. *каждое из следующих утверждений можно взять за определение ортоцентрического тетраэдра:*

а) $\bar{a}\cdot\bar{a}_1=\bar{b}\cdot\bar{b}_1=\bar{c}\cdot\bar{c}_1$,

б) *углы между противоположными ребрами равны*),*

в) $\bar{a}_1\cdot\bar{b}_1=\bar{b}_1\cdot\bar{c}_1=\bar{c}_1\cdot\bar{a}_1$;

5. *в ортоцентрическом тетраэдре плоские углы при трех вершинах острые, а при четвертой — либо все острые, либо все тупые, либо все прямые, при этом все двугранные углы при четвертой вершине — либо все острые, либо все тупые, либо все прямые, а двугранные углы при остальных вершинах — острые;*

6. *если EF — общий перпендикуляр ребер AD и BC ортоцентрического тетраэдра $ABCD$ ($E\in AD$, $F\in BC$), то*

$$\vec{EF}^2=\vec{AE}\cdot\vec{ED}+\vec{BF}\cdot\vec{FC}.$$

Описанный параллелепипед

Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Эти плоскости ограничивают так называемый *описанный параллелепипед тетраэдра* (рис. 6). Некоторые свойства тетраэдра становятся более наглядными, если переформулировать их для параллелепипеда. Например, каждое из определений О3, О4, О5 ортоцентрического тетраэдра равносильно тому, что

О8. *Ребра описанного параллелепипеда равны,*

т. е. все его грани — ромбы. (Для доказательства надо только заметить, что ребра тетраэдра — это диагонали граней параллелепипеда, а бимедианы тетраэдра равны и параллельны ребрам параллелепипеда,— рис. 6.) Условие же равенства всех граней описанного параллелепипеда (а тем самым и его ребер) характеризует правильные треугольные пирамиды. Еще один вид тетраэдров — *равногранные* — можно определить так: их описанные параллелепипеды — прямоугольные. Кстати, сейчас мы сможем дать отрицательный ответ на вопрос, поставленный в конце первого раздела: тетраэдр, бивысоты которого пересекаются в одной точке, не обязательно ортоцетрический. Равногранный тетраэдр тоже обладает этим свойством, поскольку бивысоты равногранного тетраэдра совпадают с бимедианами и пересекаются в центре его описанного параллелепипеда. Еще один пример можно получить из прямого параллелепипеда, в основании которого ромб,— у соответствующего тетраэдра два противоположных ребра перпендикулярны, а остальные равны.

Другие примеры тетраэдров, у которых бивысоты пересекались бы в одной точке, нам не известны. Также не известно, есть ли какие-либо общие условия, при которых это свойство выполняется. Возможно, их найдут читатели.

Докажите, что

7. *между элементами тетраэдра и элементами его описанного параллелепипеда имеются следующие соотношения:*

а) *высоты параллелепипеда равны бивысотам тетраэдра,*

б) *объем параллелепипеда втрое больше объема тетраэдра,*

в) *диагонали параллелепипеда пересекают грани тетраэдра в их центрах тяжести и делятся ими в отно-*

*) Пункты а) и б) составляют задачу М1039, решение которой опубликовано в «Кванте» № 8 за 1987 год.

шении 2:1, считая от конца, совпадающего с вершиной тетраэдра;

8. *если ABCD — ортоцентрический тетраэдр, H — его ортоцентр, O и R — центр и радиус описанной около этого тетраэдра сферы, m — длина бимедианы, то:*

а) *перпендикуляр, опущенный на грань BCD из вершины описанного параллелепипеда, противоположной A, проходит через O;*

б) *точки O и H симметричны относительно центра тяжести тетраэдра;*

в) $OH^2=4R^2-3m^2$;

г) *середины ребер и основания бивысот тетраэдра лежат на одной сфере;*

д) *центры тяжести и ортоцентры граней лежат на одной сфере.*

Инцентрические тетраэдры

Отрезки, соединяющие центры тяжести граней тетраэдра с противоположными вершинами («медианы тетраэдра»), всегда пересекаются в одной точке (эта точка — центр тяжести тетраэдра). Если в этом условии заменить *центры тяжести* граней на *ортоцентры* граней, то оно превратится в новое определение ортоцентрического тетраэдра (проверьте!). Если же заменить их на *центры вписанных в грани окружностей*, называемые иногда *инцентрами*, мы получим определение нового класса так называемых *инцентрических тетраэдров*.

Признаки класса инцентрических тетраэдров тоже довольно интересны:

И1. Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами окружностей, вписанных в противоположные грани, пересекаются в одной точке.

И2. Биссектрисы углов двух граней, проведенные к общему ребру этих граней, имеют общее основание.

И3. Произведения длин противоположных ребер равны.

И4. Треугольник, образованный вторыми точками пересечения трех ребер, выходящих из одной вершины, с любой сферой, проходящей через три конца этих ребер, является равносторонним (рис. 7).

Проверка эквивалентности этих условий не сложна, и мы оставляем ее читателям, ограничившись только одним указанием: *для любого тетраэдра стороны треугольника, о котором говорится в условии И4, пропорциональны произведениям противоположных ребер тетраэдра.*

Докажите еще два свойства инцентрических тетраэдров и выясните, можно ли принять их за определения этого класса:

9. *косинус угла между одной парой противоположных ребер тетраэдра равен сумме косинусов двух углов между двумя другими парами его противоположных ребер;*

10. *прямые, по которым плоскости трех граней тетраэдра пересекаются с плоскостью, касающейся его описанной сферы в общей вершине этих граней, образуют друг с другом углы по 60°.*

Соразмерные тетраэдры

Последний класс тетраэдров, с которым мы хотим познакомить читателей,— это класс *соразмерных тетраэдров*. Соразмерными мы называем тетраэдры, у которых

С1. *Бивысоты равны.*

Это определение можно заменить любым из следующих:

С2. *Проекция тетраэдра на плоскость, перпендикулярную любой бимедиане, есть ромб.*

С3. *Грани описанного параллелепипеда равновелики.*

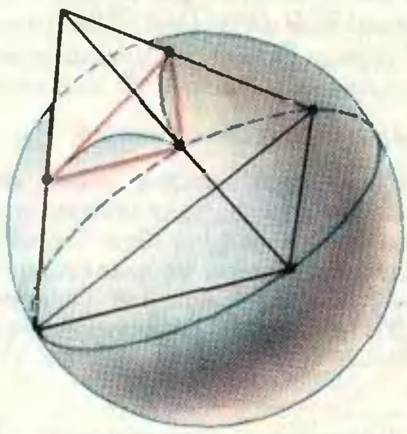


Рис. 7.

C4. $4a^2a_1^2-(b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)^2=4b^2b_1^2-(c^2+c_1^2-a^2-a_1^2)^2=4c^2c_1^2-(a^2+a_1^2-b^2-b_1^2)^2$, *где a и a_1, b и b_1, c и c_1 — длины противоположных ребер.*

Для доказательства эквивалентности определений $C1$ — $C4$ достаточно заметить, что бивысоты тетраэдра равны высотам параллелограмма, являющегося его проекцией, упоминавшейся в $C2$, и высотам описанного параллелепипеда и что квадрат площади грани параллелепипеда, содержащей, скажем, ребро c, равен $(c^2c_1^2-(\bar{c}\cdot\bar{c}_1)^2/4$, а скалярное произведение $c\cdot c_1$ выражается через ребра тетраэдра по формуле (4).

Добавим сюда еще два легко доказываемых условия соразмерности:

C5. Для каждой пары противоположных ребер тетраэдра плоскости, проведенные через одно из них и середину второго, перпендикулярны.

C6. В описанный параллелепипед соразмерного тетраэдра можно вписать сферу.

Пересечения классов. Правильные пирамиды

Мы рассмотрели три класса тетраэдров. Про каждый из них можно сказать, что он определяется двумя равенствами (см. *O5*, *И3*, *C4*). Также двумя равенствами ($a+a_1=b+b_1=c+c_1$) определяются упомянутые в начале статьи каркасные тетраэдры. Равногранные же тетраэдры определяются тремя равенствами ($a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$), а хорошо знакомые всем правильные треугольные пирамиды определяются четырьмя равенствами ($a=b=c$, $a_1=b_1=c_1$). У правильного тетраэдра все ребра равны — пять равенств. Можно ли получить какие-то новые виды тетраэдров, пересекая названные классы? К сожалению, нет.

Докажите, что

11. *равногранные тетраэдры в пересечении с любым другим классом дают правильные тетраэдры, а пересечение любого набора из остальных шести классов — правильные пирамиды;*

12. *каждое из следующих условий, за исключением одного (какого?) определяет правильную пирамиду:*

1) $AB=BC=CA$, $\angle DAB=\angle DBC=\angle DCA$

(здесь треугольник ABC — основание, точка D — вершина пирамиды);

2) *существует сфера, касающаяся сторон основания в их серединах и проходящая через середины боковых ребер;*

существует сфера, касающаяся боковых граней в их

3) *центрах тяжести,*

4) *центрах вписанных окружностей,*

5) *центрах описанных окружностей,*

6) *ортоцентрах.*

Конкурсные задачи

Для тех, кто готовится к поступлению в вуз, мы предлагаем несколько задач приемных экзаменов разных лет на механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ (формулировки незначительно изменены). Все эти задачи прямо или косвенно связаны с темой нашей статьи.

13. *В тетраэдре $SABC$ известны плоские углы при вершине S: $\angle BSC=90^\circ$, $\angle ASC=\angle ASB=60^\circ$. Вершины A, S и середины ребер SB, SC, AB, AC лежат на сфере радиусом 3. Докажите, что ребро SA — ее диаметр и найдите объем тетраэдра.*

14. *В тетраэдре $SABC$ середины всех ребер лежат на сфере радиусом 2, $AB=3$, $AC=4$. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC. Найдите объем пирамиды.*

15. *В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD перпендикулярны, а ребра AC и BD перпендикулярны и равны между собой. Все ребра касаются некоторого шара. Найдите его радиус, если $BC=a$.*

16. *В пирамиде $SABC$ произведения длин ребер, выходящих из каждой вершины, равны одному и тому же числу. Величина угла между ребром SA и основанием ABC равна $\arcsin 4/\sqrt{21}$, а расстояние между ребрами SA и AB равно 1. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если известно, что она не менее 4, а $3SA^2+SC^2=3SB^2$.*

17. *В пирамиде $SABC$ площадь грани ASB равна $3\sqrt{7}/4$, угол BCS равен $\operatorname{arctg}\sqrt{231}/37$, $AS=SB$ и $SC\cdot AC=20$. Известно, то перпендикуляры к граням, восставленные из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке. Найдите объем пирамиды.*

Олимпиады

Задачи LI Московской городской математической олимпиады

28 февраля 1988 года в Московском государственном университете состоялся заключительный тур LI Московской городской математической олимпиады. В нем участвовали 654 школьника 7—10 классов. Ниже приводятся задачи этого тура (на их решение отводилось по 4 часа).

7 класс

1. Докажите, что при простых $p>7$ число p^4-1 делится на 240.

2. На серединах ребер AB и $B'C'$ куба $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки M и P. Изобразите на грани $BCC'B'$ все точки, кратчайшие расстояния от которых по поверхности куба до точек M и P равны.

3. С помощью кронциркуля и линейки проведите через данную точку прямую, параллельную данной. Кронциркуль — это инструмент, похожий на циркуль, но на концах у него две иголки. Он позволяет переносить одинаковые расстояния, но не позволяет рисовать (процарапывать) окружности, дуги окружностей и делать засечки.

4. 20 телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более двух проводов. Нужно закрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона отходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой закраски?

8 класс

1. Над строкой из четырех чисел 1, 9, 8, 8 проделаем следующую операцию: между каждыми двумя соседними числами впишем число, которое получится в результате вычитания левого числа из правого. Над новой строкой проделаем ту же операцию и т. д. Найдите сумму чисел строки, которая получится после ста таких операций.

2. Имеется линейка без делений и специальный инструмент, позволяющий замерять расстояние между двумя произвольными точками и откладывать это расстояние на любой уже проведенной прямой от произвольной точки этой прямой. Как с помощью этих инструментов и карандаша разделить пополам данный отрезок?

3. Докажите, что ни одна четверка натуральных чисел x, y, z, t не удовлетворяет равенству $3x^4+5y^4+7z^4=11t^4$.

4. Даны четыре монеты, среди которых могут оказаться фальшивые. Известно, что настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Весы с одной чашкой показывают общий вес положенных на эту чашку монет. Найдите наименьшее количество взвешиваний, которые нужно сделать, чтобы наверняка определить, какие монеты являются фальшивыми, а какие — настоящими.

9 класс

1. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых выражаются целыми числами. Докажите, что произведение этих чисел не может оканчиваться на 1988.

2. Докажите, что при простых $p_i \geq 5$, $i=1, 2, \ldots, 24$ число $p_1^2+p_2^2+\ldots+p_{24}^2$ делится нацело на 24.

3. На плоскости даны две перпендикулярные прямые. С помощью кронциркуля укажите на плоскости три точки, являющиеся вершинами равностороннего треугольника. Кронциркуль — это инструмент, похожий на циркуль, но на концах у него две иголки. Он позволяет переносить одинаковые расстояния, но не позволяет рисовать (процарапывать) окружности, дуги окружностей и делать засечки.

4. Пусть x и y натуральные числа. Рассмотрим функцию

$$f(x, y)=\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}+y.$$

Докажите, что множеством значений $f(x, y)$ являются все натуральные числа, причем для любого натурального $i=f(x, y)$ числа x и y определяются однозначно.

5. 20 телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более трех проводов. Нужно закрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона отходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой закраски?

10 класс

1. Калькулятор выполняет пять операций: сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. Найдите формулу, по которой на этом калькуляторе можно определить наименьшее из двух произвольных чисел a и b.

2. Существует ли на координатной плоскости прямая, относительно которой симметричен график функции $y=2^x$?

3. Всякий ли параллелепипед можно рассечь плоскостью так, чтобы в сечении получился прямоугольник?

4. Имеется линейка без делений и эталон длины, позволяющий откладывать некоторое фиксированное расстояние на любой уже проведенной прямой от произвольной точки этой прямой. Как с помощью этих инструментов и карандаша провести какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой?

5. Возьмем пару натуральных чисел и разделим с остатком большее из них на меньшее (если числа равны, то также одно из них разделим на другое). Из полученных частного и остатка образуем новую пару чисел и проделаем с ней то же самое. Как только одно из чисел окажется равным нулю, прекратим вычисления. Докажите, что если начать с чисел, не превосходящих 1988, то более шести делений выполнить не удастся.

Задачи предложили: *В. Б. Алексеев* (7.4, 9.5), *С. Б. Гашков* (8.4), *И. Иновенков* (9.4), *С. В. Конягин* (10.5), *В. Родин* (9.1), *И. Н. Сергеев* (7.3, 8.1, 8.2, 8.3, 9.3, 10.1, 10.2, 10.3, 10.4), *А. Н. Соколихин* (7.1, 7.2, 9.2).

Публикацию подготовил *И. Н. Сергеев*

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

8 класс

1. Перпендикулярно к свободному концу рычага с осью вращения в точке O на расстоянии l_1 приложена сила F (рис. 1). Другой конец упирается в гладкую стенку на расстоянии l_2 от оси. Угол $\alpha=135°$. Найдите величину силы, действующей на ось.

2. По тонкой трубке без трения движутся вправо с одинаковыми скоростями четыре одинаковых маленьких шарика так, что расстояния между ними равны l_1, l_2, l_3 (рис. 2). Трубка закрыта пробкой. Как будут расположены и как будут двигаться шарики после того, как все соударения прекратятся? Удары шаров друг о друга и о пробку абсолютно упругие.

3. 1 кг льда и 1 кг легкоплавкого вещества, не смешивающегося с водой, при $t=-40$ °C помещены в теплоизолированный сосуд с нагревателем внутри. Нагреватель выделяет постоянную мощность. Зависимость температуры в сосуде от времени показана на рисунке 3. Удельная теплоемкость льда $c_л=2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), твердого вещества $c=10^3$ Дж/(кг·К). Найдите удельную теплоту плавления вещества и его удельную теплоемкость в расплавленном состоянии.

4. Посеребренная (зеркальная) изнутри стеклянная сфера имеет круглое отверстие с углом раствора 2α, в которое падает однородный параллельный пучок лучей, перпендикулярный плоскости отверстия (рис. 4). Часть лучей, претерпев *одно* отражение, выходит из сферы обратно через отверстие. Какую долю, по мощности, вышедший пучок составляет от вошедшего? α — произвольное.

9 класс

1. Три одинаковых массивных шара находятся на одной высоте над горизонтальной плоскостью (рис. 5). Первый шар насажен на невесомую спицу, конец которой закреплен в шарнире. Второй шар насажен на такую же спицу, но ее конец может без трения скользить по плоскости. Третий шар никак не взаимодействует с плоскостью. Шары одновременно начинают падать без начальной скорости. В каком порядке они упадут на плоскость?

2. Некто сконструировал педальный вертолет с очень малой массой и диаметром винта $d=8$ м. Сможет ли пилот массой $M=80$ кг взлететь на такой машине? (Сравните требуемую мощность с мощностью лошади.)

3. Горизонтальный цилиндр с поршнем наполнен воздухом, содержащим пары воды. В исходном состоянии его объем $V_0=1$ л, давление $p_0=10^5$ Па, температура $t_0=30$ °C. Если закрепить поршень и охлаждать цилиндр при постоянном объеме V_0, то при $t_1=10{,}5$ °C в нем выпадет роса. Можно поступить по-другому: оставить поршень свободным и охлаждать воздух из исходного состояния при постоянном давлении p_0. При какой температуре выпадет роса в этом случае? Зависимость плотности насыщенного водяного пара от температуры показана на рисунке 6.

4. Космическая станция, представляющая собой металлический шар радиусом $R=1$ м, находится в далеком космосе. В некоторый момент на борту включается «электронная пушка», испускающая в пространство пучок электронов с энергией $W=9\cdot10^4$ эВ. Сила тока в пучке $I=1$ мкА. Найдите напряженность электрического поля у поверхности корпуса станции через $\tau=1$ мин после включения «пушки». (В начальный момент времени $E=0$.)

10 класс

1. Грузик массой m падает с высоты h на площадку, закрепленную на пружине жесткостью k (рис. 7). Пружина и площадка невесомы, все движение происходит по вертикали. Нарисовать (со всеми подробностями!) графи-

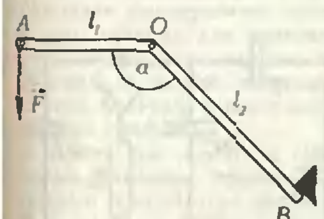


Рис. 1.

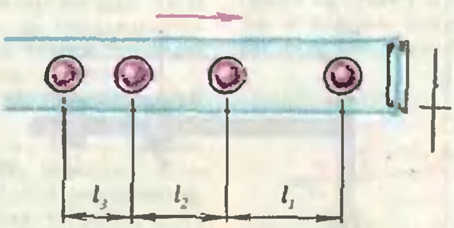


Рис. 2.

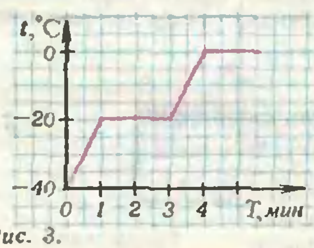


Рис. 3.

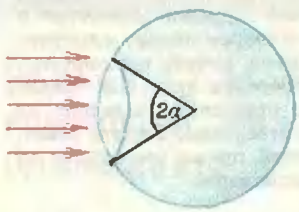


Рис. 4.

Рис. 5.

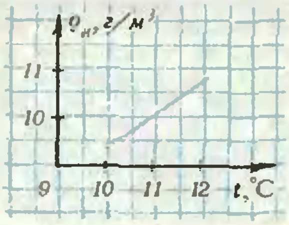


Рис. 6.

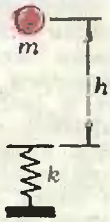


Рис. 7.

ки зависимости ускорения и скорости грузика от времени.

2. Если облучать медную пластину пучком ионов аргона Ar^+ (однозарядных), ускоренных разностью потенциалов $U=1000$ В, происходит интенсивное распыление меди с поверхности пластины. Однако пучок электронов, ускоренных той же разностью потенциалов, никакого распыления не вызывает. Почему так происходит? Ответ обоснуйте количественно. (Чтобы выбить атом меди из кристаллической решетки, ему надо придать энергию не менее $E_0=3{,}5$ эВ.)

3. Лазер излучает световые импульсы с энергией $W=0{,}1$ Дж. Частота повторения импульсов $f=10$ Гц. Коэффициент полезного действия лазера, определяемый как отношение излучаемой энергии к потребляемой, составляет $\eta=0{,}01$. Какой объем воды нужно прогнать за время $\tau=1$ ч через охлаждающую систему лазера, чтобы вода нагрелась не более чем на $\Delta t=10$ °С?

4. Близорукий человек смотрит через верхний край стекол своих очков на лампу дневного света, расположенную горизонтально на потолке перпендикулярно лучу зрения. При этом у верхней и нижней кромок лампы он видит цветную кайму. Какого цвета?

Публикацию подготовили
А. И. Буздин, С. С. Кротов

Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МВТУ им. Н. Э. Баумана

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана проводит в 1988/89 учебном году Всесоюзную заочную физико-математическую олимпиаду (с техническим приложением) для учащихся средних школ, ПТУ и техникумов.

Олимпиада проводится в два тура. Условия задач первого тура публикуются ниже. Условия задач второго тура будут рассылаться участникам олимпиады, допущенным ко второму туру по результатам первого.

Решения задач надо *оформить* в одной школьной тетради. На внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги с указанием подробного домашнего адреса (с почтовым индексом), фамилии, имени, отчества и места учебы. На внутреннюю сторону обложки наклейте справку с места учебы с указанием класса.

Тетрадь с решениями присылайте в большом конверте простой бандеролью по адресу: 107005 Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МВТУ им. Н. Э. Баумана, «Олимпиада — 88/89».

Задачи первого тура

1. Однородная балка (длиной $L=6{,}0$ м) одной частью ($l=1{,}0$ м) лежит на горизонтальной платформе, остальная часть балки свешивается с платформы (рис. 1). К концу свешивающейся части балки приложена вертикальная сила $\vec{F}$. Балка удерживается в горизонтальном положении, если значение силы находится в интервале от некоторого минимального значения F_{min} до максимального F_{max}. Найдите отношение F_{max}/F_{min}, если толщина балки значительно меньше ее длины.

2. Два одинаковых точечных грузика C и D массой m каждый соединены нерастяжимой нитью длиной l и могут скользить без трения по гладкому невесомому горизонтальному стержню (рис. 2). В начальный момент времени, когда груз C находился на вертикальной оси OZ, системе сообщили угловую скорость ω_0. Найдите натяжение нити в тот момент, когда груз C удалится от оси на расстояние $2l$.

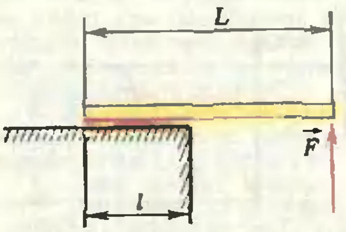


Рис. 1.

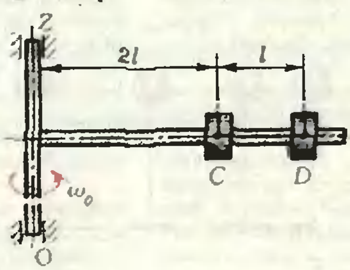


Рис. 2.

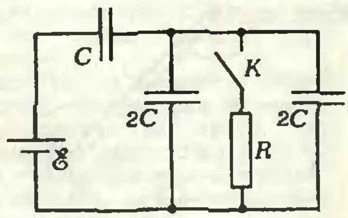


Рис. 3.

3. На орбитальной станции есть сосуд Дьюара с жидким азотом. Как получить «лед» из азота? Что может помешать получению такого «льда»?

4. Какое количество теплоты выделится на резисторе сопротивлением R после замыкания ключа K (рис. 3)? Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

5. Предложите вариант установки для получения электроэнергии, использующей разность температур на поверхности Луны во время лунного дня и лунной ночи. Сделайте возможные оценки и расчеты.

6. Электрон в начальный момент покоится в однородных и постоянных электрическом и магнитном полях. Определите траекторию движения электрона, если векторы индукции магнитного поля $\vec{B}$ ($B=0{,}05$ Тл) и напряженности электрического поля $\vec{E}$ ($E=10^4$ В/м) взаимно перпендикулярны.

7. Как разделить (сепарировать) смесь немагнитных материалов различной плотности с помощью магнитного поля?

8. При высоких температурах с поверхности металлов испускаются электроны. Выходу электрона препятствует наведенный им на поверхности металла положительный заряд. Какое внешнее «тянущее» электростатическое поле необходимо создать у поверхности металла, чтобы работа выхода уменьшилась на $\Delta A_{вых}=0{,}1$ эВ?

9. На аэродроме в пункте A находится почтовый самолет, имеющий на борту запас топлива, позволяющий пролететь расстояние, равное половине длины экватора. Какова область его действия, если, выполнив задание, он должен вернуться на другой аэродром — в пункт B? Можно считать, что Земля имеет форму шара.

10. Решите уравнение:

$$21x^2-6\pi x\sin x-4\sqrt{3}\,\pi x\operatorname{tg} x=$$
$$=\pi^2\cos^2 x-\frac{\pi}{\cos^2 x}.$$

Ответы, указания, решения

[redacted]о послать на Марс?
[redacted]. *«Квант» № 8)*

Упражнения

1. Пусть X — одна из наших шести планет. Тогда найдутся либо три планеты, дружные с X, либо три планеты, находящиеся с X в ссоре. В первом случае либо три планеты, дружные с X, все поссорились между собой — тогда они составляют тройку поссорившихся планет (рис. 1), либо какие-то две из них дружны и тогда они составляют вместе с X тройку дружных планет (рис. 2). Второй случай разбирается дословно так же, только нужно всюду заменить слово «дружные» словом «поссорившиеся» и наоборот.

2. Сосчитаем число линий, которые провел бы Громозека, объясняя этот случай. От каждого камня отходят 3 линии, всего камней 9, следовательно, линий всего будет $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3=13{,}5$. Получилось дробное число, так что этот случай невозможен.

3. В любом графе с n вершинами либо найдутся две вершины, связанные ребром, либо в нем никакие две вершины не связаны ребром. В первом случае мы имеем полный подграф с двумя вершинами, во втором — пустой подграф с n вершинами (совпадающий со всем графом).

4. Пусть $r(m-1,\ n)$ и $r(m,\ n-1)$ — четные числа. Возьмем произвольную вершину X в графе с $r(m-1,\ n)+r(m,\ n-1)-1$ вершинами. Если число вершин, связанных ребрами с X, не меньше чем $r(m-1,\ n)$, то дальше рассуждаем как в первом случае в доказательстве неравенства (1); если же число вершин, связанных ребрами с X, не больше чем $r(m-1,\ n)-2$, то рассуждаем дальше как во втором случае в доказательстве неравенства (1). Осталось рассмотреть случай, когда вершина X связана ребрами ровно с $r(m-1,\ n)-1$ другими вершинами. Но такое условие для всех вершин графа выполняться не может. Действительно, если каждая вершина графа соединена ребрами ровно с $r(m-1,\ n)-1$ вершинами, то число ребер равно $\frac{1}{2}(r(m-1,\ n)+$ $+r(m,\ n-1)-1)(r(m-1,\ n)-1)$ — дробное число (сравните с решением упражнения 2).

5. Покажем сначала, что $r(m,\ n)\geqslant r(n,\ m)$. Возьмем любой граф с $r(m,\ n)$ вершинами и произведем над ним такую операцию: сотрем все ребра, а вершины, которые не были соединены ребрами, соединим ребрами. В новом графе тоже $r(m,\ n)$ вершин, и, значит (по смыслу числа $r(m,\ n)$), в нем есть либо полный подграф с m вершинами, либо пустой подграф с n вершинами. Но полным подграфам нового графа отвечают пустые подграфы старого графа, а пустым подграфам нового графа отвечают полные подграфы старого графа. Значит,

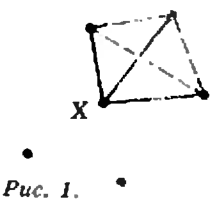


Рис. 1.

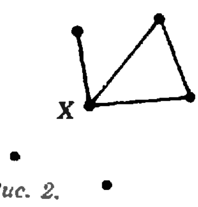


Рис. 2.

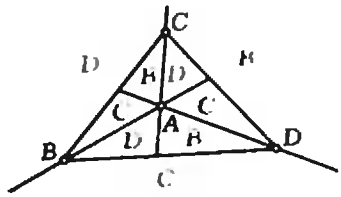


Рис. 3.

в старом графе (а это был произвольный граф с $r(m, n)$ вершинами!) есть либо пустой подграф с m вершинами, либо полный подграф с n вершинами. Таким образом, $r(m, n) \geqslant r(n, m)$. Точно так же доказывается, что $r(n, m) \geqslant r(m, n)$. Значит, $r(m, n) = r(n, m)$.

6. В самом деле, среди любых n космонавтов либо есть 3 космонавта, образующих слаженный экипаж, либо никакие 3 из n космонавтов не могут образовывать слаженный экипаж. Значит, $R(3, n) = n$. Точно так же можно доказать, что $R(m, 3) = m$. Докажем, что $R(m, n) = R(n, m)$. Возьмем произвольный отряд из $R(m, n)$ космонавтов.

Представим себе, что с отрядом произошло следующее: все тройки, которые составляли слаженный экипаж, теперь его не могут составить, а все тройки, которые не могли образовать слаженного экипажа, стали слаженными. Отряд по-прежнему состоит из $R(m, n)$ космонавтов, и потому в нем найдутся либо m человек, любая тройка из которых слаженная, либо n человек, никакие трое из которых не могут составить слаженного экипажа. Значит, в исходном отряде найдутся либо m человек, никакие трое из которых не могут составить слаженного экипажа, либо n человек, любая тройка из которых — слаженная. Следовательно, $R(m, n) \geqslant R(n, m)$. Точно так же $R(n, m) \geqslant R(m, n)$, и, таким образом, $R(m, n) = R(n, m)$.

7. Воспользуемся «принципом Дирихле». В самом деле, среди $m+n-1$ космонавтов всегда найдутся либо m космонавтов, каждый из которых способен спуститься на Марс, либо n космонавтов, каждый из которых не подходит для спуска на Марс.

8. Нам потребуются две леммы.

Лемма 1. $C(4) = 5$, т. е. *из любых пяти точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать четыре, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.*

Доказательство. Возьмем любые четыре из наших пяти точек. Если они не составляют выпуклого четырехугольника, то одна из них (скажем, A) лежит в треугольнике, образуемом тремя другими (скажем, BCD). Пятая точка лежит в одной из девяти областей, на которые делят плоскость линии, изображенные на рисунке 3. Мы исключаем из наших пяти точек точку, обозначение которой указано красным цветом на этой области, и получаем искомые четыре точки.

Лемма 2. *Если m точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, не являются вершинами выпуклого m-угольника, то некоторые четыре из этих точек не являются вершинами выпуклого четырехугольника.*

Доказательство. Возьмем *выпуклую оболочку P* наших точек (наименьший выпуклый многоугольник, который все их содержит). Пусть это l-угольник, причем $l < m$. Тогда по крайней мере одна из наших m точек, скажем A, лежит внутри P и, значит, содержится в одном из треугольников, образуемых вершинами многоугольника P, скажем в треугольнике BCD. Но тогда точки A, B, C, D не образуют выпуклого четырехугольника.

Из этой леммы немедленно следует, что *произвольные m точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и любые четыре из которых образуют выпуклый четырехугольник, являются вершинами выпуклого m-угольника.*

Теперь докажем теорему Эрдёша — Секереша. Ясно, что $C(3) = 3$, и мы доказали, что $C(4) = 5$. Пусть теперь $m > 4$. Рассмотрим произвольное множество из $R(4; m, 5)$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Поставим в соответствие каждой точке космонавта и условимся, что четыре космонавта составляют слаженный экипаж тогда и только тогда, когда соответствующие четыре точки являются вершинами выпуклого четырехугольника. Тогда по лемме 1 среди любых пяти космонавтов найдутся четыре, составляющие слаженный экипаж. По определению числа $R(4; m, 5)$, тогда среди наших $R(4; m, 5)$ космонавтов найдутся m космонавтов, среди которых каждая четверка космонавтов образует слаженный экипаж. Это значит, что найдутся m точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, любые четыре из которых образуют выпуклый четырехугольник. Но, как было получено из леммы 2, тогда эти m точек являются вершинами выпуклого m-угольника. Значит, $C(m) = R(4; m, 5)$, и теорема доказана.

Задачи

1. Сформулируем эту задачу на языке графов: *докажите, что в полном графе из 17 вершин, ребра которого раскрашены в три цвета, найдутся 3 вершины, соединенные между собой ребрами одного цвета.*

Возьмем произвольную вершину X графа. Из нее выходят 16 ребер, которые раскрашены в три цвета, следовательно, среди них есть шесть ребер одного (скажем синего) цвета. Если какие-то две из шести вершин, соединенных с X синими ребрами, соединены между собой также синим ребром, то эти две вершины и вершина X — искомые. Если никакие две из шести вершин, соединенных с X синими ребрами, не соединены между собой синим ребром, то мы получаем полный граф из шести вершин с ребрами двух цветов. Для завершения доказательства нужно воспользоваться упражнением 1.

2. Так как $R(3; 4, 4) \leqslant 19$, то среди 19 кругов на плоскости таких, что среди любых четырех какие-то три имеют общую точку, найдутся четыре, любые три из которых имеют общую точку. Докажем, что существует точка X, общая для этих четырех кругов. Пусть точка A — общая для первого, второго и третьего кругов; точка B — общая для первого, второго и четвертого кругов; точка C — общая для первого, третьего и четвертого кругов; точка D — общая для второго, третьего и четвертого кругов.

Можно считать, что точки A, B, C, D различны (если, скажем, $A=B$, то A — искомая точка).

Случай 1. *Точки A, B, C, D образуют выпуклый четырехугольник.* В этом случае точка пересечения его диагоналей — искомая.

Случай 2. *Выпуклая оболочка точек A, B, C, D — треугольник.* Тогда та из точек A, B, C, D, которая лежит внутри этого треугольника,— искомая.

Случай 3. *Точки A, B, C, D лежат на одной прямой.* В этом случае искомой является любая точка прямой, по одну и по другую сторону от которой на прямой лежат по две из точек A, B, C, D.

3. Пусть натуральные числа 1, ..., 66 покрашены в четыре цвета. Возьмем полный граф с 66 вершинами и занумеруем их натуральными числами от 1 до 66. Раскраску ребер графа произведем по следующему правилу: ребро, соединяющее вершины с номерами i и j, покрасим в один цвет с числом $|i-j|$ $(1\leqslant i,\ j\leqslant 66)$. Теперь убедимся, что в этом графе найдутся три вершины, соединенные ребрами одного цвета. Обозначим одну из вершин через X. Из нее выходит $65=16\cdot 4+1$ ребер четырех цветов, следовательно, среди них найдется семнадцать одного цвета, например синего. Если какие-то две из вершин, соединенных с вершиной X ребрами синего цвета, также соединены между собой ребром синего цвета, то эти две вершины и вершина X — искомые. Если же никакие две из 17 вершин, соединенных с вершиной X синими ребрами, не соединены между собой тоже синим ребром, то среди них найдутся три вершины, соединенные между собой ребрами одного цвета (см. решение задачи 1).

Пусть вершины с номерами a, b, c соединены друг с другом одноцветными ребрами. Для определенности пусть $a>b>c$. Тогда числа $x=a-b$, $y=b-c$ и $z=a-c$ имеют один и тот же цвет и удовлетворяют условию $x+y=z$.

[redacted]йдоскоп «Кванта»

[redacted] *«Квант» № 8)*

Вопросы и задачи

1. В наинизшем.
2. Выталкивающая сила уменьшает натяжение нити, что равносильно уменьшению g, поэтому период колебаний маятника увеличится.
3. Нет, если не изменится положение центра тяжести системы.
4. Да, поскольку силы упругости существуют и в невесомости.
5. $kA^2/2$.
6. Часы следует поднять.
7. Можно, если сообщать штативу небольшие толчки с частотой, равной частоте собственных колебаний одного из маятников (резонанс).
8. Можно, изменив темп ходьбы: тем самым меняется частота внешней силы, вызвавшей резонансные колебания ведра с водой.
9. Сила электрического взаимодействия шариков всегда направлена вдоль нити; она не отражается на величине возвращающей силы, поэтому не влияет на период колебаний.
10. Да, частота колебаний увеличится.
11. а) Уменьшится; б) увеличится.
12. За счет уменьшения энергии магнитного поля катушки.

Микроопыт

Период колебаний будет уменьшаться.

[redacted]анные школьные задачи

[redacted] *«Квант» № 8)*

1. 1984. Решение. Пусть $N=13a_1+73b_1=13a_2+73b_2=13a_3+73b_3$ и $a_1<a_2<a_3$. Так как $13(a_2-a_1)=73(b_1-b_2)$, то a_2-a_1 делится на 73; аналогично, a_3-a_2 делится на 73. Значит, $a_3\geqslant a_2+73\geqslant(a_1+73)+73\geqslant 1+73+73=147$, и, следовательно, $N=13a_3+73b_3\geqslant 13\cdot 147+73=1984$. Остается заметить, что 1984 имеет три представления указанного вида: $a_1=1$, $a_2=74$, $a_3=147$, $b_1=27$, $b_2=14$, $b_3=1$.

2. $k=1$, n — натуральное число, равное числу, записанному теми же цифрами, но в обратном порядке; $k=2$, $n=2$; $k=2$, $n=9$. Указание. Так как kn и n^k должны состоять из одинакового числа цифр, $n^k<10kn$. При $k\geqslant 2$, $n\geqslant 2$ это неравенство оставляет для k и n конечное число возможностей; случаи $k=1$ и $n=1$ очевидны.

3. Из условия задачи вытекает, что $x_2^2=px_2+q$, $x_1^2=-px_1-q$. Поэтому $x_2^2+2px_2+2q=3x_2^2$, $x_1^2+2px_1+2q=-x_1^2$, откуда видно, что либо одно (или оба) из чисел x_1, x_2 является корнем уравнения $x^2+2px+2q=0$, либо левая часть этого уравнения принимает в точках x_1, x_2 значения разных знаков, и тогда между этими точками обязательно лежит корень уравнения.

4. Примем сторону квадрата за единицу и отложим на продолжении стороны CB отрезок $BM=\frac{1}{2}$. Имеем: $EF=\frac{5}{6}$, $ME=\frac{5}{6}$, $AM=AF$. Таким образом, в четырехугольнике $MEFA$ равны стороны ME и EF, а также стороны MA и AF (рис. 4). Поэтому треугольники AEM и AEF равны, из чего и вытекает требуемое равенство углов.

5. Предположим, что $AB>AC$. Тогда угол BCA больше угла CBA и, значит, угол BCD больше угла CBD (рис. 5). Следовательно, $BD>CD$ и $AB+BD>AC+CD$. Противоречие.

6. Пусть $d\geqslant 2$ — общий делитель чисел a_n и a_m, $m>n$. Прежде всего, все числа a_n нечетны, поэтому $d\neq 2$. Ясно, далее, что остаток от деления числа $a_{n+1}=a_n^2-2$ на d равен $d-2$, остаток от деления числа a_{n+2} на d равен остатку от деления числа $(d-2)^2-2$ на d, т. е. равен 2. Но тогда и остаток от деления числа a_{n+3} на d равен $2^2-2=2$, и то же верно для a_{n+4}, a_{n+5}, ... Поэтому a_m не может делиться на d.

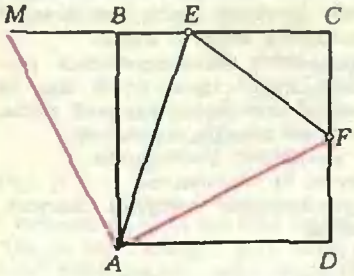


Рис. 4.

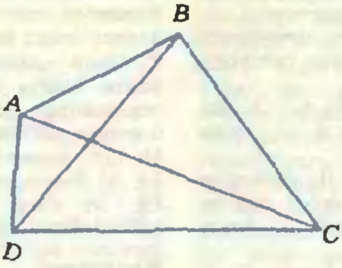


Рис. 5.

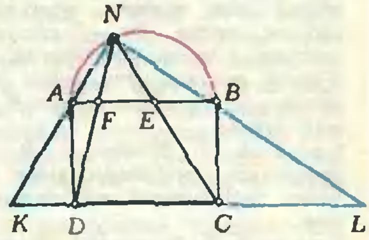


Рис. 6.

7. Из условия имеем $x_1-x_2=\dfrac{x_2-x_3}{x_2x_3}$, $x_2-x_3=\dfrac{x_3-x_4}{x_3x_4}$, ..., $x_n-x_1=\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}$. Если $x_1=x_2$, то $x_2=x_3=\ldots=x_n$. Если же $x_1\neq x_2$, то $x_2\neq x_3$, ..., $x_n\neq x_1$. В этом случае, перемножив все написанные равенства и сократив на $(x_1-x_2)\times$ $\times(x_2-x_3)\ldots(x_n-x_1)$, получим $(x_1x_2\ldots x_n)^2=1$.

8. Пусть K, L — точки пересечения прямых NA и NB с прямой CD (рис. 6). Ясно, что $\dfrac{KD}{AF}=\dfrac{DC}{FE}=\dfrac{CL}{EB}$. Из подобия треугольников AKD и CLB следует, что $\dfrac{KD}{BC}=\dfrac{AD}{CL}$. Поэтому $2KD\cdot CL=2BC\cdot AD=CD^2$, а значит, $2AF\cdot EB=EF^2$. Далее, $AE+FB=AB+EF$. Следовательно, $AE^2+FB^2+2AE\cdot FB=AB^2+EF^2+$ $+2AB\cdot EF=AB^2+2(AF\cdot EB+AB\cdot EF)$. Остается доказать, что $AE\cdot FB=AF\cdot EB+AB\cdot EF$. Но это равенство следует из тождества $(AF+FE)(FE+EB)=AF\cdot EB+(AF+FE+$ $+EB)FE=AF\cdot EB+AB\cdot EF$.

9. Перпендикуляр к прямой AC, проведенный через середину D отрезка AC, за вычетом самой точки D. Решение. Углы MAB и MCB равны как вписанные и опирающиеся на равные дуги. Поэтому MAC — равнобедренный треугольник.

10. Во-первых, среди выбранных подмножеств не может быть пустого. Во-вторых, если множество A не принадлежит к выбранной совокупности, то дополнение к A к ней принадлежит. Действительно, A и дополнение к A не могут оба принадлежать к выбранной совокупности, поскольку они не пересекаются. Но всего подмножеств 2^n и ровно половина из них принадлежит к выбранной совокупности. Значит, для каждого множества A либо само A, либо дополнение к A принадлежит к выбранной совокупности. Наконец, в-третьих, если A и B принадлежат к выбранной совокупности, то и пересечение $A\cap B$ к ней принадлежит. Действительно, в противном случае к нашей совокупности принадлежало бы дополнение C к $A\cap B$, но пересечение множеств A, B, C пусто. Значит, нашей совокупности принадлежит пересечение всех ее множеств, и это пересечение не пусто, поскольку пустое множество совокупности не принадлежит.

11. Положим $n=11\ldots1$ (10 единиц). Наше число равно $n\cdot10^{10}+2n=n(10^{10}-1)+3n=$ $=n\cdot 9n+3n=3n(3n+1)$.

12. $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{2}{5}$, $c=\frac{3}{5}$, $d=\frac{4}{5}$. Решение. Уравнение приводится к виду $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+$ $+\frac{3}{4}\left(b-\frac{2}{3}c\right)^2+\frac{2}{3}\left(c-\frac{3}{4}d\right)^2+\frac{5}{8}\left(d-\right.$ $\left.-\frac{4}{5}\right)^2=0$.

13. Обозначим точку пересечения плоскости OBC с ребром AD через M (рис. 7). Имеем $\dfrac{MD}{MA}=\dfrac{V_{ODBC}}{V_{OABC}}=1$. Значит, M — середина ребра AD. Аналогично точка N пересечения плоскости OAD и ребра BC является серединой ребра BC. Пусть P, Q, R, S — середины ребер BD, AC, DC, AB соответственно. Рассмотрим точки M, N, O. Они принадлежат плоскостям MBC и NAD, а значит, принадлежат прямой пересечения этих плоскостей. Поэтому точка O лежит на отрезке MN. Аналогично получаем, что точка O принадлежит отрезкам RQ и PS. Так как четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм, то точка O — точка пересечения диагоналей — делит отрезки MN и PQ пополам. Ясно также, что O — середина отрезка RS. Следовательно, $\vec{OA}+$ $+\vec{OD}=2\vec{OM}$, $\vec{OB}+\vec{OC}=2\vec{ON}$. Поэтому $\vec{OA}+$ $+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=2(\vec{OM}+\vec{ON})=0$.

14. $\{b,\ b\}$, $\{b,\ \sqrt{2a^2+b^2}\}$, $\{\sqrt{b^2-2a^2},\ \sqrt{b^2-2a^2}\}$; первое решение присутствует только если $b\sqrt{3}>a$, второе — только если $b>a$, третье — только если $b>a\sqrt{3}$. Указание. Из условия следует, что высоты боковых граней равны. Следовательно, равны проекции высот на

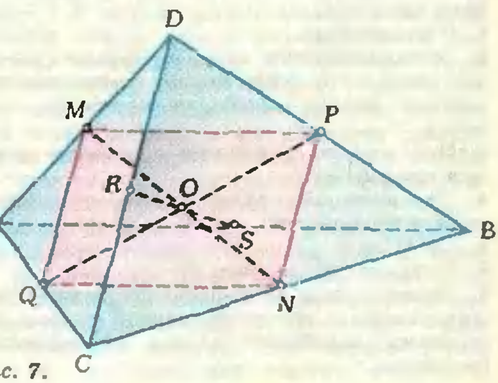


Рис. 7.

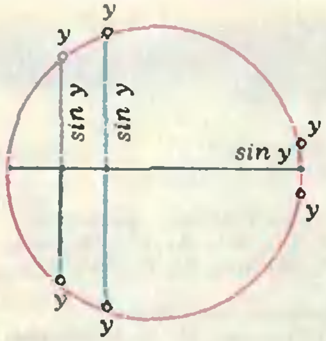


Рис. 8.

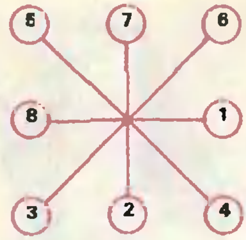


Рис. 9.

плоскость основания, и, значит, проекция вершины на плоскость основания совпадает с центром вписанной или вневписанной окружности основания.

15. $\frac{3}{4}\pi - \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{18}\right)$. Решение. Сделаем замену $\cos x + \sin x = 2\sin y$, т. е. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin y$. Наше уравнение примет вид $\sin 3y = \frac{1}{2}$ (проверьте!); его решения $y \in \left\{\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}m\pi,\ m \in Z\right)$ (рис. 8). Но $0 \leqslant x \leqslant \pi$, значит, $\frac{\pi}{4} \leqslant x + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{5}{4}\pi$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$, $-\frac{1}{2} \leqslant \sin y \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. Как видно из рисунка 5, $\sin y$ может принимать три значения, но только одно из них, а именно, $\sin\frac{\pi}{18}$, попадает в нужный промежуток. Таким образом, $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{18}$, и из всех решений этого уравнения только $x = \pi - \frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{18}\right)$ находится в промежутке $[0; \pi]$.

Как взвесить гиппопотама
(см. «Квант» № 8, с. 47)

Как и все гениальное, выход из создавшегося положения был необычайно прост. Сборщик податей ввел священного гиппопотама на пустую лодку вождя и отметил снаружи на борту лодки уровень, до которого та погрузилась в воду. Затем он свел гиппопотама на берег и принялся нагружать лодку золотыми слитками. Так он трудился до тех пор, пока лодка не погрузилась в воду по сделанную ранее отметку.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1.
$$\begin{array}{r|l} 103 & 48 \\ \underline{96} & 2 \\ 7 & \end{array}$$

2. Нельзя. Действительно, один из коротких отрезков — не концевой в ломаной, но его концы можно соединить только с концами параллельного ему длинного отрезка.

3. См. рис. 9.

4. Искомое число можно представить в виде $A \cdot 100 + 56$. Поскольку $A \cdot 100$ должно делиться на 56, то A кратно 14, т. е. оно четно и делится на 7. При этом A имеет сумму цифр, равную $56-(5+6)=45$. Наименьшим четным числом с суммой цифр 45 является число 199 998, однако оно не делится на 7. Следующими по величине четными числами с такой суммой цифр будут 289 998 и 298 998. Первое из них не делится на 7, а второе — делится, поэтому ответом на вопрос задачи является число 29 899 856.

5. Книга имеет ширину ≈ 15 см и высоту ≈ 25 см. Таким образом, площадь страницы $\approx 0{,}04$ м^2. Если в книге 500 страниц, то ее страницами можно покрыть примерно $250 \times 0{,}04 = 10$ квадратных метров. Футбольное поле имеет площадь порядка 5—6 тысяч квадратных метров, и на него потребуется 500—600 книг, столько их у профессора Иванова вполне может быть. Парк имеет площадь порядка квадратного километра, на него потребуется порядка 100 000 книг — столько их у профессора Иванова наверняка нет.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 6)

1. См. рис. 10.

2. $93989+7492+7492=108973$.

3. Не играли. Доказательство. В турнире с 7-ю участниками играется 21 партия, с 8-ю участниками — 28 партий, с 9-ю участниками — 36 партий. Так как было сыграно больше 21 партии, число участников турнира было больше 7, а так как было сыграно меньше 28 партий, число участников, закончивших турнир, было меньше 8, а всего участников — меньше 10. Значит, в турнире играли 8 или 9 шахматистов. В обоих

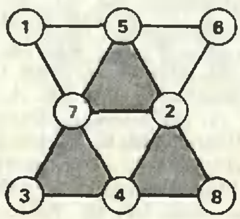


Рис. 10.

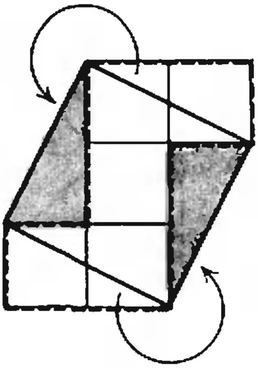


Рис. 11.

случаях осталось несыгранными нечетное число партий (5 или 13), а если бы Женя и Саша между собой уже сыграли, то несыгранных партий осталось бы четное число (поровну у Саши и Жени).

4. 1988. Доказательство. Пусть число 2^{1987} содержит n цифр, а число 5^{1987} содержит k цифр. Тогда

$$10^{n-1}<2^{1987}<10^{n} \text{ и } 10^{k-1}<5^{1987}<10^{k}.$$

Отсюда $10^{n+k-2}<10^{1987}<10^{n+k}$, значит, $k+n-2<1987<k+n$, т. е. $1987=k+n-1$, отсюда $k+n=1988$.

5. Сначала развернем коробку на плоскость, сделав соответствующие разрезы (см. рис. 11), а потом отрежем два треугольника. Приставив их к оставшейся части, получаем нужный квадрат.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 49)

Д. Фельдман (п. Черноголовка Московской обл.) 89, 92, 96, 97, 01; *Н. Фендеров* (Калининград) 01; *А. Фокин* (Москва) 92; *А. Фридлянд* (Саратов) 97, 01, 02; *М. Фурман* (Ташкент) 97; *С. Фурсиков* (Куйбышев) 97; *Б. Хакимджанов* (Ташкент) 97; *И. Халиков* (п/о Машад Наманганской обл.) 96, 02; *В. Харламов* (Ленинград) 97; *Б. Хасин* (Кимры) 97; *И. Химони* (Днепропетровск) 97, 01, 02; *А. Хмельницкий* (Киев) 92; *С. Храпов* (Коломна) 92, 02; *О. Цодиков* (Артемовск Донецкой обл.) 92, 96; *О. Чанов* (Брест) 92, 96; *Д. Черепнин* (Винница) 96; *М. Чернодуб* (Киев) 97, 02; *Е. Чернышев* (Ташкент) 01; *А. Чмутов* (Харьков) 02; *Д. Чокин* (Алма-Ата) 01; *А. Шаргородский* (Котовск Одесской обл.) 97; *Ю. Шарлай* (Харьков) 96, 97, 01, 02; *О. Шведов* (Москва) 92, 97, 01, 02; *Е. Швец* (Черновцы) 92, 97, 02; *А. Швороб* (Барановичи) 96, 97, 01, 02; *С. Шинкевич* (Березники) 89, 92, 96, 97, 01, 02; *С. Широков* (Ульяновск) 97, 02; *З. Шония* (Тбилиси) 97; *С. Штовба* (Винница) 89, 92; *А. Эгамбердиев* (Ургенч) 02; *А. Экдышман* (Белгород) 92, 96; *Б. Эшганов* (Шават) 02; *Ф. Юсупов* (Верхняя Тура) 97; *А. Яблоков* (с. Рождественское Костромской обл.) 92; *И. Ягольницер* (Черновцы) 92; *Т. Яровой* (Москва) 01; *И. Ясников* (Тольятти) 92; *Е. Яхнич* (Минск) 01.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. В. Дубах, С. В. Иванов, Т. Н. Кольченко, Н. С. Кузьмина, С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, П. И. Чернуский

Фото представил
А. С. Жирный

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Д. Дорохова

Сдано в набор 16.07.88. Подписано к печати 26.08.88
Т-17818. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 27,80. Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 7,96
Тираж 189 700 экз. Цена 40 коп. Заказ 1824

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

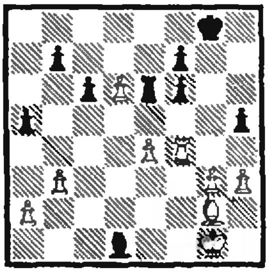
103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Шахматная страничка

КОЛЛЕКЦИОНЕР ШАХМАТНЫХ КОМПЬЮТЕРОВ

Московский любитель шахмат А. Сутин уже несколько лет коллекционирует шахматные компьютеры знаменитых фирм. И не только собирает, но и проводит с ними безлимитный матч-сеанс с нормальным контролем времени.

Приведем два образца из безлимитного матча Сутина. В обеих партиях машинам был установлен наивысший уровень.



«Мефисто» — А. Сутин

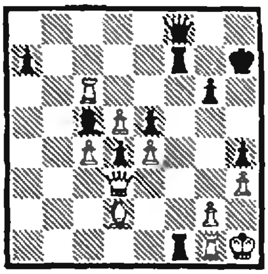
Финал, придуманный ЭВМ, представляет собой истинный этюд. В этой позиции владелец машины не сомневался, что благополучно забирает пешку «d», получая хорошие шансы на выигрыш. Однако... **27. Л:f6!! Л:f6 28. e5!** «Мефисто» играет просто с мефистофельской силой! Ввиду угрозы d6—d7 черные вынуждены вернуть ладью, а в слоновом эндшпиле им не на что надеяться. **28... Л:d6 29. ed Крf8 30. Се4! Се2 31. Крf2 Сb5 32. a4! Са6 33. Кре3 с5. 34. Cd3! С:d3 35. Кр:d3 Кре8 36. Крc4 b6 37. Крb5 Крd7 38. Кр:b6 Кр:d6 39. Кр:a5 h4 40. g4 f6 41. Крa6. Черные сдались.**

«Челленджер» — А. Сутин

Принятый ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. Кf3 Кf6 3. c4 dc 4. e3 e6 5. Кc3 c5 6. С:c4 a6 7. 0—0 b5 8. Cb3 Cb7 9. Фe2 Кbd7 10. Лd1 Cd6 11. h3 0—0 12. e4 cd 13. Л:d4 Cc5 14. Лd1 b4 15. e5 С:f3 16. gf bc 17. ef Фc7! Эта позиция встретилась в партии Лехтинский — Добровольский на турнире в Польше (1982 г.). Гроссмейстер Лехтинский отказался от 18. fg ввиду 18... Фg3+, но проиграл и при другом ответе. Сутина, конечно, устраивал такой поворот событий, но компьютер удивил его. **18. fg! Фg3+ 19. Крf1 Ф:h3+ 20. Крg1 Кр:g7 21. С:e6! fe.** Если бы черные знали, какие неприятности их ожидают, они бы взяли на e6 ферзем, после 21... Ф:e6 22. Ф:e6 fe 23. Л:d7+Лf7 24. Л:f7+Кр:f7 25. bc партия заканчивалась вничью. **22. Л:d7+ Крf6.** На первый взгляд белые отдали слона от отчаяния, но компьютеру такие эмоции не свойственны. **23. Cg5+!! Кр:g5 24. Фe5+ Фf5.** Не помогает и 24... Лf5 25. f4+! Крg4 26. Лg7+ Крf3 27. Ф:c3+ с победой. **25. Фg3+Крh5 26. Л:h7+!!** Фейерверк жертв. На немедленное 26. Крg2 следовала реплика 26... Ф:f3+27. Ф:f3+Л:f3 28. Кр:f3 cb. **26... Ф:h7 27. Крg2!!** После серии жертв все решает один тихий ход. Мат неизбежен, черные сдались.

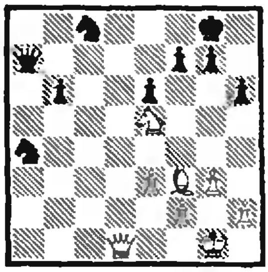
Надо сказать, что А. Сутин не только играет с компьютерами. Его «Плейматик» внимательно изучил все встречи последнего поединка между Г. Каспаровым и А. Карповым (Севилья, 1987 г.) и сделал ряд ценных замечаний.



А. Карпов — Г. Каспаров

В этой позиции (23-я партия) Каспаров допустил тактический просчет — 50... Л7f3??, и после 51. gf Л:f3 52. Лc7+ Крh8 53. Ch6!! выяснилось, что жертва ладьи некорректна. После 53... Л:d3 54. С:f8 Л:h3+ 55. Крg2 Лg3+ 56. Крh2 Л:g1 57. С:c5 d3 черные сдались (белые играют 58. Ce3, отдают слона за пешку, и проходные «с» и «d» неудержимы).

«Плейматик» за 8 минут нашел белым ход 53. Ch6, а за черных вместо ошибочного 50... Л7f3 избрал 50... Cb4!, что сохраняло шансы на ничью.



Г. Каспаров — А. Карпов

А эта позиция из 24-й, заключительной схватки (после цейтнотной ошибки белых 33. Фb1—d1), когда А. Карпов получил возможность вернуть себе шахматную корону ходом 33... Кc5! (34. Фd8+ Крh7 35. Ф:c8 Фa1+ и 36... Ф:e5). Правда, белые выигрывали ходом раньше, продолжая 33. Фb5! или 33. Ch5! Компьютеру было предложено разобраться в этой запутанной ситуации. И «Плейматик» блестяще справился с заданием. Сначала он обнаружил спасительную для черных реплику 33... Кc5, а за белых на предыдущем ходу он избрал 33. Ch5! В ответ на 33... g6 машина пожертвовала на g6 фигуру и затем доказала, что во всех вариантах белые берут верх.

Осталось напомнить, что Карпов в цейтноте тоже ошибся, сыграл 33... Кe7? и после 34. Фd8+ Крh7 35. К:f7 Кg6 36. Фe8 Фe7 37. Ф:a4 Ф:f7 38. Ce4 Крg8 39. Фb5 Кf8 40. Ф:b6 Фf6 41. Фb5 Фe7 партия была отложена в трудном положении для черных. При доигрывании Каспаров взял верх, сравнял счет и сохранил звание чемпиона мира.

Е. Я. Гик

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Поверхность, представляющая собой изогнутый лист бумаги, вмещает в себя множество прямолинейных отрезков. Если продолжить все эти отрезки, то в пространстве возникает замечательная поверхность, называемая «ласточкин хвост». Подробнее см. в статье «Геометрия листа бумаги», с. 17.