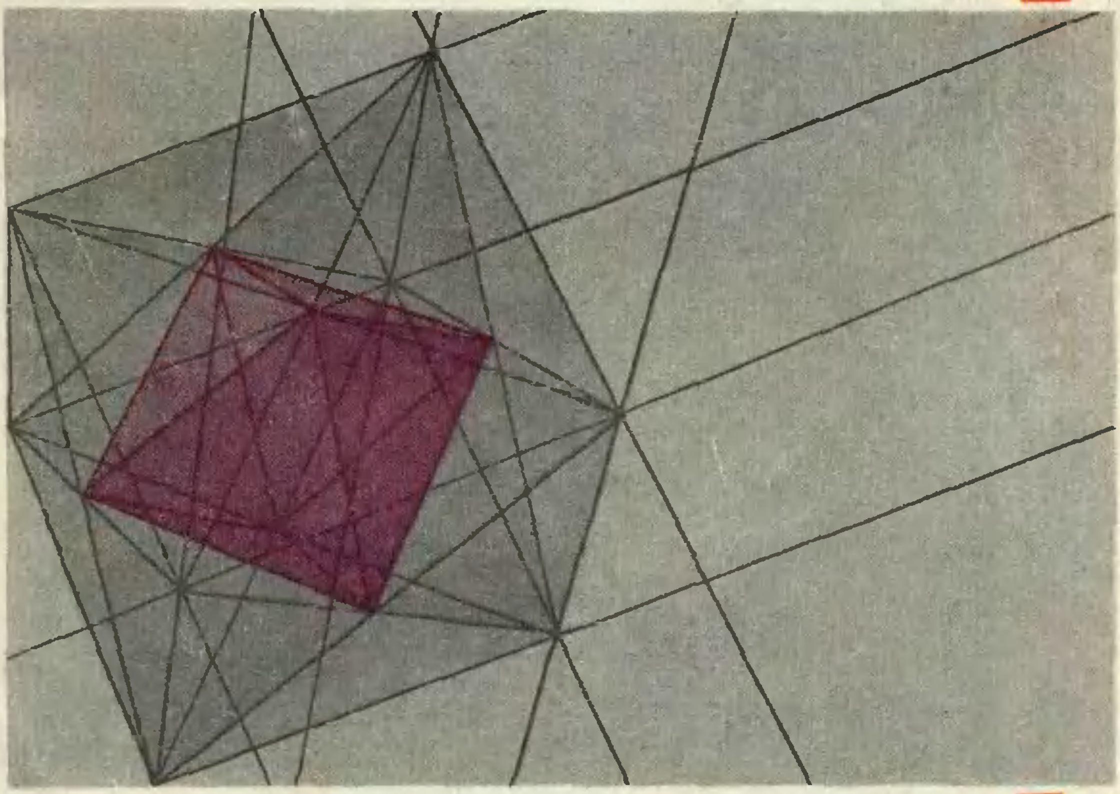
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Правильные многогранники

1988

Квант

Основан в 1970 году

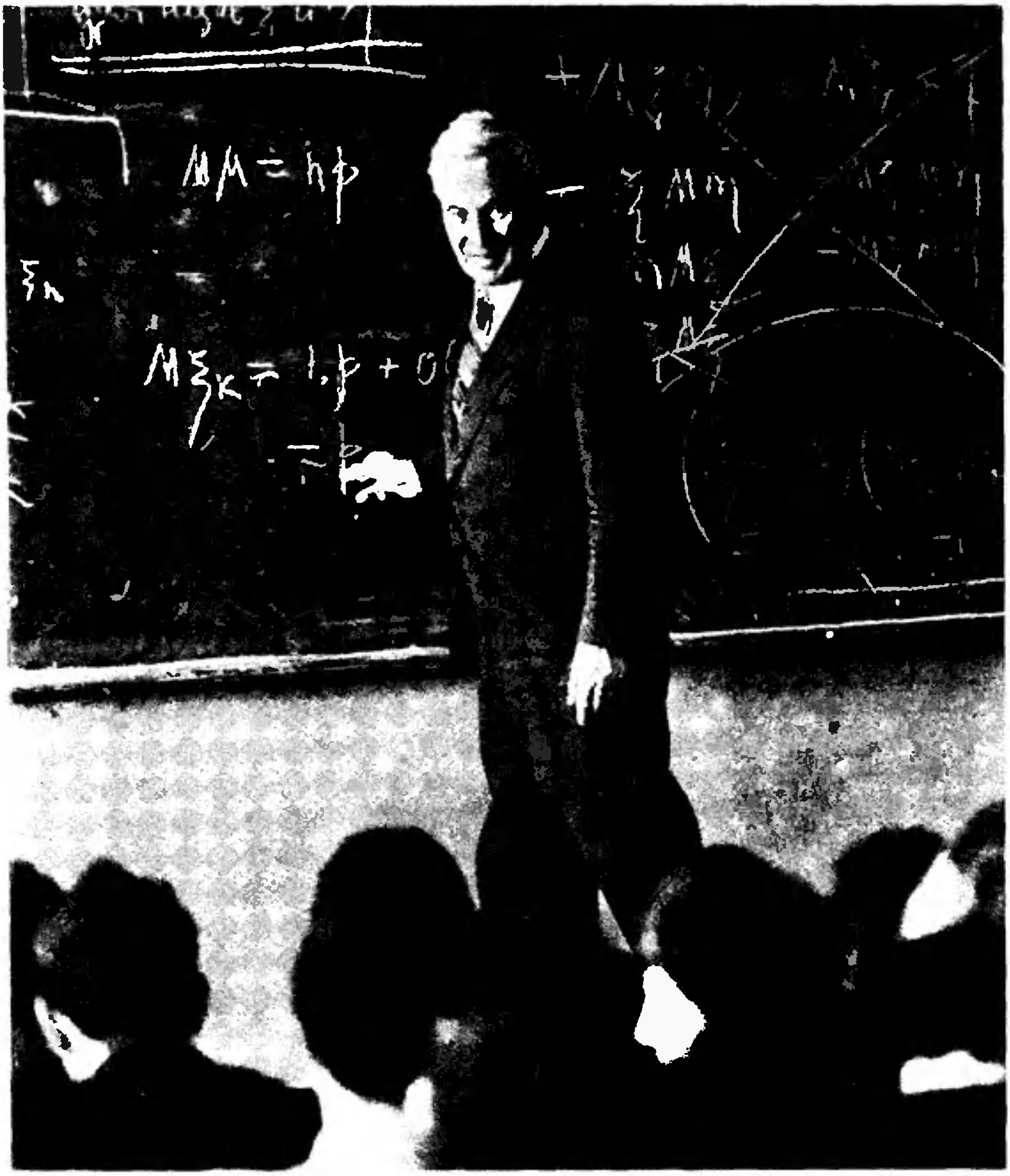
11 1988

12

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:



Двадцать пятого апреля 1988 года исполнилось 85 лет со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова. В его подмосковном доме в Комаровке в этот день собралась небольшая группа его учеников и сотрудников, в основном те же, кого ровно за год до этого Андрей Николаевич пригласил на свой день рождения. Как оказалось — на последний, который ему суждено было отметить: А. Н. Колмогоров скончался 21 ноября 1987 года. Собравшиеся были не самыми старшими и титулованными учениками А. Н. Колмогорова (среди его учеников одних академиков — семь человек!), а математиками помоложе — те, кто в последние годы его жизни ближе всего сотрудничал с ним. Мы публикуем воспоминания ближайших учеников А. Н. о том, как они познакомились с ним, совместно с ним работали или просто общались с ним. В этих воспоминаниях вырисовывается не только яркий образ великого ученого, но и образ уникальной личности.

А. Н. КОЛМОГОРОВ В ВОСПОМИНАНИЯХ УЧЕНИКОВ

Вспоминает член-корреспондент АН СССР, профессор Владимир Игоревич АРНОЛЬД:

— Андрей Николаевич Колмогоров прожил большую и счастливую жизнь. Колмогоров — Пуанкаре — Гаусс — Эйлер — Ньютон: всего пять таких жизней отделяют нас от истоков нашей науки.

Пушкин заметил как-то, что он оказал на юношество и российскую словесность больше влияния, чем все Министерство народного образования, несмотря на полное неравенство средств. Таким же было влияние Колмогорова на математику.

Я познакомился с Андреем Николаевичем в студенческие годы. Тогда он был деканом мехмата. Это были годы расцвета факультета, расцвета математики. Уровня, которого достиг факультет в 50-е — 60-е годы благодаря прежде всего Андрею Николаевичу Колмогорову и Ивану Георгиевичу Петровскому, он более никогда не достигал и вряд ли когда достигнет.

Андрей Николаевич был замечательным деканом. Он говорил, что надо прощать талантливым людям их талантливость, и спас не одного из очень известных сейчас математиков от исключения из университета. Снимая буйных студентов со стипендии, этот декан сам же помогал им пережить трудное время...

От других известных мне профессоров Андрея Николаевича отличало полное уважение к личности студента. Он всегда ожидал услышать от ученика что-то новое, неожиданное, и в высшей степени обладал той заразительной увлеченностью наукой, которая прежде всего и нужна студентам. «Действительно хорошо преподавать математику,— говорил Андрей Николаевич,— может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую, развивающуюся науку.»

Менее всего заботясь о формальном совершенстве своих лекций, Андрей Николаевич был замечательным учителем. Мне кажется, он руководствовался в своем преподавании принципами, которые сформулировал Эйнштейн:

«Кажется почти чудом, что современные методы обучения еще не совсем удушили святую любознательность, ибо это нежное растеньице требует, наряду со свободой, прежде всего поощрения. Большая ошибка думать, что чувство долга и принуждение способствуют тому, чтобы находить радость в том, чтобы искать и узнавать. Здоровое хищное животное отказалось бы от пищи, если бы ударами бича его заставляли непрерывно есть мясо, особенно если принудительно предлагаемая еда выбрана не им...»

В наш век больших научных коллективов кажется, что пора крупных индивидуальных достижений в науке ушла в прошлое. Для Андрея Николаевича характерны, однако, именно крупные личные достижения.

В развитии каждой области науки можно различить три стадии. Первая стадия — пионерская: прорыв в новую область, яркое и обычно неожиданное открытие, часто опровергающее сложившиеся представления. Затем следует техническая стадия — длительная и трудоемкая; теория обрастает деталями, становится труднодоступной и громоздкой, но зато охватывает все большее число приложений. Наконец, в третьей стадии появляется новый, более общий взгляд на проблему и на ее связи с другими, по-видимому далекими от нее вопросами; делается возможным прорыв в новую область исследований.

Для математических работ Андрея Николаевича Колмогорова характерно то, что он явился пионером и первооткрывателем во многих областях математики: ему принадлежат яркие достижения в теории вероятностей, теории функций, функциональном анализе, топологии, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории турбулентного движения жидкости и т. д.— трудно указать область математического анализа, в которую А. Н. Колмогоров не сделал бы существенного вклада, где бы он не решил старых (порой двухсотлетних) проблем.

Первую свою знаменитую работу — пример ряда Фурье суммируемой функции, расходящегося почти всюду, Андрей Николаевич выполнил в 19 лет. (В качестве курьеза упомяну, что Фреше говорил мне в 1965 году: «О, Колмогоров! Это тот замечательный молодой человек, который построил почти всюду расходящийся ряд Фурье!» Для Фреше все работы Колмогорова по теории вероятностей, динамическим системам, турбулентности имели меньшую цену, чем эта студенческая работа.) Сам Андрей Николаевич всегда высоко ценил «спортивно-математические» достижения и этой первой работой гордился, но самым трудным своим спортивным достижением считал работу о 13-й проблеме Гильберта.

Технического усовершенствования и обобщений построенной теории Андрей Николаевич обычно старался избегать. Зато на третьей стадии работы, когда нужно осмыслить полученные результаты и увидеть новые пути, на стадии создания фундаментальных обобщающих теорий, Андрею Николаевичу принадлежат замечательные достижения.

Среди более чем трех сотен опубликованных им статей имеются исследования по механике, геологии, биологии, кристаллизации металлов, теории стрельбы, теории стихосложения, теории передачи информации, теории автоматов и т. д. В само́й математике Андрей Николаевич всегда старался выбирать такие проблемы, решение которых приближает нас к познанию природы и к овладению ее силами. Сам он сказал о своей прикладной деятельности так:

«Занимаясь с некоторым успехом, а иногда и с пользой, довольно широким кругом практических приложений математики, я остаюсь в основном чистым математиком. Восхищаясь математиками, которые превратились в больших представителей нашей техники, вполне оценивая значение для будущего человечества вычислительных машин и кибернетики, я все же думаю, что чистая математика в ее традиционном аспекте еще не потеряла своего законного почетного места среди других наук. Гибельным для нее могло бы оказаться только чрезмерно резкое расслоение математиков на два течения: одни культивируют абстрактные новейшие отделы математики, не ориентируясь отчетливо в их связях с породившим их реальным миром, другие заняты «приложениями», не восходя до исчерпывающего анализа их теоретических основ... Мне хочется подчеркнуть законность и достоинство позиции математика, понимающего место и роль своей науки в развитии естественных наук, техники, да и всей человеческой культуры, способного развивать свою естественную науку в соответствии с этими общими потребностями».

Эти слова Андрея Николаевича о законности и достоинстве позиции математика, вынесенные в 1963 году на обложку посвященного ему номера «Огонька»,— его кредо и научное завещание. Актуальность его мыслей и предостережений становится все очевидней по мере того, как сбывается предсказание Лагранжа: «Места по математике в Академии сделаются тем, чем уже стали кафедры арабского языка в университетах...»

Вспоминает доктор физико-математических наук, профессор МГУ Владимир Андреевич УСПЕНСКИЙ:

— Еще школьником я узнал, что есть такой математик Колмогоров, и, никогда его не видев и не зная никаких его работ, я уже знал, что самый главный математик, самый великий — это Колмогоров. А потом я участвовал в Московской олимпиаде по математике (скорее всего это была весна 1946 года, когда я учился в 8-м классе), и среди тех, кто приветствовал участников олимпиады, был Колмогоров. На трибуну вышел моложавый человек. На меня произвело очень большое впечатление его выступление: и манера говорить гнусаво, наклонив голову набок к плечу, и текст выступления, который начинался фразой: «Президент Московского математического общества Павел Сергеевич Александров поручил мне приветствовать участников математической олимпиады». Если самый великий математик — Колмогоров, то как же велик тот, кто мог что-то поручить самому Колмогорову?!

Познакомился я с Андреем Николаевичем, когда был на третьем курсе. Он читал специальный курс на мехмате МГУ «Теория меры». На этот спецкурс ходили в основном для удовольствия, так как сдавать этот курс было не нужно. Однажды в перерыве между лекциями я к нему подошел. Мне неловко об этом вспоминать: А. Н. сделал некоторое утверждение, которое я опроверг. На него это произвело впечатление, и он пригласил меня приехать к нему на дачу, спросив, готов ли я только говорить о математике или же могу также кататься на лыжах. Так мы с ним познакомились.

О катании даже и вспоминать не хочется, потому что лыжи просто не держались на мне. До этого я катался на лыжах только в валенках, просовывая носок валенка в петельку, и никаких других креплений просто никогда не видел и не знал, что такие бывают. Андрей Николаевич выдал мне и ботинки, и лыжи, и крепления (жесткие или полужесткие, не помню сейчас). Лыжи постоянно с меня спадали, и академик Колмогоров всякий раз при этом стоял на коленях на снегу, поправляя крепления моих лыж. Первые лыжи уехали от меня совсем под гору, мы вернулись и надели другие. Я в этом, скорее всего, не был виноват, потому что при исправных креплениях лыжи не должны были бы уехать. Это все происходило 22 января 1950 года. С этого времени я стал учеником А. Н.

Работать с А. Н. было очень не просто. Все время ощущалось, что он человек гениальный. В моей жизни было три гениальных человека, с которыми мне довелось общаться,— это Б. Л. Пастернак, А. А. Зализняк и А. Н. Колмогоров. У А. Н. был свой особый стиль. Зимой 1950 года, впервые позвав меня к себе на дачу, он не без некоторой торжественности произвел меня в свои ученики. Тогда же он назначил тему моих занятий. Он сказал, что бывают такие особенные функции, они называются рекурсивными, и о них в нашей стране почти никто ничего не знает. Дал несколько оттисков статей из иностранных журналов и велел разобраться. И сказал: «В крайнем случае, если из вас ничего не выйдет, будете делать нам грамотные рефераты». Одновременно с этим он подарил мне несколько оттисков своих трудов, один из которых — с дарственной надписью. Это очень ранние и уникальные оттиски 20-х годов, которые я берегу.

В чем проявлялась гениальность А. Н., сказать очень трудно. Но вот могу назвать такие две отличительные его черты. Первая. Будучи аспирантом, я встречался с А. Н. еженедельно. И всякий раз, в каждую последующую встречу, он помнил, на чем мы расстались, и вообще всю мою работу (все, что я сделал до этого) он знал лучше и точнее, чем я. Хотя я занимался только этим, а он, как известно, и многим другим. Вторая черта. Часто одновременно со мной в Комаровку ездил Г. И. Баренблатт, с которым А. Н. занимался гидродинамикой (а со мной — математической логикой). На нас с Баренблаттом производило неизгладимое впечатление, с какой легкостью А. Н. переходил от гидродинамики к математической логике и обратно. Для него это было совершенно естественно. А нам казалось чудом.

Как шла работа? Иногда мы оба с А. Н. рассуждали вслух, а иногда я писал ему тексты, которые и вручал (и которые как мне теперь хотелось бы надеяться он просто выбрасывал). Взяв меня в аспирантуру, Колмогоров назначил мне два трудных экзамена по алгебре и по уравнениям математической физики и объявил, что третий экзамен должен быть все же ближе к логике. И велел мне сдавать теорию релейно-контактных схем. Математической литературы по релейно-контактным схемам тогда почти не было, а была литература техническая. Поэтому подготовка к этому экзамену давалась мне труднее всего. Помню, что два месяца я не мог понять, как работает триод. И, только все выучив, понял, что это и не надо было понимать. Помимо трех экзаменов полагались еще и аспирантские отчеты. В качестве одного из них А. Н. дал мне для перевода только что вышедшую на немецком языке книгу венгерского математика Розы Петер «Рекурсивные функции». Немецкий язык я не знал, но сказать об этом Колмогорову не решился. Я взялся за работу и... перевел. Книжка получилась неважная, но предисловие, которое написал А. Н.,— гениальное.

У меня есть две работы, совместные с А. Н., есть и работа, на которой стоит только моя фамилия, но которая полностью инспирирована А. Н. Это статья в «Докладах Академии наук» про доказательство теоремы Гёделя. Когда А. Н. индуцировал у своего ученика некоторый результат, который на самом деле был им почти подсказан, он создавал такую обстановку, будто бы ученик додумался до этого сам, и предлагал писать статью в журнал о результате. Вот такая психологическая поддержка своего младшего партнера — очень существенный момент его деятельности. Происходило ли это инстинктивно или он это обдумывал, я не знаю.

К сожалению, я, наверное, не могу считать себя полноправным учеником А. Н., потому что не обладал ни одним из двух необходимых для этого качеств: ничего не понимал в музыке и не занимался спортом. Тем не менее, он меня не прогонял. А иногда рассуждал со мной об искусстве, поражая меня своими познаниями во всем. Кто сегодня, например, знает шахматный учебник Дюфреня? Никто. Это известный учебник конца прошлого века. Этот учебник у меня дома был (достался от отца), поэтому я его читал. И когда мы заговорили с А. Н. о шахматах, первое слово, которое он произнес, было «Дюфрень», и он рассказал мне содержание учебника.

Еще такой случай. Для меня было неожиданностью, что на гербе правой и левой стороной считаются не то, что мы видим справа и слева, а наоборот. (Это потому, что герб рисовался на щите и рассматривался с точки зрения того, кто нес щит.) Едва я это узнал, как А. Н. по какому-то поводу об этом упомянул.

Вспоминает доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института Академии наук Альберт Николаевич ШИРЯЕВ.

— Об Андрее Николаевиче я впервые услышал, конечно, в школе: учительница по математике очень много говорила о нем. Я учился тогда в 538-й московской школе-интернате, и наша учительница подталкивала нас к участию во всевозможных кружках и олимпиадах. При вручении призов на одной из олимпиад я впервые увидел А. Н. Потом было поступление в университет. Хотя об А. Н. мы слышали и раньше, но общение с ним казалось чем-то недостижимым, нереальным.

Я сначала блуждал по разным кафедрам, и прошло много времени, прежде чем я остановился на кафедре теории вероятности. Впервые некоторое соприкосновение с А. Н. произошло тогда, когда я слушал его курс «Анализ-3». А первый мой разговор с А. Н. произошел, когда я защищал свою дипломную работу. Я ее выполнял между 4-м и 5-м курсами, потому что знал, что в начале 5-го курса мне будет не до дипломной работы, поскольку я входил в студенческую сборную страны по горным лыжам, и в начале февраля 1957 года принял участие во II Зимних студенческих играх в Гренобле.

Защита происходила в конце февраля. После защиты А. Н. вышел со мной в коридор, поговорил со мной о работе, произнес много вещей, которые я не понял. И то ли кто-то сказал ему о моем участии в играх в Гренобле, то ли мой загорелый вид говорил сам за себя, но А. Н. пригласил меня к себе в Комаровку кататься на лыжах.

А. Н. спрашивал о моих математических интересах, но никакого дальнейшего разговора тогда не было. Начиная с 4-го курса я был в спецгруппе, поэтому я никак не мог рассчитывать на работу в Математическом институте. Однако после 5-го курса мы с моим однокурсником Витей Леоновым, к несчастью, рано погибшим, узнали, что А. Н. берет нас по распределению в Математический институт. Мы сразу даже не оценили этого счастья. И тут же началась работа: А. Н. включил нас в исследования по нелинейному спектральному анализу, нелинейной теории случайных процессов. Это были настолько счастливые и плодотворные годы, что я даже забросил горные лыжи. По поводу одной нашей работы, которая сейчас широко известна и которую мы докладывали с Леоновым, А. Н. с улыбкой сказал, что «авторы преисполнены важности разрабатываемой проблемы».

Когда В. Леонов и я были зачислены в МИАН, А. Н. сразу четко определил наши обязанности. В 1956 году был создан журнал «Теория вероятностей», и определенная работа по журналу была возложена на нас: редактирование, разметка чужих работ. Эта деятельность, хоть и была черновой, явилась для нас хорошей школой. Следующее, что мы должны были делать с Леоновым,— ходить на лекции А. Н., в частности по случайным процессам, и записывать их. Кстати, этими записями его лекций я до сих пор пользуюсь; они остались неизданными. На их приведение в порядок В. Леонов затратил много сил, но когда А. Н. увидел получившийся текст, его комментарий был очень краток: «Боже, какой урод получился!».

Что касается научных исследований о нелинейных случайных процессах, то А. Н. заметил в одной работе Черенкова (сына известного академика) некоторые правила вычисления так называемых сёми-инвариантов маленьких порядков. Он решил, что, по-видимому, имеет место некоторое общее правило (для всех порядков), как-то его пояснил и поручил нам его доказать. Ситуация была очень тяжелая. Каждый четверг А. Н. начинал с того, что интересовался, что нами по этому поводу сделано. Мы исписывали фантастическое количество бумаги. И только через год мы доказали сложнейшими комбинаторными путями то, что нужно. А потом мы нашли доказательство, которое уместилось на двух страницах. А. Н. написал введение к этой работе.

Теперь о том, как мы работали. А. Н. так много знал, что мы довольно быстро усвоили правило: не уходить от А. Н. без бумажки, на которой он делал при разговоре пометки. Потом, разглядывая эти бумажки, мы разгадывали их, как ребусы. Часто не покидало ощущение, что он говорит что-то гениальное и по делу, а ты ничего не понимаешь. Магнитофонов тогда не было, а записать все — просто физически не было возможности. И каждый четверг на вопрос А. Н. «что же сделано?» стыдно было отвечать, что ничего, и приходилось не спать, недоедать. Хотя у нас уже начали появляться семьи, мы упорно скрывали это от А. Н.

Даже спустя два года А. Н. создавал такие ситуации, которые были сопряжены с потрясениями. Например, я хорошо помню, как однажды мне позвонили в 9 вечера и сказали, что А. Н. просит приехать к нему в Комаровку. Часам к 11 я добрался в Комаровку. А. Н. оказался больным. Он сказал, что завтра у него должна состояться лекция, где нужно будет читать теорему Блэкуолла о рекуррентных событиях. А. Н. не хочет, чтобы эта лекция пропускалась, и просит меня ее прочесть. И предложил два варианта: либо он немедленно что-то мне рассказывает по теме лекции, либо дает оттиски работы Блэкуолла, в которой я сам должен разобраться. Лекция должна была читаться на первой паре, поэтому у меня была ночь. Блэкуолл писал фантастически сжато. Я поехал домой, просидел всю ночь, прочитал лекцию, а потом вернулся домой спать.

Довольно-таки быстро А. Н. переключил меня на новую тематику. Пришлось изучать книги по радиотехнике, где было описано устройство приемников и ламп, разобраться в принципах радиолокации. Заказчики пришли и объяснили суть задачи. Математическая ее постановка, предложенная А. Н., оказалась удивительно удачной (А. Н. умел так удачно формулировать задачи, что из них потом вырастали совершенно новые направления). Занимаясь этой задачей, я написал свою докторскую диссертацию и книжку по статистическому последовательному анализу.

А. Н. никогда ничего подробно не объяснял. Приходилось до всего доходить самому. Он выдал нам почти инженерную постановку задачи: минимизировать среднее время запаздывания при заданной вероятности ложных тревог. Ответ он, конечно, угадал. А. Н. сказал лишь, что в очень простой ситуации ответ должен быть такой-то, причем его нельзя было получить из какой-либо существующей в то время теории: нам ее просто пришлось придумывать.

А теперь об общей культуре. Поскольку мы были связаны секретарскими обязанностями, лекционной деятельностью, приходилось часто бывать в Комаровке. Ходили в походы, слушали музыку. И в музыке фамильярничать с А. Н. было невозможно.

Типичный пример. После какого-то вечера, когда было очень много музыки, А. Н. спросил: «Ну, что же еще вам сейчас поставить: Шарпантье или Куперена?». Я сказал: «Андрей Николаевич, может быть, что-нибудь полегче?» А. Н. тут же: «Сейчас я вам «Одинокую гармонь» найду». Мне было невдомек, что А. Н. может что-нибудь знать об этой «Одинокой гармони». А однажды, слушая музыку, я сидел и постукивал пальцами по столу. А. Н. быстро подложил салфеточку. Я все понял.

Моя деятельность (сначала нелинейные преобразования, потом последовательный анализ) — пример того, как А. Н. с помощью очень простых формулировок выталкивал людей на самостоятельную орбиту, после чего он считал, что у него есть сотрудники, которые этим занимаются, и знают это лучше него (хотя знать лучше А. Н. можно было только детали, но не общие идеи).

О не математическом общении с А. Н. могу рассказать лишь отдельные эпизоды, отдельные штрихи. Помню такой характерный эпизод. Мы были вместе в Венгрии на конгрессе по теории информации. Получили по 1300 форинтов. Поскольку там нас поили-кормили, у каждого образовалась большая сумма денег. И возник вопрос: что купить? А. Н. сразу спросил про книжный магазин. Пришли туда. Он тут же увидел книгу рисунков Микеланджело, которая стоила 1200 форинтов, купил ее, потратив все что у него было, и сказал: «А билет на трамвай вы уж мне купите».

Впервые со старыми русскими городами я познакомился через А. Н. Иногда заезжали в провинциальные русские города, в глубинку. А. Н. о каждом городе многое знал, и цель у него всегда была определенная: он помнил, что здесь нужно посмотреть такую-то стену или башню. Видимо, на память об этих поездках А. Н. подарил мне на сорокалетие толстую книгу «Древнерусские города».

Я никогда не видел, чтобы А. Н. жаловался. Он никогда, ни в какой форме не искал к себе сочувствия. А на вопрос: «Как вы относитесь ко всякому почету, уважению?» — А. Н. отвечал просто: «Спокойно».

Из спортивных увлечений А. Н. стоит отметить греблю и лыжные походы. В равнинных лыжных походах А. Н. проявлял фантастическую ритмичность движений. 30—40 км похода для нас были недостижимой вещью, мукой, а он даже в 60 лет проходил такие расстояния легко.

Вспоминает доктор физико-математических наук, профессор МГУ Владимир Михайлович ТИХОМИРОВ:

Я познакомился с Андреем Николаевичем на 3-ем курсе, в 1955 году. А. Н. был тогда деканом механико-математического факультета, а я — секретарем комсомольской организации своего курса. Однажды произошел инцидент: один из моих товарищей, человек горячий и гордый, не вытерпел оскорбления, которое нанес ему взрослый человек, и ответил очень грубо. Стал разбираться вопрос о пребывании моего товарища в университете. Тогда я и пришел к А. Н. и изложил существо дела. А. Н. довольно резко сказал, что это, конечно, безобразный поступок, который требует самого сурового осуждения. Я старался защитить своего друга и говорил, что он, разумеется, виноват, но все товарищи знают его как хорошего и способного человека, и потому не следует его отлучать от университета. Андрей Николаевич повторял свои слова осуждения, но когда мне уже казалось, что дело окончательно проиграно, он вдруг сказал: «Ну, мы его, конечно, не исключим». Андрей Николаевич всегда верил в доброе начало в человеке. Он поддерживал многих, и почти во всех случаях те, кому он оказал поддержку, заняли достойное место в науке.

А. Н. никогда мне не ставил персональных задач. Я участвовал в семинаре А. Н. На нем А. Н. предлагал задачи как бы всем. Одна из них мне показалась очень интересной. После того как я решил ее, Андрей Николаевич стал обсуждать со мной перспективы дальнейшей работы. Часть задач предлагал я, и А. Н. одобрял меня, по поводу другой части высказывал свои сомнения, предлагал множество своих задач в развитие всей тематики. Он как бы приоткрывал завесу и показывал отдаленную перспективу, где виделись и конкретные цели и открывался путь, не имеющий конца.

Однажды А. Н. сказал мне: «Вы не должны иметь обо мне представление как о человеке, который знает только математику; я принадлежу к тем людям, кто имеет собственное мнение более или менее по любому вопросу». Я знал всегда, что А. Н.— математик исключительной широты, но не мог и подозревать, в какой мере безграничным является его кругозор в философии, экономике, политике, географии, в вопросах, связанных с искусством и литературой. Он был при этом очень самобытен, почти всегда непредсказуем. В частности, в своих пристрастиях. Как-то зашла речь о крупнейших писателях XX века. Я задумался и стал перебирать наиболее «престижные» тогда (в середине пятидесятых) имена — Горький, Шолохов, Фолкнер, Роллан, Хемингуэй, Ремарк... Андрей Николаевич без колебаний вершинами мировой литературы нашего века назвал творчество А. Франса и Т. Манна, и это было для меня совершенно неожиданно. А когда речь зашла о поэзии, А. Н. также непредсказуемо для меня выделил 24-летнего тогда Евтушенко.

А. Н. был страстным и неутомимым лыжником, очень любил дальние лыжные переходы. Как-то он попросил пригласить к нему с нашего курса кого-нибудь из сильных лыжников, чтобы сделать особенно дальний переход. На нашем курсе был студент с первым юношеским разрядом, ему передали просьбу А. Н., тот с удовольствием согласился. Поначалу наш сокурсник резвился, убегал, поджидал А. Н., потом уже шел рядом, берег силы, а в конце А. Н. просто нес его лыжи: в долгих лыжных походах (особенно без большой тренировки) иногда наступает такой момент, когда человек еще кое-как может ковылять пешком, а на лыжах идти уже не в состоянии.

Вспоминает кандидат педагогических наук, заведующий сектором ВНИИСиМО Александр Михайлович АБРАМОВ:

— Заочно я познакомился с Андре-

ем Николаевичем, когда учился в седьмом классе. Я прочитал его брошюру «О профессии математика». Написана она и доступно, и ярко, поэтому хорошо помню свои впечатления и даже отдельные задачи. А первая встреча произошла в 1963 году, когда А. Н. вручал грамоты призерам Всероссийской олимпиады.

В том же году была организована сначала первая летняя математическая школа в Красновидово, а затем и ФМШ при МГУ. Мы, ученики самого первого выпускного класса, считали, что нам невероятно повезло: и в летней школе, и в ФМШ А. Н. был нашим учителем. Да и он сам, по-видимому, испытывал особые чувства к первым 19-ти выпускникам ФМШ — спустя многие годы он помнил всех.

В студенческие годы, учась на мехмате МГУ, я работал в интернате преподавателем математики и довольно часто встречался с А. Н. Но все же было полной неожиданностью, когда перед распределением он предложил мне профессионально заниматься школьными проблемами и стать его аспирантом. Естественно, я сразу согласился. Событием было и первое посещение Комаровки.

Свою первую научную работу я выполнил в университете под руководством В. М. Тихомирова. Так что в известной мере с характером школы А. Н. я был знаком, и это оказало большую помощь.

Хотя мне предстояло работать над педагогической диссертацией, тема требовала главным образом размышлений в сфере математики. А. Н. кратко поставил задачу: дал список аксиом евклидовой планиметрии, положенной им в основу школьного курса геометрии, и сказал, что надо на их основе дать точное изложение геометрии, исследовать аксиоматику. Каких-либо инструкций (например, как выстраивать последовательность теорем) и подсказок не было. А. Н.

выделил только наиболее интересующий его результат — теорему об измерении углов — и указал несколько работ, которые полезно прочитать.

Таким образом, он предоставлял полную свободу. И дело ограничивалось очень краткими обсуждениями. Но окончательные результаты А. Н. контролировал, внимательно знакомился с итоговым текстом.

Позднее мы много работали над школьными учебниками. Было несколько периодов по 3—4 месяца ежедневной работы при подготовке очередных изданий. А. Н. очень тщательно следил за текстом. Когда его что-то не удовлетворяло (а это происходило постоянно, вплоть до стадии корректуры), рассматривались многие варианты. В итоге возникали горы черновиков.

На мой взгляд, главное, что давал А. Н. как учитель, научный руководитель, это увлеченность делом и веру в собственные силы. Он умел сделать так, что ученик вырастал много выше того потолка, который сам себе отмерял. Как-то стыдно было не выполнить задания, которое давал А. Н. Может быть, поэтому удавалось сделать многое из того, что ранее казалось невозможным. Очень важно иметь такой пример перед глазами — для А. Н., кажется, не было задач, которые нельзя решить, он все знал.

Мне кажется, что А. Н. в какой-то момент своей жизни (очевидно, в ранней юности) решил, что человек просто обязан быть счастлив и для этого ему нужно то-то и то-то. При этом необходимо, чтобы все виды деятельности, которые выбирает себе человек, его по-настоящему увлекали. И А. Н. удалось построить свою жизнь таким образом: его творческие достижения необычайны, он очень многое умел ценить — любил человеческое общение, природу, музыку, литературу...

Внешне рациональная, размеренная, его жизнь была внутренне динамична, наполнена и интересом ко всему сущему, и глубокими переживаниями. Однажды А. Н. заметил, что по его мнению каждый человек, начиная с определенного момента, продолжает как бы оставаться в том возрасте, для которого наиболее характерно свойственное этому человеку мироощущение. На прямой вопрос: «А вам сколько лет, Андрей Николаевич?» — он ответил: «Четырнадцать».

Публикацию подготовил
А. Б. Сосинский

Внимание!

Дорогие читатели! В новом, 1989 году мы увеличиваем количество страниц в журнале на 25 %. Это позволит нам открыть ряд новых рубрик. Большее внимание будет уделено вопросам космических исследований, астрономии, общим вопросам программирования. На страницах журнала чаще будут появляться произведения художественной литературы.

Для компенсации расходов по увеличению объема журнала цена каждого номера увеличивается на 5 копеек. Новая цена журнала — 45 копеек. К сожалению, решение об увеличении объема и стоимости журнала было утверждено после выпуска каталога «Союзпечати» и начала подписки на 1989 год.

Если вы уже оформили подписку, просим вас в соответствующем отделении «Союзпечати» произвести доплату по 5 копеек за каждый номер.

МОЛНИИ В КРИСТАЛЛЕ

Доктор технических наук
Ю. Р. НОСОВ

Спросите специалиста по электронике — инженера, научного работника, руководителя предприятия: что сегодня самое перспективное и многообещающее в этой области? Восемь из десяти ответят: «Оптоэлектроника!»

Давняя мысль об использовании в информатике не только электрических сигналов (как это предлагает традиционная микроэлектроника), но и сигналов световых, оптических — эта мысль оказалась очень плодотворной. Выяснилось, что благодаря слиянию электроники с оптикой возможности устройств вычислительной техники и связи неизмеримо возрастут: в сотни и тысячи раз повысится их быстродействие, устройства станут более надежными, помехоустойчивыми, миниатюрными.

Все это было понято еще в шестидесятые годы. Так почему же, вправе спросить читатель, многое и сейчас остается по-прежнему лишь обещанием? А дело вот в чем. Чтобы «впрячь» свет в работу, надо научиться обращаться с ним так же свободно и просто, как с электрическим током. Научиться усиливать и преобразовывать световые сигналы, без потерь передавать их из точки в точку, записывать и сохранять. Но прежде всего надо научиться их генерировать. Что бы ни говорилось о важности всех элементов оптоэлектронной системы, именно источник световых сигналов, излучатель, является ее первоосновой, «альфой и омегой» оптоэлектроники. И конечно, нужен не просто любой излучатель, как, например, осветительная лампа, а такой, который по миниатюрности, экономичности, долговечности был бы под стать транзисторам и интегральным схемам.

Очевидно, что решение проблемы излучателя могло быть найдено лишь в сфере полупроводников.

Перенесемся мысленно лет на тридцать назад. В те годы полупроводниковая наука работала на нужды транзисторной техники — ведь именно с этими приборами связывались большие надежды электроники. Первые транзисторы изготавливались из германия, но было ясно, что лучшие результаты могут быть достигнуты на кремнии и на таком новом тогда полупроводнике как арсенид галлия — двухкомпонентном соединении мышьяка и галлия (GaAs). «Кремниевое» направление быстро достигло успехов и с 1960 года стало основой не только транзисторной техники, но и микроэлектроники.

А вот из арсенида галлия транзисторы упорно не желали получаться. И миллионные затраты на создание совершенных монокристаллов GaAs уже готовы были списать в убыток, оправдываясь тем, что «наука требует жертв», но... Не всегда известно, где найдешь, где потеряешь. Вдруг и на этом, «тупиковом», направлении засветилась надежда, причем засветилась в буквальном смысле слова.

В 1956 году обнаружили: при пропускании электрического тока через арсенидогаллиевый диод он начинает излучать!*) Так появились светодиоды. Физики и инженеры буквально набросились на интересный эффект. Тотчас же установили, что полупроводниковый кристалл в светодиоде не раскаляется — значит, ответственна за излучение люминесценция, давно известная ученым как «холодное свечение».

Разобрались и в механизме работы светодиода. Используемый в нем

---

*) Вообще говоря, излучение полупроводникового диода впервые наблюдал в 1927 году наш соотечественник О. В. Лосев, но интенсивность свечения была так ничтожна, что практического применения «эффект Лосева» не получил, был забыт, и через 30 лет все пришлось повторить. Ситуация не столь уж редкая в науке.

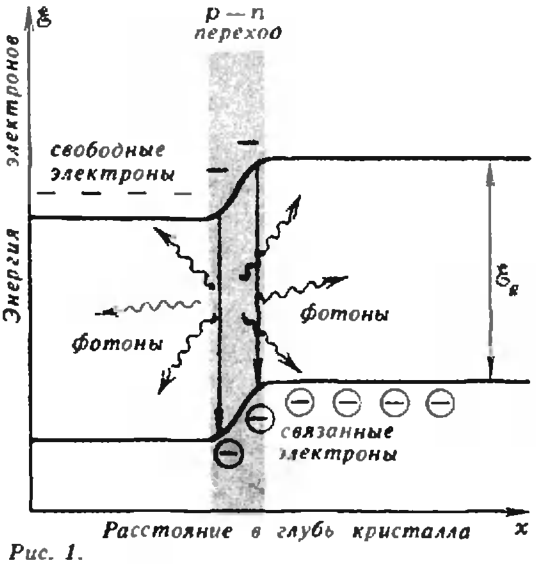


Рис. 1.

кристалл арсенида галлия неоднороден, не все его области одинаковы по свойствам. Легирование различными специальными примесями приводит к тому, что одна половина кристалла (левая на рисунке 1) обогащается подвижными электронами, другая половина (правая) — обедняется. Зато энергия этих электронов в правой половине больше; на границе между двумя частями кристалла (это p—n-переход, играющий исключительно важную роль во всей полупроводниковой электронике) энергия изменяется скачкообразно. Этот энергетический барьер «запрещает» электронам «просто так» пересекать p—n-переход слева направо. Только когда к кристаллу извне прикладывается электрическое напряжение, барьер несколько понижается, и часть электронов перетекает вправо — происходит инжекция электронов из эмиттера в базу. Вот здесь, поблизости от p—n-перехода, и происходит *то*, ради чего мы затеяли это повествование: электрон неожиданно скачком теряет приобретенную энергию, переходя из подвижного состояния в связанное, а отданная им порция энергии может выделяться, в частности, в виде кванта излучения, фотона. Таким образом, энергию электрического тока светодиод преобразовал с некоторым КПД в энергию излучения!

Картина такая, будто тяжелый камень вкатывают на вершину горы, откуда он летит в пропасть и, ударившись на дне ее о такие же камни, высекает искру. От того, с какой высоты упадет камень, зависит цвет свечения искры — чем шире энергетический зазор между подвижным и связанным состояниями электрона (его называют шириной запрещенной зоны полупроводника $\mathscr{E}_g$), тем больше энергия кванта и тем короче длина волны излучения. С ростом $\mathscr{E}_g$ цвет свечения смещается по спектру в направлении к сине-фиолетовому участку. При большом токе, пропускаемом через светодиод, «камнепад» становится столь интенсивным, что отдельные «искры» сливаются в непрерывное свечение.

На этом, пожалуй, стоит оборвать иносказание, памятуя, что если метафора и способствует познанию явления, то отнюдь не тем, что она с этим явлением совпадает. Истинная картина квантовых переходов электронов, вызывающих генерацию фотонов, ни к каким другим процессам не может быть сведена, в чем, собственно, и нет необходимости, потому что, будучи понятой, эта картина столь же проста и наглядна, как и другие физические процессы (во всяком случае, не сложнее реального камнепада в горах).

В те годы, о которых идет речь, теория люминесценции уже была хорошо разработана и позволяла не только рассчитывать процессы в кристаллах с известными свойствами, но и предсказывать новые эффекты. А рассчитывать и предсказывать было что.

Дело в том, что первые GaAs-светодиоды излучали в невидимой инфракрасной области спектра. Конечно, такое излучение воспринимается различными фотоприемниками и находит много важных технических применений. Но все же... Хотелось, чтобы светодиоды работали и для глаза — этого самого главного инструмента человека в постижении окружающего мира. Хотелось, чтобы светодиоды засветились всеми цвета-ми радуги, ярко и чисто. Значит, необходимо было найти другие подходящие полупроводники с большей, чем у арсенида галлия, шириной запрещенной зоны. И как всегда, когда физические механизмы поняты и задача четко сформулирована, средства ее решения нашлись.

Вскоре*) уже никого не удивляло, что светодиоды на фосфиде галлия интенсивно излучают красный или зеленый свет в зависимости от вида вводимых в кристалл примесей. Использование тройного соединения галлия, мышьяка и фосфора позволило получать любое свечение в интервале от темно-красного до оранжевого и почти желтого. Карбид кремния засветился в желто-зеленой и голубой областях спектра, правда очень-очень слабо. И только синий цвет, как метерлинковская ускользающая синяя птица, все никак не дается в руки ученым. А самыми яркими оказались красные светодиоды — именно под «алыми парусами» оптоэлектроника уверенно «вплыла» в технику и в наш быт.

Во многих устройствах используются наборы из большого числа светодиодов, размещаемых в определенном порядке на общем щитке. По команде, поступающей от устройства управления, из отдельных светящихся точек выписывается нужная цифра, буква, график. Это навело на естественную мысль: зачем пластину полупроводника разрезать на отдельные кристаллики, а потом, уже в составе светодиодов, снова собирать их вместе? Так появились знакосинтезирующие индикаторы — внутри общей пластмассовой оболочки размещается несколько кристаллов либо один кристалл с несколькими точками, светящимися независимо друг от друга.

Светодиоды и индикаторы, появившиеся в промышленности в конце 60-х годов, нашли широчайшее применение. Сегодня их мировое производство приближается к 10 миллиардам(!) штук в год. В электронных часах и калькуляторах, на приборных щитках робототехнических комплексов и гибких производственных систем, в кнопках и клавишах самой различной радио- и электротехнической аппаратуры, на пультах управления самолетов и подводных лодок — где только не вспыхивают эти ярко-красные светлячки и цифры.

Правда, возможности светодиодов ограничены, они используются лишь в устройствах индивидуального пользования при небольших расстояниях от индикатора до глаза. Но уже поговаривают о том, чтобы некоторые марки автомашин оснастить стоп-сигналами из наборов сверхинтенсивных светодиодов. Конечно, до светодиодного освещения квартир далеко, хотя кто знает «что день грядущий нам готовит?».

Однако пора и дух перевести, попробуем слегка подытожить. Все, о чем мы здесь говорили, касалось, говоря техническим языком, применения светодиодов в устройствах отображения информации. С их помощью информация, рождающаяся в недрах ЭВМ в виде электрических импульсов, превращается в зримо воспринимаемую и таким образом реально доходит до человека. Нужны, важны такие устройства? Несомненно! Но ведь это только часть тех проблем, в решении которых должна (и может) оптоэлектроника помочь информатике. Ведь еще остаются проблемы переработки, передачи, хранения информации. Какую лепту может здесь внести светодиод? Увы... Дифирамбы невольно затихают, яркая радуга цветов блекнет...

Во-первых, как уже отмечалось, интенсивность светодиодов очень мала — то, что чувствует глаз, не всегда улавливает фотоприемник, да еще удаленный на некоторое расстояние. Во-вторых, оказалось, что излучение светодиода не монохроматично — о количественной оценке этого недостатка мы поговорим ниже, а сейчас лишь укажем, что такое излуче-

*) Так, оглядываясь назад, мы говорим сегодня, но вообще-то за этим «вскоре» стоит около десятка лет тончайших аналитических исследований, синтеза сверхчистых полупроводников, разработок новых конструкций и технологий...

ние, захватывающее целую полосу длин волн, не годится для многих оптоэлектронных устройств.

И наконец, главное — светодиод светит почти равномерно во все стороны, сконцентрировать его энергию в одном, остронаправленном луче невозможно. Простейшую для электрических цепей задачку — передать сигнал из точки A в точку B и только в нее — светодиод решить не может. Бо́льшая часть световой энергии тратится не просто бесполезно, она «засоряет» окружающее пространство, происходит утечка информации. Светодиод — этот беспечный транжир и мот, болтун, не способный держать язык за зубами,— явно не пара информатике, где все точно рассчитано и выверено, и на каждый бит отпущено ровно столько энергии, сколько необходимо.

К счастью, светодиоду как излучателю есть прекрасная альтернатива — это лазер, характеризующийся высокоинтенсивным почти монохроматическим остронаправленным излучением. Сделаем здесь небольшое отступление и поговорим о количественном содержании этих свойств лазера.

Направленность характеризуется телесным углом α, внутри которого лежат генерируемые излучателем лучи; если лучи расходятся, симметрично удаляясь от некоторой оси (направление излучения), то для оценки расходимости используют плоский угол, измеряемый как обычно — в радианах, градусах, минутах.

Строго монохроматических волн в природе не бывает, поэтому для характеристики приближения реального волнового потока к идеальному говорят о степени монохроматичности. Количественно это — отношение полосы длин волн генерируемого излучения $\Delta\lambda$ к длине волны в центре полосы λ_0; чем меньше $\Delta\lambda/\lambda_0$, тем совершеннее лазер. Для примера укажем, что типичный газовый — гелий-неоновый — лазер обеспечивает $\alpha < 1'$ и $\Delta\lambda/\lambda_0 < 0{,}000001$. Такой поток вполне подходит для устройств вычислительной оптоэлектроники — этот термин в последнее время используют для характеристики того направления, которое связано с обработкой информации, представленной в виде оптических сигналов.

Вроде бы все хорошо, однако не будем спешить с окончательным заключением. Представим себе все тот же гелий-неоновый лазер с его почти полуметровой разрядной стеклянной трубкой и с высоковольтным источником питания массой в несколько килограммов. А теперь положим рядом интегральную схему размером с почтовую марку, которая содержит около миллиона (!) транзисторов и требует всего лишь 5-ти вольтового питания. Совместимы ли эти два изделия? Согласитесь, не очень. И эта несовместимость подтвердилась с полной определенностью — многочисленные попытки использовать лазеры в микроэлектронных вычислительных устройствах фактически провалились. Вот уже поистине «в одну упряжку впрячь не можно вола и трепетную лань».

Очевидно, что достигнуть совместимости можно лишь в одном-единственном варианте — если лазер, как и микросхемы, будет полупроводниковым.

...История создания полупроводникового лазера весьма характерна для научных открытий XX века. В 1960 году почти одновременно были изобретены твердотельный (рубиновый) и газовый (гелий-неоновый) лазеры, а вскоре после этого ученые предсказали возможность создания и полупроводникового лазера. По аналогии с другими полупроводниковыми приборами такому лазеру предрекали сверхминиатюрность, долговечность, стойкость к внешним воздействиям, низкую стоимость, высокую воспроизводимость параметров и возможность их изменения в очень широких пределах. Создать подобный прибор было очень заманчиво, и в ведущих физических лабораториях мира буквально наперегонки началась охота за полупроводниковым лазером — каждому хотелось накрыть красивую бабочку своим сачком.

А когда теоретики довольно точно просчитали, какова должна быть квантовая структура исходного кристалла, тогда круг полупроводников, «подозреваемых» в возможной причастности к лазерному эффекту, резко сузился. Судьба «бабочки» была предрешена... В канун 1963 года почти одновременно в лабораториях США и СССР были созданы первые полупроводниковые лазеры.

Как и при экспериментах со светодиодами, в пластине арсенида галлия (снова этот полупроводник явился «пионером») изготавливали p—n-переход; отличие заключалось лишь в том, что при легировании вводилось гораздо больше примесей, вследствие чего образовывалось и больше свободных электронов. Затем, нажимая на пластину острием ланцета, выкалывали из нее крошечные квадратные кристаллики. Пластина колется строго по кристаллографическим плоскостям, поэтому боковые противоположные грани кристаллика оказываются плоскопараллельными и зеркальными; эти два зеркала образуют резонатор, необходимый для лазерной генерации. Затем кристаллик нижней гранью напаивался на массивную медную подложку (для теплоотвода), к верхней грани присоединялся второй, более тонкий электрод — структура готова для исследований.

При пропускании тока кристалл начинал генерировать инфракрасное излучение, причем, как и положено светодиоду, слабо и во все стороны. Но как только ток увеличивали до некоторого значения (его назвали пороговым током), картина существенно менялась — резко возрастала мощность излучения, и интенсивный свет вырывался с боковых граней из тех мест (полосок), где плоскость p—n-перехода пересекает грани резонатора. Исследовали спектр излучения и оказалось, что полоса генерируемых волн резко сжалась. Больше сомнений не оставалось — это лазер!

Быстро разобрались в механизме его работы. Так же как и в светодиоде, приложенное извне электрическое напряжение «загоняет» электрон на «энергетическую горку», только «горка» эта чуть повыше, а количество электронов намного больше. «Накачанные» электроны скапливаются около p—n-перехода (здесь образуется активная зона) и, «падая с горки», порождают кванты излучения. Но на этом аналогия со светодиодом кончается. Световая волна, распространяясь вдоль плоскости p—n-перехода, отражается от зеркальных граней и, многократно проходя через активную зону, вынуждает электроны «упасть с горки». Получается, что огромное количество электронов одновременно и строго одинаковым способом выполняют предписанный им квантовый переход (на рисунке 1 этот переход обозначен черной стрелкой). Поэтому-то луч лазера имеет высокую степень монохроматичности, а также вполне определенную поляризацию. По механизму своего возникновения такое излучение называют вынужденным, стимулированным, индуцированным (это все — синонимы), тогда как излучение светодиода — спонтанное (случайное по направлению и поляризации и в какой-то степени — по длине волны).

О новом приборе заговорили. Казалось очевидным, что вот-вот в оптоэлектронике начнутся большие перемены. Но время шло, а реального применения хоть в какой-нибудь аппаратуре только что родившийся лазер не находил. И вскоре эйфория сменилась удивленным разочарованием, в которое пока еще не хотелось верить.

Лазер работал лишь при низкой, «азотной» температуре (-196 °C) и только при условии, что ток пропускали короткими редкими импульсами. При этом долговечность его (как-то неловко даже употреблять здесь этот термин) не превышала нескольких десятков часов. Во всех других случаях он мгновенно перегревался и выходил из строя. Оказалось также, что по степени монохроматичности он лишь в 10—20 раз был лучше светодиода ($\Delta\lambda/\lambda \approx 0{,}005$ против 0,05 у светодиода) и в тысячи раз хуже газового лазера. Да и по угловой расходимости ($\alpha \approx 30°$) полупроводниковый лазер скорее походил

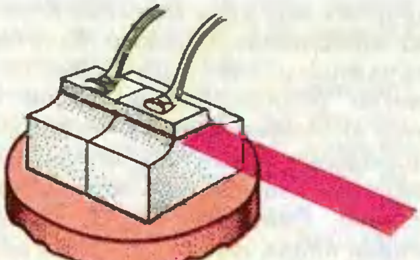


Рис. 2.

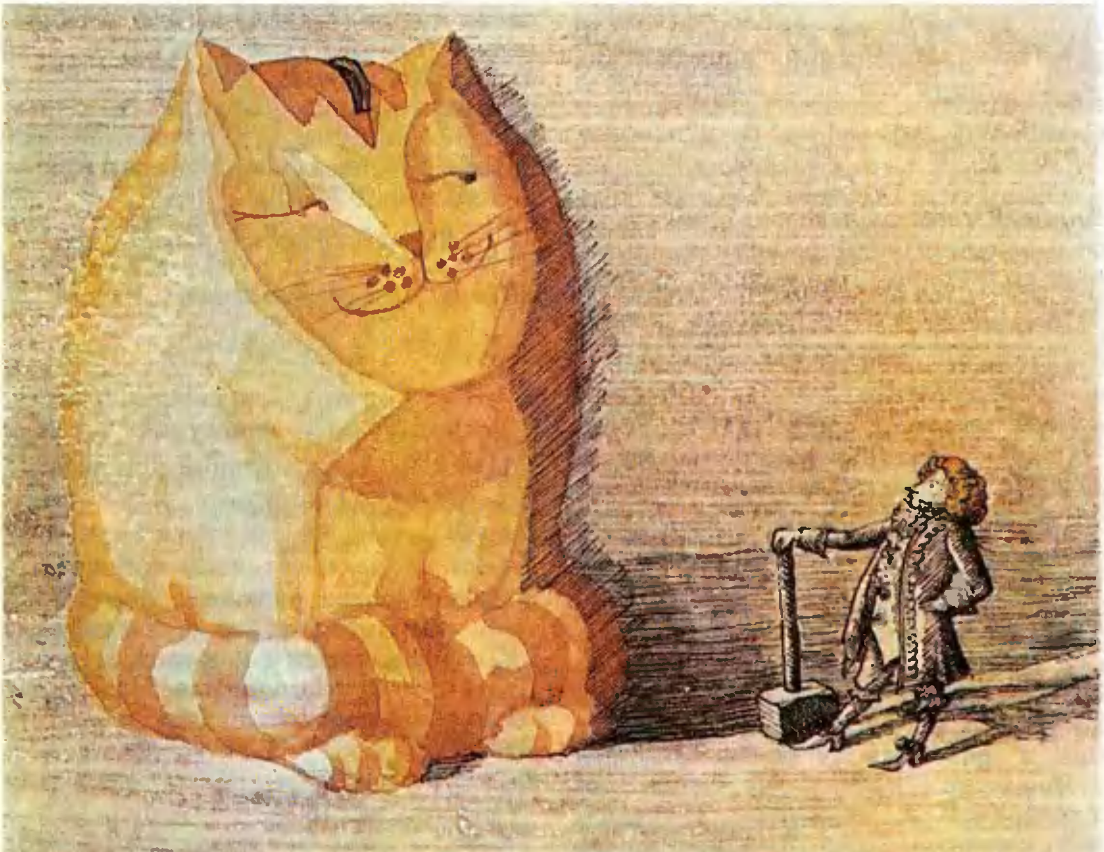
на улучшенный светодиод. «Какой же это лазер?» — воскликнули обманутые в своих ожиданиях «оптоэлектронщики-примененцы», обиженно прекратили эксперименты с новым прибором и вновь обратились к теоретизированию по поводу ослепительного будущего «идеальной» оптоэлектроники.

Самое страшное заключалось в том, что недостатки полупроводникового лазера получили вполне строгое и, казалось бы, непреодолимое физическое обоснование. Электроны, инжектируемые p—n-переходом, не *желали задерживаться* в тонкой активной зоне, а разбегались по всему кристаллу; то же происходило и со световой волной. Потерянные» электроны и кванты, не давая вклада в лазерный эффект, лишь бесполезно разогревали кристалл. Как удержать этих неугомонных переносчиков электрического тока и светового излучения в какой-то одной части кристалла? Ведь заслонку или экран внутрь не введешь — это все-таки монокристалл, в решетке которого атомы располагаются в идеальном порядке. Когда начинали погоню за «*красивой бабочкой*», обо всем этом как-то не думалось. А теперь стало казаться, что «бабочке» уготовлена судьба заспиртованного экспоната кунсткамеры физических диковин.

И все-таки — в который раз! — изворотливость человеческого разума восторжествовала. Дело решили гетероструктуры. Если в кристалле арсенида галлия часть атомов галлия заменить на атомы алюминия, то структура кристаллической решетки совершенно не изменится — настолько атомы этих двух элементов идентичны по физическим свойствам. Однако при этом образуется новый полупроводник — арсенид галлия-алюминия, у которого ширина запрещенной зоны больше, чем у чистого арсенида галлия. Граница между двумя этими полупроводниками внутри единого монокристалла и представляет собой гетеропереход; в этой области имеется энергетический барьер и одновременно с ним образуется «оптический барьер» — граница раздела двух полупроводников с разными показателями преломления. Активная зона с бо́льшим показателем преломления, «ограненная» гетерограницами, стала идеальной ловушкой для электронов и световодом для света.

А дальше слово было за «Ее Величеством Технологией». Прошло не так уж много времени, и научились внутри монокристалла изготавливать пары гетеропереходов, расположенных параллельно друг другу на расстоянии, выдержанном с фантастической точностью в несколько атомных слоев. Пороговый ток снизился до десятков миллиампер, верхняя граница рабочей температуры достигла 100 °С, долговечность (правда, у отдельных образцов) достигла десятков лет. С этого начался «Ренессанс» полупроводниковых лазеров. Изобретения и усовершенствования посыпались как из рога изобилия. Надо еще больше снизить пороговый ток? Пожалуйста, используйте структуру, в которой активная зона «зажата» гетеропереходами не только сверху и снизу, но и с боков. Тончайшая микронная нить активного полупроводника возбуждается током всего в 1 мА! Надо сузить *спектр излучения? И это пожалуйста.* Если одну из гетерограниц сделать волнистой, то избирательность резонатора резко возрастает и степень монохроматичности становится такой же, как у газового лазера. Хочется продвинуться еще дальше по этому пути — используйте структуру с двумя «связанными» кристаллами (рис. 2).

(Окончание см. на с. 31)



РАЗБИЕНИЕ ЧИСЕЛ

Ф. В. ВАЙНШТЕЙН

Разбиением называется представление натурального числа в виде суммы натуральных слагаемых, а сами слагаемые — *частями разбиения*. Порядок слагаемых не играет роли; так разбиения $3=1+2$ и $3=2+1$ не различаются. Мы будем записывать разбиения, перечисляя их части через запятую в невозрастающем порядке. Например, разбиение $4=2+1+1$ записывается как (2, 1, 1).

Пусть $p(n)$ обозначает количество всех разбиений натурального числа n. Для небольших n легко вычислить $p(n)$, просто выписав все разбиения. Например, $p(5)=7$. Вот все 7 разбиений числа 5: (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1). Однако получить таким способом, скажем, $p(100)=190\,569\,292$ без помощи компьютера немыслимо. Между тем $p(100)$ было известно еще в прошлом веке. Мы познакомим вас со многими интересными свойствами разбиений и научим находить $p(n)$, не выписывая всех разбиений числа n.

Задача вычисления $p(n)$ имеет почтенный возраст. Впервые она была сформулирована Лейбницем в 1654 году, а в 1740 — предложена немецким математиком Филиппом Ноде Леонарду Эйлеру. Занимаясь разбиениями, Эйлер открыл целый ряд их свойств, среди которых главное место занимала знаменитая «пентагональная теорема». С исследований Эйлера начинается история теории разбиений, в развитии которой принимали участие крупнейшие математики последующих поколений.

Две теоремы Эйлера

Изучение функции $p(n)$ Эйлер начинает с рассмотрения бесконечного произведения

$$(1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\ldots \ldots(1+x^k+x^{2k}+\ldots)\ldots$$

Каждый член произведения получается в результате умножения мономов, взятых по одному из каждой скобки. Если в первой скобке взять x^{m_1}, во второй — x^{2m_2} и т. д., то их произведение будет равно $x^{m_1+2m_2+3m_3+\ldots}$. Значит, после раскрытия скобок получится сумма мономов вида $x^{m_1+2m_2+3m_3+\ldots}$.

Сколько раз в этой сумме встретится x^n? Столько, сколькими способами можно представить n как сумму $m_1+2m_2+3m_3+\ldots$ Каждому такому представлению отвечает разбиение числа n на m_1 единиц, m_2 двоек и т. д. Так получаются все разбиения, так как каждое из них, конечно, состоит из нескольких единиц, нескольких двоек и т. д. Поэтому коэффициент при x^n равен числу разбиений $p(n)$.

Посмотрим теперь на выражения в скобках. Каждое из них — бесконечная геометрическая прогрессия. По формуле суммирования $1+x+x^2+x^3+\ldots=1/(1-x)$, $1+x^2+x^4+\ldots=1/(1-x^2)$ и т. д.

Теперь наш результат можно записать так:

$$p(0)+p(1)x+p(2)x^2+p(3)x^3+\ldots=$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}. \qquad (1)$$

Эта формула была открыта Эйлером в 1740 году. Ряд, стоящий в левой части, называется *производящей функцией последовательности чисел* $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, ... Производящая функция позволяет компактно записать информацию о последовательности, хотя извлечение этой информации из производящей функции порой требует большого искусства. Сейчас вы увидите, как это делал Эйлер.

Обозначим через $d(n)$ количество разбиений числа n на различные слагаемые, а через $l(n)$ — на нечетные. Например, среди выписанных выше разбиений числа 5 различные части имеют (5), (4,1) и (3,2), а нечетные — (5), (3,1,1) и (1,1,1,1,1). Значит, $d(5)=l(5)=3$.

Такие же рассуждения, как при выводе формулы (1), позволяют выписать производящие функции последовательностей $d(n)$ и $l(n)$:

$$d(0)+d(1)\cdot x+d(2)\cdot x^2+\ldots= =(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots,$$

$$l(0)+l(1)\cdot x+l(2)\cdot x^2+\ldots= =\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\ldots$$

Упражнение 1. Докажите эти формулы.

Воспользуемся формулой $1+x^k=(1-x^{2k})/(1-x^k)$, верной при всех k:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots= =\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\ldots$$

В правой части равенства все числители сокращаются со знаменателями, содержащими x в четной степени. Поэтому в знаменателе останутся только сомножители вида $1-x^{2k-1}$. Итак,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)= =\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\ldots \qquad (2)$$

Значит, производящие функции последовательностей $d(n)$ и $l(n)$ совпадают! Мы доказали *теорему Эйлера*: $d(n)=l(n)$. Это доказательство хорошо иллюстрирует силу метода производящих функций.

Но вернемся к вычислению $p(n)$. Изучая производящую функцию последовательности $p(n)$, Эйлер сосредоточил внимание на произведении $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$, т. е. на знаменателе правой части формулы (1). Раскрывая в нем скобки, Эйлер получил удивительный результат:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots=1-x-x^2+ +x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}- -x^{35}-x^{40}+\ldots$$

Показатели в правой части — *пятиугольные числа*, т. е. числа вида $(3q^2\pm q)/2$, а знаки при соответствующих мономах равны $(-1)^q$. Исходя из этого наблюдения, Эйлер предположил, что должна быть верна

Пентагональная теорема:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}(-1)^q x^{\frac{3q^2+q}{2}}$$

Пентагональная теорема оказалась «крепким орешком» — Эйлер сумел доказать ее лишь 14 лет спустя. Эта теорема позволяет сравнительно просто вычислять значения $p(n)$. Вот как это делается.

Умножим обе части равенства (1) на $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ и воспользуемся пентагональной теоремой:

$$(p(0)+p(1)\cdot x+p(2)\cdot x^2+\ldots)\times \times(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\ldots)=1.$$

Раскрыв скобки в левой части, получим, что коэффициенты при ненулевых степенях x равны нулю. Отсюда мы получаем замечательную *формулу Эйлера*, позволяющую последовательно находить числа $p(n)$:

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{q+1}\left(p\left(n-\frac{3q^2-q}{2}\right)+p\left(n-\frac{3q^2+q}{2}\right)\right).$$

(Мы считаем, что $p(n)=0$ при $n<0$.)

Упражнение 2. Найдите $p(10)$.

Пользуясь формулой Эйлера, можно составить таблицу значений $p(n)$ для $n\leqslant 200$, что и проделал в начале нашего века известный английский специалист по комбинаторике майор Мак-Магон. В то время это была наиболее полная таблица чисел $p(n)$.

Итак, мы сформулировали две теоремы, одну из которых — $d(n)=l(n)$ — доказали. Согласитесь, что при всей элегантности этого доказательства, оно все же оставляет чувство неудовлетворенности. Два множества разбиений — на нечетные и на неравные части — неожиданно оказались состоящими из одинакового числа элементов, но причина этого равенства осталась скрытой от нас. Хотелось бы думать, что существует какой-то естественный способ каждому элементу одного множества ставить в соответствие элемент другого.

Соответствия Глэйшера и Сильвестра

Приведем еще два доказательства теоремы Эйлера: $d(n)=l(n)$.

Первое соответствие между разбиениями на различные слагаемые и разбиениями на нечетные слагаемые строится так:

Каждую часть разбиения нужно поделить на максимально возможную степень двойки. Частное будет нечетным числом и нужно включить это число в новое разбиение столько раз, каков делитель.

Например, разбиению (6, 2, 1) соответствует разбиение (3, 3, 1, 1, 1). Это остроумное соответствие придумано в конце XIX века английским математиком Дж. Глэйшером.

Чтобы доказать взаимную однозначность соответствия Глэйшера, достаточно построить обратное соответствие между разбиениями с нечетными частями и разбиениями с неравными частями. Вот это соответствие:

Пусть в разбиении некоторая нечетная часть r встречается k раз. Запишем k в виде суммы различных степеней двойки $k=2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots$, $a_1>a_2>\ldots$ и заменим $(\ldots r, r, \ldots, r, \ldots)$ (k раз) на $(\ldots 2^{a_1}r, 2^{a_2}r, \ldots)$.

То, что получится, будет разбиением с различными частями. Например, разбиение (5,5,5,1,1,1,1,1,1) соответствует разбиению (10,5,4,2), поскольку число пятерок равно $3=2^1+2^0$, а число единиц равно $6=2^2+2^1$.

Упражнения

3. Докажите, что в результате второго преобразования получается разбиение с различными частями.

4. Докажите, что если сначала выполнить преобразование Глэйшера, а затем обратное, то получится исходное разбиение.

Существует другое, не менее интересное и совершенно неожиданное доказательство теоремы Эйлера, принадлежащее американскому математику XIX века Дж. Сильвестру. Вот конструкция Сильвестра: пусть имеется разбиение числа n на нечетные части: $(2k_1+1, 2k_2+1, \ldots, 2k_q+1)$, где $k_1\geqslant k_2\geqslant\ldots\geqslant k_q$. На листе клетчатой бумаги в некотором ее узле поставим точку x_1. Справа от x_1 в узлах поставим k_1 точек и столько же в узлах, расположенных под точкой x_1. Затем то же проделаем с числом k_2, взяв в качестве исходной точку x_2, расположенную в следующем за точкой x_1 по диагонали направо вниз уз-

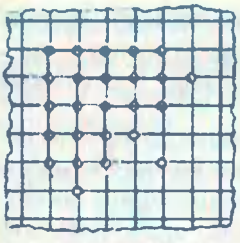


Рис. 1.

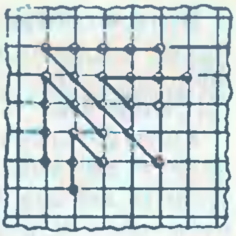


Рис. 2.

ле, и т. д., пока не дойдем до числа k_q.

Например, разбиению на нечетные части (9, 9, 5, 1, 1) числа 25 будет отвечать картинка, изображенная на рисунке 1. Она состоит из симметричных относительно диагонали уголков, так что в самом верхнем уголке $2k_1+1$ точек, в следующем $2k_2+1$ точек и т. д., а всего точек будет n. Теперь проведем на той же картинке линии так, как показано на рисунке 2, подсчитаем количество точек на каждой из этих линий и образуем из полученных таким образом чисел разбиение. Оказывается, *все части этого разбиения различны.*

Упражнение 5. Докажите это утверждение.

В нашем примере получится разбиение (9,6,5,4,1). Подумайте, как построить по разбиению на различные части разбиение на нечетные, т. е. восстановить по такому разбиению исходную симметричную картинку.

Отступление: решение задачи М1065

В этом разделе используется более сложная техника, чем в остальной части статьи. При желании вы можете пробежать его, не вникая в детали, и продолжить чтение со следующего раздела. Итак, займемся решением задачи М1065 из «Задачника «Кванта» (1987, № 9). Напомним ее формулировку.

Будем рассматривать векторы (x, y) с целыми неотрицательными координатами, причем хотя бы одна из координат отлична от 0. Назовем такой вектор образующим, если $|x-y|=1$.

а) Докажите, что рассматриваемый вектор (x, y) можно представить в виде суммы различных образующих (или он сам — образующий) тогда и только тогда, когда величина $k(x, y)=x+y-(x-y)^2$ неотрицательна.

б) Докажите, что число $N(x, y)$ различных (с точностью до порядка) представлений вектора (x, y) в виде суммы различных образующих зависит только от числа $k=k(x, y)$. Найдите N (13, 18).

Решение задачи начнем с того, что найдем общий вид целочисленных решений неравенства $k(x, y)\geqslant 0$. Числа $x+y$ и $x-y$ имеют одинаковую четность, поэтому $k(x, y)$ при любых целых x, y — четное число. Следовательно, для любого целого $m\geqslant 0$ достаточно найти целочисленные решения уравнения $x+y-(x-y)^2=2m$. Положим $x-y=q$. Тогда $x+y=2m+q^2$. Из этих двух равенств немедленно получаем:

$$(x, y)=(m+q(q+1)/2,\ m+q(q-1)/2), \qquad (3)$$

где q — любое целое число, а $m\geqslant 0$.

Смысл чисел m и q станет более наглядным, если представлять себе векторы вида (3) при $m=0$ как точки с целыми координатами параболы $k(x, y)=0$, лежащей в плоскости (x, y). (Вы понимаете, почему это парабола?) Тогда полученные нами целочисленные решения неравенства $k(x, y)\geqslant 0$ показывают, что все точки с целыми координатами, лежащие на параболе $k(x, y)=0$ и внутри нее, получаются сдвигами целых точек этой параболы на векторы (m, m) (рис. 3). Удобно считать, что число m $(m=0, 1, 2, ...)$ — номер параболы, на которой лежит точка (x, y), а $q=x-y=0, \pm 1, \pm 2, ...$ — номер точки на этой параболе.

Поскольку условия задачи симметричны относительно перестановки координат векторов, достаточно доказать все утверждения для таких векторов (x, y), что $x\geqslant y$, т. е. для векторов вида (3) с $q\geqslant 0$.

Докажем достаточность условия в пункте а) задачи. По формуле суммы арифметической прогрессии

$$1+2+...+(q-1)+m+q= =m+q(q+1)/2;$$

$$0+1+...+q-2+m+(q-1)= =m+q(q-1)/2.$$

Поэтому формулы $(x, y)=(1, 0)+(2, 1)+\ldots+(q-1, q-2)+(m+q, m+q-1)$ при $q>0$ и $(m, m)=(1, 0)+(m-1, m)$ при $q=0$, $m>0$ дают представления (x, y) в виде суммы различных образующих.

Доказать необходимость условия тоже несложно. Пусть

$$(x, y)=(r_1, r_1-1)+\ldots+(r_a, r_a-1)+(s_1, s_1+1)+\ldots(s_b, s_b+1)$$

— представление вектора (x, y) с $x\geqslant y$ в виде суммы различных образующих, где

$$r_1>r_2>\ldots>r_a>0,\quad s_1>s_2>\ldots>s_b\geqslant 0. \qquad (4)$$

Для такого вектора

$$x=r_1+\ldots+r_a+s_1+\ldots+s_b,$$
$$y=r_1+\ldots+r_a-a+s_1+\ldots+s_b+b,$$

поэтому $x-y=a-b$. Положим $q=x-y$ и

$$m=(r_1-q)+(r_2-(q-1))+\ldots$$
$$\ldots+(r_q-1)+r_{q+1}+\ldots+r_a+$$
$$+s_1+\ldots+s_b=x+y-q(q+1)/2$$

(здесь мы снова воспользовались формулой суммы арифметической прогрессии). Из неравенств (4) следует, что $r_a\geqslant 1$, $r_{a-1}\geqslant 2$, $r_{a-2}\geqslant 3$, ... и вообще $r_i\geqslant q-i+1$. Поэтому $m\geqslant 0$, т. е. (x, y) — вектор вида (3), что и требовалось.

В геометрических терминах утверждение б) означает, что число $N(x, y)$ зависит лишь от номера m параболы и не зависит от номера q точки на параболе.

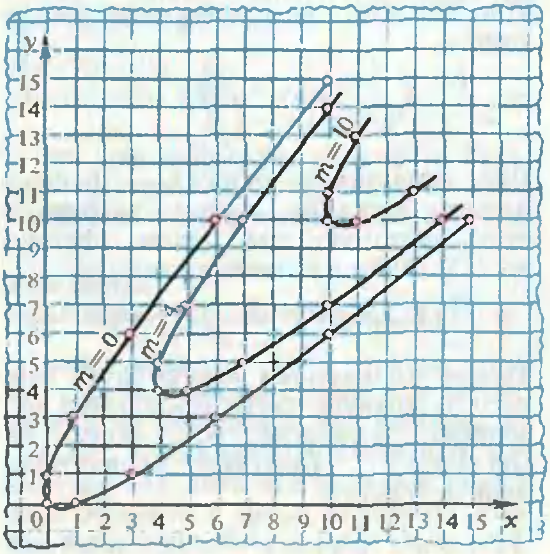


Рис. 3.

Пусть $T(m, q)$ — множество представлений вектора (3) в виде суммы различных образующих и $t(m, q)$ — число таких представлений. Задача будет решена, если мы докажем, что для любого целого q имеет место равенство $t(m, q)=t(m, q-1)$ (это и значит, что $t(m, q)$, а вместе с ним $N(x, y)$, не зависит от q). Мы отождествили выше множество $T(m, q)$ с множеством таких пар последовательностей, удовлетворяющих неравенствам (4), что $r_1+\ldots+r_a+s_1+\ldots+s_b=m+q(q+1)/2$ при $q=a-b$. Такую пару мы будем записывать в виде $(r_1, \ldots, r_a\,|\,s_1, \ldots, s_b)$.

Рассмотрим отображение φ множества $T(m,q)$ в множестве $T(m, q-1)$, заданной формулой

$$\varphi(r_1, \ldots, r_a\,|\,s_1, \ldots, s_b)=$$
$$=\begin{cases}(r_1-1, \ldots, r_a-1\,|\,s_1+1, \ldots, s_b+1, 0), & \text{если } r_a>1,\\ (r_1-1, \ldots, r_{a-1}-1\,|\,s_1+1, \ldots, s_b+1), & \text{если } r_a=1.\end{cases}$$

Упражнение 6. Проверьте, что $\varphi(r_1, \ldots, r_a|s_1, \ldots, s_b)\in T(m, q-1)$.

Чтобы доказать, что φ — взаимно однозначное отображение, построим обратное отображение ψ: $T(m, q-1)\to T(m, q)$, прочитав правило, задающее φ, слева направо:

$$\psi(r_1, \ldots, r_a\,|\,s_1, \ldots, s_b)=$$
$$=\begin{cases}(r_1+1, \ldots, r_a+1, 1\,|\,s_1-1, \ldots, s_b-1), & \text{если } s_b>0,\\ (r_1+1, \ldots, r_a+1\,|\,s_1-1, \ldots, s_{b-1}-1), & \text{если } s_b=0.\end{cases}$$

Построенные отображения взаимно обратны, поэтому φ — взаимно однозначное соответствие. Значит, $t(m, q)=t(m, q-1)$, что и утверждалось.

Чтобы научиться вычислять значения $N(x, y)$, установим связь между числами $t(m, q)$ и $p(m)$.

Утверждение: $t(m, q)=p(m)$.

Мы уже знаем, что $t(m, q)=t(m, 0)$, поэтому достаточно доказать, что $t(m, 0)=p(m)$. Воспользуемся простым и полезным графическим средством, называемым *диаграммой Юнга раз-*

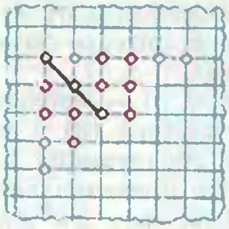


Рис. 4.

биения. Рассмотрим, например, разбиение (6, 4, 4, 2, 1). Его диаграмма Юнга изображена на рисунке 4 (в первой строчке стоят 6 точек, во второй — 4, в третьей — 4, в четвертой — 2, в пятой — 1). Всякое разбиение можно изобразить в виде диаграммы Юнга и по всякой диаграмме Юнга — записать разбиение.

Проведем на диаграмме Юнга диагональ — черная линия на рисунке 4. Пусть r_1 — число точек в первой строке, лежащих на диагонали и справа от нее, r_2 — число точек второй строки, лежащих на диагонали и справа от нее, и т. д.; s_1 — число точек первого столбца под диагональю, s_2 — число точек второго столбца под диагональю и т. д. Поставим в соответствие диаграмме Юнга, изображающей разбиение числа m, пару последовательностей

$$(r_1, r_2, \ldots | s_1, s_2, \ldots),$$
$$r_1+r_2+\ldots+s_1+s_2+\ldots=m,$$

т. е. элемент множества $T(m,0)$. Например, диаграмме на рисунке 4 соответствует пара $(6, 3, 2 | 4, 2, 0)$. Зная пару последовательностей, можно легко восстановить диаграмму Юнга. Следовательно, мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством разбиений и множеством $T(m, 0)$. Утверждение доказано.

Теперь ничего не стоит ответить и на последний вопрос задачи — о значении $N(13, 18)$. Поскольку $13=3+5\cdot 4/2$, $18=3+6\cdot 5/2$, точка $(13, 18)$ лежит на третьей параболе. Значит, $N(13, 18)=t(3, 0)=p(3)=3$.

Следующие упражнения — на применение диаграмм Юнга.

Упражнения

7. Число разбиений n не более чем с k частями, равно числу разбиений n с частями, не превосходящими k. Подсказка: отразите диаграмму Юнга относительно диагонали.

8. Число разбиений n с различными нечетными частями равно числу разбиений n, диаграмма Юнга которых симметрична относительно диагонали. Подсказка: вспомните соответствие Сильвестра.

Формула Гаусса — Якоби

Решая задачу М1065, мы проделали большую работу. Нельзя ли снова воспользоваться производящими функциями и извлечь из равенства $t(m, q)=p(m)$ какое-нибудь красивое тождество?

$N(x, y)$ — это число способов, которыми можно представить вектор (x, y) как сумму различных образующих вида $(k, k-1)$ и $(k-1, k)$. Рассуждая так же, как при выводе формулы производящей функции числа разбиений с различными частями, мы запишем производящую функцию для $N(x, y)$ (это ряд от двух переменных u и v):

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u^{k-1}v^{k})(1+u^{k}v^{k-1})=\sum_{x,y=0}^{\infty}N(x, y)u^{x}v^{y}.$$

Поскольку $N(x, y)=t(m, q)$, где $x=m+q(q+1)/2$, $y=m+q(q-1)/2$, равенство можно продолжить:

$$=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}t(m, q)u^{m}v^{m}\right)\times u^{q(q+1)/2}v^{q(q-1)/2}.$$

Воспользуемся теперь тем, что $t(m, q)=p(m)$ и продолжим равенство:

$$=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}p(m)u^{m}v^{m}\right)\times u^{q(q+1)/2}v^{q(q-1)/2}.$$

Ряд, стоящий в скобках,— производящая функция чисел разбиения $p(m)$, которую мы знаем (формула (1)), поэтому продолжаем:

$$=\prod_{k=1}^{\infty}(1-u^{k}v^{k})^{-1}\sum_{q=-\infty}^{\infty}u^{q(q+1)/2}v^{q(q-1)/2}.$$

Теперь приравняем левую часть первого и правую часть последнего равенства, умножив обе части на $\Pi(1-u^{k}v^{k})^{-1}$. Получим окончательный результат:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u^{k-1}v^{k})(1+u^{k}v^{k-1})(1-u^{k}v^{k})=$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} u^{q(q+1)/2} v^{q(q-1)/2}.$$

Это тождество — цель наших преобразований. Оно называется *формулой Гаусса—Якоби*. Из этого замечательного тождества с двумя переменными можно получить много разных тождеств с одной переменной.

Упражнение 9. Подставьте в формулу Гаусса—Якоби $u=-t$, $v=-t^2$ и получите пентагональную теорему Эйлера.

Теперь подставим в формулу Гаусса—Якоби $u=v=-t$. В левой части получится:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^{2k-1})^2(1-t^{2k})= \\ =\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^{2k-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^k).$$

Заменяя произведение $\Pi(1-t^{2k-1})$ на $\Pi(1+t^k)^{-1}$ по формуле (2), мы преобразуем левую часть в

$$(1-t)(1-t^2)(1-t^3).../ \\ /(1+t)(1+t^2)(1+t^3)...$$

Правая часть формулы Гаусса—Якоби при подстановке $u=v=-t$ превращается в $\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{q^2}t^{q^2}$. Мы получаем следующую формулу:

$$\frac{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)...}{(1+t)(1+t^2)(1+t^3)...}= \\ =1-2t+2t^4-2t^9+2t^{16}-...$$

Подстановка $u=t$, $v=1$ в формулу Гаусса—Якоби аналогичным образом приводит к формуле:

$$\frac{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)...}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)...}= \\ =1+t+t^3+t^6+t^{10}+...$$

Эти две формулы получены Гауссом. Нечего и говорить, что это удивительно красивые формулы!

Тождества Роджерса — Рамануджана

В заключение я хочу познакомить вас с двумя знаменитыми тождествами теории разбиений, для которых до сих пор не найдено прозрачных доказательств, хотя эта задача и по сей день остается в сфере интересов многих математиков.

Первое тождество. *Число разбиений натурального числа n, в которых разность между любыми двумя частями превосходит единицу, равно числу разбиений числа n на части, дающие при делении на 5 остаток 1 или 4.*

Второе тождество. *Число разбиений натурального числа n, в которых разность между любыми двумя частями и каждая часть превосходят единицу, равно числу разбиений числа n на части, дающие при делении на 5 остаток 2 или 3.*

Конечно, закономерность, утверждаемая этими тождествами, в высшей степени красива и нетривиальна, и неудивительно, что крупнейший английский математик начала нашего века Г. Харди, узнавший о них из письма Рамануджана датированного 16 января 1913 года, пришел в восхищение.*)

При чтении этой статьи у вас, может быть, сложилось впечатление, будто теория разбиений напоминает кунсткамеру, в которую заботливо собраны различные экзотические экспонаты, никак или почти никак между собой не связанные. До недавнего времени так оно и было. Ситуация коренным образом изменилась лишь в 70-х годах нашего века, когда английскому математику И. Макдональду удалось найти единый подход к доказательству большого класса тождеств теории разбиений и открыть много новых, объединив их в стройную теорию (тождество Гаусса — Якоби включается в нее).**) Для тождеств Роджерса — Рамануджана и многих аналогичных тождеств общего подхода не найдено, хотя в последнее время и появились алгебраические методы их доказательств. Так что, понимание истинной природы этих тождеств, вероятно, еще впереди.

*) О жизни и творчестве замечательного индийского математика вы можете прочитать в статье С. Г. Гиндикина «Загадка Рамануджана» («Квант», 1987, № 10).

**) Более детальную информацию об этом вы можете найти в статье Д. Б. Фукса «О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе и Макдональде и об упущенных возможностях» («Квант», 1981, № 8).

ПОГОВОРИМ НЕМНОГО О ПОГОДЕ...

Кандидат физико-математических наук
Б. М. БУБНОВ

В давние времена правила хорошего тона предписывали при первом знакомстве затевать разговор о погоде. Поговорим о ней и мы, а именно о той стороне вопроса, которая касается движения атмосферы как некоторого физического объекта; ведь, в конце концов, погода в любой точке нашей планеты определяется движением атмосферных масс. Однако такое движение является настолько сложным, что точное предсказание поведения атмосферы на длительный срок не представляется возможным. Для получения достаточно удовлетворительного прогноза погоды требуется гармоническое развитие двух направлений. Первое направление — увеличение частоты измерений основных параметров атмосферы (температура, давление, влажность, скорость ветра и т. д.) и уменьшение расстояний между точками, в которых эту информацию снимают. Второе направление, которое является предметом изучения физики атмосферы,— исследование основных физических закономерностей, определяющих атмосферные процессы.

Модель Хэдли

При рассмотрении очень сложных объектов (а атмосфера безусловно относится к таким объектам) физики стараются построить модель и в рамках этой модели рассматривать поведение объекта. Переход от объекта к модели является наиболее важным шагом любого исследования. С одной стороны, модель должна отражать те характеристики объекта, которые мы изучаем, т. е. удовлетворять экспериментальным и натурным данным, с другой — она должна быть достаточно простой для понимания и теоретического описания. Какая же самая простая модель удовлетворяет этим требованиям при рассмотрении крупномасштабных движений атмосферы?

Прежде всего, модель должна учитывать основные факторы, определяющие эти движения.

Первым фактором следует назвать силу гравитационного взаимодействия. Эта сила в значительной степени регулирует газовый состав атмосферы и определяет способность планеты удерживать свою атмосферу. Чем больше масса планеты, тем проще ей удерживать легкие газы; при малой массе вращающееся тело может совсем лишиться атмосферы (возможно, именно поэтому нет атмосферы у Луны).

Вторым важным фактором является облучение планеты солнечной радиацией. Количество энергии, поступающей к планете от Солнца, зависит от времени суток, а также от наклона орбиты (зима — лето, экватор — полюс). В среднем на каждый квадратный метр земной поверхности от Солнца ежесекундно поступает энергия 1372 Дж. (Зная радиус Земли, легко вычислить суммарный поток энергии, поступающий от Солнца.) Падающие на Землю лучи частично отражаются; отношение отраженной радиации к падающей называется альбедо поверхности. Альбедо сильно меняется в зависимости от вида поверхности, принимая значение от 0,1—0,15 для океана до 0,6—0,8 для чистого снега; в среднем для Земли альбедо примерно 0,3. Чем больше энергии приходит в данное место планеты, тем сильнее оно нагревается. Нагретый воздух стремится вверх, холодный —опускается, и в результате в атмосфере возникают вертикальные воздушные потоки. Если бы Земля вращалась вокруг своей оси очень медленно, то основные температурные контрасты, которые создают движение атмосферы, возникли бы между нагретым дневным и охлажденным ночным полушарием. Кроме различия между дневными и ночными температурами, существуют различия между температурами на полюсах и на экваторе.

Третий определяющий фактор — собственное вращение Земли — делает несущественным для глобальных атмосферных течений суточный нагрев, так как время их образования и движения значительно больше времени вращения, т. е. больше суток. Преобладающим становится поднятие воздуха на экваторе, движение его в верхних слоях к полюсу, опускание там и движение от полюса к экватору. Образуется так называемая меридиональная конвективная ячейка. (Напомним, что конвекцией называется перенос тепла посредством движения различных по плотности частей газа или жидкости. Теплопроводный механизм передачи тепла, обусловленный столкновением молекул, не играет существенной роли в процессе движения атмосферы.)

В результате вращения Земли меридиональная ячейка принципиальным образом трансформируется. Рассмотрим массу воздуха M, перемещающуюся от экватора к полюсу. Ее скорость v складывается из скорости движения воздуха относительно Земли и линейной скорости вращения Земли в данной точке. Что будет происходить по мере перемещения этой массы в более высокие широты? На этот вопрос дает ответ один из фундаментальных законов механики — закон сохранения момента импульса. Момент импульса — важная механическая характеристика вращающейся системы. Для материальной точки это вектор, определяющийся произведением ее радиуса-вектора и вектора импульса. Если сумма моментов сил, действующих на систему, равна нулю, то момент импульса остается неизменным. Что это означает для рассматриваемой нами массы воздуха? На экваторе ее момент импульса был равен $L_0 = R_э \cdot Mv_э$. При перемещении от экватора к полюсу уменьшается расстояние до оси вращения Земли. Чтобы момент L_0 сохранялся, должна увеличиваться скорость перемещения. Поэтому масса воздуха при движении от экватора к полюсу отклоняется от направления «на полюс». В умеренных широтах северного полушария воздух, который движется с экватора, «поворачивается» на восток (западные ветры, из-за которых полет из Москвы в Новосибирск занимает меньше времени, чем обратный перелет), а воздух, который движется к экватору, отклоняется на запад (нижнее пассатное течение).

Впервые такая упрощенная схема атмосферной циркуляции была предложена в 1735 году Дж. Хэдли и часто называется зональной циркуляцией Хэдли (рис. 1). Аналогичное объ-

Рис. 1. Схема циркуляции атмосферы по Дж. Хэдли (1735).

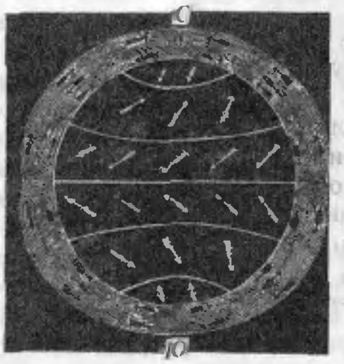


Рис. 2. Общая циркуляция атмосферы по У. Феррелу (1859).

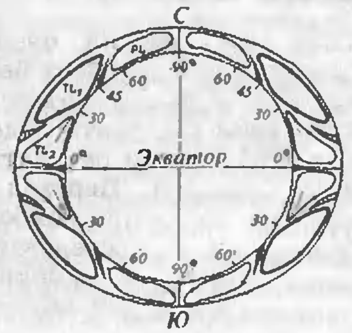


Рис. 3. Схематическое представление меридиональной циркуляции по Т. Бержерону (1928).

яснение, не зная о работе Хэдли, дали знаменитый философ Иммануил Кант (1756 год) и Джон Дальтон (1793 год). Естественно, что за прошедшие 250 лет наши знания о земной атмосфере сильно изменились, и в связи с этим неоднократно изменялась и дополнялась схема общей циркуляции (рис. 2 и 3), однако и сейчас она еще далека от совершенства.

Циклоны и антициклоны

Всякий раз, слушая прогноз погоды, мы узнаем о передвижении или взаимодействии циклонов и антициклонов, т. е. вихревых образований, размеры которых сотни километров. Как связать наличие этих образований с общей циркуляцией атмосферы? Оказывается, что в зависимости от основных определяющих параметров (скорости вращения Земли, перепада температур в направлении экватор — полюс и т. д.) конвективная ячейка может быть как устойчивой — и в этом случае развивается циркуляция Хэдли, так и неустойчивой, как это наблюдается на Земле, где образуется волновое движение, состоящее из различного числа вихрей. В атмосфере обычно наблюдаются пять-шесть крупных вихрей. Если же все вихревые движения осреднить за достаточно большой промежуток времени, то осредненное движение будет аналогично рассмотренной нами зональной циркуляции.

Проще всего схему образования крупномасштабных вихрей рассмотреть в лабораторном эксперименте. Берутся два металлических цилиндра и устанавливаются соосно. Внутренний цилиндр соответствует полюсу — его охлаждают, внешний соответствует экватору — его нагревают. Между цилиндрами налита жидкость. Если система вращается с постоянной угловой скоростью, то в ней могут наблюдаться различные режимы движения. При малой скорости вращения частицы двигаются от внешнего цилиндра к внутреннему по спирали, так что жидкость относительно неподвижного наблюдателя вращается быстрее, чем цилиндры (рис. 4). Если увеличить скорость вращения системы, то такое спиральное движение станет неустойчивым, разрушится и возникнет новый режим (рис. 5). Этот режим характеризуется струйным течением, которое попеременно касается то внутреннего, то внешнего цилиндров. Кроме струйного течения возникают дополнительные к нему вихри (дополнительными они называются потому, что вихрь вращается так, чтобы в том месте, где он подходит к струе, их скорость имела одно направление). Количество вихрей в системе зависит от внешних параметров.

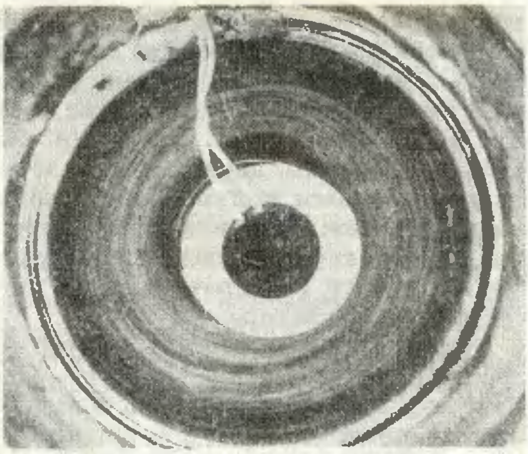


Рис. 4.

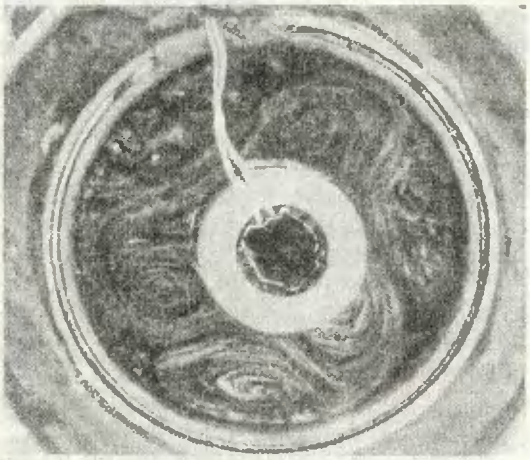


Рис. 5.

Аналогичная вихревая картина постоянно наблюдается на картах погоды, особенно в южном полушарии, в котором влияние материков не столь велико, как в северном. Одна из таких карт приведена на рисунке 6.

Если принципиальная схема образования циклонов и антициклонов достаточно проста, то детальное описание их движений развито слабо и прежде всего потому, что слишком много факторов определяют это движение. До сих пор мы рассматривали идеализированную атмосферу, а теперь рассмотрим возможное влияние материков на общую циркуляцию атмосферы. Материки выше океанов, и особенно сильно изменяют движение атмосферы высокие горные хребты. Кроме того, средние температуры материков и океанов сильно различаются, так как океаны более инертны, они медленнее нагреваются, но зато и медленнее охлаждаются. На рисунке 7 представлены среднегодовая и средняя температура поверхности на широте 55° в северном полушарии для разных периодов года. Различие температур материка и океана в зимнее время лишь немного меньше различия между температурами полярных и тропических областей. Такая тепловая неоднородность и влияние рельефа приводят к тому, что крупные вихри перестают передвигаться вместе с волной и в течение нескольких недель вихрь может не менять своего положения. Это состояние атмосферы получило название «блокирующей ситуации» и приводит к многочисленным катастрофическим последствиям, в первую очередь — к засухам.

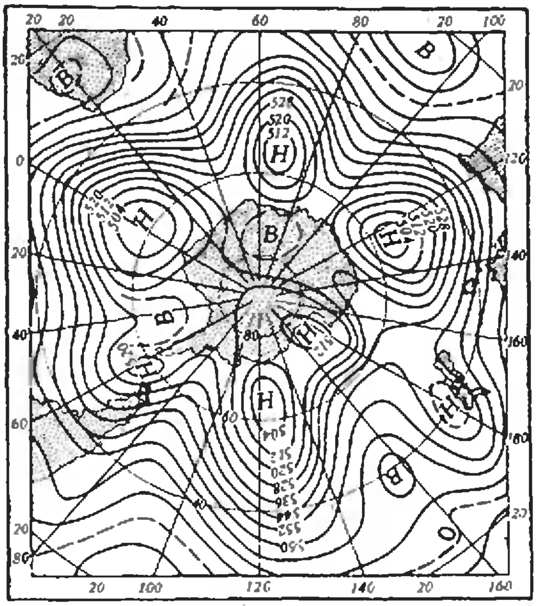


Рис. 6.

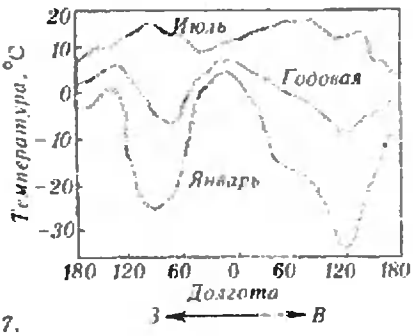


Рис. 7.

Парниковый эффект и ядерная зима

Внешние факторы, определяющие движение атмосферы, практически не меняются со временем, но изменения, происходящие в атмосфере, в первую очередь вызванные влиянием человека, могут принципиальным образом изменить суммарное действие этих факторов. Рассмотрим это на примере так называемого парникового эффекта и явления «ядерной зимы».

Что такое парниковый эффект? Как известно, всякие нагретые тела излучают тепло, и длина волны этого теплового излучения тем меньше, чем выше температура тела. От Солнца к Земле приходит коротковолновое тепловое излучение, Земля же испускает длинноволновое. Если бы атмосфера одинаково пропускала эти виды излучения, то установилось бы определенное тепловое равновесие. Однако коротковолновое излучение слабо поглощается атмосферой, а длинноволновое сильно. В результате температура атмосферы выше, чем это можно было ожидать, не учитывая поглощения в толще атмосферы. Каким же образом действие человека может сказаться на изменении температуры атмосферы?

В основном тепловое излучение Земли поглощается водяным паром, облаками и углекислым газом. За последние 150 лет относительная концентрация CO_2 в атмосфере увеличилась на 25 % и достигла 345 молекул на 1 миллион молекул воздуха. За счет

Торнадо возникают вдоль границ грозовых фронтов, там, где теплый и влажный воздух встречается с холодным и сухим воздушным потоком.

этого за последние 100 лет средняя температура поднялась на 0,5 градуса. Аналогичными поглощающими свойствами обладают метан, фреоны и другие газы, концентрация которых за счет деятельности человека растет в последние десятилетия. В итоге к середине будущего столетия можно ожидать существенное потепление климата планеты.

Ядерной зимой называют возможный вариант изменения климата в результате ядерной катастрофы. Рассмотрим, как будет реагировать атмосфера на большое количество ядерных взрывов. После взрывов, за счет пожаров и поднятия большого количества пыли и сажи в атмосферу, солнечные лучи не смогут достигать поверхности Земли, и она охладится на 10—15 градусов. За счет поглощения непрозрачными частицами солнечных лучей верхняя часть атмосферы нагреется на десятки градусов. В результате образуется большая разница температур между верхними и нижними слоями атмосферы. Это может принципиальным образом изменить атмосферную циркуляцию. Вместо циклонического движения, аналогичного изображенному на рисунке 5, может возникнуть зональная циркуляция — типа той, что изображена на рисунке 4. А время восстановления вихревой циркуляции может достигать нескольких месяцев. Отметим, что аналогичная ситуация наблюдается в атмосфере Марса, где в период сильных пыльных бурь образуется большая разница температур между верхними и нижними слоями атмосферы, в результате чего циклоны перестают существовать (а в обычной ситуации на Марсе наблюдается вихревая циркуляция с четырьмя крупными вихрями) и возникает однородное зональное вращение атмосферы. Все эти процессы достаточно легко моделируются как в лабораторных установках с вращающимися цилиндрами, так и в численных экспериментах.

Тайфуны, торнадо и другие «дьяволы»

Кроме глобальных циклонических вихрей, охватывающих всю земную атмосферу, в ней существуют вихри самых различных масштабов. Часто прохождение таких интенсивных вихрей бывает катастрофическим. К этим вихрям относятся тайфуны, смерчи, «пыльные дьяволы». Заметно различаясь по размерам — от сотен километров до десятка метров,— эти интенсивные вихри имеют много общего. Для образования интенсивного вихря требуется большой подвод энергии. Самые сильные и большие из них — тайфуны образуются в экваториальной зоне в результате интенсивного поднятия теплого и влажного воздуха над нагретым океаном. Возможно образование вихрей и над землей; для этого нужна или сильно нагретая поверхность (пустыня), или встреча теплого и влажного воздуха с холодным и сухим, как это имеет место в случае торнадо. Интенсивное струйное движение редко бывает устойчиво; аналогично тому как разбивается зональная циркуляция на циклонические вихри, на границе различных фронтов при интенсивном поднятии образуются интенсивные вихри. В частности, такое явление можно наблюдать на поверхности горячего чая, над которой непрерывно образуются и срываются маленькие вихорьки влажного воздуха. Взаимодействия со струйными течениями, общая завихренность системы также влияют на образование вихрей. После образования вихря в действие вступают два противоположных механизма: механизм подпитки вихря, т. е. получение энергии от того района, над которым вихрь находится (чаще всего это приток тепла снизу), и механизм диссипации, или ослабления, вихря, обусловленный в первую очередь трением о воздух. Время существования вихря определяется тем, какой из механизмов преобладает. А траектории движения вихрей определяются закономерностями движения вихревых образований, которые в настоящее время интенсивно изучаются. В частности, понятно, что при рассмотрении движения тайфунов, траектория которых достигает тысячи километров, нельзя не учитывать вращения Земли, но можно им пренебречь при рассмотрении движения смерчей и «пыльных дьяволов» — вихрей с относительно коротким временем жизни.

Мы рассмотрели небольшой круг вопросов, касающихся в первую очередь крупномасштабных движений атмосферы. Эти вопросы составляют лишь малую часть физики атмосферы — науки, изучающей климат, атмосферы различных планет, турбулентность и многое другое. И каждый из этих вопросов — тема для отдельной статьи.

Молнии в кристалле

(Начало см. на с. 12)

Гетеролазеры изготавливаются миллионами штук в год, их применение перевернуло наши устоявшиеся представления во многих областях техники. Лазерная волоконно-оптическая линия связи способна за одну секунду передать такое количество цифровой информации, которым могут быть закодированы все 30 томов БСЭ! Лазерное дисковое запоминающее устройство, объемом с тумбочку письменного стола, способно «вместить» более миллиона книг. Оптические интегральные схемы, использующие гетеролазеры, разрабатываются с прицелом на суперкомпьютеры, которые по производительности в тысячи раз будут превосходить все существующие ЭВМ.

Ну а почему «молнии в кристалле»? Да потому, что плотность тока в светодиодах и лазерах может в несколько, а иногда и в десятки раз превышать плотность тока в разряде молнии. Значит, десятки «микромолний» сверкают в кристаллах, только управляются они волей человека и служат не разрушению: их вспышки вдохнули жизнь в оптоэлектронику.

Тому, кто сегодня или завтра посвятит себя светодиодам и лазерам, посчастливится работать на пределе мыслимых для твердого тела физических и технологических возможностей. Уже создана аппаратура, позволяющая выращивать такие полупроводниковые структуры, в которых состав и свойства меняются через каждый моноатомный слой. Создатель таких сверхрешеток поистине обладает «могуществом бога» — он может по своему усмотрению распоряжаться судьбой каждого электрона: одного «посадить» в «квантовую яму», другого «замуровать» в «квантовый ящик», третьего пустить беспрепятственно «гулять» по всему кристаллу. Но... это уже приятней проделывать, чем об этом писать. Поверьте мне. А еще лучше — подрастайте и проверьте сами.

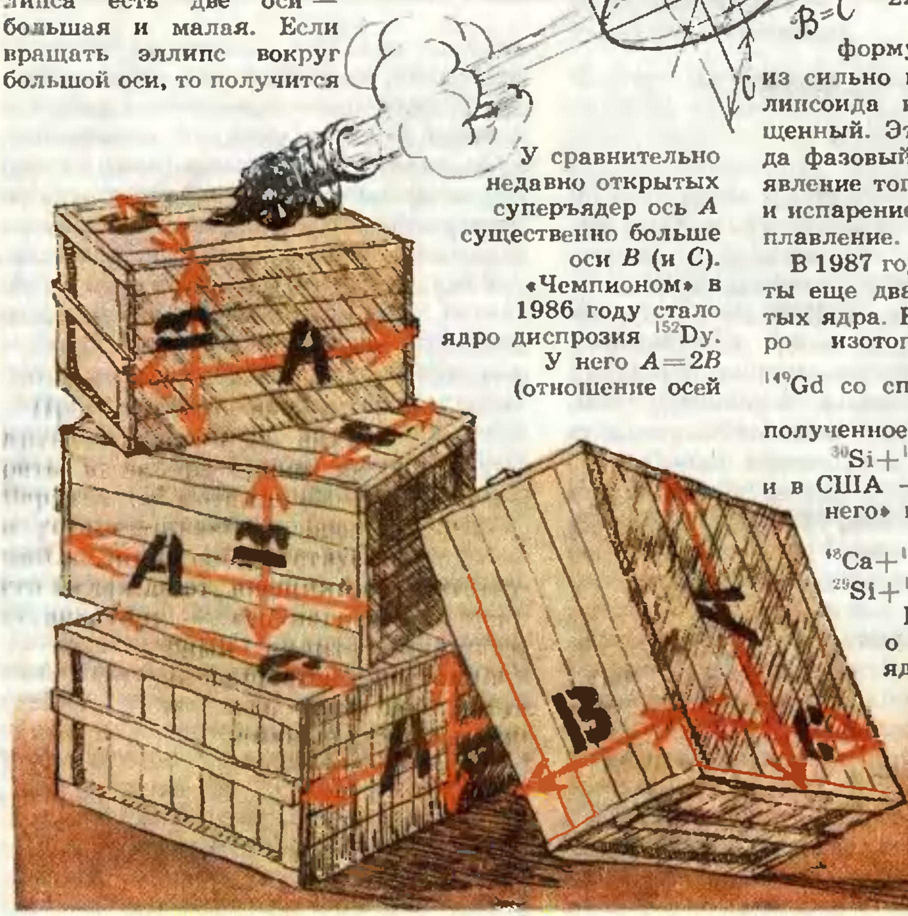
Супервытянутые ядра

В семье физических «сверхобъектов» — сверхпроводник, сверхновая звезда, сверхтекучий гелий — появились сверхъядра — супервытянутые ядра.

Обычно атомные ядра рисуют в виде шариков. Но не все ядра — шарики, некоторые из них слегка вытянуты, другие сплюснуты, но почти во всех известных случаях отклонение формы их поверхности от сферы мало (не более 10 %).

Форму ядра можно представить так. Вырежем из бумаги эллипс. У эллипса есть две оси — большая и малая. Если вращать эллипс вокруг большой оси, то получится вытянутый эллипсоид; если вращать вокруг малой оси — получится сплющенный эллипсоид. У вытянутого эллипсоида две одинаковые малые оси и одна большая ось. У сплющенного — две одинаковые большие оси и одна малая.

То, что было сказано о форме ядра, можно сформулировать так: ядро имеет форму сферы или эллипсоида вращения, причем A и B или A и C мало ($\sim$10 %) отличаются друг от друга.



У сравнительно недавно открытых суперъядер ось A существенно больше оси B (и C). «Чемпионом» в 1986 году стало ядро диспрозия ^{152}Dy. У него $A=2B$ (отношение осей 2:1:1). Такое ядро было получено в Дарсбери (Англия) в результате обстрела палладиевой мишени пучком ядер кальция:

$$^{48}\mathrm{Ca}+{}^{108}\mathrm{Pd}\rightarrow{}^{152}\mathrm{Dy}+4n.$$

Ядро ^{152}Dy имеет очень большой спин, оно вращается вокруг одной из малых осей так, что его угловой момент доходит до 60 $\hbar$ (напомним, что спин электрона равен $\hbar/2$). Замечательно, что когда спин ядра уменьшается и становится равным примерно 22 $\hbar$, ядро резко меняет свою форму, превращаясь из сильно вытянутого эллипсоида в слабо сплющенный. Это — своего рода фазовый переход, т. е. явление того же типа, что и испарение, конденсация, плавление.

В 1987 году были открыты еще два супервытянутых ядра. В Канаде — ядро изотопа гадолиния ^{149}Gd со спином 63 $\frac{1}{2}$ $\hbar$, полученное в реакции

$$^{30}\mathrm{Si}+{}^{124}\mathrm{Sn}\rightarrow{}^{149}\mathrm{Gd}+5n,$$

и в США — ядро «соседнего» изотопа ^{148}Gd в реакциях

$$^{48}\mathrm{Ca}+{}^{104}\mathrm{Rn}\rightarrow{}^{148}\mathrm{Gd}+4n,$$

$$^{29}\mathrm{Si}+{}^{124}\mathrm{Sn}\rightarrow{}^{148}\mathrm{Gd}+5n.$$

Более подробно о свойствах этих ядер еще не объявлено.

Я. С.

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 февраля 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—12—88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1131» или «Ф1143». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1131 — М1135 предлагались на XXIX Международной математической олимпиаде.

Задачи

М1131—М1140, Ф1143—Ф1147

М1131. Пусть n — натуральное число и $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ подмножества некоторого множества B. Предположим, что

а) каждое множество A_i $(i=1, 2, \dots, 2n+1)$ содержит ровно $2n$ элементов;

б) каждое множество $A_i \cap A_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ содержит ровно один элемент;

в) любой элемент множества B принадлежит не менее чем двум из множеств A_i $(i=1, 2, \dots, 2n+1)$.

Для каких значений n можно поставить в соответствие каждому элементу множества B одно из чисел — 0 или 1 — так, чтобы каждое из множеств $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ содержало ровно n элементов, соответствующих числу 0?

М1132. Функция f определена на множестве целых положительных чисел и удовлетворяет следующим условиям:

$f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(2n)=f(n),$
$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),\ \ f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n).$

Найдите число всех таких значений n, для которых $f(n)=n$ и $1 \leqslant n \leqslant 1988$.

М1133. Докажите, что множество решений неравенства

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

является объединением непересекающихся промежутков, сумма длин которых равна 1988.

М1134. Пусть AD — высота в прямоугольном треугольнике ABC, $\angle A = 90°$. Прямая, проходящая через центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L. Докажите неравенство $S_{ABC} \geqslant 2S_{AKL}$.

М1135. Пусть a и b — целые положительные числа такие, что a^2+b^2 делится на $ab+1$ без остатка. Докажите, что $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ — квадрат целого числа.

М1136*. Докажите для неотрицательных чисел A, M, S неравенство

$$3+(A+M+S)+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{M}+\frac{1}{S}\right)+\left(\frac{A}{M}+\frac{M}{S}+\frac{S}{A}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{3(A+1)(M+1)(S+1)}{AMS+1}.$$

Д. П. Мавло

Эту задачу автор посвятил 100-летию Американского математического общества (American Mathematical Society — AMS), которое отмечается в этом году.

М1137. В выпуклом n-угольнике все углы равны и из некоторой точки, расположенной внутри n-гольника, все его стороны видны под равными углами. Докажите, что этот n-угольник правильный.

К. П. Кохась

Задачник «Кванта»

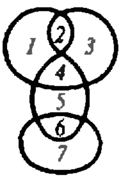


Рис. 1.

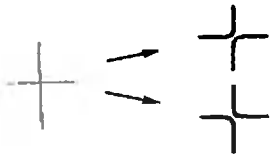


Рис. 2.

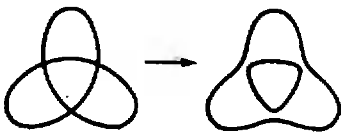


Рис. 3.

Рис. 4.

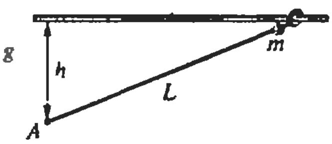


Рис. 5.

М1138*. Докажите, что для любого натурального n между числами n^2 и $n^2+n+3\sqrt{n}$ найдутся три натуральных числа, произведение двух из которых делится на третье.

Л. Д. Курляндчик

М1139. а) Поверхность выпуклого многогранника можно разрезать на несколько квадратов. Докажите, что у этого многогранника не больше 8 вершин.

б) Какое наибольшее число вершин может иметь выпуклый многогранник, поверхность которого можно разрезать на правильные треугольники?

В. Э. Матизен

М1140. Нарисуем на плоскости одну или несколько пересекающихся кривых (кривые могут иметь точки самопересечения, рис. 1). В каждой точке пересечения можно двумя способами выполнить «перестройку» (рис. 2). Если проделать перестройку во всех точках пересечения, то получится несколько непересекающихся кривых (рис. 3).

а) Докажите, что число непересекающихся кривых, которые могут получиться, не больше числа областей, на которые делили плоскость исходные кривые (на рисунке 1 таких областей 7).

б) Всегда ли можно сделать перестройки так, чтобы в результате получалась одна кривая?

в) Выберем на каждой кривой направление обхода и будем производить перестройки в соответствии с этими направлениями так, чтобы стрелки «отталкивались» друг от друга (рис. 4). Может ли в результате получиться одна кривая?

С. Л. Табачников

Ф1143. Имеется очень большое количество цилиндрических сосудов с водой, погруженных один в другой так, что каждый следующий плавает в предыдущем. Площадь дна самого маленького сосуда равна s_0 и много меньше площади дна самого большого. В самый маленький сосуд доливают объем воды v_0. На сколько опустится этот сосуд относительно земли? (После долива воды все сосуды продолжают плавать.)

Г. В. Григорьев

Ф1144. На плоскости расположено N одинаковых бильярдных шаров. Один шар толкнули, и, испытав несколько соударений, он остановился в той же точке, из которой начал движение. При каком минимальном N это возможно? Соударения считать абсолютно упругими.

А. А. Белопольский

Ф1145. Один конец нерастяжимой невесомой нити, продетой через маленькую бусинку массой m, закреплен в точке A, а другой привязан к невесомому кольцу, которое может свободно скользить вдоль горизонтального стержня (рис. 5). В начальный момент бусинку удерживают у кольца, нить прямолинейна и не натянута. Бусинку отпускают. Найти скорость бусинки в момент разрыва нити, если известно, что нить выдерживает максимальное натяжение T_0. Длина нити L, расстоя-

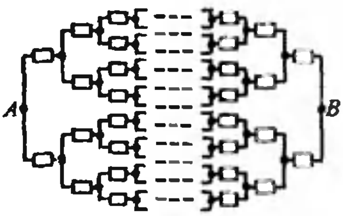


Рис. 6.

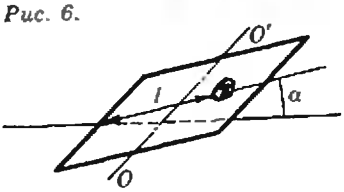


Рис. 7.

Задачник „Кванта"

ние от точки A до стержня равно h. Трением в системе пренебречь.

В. Т. Карапетян

Ф1146. Найдите сопротивление между точками A и B в бесконечной последовательности элементов, изображенной на рисунке 6. Все элементы одинаковы, сопротивление каждого элемента равно r.

С. Здравкович (СФРЮ)

Ф1147*. На площадке, наклоненной под небольшим углом α к горизонту, на расстоянии l от ее нижнего края лежит маленький грузик, масса которого много меньше массы площадки (рис. 7). Площадка совершает гармонические колебания вдоль оси OO'; частота колебаний равна ω, амплитуда — L. Коэффициент трения между грузиком и площадкой равен k. За какое время грузик свалится с площадки? (Считать, что это время много больше периода колебаний площадки.)

Problems

M1131—M1140, P1143—P1147

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 1 st 1989, to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies

M1131. Let n be a positive integer and let $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ be subsets of a set B. Suppose that
a) each A_i has exactly $2n$ elements,
b) each $A_i \cap A_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ contains exactly one element,
c) every element of B belongs to at least two of the A_i.
For which values of n can one assign to every element of B one of the numbers 0 and 1 in such a way that each A_i has 0 assigned to exactly n of its elements?

M1132. A function f is defined on the positive integers by
$f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(2n)=f(n),$
$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),\ f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n),$
for all positive integers n. Determine the number of positive integers n, less than or equal to 1988, for which $f(n)=n$.

M1133. Show that the set of real numbers x which satisfy the inequality

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

is a union of disjoint intervals, the sum of whose lengths is 1988.

M1134. ABC is a triangle right-angled at A, and D is the foot of the altitude from A. The straight line joining the incentres of the triangles ABD, ACD intersects the sides AB, AC at the points K, L respectively. S and T denote the areas of the triangles ABC and AKL respectively. Show that $S \geqslant 2T$.

M1135. Let a and b be positive integers such that $ab+1$ divides a^2+b^2. Show that $(a^2+b^2)/(ab+1)$ is the square of an integer.

M1136*. Prove that for all nonnegative numbers A, M, S the following inequality holds:

$$3+(A+M+S)+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{M}+\frac{1}{S}\right)+\left(\frac{A}{M}+\frac{M}{S}+\frac{S}{A}\right) \geqslant$$

(in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in block letters.

Problems M1131—M1135 were proposed at the XXIX th International Matematical Olimpiad (Canberra, Australia).

Задачник „Кванта"

$$\geqslant \frac{3(A+1)(M+1)(S+1)}{AMS+1}.$$

D. P. Mavlo

This problem is dedicated to the Centennial of the American Mathematical Society (*AMS*).

M1137. The angles of a convex polygon are equal and all ist sides can be seen under equal angles from some point inside the polygon. Prove that this polygon is regular.

K. P. Kohas

M1138*. Prove that for every natural n there are three different natural numbers between n and $n^2+n+3\sqrt{n}$ such that the first one divides the product of the second and third.

L. D. Kurliandchik

M1139. a) One can cut the surface of a convex polyhedron into several squares. Prove that the number of vertices of this polyhedron is not greater than 8.

b) One can cut the surface of a convex polyhedron into regular triangles. What ist greatest possible number of vertices?

V. E. Matizen

M1140. Draw a number of intersecting curves on a plane (the curves may have double points; fig. 1). There are two ways to perform „surgery" at an intersection point (fig. 2). If one performs such surgery at every intersection point the initial picture falls apart into a number of disjoint curves (fig. 3).

a) Prove that the number of resulting disjoint curves is not greater than the number of (bounded) domains seen on the initial picture (there are 7 such domains on fig. 1).

b) Is it always possible to choose such a set of surgeries in the points of intersection that there will be only one resulting curve?

c) Orient every initial curve and perform sungery so that the arrows push away from each other (fig. 4). Can the result of such surgery be a single curve?

S. L. Tabachnikov

P1143. A large number of cylindrical receptacles containing water are placed one the other so that each floats in the next largest one. The area of the bottom of the smallest one is s_0, which is much less than that of the largest. A volume of water equal to v_0 is poured into the smallest cylinder. How far down (with respect to the qround) will this cylinder move? (After the water has been added, none of the receptacles sink).

G. V. Grigoriev

P1144. N identical billiard balls are placed on the plane. One of them is set into motion and, after several collisions, it stops at the same point where it began its motion. For what minimal N is this possible? The collisions are assumed absolutely elastic.

A. A. Belopolski

P1145. One extremity of an unstrechable weightless string, on which a small bead of mass m is threaded, is fixed at the point A, while the other extremity is tied to a weightless ring which can freely slide along a horizontal rod (see figure Рис. 5). At the initial moment the bead is held right next to the ring, the string is rectilinear but unstretched. Then the bead is released. Find the velocity of the bead when the string breaks, if it is known that the string can withstand the maximal tension T_0. The length of the string is L, the distance from A to the rod is h. Friction in the system is negligible.

V. T. Karapetian

Задачник „Кванта"

Р1146. Find the resistance between the points *A* and *B* in the infinite sequence of elements shown on figure Рис. 6. All the elements are identical, the resistance of each is *r*.

S. Zdravkovich (Yougoslavia)

Р1147*. A small weight lies on a platform which is inclined by the small angle α to the horizontal plane. The platform's mass is much greater than that of the weight, whose distance from the lower edge of the platform is l (see figure Рис. 7). The platform oscillates harmonically about the OO' axis with frequency ω and amplitude L. The friction coefficient between the weight and the platform is k. How much time will it take the weight to fall of the platform? (This time is assumed much greater than $2\pi/\omega$.)

Решения задач

М1110 — М1115, Ф1123 — Ф1127

М1110. *Для каждого натурального $n>1$ выпишем наибольшие общие делители всевозможных пар различных чисел от 1 до n. Докажите, что а) среднее арифметическое всех $n(n-1)/2$ выписанных чисел неограниченно растет с ростом n, но не превосходит $\ln n+1$; б) их среднее геометрическое не превосходит 10 при любом n.*

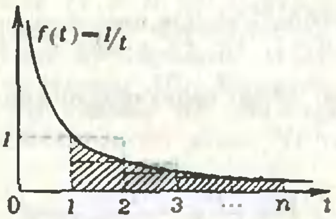


Рис. 1.

а) Обозначим через $P_n(d)$ количество пар (a, b) натуральных чисел $a<b\leqslant n$ с наибольшим общим делителем $d=$НОД (a, b). Каждую такую пару можно представить в виде $a=dx$, $b=dy$, где $x<y\leqslant k=[n/d]$, причем x и y взаимно просты. Количество $P_k=P_k(1)$ таких пар (x, y) взаимно простых чисел нетрудно оценить сверху:

$$P_k\leqslant 1+2+\ldots+(k-1)=k(k-1)/2,$$

поскольку при каждом $y\leqslant k$ число $x<y$ принимает не больше $y-1$ значений. Отсюда

$$P_n(d)=P_{[n/d]}\leqslant\frac{n}{2d}\left(\frac{n}{d}-1\right)\leqslant\frac{n(n-1)}{2d^2}.$$

В конце решения мы докажем оценку снизу $P_k\geqslant k(k-1)/4$; из нее получается оценка для $P_n(d)$:

$$P_n(d)\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{n}{d}-1\right)\left(\frac{n}{d}-2\right)=$$

$$=\frac{n^2-3nd+2d^2}{4d^2}>\frac{n(n-1)}{4d^2}-\frac{3n}{4d}.$$

Сумма чисел $d=$НОД (a, b) по всем парам (a, b) равна $\sum\limits_{d=1}^{n-1}dP_n(d)$, а их среднее арифметическое A равно $\frac{2}{n(n-1)}\sum\limits_{d=1}^{n-1}dP_n(d)$. Используя оценки для $P_n(d)$, получаем:

$$A\leqslant\frac{2}{n(n-1)}\sum_{d=1}^{n-1}d\,\frac{n(n-1)}{2d^2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1},\qquad(1)$$

$$A>\frac{2}{n(n-1)}\sum_{d=1}^{n-1}d\left(\frac{n(n-1)}{4d^2}-\frac{3n}{4d}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)-\frac{3}{2}.\qquad(2)$$

Далее нам потребуется следующая

Лемма. *Для любого натурального n*

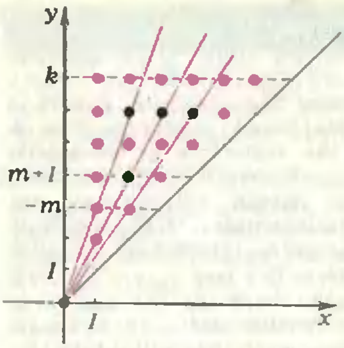


Рис. 2.

$$\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<\ln n<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

Для ее доказательства можно воспользоваться тем, что $\ln n=\int\limits_1^n 1/t\,dt$ — площадь под гиперболой $f(t)=1/t$ на участке $1\leqslant t\leqslant n$ (рис. 1); можно не пользоваться интегралом, а, например, убедиться в справедливости неравенств

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\leqslant\ln(1+\alpha)\leqslant\alpha \quad \text{при } \alpha\geqslant 0$$

(заметив, что при $\alpha=0$ все три члена равны 0 и сравнив производные), затем подставить в них $\alpha=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$, ..., $\alpha=\frac{1}{n-1}$ и сложить все полученные неравенства.

Применяя лемму к оценкам (1) и (2), получим

$$\frac{1}{2}\ln n-\frac{3}{2}<A\leqslant\ln(n-1)+1<\ln n+1.$$

б) Логарифм среднего арифметического нескольких чисел равен среднему арифметическому их логарифмов. Поэтому для решения задачи достаточно доказать, что среднее арифметическое чисел вида $\ln d$ (где $d=$НОД $(a,\ b)$, $a<b\leqslant n$) меньше 2: ведь $e^2<10$, т. е. $2<\ln 10$. Действуя так же, как и выше, получим

$$\frac{2}{n(n-1)}\sum_{d=1}^{n}\ln d\cdot P_n(d)\leqslant\sum_{d=2}^{n}\frac{\ln d}{d^2}<\sum_{d=2}^{n}\left(\frac{1}{d^2}\sum_{h=1}^{d}\frac{1}{h}\right).$$

Здесь мы применили лемму: $\ln d\leqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{d}$.

В образовавшейся двойной сумме чисел вида $\frac{1}{d^2}\frac{1}{h}$ $(1\leqslant h\leqslant d,\ 2\leqslant d\leqslant n)$ удобно собрать вместе члены с одинаковыми h $(1\leqslant d\leqslant n$ при $h=1$, $h\leqslant d\leqslant n$ при $h>1)$ и оценить $\sum\limits_{d=h}^{n}\frac{1}{d^2}$ с помощью легко сворачивающейся суммы

$$\sum_{d=h}^{n}\frac{1}{d(d-1)}=\sum_{d=h}^{n}\left(\frac{1}{d-1}-\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{h-1}-\frac{1}{n}<\frac{1}{h-1}$$

(эта оценка понадобится сейчас еще раз для $h=2$).

Окончательно получаем

$$\sum_{d=2}^{n}\frac{\ln d}{d^2}<\sum_{d=2}^{n}\frac{1}{d^2}+\sum_{h=2}^{n}\left(\frac{1}{h}\sum_{d=h}^{n-1}\frac{1}{d^2}\right)<1+\sum_{h=2}^{n}\frac{1}{h(h-1)}<2.$$

Докажем теперь оценку $P_k\geqslant k(k-1)$, использованную в решении пункта а). Положим $m=[k/2]$. Среди всех целых точек $(x,\ y)$, где $0<x<y\leqslant k$, назовем *красными* те, для которых x и y взаимно просты (рис. 2). Проведем через каждую красную точку в треугольнике $x<y\leqslant m$ луч из начала координат (0, 0). Эти P_m лучей содержат, конечно, все $m(m-1)/2$ целых точек в треугольнике $x<y\leqslant m$.

Рассмотрим целые точки на любом из P_k лучей.

Их количество на участке $h+1\leqslant y\leqslant k$ может превосходить их количество на участке $1\leqslant y\leqslant h$ не более, чем на единицу (ведь целые точки (x, y) встречаются на луче через равные промежутки). Поэтому в трапеции $m+1\leqslant y\leqslant k$, $x<y$ из всех $k(k-1)/2-m(m-1)/2$ целых точек на проведенных лучах лежат не более $m(m-1)/2+P_m$ точек. Все остальные целые точки в трапеции — красные; таким образом, их число

$$P_k-P_m\geqslant\frac{k(k-1)}{2}-m(m-1)-P_m,$$

откуда

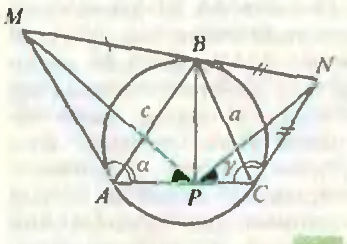
$$P_k\geqslant\frac{k(k-1)}{2}-m(m-1)\geqslant\frac{k(k-1)}{4}$$

(последнее неравенство нетрудно проверить для $k=2m$ и $k=2m+1$).

Можно показать, что $\lim(P_k/k^2)=3/\pi^2$, т. е. вероятность, что случайно взятые натуральные числа (x, y), не превосходящие k, окажутся взаимно простыми, стремится к $6/\pi^2$ при $k\to\infty$ (см., например, задачу 30 к главе III в книге И. М. Виноградова «Введение в теорию чисел», М.: Наука, 1965).

Н. Б. Васильев, В. Ф. Лев

М1111. *Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C, пересекают касательную, проведенную в точке B, соответственно в точках M и N. В треугольнике ABC проведена высота BP (точка P лежит на стороне AC). Докажите, что прямая BP является биссектрисой угла MPN.*



Докажем, что треугольники APM и CPN подобны (см. рисунок),— отсюда следует, что $\angle APM=\angle CPN$, т. е. $\angle MPB=\angle NPB$. Положим $AB=c$, $BC=a$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\gamma$. В равнобедренном треугольнике AMB угол MAB между касательной AM и хордой AB данной окружности равен половине величины дуги AB, как и вписанный угол ACB, т. е. $\angle MAB=\gamma$. Следовательно, $\angle MAP=\alpha+\gamma$, $AM=c/(2\cos\gamma)$. Аналогично, $\angle NCB=\alpha$, $\angle NCP=\gamma+\alpha$, $CN=a/(2\cos\alpha)$. Кроме того, $AP=c\cos\alpha$, $PC=a\cos\gamma$. Таким образом, в треугольниках APM и CPN равны углы MAP и NCP и отношения сторон:

$$AP/AM=2\cos\alpha\cos\gamma=CP/CN,$$

что и доказывает их подобие.

Отметим, что утверждение задачи и его доказательство с небольшими изменениями сохраняются и для тупоугольного треугольника.

Б. И. Чиник

М1112. *На доске написаны два числа: 1 и 2. Разрешается дописывать новые числа следующим образом: если на доске имеются числа a и b, то*

Ответ: в случае а) — можно, в случае б) — нельзя.

Заметим, что если $c=a+b+ab$, то $c+1=(a+1)(b+1)$. Поэтому вместо чисел, записанных на доске, удобно рассматривать числа, на 1 большие. Тогда каждое новое число равно произведению двух уже имеющихся. Вначале имелись числа $2=1+1$ и $3=2+1$; значит, *можно написать число $ab+a+b$. Можно ли этим способом получить а) число 13121; б) число 12131? Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде в) $x+y+xy$, г) $x+y+2xy$ с натуральными x и y.*

все последующие числа имеют вид $2^n \cdot 3^m$ (n и m — натуральные). Остается проверить данные числа: $13121+1=2\cdot 3^8$, а $12131+1=2^2\cdot 3^2\cdot 337$.

в) В силу сказанного выше, достаточно доказать, что имеется бесконечно много натуральных чисел $n>1$, не представимых в виде $(x+1)(y+1)$ с натуральными x и y. Но этому условию удовлетворяют все простые числа (и только они), а их, как известно, бесконечно много. (Напомним евклидовскую идею доказательства бесконечности множества простых чисел: если $p_1, \ldots, p_k$ — простые, то число $p_1 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$ имеет делителем простое число, отличное от p_i.)

г) Если $z=x+y+2xy$, то $2z+1=(2x+1)(2y+1)$. Рассуждая так же, как в задаче в), мы убеждаемся, что наше утверждение эквивалентно тому, что множество простых чисел вида $2z+1$ (т. е. нечетных) бесконечно.

Докажите самостоятельно утверждения задач в) и г); *для любого натурального a множество чисел, не представимых в виде $x+y+axy$, бесконечно.*

А. А. Берзиньш, В. Г. Ильичев

М1113*. *В стране 21 город. Авиационное сообщение между ними осуществляют несколько авиакомпаний, каждая из которых обслуживает 10 беспосадочных авиалиний, связывающих попарно некоторые пять городов (при этом между двумя городами могут летать самолеты нескольких компаний). Каждые два города связаны по крайней мере одной беспосадочной авиалинией. При каком наименьшем количестве авиакомпаний это возможно?*

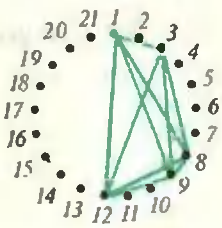


Рис. 1.

Ответ: При 21. Поскольку число пар городов равно $21\cdot 20/2=210$, каждая пара обслуживается хотя бы одной компанией, а каждая компания обслуживает 10 пар, число компаний не может быть меньше $210:10=21$.

Остается привести пример схемы обслуживания городов 21-й авиакомпанией. Изобразим города вершинами правильного 21-угольника и занумеруем их по часовой стрелке (рис. 1). Пусть 1-я компания обслуживает города с номерами 1, 3, 8, 9, 12, 2-я — города с номерами 2, 4, 9, 10, 13, получающиеся из первого набора поворотом на угол $360°/21$ (по часовой стрелке) и, вообще, k-я компания — города, которые получаются из первого набора поворотом на $(k-1)\cdot 360°/21$. Любая пара вершин многоугольника попадет в один из этих наборов, так как среди расстояний между точками первого набора встречаются по разу длины всех сторон и диагоналей 21-угольника.

Легко проверить, что построенная нами схема удовлетворяет следующим условиям: 1) любые две точки входят хотя бы в один набор (это требуется в задаче), 2) любые два набора имеют одну и только одну общую точку. Если заменить здесь слово «набор» словом «прямая» и добавить еще одно условие — 3) имеется 4 точки, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой,— мы получим аксиомы так называемой (абстрактной) *проективной плоскости*: по определению, это произвольное множество точек, в котором выделены некоторые подмножества — «прямые», удовлетворяющие условиям 1) — 3). В частности, наша схема — это конечная проективная плоскость из 21-й точки. Нетрудно доказать, что любые две прямые конечной проективной плоскости состоят из одинакового числа точек, причем если это число равно n, то число точек

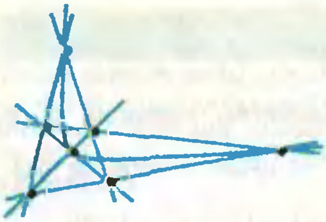


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

на плоскости равно n^2-n+1 и таково же число прямых. На рисунке 2 показана схема самой маленькой проективной плоскости — из семи точек.

Д. В. Фомин, В. Н. Дубровский

М1114. *Докажите, что для любого тетраэдра имеет место неравенство*

$$r<\frac{ab}{2(a+b)},$$

где a, b — длины двух скрещивающихся ребер, а r — радиус вписанного шара.

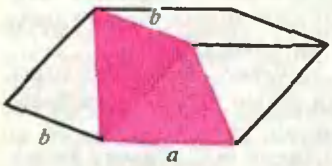


Рис. 1.

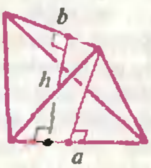


Рис. 2.

Заметим, что радиус r вписанной в тетраэдр сферы равен $3V/S$, где V — его объем, а S — площадь поверхности. (Для доказательства достаточно представить объем тетраэдра как сумму объемов четырех тетраэдров, основаниями которых являются грани данного тетраэдра, а вершины совпадают с центром сферы.) Оценим V и S через длины ребер a, b и расстояние h между содержащими эти ребра скрещивающимися прямыми. Опишем вокруг тетраэдра параллелепипед, для которого a является ребром нижнего основания, а b — верхнего (рис. 1). Его высота, очевидно, равна h, поэтому его объем не превосходит abh. В то же время, этот объем в 6 раз больше объема тетраэдра, что становится ясным, если принять за основание параллелепипеда его боковую грань, содержащую грань тетраэдра. Таким образом, $V\leqslant abh/6$.

С другой стороны, расстояние от концов ребра b тетраэдра до ребра a не меньше h и хотя бы одно из них больше h (рис. 2), поэтому сумма площадей граней, примыкающих к ребру a, больше ah. Аналогично, сумма площадей двух других граней больше bh, т. е. $S>(a+b)h$, а

$$r=\frac{3V}{S}<\frac{abh}{2(a+b)h}=\frac{ab}{2(a+b)}.$$

Н. Б. Васильев

М1115*. *а) В первой строке написаны 19 натуральных чисел, не превосходящих 88, а во второй строке — 88 натуральных чисел, не превосходящих 19. Назовем отрезком одно или несколько подряд написанных чисел одной строки. Докажите, что из данных строк можно выбрать по отрезку так, что суммы чисел в них равны.*

б) Пусть n, m, k — натуральные числа, $m\geqslant n$. Докажите, что если

$$1+2+\ldots+n=mk,$$

то числа 1, 2, ..., n можно разбить на k групп так,

а) Пусть a_1, a_2, ..., a_{19} — числа первой строки, b_1, b_2, ..., b_{88} — второй, $A(i)=a_1+\ldots+a_i$, $B(i)=b_1+\ldots+b_i$. Предположим, что $A(19)\geqslant B(88)$ (случай $A(19)<B(88)$ рассматривается аналогично). Для каждого i обозначим через n_i наименьшее из чисел n таких, что $A(n)-B(i)\geqslant 0$; такое n_i существует в силу нашего предположения. Рассмотрим 88 разностей $A(n_i)-B(i)$; они могут принимать значения от 0 до 87, так как $A(n_i)-B(i)=A(n_i-1)-B(i)+a_{n_i}<a_{n_i}\leqslant 88$. Если эти разности различны, то среди них есть 0 и наше утверждение выполнено. В противном случае какие-то две разности — скажем, для $i=l$ и $i=k$, $k<l$ — совпадают. Тогда

$$A(n_l)-A(n_k)=B(l)-B(k),$$

т. е. искомые отрезки — это a_{n_k+1}, ..., a_{n_l} и b_{k+1}, ..., b_l.

Ясно, что числа 19 и 88 в этой задаче можно заменить на любые натуральные.

б) Доказательство проведем индукцией по n. Для $n=1$ доказывать нечего. Допустим, что наше утверждение *чтобы суммы чисел в каждой группе были равны m.*

Задачник „Кванта"

верно для всех значений параметра, меньших n, и рассмотрим множество $S_n=\{1, 2, ..., n\}$.

Если $m=n$, то $(n+1)/2=k$ — целое и нужное разбиение таково:

$$\{n\}, \{1, n-1\}, \{2, n-2\}, ..., \{(n-1)/2, (n+1)/2\};$$

если $m=n+1$, то n четно и разбиение имеет вид

$$\{1, n\}, \{2, n-1\}, ..., \{n/2, n/2+1\}.$$

Теперь рассмотрим 3 случая.

Случай 1: $n+1<m<2n$, *m нечетко.* Выделим из набора S_n набор S_{m-n-1}; остальные $2n-m+1$ чисел можно разбить на пары с суммой m: $\{m-n, n\}$, $\{m-n+1, n-1\}$, ..., $\{(m-1)/2, (m+1)/2\}$. Сумма чисел набора S_{m-n-1} равна

$$\frac{(m-n-1)(m-n)}{2}=\frac{m^2-m(2n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=m\left(\frac{m-2n-1}{2}+k\right)$$

и делится на m, причем $m\geqslant m-n-1$, поэтому эти числа по предположению индукции также можно разбить на группы с суммой m в каждой группе.

Случай 2: $n+1<m<2n$, *m четно.* Здесь мы тоже выделим набор S_{m-n-1}, а остальные числа разобьем на пары с суммой m: $\{m-n, n\}$, $\{m-n+1, n-1\}$, ..., $\{m/2-1, m/2+1\}$, и еще одно число $m/2$. Сумму чисел набора S_{m-n+1} представим в виде $(m-2n-1+2k)(m/2)$. Она делится на $m/2$, причем $m/2\geqslant m-n-1$, так как $m/2<n$. Поэтому набор S_{m-n-1} можно разбить на нечетное число $m-2n-1+2k$ групп с суммой $m/2$, к одной из них присоединить $m/2$, а остальные объединить попарно — получатся группы с суммой m.

Случай 3: $m\geqslant 2n$. Будем разбивать набор S_n на k групп с равной суммой, которая уже автоматически будет равна m. Заметим, что $k=n(n+1)/2m\leqslant(n+1)/4$, и потому $n-2k\geqslant 2k-1>0$.

Выделим из S_n набор S_{n-2k}. Сумма чисел этого набора

$$\frac{(n-2k)(n-2k+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}-k(2n+1)+2k^2$$

делится на k, причем частное от этого деления не меньше $n-2k$ (так как $(n-2k)(n-2k+1)/2(n-2k)=$ $=(n-2k+1)/2\geqslant k$).

Следовательно, S_{n-2k} можно разбить по предположению индукции на k равных по сумме групп. Остальные $2k$ чисел разбиваются на k пар с равной суммой: $\{n-2k+1, n\}$, $\{n-2k+2, n-1\}$, ... Остается объединить каждую группу с одной из пар.

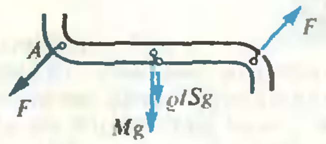
А. В. Анджанс

Ф1123. *К концу вертикальной водопроводной трубы при помощи короткого отрезка резиновой*

Рассмотрим силы, действующие на горизонтальную насадку (см. рисунок). Это две силы F давления воды в изгибах насадки, сила веса воды ρlSg и сила тяжести самой насадки Mg.

Задачник „Кванта"

трубки прикреплена стальная насадка массой M. При каком расходе воды насадка будет горизонтальной? Площадь сечения насадки S, длина ее l. Трением пренебречь.



Для силы F из второго закона Ньютона, записанного для массы воды Δm, которая движется со скоростью v, получаем

$$F=\frac{\Delta m}{\Delta t}v\sqrt{2}=\frac{\Delta m}{\Delta t}\frac{\Delta m}{\Delta t}\frac{1}{\rho S}\sqrt{2}=\frac{Q^2\sqrt{2}}{\rho S},$$

где $Q=\Delta m/\Delta t$ — искомый расход воды.

При равновесии сумма моментов всех действующих на насадку сил относительно оси вращения, проходящей через точку A, равна нулю:

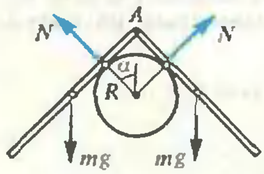
$$(Mg+\rho lSg)\frac{l}{2}-\frac{F}{\sqrt{2}}l=0.$$

Отсюда, с учетом выражения для F, получаем

$$Q=\sqrt{\rho Sg(M+\rho lS)/2}.$$

М. Г. Гаврилов

Ф1124. *На гладкое горизонтальное бревно радиусом R кладут сверху «книжку», составленную из двух однородных тонких квадратных пластинок со стороной $l=4R$. Пластины скреплены при помощи невесомого шарнирного стержня. Какой угол образуют пластины в положении равновесия? Будет ли это равновесие устойчивым?*



На рисунке показаны внешние силы, действующие на «книжку»: две силы тяжести mg пластинок и две силы реакции N со стороны бревна. Запишем условия равновесия «книжки» для сил в проекциях на вертикальную ось —

$$2mg-2N\cos\alpha=0$$

и для моментов сил относительно оси, проходящей через точку A,—

$$NR\operatorname{tg}\alpha-mg\frac{l}{2}\cos\alpha=0.$$

Учитывая, что $l=4R$, получаем уравнение

$$\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{tg}\alpha-2=0,$$

или

$$(\operatorname{tg}\alpha-1)(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha+2)=0.$$

Решение этого уравнения дает

$$\operatorname{tg}\alpha=1,\ \alpha=45^\circ,\ 2\alpha=90^\circ.$$

Таким образом, в равновесии пластинки составляют друг с другом прямой угол. При этом равновесие устойчивое.

С. С. Кротов

Ф1125. *Вертикальный теплоизолированный сосуд, в котором находится одноатомный газ, закрыт поршнем массой M. В сосуде включают нагреватель мощностью N, и поршень начинает медленно двигаться вверх. За какое время он поднимется на высоту H относительно на-*

За искомое время τ к газу подводится количество теплоты $Q=N\tau$. Оно расходуется на работу по расширению газа при постоянном давлении, равную работе по равномерному поднятию поршня,—

$$A=p\Delta V=\nu R\Delta T=MgH$$

и на увеличение внутренней энергии ν молей одноатомного газа —

$$\Delta U=\frac{3}{2}\nu R\Delta T=\frac{3}{2}MgH.$$

Из уравнения

чального положения? Теплоемкостью поршня, трением и давлением атмосферы пренебречь.

Задачник „Кванта"

$$N\tau = MgH + \frac{3}{2}MgH$$

получаем

$$\tau = \frac{5}{2}\frac{MgH}{N}.$$

А. Р. Зильберман

Ф1126. *В схеме, изображенной на рисунке 1, ключ К «колеблется» между положениями 1 и 2 с частотой $f=100$ Гц; в каждом положении ключ находится одинаковое время. Найти ток через резистор. $C_1=10$ мкФ, $C_2=30$ мкФ, $R=100$ кОм.*

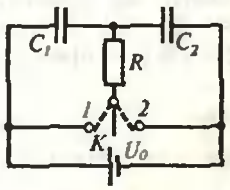


Рис. 1.

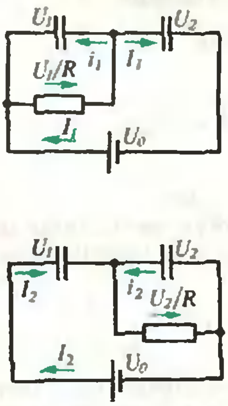


Рис. 2.

Ответ на вопрос задачи очевиден: средний ток через резистор должен быть равен нулю. В самом деле, при любом отличном от нуля токе потенциал точки соединения конденсаторов со временем возрастал бы неограниченно.

Больший интерес представляет отыскание тока через батарею, считая напряжение батареи равным $U_0=10$ В.

Легко проверить, что за время нахождения переключателя в одном из положений — 1 или 2 — конденсаторы перезаряжаются незначительно. Действительно, пусть конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U. Замкнем его на резистор сопротивлением R. По цепи пойдет ток $I=U/R$, в результате за малое время τ заряд конденсатора изменится на

$$\Delta q = I\tau = U\tau/R,$$

а напряжение — на

$$\Delta U = \Delta q/C = U\tau/(RC),$$

так что

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\tau}{RC} \ll 1.$$

На самом деле изменение напряжения еще меньше, так как от батареи тоже притекает некоторый заряд.

Итак, напряжения конденсаторов можно считать постоянными. Тогда для схем, изображенных на рисунке 2, получим

$$\frac{U_1}{R} - i_1 = I_1, \quad \frac{U_2}{R} - i_2 = I_2.$$

Но

$$i_1\tau_1 = I_2\tau_2 \quad \text{и} \quad i_2\tau_2 = I_1\tau_1,$$

или учитывая, что $\tau_1=\tau_2=1/(2f)$,

$$i_1 = I_2 \text{ и } i_2 = I_1.$$

Следовательно, в установившемся режиме

$$U_1 = U_2 = \frac{U_0}{2},$$

$$I_1 + I_2 = \frac{U_0}{2R},$$

и ток через батарею

$$I = \frac{I_1+I_2}{2} = \frac{U_0}{4R} = 25 \text{ мкА}.$$

Любопытно, что в ответ не вошли значения емкостей конденсаторов. Они нам понадобились лишь для подтверждения условия $RC \gg 1/f$.

А. Р. Зильберман

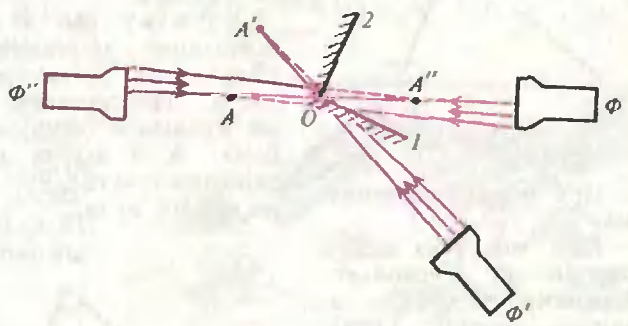
Ф1127. *Фонарик испускает пучок лучей, сходящихся на расстоянии $R_0=1$ м от него в маленькое пятно. На пути луча поместили два плоских зеркала квадратной формы так, что линия их соприкосновения пересекает ось пучка на расстоянии $r=70$ см от фонарика и перпендикулярна этой оси. Плоскости зеркал перпендикулярны друг другу, а одно из зеркал составляет угол $\alpha=30°$ с осью пучка. На каком расстоянии от фонарика сойдется теперь пучок?*

Ход лучей, испускаемых фонариком $Ф$, показан на рисунке. До помещения зеркал на пути лучей пучок сходился в точке A.

Рассмотрим ту часть лучей, которая сначала отражается от зеркала *1*. После отражения они идут так, как если бы их испустил фонарик $Ф'$, являющийся отражением фонарика $Ф$ в зеркале *1*. Эти лучи пересеклись бы в точке A', если бы на их пути не стояло зеркало *2*. После отражения от него лучи идут так, как если бы их испустил фонарик $Ф''$, являющийся отражением $Ф'$ в зеркале *2*. Легко видеть, что $Ф''$ центрально симметричен $Ф$ относительно точки O. В результате пучок сойдется в точке A'', центрально симметричной точке A и лежащей на оси пучка на расстоянии

$$x=R_0-2(R_0-r)=40 \text{ см}$$

от фонарика.



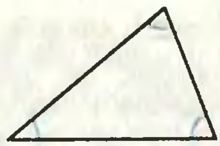
Аналогичные рассуждения показывают, что лучи, отражающиеся сначала от зеркала *2*, также пересекаются в точке A''. Положение этой точки, очевидно, не зависит от угла α.

М. М. Цыпин

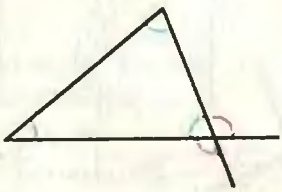
„Квант" улыбается

Сколько углов у треугольника?

— Конечно *три*. Называется-то он ТРЕугольник.



— Ну, в общем, внутренних угла — три. А если считать все углы треугольника, включая внешние, то их наберется *девять*.



— При чем тут внешние углы?

— При том, что спрашивается не «сколько внутренних углов?», а «сколько вообще углов у треугольника?». Внешний угол треугольника является видовым понятием по отношению к родовому понятию «угол треугольника», так что внешний угол является углом треугольника.

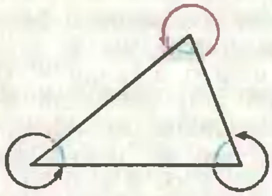
— Не согласен. Прибавление прилагательного к существительному не всегда выделяет частный случай. А то пришлось бы искать у треугольника двугранные углы, телесные углы и т. п.

— К тому же, когда чертят треугольник, то изображают только внутренние углы.

— Вы оба неправы. У треугольника *шесть* углов!

— Это почему же?

— Потому, что три угла изнутри, а еще три — извне. Они ведь изображены!

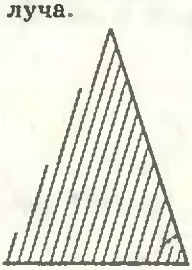


— Если считать углы по изображению, то треугольник вовсе не имеет углов, их число — *ноль*.

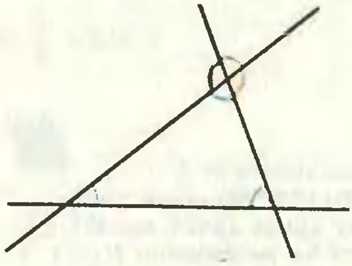
— Ноль?!

— Почему бы и нет? Вспомните определение: «Угол — это часть плоскости, ограниченной двумя лучами с общим концом». А в вашем изображении треугольника нет ни одного луча.

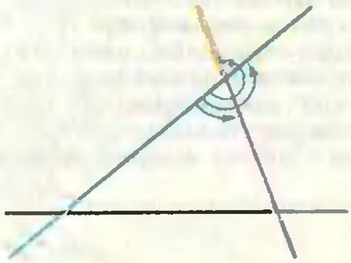
— Когда говорят «угол треугольника», то его стороны мысленно продолжают до луча.



— В таком случае у каждой вершины по 4, всего *двенадцать* углов.

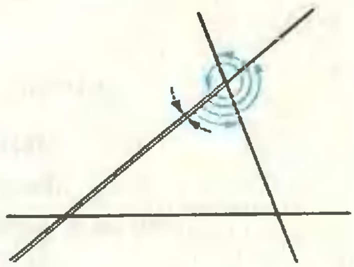


— А это смотря как считать: у каждой вершины можно увидеть до 12, всего *тридцать шесть* углов.



— Это уже чересчур!

— Вовсе нет. Если принять во внимание, что каждый луч определяет два угла с величинами 0° и 360°, то их наберется 60. *Шестьдесят!*



— Может быть, и этого вам мало?

— Да! У треугольника углов — тьма-тьмущая, *бесконечно много*.

(Окончание см. на с. 56)

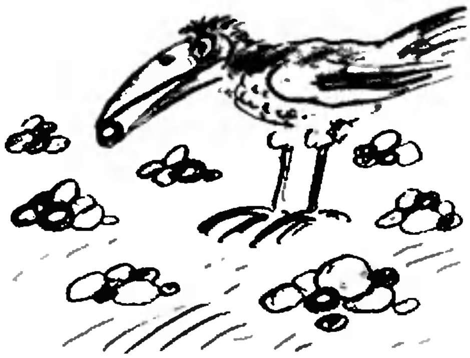
„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Найдите все представления числа 1988 в виде суммы последовательных натуральных чисел.

2. Решите арифметический ребус, заменив буквы цифрами. Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

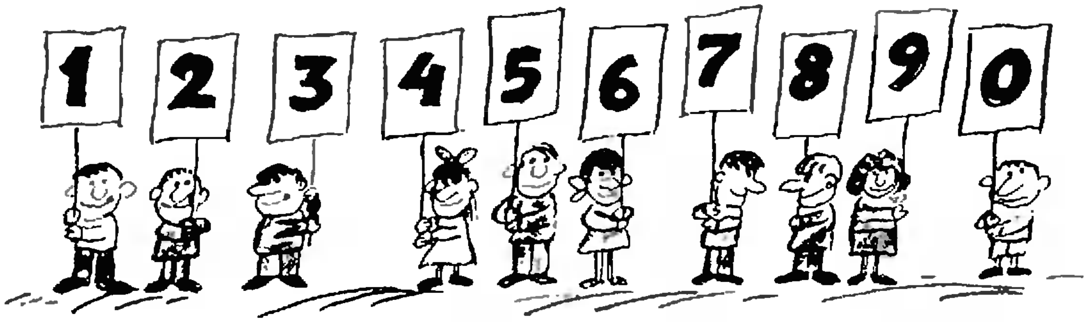
3. Два колеса покатились навстречу друг другу с одинаковой угловой скоростью. При столкновении они коснулись друг друга теми же точками, которыми касались земли в начале движения. Могут ли радиусы этих колес быть не одинаковыми?



4. На столе лежит куча из 1001 камня. Из нее выкидывают камень и кучу делят на две. Затем из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, снова выкидывают камень, и снова делят одну из куч на две. И так далее. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, состоящие из трех камней?

5. Имеется десять карточек с цифрами 1, 2, ..., 9, 0. Составьте из них три числа, которые относятся друг к другу как а) 1:3:5; б) 2:3:4. (Должны быть использованы все 10 карточек.)

Эти задачи нам предложили: *Н. К. Антонович, А. М. Домашенко, Н. Ю. Нецветаев, С. В. Рукшин, А. В. Швецов.*



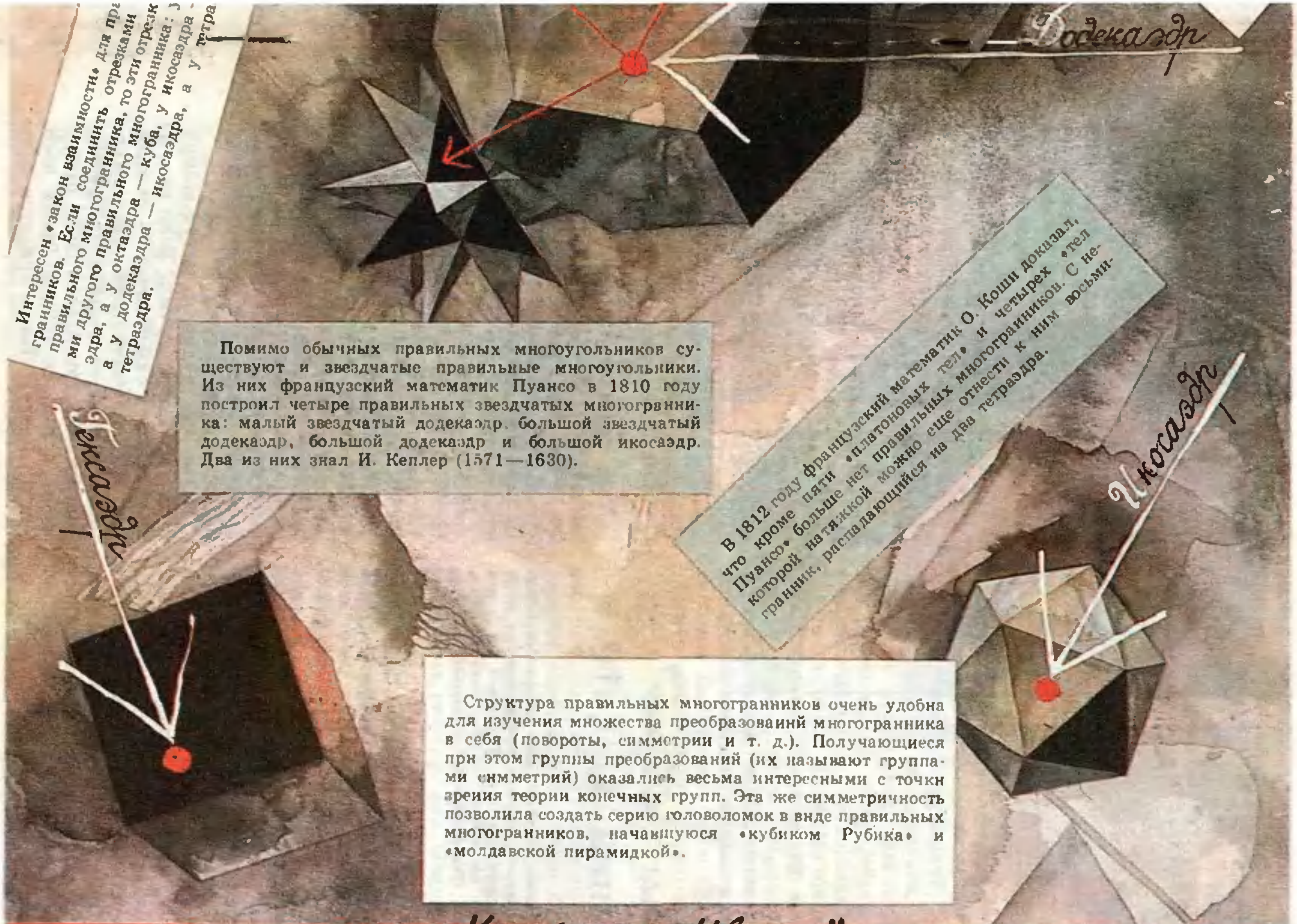
Правильные многогранники — такие многогранники, у которых все грани — равные правильные многоугольники, а все углы между гранями равны. Их пять: тетраэдр (четырехгранник); куб, или гексаэдр (шестигранник); октаэдр (восьмигранник); икосаэдр (двадцатигранник); додекаэдр (двенадцатигранник).

Эти многогранники носят название «платоновых тел» — по имени древнегреческого философа Платона (428—348 до н. э.), в учении которого они играли важную роль. Тетраэдр символизировал огонь, куб — землю, октаэдр — воздух, икосаэдр — воду, а додекаэдр — Вселенную.

Первые четыре многогранника были известны задолго до Платона, поскольку они могли быть составлены из часто встречающихся элементов — равносторонних треугольников или квадратов. Археологи нашли и додекаэдр, изготовленный во времена этрусской цивилизации по крайней мере за 500 лет до н. э.

Но, видимо, в школе Платона додекаэдр был открыт самостоятельно. Существует легенда об ученике Платона Гиппазе, погибшем в море потому, что он разгласил тайну о «шаре с двенадцатью пятиугольниками».

для правильных много-
зками центры граней
отрезки станут ребра-
ника: у куба — окта-
эдра — додекаэдра,
тетраэдра — снова



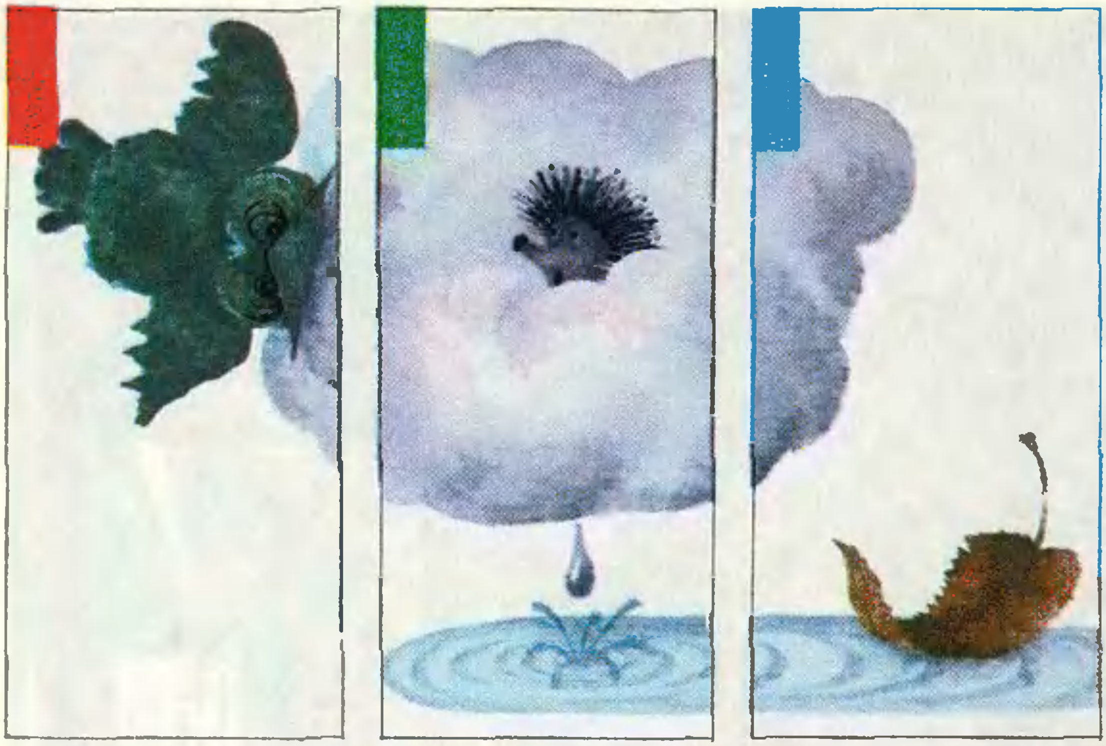
Интересен «закон взаимности» для пра
гранников. Если соединить отрезками
правильного многогранника, то эти отрезк
ми другого правильного многогранника: у
эдра, а у октаэдра — куба, у икосаэдра —
а у додекаэдра — икосаэдра, а у тетра
тетраэдра.

Помимо обычных правильных многоугольников существуют и звездчатые правильные многоугольники. Из них французский математик Пуансо в 1810 году построил четыре правильных звездчатых многогранника: малый звездчатый додекаэдр, большой звездчатый додекаэдр, большой додекаэдр и большой икосаэдр. Два из них знал И. Кеплер (1571—1630).

В 1812 году французский математик О. Коши доказал, что кроме пяти «платоновых тел» и четырех «тел Пуансо» больше нет правильных многогранников. С некоторой натяжкой можно еще отнести к ним восьмигранник, распадающийся на два тетраэдра.

Структура правильных многогранников очень удобна для изучения множества преобразований многогранника в себя (повороты, симметрии и т. д.). Получающиеся при этом группы преобразований (их называют группами симметрий) оказались весьма интересными с точки зрения теории конечных групп. Эта же симметричность позволила создать серию головоломок в виде правильных многогранников, начавшуюся «кубиком Рубика» и «молдавской пирамидкой».

Калейдоскоп „Кванта"



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Равнодействующая — как ее найти?» предназначена восьмиклассникам, заметка «Реальный газ и его уравнение состояния» — девятиклассникам, «Принцип Гюйгенса» — десятиклассникам.

Равнодействующая — как ее найти?

Мы часто решаем задачи «с практическим содержанием», вовсе не отдавая себе отчета, насколько они сложны. Даже простой автомобиль содержит тысячи деталей, на каждую из которых действует множество сил. Просто перечислить их — и то трудно, а написать и решить столько уравнений... Однако мы умудряемся обойти это затруднение, вводя понятие равнодействующей силы. Поговорим об этом подробнее.

Для определения равнодействующей нужно все силы, действующие на тело, векторно сложить (не всегда это просто, но об этом чуть позже). Полученный суммарный вектор будет эквивалентен исходной системе сил.

Так уж и эквивалентен? Представьте, что лично вас тянут с силой 500 Н влево за левую руку и с такой же силой — вправо за правую руку. Сумма этих сил равна нулю, т. е. их как бы нет вовсе. Вам от этого легче?

На самом деле эквивалентность тут понимается в довольно узком смысле — при замене всех сил их равнодействующей не должно измениться движение тела, а вот о деформациях, разрывах и т. п. речи нет.

Какие же трудности могут возникнуть при сложении сил? Если все они приложены в одной точке — то никаких. И складывать легко, и ясно, куда приложить суммарный вектор — равнодействующую. А если силы приложены в разных точках (чаще всего так и бывает)? Тогда придется силы переносить. Как это можно сделать? Тут нам понадобится специальная физическая величина — *момент силы*.

Момент силы $\vec{F}$ относительно точки O (рис. 1) равен

$$M = Fr\sin\alpha,$$

где r — расстояние от точки O до точки приложения силы A. Можно сделать иначе — разложить силу $\vec{F}$ на две составляющие — вдоль r и перпендикулярно r. Вращающий момент создает только перпендикулярная составляющая $\vec{F}_2$:

$$M = F_2 r.$$

Конечно, это просто предыдущая формула, переписанная немного иначе, но во многих задачах удобнее пользоваться именно ею.

Легко видеть, что при переносе силы $\vec{F}$ вдоль линии ее действия момент силы не изменяется, поэтому такой перенос допустим. (Заметим, что деформации тела при переносе точки приложения силы изменяются. Это легко понять на простом примере. Потянем привязанную одним концом к стене резиновую ленту вначале за середину, а потом за второй конец — она растянется неодинаково.)

Теперь вернемся к равнодействующей. Если силы приложены в разных точках, но линии их действия пересекаются в одной,— опять все просто. Перенесем силы вдоль линий их действия в эту точку и сложим — все, как в первом случае. Если же линии действия сил не пересекаются в одной точке, задача нахождения равнодействующей усложняется.

Разберем для простоты частный случай, когда все векторы сил лежат в одной плоскости (плоская система сил). Можно попробовать решить задачу за несколько шагов — складывая силы попарно, как показано на рисунке 2. Вначале сложим силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ — получим вектор $\vec{R}_1$, а потом сложим его с вектором $\vec{F}_3$. Равнодействующая $\vec{R}$ приложена в точке A.

Так можно получить ответ не во всех случаях. Проблемы возникают, если векторы сил параллельны. Рассмотрим пример: нужно найти равнодействующую параллельных сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 3). Ясно, что модуль равнодействующей равен сумме F_1 и F_2, а вот в какой точке должна быть приложена равнодействующая? Тут поможет простое рассуждение: какую бы точку приложения мы ни взяли, все равно момент равнодействующей относительно оси, проходящей через эту точку, равен нулю. Но при замене сил их равнодействующей моменты меняться не должны — значит, нужно взять такую точку, относительно которой суммарный момент исходной системы сил равен нулю. В нашем примере эту точку O можно найти из условия

$$F_1 \cdot AO = F_2 \cdot OB.$$

Если $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены в разные стороны, то точка O окажется за пределами отрезка AB, ближе к той из сил, которая по величине больше. (Убедитесь в этом самостоятельно.)

Задачи, где нужно находить равнодействующую параллельных сил, вы наверняка решали. Так, обычно силы тяжести, приложенные к разным частям тела, считают параллельными. Центр тяжести тела — это как раз и есть точка приложения равнодействующей этих сил. Вот почему, например, тело, закрепленное на оси, которая

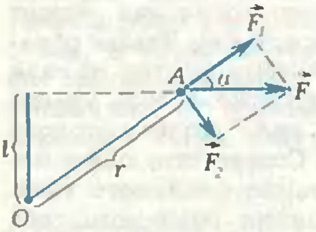


Рис. 1.

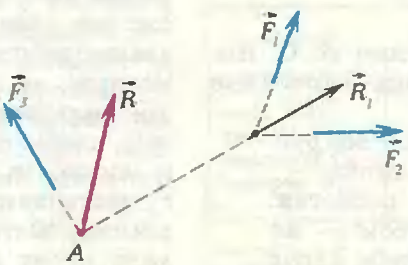


Рис. 2.

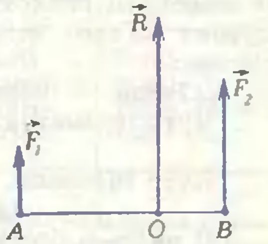


Рис. 3.

проходит через центр тяжести тела, находится в равновесии.

Есть один важный частный случай параллельной системы сил, когда равнодействующую найти нельзя. Так будет для двух параллельных сил, которые равны по величине и противоположны по направлению. Эту систему называют *парой сил*. Попытка найти точку приложения пары сил приводит к делению на нуль — найти эту точку не удается. У пары сил есть одно интересное свойство: ее момент одинаков относительно любой оси вращения (проверьте это). Оказывается, таким свойством обладает любая система сил, сумма которых равна нулю (пара сил — частный случай такой системы).

Но именно такими системами сил мы и интересуемся, когда говорим об условиях равновесия тел (статика). Одно из условий — сумма сил равна нулю. Отсюда вытекает важное следствие: уравнение моментов, т. е. второе условие равновесия — сумма моментов равна нулю, можно записывать в этом случае относительно *любой* точки, в том числе и не лежащей внутри тела. Эту точку следует выбирать из соображений простоты получающегося уравнения (удобно ее взять, например, на пересечении линий действия нескольких сил, особенно тех, которые мы не хотим находить).

А. Р. Зильберман

Реальный газ и его уравнение состояния

В известном стихотворении И. С. Никитина «Утро» есть такие красивые строки:

...Тишь — безлюдье вокруг.
Чуть приметна тропинка росистая.
Куст заденешь плечом — на лицо тебе вдруг
С листьев брызнет роса серебристая.

Картина настолько знакома каждому, что обычно не вызывает никаких вопросов. А они существуют.

Откуда утром берется роса? Ни для кого не секрет — она образуется при ночном охлаждении из водяного пара, который всегда есть в воздухе. Но почему же тогда кислород и азот — основные газы атмосферы — не выпадают в виде росы? И вообще — любой ли газ может стать жидкостью? Если да, то при каких условиях?

Это — самые простые вопросы, но есть и довольно тонкие. Например, такой. Если считать водяной пар идеальным газом, то как объяснить его «перевоплощение» в состоящую из тех же молекул жидкость — воду? Ведь в идеальном газе молекулярное взаимодействие сводится к довольно редким столкновениям молекул друг с другом, а в жидкости это взаимодействие проявляется буквально на каждом шагу: практическая несжимаемость жидкости, ее поверхностное натяжение и т. п. Кроме того, водяной пар, азот, кислород и другие газы в модели идеального газа совершенно «на одно лицо», тем не менее росой утром становится только водяной пар. Почему? Все эти примеры показывают, что для объяснения превращения газа в жидкость следует «запастись» совершенно другой моделью газа.

Как вы знаете, модель идеального газа безотказно работает либо при высоких температурах, когда хаотическое тепловое движение столь интенсивно, что молекулы движутся, не обращая внимания друг на друга, либо при малых плотностях, когда между молекулами слишком большие расстояния, чтобы они могли друг друга «чувствовать». При охлаждении или сжатии газа влияние молекулярного взаимодействия становится более заметным, и именно тогда газ может превратиться в жидкость. Таким образом, чтобы перекинуть мостик от газа к жидкости, надо уже в газе учесть существование сил молекулярного взаимодействия. Соответствующая модель носит название реального газа. Уравнение состояния реального газа проще всего получить, введя поправки на взаимодействие молекул в уравнение Менделеева — Клапейрона.

Если расстояние между молекулами мало́, они резко отталкиваются друг от друга. (*Именно поэтому, например, трудно сжать жидкость.*) Это легко понять, представив молекулы в виде бильярдных шаров, обладающих собственным объемом. Итак, первая поправка — на размеры молекул.

Согласно уравнению идеального газа, объем V зависит от давления p по закону

$$V=\frac{\nu RT}{p},$$

где T — абсолютная температура, R — универсальная газовая постоянная, а ν — число молей газа. Значит, при очень большом давлении объем уменьшается практически до нуля. А бильярдные шары можно сжать лишь до некоторого минимального объема, который пропорционален их числу. Поэтому можно записать

$$V=\frac{\nu RT}{p}+\nu b.$$

Здесь b — константа, которая определяет суммарный объем всех «жестких» молекул, составляющих один моль данного газа (как показывают более точные расчеты, константа b равна учетверенному объему молекул). Теперь, как бы ни увеличивалось давление, объем моля газа никогда не станет меньше b.

Мы учли еще не все проявления молекулярного взаимодействия. Как бильярдные шары сами по себе не собираются в большие группы, так и молекулы газа никогда не собрались бы вместе, чтобы «организовать» плотную жидкость, если бы они друг к другу не притягивались (на расстояниях бо́льших, чем диаметр жесткого шара). Силы притяжения мешают молекулам разлететься и приводят к уменьшению давления по сравнению с тем, с которым газ действовал бы на стенки сосуда в их отсутствии. Обозначим это уменьшение давления через Δp. Тогда получаем

$$p=\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\Delta p.$$

Попытаемся оценить Δp, полагая, что оно связано с изменением импульса (по сравнению со случаем отсутствия взаимодействия), передаваемого стенкам при ударе о них молекул газа. На подлетающие к стенкам молекулы действуют силы притяжения к остальным молекулам газа, направленные в глубь сосуда и уменьшающие поэтому их скорость. Эти силы, в первом приближении, пропорциональны плотности газа (при очень большом разрежении они вообще исчезают). Грубо можно считать, что и изменение импульса, передаваемого стенке при ударе одной молекулы, также пропорционально плотности. Но пропорционально плотности растет и среднее число ударов о стенки в единицу времени. Поэтому убыль давления Δp оказывается обратно пропорциональной объему сосуда:

$$\Delta p=\frac{a\nu^2}{V^2},$$

где a — постоянный для данного газа коэффициент.

Окончательно уравнение состояния реального газа принимает вид:

$$p=\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\frac{a\nu^2}{V^2},$$

или, как его обычно записывают,

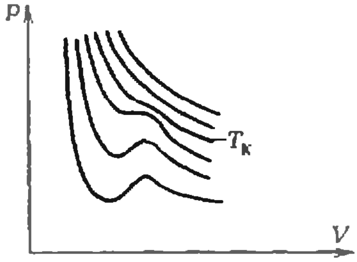
$$\left(p+a\frac{\nu^2}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT.$$

Это — знаменитое уравнение Ван-дер-Ваальса, впервые увидевшее свет в 1873 году в работе ученого «О непрерывности газообразного и жидкого состояния» (Нобелевская премия 1910 года).*)

В теории Ван-дер-Ваальса каждый газ характеризуется своими параметрами a и b, которые можно определить из эксперимента. Приведем их значения для некоторых газов:

Вещество	a, Н·м⁴·моль⁻²	b, м³·моль⁻¹
вода H_2O	0,5464	$0{,}305\cdot10^{-4}$
азот N_2	0,1390	$0{,}391\cdot10^{-4}$
кислород O_2	0,1370	$0{,}318\cdot10^{-4}$
водород H_2	0,0244	$0{,}266\cdot10^{-4}$

*) Подробно о знаменитом голландском ученом и об уравнении, носящем его имя, вы можете прочитать в заметке Б. Е. Явелова «Ван-дер-Ваальс и его уравнение» («Квант», 1987, № 7).



Но не в этом главное достижение теории. Построим несколько изотерм Ван-дер-Ваальса, отвечающих разным температурам (см. рисунок). При высоких температурах изотерма Ван-дер-Ваальса мало отличается от изотермы Бойля — Мариотта. С понижением температуры различие становится все более и более заметным; наконец, при некоторой температуре зависимость $p(V)$ перестает быть монотонной. Образуется знаменитая «петля Ван-дер-Ваальса», когда при увеличении давления увеличивается и объем. Такого, конечно, быть не может. Появление петли показывает, что уравнение состояния реального газа перестает описывать действительную ситуацию. Это происходит как раз тогда, когда газ начинает превращаться в жидкость (реальная экспериментальная изотерма вместо петлеобразного участка содержит прямолинейный).

Таким образом, получается, что газ может превратиться в жидкость лишь при температуре ниже некоторой определенной температуры, называемой критической, при которой петля появляется впервые. Оказывается, критическую температуру $T_к$ можно выразить через параметры a и b, характеризующие газ:

$$T_к = \frac{1}{R}\frac{8a}{27b}.$$

Теперь у нас достаточно информации, чтобы ответить на вопросы, заданные в самом начале. Рассчитаем, пользуясь данными таблицы, критические температуры водяного пара, азота и кислорода:

$$T_{к\,H_2O} = 646\ К,\ T_{к\,N_2} = 128\ К,$$
$$T_{к\,O_2} = 155\ К.$$

Все сразу становится ясным. Критические температуры азота и кислорода слишком низки, чтобы из этих газов при ночном охлаждении могла выпасть роса. Именно поэтому мы можем по утрам любоваться безобидными водяными каплями, а не спасаться от потоков жидкого азота и кислорода.

А. С. Штейнберг

Принцип Гюйгенса

Этот принцип был сформулирован Христианом Гюйгенсом в его «Трактате о свете», опубликованном в 1690 году. В то время уже не возникало больших сложностей при описании движения частиц. В свободном пространстве частицы движутся прямолинейно и равномерно; под влиянием внешних воздействий они замедляются, ускоряются, меняют направление движения (преломляются или отражаются) — и все это можно рассчитать. Вместе с тем, законы распространения волн — отражение, преломление, огибание препятствий (дифракция) не находили объяснения. И Гюйгенс предложил принцип, на основании которого это можно было бы сделать.

Очевидно, на мысль его навели рассуждения о причинах распространения волновых процессов. От камня, брошенного в воду, по поверхности бегут круговые волны. Процесс этот продолжается и после того, как камень упал на дно, т. е. когда уже нет источника, породившего первые волны. Отсюда следовало, что источниками волн являются сами волновые

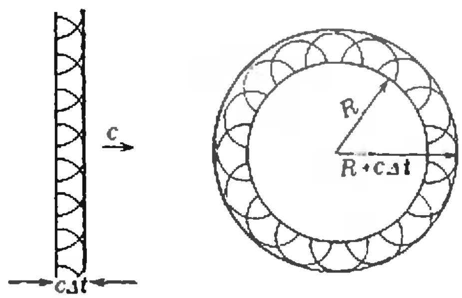


Рис. 1.

возбуждения. Гюйгенс сформулировал это следующим образом:

Каждая точка, до которой доходит волновое возбуждение, является в свою очередь центром вторичных волн; поверхность, огибающая в некоторый момент времени эти вторичные волны, указывает положение к этому моменту фронта действительно распространяющейся волны.

Легко представить, например, как распространяются плоские и сферические волны (рис. 1). Огибающей вторичных волн через время Δt является для плоской волны плоскость, сдвинутая на расстояние $c\Delta t$, а для сферической — сфера радиусом $R+c\Delta t$, где c — скорость распространения вторичных волн, R — радиус первоначальной сферической волны.

По сути, принцип Гюйгенса в такой формулировке является просто геометрическим рецептом построения поверхности, огибающей вторичные волны. Эта поверхность отождествляется с волновым фронтом, и таким образом определяется направление распространения волны.

Гюйгенс первоначально сформулировал свой принцип для световых волн и применил его для вывода законов отражения и преломления света на границе раздела сред. Прежде всего, сам факт наличия отраженной и преломленной волн непосредственно следовал из принципа Гюйгенса, и это уже было большим успехом. По Гюйгенсу, каждая точка границы сред по мере достижения ее фронтом падающей волны становится источником вторичных волн, которые распространяются в обе граничащие среды. Результатом наложения этих вторичных волн в первой среде, из которой падает волна, является волна отраженная, а результатом наложения вторичных волн во второй среде — волна преломленная.

Конечно, мы на основании принципа Гюйгенса не можем ответить на вопрос об интенсивности отраженной и преломленной волн, поскольку для этого нужно знать хотя бы их физи-

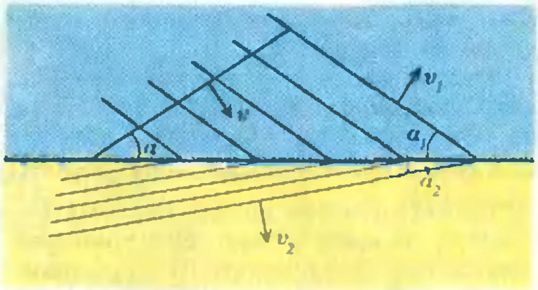


Рис. 2.

ческую природу (которая в принципе Гюйгенса вообще не «участвует»). Но геометрические законы отражения и преломления совершенно не зависят ни от физической природы волн, ни от конкретного механизма их отражения и преломления. Они для всех волн одинаковы.

Пусть v — скорость плоской падающей волны, α — угол ее падения (рис. 2). Тогда фронт падающей волны бежит по границе раздела двух сред со скоростью $v/\sin\alpha$. И отраженная, и преломленная волны порождаются падающей, поэтому их фронты бегут вдоль границы с той же скоростью, т. е.

$$\frac{v}{\sin\alpha}=\frac{v_1}{\sin\alpha_1}=\frac{v_2}{\sin\alpha_2}.$$

Углы α_1 и α_2 определяют направления распространения фронтов отраженной и преломленной волн. Но так как в плоской волне лучи перпендикулярны волновым фронтам, то эти же соотношения выполняются и для отраженных и преломленных лучей.

Объяснение законов преломления и отражения явилось сильным аргументом в пользу справедливости принципа Гюйгенса. Однако, естественно, он вызывал и много сомнений и вопросов. Почему нет обратной волны (ведь вторичные источники испускают сферические волны, распространяющиеся и против фронта)? Почему свет проходит сквозь отверстие прямолинейно (ведь вторичные волны должны распространяться и в область геометрической тени)? Сам Гюйгенс считал, что все это связано с малой интенсивностью вторичных волн. Но ведь звуковые волны загибаются — мы слышим звук, источник которого находится за углом.

Ответы на эти и другие вопросы дал Огюстен Френель в начале XIX века. Он дополнил принцип Гюйгенса важным и естественным положением:

Результирующее волновое возмущение в данной точке пространства является следствием интерференции элементарных вторичных волн Гюйгенса.

Вторичные волны испускаются «источниками», амплитуда и фаза колебаний которых определяются первоначальным возмущением, и поэтому такие источники когерентны. Совокупное действие этих источников, т. е. интерференционный эффект, заменяет идею Гюйгенса об огибающей, которая в теории Френеля приобрела ясный физический смысл как поверхность, где результирующая волна вследствие интерференции имеет заметную интенсивность. Модифицированный принцип Гюйгенса — Френеля позволяет более полно исследовать вопрос о распространении волн в неоднородной среде (в виду математической сложности этот вопрос выходит за рамки школьного курса физики).

Итак, надо ясно представлять как достоинства (простоту и наглядность), так и недостатки (отсутствие физического содержания) первого принципа теории распространения волн — принципа Гюйгенса.

С. А. Гордюнин

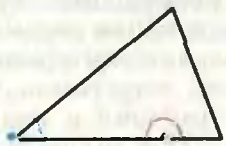
„Квант" улыбается

Сколько углов у треугольника?

(Начало см. на с. 46)

— Не бывает!

— Пожалуйста. Возьмем произвольную точку на стороне. Ясно, что треугольник имеет угол с вершиной в этой точке. Правда, он развернутый.



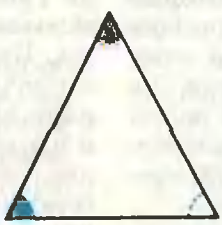
Но развернутый угол ничем не хуже неразвернутого.

— ...

— Оставим бесконечность в покое. У треугольника углов может быть от одного до трех.

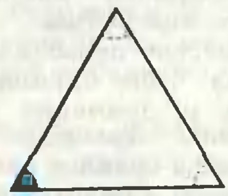
— ?!

— Возьмем, к примеру, равнобедренный треугольник. Два угла при основании равны — это ведь теорема. Но в математике равные не различаются. Так же как, например, множество $\{1, 2, 2\}$ состоит из двух элементов, а не из трех.

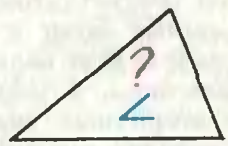


— Хотите сказать, что у равнобедренного треугольника только *два* угла?

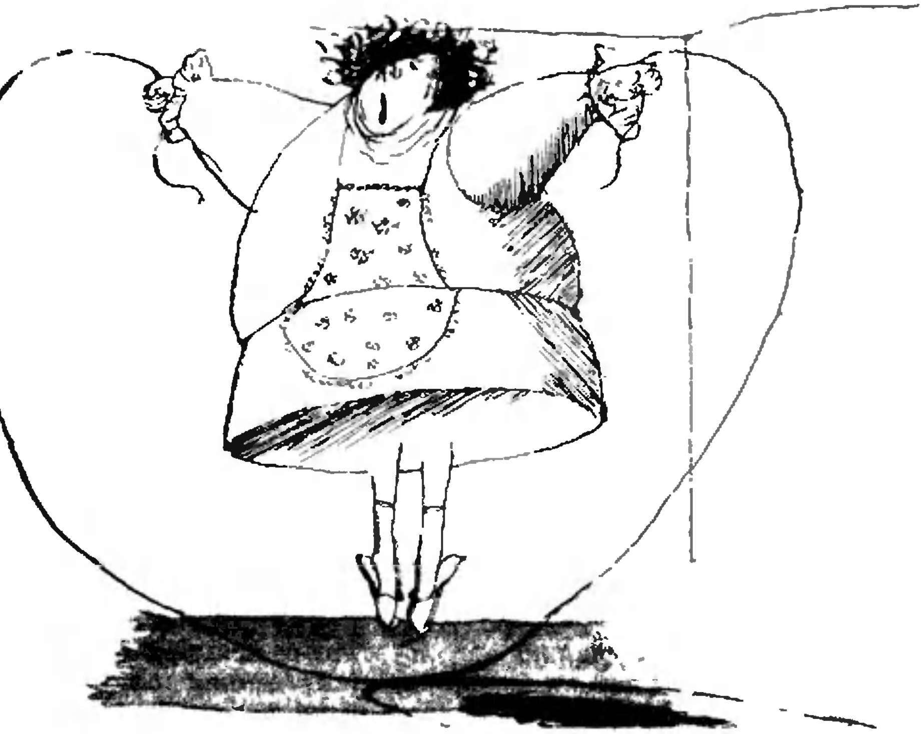
— А у равностороннего — *один!*



— Ну и ералаш! Дорогой читатель, сколько, по-вашему, углов у треугольника?



А. А. Азамов



Лаборатория „Кванта"

Необычный маятник

Кандидат педагогических наук
А. И. АГАФОНОВ,
кандидат педагогических наук
С. И. СЕЛИЦЕР

Среди различных видов колебаний особое место занимают автоколебания. В механике типичным примером автоколебательной системы является маятник в часах. В электричестве широко известен ламповый генератор незатухающих колебаний.

Во многих книгах по физике можно встретить описание простой, но очень наглядной электромеханической автоколебательной системы. Предлагаем вам один из вариантов такой системы (рис. 1). Ее легко изготовить в домашних условиях из подручных материалов.

Спиральная пружина *1* выполнена из алюминиевой проволоки диаметром 1,8 мм, диаметр витка 35—40 мм, а вся длина пружины примерно 140—180 мм. Ее можно намотать, используя стеклянный баллон обычной лампы дневного света. На нижнем конце пружины укреплен электрический контакт *2*, выполненный из латуни; можно использовать также готовый контакт от какого-либо реле. Нижний контакт *3* сделан из латунной (или медной) фольги толщиной около 0,15 мм. Длину изогнутой (Г-образной) части этого контакта можно регулировать с помощью болта *4*, который зажимает латунную полоску (ее размеры в миллиметрах указаны на рисунке 2).

Источником тока *5* является батарея, составленная из девяти элементов «Сириус-373», соединенных в три параллельные группы из трех последовательно соединенных элементов каждая. Батарея дает напряжение 4,5 В,

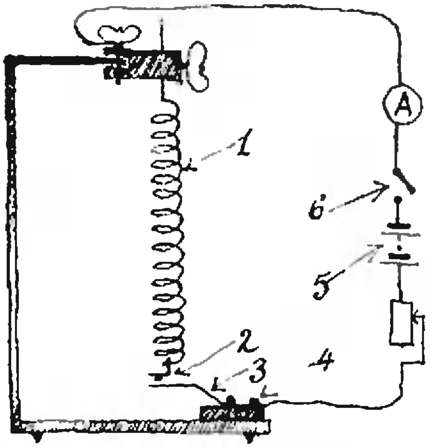


Рис. 1.

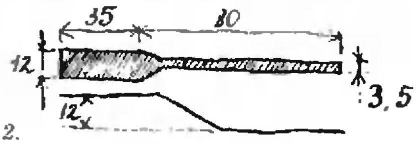


Рис. 2.

а ток, текущий в цепи, около 3 А. Вместо этой батареи можно использовать две аккумуляторные банки, соединенные последовательно.

Как же работает такой маятник?

В начальный момент ключ *6* разомкнут, и контакт *2* касается контакта *3*. При замыкании ключа по виткам пружины проходит ток, и действующая между витками сила Ампера заставляет их притягиваться друг к другу. В результате пружина сжимается, и цепь между контактами *2* и *3* разрывается. Теперь пружина начинает разжиматься, вновь замыкая цепь, и т. д. Таким образом происходят незатухающие колебания.

Как и в любой автоколебательной системе, здесь можно выделить следующие составные части:

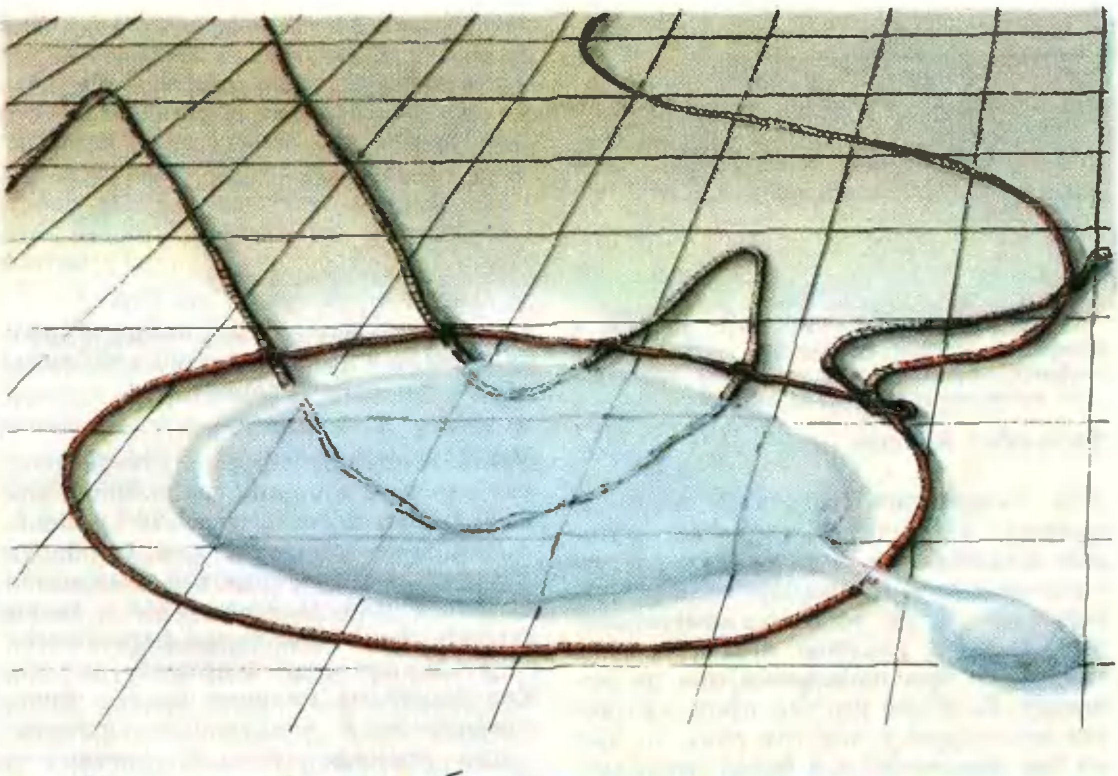
1) постоянный источник энергии — батарея;

2) колеблющаяся система — пружина;

3) устройство, регулирующее поступление энергии в колеблющуюся систему,— пружина и контакты *2* и *3*, замыкающие цепь;

4) обратная связь — механизм, приводимый в действие внешней силой и воздействующий на источник тока. В данном случае обратная связь осуществляется так: электрический ток (внешняя сила) порождает магнитное поле, которое вызывает сжатие пружины и размыкание цепи. Появляющаяся при этом сила упругости (внутренняя сила) снова замыкает цепь.

Следует отметить, что сила тяжести пружины существенной роли не играет, поэтому такая система будет функционировать и в невесомости. Поступление энергии в колебательную систему равно потерям энергии за счет трения, поэтому такая система будет совершать незатухающие колебания до тех пор, пока не иссякнет источник энергии.



Математический кружок

О плоских кривых

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

Точки самопересечения, двойные касательные и точки перегиба

Бросьте на стол длинную веревочную петлю, и она образует замкнутую кривую. Такие кривые — наш основной предмет исследования.

Точки, в которых кривая пересекает себя, называются *точками самопересечения.* Например, у «восьмерки» такая точка одна, а у окружности их нет. *Двойной касательной* называется такая прямая, которая касается кривой дважды. Двойные касательные бывают двух видов: *внешние,* если небольшие кусочки кривых в точках касания лежат по одну сторону от касательной, и внутренние — если по разные стороны (рис. 1). Вся кривая вовсе не должна лежать по одну сторону внешней двойной касательной — этим свойством обладают лишь ее малые участки.

Нас будут интересовать еще *точки перегиба* кривой. Представим, что мы движемся по кривой и поворачиваем, например, влево — красный участок на рисунке 2. В некоторой точке направление поворота может измениться — синий участок. Эта точка, граничная между синим и красным участком, и называется точкой перегиба. Если у кривой нет точек перегиба, то она все время поворачивается в одну сторону (рис. 3).

Обойдем кривую, раскрашивая ее в два цвета, как на рисунке 2, и вернемся в исходную точку. Красные и синие участки чередуются, поэтому тех и других равное число. Количество точек перегиба равно общему числу красных и синих участков, т. е. четно. Мы доказали первую теорему о плоских замкнутых кривых:

число точек перегиба четно.

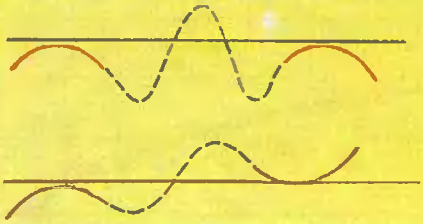


Рис. 1.

Рис. 2.

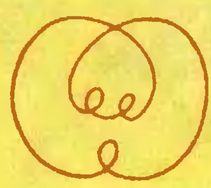


Рис. 3.

Упражнение 1. Заполните таблицу, в которой p — число внешних, q — внутренних двойных касательных, r — точек перегиба, n — точек самопересечения кривой.

Типичные кривые

Нас интересуют *типичные свойства* кривых, т. е. такие свойства, которые сохраняются, если кривую слегка «пошевелить». Например, если у кривой есть такая точка самопересечения, как на рисунке 4, *а* *(двойная точка)*, то при шевелении она не исчезнет. Если же кривая проходит через некоторую точку три раза, то при малом шевелении эта точка распадется на три двойные (рис. 4, *б*). Значит, двойные точки — типичные точки самопересечения, а тройные — нет. Точно так же малым шевелением можно устранить другие нетипичные ситуации — например, когда двойная касательная касается кривой еще в одной точке, т. е. является не двойной, а тройной касательной.

Упражнение 2. Что может произойти с точкой самопересечения на рисунке 4, *в* при малом шевелении?

Основная теорема

Надеюсь, что вы выполнили упражнение 1 и заполнили таблицу (если нет, посмотрите ответ в конце журнала). Числа в каждом столбце таблицы удовлетворяют уравнению

$$p = q + r/2 + n.$$

Наша основная теорема утверждает, что это соотношение выполнено для любой замкнутой плоской кривой.

Для доказательства нужно обойти кривую в двух противоположных направлениях. Начнем обход и будем следить за числом точек пересечения касательного луча с кривой (рис. 5). Как видно из рисунка 6, это число изменяется в следующих случаях:

при проходе двойной точки — *уменьшается на* 1;

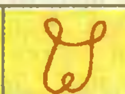
при проходе точки перегиба — уменьшается на 1;

при проходе точки касания внешней двойной касательной увеличивается на 2;

при проходе точки касания внутренней двойной касательной — уменьшается на 2.

Сделаем полный обход кривой и подсчитаем изменение числа пересечений касательного луча с кривой. Каждая точка перегиба уменьшает это число на 1, поэтому общий вклад точек перегиба равен $(-r)$. Общий вклад двойных точек равен $(-2n)$, так как каждую двойную точку мы

Таблица

								
p								
q								
r								
n								

проходим дважды. Чтобы подсчитать вклад двойных касательных, разобьем их общее число на три слагаемых в соответствии с рисунком 7. Вклад двойных касательных за обход окажется равным $2(p_1+2p_2)-2(q_1+2q_2)$. После обхода число точек пересечения луча с кривой не изменилось, поэтому

$$-r-2n+2p_1+4p_2-2q_1-4q_2=0.$$

Обойдем теперь кривую в противоположном направлении. При этом стрелки на рисунке 7 поменяют направления, т. е. числа p_2 и p_3, q_2 и q_3 поменяются местами. Мы получим уравнение

$$-r-2n+2p_1+4p_3-2q_1-4q_3=0.$$

Для доказательства теоремы остается сложить два полученные равенства и результат разделить на 4.

Эта теорема содержит необходимые условия того, что числа p, q, r и n равны числам внешних и внутренних двойных касательных, точек перегиба и двойных точек плоской кривой. А как обстоит дело с достаточностью? Пусть у кривой нет ни двойных точек, ни точек перегиба, т. е. $r=n=0$. Тогда кривая *выпуклая*, и у нее нет также и двойных касательных. Однако равенство $p=q+r/2+n$ не запрещает равных положительных p и q. Значит, условие теоремы не является достаточным.

Тем не менее, это условие становится достаточным, когда у кривой есть точки перегиба:

если r — четное положительное число и $p=q+r/2+n$, то существует замкнутая плоская кривая с данными p, q, r, n.

Случай кривых без точек перегиба более сложный:

если $r=0$, то число внутренних двойных касательных q четно и $q\leqslant(2n+1)(n-1)$;

если $q\leqslant n(n-1)$ и $p=q+n$, то существует замкнутая плоская кривая с $r=0$ и данными p, q, n.

Доказательства этих теорем выходят за рамки статьи. Сами результаты довольно «свежие» — они получены американским математиком Б. Гальперном около 10 лет назад. А основная теорема этого пункта до-

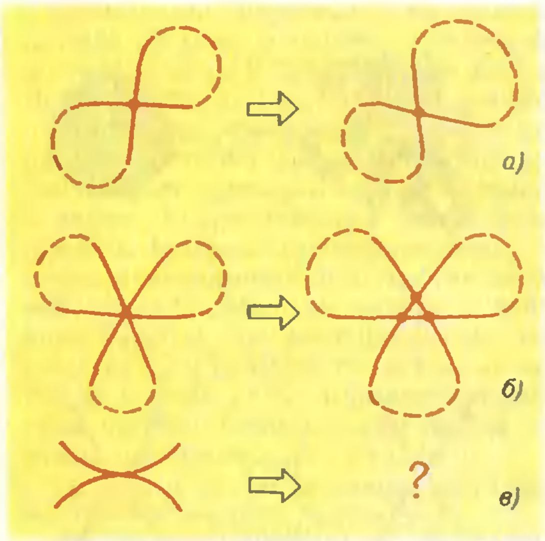


Рис. 4.

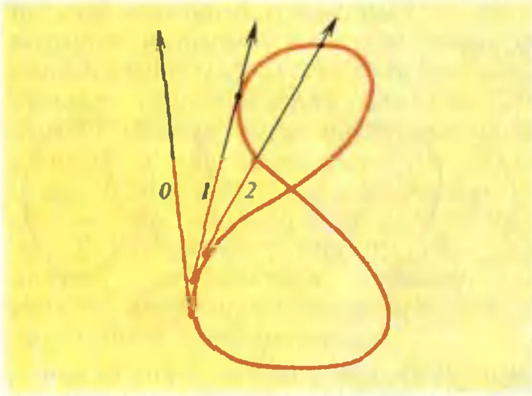


Рис. 5.

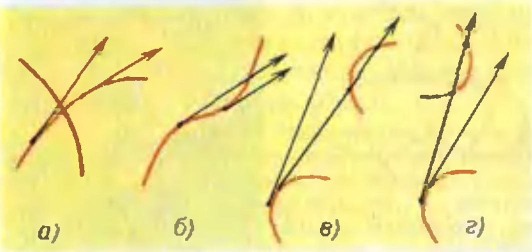
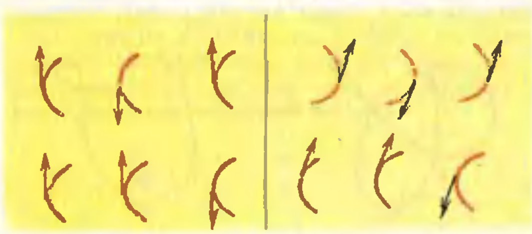


Рис. 6.



$p=p_1+p_2+p_3$; $q=q_1+q_2+q_3$

Рис. 7.

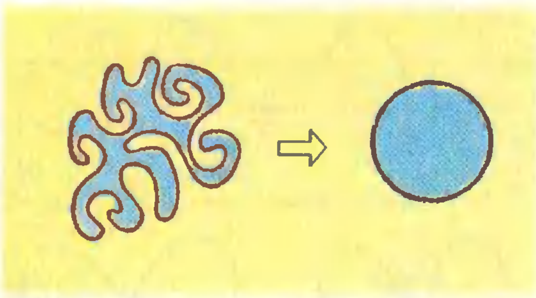


Рис. 8.

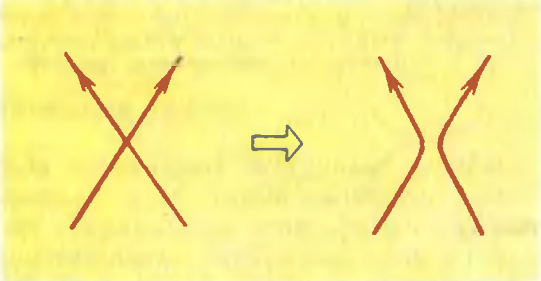


Рис. 9.

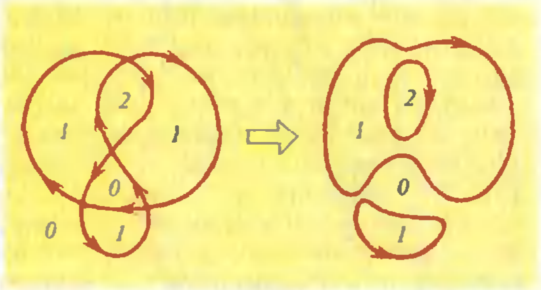


Рис. 10.

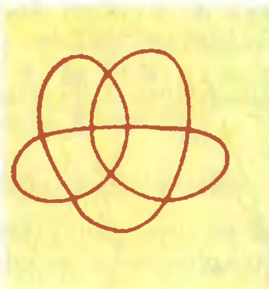


Рис. 11.

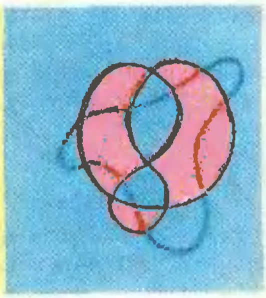


Рис. 12.

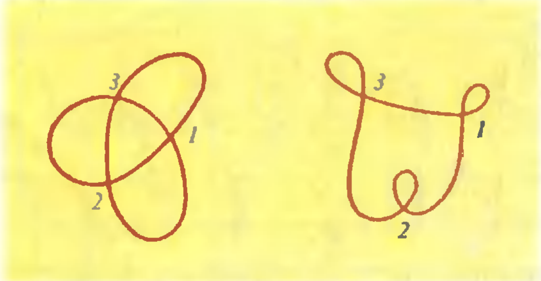


Рис. 13.

казана датским математиком Ф. Фабрициусом-Бьерре в 1962 году.

Упражнения

3. Придумайте кривую, у которой $p=3$, $q=0$, $r=2$, $n=2$.

4. Дана точка, не лежащая на плоской кривой. Докажите, что число касательных, проведенных через эту точку, четно. Подсказка: проведем прямую через точку и будем ее поворачивать.

5. Даны две плоские кривые. Пусть p — число их общих внутренних двойных касательных, а q — число внешних двойных касательных, n — число точек пересечения кривых. Докажите, что $p=q+n$.

Число вращения кривой

Обойдем плоскую кривую и вернемся в начальную точку. Во время обхода касательный вектор как-то поворачивался и в конце вернулся в исходное положение. Значит, касательный вектор совершил целое число поворотов. Это (неотрицательное целое) число называется *числом вращения кривой*. Например, число вращения окружности равно 1, а число вращения восьмерки равно нулю.

Упражнение 6. Чему равны числа вращения кривых из упражнения 1?

При непрерывном изменении кривой число вращения не меняется. Действительно, при малом шевелении число вращения может измениться только мало. Но число вращения целое, а целое число может измениться лишь скачком. Поэтому при непрерывном изменении кривой число вращения вообще не изменяется. Это свойство можно использовать при вычислении числа вращения. Например, кривую на рисунке 8 можно «раздуть» в окружность, поэтому ее число вращения такое же, как у окружности, т. е. 1.

Доказанная теорема доставляет необходимый признак того, что одну кривую можно деформировать в другую: их числа вращения должны быть равны. И здесь снова встает вопрос о достаточности: верно ли, что если числа вращения равны, то кривые можно продеформировать друг в друга? Ответ на этот вопрос положительный, но мы не будем этого доказывать.*)

*) См., например, статью *С. В. Матвеева* «Расправление контуров на плоскости» («Квант», 1983, № 4).

Упражнения

7. Чему равно число вращения кривой без двойных точек?

8. Докажите, что если число вращения кривой равно нулю, то у кривой есть точки перегиба.

Существует другой способ, который почти автоматически приводит к вычислению числа вращения кривой. Выберем на кривой направление и сделаем в каждой двойной точке «перестройку», как изображено на рисунке 9. Кривая распадается на несколько непересекающихся кривых (рис. 10). Подсчитаем число таких кривых, ориентированных по и против часовой стрелке, и найдем модуль разности этих двух чисел. Это и есть число вращения исходной кривой. Например, для кривой на рисунке 10 число вращения равно $2-1=1$.

Мы определили число вращения и показали, как его вычислять. А как оно связано с числом двойных точек кривой? Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что каждая перестройка увеличивает число кривых на рисунке не больше чем на 1. Поэтому если у исходной кривой было n двойных точек, то в конце получится не более $n+1$ кривых. Итак,

число вращения не превосходит числа ее двойных точек плюс 1.

Это неравенство получено знаменитым американским математиком X. Уитни.

Упражнение 9. Докажите следующую теорему:

число вращения кривой имеет ту же четность, что и число ее двойных точек плюс 1

Степень кривой относительно точки

Плоская кривая делит плоскость на части. Возьмем точку O в одной из этих частей. Пусть точка A обходит кривую; будем следить за лучом OA. Когда точка A вернется в исходное положение, луч OA совершит целое число оборотов. Это (неотрицательное целое) число называется *степенью кривой относительно точки O*. Если точка O перемещается по плоскости, не попадая на кривую, то степень не меняется. Если же точка «перепрыгивает» через кривую, степень может измениться.

Применение перестроек из предыдущего пункта позволяет вычислять и степень кривой относительно точки. Делается это так же, как при вычислении числа вращения; — после перестроек кривая распадается на несколько непересекающихся кривых, а затем подсчитывается число этих кривых, содержащих внутри точку O и ориентированных по и против часовой стрелки. Модуль разности этих двух чисел и есть степень кривой. На рисунке 10 в каждой из частей, на которые кривая делит плоскость, написана степень относительно любой из точек, лежащих в этой части.

Упражнение 10. Расставьте степени кривой относительно точек на рисунке 11.

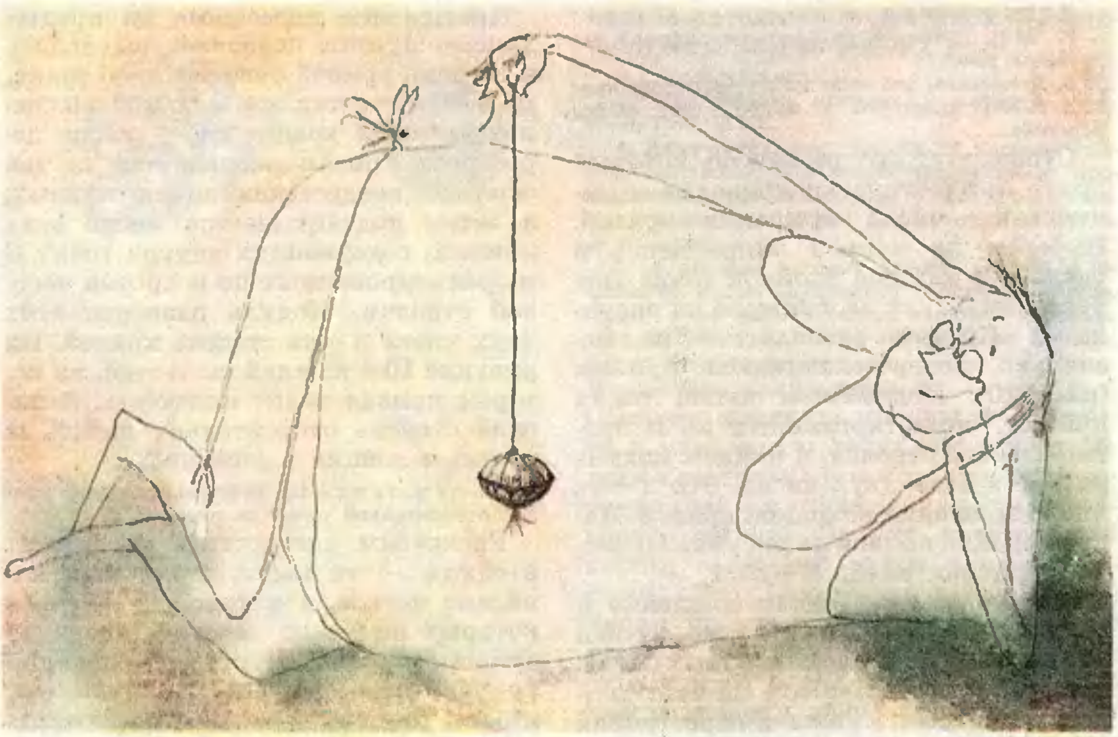
Раскрасим плоскость в два цвета: в синий — те части, в которых написано четное, а в красный — те, в которых написано нечетное значение степени (рис. 12). Пусть есть еще одна кривая, пересекающая данную. Эта вторая кривая тоже окажется окрашенной в два цвета, причем синие и красные участки на ней чередуются. Значит, тех и других равное число. Точки пересечения кривых разделяют разноцветные участки, поэтому их столько, сколько тех и других вместе. Следовательно,

число точек пересечения двух замкнутых плоских кривых четно.

Эта последняя теорема возвращает нас к началу статьи, где мы доказали четность числа точек перегиба. Кривая нашего рассказа замкнулась и нам пора ставить точку.

Упражнение 11. Занумеруем произвольным образом точки самопересечения кривой. Будем обходить кривую, записывая номера двойных точек в том порядке, в котором они встречаются при обходе. Например, кривым на рисунке 13 отвечают последовательности 123123 и 112233. В каждой подобной последовательности каждое число встречается дважды. Докажите, что *между любыми двумя одинаковыми числами стоит четное число членов последовательности* (теорема Гаусса).

Подсказка: сделайте одну перестройку и воспользуйтесь последней теоремой.



Практикум абитуриента

Гармонические колебания

Кандидат физико-математических наук
Е. Е. ГОРОДЕЦКИЙ

Механизм возникновения свободных гармонических колебаний в любой механической системе всегда один и тот же. Это появление возвращающей силы при отклонении системы от положения устойчивого равновесия. В этой статье речь пойдет только о гармонических колебаниях. Хотя природа возвращающей силы в каждом конкретном случае может быть своя, уравнения движения, описывающие колебания, одинаковы.

Большинство задач на колебания выглядят примерно так. Дана некоторая система, которая может совершать колебания около своего положения равновесия. Известен способ возбуждения колебаний, т. е. заданы начальные условия. Вопрос первый: найти частоту (или период) колебаний. Вопрос второй: найти их амплитуду и начальную фазу и записать зависимость колеблющейся величины от времени. Вопрос третий: найти, через какое время (или какую долю периода) колеблющаяся величина принимает заданное значение. Ответы на эти вопросы проиллюстрируем на хорошо известном примере пружинного маятника. Заодно сформулируем общий алгоритм решения задач такого типа.

З а д а ч а 1. ***Дана система, изображенная на рисунке 1. Масса тела m, жесткость пружины k. Тело сместили из положения равновесия вправо на величину x_0 и толкнули влево, сообщив ему скорость v_0. Найдите частоту, амплитуду и начальную фазу колебаний. Трения нет.***

Запишем для тела второй закон Ньютона в проекциях на ось X:

$$F_{упр}=ma,$$

где $F_{упр}$ — сила упругости, действующая на тело со стороны пружины, a — ускорение тела. Если отклонение тела от положения равновесия в произвольный момент времени t равно x, то по закону Гука $F_{упр}=-kx$. Ускорение тела по определению равно второй производной координаты по времени: $a=x''$. Теперь уравнение движения тела можно записать в виде

$$mx''+kx=0.$$

Это уравнение, впрочем как и уравнение любых других колебаний, представляет собой сумму двух членов: один из них включает неизвестную функцию времени (в данном случае x), а другой — вторую производную этой функции по времени (x'').

Как известно, решением такого уравнения является гармоническая функция

$$x=x_m\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Здесь x_m — амплитуда, ω — частота (точнее — циклическая частота), φ_0 — начальная фаза колебаний. Непосредственной подстановкой решения в уравнение легко найти частоту колебаний:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Заметим (и это очень важно), что полученный ответ является частным случаем общего правила. Оно состоит в следующем. Если уравнение колебаний получено, то квадрат частоты колебаний равен отношению коэффициента при неизвестной функции (в данном случае $x(t)$) к коэффициенту при второй производной этой функции по времени ($x''(t)$).

А как же амплитуда x_m и начальная фаза φ_0? Для определения этих величин давайте снова вернемся к условию: тело сместили на x_0 вправо и толкнули со скоростью v_0 влево. Здесь

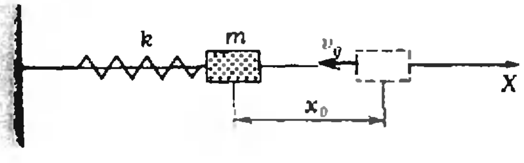


Рис. 1.

речь идет о том, как именно возбудили колебания, т. е. о начальных условиях. В различных задачах они могут быть заданы по-разному, но смысл их всегда один и тот же: для начального момента времени заданы конкретные значения каких-то величин. В нашем случае заданы значения смещения тела и его скорости (точнее — проекции скорости на ось X):

$$\text{при } t=0 \quad x=x_0 \text{ и } v=-v_0.$$

Так как зависимость смещения от времени нам уже известна:

$$x=x_m\sin(\omega t+\varphi_0),$$

нетрудно найти и скорость:

$$v=x'=x_m\omega\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Положим в этих выражениях $t=0$:

$$x_0=x_m\sin\varphi_0,$$

$$-\frac{v_0}{\omega}=x_m\cos\varphi_0.$$

Это два уравнения с двумя неизвестными: x_m и φ_0. Поделив одно уравнение на другое, получим

$$\operatorname{tg}\varphi_0=-\frac{x_0\omega}{v_0},$$

или

$$\varphi_0=\operatorname{arctg}\left(-\frac{x_0}{v_0}\sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

Возведя оба уравнения в квадрат и сложив, найдем

$$x_m^2=x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2},$$

или

$$x_m=\sqrt{x_0^2+\frac{mv_0^2}{k}}.$$

Задача 2. *Телу на пружине (см. задачу 1), находящемуся в положении равновесия, сообщили направленную вправо скорость v_0. Найдите: а) через какую часть периода потенциальная энергия системы впервые станет в три раза больше кинетической, б) через какое время скорость тела впервые обратится в ноль.*

а) При колебаниях тела на пружине система обладает запасом потенциальной энергии упругой деформации

$$W_p=\frac{kx^2}{2}=\frac{kx_m^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)}{2}$$

и кинетической энергии

$$W_k=\frac{mv^2}{2}=\frac{mx_m^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)}{2}.$$

В искомый момент t

$$\frac{W_p}{W_k}=3.$$

Подставляя сюда выражения для потенциальной и кинетической энергии и учитывая, что $\omega^2=4\pi^2/T^2=k/m$, получим

$$\operatorname{tg}^2(\omega t+\varphi_0)=3,$$

или

$$\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0=\frac{\pi}{3}+\pi n.$$

Из начальных условий:

при $t=0$ $x=0$ и $v=v_0$

получаем

$$x_m\sin\varphi_0=0 \text{ и } x_m\omega\cos\varphi_0=v_0.$$

Решая эти уравнения, находим

$$\varphi_0=0 \text{ и } x_m=\frac{v_0}{\omega}.$$

Отношение энергий впервые станет равным 3 при $n=0$, откуда окончательно имеем

$$t=\frac{T}{6}.$$

б) Мы уже использовали общее выражение для скорости

$$v=x_m\omega\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Подставляя сюда найденные значения амплитуды и начальной фазы, получим, что в нашем случае скорость меняется по закону

$$v=v_0\cos\omega t.$$

В искомый момент времени $v=0$, т. е.

$$\omega t=\frac{\pi}{2},$$

или

$$t=\frac{\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Задача 3 (на первый взгляд совсем не относящаяся к делу). *Санки массой m и длиной l скользят со скоростью v_0 по гладкому льду. Неожиданно лед кончается, и санки въезжают на асфальт, где коэффициент трения равен μ. Известно, что санки заехали на асфальт лишь частично. Найдите время до полной остановки санок.*

Запишем второй закон Ньютона для санок в проекциях на ось X (рис. 2):

$$F_{тр}=ma.$$

В тот момент, когда на асфальте оказалась часть санок длиной x, действующая на санки сила трения равна

$$F_{тр}=-\mu\frac{m}{l}xg$$

(здесь mx/l — масса той части санок, которая находится на асфальте). Подставляя выражение для $F_{тр}$ в предыдущее равенство и учитывая, что $a=x''$, получим

$$mx''+\mu\frac{m}{l}gx=0.$$

Это точно такое же уравнение, как и для тела на пружине (роль жесткости пружины k играет величина $\mu mg/l$). В момент, когда санки начали переходить со льда на асфальт,

$$x=0 \text{ и } v=v_0.$$

Таким образом, наша задача свелась к последнему вопросу предыдущей задачи, где требовалось найти время обращения скорости в ноль. Там было получено, что искомое время

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Подставляя вместо k величину $\mu mg/l$, получим

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

Задача 4. *На поверхности воды плавает прямоугольный брусок массой m и площадью поперечного сечения S (рис. 3). Ему толчком сообщают скорость v_0, направленную вниз. Найдите частоту, начальную фазу и амплитуду колебаний.*

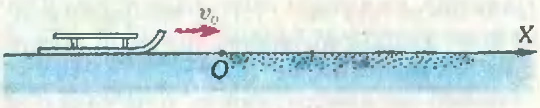


Рис. 2.

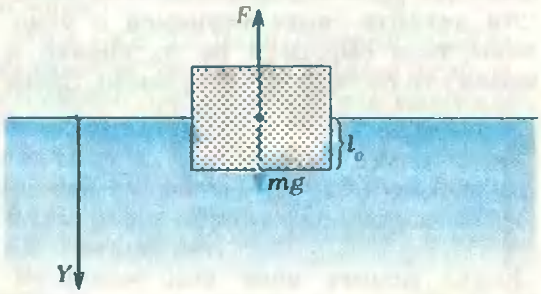


Рис. 3.

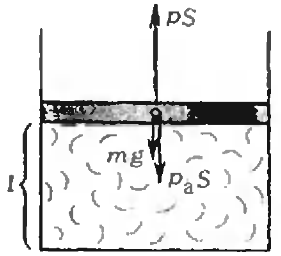


Рис. 4.

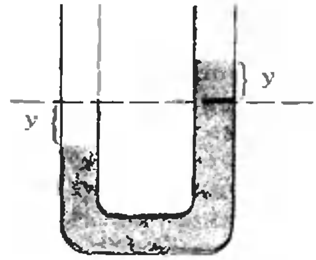


Рис. 5.

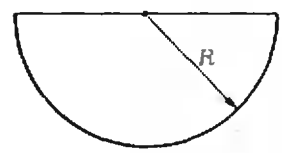


Рис. 6.

В положении равновесия глубина погружения тела в воду l_0 определяется равенством силы тяжести mg и выталкивающей силы $F=\rho_в S l_0 g$ (здесь $\rho_в$ — плотность воды):

$$mg=\rho_в S l_0 g.$$

При колебаниях, например в момент, когда глубина погружения тела равна l_0+y, второй закон Ньютона записывается в виде:

$$mg-\rho_в S(l_0+y)g=ma,$$

где $a=y''$. Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$-\rho_в S g y=my'',$$

или

$$y''+\frac{\rho_в S g}{m}y=0.$$

Это — уже знакомое вам уравнение колебаний. Его решение имеет вид:

$$y=y_m\sin(\omega t+\varphi_0),\ \text{где}\ \omega=\sqrt{\frac{\rho_в S g}{m}}.$$

Для определения амплитуды и начальной фазы обратимся к начальным условиям:

$$\text{при}\ t=0\ y=0\ \text{и}\ v=v_0.$$

Так как $v=y'=y_m\omega\cos(\omega t+\varphi_0)$, получаем

$$y_m\sin\varphi_0=0\ \text{и}\ y_m\omega\cos\varphi_0=v_0.$$

Отсюда

$$\varphi_0=0\ \text{и}\ y_m=\frac{v_0}{\omega}=v_0\sqrt{\frac{m}{\rho_в S g}}.$$

З а д а ч а 5. *Цилиндрический сосуд с газом закрыт поршнем массой m и площадью поперечного сечения S (рис. 4). В равновесии поршень находится на высоте l от дна сосуда. В какой-то момент поршень смещают из положения равновесия вниз на величину h_0 и отпускают. Определите частоту, начальную фазу и амплитуду колебаний. Атмосферное давление $p_а$ известно. Считать, что в процессе колебаний температура газа остается постоянной.*

Равновесие поршня описывается уравнением

$$mg+p_а S-pS=0,$$

где p — давление газа. При отклонении от равновесия, например при смещении поршня вниз на малую величину y, давление газа увеличилось и стало равным $p'=p+\Delta p$. Уравнение движения поршня можно записать в виде:

$$mg+p_а S-(p+\Delta p)S=ma.$$

Из двух уравнений получим

$$-\Delta p\,S=ma.$$

Теперь рассмотрим газ. Согласно закону Бойля — Мариотта,

$$pSl=(p+\Delta p)(l-y)S,$$

или, если пренебречь малой величиной $\Delta p y$,

$$\Delta p l-py=0,$$

откуда

$$\Delta p=\frac{py}{l}=\frac{(mg+p_а S)}{lS}y.$$

Учитывая, что $a=y''$, получаем

$$my''+\frac{mg+p_а S}{l}y=0,$$

т. е. уравнение колебаний. Из этого уравнения, зная начальные условия, находим частоту, начальную фазу и амплитуду колебаний:

$$\omega=\sqrt{\frac{mg+p_а S}{ml}},\ \varphi_0=\frac{\pi}{2},\ y_m=h_0.$$

З а д а ч а 6. *Найдите частоту колебаний жидкости, налитой в U-образную трубку (рис. 5). Масса жидкости m, плотность ρ, площадь сечения трубки S.*

Здесь проще всего воспользоваться энергетическими соображениями. Дело в том, что частоту колебаний можно определить не только из уравнения колебаний, но и из выражения для полной энергии системы.*) Поясним это на примере пружинного маятника.

При колебаниях тела на пружине (см. задачу 2) полная энергия системы складывается из потенциальной энергии пружины и кинетической энергии тела:

$$W=\frac{kx^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=\frac{kx^2}{2}+\frac{m(x')^2}{2}.$$

Частота колебаний такого маятника, как уже говорилось, равна $\omega=\sqrt{k/m}$, т. е. определяется отношением постоянных коэффициентов в выражениях для потенциальной и кинетической энергий.

Оказывается, это утверждение справедливо для любой колеблющейся системы: если полная энергия системы записана в виде суммы двух слагаемых, одно из которых пропорционально квадрату величины, характеризующей отклонение системы от положения равновесия (коэффициент пропорциональности k), а другое — квадрату производной этой величины по времени (коэффициент пропорциональности m), то частота колебаний системы

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Теперь вернемся к нашей задаче. Предположим, что в некоторый момент жидкость отклонилась от положения равновесия на величину y (см. рис. 5) и ее скорость равна v. Найдем полную энергию системы в этот момент.

Заметим, что изображенную на рисунке 5 конфигурацию можно получить, перенеся столбик жидкости высотой y и массой $\Delta m=\rho Sy$ из левого колена трубки в правое. При этом столбик жидкости приобретет потенциальную энергию $W_p=\Delta mgy=\rho Sgy^2$. Кинетическая энергия всей массы жидкости равна $W_k=mv^2/2=m(y')^2/2$. Таким образом, полная энергия системы равна

$$W=\rho Sgy^2+\frac{m(y')^2}{2},$$

откуда получаем, что частота колебаний

$$\omega=\sqrt{\frac{2\rho Sg}{m}}.$$

Упражнения

1. Запишите уравнение движения и выражение для полной энергии математического маятника и найдите частоту его колебаний.

2. Проволока, изогнутая в виде полукольца радиусом R, подвешена, как показано на рисунке 6. Найдите частоту колебаний такой системы.

*) Подробнее об этом можно прочитать в заметке «Гармонические колебания и равновесие», опубликованной в девятом номере «Кванта» за прошлый год. (*Примеч. ред.*)

Информация

25 лет Новосибирской ФМШ

В марте 1962 года во многих уголках Сибири и других районах страны появились плакаты с задачами заочного тура первой Всесибирской олимпиады. На решение задач давался определенный срок, к концу которого письма с решениями следовало отправить по адресу олимпиадного комитета в Новосибирск, в Академгородок. В июле несколько сотен школьников получили приглашения в областные центры на второй тур Всесибирской олимпиады, который проводили молодые научные сотрудники из Академгородка. И совершенно неожиданно для многих школьников, хорошо выступивших на олимпиаде, сразу после этого их собрали и повезли в Академгородок, где с 10 июля начала работать первая Летняя физико-математическая и химическая школа (ЛШ). Первая ЛШ была самой продолжительной — более 45 дней, и, может быть, это одна из причин, по которой 250 ее учащихся считают свою Летнюю школу самой насыщенной впечатлениями, событиями, различными встречами. В последние несколько дней всех участников ЛШ стала волновать идея образования физико-математической школы-интерната. Прошел третий заключительный тур Всесибирской олимпиады, со всеми школьниками ЛШ были проведены собеседования — и около сотни школьников, среди которых были и авторы статьи, получили приглашения в не существующую еще физматшколу.

Идея создания физико-математических школ (ФМШ) была выдвинута ведущими учеными страны, а в Сибири — академиками М. А. Лаврентьевым, С. Л. Соболевым, С. А. Христиановичем, членами - корреспондентами АН СССР А. А. Ляпуновым, Д. В. Ширковым и другими. При создании ФМШ преследовалось несколько целей:

во-первых, дать возможность школьникам развить свои способности, используя большой потенциал крупного научного центра; особенно это важно для школьников из сел, отдаленных поселков и небольших городов;

во-вторых, уже со школьной скамьи дать осязаемое представление о специальности исследователя и тем самым повысить эффективность подготовки научных кадров;

в-третьих, провести педагогический эксперимент по отработке новых методов обучения, которые в большей степени отвечают требованиям современности.

В 1963 году постановлением Совета Министров СССР было признано целесообразным организовать в порядке опыта при некоторых университетах специализированные школы-интернаты физико-математического профиля. Первая такая школа открылась в январе 1963 года в Новосибирске, а осенью еще три — в Москве, Ленинграде и Киеве.

Несмотря на то, что у Новосибирской ФМШ много общего с другими специализированными школами, она имеет и существенные отличия. Прежде всего, это — огромная территория, на которой проходит отбор учащихся: Сибирь, Дальний Восток, Средняя Азия и Казахстан. В школе ежегодно учатся представители свыше двадцати национальностей — можно встретить учеников и из небольшого якутского поселка, и из узбекского кишлака, и из чукотского оленеводческого совхоза. В школе нет конкурсных экзаменов, набор ведется через систему Всесоюзных олимпиад по математике, физике, химии, причем для проведения набора при Президиуме СО АН СССР организован специальный Комитет. Он формирует бригады из научных сотрудников и аспирантов, которые выезжают на областные, краевые и республиканские олимпиады Сибирской зоны, где оказывают методическую помощь местным органам народного образования в проведении олимпиад, а также проводят собеседования с участниками. Протоколы собеседования привозят в Академгородок, и ученые, члены олимпиадного комитета, из нескольких тысяч школьников отбирают шестьсот и приглашают их в Летнюю школу. Приглашаются не обязательно победители или призеры, а те, кто на собеседовании проявил умение рассуждать, мыслить, делать выводы. При прочих равных показателях предпочтение отдается ученикам из сел и небольших поселков, детям из семей рабочих и колхозников.

Как уже говорилось, Летняя физико-математическая и химическая шко-

Академик М. А. Лаврентьев.

Член-корреспондент АН СССР А. А. Ляпунов среди фымышат (60-е годы).

ла проводится с 1962 года. Участники Летней школы в течение первых трех недель августа слушают лекции ведущих ученых Сибири, занимаются с преподавателями — молодыми научными сотрудниками, посещают научно-исследовательские институты, отдыхают. В конце работы ЛШ приемная комиссия зачисляет 350—380 учащихся в школу-интернат на два различных потока: двухгодичный (в девятый класс) и одногодичный (в десятый класс).

В физико-математической школе постановка учебного процесса по профилирующим предметам (математика, физика, химия) приближена к вузовской. Каждый курс состоит из лекций, семинаров, лабораторных работ. Учебный год делится на два семестра, в конце каждого из которых сдаются письменные и устные экзамены по математике и физике, а в конце десятого класса проводятся выпускные экзамены за курс средней школы. Класс в физматшколе состоит не более чем из тридцати человек, а на семинарских занятиях по математике, физике, химии и на уроках по биологии, иностранному языку и физкультуре класс делится на две группы. На лекциях два-три параллельных класса объединяются в потоки. В четверг проводится не более двух обязательных уроков, а оставшееся время предоставляется для работы в институтах, в лабораториях, на спецкурсах и для самостоятельной работы учащихся. Кроме того, многие спецкурсы проводятся во второй половине дня и в другие дни.

Методическое руководство школой осуществляет Ученый совет, который по давней традиции возглавляет ректор НГУ, в настоящее время — член-корреспондент АН СССР Ю. Л. Ершов. Совет утверждает состав лекторов, ассистентов и воспитателей, программы по профилирующим предметам, рассматривает изменения в учебном плане, обсуждает вопросы воспитательной работы в школе.

Программы по профилирующим дисциплинам значительно углублены по сравнению с программами общеобразовательной школы и направлены на выработку научного мировоззрения, самостоятельности мышления, навыков исследовательской работы. Программы по непрофилирующим дисциплинам полностью соответствуют программам общеобразовательной школы. Однако углубленное преподавание точных наук отнюдь не влечет за собой ослабление внимания или, хуже того, пренебрежения к гуманитарным предметам. Мнение школьников и сравнение оценок позволяют утверждать, что требования учителей — «гуманитариев» выше, чем в большинстве школ, из которых прибыли ученики.

Со дня основания Новосибирская ФМШ была задумана как первая ступень в системе подготовки научных кадров. Тесная связь с университетом, научными подразделениями Академгородка — неотъемлемая и важнейшая особенность школы. Многие лекторы и преподаватели по математике, физике, химии и биологии являются научными сотрудниками или преподавателями университета. Это порождает определенные трудности — надо согласовывать основную работу с преподаванием в интернате. Однако, на наш взгляд непосредственный контакт ребят с активно работающим ученым компенсирует эти недостатки с лихвой.

Часто можно слышать, что у учеников ФМШ возникает чувство элитарности. В принципе такая опасность существует, потому что многие наши ученики в своих родных школах были лидерами, «звездами», а некоторые ходили чуть ли не в «гениях». Но переход в школу, где существенно выше требования, где все вокруг — «звезды», сам по себе способствует переоценке собственных притязаний. И здесь важнейшая задача педагогического коллектива — создать в школе атмосферу, в которой бы воспитывались уважение к успехам своих друзей, гражданская ответственность, коммунистическая нравственность, активная жизненная позиция. Комплексная программа воспитательной работы включает в себя много аспектов. Постоянно совершенствуется школьное самоуправление, система Ленинского зачета, регулярно организуется работа в экспериментальном хозяйстве СО АН СССР и многое другое. Большую роль в школе играют традиции. Это особенно важно, потому что ежегодно контингент учащихся обновляется на две трети. Традицией стала работа комсомольского отряда в ЛШ, в который входят выпускники школы, поступившие на первый курс университета. По словам самих ребят, одним из самых запоминающихся событий является торжественный обряд посвящения в «фымышата». Перед отъездом на зимние каникулы каждый комсомолец получает путевку с заданием рассказать в своих родных местах об Академгородке, ФМШ, университете, провести небольшую олимпиаду.

В специализированной школе всегда есть опасность замкнуться на любимый предмет, и организаторы школы ясно видели эту опасность с самого начала. Уже в первые годы А. А. Ляпунов и другие ученые проводили с ребятами беседы о литературе, музыке, изобразительном искусстве. Внимание к эстетическому воспитанию не ослабевает и в наши дни. В школе активно работают литературный, музыкальный и киноклуб, ряд гуманитар-

В терминальном классе ФМШ.

Группа американских школьников в ФМШ.

ных факультативов. Уже много лет в школе читается курс «основы искусств». Предмет этот особый — по нему не ставят оценок. И хотя только первые несколько занятий — обязательные, а потом они становятся факультативными, число учащихся при этом меняется незначительно.

Очень большое внимание уделяется физкультуре и спорту. Силами самих ребят и преподавателей физкультуры оборудованы залы гимнастики, настольного тенниса, атлетической гимнастики. Команды ФМШ по футболу, баскетболу, волейболу, легкой атлетике почти всегда занимают первые места среди школ района, а выступая в соревнованиях университета на правах факультета, оказываются не на последнем месте, а иногда бывают и на первом. За хорошую постановку спортивно-массовой работы ФМШ была награждена вымпелом ЦК ВЛКСМ.

В этом году ФМШ исполнилось двадцать пять лет. За прошедшие годы школу окончило 6116 человек. Приблизительно две трети из них поступили и большинство успешно окончили НГУ. Остальные поступают в другие вузы страны — МФТИ, МГУ, ЛГУ. Мы не сумели, к сожалению, проследить судьбу каждого выпускника. Но сегодня, по неполным данным, десятки из них стали докторами, сотни — кандидатами наук. Бывших фымышат можно встретить в самых разных местах: в Москве — доктора наук С. Манакова, в Новосибирске — доктора наук Е. Кузнецова, в Омске — декана математического факультета ОмГУ Г. Кукина, в Красноярске — заведующего кафедрой Н. Носкова, в Барнауле — заведующего кафедрой Ю. Мальцева и так далее. Уже в студенческие годы научная работа многих выпускников ФМШ получает высокую оценку, включая медали АН СССР. Среди выпускников школы — ряд лауреатов премии Ленинского комсомола: физики О. Сушков и В. Фламбаум, химики А. Галль и И. Горшкова. Лауреатом Государственной премии СССР стал М. Перельройзен.

Разумеется, не следует думать, что поступление или даже окончание специализированной школы автоматически ведет в науку. Некоторая часть выпускников поступает в технические вузы, кто-то — в медицинские институты, а единицы становятся гуманитариями. Более того, и поступив в университет, нужно приложить немало усилий, чтобы через несколько лет после окончания стать высококлассным специалистом.

Важнейшим итогом двадцатипятилетней деятельности специализированных школ-интернатов является утверждение самой идеи их существования. Сегодня специализированные школы есть во многих городах страны, еще больше специализированных классов. Широкое распространение получили факультативные курсы в общеобразовательных школах. Все это безусловно способствовало повышению уровня преподавания точных наук во многих школах страны.

Опытом работы Новосибирской ФМШ постоянно интересуются зарубежные специалисты. Трудно сказать, из каких уголков земного шара не было у нас гостей. Посетившая Академгородок еще в 1973 году делегация ЮНЕСКО в Книге почетных гостей школы оставила запись: «Школа производит впечатление, так как в ней основное внимание уделяется эксперименту установления связи между школой, высшим образованием, исследованием. Этот опыт достоин изучения органами образования других стран». Активно изучается опыт ФМШ в Японии, тесные контакты у нас с педагогами и учеными Венгрии и Болгарии. С 1987 года организован регулярный обмен школьниками с одной из самых престижных школ США — Академией Филлипс (г. Андовер, штат Массачусетс). Об этом обмене рассказано в «Кванте» № 9 за 1987 год и № 6 за 1988 год.

Педагогический эксперимент продолжается уже двадцать пять лет. Но и сегодня нельзя считать, что все формы, методы работы определены до конца. ФМШ не стоит на месте. Периодически изменяются программы, пересматривается учебный план, совершенствуются методы воспитательной работы в условиях интерната, где живут свыше пятисот юношей и девушек. Школой накоплен большой опыт, который в ближайшем будущем предстоит рассмотреть, переосмыслить с тем, чтобы будущие поколения могли его использовать в интересах нашей страны.

С декабря 1981 года Новосибирская ФМШ с гордостью носит имя ее основателя, выдающегося советского ученого академика М. А. Лаврентьева. В одном из последних своих выступлений Михаил Алексеевич сказал:

«Сейчас уже стало очевидным, что подготовка научных кадров должна начинаться со средней школы... Выход я вижу в раннем определении склонностей ребят с помощью олимпиад, собеседований с учеными и дальнейшем специализированном обучении. Это позволит резко ускорить массовую подготовку научных и инженерных кадров. Опыт работы физико-математической школы в Новосибирске, физико-математических школ и классов в Москве, Ленинграде и Киеве показывает, что такой метод позволяет гораздо лучше развить способности молодежи».

Выпускники первого набора в Новосибирскую ФМШ, заместитель директора Новосибирской ФМШ *В. Харитонов* и учитель математики *Ю. Михеев*

Конференция в Ставрополе

В один из первых майских дней этого года внимание контролеров московского аэропорта Внуково привлек юноша, пытавшийся пронести на борт самолета подозрительный агрегат. К счастью, рейс задерживать не пришлось: агрегат оказался самодельным прибором ночного видения, а юноша — учеником ФМШ № 18 при МГУ. Вместе с командой своей школы он отправлялся в Ставрополь, где на базе Педагогического института и городского Дворца пионеров проводилась физико-математическая конференция школьников.

На конференцию прибыли ребята и из других ведущих физико-математических школ страны: интернатов при Ленинградском и Новосибирском университетах, московской школы № 542 при МИФИ. И пусть их было не так уж и много, но как говорится, «туристов» в командах не было — все привезли доклады, а кое-кто даже по два. Рассказать обо всех трех десятках докладов здесь невозможно. Упомянем те, что вызвали, пожалуй, наибольший интерес слушателей — студентов пединститута и учащихся школ города. Это «Исследование распада струи и столкновения капель воды» ленинградцев Вадима Мороза и Сергея Белоусова, которые продемонстрировали в действии свою экспериментальную установку, выступление Антона Кузьмина из школы при МИФИ, предложившего оригинальный способ повышения качества цветного телевизионного изображения, доклад самых младших участников — семиклассников из Ставрополя Николая Онежко и Виталия Самонова «Кольца Марангони» об эффектах, возникающих при падении капель на тонкий слой жидкости. В дисплейном классе хозяева конференции показали в работе ряд обучающих и игровых программ.

Конечно, программа встречи не ограничивалась докладами. Запомнился гостям и вечер дружбы, и трехсторонний физматбой. А на прощание участники конференции получили чудесный подарок — интереснейшую поездку по дорогам Ставрополья и Карачаево-Черкессии в предгорья Кавказа, туда, где построены радиотелескоп РАТАН-600 и оптический телескоп БТА.

Организаторы ставропольской конференции, среди которых первым нужно назвать подлинного энтузиаста этого дела, заведующего кафедрой теоретической физики пединститута В. С. Игропуло, считают ее главными задачами возрождение интереса к физике и математике, поиск и воспитание юных талантов, пропаганду современных форм работы со школьниками (кстати, в этом им помогает краевое телевидение). По примеру завоевавшего высокую репутацию праздника юных математиков в Батуми они планируют сделать конференцию традиционной, расширить состав участников. Пожелаем им удачи и будем надеяться, что эстафету Батуми и Ставрополя подхватят другие города нашей страны.

В. Н. Дубровский

XXII Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. В. РЕЗНИЧЕНКО

Заключительный этап XXII Всесоюзной математической олимпиады школьников состоялся в апреле 1988 года в Донецке. В нем участвовали 29 команд: 14 команд союзных республик, по одной команде от каждой из четырех зон РСФСР, команды Москвы, Ленинграда, Донецка и 8 команд специализированных школ-интернатов при ведущих университетах страны — всего 172 школьника (51 восьмиклассник, 56 девятиклассников и 65 десятиклассников).

Как обычно, участникам олимпиады было предложено на двух турах по четыре задачи, на решение которых отводилось по пять часов.

Каждая задача олимпиады оценивалась в баллах с тем расчетом, чтобы суммарное число баллов в туре по каждому классу было равно тридцати (см. таблицу 1).

Таблица 1.

Класс \ Задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
8	6	7	7	10	6	7	7	10
9	6	6	8	10	6	6	8	10
10	5	8	7	10	6	7	9	8

Распределение баллов жюри олимпиады проводило уже после того, как работы участников были проверены, и поэтому оно отражает реальную трудность задач. Впрочем, эти данные лишь незначительно отличаются от априорных оценок жюри. О том, как участники справились с задачами олимпиады, можно узнать из таблицы 2, в которой приведено число решивших каждую из задач.

Таблица 2.

Класс \ Задачи	1	2	3	4	5	6	7	8
8	35	29	24	4	24	23	21	9
9	23	26	14	5	24	27	3	0
10	59	27	28	3	48	34	14	35

Пожалуй, стоит отметить, что, видимо, задачи 7 и 8 в девятом классе были чрезмерно трудными, а задачи 1 и 5 в десятом классе — слишком простыми для участников олимпиады. В восьмом и десятом классах первая премия присуждалась за решение 7—8 задач, а в девятом классе — за решение 6—7 задач. Третья премия присуждалась школьникам восьмого класса, набравшим по итогам обоих туров не менее 29 баллов, девятого класса — не менее 21 балла, десятого класса — не менее 34 баллов. Таблица 3 показывает количество призеров по каждому классу.

Таблица 3.

Премия \ Класс	8	9	10
I	6	3	2
II	10	6	9
III	10	7	16
Грамота	6	4	5

Организационный комитет по проведению заключительного этапа Всесоюзной математической олимпиады возглавлял заведующий Донецким областным отделом народного образования И. М. Сахно. Почетным председателем жюри был академик АН УССР, профессор МГУ Б. В. Гнеденко, председателем жюри — ректор Донецкого государственного университета, профессор В. П. Шевченко, а его заместителями — декан математического факультета ДГУ доцент П. М. Величко и доцент МГУ В. В. Вавилов. Олимпиада проводилась на базе санаторной школы-интерната № 8 и средней школы № 96 Донецка. С большой теплотой и заботой относились хозяева олимпиады к участникам олимпиады и членам жюри. Всем им большое спасибо.

В свободное время школьники знакомились с историей Донецка, его достопримечательностями, побывали в Донецком театре оперы и балета, цирке. Интересно прошла встреча с членами редколлегии журнала «Квант».

Состоялся и традиционный математический бой между командами школьников и жюри. В этом увлекательном, по-существу театрализованном, представлении участвовали сразу три команды — две команды школьников и команда жюри. Задачи в этот раз были довольно простыми (примерно уровня раздела «Квант» для младших школьников»), зато их было довольно много (около 30) и отвечать надо было быстро. Победила команда школьников, которую возглавлял Виталий Вологодский (Омск, с. ш. № 99), а команда жюри заняла второе место.

Вот несколько задач этого состязания.

1. Постройте восьмизвенную замкнутую ломаную, пересекающую каждое свое звено ровно один раз.

2. Что больше: площадь круга, вписанного в квадрат площадью 1, или площадь квадрата, вписанного в круг площадью 1?

3. Одному мальчику на покупку мороженого не хватило 12 коп., а другому — 1 коп. Когда они сложили свои деньги, то оказалось, что денег на покупку одного мороженого все равно не хватает. Сколько стоит мороженое?

4. Какой из городов находится восточнее: Владивосток или Хабаровск? Какой из городов находится севернее: Москва или Петропавловск-Камчатский?

5. Продолжите последовательность:

111, 213, 141, 516, 171,...

6. Часы отбивают 6 ударов за 30 секунд. Сколько времени они отбивают 12 ударов?

7. Постройте 7 точек так, чтобы среди любых трех точек нашлись две, расстояние между которыми равно 1 см.

Теперь приведем задачи заключительного тура.

Задачи

Первый день

8 класс

1. Книга состоит из 30 рассказов объемом 1, 2, ..., 30 страниц. Рассказы печатаются с первой страницы, каждый рассказ начинается с новой страницы. Какое наибольшее количество рассказов может начинаться с нечетной страницы?

Н. Нецветаев

2. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Рассмотрим два новых выпуклых четырехугольника F_1 и F_2, у каждого из которых две противоположные вершины — середины диагоналей $ABCD$, а две другие вершины — середины противоположных сторон $ABCD$. Известно, что площади четырехугольников F_1 и F_2 равны. Докажите, что одна из диагоналей четырехугольника $ABCD$ делит его площадь пополам.

А. Анджанс

3. Докажите, что уравнение

$$x-y+z=1$$

имеет бесконечно много решений среди таких попарно различных натуральных чисел x, y, z, что произведение любых двух из них делится на третье.

Д. Митькин

4.*) В первой строке написаны 19 натуральных чисел, не превосходящих 88, а во второй строке — 88 натуральных чисел, не превосходящих 19. Назовем отрезком одно или несколько подряд написанных чисел одной строки. Докажите, что из данных строк можно выбрать по отрезку так, что суммы чисел, входящих в эти отрезки, будут равны.

А. Анджанс

9 класс

1. Решите в целых числах уравнение

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}$$

Б. Кукушкин

2. Докажите, что для углов α, β, γ произвольного треугольника справедливо неравенство

$$2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right)\leqslant\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\sin\alpha+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\beta+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\sin\gamma.$$

Д. Терешин

3. В школе нужно организовать дежурство так, чтобы одновременно дежурил ученик 9 «А» и ученик 9 «Б» классов и чтобы каждый день заменялся ровно один из дежурных. Ученики каждого класса выходят на дежурство по очереди в соответствии со списками в классных журналах, причем после последнего по списку снова дежурит первый. Можно ли составить график дежурства пар учеников так, чтобы в течение некоторого промежутка времени каждый ученик из 9 «А» отдежурил в паре с каждым учеником из 9 «Б» ровно один раз и чтобы затем дежурила первая пара, если в 9 «А» 29 учеников, а в 9 «Б» — 32?

К. Черанс

*) Задачи, обозначенные звездочкой, вошли в «Задачник «Кванта».

4. На стороне BC тупоугольного треугольника ABC с тупым углом при вершине C выбрана точка D, отличная от B и C. Через точку M, лежащую внутри отрезка BC и отличную от D, проводится прямая AM, которая пересекает окружность S, описанную около треугольника ABC, в точке N. Через точки M, D и N проводится окружность, пересекающая окружность S, кроме точки N, еще в точке P. Найдите положение точки M, при котором длина отрезка MP будет наименьшей.

И. Шарыгин

10 класс

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG. Докажите, что $EF=DG$.

С. Струков

2. Найдите наименьшее значение выражения

$$S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$$

при условии, что x, y, z — положительные числа, сумма квадратов которых равна единице.

Л. Курляндчик

3. Ломаная, все вершины которой лежат на поверхности куба с ребром 2 и каждое звено которой равно 3, соединяет две наиболее удаленные вершины куба. Какое наименьшее число звеньев может иметь такая ломаная?

С. Дужин

4.* Пусть n, m, k — натуральные числа, $m\geqslant n$. Докажите, что если

$$1+2+\ldots+n=mk,$$

то числа 1, 2, ..., n можно разбить на k групп так, чтобы суммы чисел в каждой группе были равны m.

А. Анджанс

Второй день

8 класс

5. Докажите, что у всех трапеций с боковой стороной a, вписанных в данную окружность, отношение высоты к средней линии одно и то же.

Б. Чиник

6.* На доске написаны числа 1 и 2. Разрешается дописывать новые числа следующим образом: если на доске имеются числа a и b, то можно дописать число $ab+a+b$. Можно ли этим способом получить

а) число 13121;

б) число 12131?

А. Берзиньш

7. Пусть рациональные числа x, y удовлетворяют уравнению

$$x^5+y^5=2x^2y^2.$$

Докажите, что $1-xy$ — квадрат рационального числа.

Б. Кукушкин

8.* В стране 21 город. Авиационное сообщение между ними осуществляют несколько авиакомпаний, каждая из которых попарно связывает беспосадочными авиалиниями пять городов (при этом между двумя городами могут летать самолеты нескольких компаний). Каждые два города связаны по крайней мере одной беспосадочной авиалинией. При каком наименьшем количестве авиакомпаний это возможно?

Д. Фомин

9 класс

5. Докажите, что в последовательности с общим членом $a_n=1+2^2+3^3+\ldots+n^n$ бесконечно много составных нечетных чисел.

Д. Митькин

6.* Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C, пересекают касательную, проведенную в точке B, соответственно в точках M и N. В треугольнике ABC проведена высота BP (точка P лежит на стороне AC). Докажите, что прямая BP является биссектрисой угла MPN.

Б. Чиник

7. Неотрицательные числа a и d и положительные числа b и c удовлетворяют условию $b+c\geqslant a+d$. Какое наименьшее значение при этом может принимать выражение $\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$?

Д. Тамаркин, Д. Терешин, А. Черных

8. В квадратной таблице размером $n\times n$ записаны действительные числа, причем сумма чисел в любой строке и в любом столбце равна нулю. С таблицей можно проводить следующую операцию: какую-нибудь строку поэлементно прибавить к одному из столбцов и вычесть из другого столбца (i-й элемент строки прибавляется (вычитается) к i-му элементу столбца; элементы в строках нумеруются слева направо, в столбцах — сверху вниз). Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно получить таблицу, составленную из одних нулей.

Б. Меркулов

10 класс

5. Незамкнутая ломаная с конечным числом звеньев вписана в параболу так,

Почетный председатель жюри, академик АН УССР Б. В. Гнеденко беседует с участниками олимпиады.

что начало ее совпадает с вершиной параболы и любые два звена, образующие вершину ломаной, составляют равные углы с касательной к параболе в этой вершине. Докажите, что такая ломаная расположена по одну сторону от оси параболы.

А. Борисов

6. При каком наименьшем значении n система

$$\begin{cases} \sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_n=0, \\ \sin x_1+2\sin x_2+\ldots+n\sin x_n=100 \end{cases}$$

имеет решение?

А. Азамов

7.* Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_0=0,\ a_n=P(a_{n-1}),\ n=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $P(x)$ — многочлен с натуральными коэффициентами. Докажите, что для любых натуральных чисел m и k с наибольшим общим делителем d наибольший общий делитель чисел a_m и a_k равен a_d.

В. Лев

8.* Докажите, что для любого тетраэдра имеет место неравенство

$$r<\frac{ab}{2(a+b)},$$

где a, b — длины двух скрещивающихся ребер, а r — радиус вписанного шара.

И. Шарыгин

XXII Всесоюзная олимпиада по физике

Доктор физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
М. М. ЦЫПИН

Заключительный этап Всесоюзной физической олимпиады школьников проходил в этом году с 13 по 20 апреля в столице Грузии — Тбилиси. На итоговые соревнования приехали 46 восьмиклассников, 51 девятиклассник и 60 десятиклассников — победители предыдущих этапов олимпиады этого года и призеры прошлогодней Всесоюзной олимпиады.

Теоретический тур проводился 15 апреля в физико-математической школе-интернате им. Комарова (где, кстати, и жили участники олимпиады). Традиционно восьмиклассникам было предложено 4 задачи (на решение которых отводилось 4 часа), а девяти- и десятиклассникам — по 5 задач (на 5 часов). Приведем их условия (некоторые задачи опубликованы в «Задачнике «Кванта» в 9 и 10 номерах журнала).

Задачи теоретического тура

8 класс

1. Разгоняясь с максимально возможным ускорением на прямом участке шоссе, гоночный автомобиль увеличивает скорость от 10,0 до 10,5 м/с за 0,1 с. За какое время он смог бы сделать то же самое на кольцевом участке шоссе с радиусом 30 м? При каком радиусе кольца он вообще не смог бы увеличить скорость выше 10 м/с? Плоскость шоссе горизонтальна.

2. Плот оттолкнули от берега реки, сообщив ему скорость 0,3 м/с в направлении, перпендикулярном берегу. На рисунке 1 изображен начальный участок траектории движения плота. На каком расстоянии от берега будет в конце концов плыть плот? Скорость течения реки 0,3 м/с. Сила сопротивления движению плота пропорциональна его скорости относительно воды.

3. В калориметре медленно остывает расплав исследуемого вещества. Удельная теплота плавления этого вещества (она была определена в предыдущих опытах) 200 кДж/кг. По графику зависимости температуры вещества от времени (рис. 2) определите удельные теплоемкости вещества в твердом и жидком состояниях. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

4. В схеме, приведенной на рисунке 3, амперметры показывают токи 0,2 А и 0,3 А. После того как два резистора в схеме поменяли местами, показания амперметров не изменились. Какой ток течет через батарею? Считать напряжение батареи неизменным. Сопротивления амперметров пренебрежимо малы.

9 класс

1. Исследуя вновь открытую планету, имеющую форму шара радиусом 6400 км и покрытую по всей поверхности океаном глубиной 10 км (из обычной воды), ученые установили, что ускорение свободного падения с большой степенью точности (не хуже 10^{-5}) остается неизменным при погружении в океан на различные глубины. Определите по этим данным ускорение свободного падения на этой планете. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг².

2. Горизонтальная площадка с лежащей на ней монетой совершает круговое поступательное движение в горизонтальной плоскости так, что все точки площадки описывают окружности радиусом R с угловой скоростью ω. Коэффициент трения между площадкой и монетой равен μ. Каким будет установившееся движение монеты? Какой след «вычерчивает» она на площадке?

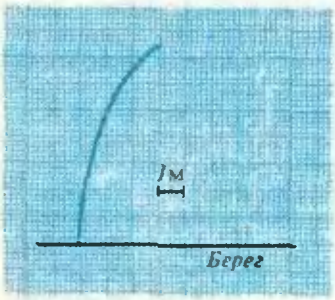


Рис. 1.

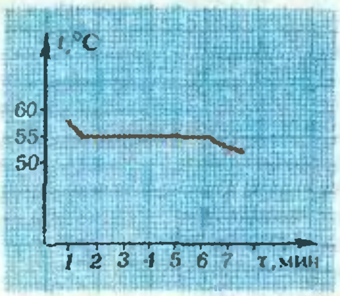


Рис. 2.

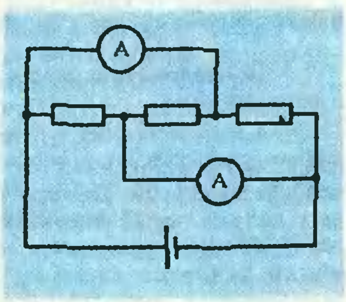


Рис. 3.

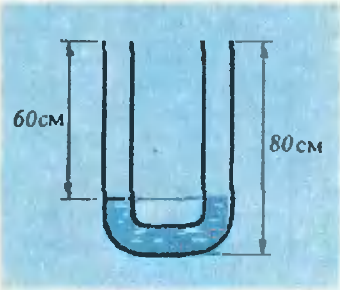


Рис. 4.

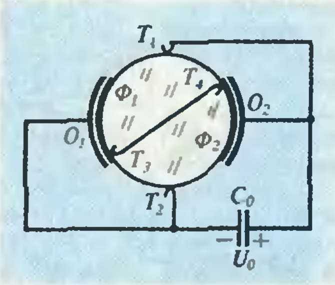


Рис. 5.

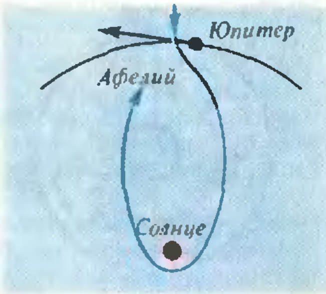


Рис. 6.

3. U-образная стеклянная трубка частично заполнена водой (рис. 4). Верхние концы трубки закрывают и нагревают правое колено трубки до температуры $+100\ ^\circ C$, а левое — до $+99{,}5\ ^\circ C$. Определите установившуюся разность уровней воды в коленах трубки. Справка: на высоте 23 этажа (70 м над землей) температура кипения воды на 0,25 градуса ниже, чем на земле. Тепловым расширением стекла при расчетах пренебречь. На уровне первого этажа условия нормальные.

4. Модель электрофорной машины (рис. 5) состоит из непроводящего цилиндра, на который наклеены плоскости фольги Φ_1 и Φ_2, наружных обкладок O_1 и O_2, неподвижных токосъемников T_1 и T_2 снаружи и неподвижной перемычки внутри с токосъемниками T_3 и T_4. В исходном положении полоски фольги находятся напротив наружных обкладок и образуют с ними конденсаторы емкостью C_1 каждый. К внешним обкладкам подключен конденсатор емкостью C_0, заряженный предварительно до напряжения U_0. Каким станет это напряжение после N оборотов цилиндра по часовой стрелке? Емкость между обкладками и полосками фольги в раздвинутом состоянии пренебрежимо мала.

5. На некотором расстоянии от катушки *1*, по которой течет ток I_1, укреплена замкнутая накоротко катушка *2*, сделанная из материала, находящегося в сверхпроводящем состоянии при комнатной температуре. В данный момент через катушку *2* ток не течет. При увеличении тока через катушку *1* в два раза в катушке *2* появился ток $I_2=0{,}2I_1$. Каким станет этот ток, если ток катушки *1* увеличить еще в два раза? Опыт проводится при комнатной температуре.

10 класс

1. Образование кометного семейства Юпитера описывается следующей схемой. Комета падает с большого удаления без начальной скорости на Солнце и пролетает недалеко от Юпитера (рис. 6). После прекращения заметного влияния поля тяготения Юпитера комета вновь движется в поле Солнца, причем ее скорость оказывается направленной противоположно скорости Юпитера, а афелий новой орбиты кометы располагается вблизи орбиты Юпитера, т. е. на расстоянии 5,2 а. е. от Солнца. На каком расстоянии от Солнца будет располагаться перигелий орбиты такой кометы?

2. Заряженная частица попадает в среду, где на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости. До полной остановки частица проходит путь 10 см. Если в среде имеется некоторое магнитное поле, перпендикулярное скорости частицы, она при той же начальной скорости останавливается на расстоянии 6 см от точки входа в среду. На каком расстоянии от точки входа в среду остановилась бы частица, если бы индукция магнитного поля была в два раза меньше?

3. В замкнутой полости объемом 3 см^3 находится капелька воды в равновесии с паром. При каком радиусе капельки это равновесие будет устойчивым? Стенки полости считать несмачиваемыми, других капелек и центров конденсации нет. Температура постоянна (293 К). График зависимости избыточного давления насыщенных паров над выпуклой поверхностью воды от радиуса кривизны этой поверхности $\Delta p=p_{нас}(r)-p_{нас}(\infty)$ приведен на рисунке 7. Насыщенный пар считать идеальным газом.

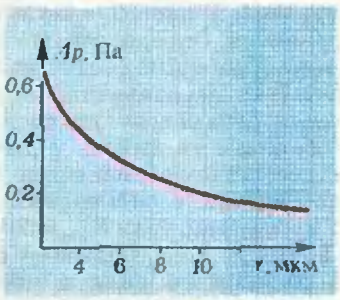


Рис. 7.

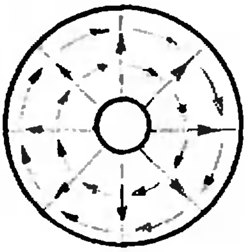


Рис. 8.

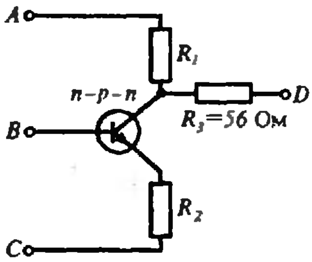


Рис. 9.

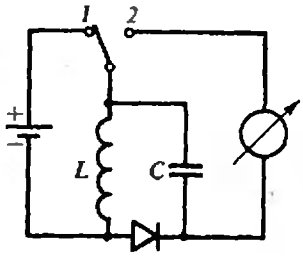


Рис. 10.

4. Плоский воздушный конденсатор, площадь пластин которого S, а расстояние между пластинами d_0, подключен к батарее с напряжением U_0 последовательно с резистором сопротивлением R. Одна из пластин конденсатора начинает колебаться, оставаясь параллельной другой пластине, так что расстояние между пластинами изменяется со временем по закону $d=d_0\,(1+m\sin\omega t)$, где $m\ll 1$. Определите среднюю мощность P, выделяющуюся на резисторе при низкой частоте колебаний $\left(\omega\ll\frac{1}{RC}\right)$ и при высокой частоте $\left(\omega\gg\frac{1}{RC}\right)$. Постройте по этим результатам качественный график зависимости P от ω.

5. В настоящее время в связи с открытием явления высокотемпературной сверхпроводимости изучается вопрос о создании линии передачи постоянного тока без потерь энергии на джоулево тепло. Предполагается использовать для передачи постоянного тока коаксиальный кабель, состоящий из внутренней цилиндрической жилы и наружной цилиндрической оболочки, выполненных из сверхпроводника. Электрическое и магнитное поля в такой системе изображены на рисунке 8. Известно, что индукция магнитного поля у поверхности сверхпроводника не может превышать некоторого значения B_{max}, иначе разрушается сверхпроводимость, а напряженность электрического поля не должна превышать E_{max}, иначе происходит электрический пробой изолирующей прослойки кабеля. Определите, во сколько раз изменится максимальная мощность постоянного тока, передаваемая по такому кабелю, если диаметры внутренней и внешней оболочек увеличить в два раза. Какую максимальную мощность можно передать по кабелю с диаметрами оболочек $D=8$ см и $d=3$ см, если $E_{max}=20$ кВ/см и $B_{max}=5\cdot 10^{-2}$ Тл? Примечание: индукция магнитного поля в пространстве между цилиндрическими проводниками совпадает с полем прямого проводника с током I и равна $B=\mu_0 I/(2\pi r)$, где $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ Н/А^2 — магнитная постоянная.

В тот же день жюри приступило к проверке работ теоретического тура, которая продолжалась до позднего вечера. В составе жюри были представители Тбилиси и Москвы, Долгопрудного и Ленинграда, Еревана и Новосибирска. Каждая работа проверялась минимум два раза, причем особое внимание уделялось тому, чтобы за одинаковые решения (и одинаковые ошибки) оценки были одинаковыми.

Самыми трудными задачами по результатам проверки оказались: в 8 классе — задача 2, в 9 классе — задачи 2 и 3, в 10 классе — 1 и 2. Отвечая на вопрос о том, какие задачи им больше всего понравились, школьники назвали как раз эти задачи (за исключением задачи 3 в 9 классе) плюс задачу 4 в 9 классе и задачу 3 в 10 классе.

16 апреля участники олимпиады приняли участие во Всесоюзном коммунистическом субботнике, а в воскресенье 17 апреля они работали над выполнением заданий экспериментального тура (2 задачи на 4 часа), подготовленных учеными Института физики Академии наук ГрССР.

Расскажем немного об этих задачах.

В первой задаче для 8 класса требовалось определить плотность пластмассы, из которой изготовлено лекало. На столе стоял сосуд с водой, но слишком маленький, чтобы целиком погрузить в него лекало. Надо было догадаться измерить уменьшение веса лекала при его частичном погружении в воду, используя для этого самодельные рычажные весы из подвешенной на нити линейки.

Любопытно, что налипшие на лекало пузырьки воздуха могли бы изменить ответ в полтора-два раза. На это следовало обратить внимание и избавиться от пузырьков.

Во второй задаче надо было найти массу деревянного кубика, используя гирьку (массой 50 г) с полированной поверхностью и деревянную линейку. Для контрольного измерения предлагалось использовать линейку в качестве рычага.

Задачу можно было решить, измеряя сначала угол наклона линейки, при котором кубик начинает скользить по ней, а затем уменьшение этого угла, если позади кубика положить на бок гирьку.

В первой задаче для 9 класса нужно было определить заряд электрона, проводя электролиз раствора NaCl. Следовало собрать выделяющийся на катоде водород и измерить его объем. Наличие амперметра и часов позволяло определить прошедший через раствор заряд.

Для некоторых участников оказалось неожиданным отсутствие выделения хлора на аноде (дело в том, что хлор сразу же вступает в реакцию с медным анодом).

Во второй задаче требовалось: а) определить соответствие выводов черного ящика схеме, изображенной на рисунке 9; б) найти величины R_1 и R_2; в) подав на клеммы AC напряжение 9 В (от батарейки), построить график зависимости выходного напряжения $u_{вых}=u_{DC}$ от входного $u_{вх}=u_{BC}$ и определить коэффициент усиления $k=\Delta u_{вых}/\Delta u_{вх}$. В распоряжении участников были две батарейки, ампервольтметр и реостат.

В первой задаче для 10 класса надо было найти массу двух одинаковых грузов на концах легкого стержня, который может вращаться вокруг горизонтальной оси. В набор оборудования входили: кусок пластилина (массой 20 г), линейка и математический маятник. Надо было измерить период колебаний стержня без пластилина и с прилепленным к одному из грузов пластилином. В качестве часов следовало использовать математический маятник.

Вторая задача заключалась в определении емкости конденсатора и индуктивности катушки (с известным сопротивлением $R=7{,}5$ Ом). В распоряжении участников были: стрелочный гальванометр (микроамперметр), конденсаторы (2 мкФ и 4 мкФ), диод, переключатель и две батарейки.

Емкость неизвестного конденсатора можно было определить, сравнивая отбросы гальванометра при разрядке конденсаторов неизвестной и известной емкостей. Для определения индуктивности катушки следовало собрать схему, приведенную на рисунке 10. Вначале переключатель ставят в положение *1*, заряд на конденсаторе при этом равен нулю. Затем при размыкании ключа энергия $LI^2/2$, запасенная в катушке, переходит в энергию заряженного конденсатора $Q^2/(2C)$ (диод препятствует обратному разряду конденсатора через катушку). Переводя переключатель в положение *2*, по отбросу гальванометра определяется заряд конденсатора.

Пожалуй, наиболее сложным при решении этой задачи было догадаться использовать диод для того, чтобы не допустить разряда конденсатора.

Участники олимпиады высказали пожелания, чтобы апелляции проводились не только после теоретического тура, но и после экспериментального. Они хотели бы также, чтобы общение с жюри было более живым и непосредственным.

Участники олимпиады не только решали задачи. Гостеприимные хозяева познакомили школьников с замечательными памятниками древней культуры Грузии, ребята побывали в лабораториях Института физики Академии наук ГрССР. В программе олимпиады были и вечера отдыха, и встречи с победителями олимпиад прошлых лет.

19 апреля состоялась церемония закрытия олимпиады и награждение победителей. Список призеров олимпиады, получивших дипломы I, II и III степени, приведен ниже. Кроме того, было много специальных призов: за лучшее решение задач теоретического тура, экспериментального тура, самому молодому участнику олимпиады и т. д. Еще один специальный приз — подшивку журнала «Квант» за 1987 год с автографами членов редколлегии — получил «самый удаленный» участник олимпиады Ю. Филиппов из Южно-Сахалинска.

Надеемся, что XXII Всесоюзная олимпиада школьников по физике станет для ее участников первым шагом на пути в большую науку.

I Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

А. Н. ВИЛЕНКИН

Заключительный этап I Всесоюзной олимпиады школьников по информатике был проведен в Свердловске с 13 по 20 апреля 1988 года. 80 школьников из всех союзных республик собрались вместе, чтобы помериться силами.

Торжественное открытие олимпиады состоялось 14 апреля во Дворце культуры «Урал» — современном, просторном и удобном. Участников олимпиады приветствовали заведующий отделом науки и учебных заведений обкома КПСС А. Г. Жданович, академик Г. С. Поспелов, представитель центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников Т. А. Сарычева и другие. Жюри олимпиады возглавлял академик Н. Н. Красовский, оргкомитет — зам. председателя Свердловского облисполкома А. А. Леонов. В тот же день школьники начали знакомиться с вычислительной техникой, на которой им предстояло работать. Свердловчане предоставили для проведения олимпиады более 80-ти компьютеров «Роботрон—1715». Практически все приехавшие школьники раньше на компьютерах этого типа не работали, что поставило участников олимпиады в равное положение. С другой стороны, эти компьютеры близки к тем, с которыми участники олимпиады общались раньше, и за два дня (14 и 16 апреля) техника была вполне освоена.

Олимпиада проходила в два тура. Теоретический тур состоялся 15 апреля. Были предложены 4 задачи, на решение которых отводилось три с половиной часа. При этом алгоритмы разрешалось писать на любом достаточно распространенном языке программирования (алгоритмический язык курса информатики, Паскаль, Рапира, Бейсик, Алгол, Фортран, Си и др.). Задача на составление алгоритма считалась решенной, если представленный алгоритм был правильным. Дополнительные баллы присуждались за простоту и оригинальность алгоритма, обоснование его правильности, наличие комментариев и за эффективность (малое время работы, используемый объем памяти). При проверке задачи оценка (0—5 баллов) умножалась на коэффициент, характеризующий трудность задачи (он зависел от числа участников, решивших эту задачу); этот коэффициент приведен в скобках после номера задачи.

Задачи теоретического тура

Т1 (*7). Дан алгоритм:

```
алг задача1 (цел n)
арг n
нач цел k, i
    k:=n
    i:=2
    пока k≠1
    нц
      если остаток (k, i)=0
           то печать (i)
              k:=k/i
           иначе i:=i+1
      все
    кц
кон
```

Команда печать (i) печатает число i; остаток (k, i) — остаток от деления k на i. Какие числа будут напечатаны при исполнении алгоритма задача1 (n) для целого $n \geq 1$? Обоснуйте ответ.

Т2 (*6). Прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат, будем задавать координатами его левого нижнего и правого верхнего углов. (Всего, таким образом, для задания прямоугольника понадобятся 4 числа). Заданы два прямоугольника Пр1 и Пр2. Определите площадь той части прямоугольника Пр1, которая не входит в Пр2. (Алгоритм должен быть пригоден для всех вариантов расположения Пр1 и Пр2.)

Т3 (*9). В стране имеется n городов, пронумерованных от 1 до n; между некоторыми из них налажено самолетное сообщение. Таблица есть_рейс [1:n, 1:n], содержит информацию о рейсах: есть_рейс [i, j] равно 1, если $i \neq j$ и из города i есть рейс в город j, и равно 0 в противном случае. (Рейсы проходят без промежуточных посадок; наличие рейса из i в j не гарантирует наличия рейса из j в i). Известно, что:

1) из любого города можно попасть в любой другой (возможно, с пересадками);

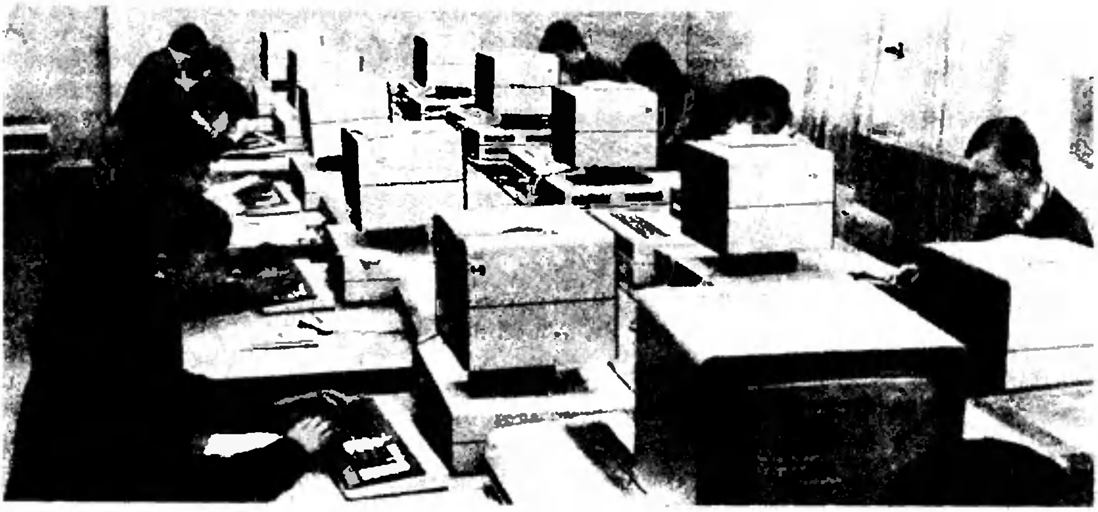
2) в любой город прибывает столько же рейсов, сколько вылетает (в i-м столбце таблицы есть_рейс столько же единиц, сколько в i-й строке).

Доказать, что можно вылететь из некоторого города и, воспользовавшись ровно

Теоретический тур.

Машинный тур.

Победители олимпиады и призеры премии «Кванта» (слева направо): С. Ковалев, В. Калашников, В. Завалишин, Г. Нишанов, И. Овчаренко, С. Калиниченко, М. Плукас, А. Ващиляо.



по одному разу каждым рейсом, вернуться в этот же город. Составить алгоритм нахождения такого маршрута.

(Существует алгоритм, требующий выполнения не более Cn^4 команд для некоторой константы C, не зависящей от n.)

Т4 (*10). 3 000 000 человек с различными фамилиями выстроились в затылок друг другу. Каждый, кроме первого, написал на листке бумаги фамилию стоящего перед ним и свою фамилию. Все 2 999 999 листков бумаги перемешали и информацию (упорядоченные пары фамилий) записали на магнитную ленту. Как возможно быстрее узнать фамилию 1 234 567-го человека? В вашем распоряжении ЭВМ с небольшой оперативной памятью (64 Кб) и ограниченным количеством магнитофонов ($\leqslant 32$).

Машинный тур был проведен 17 апреля на базе учебно-производственного комбината № 9 и Уральского государственного университета, программы можно было писать на Бейсике или Паскале. В задачах машинного тура оценивался достигнутый результат; использование компьютера было лишь средством. Дополнительными баллами оценивалось изложение метода решения, его обоснование, комментарии к программе и т. п.

Задачи машинного тура

М1 (* 3). Последовательность целых положительных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ строится так: если a_n четно, то $a_{n+1}=a_n/2$; если a_n нечетно, то $a_{n+1}=3a_n+1$.

Найти минимальное n, для которого $a_n=1$, если

а) $a_0=27$;

б) $a_0=2\,000\,007$.

М2 (*13). Для каждого целого положительного числа n будем рассматривать всевозможные его представления в виде суммы одного или нескольких целых положительных слагаемых. Составить таблицу, в которой для каждого n указано число таких представлений (без учета порядка: представления $3=2+1$ и $3=1+2$ считаются одинаковыми). Например, для $n=4$ таких представлений 5 (4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$). (Чем дальше будет заполнена таблица, тем выше будет оцениваться работа.)

Разбор задач был проведен 18 апреля утром, вечером того же дня рассматривались апелляции. 19 апреля во Дворце культуры «Урал» состоялся компьютерный фестиваль. Участники олимпиады, конечно же, привезли с собой много гибких дисков и кассет с программами, и им хотелось показать свои программы, посмотреть чужие и, возможно, обменяться программными продуктами. Именно это и происходило на фестивале. Организаторы предоставили школьникам и руководителям команд самые разные компьютеры, и все имеющиеся программы были продемонстрированы в действии. Устроители олимпиады показали также свои программные разработки для средней школы.

Культурная программа включала посещение свердловских музеев и театров, цирка, поездку на границу «Европа-Азия».

Награждение победителей и закрытие олимпиады состоялось вечером 19 апреля. 5 школьников получили дипломы I степени (они набрали 125—156 баллов), 9 школьников — дипломы II степени (87—116 баллов) и 15 школьников — дипломы III степени (59—78 баллов). 10 участников олимпиады были награждены специальными призами научных и общественных организаций, в том числе призами журнала «Квант» за высокую математическую культуру работы — Завалишин В. (Москва, с. ш. № 542), Калиниченко С. (Киев, с. ш. № 145), Ковалев С. (Горький, с. ш. № 40) и Овчаренко И. (Хабаровск, с. ш. № 32).

Что же еще остается сказать об этой, первой Всесоюзной олимпиаде школьников по информатике? Надо, прежде всего, поздравить и поблагодарить всех, кто хоть в какой-то мере помог преодолеть все трудности, организовать и провести олимпиаду. Надо поздравить победителей, они самыми первыми стали первыми. И, наконец, можно надеяться, что теперь в самых разных уголках нашей страны активизируется олимпиадная работа и в области информатики. Вершина олимпиадной лестницы обозначена.

Призеры XXII Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Абрамов Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Зарубин Н. (Харьков, с. ш. № 27),
Малинникова Е. (Ленинград, с. ш. № 239),
Пихурко О. (Нестерово, с. ш. № 1),
Симановскис Р. (Рига, ФМШ № 1),
Смотровс Ю. (Рига, ФМШ № 1);

по 9 классам —
Виро А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Иванов С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Рагулин В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —
Кокорев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Хохлов Ю. (Ленинград, с. ш. № 30).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Аржанцев И. (Киев, с. ш. № 145),
Барановский В. (Омск, с. ш. № 115),
Бачурин А. (Стерлитамак, с. ш. № 20),
Белянкина З. (Жодино, с. ш. № 7),
Городецкий А. (Саратов, с. ш. № 13),
Иванов А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Мавлютов Р. (Набережные Челны, с. ш. № 12),
Насыров А. (Обнинск, с. ш. № 11),
Разин М. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Острик В. (Жданов, с. ш. № 64);

по 9 классам —
Андрианов Н. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Иванов Д. (Москва, с. ш. № 57),
Процан В. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Рогинская М. (Ленинград, с. ш. № 239),
Скопенков А. (Саратов, с. ш. № 13),
Шумакович А. (Ленинград, с. ш. № 239);

по 10 классам —
Анисов С. (Харьков, с. ш. № 142),
Баран А. (Минск, с. ш. № 6),
Варшавский Я. (Харьков, с. ш. № 27),
Глуцюк А. (Харьков, с. ш. № 27),
Румынин Д. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Туляков Д. (Жданов, с. ш. № 7),
Хованов М. (Москва, с. ш. 57),
Филонов Н. (Ленинград, с. ш. № 30),
Эфендиев Я. (Баку, с. ш. № 82).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Богданов А. (Старый Оскол, с. ш. № 3),
Волченко К. (Донецк, с. ш. № 17),
Давыденко Д. (Назаров, с. ш. № 8),
Озолс М. (Алукене, с. ш. № 1),
Потапов С. (Тамбов, с. ш. № 29),
Федотов А. (Красноярск, с. ш. № 41),
Цейтлин Л. (Харьков, с. ш. № 1),
Чижиков В. (Винница, с. ш. № 6),
Щук С. (Ржев, с. ш. № 10),
Эгамов А. (Гороховец, с. ш. № 1);

по 9 классам —
Демченко В. (Казань, с. ш. № 131),
Дубров Б. (Минск, с. ш. № 107),
Гольднер В. (Кишинев, с. ш. № 40),
Зелик С. (Краматорск, с. ш. № 35),
Ли Р. (Бердск, с. ш. № 2),
Скворцов М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Фельдман Д. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82);

по 10 классам —
Акопян В. (Ереван, ФМШ при ЕрГУ),
Баррис Я. (Рига, ФМШ № 1),
Берлов С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Бессолицын М. (Киров, с. ш. № 30),
Валиуллин М. (Казань, с. ш. № 94),
Вологодский В. (Омск, с. ш. № 91),
Вольфович Л. (Бельцы, с. ш. № 16),
Гороховский А. (Киев, с. ш. № 79),
Гравит В. (Северодвинск, с. ш. № 27),
Гринер Р. (Львов, с. ш. № 62),
Жарков И. (Свердловск, с. ш. № 130),
Коврижкин О. (Майкоп, с. ш. № 7),
Назарян А. (Тбилиси, с. ш. № 42),
Прокофьев Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Слитинский В. (Киев, с. ш. № 206),
Христенко О. (Караганда, с. ш. № 63).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Грязных Д. (Челябинск, с. ш. № 127),
Заркевич Н. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Чокин Д. (Алма-Ата, РФМШ),
Шеянов В. (Ленинград, с. ш. № 202),
Энтин М. (Тула, с. ш. № 36);

по 9 классам —
Атамелишвили Т. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Зуев К. (Вологда, с. ш. № 8),
Сажин Д. (Свердловск, с. ш. № 43),
Терещенко В. (Киев, ФМШ № 145);

по 10 классам —
Мазуренко А. (Минск, с. ш. № 10),
Малкин А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Мороз В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Пушкин А. (Москва, с. ш. № 57).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Вердиньш Р. (Рига, с. ш. № 1),
Высоцкий В. (Киев, с. ш. № 77),
Датуашвили Г. (Тбилиси, с. ш. № 25),
Заимкин О. (Бухара, с. ш. № 1),
Ким В. (Ангрен, с. ш. № 33),
Кузьменко В. (Ивано-Франковск, с. ш. № 1),
Разилов Р. (Новосибирск, с. ш. № 88),
Савченков А. (Таганрог, с. ш. № 5),
Усинский А. (Ровенская обл., Вербская школа-интернат);

по 9 классам —
Бережной Д. (Запорожье, с. ш. № 28),
Бескровный В. (Донецк, с. ш. № 20),
Коршков А. (Мозырь, с. ш. № 8),
Кузьма Н. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1),
Макеев В. (Алма-Ата, РФМШ),
Мороз М. (Киев, ФМШ № 145),
Нестеров И. (Челябинск, с. ш. № 31),
Уваров Ю. (Ленинград, с. ш. № 239),
Фалькович Д. (Москва, с. ш. № 57);

по 10 классам —
Жуков В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Какушадзе З. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Новоселов А. (Минск, с. ш. № 137),
Ольховец В. (Киев, ФМШ № 145),
Пенанен К. (Одесса, с. ш. № 63).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Гайцгори Д. (Душанбе, с. ш. № 1),
Карпачев А. (Алма-Ата, с. ш. № 8),
Молодов П. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Новоселов Р. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Орловский А. (Киев, ФМШ № 145),
Смирнов Р. (Уссурийск, с. ш. № 4),
Сунгатуллов Р. (п. Руэм МарАССР, с. ш. № 1),
Тевзадзе А. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Трощенко А. (п. Чернышевский ЯкАССР, с. ш. № 3),
Хейнла А. (Таллин, с. ш. № 9);

по 9 классам —
Жданов А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Львовский А. (Москва, с. ш. № 57),
Малков Р. (Саратов, с. ш. № 13),
Медоян А. (п. Апаран АрмССР, с. ш. № 2),
Меликян А. (Ереван, ФМШ при ЕрГУ),
Старокольцев Е. (Днепропетровск, с. ш. № 37),
Толкунов Е. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Турлаков М. (Фрунзе, с. ш. № 61),
Хозреванидзе Г. (п. Хуло АджАССР, с. ш. № 1),
Цыдынжапов Т. (Новосибирск, с. ш. № 10);

по 10 классам —
Дробышев М. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Кияшко К. (Коммунарск, с. ш. № 7),
Кравченко Ю. (Москва, с. ш. № 820),
Панафидин С. (Ленинград, с. ш. № 30).

Призеры I Всесоюзной олимпиады школьников по информатике

Дипломы I степени получили

Ващилло А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Завалишин В. (Москва, с. ш. № 542),
Калашников В. (Москва, с. ш. № 57),
Нишанов Г. (Фрунзе, с. ш. № 61),
Плукас М. (Каунас, с. ш. № 8).

Дипломы II степени получили

Анспер А. (п. Ныо ЭстССР, с. ш. № 1),
Жильцов И. (Свердловск, с. ш. № 37),
Зотов С. (Пермь, с. ш. № 9),
Калиниченко С. (Киев, с. ш. № 145),
Ковалев С. (Горький, с. ш. № 40),
Копелев А. (Свердловск, с. ш. № 130),
Никифорович П. (Рига, с. ш. № 79),
Питеркин А. (Москва, с. ш. № 406),
Шаров А. (Ленинград, с. ш. № 30).

Дипломы III степени получили

Байметов И. (Ижевск, с. ш. № 30),
Белоусов С. (Петрозаводск, с. ш. № 30),
Видунас Р. (Друскининкай, с. ш. № 3),
Гончаров А. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Копенкин В. (Донецк, с. ш. № 35),
Косенко А. (Воронеж, с. ш. № 86),
Кярнер К. (Вильянди, с. ш. № 5),
Овчаренко И. (Хабаровск, с. ш. № 32),
Рентц И. (Якутск, с. ш. № 15),
Согалов И. (Черновцы, с. ш. № 2),
Халлик В. (Пяриу, с. ш. № 2),
Химорода А. (Петропавловск, с. ш. № 3),
Цыганок А. (Кишинев, с. ш. № 3),
Чяпайтис А. (Каунас, с. ш. № 28),
Шулаков В. (Фрунзе, с. ш. № 61).

Международные олимпиады

Летом этого года, как обычно, проходили международные олимпиады школьников по математике и физике.
Подробно об этих олимпиадах будет рассказано в одном из следующих номеров журнала, а пока мы поздравляем наших олимпийцев с удачным выступлением и желаем им дальнейших творческих успехов.

XXIX Международная математическая олимпиада проходила в столице Австралии Канберре с 9 по 21 июля. Премьер-министр Австралии Р. Хоук в своей речи назвал олимпиаду самым крупным событием в праздновании двухсотлетия Австралии. Председателем жюри олимпиады был профессор Р. Поттс. В олимпиаде приняли участие 58 стран (из них 8 были представлены наблюдателями).

В составе советской команды выступали
Сергей Берлов (Ленинград),
Дмитрий Иванов (Долгопрудный Московской области),
Сергей Иванов (Ленинград),
Дмитрий Туляков (Жданов Донецкой области),
Николай Филонов (Ленинград),
Юрий Хохлов (Ленинград).

Все члены команды награждены золотыми или серебряными медалями. В неофициальном командном зачете наша команда заняла первое место (217 баллов из 252 возможных). Следующие три места распределились так: Китай (201), Румыния (201), ФРГ (174).

Задачи, предложенные на олимпиаде, были труднее задач предыдущей XXVIII ММО. Пять из них (кроме первой) по традиции включены в «Задачник «Кванта» (M1131—M1135), а условие первой задачи мы приводим здесь:

На плоскости даны две окружности с общим центром, радиусы которых соответственно равны r и R, $r<R$. Пусть P — фиксированная точка на меньшей окружности и B — переменная точка на большей окружности. Прямая BP пересекает второй раз большую окружность в точке C. Перпендикуляр l к прямой BC, проходящий через точку P, пересекает второй раз меньшую окружность в точке A (в случае, если l — касательная к окружности, считаем, что $A=P$).

а) Найдите множество значений выражения $BC^2+CA^2+AB^2$.

б) Найдите множество середин отрезков AB.

XIX Международная физическая олимпиада проходила с 23 июня по 2 июля в Австрии, в городе Бад-Ишль. Сюда съехались школьники из 27 стран.

Австрия известна миру именами как блестящих музыкантов, художников и поэтов, так и не менее блестящих ученых-физиков. Среди них Х. Доплер, И. Лошмидт, Л. Больцман, В. Гесс, Э. Шредингер, Э. Мах и другие. Наверное, не случайно на эмблеме олимпиады изображен хорошо известный физикам «конус Маха».

В команду СССР вошли
Юрий Кравченко (Москва),
Александр Мазуренко (Минск),
Антон Малкин (Ленинград),
Вадим Мороз (Ленинград),
Константин Пенанен (Одесса).

Соревнования проходили, как всегда, в два тура. На теоретическом туре школьникам было предложено три задачи, на экспериментальном — две. Надо сказать, что все пять задач по своему содержанию существенно выходят за рамки программы основного курса физики нашей общеобразовательной школы, а в ряде задач — и за пределы программ факультативного курса физики.

Как же справились с предложенными задачами советские школьники? За первую задачу они набрали 41 балл из 50 (каждая задача оценивалась в 10 баллов), за вторую — 43 балла, за третью — 25,5 балла, за четвертую — 14 баллов и за пятую — 32,13 балла. По общей сумме баллов (155,63) команда СССР, в неофициальном зачете, оказалась второй — после команды Румынии (166,75). Следующие три места распределились так: Венгрия (153,25), ФРГ (152,26), Китай (148,25). По личным результатам все пять наших школьников получили медали — серебряные или бронзовые.

Кто и как читает «Квант»

В этом номере, как и раньше в конце года, мы публикуем «Анкету «Кванта». Ваши ответы помогают нам выбирать темы, подыскивать авторов, находить новые способы подачи материалов.

На анкеты, опубликованные в последние годы, ответов было получено не слишком много, но оказалось, что результаты статистической обработки анкет разных лет очень близки. И хотя мы не можем считать, что ответы присылались равномерно всеми категориями читателей, анализ мнений наиболее активной части читателей представляет большой интерес.

Каков же по этим данным среднестатистический читатель «Кванта»? Журнал читают от 5-классников до пенсионеров. Больше всего тех, на кого журнал рассчитан — учащихся старших классов. Среди читателей: учащихся 5—7 классов — 11 %, 8 класса — 25 %, 9 класса — 23 %, 10 класса — 21 %, учащихся техникумов и студентов — 5 %, учителей — 11 %, прочих («взрослых» любителей математики и физики) — 4 %. В городах распространяется 84 % тиража журнала, в сельской местности — 16 %. Один экземпляр журнала читают в среднем 5 человек, причем в городе — 3 человека, а в сельской местности, как и журнал, выписываемый учителем,— целый класс.

Школьники выписывают журнал в основном с 8 класса, многие учителя имеют подшивки «Кванта» с момента его основания.

Математикой интересуются 84 % читателей, физикой — 64 %, стало быть, и тем, и другим,— 48 %. Анализ распределения интереса читателей к рубрикам журнала показал, что каждая рубрика имеет своего читателя. Анкеты, присланные победителями конкурса «Задачник «Кванта» (они опрашивались отдельно), были выделены в отдельную группу; относящиеся к ним данные приводятся в скобках.

Наиболее популярные рубрики: «Школа в «Кванте», ею интересуются 54 % (46 %) читателей, причем 36 % — 8-классников, 54 % 9-классников (71 %) и 67 % 10-классников (39 %); «Калейдоскоп» — 50 % (29 %); «Задачник «Кванта» — 45 % (78 %); «Практикум абитуриента» — 41 % (52 %); «Искусство программирования» — 39 % (19 %); «Олимпиады» — 38 % (41 %); «Лаборатория «Кванта» — 36 % (28 %); «Математический кружок» — 34 % (37 %). Остальными рубриками интересуются от 35 до 20 % читателей (каждой). Наиболее активно читают «Квант» 9-классники, их интересует содержание более 7 основных рубрик журнала, 10-классников — 6 рубрик, 8-классников — лишь 5 рубрик. Интерес к рубрике «Квант» для младших школьников» падает от 83 % у 5—7-классников до 8 % у 10-классников, к рубрикам «Практикум абитуриента» и «Варианты вступительных экзаменов» растет от 20 % у 8-классников до 60 % у 10-классников. «Искусство программирования» интересует в основном 9-классников — 62 % (41 %), а 10-классников меньше — 25 % (13 %) и вызывает много нареканий: материалы слишком просты.

Лучшими статьями 1987 года чаще других назывались по физике: «Встреча с кометой Галлея состоялась», «Оптическая электроника при свечах»; по математике: «Загадка Рамануджана», «Лучшее пари для простаков», «Конечные группы» (последняя вызвала и много отрицательных откликов).

Что касается обложек, то всем понравилась обложка № 10, большинству — № 2 и № 5, не понравились — № 6 и № 4.

Среди тем, предложенных для статей на будущие годы, оказались представленными большинство разделов математики и физики, а также космические исследования и программирование. Читатели просят заранее информировать их о выходящей научно-популярной литературе, больше писать о современных открытиях в математике, физике и астрономии. Много нареканий вызвали поздние сроки выхода журнала.

Часть пожеланий нам удалось удовлетворить, часть — нет. Сроки выхода журнала связаны с типографией, выпускающей и много других журналов. Вы держите в руках сдвоенный номер журнала: 11—12 (увеличенными были и номера 2, 4, 6, 9). Оказалось, что это самый простой способ согласовать номер журнала с месяцем его выпуска в свет. Теперь № 1 за 1989 год пойдет по графику бывшего № 12 и выйдет в начале января.

Часть тем, подсказанных читателями, была отражена в журнале, некоторые темы были интересны лишь узкому кругу читателей, иногда не удавалось найти автора, который взялся бы достаточно популярно и интересно раскрыть данную тему, а чаще всего — просто не хватало журнальных страниц, и многими темами приходилось жертвовать. Решая эту проблему, редакция приняла меры к увеличению в новом году числа страниц журнала до 80 в каждом номере. Больше внимания будет уделяться вопросам исследования космического пространства, астрономии. Увеличится раздел «Искусство программирования», в котором основное внимание будет уделяться общим вопросам программирования (формализация задач, подготовка их к постановке на ЭВМ и т. п.). Опыт показывает, что те, кто имеет доступ к программируемому вычислительному устройству (от микрокалькулятора до персонального компьютера), очень быстро осваивают технику программирования, т. е. путь от алгоритма до программы. Сложнее оказывается путь от неформальной формулировки задачи до алгоритма.

Мы надеемся, что наши читатели еще активнее ответят на вопросы публикуемой ниже анкеты. При этом мы предлагаем вам провести небольшой эксперимент. Возьмите монетку и подбросьте ее 9 раз (ровно девять!), записывая при этом, что окажется наверху — герб или цифра. Если все 9 раз наверху будет герб, то обязательно пришлите нам анкету (хотя бы кратко ответив на все вопросы). Таким образом, «нулевым» вопросом анкеты будет следующий: сколько раз у вас выпал герб при 9 бросаниях.

Примечание. Каждый читатель этого номера журнала цикл из 9 бросаний монеты выполняет один раз.

А. Н. Виленкин

Наша анкета

Дорогие читатели! Для того чтобы при подготовке материалов к публикации в «Кванте» редакция могла учесть ваши интересы, уровень подготовки и вкусы, просим вас ответить на вопросы нашей традиционной анкеты.

Ответы высылайте на отдельном листе бумаги, сохранив нумерацию вопросов, до 10 января 1989 года. Наш адрес: 103006 Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». На конверте сделайте пометку: «Анкета—88».

1. Фамилия, имя (не обязательно). Место учебы (город, село; учебное заведение, класс, курс) или работы (профессия, специальность). Выписываете вы журнал или берете у знакомых или в библиотеке?

2. Круг интересов (математика, физика, информатика, астрономия). С какого года вы читаете наш журнал? Сколько человек читают ваши экземпляры «Кванта» (для подписчиков)?

3. Наиболее и наименее интересные статьи по математике из числа опубликованных в 1988 году.

4. Наиболее и наименее интересные статьи по физике из числа опубликованных в 1988 году.

5. Самая удачная и самая неудачная обложка журнала в 1988 году; ваше мнение об оформлении журнала.

6. Какие разделы журнала вам нравятся, а какие — нет? Какие новые разделы следовало бы ввести?

7. Какие материалы, опубликованные в «Кванте» в 1988 году, помогли в вашей работе или учебе, что вы искали в «Кванте», но не нашли?

8. Общее мнение о журнале. О чем бы вы хотели прочитать на страницах нашего журнала в 1989—1990 годах?

Ответы, указания, решения

О плоских кривых

1. См. таблицу.
2. См. рис. 1.
3. См. рис. 2.
4. Число точек пересечения прямой и кривой изменяется на 2 в момент касания. После поворота на 180° это число останется прежним. Если сумма чисел, равных ± 2, равна нулю, то чисел четное число.
5. Обойдем каждую из кривых в двух направлениях и будем следить за числом точек пересечения касательного луча с другой кривой. Это число меняется при проходе точек пересечения кривых и точек касания двойных касательных с кривой. После обхода число точек пересечения не изменится. Получаем 4 равенства, сумма которых дает искомое соотношение.
6. Числа вращения равны 1, 1, 0, 2, 1, 3, 0, 0.
7. Кривую можно «раздуть» в окружность; число вращения равно 1.
8. Если точек перегиба нет, то кривая все время поворачивается в одну сторону и число вращения положительно.
9. При каждой перестройке четность числа кривых меняется. Поэтому четность числа кривых k, на которые распадается данная кривая, совпадает с четностью числа $n+1$, где n — число двойных точек. Четность числа вращения совпадает с четностью числа k.
10. См. рис. 3.
11. Каждое число встречается дважды, так как через каждую двойную точку мы проходим дважды. Выберем двойную точку с номером k и сделаем в этой точке перестройку. Кривая распадется на две, и число их точек пересечения будет четным. В последовательности между двумя числами k будут стоять по одному разу как раз номера точек пересечения этих двух кривых.

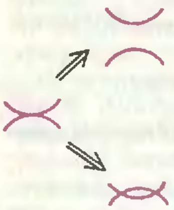


Рис. 1.


Рис. 2.

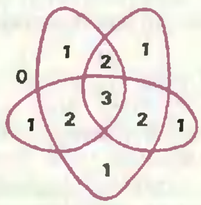
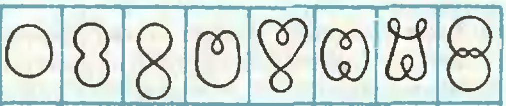


Рис. 3.

Таблица.



p	0	2	2	1	5	4	8	4
q	0	0	0	0	2	2	4	0
r	0	4	2	0	2	0	2	2
n	0	0	1	1	2	2	3	3

Гармонические колебания

1. $x''+\frac{g}{l}x=0$. $W=\frac{mg}{2l}x^2+\frac{m}{2}(x')^2$, $\omega=\sqrt{g/l}$.
2. $\omega=\sqrt{2g/(\pi R)}$.

XXII Всесоюзная олимпиада по математике

8 класс

1. **Ответ:** 23 рассказа. **Указание.** После каждого рассказа с нечетным числом страниц меняется четность начальной страницы следующего рассказа, так что четность начальной страницы меняется не меньше 14 раз.
2. Пусть $[\Phi]$ — площадь фигуры Φ. Обозначим точки, как показано на рисунке 4. Так как средняя линия треугольника отсекает одну четвертую его площади,

$$[NSLT]=[ABCD]-\frac{3}{4}[ABC]-\frac{3}{4}[BCD]-$$
$$-\frac{1}{4}[ACD]-\frac{1}{4}[ABD],\ [MSKT]=[ABCD]-$$
$$-\frac{3}{4}[ABC]-\frac{1}{4}[ACD]-\frac{1}{4}[BCD]-\frac{3}{4}[ABD].$$

Из равенства $[NSLT]=[MSKT]$ получаем нужное утверждение: $[BCD]=[ABD]$.
3. Пусть $x=mn$, $y=nk$, $z=mk$, где m, n и k — натуральные числа. Тогда должно быть $n(k-m)=mk-1$. Положив $k-m=1$, получаем бесконечную серию решений:

$$x=m(m^2+m-1),\ y=(m+1)(m^2+m-1);$$
$$z=m(m+1).$$

4. См. решение задачи М1115а).
5. **Указание.** Это отношение равно тангенсу угла, образуемого диагональю с большим основанием трапеции.
6. См. решение задачи М1112.
7. **Указание.** Если $xy\neq 0$, то $1-xy=$ $=\left(\frac{x^5-y^5}{2x^2y^2}\right)^2$.
8. См. решение М1113.

9 класс

1. **Ответ.** $m=-1989$. **Указание.** Уравнение приводится к виду

$$\frac{1989^{1988}}{1988^{1988}}=\frac{(m+1)^{m+1}}{m^{m+1}}.$$

Обе дроби несократимы, так что $m^{m+1}=$ $=1988^{1988}$. Если $m\geqslant 1988$, то $m^{m+1}>1988^{1988}$. Если же $0<m<1988$, то $m^{m+1}<1988^{1988}$. Если $m<-1$, то при $n=-(m+1)$ получим $1988^{1988}=n^n$, откуда $n=1988$.
2. **Указание.** В треугольнике больший угол имеет больший синус, поэтому, например, $(\alpha-\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)\geqslant 0$, или $\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)(\sin\alpha-$ $-\sin\beta)\geqslant 0$.
3. **Ответ.** Нельзя. Предположим, что требуемый график дежурств существует. Пусть согласно этому графику a раз меняются ученики 9 «А» и b раз — ученики 9 «Б». Тогда, поскольку по условию задачи каждый ученик

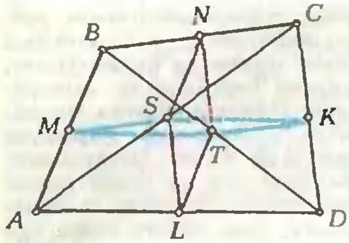


Рис. 4.

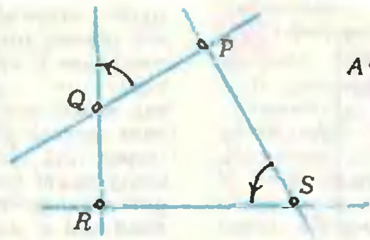


Рис. 5.

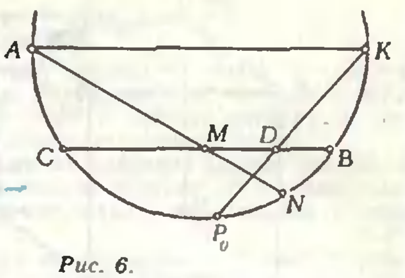


Рис. 6.

9 «А» должен отдежурить с каждым учеником 9 «Б», выполняется равенство $a+b=32\cdot 29$. При этом, поскольку по условию в конце должна выходить на дежурство первая пара, число a кратно 32, а число b кратно 29. Следовательно, $a=32\cdot 29-b$ кратно 29. Отсюда следует, что a кратно $32\cdot 29$, а так как, очевидно, $a>0$, то $a\geqslant 32\cdot 29$. Аналогично устанавливается, что $b\geqslant 32\cdot 29$, что противоречит равенству $a+b=32\cdot 29$.

4. Обозначим через $(\widehat{l,n})$ наименьший угол, на который надо повернуть прямую l против часовой стрелки, чтобы она стала параллельна прямой n.

Лемма. Точки P, Q, R, S, не лежащие на одной прямой, лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $(\widehat{QP,QR})=(\widehat{SP,SR})$ (рис. 5).

Доказательство следует из теоремы о свойствах углов, вписанных в окружность.

Проведем теперь прямую AK, параллельную прямой BC (точка K принадлежит окружности S, рис. 6). Продолжим отрезок KD за точку D до пересечения с окружностью S в точке P_0. Докажем, что для каждой точки M, удовлетворяющей условию задачи, точка P совпадает с P_0. Возможны два случая.

1) Точки N и P_0 различны. Так как точки A, K, P_0, N лежат на окружности S, то $(\widehat{AK,KP_0})=(\widehat{AN,NP_0})$. Поскольку прямые BC и AK параллельны, $(\widehat{AK,KP_0})=(\widehat{BC,KP_0})$. Значит,

$$(\widehat{MD,DP_0})=(\widehat{MN,NP_0}),$$

т. е. точки M, N, P_0, D лежат на одной окружности и, следовательно, $P_0=P$.

2) Точки N и P_0 совпадают. При гомотетии с центром в точке P_0, переводящей точку K в точку D, прямая AP_0 переходит в себя, а прямая AK — в прямую MD (поскольку $AK\parallel MD$). Значит, точка A переходит в точку M. Поэтому окружность S переходит в окружность, описанную около треугольника NMD. Поскольку центром гомотетии является точка $P_0=N$, больше у этих окружностей общих точек нет, т. е. $P=P_0$.

Теперь очевидно, что искомая точка M есть проекция точки P_0 на прямую BC. Эта проекция лежит внутри отрезка BC (угол A острый) и не совпадает с точкой D, так как угол $\angle KDC=\angle DKB+\angle KBD$ — тупой.

5. Указание. При $n=4k+1$ числа a_n нечетны. Рассматривая остатки от деления a_n на 6, убедитесь, что a_n, например при $n=36p+17$ делится на 3.

6. См. решение М1111.

7. Ответ: $\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$. Указание. Можно считать, что $a+b\geqslant c+d$.

Тогда $b+c\geqslant\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$ и

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\,\frac{a+b+c+d}{c+d}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\geqslant\sqrt{2}-\frac{1}{2}.$$

Значение $\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$ принимается, например, при $a=\sqrt{2}+1$, $b=\sqrt{2}-1$, $c=2$, $d=0$.

8. Перенумеруем строки таблицы сверху вниз, столбцы — слева направо. Обозначим через $o^i_{j,k}$ операцию прибавления i-ой строки к j-му столбцу и вычитания этой строки из k-го столбца.

Применяя к данной таблице последовательно операции $o^1_{n,1}, o^2_{n,2}, \ldots, o^{n-1}_{n,n-1}$, мы получим таблицу, в которой все диагональные элементы, кроме стоящего в n-ой строке и в n-ом столбце, равны нулю.

Рассмотрим последовательность операций

$$o^j_{1,i},\ o^i_{n,1},\ o^1_{i,j},\ o^i_{n,i},\ o^i_{j,n}.$$

Как нетрудно проверить, применение таких операций к полученной таблице приводит к новой таблице, в которой число, стоящее в i-ой строке и j-ом столбце, равно нулю, а остальные числа, не стоящие в последней строке или в последнем столбце, не изменились.

Применяя такие последовательности операций для всех $i=1, 2, \ldots, n-1$ и $j=1, 2, \ldots, n-1$, мы получим таблицу, в которой числа, отличные от нуля, могут находиться только в последней строке или в последнем столбце. Но так как сумма чисел в любой строке и в любом столбце равна нулю (это свойство сохраняется при применении операций), то в последней строке и в последнем столбце тоже стоят нули.

10 класс

1. Указание. Точки B, E, D, C лежат на окружности с центром O и диаметром BC, а перпендикуляр OH из O на ED делит этот отрезок пополам.

2. Ответ: $\sqrt{3}$. Указание. Рассмотрите S^2 и трижды примените неравенство о среднем арифметическом для двух чисел.

3. Ответ: 6 звеньев. Указание. Пусть ломаная начинается в вершине A и кончается в вершине C. Сфера радиусом 3 с центром в точке A пересекает поверхность

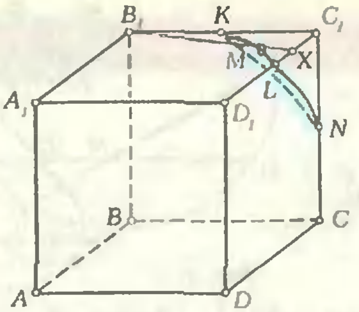


Рис. 7.

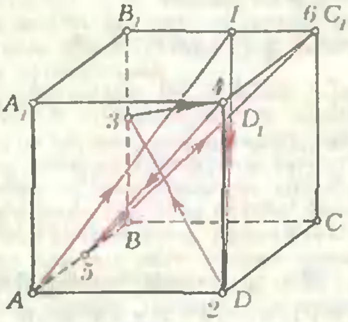


Рис. 8.

куба по трем дугам: KL, LN и KN, где точки K, L, N — середины соответствующих ребер (рис. 7). Если точка M не совпадает с K, L, N и лежит на одной из дуг, то сфера радиусом 3 с центром в M проходит через точку A, а остальные точки куба содержит внутри себя. Поэтому ломаная должна проходить через одну из точек K, L, N. На рисунке 8 показан пример ломаной из шести звеньев.

4. См. решение М1115 б).

5. **Указание.** Без ограничения общности можно считать, что парабола имеет уравнение $y=ax^2$, а ломаная имеет *хотя бы одну вершину* с положительной абсциссой. Докажите, что вершина с *наибольшей* положительной абсциссой обязательно является конечной вершиной ломаной.

6. **Ответ:** $n=20$. **Указание.** Если $n<20$, то, вычитая из второго уравнения первое, умноженное на 10, получим, что модуль левой *части нового уравнения меньше 100.*

7. См. решение М1120 а).

8. См. решение М1114.

Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

Т1. Будут напечатаны в неубывающем порядке простые числа, произведение которых равно n, т. е. *разложение n на простые делители* (с учетом кратности).

Т2. Надо из площади Пр1 вычесть площадь пересечения Пр1 и Пр2, которое либо пусто, либо является прямоугольником, координаты левого нижнего и правого верхнего углов которого находятся как максимумы или минимумы соответствующих координат Пр1 и Пр2.

Т3. Назовем *маршрутом* следующий набор: пункт отправления, последовательность рейсов (пункт отправления каждого из которых совпадает с пунктом прибытия предыдущего, первого — с пунктом отправления маршрута), конец маршрута (пункт прибытия последнего рейса). Начав с «пустого» маршрута (город [1], город [1]), будем проделывать следующую операцию: если из конца маршрута выходит неиспользованный рейс, то вставляем его в маршрут; если такого рейса нет (это возможно только если начало и конец *маршрута совпадают), то переносим начало и* конец маршрута по первому рейсу, а первый рейс ставим последним. Когда число рейсов в маршруте сравняется с числом всех рейсов, будет найден кольцевой маршрут.

Т4. При решении задачи надо исходить из того, что ЭВМ работает быстро, а перемотка ленты на магнитофоне — медленно, но в память ЭВМ весь файл пар фамилий не поместится. Участниками олимпиады были предложены разные алгоритмы. Возможен такой. Используя два магнитофона и держа в памяти ЭВМ 1000 пар фамилий, по исходному файлу пар фамилий людей, стоящих на «расстоянии» 1 друг от друга, создается файл пар фамилий людей, стоящих на «*расстоянии*» 2 (*при наличии пар* Ф1, Ф2 и Ф2, Ф3 в новый файл записывается Ф1, Ф3). Из него — файл пар фамилий людей, стоящих на «расстоянии» 4, потом 8 и т. д. Под конец используется двоичное разложение числа 1234567.

М1. а) 111; б) 259. Основная трудность этой задачи — в точном представлении больших целых чисел. Оказалось, что если переменная описана как целая, но в процессе вычислений ее значение превосходит допустимые пределы, то «Роботрон» (и, кстати, большинство других компьютеров) переделывают ее в вещественную, теряя при этом знаки, и последовательность искажается. И еще оказалось, что испорченная таким способом последовательность приводит к тому же (верному) ответу: 259, найденному многими участниками олимпиады, но не всеми «с гарантией». При решении этой задачи надо было сделать специальную программу работы с большими целыми числами и контролировать величину получающихся в процессе вычислений чисел (см. также «Квант», 1988, № 7, с. 59).

М2. Естественная идея — зафиксировать наибольшее слагаемое в сумме и взять из предыдущих вычислений (для меньших чисел) число представлений остальной части суммы. Пусть $P(n, k)$ — число разбиений n на слагаемые, не превосходящие k (искомое число — $P(n, n)$). Тогда $P(n, k)=P(n, k-1)+P(n-k, k)$. Строится таблица $P(n, k)$ и из нее находится число представлений для постепенно возрастающих n. Без специальной арифметики больших целых чисел удается добраться примерно до $n=37$, с такой арифметикой — до $n=100$.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 10)

1. Если обозначить через x стоимость фруктового мороженого, то сливочное будет стоить

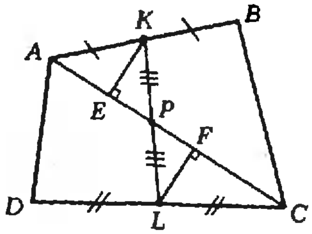


Рис. 9.

$x+10$, а шоколадное — $x+20$. Общая цена взятого мороженого — 240 копеек, и в то же время $4(x+x+10+x+20)=12x+120$. Получаем, что $x=10$, следовательно, порция фруктового мороженого стоит 10 копеек, сливочного — 20 копеек, шоколадного — 30 копеек.

2. Заметим, что $a=2^{5\cdot 9}=32^9$, $b=3^{4\cdot 9}=81^9$, $c=4^{3\cdot 9}=64^9$, $d=5^{2\cdot 9}=25^9$. Отсюда $d<a<c<b$.

3. Снег — пластинки льда, поэтому отражение от снега солнечных лучей аналогично отражению света от огромного количества небольших зеркал. В глаза наблюдателя попадают лучи от некоторых из них, причем при движении — от все новых и новых. Тем самым создается впечатление вспыхивающих искр.

4. Несложно выписать (особенно, если под руками есть микрокалькулятор) все пары однозначных чисел таких, что при возведении одного из них в степень, равную другому, получается пятизначное число: $3^9=19\,683$, $4^7=16\,384$, $4^8=65\,536$, $5^7=78\,125$, $6^6=46\,656$, $7^5=11\,907$, $7^6=83\,349$, $8^5=32\,768$, $9^5=59\,049$. Из этих чисел только $5^7=78\,125$ удовлетворяет условию задачи.

5. Обозначим через E и F основания перпендикуляров, опущенных из середин сторон AB и CD четырехугольника на его диагональ AC (рис. 9). Поскольку $KP=PL$, треугольники PKE и PLF равны, значит, $KE=LF$. Высоты треугольников ABC и ACD, опущенные на их общую сторону AC, равны соответственно $2KE$ и $2LF$, значит, равны и площади этих треугольников.

[redacted]ейдоскоп «Кванта»
[redacted]*«Квант» № 10)*

Вопросы и задачи

1. В растворе молекулы воды и спирта «упакованы» плотнее за счет того, что между молекулами воды и спирта, взятыми по отдельности, существуют промежутки.

2. Из-за разности давлений внутри шарика и снаружи молекулы воздуха «просачиваются» через оболочку шарика и давление в нем падает.

3. Молекулы компонентов с меньшей молярной массой подвижнее более массивных молекул и поэтому чаще проходят сквозь поры трубы.

4. Медленнее всего продвигаются ионы наиболее массивного изотопа ^{3}H.

5. Общее давление на омедненную часть пластинки примерно в два раза меньше, чем на вторую половину, из-за неупругого столкновения молекул хлора и меди.

6. Ударами молота достигается хороший контакт привариваемых кусков. При температуре белого каления взаимная диффузия частиц происходит с большой скоростью и на большую глубину.

7. При равных давлении и температуре в равных объемах содержится одинаковое число молей любого газа. Средняя молярная масса воздуха больше средней молярной массы смеси воздуха с водяным паром. Поэтому сосуд с влажным воздухом легче сосуда с сухим.

8. На больших высотах, так как там воздух разрежен.

9. Частица при столкновении с молекулами газа расходует свою кинетическую энергию на ионизацию молекул.

Микроопыт

Сам водяной пар невидим. При выключении газа исчезают струи нагретого воздуха, обтекавшие чайник. Выходящий из чайника водяной пар охлаждается и конденсируется. Мы наблюдаем возникающее при этом облако мельчайших капель.

Напечатано в 1988 году

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, Н. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Фото представили:
Ю. Г. Анциферов, Р. И. Ахмеров, А. Н. Виленкин

Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Корректор Н. Б. Румянцева

Сдано в набор 15.09.88. Подписано к печати 21.10.88
Т-20526. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 32,25. Усл. печ. л. 7,74. Уч.-изд. л. 9,62
Тираж 190281 экз. Цена 80 коп. Заказ 2399

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

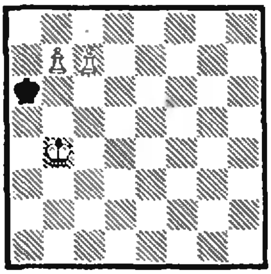
103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Шахматная страничка

БЛИЗНЕЦЫ

Оценка позиции может измениться на противоположную, если переставить одну из фигур или пешек. В этом нет ничего удивительного, ведь в шахматах значение имеет не только материальное соотношение сил, но и конкретное расположение фигур. Но все же если у одной из сторон подавляющий материальный перевес, то перестановка фигур редко влияет на исход борьбы. Шахматные проблемисты, которые всякую тему любят облечь в необычную форму, придумали немало задач, в которых при перестановке всего одной фигуры или пешки результат действительно не меняется, но само решение претерпевает удивительное изменение. Речь идет о так называемых задачах-близнецах: внешне они почти не отличаются друг от друга, а решения их принципиально разные.

Вот четыре задачи-близнеца: одна изображена на диаграмме, три другие получаются при перестановке белого короля или пешки. В решении одна из пешек всюду превращается в ферзя, а другая — в ферзя, ладью, коня или слона! И авторы близнецов разные.

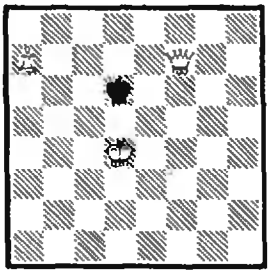


1. Диаграмма. Мат в 2 хода. (О. Делер, 1925 г.). 2. Переставить пешку с c7 на g7. Мат в 3 хода. (Х. Штаудте, 1965 г.). 3. Переставить (в исходной позиции) короля с b4 на b3. Мат в 3 хода. (В. Шпекман, 1964 г.). 4. Переставить (в исходной позиции) пешку с b7 на a7. Мат в 3 хода. (Л. Кубель, 1940 г.).

Решения. 1) 1. c8Ф и 2. b8Ф×. 2) 1. b8Л! (1. b8Ф пат) 1... Кра7 2. g8Ф Кра6 3. Фа2×. Любопытно, что этот близнец придуман через 40 лет после задачи Делера! 3) 1. b8Ф Кра5 2. c8К! Кра6 3. Фb6×. 4) 1. a8С! На любой ответ — 2. c8Ф и 3. Фb7×.

Если бы решение мало измененной задачи мало отличалось от решения исходной, мы бы говорили, пользуясь математическим языком, о «непрерывной» зависимости решения задачи от позиции. Однако в данном случае эта зависимость как раз является разрывной! В математике непрерывные функции — нечто естественное, а разрывные — особый случай. Шахматные задачи-близнецы иллюстрируют «разрывность» на шахматной доске, причем самым парадоксальным образом.

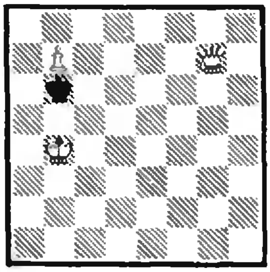
Слабое превращение пешки (не в ферзя, а в другую, не столь мощную фигуру) украшает задачу, а часто и составляет ее суть. Вот еще один набор близнецов, в которых перестановки ферзя и пешки белых приводят к четырем различным превращениям. На сей раз все задачи принадлежат одному композитору и все они — двухходовки.



В. Шпекман, 1965 г. Мат в 2 хода. 1. Диаграмма. 2. Фf7→h7, па7→c7. 3. Фf7→g7, па7→e7. 4. Фf7→a7, па7→g7.

Решения: 1) 1. a8К! (1. a8Ф пат) 1... Крc6 2. Фd5×. 2) 1. c8Л! Крe6 2. Лc6×. 3) 1. e8С! Крe6 2. Фe5×. 4) 1. g8Ф (наконец-то) 1... Крc6 2. Фd5×.

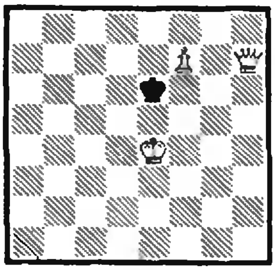
В следующей уникальной двухходовке объединены сразу шесть близнецов!



К. Ханнеман, 1972 г. Мат в 2 хода. 1. Диаграмма. 2. пb7→c7. 3. пb7→a7. 4. Крb6→a7. 5. Крb6→h1. 6. Фg7→b8.

Решения. 1) 1. b8Ф+ Крc6 (a6) 2. Фgb7×. 2) 1. c8Л! Кра6 2. Лc6×. 3) 1. a8С! Кра6 2. Фb7×. 4) 1. Фc7! Кра6 2. b8К×! 5) 1. b8Л! Крh2 2. Лh8×. 6) 1. Фc8! Кра6 (a7) 2. b8Ф×. Итак, дважды пешка превращалась в ферзя и ладью и по одному разу — в слона и коня.

В рассмотренных задачах перемещалась белая пешка. Следующие четыре близнеца примечательны тем, что на другие поля перемещаются все фигуры кроме пешки, но именно эта белая пешка вынуждена всякий раз превращаться в новую фигуру. В данном примере переставленная фигура остается на новом месте, а вслед за ней переставляется следующая.



В. Шпекман, 1963 г. Мат в 2 хода. 1. Диаграмма. 2. Фh7→a7. 3. Далее Крe6→c6. 4. Далее Крe4→c4.

Решения. 1) 1. f8С! Крf6 2. Фf5×. 2) 1. f8Л! Крd6 2. Лf6×. 3) 1. f8Ф! Крb5 2. Фfc5×. 4) 1. f8К! Крd6 2. Фc5×.

Е. Я. Гик