

Квант

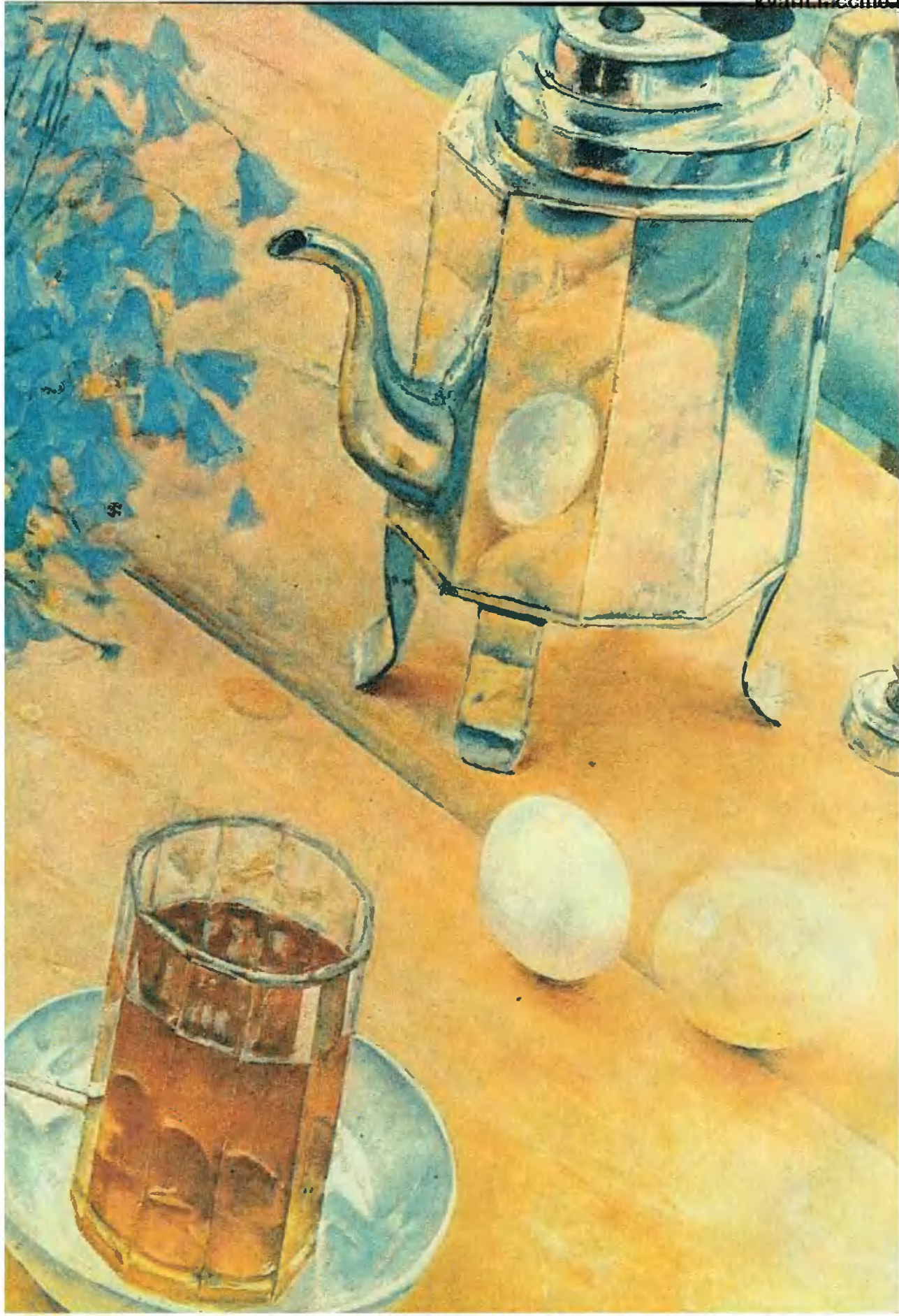
Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Как измеряют
температуру Солнца?

1988



В номере:

Научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука».
Главная редакция физико-
математической литературы

- 2 Р. Пайерлс. Ранние годы квантовой механики
10 С. Л. Табачников. Геометрия уравнений
17 Сергей Львович Соболев
18 А. В. Бялко. Химическое разнообразие небесных тел
- Задачник «Кванта»**
24 Задачи M1126 — M1130, Ф1138 — Ф1142
25 Problems M1126 — M1130, P1138 — P1142
27 Решения задач M1106 — M1109, Ф1118 — Ф1122
- 32 **Калейдоскоп «Кванта»**
- Квант• для младших школьников
39 Задачи
40 М. Д. Коваленко. Градусник для Солнца
- Школа в «Кванте»**
Математика 9, 10:
45 А. Д. Бендукидзе. Ферма ищет экстремумы...
38 Избранные школьные задачи
- Практикум абитуриента**
49 С. А. Гордюнин, П. Л. Горьков. Преломление света
- Информация**
54 III Научно-техническая конференция школьников в МФТИ
63 Всесоюзный конкурс «Юный программист»
- Олимпиады**
56 XIV Всероссийская олимпиада школьников
- 58 Ответы, указания, решения
23 Нам пишут
Смесь (16, 48)
- Наша обложка**
1 Чтобы увидеть Солнце таким сказочно красивым, достаточно подняться на ... несколько сот километров над поверхностью Земли. Оттуда же можно и измерить температуру Солнца. О том, какими приборами и как это делают, читайте в статье М. Д. Коваленко «Градусник для Солнца».
2 Репродукция картины советского живописца К. С. Петрова-Водкина (1878—1939) «Утренний натюрморт». Не правда ли, она как будто специально иллюстрирует основные законы геометрической оптики? Один из них подробно обсуждается в статье С. А. Гордюнина и П. Л. Горькова «Преломление света».
3 Шахматная страничка.
4 Головоломка «Минус-кубик».

РАННИЕ ГОДЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Имя Рудольфа Пайерлса хорошо известно школьникам 60-х годов. Можно утверждать, и это не будет преувеличением, что его книга «Законы природы» привела многих из них в физику.

Для профессионалов имя профессора Пайерлса, члена Лондонского королевского общества, связано с давно ставшими классическими результатами в области теории твердого тела, математической физики, квантовой механики, ядерной физики. Здесь трудно более подробно перечислить весь спектр проблем, которыми он занимался в течение своей долгой научной деятельности.

Уроженец Берлина, большую часть своей жизни Рудольф Пайерлс провел в Англии. Работал в университетах Манчестера, Кембриджа, Бирмингема, Оксфорда. Во время второй мировой войны вел исследования в области атомной энергии в Лос-Аламосе (США). Осенью прошлого года Рудольф Пайерлс побывал в Москве в качестве гостя Академии наук СССР. Большое внимание научной общественности привлекла его лекция, посвященная истории создания квантовой механики и ее творцам. Зал Института физических проблем был заполнен физиками разных поколений — от студентов до ровесников Пайерлса. За свою долгую жизнь (сейчас ему 81 год) сэр Рудольф Пайерлс встречался и работал едва ли не со всеми выдающимися физиками XX века. О них — своих учителях и коллегах — он и рассказал в этой лекции. Это был рассказ очевидца, пусть беглый, но насыщенный живыми деталями, меткими добродетельными характеристиками и тонким юмором. Ученые, чьи имена уже давно вошли в учеб-



ники и энциклопедии, предстали перед слушателями живыми людьми, каждый со своими характерными особенностями и причудами. Это дало возможность почувствовать атмосферу того замечательного периода, когда буквально в считанные годы был заложен фундамент современной физики.

Свою лекцию Р. Пайерлс читал на русском языке, и особенности его стиля мы попытались сохранить в литературной записи лекции, сделанной И. Н. Аругтюнян.

Р. ПАЙЕРЛС

Может показаться нескромным, что я начну с рассказа о себе. Обычно так не делают, но речь пойдет о моих личных впечатлениях, и потому я должен сначала представиться. В университет я поступил в 1925 году. Сейчас мне хотелось бы иметь возможность сказать, что я выбрал физику, потому что она была интересным предметом и бурно развивалась. Однако это было бы нечестно. На самом деле я хотел быть инженером. То было время, когда развивалась авиация, новые автомобили,

и было естественным, что мальчик хочет стать инженером. Но мне отчего-то сказали, что на это я не гожусь, что хорошим инженером не буду. Поэтому я выбрал, как мне казалось, самое близкое к своей мечте — физику.

Я поступил в университет в Берлине — городе, где был мой дом. Родители считали, что я слишком молод, чтобы уезжать далеко. Там я посещал лекции Макса Планка. Это были самые скверные лекции, которые я когда-либо слушал. Он читал из своей

книги по теоретической физике буквально. Если у вас был экземпляр, то вы могли проследить текст по строчкам. Планк был очень знаменит, но мы тогда не знали еще, чем именно. Впервые новые слова про постоянную Планка, атом Бора и всякие такие вещи я услышал на лекциях Вальтера Боте (потом он стал ядерным физиком). Там мне стало ясно, что в физике происходит что-то новое, весьма интересное.

Через год я решил, что стал уже достаточно взрослым, чтобы покинуть Берлин. Я переехал в Мюнхен, где тогда работал самый лучший учитель по теоретической физике — Арнольд Зоммерфельд. Для теоретической физики это было замечательное время. Создавалась квантовая механика, и сейчас очень трудно представить, насколько быстро все произошло — фактически за два года.

Именно в этот период я поступил в университет и уже через год мог читать работы по квантовой механике. Но к ее формированию я опоздал. Если бы можно было повторить жизнь, то я хотел бы родиться на год или на два раньше. Феликс Блох потом мне объяснил, что не всякий человек способен создавать новые теории и что мы появились как раз вовремя, чтобы их применять. Помоему, он был прав. Это было самое подходящее время, чтобы взять какую-нибудь проблему, при решении которой старая физика приводила к противоречиям, и применить к ней новые методы.

Итак, я приехал к Зоммерфельду. Зоммерфельд был маленького роста, но имел огромные усы. Мы иногда называли его «верхняя половина и немного еще». Зоммерфельд выглядел довольно важным и у него было звание *Geheimrat* — тайный советник. Это можно сравнить с современным званием академика, и он любил, когда его так называли. Один американский студент сначала этого не знал и обращался к Зоммерфельду просто «гeрр профессор». Через неделю или две ему все объяснили, и при очередной встрече он уже обратился к Зоммерфельду

«Herr Geheimrat». Зоммерфельд это отметил, сказав, что его немецкий заметно улучшился за последнее время.

Но у нас в институте Зоммерфельд совершенно не был *Geheimrat*, мы никогда его так не называли. Он был замечательным учителем и для студентов, и для аспирантов, читал замечательно ясные лекции. Они опубликованы и до сих пор интересны; их и теперь полезно читать. Зоммерфельд всегда настаивал, что теоретическая физика как наука должна все-таки основываться на экспериментальных данных. Он никогда не давал нам забыть, на каких именно данных основан тот или иной теоретический закон.

Зоммерфельд очень хорошо знал математику, написал множество чисто математических работ, очень полезных, но никогда не был слишком педантичным. Помню, как он читал лекцию по электронной теории ме-



Зоммерфельд (слева) и Паули. Паули выглядит очень вежливым и скромным (обычно это бывало не так!). Таким он был всегда со своим бывшим профессором. Сам Паули это называл «школьным комплексом».



Зоммерфельд на лыжах в горах. Во всем его облике нет и следа тигула Geheimrat.

таллов и в вычислениях на доске пропустил множитель 2. Мы это заметили, нам казалось это не очень важным. Наконец, он подошел к закону Видемана — Франца, численный коэффициент в котором общеизвестен. Тут-то он и увидел, что получается неправильный результат. Мы же с интересом наблюдали, что произойдет. Заметив ошибку, Зоммерфельд не останавливаясь произнес, что теперь надо учесть как электроны, движущиеся слева направо, так и электроны, движущиеся справа налево, — и поставил в нужном месте недостающий коэффициент 2.

...Зоммерфельд имел в горах маленькую хижину для отдыха, куда он приглашал иногда аспирантов и преподавателей. Там он дал мне возможность выступить на моем первом семинаре. Как раз появились работы Дирака и Йордана по теории преобразований. Зоммерфельд сказал: «Мы еще не успели понять

эти работы, и, может быть, вы сумеете их нам объяснить». Это было все-таки тяжелой задачей для студента, который провел в университете всего два года. Однако я с удовольствием за это взялся. Не знаю, чему научились другие участники семинара, но сам я научился многому.

В Мюнхене в это время был аспирантом Ханс Бете. Он был на год старше меня, а в таком возрасте это — большая разница. Бете казался мне мудрым человеком, у которого можно многому научиться. Мы с ним очень подружились. Он до сих пор старше меня на один год. Сейчас это не так уж важно, но я все еще могу многому у него научиться.

Я провел в Мюнхене полтора года и с удовольствием остался бы еще, но Зоммерфельда пригласили в Америку на полгода-год. Я же по совету Зоммерфельда уехал в Лейпциг работать у Гейзенберга.

Гейзенберг был совершенно не похож на Зоммерфельда. Никакого Geheimrat там и в помине не было. На вид, во всяком случае, он был очень скромным человеком. Типично то, что раз в неделю устраивался семинар, а перед семинаром всегда был чай. Сам профессор шел в кондитерскую и выбирал подходящие пирожные. По крайней мере я запомнил это именно так. Правда, впоследствии один наш коллега, бывший тогда ассистентом у Гейзенберга, уверял меня, что ходить за пирожными было его задачей. В этом есть смысл, так как он был родом из Вены и знал толк в таких вещах. Наверное, я помню тот период, когда его не было в Лейпциге.

Гейзенберг очень любил играть в пинг-понг и был очень хорошим игроком. В свободное время мы все играли. Один раз приехал китайский физик, который смог побить Гейзенберга. Это стало сенсацией. Я потом слышал, что когда Гейзенберг ехал на пароходе из Америки в Японию, то всю дорогу упражнялся, чтобы больше такая ужасная вещь не повторилась.

Гейзенберг не любил чистую математику и рассматривал ее только как необходимый инструмент. Его метод состоял в следующем. Размышляя над

проблемой, он сначала угадывал, каким будет решение, а потом подбирал математический метод, который именно это решение дает. Хороший метод, если у вас такая же мощная интуиция, как у Гейзенберга. Для других такой подход немного опасен.

В Лейпциге мне удалось написать свою первую работу. Она касалась так называемого аномального эффекта Холла.

Когда по кусочку металла идет ток и все это помещается в магнитное поле, то появляется поперечное напряжение. Ясно, что так происходит из-за отклонения электронов в магнитном поле. Но в некоторых металлах эффект имеет противоположный знак. Сейчас мы объясняем это тем, что в таких веществах ток переносится не электронами, а дырками. Но в то время ясности в этом вопросе не было, и Гейзенберг мне просто сказал, что Блох построил электронную теорию металлов, и не мог бы я ее применить к этой проблеме. К моему большому удовольствию оказалось, что все это действительно можно было сделать, я

и решил поставленную задачу.

В Лейпциге я провел год. Гейзенберга пригласили в Америку, и он взял отпуск. По его совету я переехал в Цюрих, чтобы работать у Паули. У него я и написал свою диссертацию. Должен сказать, что я очень благодарен этой системе отпусков и приглашений в Америку, благодаря которой у меня получилась такая замечательная комбинация учителей.

Как известно, Паули был знаменит еще и тем, что делал всем очень невежливые замечания. Один из самых острых выпадов был сделан Паули в разговоре с Эрнстом Штюкельбергом. Тот сказал: «Паули, не говорите так быстро, я не могу так быстро думать, как вы». Паули ответил: «Это ничего, что вы думаете медленно. Я возражаю, когда вы публикуетесь быстрее, чем можете думать».

Кто-то показал ему работу молодого теоретика, зная, что работа не слишком хороша, но желая все-таки узнать мнение Паули; тот прочел работу и сказал грустно: «Это даже не неверно».



Цюрих, 1930 год. Ландау (слева) по своему обыкновению делает смешные гримасы. В середине В. А. Амбирцумян, справа — М. П. Бронштейн (?).

У Паули была такая привычка: ходить вечером в кино, на концерт или что-нибудь такое. Возвращался он часов в 11 и сразу же садился работать. Работал Паули довольно долго и потому поздно вставал. Однажды его пригласили на заседание в 9 часов утра, но он отказался, сказав: «Нет, нет, так долго без сна я не могу оставаться».

Как-то раз Паули был в чужом городе и спросил местного физика, как ему найти кинотеатр. Тот объяснил и на следующий день спросил у Паули, удалось ли ему добраться. Паули ответил: «Вы выражаетесь вполне понятно, если не говорите о физике».

Я провел у Паули три года, и мне не раз приходилось выслушивать подобные вещи. Но это было уже не очень тяжело. Никто долго на Паули не обижался, вероятно оттого, что он так же критически относился к самому себе, к своим собственным идеям. Один раз он объяснил мне, почему он это делает. По его мнению, есть на-

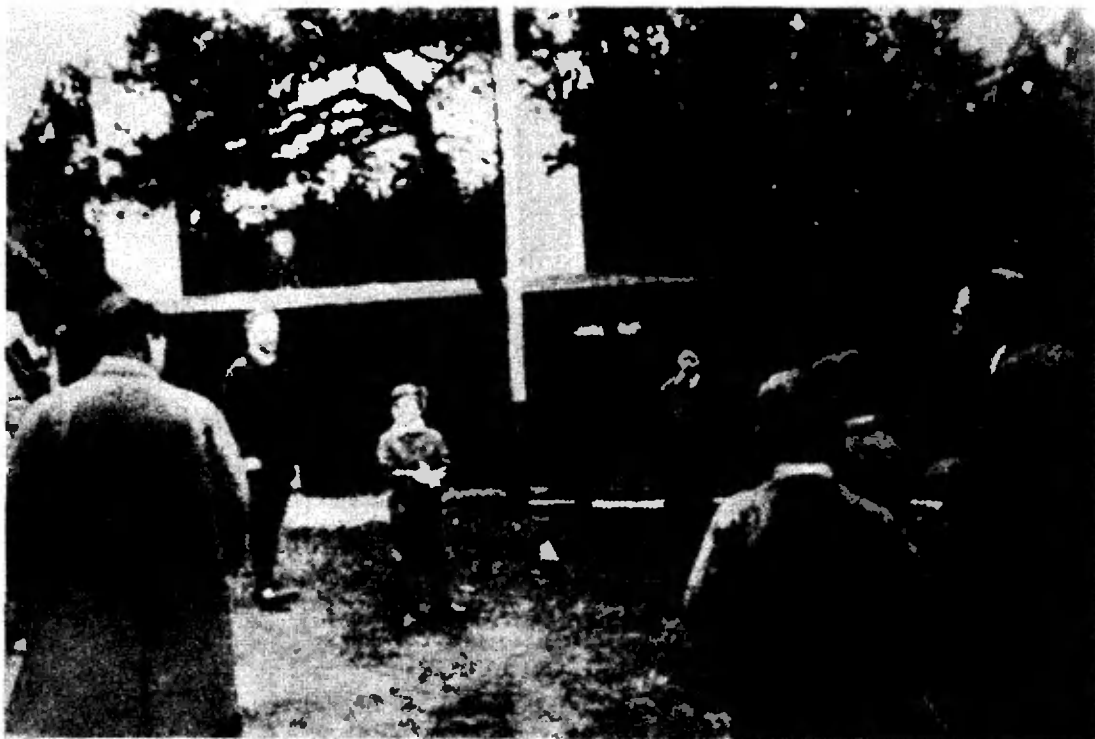
столько чувствительные люди, с которыми можно жить, только наступив достаточное число раз на их «больную мозоль». Правда, я не думаю, чтобы это было настоящей причиной.

...У нас в Цюрихе два раза был Ландау. Первый раз он приехал в январе 30-го года. В то время не было дипломатических отношений между Швейцарией и СССР. Ему дали разрешение на две недели, потом продлили срок еще на две недели. Все очень старались этого добиться. Но в конце концов он вынужден был уехать. Тогда он пошутил: «Ленин был в Швейцарии несколько лет, но революция здесь не началась. Очевидно, они боятся, что это смогу сделать я». Через год он приехал со стипендией Рокфеллера, и тогда уже никаких проблем не было: он мог оставаться столько, сколько хотел. Мы работали вместе. Ландау был еще очень молодым, но уже очень тщательным физиком. Когда появлялась какая-нибудь работа, которая его интересовала, то он ее не читал, а сразу начинал вычислять сам. И если он соглашался с тем, что там написано, то считал работу хорошей. Он все любил систематизировать. Например, он разделил физиков на разные классы: в первый класс у него попали Бор, Зоммерфельд; Эйнштейн был в специальном классе, сам по себе. Себя же Ландау скромно поместил во второй класс. Так же «систематически» он относился и к другим вопросам жизни.

Ландау очень не любил бороду, говорил, что это — пережиток викторианских времен, особенно у молодых людей. Среди нас был один физик, который не носил бороды, но имел очень длинные бакенбарды. Ландау это тоже считал буржуазным и, позвонив его жене, спросил: «Когда вы убедите своего мужа сбрить эти смешные бакенбарды?» Он утверждал, что на Западе, в Цюрихе, больше бород, чем в России, в Ленинграде. Мы заключили пари и сосчитали на улице, сколько бород мы встретили. Потом, когда я приехал в Ленинград, мы провели такой же подсчет и нашли, что в Ленинграде бород оказалось больше.



Гамов и Ферми.



У Нильса Бора в Копенгагене. Бор справа с мячом в руках. Он был очень хорошим футболистом, хотя и не таким хорошим, как его брат математик Харольд Бор. Тот был почти профессионал. Рассказывают, что Х. Бор ехал как-то со своей матерью в трамвае. Они во время поездки не общались, и вышел Харольд раньше нее. Тогда к ней обратился один из пассажиров и сказал: «Знаете, кто сейчас с нами ехал? Это знаменитый футболист Харольд Бор!» На лужайке видны дети Бора и среди них — Оге Бор, тоже будущий Нобелевский лауреат.

Я выиграл пари, а Ландау пытался объяснить это тем, что шла коллективизация и много крестьян переехало в город.

Ландау был уверен, что только молодые теоретики могут сделать полезные вещи. Правда, позже он изменил этой идее. Как-то мы разговаривали, и выплыло имя одного теоретика, о котором он не слышал. Узнав, что ему 27 лет, Ландау сказал: «Такой молодой и уже такой неизвестный!»

Кроме Ландау, в Цюрихе были другие люди, включая Георгия Гамова. Гамов тогда уже был знаменит, он тоже был большим юмористом и любил всяческие шутки. Как-то мы пошли в горы и попали на вершину пика с довольно интересным названием. Там Гамов вытащил из кармана листок бумаги — это было письмо в журнал «Nature» о какой-то ядерной реакции, которое он не совсем закончил. Гамов сидел на вершине и кончал свое

письмо. Написав последние строчки, он поставил название пика, где они были написаны, и поблагодарил своих спутников за предоставленную возможность там работать.

...В те времена, точно так же, как и сейчас, физики любили путешествовать, ездить на конференции, сессии. Дорога тогда, правда, не оплачивалась, поэтому зачастую приходилось сидеть всю ночь в углу железнодорожного вагона третьего класса. Но когда я получил приглашение на съезд Физического общества в Одессе, то по крайней мере внутри страны ездил с большим комфортом, как гость. Меня позвал туда Яков Ильич Френкель, который прочел мои работы.

Одним из любимых мест для поездок был Копенгаген, где работал Нильс Бор. Он был замечательным человеком. Бор ненавидел обижать людей, но в то же время не мог



Моя жена, я и Дирак в зоологическом саду. Дирак совершенно серьезно бьется над проблемой, каких еще животных нам следует посмотреть.

позволить, чтобы было сказано что-либо, противоречащее истине. И из этих двух качеств получалось странное сочетание. Так, один раз Бор сказал: «Я говорю это не для критики, но это — полная ерунда». Еще как-то он сказал, что ясность и истина — дополнительные понятия, и действительно в своих работах он скорее приблизился к границам истины.

Процесс написания работ у Бора был довольно сложным. Начинаясь он с того, что Бор диктовал, а кто-то из гостей должен был все записывать. Потом начиналась правка, изменялись выражения, чтобы все написанное было безусловно верным. Изменений было много, страницы переписывались, потом перепечатывались на машинке, затем снова правились и т. д. Наконец, все посылалось в журнал датской Академии, где работы Бора, разумеется, очень ценились. После чего начиналась работа над корректурами, число которых доходило иногда до 16.

Очевидно, так Бор относился не только к словам. Как-то он пришел посмотреть новое здание, которое строилось для института. Мастер, который его хорошо знал, сказал: «Профессор Бор, вы видите эту стену? Если вы хотите ее опять передвинуть, то решайте скорее, так как через три часа бетон застынет».

Как и полагается профессору, Бор был довольно рассеянным. Я помню, что во время разговора он все время курил сигары. Курит — и вдруг спрашивает, есть ли спички. Ему дают спички. Он пытается зажечь сигару, не прерывая разговора, а это довольно трудно. Потом он клал спички в карман, а через пять минут снова задавал тот же вопрос, и все начиналось сначала. Я долго хранил закопченный кусочек мела: он как-то держал сигару и мел в одной руке.

...В это время начались неприятности в Германии, и в Копенгагене велись разговоры не только о физике,

но и о том, как найти работу для ученых из Германии и Австрии. Для ученых это вообще было нелегкое время. Был экономический кризис, университеты не расширялись, и место освобождалось, когда кто-то уходил в отставку или умирал. Докторская диссертация совсем не гарантировала места для научных исследований. У меня была стипендия Рокфеллера на год, и я мог, уезжая из Цюриха, половину времени провести в Риме, а половину — в Кембридже. До меня так уже сделал Ханс Бете, который провел зиму в Кембридже, а лето — в Риме. Я поступил наоборот, и до сих пор считаю, что нашел лучшее решение.

В Риме мне довелось встретиться с Энрико Ферми, который тоже был замечательным физиком. Когда его спрашивали о какой-то проблеме, то почти всегда он доставал с полки книгу, где эта проблема уже была им решена. В основном они были простые — Ферми не любил сложных проблем. Но тут встает вопрос: что называть простыми проблемами? Не становились ли они простыми уже после того, как Ферми их решил?

Самое большое впечатление от Ферми создается у меня позже, уже в Лос-Аламосе, во время испытания атомной бомбы. Всем, конечно, хотелось узнать, какова мощность бомбы. Для ее определения была масса инструментов, но на это требовалось какое-то время. А Ферми приготовил маленькие кусочки бумаги, и, когда к нам пришла взрывная волна (мы находились примерно в 15 километрах от места взрыва), он отпустил эти кусочки. По расстоянию, на которое они улетели, он сумел довольно быстро определить мощность взрыва. Я не знаю, что меня больше всего тогда поразило: идея метода или то, что он точно определил момент, когда надо отпускать бумажки. Уверен, что я на его месте или отпустил бы кусочки слишком рано, или забыл бы отпустить их вообще.

После Рима, как я уже говорил, мы с женой поехали в Кембридж, где самым интересным был контакт с Полем Дираком. Дирак был очень

вежлив и к нам отнесся с исключительным гостеприимством. У нас не было машины, и он, зная это, возил нас на своей, которой очень гордился. Шутили, что у Дирака-водителя была особенность: скорость его машины принимала только два значения — нулевое и максимальное.

Дирак всегда удивлял своими странными реакциями. Однако, если потом как следует подумать, то оказывалось, что его слова или поступки абсолютно логично вытекают из предыдущего. Вот один из примеров. Как-то раз в Кембридж приехал один историк науки и захотел познакомиться с Дираком. Его привезли в колледж. Дирак обедал, возникло некоторое молчание, которое надо было как-то разрядить. Историк завел разговор про погоду, отметив, что на улице ветрено. Дирак помолчал, затем поднялся, подошел к двери, открыл ее и прислушался. Только убедившись в истинности сказанного, он выразил свое согласие односложным «да».

...Заканчивая выступление, хочу напомнить, что я говорил не как историк науки, точно взвешивающий слова и расставляющий правильные акценты. Это были впечатления свидетеля славного периода создания одной из величайших физических теорий — квантовой механики и воспоминания о ее творцах, с которыми мне посчастливилось встречаться и работать.

ГЕОМЕТРИЯ УРАВНЕНИЙ

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

Читатель, вероятно, видел забавные картинки, глядя на которые трудно решить, что же именно на них изображено. Вот перед вами ваза причудливой формы; вдруг вместо вазы вы видите два профиля, обращенные друг к другу... В математике тоже порой удается взглянуть по-новому на привычную вещь и этот новый взгляд часто оказывается плодотворным.

Уравнение $x^2+px+q=0$

Что вы видите, глядя на равенство $x^2+px+q=0$? Ну конечно, квадратное уравнение с параметрами p и q , т. е. семейство квадратных уравнений, по одному для каждой пары значений p и q . Посмотрим на уравнение $x^2+px+q=0$ иначе — как на линейное относительно переменных p и q ; x в таком случае будет параметром. Например, при $x=-1$ получится уравнение $1-p+q=0$, а при $x=2$ — уравнение $4+2p+q=0$. Вообще, при каждом x получится свое линейное уравнение с переменными p и q . Линейное уравнение задает на плоскости с координатами (p, q) прямую. Следовательно, уравнение $x^2+px+q=0$ задает на (p, q) -плоскости семейство прямых — по одной для каждого значения x .

Нарисуем несколько прямых этого семейства — рисунок 1. Глядя на этот рисунок, трудно удержаться от соблазна провести кривую, которая касается всех изображенных прямых. Такая кривая, похожая на параболу, изображена на рисунке 2. Эта кривая называется *огibaющей* данного семейства прямых. Что *огibaющая* в данном случае действительно будет параболой, мы увидим чуть позже. А пока будем рассматривать семейство прямых $x^2+px+q=0$ на (p, q) -плоскости как семейство касательных к этой *огibaющей*.

Кстати, существование *огibaющей* не является специфическим свойством семейства прямых, изображенных на рисунке 1. Для любого однопараметрического семейства прямых общего положения, т. е. такого семейства, в котором прямые с близкими значениями параметра не параллельны и не проходят по три через одну точку, можно построить *огibaющую*. Более того, *огibaющая* существует не только у семейства прямых, но и у семейства кривых на плоскости.

На рисунке 1 на каждой прямой написан ее «номер», т. е. то значение x , при котором уравнение $x^2+px+q=0$ задает именно эту прямую. Удобнее написать номер прямой на *огibaющей* в точке ее касания с этой прямой. Тогда на *огibaющей* появится шкала, «нумерующая» прямые нашего семейства (рис. 2).

Рисунок 2 можно использовать, как «машину» для решения квадратного уравнения $x^2+px+q=0$: если заданы значения p и q , нужно провести через точку с координатами (p, q) касательную к *огibaющей* и прочесть значение корня уравнения $x^2+px+q=0$ на шкале в точке касания. В частности, число корней для данных p и q равно числу касательных, которые можно провести из точки (p, q) к *огibaющей* (рис. 3).

Ясно, что если точка (p, q) лежит под *огibaющей*, то таких касательных две; а если выше, то ни одной. А как обстоит дело с точками самой *огibaющей*? Через эти точки можно провести только одну касательную. Поэтому соответствующие квадратные уравнения имеют по одному (кратному) корню.

Итак, *огibaющая* нашего семейства прямых — это множество таких точек (p, q) , что уравнение $x^2+px+q=0$ имеет кратный корень. Пора вспомнить, что мы умеем решать квадрат-

ные уравнения; в частности, знаем, что у уравнения $x^2+px+q=0$ кратный корень бывает в случае, когда $p^2=4q$. Это уравнение квадратичной параболы и задает огибающую. Поэтому кривая на рисунке 2 — парабола. Окончательный итог исследования квадратного уравнения представлен на рисунке 4.

Упражнения

1. Пусть x — число, написанное в некоторой точке шкалы на огибающей, изображенной на рисунке 2. Чему равна абсцисса этой точки?

2. Исследуйте геометрически число решений уравнения $x^2+px+q=0$ на отрезке $[-1; 1]$. Подсказка: проведите касательные к огибающей через точки -1 и 1 .

Уравнение $x^3+px+q=0$

У читателя, возможно, возник вопрос: «А стоит ли огород городить? Ведь и так ясно, что число корней квадратного уравнения зависит от знака дискриминанта!». Дело в том, что наш метод позволяет исследовать кубическое уравнение, решить которое гораздо труднее. Более того, он годится для определения числа корней и таких уравнений, которые вообще невозможно решить в радикалах. (Попутно заметим, что задача о числе корней уравнения, в отличие от задачи об их вычислении, всегда имеет решение: существует алгоритм, который по коэффициентам уравнения определяет число его корней.)

Итак, рассмотрим уравнение $x^3+px+q=0$. Оно задает на (p, q) -плоскости некоторое семейство прямых. На рисунке 5 эти прямые построены для $x=0, \pm 1/3, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2$. Огибающая этого семейства прямых изображена на рисунке 6. Как видите, для кубического уравнения огибающая получается не гладкой кривой, а кривой с острием, или «клювом». В остальном же рисунок 6 аналогичен рисунку 2 (как и выше, на огибающую нанесена шкала значений).

Пусть заданы значения p и q . Как узнать, сколько решений имеет уравнение $x^3+px+q=0$? Нужно провести через точку (p, q) касательные к огибающей; их число равно

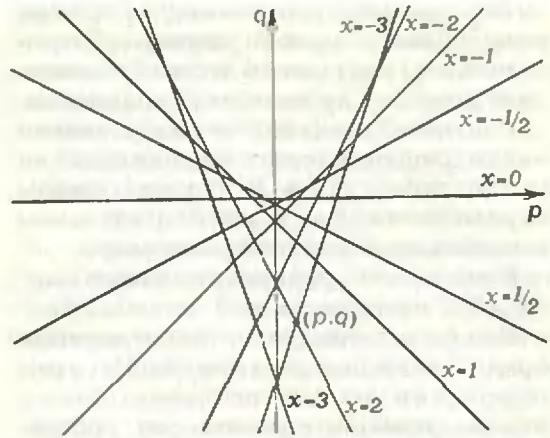


Рис. 1.

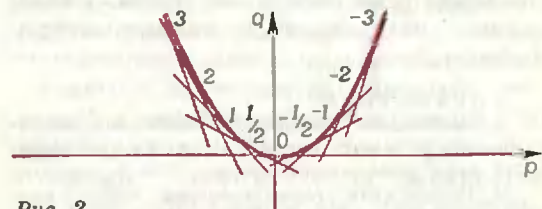


Рис. 2.

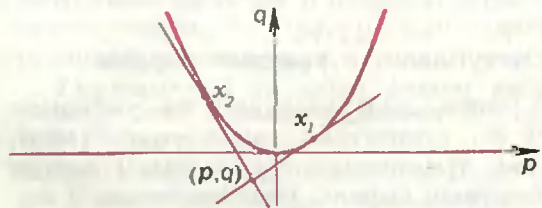


Рис. 3.



Рис. 4.

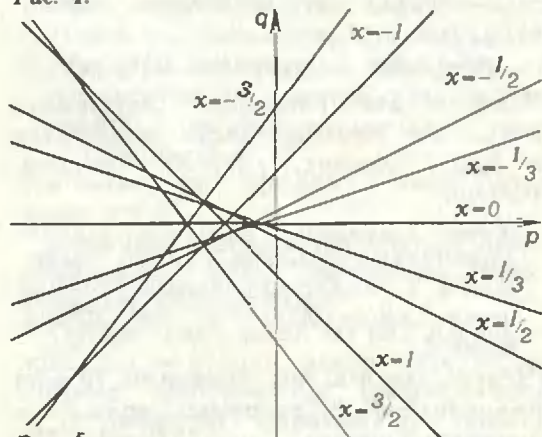


Рис. 5.

числу корней уравнения, а номера этих прямых равны корням. Следовательно, рисунок 6 — это машина для решения кубического уравнения.

Рисунок 7 показывает, как зависит число решений от положения точки (p, q) . Мы видим, что в любом случае хотя бы одна касательная к огибающей найдется, поэтому

Кубическое уравнение имеет хотя бы один корень.

Окончательный итог исследования представлен на рисунке 8. На этом можно было бы поставить точку в исследовании кубического уравнения, если бы не одно обстоятельство: мы так и не знаем, каким уравнением задается кривая на рисунках 6—8.

Упражнения

3. Докажите, что любой многочлен печатной степени имеет корень. Подсказка: найдите знак многочлена при $x = -\infty$ и $x = +\infty$.

4. Исследуйте геометрически число корней многочлена $x^3 + px + q$ на отрезке $[-1; +1]$.

Отступление о кратных корнях

Кривая, изображенная на рисунках 6—8, состоит из таких точек (p, q) , что уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет кратный корень. При таких же p и q это происходит?

Если число t — корень многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на $x - t$. Если число t — кратный корень, то $f(x)$ делится на $(x - t)^2$. Например, 1 — кратный корень многочлена $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$.

Запишем равенство $f(x) = (x - t)^2 g(x)$ и вычислим производную:

$$f'(x) = 2(x - t)g(x) + (x - t)^2 g'(x).$$

Если в это равенство подставить $x = t$, то правая часть обратится в нуль. Значит, $f'(t) = 0$. Следовательно,

Число t является кратным корнем многочлена тогда и только тогда, когда t является общим корнем этого многочлена и его производной.

(Честно говоря, мы доказали только половину этой теоремы: если t — кратный корень, то $f'(t) = 0$. По-

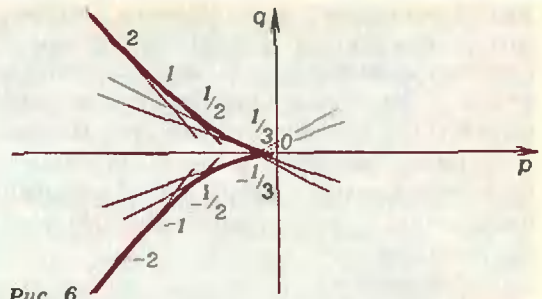
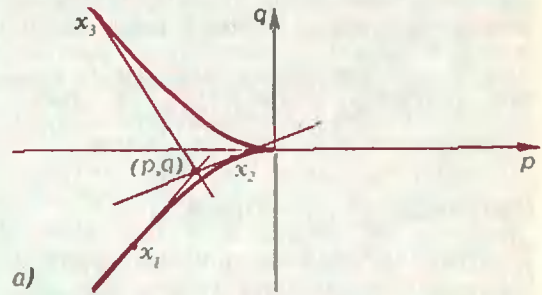
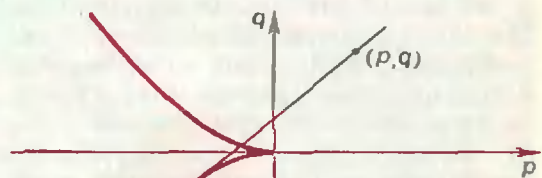


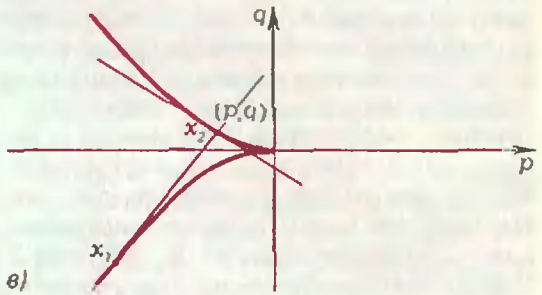
Рис. 6.



а)



б)



в)

Рис. 7.



Рис. 8.

пробуйте сами доказать вторую половину теоремы.)

Применим признак кратного корня к многочлену x^3+px+q . Если число t — кратный корень, то $t^3+pt+q=0$ и $3t^2+p=0$. Выражая p из второго, а q — из первого уравнения, мы получим

$p=-3t^2, q=2t^3$ (t — любое число). Эти уравнения задают огибающую на рисунках 6—8 параметрически: при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка $(-3t^2, 2t^3)$ пробегает всю кривую с клювом. Если вам приятнее задать кривую одним уравнением, то надо избавиться от t (возводя первое уравнение в куб, а второе — в квадрат):

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Это уравнение тоже задает нашу кривую с клювом. Из уравнения видно, что q пропорционально $p^{3/2}$. Поэтому кривая называется *полукубической параболой* (если $q \sim p^3$, то парабола кубическая; у нас показатель степени вдвое меньше, поэтому парабола полукубическая).

Выражение $4p^3+27q^2$ называется *дискриминантом кубического уравнения*. От знака дискриминанта и зависит число корней уравнения.

Упражнения

5. Сколько корней у многочлена $x^3-10x+12$?

6. Исследуйте геометрически зависимость числа корней многочлена x^3+px+q от его коэффициентов.

7. Докажите, что уравнение $x^{1988}+px+q=0$ имеет не больше двух, а уравнение $x^{1989}+px+q=0$ — не больше трех корней.

Двойственные кривые

Рассмотрим уравнение

$$l+kr+q=0. \quad (*)$$

Для каждой пары значений k и l это уравнение задает не вертикальную прямую на плоскости с координатами p и q , причем таким образом получают все не вертикальные прямые. Значит, множество не вертикальных прямых (p, q) -плоскости можно отождествить с множеством пар (k, l) , т. е. с точками (k, l) -плоскости. Посмотрим на уравнение (*) еще раз. Для каждой пары значе-

ний p и q это уравнение задает не вертикальную прямую на (k, l) -плоскости. Значит, точки (p, q) -плоскости можно отождествить с не вертикальными прямыми (k, l) -плоскости.

Итак, у нас есть две плоскости — с координатами (p, q) и с координатами (k, l) . Точки каждой из них можно воспринимать, как не вертикальные прямые другой. Эти плоскости называются *двойственными*. На рисунках мы будем изображать (p, q) -плоскость синим цветом, а двойственную (k, l) -плоскость — красным. Точки на синей плоскости обозначаются заглавными буквами, прямые — строчными буквами. На красной плоскости все наоборот: прямые, соответствующие синим точкам, обозначаются теми же заглавными буквами, а точки, соответствующие синим прямым, — теми же строчными буквами. Посмотрите на рисунок 9. На нем изображены простые фигуры, состоящие из точек и прямых, и соответствующие им фигуры на двойственной плоскости.

Упражнение 8. Какие фигуры двойственны двум последним фигурам на рисунке 9?

Пусть на синей плоскости нарисована кривая γ . Хорошо бы определить соответствующую ей двойственную кривую на красной плоскости. Точки красной плоскости — это прямые синей; поэтому нужно связать с кривой γ семейство прямых синей плоскости. Вы, наверное, уже догадались, как это сделать: с кривой γ нужно связать семейство ее касательных прямых. Итак, определение:

Пусть γ — некоторая кривая. Двойственной кривой (на двойственной плоскости) называется кривая, состоящая из всех касательных прямых кривой γ .

Двойственная кривая обозначается через γ^* .

Конечно, в этом определении предполагается, что γ не имеет вертикальных касательных.

Определение дано, но как им пользоваться — неясно. Например, какие кривые двойственны квадратичной и кубической параболам? Можно было бы, конечно, задать парабола

уравнениями, выписать уравнения касательных, найти их угловые коэффициенты k и свободные члены l и построить соответствующие кривые на (k, l) -плоскости. Однако такой путь мало привлекателен. Попробуем разобраться в поведении двойственных кривых без вычислений.

Пусть кривая γ плавно поворачивается в одну сторону (см. рис. 10,а). Касательная к γ тоже поворачивается, т. е. двойственная кривая движется в одном направлении. Но вот кривая γ начинает поворачиваться в другую сторону — в точке возникает *перегиб*. Что происходит с касательной? До момента перегиба касательная двигалась в одну сторону, а после перегиба — в другую. Значит, двойственная кривая γ^* меняет в момент перегиба направление движения на противоположное (см. рис. 10,б). На двойственной кривой возникает острие! Этих соображений уже достаточно, чтобы изобразить кривые, двойственные квадратичной и кубической параболам (рис. 11).

Упражнения

9. Как отразится на двойственной кривой наличие у кривой γ двойной касательной — рисунок 12,а?

10. Нарисуйте кривую, двойственную кривой на рисунке 12,б.

Двойственные плоскости совершенно равноправны — каждая из них отождествляется с множеством невертикальных прямых другой. А как обстоит дело с двойственными кривыми? Верно ли, что если построить по синей кривой γ красную кривую γ^* , а затем по красной кривой γ^* — двойственную ей синюю кривую $(\gamma^*)^*$, то получится исходная кривая γ ? Интуиция подсказывает утвердительный ответ; чтобы обосновать его, разберемся, как устроена кривая $(\gamma^*)^*$.

Рассмотрим кривую γ^* . Чтобы построить двойственную ей кривую, нужно рассмотреть касательные к γ^* . Вместо касательной мы возьмем на γ^* две близкие точки l и m и проведем через них прямую A — см. красную часть рисунка 13. Какая картинка возникает на синей плоскости? Точкам l и m отвечают прямые l

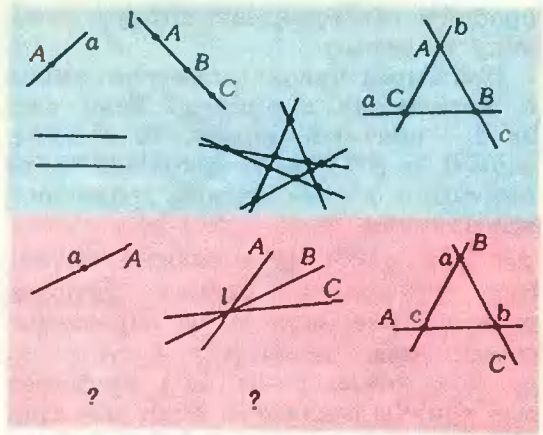


Рис. 9.

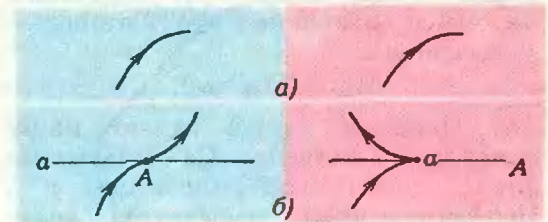


Рис. 10.

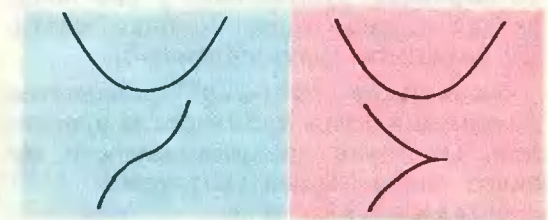


Рис. 11.

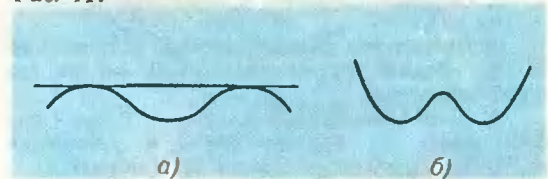


Рис. 12.

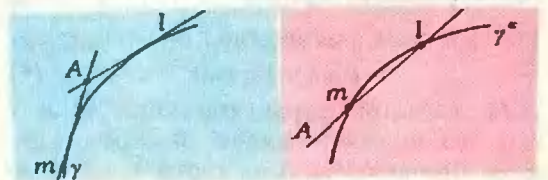


Рис. 13.

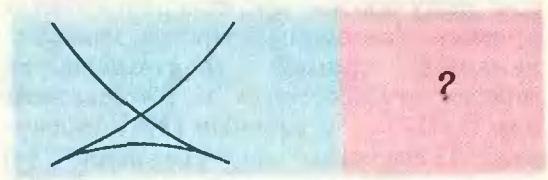


Рис. 14.

и m — см. синюю часть рисунка 13. Точки l и m на красной плоскости лежат на кривой γ^* . По определению это значит, что прямые l и m на синей плоскости касаются кривой γ . Если теперь начать сближать точки l и m справа, то прямая A будет стремиться к касательной к кривой γ^* , а точка A слева будет стремиться к точке кривой γ . Это и значит, что множество касательных прямых к γ^* определяет на синей плоскости исходную кривую γ .

Наше рассуждение закончено. Мы доказали, что

Кривая, двойственная к двойственной, совпадает с исходной: $(\gamma^)^* = \gamma$.*

Теперь можно «прочитать» рисунок 11 справа налево: кривая, двойственная параболы, — парабола; кривая, двойственная полукубической параболы, — кубическая парабола.

Упражнение 11. Какая кривая двойственна кривой на рисунке 14? Подсказка: сравните с упражнением 10.

А при чем же здесь уравнения $x^2 + px + q = 0$ и $x^3 + px + q = 0$? Возьмем второе уравнение. Оно получается из уравнения $l + kp + q = 0$ при $k = x$, $l = x^3$. Значит, кубическое уравнение задает на красной (k, l) -плоскости кубическую параболу $l = k^3$. Двойственная кривая на синей плоскости — огибающая семейства прямых $x^3 + px + q = 0$, т. е. полукубическая парабола. Так что наше исследование кубического уравнения состояло в построении кривой, двойственной кубической параболы. В частности, появление клюва мы можем объяснить теперь тем, что у кубической параболы в нуле имеется точка перегиба.

Кстати, некоторые читатели, возможно, восприняли появление острия у огибающей, как «несчастный случай», т. е. как случайное, редкое явление. Двойственность показывает, что клювы встречаются столь же часто, сколь точки перегиба. Но ясно, что наличие у кривой точки перегиба, — довольно типичное свойство. Например, если слегка пошевелить кривую, то точки перегиба не исчезнут. Специальным является, скорее, случай кривых, не имеющих то-

чек перегиба; такие кривые называются *выпуклыми*. Двойственные к выпуклым кривым являются *гладкими* и не содержат клювов.

Уравнение $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ и ласточкин хвост

До сих пор мы имели дело с уравнениями, зависящими от двух параметров. Что будет, если параметров больше? Рассмотрим уравнение $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Это уравнение задает семейство линейных уравнений с тремя переменными p, q, r — по одному линейному уравнению для каждого значения x . Каждое линейное уравнение задает в пространстве с координатами (p, q, r) плоскость, а семейство таких уравнений — семейство плоскостей, зависящих от x как от параметра. Огибающей этого семейства служит поверхность, которой касается каждая плоскость семейства. Эта поверхность состоит из таких точек (p, q, r) , что уравнение $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ имеет кратный корень. Ее дополнение в пространстве состоит из трех кусков; эти куски отвечают случаям, когда уравнение имеет 4, 2 или 0 корней. Описание этих кусков вы найдете в конце статьи Д. Б. Фукса «Геометрия листа бумаги» («Квант» № 9 за 1988 год).

Как же построить огибающую поверхность семейства плоскостей? Выберем некоторое значение параметра x и возьмем две плоскости нашего семейства, отвечающие двум значениям параметра, очень близким к x . Эти плоскости пересекаются в пространстве по некоторой прямой, положение которой определяется числом x . Значит, каждому значению x соответствует прямая в пространстве; совокупность этих прямых и образует огибающую поверхность семейства плоскостей. Следовательно, огибающая семейства плоскостей — *линейчатая поверхность*. Более того, все построенные прямые касаются некоторой пространственной кривой. Чтобы построить эту кривую, нужно для каждого значения парамет-

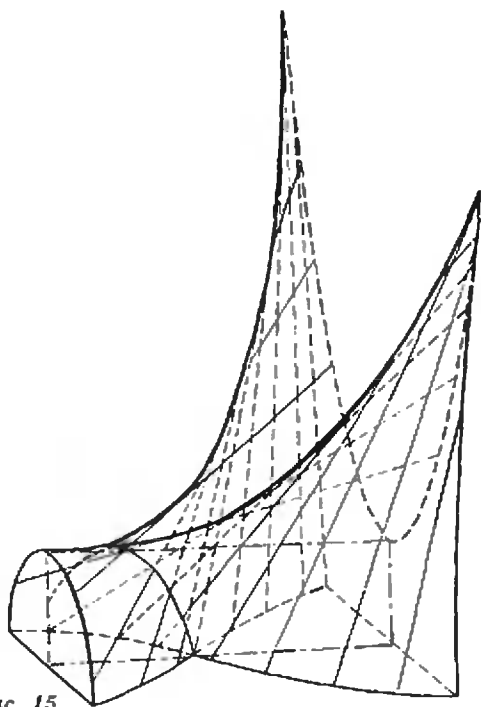


Рис. 15.

ра x найти точку пересечения трех плоскостей нашего семейства, кото-

рые отвечают трем значениям параметра, очень близким к x . Тогда каждому x будет соответствовать точка в пространстве; совокупность этих точек и образует нужную пространственную кривую.

Итак, огибающая поверхность семейства плоскостей $x^2 + px^2 + qx + r = 0$ состоит из прямых, которые касаются кривой в пространстве. Такие *развертывающиеся поверхности* — главные действующие лица названной выше статьи Д. Б. Фукса. Построенная нами поверхность называется *ласточкин хвост*. В статье Д. Б. Фукса эта поверхность изображена так, как ее принято рисовать в наше время; на рисунке 15, заимствованном из книги Ф. Клейна «Элементарная математика с точки зрения высшей», она изображена в другом ракурсе. Посмотрите на рисунок 15 и сравните его с рисунком ласточкиного хвоста из статьи «Геометрия листа бумаги». Узнаете ли вы на нашей картинке ласточкин хвост?

Вниманию наших читателей!

Магазин № 1 «Академ-книга» г. Уфы высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Батурин Ю. М. *Право и политика в компьютерном круге*. — 1987. — 40 к.

Гинзбург В. Л. *О физике и астрофизике. Статьи и выступления*. (Наука. Мировоззрение. Жизнь). — 1985. — 1 р. 80 к.

Капица П. Л. *Эксперимент. Теория. Практика. Статьи и выступления*.

Изд. 4-е, испр. и доп. (Наука. Мировоззрение. Жизнь). — 1987. — 2 р.

Клейн Ф. *Элементарная математика с точки зрения высшей*: В 2-х т. Пер. с нем. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. — 1987. — 1 р. 40 к. — Т. 2. Геометрия. — 1987. — 1 р. 40 к.

Климишин И. А. *Открытие Вселенной*. — 1987. — 1 р. 50 к.

Козел С. М., Рашба Э. И., Славатинский С. А. *Сбор-*

ник задач по физике. Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. — 1987. — 75 к.

Марочник Л. С. *Свидание с кометой*. (Библиотечка «Квант»). — 1985. — 35 к.

Рыбасенко В. Д., Рыбасенко И. Д. *Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики*. — 1987. — 2 р.

Силин А. А. *Трение и мы*. (Библиотечка «Квант»). — 1987. — 35 к.

Заказы на книги направляйте по адресу: 450059 г. Уфа, ул. Р. Зорге, 10, магазин «Академкнига».

Сергей Львович Соболев

(к 80-летию со дня рождения)

6-го октября 1988 года исполнилось 80 лет со дня рождения выдающегося математика Сергея Львовича Соболева.

Работы С. Л. Соболева оказали существенное влияние на развитие математики XX века, им был внесен фундаментальный вклад в теорию уравнений с частными производными, функциональный анализ, теорию функций, математическую физику, вычислительную математику.

Самостоятельно освоив программу средней школы (Сергей Львович учился в школе всего один год — в последнем классе), Соболев в 1925 году поступил на физико-математический факультет Ленинградского университета. Его математическое дарование проявилось необычайно рано. Достаточно сказать, что в 25 лет он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 31 год — академиком.

Годы после окончания университета были для Сергея Львовича очень плодотворными. Совместно с В. И. Смирновым им был создан ставший классическим метод решения волнового уравнения, описывающего колебания в упругой среде. Изучение «соболевских пространств» функций, введенных С. Л. Соболевым в 30-е годы, составляет сейчас целый раздел функционального анализа. Особенно важным оказалось предложенное Сергеем Львовичем понятие обобщенной функции; развитие позднее в работах французского математика Лорана Шварца и советского математика академика И. М. Гельфанда, оно стало одним из центральных понятий математики.

Переехав в Москву, С. Л. Соболев вскоре начал преподавать в Московском университете, в котором он проработал более двадцати лет. С 1952



по 1957 год он руководил первой в нашей стране кафедрой вычислительной математики. Вклад С. Л. Соболева в эту науку отражен в его монографии «Введение в теорию кубатурных формул».

В 1957 году С. Л. Соболев переехал в Новосибирск, став одним из организаторов Сибирского отделения АН СССР. С 1960 по 1978 год он также был профессором Новосибирского университета.

У С. Л. Соболева много учеников и последователей. Он избран членом французской Академии наук, Национальной академии деи Линчеи в Риме, а также многих других научных обществ. Он — Председатель Национального комитета советских математиков.

Редакция журнала «Квант» сердечно поздравляет члена редакционного совета «Кванта» Сергея Львовича Соболева с юбилеем и желает ему здоровья и новых творческих успехов.

ХИМИЧЕСКОЕ РАЗНООБРАЗИЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

В прошлом номере мы остановились на трагическом эпизоде, связанном с вулканическим кратером Ниос. Сегодня вернемся к кратерам ударного происхождения.

Ударные кратеры на Земле

На Земле кратеров такой древности, как на Луне, сейчас не существует. Подвижные атмосфера и океан нашей планеты размывают очертания кратеров. Кроме того, поверхность нашей планеты довольно быстро (за 200—300 миллионов лет) обновляется — посреди океанов постоянно рождается новая кора, а старая погружается на краях океанов в воду. С помощью контрастных фотографий из космоса удалось все же обнаружить на Земле около сотни сильно сглаженных временем кольцевых структур диаметром до ста километров. Оказалось, например, что Калуга расположена в древнем кратере диаметром 15 км. Наибольший отчетливый кратер находится в Аризоне (США). Он имеет диаметр 1265 м и глубину 175 м, а образовался всего 25—30 тысяч лет назад.

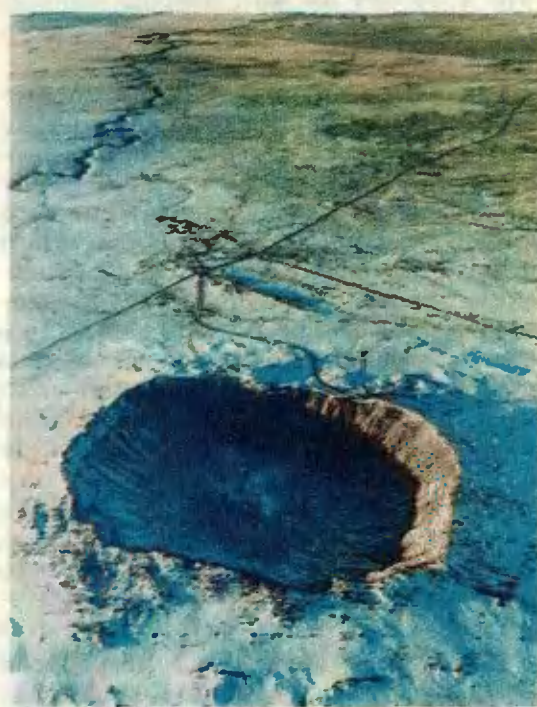
Как связаны между собой размер кратера и масса метеорита и его скорость? Нет нужды пояснять, насколько важен ответ на этот вопрос для восстановления картины катастрофических событий в истории Земли, Луны, планет.

При первом, интуитивном взгляде, основанном на повседневном опыте, может показаться, что след от падения тела по размерам должен быть примерно равным размерам упавшего тела. Однако, этот пример — хорошая иллюстрация того, что в физике мож-

но полагаться на повседневный опыт лишь с осторожностью и что интуиция срабатывает не всегда. Оказывается, что масса извлекаемого из кратера вещества в сто — триста раз превосходит массу самого метеорита.

Из-за чего же столь различны результаты падения брошенного камня и метеорита? Ответ: в первом случае скорость столкновения много меньше скорости звука в породе $v_{зв} \approx 5 \times 10^3$ м/с. во втором же случае — больше ее.

Радиус R кратера, который образуется при сверхзвуковом столкновении, можно оценить из энергетического подсчета. На что расходуется



Аризонский кратер.

кинетическая энергия $E_0 \sim mv^2$ метеорита? Во-первых, на разрушение, дробление горных пород в объеме кратера и на разрушение (вплоть до испарения) самого метеорита. Сразу скажем, что при сверхзвуковом ударе размер кратера окажется значительно больше размера метеорита, поэтому затраты энергии практически будут связаны только с образованием кратера. Во-вторых, часть начальной энергии переходит в кинетическую энергию выбрасываемых из кратера горных пород. В-третьих, есть еще расход на энергию звуковых волн, уходящих вглубь Земли и в атмосферу. Есть, наконец, тепловая энергия, уходящая на нагревание, а при мощных ударах — на частичное плавление и даже испарение горных пород. Однако учитывать ее как независимое слагаемое при подсчете энергетического баланса было бы неверно. Ведь вся (практически вся) энергия метеорита уходит в конечном счете именно на нагревание горных пород, пройдя перед этим через другие, механические, формы. (Оговорка «практически» связана с изменениями в результате столкновения скорости движения всей Земли и скорости ее вращения, которые ничтожны даже при столкновении Земли с большим астероидом.)

Оценим теперь эти энергетические затраты по порядку величины.

Расход энергии E_1 на разрушение пород пропорционален объему кратера, т. е. $E_1 \sim R^3$. На что следует его (объем) умножить, чтобы получить работу разрушения? Нетрудно понять, что энергия разрушения породы есть объем, умноженный на предел прочности породы σ_n , т. е. $E_1 \sim \sigma_n R^3$.

Оценим энергию E_2 , которая идет на выброс горных пород из кратера. Перемещение большей части массы при образовании кратера происходит на расстоянии порядка радиуса R . Для такого перемещения масс в поле тяжести начальная скорость разлета должна по порядку величины быть равной $u_0 \sim \sqrt{gR}$. Полная масса выброшенных из кратера горных пород есть $m_n \sim \rho R^3$. Поэтому затраты на выброс — $E_2 \sim m_n u_0^2 \approx \rho g R^4$.

Поверьте на слово: энергетические расходы на звуковые волны E_3 всегда бывают малы по сравнению с E_1 и E_2 . Физическая причина этого состоит в том, что при любом сверхзвуковом столкновении сперва возникает ударная волна. Что это такое? Это сильное сжатие, распространяющееся в материалах со скоростью, большей скорости звука, и тем большей, чем сильнее это сжатие, чем больше перепад плотности. Именно ударная волна производит и разрушение, и ускорение вещества. Только тогда, когда основная энергия ударной волны окажется израсходованной, когда сжатие в волне станет слабым, а скорость — равной скорости звука, ударная волна переходит в обычную акустическую, звуковую. Волна является ударной примерно в объеме кратера, а звук убегает с малым затуханием на большие расстояния (по всей планете).

Итак, главные первичные энергетические затраты есть E_1 и E_2 . Напишем теперь приближенное уравнение энергетического баланса при падении метеорита (оно позволит определить порядок величины радиуса кратера):

$$E_0 \approx E_1 + E_2, \text{ т. е. } mv^2 \sim \sigma_n R^3 + \rho g R^4.$$

Обратите внимание: в кинетической энергии пропущен коэффициент $1/2$. Это связано с тем, что наша цель — получить оценку только по порядку величины. Коэффициенты перед членами правой части равенства могут быть получены только точным решением задачи.

По этой же причине приведенное уравнение надо и писать несколько иначе. Посудите сами. В сумме всегда одно из слагаемых окажется много больше другого, а если они и будут одного порядка величины, то достаточно и оставить только один член. Какой из них? — Тот, что больше. А это, в свою очередь, зависит от радиуса кратера, пока неизвестного. Посмотрим, при каком радиусе оба члена в правой части будут одинаковы: при $R \sim R_0 = \sigma_n / \rho g$. Для оценки будем считать σ_n равным пределу прочности осадочных пород $\sigma_n \sim 10^7$ Н/м², для плотности примем значение $\rho \sim 3 \times 10^3$ кг/м³. Тогда

$$R_0 = \sigma_n / \rho g \sim 3 \cdot 10^2 \text{ м}$$

(мы оставляем тройку в результатах численных оценок — ее надо воспринимать не как коэффициент, а как полпорядка: $10^{0.5} \approx 3$).

При радиусах кратеров много меньших R_0 в уравнении для R будет доминировать первое слагаемое, а в обратных случаях — второе. Поэтому уравнение можно переписать так:

$$mv^2 \sim \sigma_n R^3 \text{ при } R \ll R_0,$$

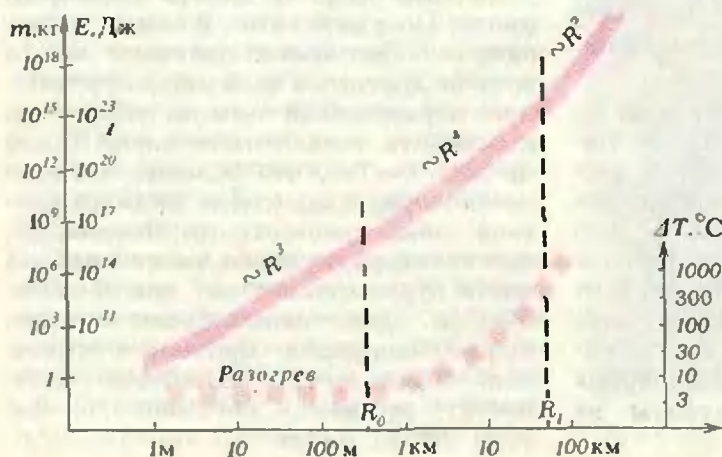
$$mv^2 \sim \rho g R^4 \text{ при } R \gg R_0.$$

Кратеры первого типа ($R \ll R_0$) называют прочностными, а второго ($R \gg R_0$) — гравитационными.

Скорость вхождения метеорита в атмосферу Земли превышает вторую космическую скорость 11,2 км/с, затем она несколько снижается от торможения в атмосфере. Поэтому для наших грубых оценок будем считать скорость столкновения с земной поверхностью порядка 10^4 м/с. Энергия метеорита E_0 зависит, таким образом, в основном от его массы, которая может изменяться в очень широких пределах. Для массы метеорита, образующего кратер критического радиуса, получаем:

$$m_0 \approx \sigma_n R_0^3 / v^2 \approx 3 \cdot 10^6 \text{ кг.}$$

Падение таких и больших метеоритов — достаточно редкое событие, но зато след его остается на земной поверхности на времена геологических масштабов, и потому общее число обнаруженных на Земле гравитационных кратеров около сотни.



Зависимость радиуса R кратера от массы m метеорита (или от его кинетической энергии E при входе в атмосферу). При образовании малых кратеров расходуется на разрушение горных пород. При R больших R_0 начинает преобладать расход энергии на выброс пород из кратера.

Нижняя кривая демонстрирует среднюю температуру разогрева горных пород при образовании кратера. При образовании кратеров с радиусом больше R_1 происходит размягчение и расплавление значительной части пород из кратера.

Тепловой баланс

Посмотрим теперь, как разогреваются горные породы при образовании кратеров. Надо, конечно, иметь в виду, что этот разогрев происходит крайне неравномерно, и мы сможем оценить только среднее повышение температуры.

Вся начальная энергия метеорита E_0 в конечном счете переходит в тепловую энергию: $E_0 = E_T$. Без учета частичного плавления и испарения горных пород тепловую энергию можно считать по порядку величины равной

$$E_T \sim c \rho R^3 \cdot \Delta T.$$

Здесь $c \approx 10^3$ Дж/(кг · К) есть характерная величина теплоемкости горных пород, а ΔT — среднее возрастание температуры горных пород. Для гранитной породы и не слишком больших метеоритов (когда $E_0 \sim \sigma R^3$) средний нагрев по объему кратера, как легко видеть, не зависит от массы и энергии метеорита и равен

$$\Delta T = \sigma_n / c \rho \approx 3 \text{ К.}$$

Всего-то. Поскольку средний разогрев так мал, ясно, что доля расплавленного и тем более испаренного вещества при образовании любых малых кратеров ничтожна.

При падении метеоритов с размерами, большими критического (когда $E_0 \approx \rho g R^4$), температура разогрева горных пород растет пропорционально радиусу кратера:

$$\Delta T = g R / c.$$

Доля расплавленного материала растет с ростом размера кратера. Когда средний разогрев достигнет характерной температуры размягчения или химического преобразования горных пород — примерно 300 градусов, эта доля станет подавляющей. Массовое плавление происходит при образовании на Земле кратеров с радиусами, превышающими 30 км (на Луне — 10 км). Соответственно масса метеорита для образования такого кратера по порядку величины должна превышать $3 \cdot 10^{11}$ кг. Такие кратеры — свидетельства редчайших событий. Их размытые следы сохраняются в течение почти всей геологической истории Земли, однако на всей планете пока обнаружено только несколько кратеров с радиусом, большим 30 км.

Начиная примерно с этого размера, формула $R \sim E^{1/4}$ становится неприменимой, поскольку учет теплоты плавления делает более сложным баланс энергии метеорита. Кратеры с массовым размягчением пород и внешне выглядят иначе. С ростом размера становится все более заметной новая особенность — застывшие концентрические волны. Уже у кратеров с радиусом более 1 км есть отчетливое центральное поднятие, а отпечатки грандиозных катастрофических столкновений — кратеры с радиусами, большими 30 км, имеют 3—4 гребня и впадины. Отчетливо видны не размытые эрозией и не скрытые осадками многокольцевые структуры гигантских кратеров на Луне. Посмотрите на фотографию лунного кратера Ориентале — концентрические кольца в его рельефе похожи на волны, бегущие по воде от упавшего камня.

Даже при образовании малых кратеров часть горной породы и самого метеорита разлетается в виде расплава. Такие застывшие в полете каменные капли называются тектитами. При образовании больших кратеров тектиты разлетаются на сотни и тысячи километров, образуя вокруг кратеров тектитные поля. Особенно четко очерчиваются границы тектитных полей на дне океанов, там, где



Лунный кратер Ориентале (Море Восточное).

осадочный слой нарастает достаточно медленно. Так, например, от кратера Босумтви (радиус 5 км), образовавшегося чуть более миллиона лет назад на берегу Гвинейского залива, простирается в океан тектитное поле в форме овала 2000×1000 км. Есть на Земле тектитное поле, которое занимает почти весь Индийский океан! Однако следы его кратера (подводного?) пока не обнаружены.

Попробуем представить, что произойдет, если крупный метеорит упадет в океан. В этом случае его кинетическая энергия E_0 будет затрачена, главным образом, на нагрев и испарение объема воды $\sim R^3$:

$$E = (\lambda + c \cdot \Delta T) \rho R^3.$$

Теплота испарения воды $\lambda \approx 2,5 \times$

$\times 10^5$ Дж/кг, но величину $\lambda + c \cdot \Delta T$ можно оценить лишь грубо в 3×10^6 Дж/кг, поскольку значительная часть пара окажется сильно перегрета. Если объем по порядку величины превысит H^3 , где $H=4000$ м — характерная глубина океана, то на океанском дне образуется кратер с размером порядка H , в обратном же случае на дне следа от падения метеорита не останется. Значит, граничная масса метеорита, начиная с которой он может образовать кратер на дне океана, есть

$$m \approx (\lambda + c \cdot \Delta T) \rho H^3 / v^2 \sim 2 \cdot 10^{12} \text{ кг.}$$

Примеров уверенного отождествления кольцевых структур на океанском дне с метеоритными кратерами пока нет.

«Источник» неоднородности

Наконец, есть еще вопрос, который может возникнуть у дотошного читателя.

Известно, что в замкнутых системах температуры с течением времени выравниваются, а разные по химическому составу части системы перемешиваются до полной однородности. Этот физический принцип называется вторым началом термодинамики. Почему этот принцип оказывается нарушенным при формировании планет, при гравитационной дифференциации?

Гравитационная дифференциация есть планетный аналог процессов, давших нашей Вселенной возможность избежать «тепловой смерти». (Если вы прочитали статью И. Д. Новикова «Вселенная как тепловая машина» в апрельском номере «Кванта», вам эта аналогия, возможно, уже приходила на ум; если не читали — очень советуем прочитать.) Температура и в присутствии гравитации выравнивается, просто для Земли и даже для Луны еще не прошло достаточно времени для полного остывания недр. Для остывания, например, Земли нужно 50 миллиардов лет, а прошло с момента образования лишь около 4,5 миллиардов лет. Неоднородность же состава в конеч-

ном состоянии как раз и есть следствие законов термодинамики с учетом гравитационной энергии системы.

Все-таки поразительно изобретательна природа в ее стремлении к разнообразию. Из всего двух элементарных частиц — протона и нейтрона (или из трех кварков, если угодно) — она ядерными силами создает сотню разных химических элементов и несколько тысяч изотопов. Добавился один электрон — и с помощью электромагнитных сил возникают миллионы химических соединений. Наконец, с помощью гравитации все это вещество неоднородно, разнообразными способами распределяется по Вселенной.

От редакции

Эта статья — ее первая часть была опубликована в предыдущем номере — появилась в процессе работы автора над вторым изданием (переработанным и дополненным) книги «Наша планета — Земля». Книга будет выпущена Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» в 1989 году.

В книге рассматривается широкий круг вопросов — от происхождения химических элементов до климата Земли и его воздействия на цивилизацию. Центральная тема книги — осознание того, почему наша планета при очевидной общности со всей Солнечной системой все же настолько уникальна, что стала единственно известным источником жизни.

Мы советуем нашим читателям не пропустить эту интересную книгу.

Нам пишут

Два обобщения классических формул

В школе изучаются формулы разности квадратов и разности кубов:

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2) &= (x - y)(x + y), \\ (x^3 - y^3) &= (x - y)(x^2 + xy + y^2).\end{aligned}$$

Эти формулы являются частными случаями общей формулы:

$$(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

где n — натуральное число. Оказывается, что имеется дальнейшее обобщение этой формулы:

$$\begin{aligned}(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) - (y - a_1)(y - a_2)\dots(y - a_n) = \\ = (x - y)((x - a_2)(x - a_3)\dots(x - a_n) + (y - a_1)(x - a_3)\dots(x - a_n) + \dots \\ \dots + (y - a_1)(y - a_2)\dots(y - a_{n-2})(x - a_n) + (y - a_1)(y - a_2)\dots(y - a_{n-1})),\end{aligned}$$

где a_1, a_2, \dots, a_n — заданные числа. Эта формула превращается в предыдущую при $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Доказательство этой формулы можно провести по индукции.

С. Ф. Алексеев

* * *

В журнале «Квант» не раз писалось о формуле бинорма Ньютона, частные случаи которого —

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\ (x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

изучаются в школе. Для произвольного числа n формула бинорма Ньютона записывается в виде:

$$(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y^1 + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \dots + C_n^k x^{n-k} y^k + \dots + C_n^{n-1} x^1 y^{n-1} + y^n,$$

где коэффициенты C_n^k выражаются следующим образом:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}.$$

Введем новую операцию, аналогичную операции возведения в степень: $x^{(k)} = x(x-1)\dots(x-k+1)$. Заметим, что $x^{(1)} = x$, $x^{(2)} = x(x-1)$, $x^{(3)} = x(x-1)(x-2)$ и т. д.

Рассмотрим выражение $(x + y)^{(n)}$. Оказывается, что для него имеет место в точности такое же разложение в сумму, как и для бинорма Ньютона:

$$(x + y)^{(n)} = x^{(n)} + C_n^1 x^{(n-1)} y^{(1)} + \dots + C_n^k x^{(n-k)} y^{(k)} + \dots + C_n^{n-1} x^{(1)} y^{(n-1)} + y^{(n)}.$$

Эту формулу для $n=2$ и $n=3$ несложно проверить непосредственно. Доказательство для произвольного натурального n довольно сложно.

А. А. Новожилов

Обобщение теоремы Птолемея для произвольных четырехугольников

Обозначим через a, b, c, d стороны, через e, f — диагонали, через S — площадь и через α — полусумму противоположных углов выпуклого четырехугольника. Тогда

$$4S^2 = e^2 f^2 - \frac{1}{4} (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2.$$

Данный четырехугольник можно шарнирно продеформировать во вписанный (не меняя при этом длин его сторон). Пусть S_0 — площадь полученного четырехугольника (ее можно найти по формуле $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, являющейся обобщением формулы Герона). Выполнены следующие замечательные равенства:

$$S_0^2 - S^2 = abcd \cos^2 \alpha; \quad 4(S_0^2 - S^2) = (ac + bd)^2 - e^2 f^2.$$

В качестве следствия получаем: среди четырехугольников с данными длинами сторон наибольшую площадь имеет вписанный. Кроме того, выполнено неравенство $ef \leq ac + bd$, которое, по теореме Птолемея, превращается в равенство для вписанного четырехугольника. Приведенные формулы могут быть выведены из теоремы косинусов. Попробуйте сделать это самостоятельно.

О. А. Иванов, А. К. Кетлер

Задачник «Кванта»

Задачи

M1126—M1130, Ф1138—Ф1142

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 1989 года по адресу: 103006 Москва К-8, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №10—88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1126» или «Ф1138». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1126—M1130 предлагались в этом году на Ленинградской городской математической олимпиаде.

Задачи Ф1138—Ф1142 предлагались на заключительном этапе XXII Всесоюзной олимпиады по физике.

M1126. В трапеции $ABCD$ (с основаниями BC и AD) на сторонах AB и CD выбраны точки K и M . Докажите, что если $\angle BAM = \angle CDK$, то $\angle BMA = \angle CKD$.

А. С. Меркуров

M1127. Микрокалькулятор «Чебурашка» умеет складывать, вычитать и находить по данному числу x обратное число $1/x$. Можно ли с помощью этого микрокалькулятора получить единицу, если исходное число а) $\sqrt{19 + 88}$; б) $\sqrt[3]{88}$; в) $\sqrt{19 + \sqrt{88}}$? (Вводить в микрокалькулятор числа, отличные от исходного или от полученных в результате вычислений на нем, запрещается.)

А. В. Богомольная

M1128. На шахматной доске расставлено несколько фишек. За один ход одна из фишек передвигается на соседнее (по горизонтали или вертикали) свободное поле. После нескольких ходов оказалось, что каждая фишка побывала на всех полях ровно по одному разу и вернулась на исходное поле. Докажите, что был момент, когда ни одна фишка не стояла на своем исходном поле.

Е. В. Абакумов

M1129*. В лесу барона Мюнхаузена растут елки и березы. Барон утверждает, что на расстоянии ровно 1 км от каждой елки растет в точности 10 берез, причем елок в его лесу больше, чем берез. Может ли это быть?

Ф. Л. Назаров

M1130. На плоскости дан выпуклый n -угольник, у которого длина k -й стороны равна a_k , а длина проекции многоугольника на прямую, содержащую эту сторону, равна d_k ($k=1, 2, \dots, n$). Докажите неравенство

$$2 \leq \frac{a_1}{d_1} + \dots + \frac{a_n}{d_n} \leq 4.$$

Д. В. Фокин

Ф1138. Разгоняясь с максимально возможным ускорением на прямом участке шоссе, гоночный автомобиль увеличивает скорость от 10,0 м/с до 10,5 м/с за время 0,1 с. За какое время он смог бы сделать то же самое на кольцевом участке шоссе с радиусом 30 м? При каком радиусе кольца он вообще не смог бы увеличить скорость выше 10 м/с? Плоскость шоссе горизонтальна.

Ф1139. U -образная трубка частично заполнена водой (рис. 1). Верхние концы трубки закрывают и нагревают правое колено трубки до температуры $+100^\circ\text{C}$, а левое — до $+99,5^\circ\text{C}$. Определить установившуюся разность уровней воды в коленах трубки. Справка: на высоте 23 этажа (70 м над землей) температура кипения воды на 0,25 градуса ниже, чем на уровне земли. Тепловым расширением стекла при расчетах пренебречь.

Ф1140. Заряженная частица попадает в среду, где на нее действует сила сопротивления, пропорциональная ско-

Задачник "Квант"

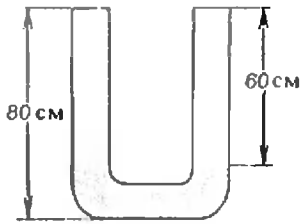


Рис. 1.

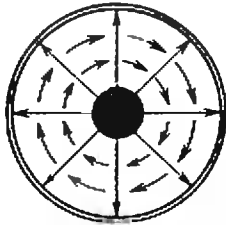


Рис. 2.

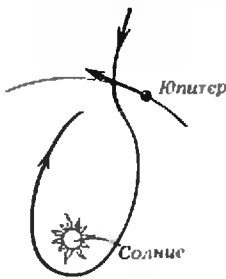


Рис. 3.

рости. До полной остановки частица проходит путь $s=10$ см. Если в среде имеется некоторое магнитное поле, перпендикулярное скорости частицы, она при той же начальной скорости остановится на расстоянии $l_1=6$ см от точки входа в среду. На каком расстоянии l_2 от точки входа частица остановилась бы, если бы поле было в два раза меньше?

А. И. Буздин

Ф1141. В настоящее время в связи с открытием явления высокотемпературной сверхпроводимости изучается вопрос о создании линии передачи постоянного тока без потерь энергии на джоулево тепло. Предполагается использовать для передачи постоянного тока коаксиальный кабель, состоящий из внутренней цилиндрической жилы и наружной цилиндрической оболочки, выполненных из сверхпроводника. Электрическое и магнитное поля в такой системе изображены на рисунке 2. Известно, что индукция магнитного поля у поверхности сверхпроводника не может превышать некоторого значения B_{max} , иначе разрушается сверхпроводимость, а напряженность электрического поля не должна превышать E_{max} , иначе происходит электрический пробой изолирующей прослойки кабеля. Определить, во сколько раз изменится максимальная мощность постоянного тока, передаваемая по такому кабелю, если диаметры внутренней и внешней оболочки увеличить в два раза. Какую максимальную мощность можно передать по кабелю с диаметрами оболочек $D=8$ см, $d=3$ см, если $E_{max}=20$ кВ/см и $B_{max}=5 \cdot 10^{-2}$ Тл? Примечание: индукция магнитного поля в пространстве между цилиндрическими проводниками совпадает с полем прямого проводника с током I :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А² — магнитная постоянная).

С. М. Козел

Ф1142. Образование кометного семейства Юпитера описывается следующей схемой. Комета падает с большого удаления без начальной скорости на Солнце и пролетает недалеко от Юпитера (рис. 3). После прекращения заметного влияния поля тяготения Юпитера комета вновь движется в поле Солнца, причем ее скорость оказывается направленной противоположно скорости Юпитера, а афелий новой орбиты кометы располагается вблизи орбиты Юпитера, т. е. на расстоянии $R=5,2$ а. е. от Солнца. На каком расстоянии от Солнца будет располагаться перигелий орбиты такой кометы?

В. Е. Белонучкин



Problems

M1126—M1130, P1138—P1142

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope

M1126. The points K and M are chosen on sides AB and CD of a trapezium with bases BC and AD . Prove that $\angle BAM = \angle CDK$ implies $\angle BMA = \angle CKD$.

A. S. Mercuryev

M1127. The microcomputer "Cheburashka" (the name of popular toy) can add and subtract numbers and calculate the number

of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 1st, 1989 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in block letters.

Задача «Квант»

$1/x$ inverse to any given number $x \neq 0$. Is it possible to finally get 1 on this microcomputer being given at the start a) $\sqrt{19+88}$; b) $\sqrt[3]{88}$; c) $\sqrt{19+\sqrt{88}}$? (One can only use the initial number and the numbers already obtained in the computer.)

A. V. Bogomolnaya

M1128. A certain number of pawns is placed on a chessboard. In one move one of the pawns shifts to any free adjacent square (a square with a common side). After a few moves it turns out that every pawn had visited each of the squares once and only once and returned to its initial position. Prove that there was a moment when none of the pawns occupied their initial positions.

E. V. Abakumov

M1129*. There are birches and firs in baron Munchausen's wood. The baron claims that there are exactly 10 birches at the distance of exactly 1 km from each fir; moreover he says that there are more firs than birches in his wood. Can the baron be right?

F. L. Nazarov

M1130. The length of the k -th side of a convex plane n -sided polygon equals a_k ; the length of the projection of this polygon onto the lines containing the k -th side equals d_k ($k=1, 2, \dots, n$). Prove that

$$2 \leq \frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \dots + \frac{a_n}{d_n} \leq 4.$$

D. V. Pomin

P1138. Accelerating at highest power along a rectilinear stretch of the road, a racing car increases its speed from 10.0 m/s to 10.5 m/s in time 0.1 s. In how long can it do the same on a circular stretch of the road of radius 30 m? For what radius of the circular stretch is it impossible for the racing car to increase its speed beyond 10 m/s? The road is assumed horizontal.

P1139. A U-shaped pipe is partially filled with water (see figure Pnc. 1). The upper extremities are sealed, the left curved part is heated to 100 °C, the right curved part to 99.5 °C. Find the established difference of levels between the water in the left and right sides of the pipe. Note: on the 23rd floor (70 m above the ground) water boils at a temperature of 0.25 degrees less than at ground level. Thermic expansions of glass are negligible.

P1140. A charged particle penetrates into a medium where a force of resistance, proportional to its velocity, acts on it. The particle travels a distance of $s=10$ cm before it stops. If there is a magnetic field perpendicular to the particle's velocity in the medium, it stops at $l_1=6$ cm from the point of entry (coming in with the same initial velocity). At what distance l_2 from the entry point would it stop if the field were twice less?

A. I. Buzdin

P1141. A present, the discovery of high-temperature superconductivity has stimulated research to devise electric power lines without energy losses due to Joule heating. It is proposed to use a coaxial cable consisting of an inner cylindrical string and a cylindrical cover both made out of superconductors. The electric and magnetic fields of such a system are shown on the figure Pnc. 2. It is known that the induction of the surface of the superconductor cannot exceed a certain value B_{max} (beyond which superconductivity is lost), while the electric field cannot exceed the value E_{max} (beyond which an electric breakout through the cable's isolation takes place). Estimate by how many

Задачник „Квант“

times will the maximal power of direct current which can be transmitted along this cable change if the diameters of the inner and outer covers are doubled. What maximal power may be transmitted along a cable with cover diameters $D=8$ cm, $d=3$ cm, if $E_{\max}=20$ kV/cm and $B_{\max}=5 \cdot 10^{-2}$ Tl? Note: magnetic induction in the space between cylindrical conductors coincides with the field of a direct conductor with current I :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

($\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A² is the magnetic constant).

S. M. Kozel

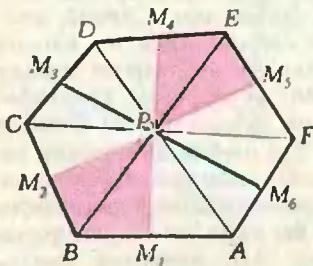
P1142. Jupiter's family of comets can be described according to the following scheme. A comet falls from a high distance with zero initial velocity on the Sun and flies past Jupiter near the latter (see figure Puc. 3). After noticeable attraction of Jupiter's gravitational force ceases, the comet continues to move in the Sun's gravitational field, its velocity being opposite to that of Jupiter, while the aphelius of the comet's new orbit is near Jupiter's orbit, i. e. at the distance of $R=5.2$ from the Sun. At what distance from the Sun will the perihelium of such an orbit be located?

V. E. Belonuchkin

Решения задач

M1106 — M1109, Ф1118 — Ф1122

M1106. Каждая из трех прямых, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника, делит его площадь пополам. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.



Пусть $ABCDEF$ — данный шестиугольник, M_1, M_2, \dots, M_6 — середины его сторон (см. рисунок). Отрезки M_1M_4 и M_2M_5 делят площадь шестиугольника пополам, поэтому четырехугольники PM_1BM_2 и PM_4EM_5 , где P — точка пересечения M_1M_4 и M_2M_5 , равновелики (каждый из этих четырехугольников в сумме с пятиугольником PM_2CDM_4 дает половину площади шестиугольника). Площади четырехугольников $PABC$ и $PDEF$ вдвое больше, соответственно, площадей четырехугольников PM_1BM_2 и PM_4EM_5 , и поэтому они также равны между собой (мы пользуемся тем, что медиана треугольника делит его площадь пополам). Отсюда следует, что ломаная M_3PM_6 делит площадь шестиугольника пополам, как и отрезок M_3M_6 . А это значит, что точка P лежит на отрезке M_3M_6 , что и требовалось доказать.

B. B. Произволов

M1107. Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника, то

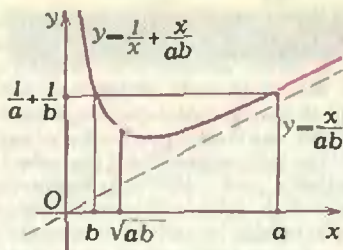
$$2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq$$

$$\geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 3.$$

Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$\frac{2a}{b} - \frac{b}{a} + \frac{2b-a}{c} + \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{b} \right) c \geq 3. \quad (*)$$

Фиксируем a и b и найдем минимум суммы двух последних слагаемых левой части как функции от c ; при этом можно считать, что c не превосходит a и b , так как исход-



Задача „Кванта“

ное неравенство не меняется при циклических перестановках величин a, b, c . Имеем:

$$\frac{2b-a}{c} + \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{b}\right)c = (2b-a)f(c),$$

где $f(x) = 1/x + x/ab$. Поскольку $2b-a \geq b+c-a > 0$, а функция $f(x)$ убывает при $0 < x \leq \sqrt{ab}$ (график $f(x)$ для $a > b$ приведен на рисунке) и $f(a) = f(b) = 1/a + 1/b$, при $c \leq \min(a, b) \leq \sqrt{ab}$

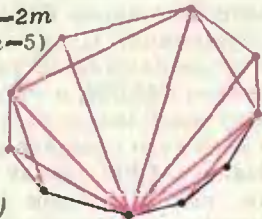
$$(2b-a)f(c) \geq (2b-a)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{2b}{a} - \frac{a}{b} + 1.$$

Таким образом, левая часть неравенства (*) не меньше чем $\frac{2a}{b} - \frac{b}{a} + \frac{2b}{a} - \frac{a}{b} + 1 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1$, а это число, очевидно, не меньше 3.

Л. Д. Курляндчик

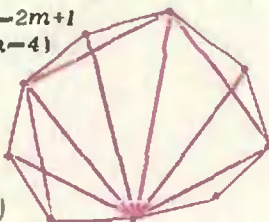
М1108. В выпуклом n -угольнике ($n > 4$) никакие три диагонали не проходят через одну точку внутри многоугольника. Какое наибольшее число диагоналей в нем можно провести так, чтобы все части, на которые они разобьют n -угольник, оказались треугольниками?

$n=2m$
($m=5$)



a)

$n=2m+1$
($m=4$)



b)

Рис. 1.



Рис. 2.

Ответ: $[3n/2] - 4$ (где $[x]$ — целая часть x). Разбиения, приведенные на рисунке 1, показывают, что максимальное число $f(n)$ диагоналей, удовлетворяющих условию задачи, при $n=2m$ не меньше $3m-4 = [3n/2] - 4$, а при $n=2m+1$ не меньше $3m-3 = [3n/2] - 4$. Теперь осталось доказать, что

$$f(n) \leq [3n/2] - 4. \quad (*)$$

Для этого нам понадобится следующая

Лемма. Если некоторый набор диагоналей n -угольника ($n \geq 5$) разбивает его на треугольники, то хотя бы одна из этих диагоналей не пересекается с остальными. (Пересечения в вершинах многоугольника мы не учитываем.)

Для доказательства леммы заметим, что никакая диагональ не может пересекаться более чем с одной другой диагональю: в противном случае один из кусков разбиения, примыкающих к участку диагонали между соседними точками пересечения, не был бы треугольником, так как сумма его углов оказалась бы больше 180° (рис. 2). Допустим теперь, что любая диагональ пересекается с какой-то из остальных, причем только с одной. Пусть AC и BD — такие пересекающиеся диагонали (рис. 3). Поскольку $n \geq 5$, хотя бы одна из сторон четырехугольника $ABCD$, например AB , является диагональю (а не стороной) данного n -угольника. Диагональ AB входит в наш набор, так как в противном случае кусок многоугольника, примыкающий к ломаной AOB , где O — точка пересечения AC и BD , не будет треугольником. Следовательно, существует диагональ, пересекающая AB . Но эта диагональ обязана пересечь также AC или BD , что противоречит сделанному выше замечанию.

Пользуясь леммой, неравенство (*) можно доказать индукцией по n (при $n=3$ и $n=4$ оно очевидно). Пусть оно доказано для всех k , $3 \leq k < n$, где $n \geq 5$. Рассмотрим n -угольник, разбитый диагоналями на треуголь-

Задачник „Квант“

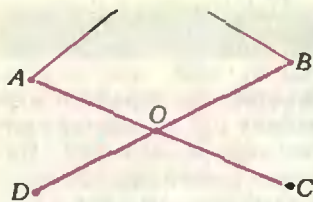


Рис. 3.

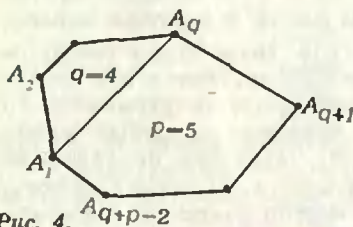


Рис. 4.

M1109. В одном старом задачнике по геометрии была помещена такая задача: вычислить длину стороны правильного треугольника, вписанного в параболу $y = x^2$. В указании к задаче говорилось, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной параболы. Верно ли такое указание? Может ли длина стороны правильного треугольника, вписанного в эту параболу, быть равной а) 3; б) 1988?

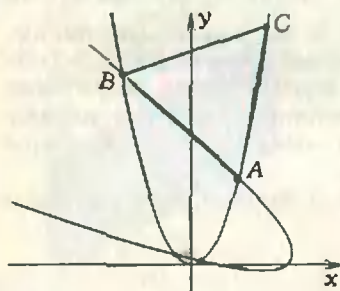


Рис. 1.

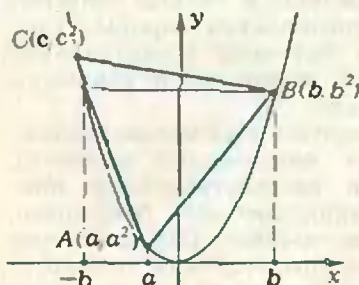


Рис. 2.

ники. По лемме одна из диагоналей не пересекается с остальными. Предположим, что она делит n -угольник на p -угольник и q -угольник (рис. 4). Тогда $3 \leq p$, $q < n$, $p + q = n + 2$, и число проведенных диагоналей по предположению индукции не превосходит

$$1 + f(p) + f(q) \leq \left[\frac{3p}{2} \right] + \left[\frac{3q}{2} \right] - 7 \leq \left[\frac{3(p+q)}{2} \right] - 7 = \left[\frac{3n}{2} + 3 \right] - 7 = \left[\frac{3n}{2} \right] - 4,$$

что и требовалось доказать.

М. Хованов

Ответ: Указание в старом задачнике неверно. Правильный треугольник со стороной 3 вписать в параболу нельзя; со стороной 1988 — можно.

Возьмем произвольную точку $A(a, a^2)$ параболы (пусть для определенности $a \geq 0$) и повернем параболу на 60° вокруг A (рис. 1). Обозначим через B одну из точек пересечения повернутой параболы с исходной, а через C — прообраз точки B при повороте. Тогда ABC — правильный треугольник, вписанный в параболу. Если $a = 0$, то координаты точек B и C равны $(\pm\sqrt{3}, 3)$, а сторона треугольника равна $2\sqrt{3}$. Легко видеть, что это единственный из рассматриваемых треугольников с вершиной в начале координат. При $a \neq 0$ наше построение дает от одного до трех треугольников — в зависимости от числа точек пересечения двух парабол. Условимся выбирать в качестве B точку пересечения с наибольшей ординатой, тогда ясно, что длина стороны треугольника ABC непрерывно зависит от a , причем $AB > 2a$. Действительно, эта точка лежит на пересечении левой ветви параболы с образом при повороте части правой ветви, лежащей выше точки A , и, следовательно, сама лежит выше A . Существование точки пересечения следует из того, что часть правой ветви параболы, лежащую выше точки A , можно заключить в угол, обе стороны которого после поворота пересекают левую ветвь параболы. Следовательно, AB может принимать все значения из промежутка $[2\sqrt{3}; \infty)$, в частности 1988.

Остается доказать, что правильный треугольник со стороной 3 вписать в параболу нельзя. Предположим, напротив, что такой треугольник ABC существует, и a, b, c — абсциссы его вершин A, B и C , причем, для определенности, $a^2 < b^2 \leq c^2$, $b > 0$ (рис. 2). Легко видеть, что тогда $c < 0$ и $b \leq BC/2 = 3/2$. Оценим величину

$$BA^2 = (b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2$$

при $|a| \leq b$. Ясно, что ее наибольшее значение растет с ростом b , поэтому можно считать, что $b = 3/2$. Пользуясь производной, находим, что максимум функции $f(x) = (3/2 - x)^2 + (9/4 - x^2)^2$ на отрезке $[-3/2; 3/2]$ достигается при $x = -1/2$ и равен 8. Таким образом, $BA \leq \sqrt{8} < 3$, т. е. искомого треугольника не существует.

Задачник „Квант“

Можно показать, что длина стороны правильного треугольника, вписанного в параболу $y = x^2$, может принимать лишь значение, большее или равное $2\sqrt{3}$. Наметим план одного поучительного решения, дающего такой результат. Здесь полезно заметить, что все параболы подобны: парабола $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ получается переносом параболы $y = ax^2$ и подобна параболе $y = x^2$ с коэффициентом $1/\sqrt{|a|}$ (парабола с большим коэффициентом a только кажется «острее»). Мы должны убедиться, что около правильного треугольника со стороной d можно описать параболу с любым коэффициентом a , где $|a| \geq 2\sqrt{3}/d$. Через три не лежащие на одной прямой точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) с различными абсциссами x_1, x_2, x_3 можно провести параболу $y = ax^2 + bx + c$; коэффициенты a, b, c находятся из линейной системы уравнений $ax_i^2 + bx_i + c = y_i$ ($i = 1, 2, 3$); в частности,

$$(x_3 - x_2)a = \frac{y_1 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

откуда

$$a = \frac{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)}.$$

Числитель по модулю равен $2S$, где S — площадь треугольника с вершинами (x_i, y_i) ; таким образом, $|a| = 2S/P_l$, где P_l — произведение проекций сторон треугольника на прямую l , перпендикулярную оси параболы. (Это верно для любого треугольника.) Если треугольник — правильный со стороной d ($S = \sqrt{3}d^2/4$) и прямая l образует с одной из его сторон угол φ , то $P_l =$

$$= |d^3 \cos \varphi \cos(\varphi + \pi/3) \cos(\varphi - \pi/3)| = \left| \frac{1}{4} d^3 \cos 3\varphi \right| \leq \leq \frac{d^3}{4}, \text{ и } |a| = 2S/P_l \geq 2\sqrt{3}/d. \text{ В частности, мы видим, что при } a=1 \text{ длина } d \text{ принимает значения } d \geq 2\sqrt{3}; \text{ равенство здесь соответствует случаю } \varphi=0, \text{ когда одна из сторон треугольника перпендикулярна оси параболы (а вершина треугольника лежит в вершине параболы).}$$

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский

Ф1118. Рыбак, живший в устье впадающей в океан реки, переехал на новое место жительства на несколько километров вверх по течению. К своему удивлению, он обнаружил, что время между началом прилива и началом отлива уменьшилось*, а

Как известно, океанские приливы и отливы связаны, в основном, с действием сил тяготения со стороны Луны. Время между приливами и отливами в океане одно и то же и равно примерно 6 часам, что и наблюдал рыбак, живя на берегу океана.

Иная ситуация может сложиться в низовьях впадающих в океан рек (или в мелководных заливах). Дело в том, что по реке распространяются приливно-отливные волны, приход которых, безусловно, влияет на интересующие нас времена. (На Амазонке, например, эти волны даже представляли опасность для судоходства.) Важным обстоятельством является тот факт, что скорость этих волн зависит от глубины — она тем меньше, чем меньше глубина (попро-

*) В опубликованном ранее условии этой задачи допущена опечатка.

время между началом отлива и началом прилива увеличилось. Как объяснить это обстоятельство?

Задачник „Квант“

будьте это показать самостоятельно, например из соображений размерностей). Поэтому, если высота приливно-отливных волн сравнима с глубиной реки (залива), то скорость приливной волны будет меньше, чем отливной.

Это и объясняет явление, обнаруженное рыбаком на новом месте жительства.

А. С. Бутов

Ф1119. В узкую кювету с параллельными вертикальными стенками налили некоторое количество жидкости (рис. 1). Затем кювету начали вращать вокруг вертикальной оси симметрии $O-O$. При некоторой скорости вращения обнажается k -я часть площади дна. Как при этом изменилась сила давления на дно и на узкие боковые стенки (по сравнению со случаем неподвижной кюветы)? При вращении жидкость не выплескивается. Поверхностным натяжением пренебречь.

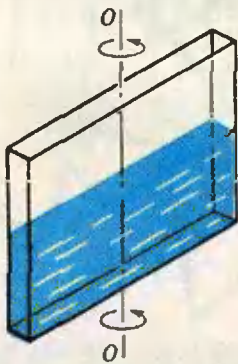


Рис. 1.

Прежде всего введем обозначения: пусть $2l$ — длина кюветы, a — ее ширина, h_0 — начальная высота налитой в кювету жидкости.

Горизонтальная поверхность жидкости во время вращения искривляется. Так как по условию $a \ll 2l$, можно считать, что поверхность жидкости приобретает цилиндрическую форму. Определим, какой вид имеет граница поверхности на боковой стенке.

Мысленно выделим в поверхностном слое вращающейся жидкости маленький объем на расстоянии x от оси вращения (рис. 2). На него действуют сила тяжести mg и сила \vec{N} реакции всей остальной жидкости на этот объем, которая направлена по нормали к поверхности жидкости в данной точке. Эти две силы создают центростремительное ускорение $a_u = \omega^2 x$, направленное к оси $O-O$. Из рисунка 2

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ma_u}{mg} = \frac{\omega^2}{g} x,$$

где α — угол наклона силы \vec{N} к вертикали, равный углу наклона к оси X касательной к поверхности жидкости в данной точке.

Тангенс угла α есть $f'(x)$, и можно найти первообразную функцию $y = f(x)$, которая и является уравне-

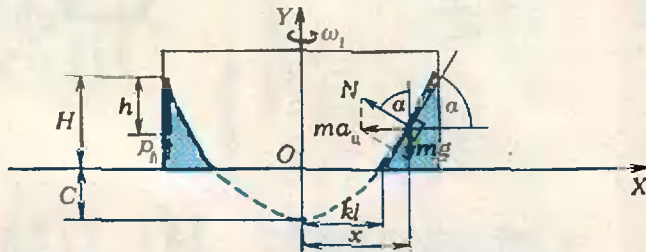


Рис. 2.

нием искомой линии:

$$y' = f'(x) = \frac{\omega^2}{g} x,$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C. \quad (1)$$

Здесь C — константа первообразной. Ее смысл — высота столба жидкости по оси Y при $x=0$. Свободной от жидкости k -я часть площади дна ($0 \leq k < 1$) будет, если при $x=kl$ $y=0$. Отсюда определим C :

(Продолжение см. на с. 34)

...начала вещей
недоступны для глаза...
Дукреши Кар

А так ли хорошо знаете вы,

Насколько малы молекулы?

?

Вопросы и задачи

1. Почему объем раствора спирта в воде меньше объемов воды и спирта, взятых по отдельности?
2. Отчего сильно надутый и плотно завязанный резиновый шарик окажется через несколько дней «сдутым»?
3. Если по микропористой трубе, окруженной герметическим резервуаром, из которого откачан воздух, пропускать смесь газов, то в резервуаре будет накапливаться газ с большим, чем в трубе, относительным содержанием «легких» молекул. Как это объяснить?
4. Водород имеет три изотопа с массовыми числами 1, 2 и 3. Ионы какого из этих изотопов медленнее других продвигаются к катоду при электролизе воды?
5. Стеклянную пластинку

...вследствие малости
частичек веществ
движение скрывается
от взоров.

М. В. Ломоносов

Вопросы и задачи

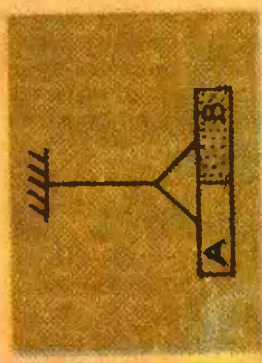
6. Чтобы «приварить» один кусок железа к другому, нагревают оба куска добела в пламени горна, накладывают один на другой на наковальне и обрабатывают сильными ударами кузнечного молота. Почему в этом случае получается прочное соединение?

7. На равноплечих весах установлены два одинаковых сосуда. Один заполнен сухим воздухом, дру-



гой — влажным, имеющим такие же давление

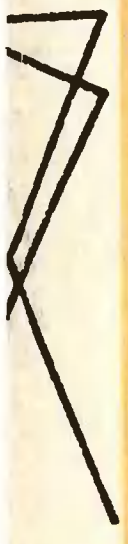
3. **Стеклянную пластинку** покрывают с одной стороны (В) слоем меди и подвешивают на нити, как показано на рисунке. В воздухе пластинка неподвижна, а в хлоре пово-



рачивается на некоторый угол омедненной стороной «вперед». Объяснить явление, учитывая, что молекулы хлора поглощаются медью, а стеклом отражаются.

Любопытно, что...

... в долине реки Теннесси (США) был воздвигнут гигантский завод по разделению изотопов, где два урановых газа (уран-238 и уран-235) непрерывно циркулировали через пористые камеры, в которых более легкий газ диффундировал быстрее, в результате чего газовая смесь постоянно обогащалась легким изотопом урана.



Вот несколько штрихов к обобщенному портрету молекул. Они так малы, что если бы у каждого человека на земном шаре потребовалось по миллиарду молекул, то набралось бы всего несколько миллиардных долей грамма...

Их так много, что если вылить в Мировой океан стакан воды с «помеченными» молекулами, то через длительное время в том же стакане с зачерпнутой из океана водой окажется не менее 200 «меченых»...

Им так «тесно», что при обычных условиях каждая молекула газа испытывает до 10 миллиардов столкновений в секунду со своими соседками... Они так быстры, что молекула газа поднималась бы, не сталкиваясь, на высоту около 5 километров, прежде чем сила тяжести остановила бы ее... Однако, несмотря на такую малость и «юркость», молекулы очень многим «выдают» себя. Надееемся, решение предложенных задач не позволит молекулам ускользнуть от вашего вооруженного зрением взора.

Любопытно, что... *Микроскоп*

... в газопылевых облаках межзвездной среды были обнаружены не только сравнительно простые молекулы, например воды и аммиака, но и сложные органические соединения. «Выдали» их спектральные линии испускания или поглощения в диапазоне радиочастот.



ет в них непостоянный (постепенно уменьшающийся) радиус кривизны?

и температуру, что и сухой. Какой из этих сосудов тяжелее?
8. В каких слоях атмосферы воздух ближе к идеальному газу: у поверхности Земли или на больших высотах?
9. Магнитное поле в камерах Вильсона — Скобельцины однородно. Почему же трек частицы имеет

«Квант» о молекулах

- 1. «К 175-летию закона Авогадро» — 1986, № 12, с. 12;
- 2. «Силы молекулярного взаимодействия» — 1987, № 1, с. 31;
- 3. «Давление газа в сосудах» — 1987, № 9, с. 41;
- 4. «Из жизни молекул» — 1988, № 7, с. 46;
- 5. «Абсолютная температура» — 1988, № 9, с. 60.

Задачи „Кванта“

$$0 = \frac{\omega_1^2}{2g}(kl)^2 + C \Rightarrow C = -\frac{\omega_1^2}{2g}k^2l^2.$$

Окончательно уравнение (1) переписется в виде:

$$y = \frac{\omega_1^2}{2g}(x^2 - k^2l^2). \quad (2)$$

Это — уравнение параболы; здесь под ω_1 обозначена та угловая скорость, при которой обнажается k -я часть площади дна.

Для определения ω_1 воспользуемся свойством несжимаемости жидкости. Первоначальный объем жидкости $V = 2lh_0a$ во время вращения распределится поровну по обе стороны от оси вращения: $V/2 = Sa$, где S — площадь под поверхностью жидкости, т. е. часть площади, под графиком функции $y = f(x)$ на отрезке $kl \leq x \leq l$. Эта площадь криволинейной трапеции соответствует определенному интегралу, взятому в пределах от kl до l :

$$\begin{aligned} S &= \int_{kl}^l y dx = \frac{\omega_1^2}{2g} \left(\int_{kl}^l x^2 dx - k^2l^2 \int_{kl}^l dx \right) = \\ &= \frac{\omega_1^2 l^3}{6g} (1 - 3k^2 + 2k^3). \end{aligned}$$

Теперь из равенства

$$lh_0 a = a \frac{\omega_1^2 l^3}{6g} (1 - 3k^2 + 2k^3)$$

получаем

$$\omega_1 = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{6gh_0}{1 - 3k^2 + 2k^3}} \quad (3)$$

Сила давления на дно во время вращения не меняется. Она по-прежнему равна силе тяжести налитой в кювету жидкости. Сила давления на боковую стенку возрастает. Покажем это.

Мысленно выделим тонкий пристеночный столб жидкости высотой h . Из условия его равновесия по вертикали следует, что давление жидкости на этот столб у его нижнего основания равно $p_h = \rho gh$ (см. рис. 2). Но давление в данной точке жидкости изотропно (закон Паскаля). Следовательно, давление жидкости на стенку при вращении кюветы линейно зависит от глубины. Если жидкость у боковой стенки во время вращения со скоростью ω_1 поднимется до высоты H , то силу давления на стенку можно будет выразить через среднее давление $p_{cp} = \rho gH/2$:

$$F_1 = p_{cp} Ha = \frac{\rho ga}{2} H^2.$$

В покоящейся кювете было

$$F_0 = \frac{\rho ga}{2} h_0^2.$$

Таким образом, увеличение силы давления будет в $n = (H/h_0)^2$ раз.

Задачник „Квант“

Для определения n у стенки нужно в уравнение (2) подставить $x=l$. Окончательно, с учетом (3), получим

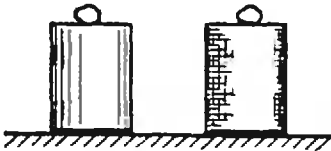
$$n = \left(\frac{3(1-k^2)}{1-3k^2+2k^3} \right)^2.$$

Интересный и неожиданный результат: n есть функция только k и не зависит ни от рода жидкости, ни от ее количества, ни от размеров кюветы. И самое главное — n не зависит от g , т. е. от того, где во Вселенной вращать кювету: на Земле, на Юпитере или на астероиде. (За исключением лишь одного места: на космическом корабле. Почему там «нельзя вращать» кювету, читатель сможет объяснить сам.) Наконец, если положить $k=0$, т. е. вращать до той скорости, при которой донышко «только проглянет», то «всегда и везде» будет $n=9$ (1).

Г. С. Лапидус



Ф1120. Для сравнения теплопроводностей различных материалов предлагается использовать следующий метод. На горячую плиту ставятся два одинаковых цилиндра из исследуемых материалов (см. рисунок). На цилиндры кладут по кусочку воска. Где скорее воск начнет таять — тот цилиндр и обладает лучшей теплопроводностью. Верен ли этот метод?



Ф1121. Металлический шар радиусом ρ , удаленный от других предметов, заземлен через резистор сопротивлением R . На шар налетает пучок электронов, скорость которых вдали от шара была v . В секунду

К сожалению, этот простой метод сравнения теплопроводностей нельзя считать правильным. И вот почему.

Время, за которое верхняя часть цилиндрического образца нагреется до температуры плавления воска, конечно же, тем меньше, чем больше теплопроводность. Однако это время зависит также и от теплоемкости материала цилиндра — чем она больше, тем большее время (большее количество теплоты) потребуются, чтобы нагреть образец до соответствующей температуры. Таким образом, цилиндр из материала с большой теплоемкостью будет разогреваться медленнее, чем цилиндр из материала с небольшой теплоемкостью и чуть меньшей теплопроводностью. Именно так происходит, например, в случае с висмутом и железом.

Оказывается, предлагаемый метод позволяет сравнивать другие тепловые характеристики материалов, а именно — их *температуропроводности*. Это тоже важная физическая величина, которая характеризует скорость изменения температуры вещества. Коэффициент температуропроводности пропорционален отношению коэффициентов теплопроводности и теплоемкости.

А. И. Буздин

Рассмотрим два решения этой задачи.

Первое решение — обычное.

Полная энергия, приносимая электронами за единицу времени, есть

$$W = n \frac{mv^2}{2}.$$

Через резистор течет ток $I = n\epsilon$ (число уходящих в зем-

на шар попадает n электронов. Какое количество теплоты выделяется на шаре за секунду? Каков заряд шара?

Задача «Квант»

лю электронов равно числу попадающих на шар за то же время), так что в резисторе переходит в тепло энергия (в единицу времени)

$$P = I^2 R = (ne)^2 R.$$

В силу закона сохранения энергии, количество теплоты, выделяемое на шаре в единицу времени, равно

$$Q = W - P = n \frac{mv^2}{2} - (ne)^2 R = \frac{nmv^2}{2} \left(1 - n \frac{2e^2 R}{mv^2} \right).$$

Потенциал шара (точнее, разность потенциалов между шаром и землей)

$$\varphi = IR = neR.$$

С другой стороны,

$$\varphi = k \frac{q}{r}.$$

Таким образом, заряд шара

$$q = \frac{\varphi r}{k} = \frac{neRr}{k} = 4\pi\epsilon_0 neRr.$$

Заметим, что электроны *падают* на шар, если их кинетическая энергия больше работы, затраченной на преодоление отталкивания от шара:

$$\frac{mv^2}{2} > e\varphi.$$

Подставляя $\varphi = neR$, перепишем это условие в виде:

$$n < \frac{mv^2}{2e^2 R}.$$

При этом выражение в скобках для определения Q положительно: $Q > 0$. Таким образом, видно, что подбор чисел в условии не может быть произвольным.

Если первоначально число попадающих электронов было больше n , то потенциал шара постепенно увеличивался, так что начиная с какого-то момента часть электронов перестала попадать на шар (из-за электрического отталкивания). Если первоначально потенциал шара был больше или равен φ , то электроны не попадали на шар, а заряд стекал с него до тех пор, пока не установился режим, описанный в задаче.

Второе решение позволит глубже почувствовать, что такое электродвижущая сила источника.

Представим нашу систему как электрическую цепь, состоящую из источника с ЭДС \mathcal{E} и нулевым внутренним сопротивлением и двух последовательно соединенных «резисторов». Сопротивление одного из них — это эффективное сопротивление шара $R_{\text{ш}}$, другого — известное сопротивление R . Источником тока мы назовем устройство, разгоняющее электроны (например, известная электронная пушка). Здесь электрон набирает энергию $mv^2/2 = e\mathcal{E}$. Отсюда ЭДС источника равна

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2e}.$$

Цепь замыкается через заземление (можно считать, что

Задача «Кварта»

в ускоряющее устройство попадают именно те электроны, которые ушли в заземление).

Теперь наша задача — определить эффективное сопротивление шара $R_{\text{ш}}$, так как искомого количество теплоты, выделяющегося на шаре, можно найти из формулы

$$Q = I^2 R_{\text{ш}} = (ne)^2 R_{\text{ш}}.$$

Запишем закон Ома для нашей цепи:

$$\mathcal{E} = I(R + R_{\text{ш}}),$$

откуда, зная \mathcal{E} , I и R , найдем $R_{\text{ш}}$:

$$R_{\text{ш}} = \frac{\mathcal{E}}{I} - R = \frac{mv^2}{2ne^2} - R.$$

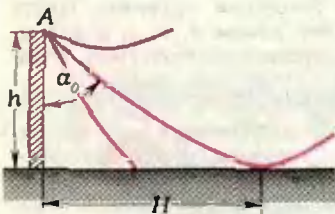
Подставляя $R_{\text{ш}}$ в выражение для Q , после простых преобразований получаем уже знакомое выражение

$$Q = n \frac{mv^2}{2} \left(1 - n \frac{2e^2 R}{mv^2} \right).$$

Заряд шара находим так же, как и в первом решении.

И. Ф. Гинзбург

Ф1122. Известны случаи наблюдения миража моря в пустыне. На каком расстоянии от наблюдателя возникает такой мираж? Считать, что скорость света в приземном слое в пустыне меняется по закону $c(z) = c_0(1 - az)$, где c_0 — скорость света у поверхности земли, z — высота над поверхностью.



Изменение скорости света в воздухе (а значит, и его показателя преломления) с высотой приводит к искривлению световых лучей (к рефракции).*) Это явление и обуславливает возникновение миража моря в пустыне.

Пусть наблюдатель, рост которого h , стоит на земле (см. рисунок). Рассмотрим световые лучи, выходящие из точки A . Луч, составляющий угол α_0 с вертикалью, касается поверхности земли и затем уходит вверх. Углам $\alpha > \alpha_0$ соответствуют лучи, также уходящие вверх. Лучи же, идущие под углами $\alpha < \alpha_0$, упираются в землю. Воспользовавшись свойством обратимости световых лучей, мы получим, что до угла α_0 наблюдатель видит землю, а начиная с α_0 — небо. Но поскольку «небесные» лучи приходят к наблюдателю снизу, ему кажется, что он видит голубое море (ведь человек подсознательно считает распространение света прямолинейным).

Теперь найдем искомое расстояние H .

Согласно обобщенному закону преломления света для слоистой среды,

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \beta_0} = \frac{c(h)}{c_0},$$

где $c(h)$ — скорость света на высоте h , β_0 — угол исследуемого луча с вертикалью у поверхности земли.

*) Подробнее об этом явлении можно прочитать в статье А. А. Варламова и А. И. Маляровского «Переговорная трубка длиной в экватор?» («Квант», 1985, № 2) и в статье С. А. Гордюнина и П. Л. Горькова «Преломление света» в этом номере журнала.

Задачник „Кванта“

Поскольку $\beta_n \approx 90^\circ$, получаем

$$\sin \alpha_0 = \frac{c(h)}{c_0} = 1 - ah.$$

Далее учтем, что изменение скорости света с высотой очень мало и поэтому искривление лучей также очень мало. Так что для расчета расстояния H луч можно считать прямым. Из рисунка видно, что $H = h \operatorname{tg} \alpha_0$. Отсюда, используя закон преломления, получим

$$H = \frac{h(1 - ah)}{\sqrt{ah(2 - ah)}}.$$

Б. И. Клячкин

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Числа p и q простые. Найдите их, если известно, что уравнение $x^4 - px^3 + q = 0$ имеет целый корень.

2. Докажите, что если $xyz = 1$, то

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

3. Две окружности разных радиусов касаются друг друга внутренним образом в точке P . Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке A . Докажите, что PA — биссектриса угла BPC .

4. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC . Точки M и N — середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN прямой.

5. Внутри данного треугольника ABC постройте такую точку M , что площади треугольников ABM , BCM , CAM будут относиться как $k:l:m$, где k, l, m — данные отрезки.

Девятый класс

6. Докажите, что уравнение

$$x^{1987} + y^{1987} = x^{1988} + y^{1988}$$

имеет бесконечно много решений в рациональных числах.

7. Последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + 3x_n$ ($n=1, 2, \dots$). Каким должно быть x_1 , чтобы члены последовательности x_{100} и x_{1000} были равны?

8. Бесконечная геометрическая прогрессия с положительными членами и знаменателем q

обладает тем свойством, что каждый ее член, начиная со второго, больше суммы всех предыдущих. Какие значения может принимать q ?

9. Из каждой вершины пятиугольника проведены векторы к серединам трех несмежных с этой вершиной сторон. Докажите, что сумма всех 15 построенных таким образом векторов равна 0.

10. В треугольнике ABC проведена биссектриса AF угла A . Пусть D, E — точки пересечения AF с вписанной в треугольник окружностью. Докажите, что $AD > EF$.

Десятый класс

11. Решите неравенство

$$|x^9 - x| + |x^6 - x^2| \leq |x^9 - x^6 + x^2 - x|.$$

12. Пусть M — произвольная точка основания ABC тетраэдра $SABC$. Через точку M проведены отрезки, параллельные боковым ребрам, до пересечения с боковыми гранями. Пусть длины боковых ребер равны a, b, c , а длины параллельных им отрезков соответственно равны x, y, z . Докажите, что $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

13. Дан тетраэдр $ABCD$. Один шар касается ребер AB и CD в точках A и C , а другой — в точках B и D . Докажите, что проекции ребер AC и BD на прямую, проходящую через центры этих шаров, равны.

14. Решите уравнение $\operatorname{tg} x - 2[\operatorname{tg} x] - 3 = 0$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа).

15. Докажите, что при любом a уравнение

$$10ax^4 - 4ax^3 + a^2x^2 + 6x - 2 = 0$$

имеет по крайней мере один корень в промежутке $[0; 1]$.

Публикацию подготовили
Ю. В. Томилов, В. А. Ясинский

„Квант” для младших школьников

Задачи

1. Ира, Витя и Коля взяли по порции всех сортов мороженого: фруктового, сливочного и шоколадного. Однако трех порций каждому оказалось мало, и Ира взяла еще порцию фруктового, Витя — сливочного, а Коля — шоколадного мороженого. Уходя, они заплатили: Ира — 70 коп., Витя — 80 коп., Коля — 90 коп. Сколько стоит порция каждого мороженого?

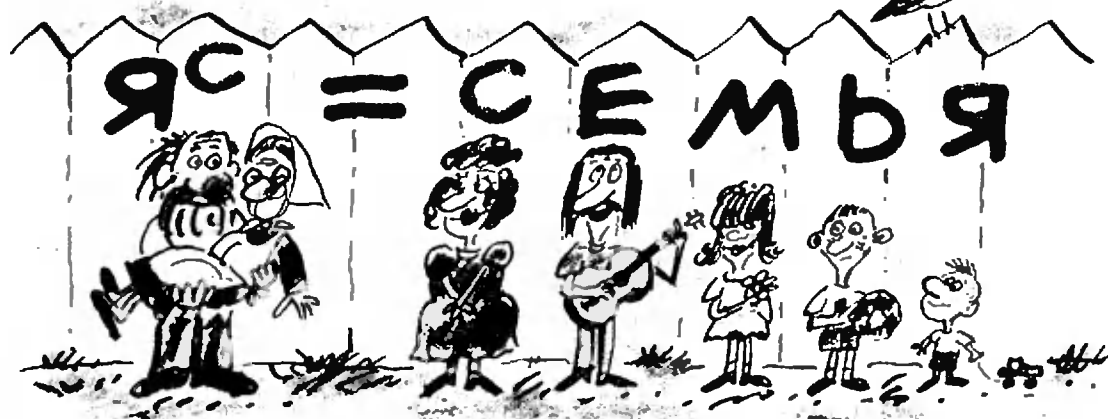
2. Расставьте числа $a=2^{45}$, $b=3^{36}$, $c=4^{27}$, $d=5^{18}$ в порядке возрастания.

3. Часто со словом «снег» употребляют эпитет «искрящийся». Чем это вызвано?

4. Расшифруйте арифметический ребус на рисунке. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.)

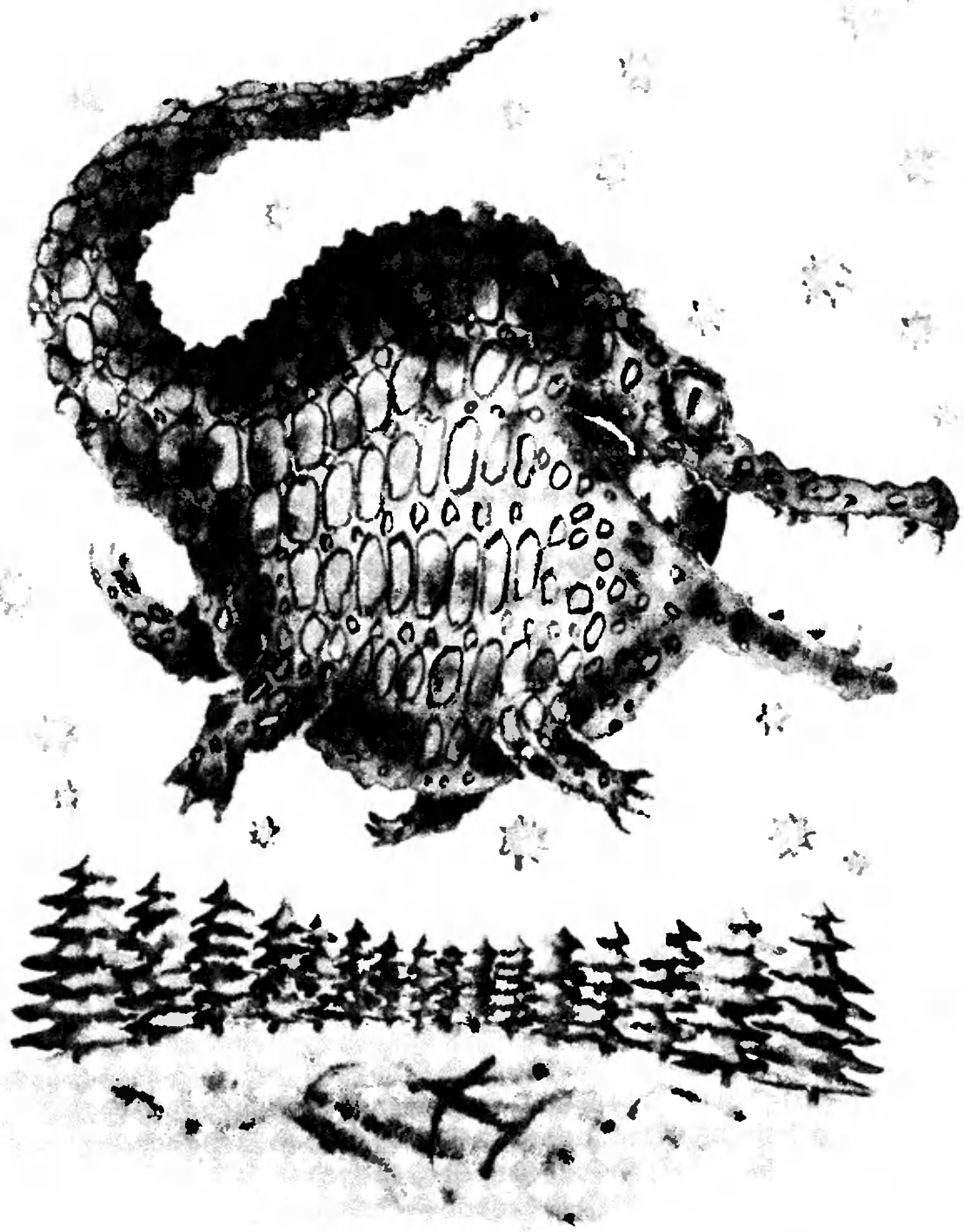
5. Диагональ выпуклого четырехугольника делит пополам отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон этого четырехугольника. Покажите, что эта диагональ делит пополам и площадь четырехугольника.

Эти задачи нам предложили: В. Д. Вьюн, А. П. Савин, А. А. Панов, С. Мадримов, Н. Ю. Нецветаев.



ГРАДУСНИК ДЛЯ СОЛНЦА

Кандидат физико-математических наук
М. Д. КОВАЛЕНКО



Если вы думаете, что название статьи — шутка, то ошибаетесь. Такие градусники существуют. Но не спешите представлять себе, как космические ракеты забрасывают их прямо в огнедышащее светило. Это не так. Впрочем, без космоса дело все-таки не обходится, но об этом немного позже. Как вы скоро узнаете, температура на поверхности Солнца достаточно велика, чтобы расплавился прибор из любого тугоплавкого металла. Да и ракеты пока не дешевы. Значит, надо уметь измерять температуру на расстоянии, нужны безконтактные методы. Потребность в таких методах возникает и в более земных делах. Металлурги должны знать температуру жидкого металла в печи и температуру раскаленного слитка, быстро несущегося по прокатному стану. Авиинженерам необходимо измерять температуру лопаток стремительно вращающейся газовой турбины. Таких примеров, когда нельзя «пощупать» измеряемый объект, много. К счастью, делать это не обязательно, и вот почему.

Все тела постоянно испускают в окружающее пространство энергию в виде теплового излучения. По своей природе тепловое излучение — это электромагнитные волны, т. е. связанные между собой колебания электрического и магнитного полей, которые распространяются в вакууме со скоростью света $c = 300\,000$ км/с. По аналогии с волнами на воде расстояние между двумя соседними «гребнями» колебаний называют длиной волны. Испускаемое телом тепловое излучение несет в себе сведения о температуре тела. При высоких температурах мы видим часть теплового излучения в виде свечения (такое свечение испускают все достаточно горячие тела — и слиток металла, и Солнце, и звезды). Почему только часть? Дело в том, что тепловое излучение представляет собой «смесь» колебаний с различными длинами волн — от $\lambda \approx 0,1$ мкм до $\lambda \approx 100$ мкм. А человеческий глаз реагирует на электромагнитные колебания с длинами волн, лежащими в узком види-

мом диапазоне: $0,4—0,7$ мкм. При температурах ниже 600°C тела не светятся, но тепловое излучение испускают, только длины волн этого излучения лежат в не видимой глазом так называемой инфракрасной области: $0,7—100$ мкм. Человек может ощущать инфракрасное излучение по его воздействию на кожу. Например, хорошо протопленная печь «пышет жаром», обжигает лицо и руки на расстоянии $2—3$ метра — это действует инфракрасное излучение. Если же температура тела превышает 3000°C , то в тепловом излучении появляются длины волн $0,1—0,4$ мкм; это так называемый ультрафиолетовый диапазон (тоже невидимый).

Теперь осталось выяснить, каким образом в тепловом излучении «зашифрована» температура и как ее оттуда извлечь. Для этого нам надо знать, как измеряют спектр излучения — зависимость излучаемой мощности от длины волны. Именно в спектре и содержится вся информация о температуре. Понятно, что прежде всего надо как-то «разделить» тепловое излучение, выделить из «смеси» излучение с определенной длиной волны. Впервые спектр излучения Солнца исследовал великий английский физик Исаак Ньютон. Он пропускал тонкий луч Солнца сквозь стеклянную призму, и поскольку свет с разными длинами волн преломляется в материале призмы по-разному, на экране за призмой получалась радуга (цветам раду-

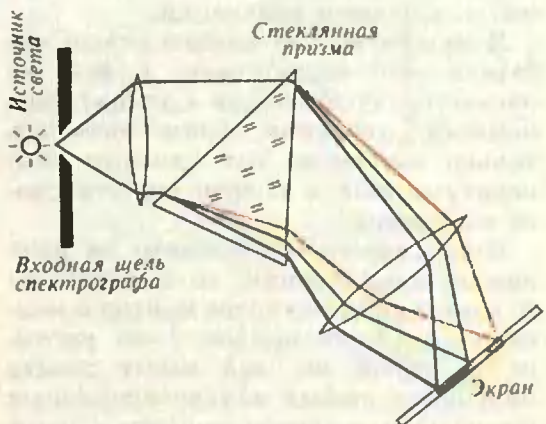


Рис. 1. Разложение теплового излучения в спектр с помощью спектрографа.

ги соответствуют разные длины волн света). Призмы применяют и в современных приборах для изучения спектров — спектрографах (рис. 1). В наше время для повторения опыта Ньютона в качестве источника излучения можно использовать обычную лампу накаливания. Видимая часть теплового излучения источника предстает на экране в виде радужной полосы. Если прямо перед экраном поместить непрозрачную пластинку с узкой щелью, то на экран будет попадать излучение, длины волн которого лежат в узком интервале. Перемещая щель, мы можем увидеть излучение любого цвета радуги — красное, оранжевое, желтое, зеленое и т. д.

Теперь надо измерить, какая энергия приходится на разные длины волн. Для спектральных измерений используют фотоэлектрические приемники, или фотоприемники, — приборы, способные преобразовывать падающее на них излучение, в том числе и невидимое, в электрический ток. Фотоприемник помещают за выходной щелью спектрографа и присоединяют к какому-нибудь регистрирующему устройству (самописцу). Специальный электродвигатель равномерно перемещает фотоприемник вместе с щелью, и перед фотоприемником последовательно проходят все участки спектра, а вырабатываемый при этом ток, пропорциональный мощности излучения, записывается с помощью самописца. В результате самописец отображает зависимость мощности излучения от длины волн, т. е. спектр излучения.

Я чувствую, что нетерпеливый читатель уже спрашивает: а как же насчет градусника для Солнца? Еще немного терпения — нам осталось только выяснить, как связаны температура тела и спектр его теплового излучения.

Если навести спектрометр на нить лампы накаливания, то в результате измерений получится кривая с максимумом — как кривая 1 на рисунке 2. Такой же вид имеет спектр излучения любых конденсированных (твердых и жидких) веществ и плотных газов. При изменении температу-

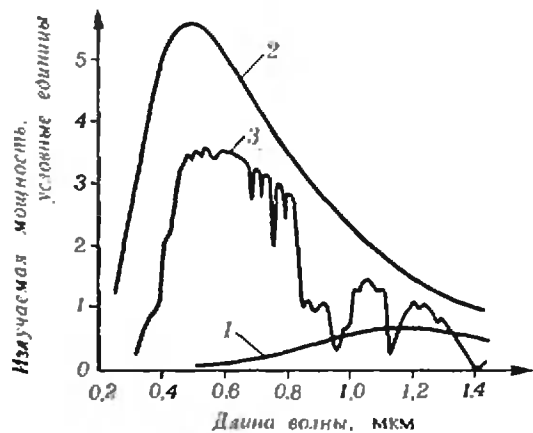


Рис. 2. Спектр теплового излучения: 1 — нить лампы накаливания; 2 — Солнца (внеатмосферные измерения); 3 — Солнца (измерения на поверхности Земли).

ры тела общий вид спектра остается тем же, но максимум в спектре будет смещаться. Одно из замечательных свойств теплового излучения состоит в том, что длина волны λ_m , соответствующая этому максимуму, и температура излучающего тела T связаны простым соотношением*)

$$\lambda_m T = A, \text{ где } A = 3000 \text{ мкм} \cdot \text{К}.$$

По фамилии первооткрывателя этого соотношения его называют законом смещения Вина, а постоянную величину A — постоянной Вина (точное значение этой постоянной — $A = (2897,5 \pm 0,3) \text{ мкм} \cdot \text{К}$).

Ну вот, теперь мы все знаем для того, чтобы измерить температуру поверхности Солнца по спектру излучения. Максимум излучаемой энергии в солнечном спектре приходится на длину волны $\lambda_m \approx 0,5 \text{ мкм}$ (кривая 2 на рисунке 2). Подставляя эту величину в закон Вина, получим температуру поверхности Солнца:

$$T = \frac{3000}{0,5} \text{ К} = 6000 \text{ К} \approx 5700 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Это значительно выше температуры

*) Температура T подразумевается выраженной по шкале Кельвина — в кельвинах (К). В шкалу Цельсия (t , $^\circ\text{C}$), ее переводят по формуле $t = T - 273$. Физики пользуются шкалой Кельвина, так как многие законы имеют наиболее простой вид, если входящая в них температура выражается в кельвинах.

плавления рекордсмена тугоплавкости — карбида тантала: $T_{пл} = 3900^\circ\text{C}$.

Итак, вы убедились, что «пощупать» Солнце можно только на расстоянии. Но лучше не с поверхности Земли. При прохождении сквозь земную атмосферу часть солнечного излучения поглощается водяным паром, кислородом, углекислым газом, причем поглощение происходит в узких участках длин волн. В результате спектр солнечного излучения, достигающего поверхности Земли, сильно искажен по сравнению с исходным (кривая 3 на рисунке 2). Для получения неискаженного спектра аппаратуру помещают в высотные ракеты, стратостаты, достигающие верхних разреженных слоев земной атмосферы. Наилучшие условия для измерений имеются, конечно, на борту орбитальных станций, находящихся выше атмосферы Земли. И «градусники» для Солнца — спектрометры — в космосе действительно летают.

Теперь от проблем небесных вернемся к земным. Что дозволено Юпитеру, то не дозволено быку, — говорили древние римляне. Так бывает и в науке — метод измерения температуры по закону Вина подходит для оценки температуры Солнца, звезд, но не пригоден, скажем, в металлургии. При температурах горячей обработки металла, обычно не превышающих 2000°C , максимум излучения находится в невидимой инфракрасной области, а это усложняет измерения. Кроме того, погрешность определения длины волны, соответствующей максимуму, составляет до 10%, и с такой же погрешностью определяется значение температуры. А металлургам нужна точность на уровне 1%. Поэтому для измерений температуры они используют специальные приборы — оптические пирометры. Самый простой из них — визуальный яркостный пирометр. Температура в этом приборе измеряется по яркости теплового излучения — с ростом температуры яркость растет, тут все ясно. Но пирометр «визуальный», значит, измерения ведутся «на глазок»; так отку-

да же высокая точность? Действительно, человек может определить температуру по яркости излучения лишь очень приблизительно. Однако при сравнении яркостей человеческий глаз работает чрезвычайно точно — он замечает различия, соответствующие долям градуса. На этом свойстве глаза и основано действие прибора. Пирометр (рис. 3) состоит из телескопа T , в корпусе которого помещены фильтр Φ из красного стекла и специальная электрическая лампа L . Оператор наблюдает изображение нити лампы на фоне нагретой поверхности Π тела, температуру которого надо опеределить. Лампа подключена к батарее B и реостату P . Если ток через лампу не идет, то нить видна как темная полоска на фоне светящейся поверхности тела. Регулируя реостатом ток через нить лампы, а следовательно, и ее яркость, оператор добивается того, чтобы яркость нити и нагретой поверхности сравнялась. В этот момент нить становится не различимой на фоне поверхности, она как бы исчезает (отсюда и происходит другое название прибора — пирометр с исчезающей нитью). Теперь остается измерить ток лампы с помощью амперметра, и по предварительно сделанной градуировочной кривой (т. е. по кривой, выражающей зависимость тока лампы от температуры поверхности) определяется температура изучаемой нагретой поверхности. (Несколько слов о том, зачем нужен фильтр Φ . Спект-

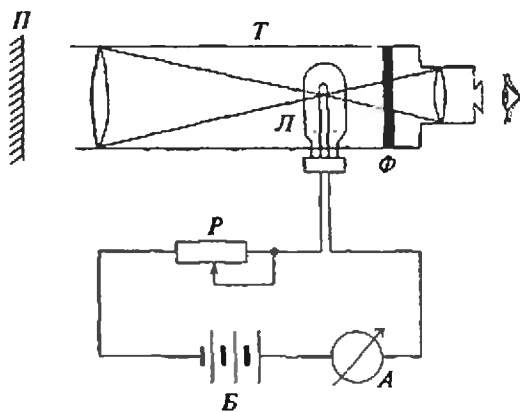


Рис. 3. Схема визуального яркостного пирометра.

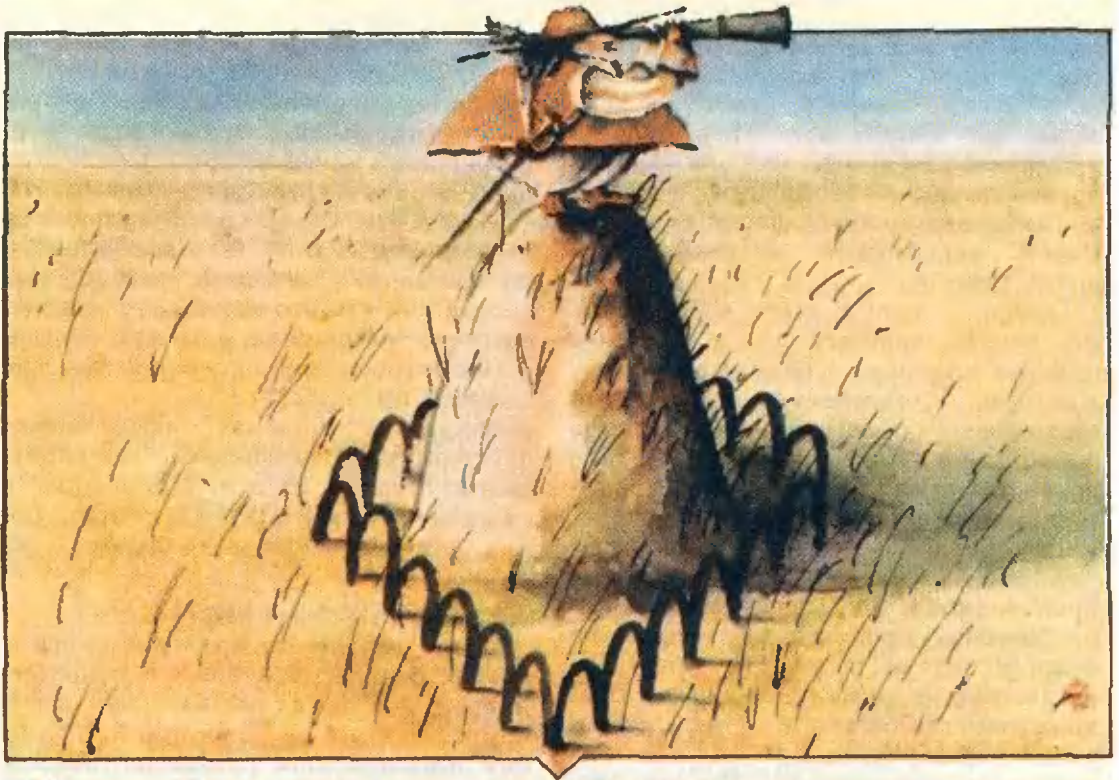
ры излучения разных веществ при одной и той же температуре не всегда совпадают, т. е. у нити и измеряемой поверхности могут быть одинаковые яркости, но несколько различающиеся цвета. В таком случае нить может не «исчезнуть» при совпадении яркости. А фильтр пропускает только излучение одного цвета, т. е. очень узкого интервала длин волн, и при одинаковых яркостях нить «исчезает».)

Пирометр с исчезающей нитью — прибор точный, но медленный. Даже если заменить глаз оператора фотоприемником, а уравнивание яркостей доверить электронике, как это сделано в самых современных пирометрах, то быстрое действие составляет в лучшем случае доли секунды. В пирометрах для наиболее быстрых измерений используют только фотоприемник и фильтр и вовсе не используют лампу сравнения. Температуру определяют прямо по вырабатываемому фотоприемником току, который пропорционален яркости теплового излучения. К сожалению, это только кажущаяся простота. Такой фотоэлектрический пирометр буквально «набит» электроникой, но в точности все-таки уступает пирометру с исчезающей нитью. Зато быстрое действие таких приборов достигает миллионов измерений в секунду. Именно с помощью фотоэлектрических пирометров измеряют температуру в быстрых процессах, например температуру лопаток работающей газовой турбины.

Есть и совершенно другой тип пирометров, называемых цветовыми. Их действие основано на том, что при изменении температуры раскаленных тел меняется не только яркость теплового излучения, но и цвет. По цвету свечения в прошлом определяли температуру при обработке металлов, так как глаз человека различает цвет точнее, чем яркость (красное каление, оранжевое каление, желтое каление, белое каление — этим цветовым оттенкам нагретого металла соответствуют вполне определенные диапазоны температур).

Изменение цвета легко понять из закона смещения Вина: с ростом температуры максимум в спектре излучения смещается в более коротковолновую область (от красной к фиолетовой). Кстати, по этой причине самые холодные звезды — красные, самые горячие — голубые. В промышленных пирометрах для измерения температуры по цвету обычно используется только видимый диапазон длин волн. Зачем нужны цветные пирометры? Они нечувствительны к поглощающей среде между измеряемой поверхностью и пирометром. В этом случае уменьшается яркость излучения, но не изменяется цвет. Такие приборы используют в задымленных цехах, при измерении сквозь полупрозрачные смотровые окна — во всех случаях, когда из-за ослабления излучения яркостный пирометр дает заниженные показания.

Существуют еще десятки типов пирометров на все случаи жизни. Общее у них одно — измерение температуры по спектру теплового излучения. Даже температуры в десятки миллионов градусов, до которых нагревается плазма в экспериментальных термоядерных установках, тоже измеряют по тепловому излучению. Правда, при таких температурах максимум в спектре излучения сдвигается в рентгеновскую область, а рентгеновский спектрометр, кроме названия, не имеет ничего общего с обычным спектрометром. И это уже тема для отдельного разговора...



Школа "Кванте"

Математика 9, 10

Публикуемая заметка адресована девятиклассникам и десятиклассникам.

Ферма ищет экстремумы...

Кандидат физико-математических наук
А. Д. БЕНДУКИДЗЕ

Существует множество задач, требующих нахождения наибольшего или наименьшего значения некоторой переменной величины. Возьмем, к примеру, следующую задачу. Забором длиной $4a$ нужно огородить прямоугольный участок наибольшей площади. Каковы должны быть размеры участка?

Решить эту задачу не трудно. В самом деле, пусть длина участка x . Тогда ширина его будет $2a - x$, а пло-

щадь $x(2a - x)$. Дело сводится к нахождению x , для которого функция $S(x) = 2ax - x^2$ принимает наибольшее значение. А для этого достаточно заметить, что

$$S(x) = a^2 - (x - a)^2 \leq a^2,$$

причем равенство достигается лишь при одном значении x : при $x = a$. Но тогда и $2a - x = a$, т. е. участок должен иметь форму квадрата.

Не всегда, однако, при решении подобных задач удастся обойтись элементарными методами. Вот пример: найти размеры прямого параллелепипеда наибольшего объема с квадратным основанием, если сумма длин стороны этого квадрата и высоты параллелепипеда равна a .

Ясно, что если длину стороны основания обозначить через x , то объем параллелепипеда будет равен $x^2(a - x)$. Итак, необходимо найти такое значение x ($0 < x < a$), при котором функция

$$v(x) = x^2(a - x)$$

принимает наибольшее значение. Как

решить эту задачу элементарным путем, не видно. Что же делать?

Читатель, наверное, думает: а чего мудрить? Вычислим $v'(x)$, решим уравнение $v'(x)=0$, найдем критические точки и посмотрим, в какой из найденных точек наша функция имеет наибольшее значение — все очень просто!

Согласен, проще всего действовать по схеме, изложенной в учебном пособии «Алгебра и начала анализа». Конечно, привлечение производной существенно облегчает исследование функции — нахождение промежутков возрастания и убывания, экстремумов, а также наибольших и наименьших значений.

А все же, нельзя ли обойтись без производной? Неужели раньше, до изобретения производной, ученые не решали задачи подобного типа? Решали, как не решали! Но часто приходилось прибегать к очень хитрым преобразованиям или к геометрическим построениям. Иными словами, до поры до времени не существовало единого метода, пригодного если не для всех, то хотя бы для достаточно обширного класса задач.

Первым, кто нашел такой метод, был гениальный французский математик Пьер Ферма, о жизни и творчестве которого не раз рассказывалось в «Кванте». Например, в статье И. Г. Башмаковой «Пьер Ферма» («Квант», 1976, № 8) приведено известное правило Ферма для нахождения экстремумов, которое сам автор успешно применял и для проведения касательных. Если воспользоваться современной символикой, это правило можно записать следующим образом.

Для нахождения экстремума некоторой функции f , зависящей от x , следует найти $f(x+h)$, где h достаточно мал, и написать приближенное равенство $f(x+h) \approx f(x)$. Упростив полученное равенство и разделив его на h или на высшую возможную степень h , следует отбросить члены, которые еще содержат h , и приближенное равенство заменить точным. Получим уравнение, корнями которого

будут именно те значения x , для которых f может иметь экстремум.

Сформулировав это правило, а произошло это не позднее 1629 года, Ферма решает в качестве примера следующую задачу: «Разделить отрезок AC точкой E так, чтобы прямоугольник со сторонами AE и EC был наибольшим по площади». Читатель, конечно же, догадался, что это именно та задача, которую мы решили в начале статьи.

Посмотрим, как она решается при помощи правила Ферма.

Сохраним прежние обозначения: пусть длины отрезков AC и AE равны соответственно $2a$ и x . Приравняв (в смысле Ферма!) $S(x+h)$ и $S(x)$, где S — площадь прямоугольника, получим:

$$(x+h)(2a-x-h) \approx x(2a-x).$$

После перенесения правой части в левую, раскрытия скобок и сокращения на $-h$ получим: $2x - 2a + h \approx 0$. Отбросив член, содержащий h , и заменив приближенное равенство точным, найдем: $x=a$. Искомый прямоугольник — квадрат.

Познакомимся еще с одной задачей, рассмотренной Ферма: «Рассечь данную линию AC в точке B так, чтобы тело, построенное на квадрате со стороной AB и с высотой BC , было наибольшим».

Ясно, что Ферма ищет прямой параллелепипед наибольшего объема с квадратным основанием при условии, что сумма стороны основания и высоты дана. А это — выше сформулированная задача! Для нее $v(x) = x^2(a-x)$, и, согласно указаниям Ферма, имеем:

$$\begin{aligned} (x+h)^2(a-x-h) &\approx x^2(a-x), \\ 2axh - 3x^2h - 3xh^2 + ah^2 - h^3 &\approx 0, \\ 2ax - 3x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Итак, $x=0$ или $x=2a/3$. Первый корень не годится — ведь выше было сказано, что $0 < x < a$. Остается второй, т. е. параллелепипед имеет наибольший объем, если сторона основания вдвое больше высоты.

Верен ли полученный результат? Чтобы ответить на этот вопрос, мы прежде всего должны установить, верно ли само правило Ферма. Сле-

дуст заметить, что Ферма сначала дал только формулировку своего правила, но позже и обосновал его. Проследим на примере функции v ход рассуждений Ферма.

Пусть v достигает своего наибольшего значения при значении аргумента x_0 . Тогда для любого сколь угодно малого положительного h должно быть:

$$\begin{cases} v(x_0) \geq v(x_0 - h), \\ v(x_0) \geq v(x_0 + h). \end{cases}$$

Вспомнив, что $v(x) = ax^2 - x^3$, после элементарных преобразований и сокращения на h систему можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} (2ax_0 - 3x_0^2) - (a - 3x_0 + h)h \geq 0, \\ (2ax_0 - 3x_0^2) + (a - 3x_0 - h)h \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Докажем, что из этих соотношений следует равенство $2ax_0 - 3x_0^2 = 0$. В самом деле, пусть $2ax_0 - 3x_0^2 \neq 0$. Возьмем h настолько малым, чтобы было

$$h|a - 3x_0 \pm h| < |2ax_0 - 3x_0^2|.$$

Этого, в силу произвольной малости h , всегда можно добиться. Но тогда выражения

$$(2ax_0 - 3x_0^2) - (a - 3x_0 + h)h$$

и

$$(2ax_0 - 3x_0^2) + (a - 3x_0 - h)h$$

либо оба положительны (если $2ax_0 - 3x_0^2 > 0$), либо оба отрицательны (если $2ax_0 - 3x_0^2 < 0$). А это противоречит системе (1). Итак, x_0 должно быть корнем уравнения $2ax - 3x^2 = 0$, что и доказывает верность полученного результата (существование искомого параллелепипеда не вызывает сомнения!).

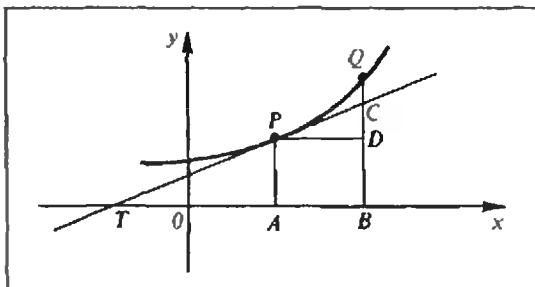


Рис. 1.

Как видим, правило Ферма довольно просто и при этом эффективно. Но важнее то, что этим правилом Ферма фактически ввел производную!

В самом деле, ведь он после приравнивания нулю выражения

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

отбрасывает члены, содержащие h или его высшие степени, и приближенное равенство заменяет точным. А это равносильно переходу к пределу в выражении (2) при условии, что h стремится к нулю, т. е. нахождению производной $f'(x)$. Иными словами, правило Ферма поэтапно можно представить в виде следующей схемы:

$$f(x+h) \approx f(x),$$

$$f(x+h) - f(x) \approx 0,$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

$$f'(x) = 0.$$

Итак, необходимое условие существования экстремума, высказанное упомянутым правилом, есть не что иное, как хорошо известная нам... теорема Ферма!

Между прочим, Лагранж, Лаплас и Фурье считали, что правило Ферма послужило началом создания дифференциального исчисления. Им не было известно мнение великого Ньютона — дело в том, что в одном письме, впервые опубликованном лишь в тридцатых годах нашего столетия (более двухсот лет после смерти его автора!), Ньютон недвусмысленно заявляет: «Намек на метод я получил из способа Ферма проведения касательных; применяя его к абстрактным уравнениям прямо и обратно, я сделал его общим». Здесь необходимо отметить, что метод, упомянутый Ньютоном, есть его метод флюксий, т. е. то, что мы сейчас называем дифференциальным и интегральным исчислением, а способ Ферма — не что иное, как его правило, о котором мы беседовали выше. Познакомимся с тем, как оно может быть применено для проведения касательных.

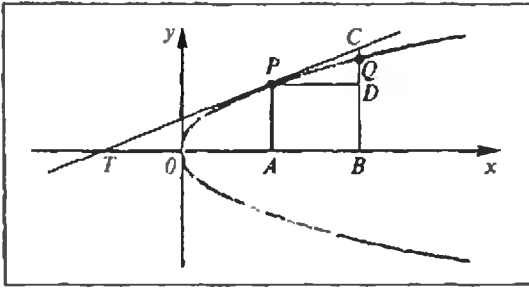


Рис. 2.

Пусть дана линия $y=f(x)$ и точка $P=(x_0, y_0)$ на ней и требуется провести касательную к линии в этой точке. Предположим, что касательная PT уже проведена (рис. 1). Возьмем на линии другую точку $Q=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ и точку пересечения вертикальной прямой BQ с касательной обозначим через C . Из подобия треугольников TAP и TBC имеем:

$$\frac{TB}{TA} = \frac{BC}{AP}.$$

В этой пропорции отрезок BC заменим на BQ . Получим:

$$\frac{TB}{TA} \approx \frac{BQ}{AP},$$

или, что то же самое,

$$\frac{TA+AB}{TA} \approx \frac{BD+DQ}{AP}.$$

Но $BD=AP$, и значит,

$$\frac{AB}{TA} \approx \frac{DQ}{AP}.$$

Учитывая, что $AB=\Delta x$, $AP=y_0$, $DQ=\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, полученное приближенное равенство можно переписать так:

$$\frac{y_0}{TA} \approx \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Остается применить правило Ферма. Именно, в выражении

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

произвести деление, отбросить члены, которые после этого еще содержат Δx , и приближенное равенство (3) заменить точным. Тем самым мы найдем длину отрезка TA , а значит, и точку T , после чего проведение касательной не представляет никакого труда.

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть данная линия — это парабола $y^2=2px$ (рис. 2). Для нее равенство (3) имеет следующий вид*):

$$\frac{y_0}{TA} \approx \frac{\sqrt{2p(x_0+\Delta x)}-\sqrt{2px_0}}{\Delta x}. \quad (4)$$

Преобразуем правую часть этого равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2p(x_0+\Delta x)}-\sqrt{2px_0}}{\Delta x} &= \\ &= \frac{2p(x_0+\Delta x)-2px_0}{\Delta x(\sqrt{2p(x_0+\Delta x)}+\sqrt{2px_0})} = \\ &= \frac{2p}{\sqrt{2p(x_0+\Delta x)}+\sqrt{2px_0}}. \end{aligned}$$

Отбрасывая в последнем выражении член, содержащий Δx , подставляя результат в (4), заменяя при этом приближенное равенство точным, получим:

$$\frac{y_0}{TA} = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}.$$

Но $y_0=\sqrt{2px_0}$, а значит, $TA=2x_0$, т. е. $T=(-x_0, 0)$; остается провести прямую через точки P и T . Задача решена!

*) Для определенности, пусть $y_0 > 0$.

К нашим читателям

Продолжается подписка на журнал «Квант» на 1989 год.

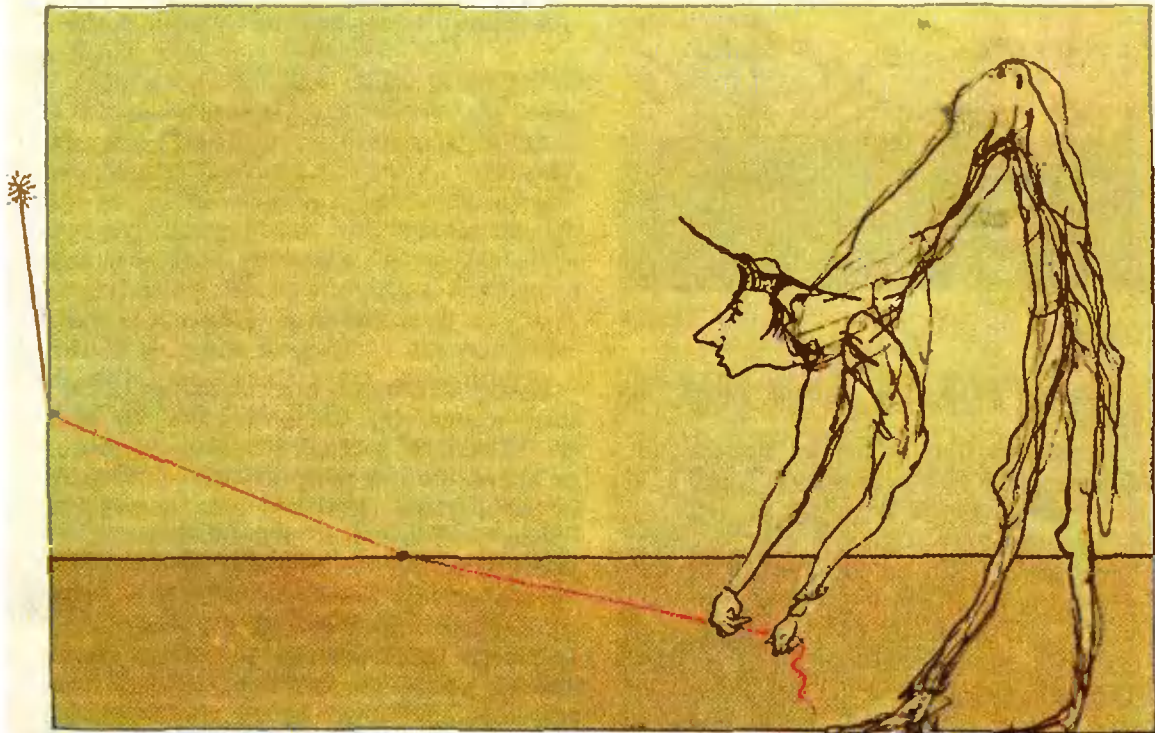
Журнал рассчитан на учеников 6—10 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто ведет кружки и факультативные занятия, и всем любителям математики и физики.

В новом году объем журнала увеличивается и рубрики расширяются.

Индекс журнала в каталоге «Союзпечати» 70465.

Подписная цена одного номера 45 копеек.

Подписка принимается без ограничений в течение всего года и с любого номера в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи.



Уракинези адимурисента

Преломление света

Кандидат физико-математических наук
С. А. ГОРДЮНИН,
П. Л. ГОРЬКОВ

Вспомним основные законы геометрии световых лучей.

В однородной прозрачной среде свет распространяется прямолинейно. Оптической характеристикой среды является ее показатель преломления $n > 1$, указывающий, во сколько раз скорость света в среде меньше скорости света в вакууме. Среда с большим показателем преломления называется оптически более плотной (или просто более плотной).

При падении луча света на границу раздела двух сред он разделяется на два луча (в общем случае разной интенсивности) — на отраженный и преломленный (лучи $1'$ и 2 на рисунке 1), лежащие в одной плоскости с падающим. При этом угол γ между нор-

малью к границе раздела и отраженным лучом (углом отражения) равен углу α_1 между нормалью и лучом падающим (углу падения). Угол падения α_1 с углом преломления α_2 (т. е. углом между нормалью и преломленным лучом) связаны соотношением, называемым законом Снеллиуса:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \quad (*)$$

В этом законе очевидным образом содержится факт обратимости световых лучей: если луч падает из первой среды под углом α_1 , то он пойдет во второй среде под углом α_2 , а если луч падает из второй среды под углом

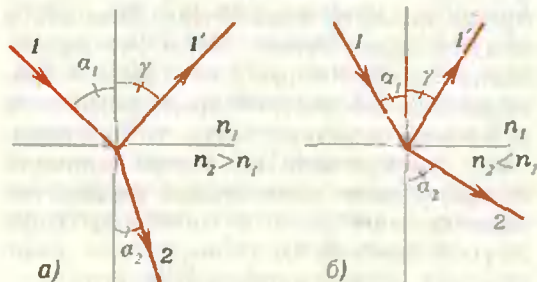


Рис. 1.

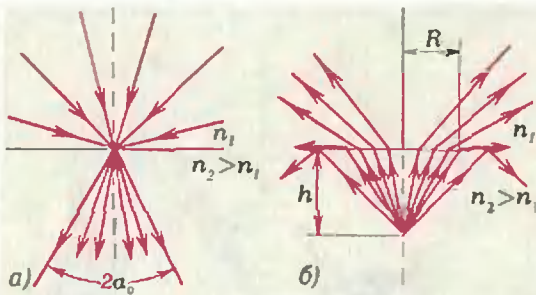


Рис. 2.

α_2 , то он пойдет в первой среде под углом α_1 .

Если луч переходит из менее плотной среды в более плотную (рис. 1, а), он прижимается к нормали ($\alpha_2 < \alpha_1$), а если из более плотной в менее плотную (рис. 1, б), то удаляется от нормали ($\alpha_2 > \alpha_1$). Наибольший угол падения (90°) имеют скользящие лучи, поэтому преломленный луч в более плотной среде ($n_2 > n_1$) не может составлять с нормалью угол, больший $\alpha_0 = \arcsin(n_1/n_2)$. Наоборот, при переходе из более плотной среды в менее плотную лучи, падающие под углами, большими α_0 , будут полностью отражаться. Вот почему этот угол называется углом полного отражения. Математически это проявляется в том, что уравнение (*) не имеет решений для α_1 при $\alpha_2 > \alpha_0$ и $n_2 > n_1$.

Эти явления наглядно можно представить себе следующим образом. Если закрыть непрозрачным экраном всю поверхность раздела сред, оставив лишь небольшое отверстие, и освещать экран рассеянным светом, содержащим лучи всех направлений, то в более плотной среде все лучи, проходящие через отверстие, будут сосредоточены в конусе с углом $2\alpha_0$ (рис. 2, а). Его часто называют конусом полного отражения. Вне этого конуса будет темно. Если же на некотором расстоянии h от плоской границы в более плотной среде поместить точечный источник света, то наблюдатель, смотрящий из менее плотной среды, увидит освещенной не всю поверхность раздела, а только круг радиусом (рис. 2, б)

$$R = h \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{hn_1}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}}.$$

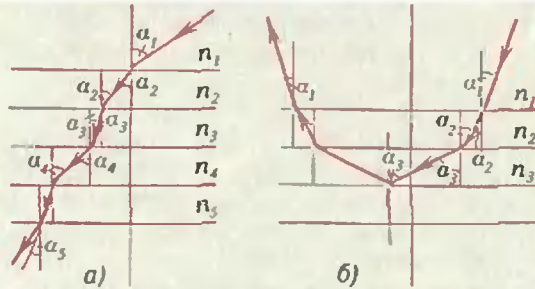


Рис. 3.

Итак, из закона преломления световых лучей (*) следуют два фундаментальных факта — наличие полного отражения и непрямолинейное распространение света в неоднородной среде. Рассмотрим второй факт подробнее.

Наиболее просто исследовать ход луча в слоистой среде, в которой показатель преломления меняется вдоль одной какой-то оси координат (например, X). Такую среду можно представить как набор тонких пластинок с определенными показателями преломления n_i . На границах раздела выполняются соотношения

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = \dots = n_N \sin \alpha_N,$$

поскольку угол преломления в каждом слое является углом падения для следующего слоя (рис. 3, а). Другими словами, вдоль выбранного направления выполняется соотношение

$$n(x) \sin \alpha(x) = \text{const.}$$

Этот важный и красивый закон (его называют обобщенным законом Снеллиуса) указывает на то, что наличие промежуточных слоев не сказывается на связи между углом падения из первой среды и углом преломления в последней. Если, конечно, луч вообще доходит до последней среды, а не поворачивает, испытав полное отражение (рис. 3, б). Именно поэтому при расчете различных оптических систем можно не учитывать наличие тонких прослоек между средами — слоев клея между линзами в сложных объективах, стеклянных стенок сосудов, в которые налита вода, и т. п.

Теперь решим несколько конкретных задач. Большинство из них взяты из вариантов приемных экзаменов

в Московский физико-технический институт.

Задача 1. Луч света падает на плоскопараллельную пластину толщиной $H=1$ см из стекла с показателем преломления $n=1,73$ (рис. 4). Из-за многократных отражений от граней пластинки на экране Э образуется ряд светлых пятен. Найдите расстояние между пятнами, если угол падения $\alpha=60^\circ$, а падающий луч перпендикулярен плоскости экрана. Плоскость падения луча совпадает с плоскостью рисунка.

После однократного преломления на обеих гранях пластинки луч выходит из пластинки параллельно падающему лучу. Поскольку при дальнейших отражениях и преломлениях углы падения на грани одинаковы, все попадающие на экран лучи параллельны падающему. Расстояние d между этими лучами, равное расстоянию между пятнами на экране, найдем из рисунка:

$$d = AC \cos \alpha, \quad AC = 2H \operatorname{tg} \beta,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}, \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n},$$

откуда

$$d = \frac{H \sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \approx 0,58 \text{ см.}$$

Задача 2. Оцените ошибку при фиксировании углового положения звезды, видимой с Земли под углом $\beta=45^\circ$ над горизонтом. Показатель преломления воздуха у поверхности Земли $n=1,0003$.

Положение звезды, видимое с Земли, отличается от истинного из-за пре-

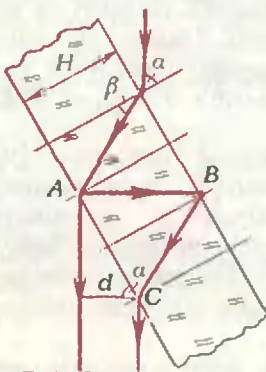


Рис. 4.

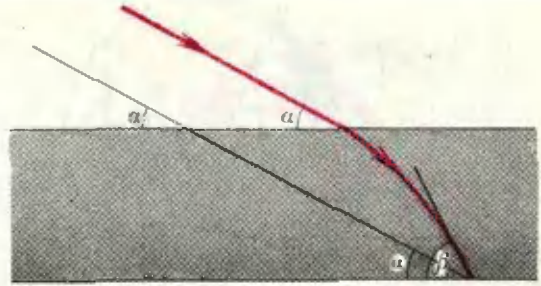


Рис. 5.

ломления лучей атмосферой. Толщина атмосферы, т. е. высота, на которой практически нет воздуха и поэтому показатель преломления равен единице, составляет несколько десятков километров. Это гораздо меньше, чем радиус Земли, поэтому в данном случае можно считать атмосферу плоской. Ее показатель преломления постоянно изменяется от единицы у верхних слоев до значения $n > 1$ у поверхности Земли. От звезды идут параллельные лучи, падающие на верхние слои атмосферы под углом $\pi/2 - \alpha$, где α — истинное угловое положение звезды над горизонтом. А мы видим звезду под углом $\beta > \alpha$ (рис. 5). По закону преломления в слоистой среде

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right),$$

или

$$\cos(\beta - (\beta - \alpha)) = (1 + (n - 1)) \cos \beta.$$

Учитывая, что $n - 1 \ll 1$ и поэтому $\beta - \alpha \ll \beta$, приближенно имеем:

$$\cos \beta + (\beta - \alpha) \sin \beta = \cos \beta + (n - 1) \cos \beta.$$

Таким образом,

$$\beta - \alpha = (n - 1) \operatorname{ctg} \beta = 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 1'.$$

Это и есть ошибка при определении положения звезды с Земли.

Задача 3. В равнобедренной прямоугольной стеклянной призме, сделанной из стекла с показателем преломления n , основание AC и боковая грань BC — гладкие, а грань AB — матовая (рис. 6). Призма стоит на газете. Какую часть текста (по площади) будет видеть наблюдатель, смотрящий через гладкую грань BC ?

В этой задаче речь идет о рассмотрении предмета, находящегося сра-

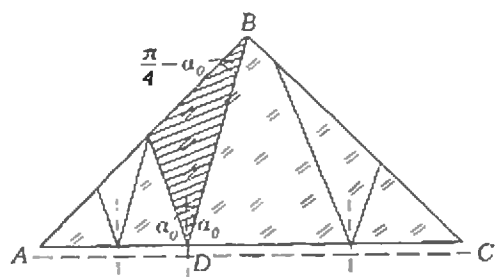


Рис. 6.

зу за границей раздела двух сред — стекла и воздуха. Неправильно было бы считать, что предмет находится непосредственно в стекле. Если бы это было так, то предмет можно было бы увидеть при любых значениях показателя преломления стекла, поскольку в этом случае лучи от предмета идут в стекле во все стороны и какая-то их часть, не претерпев полного отражения, обязательно выйдет через прозрачную грань.

От предмета *под* стеклом лучи, конечно, тоже идут во все стороны, но они *пересекают границу* стекло — воздух и преломляются. В стекло они входят только внутри конуса полного отражения. При растворах этого конуса $2\alpha_0 = 2 \arcsin(1/n)$ часть лучей не попадут на грань BC (см. рис. 6). Если $\alpha_0 > \pi/4$, т. е. $n < 1/\sin(\pi/4) = \sqrt{2}$, через BC будет виден весь текст. Действительно, даже из точек вблизи вершины A часть лучей конуса будет падать на BC, причем их углы падения будут меньше, чем $\pi/4$, т. е. они, преломляясь, будут выходить наружу. При больших n и соответственно меньших α_0 из некоторых точек вблизи вершины A все лучи конуса попадут на матовую грань AB. Чтобы найти невидимый участок AD, заметим, что $\angle ABD = \pi/4 - \alpha_0$, и воспользуемся теоремой синусов для треугольника ABD, откуда найдем долю видимого текста $k = DC/AC$:

$$\frac{1-k}{\sin(\pi/4 - \alpha_0)} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sin(\pi/2 + \alpha_0)},$$

$$k = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} \alpha_0) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \right).$$

Но для того чтобы попадающие на грань BC лучи хотя бы частично вы-

ходили из нее, наименьший угол падения на грань $(\pi/4 - \alpha_0)$ должен быть меньше α_0 , т. е. α_0 должен быть больше, чем $\pi/8$, а $n < 1/\sin(\pi/8) = 2,61$. При предельном n

$$k_{\min} = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right) \approx 0,7.$$

Итак,

при $n < \sqrt{2}$ виден весь текст;

при $\sqrt{2} < n < \frac{1}{\sin(\pi/8)}$ видна часть

текста $k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \right);$

при $n > \frac{1}{\sin(\pi/8)}$ текста не видно совсем.

Задача 4. Узкий пучок света, проходящий через центр стеклянного шара радиусом R , фокусируется на расстоянии $2R$ от его центра. Определите показатель преломления стекла.

В этой задаче используются законы так называемой парааксиальной оптики, т. е. оптики малых углов падения и преломления лучей. Для малых углов $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, и закон преломления принимает вид

$$n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2.$$

Рассмотрим произвольный луч пучка, падающего на шар на расстоянии h от оси (рис. 7). Так как $h \ll R$ (пучок узкий), угол падения этого луча на шар $\alpha \approx h/R \ll 1$. Построив дальнейший ход этого луча, найдем все углы в треугольниках AOB, OBD и BDC:

$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{n},$$

$$\angle BOD = \frac{2\alpha}{n} - \alpha,$$

$$\angle BCD = \alpha - \left(\frac{2\alpha}{n} - \alpha \right) = 2\alpha \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Тогда

$$BD = R \left(\frac{2\alpha}{n} - \alpha \right),$$

$$DC = \frac{BD}{2\alpha(1 - 1/n)} = \frac{R\alpha(2/n - 1)}{2\alpha(1 - 1/n)} = R \frac{2 - n}{2(n - 1)}.$$

По условию задачи $DC = R$, откуда получаем

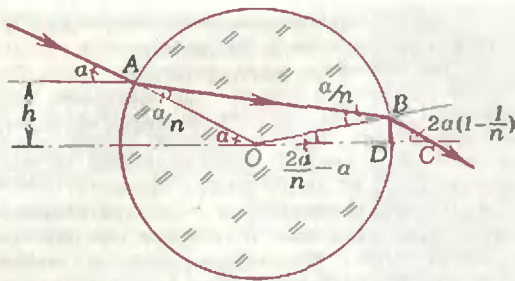


Рис. 7.

$$n = \frac{4}{3}$$

Очень существенно, что в окончательное выражение величина угла падения α не вошла; значит, все лучи пучка соберутся в одной точке. Это один из законов параксиальной оптики — узкие пучки параллельных лучей собираются преломляющей системой в одну точку — фокус (или в одной точке собираются их продолжения — мнимый фокус). Второй закон оптики параксиальных лучей состоит в том, что расходящиеся из одной точки под малыми углами лучи фокусируются преломляющей системой тоже в одну точку (с той же оговоркой относительно мнимого изображения). На этих законах основано решение задач, где одним из оптических элементов является глаз, который из-за малой величины зрачка фокусирует лучи, падающие на него под малыми углами. В сущности поэтому мы и видим точку как точку, а не как протяженный источник.

Задача 5. Если смотреть на капиллярную стеклянную трубку сбоку, то видимый внутренний радиус будет равен r . Каково истинное значение этого радиуса? Показатель преломления стекла n . Внешний радиус капилляра много больше внутреннего.

Пусть OC — линия, соединяющая глаз и центр трубки, A — крайняя точка внутреннего диаметра капилляра (рис. 8). Расстояние от изображения (мнимого) точки A до оси OC равно видимому радиусу внутреннего канала r .

Мы знаем, что все лучи, расходящиеся из точки A под малыми углами, после преломления соберутся

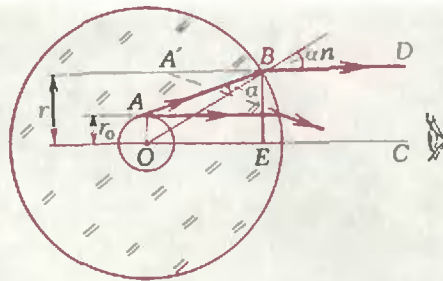


Рис. 8.

в одной точке. Поскольку нас интересует не точное местоположение этой точки, а только ее расстояние от OC , достаточно рассмотреть ход только одного луча ABD , такого, который на выходе из капилляра идет параллельно оси OC — ведь изображение точки A будет лежать на его продолжении (см. рис. 8). Расстояние между лучами BD и OC равно r , искомое расстояние $AO = r_0$. Так как внешний диаметр велик по сравнению с внутренним, угол падения α будет мал. Из треугольника OEB

$$r = R\alpha n$$

(R — внешний радиус трубки). Из треугольника OAB , с учетом малости α ,

$$r_0 = R\alpha.$$

Таким образом,

$$r_0 = \frac{r}{n}.$$

Упражнения

1. В толще стекла с показателем преломления $n=1,4$ создана плоскопараллельная пластина толщиной $d=3$ см с другими оптическими свойствами. Зависимость показателя преломления этой пластины от координаты x показана на графике (рис. 9). При каких углах падения α узкого пучка света на эту пластину пучок пройдет пластину насквозь?

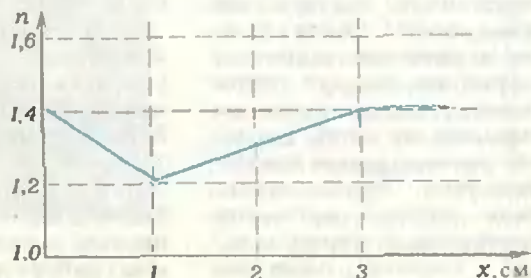


Рис. 9.

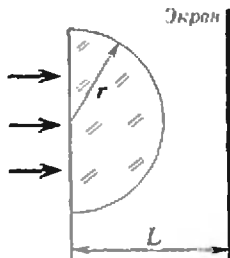


Рис. 10.

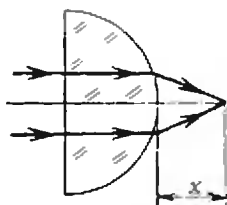


Рис. 11.

2. Стеклопластинка, показатель преломления которой n_1 , касается поверхности жидкости с показателем преломления $n_2 < n_1$. Покажите, что ни один из лучей, падающих на верхнюю поверхность стеклянной пластин-

ки, не испытывает полного отражения на границе между стеклом и жидкостью.

3. На половину шара радиусом $r=2$ см, изготовленного из стекла с показателем преломления $n=1,41$, падает параллельный пучок лучей (рис. 10). Определите радиус светлого пятна на экране, расположенном на расстоянии $L=4,82$ см от центра шара.

4. На каком расстоянии от центра стеклянного шара радиусом R должен находиться муравей, чтобы его изображение за шаром было натуральной величины? Показатель преломления стекла n .

5. Узкий пучок света, пройдя через полшарие из стекла с показателем преломления n , собирается на расстоянии x от выпуклой поверхности (рис. 11). На каком расстоянии от плоской поверхности соберутся лучи, если пучок пустить с противоположной стороны?

Информация

III Научно-техническая конференция школьников в МФТИ

Третью Научно-техническую конференцию школьников провел 2—3 апреля 1988 года Московский физико-технический институт. Работа оргкомитета конференции началась намного раньше: с января в МФТИ стали поступать работы школьников со всего Советского Союза. Оргкомитет конференции намеренно не предлагал даже примерного перечня тем рефератов. Это вызвало, правда, большое количество звонков: просили либо предложить тему, либо спрашивали, подходит ли такая-то тема. Самое сложное в решении задачи — постановка вопроса. Школа этому, к сожалению, не учит, мы же часто не можем рекомендовать какую-либо тему, поскольку не знаем личных интересов школьника, его возможностей ставить сложный эксперимент. На второй вопрос всегда следовал ответ: любая тема подходит

для реферата, если подойти к ней достаточно серьезно, любая задача и сложна, и интересна. В результате присланные работы более 400 школьников 6—10 классов из 10 союзных республик порадовали оргкомитет разнообразием тем.

Все поступившие рефераты рецензировались специалистами. Авторитетные предметные жюри отобрали из присланных работ лучшие, чтобы пригласить авторов для выступления в МФТИ.

И вот 2 апреля физтех принимал гостей. Еще не улеглись страсти после празднования студентами МФТИ первого апреля, а лаборатории и аудитории заполнили школьники. До открытия конференции прошли экскурсии в научные лаборатории МФТИ, студенты рассказали о специализации факультетов физтеха.

На открытии конференции выступил ректор МФТИ, член-корреспондент Академии наук СССР Н. В. Карлов. После этого состоялось пленарное заседание, на котором ребята прочитали лекции ведущие ученые. Самой интересной, пожалуй, была лекция члена-корреспондента АН СССР Л. Б. Окуня, посвященная теории относительности.

Школьники докладывали результаты своих исследований во второй день работы конференции. Заседания проводились одновременно на шести секциях: физики-1, физики-2, молекулярной физики, аэрокосмической физики, математики и информатики. В тот же день состоялось закрытие конференции и награждение ее участников.

Выступая на закрытии конференции, академик-секретарь АПН СССР В. Г. Разумовский выразил удовлетворение уровнем работ и надежду, что в дальнейшем те же фамилии встретятся в сборниках научных трудов, среди авторов открытий и изобретений.

Все работы, предложенные на конференцию, можно разделить на две большие группы. К первой, большей, относятся наблюдения и исследования, проведенные школьниками самостоятельно. Такие работы оценивались наиболее высоко, даже если автор допускал небольшие ошибки. Так, жюри секции физики-1 отметило доклад Д. Самборского (г. Киев) «Почему звучат органы трубы». При демонстрации использовалась детская флейта, которая в соответствии с физическими законами звучала то выше, то ниже. Девятиклассники из ФМШ № 18 г. Москвы В. Кравченко и Н. Кобляков демонстрировали созданный ими приемник инфракрасного излучения. Отличную установку для демонстрации движения кольцевых вихрей в воздухе сконструировали красноярские школьники Д. Коваль, А. Киселев, И. Носков, Д. Рашевский.

К другой группе можно отнести чисто реферативные работы. Среди лучших работ, отмеченных жюри,



Лекцию по теории относительности читает член-корреспондент АН СССР Л. Б. Окунь.

можно назвать рефераты девятиклассников В. Суворова (г. Тольятти) «Лазеры» и Е. Рыжиковой (г. Полтава) «Сверхтекучие жидкости и их свойства». Некоторые рефераты представляли собой раздел, переписанный из научно-популярной книги или учебника для вузов. Такие рефераты оценивались невысоко. Самые луч-

шие работы планируется опубликовать в «Кванте» или «Физике в школе». Две работы с конференции уже публиковались в «Кванте», это «Оптимальная кодировка почтового индекса» (1987, № 11) и «Наблюдение и фотосъемка быстропротекающих процессов» (1988, № 2).

Мы ждем новые работы по физике, математике и информатике на IV Научно-техническую конференцию школьников, которая состоится в апреле 1989 года. Принять участие в конференции могут все желающие. Для этого надо написать реферат (7—25 страниц, по возможности, напечатать на машинке) и один экземпляр не позднее 1 февраля 1989 года выслать по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской области, МФТИ, Оргкомитет IV Научно-технической конференции школьников. Реферат не возвращается. Дополнительные справки можно получить по телефону ЗФТШ при МФТИ: 408—51—45.

А. В. Сапожников,
член оргкомитета конференции



Установку для демонстрации движения кольцевых вихрей в воздухе показывают Д. Коваль, А. Киселев, И. Носков и Д. Рашевский (г. Красноярск).

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Из тонкой проволоки длиной L намотана спираль с постоянным шагом и закреплена так, что ее ось оказалась вертикальной. Маленькая бусинка может скользить по спирали без трения. За какое время бусинка, отпущенная из верхней точки без начальной скорости, достигнет конца спирали, если высота спирали H ?

2. Фонарик испускает пучок лучей, сходящихся на расстоянии $R_0=1$ м от него в маленькое пятно. На пути лучей поместили два плоских зеркала квадратной формы так, что линия их соприкосновения находится на оси пучка на расстоянии $r=70$ см от фонарика и перпендикулярна оси пучка. Плоскости зеркал перпендикулярны друг другу, а одно из зеркал составляет угол $\alpha=30^\circ$ с осью пучка. На каком расстоянии от фонарика сойдется теперь пучок?

3. При разомкнутых ключах K_1 и K_2 схема, изображенная на рисунке 1, потребляет мощность P_0 . При одном замкнутом ключе K_1 потребляется мощность P_1 , а при K_2 — P_2 . Какая мощность будет потребляться цепью, если замкнуты оба ключа? Сопротивления резисторов не известны.

4. В изогнутой трубке постоянного сечения находятся две разные жидкости, плотности которых относятся как 2 : 1. Пока трубка неподвижна, граница раздела жидкостей проходит по оси симметрии трубки (рис. 2). Куда и на сколько сместится граница раздела, если трубку привести во вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega=5$ с⁻¹? Расстояние $R=20$ см.

9 класс

1. К концу вертикальной водопроводной трубы при помощи короткого отрезка резиновой трубки прикреплена стальная насадка массой M , как показано на рисунке 3. При каком расходе воды насадка будет горизонтальной? Площадь сечения насадки S , длина ее L . Трения пренебречь.

2. Моль одноатомного идеального газа расширяется из начального состояния с температурой T двумя различными способами — изобарически и адиабатически (т. е. без подвода или отвода тепла) так, что конечные объемы газа в обоих случаях одинаковы. Найдите сумму работ, совершенных газом в этих процессах, если известно, что конечные давления в них различаются в 1,5 раза.

3. На поверхность воды бросают три нитки, связанные концами (рис. 4). Две нитки имеют общую длину 3 см, одна — 1 см. В точку А капает поверхностно-активное вещество, которое снижает коэффициент поверхностного натяжения в 2,5 раза. Каким будет натяжение каждой нитки? Затем капает в точку В. Каким теперь станет натяжение каждой нитки? Считать коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0,07$ Н/м.

4. В схеме, изображенной на рисунке 5, ключ первоначально разомкнут, а конденсаторы емкостями $C_1=20$ мкФ и $C_2=40$ мкФ заряжены одинаковыми зарядами $q=10^{-2}$ Кл (знаки зарядов обкладок показаны на рисун-

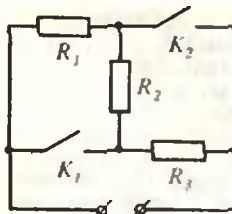


Рис. 1.

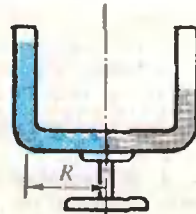


Рис. 2.

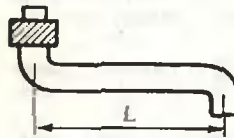


Рис. 3.



Рис. 4.

ке). Сопротивление резистора $R=5$ кОм, внутреннее сопротивление вольтметра $R_V=20$ кОм. Определите показание вольтметра сразу после замыкания ключа и затем после установления равновесия зарядов в цепи.

10 класс

1. Тонкостенную трубу массой m закрутили вокруг ее оси и положили рядом с такой же трубой, первоначально покоящейся на горизонтальном полу (рис. 6). Коэффициент трения скольжения между всеми соприкасающимися поверхностями одинаков и равен $\mu=2$. Куда и с каким ускорением начнет двигаться первоначально закрученная труба?

2. В горизонтально расположенном теплоизолированном цилиндре находится одноатомный идеальный газ: слева от подвижного поршня — 1 моль, справа — 3 моля (рис. 7). С помощью одинаковых нагревателей начинают медленно нагревать обе порции газа, подводя к ним одинаковое количество теплоты в единицу времени. Каким будет отношение объемов левой и правой частей после длительного нагревания?

3. В схеме, изображенной на рисунке 8, конденсатор заряжен до некоторого напряжения U . После замыкания ключа и прекращения тока в цепи оказалось, что напряжение на конденсаторе поменяло знак на противо-

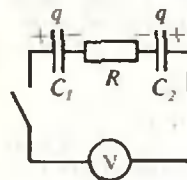


Рис. 5.

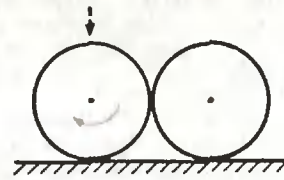


Рис. 6.

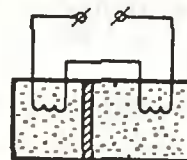


Рис. 7.

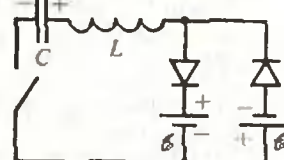


Рис. 8.

положный и стало равным 1 В. Найдите напряжение U . Батарейки, диоды, катушка — идеальные. ЭДС батареек равны 1,5 В.

4. См. задачу 2 для 8 класса.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Исследуйте зависимость периода колебаний линейки от расстояния между центром масс линейки и точкой подвеса.

Оборудование: метровая линейка с отверстиями через каждые 5 см, штатив с муфтой и стержнем для подвеса линейки, секундомер.

2. Определите коэффициент трения между деревянной линейкой и пластмассовым шариком.

Оборудование: линейка деревянная, шарик пластмассовый, лист миллиметровой бумаги.

9 класс

1. Определите коэффициент жесткости пружины динамометра.

Оборудование: динамометр с заклеенной шкалой, суровая нить, шарик, линейка, штативы, лист копировальной бумаги, лист белой бумаги.

2. Сделайте шунт к гальванометру, чтобы получился миллиамперметр с пределом измерений 200 мА на всю шкалу.

Оборудование: батарейка (4,5 В), гальванометр (100—300 мкА) с известным сопротивлением рамки, ограничительный резистор (переменный, 4,7 кОм), точный резистор (100 Ом, 5%), провод медный (длиной 1,5—2 м, диаметром 0,1—0,15 мм), линейка, карандаш.

10 класс

1. Соберите систему из трех плоских зеркал, которая позволяет получить горизонтальное изображение вертикального предмета в плоскости, параллельной данному предмету.

Оборудование: три плоских зеркала, штатив, призма, лист миллиметровой бумаги, пластилин.

2. Постройте вольтамперные характеристики полупроводникового диода при комнатной температуре и температуре $+60^\circ\text{C}$. Исследуйте зависимость обратного тока диода от температуры в доступном вам диапазоне температур.

Оборудование: диод (типа Д9 с любой буквой), изолирующая поливинилхлоридная трубочка, батарейка (1,5 В, типа 373 или 343), ограничительный резистор (50—70 Ом), микроамперметр (100—300 мкА), вольтметр (0,5—1 В), потенциометр (1 кОм), калориметр, термометр, сосуд с горячей водой, штатив, миллиметровая бумага.

Публикацию подготовили Л. П. Кулцов, О. Ю. Овчинников, С. В. Резниченко

Ответы, указания, решения

Решения уравнений

- $p = -2x$.
- На рисунке 1 число в кружке соответствует числу решений уравнения в данной области.
- Пусть $f(x) = x^n + ax^{n-1} + \dots$; n нечетно. Тогда $f(x) = x^n \left(1 + \frac{a}{x} + \dots\right)$. При больших $|x|$ выражение в скобках близко к 1, поэтому знак $f(x)$ совпадает со знаком x^n . Следовательно, при больших отрицательных x получаем $f(x) < 0$, а при больших положительных x получаем $f(x) > 0$. Поэтому при некотором x будет $f(x) = 0$.
- См. рисунок 2.
- $4p^3 + 27q^2 < 0$. Поэтому корни три.
- Условие кратного корня: $t^5 + pt^2 + q = 0$, $5t^4 + 2pt = 0$. Значит, $q = 0$, p — любое или $p = -5/2t^3$, $q = 5/2t^5$ (рис. 3).
- Условие кратного корня для первого многочлена: $t^{1988} + pt + q = 0$, $1988t^{1987} + p = 0$. Значит, $p = -1988t^{1987}$, $q = 1987t^{1986}$ (рис. 4). Для второго многочлена: $p = -1989t^{1986}$, $q = 1988t^{1986}$ (рис. 5).
- См. рисунок 6.
- У двойственной кривой возникает точка самопересечения (рис. 7).
- и 11. Кривые на рисунках 12,б и 14 (с. 14) — двойственные.

Решения школьные задачи

- $p = 3$, $q = 2$. Решение. Пусть a — целый корень данного уравнения. Тогда $q = a^3(p - a)$. Поскольку q простое, $a^3 = 1$, т. е. $a = 1$. Значит, $q = p - 1$. В простых числах это уравнение имеет единственное решение: $p = 3$, $q = 2$.
- $$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} =$$
$$= \frac{z}{z(1+x+xy)} + \frac{xz}{xz(1+y+yz)} + \frac{1}{1+z+zx} =$$
$$= \frac{z+xz+1}{1+z+zx} = 1.$$
- Рассмотрим гомотегию с центром в точке P и коэффициентом, равным R/r , где R и r — радиусы соответственно большей и меньшей окружности. При этой гомотегии меньшая окружность перейдет в большую, а касательная прямая BC — в прямую B_1C_1 (рис. 8), касающуюся большей окружности в точке A_1 — образе точки A . Поскольку при гомотегии прямые переходят в параллельные прямые, $B_1C_1 \parallel BC$. Далее, так как касательная, параллельная хорде, делит точкой касания дугу, стягиваемую хордой, пополам, A_1 — середина дуги BC , т. е. PA_1 — биссектриса угла BPC . Но точки P , A , A_1 лежат на одной прямой, значит, прямая PA совпадает с прямой PA_1 .
- Проведем $NL \perp AB$ и соединим точки M

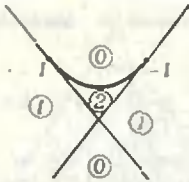


Рис. 1.

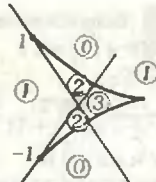


Рис. 2.

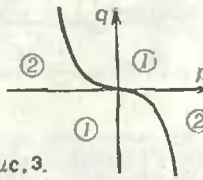


Рис. 3.

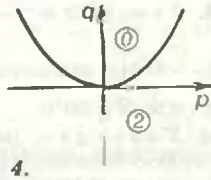


Рис. 4.

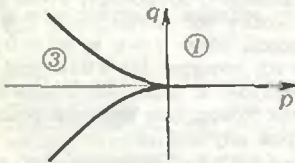


Рис. 5.

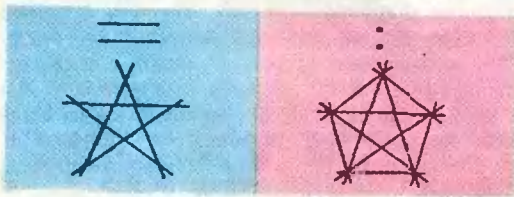


Рис. 6.

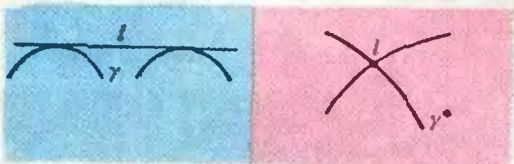


Рис. 7.

и L (рис. 9). Очевидно, что $AL=LB$. Поэтому ML — средняя линия треугольника ABK и, следовательно, $ML \parallel BK$, откуда $\angle LMC=90^\circ$. Так как CL есть диаметр окружности, описанной около прямоугольника $BCNL$, в угол LMC прямой, точка M также принадлежит этой окружности. Но тогда угол BMN также прямой, поскольку он опирается на диаметр BN .

5. Построим точки A_1 и B_1 на сторонах BC и AC соответственно так, чтобы $BA_1:A_1C = k:m$ и $AB_1:B_1C = k:l$. Пусть точка M лежит внутри треугольника. Ясно, что $S_{ABM}:S_{BCM} = k:l$ тогда и только тогда, когда точка M лежит на отрезке BB_1 , и $S_{ABM}:S_{ACM} = k:m$ тогда и только тогда, когда точка M лежит на отрезке AA_1 . Поэтому искомая точка M есть точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1 .

6. Пусть $\frac{x}{y} = a$, где a — произвольное рациональное число. Тогда

$$y^{1987} a^{1987} + y^{1987} = y^{1988} a^{1987} + y^{1988}$$

откуда

$$y = \frac{1+a^{1987}}{1+a^{1988}}, x = a \cdot \frac{1+a^{1987}}{1+a^{1988}}$$

Ясно, что с помощью этих формул мы можем построить сколько угодно рациональных решений нашего уравнения.

7. 0, 1, 2. Решение. Заметим, что $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$, откуда $x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)^3$. Поэтому

$$x_n - 1 = (x_{n-1} - 1)^3 = (x_{n-2} - 1)^{3^2} = \dots = (x_1 - 1)^{3^{n-1}}$$

Равенство $x_m = x_n$ с $m \neq n$ означает, таким образом, что $(x_1 - 1)^{3^m} = (x_1 - 1)^{3^n}$, что возможно только при $x_1 - 1 = 0$ или $x_1 - 1 = \pm 1$.

8. $q \geq 2$. Решение. Наше условие равносильно тому, что при любом $n \geq 2$ имеет место неравенство $q^n > q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1$, т. е.

$$q^n > \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Так как, очевидно, $q > 1$, это равенство можно переписать в виде $q^{n+1} - 2q^n + 1 > 0$, т. е. $q^n(q - 2) + 1 > 0$. Если $q \geq 2$, то последнее неравенство выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$; если же $1 < q < 2$, то найдется n , при котором $q^n \geq \frac{1}{2 - q}$, и для этого n неравенство не выполняется.

9. Выберем на плоскости произвольную точку O и представим каждый вектор \overrightarrow{MN} как разность $\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$. Тогда сумма наших 15 векторов будет равна разности $3(\overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_5}) - 3(\overrightarrow{OB_1} + \dots + \overrightarrow{OB_5})$, где B_i — вершины пятиугольника, A_i — середины его сторон. Будем считать, что точки A_i, B_i расположены в следующем порядке (при обходе пятиугольника против часовой стрелки): $B_1, A_1, B_2, A_2, \dots, B_5, A_5$. Наша сумма равна $3(\overrightarrow{B_1A_1} + \dots + \overrightarrow{B_5A_5}) = \frac{3}{2}(\overrightarrow{B_1B_2} + \dots + \overrightarrow{B_5B_1}) = 0$.

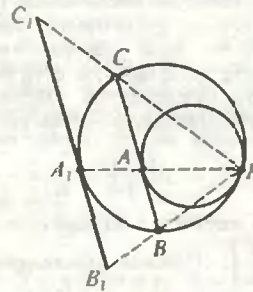


Рис. 8.

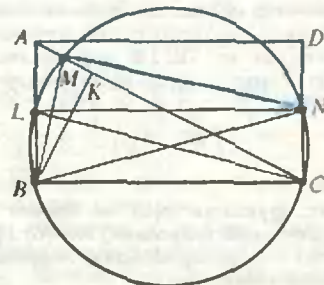


Рис. 9.

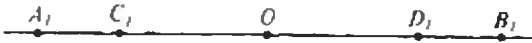


Рис. 10.

10. Требуемое неравенство равносильно неравенству $AO > OF$, где O — центр вписанной окружности, т. е. неравенству $AF > 2OF$. Спроектируем отрезки AF и OF на высоту треугольника, опущенную на BC ; наше неравенство примет вид $h > 2r$ (где h — высота треугольника ABC , r — радиус вписанной окружности), последнее же очевидно: $2S_{ABC} = BC \cdot h = (BC + CA + AB) \cdot r > 2BC \cdot r$.

11. $(-\infty; -1]$, 0 , 1 . Указание. Неравенство а точности означает, что $x^2 - x$ и $x^3 - x^2$ не являются ненулевыми числами одного знака, т. е. что $(x^2 - x)(x^3 - x^2) \leq 0$.

12. Соединим точку M с вершинами тетраэдра. Пусть V — объем данного тетраэдра, а V_1, V_2, V_3 — объемы тетраэдров $BCMD, ACMD, ABMD$ соответственно. Поскольку тетраэдры $BCMD$ и $ABCD$ имеют общую грань BCD , а отношения их высот, опущенных на эту грань, равно $\frac{x}{a}$,

то $V_1 = \frac{x}{a} V$. Аналогично, $V_2 = \frac{y}{b} V$ и $V_3 = \frac{z}{c} V$.

Так как $V = V_1 + V_2 + V_3$, то $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

13. Пусть M — середина отрезка AB ; O_1, O_2 — центры шаров; R_1, R_2 — их радиусы. Тогда

$$MO_1^2 - MO_2^2 = \left(R_1^2 + \frac{AB^2}{4}\right) - \left(R_2^2 + \frac{AB^2}{4}\right) = R_1^2 - R_2^2.$$

Отсюда следует, что середины всех отрезков общих касательных к данным шарам лежат в одной плоскости, перпендикулярной отрезку O_1O_2 . Обозначим проекцию этой плоскости на прямую O_1O_2 через O , а проекция точек A, B, C, D — через A_1, B_1, C_1, D_1 . Тогда $OA_1 = OB_1$ и $OC_1 = OD_1$, откуда $A_1C_1 = B_1D_1$ (рис. 10).

14. $-\arctg 3 + k\pi$. Решение. Так как $\operatorname{tg} x = 2[\operatorname{tg} x] + 3$, то $\operatorname{tg} x$ — целое число, откуда $[\operatorname{tg} x] = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x + 3$ и $\operatorname{tg} x = -3$.

15. Первое решение. Обозначим левую часть нашего уравнения через $p(x)$. Очевидно,

$$p(0) = -2 < 0 \text{ и } p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} a + \frac{1}{4} a^2 + 1 > 0.$$

Значит, при любом a решение есть уже в промежутке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. (Прямое применение этого рассуждения к промежутку $[0; 1]$ невозможно, поскольку $p(1)$ может быть отрицательным.)

Второе решение.

$$\int_0^1 p(x) dx = \frac{10a}{5} - \frac{4a}{4} + \frac{a^2}{3} + \frac{6}{2} - 2 = \frac{a^2}{3} + a + 1 > 0;$$

значит, функция $p(x)$ не может быть всюду отрицательной в промежутке $[0; 1]$. Но $p(0) < 0$, значит, в некоторой точке промежутка $[0; 1]$ функция меняет знак.

Всероссийская олимпиада школьников ематика

8 класс

1. Например, $x=50, y=7$. Указание. $51y^2 + 1 = (7y+1)^2 + 2y(y-7)$.

2. Указание. Сумма углов AMB и AKB равна сумме углов треугольника AKB (рис. 11).

3. Указание. $a^5 + 1 = 2\left(a + \frac{1}{a}\right)$, откуда

$a^5 > 3$. Из равенства $\frac{2}{a^2} + 1 = a^2 + \frac{1}{a^2}$ следует, что $a^3 < 2$.

4. Указание. Введем на плоскости прямоугольную систему координат с началом в центре окружности и осями, идущими по линиям сетки. Вместе с точкой $(x; y)$ на данной окружности лежат все точки $(\pm x; \pm y)$ и $(\pm y; \pm x)$. Их восемь, если $x \neq y$ и $xy \neq 0$; в противном случае их четыре. Но 1988 при делении на 8 дает остаток 4. Поэтому среди данных точек найдется точка, для которой реализуется именно второй случай.

5. Указание. Докажите, что команда, одержавшая наибольшее число побед, является чемпионом. Из предположения, что в турнире имеется два чемпиона, следует, что есть и третий чемпион, так что двух чемпионов быть не может.

9 класс

1. Ответ: 3. ($2^5 = 32, 5^3 = 3125$). Указание. Если числа 2^n и 5^m начинаются с цифры a , то $a^2 < 10 < (a+1)^2$, в чем можно убедиться, пользуясь равенством $2^2 \cdot 5^2 = 10^2$.

2. См. указание к задаче 3 для 8 класса.

3. Ответ: все прямые AB касаются окружности радиусом 2 с центром в точке $M(0, 2)$. Указание. Прямая MB является биссектрисой угла OBA .

4. Указание. Диагонали PR и QT четырехугольника $PQRT$ получаются из диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ параллельным переносом.

5. Пусть $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}$ — последовательность, полученная из исходной последовательности a_1, a_2, \dots, a_n после k шагов, a_k — число, вычитаемое на k -м шаге.

а) Положим $\alpha_k = (a_1 + a_2)/2$. Тогда в последовательности $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}$ первые два числа будут

одинаковыми. Вычитая $a_2 = \frac{a_2^{(2)} + a_3^{(2)}}{2}$, получим набор с одинаковыми первыми тремя числами

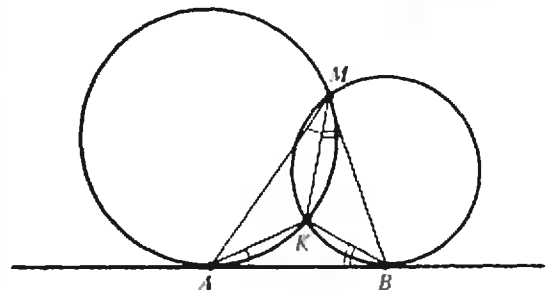


Рис. 11.

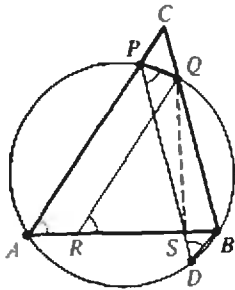


Рис. 12.

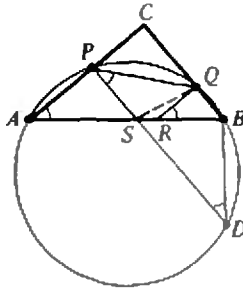


Рис. 13.

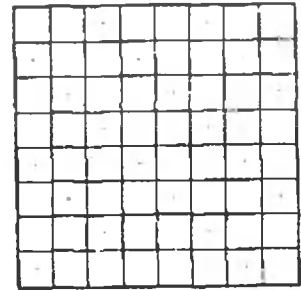


Рис. 14.

и т. д. После n -го шага получим последовательность из одних нулей.

б) Указание. Последовательность $1!, 2!, \dots, k!$ переводится в нулевую не меньше чем за k шагов.

10 класс

1. Ответ: — 1. Указание. Воспользуйтесь соотношением $\frac{m_{k+1}}{n_{k+1}} = \frac{n_k}{n_k + m_k}$, где $\frac{m_k}{n_k}$ — дробь, полученная из аналогичного выражения, содержащего k дробных черт.

2. Рассмотрим случай, когда точка R лежит между A и S (рис. 12). Случай, когда точка S лежит между A и R (рис. 13), рассматривается аналогично. Пусть D — точка пересечения данной окружности с прямой PS , отличная от P . Из $QB \parallel PD$ получаем: $\angle QPD = \angle BDP$. Кроме того, $\angle BDP = \angle PAB$, и наконец, $\angle PAB = \angle QRS$. Следовательно, $\angle QPS = \angle QRS$, т. е. из точек P и R отрезок QS виден под одним и тем же углом. Точки P и R лежат по одну сторону от прямой QS ; отсюда следует, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

3. Ответ: 1. После каждого применения пары операций A и B количество записанных на доске чисел уменьшается на 1. Следовательно, пара операций A и B применялась 1987 раз. Пусть d_k — натуральное число, вычитаемое при k -м применении операции A , $k=1, 2, \dots, 1987$. Так как после k -го применения операции A сумма записанных на доске чисел уменьшается на $(1989-k) \cdot d_k$, а операция B этой суммы не изменяет, после 1987-кратного применения пары операций A и B на доске будет записано число

$$x = (1+2+\dots+1988) - 1988d_1 - 1987d_2 - \dots - 2d_{1987} = 1988(1-d_1) + 1987(1-d_2) + \dots + (1989-k)(1-d_k) + \dots + 2(1-d_{1987}) + 1.$$

Числа $1-d_k$ неположительны при всех $k=1, 2, \dots, 1987$. Если при некотором k выполнялось неравенство $d_k \geq 2$, то $(1989-k) \times (d_k - 1) \geq 2$, так что $x \leq (1989-k)(1-d_k) + 1 \leq -1$, что противоречит условию задачи. Следовательно, $d_k=1$ при всех $k=1, 2, \dots, 1987$ и, значит, $x=1$.

4. Выберем среди данных точек три точки A, B, C так, чтобы все остальные точки лежали по одну сторону от плоскости ABC . Пусть D и E — любые две из оставшихся точек. Если бы точка E лежала внутри сферы S , проходящей через точки A, B, C, D , то точка D лежала бы снаружи сферы, проходящей через точки A, B, C, E , чего не может быть по условию за-

дачи. Но точка E не может лежать снаружи сферы S . Следовательно, точка E лежит на сфере S . Аналогично показывается, что на сфере S лежат и все остальные точки.

5. Ответ: а) может; б) не может.

а) Для любого квадрата размером 5×5 хотя бы одна из клеток, отмеченных на рисунке 14 крестиком, является угловой. Второй игрок всегда может добиться того, чтобы отмеченные клетки были белыми, так как первый игрок никаким своим ходом не может одновременно закрасить две такие клетки.

б) Если клетка является угловой для одного из квадратов размером 5×5 , то она не является угловой ни для какого другого такого квадрата. Всего этих квадратов 16. Поэтому для достижения поставленной цели второй игрок должен ходить так, чтобы после каждого его хода на доске было не меньше 32 белых клеток. Первый игрок может ему в этом помешать. Для этого он своими первыми 32 ходами красит все 64 клетки так, чтобы ни одна клетка не красилась им дважды. Второй игрок за свои первые 32 хода вернет белый цвет не более чем 32 клеткам. Если после этого на доске окажутся две соседние белые клетки, то первый игрок своим 33-м ходом их и закрасивает, оставляя белыми только 30 клеток. После 33-го хода второго игрока белыми будут не более 31 клетки, чего для достижения его целей недостаточно. Если же после 32-го хода на доске не окажется соседних белых клеток, то доска будет иметь шахматную раскраску, а значит, найдется квадрат размером 5×5 , у которого нет ни одной белой угловой клетки.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $t = \frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{gH}}$. Указание. Движение бусинки по спирали аналогично движению по наклонной плоскости (высотой H и длиной L).

2. См. решение задачи Ф1127 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

$$3. P = P_1 + P_2 + \frac{P_0 P_1 P_2}{P_1 P_2 - P_0(P_1 + P_2)}$$

Указание. Во всех случаях напряжение в цепи остается одним и тем же.

4. Перемычка сместится в сторону жидкости с большей плотностью на расстояние $x \approx 1,67$ см. Указание. Неизвестное x находится из квадратного уравнения

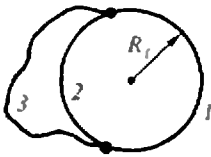


Рис. 15.

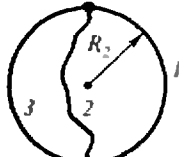


Рис. 16.

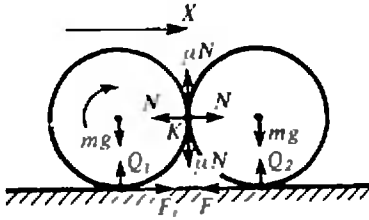


Рис. 17.

$$x^2 + \frac{2g(\rho_1 + \rho_2)}{\omega^2(\rho_2 - \rho_1)}x - R^2 = 0.$$

9 класс

1. См. решение задачи Ф1123 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

2. $A = \frac{1}{2}RT$.

3. В первом случае (рис. 15) две нитки с общей длиной $l_1 = 1 \text{ см} + 1,5 \text{ см} = 2,5 \text{ см}$ образуют окружность радиусом $R_1 = l_1/(2\pi)$. Из условия равновесия $(\sigma - \sigma/2,5)2R_1 = 2T$ находим искомые натяжения ниток:

$$T_1 = T_2 = T = 0,3\sigma l_1/\pi \approx 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ Н}, \\ T_3 = 0.$$

Во втором случае (рис. 16) окружность образуют две нитки с общей длиной $l_2 = 1,5 \text{ см} + 1,5 \text{ см} = 3 \text{ см}$. Аналогично первому случаю получаем:

$$T_1 = T_3 = 0,3\sigma l_2/\pi \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ Н}, \\ T_2 = 0.$$

4. Сразу после замыкания ключа в цепи возникает ток

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R + R_V} = \frac{q/C_1 - q/C_2}{R + R_V}$$

и вольтметр покажет напряжение

$$U_V = IR_V = 200 \text{ В}.$$

После установления равновесия ток прекратится и напряжение на вольтметре будет равно нулю.

10 класс

1. Силы, действующие на трубы, показаны на рисунке 17. Ясно, что

$$Q_1 = mg - \mu N, \\ Q_2 = mg + \mu N, \\ F_1 = \mu(mg - \mu N), \\ F_2 = \mu Q_2 = \mu(mg + \mu N).$$

Предположим, что левая труба не отрывается от пола, т. е. $Q_1 > 0$, а правая труба не проскальзывает относительно пола, т. е. $F < \mu Q_2$. Пусть a — проекция ускорения центров масс труб на ось X . По второму закону Ньютона

$$\mu(mg - \mu N) - N = ma, \quad (1)$$

$$N - F = ma. \quad (2)$$

За малое время Δt работа сил N и μN по перемещению малого участка правой трубы (обла-

сти K) идет на изменение кинетической энергии этой трубы:

$$Nv\Delta t - \mu Nv\Delta t = \Delta(mv^2),$$

где v — скорость оси трубы. Отсюда

$$Nv\Delta t - \mu Nv\Delta t = 2mv\Delta v.$$

Поскольку $\Delta v/\Delta t = a$, то

$$N - \mu N = 2ma. \quad (3)$$

Из уравнений (1), (2) и (3) получаем

$$a = \frac{\mu(1-\mu)}{2\mu^2 - \mu + 3}g,$$

$$N = \frac{2\mu}{2\mu^2 - \mu + 3}mg,$$

$$F = \frac{\mu(1+\mu)}{2\mu^2 - \mu + 3}mg.$$

Легко убедиться, что при $\mu = 2$ значения N и F — положительные, т. е. имеют смысл, и при этом выполняются условия $Q_1 > 0$ и $F < \mu Q_2$. Итак, наше предположение о характере движения труб оказалось верным. При $\mu = 2$

$$a = -\frac{2}{9}g < 0$$

— трубы начнут двигаться влево с ускорением $\frac{2}{9}g$.

2. Предположим, что поршень закреплен, и посмотрим, как изменится давление в каждой части цилиндра при сообщении газу количества теплоты Q :

$$\Delta p = \frac{\nu R \Delta T}{V}, \quad Q = \frac{3}{2} \nu R \Delta T,$$

откуда

$$\Delta p = \frac{2}{3} \frac{Q}{V}.$$

Таким образом, при сообщении одинакового количества теплоты давление растёт быстрее в той части цилиндра, где меньше объём. Следовательно, незакрепленный поршень будет смещаться в сторону большего объёма до тех пор, пока объёмы слева и справа от поршня не станут равными:

$$V_n/V_n \rightarrow 1.$$

Дополнение. После сообщения газу количества теплоты Q внутренняя энергия газа слева и справа от поршня изменится на

$$\Delta U_n = Q - A \quad \text{и} \quad \Delta U_n = Q + A,$$

где A — работа, совершенная расширяющимся газом. Очевидно, что $\Delta U_n > \Delta U_n$. Кроме того, начальная внутренняя энергия газа справа была в 3 раза больше, чем слева. Таким образом, внутренняя энергия газа в правой части цилиндра всегда больше, чем в левой.

С другой стороны, так как $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV$, то в конечном состоянии, когда давления и объёмы одинаковы, должны быть одинаковы и внутренние энергии газа в обеих частях цилиндра. Возникает противоречие. Как его разрешить?

Оказывается, на самом деле между объёмами V_n и V_n всегда будет оставаться некоторая разность ΔV , которая и обеспечивает конечную разность внутренних энергий

$$\Delta U = \frac{3}{2}p\Delta V.$$

3. См. решение задачи Ф1112 из «Задачника «Кванта», опубликованное в восьмом номере журнала за этот год.

11. Преломление света

- $\alpha < \arcsin(6/7)$.
- $R = 2$ см.
- $x = R/(n-1)$.
- $y = x/n$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

- Нельзя, так как, с одной стороны, сумма полученных пяти нечетных чисел должна быть нечетна, а с другой стороны, в эту сумму каждое из вписанных в кружки звезды чисел входит ровно два раза, и, следовательно, эта сумма должна быть четной.
- По крайней мере, две монеты должны быть положены в кассу, и у каждого пассажира должно остаться не меньше одной монеты. Случай восьми монет возможен: двое имеют по 20-копеечной монете, двое — по 15-копеечной и двое по две монеты — 10-копеечную и 15-копеечную. Пассажиры первой пары отдают свои монеты пассажирам третьей пары; пассажиры второй пары отдают свои монеты пассажирам первой пары, пассажиры третьей пары бросают свои 15-копеечные монеты в кассу, а 10-копеечные монеты отдают пассажирам второй пары.
- $36 + 37 = 73$.
- Заметим, что буквы можно упорядочить следующим образом: $T > I > P > A > K > V > O > > П > С > Н$. Отсюда ТРАНСПОРТИРОВКА = 976012379873456.

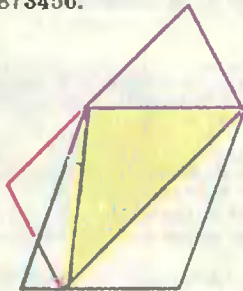


Рис. 18.

- Заметим, что желтый треугольник занимает половину площади и синего, и красного параллелограммов (рис. 18). Значит, эти параллелограммы равновелики.

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

(см. «Квант» № 9)

8 класс

- $F_3 = F(1 + (l_1/l_2)^2 + \sqrt{2}l_1/l_2)^{1/2}$.
- Шарики будут двигаться влево с прежними скоростями, а расстояния между ними (слева направо) будут равны l_1, l_2, l_3 .
- $\lambda = 10^5$ Дж/кг; $c_p = 2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).
- $n = \left(\frac{\sin(\alpha/3)}{\sin \alpha}\right)^2$; если $\alpha = 135^\circ$, все лучи после одного отражения выйдут обратно.

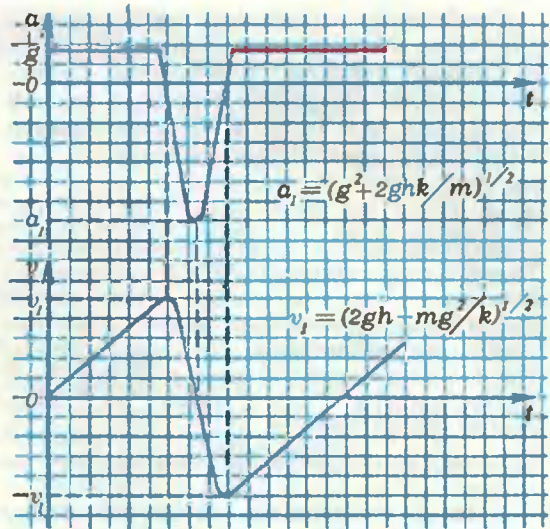


Рис. 19.

9 класс

- Сначала упадет третий шар, потом второй и последним — первый.
- Нет, не сможет.
- $t_2 = 11,5$ °С.
- $E = 9 \cdot 10^4$ В/м.

10 класс

- См. рис. 19.
- Максимальная энергия электрона много меньше энергии, необходимой для вырывания атома меди из кристаллической решетки.
- $V = 8,5$ л.
- У нижней кромки лампы возникает синяя кайма, а у верхней — красная.

Информация

Всероссийский конкурс «Юный программист»

Красноярский крайком ВЛКСМ, Вычислительный центр СО АН СССР (г. Красноярск) и Красноярский государственный педагогический институт объявляют Всероссийский конкурс «Юный программист» на лучшую программу, созданную школьниками для детей младшего возраста (до 12 лет).

На конкурс принимаются клавиатурные тренажеры, демонстрационные, обучающие, контролирующие программы по предметам, исполнители, игровые программы и т. д. При разработке программ следует ориентироваться на школьные персональные ЭВМ: «Электроника БК-0010» в комплекте с ДВК-2М (КУВТ-86), «Корвет», «УКНЦ», «Ямаха», «Агат».

Учреждено 6 главных призов и 10 поощрительных.

Для участия в конкурсе до 1 февраля 1989 года необходимо прислать заявку и подробный сценарий программы. Сценарий должен содержать основные идеи и покadroвое описание программы. Заявка пишется по следующему образцу:

Заявка

Ф. И. О. _____
 Домашний адрес _____
 Номер и адрес школы (СПТУ) _____
 Класс _____
 Тип машины _____
 Язык программирования _____
 Название программы (кому и для чего предназначена) _____
 Объем программы _____
 Среднее время работы программы _____

Авторы отобранных сценариев будут приглашены в Красноярск в конце марта 1989 года для участия в заключительном туре конкурса.

Материалы на конкурс направляйте по адресу: 660051 Красноярск, Абонентный ящик № 11533, оргкомитет конкурса «Юный программист».



Главный редактор —
 академик Ю. А. Осипьян

Заместителя главного редактора:
 В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
 В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
 А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
 В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтынский,
 А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
 Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
 В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
 В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
 А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
 С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
 С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
 В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
 А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
 А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
 А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
 И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
 Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
 А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
 Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
 В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
 Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
 И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
 В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили

А. Н. Виленикин, А. А. Егоров, Л. В. Кардашевич,
 И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников,
 В. А. Тихомирова

Номер оформили

Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубак, С. В. Иванов,
 С. Ф. Лукин, Э. В. Назаров, В. Б. Юдин

Фото представил А. Селиверстов (ФФТОР)

Редактор отдела художественного оформления
 С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректоры Н. Д. Дорохова, Л. С. Сомова

Сдано в набор 15.08.88 Подписано к печати 28.09.88
 Т 17822 Бумага 70×100/16 Печать офсетная
 Усл. кр. отт. 22,10 Усл. печ. л. 5,2 Уч. изд. л. 6,42
 Тираж 189 947 экз. Цена 40 коп. Заказ 2099

Орден Трудового Красного Знамени
 Чеховский полиграфический комбинат
 ВО «Союзполиграфпром»
 Государственного комитета СССР
 по делам издательства, полиграфии
 и книжной торговли
 142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
 «Квант», тел. 250-33-54

Шахматная страничка

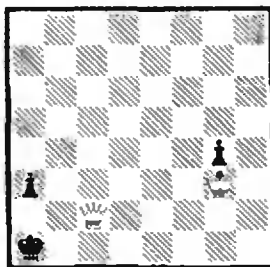
ОДНА ПОЗИЦИЯ — А СКОЛЬКО ЗАДАНИЙ!?

Среди различных жанров шахматных задач есть и такой: позиция придумывается одна, а заданий к ней — несколько. Рассмотрим такой пример, который уже когда-то печатался в «Кванте».

А. Кузнецов, Н. Плаксин. Белые: Крс3, Ла5, п. h6; черные: Крb1, пп. a6, h7. Мат в 2 хода на обычной доске и на вертикальной цилиндрической.

На обычной доске все просто: 1. Л:a6 Крс1 2. Ла1×. На вертикальном цилиндре (линии «a» и «h» приклеены друг к другу) на 1. Л:a6 следует 1...hа, а на любое отступление ладьи — 1...a5. Решает 1. Ла5—a5! Ладья проходит по кругу и остается на своем месте. 1...Крс1 2. Ла1×.

Эта задача привлекла внимание постоянного корреспондента «Шахматной странички» из Донецка В. Попова. Ему удалось сократить число действующих лиц и придать игре большую динамичность.



Мат в 2 хода на обычной доске и на вертикальной цилиндрической.

1. Кр:g4! a2 2. Фc1×; на цилиндре ход 1. Кр:g4 не годится из-за ответа 1...Крh1! Решает 1. Фc2—c2! Крh1 2. Фb1× (1...a2 2. Фc1×).

В. Попов не ограничился этим замыслом, а продолжил поиски. Переставив короля с g3 на g2, а пешку с a3 на a4, он сформулировал новое задание (для каждой из досок): мат в 3 хода.

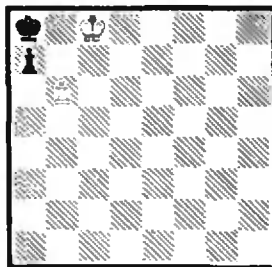
1. Крг3! Теперь ответ 1...a3 приводит к рассмотренной двухходовке, правда, на ци-

линдре у черного короля освободилось поле h1, но — 1...Крh1 2. Фh2×.

Еще одно усовершенствование: ферзь переставлен на b3, черная пешка с a4 на a5 и задание — мат в 4 хода (на обычной и на вертикальной цилиндрической досках).

После 1. Крг3! a4 2. Фc2 a3 мы приходим к исходной двухходовке. Удлинение решения само по себе не так интересно, но дополнительное изящество задаче придает ложные следы: 1. Фc2? g3! Оказывается, порядок ходов существует: если сейчас 2. Крh3 — на цилиндре, то 2...a4+! 3. Кра3 Крh1! 4. Фh2+gh!

Известны позиции, в которых помимо двух наших заданий добавляются еще два: мат ставится на горизонтальной цилиндрической доске и на торе. А следующая позиция может быть превращена сразу в девять различных задач! Это установили участники конкурса, проводимого журналом «64 — Шахматное обозрение».



1. Выигрыш.

Как показывает простейшее исследование позиции (ретроанализ), очередь хода за черными и верх берут именно они — 1...ab и т. д.

2. Кооперативный мат в 2 хода.

В задаче-кооперативе начинают черные, которые помогают белым добиться цели. 1. a6 b7+ 2. Кра7 b8Ф×.

3. Серийный кооперативный мат в 8 ходов.

В серийной задаче-кооперативе ходит одна сторона, а другой разрешается сделать только один заключительный

ход — матующий. 1—5. a5—a4—a3—a2—a1С! 6. Се5 7. Сb8 8. Са7 b7×.

4. Обратный мат в 9 ходов. Максимуммер.

Сложное математическое задание! В «обратной» задаче белые заставляют соперника объявить им мат, а максимуммер предусматривает, что черные обязаны делать геометрически самые длинные ходы. 1...a5 2. Крс7 a4 3. Крс8 a3 4. Крс7 a2 5. Крс8 a1Ф 6. b7+ Кра7 7. b8Ф+ Кра6 8. Фb6+ Кр:b6 9. Крb8 Фh8×.

5. Кооперативный пат в 3 хода. Цирце.

Опять два необычных задания, соединенных вместе. Первое понятно: черные начинают и с помощью белых запатовывают сами себя. А вот с другой темой мы сталкиваемся впервые. В сказочной задаче цирце черная фигура, когда ее берут, не покидает доску, а возрождается на своем исходном поле (с учетом цвета поля, на котором стоит в момент взятия; пешка возвращается на начальное поле той же вертикали). 1. a6 b7+ 2. Кра7 b8К! 3. Кра8! К:a6. Взятая пешка восстанавливается на поле a7, и черным пат.

6. Белые берут обратно последний ход и дают мат в 1 ход.

Вместо Крс7:Кс8 (на с8 стоял именно конь!) следует 1. b7×.

7. Белые берут обратно последний ход, после чего ставится кооперативный пат белым в 1 ход.

Вместо a5:Фb6 следует 1. a6 Фd6 — пат.

8. Белые берут обратно последний ход, после чего ставится кооперативный пат в 2 хода.

Назад берется ход a5:b6, а дальше все зависит от того, какая фигура была на b6: 1. Фd6 a6 2. Фc7+ Кр:c7: 1. Лb7 a6 2. Лc7+ Кр:c7: 1. Cd8! a6 2. Сc7 Кр:c7; 1. Kd5 a6 2. Кc7 Кр:c7.

9. Пат в 0 ходов.

Это, конечно, задача-шутка. Доска разворачивается на 180°, и черным пат!

А может, есть и десятое задание?

Е. Я. Гук

Цена 40 коп.

Индекс 70465

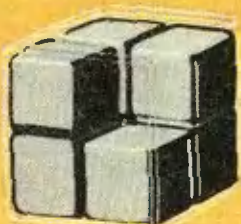
«Минус-кубик» (рис. 1, 3) — это пространственный вариант игры «15»: 7 кубиков, склеенных из двух П-образных половинок, белой и цветной (рис. 4), можно передвигать внутри прозрачной запаянной коробки вдвое больших, чем у кубика, размеров. Требуется расставить их так, чтобы с каждой стороны коробки был виден только один цвет. Итоговое, «правильное» распределение цветов показано на рисунках 1 и 3 (невидимые на них боковые стороны коробки цветные, а дно белое). Эта простая головоломка привлекла наше внимание тем, что два ее, казалось бы, идентичных варианта — черный, выпускаемый в Москве (рис. 1), и голубой, свердловский (рис. 3), — существенно отличаются по сложности решения. Московский «минус-кубик» можно собрать, действуя почти наобум, а над свердловским приходится поразмыслить. В чем же дело?

Занумеруем углы коробки (рис. 2; 1-й угол пустой) и выложим правильно расставленные кубики, не поворачивая их, в ряд по номерам. Результаты представлены в двух нижних строках таблицы: для наглядности от каждого кубика в ней оставлена только темная половина, а квадратик означает, что на соответ-

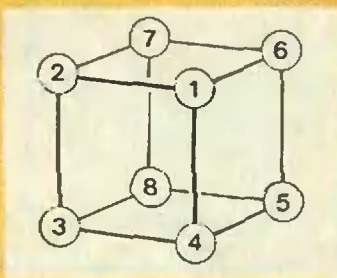
ствующем месте кубик расположен так, как показано в верхней строке. Мы видим, что московский и свердловский варианты отличаются только в одном месте. Однако этого достаточно, чтобы число расстановок кубиков, удовлетворяющих условию головоломки, для московского варианта оказалось в 12 раз больше, чем для свердловского, так что первый, можно сказать, в 12 раз проще второго. К тому же при правильной расцветке в свердловском «минус-кубике» может быть свободным только один из двух углов (1-й или 8-й), а в московском — любой.

С помощью нашей таблицы можно описать все способы укладки кубиков в коробочку, при которых можно получить правильную расцветку (как на рис. 1, 3): нужно выбрать несколько — от 0 до 5 — положений кубика из первой строки таблицы, причем среди них может быть не более одной пары одинаковых, остальные кубики должны быть ориентированы, как фигурки в нижних строках. Нетрудно подсчитать, что имеется 48 различных вариантов «минус-кубика», допускающих правильную расцветку.

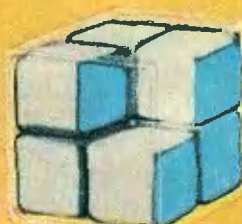
В. Д.



1



2



3

4



5

1	2	3	4	5	6	7	8