

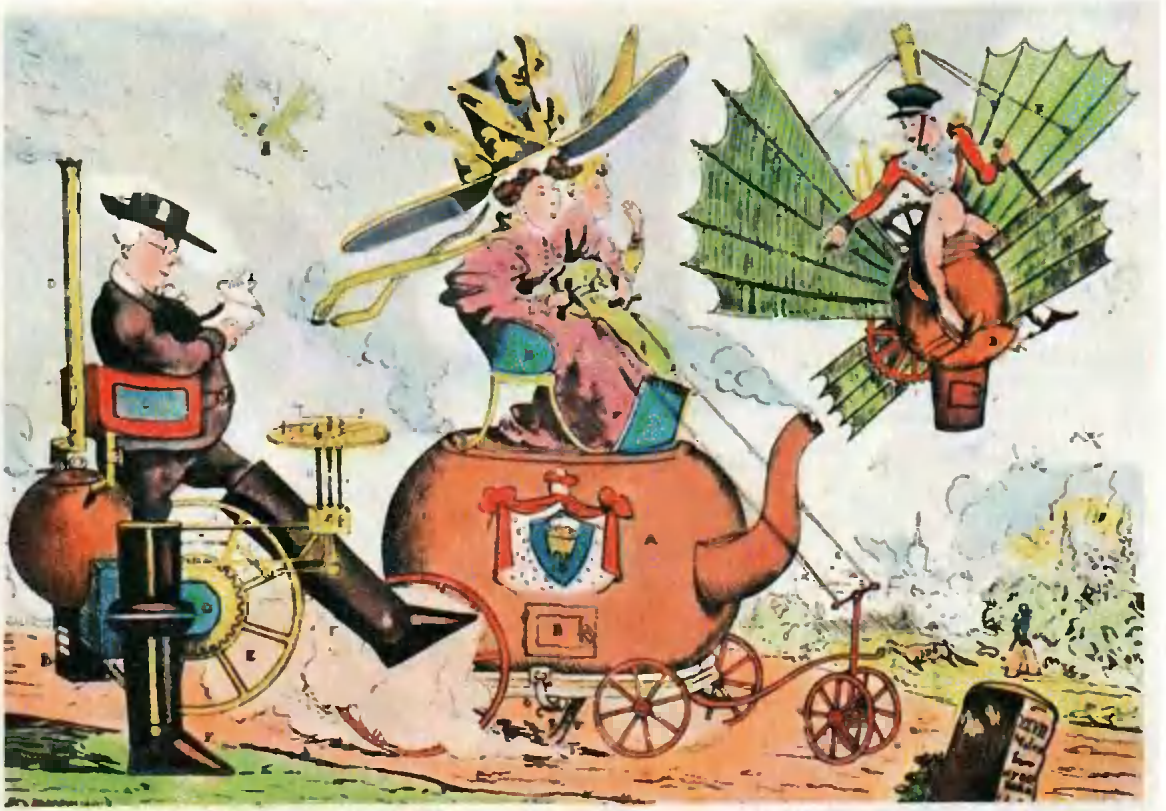
Квант

Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



1989



Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Москва, «Наука»
Главная редакция физико-
математической
литературы

В номере:

2. Д. А. Киржниц. Некоторые уроки научной сенсации
- 8 В. Н. Дубровский, Я. А. Смородинский. Оптическое изображение и проективная плоскость.
- 12 С. Н. Лыков, Д. А. Паршин. Симметрия, анизотропия и закон Ома
- 20 Н. Я. Виленкин. В таинственном мире бесконечных рядов
- Задачник «Кванта»
- 28 Задачи M1186—M1190, Ф1193—Ф1197
- 30 Решения задач M1161—M1164, Ф1173—Ф1177
- 37 О числе целых точек в плоском множестве
- 38 Список читателей, приславших правильные решения
- 40 Калейдоскоп «Кванта»
- Информация
- 42 Об итогах ТЮФ 1988/89 года
- 80 V Всесоюзная научно-техническая конференция школьников
- «Квант» для младших школьников
- 43 Задачи
- 44 С. Л. Табачников. Закон Архимеда с точки зрения математика
- Школа в «Кванте»
- 46 В. Н. Вагутен. Правильные многогранники и повороты
- 51 Избранные школьные задачи
- Лаборатория «Кванта»
- 52 С. К. Бегяев. Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики
- Практикум абитуриента
- 56 В. А. Бодик, Ф. Б. Шейнерман. Об увеличении изображения
- Информатика и программирование
- 60 Н. Н. Носков, С. К. Столбоушкин. Спутник на дисплее
- Олимпиады
- 67 XV Всероссийская олимпиада по математике и физике
- 70 I Всероссийская олимпиада по информатике
- 72 Ответы, указания, решения
- «Квант» улыбается (65)
- Смесь (7, 27)
- Наша обложка
- 1 Поверхность Боя — гладкая поверхность, топологически эквивалентная проективной плоскости (см. статью «Оптическое изображение и проективная плоскость», а также пояснение на с. 11).
- 2 Две старинные карикатуры «Все при помощи пара: и прогулка, и путешествия, и полет» и «Будущее пара» — реакция художников начала XIX века на изобретение паровой машины (см. «Калейдоскоп «Кванта»).
- 3 Шахматная страничка.
- 4 Два способа склейки поверхности в трехмерном пространстве, топологически эквивалентной проективной плоскости.

НЕКОТОРЫЕ УРОКИ НАУЧНОЙ СЕНСАЦИИ

Член-корреспондент АН СССР
Д. А. КИРЖНИЦ

...вот уже несколько лет ученые мечтают о создании сверхпроводника, который функционирует бы при комнатной температуре.

Артур Хейли. Колеса

В первые послевоенные годы, когда с выходом на сцену новой могучей силы — атомной энергии — началась эпоха научно-технической революции, специальность физика считалась особенно престижной. Позднее общество не только охладело к представителям этой профессии, но и стало видеть в них источник глобальных проблем, вставших перед человечеством. Эту эволюцию чутко уловили поэты: на смену стихам Слуцкого «Что-то физики в почете...» пришла песня Галича «Это гады-физики на пари раскрутили шарик наоборот...».

Похоже, что в последнее время акции физиков снова пошли на повышение. К этому привела крупная научная сенсация — открытие высокотемпературной сверхпроводимости (сокращенно ВС).

Подробный рассказ об удивительном мире сверхпроводимости и об открытии ВС читатель найдет в статье академика А. А. Абрикосова «Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи», опубликованной в № 6 «Кванта» за 1988 год. А в этой статье автор стремился, бегло коснувшись всего необходимого читателю для получения общего представления о проблеме, уделить основное внимание ее общечеловеческим аспектам.

1. Начать придется с общей картины внутреннего строения проводника (металлического тела). Его жесткий

каркас образует правильная кристаллическая решетка, составленная из атомов металла, которые колеблются около узлов решетки. В пространстве между атомами находятся легкоподвижные электроны, а также атомы посторонних примесей.

При подключении источника питания (например, батареи) в проводнике возникает электрический ток, т. е. приходят в движение электроны металла. Они неизбежно сталкиваются с колеблющимися атомами решетки и с атомами примесей. Это ведет к торможению электронов с превращением их первоначально упорядоченного движения в хаотическое (иными словами — с выделением тепла). Поэтому при отключении батареи ток быстро затухает, а его энергия переходит в тепло.

Мерой такого торможения служит удельное сопротивление проводника (далее для краткости именуемое просто сопротивлением). Для данного материала оно тем меньше, чем ниже концентрация примесей и температура проводника. Поэтому уже давно возникло убеждение, что сопротивление очень чистого проводника при его охлаждении до абсолютного нуля (-273°C) должно плавно стремиться к нулю.

Для проверки этого убеждения голландский физик Х. Камерлинг-Оннес провел в 1911 году измерения сопротивления ртути (жидкого и потому легко очищаемого металла) при ее глубоком охлаждении. Поначалу все шло в соответствии с ожиданиями: с уменьшением температуры плавно падало и сопротивление. Однако при температуре около 4 К произошло чудо: сопротивление внезапно упало до нуля и продолжало отсутствовать при дальнейшем охлаждении.

Эта статья — расширенный текст доклада на вечере «Жизнь и судьба научных открытий сегодня» в Центральном Доме актера им. А. А. Яблочниковой.

Так было открыто явление сверхпроводимости — полного исчезновения сопротивления металла. Если создать ток в сверхпроводящем кольце и выключить источник питания, то заметного затухания тока не дождутся и наши далекие потомки: соответствующее время много больше возраста Вселенной. Перефразируя Шолом-Алейхема, можно сказать: «Сопротивление как деньги — уж если оно есть, так есть, а если его нет, так нет».

Со временем оказалось, что сверхпроводимость присуща широкому кругу веществ, каждое из которых имеет свое значение критической температуры — температуры исчезновения сопротивления. По мере открытия новых сверхпроводников наибольшее значение этой величины росло, но весьма медленно: за 75 лет оно выросло с 4 К до 23 К — примерно на 0,2 К/год.

Положение радикально изменилось в 1986 году, когда швейцарские физики А. Мюллер и Г. Беднорц начали изучать новый класс материалов, содержащих кислород, медь и другие металлы, — так называемые оксокупраты. Материалы эти не похожи на обычные проводники (внешне они напоминают продающиеся в аптеках угольные таблетки), и их перспективность в плане ВС казалась очень сомнительной. Однако Мюллер и Беднорц верили в успех и не обманулись в своих ожиданиях: критическая температура сразу же отодвинулась примерно до 40 К.

Этот успех и стал открытием ВС (точнее, открытием нового класса материалов, исключительно перспективных с точки зрения дальнейшего повышения критической температуры). Уже через короткое время, в начале 1987 года, американцем П. Чу был синтезирован оксокупрат с критической температурой около 100 К, а сегодняшний абсолютный рекорд составляет примерно 125 К. Это, так сказать, «синица в руках». Что же касается «журавля в небе», то имеются сообщения (требующие, однако, подтверждения) о наблюдении сверхпроводимости при комнатной и даже

более высокой температуре. Во всяком случае, существование сверхпроводников, не требующих никакого специального охлаждения, законам природы не противоречит.

2. Откуда же берутся удивительные свойства сверхпроводника? Выше уже говорилось, что сопротивление возникает из-за столкновений электронов с колебаниями решетки и с примесями. Такие столкновения имеются всегда, но в сверхпроводнике, в отличие от обычного металла, они никак не сказываются на движении электронов, сохраняющем свой упорядоченный характер. Чтобы понять природу этой «нечувствительности» электронов сверхпроводника, придется поверить в одно фундаментальное свойство частиц, из которых построена материя. Оно состоит в том, что в микромире есть две формы поведения частиц друг по отношению к другу (и, соответственно, два класса частиц) — «индивидуалистическая» и «коллективистская».

Частицы «индивидуалы» (ферми-частицы) находятся обязательно в различных состояниях, не допуская скопления в каждом из них более одной частицы. Напротив, частицы «коллективисты» (бозе-частицы) стремятся скопиться в одном и том же состоянии, «завлекая» в него другие бозе-частицы и, наоборот, препятствуя им покинуть это состояние. Это стремление выражено особенно сильно, если в данном состоянии уже скопилась заметная доля всех бозе-частиц. Такое скопление называют бозе-конденсатом (входящие в него частицы абсолютно не отличимы друг от друга).

Бозе-конденсат не поддается внешним воздействиям, препятствуя, как уже отмечалось, попыткам вырвать из него отдельные частицы и перевести их в другие состояния. Он представляет собой монолит, крепко спаянный «морально-политическим единством» своих членов и сопротивляющийся попыткам разрушить это единство. Читатель без труда отыщет соответствующие аналогии в истории или в повседневной жизни.

(Для автора незабываемый пример такого рода — собрание домохозяек и пенсионеров, требовавших крови врагов народа, на котором он присутствовал подростком.)

Если бы электроны были бозе-частицами, то при низкой температуре они обязательно перешли бы в состояние бозе-конденсата, а только что отмеченная его нечувствительность к внешним воздействиям (в частности — к столкновениям с колебаниями решетки и с примесями) и оказалась бы ключом к объяснению сверхпроводимости. Однако электроны — не бозе-, а ферми-частицы, так что такое объяснение напрямую не проходит. Тем не менее, в конечном счете оно правильное.

Дело в том, что объединенные какими-либо силами две ферми-частицы ведут себя как одно целое, подобное бозе-частице, и такие пары способны поэтому переходить в состояние бозе-конденсата (здесь также есть житейская аналогия: холостяки, как правило, меньшие конформисты, чем супружеские пары). Поэтому, если бы для всех сверхпроводников существовал механизм объединения электронов в пары, то природу сверхпроводимости можно было бы считать ясной. Для «старых» сверхпроводников этот механизм основывается на взаимодействии электронов с колебаниями решетки, а для оксидупратов его еще предстоит установить. На это сегодня направлены основные усилия ученых.

3. Говоря выше об открытии ВС, мы не разъяснили, почему повышение критической температуры до величины порядка 100 К означает не просто количественный прогресс, а принципиальный качественный скачок, обещающий огромные технические последствия. Дело в том, что до открытия ВС сверхпроводник проявлял свои замечательные свойства только при его охлаждении жидким гелием — дорогостоящим и труднодоступным продуктом. Именно поэтому прежние технические применения сверхпроводимости ограничивались в основном установками типа ускорителей элементарных частиц, уникаль-

ная стоимость которых многократно перекрывала расходы на охлаждение сверхпроводящих обмоток мощных магнитов.

Открытие ВС сделало возможным охлаждение сверхпроводника с помощью жидкого азота (его температура кипения 77 К). Этот продукт примерно в тысячу раз дешевле жидкого гелия, а о его общедоступности говорит уже тот факт, что победе в минувшей войне немало способствовал перевод металлургии на кислородное дутье (кислород добывался из жидкого воздуха, состоящего на 4/5 из жидкого азота). Переход на азотное охлаждение откроет дорогу широкому применению сверхпроводников в технике уже самого ближайшего будущего: западные специалисты оценивают потенциальный рынок этих материалов к 2000 году в 1 млрд долларов. А если надежды на сверхпроводимость при комнатной температуре оправдаются, то соответствующие перспективы станут вообще необозримыми.

Для большинства электротехнических устройств (исключая, конечно, электронагревательные приборы) выделение тепла в проводнике при протекании по нему электрического тока означает бесполезное разбазаривание энергии, а во многих случаях — крайне вредный разогрев аппаратуры, мешающий ее нормальной работе. Применение сверхпроводящих материалов позволит резко подавить (в принципе свести на нет) тепловые эффекты. На этом основана большая группа технических приложений ВС.

К их числу относятся прежде всего технические устройства, конструкция которых включает сильные электромагниты: упомянутые выше ускорители, магнитные сепараторы, медицинские томографы массового использования и т. д. Другие приложения ВС того же характера связаны с транспортировкой энергии. Ведь в линиях электропередач на бессмысленное отопление атмосферы расходуется до 1/4 всей передаваемой энергии. Использование сверхпроводящих кабелей поможет радикальному решению этой проблемы, острота которой еще

более возрастет, когда размещение источников энергии (обычных и атомных электростанций) будет приведено в соответствие с требованиями экологии и безопасности населения.

Особая группа технических приложений ВС связана с использованием специфических свойств сверхпроводника, прямо не относящихся к отсутствию в нем тепловыделения. Имеются в виду магнитные накопители энергии (сверхпроводящие катушки с током) в электротехнике сильных токов и многочисленные устройства в электронике (быстродействующие переключатели, логические ячейки и элементы памяти в ЭВМ, высокоточные сверхпроводниковые измерительные приборы и др.).

Сюда же относятся и приложения ВС, обещающие переход к экономичному и быстроходному транспорту на магнитной подушке. Здесь предполагается использовать еще одно чудесное свойство сверхпроводника — его способность устойчиво висеть в воздухе над сильным магнитом (левитация, или «гроб Магомета»).

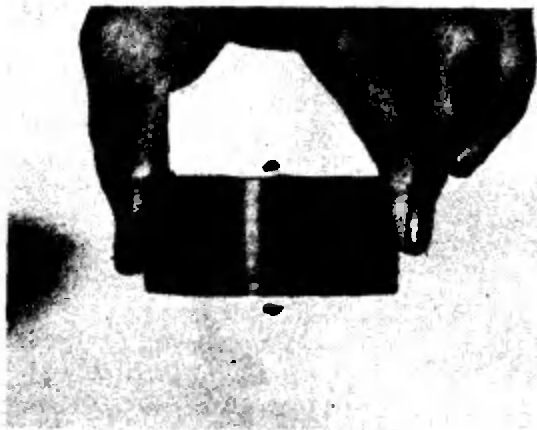
Не следует, однако, думать, что уже завтра вокруг нас потекут молочные реки в кисельных берегах. Люди вообще склонны ошибаться в оценке перспектив только что сделанного научного открытия. Часто эти ошибки имеют характер преуменьшения, как это было с паровой машиной или электричеством. Но не исключено и обратное, когда возникает искушение покрыть экономический и социальный дефицит общества за счет чудес, подобных ВС. Нельзя забывать, что никакое научное открытие не может снять тех проблем, которые должны решаться политическими средствами. Во всяком случае, эффективно использовать результаты научного открытия может лишь экономически здоровое общество. Обо всем этом думаешь, выходя ночью на балкон и наблюдая море огней в лестничных клетках спящих домов. Известно, что королева Мария-Антуанетта, узнав, что французским крестьянам не хватает черного хлеба, спросила: «А почему же они не едят бриоши?»



Наряду с исследованиями физических свойств высокотемпературных сверхпроводников делаются и первые шаги на пути их практического использования; уже изготовлены опытные образцы стержней, проводов, гибких лент.

(это сладкие булочки). Невольно возникает вопрос: а не «бриоши» ли для нас ВС при острой нехватке «черного хлеба» — элементарного умения экономить энергию?

4. Мечта о ВС возникла, скорее всего, одновременно с открытием самой сверхпроводимости. Едва ли стоит



В магнитном поле цилиндрического магнита «зависли» два высокотемпературных сверхпроводника — один над магнитом, другой под ним.

сомневаться в том, что о высокой критической температуре грезил и сам Камерлинг-Оннес, и его последователи. Однако в серьезной научной постановке проблема ВС появилась гораздо позднее.

Четверть века назад, в 1964 году, американец У. Литтл и советский академик В. Л. Гинзбург рассмотрели специальный механизм объединения электронов сверхпроводника в пары, обещающий значительный рост критической температуры.

Новый механизм сверхпроводимости вызвал первоначально значительный интерес к проблеме ВС у многих ученых. Появилось немало теоретических работ, в которых эта идея углублялась и развивалась. Начались и экспериментальные исследования (впрочем, их главным итогом было появление новых направлений на стыке физики и химии, развивавшихся уже вне всякой связи с ВС). Однако не произошло главного: идея ВС не овладела массами. Неоднократные призывы энтузиастов (в первую очередь, самого Гинзбурга) развернуть широким фронтом исследования по ВС, сконцентрировав усилия физиков, химиков и материаловедов на поиске высокотемпературных сверхпроводников, оставались без ответа.

Более того, у специалистов сложился со временем устойчивый стереотип прохладного, а зачастую и от-

кровенно отрицательного отношения к ВС. Большинство не верило в реальность соответствующей программы, а были и такие, кому почему-то ужасно не хотелось, чтобы она была осуществлена. Два весьма крупных и авторитетных специалиста даже доказали специальную теорему о принципиальной невозможности ВС (и автору этих строк пришлось немало потрудиться для ее опровержения). В общем, к середине 70-х годов образовался своего рода бозе-конденсат почти всеобщего скепсиса и неверия в программу ВС.*)

Нужно ли после этого удивляться, что открытие ВС произошло неожиданно и оказалось во многих отношениях случайным. Материалы, обнаружившие ВС, были вне поля зрения большинства специалистов (хотя еще за десять лет до открытия ВС появился сигнал о том, что сложные структуры типа оксокупратов могут иметь относительно высокую критическую температуру). В известном смысле случайными фигурами были авторы открытия, пришедшие в физику сверхпроводимости из другой области (хотя, может быть, это как раз закономерно: Мюллер и Беднорц не испытали на себе воздействия общего настроения специалистов). Случайной оказалась дата открытия: еще в конце 70-х годов химики разных стран синтезировали оксокупраты нужного состава и даже измеряли зависимость их сопротивления от температуры (но, не помышляя о сверхпроводимости, работали при слишком высокой температуре).**) Такие исследова-

*) Смешно сказать, но членов небольшого коллектива (куда входил и автор), занимавшегося проблемой ВС уже долгие годы, радовала даже моральная поддержка со стороны писателя Хейли (см. эпиграф к этой статье).

***) Еще в конце 60-х годов автор, находясь под впечатлением информации об организации на Западе работ по химиотерапии рака, предложил создать специальную службу по проверке на сверхпроводимость каждого нового класса материалов, вводимого в оборот науки. Это предложение поддержано не было — как по материальным и организационным причинам, так и из-за нежелания делать «тупую» работу. Между тем, будь оно реализовано, открытие ВС не запоздало бы почти на десятилетие, а создатели оксокупратов не упустили бы верной Нобелевской премии.

ния велись, например, в нашей стране, во Франции.

Если роль научного общественного мнения в истории ВС действительно такова, как это описано выше, то причины возникновения этого феномена бесспорно заслуживают изучения. Поскольку здесь играли роль и объективные, и чисто психологические факторы, соответствующим анализом должны заняться, помимо физиков и химиков, также историки науки, психологи, а может быть и пишущие о науке «инженеры человеческих душ».

Во всяком случае, уже сейчас из истории ВС можно извлечь один нравственный урок. Несомненно, что в формировании научной атмосферы особая роль принадлежит крупным и авторитетным ученым. Никто, конечно, не пытается отнять у них право иметь свое мнение о реальности научной программы, верить или не верить в ее осуществимость. Однако, чем выше потенциальная важность программы и чем крупнее имя ученого, тем большую моральную ответственность он должен чувствовать (и тем большую щепетильность проявлять) при высказывании своего мнения. Слава богу, наши учителя оставили нам достаточно примеров подлинно интеллигентного отношения к

новым идеям (автор имеет в виду прежде всего школу теоретической физики Мандельштама — Тамма, к которой принадлежит сам).

Нельзя забывать, что ситуация, подобная истории ВС, может повториться — могут возникнуть новые научные программы, реальность которых (при их заведомой потенциальной важности) заранее не очевидна, хотя и не может быть опровергнута. Что делать авторам такой программы, если они не имеют ресурсов для ее реализации и не смогли преодолеть предубеждений своих коллег? Ждать, как раньше, пока подобная программа начнет осуществляться за рубежом, а потом со всех ног догонять, как это и произошло с ВС? Стараться, как и раньше, доказать, что программа имеет особо важное стратегическое значение, в надежде заинтересовать соответствующие богатые ведомства?

Хочется надеяться на то, что наше перестроенное общество выработает такой механизм моральной, организационной и материальной поддержки подобных программ, действие (или бездействие) которого будет определяться не эмоциями и настроениями определенного круга лиц, а объективной оценкой серьезности соответствующих предложений.

Вниманию наших читателей

Магазин «Академкнига» г. Киева (252030 Киев, ул. Ленина, 42, «Академкнига») высылает наложенным платежом:

Книги из серии «Библиотека «Квант»

Асламазов Л. Г., Варламов А. А. *Удивительная физика.* — 1988. — 35 к.

Ашкинази Л. А. *Вакуум для науки и техники.* — 1987. — 25 к.

Балк М. Б., Болтян-

ский В. Г. *Геометрия масс.* — 1987. — 30 к.

Беркинблит М. Б., Глаголева Е. Г. *Электричество в живых организмах.* — 1988. — 70 к.

Задачи московских физических олимпиад. — 1988. — 40 к.

Зельдович Я. Б., Хлопов М. Ю. *Драма идей в познании природы (частицы, поля, заряды).* — 1988. — 50 к.

Колмогоров А. Н. *Математика — наука и профессия.* — 1988. — 65 к.

Левинштейн М. Е., Симин Г. С. *Барьеры (От кристалла до интегральной схемы).* — 1987. — 75 к.

Новиков И. Д. *Как взор-*

валась Вселенная. — 1988. — 40 к.

Стасенко А. Л. *Физика полета.* — 1988. — 30 к.

Тихомиров В. М. *Рассказы о максимумах и минимумах.* — 1986. — 35 к.

Фейнман Р. *КЭД — странная теория света и вещества.* Пер. с англ. — 1988. — 45 к.

Фейнман Р. *Характер физических законов.* Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. — 1987. — 45 к.

Франк-Каменецкий М. Д. *Самая главная молекула.* Изд. 2-е, перераб. и доп. — 1988. — 40 к.

Чернин А. Д. *Физика времени.* — 1987. — 40 к.

ОПТИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ И ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ,
доктор физико-математических наук
Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

Проективная плоскость

Настало время обратить более пристальное внимание на точки, которые до сих пор мы лишь вскользь упоминали. Эти точки *фокальных прямых* t и l , параллельных «линии линзы» l и проходящих через фокусы F и F' (рис. 1). Эти точки у нас обижены: уже говорилось, что точки первой прямой никак не изображаются, ведь исходящие из них лучи становятся параллельными. Аналогично, точки второй прямой как бы ничего не изображают: в них фокусируются падающие на линзу пучки параллельных лучей. Впрочем, с такой «дискриминацией» можно не согласиться. В конце концов, увидеть точечный источник света — это все равно, что увидеть испускаемые им лучи, а пучок параллельных лучей ничем не хуже центрального. Поэтому естественно рассматривать любой пучок параллельных, как пучок лучей, исходящих из некоей *бесконечно удаленной точки* — его «центра» (математическое воплощение «далекой звезды»), а точку прямой l , в которой он фокусируется, — как изображение этого бесконечно удаленного центра. Никакой мистики здесь нет: во всяком случае, бесконечно удаленные точки реальны ровно настолько, насколько реальны параллельные прямые. В то же время, они позволяют придать законченный вид всем нашим построениям.

Дадим более строгие определения. К каждой прямой d плоскости мы добавляем ровно одну новую точку U_d , причем ко всем параллельным прямым добавляется одна и та же точ-

ка. А все новые точки объединяются в одну «бесконечно удаленную» прямую u . Эта процедура называется *пополнением плоскости*.

На пополненной плоскости сохраняется «аксиома прямой» — *через любые две точки можно провести одну и только одну прямую*. Например, если одна из двух точек — «обычная» точка M , а другая — бесконечно удаленная точка U_d , то содержащая их прямая проходит через M и параллельна d ; ее единственность следует из аксиомы параллельных. Прямые удовлетворяют симметричному свойству: *любые две прямые имеют ровно одну общую точку* (обычную или бесконечную). Другими словами, на пополненной плоскости две прямые всегда пересекаются. Любое множество точек, в котором выделена некоторая система подмножеств — «прямых», удовлетворяющая этим двум свойствам*), называется (*абстрактной*) *проективной плоскостью*. Это очень общее определение допускает множество разных интерпретаций, среди них, как это ни парадоксально, и «плоскости» из конечного числа точек (см., например, решение задачи M1113 в «Кванте» № 11 — 12 за 1988 г.). Пополнение обычной плоскости бесконечно удаленными точками дает *действительную проективную плоскость*; только о такой плоскости и идет у нас речь.

Но вернемся к оптике. Теперь мы можем сказать, что наша идеальная линза создает изображение $p(A)$ для

*) Чтобы исключить совсем неинтересные примеры, к ним обычно добавляют еще одну: существуют 4 точки, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой.

любой точки A пополненной плоскости и, наоборот, любая точка этой плоскости является изображением некоторого точечного источника. В частности, фокус F изображается бесконечно удаленной точкой $U_a = p(F)$ главной оптической оси, а сама точка U_a — вторым фокусом $F' = p(U_a)$. Точно так же, любая прямая пополненной плоскости изображается прямой и сама служит изображением какой-то прямой. В частности, бесконечно удаленная прямая l изображает фокальную прямую m , а сама изображается второй фокальной прямой n . Когда мы смотрим на мир сквозь линзу, разница между бесконечно удаленными и «нормальными» элементами стирается: все точки и все прямые проективной плоскости равноправны.

На первых порах примириться с этим трудновато по простой причине — проективную плоскость мы воспринимаем пока только как продукт пополнения обычной плоскости. Но если немного напрячь воображение и взглянуть на нее иначе, можно увидеть нечто поистине неожиданное. Пусть α — пополненная плоскость, P — точка вне ее (рис. 2). Каждой точке A плоскости α соответствует ровно одна проходящая через центр проекции P прямая PA (бесконечно удаленной точке U_a соответствует прямая, параллельная d). Заменим точки на соответствующие прямые. Иначе говоря, рассмотрим «плоскость» Π , «точками» которой будут служить всевозможные прямые в пространстве, проходящие через P , а «прямыми» — плоскости, проходящие через P , точнее, каждая «прямая» — это совокупность всех обычных прямых (носящих теперь название «точек»), лежащих в одной, обычной плоскости; кавычки помогут нам избежать путаницы в терминах. Совершенно ясно, что послужившее нам отправным пунктом соответствие между «точками» Π и точками пополненной плоскости α сопоставляет каждой «прямой» на Π прямую на α , и наоборот. Поэтому Π — это просто другая модель действительной проективной плоскости (тем не менее небесполезно проверить непосредственно

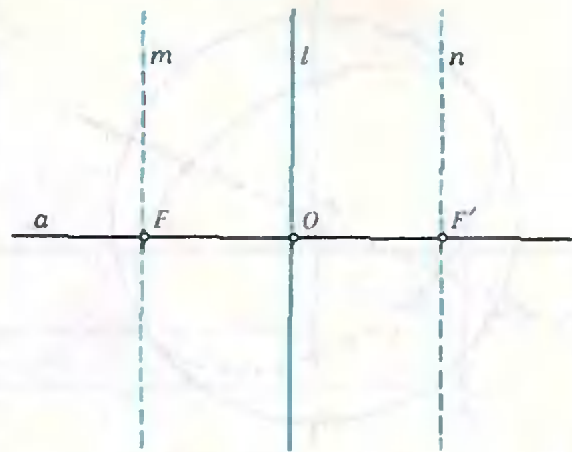


Рис. 1. Фокальные прямые m и n .

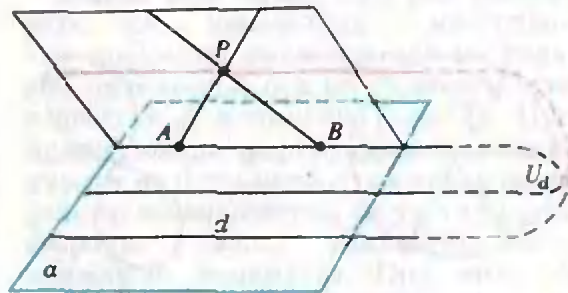


Рис. 2. Между точками пополненной плоскости и пучком прямых с центром P устанавливается взаимно однозначное соответствие.

выполнение трех приведенных выше аксиом проективной плоскости). И в этой модели никаких выделенных точек и прямых нет. Но мы можем вернуться к первой интерпретации, пересекая все прямые нашего пучка (т. е. «точки» Π) любой плоскостью β , не проходящей через P , при этом можно заранее договориться о том, какая «прямая» станет бесконечно удаленной.

Достижение «всеобщего равноправия» — отнюдь не главное преимущество построенной модели проективной плоскости. Мы можем теперь естественным образом ввести на проективной плоскости координаты (как координаты любого направляющего вектора заданной прямой-«точки»), записывать в этих координатах проективные преобразования и т. д. Но это тема для другой статьи. Мы же сейчас еще немного переделаем эту модель, чтобы лучше представлять,

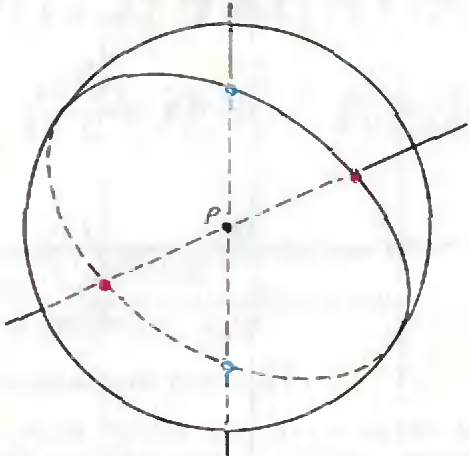


Рис. 3. Проективную плоскость можно представить как сферу с отождествленными точками.

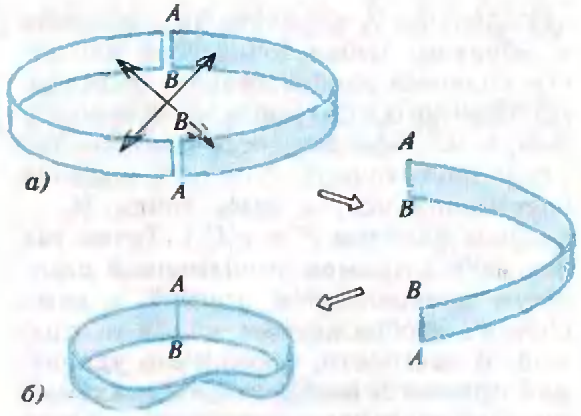


Рис. 6. Так появляется лента Мебиуса.

Как устроена проективная плоскость

Рассмотрим сферу с центром в точке P . Любая прямая нашего пучка («точка») пересекает ее в двух диаметрально противоположных точках. Заменяем прямые на эти пары точек. Тогда проективная плоскость примет обличье сферы (рис. 3), в которой концы каждого диаметра считаются за одну точку — отождествлены, а прямые проективной плоскости представляются окружностями с отождествленными диаметрально противоположными точками. Каждую пару таких точек можно «склеить», заменив их на одну обычную точку — это проделано на рисунке 4 (при этом приходится выполнять непрерывные деформации). Что же получилось в итоге? Окружность! Итак, добавляя к обычной прямой бесконечно удаленную точку, т. е. превращая ее в проективную прямую, мы как бы замыкаем ее в окружность.

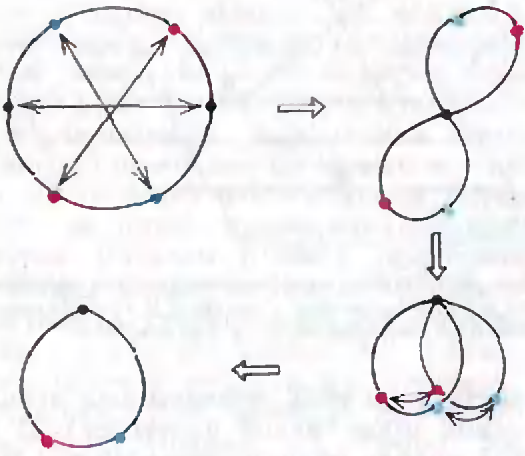


Рис. 4. Проективная прямая устроена как окружность.

Теперь попытаемся осуществить такую же склейку для всей плоскости. Вырежем из нашей сферы кольцевой пояс вдоль экватора — остаются две сферические шапочки, которые после склейки превращаются в одну (рис. 5). Поясок разрежем по двум противоположным меридианам (рис. 6, а; линии разреза обозначены одинаково, потому что они должны быть отождествлены) и подклеим одну половинку к другой. Склеим, наконец, образовавшуюся полоску по линии

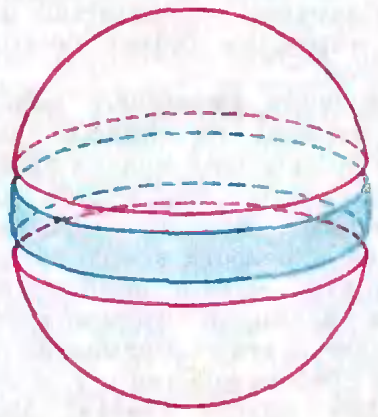


Рис. 5. Готовимся к склейке проективной плоскости.

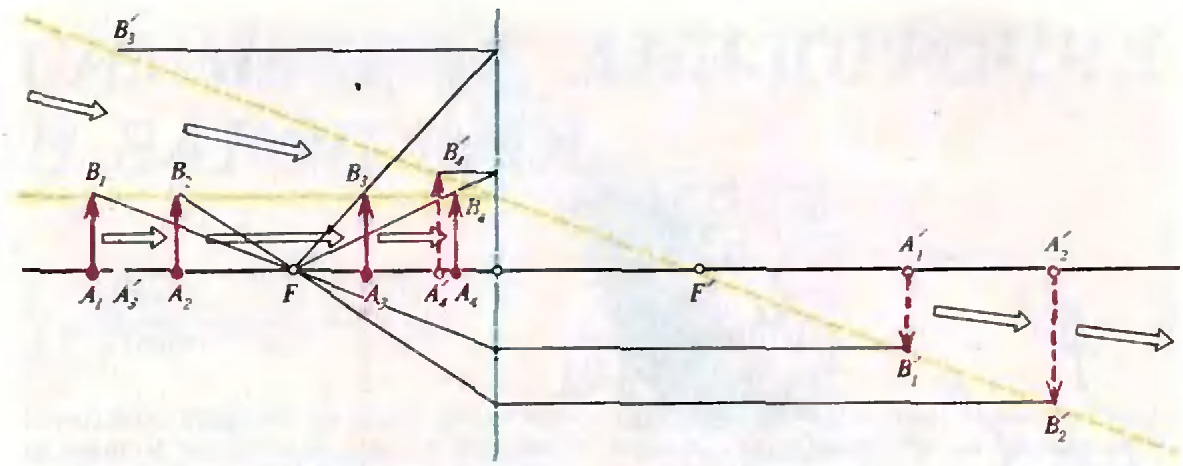


Рис. 7. Превращение прямого изображения в обратное.

разреза. Вот и обещанный сюрприз: перед склейкой полоску придется перевернуть на 180° , а значит, в результате получится лента Мёбиуса (рис. 6, б). Ее граница — это одна замкнутая кривая, которую осталось подклеить к окружности, ограничивающей сферическую шапочку. Таким образом, проективная плоскость — это сфера с дыркой, заклеенной лентой Мёбиуса. Если вы хотите узнать, как же выглядит такая необычная поверхность, загляните на обложку этого номера.

Наша обложка

На рисунках 1—4 последней страницы обложки показано, как построить поверхность в трехмерном пространстве, топологически эквивалентную проективной плоскости. Эта поверхность имеет линию самопересечения, на концах которой нарушается гладкость поверхности — в этих точках к ней нельзя провести касательную плоскость. От самопересечения избавиться можно, только выйдя в четырехмерное пространство, а вот

пример гладкой поверхности, топологически эквивалентной проективной плоскости, существует. Эта поверхность называется *поверхностью Боя* по имени открывшего ее математика. Ее построение, как и в первой модели, начинается с полусферы, у которой нужно попарно склеить диаметрально противоположные точки границы. Но на этот раз мы придадим границе форму шестиугольника, и разрежем полусферу на 3 дольки, как показано на рисунке 5 на 4-й странице обложки. Возьмем одну дольку, превратим две попавшие на нее стороны шестиугольника в петли (рис. 6) и изогнем поверхность так, чтобы одна

Теперь есть смысл еще раз посмотреть, как изменяется изображение предмета, движущегося по главной оптической оси из бесконечности к фокусу F и дальше (рис. 7). При приближении к фокусу изображение уходит на бесконечность и сразу после фокуса возвращается, но уже с другой стороны (ничего удивительного — прямая-то замкнута). При этом из прямого оно делается обратным, появляется по другую сторону оси (а это, так сказать, эффект ленты Мёбиуса).

из петель (петля b) легла на поверхность (рис. 7), петля a переходила бы в петлю b при повороте R на 120° вокруг оси NS , а в точке S образовался угол величиной 120° . То же самое проделывается с двумя другими дольками, которые приставляются к первой так, что полученная фигура переходит в себя при повороте R . Поверхность Боя образуется при склеивании долек по линиям разреза и петлям (петли составляют трехлепестковую замкнутую линию самопересечения). На 1-й странице обложки показан вид этой поверхности сверху, со стороны точки N .

В. Д.



СИММЕТРИЯ, АНИЗОТРОПИЯ И ЗАКОН ОМА

Кандидат физико-математических наук
С. Н. ЛЫКОВ,
доктор физико-математических наук
Д. А. ПАРШИН

Наверное, каждый человек имеет интуитивное представление о симметрии — симметрично расположены лепестки в цветке, узоры орнамента, атомы в кристаллической решетке и т. д. С симметрией связано понятие красоты. И не только в искусстве или архитектуре, но даже в математике и в физике. Причем в последнем случае она играет исключительно полезную роль: оказывается, что одних лишь соображений симметрии бывает достаточно для решения весьма трудных физических вопросов. В этом мы попытаемся убедить читателя с помощью наглядных примеров из физики твердого тела.

Представьте, что перед нами поставлена задача: определить электропроводность*) некоторого кристаллического вещества (с неизвестными пока свойствами). Вырежем из него прямоугольный образец, включим в цепь, как показано на рисунке 1. Измерив ток через образец и напряжение на нем, с помощью закона Ома найдем удельную проводимость σ :

$$\sigma = \frac{IL}{US}. \quad (1)$$

Она не зависит от размеров образца и поэтому, казалось бы, однозначно характеризует способность данного вещества проводить ток. Но почему «казалось бы»? Разве может кристалл иметь несколько значений проводимости?

Оказывается, да. И в этом нет ничего удивительного. Вообразите, к

*) Электропроводность — величина, обратная сопротивлению R проводника; удельная электропроводность, или удельная проводимость, — величина, обратная удельному сопротивлению, т. е. $\sigma = 1/\rho$.

примеру, что вещество оказалось слоистым: проводящие слои чередуются с непроводящими — диэлектрическими. Тогда результат измерения будет зависеть от того, как вырезать образец — вдоль или поперек слоев. Очевидно, что поперек слоев ток течь не сможет, только вдоль. Поэтому измерения в двух направлениях — такие, как на рисунке 2, — для этого вещества дадут два ответа: «поперечная» проводимость σ_{\perp} (рис. 2, а) равна нулю, а «продольная» σ_{\parallel} (рис. 2, б) — нет. (Реальным приме-

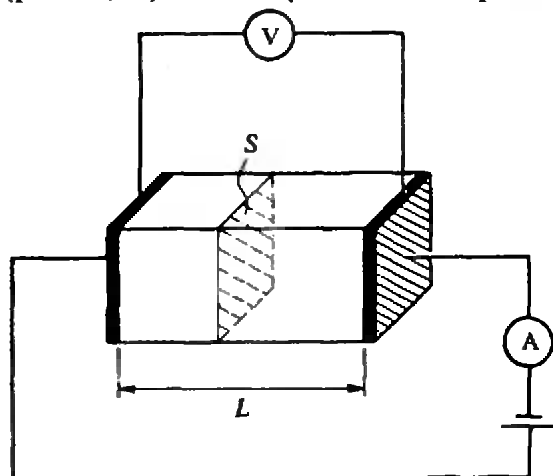


Рис. 1.

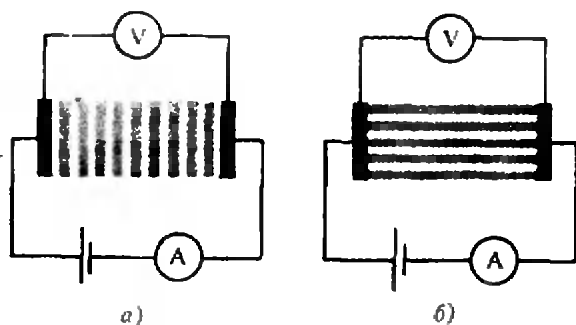


Рис. 2.

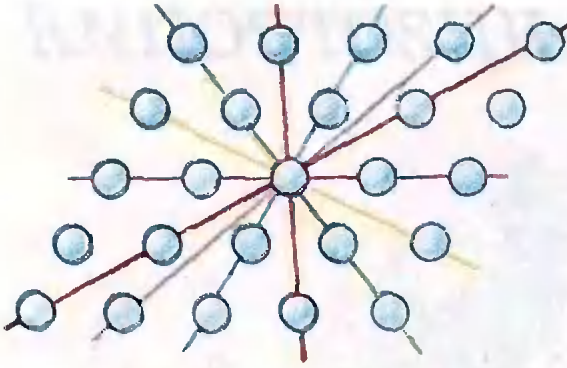


Рис. 3.

ром такой слоистой среды служит кристалл графита. Его продольная проводимость в 250 раз больше поперечной.)

Но и в отсутствие слоев проводимость среды может зависеть от направления тока в ней. Очень многие кристаллы обладают таким свойством. И вот почему.

На рисунке 3 показано расположение атомов в кристалле (настоящие кристаллы, конечно, трехмерны, однако суть дела выясняется уже на плоских картинках). Сравните два направления, обозначенные красной и синей линиями: видно, что они неэквивалентны. Почему? Ну, хотя бы потому, что вдоль «красного» направления атомы расположены реже, чем вдоль «синего». Попробуйте выбрать любое другое направление, и вы увидите, что оно неэквивалентно предыдущим. Естественно ожидать, что электроны тоже как-то «ощущают» эту неэквивалентность — в одних направлениях им легче продвигаться между атомами, в других труднее. А значит, и не надо удивляться, что проводимость кристалла может зависеть от направления тока.

Среды, свойства которых не одинаковы в разных направлениях, называют анизотропными. Причина анизотропии кристаллов, как вы теперь понимаете, — неэквивалентность направлений, проистекающая из регулярного расположения атомов.

Другое важное проявление анизотропии заключается в том, что ток в кристалле может течь и не в ту сторону, куда направлено электрическое поле. Поясним, о чем идет

речь. Из формулы (1) видно, что плотность тока $j = I/S$ пропорциональна напряженности приложенного к образцу электрического поля $E = U/L$:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2)$$

Однако ток и поле в среде характеризуются не только своей величиной, но и направлением. Вектор поля \vec{E} задает величину и направление силы $\vec{F} = e\vec{E}$, действующей на каждый заряд e . Под действием этой силы электроны движутся в среднем с определенной скоростью \vec{v} . Вектор плотности тока \vec{j} , который для краткости будем называть просто вектором тока, параллелен средней скорости направленного движения электронов (\vec{v}^*). Закон Ома, записанный в виде (2), связывает лишь величины тока \vec{j} и приложенного извне поля, но ничего не говорит о взаимной ориентации векторов \vec{j} и \vec{E} .

«Она же очевидна, — скажете вы. — Поле \vec{E} и сила \vec{F} параллельны. Средняя скорость электронов \vec{v} параллельна действующей силе \vec{F} . А ток \vec{j} параллелен \vec{v} . Значит, векторы \vec{j} и \vec{E} тоже параллельны, и вместо (2) мы можем записать:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (3)$$

Все очень просто!»

Верно ли такое рассуждение? Да... если речь идет об изотропной среде — среде, в которой все направления эквивалентны. Когда все направления эквивалентны, электронам безразлично, куда двигаться, и как только мы приложим внешнее поле, им не придется выбирать — вектор \vec{E} задает единственное выделенное направление. Вдоль него и потечет ток \vec{j} .

Но когда речь заходит о кристаллах, нельзя упускать из виду анизотропию! В любом кристалле есть богатый выбор неэквивалентных направлений (вспомните рисунок 3). В этом плане направление \vec{E} — лишь одно из них, выделенное с точки зрения движения электронов. По-

* Легко показать, что $\vec{j} = en\vec{v}$, где n — число электронов в единичном объеме, движущихся со скоростью \vec{v} . Заряд электрона e отрицателен, поэтому \vec{j} и \vec{v} ориентированы навстречу друг другу.

этому рассуждать так же, как в изотропном случае, нельзя. Слабое место наших рассуждений то, где говорится о параллельности векторов \vec{v} и \vec{F} . В анизотропной среде они могут оказаться непараллельными, и тогда не будут параллельны векторы \vec{j} и \vec{E} ! Наглядно эту ситуацию можно себе представить так.

Внешняя сила $\vec{F} = e\vec{E}$ гонит электроны «сквозь строй» атомов, а в нем есть «легкие» и «трудные» направления для движения. Сталкиваясь с атомами, электрон часто меняет направление полета, и лишь в среднем можно говорить о движении электрона по прямой. Проходя много межатомных расстояний, он успевает сместиться больше в «легком» направлении, чем в «трудном», и притом — не обязательно вдоль \vec{F} . Все зависит от деталей взаимодействия электронов с атомами и ориентации поля \vec{E} по отношению к наиболее выделенным кристаллическим направлениям.

Вдумчивый читатель, наверное, уже готов задать каверзный вопрос: в наших опытах (рис. 1) поле всегда прикладывается вдоль образца и ток, без сомнения, может течь тоже лишь вдоль образца. Где же здесь непараллельность векторов \vec{j} и \vec{E} ?

Признаемся, что утаили от вас важный факт, который устраняет это недоразумение. Мы не сказали, что (все из-за той же анизотропии) поле \vec{E} , вызывающее в толще кристалла ток \vec{j} , не обязано совпадать с приложенным вдоль образца электрическим полем напряженностью U/L . Ни по величине, ни по направлению. Возможная в случае анизотропной среды картина показана на рисунке 4, где вы видите итог цепочки событий,

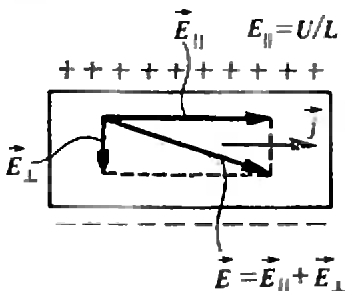


Рис. 4.

протекающих с момента подачи напряжения на образец. В этот момент на электроны начинает действовать приложенное вдоль образца поле — вектор \vec{E}_{\parallel} на рисунке 4. Возникающий ток, как уже говорилось, из-за анизотропии среды может оказаться направленным иначе, например, вправо и немного вверх (электроны при этом двигаются влево и немного вниз). Поперечное смещение электронов приведет к тому, что грани образца станут заряжаться (верхняя положительно, нижняя отрицательно), и в образце появится дополнительное к приложенному поперечное поле \vec{E}_{\perp} . Но оно само же и препятствует поперечному движению электронов вниз, поэтому нарастает только до тех пор, пока это движение не прекратится. Все это происходит в мгновение ока (за каких-нибудь 10^{-13} с) и в дальнейшем картина не меняется: ток \vec{j} продолжает течь вдоль образца, но результирующее поле $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ направлено под углом к нему. Кстати, это легко проверить — между верхней и нижней гранями должна быть разность потенциалов, обусловленная дополнительной составляющей \vec{E}_{\perp} вектора поля \vec{E} . Это действительно обнаруживается на опыте.

Итак, уже первое знакомство с законом Ома для анизотропных проводников показывает, что проводимость кристалла, вообще говоря, различна в разных направлениях, причем ток \vec{j} может течь под углом к электрическому полю \vec{E} .

«Кажется, — подумает кто-то из читателей, — мы взялись за непосильную задачу! Неужели предстоит выполнить бесконечное число измерений, для каждого мыслимого направления?»

Нет, ситуация попроще. Это выяснится после того, как мы придадим закону Ома четкую математическую форму. И уж совсем все просто будет в случае кристалла с достаточно высокой симметрией. О ней-то и пойдет теперь речь.

На рисунке 3 был приведен пример кристаллической структуры, в кото-

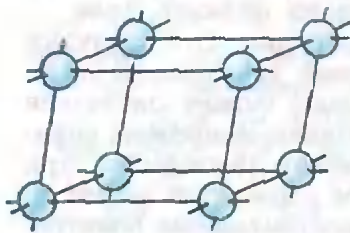


Рис. 5.

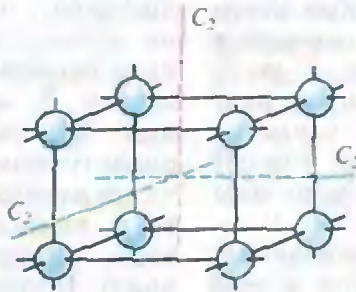


Рис. 6.

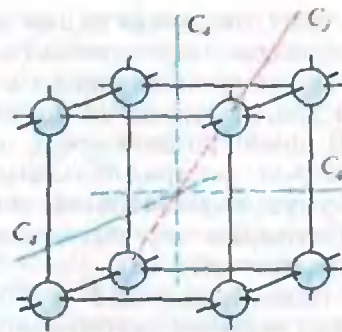


Рис. 7.

рой все направления неэквивалентны. Обратимся к другим примерам, на сей раз трехмерным. Не будучи искусным художником, трудно передать картину, которая открылась бы «путешественнику», разгуливающему внутри кристалла и любующемуся перспективой стройных атомных рядов. Поэтому на рисунках 5—7 показаны лишь малые фрагменты трех разных типов кристаллических структур.

На рисунке 5 атомы расположены в вершинах ничем не примечательного косоугольного параллелепипеда. Этот кристалл (как и его двухмерный аналог на рисунке 3) не имеет эквивалентных направлений. Но следующие примеры интереснее. На рисунке 6 атомы находятся в вершинах прямоугольного параллелепипеда, а линии, обозначенные символом C_2 , проведены через его центр перпендикулярно граням. На рисунке 7, где вместо параллелепипеда изображен куб, аналогичные линии отмечены символом C_4 и, кроме того, проведена пространственная диагональ куба — C_3 . Чем примечательны все эти линии?

Линии C_2 , C_3 , C_4 — это оси симметрии показанных на рисунках 6 и 7 кристаллических структур. Так называют направления, выделенные тем, что, поворачивая вокруг любого из них весь кристалл как целое, можно получить расположение атомов, совершенно не отличимое от исходного. Надо лишь выдержать определенный угол поворота: 180° для оси C_2 , 120° для оси C_3 , 90° для оси C_4 — т. е. $2\pi/n$ для оси C_n ; кратные этим значения угла поворота тоже годятся, так как отвечают повторе-

нию указанных поворотов. Кстати, C_n — общепринятое обозначение оси симметрии; число n называется ее «порядком».

С точки зрения симметрии мы можем уточнить понятие эквивалентности направлений: любые направления, которые «переходят друг в друга» при поворотах вокруг осей симметрии, эквивалентны.

Чем больше осей высокого порядка имеет кристалл, тем больше в нем эквивалентных направлений, тем сильнее симметрия конкурирует с анизотропией. Как эта конкуренция сказывается на проводимости, вы сейчас увидите, но прежде советуем самостоятельно найти примеры эквивалентных и неэквивалентных направлений в кристаллических структурах, показанных на рисунках 6 и 7. В частности, нам будет важно, что в кубическом кристалле сами оси C_4 — эквивалентные направления (переходят друг в друга при поворотах вокруг C_3), а аналогичные им оси C_2 на рисунке 6 неэквивалентны.

Ну, так как же на практике применить соображения симметрии к вопросу о проводимости? Покажем это на примерах. Начнем со случая, когда в кристалле есть три взаимно перпендикулярные (неэквивалентные) оси симметрии C_2 (как на рисунке 6). Для удобства пронумеруем их — 1, 2, 3 (см. рис. 8). Спросим себя: куда будет течь ток \vec{j} , если поле \vec{E} направлено вдоль одной из осей второго порядка, скажем, вдоль оси 1? Ответ оказывается неожиданно простым — ток будет течь вдоль той же оси симметрии, параллельно

полю! Докажем это методом «от противного».

Предположим, что ток \vec{j} течет под углом к оси симметрии 1. Повернем кристалл вместе с приложенным к нему полем \vec{E} на 180° вокруг этой оси. Очевидно, тогда все, что есть внутри кристалла — «строй» атомов и пронизывающий его поток электронов, — тоже повернется. И, так как вектор \vec{j} , по предположению, не параллелен оси поворота, его новая ориентация, показанная пунктиром на рисунке 8, будет отличаться от исходной. Но ведь микроскопическая картина, определяющая направление тока \vec{j} , после такого поворота выглядит так же, как прежде: новое положение атомов неотлично от первоначального, а поле \vec{E} было и осталось параллельным направлению 1. Значит, и ориентация тока \vec{j} должна быть прежней.

Таким образом, мы пришли к противоречию, и единственный путь избежать его — признать, что в данном случае вектор \vec{j} ориентирован как и вектор \vec{E} — вдоль оси 1 (рис. 9).

Примечательно, что этот вывод не чувствителен к деталям микроскопической структуры кристалла — не пришлось выяснять, как именно расположены атомы и каковы направления, наиболее легкие для движения электронов. Наличие других осей симметрии тоже не использовалось. Не важен даже порядок той оси симметрии, вдоль которой направлено поле \vec{E} , — рассуждение останется в силе при любом значении угла поворота (не кратном 360°), допускаемом симметрией.

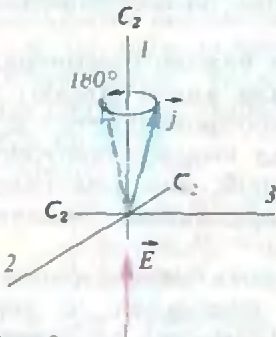


Рис. 8.

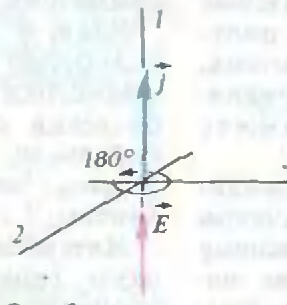


Рис. 9.

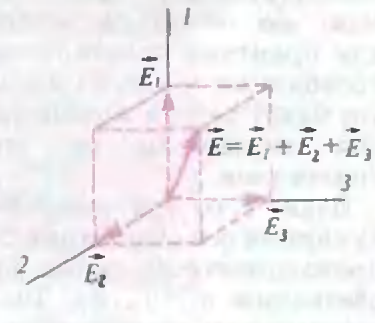


Рис. 10.

Таким образом, если кристалл имеет ось симметрии и поле \vec{E} направлено вдоль нее, ток \vec{j} течет вдоль поля. В этих условиях связь между \vec{j} и \vec{E} дается равенством (3), где коэффициент пропорциональности σ в данном случае — проводимость вдоль этой оси симметрии. Проведя измерение (рис. 1) на образце, вырезанном вдоль оси симметрии кристалла, мы можем найти σ по формуле (1). Ведь в отличие от ситуации, изображенной на рисунке 4, у поля заведомо не будет составляющих, поперечных к току; поэтому $E=U/L$, и (1) сразу следует из (3).

Соответственно, три измерения на образцах, ориентированных вдоль осей симметрии 1, 2, 3, дадут нам три значения проводимости: σ_1 , σ_2 , σ_3 . Ясно, что они, вообще говоря, окажутся различными, поскольку направления 1, 2, 3 неэквивалентны:

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3. \quad (4)$$

А какова будет картина, если поле \vec{E} в нашем кристалле направлено не вдоль оси симметрии? Куда потечет ток \vec{j} ? Чтобы разобраться в этом, найдем проекции вектора \vec{E} на оси 1, 2, 3, т. е. представим поле в виде суммы $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ (рис. 10). Теперь посмотрим, какой вклад в ток дает каждое из слагаемых.

Поле \vec{E}_1 направлено вдоль оси симметрии 1 и, значит, порождает ток в том же направлении:

$$\vec{j}_1 = \sigma_1 \vec{E}_1.$$

Аналогично, две другие компоненты поля вызывают токи вдоль осей симметрии 2 и 3:

$$\vec{j}_2 = \sigma_2 \vec{E}_2, \quad \vec{j}_3 = \sigma_3 \vec{E}_3.$$

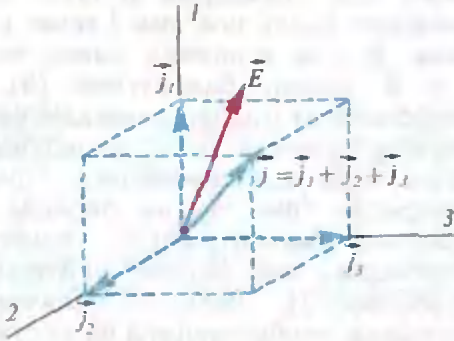


Рис. 11.

Эти соотношения определяют результирующий ток $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3$:

$$\vec{j} = \sigma_1 \vec{E}_1 + \sigma_2 \vec{E}_2 + \sigma_3 \vec{E}_3. \quad (5)$$

Из-за неравенств (4) отношения проекций тока и поля ($j_i/E_i = \sigma_i$ и т. д.) на направления 1, 2, 3 неодинаковы. Значит, векторы \vec{j} и \vec{E} не параллельны (рис. 11). Этот отнюдь не новый для нас факт, как видим, прямо связан с различием проводимости в разных направлениях.

И вот что интересно. Формула (5) говорит нам: при любой ориентации поля \vec{E} величина и направление тока \vec{j} полностью определяются лишь значениями проводимости вдоль осей симметрии нашего кристалла. О бесконечном числе измерений нет и речи, достаточно найти $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Правда, сперва надо найти направления самих осей симметрии, но это уже отдельная история.

Следующий пример — кубический кристалл (рис. 7). Но ведь это частный случай предыдущего? Да. И притом самый интересный! Во-первых, кубическая симметрия — наивысшая из возможных для кристаллов. Во-вторых, ею обладают многие важные для практики кристаллические полупроводники — Ge, Si и др. В-третьих, это будет самый яркий пример влияния симметрии на проводимость кристаллов.

Итак, есть три взаимно перпендикулярные оси симметрии C_4 . Значения проводимости вдоль них по-прежнему обозначим $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Тогда уже известные нам рассуждения снова при-

ведут к формуле (5), справедливой при любой ориентации вектора \vec{E} . А теперь вспомним, что все три направления C_4 в кубическом кристалле эквивалентны друг другу. А из этого, как вы догадываетесь, следует, что

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma. \quad (6)$$

Да, симметрия гарантирует, что проводимость вдоль этих трех направлений заведомо одна и та же. Но только ли вдоль них? Ведь с учетом (6) формула (5) превращается... в формулу (3), известную нам как закон Ома для изотропной среды —

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \sigma \vec{E}_1 + \sigma \vec{E}_2 + \sigma \vec{E}_3 = \\ &= \sigma (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3) = \sigma \vec{E}, \end{aligned}$$

т. е., во-первых, независимо от направления приложенного поля \vec{E} ток \vec{j} всегда параллелен полю \vec{E} и, во-вторых, величина его определяется только одним значением проводимости σ . Проводимость кубического кристалла одинакова для всех направлений!

Не правда ли, результат неожиданный и безусловно красивый? Ведь не все направления в кубическом кристалле эквивалентны — сравните, например, линии C_4 и C_3 на рисунке 7. Обе они — оси симметрии, и ток, понятно, будет параллелен полю \vec{E} , если оно приложено вдоль любой из них. Но почему при обеих ориентациях \vec{E} должна быть одинаковой величина тока? Ведь электроны «ощущают» неэквивалентность направлений, и это, казалось бы, должно проявиться в различии значений соответствующих проводимостей. Но нет! Безразлично, в какой ориентации вырезать образец, — измерения должны дать единственное значение σ . И мы только что доказали это, исходя лишь из соображений симметрии.

Итак, в данном случае симметрия полностью победила анизотропию: в отношении электропроводности кубический кристалл подобен изотропной среде, в которой, как уже говорилось, все направления эквивалентны.

Интересно сравнить микроскопическую структуру кристалла и изотропной среды. Примером последней

служит аморфное тело, характеризующееся совершенно беспорядочным расположением атомов. Такое расположение, скажете вы, вообще не симметрично — любые повороты (не кратные 360°) будут давать разные картины. Но все картины будут одинаково беспорядочны и в этом смысле не отличимы от исходной. Беспорядок выравнивает (усредняет) свойства среды во всех направлениях. Он делает все направления эквивалентными. Значит, как это ни парадоксально, симметрия направлений в аморфном теле выше, чем даже в кубическом кристалле! Любое направление — ось симметрии. В свете этого закон Ома (3) для изотропных сред кажется просто азбучной истиной.

Да, симметрия направлений — благо. Но как быть, если ее нет совсем (например, кристалл на рисунке 5 не имеет ни одной оси симметрии)? Придется обратиться к закону Ома в самом общем виде. Попробуем его установить.

Произвольно выберем три взаимно перпендикулярные направления x , y , z (координатные оси). Разложим поле \vec{E} на составляющие E_x , E_y , E_z . Ток \vec{j} будем искать тоже в виде трех составляющих j_x , j_y , j_z .

Из чего складывается j_x ? Координатные оси — это еще не оси симметрии! Три тока, порожденные тремя компонентами поля, не обязаны течь именно вдоль осей x , y и z . Значит, каждый ток будет иметь x -, y - и z -составляющие, т. е. не только x -компонента поля, но также y - и z -компонента вектора \vec{E} дают пропорциональный вклад в j_x . Соответствующие коэффициенты пропорциональности обозначим σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{xz} .

А из чего складываются j_y и j_z ? Ответ почти дословно совпадает с предыдущим, лишь коэффициенты будут другие.

Итак:

$$\begin{cases} j_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y + \sigma_{xz}E_z, \\ j_y = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y + \sigma_{yz}E_z, \\ j_z = \sigma_{zx}E_x + \sigma_{zy}E_y + \sigma_{zz}E_z. \end{cases} \quad (7)$$

Эти три равенства представляют собой закон Ома для среды с произ-

вольной степенью анизотропии. Он гласит: величина тока \vec{j} пропорциональна величине поля \vec{E} , а направления их, вообще говоря, могут быть различны. Формулы (7) устанавливают в самом общем виде линейную связь между вектором \vec{j} и вектором \vec{E} . Как видим, в заданной системе координат эта связь записывается с помощью девяти «коэффициентов проводимости» σ_{ik} (здесь $i, k = x, y, z$).

Все рассмотренные ранее примеры укладываются в (7) как частные случаи. Так, если есть возможность выбрать оси x , y , z вдоль осей симметрии 1, 2, 3, надо это сделать. Тогда все коэффициенты, кроме $\sigma_{xx} = \sigma_1$, $\sigma_{yy} = \sigma_2$, $\sigma_{zz} = \sigma_3$, будут заведомо равны нулю (нет проблем с их измерением!), а равенства (7) сведутся к (5). Если к тому же две из осей эквивалентны, скажем 1 и 2, то заведомо $\sigma_1 = \sigma_2$ (еще одним измерением меньше!). Наконец, если все три оси эквивалентны — кубическая симметрия, — возвращаемся к формуле (3) (одно измерение дает всю информацию о проводимости кристалла!). Вот как полезно знать симметрию.

Наш рассказ о проводимости и влиянии симметрии на нее закончен. Конечно, этим не исчерпывается список вопросов, которые могут быть решены «из соображений симметрии». Есть множество других физических явлений, в которых симметрия играет определяющую роль. Но об этом — в другой раз.





В ТАИНСТВЕННОМ МИРЕ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

Доктор физико-математических наук
Н. Я. ВИЛЕНКИН

Как можно и как нельзя обращаться с рядами

Древнегреческая математика вырастала в спорах о бесконечном. Еще в V веке до н. э. философ Зенон Элейский показал, к каким результатам приводит беспечное обращение с этим таинственным понятием. Он «доказывал», например, что быстрый Ахиллес никогда не догонит медленно ползущую черепаху, что летящая стрела никогда не сдвинется с места и другие, столь же парадоксальные вещи. В основе этих парадоксов лежала возможность разбить отрезок на бесконечное множество неравных частей. Для этого достаточно разбить отрезок сначала пополам, потом одну из полученных частей снова разбить пополам и продолжать эту операцию бесконечно много раз (в математическом фольклоре таким методом рекомендуется ловить льва в пустыне, только пополам делить не отрезок, а пустыню).

После парадоксов Зенона понятие бесконечности было надолго изгнано из математики и лишь в XVII веке оно было восстановлено в правах. Без него немислимо было создание новой науки — математического анализа. А одним из самых могучих средств этой науки были бесконечные ряды, т. е. суммы, состоящие из бесконечного множества слагаемых. Ведь уже рассуждение Зенона означало, что целое состоит из суммы половины, четверти, восьмой и т. д., т. е. опиралось на равенство

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1. \quad (1)$$

Оно становится более наглядным, если представить себе, что от отрезка длиной 1 отрезают сначала половину, потом половину остатка и продолжают это «отрезание» до бесконечности. Ясно, что от отрезка ничего не останется, т. е. сумма длин отрезанных частей равна 1. А это и выражается равенством (1).

Более общим, чем (1), является равенство

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q}. \quad (2)$$

Конечно, оно верно, лишь если $|q| < 1$ — в этом случае модули слагаемых убывают, а значение суммы $1 + q + \dots + q^{n-1}$ первых n слагаемых приближается с ростом n к

$\frac{1}{1-q}$. Но в XVIII веке ученые пытались пользоваться этим равенством для любых значений q . Например, полагая $q = -1$, они получали равенство

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

а при $q = 3$ — равенство

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n + \dots = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}.$$

Вообще, в XVIII веке с бесконечными рядами обращались как с конечными суммами. Не заботясь ни о чем, в них переставляли слагаемые, умножали друг друга два бесконечных ряда как обычные многочлены и т. д. Но потом обнаружилось, что при таком подходе сумма положительных чисел может оказаться отрицательным числом (как мы уже ви-



существует, а любое натуральное число, большее 1, разлагается единственным образом в произведение простых чисел, то среди чисел $2^k \cdot 3^h \cdot 5^k \dots p^h$ по одному разу встречаются все натуральные числа. Таким образом, справа у нас должна получиться сумма бесконечного ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (6)$$

И мы получили бы, что ряд (6) имеет конечную сумму.

Но уже давно было известно, что это не так. В самом деле, из неравенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &\geq \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} \geq \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{5} \geq \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{6} &\geq \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{7} \geq \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{8} \geq \frac{1}{9}, \\ \frac{1}{9} &\geq \frac{1}{10}, \dots \end{aligned}$$

следует, что сумма ряда (6) не может быть меньше, чем сумма ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

Но сумма чисел в каждой скобке равна $\frac{1}{2}$, а складывая бесконечно много «половинок», получаем бесконечность. И выходит, что конечное число

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

равно бесконечности! Это противоречие показывает, что наше предположение о конечности совокупности простых чисел ложно, а потому простых чисел бесконечно много.

Дзета-функция

Читатель, знакомый с классическим доказательством теоремы о простых числах, разочарованно скажет, что новое доказательство ничуть не проще

того, которое придумал две с лишним тысячи лет тому назад Евклид. Так-то оно так, но оказалось, что из доказательства Эйлера можно узнать такие вещи о простых числах, которые из евклидовского доказательства вывести нельзя. Для этого надо образовать ряд

$$1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots + \frac{1}{n^z} + \dots \quad (7)$$

и изучать его поведение при всевозможных значениях z . Ввиду исключительной важности суммы ряда (7) ей дали особое обозначение $\zeta(z)$ и назвали *дзета-функцией*.

Оказалось, что вопрос о том, сколь часто встречаются простые числа среди натуральных, зависит именно от поведения дзета-функции $\zeta(z)$ при комплексных значениях z . Разумеется, говорить об этих значениях можно, только если уметь возводить числа в комплексные степени. А это делается с помощью выведенной Эйлером же формулы

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (8)$$

о которой мы поговорим позднее.

Главный вопрос, от решения которого зависят очень многие проблемы теории чисел, состоит в следующем: при каких значениях z дзета-функция обращается в нуль? Еще во второй половине XIX века замечательный немецкий математик Б. Риман (1826—1866) высказал предположение, что все эти значения (их зовут *нулями дзета-функции*) комплексны и имеют вид $z_k = \frac{1}{2} + iy_k$. Много усилий приложили математики, чтобы доказать это утверждение. Но пока что никому это не удалось, хотя некоторые и уверяли, что нашли доказательство. Для проверки утверждения Римана были привлечены быстродействующие вычислительные машины. С их помощью удалось найти несколько миллионов нулей дзета-функции. Все они имеют тот самый вид, который предсказал Риман. Если бы речь шла о каком-нибудь вопросе физики или биологии, никто бы не усомнился в том, что Риман прав — гипотеза, подтвержденная миллионами опытов, становится в этих науках незыблемым утверждением. Но не такова математика — она имеет дело с бесконечным множеством натуральных чисел, и вдруг для миллиардного или квинтиллионного нуля дзета-функции гипотеза Римана окажется ложной!

Интересуются математики значениями дзета-функции и при натуральных z . Для четных z эти значения вычислил Эйлер, вновь проявив непревзойденное мастерство обраще-



ния с рядами. Он воспользовался уже известными до него разложениями функций в степенные ряды. Вы знаете, конечно, что производная функции e^x равна той же самой функции, а производная функции x^n равна nx^{n-1} . Этого достаточно, чтобы найти коэффициенты разложения функции e^x в степенной ряд, т. е. такие числа $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, что для всех x выполняется равенство

$$e^x = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \quad (9)$$

С этой целью положим в равенстве (9) $x=0$. Так как $e^0=1$, а все слагаемые справа, кроме первого, обращаются при $x=0$ в нуль, получаем, что $a_0=1$. А теперь продифференцируем обе части равенства (9) по x и получим

$$e^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

т. е.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1} + \dots$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, видим, что

$$a_1 = a_0 = 1, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2!},$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_1}{3!} = \frac{1}{3!}, \dots, \quad a_n = \frac{1}{n!}, \dots$$

(здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$), и потому

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (10)$$

Аналогично находятся разложения по степеням x для функций $\sin x$ и $\cos x$. Надо лишь учесть, что $\sin x$ — нечетная функция и потому раскладывается в ряд по нечетным степеням x , $\cos x$ — функция четная и потому раскладывается по четным степеням x . Учитывая, что $(\sin x)' = \cos x$, причем $\cos 0=1$, легко получаем искомые разложения

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (11)$$

и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad (12)$$

Для современного математика приведенный выше вывод формул (10) — (12) послужил бы мишенью для разнообразных придилок. «Помилуйте, — скажет он, — а откуда известно, что функции e^x , $\sin x$, $\cos x$ вообще разлагаются в степенные ряды? И кто сказал, что бесконечные ряды можно дифференцировать по тем же правилам, что и многочлены? Ведь производная суммы бесконечного множества слагаемых не всегда равна сумме производных, и интегрировать ряды почленно вообще говоря нельзя.» И так далее, и так далее. И что самое печальное, он будет совершенно прав. Но в XVIII веке этих тонкостей не знали и, руководствуясь правилом «Работайте, и вера к вам придет», математики выводили замечательные формулы, предоставляя внукам давать строгие доказательства полученных дедами результатов.

Более того, они смело применяли разложения в ряды не только для действительных, но и для комплексных значений аргумента. Это позволяло им находить значения для степеней с комплексными показателями, синусы и косинусы от комплексных чисел. Рассмотрение функций в комплексной области позволяло устанавливать их скрытые свойства.

Многие из этих свойств связаны с упомянутой выше формулой Эйлера (8). Чтобы доказать ее, достаточно в ряд (10) вместо x подставить ix , а потом отдельно сгруппировать члены, содержащие i , и члены, в которые i не входит. Прodelайте эти выкладки сами. Из формулы Эйлера следует, например, что

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1,$$

и потому $e^{x+2\pi i} = e^x e^{2\pi i} = e^x$. Значит, показательная функция периодична, как и тригонометрические функции, только ее период — мнимое число $2\pi i$. Из формулы Эйлера сле-

дует далее, что $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ и потому, например, $\cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} > 1$. Зна-

чит, в комплексной области косинус может оказаться и больше, чем 1.

Но мы отвлеклись от рассказа о дзета-функции и ее значениях. Напомним, что задача состоит в нахождении значений $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, ..., $\zeta(2k)$, ..., т. е. сумм рядов.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots, \quad (13)$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots \quad (14)$$

Эту задачу тоже решил Эйлер. Для этого он взял да и разложил бесконечный ряд на множители. Он знал, что если многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ имеет корни x_1, x_2, \dots, x_n , то справедливо равенство

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = a_n \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \times \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right) \quad (15)$$

(ведь обе части этого равенства обращаются в нуль при $x=x_1, x_2, \dots, x_n$, а при $x=0$ обе части равны a_n). Эйлер смело применил эту формулу к бесконечным рядам. Так как функция $\frac{\sin x}{x}$ обращается в нуль в точках вида $\pm n\pi$, где n — натуральное число, он по аналогии с формулой (15) написал

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \times \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots$$

(Эйлер использовал здесь также равенство $\frac{\sin x}{x} = 1$ при $x=0$, которое читатель, возможно, предпочел бы заметить формулой для предела $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$. Но Эйлер не боялся схватить тройку по «алгебре и анализу!») После этого, сгруппировав соседние члены, Эйлер получил:

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \quad (16)$$

И здесь незнание опасностей дало возможность Эйлеру быстро двигаться вперед. Не прошло и ста лет, как немецкий математик К. Вейерштрасс (1815—1897) строго обосновал рассуждение Эйлера. Более того, он доказал, что если функция $f(z)$ при любом (комплексном) значении z является суммой ряда $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n + \dots$, то ее можно разложить на множители способом, похожим на примененный Эйлером.

А из формулы (16) без труда получаем сумму ряда (13). Для этого нужно лишь раскрыть скобки в правой части равенства (16), а слева заменить $\sin x$ по формуле (11), после чего сравнить коэффициенты при x^2 слева и справа. Прделаем это. Если раскрыть скобки в конечном произведении

$$\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

то у получившегося многочлена коэффициент при x^2 будет равен

$$-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \dots - \frac{1}{n^2\pi^2};$$

если устремить n к бесконечности, этот коэффициент будет стремиться к сумме бесконечного ряда

$$-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \dots - \frac{1}{n^2\pi^2} - \dots,$$

т. е. к $-\frac{1}{\pi^2} \zeta(2)$. У ряда для $\frac{\sin x}{x}$ коэффициент при x^2 равен $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$. Сравнивая коэффициенты при x^2 , мы получаем совершенно неожиданное равенство

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (17)$$

Аналогично, сравнивая коэффициенты при x^4 слева и справа и учитывая равенства (14) и (17), получаем

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}. \quad (18)$$



Затем вычисляем $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ и т. д.

Как ни странно, ничего похожего для значений дзета-функции при нечетных значениях z неизвестно. С большим трудом удалось около десяти лет назад доказать, что число $\zeta(3)$ иррационально.

От Эйлера ведет свое начало знаменитая Петербургская математическая школа. К ней принадлежал и замечательный русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894). И хотя Чебышева отделяет от Эйлера целое столетие, в его творчестве чувствуется дух эйлеровой математики, эйлеров интерес к свойствам натуральных чисел, к изучению свойств конкретных функций, решению конкретных проблем, имеющих важное прикладное значение.

Одна вероятностная задача

Какова вероятность того, что наудачу взятая дробь несократима? Эта задача, поставленная и решенная Чебышевым, тесно связана с исследованиями Эйлера. Для современной математика и она сформулирована не слишком строго; на сей раз мы пойдем ему навстречу и уточним постановку задачи.

Для этого возьмем не все дроби, а лишь дроби, числитель и знаменатель которых не превосходит некоторого числа N . К какому числу приближается доля несократимых дробей среди выбранных дробей при неограниченном возрастании N ? Именно, обозначим через $f(N)$ количество несократимых дробей вида $\frac{m}{n}$, $1 \leq m \leq N$, $1 \leq n \leq N$. Всего дробей такого вида имеется N^2 . Мы должны найти $\lim_{N \rightarrow \infty} f(N)/N^2$ — он и будет вероятностью того, что выбранная наудачу дробь несократима.

Для того чтобы найти этот предел, возьмем какое-нибудь конкретное большое N , скажем 1000, и посмотрим, сколько дробей из миллиона дро-

бей вида $\frac{m}{n}$, $1 \leq m \leq 1000$, $1 \leq n \leq 1000$, можно сократить на 2. Для этого их числители и знаменатели должны быть четными числами. Но количество четных чисел от 1 до 1000 равно 500, поэтому дробей, сократимых на 2, будет $500 \cdot 500$, т. е. 250 000. А это как раз четверть общего числа дробей, у которых и числитель, и знаменатель не превосходят 1000. Но $1/4 = 1/2^2$, а потому доля дробей, не сократимых на 2, выражается числом $1 - \frac{1}{2^2}$.

Аналогично устанавливаем, что доля дробей, которые нельзя сократить на 3, примерно равна $1 - \frac{1}{3^2}$; доля несократимых на 5 будет $1 - \frac{1}{5^2}$ от общего количества и т. д.

Далее, естественно считать, что дроби, которые нельзя сократить на 3, будут с одинаковой частотой встречаться среди дробей, которые можно сократить на 2, и дробей, которые нельзя сократить на 2. Это значит, что доля дробей, которые нельзя сократить на 3, среди дробей, которые нельзя сократить на 2, тоже будет примерно равна $1 - \frac{1}{3^2}$. Таким образом, доля дробей, не сократимых ни на 2, ни на 3, среди всех дробей будет

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right),$$

доля дробей, не сократимых ни на 2, ни на 3, ни на 5 —

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right),$$

а доля дробей, которые нельзя сократить ни на одно простое число (т. е. просто несократимых), выражается бесконечным произведением

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \dots \quad (19)$$

Это означает, что среди N^2 дробей,

у которых и числитель, и знаменатель не превосходят числа N , несократимыми будут примерно

$$N^2 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \dots \quad (20)$$

дробей.

Мы говорим лишь «примерно» потому, что N может не делиться на простое число p , а тогда число (20) будет нецелым. Кроме того, надо брать не все простые числа, а лишь те, которые не превосходят N . Но по мере роста N формула (20) становится все точнее и точнее и мы получаем следующий ответ на задачу Чебышева:

Вероятность того, что наудачу взятая дробь несократима, равна значению A бесконечного произведения (19).

Чему же равно это произведение? Формула (17) позволяет ответить на этот вопрос.

В самом деле, будем искать вместо A значение $\frac{1}{A}$:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} \dots$$

Применяя к каждой дроби $\frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}$ формулу (2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \dots\right) \dots \end{aligned}$$

Проведя рассуждения, похожие на примененные в эйлеровом доказательстве теоремы Евклида о простых числах (см. выше), после раскрытия скобок получим:

$$\frac{1}{A} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots,$$

а мы уже знаем, что эта сумма равна $\frac{\pi^2}{6}$. Значит, $A = \frac{6}{\pi^2}$. Итак, вероят-

ность того, что наудачу взятая дробь несократима, равна $\frac{6}{\pi^2} \approx 0,6079\dots$



Арифметическая ошибка в «Войне и мире»

В романе Л. Н. Толстого «Война и мир» имеется следующее рассуждение Пьера Безухова (мы приводим цитату по собранию сочинений графа Л. Н. Толстого, изданному в Москве в 1886 году, ч. 7, с. 110—111):

«Французские буквы, подобно еврейскому числообразию, по которому первыми десятью буквами обозначаются единицы, и прочими десятками, имеют следующее значение:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20

m	n	o	p	q	r	s	t
30	40	50	60	70	80	90	100

u	v	w	x	y	z
110	120	130	140	150	160

Написав на этой азбуке слова *L'empereur Napoléon* (император Наполеон), вы-

$$\begin{aligned} &L'empereur Napoléon \\ &20+5+30+60+5+80+5+110+80+40+1+60+50+ \\ &+20+5+50+40=661\neq 666. \end{aligned}$$

Можно было бы подумать, что недостающая пятерка есть «е», отброшенное от артикля, когда б не замечание самого Льва Николаевича страницей ниже:

ходит, что сумма этих чисел равна 666-ти и что поэтому Наполеон есть тот зверь, о котором предсказано в Апокалипсисе».

Сразу бросается в глаза пробел — в ряду «очислованных» букв отсутствует одна, именно *j*, но и помимо этого в немалое смущение вводит непосредственная числовая проверка:

«5 означает «е», то самое «е», которое было откинуто в артикле перед словом *l'empereur*».

Б. С. Стечкин

Задачник „Кванта“

Задачи

M1186 — M1190, Ф1193 — Ф1197

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 декабря 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1186» или «Ф1193». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи M1186 — M1190 предлагались в этом году на весеннем Турнире городов.

M1186. Будем говорить, что два четырехугольника — бумажный и картонный — подходят друг к другу, если картонный можно наложить на бумажный так, что все его вершины попадут на стороны бумажного (по одной на каждую) и при этом, если перегнуть четыре образовавшихся маленьких бумажных треугольника на картонный четырехугольник, то они закроют весь его в один слой.

а) Докажите, что если четырехугольники подходят друг к другу, то у бумажного либо две противоположные стороны параллельны, либо диагонали перпендикулярны.

б) Докажите, что если бумажный четырехугольник — параллелограмм, то можно сделать подходящий к нему картонный.

И. Б. Васильев

M1187. Докажите, что если m четно, то все целые числа от 1 до $m-1$ можно выписать в таком порядке, что никакая сумма нескольких подряд не будет делиться на m .

Ф. Г. Шлейфер

M1188. а) Дан 101 прямоугольник с целыми сторонами, не превосходящими 100. Докажите, что среди них найдутся три прямоугольника A, B, C , которые можно поместить друг в друга: $A \subseteq B \subseteq C$.

б) Докажите, что среди 1989 прямоугольников с целыми сторонами, не превосходящими 100, найдутся 40 прямоугольников таких, что первый можно поместить во второй, второй — в третий, ..., 39-й — в 40-й.

Н. М. Седракин

M1189*. На плоскости дано n прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две не параллельны. Докажите, что в каждой из частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно поставить целое число, отличное от 0 и не превосходящее по модулю n , так, что по любую сторону от любой из этих прямых сумма чисел равна 0.

Д. В. Фокин

M1190*. а) Докажите, что если в таблице $2n \times 2n$ клеток стоят $3n$ звездочек, то можно вычеркнуть n строк и n столбцов так, что все звездочки будут вычеркнуты.

б) Докажите, что в таблице $2n \times 2n$ клеток можно расставить $3n+1$ звездочку так, что после вычеркивания любых n строк и n столбцов останется по крайней мере одна звездочка.

К. П. Кохась

Ф1193. В пространстве движется кубик. В данный момент грань $ABCD$ горизонтальна (рис. 1), а скорости точек A и B направлены вертикально вниз и равны по модулю v . Известно, что скорость точки C в этот же

Задачник „Квант“

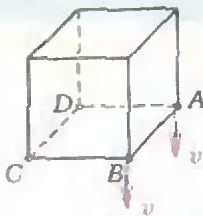


Рис. 1.



Рис. 2.

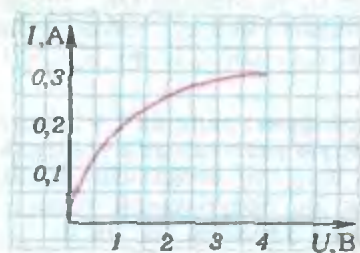


Рис. 3.

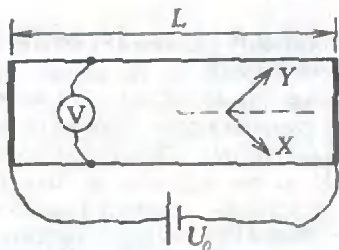


Рис. 4.

момент равна по модулю $2v$. Какую максимальную скорость могут иметь в этот момент другие точки кубика?

С. С. Кротов

Ф1194. Капилляр сделан из двух тонких стеклянных трубочек с внутренними диаметрами d_1 и d_2 (рис. 2). В него ввели большую каплю воды массой M . Когда капилляр расположили горизонтально, вся капля «уползла» в тонкую часть, а когда его установили вертикально — вся вода из него вытекла. При каких углах между осью капилляра и вертикалью капля будет располагаться частично в толстой, а частично в тонкой трубчочке? Коэффициент поверхностного натяжения воды σ , плотность воды ρ . Смачивание считать полным.

Р. А. Тило

Ф1195. Вертикальная труба высотой $H=1$ м и площадью поперечного сечения $S=50$ см² открыта с двух концов. В нижней части трубы установлен нагреватель мощностью $N=100$ Вт. Какая скорость восходящего потока установится в трубе? Считайте, что нагреватель не загорает поперечное сечение трубы. Атмосферное давление $p_0=1$ атм, температура снаружи комнатная. Молярная теплоемкость воздуха при неизменном объеме $C_V=2,5 R$, где R — универсальная газовая постоянная.

М. М. Цыпин

Ф1196. Рабочее напряжение лампочки, вольт-амперная характеристика которой приведена на рисунке 3, равно 3,5 В (кривая обрывается при напряжении 4 В — лампочка перегорает). Две такие лампочки соединяют последовательно и подключают к источнику с напряжением 5 В. Какой ток потечет по цепи? Какой резистор нужно подключить параллельно одной из лампочек, чтобы напряжение на другой составило 3,5 В? Перегорит ли какая-нибудь из лампочек, если этот резистор заменить еще одной такой же лампочкой?

А. Р. Зильберман

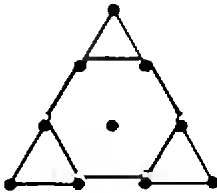
Ф1197. При исследовании электрических свойств тонкой пластинки нового соединения было обнаружено, что его проводимость существенно анизотропна: вдоль одного направления (ось X) она максимальна, а вдоль перпендикулярного направления (ось Y) — минимальна. Из пластинки вырезали образец в виде полоски длиной L и шириной d ($L \gg d$) под углом $\alpha=45^\circ$ к осям X и Y и подключили к концам полоски источник с напряжением U_0 (рис. 4). Измерив напряжение между краями полоски в поперечном направлении, получили значение U ($U \ll U_0$). Определите отношение проводимостей вдоль осей X и Y .

А. И. Буздин

Решения задач

M1161 — M1164, Ф1173 — Ф1177

M1161. В бильярдном треугольнике вплотную помещается 10 шаров. Докажите, что если в нем поместить 9 шаров, то обязательно останется место для десятого (т. е. центры 9 шаров расположатся по треугольной сетке).



Примем диаметр шара за 1. Задача эквивалентна следующей: доказать, что если 9 точек K_1, K_2, \dots, K_9 , попарные расстояния между которыми не меньше 1, размещены в правильном треугольнике со стороной 3, то они обязательно находятся в вершинах треугольной решетки со стороной 1 (в 9 из 10 черных точек на рисунке). Достаточно доказать, что 6 (или 7) из точек K_i находятся в пределах красного шестиугольника, причем они обязательно находятся в его вершинах или в центре O — ведь в каждом угловом треугольнике со стороной 1 (не на красной стороне) может находиться лишь одна из точек K_i , причем если на его красной стороне есть другая точка K_j , то K_i лежит в вершине большого треугольника.

Ясно, что если одна из 6 точек K_i внутри шестиугольника совпадает с O , то остальные лежат в вершинах. Если же все они отличны от O , то отрезки OK_i , проведенные в эти точки, образуют между собой углы 60° (если $\angle K_i OK_j < 60^\circ$, $OK_i \leq 1$, $OK_j \leq 1$, то $KK_j < 1$) и $OK_i = 1$.

По-видимому, верен и такой факт: если из $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$ шаров, вплотную уложенных в треугольную коробку, убрать один шар, то остальные обязательно будут располагаться по треугольной сетке — так что убранный шар можно уложить на место.

Н. П. Долбилин

M1162. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$x^3 - 13x \cdot y + y^3 = 13.$$

Введем новые переменные $s = x + y$ и $t = xy$. Тогда уравнение примет вид $s^3 - 3st - 13t = 13$,

или

$$t = \frac{s^3 - 13}{3s + 13}. \quad (*)$$

и, следовательно,

$$27t = \frac{27s^3 - 13 \cdot 27}{3s + 13} = 9s^2 - 39s + 169 - \frac{13^3 + 13 \cdot 27}{3s + 13}.$$

Отсюда получаем, что число $3s + 13$ должно быть делителем числа $2548 = 13 \cdot 196$. Далее, так как $s^2 - 4t = (x - y)^2 \geq 0$, то

$$s^2 - 4 \frac{s^3 - 13}{3s + 13} = \frac{3s^3 + 13s^2 - 4s^3 + 52}{3s + 13} \geq 0$$

и, значит,

$$\frac{s^2(13 - s) + 52}{3s + 13} \geq 0.$$

Отсюда имеем $s \leq 13$ и $s \geq -4$ (иначе значение дроби отрицательно). Следовательно, $3s + 13$ лежит в пределах от 1 до 52 и имеет остаток 1 при делении на 3. Таких делителей у числа $2548 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13$ семь: 1, 4, 7,

Задачник „Кванта“

13, 28, 49, 52. Они дают значения s соответственно: $-4, -3, -2, 0, 5, 12, 13$ и значения t (из уравнения (*)): $-77, -10, -3, -1, 4, 35, 42$. Решая для каждой из этих пар систему

$$\begin{cases} x+y=s, \\ xy=t \end{cases}$$

— для этого достаточно найти корни квадратного уравнения $z^2 - sz + t = 0$, — мы получаем 7 пар решений $(7; 5), (7; 6), (7; -11), (1; -3), (1; -1), (1; 4), (-5; 2)$. Естественно, ввиду симметрии исходного уравнения относительно x и y числа в парах можно менять местами, так что всего уравнение имеет 14 решений. Вообще легко видеть, что уравнение $x^3 - kxy + y^3 = m$ при целых k, m имеет конечное число решений в целых числах, если $k^3 + 27m \neq 0$. Заметим, что уравнение

$$x^3 - kxy + y^3 = k \quad (**)$$

всегда имеет стандартное решение $(1; -1)$ и, если $k = 2p + 1$, еще и решение $(p; p+1)$. Однако коэффициент $k = 13$ является, в некотором смысле, почти «уникальным»: все допустимые значения s (отобранные по неравенству $s^2 - 4t \geq 0$) дают в результате квадратные уравнения, имеющие целые решения. Можно подметить еще одно сравнительно простое свойство уравнения (**), прослеживающееся в данном примере: если $(a; b)$ и $(a; c)$ — решения данного уравнения, то и пара $(a; -b - c)$ — решение этого уравнения (это легко следует из теоремы Виета).

Д. В. Фокин

M1163. Черепаха вышла из точки A и пришла в точку B , двигаясь по произвольной траектории с произвольной скоростью. Вслед за ней из точки A вышла вторая черепаха, которая в каждый момент времени двигалась в направлении первой (с произвольной скоростью) и в конце концов также пришла в точку B . Докажите, что путь, пройденный второй черепахой (к моменту прихода обеих в B), не превосходит пути первой.

Пусть к моменту времени t 1-я черепаха прошла путь $L(t)$, вторая — $P(t)$, а расстояние между ними в этот момент — $D(t)$. Докажем, что с течением времени величина

$$f(t) = L(t) - P(t) - D(t)$$

не убывает, т. е. $f(t) \geq f(t')$ при $t > t'$. Отсюда будет следовать утверждение задачи: пусть 1-я черепаха начала движение при $t = 0$, а 2-я закончила его при $t = T$, тогда $f(0) = 0$, $D(T) = 0$ и если $f(T) = L(T) - P(T) \geq f(0)$, то $L(T) \geq P(T)$.

Основное утверждение об $f(t)$ можно доказывать по разному. (Например, с помощью производной.) Трудность связана с тем, что в задаче речь идет о произвольных траекториях и произвольных скоростях. Мы обойдем эту трудность так: заменим траектории черепах близкими к ним ломаными.

Пусть M_i — положение 1-й черепахи в момент времени $t_i = i\tau$, $\tau = T/n$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $M_0 = A$, $M_n = B$); u_i — скорость 2-й черепахи в момент времени t_i . Предположим, что 1-я черепаха на отрезке времени между t_i и t_{i+1} проходит отрезок $M_i M_{i+1}$, а 2-я проходит отрезок $N_i N_{i+1}$ длиной $u_i \tau$, направленный к точке M_i (рис. 1;

Задачник „Квант“

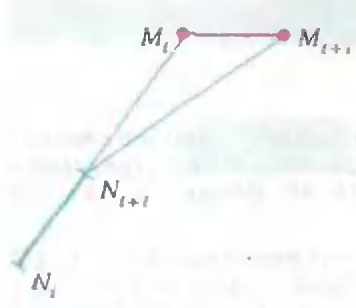


Рис. 1.

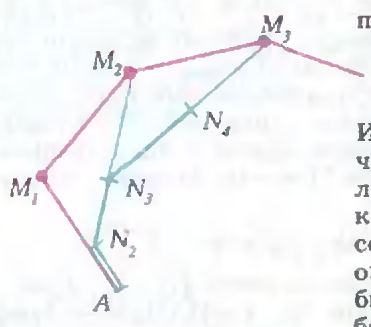


Рис. 2.

мы считаем, что $u_0=0$, $N_0=N_1=A$; если $u_i \geq M_i N_i$, то $N_{i+1}=M_i$. Пусть при этом движении по ломаным к моменту t_i черепахи прошли путь $L^*(t_i)$, $P^*(t_i)$ и найдутся на расстоянии $D^*(t_i)$ друг от друга. (На каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$ эти функции мы считаем линейными.) Положим $f^*(t)=L^*(t)-P^*(t)-D^*(t)$. Поскольку (см. рисунок 2)

$$D^*(t_i)=N_i M_i, L^*(t_{i+1})=L^*(t_i)+M_i M_{i+1},$$

$$P^*(t_{i+1})=P^*(t_i)+N_i N_{i+1}, D^*(t_{i+1})=N_{i+1} M_{i+1},$$

получим

$$f^*(t_{i+1})-f^*(t_i)=M_i M_{i+1}-N_i N_{i+1}+M_{i+1} N_{i+1}-N_i M_i=N_{i+1} M_i+M_i M_{i+1}-N_{i+1} M_{i+1} \geq 0.$$

Итак, функция $f^*(t)$ — неубывающая. Отсюда следует, что и $f(t)$ — неубывающая: при достаточно большом n ломаные $M_0 M_1 \dots M_n$ и $N_0 N_1 \dots N_n$ будут сколь угодно близки к траекториям черепах, а функции L^* , P^* и D^* , f^* — соответственно к функциям L , P , D и f , и если бы оказалось, что $f(t) > f(t')$ при некоторых $t > t'$, то должно было быть $f(t_{i+1}) > f(t_i)$ при некотором i (для достаточно большого n).

С. Ю. Орехов, А. Х. Шень

М1164. *Натуральное число n называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, меньших n (например: $28=1+2+4+7+14$). Докажите, что нечетное совершенное число (если такое существует) не может одновременно делиться на 3, на 5 и на 7.*

Пусть $n=p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ — разложение числа n на простые множители. Тогда сумма $S(n)$ его делителей, включая 1 и n , равна

$$(1+p_1+\dots+p_1^{k_1})(1+p_2+\dots+p_2^{k_2})\dots(1+p_r+\dots+p_r^{k_r}). \quad (*)$$

Поскольку n совершенно, $S(n)-n=n$, т. е. $S(n)=2n$. Если n и все его простые множители p_1, p_2, \dots, p_r нечетны, то в произведении (*) одна из сумм в скобках четна, а остальные — нечетны. Пусть $k_1=2m+1$, тогда

$$1+p_1+\dots+p_1^{2m+1}=(1+p_1)(1+p_1^2+\dots+p_1^{2m}),$$

поэтому $p_1 \neq 3$ и $p_1 \neq 7$ (иначе $S(n)$ делится на 4). Если среди чисел $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ встречаются 3, 5 и 7, причем p_1 отлично от 3 и 7, то

$$\frac{S(n)}{n} \geq \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_r} + \frac{1}{p_r^2}\right) \geq$$

$$\geq \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49}\right) =$$

$$= \frac{6 \cdot 13 \cdot 57}{5 \cdot 9 \cdot 49} > 2.$$

Это противоречит равенству $S(n)=2n$.

В. В. Шабунин

Ф1173. *Длинный игрушечный поезд, составленный из большого числа ва-*

По мере подъема в «мертвую петлю» скорость поезда уменьшается. Она достигнет наименьшего значения v , когда «петля» целиком заполнится составом (а потом

гонов, едет с постоянной скоростью по горизонтальным рельсам, а потом въезжает в «мертвую петлю» (рис. 1). Длина поезда L , радиус петли R (R существенно больше размера вагона, но $L > 2\pi R$). При какой начальной скорости поезд преодолевает препятствие так, что во время движения ни один вагон не перестанет давить на рельсы?



Рис. 1.

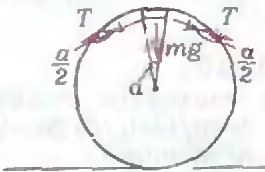


Рис. 2.

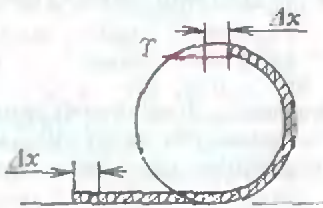


Рис. 3.

Задачник «Квант»

изменяться не будет). Запишем для этого и начального моментов закон сохранения энергии:

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + \left(M \frac{2\pi R}{L}\right) gR, \quad (1)$$

где M — масса всего поезда, v_0 — его начальная скорость, $M(2\pi R/L)$ — масса вагончиков, находящихся в «петле», R — высота их центра масс.

Пока вагончик находится в контакте с рельсами, на него со стороны рельсов действует сила реакции. Наименьшей силе реакции соответствует наивысшая точка «петли». В предельном случае сила реакции равна нулю. При этом на вагончик (рис. 2) действуют сила тяжести mg (m — масса вагончика) и силы натяжения T со стороны сцепок с двумя соседними вагончиками. Равнодействующая этих сил направлена вертикально вниз и сообщает вагончику необходимое центростремительное ускорение v^2/R :

$$2T(\alpha/2) + mg = mv^2/R.$$

Здесь мы учли малость угла $\alpha = l/R$, под которым виден вагончик длиной l из центра «мертвой петли», и заменили синус малого угла самим углом. Заметим также, что $m = (l/L)M = (\alpha R/L)M$ (если пренебречь промежутками между вагончиками). Тогда предыдущее уравнение можно записать в виде

$$T + \frac{R}{L}Mg = M \frac{v^2}{L}. \quad (2)$$

Теперь найдем силу натяжения T . Рассмотрим часть состава, которая забирается в «мертвую петлю» (рис. 3). Пусть состав сместился на малое расстояние Δx , тогда сила T произвела работу $A = T\Delta x$. Но поскольку скорость поезда не изменилась, эта работа должна быть равна изменению потенциальной энергии участка состава длиной Δx и массой $\Delta m = (M/L)\Delta x$, поднявшегося на высоту $2R$ (см. рис. 3). Итак,

$$T\Delta x = 2 \frac{M}{L} \Delta x Rg, \text{ и } T = \frac{2MRg}{L}. \quad (3)$$

Объединив равенства (1) — (3) в систему, находим исходную начальную скорость поезда:

$$v_0 = \sqrt{Rg(3 + 4\pi R/L)}.$$

А. И. Вуздин

Ф1174. В кубическом сосуде объемом $V = 1$ л находится $m = 0.01$ г гелия при температуре $T = 300$ К. Понаблюдаем за одной из молекул. Сколько раз она ударится о верхнюю стенку сосуда за время $t = 1$ мин?

Если время, заданное в задаче, достаточно велико (это следует проверить), то все молекулы будут сталкиваться с выделенной стенкой сосуда одинаково часто. Тогда искомое число ударов

$$n_{\text{уд}} = \frac{n_{\text{уд общ}}}{N},$$

где $n_{\text{уд общ}}$ — общее число ударов о стенку, N — количество молекул в сосуде.

Задача „Квант“

Для оценки $n_{\text{уд общ}}$ поступим следующим образом. Обозначим площадь стенки через S ($S = (\sqrt[3]{V})^2$) и концентрацию молекул через n ($n = N/V$). Очевидно, что за время t о стенку ударятся все те молекулы, которые находились от нее на расстоянии $\bar{v}_x t$ (\bar{v}_x — среднее значение модуля соответствующей компоненты скорости) и двигались по направлению к стенке, т. е.

$$n_{\text{уд общ}} = \frac{1}{2} n \bar{v}_x t S.$$

Теперь оценим \bar{v}_x :

$$\bar{v}_x = \sqrt{\bar{v}_x^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \bar{v}^2} = \sqrt{\frac{RT}{M}},$$

где $R = 8,31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная, $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса гелия.

Таким образом, окончательно получаем

$$n_{\text{уд}} = \frac{n \bar{v}_x t S}{2N} = \frac{1}{2V} \sqrt{\frac{RT}{M}} t V^{2/3} = \frac{\sqrt{RT/M} t}{2V^{1/3}} \approx \approx 2,5 \cdot 10^5.$$

Другими словами, если не учитывать столкновений молекул между собой, то $n_{\text{уд}} = (v_x t)/(2a)$, где $2a = 2V^{1/3}$ — путь молекулы «от потолка до потолка».

Нам нужно теперь обосновать выбранную модель. Для этого оценим длину свободного пробега молекулы, т. е. среднее расстояние, проходимое молекулой между двумя соударениями с другими молекулами:

$$\lambda \approx \frac{V/N}{\pi d^2 n} = \frac{1}{\pi d^2 n},$$

где $d \sim 10^{-10}$ м — диаметр молекул. При нормальных условиях в 1 м³ любого газа содержится $\approx 2,7 \cdot 10^{25}$ молекул. Поэтому $\lambda \approx 10^{-6}$ м и среднее смещение молекулы за время t равно

$$\bar{x} = \sqrt{\lambda v_x t} \approx 1 \text{ м},$$

что существенно больше размера сосуда. Значит, перемешивание действительно эффективно «разравнивает» молекулы.

А. Р. Зильберман

Ф1175. НЛО пролетает над Землей с постоянной очень большой скоростью v . Какую скорость зафиксируют наземные приборы станции слежения в тот момент, когда направление на объект будет составлять угол φ с вертикалью (рис. 1)?

Пусть от момента пролета НЛО ближайшей к наблюдателю точки А (рис. 2) до данного момента (до точки В) прошло время t , причем это время отсчитывалось по неподвижным часам, находящимся в точке В. Обозначим высоту пролета НЛО над Землей через l . Тогда путь, пройденный объектом от А до В, равен

$$vt = l \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Наблюдатель же увидит светящийся объект в точке В несколько позже (из-за конечности скорости распространения света c), и его часы покажут время

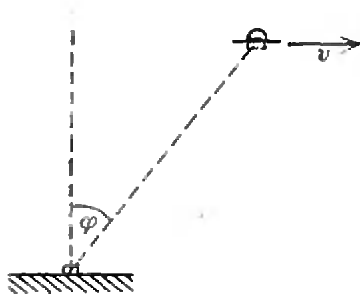


Рис. 1.

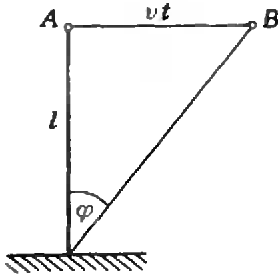


Рис. 2.

Задача „Кванта“

$$t_1 = t + \frac{l/\cos \varphi}{c} \quad (2)$$

Очевидно, что скорость НЛО, измеряемая наблюдателем, равна

$$v_1 = \frac{dx}{dt_1} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt_1} = \frac{v}{\frac{dt}{dt_1}}$$

Из равенства (2)

$$\frac{dt}{dt_1} = 1 + \frac{l \sin \varphi}{c \cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dt},$$

а из равенства (1)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v \cos^2 \varphi}{l},$$

поэтому окончательно искомая скорость равна

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{v}{c} \sin \varphi}$$

С. С. Кротов

Ф1176. На невесомом коромысле длиной $2L$, которое может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, закреплены заряды $+Q$ и $-Q$ массой M каждый. Под коромыслом на продолжении оси вращения расположен маленький диполь — заряды $+q$ и $-q$ на расстоянии $2a$ друг от друга ($a \ll L$). В начальный момент коромысло находится в состоянии устойчивого равновесия (рис. 1).

а) Диполь приводят во вращение с угловой скоростью ω . При каких ω коромысло будет «сопровождать» вращение диполя?

б) Диполь неподвижен. Найдите период малых колебаний коромысла.

а) Перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с диполем. В этой системе коромысло в начальный момент вращается с угловой скоростью ω . «Сопроводить» диполь оно будет в том случае, если его энергии недостаточно, чтобы сделать полный оборот. Другими словами, если его начальная энергия меньше энергии в самом невыгодном положении:

$$2 \frac{M(L\omega)^2}{2} + 2 \left(-\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0(L-a)} + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0(L+a)} \right) < 2 \left(-\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0(L+a)} + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0(L-a)} \right).$$

В результате получаем

$$\frac{M(L\omega)^2}{2} < 2 \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{L-a} - \frac{1}{L+a} \right) = 2 \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{L^2 - a^2} \approx \frac{Qqa}{\pi\epsilon_0 L^2},$$

откуда

$$\omega < \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2Qqa}{\pi\epsilon_0 M}}.$$

б) Рассмотрим отклонение коромысла от положения равновесия на малый угол α (рис. 2). На каждый заряд коромысла действуют силы со стороны каждого заряда диполя. Поскольку $L \ll a$, можно считать, что модули всех сил одинаковы и равны $F = Qq/(4\pi\epsilon_0 L^2)$, а их плечи равны a . Запишем уравнение движения коромысла (аналогичное уравнению второго закона Ньютона для поступательного движения тела):

$$2ML^2\alpha'' = -4 \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 L^2} a\alpha,$$

Задача "Квант"

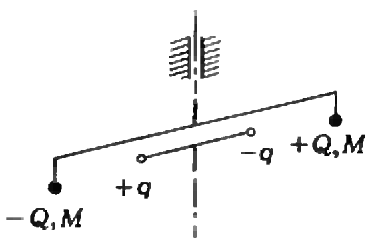


Рис. 1.

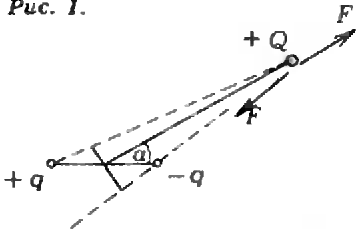


Рис. 2.

Ф1177. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 1$ Гн и сопротивлением $R = 1$ Ом и конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ. Конденсатор идеален — сопротивление его изоляции R_x конечно. При какой величине R_x в катушке выделится в виде тепла $1/3$ начальной энергии контура?

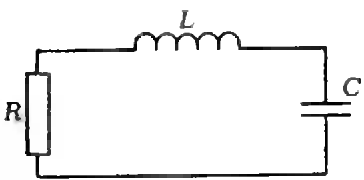


Рис. 1.

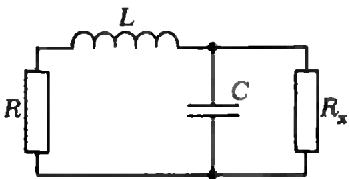


Рис. 2.

или

$$a'' = -\frac{Qqa}{2\pi\epsilon_0 ML^2} a.$$

Это — уравнение гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi L \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 M}{Qqa}}$$

А. В. Андрианов

Выясним вопрос о затухании контура, причем сначала без учета потерь в конденсаторе (рис. 1). Если считать колебания тока в контуре гармоническими, то за период потери в катушке составят

$$\Delta W = \frac{I_0^2 R}{2} T,$$

где I_0 — амплитуда тока в катушке, $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — период колебаний. Максимальная энергия контура

равна $W = \frac{LI_0^2}{2}$.

Тогда $\frac{\Delta W}{W} = \frac{I_0^2 R T}{LI_0^2} = 2\pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$.

В нашем случае

$$\frac{\Delta W}{W} \approx 6 \cdot 10^{-3} \ll 1,$$

т. е. колебания действительно можно считать гармоническими.

Заметим, что результат не изменится и с учетом дополнительных потерь в конденсаторе, которые, по условию задачи, всего в два раза больше, чем потери в катушке. Итак, в этом случае (рис. 2) потери в катушке составляют

$$\Delta W_1 = \frac{I_0^2 R}{2} T,$$

потери в конденсаторе —

$$\Delta W_2 = \frac{U_0^2}{2R_x} T,$$

где U_0 — амплитуда напряжения на конденсаторе. Учти-

тывая, что $\Delta W_2 = 2\Delta W_1$ и $\frac{LI_0^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2}$, получаем

$$\frac{U_0^2}{2R_x} = \frac{CU_0^2 R}{L},$$

откуда находим искомое сопротивление

$$R_x = \frac{L}{2CR} = 5 \cdot 10^5 \text{ Ом.}$$

З. А. Рафилов

О числе целых точек в плоском множестве

Эта заметка посвящена решению задачи M1165.

Возьмем лист клетчатой бумаги и нарисуем на нем какую-нибудь фигуру G . Сколько узлов сетки находится в этой фигуре? Точно ответить нелегко, а вот приближенный ответ дать нетрудно. Каждому квадрату, целиком содержащемуся в фигуре, отнесем узел, находящийся в левом нижнем углу квадрата. Число таких квадратов примерно равно площади S фигуры, а число их «левых нижних» углов — числу N всех узлов в области G . Следовательно, $N \approx S$.

Конечно, это — результат эвристического рассуждения, а не строгого доказательства. А что же можно доказать по настоящему?

Теорема Яриика. Пусть N — число целых точек в области G , S — площадь, L — периметр области G , $L \geq 1$; тогда

$$|N - S| < L.$$

Доказательство теоремы вполне элементарно, но совсем не просто.

Обратите внимание на неравенство

$$L \geq 1.$$

Если опустить это условие, то неравенство Яриика неверно — достаточно в качестве G взять маленький кружок радиусом r с центром в узле.

Проблема круга. Пусть G — круг радиусом R с центром в начале координат. Нетрудно доказать, что справедливо неравенство $|N - \pi R^2| \leq CR$, где $C > 0$ — некоторая постоянная (это неравенство интересно рассматривать

при больших R). Получить его легко; но можно доказать (и это уже совсем непросто) гораздо более сильное неравенство $|N - \pi R^2| \leq CR^{2/3}$. Этот результат получен польским математиком Вацлавом Серпинским в 1906 году. А можно ли показатель $\alpha = 2/3$ заменить на меньшее число? Доказано, что при $\alpha < 1/2$ неравенство $|N - \pi R^2| \leq CR^\alpha$ не верно; однако минимальное значение α , при котором оно все еще остается справедливым, до сих пор не известно. Нахождение такого α составляет содержание знаменитой проблемы круга.

Формула Пика. Эта формула, о которой не раз говорились в «Кванте», позволяет найти площадь многоугольника, вершины которого узлы сетки:

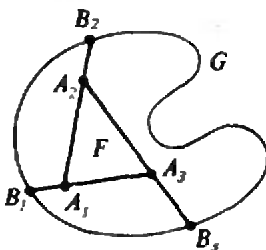
Если a — число узлов на контуре многоугольника F , b — число узлов внутри многоугольника, S — его площадь, то

$$S = \frac{a}{2} + b - 1.$$

Задача Ньюмена. В 1969 году американский математик Д. Дж. Ньюмен опубликовал задачу, которую можно сформулировать так (задача M1165 из «Задачника «Кванта»).

Доказать, что квадрат Q со стороной n покрывает не более чем $(n+1)^2$ узлов сетки.

Отметим, что квадрат расположен на плоскости произвольным образом. Докажем, что справедливо более сильное утвержде-



ние. Обозначим через $S(G)$, $L(G)$ и $N(G)$ соответственно площадь, периметр фигуры G и число узлов, содержащихся в фигуре.

Теорема. Для выпуклой фигуры G справедливо неравенство

$$N(G) \leq S(G) + \frac{1}{2} L(G) + 1.$$

Для доказательства рассмотрим узлы сетки, содержащиеся в фигуре G , и наименьший выпуклый многоугольник F , содержащий эти узлы. Очевидно, что все $N(G)$ точек будут лежать внутри F или на его границе и $S(F) \leq S(G)$. Однако верно и неравенство для периметров $L(F) \leq L(G)$. В самом деле, воспользуемся тем, что F — выпуклый многоугольник (см. рисунок, где в качестве F взят треугольник). Продолжим его стороны до пересечения с границей фигуры G в точках B_1, B_2, B_3 . Запишем систему неравенств, каждое из которых означает просто, что «отрезок — кратчайшее расстояние между двумя точками» (через $|A_1 A_2|$ у нас обозначена длина отрезка $A_1 A_2$, а через $|B_1 B_2|$ — длина дуги $B_1 B_2$):

$$|A_1 A_2| + |A_2 B_2| \leq |A_1 B_1| + |B_1 B_2|,$$

$$|A_2 A_3| + |A_3 B_3| \leq |A_2 B_2| + |B_2 B_3|,$$

$$|A_3 A_1| + |A_1 B_1| \leq |A_3 B_3| + |B_3 B_1|.$$

Складывая левые и правые части этих неравенств, а затем отбрасывая слева и справа одну и ту же величину $|A_1 B_1| + |A_2 B_2| + |A_3 B_3|$, получаем

$$|A_1 A_2| + |A_2 A_3| + |A_3 A_1| \leq |B_1 B_2| + |B_2 B_3| + |B_3 B_1|,$$

что и требуется.

Заметим, что если на стороне многоугольника F лежат два узла A_i и A_j , то расстояние между ними

не меньше 1. Для периметра многоугольника P выполнено неравенство:

$$L(F) = |A_1 A_2| + \dots + |A_n A_1| \geq \underbrace{1 + \dots + 1}_a = a.$$

Воспользуемся теперь формулой Пика:

$$N(G) = N(F) = a + b = \left(\frac{a}{2} + b - 1\right) + \frac{a}{2} + 1 =$$

$$\begin{aligned} &= S(F) + \frac{a}{2} + 1 \leq S(F) + \\ &+ \frac{1}{2} L(F) + 1 \leq \\ &\leq S(G) + \frac{1}{2} L(G) + 1. \end{aligned}$$

Теорема доказана. Задача Ньюмена — ее частный случай. В самом деле, для квадрата Q со стороной n

$$\begin{aligned} S(Q) &= n^2; L(Q) = 4n, \\ \text{и из теоремы следует не-} \\ \text{равенство:} \\ N(Q) &\leq n^2 + \frac{1}{2} \cdot 4n + \\ &+ 1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

Б. Д. Котляр

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач M1141 — M1155, Ф1148 — Ф1162, справились с задачами M1141, M1142, M1144, M1146 — M1148, M1151, M1152, Ф1150, Ф1153, Ф1154, Ф1156, Ф1157, Ф1162. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Аббасов (с. Керьяди Аз ССР) 43; А. Аджиев (Ставрополь) 49; С. Аджиев (Москва) 43, 45; А. Акимов (Евпатория) 43, 45, 50, 54; А. Аюпов (Ереван) 43, 45, 50, 53; А. Алексеев (Донецк) 43, 49, 50, 53, 54; Д. Алешин (Киев) 53—55; Р. Алиев (Джаллялабад) 43; Д. Андриенко (Киев) 43, 45, 50, 53, 54; В. Андрущенко (Винница) 43; И. Аржанцев (Киев) 43, 45, 49; Б. Арясов (Киев) 43, 45; С. Атанасова (Дулово, НРБ) 43; С. Аюпов (Нефтекамск) 43; А. Байрамов (с. Марзили Агдам. р-на) 45; Б. Бакалов (Карлово, НРБ) 43, 45, 49; Е. Бакенов (Караганда) 45; А. Балаков (Белорецк) 45; В. Барановский (Омск) 43, 45, 49, 50, 53—55; А. Безучный (Донецк) 45; А. Блинова (Ленинград) 43, 45, 53, 54; А. Богданов (Старый Оскол) 43; М. Бондаренко (Ленинград) 43; П. Бондаренко (Киев) 43, 45; А. Бородин (Донецк) 49, 50, 53—55; Б. Будян (Москва) 45; С. Бунда (Ужгород) 45; С. Васильченко (Киев) 43, 45; Ю. Великина (Днепропетровск) 45, 53; В. Верзаков (Рудный Кустанайской обл.) 45; Т. Воекинский (Черновцы) 49, 50, 54; Д. Волк (Орджоникидзе) 45; К. Волченко (Донецк) 43, 45, 49, 50, 53, 54; Е. Гендин (Киев) 43, 45; С. Герасимов (Харьков) 45, 49, 50; И. Герман (Ленинград) 43, 49, 55; А. Гирич (Киев) 43, 45, 49, 54; А. Глебов (Новосибирск) 45, 50; И. Гозюмова (Орджоникидзе) 45; Б. Гольдин (Москва) 45; О. Горбенко (Киев) 45; Э. Горянский (Берегово Закарпатской обл.) 53, 55; А. Госалмян (Ереван) 43, 45, 50; М. Гришин (Минск) 43, 45, 53;

А. Гурман (Одесса) 43, 45, 50; П. Данчев (Пловдив, НРБ) 45; С. Дашян (Ереван) 43, 45; Х. Джафаров (с. Тюркоба Аз ССР) 43, 45, 49, 53, 55; Я. Динер (Киев) 43; А. Долгов (Петропавловск) 43; С. Дориченко (Берегово Закарпатской обл.) 53; М. Дружинин (Москва) 55; Б. Дубров (Минск) 43, 45; В. Дубровнер (Киев) 43; И. Егорова (Ленинград) 43, 45, 49; Ю. Ерошенко (п. Приютово Башк АССР) 43, 49, 54; И. Жильцов (Свердловск) 55; И. Жук (д. Дятильно БССР) 45, 49; Д. Журовицкий (Киев) 43, 45; А. Зайцев (Калинин) 45; Н. Зарубим (Харьков) 54, 55; С. Зборовский (Ленинград) 49; А. Зевач (Москва) 45; О. Зеленикин (Воронеж) 45; О. Зоригт (Улан-Батор, МНР) 43; Р. Иванов (Чебоксары) 49, 55; О. Иванова (Протвино) 49; И. Измestьев (п. Суна Кировской обл.) 53, 55; В. Илиева (Враца НРБ) 43, 45, 49, 50; С. Иноземцев (Омск) 43, 49, 50, 55; А. Ионес (Ленинград) 43, 53; Р. Исмаилов (Ленинград) 43, 49; Т. Калита (Киев) 43, 45; Л. Каминштейн (Киев) 43, 45; И. Карпычев (Моздок) 45; С. Кимбар (д. Дягильно БССР) 45, 49, 53, 55; В. Кириак (Вакуло, СРР) 45; И. Кириллов (Усть-Каменогорск) 45; В. Ковальский (Киев) 43, 45; Т. Ковальчук (Киев) 45; С. Коващенко (Винница) 43, 45, 49, 50, 53, 54; О. Ковылин (Волгоград) 45; А. Козачко (Винница) 43, 45, 50, 54; Д. Козлов (Ленинград) 43, 45, 49, 53, 55; В. Кокин (Донецк) 45; Г. Коков (Беслан) 45; И. Кокоев (Тбилиси) 49; А. Копылов (Черноголовка Московской обл.) 43, 50; И. Костадинова (НРБ) 45; А. Крапивин (Харьков) 50; Ю. Кравич (Киев) 49; Г. Кронин (Ленинград) 55; А. Кротенко (Киев) 50; Д. Кротов (Новосибирск) 43; А. Кудымов (Ленинград) 49; В. Левашов (Орджоникидзе) 45; Ю. Литвинова (Киев) 53; А. Лукин (Киев) 43, 45; И. Мазуренко (Химки) 55; М. Макулев (Пловдив, НРБ) 45; В. Мамедов (п. Борадыгах Аз ССР) 43, 45; С. Маркевич (Минск) 55; М. Марченко (Гайворон) 43, 45, 50, 54; О. Мельникова (Орджоникидзе) 45; К. Мишачев (Липецк) 43, 45, 49, 53, 55; А. Морозова (Одесса) 43, 45, 49; М. Мудренко (Киев) 43, 45; М. Мукин (Тамбов) 43, 45, 53, 55; Р. Мучник (Винница) 43, 45, 49, 50, 53—55; А. Насыров (Обнинск) 43, 45, 49, 53, 55; В. Некрашевич (с. Крутые Горы Киевской обл.) 53—55; Н. Немировская (Киев) 43; А. Нена-

шев (Хабаровск) 43, 45; А. Овечкин (Харьков) 45, 53, 55; М. Октавиан (Крайова, СРР) 45; Г. Окиани (Кутанси) 45; П. Оруджев (Баку) 50; В. Осгрик (Мариуполь) 43, 49, 50, 53, 55; Т. Панов (Киев) 43, 45, 49, 53, 54; И. Парамонова (Орджоникидзе) 45; В. Пасхавер (Киев) 43, 49; Т. Педева (Пловдив, НРБ) 45; М. Перепечко (Москва) 43; З. Петренко (п. Дружный Минской обл.) 45; О. Пижурко (Нестеров) 43; А. Пилипенко (Киев) 43, 45, 53, 55; А. Погребняк (Киев) 53; М. Подольский (Евпатория) 49; Е. Пономарева (Ташкент) 55; Ф. Попеленский (Москва) 53; Д. Поперечный (Хабаровск) 55; А. Потеньков (Усть-Камеяногорск) 45; В. Рейцман (Москва) 55; А. Реицкий (Изяюм) 43, 45, 50; А. Руденко (Киев) 43; А. Рыжков (Минск) 43, 45; О. Рябичева (Киров) 43, 49, 54; А. Рябов (Мурманск) 53; К. Савиди (Ереван) 43, 49, 55; А. Саяченко (с. Мошны Черкасской обл.) 45, 54; У. Саметов (Новосибирск) 43; И. Селищев (п. Манченки Харьковской обл.) 43, 49, 50, 53, 55; С. Сидоренко (Харьков) 50; А. Скопенков (Москва) 43, 45, 49, 53—55; М. Скоробогатый (Донецк) 49; А. Скороход (Киев) 43, 49, 53, 54; Т. Скрипник (Киев) 45; С. Солодовник (Киев) 45; И. Сперанский (Донецк) 53, 55; В. Стакаукас (с. Боке Лит ССР) 43, 45, 50, 54; А. Стояновский (Москва) 43, 45; В. Сулеков (Алма-Ата) 45; Р. Сульжик (Киев) 43, 45; В. Сучков (Баку) 49; С. Тайманов (Раменское) 53; Н. Тасмуратов (Алма-Ата) 55; М. Титов (Киев) 45; С. Тихонов (Воронеж) 43, 45; О. Устич (Орджоникидзе) 45; К. Утеуов (Алма-Ата) 55; К. Ушаков (Киев) 45; О. Фарзиев (с. Колтан Масальский р-н) 45; А. Федотов (Красноярск) 49; М. Федотов (Пермь) 43; К. Фельдман (Черноголовка Московской обл.) 43, 45, 50, 53, 55; Ю. Фенюк (Киев) 53; Я. Фридман (Киев) 43; Р. Хайруллаев (Новосибирск) 45; Л. Харченко (Киев) 45; У. Хевель (Берлин) 45; В. Цветков (София, НРБ) 45; Б. Чебоха (Евпатория) 45, 49; Г. Шаповалов (Киев) 43; А. Шнайдман (Киев) 53; А. Эгамов (Гороховец) 43, 45, 53; В. Эйгес (Москва) 50; И. Яковлев (Москва) 45; М. Якубов (Ташкент) 45; В. Ясинский (Киев) 45; О. Яцун (Киев) 55.

Физика

В. Александров (Киев) 59; С. Алескер (Москва) 55; М. Анакин (Москва) 55; Л. Анкудинов (Киев) 59; С. Антипин (Северодвинск) 58, 60; С. Архипов (Иваново) 52; Т. Бакеев (Алма-Ата) 49, 52, 55, 58—60; В. Бакулин (Новосибирск) 55, 58, 60; Н. Балюнас (Вильнюс) 48, 49; Р. Баскаков (Красноярск) 48, 49, 51, 55, 58, 60; И. Башук (Великие Мосты) 52, 58, 59, 61; В. Белобразин (Тула) 49; С. Бобровник (Черновцы) 49, 52, 55, 58, 61; П. Болотских (Губкин) 48; И. Браиловский (Могилев) 48; Р. Бучко (Черновцы) 55, 58, 59, 61; Л. Вайсман (Черновцы) 48; М. Ванюшов (Ленинград) 49; Г. Ватенин (Свердловск) 51, 52, 58, 59, 61; А. Викола (Нерюнгри) 58, 59, 61; К. Волченко (Донецк) 49; В. Высоцкий (Киев) 58—61; Т. Гавышев (Якутск) 55; К. Галицкий (Северодвинск) 48, 49, 52, 58—60; Е. Гендин (Киев)

49, 58, 59; С. Герасимов (Харьков) 49, 51, 52, 58, 59; А. Гирич (Киев) 58; И. Гляненко (Грозный) 49; В. Голово (Старый Оскол) 52, 58; В. Голово (Киев) 59; О. Горбенко (Киев) 52; А. Гринчук (д. Мохро Брестской обл.) 55, 58, 60; Д. Грязных (Челябинск) 58, 59; В. Губин (Ташкент) 58, 59; О. Гусар (Канев) 61; В. Гусятников (Москва) 52; Ю. Гуц (Ровно) 58, 59, 61; Л. Гялджалиева (Джалилабад) 52; Д. Далидович (Москва) 48, 49, 52; С. Демба (Старый Оскол) 49, 52, 58; Н. Демчук (Здлубунов) 55, 61; И. Дижур (Киев) 58; Я. Динер (Киев) 58, 59; В. Дмитриевский (Нижний Тагил) 48, 49, 51, 52; М. Дорохова (п. Черноголовна Московской обл.) 48, 49, 52, 58, 61; Б. Досымова (Чимкент) 52; М. Дружинин (Москва) 59—61; М. Ембаев (Рига) 59, 61; А. Еремкин (Ровно) 59, 61; С. Ермолаев (Брест) 48, 49; Ю. Юрошенко (п. Приютово БашкАССР) 58, 61; Ю. Жданов (Дмитровград) 52; А. Жугаевич (Киев) 48, 49, 52; А. Жук (Ровно) 48, 52; В. Жуликов (ст. Рязанская Краснодарского кр.) 52; Ф. Занин (Старый Оскол) 52; В. Зелевинский (Новосибирск) 49; М. Зеленфройнд (Бобруйск) 48, 55, 61; В. Иванов (Тула) 55; Д. Иванов (Смоленск) 52; Р. Исмаилов (Дружба УзССР) 55; А. Казанский (Черновцы) 49; А. Калашников (Киев) 59, 61; М. Калиновский (п. Трудовое Приморского кр.) 58; Ал. Карпенко (Брест) 48, 49, 52, 55, 58, 61; Ан. Карпенко (Брест) 48, 49, 52, 58, 61; В. Катар (Тюмень) 58, 61; С. Кельман (Алма-Ата) 49, 52, 55, 58, 60; Л. Кимельфельд (Москва) 59; Т. Кислосаева (Канев) 61; К. Кладько (Харьков) 49, 52, 55, 58; Е. Климко (Брест) 48; Е. Климчук (Кузнецовск) 58, 61; М. Ковалев (Губкин) 48; В. Ковальский (Киев) 58, 59; А. Колесник (Старый Оскол) 49, 52; М. Колпаков (п. Почет Красноярского кр.) 48, 52, 58, 59; Д. Комисаренко (Винница) 58—60; И. Коновалов (Киев) 48, 49, 55, 58, 59, 61; Ю. Контиевский (Каушаны) 59; И. Корель (Новосибирск) 49, 55, 58; А. Коршков (Мозырь) 48, 49, 51, 52; А. Кравец (Днепропетровск) 48; А. Кропенко (Киев) 48, 52, 59; М. Кудельман (Киев) 58, 59; Ю. Кузьма (п. Протва Калужской обл.) 48, 52; В. Кузьменко (Ивано-Франковск) 48, 49, 51; А. Кузьмич (п. Ивье БССР) 55; В. Кутузов (Рига) 48, 58, 61; Р. Лагыш (п. Ноябрьск Тюменской обл.) 55, 59; П. Лебединский (Алма-Ата) 55; М. Левитин (Тюмень) 58; А. Лемперт (Ногинск) 48, 49, 51, 52, 58, 59; С. Ли (Балхаш) 55; В. Лобанцов (Грозный) 58; В. Луговской (Черкасс) 59; А. Ляпин (Нальчик) 58, 59; Л. Малышев (Брест) 59; А. Манданов (Иркутск) 55; Ю. Маравин (Евпатория) 59; Д. Массино (Ташкент) 48, 59; Ю. Матюнин (Вольск) 48, 49, 55, 58, 59, 61; Н. Мацко (Киев) 48; Д. Медведев (Алма-Ата) 52, 55; В. Мейтус (Киев) 58; В. Меркер (Старый Оскол) 52; Р. Мизюк (Ровно) 48, 49, 51, 52, 55, 58, 59; С. Миликисьяк (Фергана) 58, 59; О. Мирошниченко (Луцк) 58; П. Михальчук (Копычнцы) 52; А. Михович (Могилев) 51, 58, 59; Е. Мищенко (Черновцы)

(Окончание см. на с. 64)

Калейдоскоп "Классика"

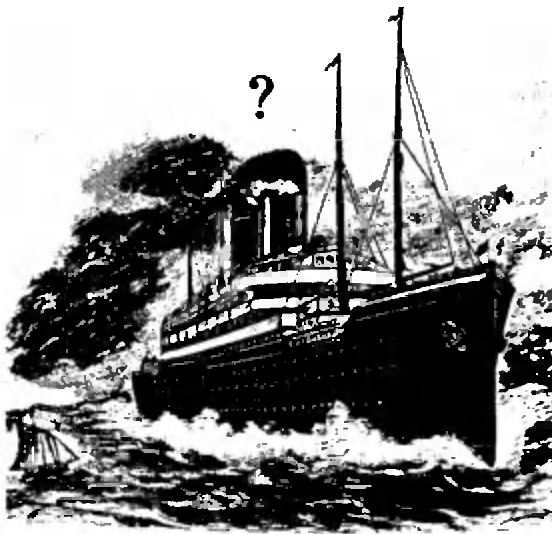


...классическая термодинамика производит на меня очень глубокое впечатление. Это — единственная общая физическая теория, и я убежден, что в рамках применимости своих основных положений она никогда не будет опровергнута.

А. Эйнштейн

А так ли хорошо знакома вам

термодинамика



Долгие столетия теория тепловых явлений, можно сказать, блуждала в потемках. И лишь к середине XIX века идея энергетической связи между самыми различными явлениями дала свои всходы: был открыт закон сохранения энергии. Изобретение паровой машины подтолкнуло исследователей к глубокому анализу понятия теплоты и, главное, к опытной количественной оценке процессов превращения энергии из одной формы в другую. Все это привело к созданию термодинамики как теории, изучающей переходы тепла в любые другие виды движения и взаимодействия или обратные превращения.

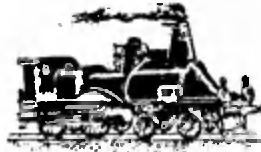
Хотя термодинамика не интересуется устройством тел, ее законы превосходно описывают происходящие с ними тепловые процессы. Нельзя забывать, что становление термодинамики способствовало укреплению корпускулярной теории тепла, и сейчас обе они работают «рука об руку». Поэтому нынешние объекты «Калейдоскопа» — также понятия, как теплота, теплоемкость, работа.



Вопросы и задачи

1. Каковы границы применимости уравнения теплового баланса, если исходить из первого закона термодинамики?

2. Горячая вода вылита в алюминиевую кружку, масса которой равна массе воды. На одинаковое ли число градусов охладилась вода и нагрелась кружка?



3. Почему при распиливании дерева пила нагревается до более высокой температуры, чем дерево?

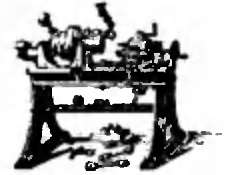
4. Меняет ли заметно температуру кофе добавление в него холодного молока? Считайте удельные теплоемкости кофе и молока примерно равными.



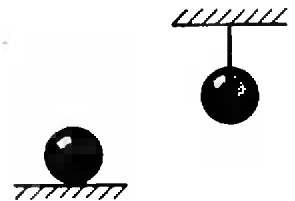
5. Почему медицинские грелки заполняют горячей водой, а не горячим воздухом?



6. С одинаковой высоты упали два тела с равной начальной температурой, одно — медное, другое — железное. Какое из них нагрелось сильнее при абсолютно неупругом ударе? Сопротивлением воздуха пренебречь.



7. Два одинаковых железных шара, один из которых лежит на горизонтальной поверхности, другой — подвешен на нерастяжимой нити, нагревают от 20 до 100 °С. Одинаковое ли количество теплоты потребует для этого? Теплообменом шаров со средой пренебречь.

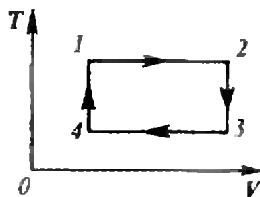


8. Иногда газ при охлаждении отдает меньшее количество теплоты, чем было затрачено при его нагревании. Не противоречит ли это закону сохранения энергии?

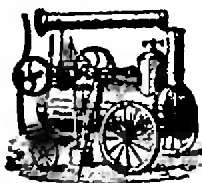


9. Можно ли передать телу какое-то количество теплоты, не вызывая при этом повышения его температуры?

10. Какие из процессов изображенного на рисунке цикла протекали с поглощением теплоты газом и какие — с теплоотдачей?



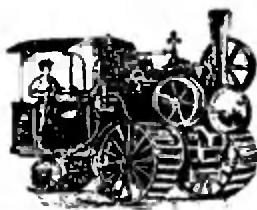
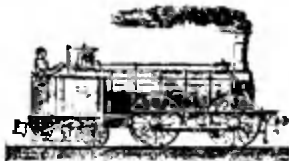
11. Почему удельная теплоемкость газа, нагреваемого при постоянном объеме, отличается от теплоемкости того же газа, свободно расширяющегося?



12. Как будет изменяться температура газа, помещенного в теплонепроницаемый цилиндр, при постепенном увеличении объема цилиндра?



13. Почему холодно на вершинах гор? Разве холодный воздух не должен опускаться вниз?



Микроопыт

Быстро откройте бутылку охлажденного лимонада. Откуда взялось облачко тумана у горлышка бутылки? Какие еще известные вам явления это напомнило?

Любопытно, что...

...граф Румфорд, известными с на-



греванием тел посредством трения, так объяснил свой интерес к науке о теплоте: «Обедая, я часто замечал, что некоторые блюда сохраняют свое тепло гораздо дольше других, а яблочные пироги... оставались горячими удивительно долго. Сильно пораженный... я всегда пытался, но все напрасно, найти хоть какое-нибудь удовлетворительное объяснение этому удивительному явлению».

...в единственной, обессмертившей его имя работе Сади Карно использовал пред-

ставление о недоступном наблюдению теплороде; однако в его дневниках есть неоспоримые свидетельства о совершенно четком представлении закона сохранения энергии в том виде, в каком много лет спустя он был сформулирован Р. Майером, Дж. Джоулем и Г. Гельмгольцем.

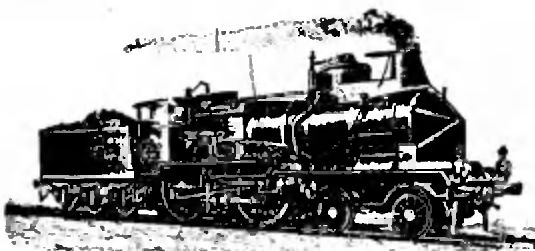


кость велика, а у металлов с большими номерами — мала.



...в характере теплоемкости большинства химических элементов в твердом состоянии существует определенная закономерность. Например, у металлов с небольшими атомными номерами удельная теплоем-

...различие между теплоемкостями воды и почвы является одной из причин, определяющих разницу между морским и континентальным климатом. Летом вода в приморских районах, нагреваясь медленнее, чем суша, охлаждает воздух, а зимой теплое море постепенно остывает, отдавая тепло воздуху и смягчая мороз. Поэтому здесь температурные колебания не так значительны, как в континентальных районах.



Что читать в «Кванте» о термодинамике (публикации последних лет)

1. «Тепловые процессы в газах» — 1986, № 4, с. 49;
2. «Тепловой насос» — 1986, № 11, с. 19;
3. «Работа, энергия, тепло» — 1987, № 8, с. 55;
4. «Расширение газа в пустоту» — 1987, № 11, с. 38;
5. «Эта простая теплоемкость» — 1987, № 12, с. 7;
6. «Вселенная как тепловая машина» — 1988, № 4, с. 2.

Об итогах ТЮФ 1988/89 года

В период весенних школьных каникул с 24 марта по 2 апреля 1989 года в Москве в Молодежном центре «Олимпиец» при ЦК ВЛКСМ был проведен финал XI Московского турнира юных физиков, а также II Всесоюзный и Международный турниры юных физиков.

Победителем Московского турнира стала команда ФМШ № 542 при МИФИ, второе место заняла ФМШ № 18 при МГУ и с. ш. № 710, третье — с. ш. № 679, с. ш. № 1 г. Фрязино и ВФШ при МГУ.

Выступления финалистов Московского турнира стали показательными для участников Всесоюзного и Международного турниров, а их активная работа по передаче опыта проведения Турниров во многом предопределила успех всей турнирной кампании этого года. Надо сказать, что в организационном плане проведение II Всесоюзного и Международного турниров было делом не легким. Ведь в этот раз в «Олимпийце» собрались 38 команд школьников почти

из всех союзных республик, многих городов и поселков страны, а также команды Болгарии, Венгрии, ФРГ, Нидерландов, Польши и Чехословакии.

За 8 рабочих дней Турнира необходимо было провести Всесоюзный тур, индивидуальный отбор кандидатов в сборную команду СССР, сформировать две команды СССР для участия в Международном туре, включить в работу иностранные делегации и, наконец, провести Международный тур. При этом надо было учитывать различную степень подготовленности команд, разные уровни понимания целей и задач Турнира. Но тем и хорош ТЮФ, что все трудности преодолеваются организаторами и участниками Турнира в совместной работе. Конечно, многим было трудно, особенно новичкам Турнира — командам г. Дрокия, Белгорода, Калининграда, Ставрополя, Казани, п. Мишкино Башкирской АССР, г. Минска и Алма-Аты, но и они проявили завидное упорство и трудолюбие и оказали достойное сопротивление более опытным командам.

Абсолютным победителем II Всесоюзного турнира юных физиков стала команда шко-

лы № 710 г. Москвы. Дипломы победителей различных степеней вручены командам: станции юных техников г. Одессы, школы № 1 г. Душанбе, вечерней физической школы при МГУ, школы № 1 г. Фрязино, ФМШ № 18 при МГУ, ФМШ № 542 при МИФИ, ВФМШ при Томском ГУ, школа № 28 г. Запорожье, № 2 г. Дрокия, № 130 г. Новосибирска, школы-интерната им. В. М. Комарова г. Тбилиси, школы № 45 г. Вильнюса. Впервые в этом году было проведено личное первенство участников Турнира. Выпускники средних школ — лидеры Турнира получили право поступления в вузы физико-математического профиля без вступительных экзаменов. Лидерами признаны: 7 класс — Д. Украинский (с. ш. № 444, г. Москва); 8 класс — А. Паукште (45, Вильнюс); 9 класс — П. Денисенко (41, Красноярск), Д. Фишер (119, Одесса), Х. Аширов (1, Душанбе), Б. Черный (710, Москва); 10 класс — Д. Климов (РФМШ, Алма-Ата), Н. Онищук (16, Минск), Г. Сеницин (32, Томск), В. Портной (117, Одесса), В. Сирота и К. Зябляк (542, Москва), А. Яблонский, В. Роддатис и Г. Копелевич (710, Москва), А. Рубцов (179, Москва), Н. Кобляков (18, Москва), А. Азаров и С. Алексеев (1, Фрязино), Д. Бережной (28, Запорожье), А. и Д. Высоцкие (10, Новосибирск), А. Дунаевский (47, Москва). По результатам командного и личного первенства на Международный тур были допущены команды школы № 710 г. Москвы и станции юных техников г. Одессы.

В Международном турнире юных физиков приняли участие 8 команд. Победителями Турнира стали команды ФРГ и Болгарии.

Турнир юных физиков получил высокую оценку наших зарубежных коллег. Образован Международный оргкомитет турнира юных физиков под председательством академика Г. Т. Зацепина.

Зам. председателя оргкомитета Е. Н. Юносов



„Квант“ для младших школьников.

Задачи

1. По контракту работнику причитается по 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный день с него взыскивается 12 франков. Через 30 дней работник узнал, что ему ничего не причитается. Сколько дней работал работник в течение этих 30 дней?

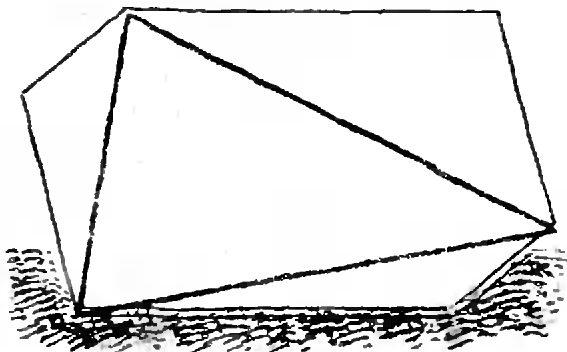
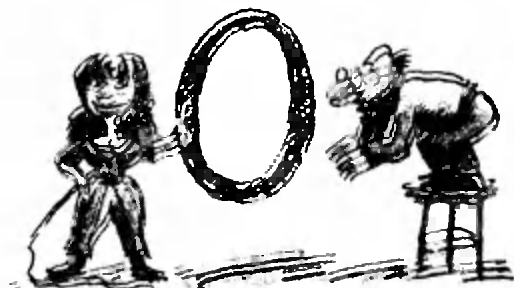
2. Людмила в 6 раз моложе своего прадедушки; если же между цифрами ее возраста вставить 0, то получится возраст ее прадеда. Сколько ей лет?

3. Трехзначное число в 5 раз больше произведения своих цифр. Какое это число?

4. Решите арифметический ребус, который вы видите на рисунке. Известно, что КОРОВА больше, чем ДОЯРКА. Как обычно, одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным — разные.

5. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника равны и параллельны. Взяв три вершины шестиугольника через одну, получим красный треугольник (см. рисунок). Покажите, что площадь этого треугольника равна половине площади шестиугольника.

Задача № 1 — это задача великого французского математика XVIII века Э. Безу, остальные задачи нам предложили ученик 105 школы г. Одессы В. Н. Русанов, Г. Л. Пельц, М. В. Волков, В. В. Произолов.



ЗАКОН АРХИМЕДА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИКА

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

Наверное, всем знакома история о том, как Архимед с криком «Эврика!» выскочил из ванны... Причиной радости был открытый им закон:

погруженное в жидкость тело теряет в весе столько, сколько весит заключенная в его объеме жидкость. Открыть такой простой и изящный закон, конечно, приятно. Однако я хочу убедить вас, что закон этот, в сущности, очевиден. Судите сами.

На рисунке 1 красным цветом изображено тело, погруженное в жидкость. А рядом показан точно такой же объем жидкости. Этот (синий) объем, конечно, неподвижен. Значит, сила тяжести, действующая на него, компенсируется со стороны жидкости силой, направленной вверх. Точно такая же сила действует и на красное тело. Значит, оно теряет в весе столько, сколько весит заключенная в его объеме жидкость.

Вот и все доказательство закона Архимеда. Не думаю, что сам Архимед знал это рассуждение, но уверен, что он оценил бы его простоту. Впрочем, физика оно вряд ли удовлетворило бы — ведь о природе выталкивающей силы в нем не сказано ни слова. Это, скорее, — рассуждение математика...

Предлагаю вам попробовать себя в роли Архимеда. Представьте себе, что все пространство заполнено водой и в этой воде плавают два пузырька воздуха (а больше ничего на свете нет) — рисунок 2. Как будут вести себя эти пузырьки: притягиваться друг к другу, отталкиваться или просто останутся на месте (конечно, силой трения о воду мы пренебрегаем)? Ну-ка, попробуйте угадать ответ!

А теперь давайте решим эту задачу вместе. Начнем с того, что заменим воздух в одном из пузырьков на воду, а второй пузырек трогать не будем. Тогда в воде будет плавать только один пузырек воздуха, а на месте второго будет выделенный объем воды A (рис. 3). Ясно, что вся вода, и в том числе объем A , будет неподвижна. Выделим мысленно объем воды B , симметричный пузырьку воздуха относительно A , и зададимся вопросом: какие силы действуют на объем A ?

Во-первых, это направленная влево сила f притяжения к пузырьку воздуха, а во-вторых, — направленная вправо сила F притяжения к объему B . Все остальные силы уравнивают друг друга: например, симметричные объемы B и Γ на рисунке 3 притягивают объем A с одинаковыми силами.

А сейчас немножко посчитаем. Обозначим массы пузырьков воздуха через p и q , а массы равных пузырькам объемов воды — через P и Q . Воздух легче воды, поэтому числа, обозначенные маленькими буквами, меньше чисел, обозначенных большими: $p < P$ и $q < Q$. Нам нужно

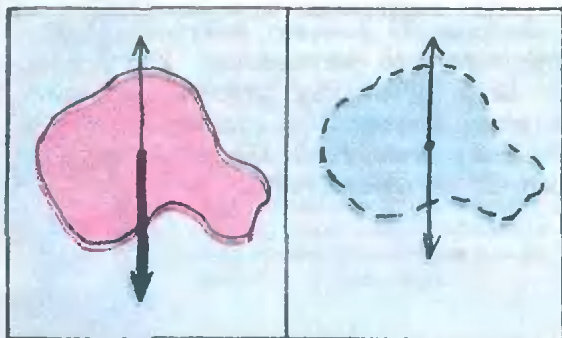


Рис. 1.

знать, с какой силой притягиваются друг к другу различные тела. Ответ дается законом всемирного тяготения: *два тела массы m и M , расположенные на расстоянии R друг от друга, взаимно притягиваются с силой kmM/R^2*

(k — это постоянный положительный коэффициент, значение которого нам не понадобится). В наших вычислениях расстояние R не будет меняться, поэтому k/R^2 можно считать постоянным множителем и для простоты не писать.

Итак, будем считать, что тела m и M притягиваются с силой mM . Поэтому $f=pQ$ и $F=PQ$. Мы видим, что $f < F$. Однако объем воды A вовсе не думает перемещаться вправо — он неподвижен. Это значит, что со стороны жидкости на него действует сила $F - f = PQ - pQ$, направленная к пузырьку воздуха. Эту силу можно назвать «архимедова», а сформулированное утверждение вполне заслуживает названия «закон Архимеда».

Сейчас наступает решающий момент наших рассуждений. Снова заменим объем воды A на пузырек воздуха. Какие силы действуют на этот пузырек? Сила притяжения g к первому пузырьку, направленная влево (рис. 4), сила притяжения G к объему воды B , направленная вправо, и направленная влево архимедова сила $F - f$. Остальные силы уравновешивают друг друга.

Найти силы g и G ничуть не сложнее, чем f и F . Именно: $g=pq$ и $G=Pq$. Теперь мы знаем все силы, действующие на пузырек A , и можем найти их равнодействующую — это действующая влево сила

$$g - G + F - f = pq - Pq + PQ - pQ = (P - p)(Q - q) > 0.$$

Итак, один пузырек воздуха притягивается к другому и рано или поздно сольется с ним. Совпадает ли этот вывод с вашим ответом?

Физик, наверное, рассуждал бы иначе. Примем плотность воды за ноль; тогда плотности и массы тел, которые легче воды, будут отрицательными. В частности, отрицатель-

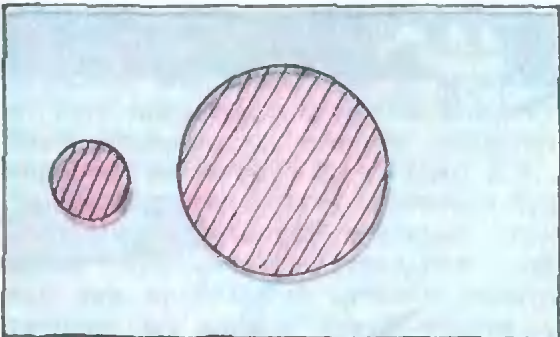


Рис. 2.

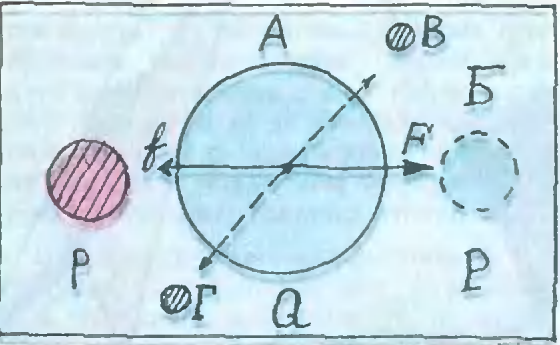


Рис. 3.

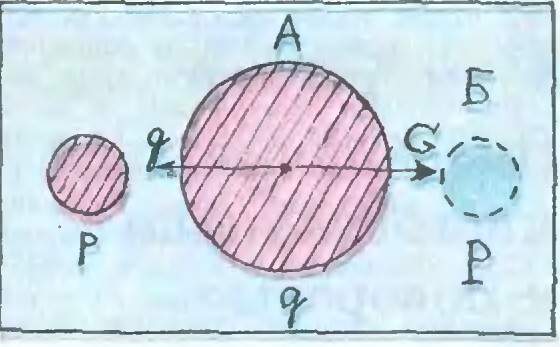
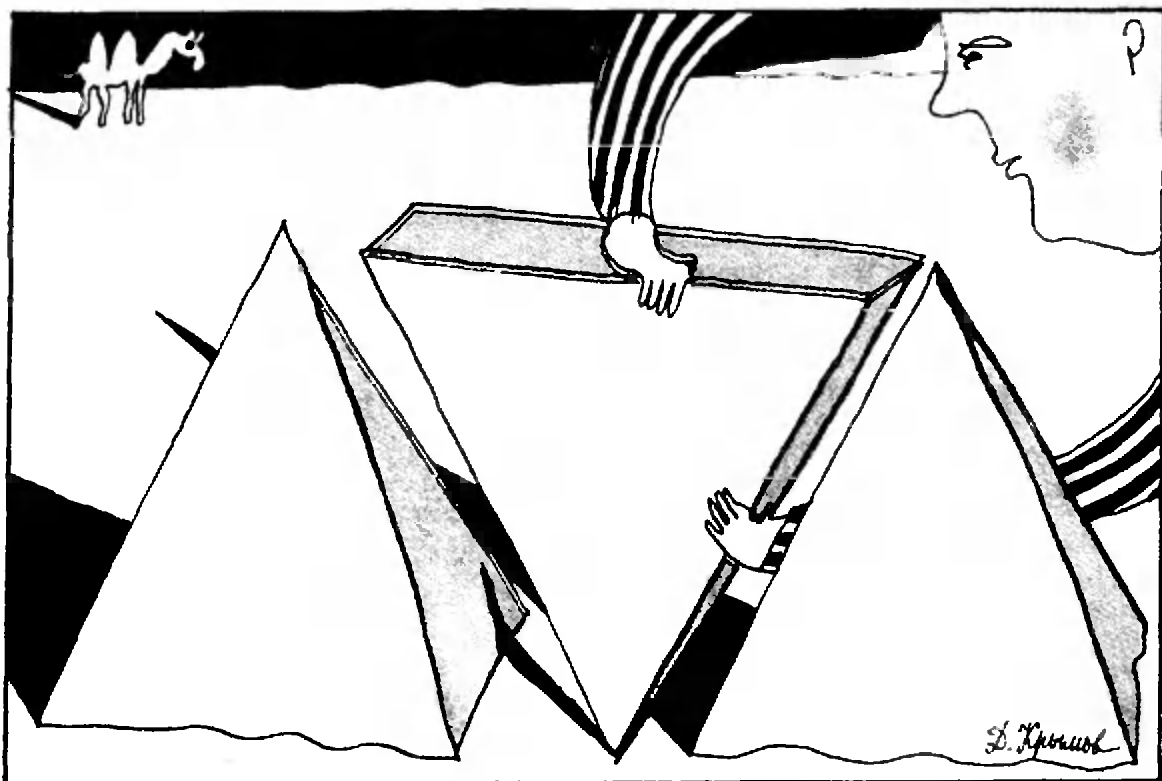


Рис. 4.

ны массы наших пузырьков, а сила притяжения между ними, пропорциональная произведению их масс, — положительна. Более того, физик предсказал бы, что если в воде находятся два тела — одно легче, а другое тяжелее воды, то они будут отталкиваться! Верно ли это предсказание физика, вы определите сами, если решите следующие задачи.

1. Заменим пузырек воздуха на металлический шарик. Чему равна архимедова сила, действующая на произвольный объем воды?
2. Как будут вести себя находящиеся в воде пузырек воздуха и металлический шарик?
3. Тот же вопрос для двух металлических шариков.



Школа «Квант»

Правильные многогранники и повороты

В. Н. ВАГУТЕН

Хотя стереометрию изучают только в старших классах школы, но с кубом, правильными пирамидами и другими простыми многогранниками знаком каждый школьник.

В этой статье переплетаются две темы: построение всех правильных многогранников и описание всех поворотов, при которых многогранник совмещается со своим первоначальным положением.

Правильный n -угольник на плоскости — n -угольник, у которого равны все стороны и все углы — существует для любого n : если указать на плоскости точку O (центр) и A_1 (одну из вершин), то поворотами на углы кратные $180^\circ/n$ вокруг точки O из

A_1 получатся все остальные вершины A_2, \dots, A_n правильного n -угольника с центром O .

Но в пространстве существует лишь конечное число различных правильных многогранников.

Пять платоновых тел. Многогранник называется *правильным*, если все его грани — одинаковые правильные многоугольники и двугранные углы при всех ребрах равны*). Из определения следует, что правильный многогранник «совершенно симметричен»: если отметить какую-то грань Γ и одну из ее вершин A , то для любой другой грани Γ' и ее вершины A' можно совместить многогранник с самим собой движением в пространстве так, что грань Γ совместится с Γ' и при этом вершина A попадет в точку A' **).

* Мы всюду говорим лишь о выпуклых многогранниках (лежащих по одну сторону от плоскости каждой из своих граней).

** В этой фразе слово «грань» можно заменить словом «ребро».

Таблица. Пять «платоновых тел»: здесь n — число сторон у грани, k — число ребер, примыкающих к вершине; B, Γ, P — общее число вершин, граней и ребер соответственно.

	n	k	B	Γ	P
Тетраэдр	3	3	4	4	6
Куб	4	3	8	6	12
Октаэдр	3	4	6	8	12
Додекаэдр	5	3	20	12	30
Икосаэдр	3	5	12	20	30

Со времен Платона и Евклида хорошо известно, что существует ровно пять типов правильных многогранников (см. таблицу). Докажем этот факт. Пусть все грани некоторого многогранника — правильные n -угольники и k — число граней, примыкающих к вершине (оно одинаково для всех вершин). Рассмотрим вершину A нашего многогранника. Пусть M_1, M_2, \dots, M_k — концы k выходящих из нее ребер; поскольку двугранные углы при этих ребрах равны, $AM_1M_2\dots M_k$ — правильная пирамида: при повороте на угол $360^\circ/k$ вокруг высоты AH вершина M_1 переходит в M_2 , вершина M_2 — в M_3, \dots, M_k — в M_1 (рис. 1). Сравним равнобедренные треугольники AM_1M_2 и HM_1M_2 . У них основание общее, а боковая сторона AM_1 больше HM_1 , поэтому $\angle M_1AM_2 < \angle M_1HM_2 = 360^\circ/k$. Но $\angle M_1AM_2$ — это угол правильного n -угольника на плоскости, т. е. $180^\circ(n-2)/n$. Итак, $180^\circ k(n-2)/n < 360^\circ$, $k(n-2) < 2n$, $k < \frac{2n}{n-2}$. Из этого неравенства (и того факта, что $k \geq 3$) нетрудно вывести, что для чисел n и k возможны лишь случаи, указанные в таблице.

Все соответствующие многогранники можно построить, взяв за основу куб.

Чтобы получить правильный тетраэдр, достаточно взять четыре несмежные вершины куба и отрезать от него пирамидки четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через три из взятых вершин (рис. 2, а). Такой тетраэдр можно вписать в куб двумя способами. Пересечение двух таких правильных тетраэдров — это как раз правильный октаэдр: многогранник из восьми треугольников с вершинами, расположенными в центрах граней куба (рис. 2, б). Остается построить два наиболее сложных правильных многогранника: додекаэдр — двенадцатигранник из правильных пятиугольников — и икосаэдр — двадцатигранник из правильных треугольников. Но прежде чем обратиться к построению, мы сделаем отступление.

Это отступление — подготовка к построению додекаэдра. Мы напомним, как построить на плоскости правильный пятиугольник. Достаточно построить треугольник с углами $36^\circ, 72^\circ$ и 72° — описав вокруг такого треугольника ACD окружность (рис. 3), мы легко найдем две другие вершины B и E правильного пятиугольника. Пусть $AC=AD=1$. Сторону CD нетрудно найти, заметив, что биссектриса CL делит треугольник на два равнобедренных, один из которых — CLD — подобен треугольнику ACE : $1-\tau=\tau^2$, откуда $\tau=(\sqrt{5}-1)/2$ (это число называют «золотым сечением», и греческая буква «тау» часто используется для его обозначения). На рисунке 4 изображен удобный для запоминания способ построения τ : если вписать квадрат со стороной 1 в полукруг, то отрезки диаметра, лежащие вне квадрата, будут как раз равны τ ($PH \cdot HQ = RH^2$, т. е. $\tau(1+\tau)=1$).

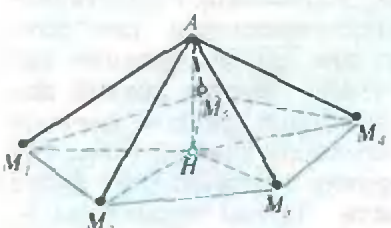


Рис. 1.

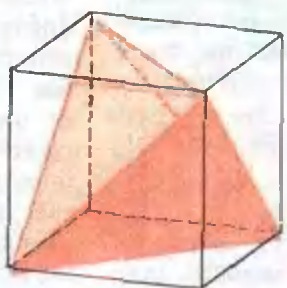
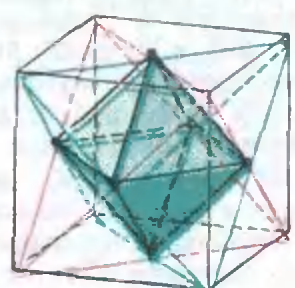


Рис. 2.

а)



б)

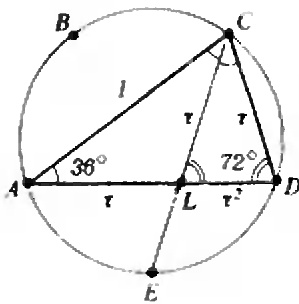


Рис. 3.

Вернемся к построению правильных многогранников.

Построение додекаэдра. Возьмем за основу куб с единичным ребром. На каждой его грани построим четырехскатную крышу из двух треугольников и двух трапеций, полученных разрезанием по диагонали двух правильных пятиугольников со стороной τ (диагональ такого пятиугольника как раз равна 1), — см. рисунки 5—6. Если нам удастся расположить крыши на всех гранях так, чтобы треугольник и трапеция, примыкающие к каждому ребру куба, составляли вместе плоский пятиугольник, то мы построим правильный додекаэдр (рис. 7).

Подсчитаем высоту h такой крыши (см. рис. 6). Пусть x — длина проекции наклонного ребра τ на грань куба. Пользуясь теоремой Пифагора, получим

$$x^2 = \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad x^2 + h^2 = \tau^2,$$

откуда найдем (ввиду того, что $\tau^2 = 1 - \tau$): $h = \tau/2$. С другой стороны, чтобы треугольный скат крыши и трапеция, примыкающая к тому же ребру, лежали в одной плоскости, нужно, чтобы углы наклона треугольника и трапеции к грани в сумме составляли 90° , т. е. чтобы были подобны прямоугольные треугольники с катетами h , $(1-\tau)/2$ и $1/2$, h ; для этого требуется выполнение равенства $h^2 = (1-\tau)/4 = \tau^2/4$, которое приводит нас к тому же значению h .

Конечно, совпадение двух формул, из которого следует возможность построения правильного додекаэдра,

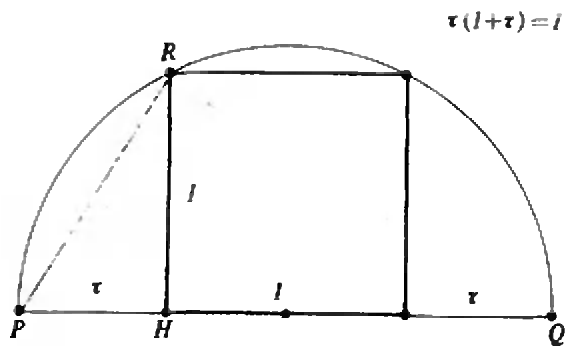


Рис. 4.

при таком способе построения выглядит как подарок судьбы. Но можно доказать существование додекаэдра, пользуясь только соображениями симметрии.

Ясно, что из трех правильных пятиугольников можно единственным образом составить трехгранный угол, у которого все двугранные углы равны (этот двугранный угол α — угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды со стороной основания 1 и боковым ребром τ). Начав с правильного пятиугольника 1, мы можем приклеить к его сторонам пять пятиугольников 2, 3, 4, 5, 6, образующих с ним нужный угол, — каждые два соседних пятиугольника (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) и (6, 2) будут иметь общее ребро и образуют между собой такой же двугранный угол α . К ним можно поэтому приклеить следующий ряд таких же пятиугольников 7, 8, 9, 10, 11 — пары соседних пятиугольников тоже будут иметь общее ребро и составлять двугранный угол α . Поэтому свободные стороны пятиугольников 7—11 образуют правильный пятиугольник, равный предыдущим, и образующий с каждым предыдущим двугранный угол α .

Построение икосаэдра. После того, как построен додекаэдр, существование правильного икосаэдра уже почти очевидно: для его построения достаточно отметить центры граней додекаэдра и соединить ребром каждые два центра соседних граней (рис. 8). Каждой вершине додекаэдра будет соответствовать грань икосаэдра — правильный треугольник с вершина-

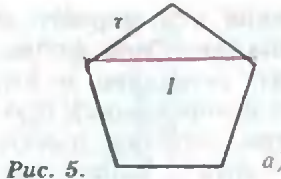


Рис. 5.

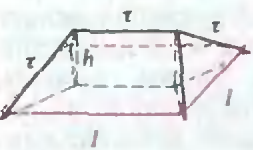


Рис. 6.

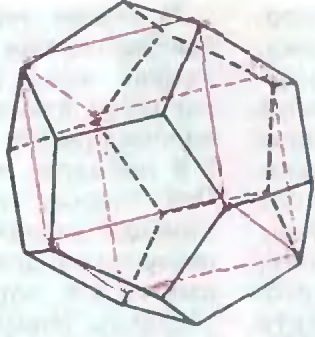


Рис. 7.

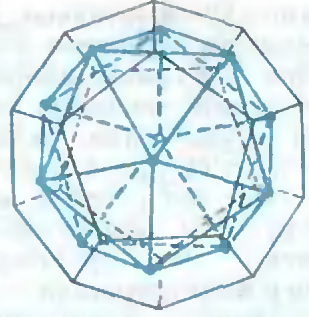


Рис. 8.

ми в центрах пятиугольников, сходящихся к этой вершине.

Центры граней икосаэдра, в свою очередь, служат вершинами додекаэдра*). Если же срезать каждую вершину икосаэдра плоскостью, отсекающей третья часть каждого выходящего из нее ребра, получится многогранник с 32 гранями, 20 шестиугольными и 12 пятиугольными — так шьют современные футбольные мячи.

Сравнительно недавно было обнаружено, что симметричное тело в форме икосаэдра было изобретено и живой природой: такую форму имеют белковые оболочки многих вирусов (в частности, хорошо изученных «бактериофага λ» и вируса «табачной мозаики»).

Самосовмещения многогранников. Какие самосовмещения (вращения переводящие в себя) есть у куба, тетраэдра и октаэдра? Заметим, что некоторая точка — центр многогранника — при лобном самосовмещении переходит в себя, так что все самосовме-

щения имеют общую неподвижную точку*).

Посмотрим, какие вообще в пространстве бывают вращения с неподвижной точкой А. Покажем, что такое вращение обязательно является поворотом на некоторый угол вокруг некоторой прямой, проходящей через точку А. Достаточно у нашего движения F (с $F(A)=A$) указать неподвижную прямую. Найти ее можно так: рассмотрим три точки M_1 , $M_2=F(M_1)$ и $M_3=F(M_2)$, отличные от неподвижной точки А, проведем через них плоскость и опустим на нее перпендикуляр АН (рис. 9) — это и будет искомая прямая. (Если $M_3=M_1$, то наша прямая проходит через середину отрезка M_1M_2 , а F — осевая симметрия: поворот на угол 180° .)

Итак, самосовмещение многогранника обязательно является поворотом вокруг оси, проходящей через центр многогранника. Эта ось пересекает наш многогранник в вершине или во внутренней точке ребра или

*) Такая двойственность правильных многогранников обсуждалась в «Калейдоскопе» последнего номера «Кванта» за прошлый год. Заметим, что у двойственных многогранников — куба и октаэдра, додекаэдра и икосаэдра — множества самосовмещений одинаковы.

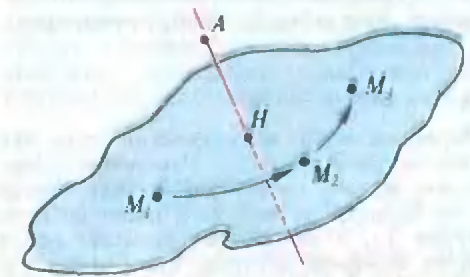


Рис. 9.

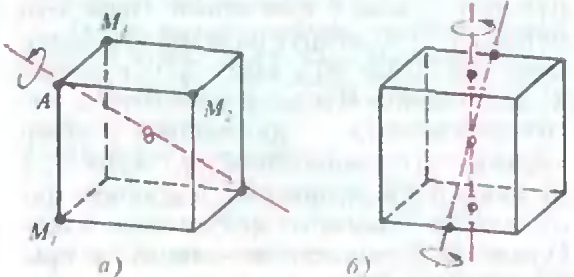


Рис. 10.

*) Верен и более общий факт: любое движение, переводящее данный многогранник (не обязательно правильный) в себя, всегда имеет неподвижную точку, более того, все самосовмещения многогранника переводят некоторую точку О в себя, т. е. имеют общую неподвижную точку О. Эта точка — центр тяжести системы равных масс, расположенных в вершинах данного многогранника.

грани. Следовательно, наше самосовмещение переводит в себя вершину, ребро или грань, значит, оно переводит в себя вершину, середину ребра или центр грани. Вывод: *движение куба, тетраэдра или октаэдра, совмещающее его с собой, есть вращение вокруг оси одного из трех типов: центр многогранника — вершина, центр многогранника — середина ребра, центр многогранника — центр грани.*

Проверим этот вывод для куба. У куба ось первого типа — это большая диагональ. Пусть AM_1, AM_2, AM_3 — ребра, выходящие из вершины A куба, AB — его диагональ (рис. 10, а). Рассмотрим поворот R , переводящий точки A, M_1, M_2 соответственно в A, M_2, M_3 . При этом повороте куб совмещается сам с собой, причем вершина B остается на месте, так что ось поворота — диагональ AB . Повторим этот поворот R трижды; при этом M_1 перейдет в M_2 , затем в M_3 и вновь в M_1 — куб повернется на 360° и совместится с первоначальным положением. Поэтому F — поворот вокруг оси AB на угол 120° .

Вообще, если многогранник совмещается с самим собой при повороте вокруг прямой на угол $360^\circ/m$, то эту прямую называют *осью симметрии m -го порядка*. Для куба ось первого типа — ось симметрии 3-го порядка, ось второго типа — ось симметрии 2-го порядка и ось третьего типа — ось симметрии 4-го порядка (рис. 10, б). Сколько всего имеется разных самосовмещений куба? Вокруг каждой оси 3-го порядка есть два разных нетождественных поворота: на угол 120° и на угол 240° ; а осей таких 4 — всего 8 движений. Осей 2-го порядка — 6, вокруг каждой — один поворот — еще 6 движений. Осей 4-го порядка — 3, вокруг каждой три поворота (на углы $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$) — еще 9 движений. Итого $8+6+9=23$ нетождественных движения. Пар «грань — ее вершина» у куба 24 (6 граней \times 4 вершины) и любую пару можно перевести движением в любую из 23 оставшихся — на это и требуется 23 разных движения.

В случае тетраэдра оси первого и третьего типов совпадают: ось, проведенная через центр тетраэдра и его вершину, проходит и через центр противоположной грани. Эти оси имеют 3-й порядок; всего есть 4 таких оси. Оси второго типа — прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра; таких осей три, и они имеют 2-й порядок. Таким образом, тетраэдр совмещается с собой $4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 11$ различными вращениями, и это согласуется с тем, что у тетраэдра $4 \cdot 3 = 12$ пар «грань — ее вершина».

Движения и симметрии. Рассматривая самосовмещения многогранников, можно включить в их число не только вращения, но и любые движения, переводящие многогранник в себя. Здесь движение — это любое *преобразование пространства, сохраняющее попарные расстояния между точками.*

В число движений, кроме вращений, нужно включить и зеркальные движения. Среди них — симметрия относительно плоскости (*отражение*), а также композиция отражения относительно плоскости и поворота вокруг перпендикулярной ей прямой (это — общий вид зеркального движения, имеющего неподвижную точку). Конечно, такие движения нельзя реализовать непрерывным перемещением многогранника в пространстве (как нельзя совместить левый ботинок с его зеркальным отражением — правым ботинком).

Все правильные многогранники имеют плоскости симметрии (у тетраэдра их — 6, у куба и октаэдра — по 9, у икосаэдра и додекаэдра — по 15). А общее число зеркальных самосовмещений у них оказывается точно таким же, как и число настоящих (собственных) самосовмещений — поворотов (включая тождественное).

Задачи

1. Вершины куба занумерованы так, как показано на рисунке 11, а. Расставьте номера вершин на рисунках 11, б — г так, чтобы кубик на каждом из них получался из куба на рисунке 11, а поворотом; укажите ось и угол этого поворота (считая, что центры кубиков совмещаются).

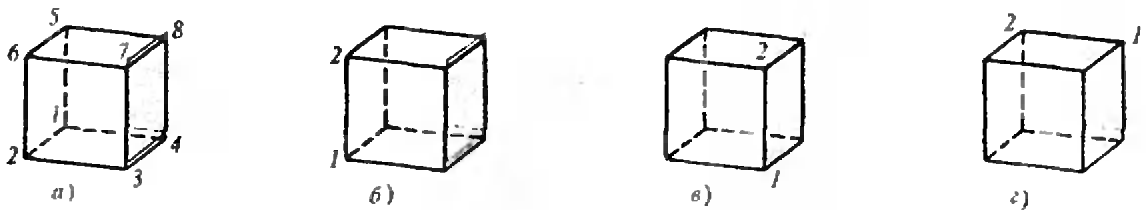


Рис. 11.

2. Сколько осей симметрии 2-го, 3-го и 5-го порядка имеют правильный а) октаэдр; б) додекаэдр; в) икосаэдр?

3. Одна или несколько вершин куба отсекаются плоскостью, проходящей через середины выходящих из нее трех ребер. Можно ли таким образом получить многогранник, у которого количество самосовмещений (поворотов, переводящих его в себя) равняется: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12? Нарисуйте примеры.

4. Отметим на каждой грани куба две точки — проекции вершин построенной на этой грани «крыши», т. е. выступающих над этой гранью вершин додекаэдра. Докажите, что отмеченные точки — вершины икосаэдра.

5. Докажите, что на каждом из 12 ребер правильного октаэдра можно взять по точке так, чтобы эти точки были вершинами икосаэдра. В каком отношении они делят ребра октаэдра?

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Докажите неравенство

$$\sqrt[3]{2+7} < 8\sqrt[3]{2}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4}.$$

3. Пусть m, n — натуральные числа, причем m нечетно. Докажите, что числа $2^m - 1$ и $2^n + 1$ взаимно просты.

4. Пользуясь только линейкой, опустите перпендикуляр из точки, лежащей на окружности, на данный диаметр этой окружности.

5. Пусть M — точка пересечения биссектрис внутреннего угла B и внешнего угла C треугольника ABC , а N — точка пересечения биссектрис внешнего угла B и внутреннего угла C . Докажите, что середина отрезка MN лежит на окружности, описанной около треугольника.

Девятый класс

6. Целое число a обладает тем свойством, что число $3a$ представимо в виде $x^2 + 2y^2$, где x и y — целые числа. Докажите, что и число a представимо в таком виде.

7. Найдите все тройки натуральных чисел x, y, z такие, что равенство $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ имеет место при всех $n \geq 1989$.

8. Пусть a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр, r — радиус вписанной окружности. Докажите, что

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}.$$

9. В треугольнике ABC медианы AD и BE взаимно перпендикулярны. Докажите, что $\operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle B \geq 2/3$.

10. Точка O — центр параллелограмма $ABCD$, в котором $AB < BC$. На сторонах AB и BC построены во внешнюю сторону равносторонние треугольники ABE и BCF . Докажите, что $EO < FO$.

Десятый класс

11. Пусть p — простое число, большее 2. Найдите сумму остатков от деления чисел $1^p, 2^p, \dots, (p-1)^p$ на p^2 .

12. Решите в целых числах уравнение $(x+1)(y^2 - x^2 - 4) = x^2$.

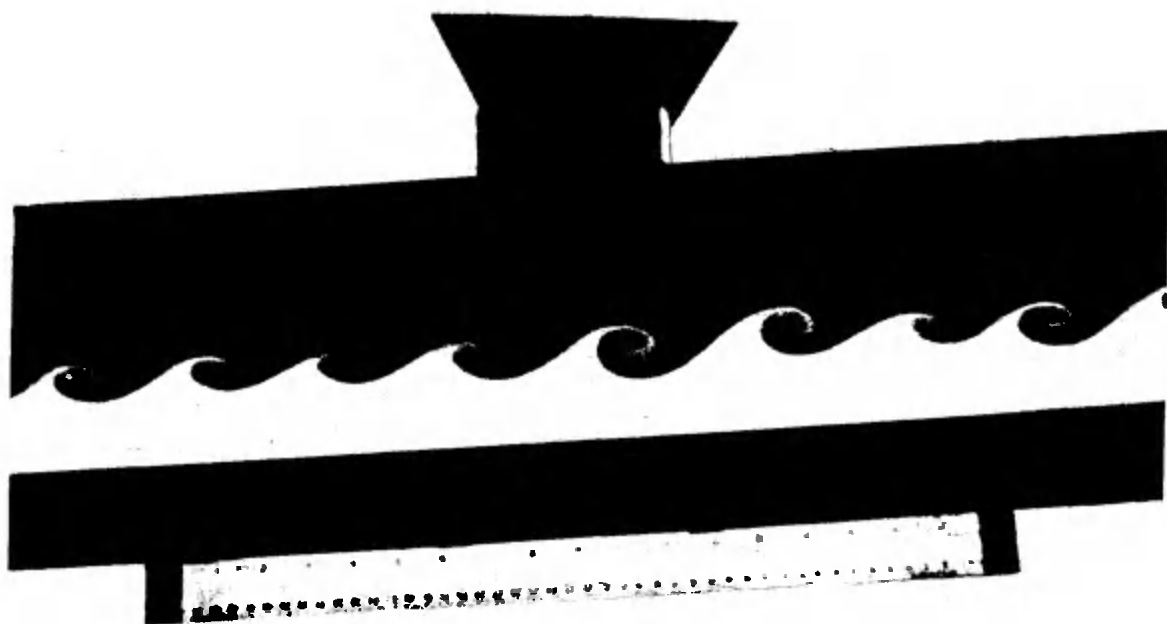
13. Положительные числа x, y, z, a, b, c таковы, что $x^2 + xy + y^2 = a^2$, $y^2 + yz + z^2 = b^2$, $z^2 + zx + x^2 = c^2$. Вычислите $xy + yz + zx$.

14. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ боковые ребра PA, PB, PC, PD равны. Докажите, что сумма двугранных углов при ребрах PA и PC равна сумме двугранных углов при ребрах PB и PD .

15. Решите уравнение

$$\arcsin \frac{x^2 - 8}{8} = 2 \arcsin \frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

Публикацию подготовили Е. М. Гольберг и Л. Д. Курляндчик



Лаборатория „Кванта“

Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики

Кандидат физико-математических наук
С. К. БЕТЯЕВ

7. Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца*)

Гидродинамическая неустойчивость, о которой уже говорилось в первой части статьи, — явление сложное и многоголикое. Еще один удивительный пример на эту тему — неустойчивость поверхности, разделяющей две разные жидкости. С разных сторон этой поверхности касательные составляющие скоростей жидкостей различны,

они как бы скользят относительно друг друга. Неустойчивость поверхности скольжения предсказал известный немецкий естествоиспытатель Г. Гельмгольц (1821—1894), а математически обосновал выдающийся английский физик Кельвин (У. Томсон, 1824—1907).

Различают три стадии неустойчивости: нарастание синусоидальных возмущений, образование и эволюция спиральной структуры, случайный процесс распада. Неустойчивость проявляется тогда, когда незначительно влияние стабилизирующих факторов. К ним можно отнести поверхностное натяжение и положительную разность в плотности нижнего и верхнего слоев жидкости, когда сила тяжести действует в направлении, перпендикулярном поверхности разрыва.

Посмотрите на фотографию на заставке. На ней запечатлена вторая стадия развития неустойчивости — возникновение регулярных спиральных валиков на поверхности разрыва.

*) Начало этой статьи опубликовано в восьмом номере журнала за этот год.

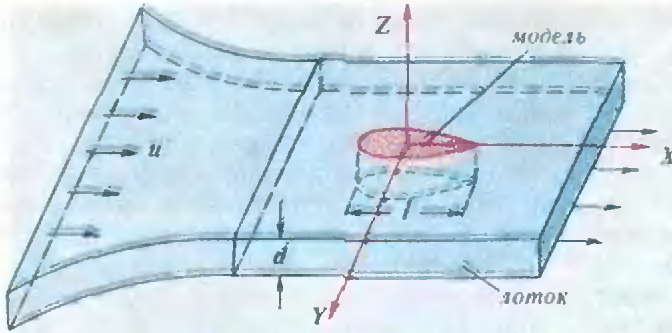


Рис. 1.

Опыт производился следующим образом. Длинный горизонтальный закрытый сосуд прямоугольного сечения, заполненный окрашенным соляным раствором, поверх которого налита вода, резко наклонили на угол 6° . Более тяжелый соляной раствор под действием силы тяжести стал двигаться вниз под уклон, выталкивая чистую воду в противоположную сторону. Через несколько секунд на поверхности раздела обеих жидкостей появилась периодическая спиральная структура.

8. Лоток Хил-Шоу

В 1898 году английский гидродинамик Хил-Шоу создал оригинальную установку, названную впоследствии его именем. Между двумя параллельными стеклянными пластинами он пропускал бесцветную жидкость (воду, глицерин) и в нескольких точках входной части лотка вводил красящее вещество (рис. 1). Подкрашенные струйки, обтекая вставленное между пластинами препятствие — в гидро-

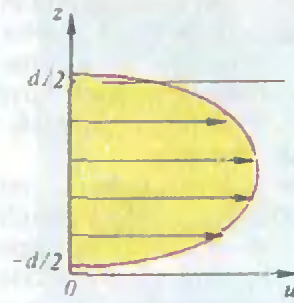


Рис. 2.

динамике его называют моделью, — воспроизводили картину линий, по которым двигались частицы жидкости. Расстояние между пластинами d было гораздо меньше характерного размера модели l .

Хил-Шоу получил удивительный результат. Внутри лотка течение жидкости обычное — влияние трения (вязкости) существенно, профиль скорости $u(z)$ имеет форму параболы, поток «прилипает» к стенкам, т. е. $u(\pm d/2) = 0$ (рис. 2). А вот картина обтекания препятствия в целом необычна, течение такое, словно жидкость полностью лишена трения: нет вязкости, нет пограничных слоев, нет турбулентности, нет отрыва потока. Одним словом — «сверхтекучесть» при комнатной температуре (это, конечно, шутка)!

На рисунке 3 представлен фотоснимок обтекания в лотке Хил-Шоу профиля крыла, установленного под углом атаки 13° , расстояние между пластинами лотка равно 1 мм. Сравните фотографию такого необычного течения с фотографией реального об-

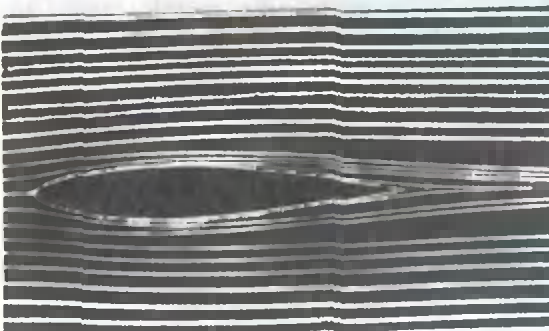


Рис. 3.

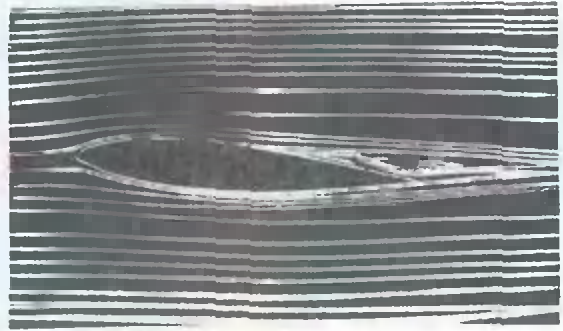


Рис. 4.

текания того же профиля в обычной гидродинамической трубе (рис. 4). Видно, что там уже при угле атаки 5° пограничный слой отрывается от задней половины верхней поверхности модели, образуя след.

Если у вас окажется под рукой лоток Хил-Шоу, попробуйте сделать красивый опыт по проникновению невязкой жидкости в вязкую. Для этого в середине верхней пластины лотка, содержащего вязкую жидкость, например глицерин, просверлите отверстие, через которое под достаточно большим давлением впрыскивайте воду (можно — воздух). Вы увидите, что впрыскиваемое вещество принимает форму пузыря, от которого отходят в разных направлениях разветвляющиеся «пальцы» (рис. 5).

В лотке Хил-Шоу можно убрать верхнюю стенку, т. е. сделать его открытым. Тогда происходящее под действием силы тяжести течение будет принципиально отличаться от рассмотренного. В таком лотке, в частности, исследуется поведение поверхностных волн.

9. Волны за движущимся аппаратом

При движении подводной лодки или самолета с дозвуковой скоростью вызванные ими возмущения распространяются во все стороны. Приближение дозвукового самолета, например, мы сможем услышать, как только мощность опережающих его звуковых волн превысит порог чувствительности уха. А сверхзвуковой самолет обгоняет распространяющиеся от него

звуковые волны, поэтому его приближение мы заранее не слышим.

Если говорить о расстояниях, которые велики по сравнению с размерами самолета, то самолет можно считать точкой. Фронтом звуковых волн от точечного источника, в соответствии с принципом Гюйгенса, является поверхность сферы. Возмущения, образованные самолетом, когда он находился в точке M , по истечении времени t заполняют сферу радиусом vt , где v — скорость звука (рис. 6). За это же время самолет, движущийся со скоростью $u > v$, пройдет расстояние $OM = ut$. Возмущения, инициированные самолетом в каждой точке отрезка OM , уложатся в конус, который называется конусом Маха. Образующая OA конуса Маха касается любой сферы, «расширяющейся» из произвольной точки отрезка OM с момента времени, когда в этой точке находился самолет. Полуугол раствора конуса Маха равен

$$\beta = \arcsin \frac{AM}{OM} = \arcsin \frac{vt}{ut} = \arcsin \frac{1}{M},$$

где отношение скорости движения к скорости звука $M = u/v > 0$ называется числом Маха.

Находясь в точке B , мы услышим звуковой сигнал от самолета, движущегося со сверхзвуковой скоростью на высоте $h = BC$, когда он пролетит расстояние $CO = BC \operatorname{ctg} \alpha = h \sqrt{M^2 - 1}$. Причем сигнал будет двойным, типа «пиф-паф»: «пиф» — от падающей звуковой волны 1, «паф» — от отраженной звуковой волны 2 (см. рис. 6).

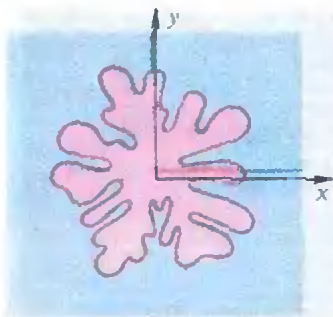


Рис. 5.

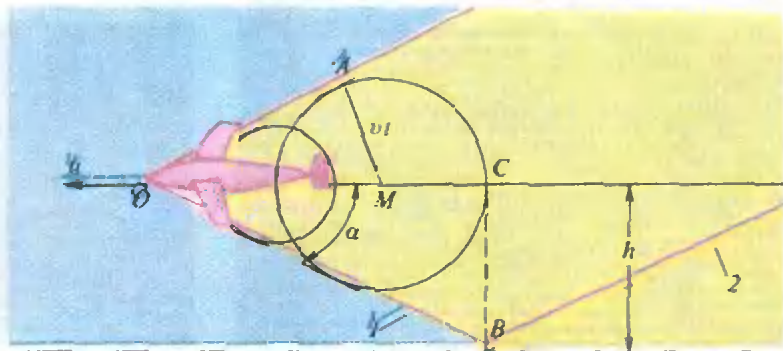


Рис. 6.

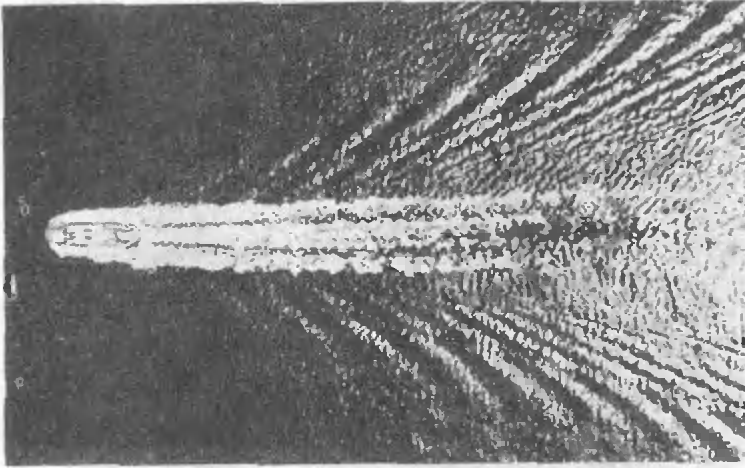


Рис. 7.

Корабельные волны имеют совсем другую природу — они образованы в результате колебаний поверхности моря под действием сил тяжести. Фотоснимок, сделанный с воздуха непосредственно над кораблем (рис. 7), показывает, что возмущения, идущие от корабля и образованного за ним турбулентного следа, заполняют клиновидную область с углом $\alpha \approx 19,5^\circ$. Этот угол соответствует числу Маха

$$M = \frac{1}{\sin \alpha} \approx \frac{1}{\sin 19,5^\circ} \approx 3.$$

Оказывается, любой корабль (в отличие от самолета), независимо от его формы и размеров, движется так, как будто его «эффективное» число Маха равно 3.

10. Сфера в сверхзвуковом потоке

Звуковая волна, про которую мы только что говорили, образуется вдали от самолета. Вблизи самолета ситуация другая. Здесь волна усиливается, превращаясь в ударную волну — поверхность, на которой нормальная к ней составляющая скорости терпит разрыв. Сверхзвуковая до ударной волны, скорость становится дозвуковой за ударной волной.

Ударные волны легко наблюдать в аэродинамических трубах. На рисунке 8 приведена фотография обтекания сферы, движущейся со скоростью, которая соответствует числу Маха $M=1,5$. За тем участком головной

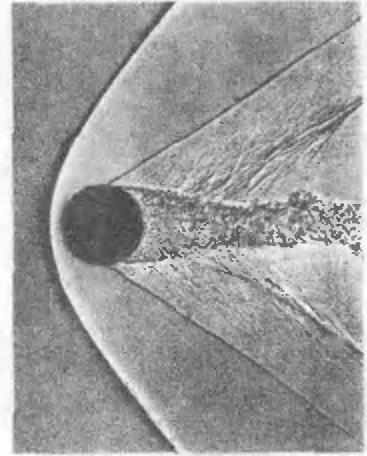
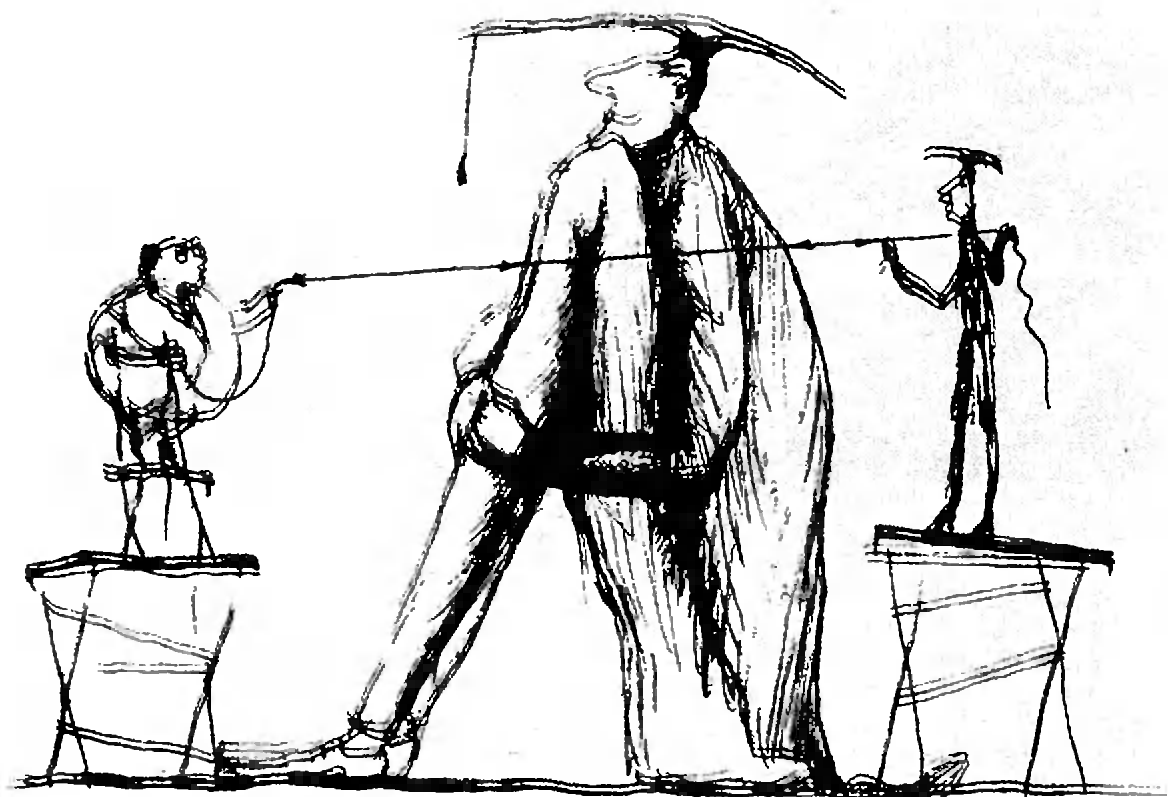


Рис. 8.

ударной волны, который находится непосредственно перед шаром, течение будет дозвуковым вплоть до угла 45° (угол отсчитывается от направления полета шара). Затем течение ускоряется, становится сверхзвуковым. При угле, равном примерно 90° , ламинарный пограничный слой отрывается от шара, создавая отходящую от него косую ударную волну, как бы висящую над турбулентным следом.

* * *

Сколько же «золота» в «золотом фонде» гидродинамики? Ответить на этот вопрос точно нельзя, ибо не существует количественной меры. Более того, я отобрал десять примеров, исходя из субъективных оценок, просто эти примеры попали в мой «вкусовой коридор». Мнения могут быть разными. Важно другое: гидродинамика развивается, добыча «золота» продолжается.



Трагикомедия абитуриента

Об увеличении изображения

В. А. БОДИК, Ф. Б. ШЕЙНЕРМАН

Одной из характеристик изображения светящегося предмета в линзе (или в более сложной оптической системе) является его увеличение. Разумно различать продольное и поперечное увеличения. Пусть, например, линза дает изображение предмета в виде прямого угла ABC (рис. 1). Тогда продольное увеличение

$$\beta = \frac{f_B - f_A}{d_A - d_B},$$

а поперечное —

$$\Gamma = \frac{B'C'}{BC} = \frac{H'}{H},$$

где d — расстояние от светящейся

точки до линзы, f — расстояние от линзы до изображения точки, H — поперечный размер светящегося предмета, H' — поперечный размер его изображения.

Если предмет расположен перпендикулярно оптической оси собирающей линзы и линза создает его действительное изображение (рис. 2), то поперечное увеличение

$$\Gamma = \frac{H'}{H} = \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F} = \frac{f-F}{F}. \quad (1)$$

Если собирающая линза создает мнимое изображение (рис. 3), то

$$\Gamma = \frac{H'}{H} = \frac{f}{d} = \frac{F}{F-d} = \frac{f+F}{F}. \quad (2)$$

В случае рассеивающей линзы (рис. 4)

$$\Gamma = \frac{H'}{H} = \frac{f}{d} = \frac{F}{F+d} = \frac{F-f}{F}. \quad (3)$$

Покажем, чему равно поперечное увеличение системы двух тонких линз. По определению $\Gamma = H'/H$. Домножим числитель и знаменатель на H_0 —

высоту изображения в первой линзе — и получим

$$\Gamma = \frac{H' H_0}{H H_0} = \frac{H_0}{H} \frac{H'}{H_0} = \Gamma_1 \Gamma_2, \quad (4)$$

где Γ_1 и Γ_2 — увеличения изображения в первой и второй линзах соответственно.

А теперь разберем несколько конкретных задач. Многие из них взяты из билетов вступительных экзаменов разных лет в Московский физико-технический институт.

Задача 1. С помощью тонкой линзы на экране получено изображение предмета с пятикратным увеличением. Не изменяя положения линзы, экран передвинули вдоль оптической оси на $l = 30$ см. Для того чтобы получить резкое изображение, пришлось передвинуть и предмет. В этом случае изображение оказалось втрое больше предмета. На какое расстояние переместили предмет?

Изображение предмета в обоих случаях действительное (так как оно получается на экране), и создает его собирающая линза. Запишем формулу линзы для первого случая —

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

и для второго (рис. 5) —

$$\frac{1}{d+x} + \frac{1}{f-l} = \frac{1}{F}.$$

Здесь мы учли, что экран придвинули к линзе, а предмет отодвинули от нее. Только при этих условиях увеличение во втором случае меньше, чем в первом.

Из написанных уравнений с учетом увеличений $f/d = 5$ и $(f-l)/(d-x) = 3$ получим

$$\frac{5}{f} + \frac{1}{f} = \frac{3}{f-l} + \frac{1}{f-l}.$$

Отсюда

$$f = 3l, \quad d = \frac{3}{5} l, \quad x = \frac{l}{15} = 2 \text{ см.}$$

Если бы экран не придвинули к линзе, а отодвинули от нее, то из уравнений

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \text{ и } \frac{1}{d-x} + \frac{1}{f+l} = \frac{1}{F}$$

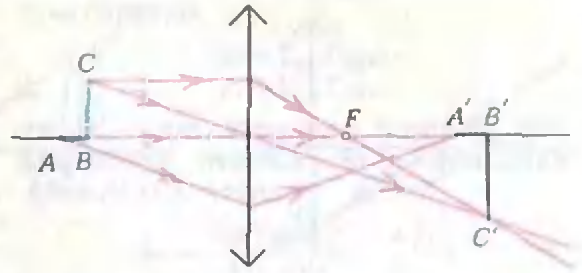


Рис. 1.

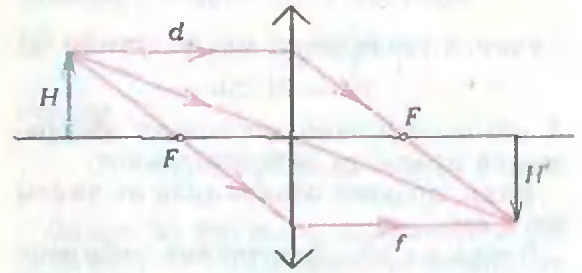


Рис. 2.

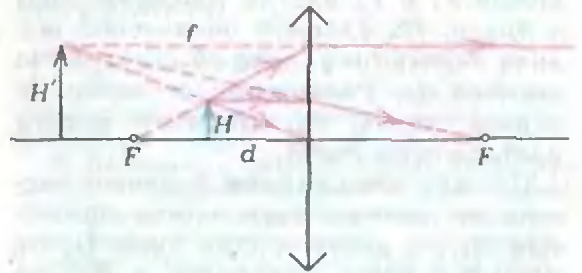


Рис. 3.

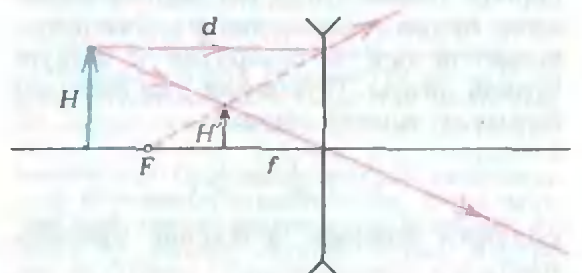


Рис. 4.

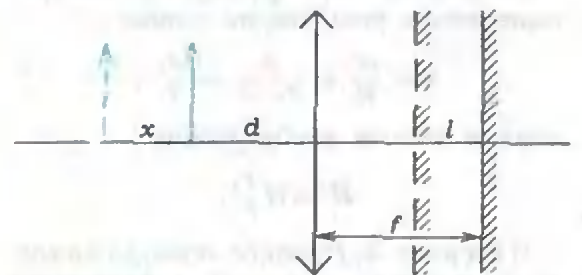


Рис. 5.

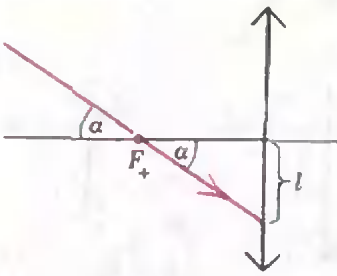


Рис. 6.

с учетом увеличений мы получили бы
 $f = -3l < 0$.

А это невозможно, поскольку изображение предмета действительное.

Итак, предмет отодвинули от линзы на 2 см.

Задача 2. Две тонкие собирающие линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 плотно прижаты друг к другу. На главной оптической оси линз перпендикулярно ей стоит свеча высотой H . Расстояние от свечи до первой линзы F_1 . Найдите высоту изображения свечи.

Прежде всего найдем фокусное расстояние системы двух плотно прижатых друг к другу тонких линз. Пусть источник света находится в фокусе первой линзы. Тогда вышедшие из нее лучи будут параллельны главной оптической оси и соберутся в фокусе второй линзы. Применяя для системы формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F},$$

получим искомое фокусное расстояние:

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2}.$$

Пользуясь этой формулой, найдем поперечное увеличение свечи:

$$\Gamma = \frac{H'}{H} = \frac{F}{F_1 - F} = \frac{F_2}{F_1},$$

откуда высота изображения

$$H' = H \frac{F_2}{F_1}.$$

Задача 3. Плоское зеркало вплотную прижато к тонкой собирающей линзе с фокусным расстоянием F . Изображение предмета находится на расстоянии $2F$ от линзы. С каким увеличением изображен предмет?

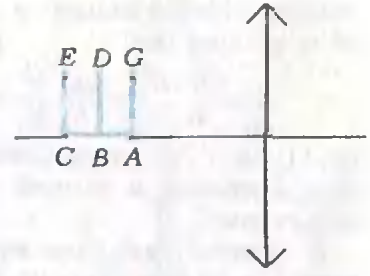
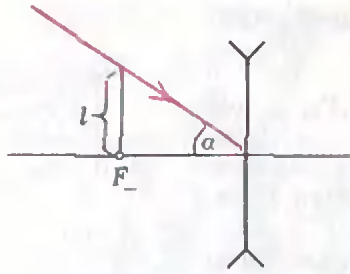


Рис. 7.

Заметим, что лучи, пущенные на линзу, после отражения от зеркала проходят через линзу второй раз. Поскольку линза тонкая и плотно прижата к зеркалу, заменим систему линза — зеркало системой двух плотно прижатых линз, фокусное расстояние которой равно $F/2$. Для эквивалентной этой системе линзы имеем

$$\Gamma = \frac{2F - F/2}{F/2} = 3.$$

Задача 4. Положительная линза создает изображение Луны диаметром l . Такого же размера изображение Луны создает отрицательная линза. Какого размера получится изображение Луны, если эти две линзы соосно поставить друг за другом (впереди отрицательная линза) на расстоянии, равном фокусному расстоянию положительной линзы?

Пусть α — угловой размер Луны. Тогда изображение Луны находится в фокальной плоскости линзы и имеет размер $l = F_+ \operatorname{tg} \alpha$ в положительной линзе и $l = |F_-| \operatorname{tg} \alpha$ в отрицательной (рис. 6). Отсюда получаем

$$F_+ = |F_-|.$$

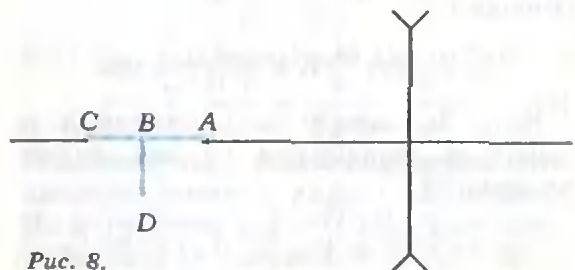


Рис. 8.

В случае соосно поставленных линз изображение Луны в отрицательной линзе является источником для положительной и находится от нее на расстоянии $2F_2$. При этом увеличение изображения равно единице (покажите это). Следовательно, размер изображения Луны равен l .

Задача 5. Две собирающие тонкие линзы — L_1 с фокусным расстоянием $F_1=5$ см и L_2 с фокусным расстоянием $F_2=3$ см — расположены друг за другом на расстоянии L так, что их главные оптические оси совпадают. Перед линзой L_1 на расстоянии $d_1=15$ см расположен предмет. Эта система создает прямое увеличенное изображение предмета. При каких L это возможно?

Для того чтобы изображение предмета было прямым, необходимо, чтобы $L-f_1 > F_2$, где f_1 — расстояние между первой линзой и изображением предмета в ней. Отсюда

$$L > F_2 + F_1 \frac{d_1}{d_1 - F_1} = 10,5 \text{ см.}$$

Второе ограничение на L накладывается увеличением:

$$\Gamma = \frac{F_1}{d_1 - F_1} \frac{F_2}{L - f_1 - F_2} > 1,$$

откуда $L < 12$ см.

Окончательно

$$10,5 \text{ см} < L < 12 \text{ см.}$$

Задача 6. С помощью тонкой линзы получено изображение трезубца $ABCEDG$ (рис. 7). Основание трезубца AC лежит на главной оптической оси линзы, $AB=BC$. Отрезок AB изображается с увеличением $\beta_1=6$, а отрезок BC — с увеличением $\beta_2=3$. С каким увеличением изображается отрезок BD ?

По определению

$$\beta_1 = \frac{f_A - f_B}{d_B - d_A}.$$

Выразим f_A и f_B из формулы линзы:

$$f_A = F \frac{d_A}{d_A - F}, \quad f_B = F \frac{d_B}{d_B - F}.$$

Подставив в формулу для β_1 выражения для f_A и f_B , получим

$$\beta_1 = \frac{F}{d_A - F} \frac{F}{d_B - F} = \Gamma_{AG} \Gamma_{BD}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \Gamma_{BD} \Gamma_{CE}, \\ \beta_3 &= \Gamma_{AG} \Gamma_{CE}, \end{aligned}$$

где β_3 — увеличение, с которым изображается отрезок AC . Обозначим $AB=BC=a$, тогда

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 a + \beta_2 a}{a + a} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}.$$

Перемножив β_1 и β_2 , с учетом равенства $\beta_3 = (\beta_1 + \beta_2)/2$ получим

$$\beta_1 \beta_2 = \Gamma_{BD}^2 \frac{\beta_1 + \beta_2}{2},$$

откуда

$$\Gamma_{BD} = \sqrt{\frac{2\beta_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} = 2.$$

Заметим, что если, например, $AB \rightarrow 0$, то $\beta \rightarrow \Gamma^2$. Так связаны между собой продольное и поперечное увеличения предмета.

Упражнения

1. Монету рассматривают в лупу. Видимый диаметр монеты вдвое больше истинного. Как изменилась толщина монеты?

2. На экране с помощью тонкой линзы получено изображение предмета с увеличением $\Gamma_1=2$. Предмет передвинули на $l=1$ см. Для того чтобы получить резкое изображение, пришлось передвинуть экран. При этом увеличение оказалось равным $\Gamma_2=4$. На какое расстояние передвинули экран?

3. На экране с помощью тонкой линзы получено изображение предмета с пятикратным увеличением. Экран передвинули на $l=30$ см вдоль оптической оси линзы. При неизменном положении линзы на экране получили изображение того же предмета с трехкратным увеличением. Определите фокусное расстояние.

4. С помощью отрицательной линзы получено изображение предмета $ABCD$, отрезок AC лежит на главной оптической оси, $AB=BC$ (рис. 8). Отрезок CB изображается с увеличением $\beta=0,3$; отрезок BD — с увеличением $\Gamma = \sqrt{3/8}$. Определите, с каким увеличением изображается отрезок AB .

Спутник на дисплее

Н. Н. НОСКОВ, С. К. СТОЛБОВУШКИН

До Ньютона движение различных тел, например планет, представлялось загадкой для ученых, но после открытия Ньютона все вдруг стало понятно.

Р. Фейнман

Все мы когда-то строили модели кораблей или макеты домиков и городов. А не хотелось ли вам сделать действующую модель Вселенной или, хотя бы, Солнечной системы? Такую модель построить вполне возможно, и очень удобным инструментом для ее создания является компьютер.

Мы начнем с простого — смоделируем движение спутника Земли. Сначала займемся теоретической постановкой задачи, т. е. установим физические законы, определяющие движение спутника, а затем составим алгоритм, по которому можно писать программу для ЭВМ.

1. Постановка задачи

При моделировании неизбежны упрощения. Поэтому для начала мы предположим, что в космосе находятся только два тела: Земля и спутник. Чтобы построить модель их взаимодействия, нужно знать физические законы, определяющие их движение. Этих законов два: второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения, открытый им же. Кроме того, нужно задать исходные данные. С этого и начнем.

На спутник действует единственная сила — сила притяжения Земли. Ее можно вычислить по формуле закона всемирного тяготения

$$F = G \frac{M \cdot m}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная, она равна $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$;

M_3 — масса Земли, равная $5,98 \times 10^{24} \text{ кг}$;

m_c — масса спутника.

По второму закону Ньютона ускорение \vec{a} спутника равно: $\vec{a} = F / m_c$. Далее, зная координаты $\vec{S} \vartheta = (x\vartheta; y\vartheta)$ и скорость $\vec{v} \vartheta$ спутника в некоторый момент времени и применив формулы кинематики

$$\vec{v} = \vec{v} \vartheta + \vec{a} \Delta t, \quad \vec{S} = \vec{S} \vartheta + \vec{v} \Delta t, \quad (1)$$

казалось бы, можно определить скорость и положение спутника через время Δt . Но это не так! Сила, действующая на спутник, да и скорость \vec{v} за время Δt изменится. Что же делать?

Выход есть. Предположим, что промежуток времени Δt , через которое нужно вычислить положение и скорость спутника, мал. Тогда за это время расстояние от спутника до Земли изменится незначительно и изменением силы F и скорости \vec{v} за этот промежуток времени можно будет пренебречь. Нужно только разумно выбрать величину Δt . Результатом вычисления будут новые значения координат и скорости спутника. Для них можно повторить эти же вычисления при том же Δt и получить очередные величины координат и скорости. Последовательно применяя такую схему вычислений, мы получим координаты спутника в последовательные моменты времени T_1, T_2, T_3, \dots , а соединив эти точки отрезками прямых, мы получим ломаную линию, которая приближен-

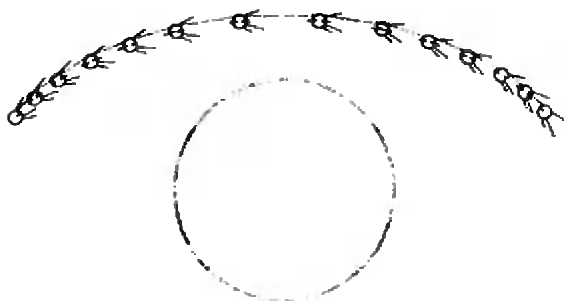


Рис. 1.

но представляет траекторию движения спутника (рис. 1). Такие ломаные называются *ломаными Эйлера*, а сам метод вычислений также носит имя Леонарда Эйлера — великого русского ученого XVIII века.

Метод Эйлера применяется не только для нахождения траекторий небесных тел. Он используется для решения широкого класса уравнений, называемых *дифференциальными уравнениями*. Наше исходное уравнение (второй закон Ньютона) — тоже дифференциальное. Причем метод Эйлера применим также для решения уравнений, которые точными методами не решаются.

Теперь, зная метод Эйлера, можно составить подробную схему вычисления траектории спутника на околоземной орбите.

Поскольку орбита спутника расположена в одной плоскости с центром Земли, установим систему координат так, чтобы плоскость орбиты совпадала с плоскостью xu . В таком случае координата z всегда равна нулю и ее можно не рассматривать. Начало системы координат поместим в центр Земли (см. рис. 2). Пусть расстояние от центра Земли до спутника равно R , а его скорость относительно Земли — \vec{v} . Для того, чтобы однозначно определить положение спутника, одной величины R недостаточно. Нужно либо к R добавить угол α , под которым виден спутник из начала координат, либо вместо пары R, α задать пару координат x, y .

Если известно расстояние R и угол α , то координаты x, y можно определить по формулам $x = R \cos \alpha$, $y = R \sin \alpha$.

Скорость спутника и сила притяжения Земли — величины векторные, разложим их на компоненты по осям x, y . Из подобия соответствующих треугольников на рисунке 2 видно, что

$$\frac{F_x}{|F|} = -\frac{x}{R}, \quad \frac{F_y}{|F|} = -\frac{y}{R},$$

отсюда

$$F_x = -|F|x/R, \quad F_y = -|F|y/R.$$

Если на спутник действует только притяжение Земли, то второй закон Ньютона можно записать в виде

$$m_c a_x = -G \frac{M_3 \cdot m_c}{R^2} \frac{x}{R},$$

$$m_c a_y = -G \frac{M_3 \cdot m_c}{R^2} \frac{y}{R}.$$

Сократив на m_c и подставив значение ускорения в формулы кинематики (1), получим формулы для вычисления новых значений координат и компонент скорости через время Δt :

$$\begin{aligned} x'' &= x + v_x \Delta t, \\ y'' &= y + v_y \Delta t, \\ v_x'' &= v_x - G \cdot M_3 x \Delta t / R^3, \\ v_y'' &= v_y - G \cdot M_3 y \Delta t / R^3. \end{aligned} \quad (2)$$

Формулы (2) представляют собой готовую схему алгоритма для ЭВМ. Реализацией этого алгоритма мы и займемся. Но сначала выясним, как задать шаг Δt . Существуют специальные методы расчета шага с тем, чтобы через длительное время погрешность вычисления координат не превышала наперед заданного значения. Мы поступим проще — подберем значение шага опытным путем. Для этого нужно выбрать произвольное Δt и найти решение для этого значения. Затем уменьшить шаг в два раза и снова найти траекторию. Если решение для нового Δt не отличается от предыдущего, то будем считать, что выбор шага удовлетворителен.

Теперь можно приступить к реализации модели на компьютере.

2. Составление программы

У нас есть алгоритм вычисления траектории спутника, т. е. набор формул (2), позволяющих находить координаты и скорости спутника в любой момент времени. Но если применять

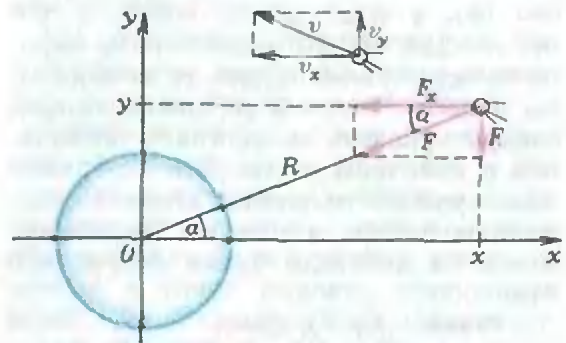


Рис. 2.

эти формулы в СИ, то все величины будут иметь очень большие значения, соответствующие космическим масштабам. Поэтому выгодно ввести свою систему единиц, в которой произведение GM_3 равно единице. Это получится, если принять за единицу длины радиус Земли, а за единицу скорости — первую космическую скорость $v_{1к} = \sqrt{GM_3/R_3}$. В этом случае время будет измеряться в единицах $R_3/v_{1к}$. Соотношения между единицами новой системы измерений и СИ для Земли получаются следующие: единица длины — $6,38 \cdot 10^6$ м, скорости — $7,8 \cdot 10^3$ м/с, времени — $0,82 \cdot 10^3$ с, а формулы (2) принимают вид

$$\begin{aligned} x^n &= x + v_x \Delta t, \\ y^n &= y + v_y \Delta t, \\ v_x^n &= v_x - x \Delta t / R^3, \\ v_y^n &= v_y - y \Delta t / R^3. \end{aligned} \quad (3)$$

Формулы стали более пригодными для вычислений и, главное, универсальными. Они «работают» не только для Земли, но и для любого космического тела, естественно, в системе единиц, в которой единица длины — радиус этого тела, а единица скорости — первая космическая скорость для этого тела.

Последнее, что нам осталось сделать перед написанием программы, — это уяснить, что такое графический экран и как на нем расположить нашу модель. Дисплей в графическом режиме высокого разрешения представляет собой прямоугольное поле точек размером $m \times n$. Ось x на нем всегда расположена слева направо, а ось y может располагаться как сверху вниз, так и снизу вверх. Давайте считать, что ось y идет снизу вверх и что $m = n = 256$. Чтобы высветить на экране точку, нужно задать ее координаты и цвет. Чтобы нарисовать линию, следует указать координаты начальной и конечной точек. Для изображения окружности следует указать координаты центра и радиус. Операторы для этих действий будем обозначать так:

- точка (X, Y), цвет;
- линия (X1, Y1) — (X2, Y2), цвет;
- круг (X, Y), R, цвет.

Однако в качестве экранных координат нельзя просто взять физические координаты. Как вы помните, за единицу мы взяли радиус Земли, а в центр Земли поместили начало координат. Теперь нам надо поместить центр Земли в центр экрана (точку с координатами $(X_ц, Y_ц)$, например (128, 128)) и все увеличить в k раз. Получаются следующие формулы: если физические координаты точки (спутника) x, y , то координаты на дисплее

$$XD = X_ц + k * x, \quad YD = Y_ц + k * y.$$

Величину k мы определим позже.

Теперь можно переходить непосредственно к составлению программы. Сначала построим общую схему, а затем будем ее детализировать. В грубом приближении программу для движения спутника Земли можно записать в следующем виде:

начало

- ввод начальных данных;
- подготовка графического дисплея;
- нарисовать Землю и спутник;
- повторять**

- вычислить новые значения координат;
- нарисовать отрезок траектории и спутник в новом положении;

конец повтора

конец.

Первые две инструкции не вызывают проблем. Пусть спутник в начальный момент времени T_0 расположен на оси x , тогда начальную координату y надо положить равной нулю и остается ввести расстояние x в единицах физической системы координат, т. е. в единицах земного радиуса.

Начальную скорость тоже несложно ввести в виде пары чисел VX, VY . Однако оказывается, что удобнее ввести значение модуля скорости и ее направление (угол с осью x), а затем преобразовать в компоненты прямоугольной системы координат по формулам

$$\begin{aligned} VX &= V * \cos(\text{угол} * \pi / 180), \\ VY &= V * \sin(\text{угол} * \pi / 180). \end{aligned}$$

Выражения в скобках нужны для перевода угла из градусов в радианы,

потому что во всех языках тригонометрические функции вычисляются только в радианах.

Подготовка графического дисплея несложна, достаточно строго следовать инструкции к компьютеру. Можно для эстетики нарисовать бордюрную рамку. Если графический дисплей допускает одновременно и вывод текста, то в верхней или нижней части экрана можно написать название задачи. Эти добавления не обязательны, но с ними картинка смотрится существенно приятнее. Можно проявить фантазию, добавить еще какие-нибудь аксессуары, оживляющие картину.

Теперь изобразим Землю и спутник. Для того чтобы рисовать, требуется определить масштабный коэффициент k . Мы предлагаем задать его по формуле $k=100/x$. Тогда изображение Земли и спутника (с экранными координатами XD, YD) реализуется операторами

круг (X_n, Y_n), k , голубой;
 $XD \leftarrow X_n + k * x$; $YD \leftarrow Y_n$;

точка (XD, YD), красный.

Масштабирование в таком случае получается автоматически. Если вы решили запустить спутник с поверхности Земли, т. е. $x=1$, то изображение Земли займет почти весь экран, его радиус будет сто экранных единиц. Если же спутник поместить на расстоянии $x=10$, то Земля займет кружок радиусом 10 точек.

Осталось определить величину шага по времени $T\phi = \Delta t$. Экспериментально определено, что значение в интервале 0.1—0.2 вполне удовлетворительно.

Все подготовительные действия закончены, приступим к моделированию полета спутника на основании формул (3).

Повторять
 $XS \leftarrow XD$; $YS \leftarrow YD$;
 $X \leftarrow X + VX * T\phi$;
 $Y \leftarrow Y + VY * T\phi$;
 $XD \leftarrow X_n + k * X$;
 $YD \leftarrow Y_n + k * Y$;

Линия (XS, YS) — (XD, YD), синий;
 Точка (XD, YD), красный;

$R \leftarrow \sqrt{X^2 + Y^2}$;
 $VX \leftarrow VX - X * T\phi / R^3$;
 $VY \leftarrow VY - Y * T\phi / R^3$;
 Конец повтора.

Как вы, наверное, догадались, XS и YS — старые экранные координаты спутника. Причем мы не просто проводим линию или ставим точку, а делаем и то, и другое. В результате по экрану будет двигаться красная точка, оставляя за собой синий след. При выводе линии можно указывать только координату конечной точки, если начальную точку компьютер помнит сам.

Программа практически кончена, осталось решить, как долго нужно повторять цикл. Можно задать число повторений заранее, но не исключено, что работа с моделью надоеет нам раньше, чем кончится цикл или, наоборот, цикл закончится в самый интересный момент. Поэтому удобнее было бы прерывать цикл по нашему желанию. Например, нажатием какой-нибудь клавиши. И еще одно условие окончания цикла надо добавить. Дело в том, что если $R < 1$, ничто не помешает программе продолжать работу. А это означает, что спутник врезался в Землю и продолжает движение в ее недрах. Поэтому введем так называемую булевскую переменную УПАЛ, которая принимает только два значения: истина и ложь. И будем вычислять ее так: $УПАЛ \leftarrow (R < 1)$. Условие повтора в этом случае:

ПОВТОРЯТЬ ПОКА (НЕ УПАЛ) И
 (КЛАВИША \neq "S")

Цикл будет продолжаться до тех пор, пока не нарушится хоть одно из условий.

Мы составили программу на гипотетическом языке. Ее легко перевести на язык любого компьютера.

Теперь поговорим о том, что вы можете самостоятельно изменить и дополнить в программе. Первая часть изменений касается эстетического оформления. Если спутник упал, то можно в точке падения изобразить взрыв. Да и сам спутник можно рисовать не точкой, а в виде фигурки (владеющему искусством спрайтов это

не составит труда). Можно через 10 или 20 циклов выводить на экран текущие значения скорости и расстояния до Земли. Это первое, что приходит в голову. Надеемся, вы придумаете что-нибудь еще.

Помимо художественных дополнений, можно изменить и саму модель. В этом случае простора для фантазии еще больше. Если в формулах для VX и VY заменить минусы на плюсы, то закон всемирного тяготения превратится в закон всемирного отталкивания. Тем самым модель спутника превратится в модель взаимодействия одноименно заряженных частиц. А можно смоделировать несуществующую Вселенную. Сила в законе тяготения обратно пропорциональна

квадрату расстояния. А что получится, если она будет обратно пропорциональна кубу или первой степени расстояния? Нам несложно смоделировать и эту ситуацию — достаточно в формулах заменить R^3 на R^4 или на R^2 .

А вот следующие изменения потребуют больших трудов. Мы создали модель спутника Земли, но не можем им управлять. Кроме того, в космосе существуют и другие тела, на которые можно летать. Интересно было бы на «Союзе» слетать на станцию «Мир» или с «Фобоса» высадить «Попрыгунчика» на Фобос. Этим мы займемся в одном из следующих номеров журнала.

Список читателей: приславших правильные решения

(Начало см. на с. 38)

48, 55, 58, 59; П. Молодов (Ломоносов) 55; С. Мури́н (Брест) 59; В. Мытько (Ленинград) 48, 52, 55, 59, 60; А. Насибов (Шекинский р-н АзССР) 52; А. Насиров (Шекинский р-н АзССР) 52; Н. Немировская (Киев) 48, 52, 58; А. Николаев (Киев) 48, 49; И. Новиков (Калининград) 58; Р. Новоселов (Москва) 55, 58, 59, 61; Д. Омецинский (Киев) 48, 49, 51, 58—61; В. Онищук (Минск) 58, 59; Г. Орпер (Киев) 58; А. Орловский (Киев) 48, 49, 51, 58—61; Д. Островский (Днепропетровск) 60; А. Павлощук (Киев) 49, 52, 58; Ю. Пайко (Врест) 58; П. Пензин (Куйбышев) 58—60; М. Перепечко (Москва) 55; С. Петухов (Горький) 52; И. Пилюгин (Алма-Ата) 52, 58; Н. Плахтий (Киев) 58; Т. Подалько (Ленинград) 58, 61; С. Подпратов (Киев) 49, 52; Э. Пожарский (Ташкент) 49, 52; В. Полищук (Канев) 51, 61; С. Польшин (Харьков) 52, 58—61; С. Пономаренко (Новосибирск) 49; С. Потгорочин (Ижевск) 52, 55, 58, 60; Е. Призант (Одесса) 51, 55, 58, 59, 61; Е. Проскурина (Киев) 58; В. Пузанов (Донецк) 51; И. Пятайки́н (Москва) 55; А. Раевский (Москва) 61; А. Распереза (Брест) 48, 49, 52, 55, 58, 61; И. Рассадин (Минск) 52; Р. Ролинский (Киев) 52; А. Рувинский (Ивано-Франковск) 52; Р. Рузиев (Ханкинский р-н Хорезмской обл.) 52; Н. Рябова (Харьков) 52, 59; А. Савин (Горловка) 58, 59, 61; А. Савченко (с. Мошны

Черкасской обл.) 58, 59, 61; Н. Самойлова (Киев) 58; А. Самусенко (Семипалатинск) 48, 49, 55; С. Севченко (Минск) 52; А. Скабелин (Барановичи) 48, 51, 55, 58—60; Т. Скрипник (Киев) 48; В. Солдатов (п. Краснореченский Приморского кр.) 55, 59; Ю. Спектор (Киев) 48, 51, 52, 58, 59, 61; Ю. Старостин (Якутск) 55; М. Субботин (Старый Оскол) 48; А. Суеханов (Чарджоу) 59; Н. Сулейманов (Шекинский р-н АзССР) 52; И. Сысоев (Семипалатинск) 55, 59, 61; С. Табалдыев (Москва) 58; В. Таможюнас (Вильнюс) 48, 49, 51, 52, 59; А. Тенекеджи (Воронеж) 58, 59; С. Тимашов (Алма-Ата) 48, 49, 55; М. Титов (Киев) 48, 55, 58—60; С. Тихонов (Воронеж) 48, 51; Р. Тодоров (Варна, НРВ) 52; А. Тутов (Рига) 51; Д. Украинский (Москва) 58; А. Усинский (с. Птичь Ровенской обл.) 48, 49, 52, 60, 61; Ю. Фенюк (Киев) 58; Л. Френклах (Воронеж) 58, 60; А. Фридлянд (Саратов) 48, 49, 55; Г. Хачатрян (Арташатский р-н АрмССР) 48; Р. Христюк (Киев) 48, 51; Е. Чашечкина (п. Чернололка Московской обл.) 48, 49, 52, 55, 58—60; И. Чемолосов (Москва) 60, 61; Л. Чернышев (Москва) 49, 59, 61; Д. Чокин (Алма-Ата) 48, 49, 52, 55, 58, 61; В. Чуев (Старый Оскол) 52; Е. Шагаров (Грозный) 48, 59; А. Шагинян (Ростов) 59; Т. Шарифудинов (Усть-Каменогорск) 48, 49; Е. Шеец (Черновцы) 49, 52, 60; С. Шинкевич (Березники) 48, 49, 51, 52, 58—60; С. Шубский (Брест) 48; И. Шуляк (Киев) 52, 55, 58—60; К. Шурунов (Куйбышев) 58, 59; Н. Щербина (Артемовск) 52; М. Энгин (Тула) 48, 49, 51, 52, 55, 58—61; В. Юрасов (Волгодонск) 55; И. Ягольницер (Черновцы) 52, 55, 58, 59.

„Квант“ улыбается

О возможности создания электростанций на угле

От редактора. Приводимая ниже статья перепечатана из ежегодника Королевского института по использованию энергетических ресурсов за 40905 год, стр. 1001.

В связи с острым кризисом, вызванным угрозой истощения урановых и ториевых залежей на Земле и Луне, редакция считает полезным призвать к самому широкому распространению информации, содержащейся в этой статье.

Введение. Недавно найденный сразу в нескольких местах уголь (черные, окаменевшие остатки древних растений) открывает интересные возможности для создания неядерной энергетики. Некоторые месторождения несут следы эксплуатации их доисторическими людьми, которые, по-видимому, употребляли уголь для изготовления ювелирных изделий и чернили им лица во время погребальных церемоний.

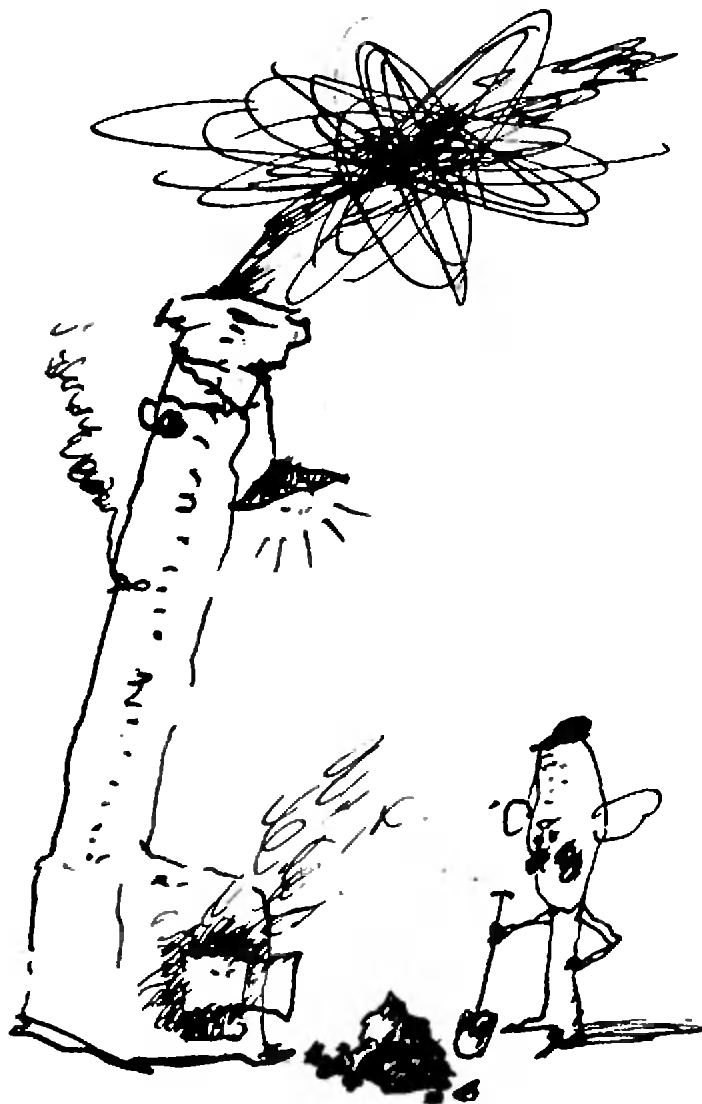
Возможность использования угля в энергетике связана с тем фактом, что он легко окисляется, причем создается высокая температура с выделением удельной энергии, близкой к 0,0000001 мегаватт-дня на грамм. Это, конечно, очень мало, но запасы угля, по-видимому, велики и, возможно, исчисляются миллионами тонн.

Главным преимуществом угля следует считать его очень маленькую по сравнению с делящимися материалами критическую массу. Атомные электростанции, как известно, ста-

новятся неэкономичными при мощности ниже 50 мегаватт, и угольные электростанции могут оказаться вполне эффективными в маленьких населенных пунктах с ограниченными энергетическими потребностями.

Проектирование угольных реакторов. Главная трудность заключается в

создании самоподдерживающейся и контролируемой реакции окисления топливных элементов. Кинетика этой реакции значительно сложнее, чем кинетика ядерного деления, и изучена еще слабо. Правда, дифференциальное уравнение, приближенно описывающее этот процесс, уже получено, но решение его возможно лишь в простейших частных случаях. Поэтому корпус угольного реактора предлагается изготовить в виде цилиндра с перфорированными стенками. Через эти отверстия будут удаляться продукты горе-



ния. Внутренний цилиндр, коаксиальный с первым и также перфорированный, служит для подачи кислорода, а тепловыделяющие элементы помещаются в зазор между цилиндрами. Необходимость закрывать цилиндры на концах торцовыми плитами создает трудную, хотя и разрешимую математическую проблему.

Тепловыделяющие элементы. Изготовление их, по-видимому, обойдется дешевле, чем в случае ядерных реакторов, так как нет необходимости заключать горючее в оболочку, которая в этом случае даже нежелательна, поскольку она затрудняет доступ кислорода. Были рассчитаны различные типы решеток, и уже самая простая из них — плотноупакованные сферы, — по-видимому, вполне удовлетворительна. Расчеты оптимального размера этих сфер и соответствующих допусков находятся сейчас в стадии завершения. Уголь легко обрабатывается, и изготовление таких сфер, очевидно, не представит серьезных трудностей.

Окислитель. Чистый кислород идеально подходит для этой цели, но он дорог, и самым дешевым заменителем является воздух. Однако воздух на 78 % состоит из азота. Если даже часть азота прореагирует с углеродом, образуя ядовитый газ циан, то и она будет источником серьезной опасности для здоровья обслуживающего персонала (см. ниже).

Управление и контроль. Реакция начинает идти лишь при довольно высокой температуре (988° по Фаренгейту). Такую температуру легче всего получить, пропуская между внешним и внутренним цилиндрами реактора электрический ток в не-

сколько тысяч ампер при напряжении не ниже 30 вольт. Торцовые пластины в этом случае необходимо изготавливать из изолирующей керамики, и это вместе с громоздкой батареей аккумуляторов значительно увеличит стоимость установки. Для запуска можно использовать также какую-либо реакцию с самовозгоранием, например между фосфором и перекисью водорода, и такую возможность не следует упускать из виду. Течение реакции после запуска можно контролировать, регулируя подачу кислорода, что почти столь же просто, как управление обычным ядерным реактором с помощью регулирующих стержней.

Коррозия. Стенки реактора должны выдерживать температуру выше 1000 К в атмосфере, содержащей кислород, азот, окись и двуокись углерода, двуокись серы и различные примеси, многие из которых еще неизвестны. Не многие металлы и специальная керамика могут выдержать такие условия. Привлекательной возможностью является никелированный ниобий, но, возможно, придется использовать чистый никель.

Техника безопасности. Выделение ядовитых газов из реактора представляет серьезную угрозу для обслуживающего персонала. В состав этих газообразных продуктов, помимо исключительно токсичных окиси углерода и двуокиси серы, входят также некоторые канцерогенные соединения, такие, как фенантрен. Выбрасывание их непосредственно в атмосферу недопустимо, поскольку приведет к заражению воздуха в радиусе нескольких миль. Эти газы необходимо собирать в контейнеры и подвергать

химической детоксификации. При обращении как с газообразными, так и с твердыми продуктами реакции необходимо использовать стандартные методы дистанционного управления. После обеззараживания эти продукты лучше всего топить в море.

Существует возможность, хотя и весьма маловероятная, что подача окислителя выйдет из-под контроля. Это приведет к расплавлению всего реактора и выделению огромного количества ядовитых газов. Последнее обстоятельство является главным аргументом против угля и в пользу ядерных реакторов, которые за последние несколько тысяч лет доказали свою безопасность. Пройдут, возможно, десятилетия, прежде чем будут разработаны достаточно надежные методы управления угольными реакторами.

*О. Фриш
(Из книги «Физики
продолжают шутить»)*

Олимпиады

XV Всероссийская олимпиада по математике и физике

Ниже приводятся условия задач по математике и физике заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников.

После формулировок задач по математике в скобках указано максимальное число баллов, присуждавшихся за полное решение задачи.

Математика

8 класс

Первый день

1. Найдите три различных натуральных числа, образующих арифметическую прогрессию, произведение которых является полным квадратом. (5)

2. Найдите корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, если известно, что они являются целыми числами и $p + q = 198$. (6)

3. Двенадцать чисел 1, 2, ..., 12 каким-то образом записаны по окружности. Одним ходом разрешается переставить два соседних числа, если модуль их разности больше 1. Докажите, что за конечное число ходов все числа можно расставить в естественном порядке. (9)

4. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку. (10)

Второй день

5. Докажите, что число $4^{545} + 545^4$ является составным. (7)

6. Приведите пример треугольника, который можно разрезать: а) на 12 равных треугольников (4); б) на 5 равных треугольников. (6)

7. На книжной полке в каком-то порядке стоят книги 20-томного собрания сочинений. Библиотекарь хочет расставить эти тома в монотонном порядке — с 1-го по 20-й слева направо. За один прием библиотекарь меняет местами любой том, стоящий не на своем месте, с томом, занимающим его место. Докажите, что число таких операций, нужное для упорядочения томов, не зависит от последовательности действий библиотекаря. (9)

8. Внутри окружности расположен выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с равными сторонами. Каждая сторона пятиугольника продолжена до пересечения с окружностью. Продолжения сторон AB, BC, CD, DE, EA за точки B, C, D, E, A окрашены в красный цвет, а продолжения этих же сторон за точки A, B, C, D, E окрашены в синий цвет. Докажите, что сумма длин всех красных отрезков равна сумме длин всех синих отрезков. (10)

9 класс

Первый день

1. Докажите, что сумма $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2000 \times \times 2001 + 2002 \cdot 2003 \cdot \dots \cdot 4001 \cdot 4002$ делится на 4003. (4)

2. В клетках доски размером 9×9 сидят жуки, по одному в каждой клетке. По сигналу каждый из жуков переползает в одну из соседних (по диагонали) клеток. При этом в каких-то клетках может оказаться по несколько жуков, а какие-то клетки окажутся занятыми. Найдите наименьшее возможное число незанятых клеток. (6)

3. На одной из сторон данного угла зафиксирована точка A . Рассматриваются всевозможные окружности, касающиеся этой стороны в точке A и пересекающие другую сторону в двух точках B и C (каждая окружность — в своей паре точек, обозначаемых через B и C). Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABC , лежат на одной прямой. (8)

4. На доске написаны друг за другом четыре числа: 7956, 3923, 5857, 9725. За ними записывается остаток от деления на 10 000 их суммы. Затем первое число стирается. С оставшимися четырьмя числами проделывается то же самое. И так далее. Могут ли на доске однажды оказаться четыре числа: 1989, 1989, 1989, 1989? (12)

Второй день

5. Семь шестиугольных ячеек (см. рис. 1, а) окрашены в два цвета: белый и синий. За один ход разрешается, выбрав произвольную ячейку, перекрасить ее и все соседние с ней ячейки в другой цвет. Докажите, что за конечное число ходов из раскраски, указанной на рисунке 1, а,

а) можно получить раскраску, указанную на рисунке 1, б; (2)

б) нельзя получить раскраску, указанную на рисунке 1, в. (6)

6. Докажите, что при любых значениях переменных x, y из интервала $(0; 1)$ выполняется неравенство

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1. \quad (9)$$

7. На окружности фиксирована некоторая дуга BC . Рассматриваются всевозможные треугольники ABC , вершины A которых лежат на дуге BC . Для каждого такого треугольника ABC строится вписанная в него окружность и через точки касания этой окружности со сторонами AB и AC проводится прямая. Докажите, что все построенные таким образом прямые касаются одной и той же окружности. (8)

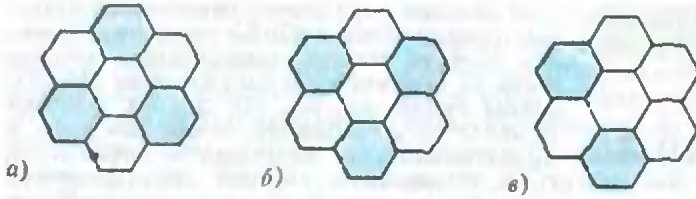


Рис. 1.

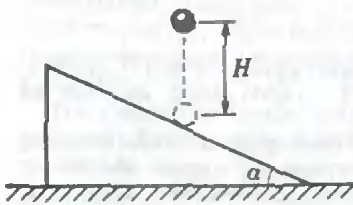


Рис. 3.

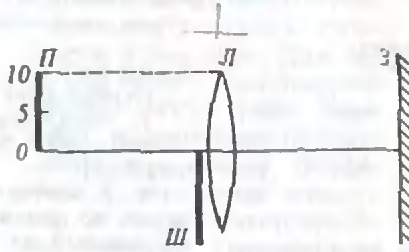


Рис. 4.

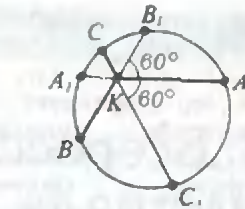


Рис. 2.

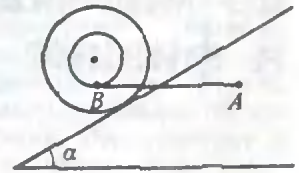


Рис. 5.

8. а) Приведите пример треугольника, который можно разрезать на 13 равных треугольников. (5)

б) Докажите, что для каждого n , представляемого в виде суммы двух квадратов, существует треугольник, который можно разрезать на n равных треугольников. (7)

10 класс

Первый день

1. Найдите натуральные числа $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n-1}$, образующие арифметическую прогрессию, такие, что их произведение равно квадрату натурального числа. (5)

2. По окружности в каком-то порядке записаны числа $1, 2, 3, \dots, n$. Разрешается одним ходом менять местами любую пару соседних чисел, если модуль их разности больше 1. Докажите, что за конечное число ходов все числа можно расставить в естественном порядке. (5)

3. На катетах AC и CB прямоугольного треугольника ABC взяты точки D и E соответственно. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из вершины C на прямые DE, EA, AB и BD , лежат на одной окружности. (10)

4. Пусть $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ и $a + b + c \leq 3$. Докажите неравенства

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$$

(левое неравенство — 3 балла; правое неравенство — 7 баллов).

Второй день

5. Докажите, что при любом значении c уравнение

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 10) = c$$

не может иметь пять целых корней. (6)

6. На шахматной доске на левом нижнем поле $a1$ находится ладья. За один ход ладья перемещается на одно поле по вертикали или

по горизонтали. Может ли ладья обойти все поля доски, побывав на каком-то поле ровно 1 раз, на другом поле — ровно 2 раза, на третьем поле — ровно 3 раза, ..., на 64-ом поле — ровно 64 раза, и:

а) вернуться на исходное поле $a1$? (4)

б) закончить маршрут на поле $a1$? (4)

(Начальная позиция на поле $a1$ считается за однократное «посещение» этого поля.)

7. Три хорды окружности AA_1, BB_1, CC_1 имеют общую точку K и пересекаются под углом 60° (рис. 2). Докажите, что

$$KA + KB + KC = KA_1 + KB_1 + KC_1. \quad (10)$$

8. Можно ли в кубе с ребром 1 разместить три правильных непересекающихся тетраэдра с ребром 1? (Допускается касание тетраэдров их границами.) (12)

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. В некоторый момент времени с высоты H роняют маленький упругий мячик на поверхность клина с углом α при основании (рис. 3). В этот же момент клин начинают двигать в горизонтальном направлении с постоянным ускорением. Чему равен промежуток времени между двумя последовательными ударами мячика о поверхность клина, если известно, что эти удары произошли в одной и той же точке поверхности?

2. Свинцовая и алюминиевая гирьки уравновешены в воздухе на неравноплечных рычажных весах. Если поменять гирьки местами и опустить их в воду, то равновесие весов не нарушится. Определите отношение длин плеч весов. Плотность свинца $\rho_1 = 11,3 \text{ г/см}^3$, плотность алюминия $\rho_2 = 2,7 \text{ г/см}^3$. Плотностью воздуха по сравнению с плотностью воды пренебречь. Коромысло весов считать очень легким.

3. Конец куска стальной проволоки массой $m = 20 \text{ г}$ нагрет в пламени газовой горелки. Зависимость температуры проволоки от расстояния x (в долях от длины проволоки l)

до нагретого конца дана в таблице:

x	0	$l/10$	$2l/10$	$3l/10$	$4l/10$	$5l/10$	l
$t, ^\circ\text{C}$	850	600	420	300	230	150	100

Через некоторое время температура проволоки выравнялась и оказалась равной $\theta = 200^\circ\text{C}$. Оцените, какое количество теплоты потеряла проволока за это время. Удельная теплоемкость стали $c = 0,5 \text{ Дж}/(\text{г}\cdot^\circ\text{C})$.

4. Предмет P , представляющий собой ярко и равномерно освещенную шкалу длиной 10 мм с делениями от 0 до 10, помещен в переднюю фокальную плоскость тонкой линзы L (рис. 4). Нижняя половина линзы закрыта непрозрачной ширмой $Ш$, диаметр линзы 20 мм. В задней фокальной плоскости линзы установлено плоское зеркало $З$. Где нужно поставить экран, чтобы увидеть на нем изображение шкалы? Найдите размер изображения, видимого на экране. Будет ли это изображение равномерно освещенным?

9 класс

1. Массивную катушку (рис. 5) вкатывают без проскальзывания с постоянной скоростью на наклонную плоскость с углом $\alpha = 30^\circ$, действуя на конец A нити, намотанной на малый цилиндр катушки, с постоянной силой, вдвое большей силы тяжести катушки. Известно, что при этом участок AB нити все время занимает горизонтальное положение. С какой скоростью катится катушка, если скорость конца A нити $v = 0,1 \text{ м}/\text{с}$?

2. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится насыщенный водяной пар, масса которого m . Наружное давление нормальное. В цилиндр ввели такое же количество воды при температуре t_0 . Пренебрегая теплоемкостью цилиндра и трением поршня, найдите работу, которую произвела сила атмосферного давления. Какие табличные величины необходимы для того, чтобы решить задачу численно, если масса m и температура t_0 известны?

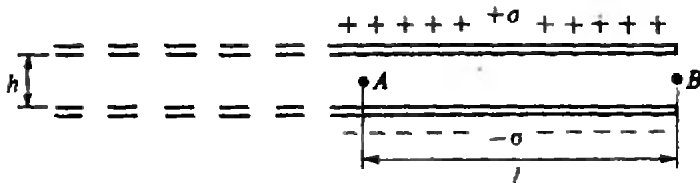


Рис. 6.

3. Две бесконечные параллельные полу-плоскости заряжены равномерно с одинаковой по модулю, но противоположной по знаку поверхностной плотностью заряда (рис. 6). Известно, что напряженность поля в точке A , находящейся очень далеко от края пластин ($l \gg h$), равна E_0 . Чему равна напряженность поля в точке B , расположенной у края пластин, если известно, что силовая линия поля, проходящая через точку B , составляет с плоскостью пластин угол α ?

4. На схему, состоящую из последовательно соединенных лампочки и амперметра, подается постоянное напряжение $U = 7 \text{ В}$. Амперметр показывает ток $I_1 = 120 \text{ мА}$. После шунтирования амперметра резистором его показание стало $I_2 = 50 \text{ мА}$. Найдите сопротивление резистора. Вольт-амперная характеристика лампочки приведена на рисунке 7.

10 класс

1. Тележка массой M приводится в движение пружиной жесткостью k , которая одним концом укреплена на кронштейне, жестко связанном с тележкой, а другим — связана с нитью, намотанной на малый цилиндр радиусом r приводного колеса (рис. 8). В исходном положении пружина растянута на величину Δl_0 . Найдите ускорение тележки сразу после того, как ее освободили. Считать, что колеса тележки невесомы и не проскальзывают по полу. Большой радиус колеса равен R .

2. Найдите максимальный возможный КПД водяной мельницы (рис. 9). Считать, что плоскость лопаточек водяного колеса оказывается перпендикулярной падающей на них струе воды.

3. В начальный момент в схеме (рис. 10) ключ разомкнут и конденсатор не заряжен. Ключ периодически замыкают на время $\tau = 8 \text{ мс}$ и размыкают на такое же время. Каким станет напряжение на конденсаторе после первого цикла «замыкание — размыкание»? После четвертого? Каким окажется это напряжение через достаточно большое время, если сопротивление изоляции конденсатора $R = 5 \text{ МОм}$? Все остальные элементы цепи счи-

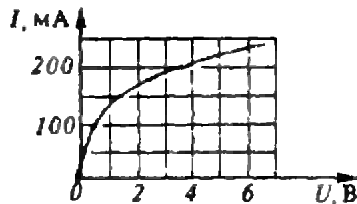


Рис. 7.

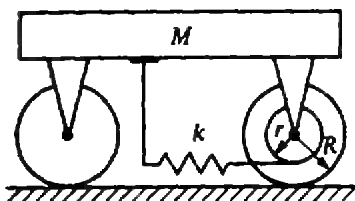


Рис. 8.

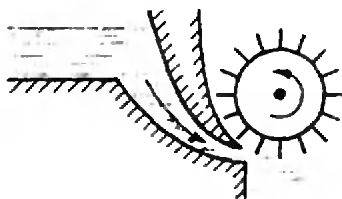


Рис. 9.

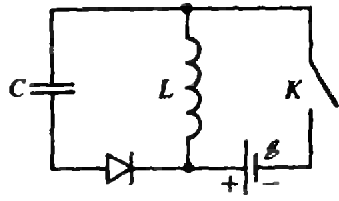


Рис. 10.

тать идеальными, причем $\mathcal{E} = 3 \text{ В}$, $L = 0,09 \text{ Гн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$.

4. Однолинзовый объектив фотоаппарата имеет фокусное расстояние $F = 5 \text{ см}$. Выдержка (время, в течение которого засвечивается каждый участок изображения на фотопленке) обрабатывается в этом фотоаппарате при помощи щелевого затвора. Принцип работы затвора следующий: вдоль и вблизи фотопленки движется с постоянной скоростью $u = 1 \text{ м/с}$ щель, ширину которой можно менять в широких пределах для получения требуемой выдержки. Неподвижным фотоаппаратом снимают с расстояния $a = 20 \text{ м}$ автомобиль, длина которого в 4 раза больше его высоты. Автомобиль движется горизонтально со скоростью $v = 20 \text{ м/с}$ перпендикулярно направлению фотоаппарат — автомобиль. При съемке щель затвора располагалась вертикально. Каким оказалось отношение длины к высоте у полученного на пленке достаточно резкого изображения автомобиля?

Экспериментальный тур

8 класс

1. Определите массу цилиндра.

Оборудование: цилиндр, динамометр, катушка ниток, стержень от шариковой ручки.

2. Определите фокусное расстояние рассеивающей линзы.

Оборудование: рассеивающая линза, источник света, дающий узкий пучок, экран, линейка.

9 класс

1. Определите плотность кристаллов поваренной соли.

Оборудование: вода, соль, весы с разновесами, мерный цилиндр, стакан.

2. Определите теплоту кристаллизации тиосульфата натрия.

Оборудование: тиосульфат натрия, калориметр, пробирка, мерный цилиндр, термометр, электроплитка, сосуд с водой, весы с разновесами.

10 класс

1. Определите радиус кривизны сферического выпуклого зеркала.

Оборудование: источник света, собирающая линза, экран, линейка, сферическое зеркало.

2. Экспериментально установите зависимость между величиной световой энергии, падающей на фотоземель, и показаниями гальванометра, подключенного к нему.

Оборудование: прибор по фотометрии с гальванометром, линейка, лист миллиметровой бумаги, лампочка на подставке, соединительные провода, ключ, источник питания.

Публикацию подготовили
Л. П. Купцов, О. Ю. Овчинников,
С. В. Резниченко

I Всероссийская олимпиада по информатике

С 21 по 25 марта 1989 г. в Красноярске проходила первая Всероссийская олимпиада по информатике. Среди ее организаторов, гостеприимно принимавших 143 школьников из всех регионов России, были Красноярский университет, Красноярский педагогический институт, Вычислительный центр СО АН СССР (Красноярск) и Главное управление народного образования Красноярского облисполкома. Возглавил жюри член-корреспондент АН СССР Ю. И. Шокин.

Торжественное открытие олимпиады происходило 21 марта в краевом Дворце пионеров и школьников, а утром 22 марта в Красноярском университете участники приступили к решению задач теоретического тура. На выполнение работы отводилось 4 часа. Во всех задачах требовалось составить алгоритм и записать его на каком-либо алгоритмическом языке.

Через день, 24 марта, состоялся практический тур, на котором предлагалось в течение четырех часов решить, используя персональ-

ную ЭВМ, две задачи. В распоряжение участников были предоставлены компьютеры типа «Ямаха», «Корвет» и «БК-0010». Это не означает, к сожалению, что школьники сами могли выбрать тип ЭВМ, на котором они хотели бы работать — количество «Ямах» было заведомо меньше, чем желающих выполнять на них практический тур. Поэтому распределение участников по машинам решал жребий. Правда, школьникам из одной региональной команды разрешалось поменяться машинами. Официальным языком практического тура был объявлен Бейсик. Дабы обеспечить равенство всех участников, пользоваться своими дискетами не разрешалось.

Приведем задачи обоих дней олимпиады.

Теоретический тур

1. Прямоугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин. На противоположных сторонах AB и CD заданы последовательности R_1 и R_2 из N точек разбиения, а на сторонах BC и AD — R_3 и R_4 из M точек разбиения. Нумерация элементов последовательностей R_1 и R_2 начинается соответственно от точек A и D , а R_3 и R_4 — от B и A . Соединив отрезками точки с одинаковыми номерами в разбиениях R_1 и R_2 , а затем в разбиениях R_3 и R_4 , получим разбиение Q прямоугольника $ABCD$ на множество четырехугольников. Построить алгоритм, определяющий четырех-

угольник разбиения Q с наибольшей площадью при условии, что отрезки, соединяющие точки разбиений $R1$ и $R2$, параллельны стороне AD .

Последовательности $R1, R2, R3, R4$ задаются как массивы из длин отрезков разбиения соответствующих сторон прямоугольника.

2. Построить алгоритм, моделирующий на экране дисплея движение с постоянной скоростью V двух окружностей радиусом R внутри прямоугольной области, заданной координатами своих вершин. В момент начала движения координаты центров окружностей — $(X1; Y1)$ и $(X2; Y2)$, а углы между траекториями движения и вертикальной осью координат — $A1$ и $A2$. Столкновения окружностей между собой и с границами области — упругие.

3. Данные N косточек домино по правилам игры выкладываются в прямую цепочку, начиная с косточки, выбранной произвольно, в оба конца до тех пор, пока это возможно. Построить алгоритм, позволяющий определить такой вариант выкладывания косточек, при котором к моменту, когда цепочка не может быть продолжена, «на руках» останется максимальное число очков.

4. Имеются два одинаковых диска. На каждом из них есть круглое отверстие радиусом R , касающееся границы диска. Диски расположены горизонтально, плотно прижаты друг к другу и скреплены общей осью, проходящей через их центр вращения. Верхний диск неподвижен, а нижний равномерно вращается с заданной угловой скоростью $W2$. Вдоль границы верхнего диска катятся с постоянной заданной угловой скоростью $W1$ N шаров радиусом R . Шары расположены плотно друг за другом и пронумерованы цифрами от 1 до N . Если при совпадении отверстий на дисках шар проваливается, то плотность цепочки шаров «мгновенно» восстанавливается. Построить алгоритм, позволяющий определить номера первых M шаров, выпавших при совпадении отверстий на дисках, если в момент начала движения угол между центрами отверстий верхнего и нижнего дисков был равен $A1$, а угол между центрами отверстия верхнего диска и первым шаром цепочки — $A2$. Угол сектора, по дуге которого расположена цепочка шаров, равен $A3$.

Практический тур

1. На интервале (1000; 9999) найти все простые числа, каждое из которых обладает тем свойством, что сумма первой и второй цифр в записи этого числа равна сумме третьей и четвертой цифр.

2. Найти десятичную запись числа 3^{512} .

Возможно, среди читателей найдутся желающие решить задачи практического тура. Для них приводим ответы к этим задачам.

1. На заданном интервале имеется 56 таких простых чисел:

- 1423, 1607, 1753, 1973, 2011, 2213, 2341, 2543,
- 2617, 2671, 2819, 2837, 3407, 3461, 3517, 3571,
- 3719, 3847, 4013, 4637, 4673, 4691, 4729, 4783,
- 4967, 5023, 5261, 5519, 5573, 5591, 5647, 5683,
- 5849, 5867, 6143, 6217, 6271, 6473, 6491, 6529,
- 6547, 7043, 7649, 7759, 8017, 8053, 8219, 8237,
- 8273, 8291, 8329, 8677, 9137, 9173, 9283, 9467.

2. Искомое число содержит 245 цифр:
 1932334983228891510545406872201958105540
 1465761603328550184537628902466746416537
 0000179394297860293543900823292945861195
 0515350910133294088409804047872863954256
 0550133727399482778062322407372338121043
 3996682422765917915046589858829952724365
 41441.

При проверке работ каждая задача сначала независимо от других оценивалась от 0 до 5 баллов. Критерии оценок задач теоретического тура довольно традиционны, поэтому остановимся на оценках практического тура. Высший балл ставился, если была создана эффективная программа, дающая верный результат; 4 балла получал тот, у кого программа была менее эффективной, но тоже давала правильный результат; 3 балла ставилось за неэффективную правильную программу, дающую неполный результат (например, в первой задаче такая программа не успевала за отведенное на олимпиаде время выдать все 56 чисел); 2 балла ставилось за правильную программу при отсутствии результата; 1 балл получали те, кто при правильном алгоритме допустили ошибки в программе; нулевая оценка ставилась, если алгоритм был неверен.

После проверки всех задач выводился коэффициент трудности. Общая оценка работы равнялась сумме произведений оценок за задачу на соответствующие коэффициенты трудности.

О том, как участники справились с олимпиадными заданиями, можно судить по следующей таблице, в которой приведено количество участников, набравших то или иное количество баллов за задачу.

Баллы	Теор. тур			Практ. тур	
	1	2	3	4	2
5	7	3	2	2	24
4	6	4	2	12	20
3	17	28	4	6	9
2	21	12	0	15	14
1	18	23	34	20	14
0	74	73	101	88	15
Кoeff. трудн.	4	6	8	7	4
					6

Победитель олимпиады В. Белевцев (Обнинск, с. ш. № 4, 10 кл.) набрал 120 баллов и получил первую премию. Вторая премия была присуждена двум десятиклассникам — Д. Алиевскому (Свердловск, с. ш. № 36) и М. Плаксину (Киров, с. ш. № 3), набравшим 114 и 112 баллов соответственно. Третья премия была вручена девятикласснику В. Зеленинскому (Новосибирск, с. ш. № 130; 94 балла). В команду РСФСР на Всесоюзную олимпиаду вошли 22 школьника, показавшие лучшие результаты, а также призер прошлогодней Всесоюзной олимпиады по информатике И. Жильцов (Свердловск, с. ш. № 37).

А. Г. Гейн, Н. А. Юнерман

Ответы, указания, решения

■ Задача Архимеда с точки зрения математика

Обозначим через p массу пузырька воздуха, через P — массу равного ему объема воды; через Q — массу металлического шарика, через q — массу равного ему объема воды. Тогда $p < P$, $q < Q$.

1. На объем воды массой P действует со стороны жидкости архимедова сила $P(Q - q)$, направленная от металлического шарика.

2. Шарик и пузырек будут отталкиваться. На пузырек воздуха действуют следующие силы: сила притяжения к металлическому шару pQ ; сила притяжения к объему воды, симметричному металлическому шару относительно пузырька, pq и архимедова сила отталкивания от шарика, найденная в предыдущей задаче, $P(Q - q)$. Их равнодействующая направлена от металлического шарика и равна $(P - p)(Q - q)$.

3. Аналогичное рассуждение показывает, что шарики будут притягиваться.

■ Увеличение изображения

- Толщина монеты увеличилась в 4 раза.
- Экран передвинули на $x = \Gamma_1 \Gamma_2 l = 8$ см.
- Фокусное расстояние линзы

$$F = l / (\Gamma_1 - \Gamma_2) = 15 \text{ см.}$$

4. Отрезок AB изображается с увеличением

$$\beta' = \Gamma^2 \beta / (2\beta - \Gamma^2) = 0,5.$$

■ Всероссийская олимпиада по математике и физике

Математика

8 класс

- См. решение задачи 1 для 10 класса.
- Ответ: $(2, 200)$ и $(0, -198)$. Используя теорему Виета для корней x_1, x_2 данного уравнения, можем записать: $198 = p + q = -(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1$. Следовательно, $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 199$. Так как число 199 является простым, пара чисел $(x_1 - 1, x_2 - 1)$ совпадает либо с парой $(1, 199)$, либо с парой $(-1, -199)$.
- См. решение задачи 2 для 10 класса.

4. Пусть K, M — середины AB и AD соответственно, KP и MT — перпендикуляры, опущенные на CD и CB (см. рис. 1 и 2), O — середина диагонали AC . Ясно, что отрезки KM, MO, OK являются средними линиями треугольников BAD, ADC, CBA соответственно. Следовательно, $KM \parallel BD$, и поэтому $KM \perp AC$. Аналогично $MO \perp KP$ и $OK \perp MT$. Итак, высоты треугольника KMO лежат на прямых KP, MT, CA . Отсюда следует, что эти три прямые имеют общую точку.

5. Решение следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} 4^{545} + 545^4 &= (2^{545})^2 + 2 \cdot 2^{545} \cdot 545^2 + (545^2)^2 - \\ &\quad - 2 \cdot 2^{545} \cdot 545^2 = (2^{545} + 545^2)^2 - 2^{546} \cdot 545^2 = \\ &= (2^{545} + 545^2)^2 - (2^{273} \cdot 545)^2 = (2^{545} + 545^2 + \\ &\quad + 2^{273} \cdot 545)(2^{545} + 545^2 - 2^{273} \cdot 545). \end{aligned}$$

6. а) Правильный треугольник ABC (рис. 3) разрезается на четыре правильных треугольника, а каждый из них — на три равных треугольника.

б) Треугольник ABC (рис. 4) — прямоугольный, с гипотенузой AC и катетами BC и AB такими, что $BC:AB = 1:2$.

7. Пусть том с номером a стоит на b -м месте, а том с номером b стоит на месте с номером c и т. д. до тома с номером k , стоящего на a -м месте. Будем говорить, что тома a, b, c, \dots, k образуют серию. По условию библиотекарь меняет местами только тома, принадлежащие одной серии. При каждой перестановке один том попадает на свое место, а серия, в которую он входил, укорачивается на 1. Таким образом, чтобы поставить на место n томов, образующих серию, требуется $n - 1$ перестановок. Всего же библиотекарю потребуется осуществить $(20 - a)$ перестановок, где a — число всех серий.

8. Обозначим длину стороны пятиугольника через a , длины красных продолжений — через k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 , длины синих продолжений — через c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 (рис. 5). Для каждой вершины пятиугольника, воспользовавшись теоремой о равенстве произведений длин отрезков двух пересекающихся хорд окружности, запишем соответствующие равенства:

$$\begin{aligned} k_1(a + c_1) &= c_2(a + k_2) && \text{(вершина A),} \\ k_2(a + c_2) &= c_3(a + k_3) && \text{(вершина B),} \\ k_3(a + c_3) &= c_4(a + k_4) && \text{(вершина C),} \\ k_4(a + c_4) &= c_5(a + k_5) && \text{(вершина D),} \\ k_5(a + c_5) &= c_1(a + k_1) && \text{(вершина E).} \end{aligned}$$

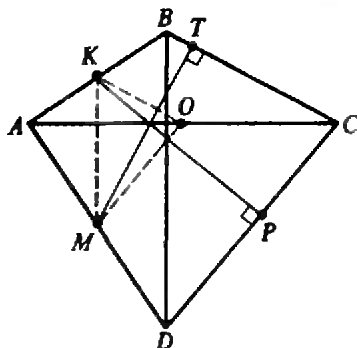


Рис. 1.

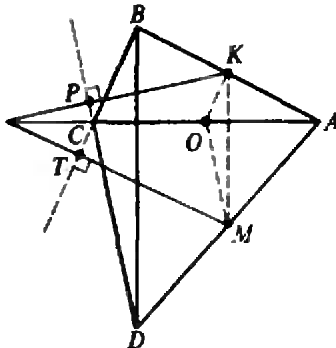


Рис. 2.

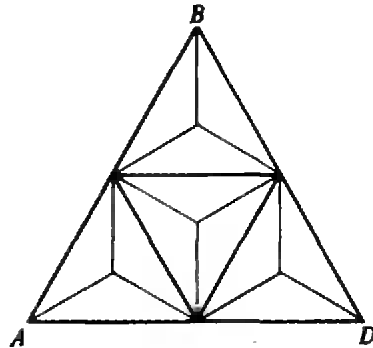


Рис. 3.

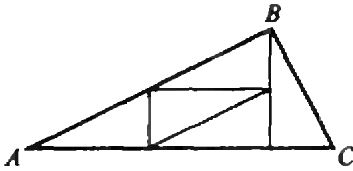


Рис. 4.

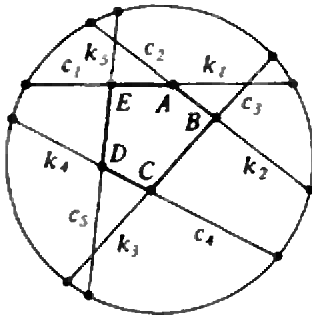


Рис. 5.

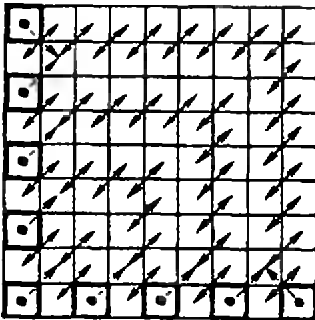


Рис. 6.

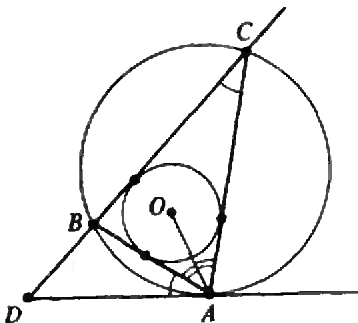


Рис. 7.

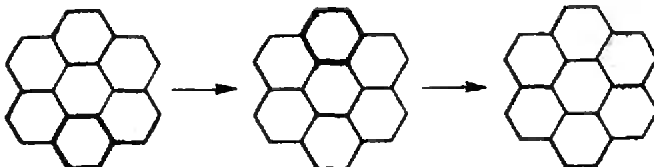


Рис. 8.

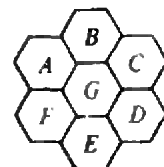


Рис. 9.

Сложив эти равенства, найдем после упрощений, что

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5.$$

Замечание. Пятиугольник может быть невыпуклым, иметь самопересечения, отдельные его стороны могут совпадать друг с другом.

9 класс

1. Так как $2002 \cdot 2003 \cdot \dots \cdot 4001 \cdot 4002 = (4003 - 2001)(4003 - 2000)(4003 - 1999) \dots (4003 - 2) \times (4003 - 1) = 4003! - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2000 \cdot 2001$, где n — некоторое натуральное число, данная сумма равна $4003!$.

2. Ответ: число незанятых клеток не меньше 9. Покрасим вертикали доски в черный и белый цвета так, чтобы соседние вертикали имели разный цвет. Пусть для определенности первая слева вертикаль окрашена в белый цвет. Тогда всего имеется 45 белых и 36 черных клеток. Жук, сидящий на черной клетке, переползает на белую, а сидящие на белой клетке — на черную. Поэтому когда 36 жуков, сидящих на черных клетках, переползут на белые клетки, число которых равно 45, то не менее 9 клеток окажутся незанятыми. На рис. 6 показано, что незанятыми могут оказаться ровно 9 клеток.

3. Пусть D — вершина угла, O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 7). Тогда $\angle DAB = \angle DCA$, так как DA — касательная к окружности, описанной около треугольника ABC . Кроме того, $\angle OAB = \angle OAC$. Поэтому

$$\begin{aligned} \angle OAD &= \angle OAB + \angle BAD = \frac{1}{2}(\angle OAB + \\ &+ \angle OAC) + \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle DCA) = \frac{1}{2}(\angle DAB + \\ &+ \angle OAB + \angle OAC) + \frac{1}{2} \angle DCA = \frac{1}{2} \angle DAC + \\ &+ \frac{1}{2} \angle DCA = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle CDA. \end{aligned}$$

Следовательно, угол OAD постоянен. А это и означает, что центры O вписанных в треугольники ABC окружностей лежат на фиксированной прямой, проходящей через точку A и пересекающей прямую DA под углом $\angle OAD = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle D$.

4. Ответ: могут. Возьмем четверку чисел 1989, 1989, 1989, 1989 и четыре раза осуществим разрешенную условием задачи операцию. На доске получится данная четверка чисел: 7956, 3923, 5857, 9725. Число различных четверок не более чем четырехзначных чисел конечно. Стираемое на каждом шаге число однозначно восстанавливается, так что процесс мож-

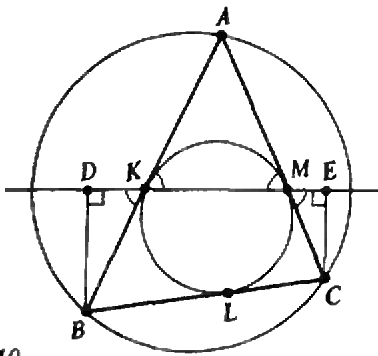


Рис. 10.

но однозначно продолжать и в другую сторону. Поэтому всякая четверка, появившись однажды, появится при неограниченном продолжении процесса бесконечно много раз.

5. а) Для того чтобы получить требуемую раскраску, достаточно сделать два перекрашивания (см. рис. 8, на котором выделены ячейки, берущиеся в качестве «центров перекрашивания»).

б) Обозначим ячейки буквами A, B, C, D, E, F, G (рис. 9). В ячейках, окрашенных в белый цвет, запишем $+1$, а в остальных запишем -1 . Перекрашивание, осуществляемое согласно условию задачи, можно, очевидно, заменить умножением чисел, записанных в соответствующих ячейках, на -1 . Легко проверить, что при любом допустимом перекрашивании, произведение четырех чисел, записанных в клетках A, B, C, F , не изменяется. Так как для раскраски, изображенной на рис. 1, а (см. с. 68), это произведение равно 1, а для раскраски, изображенной на рис. 1, в, оно равно -1 , то эта раскраска не может быть получена из исходной.

6. Указание: воспользуйтесь тем, что левая часть данного неравенства является линейной функцией от x при фиксированных y и z и тем, что линейная функция достигает минимального и максимального значений на концах рассматриваемого промежутка.

Приведем геометрическое доказательство неравенства. Рассмотрим правильный треугольник ABC со стороной 1. Пусть A_1, B_1, C_1 — такие точки на сторонах BC, CA, AB , что $AC_1 = x, CB_1 = y, BA_1 = z$. Тогда $BC_1 = 1 - x, CA_1 = 1 - z, AB_1 = y$. Подставив в очевидное неравенство

$$S_{AB_1C_1} + S_{CA_1B_1} + S_{BA_1C_1} < S_{ABC}$$

выражения

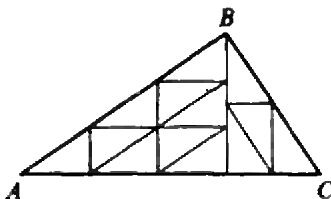


Рис. 11.

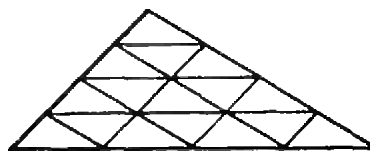


Рис. 12.

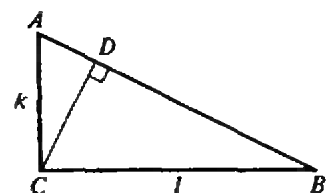


Рис. 13.

$$S_{AB_1C_1} = \frac{1}{2} x(1-y) \frac{\sqrt{3}}{2}, S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2} y(1-z) \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{BA_1C_1} = \frac{1}{2} z(1-x) \frac{\sqrt{3}}{2}, S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

и сократив на $\frac{\sqrt{3}}{4}$, получим требуемое неравенство.

7. Пусть треугольник ABC удовлетворяет условию задачи и K, L и M — точки касания вписанной в него окружности с его сторонами (рис. 10). Опустим из точек B и C перпендикуляры BD и CE и на прямую KM . Так как $\angle BKD = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$ и так как $BK = BL$ и $CM = CL$, то

$$\begin{aligned} BD + CE &= BK \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \angle A\right) + CM \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \angle A\right) = \\ &= (BK + CM) \cos\left(\frac{1}{2} \angle A\right) = (BL + CL) \times \\ &\times \cos\left(\frac{1}{2} \angle A\right) = BC \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \angle A\right). \end{aligned}$$

Следовательно, расстояние от середины отрезка BC до прямой KM равно $\frac{1}{2}(BD + CE) = \frac{1}{2} BC \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \angle A\right)$ и, значит, не зависит от выбора точки A на дуге BC . Следовательно, построенные для различных положений точки A на дуге BC прямые KM всегда касаются окружности радиуса $BC \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \angle A\right)$ с центром в середине отрезка BC .

8. а) Указание: воспользуйтесь равенством $13 = 2^2 + 3^2$ и результатом пункта б). Соответствующий треугольник изображен на рис. 11 (треугольник ABC — прямоугольный с катетами AB и BC такими, что $AB:BC = 3:2$).

б) Любой треугольник можно разрезать на m^2 равных треугольничков, подобных исходному, каким бы ни было натуральное число m (на рис. 12 показано, как это можно сделать в случае $m=4$). Пусть $n = k^2 + l^2$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = k$ и $BC = l$. Высота CD разбивает этот треугольник на два прямоугольных треугольника, подобных исходному (рис. 13). Разрежем указанным выше способом треугольник ACD на k^2 равных прямоугольных треугольничков с гипотенузой 1, подобных треугольничку ACD . Аналогично, треугольник BCD разрежем на l^2 равных прямоугольных треугольничков с гипотенузой 1, подобных треуголь-

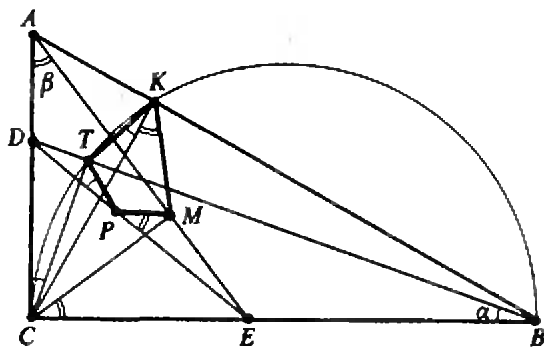


Рис. 14.

нику $B_1C_1D_1$. Тогда исходный треугольник ABC окажется, разрезанным на $k^2 + l^2 = n$ равных треугольников.

10 класс

1. Простейший пример 6-1, 6-2, 6-3. В общем виде рассмотрите прогрессию $A, 2A, \dots, (2n-1)A$, где $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$.

2. Меняя местами число 1 с другими числами, мы можем придвинуть 1 к числу 2. Далее можно двойными шагами (сначала перемещается число 2, затем — число 1) придвинуть пару 1, 2 к числу 3. Теперь тройку 1, 2, 3 можно тройными шагами придвинуть к числу 4. И так далее. В итоге придем к естественному (монотонному) упорядочению данных чисел (по часовой стрелке или против часовой стрелки).

3. Обозначим через K, M, P, T (рис. 14) основания высот, опущенных из точки C на прямые AB, AE, DE и BD соответственно. Ясно, что лучи CK и CP лежат между лучами CT и CM и четырехугольник $KMPT$ является выпуклым. Поэтому, в силу теоремы о вписанном угле, для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что $\angle TKM + \angle MPT = 180^\circ$. Пусть $\alpha = \angle DBC$, $\beta = \angle EAC$. Очевидно, $\angle DCT = \alpha$ (напомним, что $CT \perp DB$) и $\angle MCE = \beta$. Четыре точки C, T, K, B лежат на одной окружности, поскольку углы $\angle CTB$

60	59	52	51	44	43	16	15
61	58	53	50	45	42	17	14
62	57	54	49	46	41	18	13
63	56	55	48	47	40	19	12
64	35	36	37	38	39	20	11
33	34	29	28	25	24	21	10
32	31	30	27	26	23	22	9
1	2	3	4	5	6	7	8

Рис. 15.

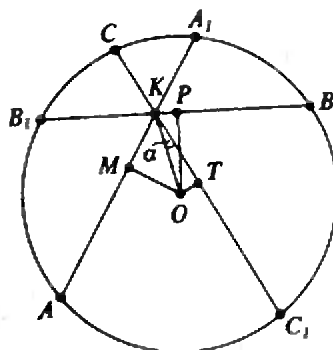


Рис. 16.

и $\angle CKB$ прямые. Поэтому $\angle TKC = \angle TBC = \alpha$ (эти углы равны как опирающиеся на одну и ту же дугу). Аналогично, $\angle CKM = \angle CAM = \beta$ (точки C, M, K, A лежат на одной окружности), $\angle DPT = \angle DCT = \alpha$ (точки C, P, T, D лежат на одной окружности), $\angle EPM = \angle ECM = \beta$ (точки E, M, P, C лежат на одной окружности). Следовательно, $\angle TKM + \angle TPM = (\alpha + \beta) + (180^\circ - \alpha - \beta) = 180^\circ$. Отсюда следует требуемое утверждение.

4. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим каждое из отношений $\frac{a}{1+a^2}, \frac{b}{1+b^2}, \frac{c}{1+c^2}$ не превосхо-

дит $1/2$. Отсюда следует левое неравенство. Докажем правое неравенство. Пусть $x = 1+a, y = 1+b, z = 1+c$. Тогда $x+y+z \leq 6$. Поделив это неравенство на x, y, z и сложив получающиеся при этом три неравенства, получим неравенство

$$\left(1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{x}{y} + 1 + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1\right) \leq 6 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right),$$

откуда и следует требуемое неравенство, так как

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2, \quad \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2.$$

5. Указание: рассмотрите график функции $y = f(x)$, где $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 10)$. При $c = 0$ уравнение $f(x) = 0$ имеет только три целых корня ($-1, 0$ и 1). При $c \neq 0$ уравнение $f(x) = c$ вне отрезка $[-1; 1]$ имеет не более трех корней, а на отрезке $[-1; 1]$ целых корней не имеет.

6. а) Не может. Для того чтобы вернуться на поле $a1$, нужно сделать четное число ходов по горизонтали и четное число ходов по вертикали, т. е. общее число ходов должно быть четным. Число посещений всех полей шахматной доски по условию задачи равно $1 + 2 + 3 + \dots + 64 = 2080$ и является четным. В начальный момент ладья уже находится на поле $a1$ (есть одно посещение). Следовательно, остается осуществить 2079 посещений и сделать это надо за четное число ходов, что, очевидно, невозможно.

6) Может. Заномеруем поля шахматной доски числами от 1 до 64 так, как показано на рис. 15. Начиная с поля с номером k , ладья может последовательно переходить на поля с номерами $k+1, k+2, \dots, m-1, m$. Обозначим такой маршрут $k \rightarrow m$. Обратный маршрут $m, m-1, \dots, k+1, k$ обозначим $m \rightarrow k$. Искомый маршрут, начинающийся с поля $a1$ (поле с номером 1) и заканчивающийся на соседнем поле $a2$ (поле с номером 32), имеет, например, следующий вид: $1 \rightarrow 64, 64 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 63, 63 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 62, 62 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 61, 61 \rightarrow 4, \dots, 30 \rightarrow 34, 34 \rightarrow 31, 31 \rightarrow 33, 33 \rightarrow 32$. Легко проверить, что на поле с номером k , где $1 \leq k \leq 32$, ладья побывает $2k$ раз, а на поле с номером m , где $33 \leq m \leq 64$ она побывает $(129-2m)$ раз.

7. Пусть O — центр окружности. Если $k=0$, то утверждение очевидно. В случае $k \neq 0$ опустим из центра O перпендикуляры OM, OP, OT на хорды AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 16). Пусть $\alpha = \angle OKT$. Тогда

$$\begin{aligned} KM &= KO \cdot \cos(60^\circ - \alpha), \\ KP &= KO \cdot \cos(60^\circ + \alpha), \\ KT &= KO \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Поскольку $\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha) = \cos \alpha$, получаем, что $KM + KP = KT$. Но $KM = \frac{1}{2}(KA - KA_1)$, $KP = \frac{1}{2}(KB - KB_1)$, $KT = \frac{1}{2}(KC_1 - KC)$. Подставляя эти выражения в полученное равенство $KM + KP = KT$, приходим к требуемому равенству.

Замечание. Частный случай этой задачи — точка K лежит на окружности — хорошо известен.

8. Ответ: можно. Требуемое размещение тетраэдров изображено на рис. 17. Парно перпендикулярные ребра куба AD, BB_1, C_1D_1 являются также ребрами тетраэдров, а противолежащие им (в тетраэдрах) ребра тетраэдров проходят через центр O куба и делятся этим центром пополам.

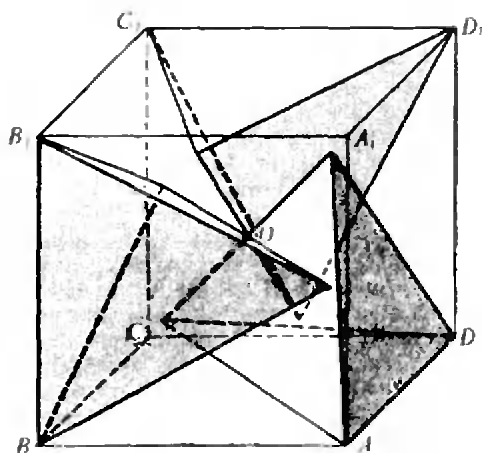


Рис. 17.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $\tau = 2\sqrt{2H/g} \cos \alpha$. Указание. Разумно перейти в систему отсчета, связанную с движущимся клином.

2. $l_1/l_2 = \sqrt{\rho_2(\rho_1 - \rho) / (\rho_1(\rho_2 - \rho))} \approx 1,2$, где $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ — плотность воды.

3. Решение этой задачи — см. задачу Ф1184 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.

4. Экран нужно поставить непосредственно под предметом. На экране получится перевернутое изображение части шкалы от нулевого до пятого деления (размер изображения 5 мм). Изображение освещено неравномерно — яркость уменьшается сверху вниз.

9 класс

1. Катюшка катится со скоростью $v_0 = v/\sqrt{1 + (r/R)^2} - 2(r/R) \cos \alpha \approx 0,18 \text{ м/с}$, где $r/R = \cos \alpha - 1/2 \sin \alpha \approx 0,62$.

2. $A = cmR(t_k - t_0)/T_k/(ML)$, где c — удельная теплоемкость воды, R — универсальная газовая постоянная, t_k (T_k) — температура кипения, M — молярная масса, L — удельная теплота парообразования воды.

3. $E_B = E_0/(2 \sin \alpha)$.

4. $R = (U - U_{A1})I_{A2}/(I_{A2} - I_2)I_1 \approx 17 \text{ Ом}$, где $U_{A1} = 1 \text{ В}$ и $I_{A2} = 0,2 \text{ А}$ найдены из вольтамперной характеристики лампочки.

10 класс

1. $a = h\Delta t_0 r / (MR)$.

2. $\eta_{\max} = 8/27$.

3. После первого цикла «замыкание—размыкание» напряжение на конденсаторе будет равно $U_1 = \mathcal{E}_1/\sqrt{LC} = 8 \text{ В}$, после четвертого цикла — $U_2 = \sqrt{4}U_1 = 16 \text{ В}$, через достаточно большое время — $U_3 = \mathcal{E}\sqrt{R/L/2} = 1000 \text{ В}$.

4. Решение этой задачи — см. задачу Ф1187 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.

Самые школьные задачи

1. Положим $\sqrt[3]{2} = a$. Требуется доказать, что $a^2 - 8a + 7 < 0$. Но это так, потому что $1 < a < 7$.

2. $\left\{ \frac{23}{10}, \frac{23}{6}, \frac{23}{2} \right\}$. Решение. Перепишем систему в виде $xy + xz = 2(x + y + z)$, $xy + yz = 3(x + y + z)$, $xz + yz = 4(x + y + z)$. Из

этих уравнений находим: $xy = \frac{1}{2}(x + y + z)$, $xz = \frac{3}{2}(x + y + z)$, $yz = \frac{5}{2}(x + y + z)$. Поскольку $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, эти равенства можно делить друг на друга. Сделав это, мы находим, что $x:y:z = 3:5:15$. Теперь любое из наших уравнений превращается в квадратное уравнение относительно x , скажем первое: $x \cdot \frac{5}{3}x =$

$\frac{1}{2}(x + \frac{5}{3}x + 5x)$, $10x^2 - 23x = 0$. Отсюда

или $x = 0$, что невозможно, или $x = 23/10$.

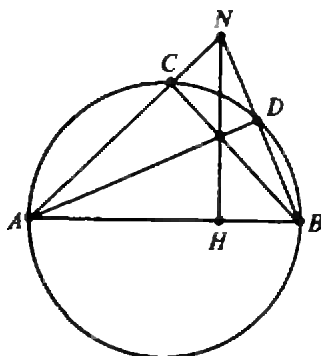


Рис. 18.

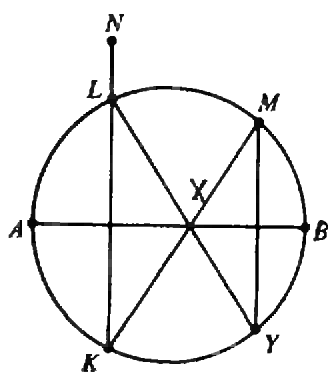


Рис. 19.

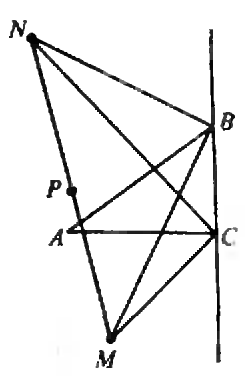


Рис. 20.

3. Пусть число d — общий делитель чисел $2^n - 1$ и $2^m + 1$, а именно $2^n - 1 = Ad$ и $2^m + 1 = Bd$. Поэтому $2^{nm} = (Ad + 1)^n = (Bd - 1)^n$. Мы видим, что число 2^{nm} дает при делении на d остаток 1 и в то же время остаток $d - 1$. Но ясно, что $d > 2$; поэтому $1 \neq d - 1$.

4. Из точек A и B проведем два луча, пересекающих окружность в точках, лежащих в одной полуплоскости от диаметра AB , причем сами лучи пересекаются в точке N , лежащей вне окружности. Сначала опустим на данный диаметр перпендикуляр из точки N . Пусть C и D — точки пересечения отрезков AN и BN с окружностью. Так как AD и BC — высоты треугольника ABN , прямая NH перпендикулярна отрезку AB (рис. 18). Пусть теперь M — произвольная точка окружности. Построим описанным выше образом отрезок LK , перпендикулярный диаметру AB (рис. 19). Пусть X — точка пересечения отрезка MK с диаметром, а Y — точка пересечения отрезка LX с окружностью. Нетрудно видеть, что прямая MY перпендикулярна отрезку AB .

5. Пусть P — середина отрезка MN . Ясно, что углы NBM и NCM прямые. Поэтому окружность радиусом PN с центром в точке P проходит через точки N, B, C, M . Следовательно, $\angle MNC = \angle MBC = \frac{\angle B}{2}$, $\angle NMB = \angle NCB = \frac{\angle C}{2}$, а так как $\angle BNM + \angle NMB = 90^\circ$, то $\angle BNC = \frac{\angle A}{2}$. Таким образом, $\angle BPC = \angle A$. А это и означает, что точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 20).

6. Раз $x^2 + 2y^2$ делится на 3, то $x^2 - y^2$ делится на 3, а значит, либо $x + y$ (а тогда и $x - 2y$), либо $x - y$ (а тогда и $x + 2y$) делится на 3. Поэтому одно из двух равенств

$$\frac{x^2 + 2y^2}{3} = \left(\frac{x - 2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x + y}{3}\right)^2,$$

$$\frac{x^2 + 2y^2}{3} = \left(\frac{x + 2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x - y}{3}\right)^2$$

дает решение задачи.

7. $x = y = z = 2$. Решение. Перепишем наше равенство в виде $(x/z)^n + (y/z)^n = z$. Если $x > z$, то выражение $(x/z)^n$ неограниченно возрастает с ростом n , а если $x < z$, то выражение $(x/z)^n$ с ростом n неограниченно убывает. Подобное верно и для y . Значит, может быть только $x = z, y = z$, и тогда $2x^n = x^{n+1}, x = 2$.

8. Известно, что $r^2 = \frac{p-a)(p-b)(p-c)}{p}$. Так как $(p-a) + (p-b) + (p-c) = p$, то, полагая $p-a = \alpha, p-b = \beta, p-c = \gamma$, мы приводим наше неравенство к виду

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \geq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma},$$

что равносильно $\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \geq 0$.

9. Очевидно, $\text{ctg } \angle A + \text{ctg } \angle B = AB/h_C$, где h_C — высота треугольника ABC , опущенная из точки C . Очевидно, $h_C \leq m_C$, где

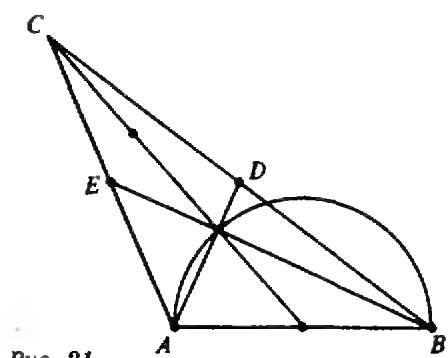


Рис. 21.

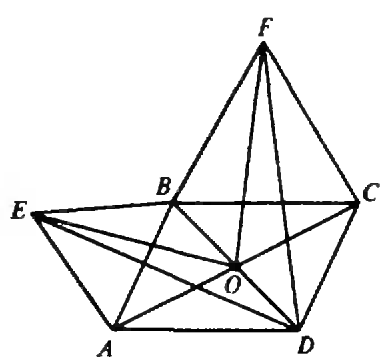


Рис. 22.

m_C — медиана, проведенная из точки C , в то же время из рисунка 21 ясно, что $m_C = \frac{3}{2} AB$.

10. Так как $EA=CD$, $AD=CF$, $\angle EAD = \angle FCD$, то треугольники EAD и FDC равны. Поэтому $ED=FD$. Рассмотрим треугольники BDE и BDF (рис. 22). У них BD — общая сторона, $ED=FD$, $BE < BF$ и потому $\angle EDB < \angle FDB$. А теперь рассмотрим треугольники EOD и FOD . У них OD — общая сторона, $ED=FD$ и $\angle EDO < \angle FDO$. Поэтому $EO < FO$.

11. $\frac{p-p^2}{2}$. Решение: При любом m сумма $m^p + (p-m)^p$ делится на p^2 (доказательство см. ниже). Так как при $m=1, \dots, p-1$ сами числа m^p и $(p-m)^p$ на p^2 не делятся, сумма остатков от деления этих чисел на p^2 равна p^2 . Значит, сумма остатков от деления на p^2 чисел $1^p, 2^p, \dots, (p-1)^p$, т. е. $1^p, (p-1)^p; 2^p, (p-2)^p; \dots$ (всего $\frac{p-1}{2}$ пар), равна $p^2 \frac{p-1}{2}$. Что касается

вышеприведенного факта, он является следствием формулы бинома Ньютона. Для тех, кто не знает этой формулы, приведем более подробное доказательство. При раскрытии скобок в $(p-m)^p = (p-m) \dots (p-m)$ множитель p будет входить менее двух раз в $p+1$ слагаемых: $-m^p$ и p раз pm^{p-1} . Таким образом, $m^p + (p-m)^p = m^p - m^p + p \cdot pm^{p-1} + (\text{число, делящееся на } p^2)$; значит, $m^p + (p-m)^p$ делится на p^2 .

12. $\{(0, 2), (0, -2), (-2, -2), (-2, 2)\}$. Решение. Так как число $x+1$ взаимно просто с числом x^2 , то наше равенство может выполняться только при $x^2 = x+1$, $x^2 = -(x+1)$, $x+1=1$, $x+1=-1$ или $x^2=0$. Первые два уравнения не имеют целых решений. Значит, $x=0$ или $x=-2$.

13. $4 \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{3}}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Решение. Из данной точки O на плоскости отложим такие три отрезка OA , OB , OC , образующие попарно углы в 120° , что $OA=z$, $OB=x$, $OC=y$. Тогда по теореме косинусов $x^2 + xy + y^2 = BC^2$, $y^2 + yz + z^2 = AC^2$, $z^2 + zx + x^2 = AB^2$. Поэтому $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AOB , BOC , COA , т. е. равна $(xy + yz + zx) \frac{\sin 120^\circ}{2}$. Поэтому $xy + yz + zx = \frac{4}{\sqrt{3}} S_{ABC}$.

Замечание. Задачу, конечно, можно решить и чисто алгебраическим способом, но достаточно посмотреть на ответ, чтобы понять, что такое решение будет очень громоздким.

14. Опустим из вершины P высоту PO на основание. Ясно, что O — центр описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности. Пусть A_i, B_i, C_i, D_i — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Тогда пирамиды POA_1A и POA_1B , POB_1B и POB_1C , POC_1C и POC_1D , POD_1D и POD_1A симметричны относительно плоскостей $POA_1, POB_1, POC_1, POD_1$ соответственно. Рассмотрим случай, когда точка O лежит внутри четырехугольника

$ABCD$. Тогда двугранные углы у рассмотренных пирамид при ребрах PA и PB , PB и PC , PC и PD , PD и PA равны. Складывая соответствующие углы, получим требуемое. Два других возможных случая (точка O лежит на границе или вне четырехугольника $ABCD$) рассматриваются аналогично.

15. $0 \leq x \leq 4$. Решение. Во-первых, $|x| \leq 4$. Далее, так как $0 \leq \arcsin \frac{x^2-8}{8} + \frac{\pi}{2} \leq \pi$,

то $0 \leq \arcsin \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2}$. Значит, $0 \leq x \leq 4$. Вычислим косинус обеих частей данного уравнения:

$$\cos \left(\arcsin \frac{x^2-8}{8} + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \arcsin \frac{x^2-8}{8} = -\frac{x^2-8}{8}$$

$$\cos \left(2 \arcsin \frac{x}{4} \right) = 1 - 2 \sin^2 \arcsin \frac{x}{4} = 1 - 2 \left(\frac{x}{4} \right)^2 = \frac{8-x^2}{8}$$

«Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 9)

1. Не может. Если число не делится на 5, то его квадрат при делении на 5 имеет остаток 1 или 4. Осталось провести небольшой перебор вариантов.

2. За 70 км показания счетчика увеличились на $131\,558 - 131\,460 = 98$, следовательно, за 10 км — на 14. За время пути показания счетчика изменились на $132\,713 - 131\,313 = 1400$. Значит, пройденный путь равен 1000 км.

3. См. рис. 23.

4. Сергей и Виктор не могут лгать одновременно, значит, один из них говорит правду. Из этого следует, что лжет Юрий, утверждая, что не он разбил стекло.

5. Для доказательства достаточно заметить, что дуги, высекаемые углом с вершиной в центре большой окружности, имеют одинаковую длину у большой и вдвое меньшей окружности, проходящей через центр большой окружности (рис. 24). Обратите внимание на некоторую неаккуратность в формулировке задачи: нужно было оговорить, что все дуги, на которые большая окружность делится точками касания маленьких окружностей, не превосходят 180° .

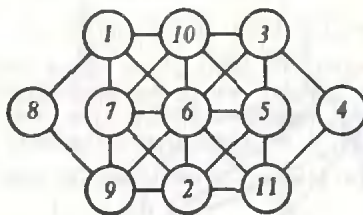


Рис. 23.



Рис. 24.

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

(см. «Квант» № 9)

8 класс

- $\mu \leq 2 \operatorname{tg} \alpha$.
- Переходить шоссе лучше вдали от перекрестка.
- $v_y = v / (1 + (f/mg)^2)^{1/2}$.
- $t_{\min} = \frac{v}{a} \sqrt{2(1 + \sqrt{1 + a^2 H^2 / v^4})}$.

9 класс

- Нет, не может (центр тяжести неизбежно выйдет за пределы площади опоры).
- $l = v(t_2^2 - 4t_1^2) / (2(4t_1 - t_2)) = 3,75$ км, где $v = 1500$ м/с — скорость звука в воде.
- Монета погрузится в лед не полностью.
- $\tau' = 4\tau$.
- В первом случае поршень смещается вниз на 19 см, во втором случае — опускается на дно цилиндра.
- $m = P / (4fc\Delta T) \approx 0,01$ г (для оценки будем считать, что в течение четверти периода переменного тока мощность не выделяется).
- $I(t) = ((U/d)^2 (e_0 S)^2 / (md)) t$, где t — время, прошедшее от последнего соударения.

10 класс

- Температура воды в банке 2 возросла на 1°C .
- $x_m \approx (gh / (2\pi^2 f^2))^{1/2} \approx 0,05$ мм.
- $L' \approx 4I^2 / d = 160$ м.
- $F = P D_0 / E_0 = 0,083$ Н.

Олимпиада по физике Ленинградского политехнического института

(см. «Квант» № 9)

- $\Delta m / M = \sqrt{\rho L D^2 P / 2}$.
- $A = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R+L} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+L} \right) - \frac{1}{r} \right)$.
- $n = \frac{2R-l}{2(R-l)} = 1,6$. Указание. Источник

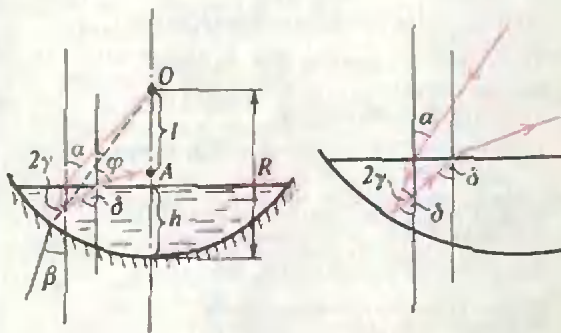


Рис. 25.

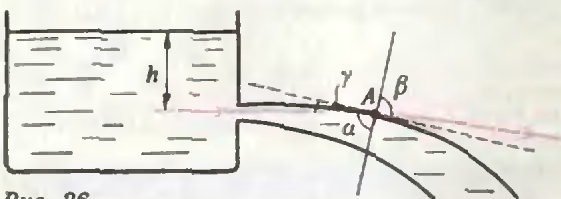


Рис. 26.

света находится в центре полусферы; первое изображение создается только отраженными от зеркала лучами; второе изображение (точка А на рисунке (25)) формируется как отраженными, так и преломленными лучами.

$$4. x_m = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{2m^2 gH}{k(m+M)}}$$

5. Средняя скорость теплового движения атомов водорода $\bar{v} = \sqrt{3kT/m} \approx 1,2 \cdot 10^4$ м/с существенно меньше второй космической скорости $v_{II} = \sqrt{2GM/R} \approx 6,1 \cdot 10^5$ м/с.

$$6. A = Gm(M_1/R_1 - M_2/R_2).$$

$$7. R_{AB} = R/2.$$

$$8. E = E_k + E_p = -\frac{me^4}{2\pi^2 \hbar^2}$$

9. $h < r / (n^2 - 1)$. Указание. Луч света не испытает полного отражения, если выполняется условие $\sin \alpha < 1/n$, или $\cos \gamma < 1/n$ (см. рис. 26).

Олимпиады по информатике в Киргизии

(см. «Квант» № 9)

- Чтобы уменьшить перебор, можно, например, заметить, что самое большое из ребер каждого параллелепипеда должно быть ребром куба (если он существует), и задача сводится к построению квадрата. Замечаем также, что сумма площадей прямоугольников должна быть равна площади квадрата.
- б) Наиболее простой ответ: буква М обозначает «минус», а буква П обозначает «плюс», тогда получаем приведение подобных членов в многочлене, например: $+B + B - B = +B$. Однако были и более интересные ответы: разность забитых и пропущенных мячей, винигляция и др.
- Возможные результаты: квадрат; два прямоугольника; прямоугольник и оставшаяся часть квадрата; квадрат с разрезом. Для более полного ответа нужно еще указать, какие края обожжены.
- а) Если $B=9$, то печатается «1 9 8 9», иначе печатается «ЖОК» («нет» по-киргизски).
- Проще всего на каждом штиге уточнить минимальное и максимальное из ранее введенных чисел. Если разность этих чисел не меньше 10, то остановиться.
- Двигаться в любом направлении до края листа. Если количество пересечений контура нечетное, то «внутри», иначе — «снаружи».
- Анализируя, находим, что результат определяется гласными и их можно разделить на группы: «твердые» (А, Ы, О, У, Ю—П+У, Е—И+О, тогда Я=И+А) и «мягкие» (Э, Е—И+Э, И, Ё, У). Если ближайшие слева и справа к Л гласные — из одной группы, то читается по этой группе, иначе смотрим, какая из гласных ближе. Надо предусмотреть ответ «не знаю» (в частности, если гласных нет).
- а) Алгоритм печатает пары чисел (0, 3), (0, 2), ..., (3, 0) после чего X и Y неограниченно растут. Эти пары чисел можно рассматривать как координаты точек, образующих букву И.
- б) При упрощении алгоритма нужно предусмотреть остановку (например, по условию $X > 3$ в 56-й строке).

V Всесоюзная научно-техническая конференция школьников



Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Оргкомитет Всесоюзной научно-технической конференции школьников объявляет прием работ на V НТКШ, которая состоится в апреле 1990 года в МФТИ. Принять участие в конференции может любой школьник (или группа школьников) 9—11 класса. Для этого необходимо рассмотреть любой физический или математический вопрос, или провести эксперимент, или написать программу для ЭВМ. Оргкомитетом поощряются самостоятельные исследования школьников.

Работа оформляется в виде реферата (7—25, по возможности машинописных, страниц), один экземпляр которого необходимо не позднее 1 февраля 1990 года отправить по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, Оргкомитет V научно-технической конференции школьников.

Все поступившие рефераты рецензируются специалистами, авторы лучших работ получают приглашения для выступления на НТКШ. Текст реферата не возвращается.

Дополнительные справки можно получить по телефону ЗФТШ при МФТИ: 408-51-45.

*Член оргкомитета НТКШ
А. В. Сапожников*

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:

А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белоучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:

А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, В. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. И. Буздин, А. Н. Виленькин,
А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:

М. Б. Дубах, Д. А. Крымов, С. Ф. Луккин,
Э. В. Назаров, А. М. Пономарева,
И. Е. Смирнова, П. И. Чернуцкий,
В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор М. Л. Медведская

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 26.07.89. Подписано к печати 13.09.89
Т-15984. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,16
Тираж 184 361 экз. Заказ 1709. Цена 45 коп.

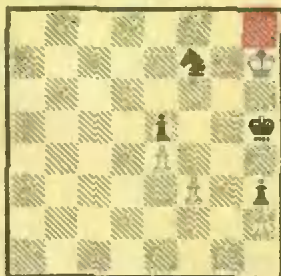
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

МАГИЧЕСКИЕ ШАХМАТЫ

Продолжим знакомство с необычными жанрами шахматной композиции, которые обычно относят к сказочным, фантастическим шахматам. Сегодня на очереди — магические шахматы в которых происходит удивительная трансформация фигур.

Придуманы два вида магических шахмат. В одном варианте указывается магическое поле, при появлении на котором любая фигура меняет свой цвет. В другом — особым свойством наделяется определенная фигура.

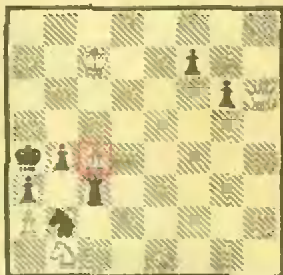


Б. Видлерт, 1986 г.

Кооперативный мат в 4 хода.

Поле h8 — магическое.

Как обычно, в кооперативной задаче начинают черные, которые помогают белым поставить мат. После 1.Kh8 их конь превращается в белого. Теперь ход белых и как раз этот конь вступает в игру — 1...Kf7! 2. Kph4 Kh8! Снова конь меняет цвет и становится черным. 3. Kgb Kph6 4. Kh8! Конь опять белый и завершает дело — 4...KgbX!



Я. ван Альтен, 1986 г.

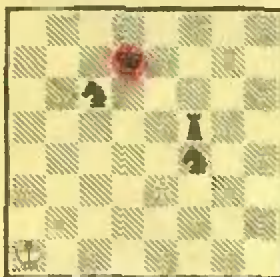
Мат в 2 хода.

Поле c4 — магическое.

Сначала изучим ложный след: 1. Фg5 с угрозой 2. Фb5X. Опровержения, связанные со взятием пешки c4, не проходят: после 1...Л:c4 ладья становится белой, и следует 2. Кc3X; в случае 1...К:c4 следует 2. Kb6X. Однако при грубом 1...f5 мата на втором ходу нет.

Решает 1. Фf8! Теперь угроза белых более серьезная: 2. Фа8X. А гешка c4, которая отнимает у короля поле b5, неприкосновенна: 1...Л:c4 — на c4 белая ладья и 2. Ф:b4X; 1...К:c4 — на c4 белый конь и 2. Фе8X!

Перейдем ко второму виду магических шахмат: с участием магических фигур. Если такая фигура совершает ход, то фигуры, которые попадают под ее удар (и чужие, и свои), одновременно меняют цвет. Меняет окраску и фигура, которая после своего хода попадает под удар магической.

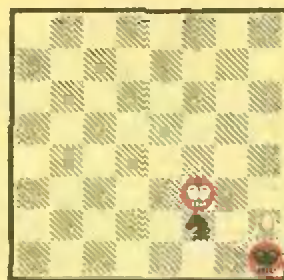


Г. Ауст, 1987 г.

Кооперативный мат в 3 хода.

Король d7 — магический.

1. Кре6! Ладья f5 становится белой, она и ходит. 1...Лf8 2. Крд5! На c6 появляется белый конь, который восстанавливает свой цвет после 2...Kd4 (он вновь под ударом короля). 3. Кре4. Меняет цвет сразу трех фигур! 3...Ле8X и цель достигнута! Пешка e3 — черная, но она косвенно защищает обоих коней. Действительно, при взятии любого из них движение короля вызывает изменение цвета пешки e3, и при ходе белых неприятельский король оказывается под шахом.



О. Фариа, 1986 г.

Кооперативный мат в 2 хода.

Оба короля — магические.

1. Kpg1 (слон h2 и конь f2 меняют цвет) 1...Kpg 3+ (обе легкие фигуры снова меняют цвет) 2. Kph1 (слон опять черный) 2...Kpf3X (на f2 белый конь, поле g1 недоступно черному королю — возрождается белый слон h2).

В последней задаче все события протекали в пределах квадрата 3X3 в правом нижнем углу доски. Понятие магического квадрата! Это замечание воскрешает в памяти другой магический квадрат, встречающийся в математике, Магический (или волшебный) квадрат порядка n — это квадратная таблица nXn, заполненная всеми целыми числами от 1 до n², в которой сумма чисел каждой строки, каждого столбца и двух главных диагоналей одна и та же. К самой игре магические квадраты отношения не имеют, но в шахматной математике встречаются. Например, одно из самых удивительных решений задачи о ходе коня порождает полумагический квадрат.

50	11	24	14	33	26
22	62	31	12	34	38
10	49	64	40	13	36
61	22	9	52	28	39
48	70	60	1	20	41
59	4	35	8	32	42
6	37	2	37	44	15
3	58	46	31	56	43

Продвигаясь по доске согласно данной нумерации, конь обходит все поля доски; маршрут является даже замкнутым. Суммы номеров ходов по строкам и по столбцам равны 260 (а по диагоналям — отличаются от 260).

Е. Я. Гук

Зернышки 11-15

Построим «модель» проективной плоскости. Сначала все точки верхней полусферы без экватора подклеиваются к соответствующим точкам нижней полусферы; теперь нужно еще склеить диаметрально противоположные точки экватора — границы полусфер (рис. 1). Превращаем экватор в четырехугольник ABCD (рис. 2, 3), склеиваем его противоположные вершины A и C, B и D, а затем и стороны — AB с CD, AD с CB (рис. 4; проверьте, что при этом правило склейки точек экватора будет соблюдаться). При склеивании второй пары сторон нельзя избежать самопересечения поверхности. Возникает линия самопересечения, каждую точку которой нужно представлять двойной: один экземпляр точки принадлежит

одному куску поверхности, другой — другому. Если, двигаясь по проективной плоскости, мы перейдем через линию самопересечения, то попадем с наружной стороны поверхности на внутреннюю. Таким образом, по сути дела, никаких двух сторон у этой поверхности нет — как и лист Мёбиуса, она односторонняя. Если склеить каждую точку сферы с диаметрально противоположной точкой, получится поверхность, эквивалентная с точностью до непрерывных деформаций проективной плоскости (см. с. 10—11). Мы показываем два способа такой склейки.

(Окончание см. на с. 11)

