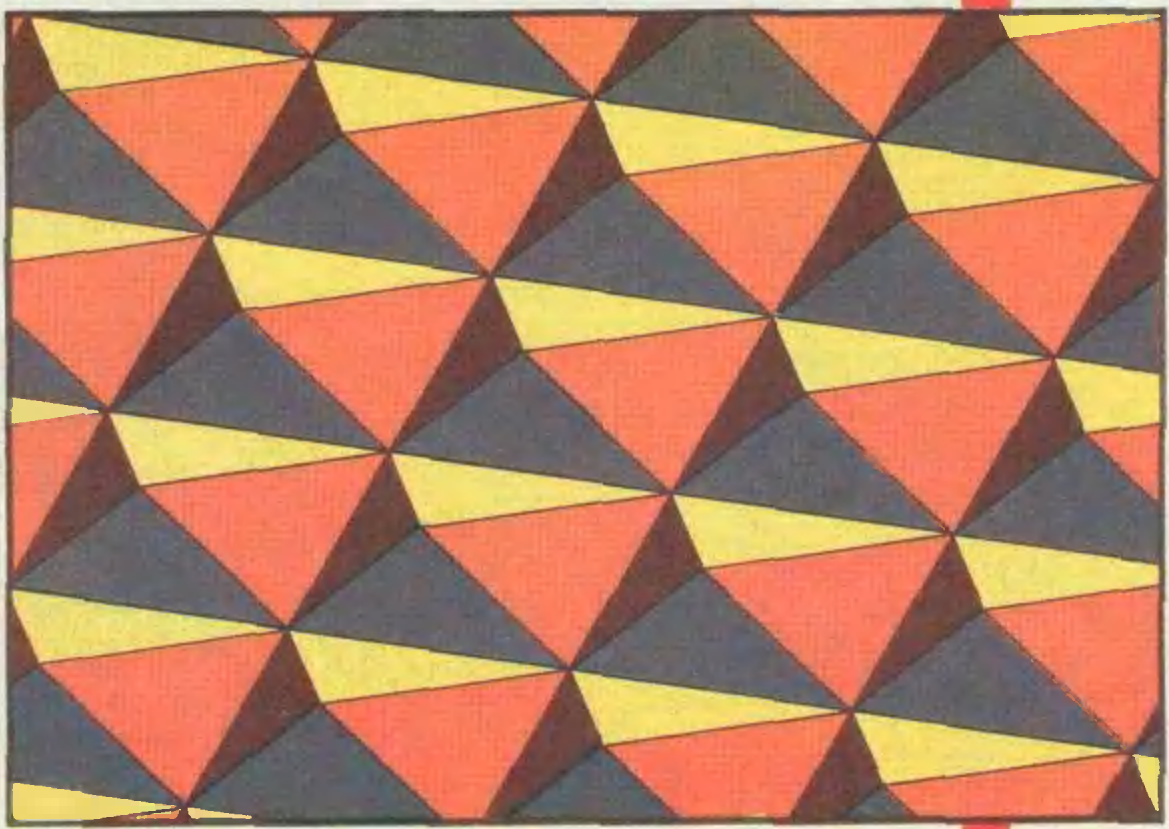


Квант

Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



1989



Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Москва, «Наука».
Главная редакция физико-
математической
литературы

В номере:

- 2 Ю. Р. Носов. Оптическая память
- 8 С. Л. Табачников. Дифференциальная геометрия вокруг нас
- 14 А. Б. Жиглевич, Н. Н. Петров. О четырех решениях уравнения $x^2 = x$
- 19 В. А. Давыдов. Как индейцы бросают томагавк?
- Задачник «Кванта»**
- 23 Задачи М1191 — М1195, Ф1198 — Ф1202
- 25 Решения задач М1166 — М1169, Ф1178 — Ф1182
- 30 О треугольном бильярде
- «Квант» для младших школьников**
- 34 Задачи
- 35 М. П. Бронштейн. Лучи «икс»
- 40 Калейдоскоп «Кванта»
- Р — значит ракета
- 43 Космическая парусная регата
- Школа в «Кванте»**
- Физика 8, 9, 10:
- 44 Симметрия и физические свойства кристаллов
- 46 Дифракция света на круглом отверстии
- Информатика и программирование**
- 49 В. О. Шварцман. ЭВМ и электросвязь
- Математический кружок**
- 57 В. Г. Болтянский. Паркет из четырехугольников
- Практикум абитуриента**
- 61 И. А. Кушнир. Геометрические решения негеометрических задач
- Олимпиады**
- 65 XXIII Всесоюзная олимпиада по математике
- 68 XXIII Всесоюзная олимпиада по физике
- 72 II Всесоюзная олимпиада школьников по информатике
- 76 Ответы, указания, решения
- Нам пишут (33)
- «Квант» улыбается (64)
- Смесь (60)
- Наша обложка**
- 1 Паркет из четырехугольников — см. с. 57.
- 2 На этой картине французского примитивиста Анри Руссо изображены четыре корня уравнения... Какого? Вы узнаете ответ, если посмотрите на с. 14.
- 3 Шахматная страничка.
- 4 Спирали из «змеек» Рубика.

ОПТИЧЕСКАЯ ПАМЯТЬ

Доктор физико-математических наук
Ю. Р. ИОСОВ

Память, несомненно, является определяющим атрибутом человеческой сущности. Развитая способность запоминания, хранения, воспоминания самой разнообразной информации выделяет человека среди всех представителей животного мира. Именно память делает человека Человеком. Те из вас, кто прочитал «Буранный полустанок» Чингиза Айтматова, наверняка запомнили мрачную легенду о манкуртах. У людей «убивали» память, и они становились надежными, бесстрастными телохранителями своих владык, способными не рассуждая убить собственную мать. Человек, потерявший память, сохранил человеческий облик, но стал чудовищем.

Совокупная память отдельных индивидуумов, коллективная память всего человеческого сообщества, материализованная в книгах, картинах, нотах, фотографиях, чертежах, кинофильмах, грампластинках и во многом-многом другом, составляет суть цивилизации.

С возникновением вычислительной техники появились и начали развиваться принципиально новые средства памяти — электронные. Функциональное назначение запоминающих устройств (ЗУ) заключается в записи, хранении и неразрушающем считывании записанной информации. Характеризуя память ЭВМ, обычно говорят об иерархическом принципе ее построения как наиболее целесообразном. Рядом с процессором трудятся оперативные ЗУ, очень быстрые, но не очень емкие; вне ЭВМ — архивные ЗУ, обладающие огромной емкостью, но значительно более медленные. И — многочисленные разновидности ЗУ промежуточного типа. Образно все «здание» памяти ЭВМ представляется в виде пирамиды, острую вер-

шину которой составляют оперативные ЗУ, а массивное основание — архивные.

Одна из определяющих тенденций прогресса ЭВМ заключается в опережающем, ускоренном развитии средств памяти — современные компьютеры не столько «вычисляют», сколько манипулируют с данными, хранящимися в запоминающих устройствах. Подсчитано, что для вступления в так называемое «информационное общество» — общество, в котором компьютеризация охватит все сферы производства, управления, науки, образования, культуры, быта, развлечений, — ежегодный прирост емкости ЗУ в расчете на одного человека должен приблизиться к 1 млрд. бит (такая информация содержится приблизительно в сотне книжных томов).

Замечено, что «пирамида памяти» с течением времени «деформируется», все более «заостряясь» вверху и уродливо «расползаясь» у основания. И это понятно. Оперативные ЗУ, занимающие верхние этажи пирамиды, нашли для себя вполне подходящую элементную базу — это полупроводниковые интегральные схемы, подобные тем, которые используются в процессоре. Вот поэтому-то процессор ЭВМ и его оперативное ЗУ идут в будущее «рука об руку», в полном согласии друг с другом.

В нижних этажах пирамиды гармония разрушается. «Строительный материал» архивных ЗУ — магнитные ленты и диски — тоже непрерывно прогрессирует, но за полупроводниковыми собратьями им не угнаться. И чем более производительными становятся ЭВМ, тем явственнее проявляется «тирания» архивных ЗУ, нередко они требуют для своего разме-

щения огромного зала, тогда как процессор уместается в одной стандартной стойке.

Уже в конце 60-х годов начал ощущаться дискомфорт; в 70-е годы громко заговорили о дисгармонии полупроводниковых микропроцессоров и магнитных ЗУ как об очевидной проблеме. Вычислительная техника стала очень благосклонно относиться к появлению альтернативных направлений в развитии средств памяти. Важнейшее место среди них заняла оптическая память, сулящая информатике наиболее радужные перспективы. Первыми оптическими ЗУ, появившимися в промышленности ряда развитых стран в 1984 году, стали оптические дисковые накопители (ОДН). Идея их проста.

Кто из нас в раннем детстве не увлекался выжиганием на фанерках, фокусируя солнечный свет с помощью линзы? Если выжженную точку отождествить с логической единицей (\bullet), а нетронутую поверхность — с логическим нулем (\circ), то на фанерке можно записать нужную информацию, а процесс записи — это уже, как говорится, «дело техники». Конечно, в запоминающем устройстве никто не использует свет от солнца (его не собрать в маленькое пятно — фокус всегда размазан, по периферии пятна расходятся радужные кольца), да и фанерка как носитель информации, разумеется, не годится. Нужен мощный монохроматический излучатель с узкой диаграммой направленности, интенсивность которого можно просто и быстро модулировать, излучатель миниатюрный и долговечный. Развитие техники подготовило такой излучатель — это полупроводниковый инжекционный лазер (см. «Квант», 1988, № 11—12). А носитель пришлось создавать специально — об этих «оптических дисках» ниже.

В структурной схеме ОДН (рис. 1) центральное звено — это и есть оптический диск, на котором лазерный луч оставляет метки памяти. Для записи луч фокусируется на поверхность вращающегося диска; мощность луча подбирается такой, чтобы метка

образовывалась за несколько десятков наносекунд. При этом метка не размывается вдоль дорожки, а сохраняет форму кружочка, и обеспечивается достаточно высокая скорость записи. На источник импульсного возбуждения поступает от ЭВМ последовательность командных импульсов, и по этой программе лазер то дает яркую вспышку, то гаснет на мгновение — так записываемая информация «вводится» в световой луч и передается им на вращающийся носитель. После каждого оборота диска луч лазера переводится на следующую дорожку, и запись продолжается. Кроме информационных меток, наносятся еще и вспомогательные — метки слежения за дорожкой и метки считывания. Первые призваны «удерживать» лазер на дорожке: если он чуть соскользнет, то механизм обратной связи возвращает его на «путь истинный». Метки второго вида ускоряют поиск нужного массива, они образуют ключ-шифр.

При считывании модуляция отключается, излучение поступает непрерывно. Мощность лазера снижается настолько, чтобы луч не мог ни создать новых меток, ни исказить существующие. «Ощупывая» вращающийся диск, луч по-разному отражается от меток и от нетронутой поверхности. Таким образом записанная информация переходит в луч считывания, затем попадает на фотодиод, где преобразуется в электрические импульсы, которые после усиления поступают на выход накопителя.

Важнейшим параметром ОДН является минимальный диаметр метки, создаваемой лазером, — он определяет плотность записи информации на носителе (бит/см²). Известно, что на какие бы ухищрения мы ни пускались, световой поток невозможно свести в геометрическую точку — явление дифракции приводит к тому, что минимальный диаметр сфокусированного пятна близок к длине волны λ используемого излучения. Но одно дело теория, другое — реальность. Попробуйте собрать в такое пятнышко свет от обычной лампочки накаливания —

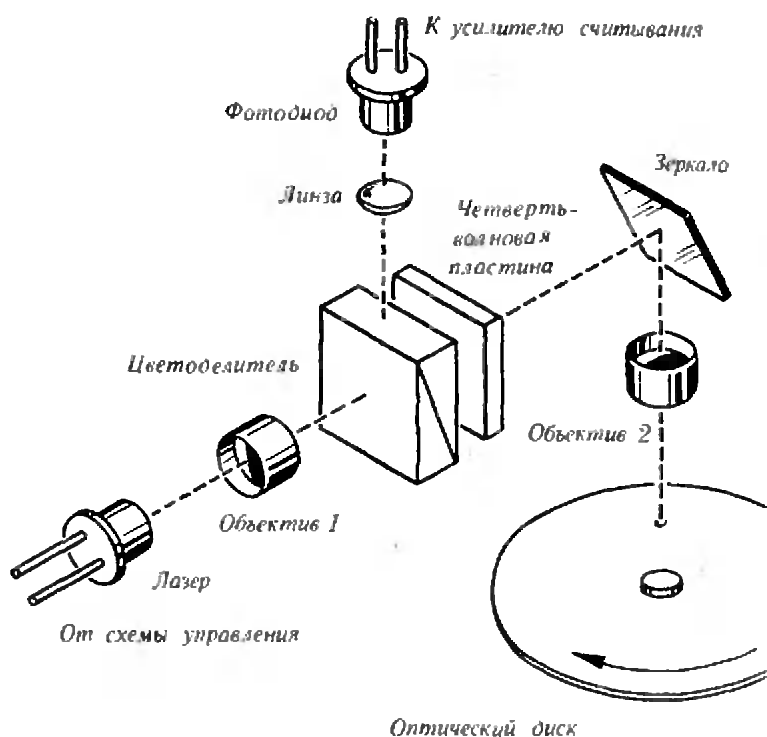


Рис. 1. Структурная схема оптического дискового накопителя. Примерно так же устроен и лазерный проигрыватель оптических дисков.

ничего не выйдет. И тому есть несколько причин, причем причины эти принципиально не устранимые. Во-первых, нить накаливания лампы не точечный источник, и если для одного светящегося участка строго вышолнено условие фокусировки, то другой участок, находящийся чуточку дальше от объектива или ближе к нему, видится размазанным. Вторая причина связана с тем, что свет, излучаемый лампой, содержит множество цветовых составляющих — от красной до фиолетовой. А любая оптическая система создает хроматическую aberrацию — показатель преломления зависит от длины волны, и поэтому система по-разному фокусирует излучение разных цветов. Только лазер, генерирующий почти монохроматическое излучение в виде узкого луча, позволяет вплотную приблизиться к теоретически минимальному размеру метки. Конечно, для того чтобы лазерная «головка» записи-считывания была достаточно миниатюрной, пригодны только полупроводниковые лазеры.

Слава богу, ОДН пришли не на пустое место — уже в течение десятилетия до них интенсивно развивалась волоконно-оптическая связь, и для ее нужд было освоено производство разнообразных полупроводниковых лазеров. Разумеется, пришлось многое усовершенствовать — ОДН требуют более интенсивного излучения, — но основа имелаась. Это арсенидогаллиевые гетеролазеры — надежные, долговечные, генерирующие на длине волны $\lambda \approx 0,85$ мкм. Памятуя о дифракционном пределе, можно было рассчитывать на размер метки около 1 мкм — а это в десятки и сотни раз меньше размеров намагниченных участков магнитных носителей!

Многое, конечно, зависит и от оптической системы, сопрягающей оптический диск с лазером и фотодиодом (см. рис. 1). Микрообъектив 1 собирает большую часть лазерного излучения и формирует нерасходящийся довольно широкий луч, круглый в сечении. Попав на следящее зеркало, он направляется в заданную точку диска; находящийся на его пути микрообъектив 2 фокусирует луч в пятно размером около 1 мкм. Призматический светоделитель необходим для считывания: считывающий лазерный луч, дважды пройдя через «четвертьволновую пластинку» (слева направо и, после отражения от диска, справа налево), так изменяет свою поляризацию, что на диагональной границе раздела двух призм он почти полностью отражается в направлении диода. При записи же луч лазера с исходной поляризацией проходит через светоделитель практически беспрепятственно.

Итак, структуру ОДН мы описали. Но ведь реально все эти элементы

соединяются не бумагой, на которой выполнен рисунок 1, и не стрелками, изображающими световые лучи. Кроме того, надо вращать диск, переводить лазерный луч с дорожки на дорожку, изменять положение следящего зеркала. Все это выполняет электромеханический сервопривод, который должен обеспечить высокое постоянство скорости вращения, мгновенные остановки и изменения направления вращения, отсутствие биений, точную фиксацию совмещающихся элементов. Причем все должно выполняться вне зависимости от износа трущихся деталей и их температурных деформаций. Укажем для примера, что радиальные биения должны быть не более 0,1 мкм, а нестабильность скорости вращения — на уровне 0,01 %. К счастью, и для традиционных ЗУ подобные сервосистемы необходимы, причем все более совершенные и прецизионные. Скажем, зазор между магнитной головкой и магнитным диском должен составлять 0,1 мкм, а в некоторых специальных случаях — и 0,01 мкм; при этом даже микробы и вирусы на поверхности диска становятся помехой. Аэродинамика подобных систем «вылизана» настолько, что ей могли бы позавидовать и создатели знаменитых МИГ-29. Так что и в области сервопривода оптике было что позаимствовать у предшественников. И она, разумеется, позаимствовала. Окажется ли этого достаточно для оптических накопителей? Не станет ли механика тормозом, а то и вовсе непреодолимым барьером на пути их прогресса? Ответ на эти вопросы сейчас неоднозначен. Подыскивать положительные аргументы становится все труднее... Однако и пессимизм здесь вряд ли оправдан — время ведь что-то подскажет, да и сегодняшние успехи ОДН настраивают скорее на мажорный лад.

Посмотрим теперь, что же представляет собой оптический диск. Наиболее распространенным методом записи оптических импульсов стало выжигание, проплавление микроотверстий в тонкой металлической пленке.

Чтобы этот процесс протекал наилучшим образом, на тщательно отполированной поверхности стеклянной заготовки изготавливается четырехслойная пленочная структура (рис. 2). Луч лазера фокусируется на пленке рабочего металла (5) и в небольшой области разогревает его до расплавления. Силы поверхностного натяжения растягивают расплав, и в пленке раскрывается сквозное отверстие. Толщина пленки ничтожна, она не превышает 0,02—0,05 мкм, поэтому форма отверстия повторяет сечение лазерного луча, а диаметр отверстия может быть даже несколько меньше указанного ранее дифракционного предела. Удаётся получать отверстия диаметром 0,3—0,5 мкм; в промышленных ЗУ размеры отверстий обычно близки к 1 мкм, а расстояния между соседними отверстиями и между дорожками — около 2 мкм.

Три других слоя структуры также важны, каждый из них «делает свое дело». Диэлектрический подслой (4) делается из материала с большим коэффициентом отражения — это облегчает различение «0» и «1» при считывании. Алюминиевый экран (3) возвращает назад лучи, которые, не поглотившись, прошли через пленку металла, и тем самым повышает эф-

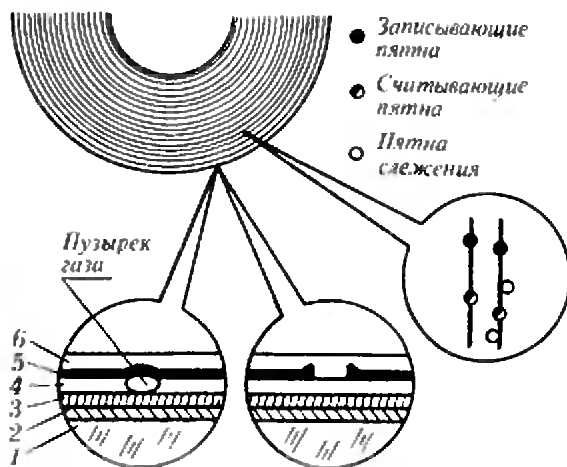


Рис. 2. Выжигание меток или образование микровоздутий на оптическом диске. 1 — заготовка, 2 — отполированный подслой, 3 — отражатель, 4 — диэлектрик, 5 — теллур, 6 — покрытие.

фективность использования лазерной энергии. Верхнее толстое прозрачное защитное покрытие обеспечивает надежность записи и считывания — случайные пылинки, осевшие на его поверхности, не воспринимаются оптической системой, так как они находятся не в фокусе микрообъектива 2. Если бы пылинки попадали прямо на металлическую пленку, они «работали» бы точно так же, как метки, искажая смысл записанного.

В качестве материала рабочего слоя чаще всего используется теллур — он просто напыляется в виде однородных тонких пленок, легко плавится, в нем долго сохраняются выжженные отверстия. Ускоренные испытания позволяют оценить срок хранения не менее чем в 10 лет.

Еще лучшие результаты по долговечности дает замена теллура на титан или платину — более 30 лет хранения. Но это требует увеличения мощности лазерного луча, поэтому вместо проплавления используют метод создания микровздутий. Для этого диэлектрический подслой изготавливают из материала с низкой температурой испарения — при нагреве образуется пузырек пара, вспучивающий нерасплавившуюся металлическую пленку. Считывание информации основывается на том, что отражательная способность вздутия намного выше, чем у неискаженного участка поверхности металла.

Первые успехи придали исследователям уверенность — теперь уже никого не сдерживает благоговение перед уникальной лазерной техникой. Оказалось, что оптические диски можно изготавливать и из пластмассы. Одна английская фирма разработала совсем дешевую пленку, своими свойствами напоминающую обыкновенную бумагу и пригодную для выжигания меток.

Все это носители для однократной записи — хозяин ОДН может по своему желанию единожды заполнить их и в дальнейшем читать записанное столько раз, сколько захочет. А почву для них подготовили постоянные носители, появившиеся еще в 1972 го-

ду. Они изготавливаются в фабричных условиях. В специальной студии на установке, использующей мощный газовый лазер ($\lambda \approx 0,48$ мкм), информация записывается на оптический диск путем выжигания отверстий. Только диск этот сделан особенно тщательно, а запись ведется особенно аккуратно. В результате получается образцовый диск — его называют мастер-диском, оригиналом. С мастер-диска традиционными методами полиграфической технологии изготавливают металлические матрицы. С матрицы отливочная установка воспроизводит пластмассовые копии — по 3—4 штуки в минуту. На них затем напыляют тончайшую алюминиевую или золотую пленку — участки металла на плоской поверхности и во впадинах обладают разными отражающими свойствами. Затем две копии склеивают рельефом внутрь (для защиты) — и двусторонняя пластинка готова.

Как говорится, «дешево и сердито». Конечно, дешево только в том случае, если с одного оригинала наштамповать, например, сотню тысяч, а еще лучше миллион одинаковых копий. А это возможно лишь при записи вполне определенной специфической информации. Так и появились вначале аудиодиски с очень качественной цифровой записью музыкальных программ, а затем — видеодиски с телевизионной «начинкой». Все рекорды массовости побивают рок-видеоклипы, объединившие две современные формы развлечений — рок-музыку и телевидение. Проигрыватели оптических дисков (их часто называют лазерными электрофонами) получают все более широкое распространение в развитых странах.

Все это хорошо, скажете вы, но как можно оптические диски ставить в один ряд с магнитными? Ведь магнитную запись хочешь — хранишь, хочешь — стираешь и пишешь новое. И полки захламлять не надо, да и деньги попусту не расходуются. А оптическая запись — что-то вроде наскальной живописи: нарисованное сохраняется навеки, но для

каждого нового рисунка нужна новая скала.

Оптические диски для многократной перезаписи информации — их еще называют реверсивными, стираемыми дисками — пока еще не получили повсеместного промышленного распространения, но несколько подходящих физических эффектов, делающих их изготовление удобным и выгодным, уже подобрано.

Пока наибольшие симпатии приобрели магнитооптические диски. Некоторые ферромагнитные пленки, например сплавы «марганец — висмут» или аморфный состав «железо — кобальт — гадолиний — тербий», в местах разогрева лазерным лучом меняют свои магнитные свойства (как иногда говорят, меняют магнитную полярность). Вследствие этого «превращенные» участки — метки записи — изменяют поляризацию отраженного луча света иначе, чем остальная поверхность. Если в схеме, приведенной на рисунке 1, на выходе лазера поместить поляризатор, а перед фотодиодом — анализатор, то при считывании лучи, отраженные от метки и от нетронутой поверхности, вызовут разную реакцию фотодиода. Различие это очень незначительно, логические «1» и «0» очень «похожи» друг на друга, но современная электроника умудряется их различить. Для стирания весь диск либо помещают в магнитное поле, либо нагревают и охлаждают. Похоже, что цикл «запись — считывание — стирание» можно повторять сколько угодно раз — магнитооптические диски не «утомляются», и в этом их основное достоинство. Но зато время хранения не превышает всего двух лет — утеряно достоинство оптических дисков и «приобретен» порок магнитных. И еще одно. Для магнитооптических дисков не годятся обычные лазерные электрофоны, рассчитанные на диски с выжженными отверстиями или с микровздутиями, — нужны новые проигрыватели.

Терять уже приобретенное кому же захочется — поэтому ищут и другие реверсивные носители. В некоторых

пленках в местах нагрева лазерным лучом кристаллическое строение меняется на аморфное, а вместе с этим меняется и коэффициент отражения. Эффект очень удобный для стираемой записи, но кратность его повторения невелика. Обследуются и фотохромные вещества, обратимо меняющие свой цвет при лазерном воздействии. Словом, поиски продолжаются...

А тем временем оптические дисковые накопители с носителями однократной записи начали триумфальное шествие по бескрайним просторам информатики. Особенно полезными они оказываются там, где магнитные ЗУ буквально захлебываются в океане данных: метеорологическая информация, различные сведения о воздействии Солнца на нашу планету, «цифровые карты» залежей полезных ископаемых, сейсмические данные...

В 1988 году в Японии пущен в оборот миллион миниатюрных оптических карточек для статистических медицинских обследований: в них заносятся и рентгеновские снимки, и анализы крови, и уровни холестерина — словом, «история болезни» объемом в 800 страниц. И любые сведения врач может получить за несколько секунд. Малоформатные лазерные пластинки, выпущенные в Англии для автомобилистов, вместили всю дорожную сеть страны. А для нужд почтового ведомства на одной пластинке записали 23 млн. адресов и почтовых индексов. Американцы поместили ОДН в космические ракеты и беспилотные самолеты-разведчики.

В мире запоминающих устройств оптика заявила о себе громко и решительно, заставив конкурентов призадуматься.



ТИШКОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ВОКРУГ НАС

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

Не хочется начинать статью с того, что известно всем: мир полон загадок. Но статья уже начата, и мне остается только повторить: да, загадок действительно много. И ладно бы, если явление — сложное, и для его объяснения приходится изобретать новые законы. А то встречается в жизни и такое, что и «явлением»-то назвать без натяжки нельзя, но и объяснить нелегко...

Нам понадобится понятие кривизны плоской линии. О нем подробно рассказано в статье «О кривизне» в «Кванте» № 5 за этот год. Если вы читали эту статью — хорошо, а если не читали — тоже не беда. Каждый сможет «на глазок» определить, у какой из двух данных линий кривизна больше.

Нарисуем несколько линий длиной L и сдвинем каждую их точку в перпендикулярном линии направлении на расстояние ϵ . Получатся новые линии, длины которых обозначены через L_ϵ (рис. 1). Чем больше кривизна кривой, тем больше изменение ее длины при сдвиге: величина L_ϵ на рисунке 1 возрастает справа налево.

Любителям строгих определений скажу, что кривизной линии в данной точке называется скорость относительного изменения длины ее маленького кусочка, содержащего эту точку, при его сдвиге в нормальном направлении. Другими словами, кривизна — это $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|L_\epsilon - L|}{\epsilon L}$ при L и ϵ , стремящихся к нулю. В статье «О кривизне» кривизна определяется иначе — как скорость, с которой поворачивается кривая. Хотя эти определения эквивалентны, они приводят к разным обобщениям на случай по-

верхностей. Но не будем забегать вперед...

Почему сосиска лопается вдоль, а не поперек? Я задал этот вопрос одному своему знакомому, а он ответил, что сосиски вообще не лопаются, когда их варишь. Не знаю, как сейчас, но я хорошо помню, как аппетитно лопались сосиски в моем детстве. И именно вдоль, а не поперек. А почему? Подумайте над этим вопросом, прежде чем читать дальше.

Итак, возьмем сосиску, а точнее, рассмотрим ее математическую модель (рис. 2). Синим цветом изображен «меридиан» сосиски, а красным — «параллель». Что происходит при нагревании сосиски? Она расширяется, и обе кривые немножко смещаются во внешнем направлении на одно и то же расстояние. Ясно видно, что кривизна красной кривой больше, чем кривизна синей. Поэтому ее относительное удлинение тоже больше, чем у синей. А это значит, что красная кривая разорвется раньше.

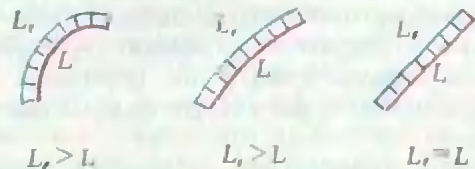


Рис. 1.



Рис. 2.



Рис. 3.

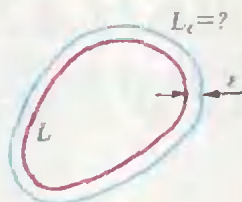


Рис. 4.

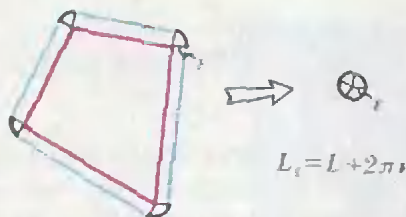


Рис. 5.

При разрыве параллели возникает продольная трещина — сосиска лопаётся вдоль^{*)}. Если вам кажется, что сосиски не стоят внимания, то скажу, что точно так же — вдоль, а не поперек — лопаются грубы газопроводов. В случае цилиндрической трубы причина особенно понятна: при сдвиге образующая цилиндра вовсе не удлиняется.

Почему линия сгиба листа бумаги прямая? С этим вопросом я тоже «приставал» ко многим своим знакомым. Самый распространенный ответ такой: линия сгиба — это линия пересечения двух плоских половинок листа бумаги. А пересечение плоскостей — прямая. Меня этот ответ не убеждает: лист бумаги можно сложить навесу, и тогда он не будет идеально плоским, а линия сгиба все равно получится прямой. А можно складывать бумагу на неровной поверхности — результат получится тот же.

Что происходит с листом бумаги при складывании? Одна его половина накладывается на другую с сохранением расстояний — ведь лист бумаги нерастяжим (см. статью «Геометрия листа бумаги» в «Кванте» № 9 за 1988 год). Говоря более матема-

тически, возникает отображение листа в себя, которое сохраняет расстояния. Такое отображение называется *изометрией*, а линия сгиба — это кривая, образованная неподвижными точками этой изометрии.

Предположим, что линия сгиба где-то имеет ненулевую кривизну. Отступив от линии сгиба в этом месте влево и вправо на небольшое расстояние ε , мы получим две линии длинами L_ε и $L_{-\varepsilon}$ — см. рисунок 3.

Поскольку кривизна отлична от нуля, $L_\varepsilon > L > L_{-\varepsilon}$. С другой стороны, изометрия отображает одну синюю линию на другую. Поэтому их длины равны: $L_\varepsilon = L_{-\varepsilon}$. Возникает противоречие, которое показывает, что кривизна красной линии нулевая, т. е. эта линия — прямая^{*)}.

Как это часто бывает, мы доказали больше, чем собирались. Изометрии бывают не только у плоских поверхностей. Например, сфера симметрична относительно плоскости, проходящей через центр, а цилиндр (не обязательно круговой) — относительно плоскости, перпендикулярной оси. Линии, составленные из неподвижных точек этих изометрий, обладают тем свойством, что их кривизна *вдоль* поверхности равна нулю. Это значит, что если отступать от линии на малое расстояние, то скорость относительно-го изменения длины в каждой точке будет равна нулю: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L_\varepsilon - L}{\varepsilon} = 0$ при

$L, \varepsilon \rightarrow 0$. Такие линии называются *геодезическими* (и о них также рассказано в статье «О кривизне»). Геодезические линии, конечно, поворачиваются в пространстве, но только в направлении, перпендикулярном поверхности. А еще их можно описать, как траектории свободной частицы на поверхности, т. е. частицы, которая движется по инерции.

Наше рассуждение доказывает такую теорему:

если изометрия некоторой поверхности меняет ее ориентацию и на поверхности имеется кривая, составлен-

^{*)} Другое объяснение см. в брошюре «Понимаете ли вы физику?» (М.: Знание, 1967, задача № 80).

^{*)} Другое объяснение дает М. Гарднер в одной из своих книг.

ная из неподвижных точек этой изометрии, то эта кривая — геодезическая.

Кстати, в отличие от листа бумаги, изометрию которого можно осуществить складыванием, сложить бумажный цилиндр по его параллели в трехмерном пространстве не удастся. Зато в четырехмерном пространстве сделать это ничего не стоит — достаточно вложить в него трехмерное пространство вместе с цилиндром, а затем сложить это трехмерное пространство подобно тому, как в трехмерном пространстве складывается лист бумаги.

На сколько удлиняется линия? Возьмем выпуклую замкнутую линию длиной L и, как обычно, сдвинем ее на ϵ (рис. 4). Чему равна длина L_1 ?

Этот вопрос вызывает мало энтузиазма — ведь для вычисления длины нужно что-то интегрировать... Поэтому заменим гладкую линию на многоугольник (рис. 5). После сдвига контур будет состоять из синих отрезков, равных красным, и черных дуг. Эти дуги складываются в окружность радиусом ϵ , и их общая длина равна $2\pi\epsilon$. Поэтому в случае многоугольника ответ такой: $L_1 = L + 2\pi\epsilon$. Таким же будет ответ и для гладкой кривой — для доказательства достаточно приблизить ее многоугольником.

Выпуклость линии в этом рассуждении не имеет большого значения. Ответ не изменится, если кривая не будет иметь точек самопересечения, и даже в том случае, если только число ее вращений будет равно 1 (по поводу числа вращений см. статью «О плоских кривых» в «Кванте» № 11 за 1988 год).

Задачи

1. Длина красной линии на рисунке 6 равна L . Найдите длину синей линии.



Рис. 6.

2. Площадь, ограниченная красной линией на рисунке 4, равна S . Найдите площадь, ограниченную синей линией.

В математическом «фольклоре» известна такая задача: пролезет ли кошка под обручем, опоясывающим Землю и всего на 1 метр длиннее экватора? Для круглой Земли ответ легко посчитать. А для тела другой формы, например, эллипсоида или тора?

Если длина линии на поверхности равна L и расстояние до обруча равно ϵ , то длина обруча — $L + 2\pi\epsilon$. Поэтому $2\pi\epsilon = 1$ м, и $\epsilon \approx 16$ см — места для кошки вполне достаточно.

Средняя кривизна поверхности. Помоему, мы уже достаточно много раз сдвигали в нормальном направлении линии. А что будет, если линию заменить поверхностью? Возьмем на поверхности маленькую площадку площадью S , содержащую точку A , и сдвинем каждую точку площадки S в перпендикулярном направлении на расстояние ϵ . Обозначим через S_1 площадь получившейся площадки. Средней кривизной поверхности в точке A называется предел отношения $\frac{S_1 - S}{\epsilon S}$ при S и ϵ , стремящихся к нулю.

Менее формально: средняя кривизна — это скорость изменения площади при нормальном сдвиге. Если средняя кривизна поверхности в какой-то точке отлична от нуля, то малым сдвигом кусочка поверхности в одном направлении его площадь можно увеличить, а в противоположном — уменьшить.

В статье «О кривизне» рассказано о другом понятии кривизны поверхности — гауссовой кривизне. Не буду повторять того, что сказано в статье. Замечу только, что поверхности, гауссова кривизна которых равна нулю в каждой точке, устроены особенно интересно (см. статью «Геометрия листа бумаги»). А как устроены поверхности, у которых в каждой точке равна нулю средняя кривизна?

Опустим проволочный контур в мыльный раствор. Мыльная пленка, натянутая на контур, стремится

уменьшить площадь, подобно тому, как упругая резинка стремится уменьшить свою длину. Средняя кривизна пленки не может быть отличной от нуля — ведь тогда при нормальном сдвиге ее площадь уменьшилась бы, а она и так минимальна. Поэтому поверхности, средняя кривизна которых равна нулю — это поверхности всевозможных мыльных пленок. Они называются *минимальными* и могут иметь довольно замысловатую форму (см. статью «Минимальные поверхности» в «Кванте» № 6 за 1983 год).

Возьмем замкнутую выпуклую поверхность площадью S и сдвинем ее в нормальном направлении на расстояние ε . Чему равна площадь S_ε новой поверхности? Ответ такой:

$$S_\varepsilon = S + 2\varepsilon I + 4\pi\varepsilon^2,$$

где I — интеграл средней кривизны по исходной поверхности. Кстати, коэффициент 4π при ε^2 тоже равен интегралу по поверхности — только не средней, а гауссовой кривизны (это доказано в статье «О кривизне»).

Доказать формулу для S_ε можно так же, как в плоском случае, т. е. приближая поверхность многогранником. Нужно только понять, что является аналогом средней кривизны для многогранных поверхностей. Но это уже тема для отдельного разговора...

Задача 3*. Замкнутая выпуклая поверхность площадью S ограничивает объем V . Какой объем ограничивает сдвинутая на ε поверхность?

Кривизну измеряет... маятник. Вы, конечно, слышали о маятнике Фуко. А многие видели его, например, в Исаакиевском соборе в Ленинграде. Плоскость колебаний этого маятника с течением времени поворачивается относительно Земли. Причина становится особенно понятной, если маятник подвешен на полюсе. Плоскость его колебаний остается неизменной, а Земля вращается, поэтому относительно Земли поворачивается плоскость колебаний маятника. При приближении к экватору этот эффект ослабевает, а на самом экваторе и вовсе пропадает.

Такое поведение маятника вызвано тем, что его точка подвеса движется (вращаясь вокруг оси Земли). Удобно считать Землю неподвижной, а передвигать только точку подвеса маятника. Итак, берем в руку нить с подвешенным на ней грузом и отправляемся в путь. Сначала пойдем по экватору. Плоскость колебаний маятника не будет поворачиваться относительно направления движения просто в силу симметрии, ведь экваториальная плоскость — это плоскость симметрии сферы. По аналогичной причине эффект маятника Фуко отсутствует при движении по меридиану, и вообще по любой большой окружности сферы — на неподвижной сфере каждую из них можно считать экватором. Если же траектория движения — произвольная кривая, то ее можно приблизить ломаной, состоящей из отрезков больших окружностей. При движении по этим отрезкам угол между ними и плоскостью колебаний не меняется, а в углах ломаной направление движения поворачивается относительно направления колебаний. Следовательно, чем сильнее отличается траектория от большой окружности, тем сильнее эффект маятника Фуко.

Предположим теперь, что планета имеет произвольную форму, например форму эллипсоида (или даже тора!). Предположим еще, что сила тяжести по-прежнему перпендикулярна поверхности, и снова зададимся вопросом о поведении маятника при движении его точки подвеса. Какие кривые на поверхности играют роль больших окружностей сферы? Конечно, геодезические линии. По-видимому, если идти по геодезическим, плоскость колебаний не будет поворачиваться относительно направления движения...

Если бы геодезическая лежала в плоскости симметрии поверхности, то все доказывалось бы точно так же, как в случае сферы. К сожалению, этим свойством геодезические обладать не обязаны (хотя, как мы видели, если плоскость симметрии есть, то кривые, лежащие в ней —

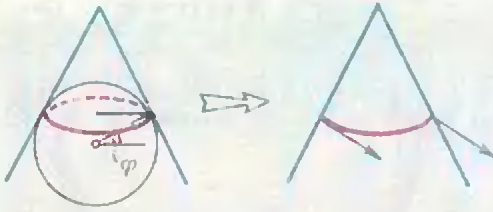


Рис. 7.

геодезические). Дело можно поправить, если взять на поверхности узкую полоску шириной 2ε , для которой геодезическая служит средней линией. Рассмотрим симметрию этой полоски относительно геодезической. Эта симметрия, конечно, может не сохранять расстояния. Однако, как мы знаем, изменения длины геодезической при сдвиге в нормальном направлении имеет второй порядок малости по ε . Поэтому искажение длин при симметрии полоски — величина второго порядка малости по ε (т. е. предел отношения искажения к ε равен нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$).

Это рассуждение можно сделать более наглядным. Чтобы получить геодезическую, достаточно плотно прижать к поверхности узкую бумажную полоску (см. статью «О кривизне»). Средняя линия полоски — ее ось симметрии. Поэтому геодезическая — это «почти» ось симметрии полоски на поверхности.

Итак, начнем двигаться по геодезической. Угол α между направлением колебаний и направлением движения — функция от времени t . Поскольку геодезическая с точностью до малых второго порядка является осью симметрии полоски на поверхности, функция $\alpha(t)$ — постоянная с точностью до членов второго порядка по t . Это значит, что производная по времени $\alpha'(t)$ равна нулю при любом t , т. е. $\alpha(t)$ — постоянная. Следовательно, при движении по геодезической эффект маятника Фуко отсутствует.

Рассмотрим теперь произвольную траекторию движения. Ее можно приблизить геодезической ломаной, и поворот плоскости колебаний относительно направления движения происходит только в ее вершинах. Значит,

чем больше отличается траектория от геодезической, тем сильнее эффект маятника. Величина, которая измеряет это отличие, называется *геодезической кривизной* линии на поверхности. Она определяется так же, как кривизна линии на плоскости, — это скорость изменения длины кривой при нормальном сдвиге. Итак, маятник — это прибор для измерения геодезической кривизны линии на поверхности.

Все это можно сказать и иначе. В статье «О кривизне» определен *параллельный перенос* на поверхности. Его результат зависит от пути, вдоль которого он происходит; если этот путь — геодезическая, то каждое направление при переносе сохраняет с ней постоянный угол. Этим условием перенос однозначно задается. Наш результат о маятнике можно сформулировать так: *при движении точки подвеса маятника направление его колебаний переносится параллельно вдоль траектории движения.*

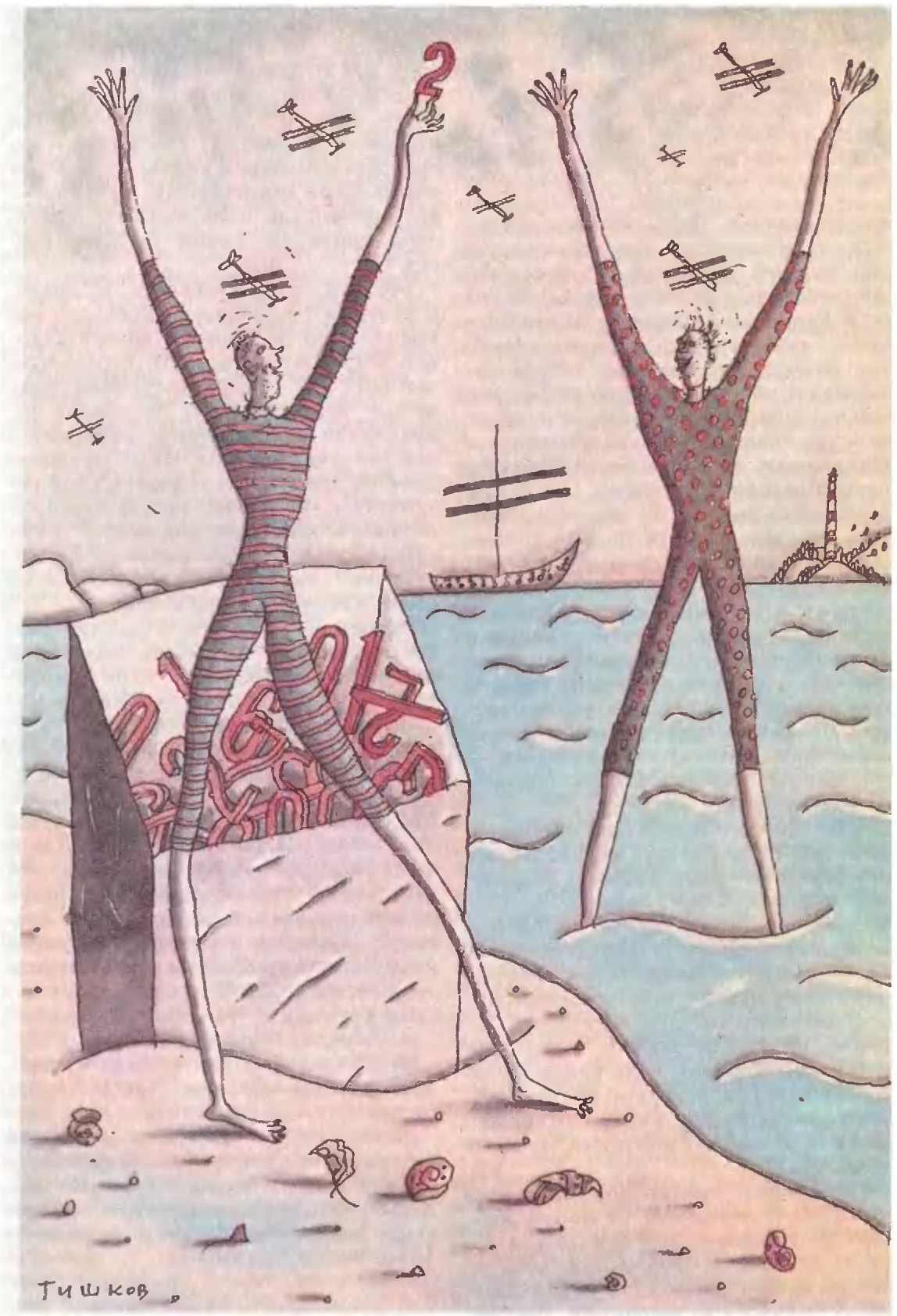
Вернемся на Землю и найдем скорость поворота плоскости колебания маятника на широте φ . Угол поворота за сутки образован начальным направлением и направлением, полученным из него параллельным переносом вдоль параллели с широтой φ . Чтобы найти этот угол, построим конус, касающийся сферы вдоль этой параллели (см. рис. 7). Параллельный перенос на сфере приводит к тому же результату, что на конусе. Но конус можно разрезать и развернуть на плоскость. Поэтому искомый угол равен углу получившегося кругового сектора. А он равен $2\pi \sin \varphi$.

Задачи

4. Докажите это.

5. Найдите геодезическую кривизну параллели сферы радиусом R с широтой φ .

Итак, поворот плоскости колебаний за сутки составляет $2\pi \sin \varphi$, а скорость поворота равна $2\pi \sin \varphi / 24$ радиан в час. Для маятника в Исаакиевском соборе ($\varphi \approx 60^\circ$) это примерно 13° в час.



О ЧЕТЫРЕХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ $x^2 = x$

А. Б. ЖИГЛЕВИЧ,
доктор физико-математических наук
И. Н. ПЕТРОВ

Прежде чем убедить читателя, что уравнение $x^2 = x$ имеет не два решения, как думают все, а четыре, как утверждается в заглавии статьи, мы обратимся к следующему бесспорному факту. Если натуральное число оканчивается (в десятичной записи) цифрой 0, 1, 5, 6, то такой же цифрой оканчивается его квадрат. То же относится к двузначным окончаниям 00, 01, 25, 76, т. е. если число оканчивается одной из этих пар цифр, то его квадрат оканчивается той же парой цифр (например, $176^2 = 30\,976$, $225^2 = 50\,625$ и т. п.). Аналогичным свойством обладают трехзначные окончания 000, 001, 625, 376. В то же время никакие другие однозначные, двузначные и трехзначные окончания подобным свойством не обладают. В чем тут дело? Ответ дает **Теорема.** *При любом k существует ровно 4 набора из k цифр — 00...00, 00...01 и еще два, оканчивающиеся соответственно пятеркой и шестеркой, — обладающие таким свойством: если натуральное число оканчивается одним из этих наборов цифр, то его квадрат оканчивается тем же набором цифр.*

Для убедительности мы дадим два доказательства этой теоремы. Впрочем, сначала разберемся, что же мы должны доказать. Мы ищем целое число x , $0 \leq x < 10^k$, такое, что для любого целого $a \geq 0$ квадрат числа $10^k a + x$ (так записывается произвольное число, k -значное окончание которого совпадает с x) имеет вид

$10^k b + x$, где b — целое число. Но $(10^k a + x)^2 = 10^k(10^k a^2 + 2ax) + x^2$; поэтому наше условие состоит попросту в том, что $x^2 - x$ делится на 10^k . Итак, наша задача формулируется предельно просто: найти все целые x , $0 \leq x < 10^k$, такие, что $x^2 - x$ делится на 10^k . Мы должны убедиться в том, что задача имеет 4 решения и что эти решения обладают указанными в формулировке теоремы свойствами.

Первое доказательство. Итак, разность $x^2 - x = x(x-1)$ должна делиться на $10^k = 2^k 5^k$. Но числа x и $x-1$ не могут делиться одновременно ни на 2, ни на 5. Это оставляет нам четыре возможности:

- (1) x делится на 10^k ;
- (2) $x-1$ делится на 10^k ;
- (3) x делится на 2^k , а $x-1$ делится на 5^k ;
- (4) x делится на 5^k , а $x-1$ делится на 2^k .

Так как $x < 10^k$, то первая возможность реализуется только при $x=0$; аналогично, вторая возможность реализуется только при $x=1$.

В случае (3) число x (а в случае (4) — число $x-1$) есть одно из чисел $a \cdot 2^k$, где $0 \leq a < 5^k - 1$. Все эти числа имеют разные остатки от деления на 5^k : если $b \cdot 2^k$ и $c \cdot 2^k$ ($0 \leq b < c < 5^k$) имеют одинаковые остатки от деления на 5^k , то $(c-b) \cdot 2^k$ делится на 5^k и, значит, на 10^k , что возможно только при $c=b$. Но возможных остатков — 5^k , значит, каждый из них по разу представлен в нашем наборе чисел. Это означает, что ровно одно из чисел $a \cdot 2^k$, скажем $a_1 \cdot 2^k$, имеет остаток 1 от деления на 5^k , и если $x = a_1 \cdot 2^k$, то $x-1$ делится на 5^k . Аналогично, ровно одно из чисел $a \cdot 2^k$, скажем

Когда эта статья готовилась к печати, мы получили статью на близкую тему, написанную В. Н. Денисенко. С согласия В. Н. Денисенко редакция использовала в настоящей статье некоторые материалы из его статьи. (Примеч. ред.)

$a_2 \cdot 2^k$, имеет остаток $5^k - 1$ от деления на 5^k , и если $x - 1 = a_2 \cdot 2^k$, то x делится на 5^k .

Мы убедились, что в каждом из четырех случаев нужное x существует и единственно, т. е. таких чисел всего четыре. Ясно также, что в случае (3) число x кончается на 6, а в случае (4) на 5. Теорема доказана.

Второе доказательство мы проведем, считая уже известным, что чисел с указанным свойством — не больше четырех (это нам известно из первого доказательства, но легко может быть доказано и прямо). Кроме того, применим индукцию по k : будем считать, что уже найдены числа x_{k-1} и y_{k-1} , оканчивающиеся, соответственно, пятеркой и шестеркой такие, что $0 \leq x_{k-1} < 10^{k-1}$, $0 \leq y_{k-1} < 10^{k-1}$, и разности $x_{k-1}^2 - x_{k-1}$ и $y_{k-1}^2 - y_{k-1}$ делятся на 10^{k-1} . Наша задача — найти числа x_k и y_k с аналогичными свойствами.

Чтобы найти x_k , мы возведем x_{k-1} в квадрат и возьмем последние k цифр этого квадрата; таким образом, $x_k^2 = a \cdot 10^k + x_k$. Покажем, что $x_k^2 - x_k$ делится на 10^k :

$$\begin{aligned} x_k^2 - x_k &= (x_{k-1}^2 - a \cdot 10^k)^2 - (x_{k-1}^2 - \\ &\quad - a \cdot 10^k) = x_{k-1}^4 - 2ax_{k-1}^2 \cdot 10^k + \\ &\quad + a^2 \cdot 10^{2k} - x_{k-1}^2 + a \cdot 10^k = \\ &= (x_{k-1}^2 - x_{k-1})(x_{k-1}^2 + x_{k-1}) + \\ &\quad + 10^k(a^2 \cdot 10^k + a - 2ax_{k-1}^2). \end{aligned}$$

Но $x_{k-1}^2 - x_{k-1}$ делится на 10^{k-1} , а $x_{k-1}^2 + x_{k-1}$ делится на 10 (потому что x_{k-1} и x_{k-1}^2 оканчиваются цифрой 5); значит, $(x_{k-1}^2 - x_{k-1})(x_{k-1}^2 + x_{k-1})$ делится на 10^k .

Построение y_k чуть сложнее: нужно взять последние k цифр числа y_{k-1}^5 . Доказательство того, что $y_k^2 - y_k$ делится на 10^k , почти такое же:

$$\begin{aligned} y_k^2 - y_k &= (y_{k-1}^5 - b \cdot 10^k)^2 - (y_{k-1}^5 - \\ &\quad - b \cdot 10^k) = y_{k-1}^{10} - y_{k-1}^5 + 10^k \cdot c = \\ &= (y_{k-1}^5 - y_{k-1})(y_{k-1}^5 + y_{k-1}^2 + \\ &\quad + y_{k-1}^5 + y_{k-1}^5 + y_{k-1}^4) + 10^k \cdot c, \end{aligned}$$

где $c = b^2 \cdot 10^k + b - 2by_{k-1}^5$. Но выражение $y_{k-1}^5 + \dots + y_{k-1}^4$ делится на 10,

потому что это — сумма пяти цифр, оканчивающихся на 6, а разность $y_{k-1}^2 - y_{k-1}$ делится на 10^{k-1} ; значит, $y_k^2 - y_k$ делится на 10^k . Доказательство окончено.

Что видно из этих двух доказательств? Из первого доказательства видно, что сумма третьего и четвертого из найденных чисел равна $10^k + 1$ (и правда, $25 + 76 = 101$, $625 + 376 = 1001$). Второе же доказательство демонстрирует совершенно поразительную вещь: четыре k -значных окончания, сохраняющихся при возведении в квадрат, получаются из четырех $(k-1)$ -значных окончаний, сохраняющихся при возведении в квадрат, приписыванием слева одной цифры! (Действительно, последние k цифр числа x_k^2 — это x_{k-1} и только k -я с конца цифра числа x_k является новой; аналогично для y_k .) Это мы могли заметить уже на наших числовых примерах:

0—00—000—...
1—01—001—...
5—25—625—...
6—76—376—...

Таким образом, в последовательности 5, 25, ..., x_{k-1} , x_k , ... происходит бесконечное нарастание цифр слева, и аналогично — в последовательности 6, 76, ..., y_{k-1} , y_k , ... Если не остановить этот процесс, мы получим два бесконечных «числа» (выпишем их с 10 знаками):

$$\begin{aligned} X &= \dots 8212890625, \\ Y &= \dots 1787109376. \end{aligned}$$

Слово «числа» мы осторожно взяли в кавычки, но, как мы сейчас убедимся, таким бесконечным последовательностям можно присвоить статус настоящих чисел, хотя и несколько необычных.

Новая разновидность чисел. Назовем, скажем, *суперчислами*, бесконечные влево последовательности цифр:

$$\dots a_1 a_3 a_2 a_1.$$

Если эта последовательность, начиная с некоторого места, состоит из одних нулей, будем говорить, что наше суперчисло является обычно-

$$\begin{array}{r}
 + \dots\dots\dots 6847 \\
 \dots\dots\dots 4219 \\
 \hline
 \dots\dots\dots 1066
 \end{array}$$

а)

$$\begin{array}{r}
 \times \dots\dots\dots 6847 \\
 \dots\dots\dots 4219 \\
 \hline
 \dots\dots\dots 1623 \\
 \dots\dots\dots 6847 \\
 \dots\dots\dots 3694 \\
 \dots\dots\dots 7388 \\
 \hline
 \dots\dots\dots 7493
 \end{array}$$

Рис. 1. б)

венным числом; например,

$$000132 = 132.$$

Таким образом, среди суперчисел присутствуют все обыкновенные натуральные числа (и 0), но не только они. Суперчисла можно складывать и перемножать (столбиком) — см. рисунки 1, а и 1, б, причем для обычных чисел это сложение и умножение совпадают с обычными сложением и умножением. Интересно, что суперчисла всегда можно вычитать в любом порядке — тоже столбиком — рисунок 2 (для суперчисел отсутствует понятие «больше — меньше»). В частности, любое суперчисло можно вычесть из нуля (из суперчисла ...000). Значит, среди суперчисел присутствуют все обыкновенные отрицательные числа; например, на рисунке 3 — это число $-132 = \dots 99868$.

Кстати, очевидно, что «обыкновенные отрицательные числа» — это в точности суперчисла, у которых, начиная с некоторого места, все цифры — девятки.

Сложение и умножение суперчисел (как и их вычитание) обладают обычными свойствами: $a + b = b + a$, $ab = ba$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$, $a(b + c) = ab + ac$ и т. д. В частности, для любого суперчисла x можно вычислить выражение $x^2 - x$, а из нашей Теоремы немедленно вытекает

С л е д с т в и е. Уравнение $x^2 = x$ имеет в суперчислах 4 решения: 0, 1, X, Y.

Вот мы и дождались этого результата.

Как же так? Ведь если действия над суперчислами обладают обычными свойствами, то должно пройти обычное доказательство того факта, что уравнение $x^2 - x$ имеет два решения. Посмотрим. По-прежнему $x^2 - x = x(x - 1)$ — этого никто не отрицал. Значит, если $x^2 - x = 0$, то либо $x = 0$, либо $x - 1 = 0$. Но почему? Кто сказал, что если произведение ab суперчисел a и b равно 0, то одно из этих суперчисел равно 0? Это не так! Более того, мы отлично знаем, что $XY = 0$.

В самом деле, x_k делится на 5^k , а y_k делится на 2^k ; значит, произведение $x_k y_k$ делится на 10^k , т. е. оканчивается k нулями. Значит, перемножая X и Y столбиком, мы будем получать в результате одни нули. Для сомневающихся приводим рисунок 4.

Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, но $ab = 0$, то a и b называются делителями нуля. Среди чисел нет делителей нуля, а среди суперчисел — есть, и в этом все дело.

Кстати, теперь ясно, почему X и Y — решения нашего уравнения: ведь $X + Y = 1$ (помните, $x_k + y_k = 10^k + 1$) и $X(X - 1) = -X(1 - X) = -XY = 0$, и аналогично — $Y(Y - 1) = 0$.

Уравнение $x^m = x$. Если $x^2 = x$, то $x^5 = x^2 \cdot x = x \cdot x = x^2 = x$, $x^4 = x^3 \cdot x = x \cdot x = x^2 = x$ и аналогично $x^5 = x$, $x^6 = x, \dots$ Таким образом, решения уравнения $x^m = x$ являются решениями уравнения $x^m = x$ при любом m . А имеет ли уравнение $x^m = x$ другие решения?

$$\begin{array}{r}
 \dots\dots\dots 6847 \\
 \dots\dots\dots 4219 \\
 \hline
 \dots\dots\dots 2628
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \dots\dots\dots 4219 \\
 \dots\dots\dots 6847 \\
 \hline
 \dots\dots\dots 7372
 \end{array}$$

Рис. 2.

$$\begin{array}{r}
 \dots\dots\dots 00000 \\
 \dots\dots\dots 00132 \\
 \hline
 \dots\dots\dots 99868
 \end{array}$$

Рис. 3.

$$\begin{array}{r}
 X \dots\dots 0625 \\
 \dots\dots 9376 \\
 \dots\dots 3750 \\
 \dots\dots 4375 \\
 \dots\dots 1875 \\
 \dots\dots 5625 \\
 \hline
 \dots\dots 0000
 \end{array}$$

Рис. 4

Начнем с $m=3$. Кроме 0, 1, X , Y , уравнение $x^3=x$ имеет еще решение $X-Y$:

$$(X-Y)^3 = X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3 = X - 3XY + 3XY - Y = X - Y.$$

(Кстати, $(X-Y)^2=1$, откуда тоже следует, что $X-Y$ удовлетворяет уравнению $x^3=x$.) Кроме того, у любого решения уравнения $x^3=x$ можно поменять знак, и это дает еще четыре решения: -1 , $-X$, $-Y$, $Y-X$. Итак, мы нашли девять решений:

$$0, 1, -1, X, -X, Y, -Y, X-Y, Y-X.$$

Упражнение 1. Докажите, что этими девятью решениями исчерпываются все решения уравнения $x^3=x$.

Случай $m=4$ (как и вообще случай четного m , см. теорему ниже) не столь интересен:

Упражнение 2. Докажите, что уравнение $x^4=x$ имеет в точности те же решения, что уравнение $x^2=x$.

Зато при $m=5$ появляются новые решения. Чтобы описать их, достаточно указать одно из них, а это можно сделать так. Составим последовательность z_k , в которой $z_1=2$ и число z_k состоит из последних k цифр числа z_{k-1}^5 :

$$z_1=2, z_2=32, z_3=432, \dots$$

Упражнение 3. Докажите, что z_k получается из z_{k-1} приписыванием слева одной цифры и что $z_k^5 - z_k$ при любом k делится на 10^k .

Числа z_k составляют суперчисло (выпишем его с 10 знаками):

$$Z = \dots 9879186432.$$

Упражнение 4. Уравнение $x^5=x$ имеет пятнадцать решений: девять решений уравнения $x^3=x$ (см. упражнение 1) и еще Z , $-Z$, $X-Z$, $Z-X$, $X+Z$, $-X-Z$.

При больших m новых решений не появляется. Читатель может попытаться доказать самостоятельно следующую теорему:

Если m четно, то уравнение $x^m=x$ имеет (в суперчислах) те же решения, что уравнение $x^2=x$. Если m имеет вид $4n-1$, то уравнение $x^m=x$ имеет те же решения, что уравнение $x^3=x$. Если m имеет вид $4n+1$, то уравнение $x^m=x$ имеет те же решения, что уравнение $x^5=x$.

Приведем еще одну формулировку, относящуюся к уравнению $x^m=1$:

Если m нечетно, то уравнение $x^m=1$ имеет единственное решение ($x=1$). Если m делится на 2, но не делится на 4, то уравнение $x^m=1$ имеет четыре решения: $1, -1, X-Y, Y-X$. Если m делится на 4, то уравнение $x^m=1$ имеет восемь решений: $1, -1, X-Y, Y-X, X-Z, Z-X, X+Z, -X-Z$.

Еще два упражнения. Упражнение 5. Для каких (обыкновенных) чисел m разрешимо в суперчислах уравнение $mx=1$ (т. е. какие обыкновенные дроби присутствуют среди суперчисел)?

Упражнение 6. Верно ли для суперчисел утверждение Великой теоремы Ферма: если n — (обыкновенное) целое число, большее 2, то не существует отличных от нуля суперчисел X, Y, Z таких, что $X^n+Y^n=Z^n$?

Заключительное замечание. Если вы видите в суперчислах нечто знакомое, не удивляйтесь; эти числа знакомы всякому математику как «целые 10-адические числа». Все неприятности, или, лучше сказать, все неожиданности, с которыми мы столкнулись здесь, связаны с тем, что 10 — составное число; в частности, в p -адических числах с простым p уравнение $x^2=x$ имело бы, как и положено, 2 решения. Можно сказать, что если бы наша система счисления имела простое основание, то мы вряд ли нашли бы материал для такой статьи, как эта.

КАК ИНДЕЙЦЫ БРОСАЮТ ТОМАГАВК?

Доктор физико-математических наук
В. А. ДАВЫДОВ

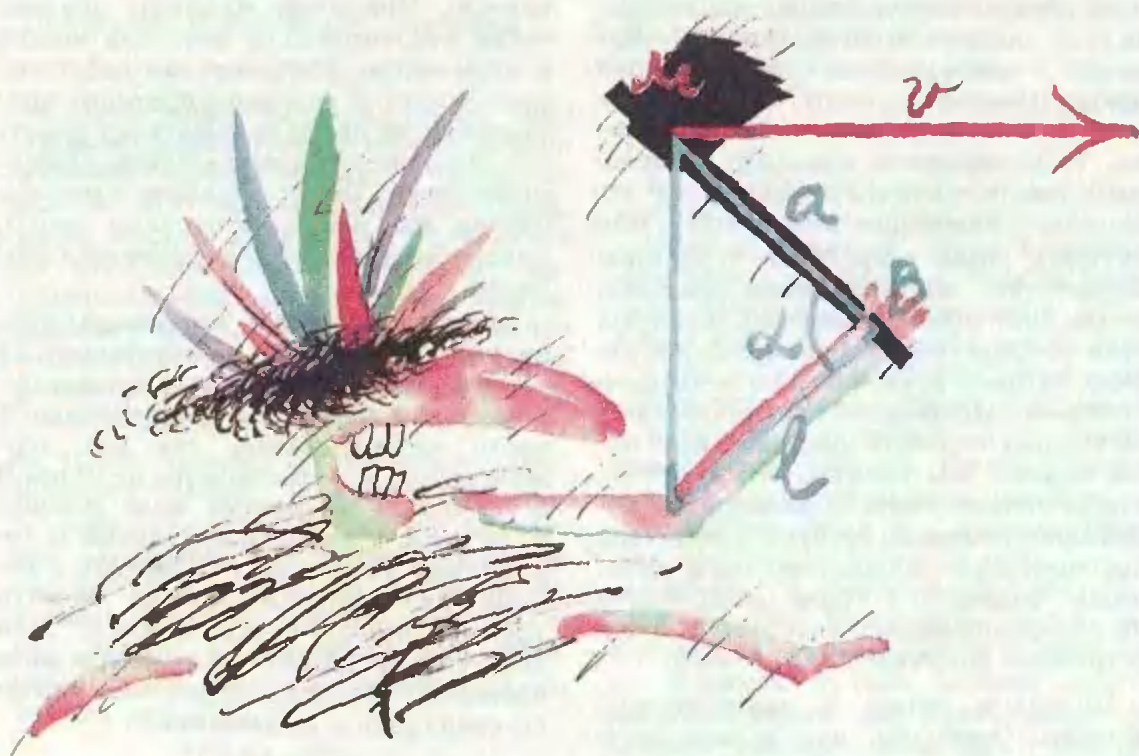
Томагавк просвистел мимо лица Хейворда и, срезав несколько золотистых локонов Алисы, задрожал в стволе дерева над ее головой.

Д. Ф. Купер. Последний из могикан.

Мальчишки моего поколения, чье детство пришлось на шестидесятые годы, еще застали время, когда ребята захлеб читали романы Купера и Майна Рида, мечтая о жизни и приключениях среди индейских племен Северной Америки. Выкroив свободный часок и вооружившись лассо из бельевой веревки, мы бежали во двор, где безуспешно пытались заарканить какой-нибудь куст, торчащую ветку, а порой и незадачливую кошку, которая опрометчиво вылезла из подвала погреться на солнышке. Но самое боль-

шое восхищение вызывало у нас поразительное совершенство, с каким индейские воины владели своим грозным оружием — томагавком.

Трудно найти автора «индейских» романов, который не посвятил хотя бы несколько эпизодов замечательному искусству бросать топор. Интерес к этой проблеме постоянно подогревал и кинематограф. В то время на наших экранах периодически появлялись «индейские» фильмы, для героев которых всегда находилась возможность раз-другой метнуть томагавк в цель. Взять хотя бы такую сцену. Индейское племя решает наказать в чем-то провинившегося перед ним бледнолицего. Его привязывают



к стене хижины, после чего каждый участник расправы кидает в него томагавк. Последний топор перерубает веревку, и, когда потерявшая от страха сознание жертва сползает на землю, зрители с восхищением видят на стене контур человеческого тела, образованный вонзившимися в нее томагавками. После посещения кинотеатра особенно хотелось если и не научиться бросать топор — мы понимали, что это выше способностей бледнолицего мальчишки, — то хотя бы понять технику индейцев.

Сейчас, кажется, интерес ребят к «индейской проблематике» упал, и мои дети, например, уже не смогут отличить гурона от команча и вряд ли скажут, кто такой Оцеола. Однако и их не оставляют равнодушными удивительные способности североамериканских аборигенов обращаться со своим традиционным оружием.

Идея, которая легла в основу предлагаемой читателям теории бросания топора, родилась, когда мы стали регулярно ходить в походы. В свободное время мы находили поблизости от лагеря сухое дерево (которых в наших лесах великое множество) и пытались попасть в него топором. Вот тут-то и обнаружился замечательный факт. Оказалось, что если встать на определенном расстоянии от дерева, то вероятность того, что брошенный топор вонзится в него (а не отскочит, ударившись обухом или ручкой), резко возрастает. При этом достаточно минимального навыка, чтобы научиться (конечно, стоя на этом расстоянии) попадать в сухое дерево, например, сто раз из ста. Попытки понять это явление позволили автору сформулировать предлагаемую ниже модель. Мы увидим, что для того, чтобы сносно уметь обращаться с томагавком, вовсе не требуется родиться краснокожим; нужно, по сути дела, лишь развить в себе способность на глазок оценивать расстояние, а все остальное получится само собой.

Перейдем теперь к рассмотрению модели. Очевидно, что задача естественным образом разбивается на две.

Во-первых, нужно просто суметь попасть топором в столб или сухое дерево; во-вторых, желательно попасть именно лезвием, а не обухом или топорищем. Будем считать, что с первой проблемой читатель сможет справиться сам.

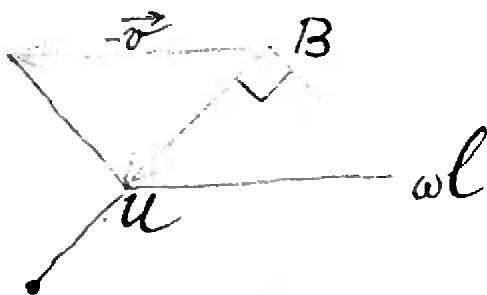
Движение руки при броске происходит следующим образом. Рука, держащая топор, вращается в локтевом суставе с некоторой угловой скоростью ω , и бросок происходит в тот момент, когда скорость центра масс топора направлена горизонтально. Строго говоря, если мы хотим, чтобы топор вонзился в определенную точку столба, направление его скорости в момент бросания может отличаться от горизонтального. Однако мы ставим перед собой более скромную задачу: просто воткнуть томагавк в вертикально стоящий столб (неважно в какой точке). При такой постановке можно пренебречь и притяжением Земли. Влияние тяготения приведет к тому, что топор вонзится в столб несколько ниже.

В нашей модели считается — и это очень важно, — что при броске не происходит подкручивания топора кистью. При всем желании практически невозможно (и читатель может в этом легко убедиться на собственном опыте) в течение короткого времени броска придать томагавку заметное дополнительное вращение движением кисти. Таким образом, в момент броска мы просто отпускаем топор, предоставляя ему далее двигаться свободно.

Введем следующие параметры (см. рисунок на с. 19): l — расстояние от центра вращения руки в локтевом суставе до точки B , определяющей место на топорище, где мы держим топор; a — расстояние от точки B до точки M — центра масс топора; α — угол, образованный рукой и топорищем. Угол α можно менять в нешироких пределах, однако бросать удобнее всего, когда $\alpha \approx \pi/2$. При этом скорость движения центра масс брошенного топора будет описываться следующим выражением:

$$v = \omega \sqrt{a^2 + l^2}.$$

Определим теперь угловую скорость вращения летящего томагавка. Проще всего это сделать, перейдя в систему отсчета, движущуюся вместе с центром масс топора со скоростью v . В этой системе отсчета точка M (центр масс) покоится, а точка B (как и все остальные точки томагавка) вращается вокруг нее; скорость u точки B в любой момент направлена перпендикулярно топорищу и равна $\omega_B a$, где ω_B — интересующая нас угловая скорость вращения летящего томагавка. В неподвижной системе отсчета точка B в момент бросания имела скорость ωl , направленную перпендикулярно l , т. е. вдоль топорища. Таким образом,



$$u \equiv \omega_B a = \sqrt{v^2 - (\omega l)^2}.$$

Подставив $v = \omega \sqrt{a^2 + l^2}$, получим

$$\omega_B a = \omega a, \text{ т. е. } \omega_B \equiv \omega$$

— брошенный томагавк будет вращаться с угловой скоростью ω , равной угловой скорости вращения руки при броске. Этот вывод останется в силе, даже если угол α будет отличаться от $\pi/2$. Полученный результат, несмотря на свою простоту, очень важен. Действительно, из него следует, что отношение поступательной скорости движения центра масс томагавка к его угловой скорости вращения не зависит от «силы броска» (от импульса, сообщаемого топору в момент броска) и равно $v/\omega = \sqrt{a^2 + l^2}$. А это значит, что расстояние L_n , которое пролетит топор, сделав n оборотов, также не зависит от силы броска. Учитывая, что время, необходимое для того, чтобы топор сделал n оборотов, равно $2\pi n/\omega$, найдем L_n :

$$L_n = 2\pi n \sqrt{a^2 + l^2}.$$

Мы пришли к замечательному выводу: существует «спектр» расстояний L_n , и для того, чтобы при броске добиться успеха, нужно находиться от цели на расстоянии

$$L_n + \arctg(l/a) \sqrt{a^2 + l^2}$$

(появление второго слагаемого связано с тем, что в момент броска ручка топора образует с вертикалью угол, равный $\arctg(l/a)$).

Давайте оценим величину элементарного «кванта» L_1 , т. е. расстояние, пролетев которое топор сделает один оборот. Возьмем $l = 33$ см, $a = 20$ см (автор проводил измерения на собственной руке и личном плотницком топорище). Вычисления дают $L_1 = 2,42$ м. Таким образом, топор, брошенный с расстояния 2,82 м (вспомним, что к L_1 нужно еще прибавить слагаемое с арктангенсом), сделав один оборот, попадет в цель.

Опыт показывает, что практически без всякой тренировки можно успешно попадать в цель с расстояний L_1 и L_2 . Подъем на следующие «квантовые уровни» дается уже тяжелее, однако многие знакомые автора без видимых усилий поражали сухое дерево с расстояния L_4 , которое превышает 10 м.

«Все это замечательно, — скажет читатель. — Однако индеец способен попасть в цель не только с расстояний L_n . Как это ему удается?»

Представляется, что все очень просто. В нашей модели имеется параметр a , который легко изменить: для этого достаточно, бросая томагавк, взяться за другое место на его ручке. При этом «спектр» также будет другим. Таким образом, изменение положения точки захвата B приводит к размытию «уровней» L_n и образованию своеобразной «зонной структуры». Находясь внутри одной из таких разрешенных зон, можно, подобрав положение точки B (или, что то же самое, параметр a), сделать удачный бросок. Более того, если воспользоваться томагавком с достаточно длинной ручкой, можно добиться перекрытия зон, отвечающих соседним уровням L_n и L_{n+1} . Оценим необходимую для этого длину руч-

ки b . Очевидно, для того, чтобы соседние зоны перекрылись, необходимо выполнение следующего соотношения:

$$2\pi n\sqrt{l^2 + b^2} = 2\pi(n+1)\sqrt{l^2 + a_{\min}^2},$$

где a_{\min} — минимальное расстояние от точки B до центра масс M . Опыт показывает, что если a меньше 10 см, бросать топор неудобно. Поэтому для оценки b значение a_{\min} можно принять равным 10 см. Решая последнее уравнение, найдем b :

$$b = \frac{1}{n}\sqrt{(2n+1)l^2 + (n+1)^2 a_{\min}^2}.$$

Рассмотрение этого выражения показывает, что наибольшая длина топорща требуется для перекрытия первой и второй зон, т. е. для $n=1$. Подставляя в формулу для b значения $l=33$ см, $a_{\min}=10$ см, $n=1$, получим $b \approx 60$ см. Для перекрытия второй и третьей зон ($n=2$), достаточно иметь томагавк с длиной ручки $b=40$ см, и т. д. Таким образом, для того чтобы иметь возможность с любого разумного расстояния поразить цель, величина b должна быть довольно большой. Недаром у индейских томагавков такая длинная ручка!

В действительности можно обойтись и меньшей длиной топорща: топор может вонзиться в сухое дерево как верхней, так и нижней частью лезвия, что приводит к дополнительному сближению границ разрешенных зон. Опыт автора говорит о том, что вполне достаточно иметь топорще длиной 50 см.

Итак, рассмотренная модель показывает, что научиться метко кидать томагавк не так уж сложно. Нужно лишь оценить расстояние до цели и держать топор за соответствующее место на его ручке. При этом топор можно предварительно «проградуировать», нанеся на топорще деления, отвечающие данным расстояниям до цели.

А как же все-таки индейцы бросают томагавк? Вполне возможно, что они делают это описанным выше спо-

собом. Но может быть они ухитряются еще и подкрутить топор кистью? Автор этого не знает, поскольку не знаком ни с одним индейцем. Остается лишь надеяться, что такое знакомство все же когда-нибудь состоится, и уж тогда автор не упустит возможности вывести дополнительные секреты этого замечательного искусства.

Метание томагавка — увлекательный вид спорта. Может быть, он найдет у нас своих приверженцев, которые образуют ассоциацию, будут проводить соревнования и — кто знает? — когда-нибудь добьются включения его в Олимпийскую программу?



Задачник „Кванта“

Задачи

M1191 — M1195, Ф1198 — Ф1202

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присыдайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1191» или «Ф1198». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M1191. Пусть A_1, A_2, A_3, \dots — некоторая последовательность точек на плоскости. Начав с некоторой точки T_0 , построим последовательность T_1, T_2, T_3, \dots , где T_n — точка, симметричная T_{n-1} относительно A_n ($n=1, 2, 3, \dots$).

Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять последовательность A_n , чтобы последовательность T_n получалась периодической при любом выборе точки T_0 (т. е. $T_{n+p} = T_n$ для некоторого p при всех n)?

И. Ф. Акулич

M1192. Известно, что все ребра многогранника M равны между собой и касаются некоторого шара.

а) Пусть одна из граней M имеет нечетное число сторон. Докажите, что существует описанный вокруг M шар.

б) Обязательно ли при условиях пункта а) существует вписанный в M шар?

в) Пусть все грани M имеют одинаковое число сторон. Докажите, что существует вписанный в M шар.

г) Обязательно ли при условиях пункта в) существует описанный шар?

В. А. Сендеров

M1193*. Докажите (для любых чисел a, b, c, x, y, z) неравенство

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

В. Кыртоже (Румыния)

M1194. а) Из точки M внутри прямоугольника $ABCD$ площади S проводятся биссектрисы ME, MF, MG, MH треугольников AMB, BMC, CMD, DMA . Докажите, что для площади S_0 четырехугольника $EFGH$ выполнены неравенства

$$\frac{3}{8}S < S_0 \leq \frac{1}{2}S.$$

б) Для каких точек M выполняется равенство $S_0 = S/2$?

А. А. Азимов

M1195. Последовательность x_1, x_2, \dots такова, что для любых натуральных m и n

$$|x_{m+n} - x_m - x_n| < 1/(m+n).$$

Докажите, что эта последовательность — арифметическая прогрессия.

О. Т. Ижболдин

Ф1198. Труба радиусом R заполнена песком до высоты H ($H > 200R$). Плотность песка ρ . Найти минимальную силу давления песка на дно трубы. Известно, что этот пе-

Задачник „Квант“

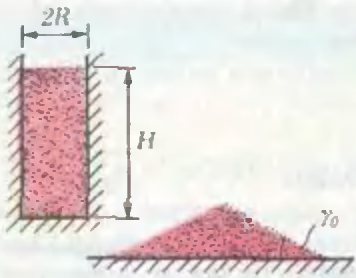


Рис. 1.

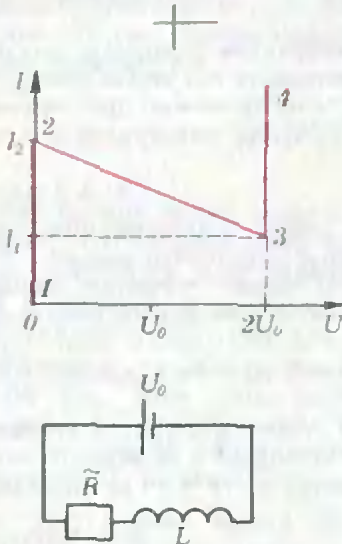


Рис. 2.

сок на горизонтальной поверхности образует горку с предельным углом при основании γ_0 (рис. 1), причем этот угол мал ($\gamma_0 \sim 0,1$ рад). Коэффициент трения покоя песка о материал трубы равен μ .

А. Н. Семенов

Ф1199. Из опыта известно, что скорость волн на поверхности океана, длина которых $\lambda=10$ м, равна $v=4$ м/с. Предположим, что в океане на большой глубине есть граница раздела, выше которой находится менее соленая вода, а ниже — более соленая, так что разность плотностей воды $\Delta\rho=1$ кг/м³. По этой границе могут бежать волны (так называемые внутренние волны). Найти скорость таких волн с длиной $\lambda=10$ м. Амплитуду волн считать малой.

В. В. Геогджиев

Ф1200. На столе стоят два одинаковых стакана, в один из которых налит горячий чай. Температура чая t_0 . Чай требуется охладить до температуры t_k . Это можно сделать двумя способами:

1) сразу перелить чай во второй стакан и ждать, пока он остынет до температуры t_k ;

2) ожидать, пока чай остынет до некоторой температуры t_1 ; такой, что после переливания во второй стакан температура чая сразу окажется равной t_k .

Какой способ быстрее? Известно, что теплоотдача стакана с чаем пропорциональна разности температур стакана и окружающей среды, теплообмен между чаем и стаканом происходит очень быстро. Теплоемкость стакана C_0 , теплоемкость чая C .

К. С. Бедов

Ф1201. Имеется нелинейный электронный прибор \tilde{R} . На рисунке 2 приведен график зависимости тока через прибор от напряжения на нем (на участках 1—2 и 3—4 наклон графика очень велик). Собрали цепь, состоящую из \tilde{R} , катушки с индуктивностью L и батарейки с ЭДС, равной U_0 (прибор включают с «правильной» полярностью, соответствующей графику). Построить график зависимости тока в цепи от времени и найти период колебаний тока.

К. С. Бедов

Ф1202. При электрическом разряде в разреженном неоне (Ne) при комнатной температуре очень небольшая часть атомов неона распадается на электроны и ионы (масса M атома неона в $4 \cdot 10^4$ раз больше массы m электрона). Длина свободного пробега электронов (т. е. среднее расстояние, которое электрон проходит без соударений) $l=0,1$ мм. Газ находится в электрическом поле с напряженностью $E=10$ В/см. Оценить «температуру» электронов, соответствующую их средней кинетической энергии. Постоянная Больцмана $k=1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, заряд электрона $e=-1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Д. А. Кулцов

Задачник „Квант“

Решения задач

M1166 — M1169, Ф1178 — Ф1182

M1166. Докажите неравенство $a^2pq + b^2qr + c^2rp \leq 0$, где a, b, c — длины сторон треугольника, $p + q + r = 0$.

Заменяя при необходимости p, q, r на противоположные, мы можем свести дело к случаю, когда два из чисел p, q, r , например p и q , неположительны, а третье (число r) неотрицательно. По неравенству треугольника $c^2 \geq (a - b)^2$, следовательно,

$$a^2pq + b^2qr + c^2rp \leq a^2pq + b^2qr + (a - b)^2rp = \\ = a^2p(q + r) + b^2r(q + p) - 2abrp = -(ap + br)^2 \leq 0.$$

Я. Ш. Мустафоев

M1167. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, в которых для любого числа i , стоящего не на первом месте, хотя бы одно из чисел $i - 1$ и $i + 1$ находится левее i ?

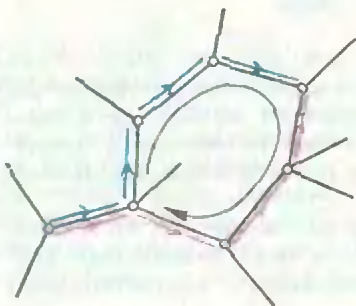
Ответ: 2^{n-1} . Пусть на первом месте стоит число k . Заметим, что если $k > 1$, то числа $k - 1, k - 2, \dots, 1$ стоят в нашей перестановке в порядке убывания (если двигаться слева направо). Действительно, по условию левее числа 1 должно стоять 2, левее 2 — 1 или 3, т. е. 3, левее 3 — 2 или 4, т. е. 4 и т. д. Аналогично, при $k < n$ числа $k + 1, k + 2, \dots, n$ стоят в порядке возрастания, так как левее n должно быть $n - 1$, левее числа $n - 1$ — число $n - 2$ и т. д. Следовательно, любая из рассматриваемых перестановок однозначно задается набором мест, занимаемых числами $1, 2, \dots, k - 1$ (таких мест может вообще не быть, если $k = 1$, т. е. для перестановки $1, 2, \dots, n$). Количество этих наборов равно количеству подмножеств множества из $n - 1$ элементов — всех мест, кроме первого, т. е. 2^{n-1} .

А. В. Анджанс

M1168*. В стране 1989 городов и 4000 дорог (каждая дорога соединяет два города). Докажите, что можно выбрать кольцевой маршрут, проходящий не более чем через 20 городов.

Назовем город «захолустным», если из него идет не более 2 дорог. Сотрем с карты страны любой захолустный город, если таковой имеется, вместе с выходящими из него дорогами. Подчистим таким же образом новую карту и будем продолжать стирание захолустных городов, пока они не исчезнут. Число дорог, которые мы при этом можем стереть, не превосходит $2 \cdot 1989$, что меньше чем 4000; поэтому хотя бы один город останется.

Выберем любой из оставшихся городов. Из него, как и из других оставшихся городов, выходят по меньшей мере 3 дороги. Пойдем по одной из них и каждый раз, приходя в новый город, будем двигаться дальше по одной из дорог, отличных от дороги, по которой мы пришли. Если какие-нибудь 2 маршрута, состоящие не более чем из 10 дорог, закончатся в одном городе, то мы получим искомый кольцевой маршрут не более чем из 20 дорог (см. рисунок). Но иначе и быть не может, потому что число всех таких маршрутов не меньше чем $3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots$



Задачник „Кванта“

...+3 · 2⁹ = 3069, а число городов, т. е. возможных концов этих маршрутов, — не больше 1989.

Это решение можно обобщить на случай n городов и m дорог. В результате «подчистки» карты останутся города, из которых выходит не менее чем по s дорог, где s — наименьшее целое число такое, что $s \geq m/n$. А рассуждение с непересекающимися маршрутами позволяет доказать существование цикла (кольцевого маршрута) из l дорог, где

$$l \leq 2 \left[\log_{s-1} \frac{n(s-2)+2}{s} + 1 \right]$$

(квадратные скобки означают целую часть числа). В частности, при $n=1989$ и $m=4000$ мы получаем $s=3$ и $l \leq 20$.

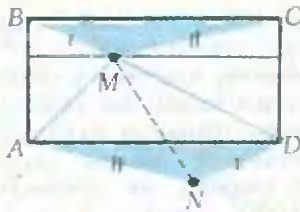
Интересен и другой вопрос: при каком числе дорог m между n городами удастся найти систему дорог, не содержащую циклов длины d ? С помощью довольно сложной оценки среднего числа дорог в такой системе можно показать, что это возможно при

$$m < p \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n^2}{2d} \right), \text{ где } p = n^{\frac{d-2}{d-1}}.$$

А. А. Разборов

M1169. Пусть M — точка, лежащая внутри прямоугольника $ABCD$. S — его площадь. Докажите неравенство

$$S \leq AM \cdot CM + BM \cdot DM.$$



Ясно, что площадь прямоугольника вдвое больше суммы площадей треугольников AMD и BMC . (Для доказательства достаточно провести через M прямую, параллельную AD , и заметить, что площадь каждого из двух образовавшихся прямоугольников вдвое больше площади соответствующего треугольника.) Пристроим к стороне AD треугольник AND , равный CMB так, что $AN=CM$, $DN=BM$ (см. рисунок). Тогда

$$S = 2(S_{AMD} + S_{BMC}) = 2S_{AMDN} = 2S_{AMN} + 2S_{DMN} \leq AM \cdot AN + DN \cdot DM = AM \cdot CM + BM \cdot DM,$$

что и требовалось доказать.

И. Я. Гольдшейд

Ф1178. В пространстве падает лист фанеры. Оказалось, что в некоторый момент времени скорости двух точек листа a и b одинаковы — $\vec{v}_a = \vec{v}_b = \vec{v}$ — и лежат в плоскости листа. Оказалось также, что ско-

Представим сложное движение всех точек листа фанеры в указанный момент времени как сумму двух простых движений — поступательного вместе с точками a и b (а значит, и вместе с прямой ab) и вращательного относительно оси ab .

Рассмотрим точку c . Вектор ее скорости \vec{v}_c складывается из вектора \vec{v} , отвечающего поступательному движению, и вектора $\vec{v}_{вр}$, отвечающего вращательному

Задачник „Кванта“

рость точки листа c , находящейся от точек a и b на расстояниях, равных расстоянию между точками a и b , в два раза больше скорости v . Где в данный момент на листе находятся точки, скорости которых равны $3v$?

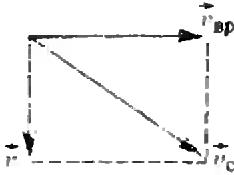


Рис. 1.

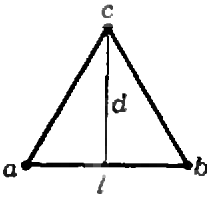


Рис. 2.

движению, причем векторы \vec{v} и $\vec{v}'_{вр}$ — взаимно перпендикулярны (рис. 1):

$$\vec{v}_c = \vec{v} + \vec{v}'_{вр}, \text{ или } v_c^2 = v^2 + v_{вр}^2.$$

Поскольку $v_c = 2v$, получаем

$$v_{вр} = \sqrt{3}v.$$

Найдем теперь расстояние от точки c до прямой ab . Точки a , b и c являются вершинами равностороннего треугольника (рис. 2). Обозначим его сторону, например ab , через l . Тогда интересующее нас расстояние

$$d = l \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Очевидно, что искомые точки листа фанеры, скорость которых по модулю в 3 раза больше v , лежат на двух прямых, параллельных оси ab и находящихся от нее на некотором расстоянии L . Чтобы найти это расстояние, поступим следующим образом. По аналогии с точкой c , выразим скорость искомых точек как сумму перпендикулярных друг другу скоростей v и $v'_{вр}$:

$$(3v)^2 = v^2 + (v'_{вр})^2,$$

откуда получаем

$$v'_{вр} = 2\sqrt{2}v.$$

Теперь сравним между собой скорости $v_{вр}$ и $v'_{вр}$. С одной стороны,

$$\frac{v_{вр}}{v'_{вр}} = \frac{\sqrt{3}v}{2\sqrt{2}v} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

с другой —

$$\frac{v_{вр}}{v'_{вр}} = \frac{d}{L} = \frac{l\sqrt{3}/2}{L}.$$

Таким образом,

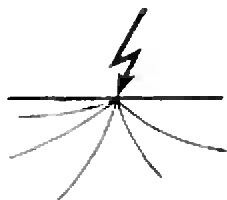
$$\frac{l\sqrt{3}/2}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \text{ и } L = l\sqrt{2}.$$

К. С. Сергеев

Ф1179. Если молния во время грозы попала в воду, то после грозы на озере иногда видят всплывшую мертвую рыбу. Как это объяснить? Ведь вероятность попадания молнии в отдельно взятую рыбу ничтожно мала.

Рыбу убивает, конечно же, не прямое попадание молнии, а электрический ток, который при этом проходит через воду. По мере удаления от места попадания молнии плотность тока спадает. Разность потенциалов, возникающая на туловище рыбы, пропорциональна величине тока и определяется плотностью тока через воду. Погибает та рыба, которая находится в области, где плотность тока превышает критическую величину. Характерный размер этой области составляет от нескольких метров до нескольких десятков метров,

Задачник „Квант“



и в этой опасной зоне вполне может оказаться несколько рыбин.

В некотором смысле сходная ситуация может возникнуть при обрыве провода высокого напряжения и падении его на землю. В этом случае плотность тока, текущего по земле, растет по мере приближения к месту падения провода. Степень опасности для человека характеризуется здесь так называемым «шаговым напряжением» — напряжением, возникающим между ступнями человека при контакте с землей. Ясно, что маленькие шаги приводят к меньшему шаговому напряжению — именно поэтому выходить из опасной зоны, где упал провод, надо небольшими шагами.

А. И. Буздин

Ф1180. Лампочка, подключенная к батарее, горит три часа, после чего батарея полностью разряжается. Сделали копию этой батарейки вдвое больших линейных размеров из тех же материалов. Сколько времени будет гореть та же лампочка, подключенная к такой копии? Внутреннее сопротивление батарейки много меньше сопротивления лампочки.

Поскольку электродвижущая сила химического источника тока определяется только его химическим составом, ЭДС копии будет равна ЭДС батарейки. Пусть эта ЭДС равна \mathcal{E} , сопротивление лампочки равно R и внутреннее сопротивление источника — r . Тогда полная мощность, выделяющаяся в цепи батарейки, равна $P_1 = \mathcal{E}^2 / (R + r_1)$, а в цепи копии — $P_2 = \mathcal{E}^2 / (R + r_2)$. Так как $r_1 \ll R$ и, следовательно, $r_2 \ll R$,

$$P_1 \approx P_2 \approx \frac{\mathcal{E}^2}{R}.$$

Химический источник тока совершает работу, расходуя запасенную в нем энергию химических веществ. По сравнению с батарейкой в копии заключено в $2^3 = 8$ раз больше реагентов, поэтому при такой же мощности она сможет совершить во столько же раз большую работу. Это означает, что лампочка, подключенная к копии, будет гореть 24 часа.

К. С. Бедов

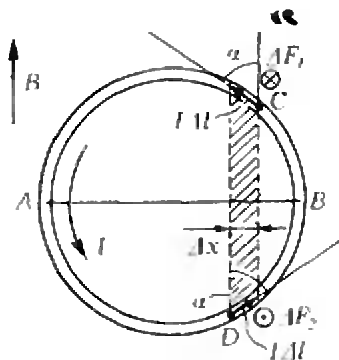
Ф1181. Жесткое тонкое проводящее кольцо лежит на непроводящей горизонтальной поверхности и находится в однородном магнитном поле, линии индукции которого горизонтальны. Масса кольца m , радиус R , величина индукции B . Какой силы ток нужно пропустить по кольцу, чтобы оно начало подниматься?

Рассмотрим кольцо, когда оно еще занимает горизонтальное положение (см. рисунок; на нем изображен вид сверху). Выделим на нем вблизи точек C и D два небольших участка длиной Δl каждый, расположенных симметрично относительно диаметра кольца AB . На первый участок действует направленная вертикально вниз сила

$$\Delta F_1 = BI \Delta l \sin \alpha = BI \Delta x,$$

где Δx — проекция отрезка Δl на направление диаметра AB . На второй участок действует направленная вертикально вверх сила

$$\Delta F_2 = BI \Delta l \sin \alpha = BI \Delta x.$$



Задача „Кванта“

Эти силы, одинаковые по модулю и направленные в противоположные стороны, представляют собой пару сил, которая создает относительно оси AB вращательный момент

$$\Delta M = \Delta F_1 l_{CD} = BI \Delta x l_{CD} = BI \Delta S,$$

где ΔS — площадь заштрихованной на рисунке части контура.

Разобьем все кольцо на аналогичные пары небольших участков, расположенных симметрично по отношению к диаметру AB . Тогда мы получим, что на тонкое проводящее кольцо с током I , находящееся в горизонтальном магнитном поле с индукцией B , будет действовать момент магнитных сил, равный

$$M_{\text{магн}} = BIS = BI\pi R^2.$$

Он вращает кольцо вокруг горизонтальной оси AB .

Когда кольцо будет находиться на грани подъема, препятствовать его вращению будут две механические силы — сила тяжести mg , приложенная в центре кольца и направленная вертикально вниз, и сила нормальной реакции N , приложенная в точке касания кольца и плоскости и направленная вертикально вверх. Поскольку кольцо все еще находится в равновесии,

$$mg - N = 0, \text{ т. е. } N = mg,$$

так что механические силы образуют свою пару сил, которая создает свой вращательный момент

$$M_{\text{мех}} = mgR.$$

Из равновесия кольца следует, что суммарный момент всех сил — в нашем случае это сумма моментов магнитных и механических сил — равен нулю:

$$M_{\text{магн}} - M_{\text{мех}} = 0, \text{ или } BI\pi R^2 - mgR = 0.$$

Отсюда находим искомое значение силы тока:

$$I = \frac{mg}{\pi BR}.$$

С. С. Крогов

Ф1182. При проведении радиолокации Луны, взойшедшей над горизонтом, чтобы обеспечить верную направленность, излучатель высокочастотных радиосигналов был сопряжен с оптическим телескопом. Однако при наличии оптического изображения Луны отсутствовал отраженный радиосигнал. В то же время, когда удавалось получить отраженный ра-

Описанное явление действительно имело место — автор столкнулся с ним при исследовании канала связи, в котором Луна использовалась в качестве пассивного отражателя радиосигналов. При этом антенна, сопряженная с оптическим телескопом, предназначалась не для работы с Луной, а для приема спутникового телевидения.

Когда Луна всходит над горизонтом, очень существенна рефракция света, т. е. искривление световых лучей за счет преломления в атмосфере. (Вспомните, например, как сильно искажаются форма и размеры Луны и Солнца, когда они находятся невысоко над горизонтом.) Для радиоволн (использовался санти-

дросигнал, не было оптического изображения. Объясните это явление.

Загадки «Кванта»

метровый диапазон) рефракция тоже имеет место, однако в иной мере, поскольку поведение коэффициента преломления воздуха для столь различных длин волн существенно различается. Это означает, что свет от Луны идет к нам «по одной кривой», а радиоволны — по другой, в результате чего оптическое изображение и «радиоизображение» не совпадают. Заметим кстати, что если бы антенна была не такой хорошей (с меньшей направленностью), описанного явления могло бы и не быть.

А. Р. Зильберман

О треугольном бильярде

В этой заметке, дополняя статью Г. А. Гальперина и А. М. Стеллина «Периодические движения бильярдного шара» («Квант» № 3, 1989), мы опишем еще некоторые приемы построения периодических траекторий в треугольных бильярдах, в частности, решим задачу M1155. Напомним ее условие.

M1155. Точка движется в треугольнике, отражаясь от его сторон по закону «угол падения равен углу отражения». Периодической называется такая траектория этой точки, которая является замкнутой ломаной и не проходит через вершины треугольника.

а) Докажите, что ни в каком треугольнике с различными сторонами нет четырехзвенной периодической траектории.

Существует ли остроугольный треугольник, имеющий периодическую траекторию б) из 5 звеньев? в) из 7 звеньев?

Утверждение а) этой задачи доказывается от противного. Предположим, что в некотором треугольнике имеется четырехзвенная периодическая траектория. Тогда какие-то две из четырех ее точек излома A, B, C, D находятся на одной стороне треугольника, а две другие на этой стороне не лежат. Пусть, например, на стороне MN треугольника лежат точки B и D (условное расположение точек излома изображено на рисунке 1). Хорошо известно, что на прямой MN существует только одна точка X , для которой $\angle AXM = \angle CXN$ — ее построение показано на рисунке 2. Следовательно, точки B и D совпадают, и наша траектория оказывается двухзвенной, что

противоречит сделанному предположению. Ответ на оба вопроса б) и в) утвердительный; примеры строятся методом выпрямления, о котором говорилось в упомянутой статье.

Периодическую траекторию из 5 звеньев (задача б) построим в остроугольном треугольнике ABC , у которого $\angle B < \pi/4$. Отразив его симметрично относительно стороны BC , продлим сторону BA' полученного треугольника $A'BC$ до пересечения в точке C' с продолжением стороны AC исходного треугольника (рис. 3, а). Легко видеть, что возникающий треугольник ABC' — остроугольный ($\angle ABC' = 2\angle B < \pi/2$, $\angle C' < \angle ECA < \pi/2$), и поэтому в нем существует трехзвенная периодическая траектория, точки излома H_1, H_2, H_3 которой — основания высот треугольника ABC' (это утверждение доказано в упоминав-

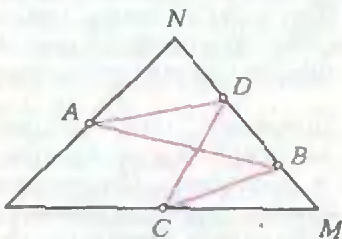


Рис. 1.

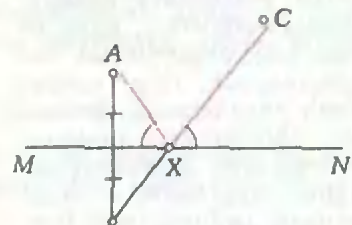
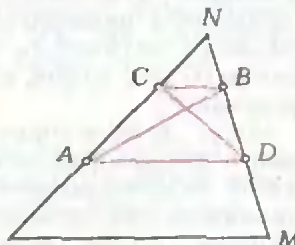
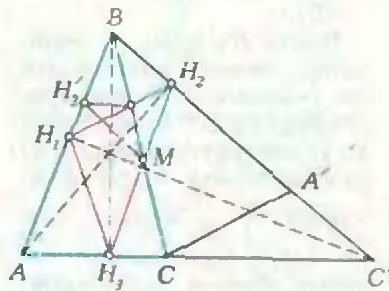


Рис. 2.

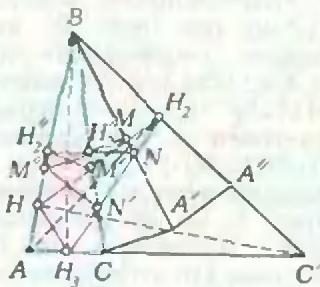
шейся статье). Заметим, что высота BH_3 является одновременно высотой и в треугольнике ABC , поэтому точка H_3 лежит внутри отрезка AC , а не на его продолжении CC' (как могло бы случайно оказаться). Кроме того, $H_2 \in BA'$. Отразив теперь симметрично относительно прямой BC часть трехзвенной траектории $H_1H_2H_3$, лежащую вне треугольника ABC , получаем 5-звенную периодическую траекторию в $\triangle ABC$. Другая 5-звенная периодическая траектория получается тем же способом, если сделать вначале зеркальное отражение треугольника ABC относительно стороны AC .

Аналогично строится остроугольный треугольник ABC , содержащий 7-звенную периодическую траекторию (задача б): если $\angle B < \pi/6$, то надо сделать два зеркальных отражения треугольника ABC вокруг вершины B против часовой стрелки, продлить сторону BA'' у получившейся фигуры $\Phi = BAA'A''$ до пересечения в точке C' с продолжением стороны AC и построить трехзвенную периодическую траекторию $H_1H_2H_3$ в остроугольном треугольнике ABC' , целиком расположенную в фигуре Φ (рис. 3, б) (Принадлежность траектории $H_1H_2H_3$ фигуре Φ легко доказать — оставляем это читателю.) Сворачивая затем фигуру Φ в трехслойную гармошку, т. е. делая последовательно обратные отражения зеркально-симметричных треугольников вместе с расположенными в них частями траектории $H_1H_2H_3$, получим 7-звенную периодическую траекторию в $\triangle ABC$. Другая 7-звенная траектория получится, если делать отра-

Задачник „Квант“



а)



б)

Рис. 3.

жения $\triangle ABC$ вокруг вершины B по часовой стрелке. Заметим, кстати, что в $\triangle ABC$ одновременно имеются и две 5-звенные периодические траектории (почему?).

Вообще, если $\angle B < \pi/2k$ (при этом углы A и C превосходят $\pi/2 - \pi/2k$, поскольку $\triangle ABC$ остроугольный), то вокруг вершины B можно сделать $k-1$ зеркальных отражений треугольника ABC . Затем, получив «коридор» Φ для частично выпрямленной траектории, по указанному выше рецепту можно построить остроугольный треугольник ABC' и трехзвенную (частично выпрямленную) траекторию в нем, которая при сворачивании «коридора» Φ в гармошку даст периодическую траекторию из $3 + 2(k-1) = 2k+1$ звеньев в треугольнике ABC . В этом же треугольнике имеются также и пе-

риодические траектории из $2k-1, 2k-3, \dots, 5$ и 3 звеньев — это следует из того, что описанную процедуру отражений можно проделать $k-2, k-3$ и т. д. раз. Таких траекторий довольно много — ведь кроме «большого» остроугольного треугольника ABC' можно строить и другие остроугольные треугольники с вершиной B , вмещающие в себя «коридор» Φ , а затем чертить в них соответствующие периодические траектории.

Та же идея «сворачивания» 3-звенной траектории в остроугольном треугольнике позволяет строить периодические траектории с нечетным числом звеньев в тупоугольных треугольниках. Пример такого построения приводился в разделе «Устойчивые траектории» упомянутой выше статьи. Еще более хитроумная конструкция нужна для решения задачи 7 из этой статьи, в которой требовалось указать 15-звенную периодическую траекторию в треугольнике ABC , углы $\alpha = \angle BAC$ и $\beta = \angle BCA$ которого удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{1000} < \alpha < \frac{\pi}{8},$$

$$\frac{\pi}{3} < \beta < 3\alpha$$

(очевидно, третий угол этого треугольника — тупой).

Чтобы построить эту траекторию, рассмотрим точку A' , симметричную точке A относительно стороны BC ($A' = S_{BC}(A)$), $B' = S_{A'C}(B)$, $C' = S_{A'B}(C)$, $F = S_{AB}(C)$, $F' = S_{AF}(C)$ (рис. 4). Поскольку $\beta > \frac{\pi}{3}$, точка B' лежит ниже прямой AC : $\angle ACB' = 3\beta > \pi$. Обо-

Задачник „Кванта“

значим через E точку пересечения отрезка $A'B'$ с прямой AC . Так как в треугольнике $A'EC$ угол $A'EC$ равен

$$\begin{aligned} \pi - (\alpha + (\pi - 2\beta)) &= \\ &= 2\beta - \alpha > \frac{2\pi}{3} - \alpha > \\ &> \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{8} > \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

точка C' , как симметричная точке C относительно $A'B'$, лежит ниже прямой AC . Оказывается, что прямая $A'C'$ наклонена вправо, т. е. угол $\angle A'DC$ — острый: $\angle A'DC = \pi - (2\alpha + (\pi - 2\beta)) = 2\beta - \alpha < 4\alpha < \pi/2$. Из условий на α следует, что и угол $F'AC$ — острый.

Докажем, что в остроугольном треугольнике AND , образованном прямыми AD , AF' и DA' , основание высоты H_1 , опущенной на AD , принадлежит отрезку AC . Действительно, как мы уже видели, $\angle A'DA < 4\alpha = \angle F'AD$, поэтому достаточно заметить, что $CD < AC$. (Последнее неравенство выполнено, поскольку в треугольнике $A'CD$

$$\begin{aligned} \angle A'DC &= 2\beta - 2\alpha > \\ &> 2\pi/3 - 2\alpha > \pi/2 - 2\alpha > \\ &> 4\alpha - 2\alpha = 2\alpha = \angle CA'D, \end{aligned}$$

следовательно, $AC = A'C > CD$.)

Пусть H_2 и H_3 — основания высот, опущенных на боковые стороны треугольника AND . Каждый из углов треугольника AND при вершинах A и D отличается от $\frac{\pi}{2}$ меньше чем

на 0,004 (проверьте!), поэтому отрезок H_2H_3 пройдет ниже точки B . Фигуру Φ , составленную из 7 треугольников, равных $\triangle ABC$ (см. рис. 4), наложим «гармошкой» на $\triangle ABC$ (как в п. 6) задачи M1155). При этом периодическая траектория $H_1H_2H_3$ в Φ перейдет в периодическую траекторию l в треугольнике ABC , состоящую из 15 звеньев, что и требовалось.

Заметим, что построенная траектория l устойчива: это означает, что при небольшой деформации треугольника ABC она переходит в близкую к l 15-звенную периодическую траекторию.

Описанную конструкцию можно обобщить. Начнем с вспомогательного

треугольника Δ_0 с основанием AC и острыми углами α, β при основании, для которого построена цепочка треугольников

$$\Delta_{-2l}, \dots, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{2l}$$

пересекающихся с горизонтальной прямой AC и верхней полуплоскостью, причем соседние треугольники цепочки имеют общую сторону и симметричны относительно нее. Поскольку результат применения двух последовательных отражений относительно непараллельных осей есть поворот, то треугольник Δ_{-2l} повернут относительно Δ_0 на некоторый угол $n_1\alpha + n_2\beta + n_3\pi$; аналогично, треугольник Δ_{2l} повернут относительно треугольника Δ_0 на угол $m_1\alpha + m_2\beta + m_3\pi$. Предположим, что пары целых чисел (n_1, n_2) и (m_1, m_2) непропорциональны, треугольники Δ_{-2l} и Δ_{2l} имеют стороны, перпендикулярные прямой AC и на этой прямой нет других вершин треугольников цепочки, кроме A и C . Тогда оказывается, что сколь угодно малым изменением углов α и β можно получить треугольники ABC , имеющие устойчивые периодические траектории. В частности, если Δ_0 — прямоугольный треугольник с $\alpha = \pi/8, \beta = 3\pi/8$, то получится треугольники из рассмотренного примера, а при $\alpha = \pi/2k, \beta = \pi/2l$ — треугольники из статьи в «Кванте» № 3 (см. рис. 12 в этой статье).

Г. А. Гальперин, А. М. Степин

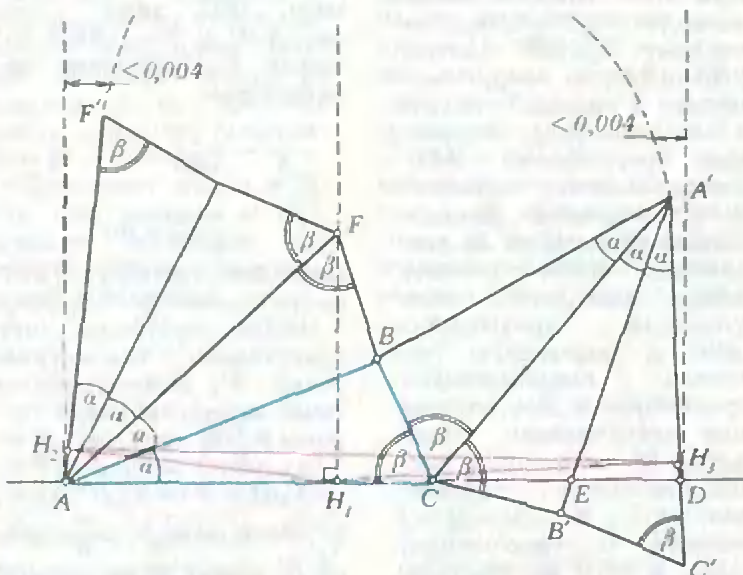


Рис. 4.

Нам пишут

Еще раз о сплетающихся прямых

Задача M1085 (условие см. в «Кванте» № 1, а решение — в «Кванте» № 5 за 1988 год) вызвала интерес у многих наших читателей. Один из откликов на нее мы опубликовали в «Кванте» № 6 за этот год. Напомним, что в задаче идет речь о том, как по проекции набора прямых на плоскость определить, возможно ли соответствующее их расположение в пространстве или нет.

Ученик 10 класса школы-интерната № 18 г. Москвы А. Скопенков обнаружил последовательность сплетений L_n , обладающих следующим интересным свойством: каждое из сплетений не может быть реализовано в пространстве, однако при удалении из сплетения одной любой прямой оно становится реализуемым. n -е сплетение L_n ($n=2, 3, 4, \dots$) состоит из $(2n+1)$ прямой; закон его построения ясен из рисунков 1—3, на которых изображены сплетения, отвечающие $n=2, 3$ и 4. Обратите внимание на то, что пересечения каждой из прямых сплетения L_n с остальными устроены одинаково: сначала прямая проходит $(n-1)$ раз под скрещивающимися с ней прямыми, затем один раз над ними, затем — снова под, а потом $(n-1)$ раз над ними (рис. 4).

Доказательство невозможности сплетения L_n можно получить в духе решения п. а) задачи M1085. Давайте посмотрим, что

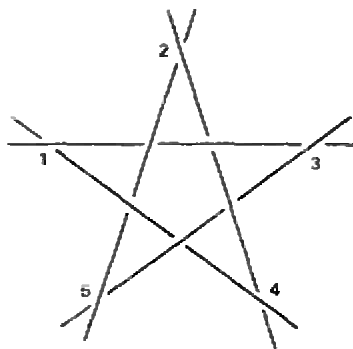


Рис. 1.

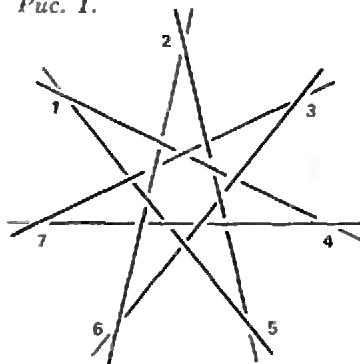


Рис. 2.

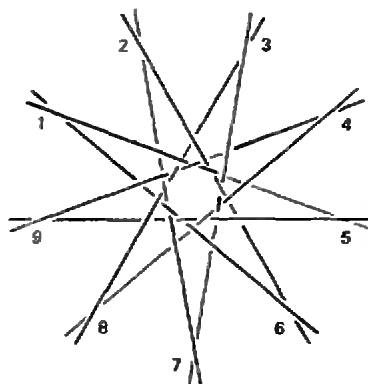


Рис. 3.

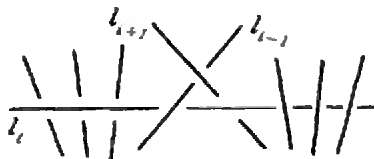


Рис. 4.



Рис. 5.

будет, если удалить из L_n одну прямую, например прямую l_i на рисунке 4.

Предположим, что сплетение L'_n , образованное остальными прямыми, невозможно реализовать в пространстве. После удаления l_i прямые l_{i-1} и l_{i+1} можно повернуть в вертикальной плоскости, не меняя их горизонтальные проекции, сделать вертикальными и «вытащить» из сплетения. Тогда оставшееся сплетение будет по-прежнему нереализуемым. Но теперь можно точно так же поворотом в вертикальной плоскости удалить прямые l_{i-2} и l_{i+2} , сохраняя нереализуемость оставшегося сплетения, и так далее. В результате останется сплетение, состоящее всего из двух прямых, которое, очевидно, реализуется в пространстве. Это противоречит предположению о нереализуемости L'_n .

Процесс распада сплетения L_n после удаления одной прямой напоминает распадение сплетения колец Борромео после удаления любого из них — рисунок 5, взятый из статьи А. Т. Калининна (см. «Квант», 1981, № 9).

"Квант" для младших школьников

Задачи

1. Три клоуна Бим, Бом и Бам вышли на арену соответственно в красной, зеленой и синей рубашках. Их туфли были тех же трех цветов. У Бима цвета рубашки и туфель совпадали. У Бомы ни туфли, ни рубашка не были красными. Бам был в зеленых туфлях, а в рубашке другого цвета. Как были одеты клоуны?

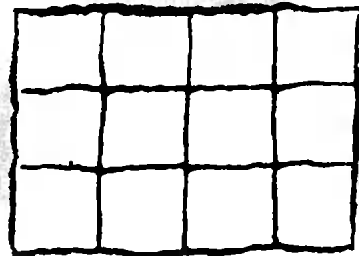
2. Найдите два таких простых числа, сумма и разность которых также являются простыми числами.

3. Заполните прямоугольник на рисунке цифрами так, чтобы в каждом горизонтальном ряду стояло четырехзначное число, делящееся на 92, а в каждом вертикальном ряду — трехзначное число, также делящееся на 92.

4. В этой простой головоломке на рисунке девяти различным буквам соответствуют девять различных цифр. Какие?

5. На сколько частей разбивают пространство плоскости, на которых лежат грани трехгранной пирамиды?

Эти задачи нам предложили В. Д. Вьюн, Н. К. Антонович, А. В. Швецов, Л. П. Мочалов и А. П. Савин.



В 1990 году издательство «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» выпустит книгу «Солнечное вещество». Мы очень советуем нашим читателям не пропустить ее. В книгу вошли три научных рассказа замечательного советского физика Матвея Петровича Бронштейна: «Изобретатели радиотелеграфа», «Солнечное вещество» и «Лучи «икс»».

С «Изобретателями радиотелеграфа» наши читатели уже могли познакомиться — в февральском номере «Кванта» за 1987 год были помещены главы из этой книги. А сейчас мы предлагаем вам отрывок из книги «Лучи «икс»». Публикацию подготовил Г. Е. Горелик.

ЛУЧИ «ИКС»

(Главы из книги)

М. П. БРОНШТЕЙН

Первая весть

В январе 1896 года весь земной шар облетело странное известие.

Какому-то немецкому ученому удалось открыть неведомые дотоле лучи, обладающие загадочными свойствами.

Первое загадочное свойство лучей — они невидимы. Сколько бы вы ни напрягали зрение, разглядеть их невозможно. Они никак не окрашены — цвета у них нет.

Второе удивительное свойство — они проходят сквозь плотный картон, сквозь алюминий, сквозь толстые доски, сквозь оловянную бумагу. Непрозрачное для них прозрачно. От них не скроешься за деревянной стеной, за дверью. Деревянная дверь пропускает их, как стеклянная.

И третье свойство лучей — есть вещества, на которые они производят необычайное действие. Кристаллы платиноцианистого бария, виллемита, сернистого цинка внезапно вспыхивают ярким светом, чуть только на них упадут невидимые лучи. Под действием невидимых лучей чернеет фотографическая пластинка. И самый воздух чудесно меняется, когда его пронизывают невидимые лучи: он приобретает новое свойство — способность пропускать электрический ток.

Газеты, напечатавшие известие о лучах, только вскользь упомянули имя человека, который совершил необыкновенное открытие: Вильгельм Конрад Рентген.

Впрочем, это имя мало что говорило читающей публике: немногие знали, кто такой этот Рентген. Да не все и поверили газетному известию — лучи, да еще и невидимые, да еще и сквозь стенки проходят — мало ли что пишут в газетах!

Осторожный ученый

Вильгельм Конрад Рентген был профессором физики в баварском городишке Вюрцбурге.

Застенчивый профессор, тихим голосом читающий свои лекции с кафедр старинного университета, был мало известен даже в своем собственном городе. Зато его хорошо знали ученые всего мира.

Во всех двадцати пяти германских университетах не было ученого, который работал бы добросовестнее, тщательнее, осторожнее, чем физик Рентген. Множество явлений изучил он в своей лаборатории, много произвел точнейших измерений. Но далеко не обо всех своих работах, не обо всех своих опытах и открытиях сообщал Рентген в научные журналы. У него было строгое правило: он печатал статью о проделанных опытах только тогда, когда был окончательно убежден в их верности и точности. Если оставалось хоть малейшее сомнение в правильности опыта, осторожный ученый ничего о нем не писал.

Рентген остерегался скороспелых гипотез, поспешных догадок, фанта-

стических предположений. Он доверял только опыту. «Опыт — высший судья, — говорил Рентген. — Только опыт решает судьбу гипотезы, только опыт дает нам возможность узнать, следует ли сохранить гипотезу или нужно ее отвергнуть. В этом-то и заключается главная сила физики: исследователь природы может быть совершенно уверен в себе, потому что у него всегда есть возможность проверить на опыте все свои предположения, все свои догадки. И если опыт не подтвердит догадку, значит, она неверна, как бы ни была она заманчива и остроумна».

В 1895 году Вильгельм Конрад Рентген принялся изучать, как течет электрический ток сквозь разреженные газы.

Ученые исследовали это явление и до Рентгена. Немецкие физики Гольдштейн и Гитторф задолго до Рентгена пропускали электрический ток сквозь воздух, разреженный сильным воздушным насосом. Они построили специальные приборы, чтобы изучать этот ток, проделали первые опыты. Но многое еще оставалось неясным. Знаменитый физик Генрих Герц — тот самый Герц, который открыл радиоволны, — утверждал, что электрический ток, текущий сквозь разреженный газ, это тоже волны — колебания, похожие на колебания звука. Другую догадку высказал англичанин Крукс. Он говорил, что электрический ток в разреженном газе — это вовсе не волны, а потоки мельчайших, невидимых глазу частиц — электронов. С чудовищной скоростью — десятки тысяч километров в секунду! — летят они сквозь разреженный газ.

Мнения ученых разделились. Одни считали, что прав Генрих Герц, другие — что прав Уильям Крукс. И только недоверчивый Рентген не участвовал в этом споре. Он не был ни на стороне Герца, ни на стороне Крукса.

Он упорно воздерживался от каких бы то ни было предположений и догадок: он утверждал, что для них еще не наступило время и что нужно проделать как можно больше опытов,

накопить как можно больше достоверных фактов.

В 1895 году, в последних числах октября, Рентген собрал у себя в лаборатории все нужные материалы и приборы и приступил к опытам.

Начало опытов

Рентген взял стеклянный шар с двумя впаянными внутрь металлическими пластинками. К обеим пластинкам было приделано по проволочке. Концы проволочек торчали наружу сквозь стеклянную стенку шара.

Затем Рентген взял сильный воздушный насос и принялся выкачивать из шара воздух. Воздух уходил прочь, и его оставалось все меньше и меньше. Когда удалось выкачать воздуха столько, что в шаре осталась одна лишь миллионная часть его, — Рентген занаял шар.

Прибор для пропускания электрического тока сквозь разреженный газ был готов.

Теперь стоит только соединить концы проволочек, выходящих из шара, с полюсами машины, подающей электрическое напряжение, — и ток потечет внутрь шара сквозь разреженный воздух от одной металлической пластинки до другой.

Машина, дающая высокое электрическое напряжение, у Рентгена была. Это была индукционная катушка — прибор, изобретенный в середине XIX столетия парижским механиком Румкорфом. С виду этот прибор похож на катушку с нитками, но только он гораздо больше обыкновенной катушки, и вместо ниток на него намотана проволока: десятки тысяч витков тончайшего электрического провода, покрытого надежной изоляцией.

Катушка Румкорфа внутри не пустая. В нее вставлена другая катушка — несколько сот витков проволоки и уже не тонкой, а толстой. Две обмотки — наружная и внутренняя — предназначаются для того, чтобы повышать напряжение электрического тока. Если через внутреннюю обмотку пропустить переменный, прерывистый электрический ток, то и по на-

ружной обмотке потечет прерывистый ток, но напряжение его будет в десятки, в сотни раз больше! Катушка Румкорфа — это преобразователь электрического тока: токи низкого напряжения она преобразует, превращает в токи высокого напряжения. С помощью катушки Румкорфа можно создавать мощные электрические разряды, электрические искры.

Индукционная катушка, которая была у Рентгена, давала электрические искры длиной в 10—15 сантиметров.

Ее то он и соединил с концами проволочек своего стеклянного шара. Понесся сильный и частый треск — это в катушке Румкорфа задрожал молоточек, размыкающий и замыкающий прерывистый ток во внутренней обмотке. И сейчас же по всем виткам наружной обмотки пробежал другой ток — ток высокого напряжения. Он устремился по проволочкам в стеклянный шар и проложил себе дорогу сквозь разреженный воздух. Он тек от одной металлической пластинки до другой, и вот на стеклянных стенках шара вспыхнуло слабое зеленоватое сияние.

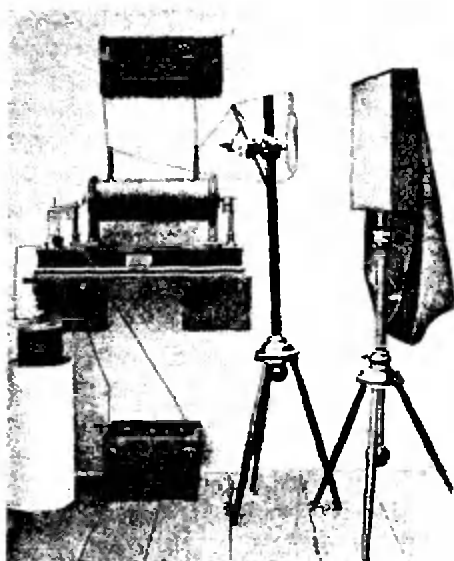
Так начались опыты Рентгена.

Неожиданная находка

А через несколько дней, 8 ноября 1895 года, Рентген обнаружил необычайное явление.

Случилось это так.

Был вечер. Ассистенты, целый день трудившиеся над своими измерениями, усталые разошлись по домам. Ушел и старик-служитель. Рентген остался в лаборатории один. Он собирался работать до поздней ночи. Трещал молоточек индукционной катушки, зеленовато-желтый свет струился от стенок стеклянного баллона. Это был уже не первый баллон, не тот стеклянный шар, с которым Рентген начал свои опыты. В течение последней недели он изготовил несколько стеклянных баллонов, и все они были разные. Одни имели форму шара, другие — форму груши, третьи были узкими и длинными стеклянными трубками. В одних баллонах был разре-



Индукционная катушка Румкорфа с аппаратом для просвечивания.

женный воздух, в других — разреженный азот, водород, кислород. Но в каждый баллон — и в шар, и в трубку, и в грушу, и в баллон с кислородом, и в баллон с азотом — были одинаково впаяны металлические пластинки, и из всех баллонов торчали наружу тонкие проволочки.

В этот вечер Рентген занимался тем, что по очереди придвигал свои баллоны к индукционной катушке и пропускал сквозь них электрический ток. Он хотел выяснить, как отражается на электрическом токе степень разреженности газа, форма баллона, форма и расположение металлических пластинок.

Результаты своих наблюдений Рентген аккуратно вносил в лабораторный дневник.

Часы пробили одиннадцать. Рентгена клонило ко сну. Он накрыл свой последний баллон плотным картонным футляром. Оставалось только разомкнуть ток в индукционной катушке, погасить свет и уйти. Но по рассеянности Рентген позабыл выключить катушку. Он погасил свет и уже направился было к дверям, когда треск молоточка вывел его из задумчивости. Рентген вернулся, и вот тут-то его глазам представилось удивительное зрелище.

На столе — не на том столе, где стоял стеклянный баллон, а на соседнем — мерцало странное сияние. Тусклым зеленовато-желтым огнем горел какой-то маленький предмет. Рентген в темноте направился к столу, чтобы посмотреть, в чем там дело.

Оказалось, это светится кусочек бумаги. Бумага была не простая: она была покрыта с одной стороны толстым слоем платиноцианистого бария. Это вещество имеет обыкновение светиться, если на него упадут солнечные лучи. Но ведь на дворе ночь, в комнате полная тьма. Почему же светится платиноцианистый барий?

В полной тьме Рентген нащупал рубильник и разомкнул ток.

Бумага, которую он держал в руке, сейчас же перестала светиться.

Он снова включил ток. Бумага засверкала снова.

Снова выключил. И бумага опять погасла.

Рентген уже и не думал уходить из лаборатории.

Ночь без сна

Рентген решил исследовать непонятное явление.

Что заставляет бумагу светиться? Индукционная ли катушка, по обмотке которой бежит электрический ток, или стеклянный баллон, в котором ток проходит сквозь разреженный газ?

Для проверки Рентген решил убрать баллон и соединить катушку с чем-нибудь другим, ну хотя бы с двумя металлическими шариками, которыми пользуются в лаборатории для изучения электрических искр.

Так он и сделал. Опять затрещал молоточек, и снова побежал по катушке ток, но теперь уж он не уходил в баллон с разреженным газом, а проскакивал электрической искрой между металлическими шариками.

Рентген посмотрел на бумагу с платиноцианистым барием. Бумага как бумага. Никакого сияния.

Тогда он снова соединил катушку с баллоном, и бумага вспыхнула снова.

Сомнений больше не оставалось. Индукционная катушка тут ни при чем. Она одна не может заставить бумагу светиться. Все дело в баллоне: когда сквозь баллон с разреженным воздухом проходит электрический ток, тогда-то и светится платиноцианистый барий.

Значит, под действием тока стеклянный баллон с разреженным газом приобретает какую-то особую, таинственную силу.

Что же это за невидимая сила, проходящая не только сквозь стеклянные стенки баллона, но и сквозь картонный футляр, прикрывающий этот баллон?

Всю ночь с 8-го на 9-е ноября 1895 года Рентген провел без сна у себя в лаборатории.

Лучи икс

Рентген решил назвать неизвестное, вновь открытое им явление «лучами икс». Икс — это латинская буква. В алгебре этой буквой принято обозначать неизвестные величины.

И в самом деле, обнаруженная Рентгеном «сила» была совершенно неизвестной величиной.

Много ли знал о ней сам Рентген? Всего только три вещи.

Он знал, что для того, чтобы вызвать ее, нужно сквозь баллон с разреженным газом пропустить электрический ток.

Еще он знал, что она заставляет платиноцианистый барий светиться.

И еще он знал, что она свободно проходит сквозь картон: ведь платиноцианистый барий был отделен от баллона картонным футляром, и все-таки лучи икс, испускаемые баллоном, достигли бумаги.

Вот и все, что Рентген знал о лучах икс.

И он решил продолжать свои опыты до тех пор, пока неизвестная сила не превратится в известную.

Новые опыты

Настушили беспокойные для Рентгена дни. Он все еще не был уверен в том,

что его наблюдения верны. А что если все это ему только показалось? Что если он поддавался оптическому обману, самовнушению? Действительно ли лучи икс существуют?

Долгое время Рентген, по своему обыкновению, никому не рассказывал о неожиданном открытии. Его близкий друг, профессор зоологии Бовери, впоследствии вспомнил, что в ноябре 1895 года Рентген как-то вскользь сказал ему: «Кажется, я сделал интересное открытие, но нужно еще проверить правильность моих наблюдений». А своим ассистентам Рентген не сказал даже и этого.

Он запирался один в своей лаборатории и с самого раннего утра до позднего вечера ставил опыт за опытом. Иногда он и ночи проводил за работой, только изредка урывая часок-другой для сна. После достопамятной ночи с 8-го на 9-е ноября у него в лаборатории появилась складная походная койка.

Окна в лаборатории он завесил тяжелыми темными шторами, опасаясь, что дневной свет может помешать ему увидеть слабое зелено-желтое свечение платиноцианистого бария.

Рентген изучал действие загадочных лучей.



Рентгеновский снимок руки с кольцом на среднем пальце.

Он поставил между светящейся бумагой и баллоном толстую книгу, в которой было больше тысячи страниц.

Бумажка продолжала светиться. Значит, икс-лучи проникают не только через тонкий картон, но и через толстый слой бумаги, через книгу в тысячу страниц.

Рентген заменил книгу колодой карт. Икс-лучи победили и колоду. Тогда Рентген поставил между бумажкой и баллоном две колоды сразу. Лучи взяли и это препятствие: бумажка по-прежнему светилась, хотя и не так сильно, как раньше.

Множество веществ испытал Рентген. Он испробовал еловую доску толщиной в полтора дюйма, эбонитовую пластинку, лист оловянной бумаги.

Икс-лучи прошли и через доску, и через эбонит, и через оловянную бумагу.

И только тридцать листов этой оловянной бумаги, сложенных вместе, оказались для икс-лучей труднопреодолимой преградой: свечение платиноцианистого бария ослабело, померкло.

Значит, заключил Рентген, икс-лучи поглощаются оловом. Только ничтожная часть их прошла олово насквозь и достигла платиноцианистого бария, а все остальные оказались поглощенными.

Рентген испытал и другие металлы: медь, серебро, золото, свинец. Оказалось, что через тонкие слои металлов икс-лучи проходят свободно, а через толстые слои проникает только их ничтожная часть.

Вывод был ясен: все вещества проницаемы для икс-лучей, но только в различной степени. Бумага, дерево, эбонит прозрачны для них, как для солнечных лучей — стекло. А толстые слои металлов почти непроницаемы.

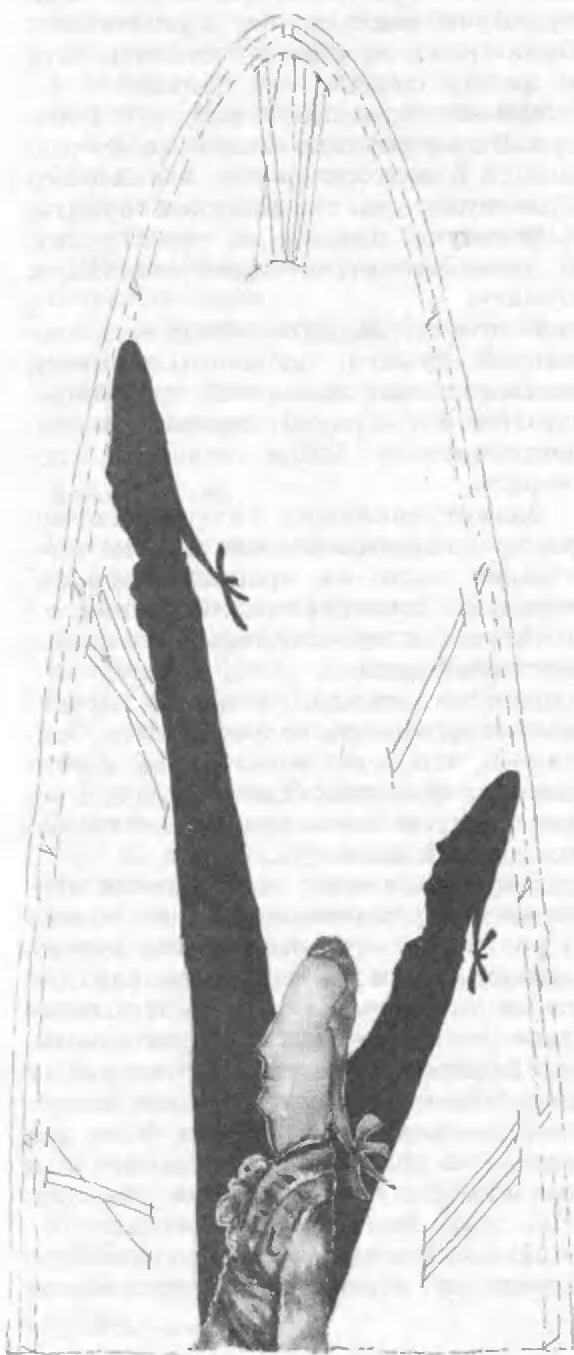
Убедившись в этом, Рентген решил усложнить свой опыт и взять какой-нибудь предмет, в котором были два вещества сразу: и проницаемое для икс-лучей и непроницаемое для них. Ну, хотя бы дерево и металл.

Для опыта он выбрал деревянную шкатулку, в которой хранился целый

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп "Кванта"

Театр теней



Какова форма тени, отбрасываемой на плоский экран круглым обручем, который освещается точечным источником света? Это зависит от взаимного расположения обруча, экрана и источника света. Напри-

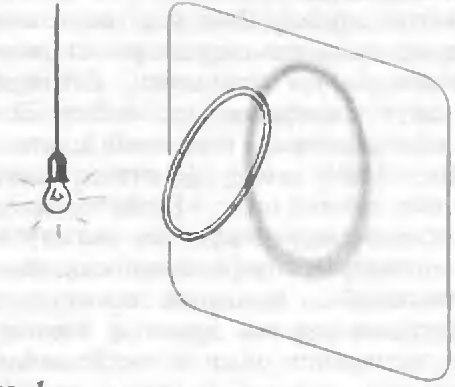


Рис. 1

мер, если весь обруч расположен ближе к экрану, чем источник света, то тень будет эллиптической (рисунок 1).

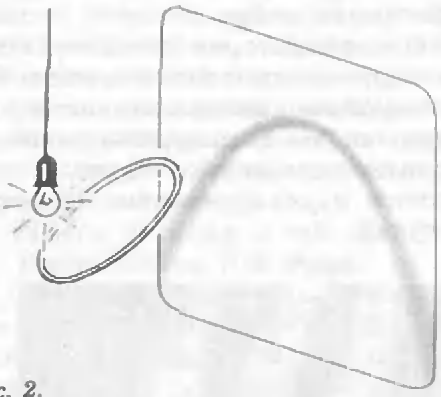


Рис. 2.

часть обруча — ближе, то тенью служит парабола (рисунок 2). Если же одна часть обруча находится бли-

же к экрану, чем источник света, а другая часть — дальше (рисунок 3), то тень будет гиперболической. (Ра-

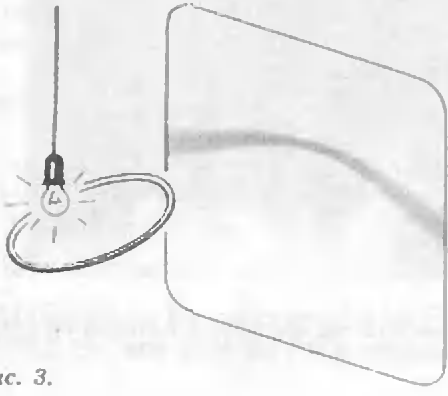


Рис. 3.

зумеется, она уместится на одной из двух ветвей гиперболы. Подумайте, куда же девалась другая ветвь?

Может случиться и так, что тенью обруча будет прямая или отрезок прямой: это произойдет в том слу-

Тени же пересекающихся прямых могут стать параллельными; для этого нужно, чтобы точка пересече-

ния данных прямых находилась от экрана на таком же расстоянии, как источник света (рисунок 6).

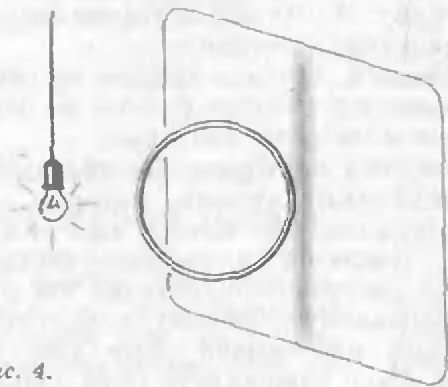


Рис. 4.



Рис. 7

чае, если источник света лежит в плоскости обруча (рисунок 4). А какую тень отбра-

сывает прямая? Разумеется, тень тоже будет прямой. Только параллельные прямые отбрасывают, во-

На рисунке 7 — тень решетки, сделанной из десяти прутьев — по пять прутьев каждого направления.

А на рисунке 8 — тени каркасов икосаэдра (справа) и додекаэдра (слева), освещенных из точки.

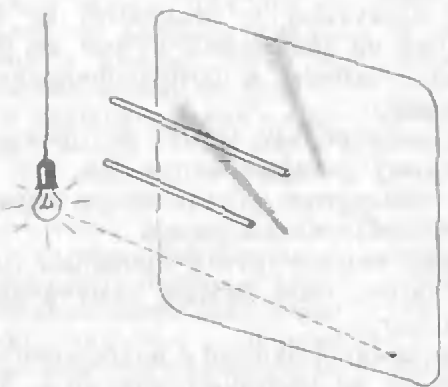


Рис. 5



Рис. 8.

обще говоря, пересекающиеся тени (чтобы построить точку пересечения, нужно провести из источника

света прямую, параллельную нашим прямым, до ее пересечения с экраном — рисунок 5).

расположенной вне многогранника вблизи от центра одной из граней.

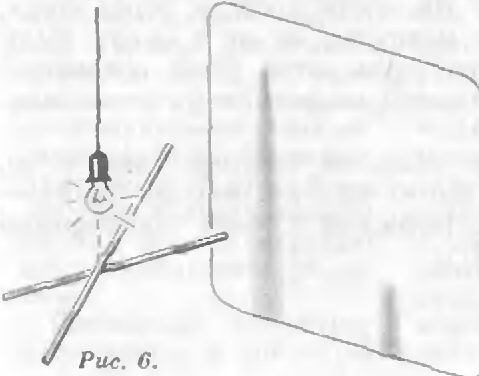


Рис. 6.



набор латунных гирек. Рентген поставил шкатулку на пути икс-лучей.

Справятся ли лучи и с этой преградой?

Справились. Зелено-желтый свет немедленно вспыхнул. Икс-лучи прошли через шкатулку так же, как они только что прошли через картон и еловую доску.

Но в зелено-желтой полосе светящегося барьера Рентген разглядел какие-то темные пятна. Вглядевшись повнимательнее, он отчетливо разобрал очертания пятен.

Пятна имели форму латунных гирек. Это была тень латунных гирек, спрятанных в деревянной шкатулке.

Последняя проверка

Опыт за опытом проделывал Рентген. И каждый новый опыт открывал ему новые свойства загадочных лучей.

Собственными глазами видел он их удивительное действие, но осторожный исследователь привык не верить своим глазам.

Наконец ему пришло в голову проделать опыт с фотографической пластинкой. «Человеческий глаз может ошибаться, — думал Рентген, — но если фотографическая пластинка обнаружит невидимые лучи, то, значит,

они существуют и на самом деле. Фотографическую пластинку не обманешь.»

Задумано — сделано. На пути икс-лучей поставил он фотографическую пластинку. И что же? В эту же секунду пластинка почернела.

Оказалось, что икс-лучи — не игра воображения. Рентген больше не сомневался в их существовании.

И он стал повторять все те опыты с невидимыми лучами, которые он делал раньше. Но только вместо бумаги, покрытой платиноцианистым барием, он теперь подставлял икс-лучам деревянную кассету с фотографической пластинкой. Ему уже не нужно было завешивать окна непроницаемыми шторами. Ведь солнечные лучи не могут пройти через деревянную кассету. А для невидимых икс-лучей деревянная кассета — не препятствие.

Рентген снова пропустил икс-лучи через шкатулку с гирьками, но на этот раз он подставил лучам не бумажку с барием, а фотографическую пластинку.

Через несколько минут он проявил пластинку и отфиксировал ее.

На пластинке отпечаталось отчетливое изображение гирек.

После этого Рентген проделал еще один опыт, свой самый замечательный опыт.

Стеклянный баллон с разреженным воздухом он поставил под стол. На стол он положил руку, а на руку — фотографическую пластинку в деревянной кассете. Потом включил ток.

Когда фотографическая пластинка была проявлена, на ней оказалось отчетливое, резкое изображение костей руки. Икс-лучи прошли через кожу, через мускулы, но не в силах были пройти через кости. Тень костей запечатлелась на фотографической пластинке.

Так Рентгену удалось сделать то, чего никто еще до него не делал, — сфотографировать свои собственные кости.



Рентгеновский снимок игрушечного артиллериста на лошади, сделанных из металла и находящихся внутри закрытой деревянной коробки.

Р-знатии раксна



Космическая парусная регата

В декабре 1988 года начался международный конкурс на разработку проектов космических аппаратов (КА) с солнечным парусом. Конкурс объявлен комиссией, образованной конгрессом США в связи с 500-летием открытия Америки. Условия конкурса предусматривают запуск трех КА — один от Америки (Северной и Южной), один от Европы и один от Азии — по маршруту Земля — Луна — Марс.

Движение под солнечным парусом связано с давлением солнечного света на зеркальную поверхность такого паруса, представляющего собой тонкую металлическую пленку (обычно из алюминия), нанесенную для прочности на полимерную основу.

Для осуществления межпланетного перелета прежде всего нужно вывести КА на орбиту искусственного спутника Земли и развернуть парус (предварительно свернутый в рулон). После этого начнется разгон по межпланетной траектории, представляющей собой логарифмическую спираль с центром на Солнце. В результате аппарат должен выйти на окололунную или околомарсианскую орбиту.

Проведение конкурса планируется в три тура,

завершающихся 12 октября соответственно 1989, 1990 и 1991 гг. (В каждом туре возможно частичное финансирование работ за счет организаторов юбилея в США.) Запуск разработанных КА предполагается провести в день 500-летнего юбилея открытия Америки — 12 октября 1992 года.

Масса аппарата, запускаемого в память 500-летия открытия Америки, ограничена 500 килограммами. Точнее, конструкторы могут использовать по своему усмотрению лишь 499 кг, а 1 кг соответствует так называемому обязательному грузу, который включает в себя свидетельства выдающихся памятников истории и культуры каждого континента. Этот груз предполагается сбросить на поверхность Луны или Марса вместе с почетным списком из ста имен деятелей культуры, науки и экономики, прославивших континент. Для европейских участников конкурса в обязательный груз входят копии Великой хартии вольностей, экземпляры Ветхого и Нового заветов, партитура 9-й симфонии Бетховена и Всеобщая декларация прав человека. Участники конкурса из Америки должны отправить в космос религиозные памятники инков, портрет Симона Боливара, элемент машинной памяти, копии Конституции США и Декларации независимости. Для конкурсантов из Азии предусмотрены копии Легенды о Гильгамеше, первые математические тексты, употребляющие символ «0» и десятичную систему счисления.

Основной целью задуманного эксперимента является отработка техники космического полета под солнечным парусом. В связи с этим потребуются решить ряд необычных задач космической техники (можно ли использовать центробежные силы инерции, возникающие при вращении спутника, чтобы развернуть парус, свернутый в рулон во время вывода спутника на орбиту?), физики (что делать с большим электрическим зарядом, который будет накапливаться на парусе площадью в несколько гектаров при движении в космической плазме?), навигации (как контролировать движение по спиральной траектории?).

В объявленном конкурсе могут принять участие любые неправительственные объединения ученых и инженеров. Среди участников есть группы из крупных фирм («Вестингауз», «Аэро-Италия») и известных университетов Европы и Америки. От нашей страны участвуют коллективы от промышленности и Академии наук СССР. Оргкомитет конкурса специально предусматривает участие в каждом коллективе не менее пяти студентов.

По обычным темпам выполнения космических проектов три года, оставшиеся до старта, — очень небольшой срок. В таких условиях успех может быть достигнут лишь при объединении усилий групп авторов из разных стран. Такая кооперация, наряду с высоким уровнем зрелости и состязательности гонки космических парусников, составляет характерную черту этой первой межпланетной парусной регаты.

А. Б. Шварцбург



Школа «Кванте»

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Симметрия и физические свойства кристаллов» предназначена девятиклассникам, заметки «Дифракция света на круглом отверстии» — десятиклассникам. Впрочем, как нам кажется, первая заметка будет полезной также и восьмиклассникам, и десятиклассникам.

Симметрия и физические свойства кристаллов

Когда-то гармония мира ассоциировалась у человечества с симметрией. Древние греки, больше всего в жизни ценившие прекрасное, придавали ей исключительное значение. Считаая красоту критерием истины, они ощущали в симметрии некий скрытый смысл, воспринимали ее как начало,

определяющее свойства мира. Впоследствии, однако, красота утратила свои позиции, стала достоянием лишь художников и поэтов. Был утерян и интерес к симметрии.

Но пришли новые времена. Сформировалась новая физика, и стало ясно, что греки были абсолютно правы. Свойства мира действительно в большой степени определяются его симметрией. (Нам уже приходилось писать о связи симметрии пространства и времени с законами сохранения импульса и энергии. См., например, «Квант», 1988, № 5, с. 45.)

Но что же это такое — симметрия? Поясним на простом примере. Скажем, вы держите в руках какое-то тело и вертите его и так, и эдак. И вдруг замечаете, что при каком-то повороте тело совмещается само с собой. Вот тогда и говорят, что тело симметрично относительно этого поворота. Сам поворот называют операцией или преобразованием симметрии, а

ось, вокруг которой совершается такой поворот, — осью симметрии.

Возьмем, например, кубик. Ясно, что если повернуть его на 90° вокруг любой из трех осей, проходящих через центры противоположных граней, то кубик совместится сам с собой. Это — оси симметрии. Их называют осями симметрии четвертого порядка. Название возникло из-за того, что для поворота на 360° нужно совершить четыре последовательных поворота на 90° . Почему сравнивают с поворотом на 360° ? Да просто потому, что поворот любого тела на 360° эквивалентен тому, что мы вообще его не трогали. Это так называемая тождественная операция.

Существуют ли в природе какие-либо другие, отличные от пространственных поворотов, операции симметрии? Вообще говоря, да, и довольно много. Но если иметь в виду отдельно взятое тело, то существует лишь еще одна операция симметрии — зеркальное отражение в плоскости. (И, разумеется, всевозможные комбинации поворотов и отражений.) Попробуйте сами найти для кубика плоскости симметрии и заодно выяснить, есть ли у него еще какие-нибудь оси вращения, кроме тех трех, о которых мы уже сказали.*)

Оси вращения и плоскости отражения называются элементами симметрии тела. Чем больше у тела элементов симметрии, тем оно симметричнее. И, соответственно, тем проще. Сравните, например, футбольный мяч (любая прямая, проведенная через его центр, — ось симметрии бесконечного порядка) с мячом для регби. С более симметричным телом в определенном смысле иметь дело гораздо проще, всяческие сюрпризы при этом менее вероятны. Я, например, вполне могу себе представить, что при случае сумею попасть в ворота футбольным мячом. Но не поручусь, что смогу сделать то же самое, если на месте футбольного мяча окажется мяч для регби.

*) См. статью Я. Н. Вагутена «Правильные многогранники и повороты», опубликованную в прошлом номере журнала. (Примеч. ред.)

Но какое все это имеет отношение к физике? Оказывается, самое непосредственное. Чтобы понять это, обратимся к кристаллам. Кстати, заметим, что при ближайшем рассмотрении подавляющее большинство твердых тел в природе — именно кристаллические, так что наш интерес к ним носит отнюдь не академический характер. С точки зрения внутреннего устройства, кристаллы отличаются от аморфных тел строгой упорядоченностью в расположении атомов, или, говоря иначе, наличием пространственной решетки. Совершенно очевидно, что гораздо проще изучать систему упорядоченно расположенных атомов, нежели множество атомов, беспорядочно сваленных в кучу. (Снова хочется напомнить о том, что чем больше элементов симметрии у системы, тем она проще.) И действительно, именно существование решетки (т. е. симметрии) явилось тем главным, фундаментальным и упрощающим фактором, который позволил в конце 30-х годов нашего века построить теорию кристаллических тел (так сказать, «попасть в ворота»), а уже в настоящее время — создать всю ту разнообразную электронику, которая, в сущности, определяет стиль современной жизни.

Основным моментом при изучении кристаллов является тот факт, что в любой решетке можно выделить некоторую элементарную ячейку, из которой эта решетка построена. При этом физические свойства кристаллов в очень большой степени определяются симметрией этой элементарной ячейки, т. е. зависят от того, является ли она кубиком, или параллелепипедом, или имеет какую-то иную форму. И вновь справедливо правило: чем больше элементов симметрии у элементарной ячейки, тем проще будут свойства кристалла и тем меньше вероятность обнаружить в нем какие-то неожиданные физические эффекты.

Так, если ячейка кубическая (куб имеет максимальное после тел вращения число элементов симметрии), то свойства кристалла по всем направлениям будут одинаковыми. В таких

случаях говорят, что кристалл изотропен (в отличие от анизотропного случая, когда свойства тела в разных направлениях различны).*) При изменении формы элементарной ячейки (это может произойти, в частности, при изменении температуры) число элементов симметрии в ней уменьшается, и свойства кристалла резко меняются. Например, кубические кристаллы по своим упругим свойствам характеризуются всего тремя модулями упругости: сжатия, сдвига и кручения. Если же элементарная ячейка имеет форму параллелепипеда, то число модулей упругости оказывается уже равным восемнадцати. Это, разумеется, те же самые модули сжатия, сдвига и кручения, но они теперь разные по различным направлениям.

Совершенно аналогичная ситуация имеет место при тепловом расширении кристаллов. В то время как кристалл с кубической решеткой характеризуется одним-единственным коэффициентом теплового расширения, расширение кристаллов с более сложной формой элементарной ячейки определяется уже тремя константами.

Интересно, что число форм, которые может иметь элементарная ячейка, ограничено. И связано это вот с чем. Кристаллическая решетка по самому своему смыслу система периодическая. Это означает, что при ее смещении, или, как говорят в физике, трансляции, на определенные расстояния (период) решетка совмещается сама с собой. Другими словами, с решеткой, в отличие от отдельно взятого тела, можно проводить специфическую операцию симметрии — трансляцию. Так вот, оказывается, что отнюдь не любая форма элементарной ячейки согласуется с трансляционной симметрией. Например, из правильных шестигранных призм периодическую структуру построить можно, а из пятигранных — нельзя.

На сегодняшний день предсказаны все возможные типы кристаллических

решеток, и про каждую из них более или менее известно, в каких направлениях она раскалывается легче, а в каких оказывается прочнее, как кристаллы различной симметрии проводят тепло и как ведут себя в электрическом поле, как по ним распространяется звук и возможен ли для них пьезоэффект (возникновение зарядов на гранях кристалла при его деформации) и многое, многое другое.

В заключение хотелось бы еще сказать о том, что замечательными свойствами кристаллов роль симметрии в физике отнюдь не исчерпывается. Наряду с телами симметрией обладают и физические законы. Различие состоит лишь в том, что тела симметричны относительно пространственных поворотов и отражений, а законы — относительно некоторых других операций. И если симметрия тел изучена практически до конца, то роль симметрии законов природы еще далеко не выяснена. Но есть все основания полагать, что именно на этом пути нас ждут самые выдающиеся открытия.

Е. Е. Городецкий

Дифракция света на круглом отверстии

Хотелось бы начать с несколько странного, на первый взгляд, вопроса: всегда ли свет беспрепятственно проходит через отверстие? Понятно, что уже из самого тона вопроса следует ответ, что не всегда. Но все же, как отверстие может помешать чему-то? Пользуясь «дедуктивным методом» (помните Шерлока Холмса?), можно смело сказать, что в принципе отверстие может влиять на что-либо двумя способами: или через него что-то не проходит, или проходит что-то лишнее.

Постараемся понять, что же такое это «что-то». Чтобы облегчить задачу, вспомним некоторые сведения о свете как о волне.

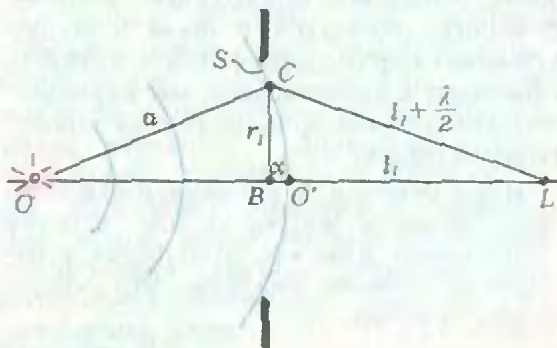
*) См., например, статью С. Н. Лыкова и Д. А. Паршина «Симметрия, анизотропия и закон Ома», опубликованную в десятом номере. (Примеч. ред.)

Электромагнитная волна, частным случаем которой является видимый свет, представляет собой распространяющиеся колебания электрического и магнитного полей (скорость распространения $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, длина волны $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7}$ м и частота колебаний $\omega \sim 4 \cdot 10^{15}$ с⁻¹). Несмотря на то, что величина напряженности электрического (и магнитного) поля в каждой точке непрерывно меняется со временем, значения напряженностей в каждый данный момент в двух различных точках однозначно связаны друг с другом. Так, если расстояние между двумя точками равно целому числу длин волн, или, что то же самое, четному числу полуволи, то напряженности в этих точках всегда равны друг другу. В точках, расстояние между которыми равно нечетному числу полуволи, напряженности равны по величине, но противоположны по направлению.

Из сказанного вытекает простое правило, позволяющее находить условия максимума и минимума освещенности при интерференции двух волн. Пусть когерентные источники синхронизированы таким образом, что напряженности электрического поля в точках расположения источников равны друг другу. В таком случае говорят, что источники колеблются в фазе. Если расстояния l_1 и l_2 от источников до произвольной точки L таковы, что

$$|l_1 - l_2| = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

т. е. разность хода равна четному



числу полуволи, то колебания будут усиливать друг друга и в точке L будет наблюдаться максимум освещенности. В случае, когда

$$|l_1 - l_2| = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

т. е. разность хода равна нечетному числу полуволи, колебания будут ослаблять друг друга и в точке L будет минимум освещенности.

Исключительно важную роль в описании волновых явлений вообще и распространения света в частности играет понятие волнового фронта. Так называют поверхность равной напряженности (ее еще называют поверхностью равной фазы или волновой поверхностью). Для каждого конкретного источника найти волновой фронт нетрудно. Для точечного источника, например, поверхностями равной напряженности будут сферы, для светящейся нити — соосные цилиндры, для плоского источника — параллельные плоскости. А если известен волновой фронт, то дальнейшее распространение волны можно описать следующим образом. Согласно принципу Гюйгенса, каждая точка фронта является источником вторичных световых волн. Причем все эти источники когерентны и колеблются в фазе. Тогда освещенность в произвольной точке пространства за волновым фронтом целиком определяется результатом интерференции этих вторичных волн.

В общем случае расчет интерференционной картины — задача достаточно сложная. Поэтому даже в нашем простейшем случае прохождения света через круглое отверстие мы ограничимся вычислением освещенности лишь в точке, лежащей на оси отверстия, перпендикулярной его плоскости (см. рисунок).

Прежде чем перейти к конкретному расчету, обратим внимание на роль симметрии в наших рассуждениях. О форме фронтов волны для различных источников мы догадались, конечно, из соображений симметрии. Аналогично, выбор точки для определения освещенности связан с сим-

метричным расположением этой точки относительно отверстия и источника света.

Итак, посмотрите на рисунок. На нем изображен точечный источник O монохроматического света, экран с круглым отверстием радиусом R и поверхности равной фазы (синие окружности). Нас интересует освещенность в точке L , точнее — ее зависимость от радиуса отверстия.

Воспользуемся принципом Гюйгенса и найдем освещенность в точке L как результат интерференции вторичных волн, излученных всеми точками волновой поверхности S , касающейся экрана. Вычисления существенно упростятся, если воспользоваться методом, предложенным Френелем.

Разобьем волновую поверхность S на концентрические зоны — называемые теперь зонами Френеля — с центром на оси отверстия (опять же потому, что в силу симметрии расстояния от различных точек такой «кольцевой» зоны до точки L одинаковы). Причем выберем размеры зон такими, чтобы разность хода от двух соседних участков до точки L равнялась $\lambda/2$. Напряженность электрического поля, создаваемого падающей волной, во всех точках волновой поверхности одинакова. Мы получили, таким образом, набор «кольцевых» вторичных источников, колеблющихся в фазе друг с другом. Поскольку площади всех зон Френеля одинаковы (несколько позже вы сможете это проверить самостоятельно), то очевидно, что вторичные волны от соседних зон, складываясь, будут гасить друг друга. И в зависимости от того, четное или нечетное число зон уместится на отверстии, освещенность в точке L будет близкой к нулю или максимальной. При этом максимальная освещенность создается той единственной зоной, для которой не хватило пары.

Понятно, что приведенные здесь качественные рассуждения применимы лишь тогда, когда на отверстии укладывается не слишком большое число зон Френеля. Оценим радиус первой зоны. Пусть расстояния от источника до отверстия (a) и от от-

верстия до точки наблюдения (l_1) порядка одного метра (немного больше или немного меньше — неважно, нас интересует только порядок величины), длина волны света $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7}$ м, радиус отверстия может меняться от величины порядка длины волны до сантиметра (такие отверстия для света уже можно считать бесконечно большими). Если расстояние от вершины волнового фронта O' до точки L равно l_1 , то первая зона ограничена точками волновой поверхности, расстояние от которых до точки L равно $l_1 + \lambda/2$. Выражая радиус первой зоны r_1 из прямоугольных треугольников OBC и BCL , получим

$$r_1^2 = a^2 - (a-x)^2 = (l_1 + \lambda/2)^2 - (l_1 + x)^2.$$

Отсюда найдем величину x :

$$x = \frac{l_1}{a+l_1} \frac{\lambda}{2}$$

и радиус r_1 :

$$r_1 = \sqrt{\frac{al_1}{a+l_1}} \lambda.$$

В нашем случае

$$r_1 \sim \sqrt{\frac{1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м}}{2 \text{ м}}} 5 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,5 \text{ мм}.$$

Таким образом, если радиус отверстия увеличивается, то до тех пор пока он будет меньше радиуса первой зоны, освещенность в точке L будет расти. Затем, по мере «появления» второй зоны, волны начнут компенсировать друг друга, и освещенность будет падать. И т. д.

В принципе можно изготовить такую пластинку, которая перекрывала бы все четные или все нечетные зоны. Тогда все приходящие в точку L волны окажутся в фазе и будут усиливать друг друга (волны, которые приходят в противофазе, мы перекрыли). Получился прибор, вполне аналогичный линзе.

Итак, отвечая на поставленный в начале заметки вопрос о том, что же «проходит» или «не проходит» в отверстие, можно сказать, что это — зоны Френеля.

Е. Е. Городецкий



Информатика и программирование

ЭВМ и электросвязь

*Доктор технических наук
В. О. ШВАРЦМАН*

Потребность в передаче, хранении и обработке информации возникла вместе с человеческим обществом. На заре своего развития люди общались с помощью звуковых или световых сигналов (крик, свист, удары по барабану, гонгу, костры, факелы). Необходимость передавать не только сигналы «тревога», «опасность», «наступление», «отбой», но и более сложные сообщения, привела к применению кодов, когда разные сообщения различались числом звуковых или оптических сигналов, частотой их появления, длиной пауз между сигналами. Параллельно создавались и со-

вершенствовались методы и средства хранения информации. От зарубок топором на деревьях и стенах пещер человек перешел к наскальным рисункам, клинописи, иероглифам и, наконец, к буквам и цифрам, наносимым на бумагу сначала карандашом, авторучкой, а потом печатным станком или пишущей машинкой. Еще позже появились перфорирующие устройства, с помощью которых сообщения наносились на бумажные карты и ленты в виде комбинации отверстий.

Но революция в области передачи и хранения информации произошла лишь тогда, когда для этого стала применяться электротехника. Уже в начале прошлого века делались попытки использовать для передачи сообщений свойство электрического тока быстро распространяться по проводам. Приемники сообщений, основанные на электростатическом и электрохимическом эффектах, оказались дорогими, сложными, громоздкими

ми и неустойчивыми в работе и практического применения не получили. Телеграф, основанный на магнитном действии электрического тока, господствует уже свыше 150 лет, и только в последние годы ему на смену пришли электронные системы. Несколькими десятилетиями моложе телефон — ему чуть больше 100 лет. После открытия радиосвязи для передачи сообщений широко стали применяться электромагнитные волны. Достижения фото- и кинотехники, магнитной записи, а в последние годы и голографии дали новые носители информации. Так что прогресс в области передачи и хранения информации был непрерывным. А обработка этой информации до середины XX века оставалась делом человека. Различные механические приспособления типа счетов, арифмометров и логарифмических линеек, а к концу XIX века счетно-информационные машины и табуляторы лишь чуть ускорили вычисления.

Революция в области обработки информации произошла в середине XX века, когда успехи электроники позволили создать электронные вычислительные машины — ЭВМ. Вначале ЭВМ предназначались для решения математических задач (вычислений, отсюда и название — вычислительные машины), однако вскоре главной сферой их применения стала обработка информации в различных автоматизированных системах управления и справочно-информационных системах, объединенных общим термином: информационно-вычислительные системы. В связи с этим возникло даже предложение называть ЭВМ не вычислительными, а электронными машинами. Но в литературе аббревиатура ЭВМ все чаще заменяется иностранным словом «компьютер», хотя буквальный перевод этого слова — «вычислитель».

В первое десятилетие существования ЭВМ люди приходили к ним со своими задачами и уносили результаты расчетов. Возможности ЭВМ росли, масштабы решаемых на них задач — тоже, и вскоре оказалось, что доставка исходной информации к ЭВМ, а

результатов обработки — к абонентам с помощью традиционных транспортных средств во многих случаях сводит на нет выигрыш во времени, получаемый от решения задач с помощью ЭВМ. К тому же очень часто эти исходные данные уже имеют вид электрических сигналов, обычной почтой не передаваемых. Поэтому в начале шестидесятых годов в дополнение к традиционным службам электросвязи (телефонной, телеграфной, факсимильной, радиовещанию) возникает новая, получившая название *передачи данных* (ПД). Передачей данных называют передачу методом электрической связи сообщений на ЭВМ или от ЭВМ. В отличие от традиционных служб электросвязи, в которых источником и получателем информации является человек, при передаче данных эти функции выполняет ЭВМ, что накладывает на службу передачи данных (СПД) ряд специфических требований.

Что надо требовать от СПД?

В ЭВМ любая информация (символы, тексты, изображения) представлена в единой форме — цифровой (как последовательность нулей и единиц). Поэтому система электросвязи в СПД должна передавать цифровую информацию. Весьма важной характеристикой СПД является время доставки сообщения определенной длины от источника к получателю, поскольку ценность информации существенно зависит от времени ее получения. СПД должна обеспечивать доставку сообщения требуемого объема в заданное время.

Как объем передаваемых сообщений, так и требования к времени их доставки могут сильно различаться. При передаче плановой или статистической информации объемы сообщений могут достигать миллионов байт*), а требуемые времена их до-

*) 1 байт равен 8 битам, бит — единица двоичной информации. 1 байт — объем сообщения из одного знака (буква, цифра, пробел и т. п.).

ставки исчисляются часами и даже сутками. Время доставки телеграмм (объем порядка 300 байт) регламентируется несколькими часами. При работе персональной ЭВМ с центральной ЭВМ или банком данных в режиме диалога задержка ответа больше чем на 2—3 секунды недопустима, так как при большем времени затрудняется удержание информации в кратковременной памяти человека. Еще более жесткие требования ко времени доставки сообщений предъявляют системы управления быстропротекающими процессами (например, управление воздушным движением), в которых время доставки информации должно быть соизмеримым со скоростью протекания процесса и поэтому может измеряться долями секунды.

Ценность информации определяется не только своевременностью ее получения, но и точностью ее передачи, называемой *достоверностью*. Достоверность характеризуется отношением числа ошибочно принятых символов к общему числу переданных. Например, если передаваемое сообщение содержит 10^6 байт, а при его передаче искажены 16 байт, то достоверность равна $1,6 \times 10^{-5}$.

Требования к достоверности СПД значительно выше, чем в традиционных службах электросвязи. При телефонной связи достаточна достоверность 10^{-3} и даже 10^{-2} , а при телеграфной передаче 10^{-1} , потому что часто смысл сообщения будет понят человеком правильно даже при искажении 10—20 % символов. В СПД искажение даже одного символа (байта, бита) может привести к неправильному восприятию информации и как результат — к большим материальным потерям.

Требования к достоверности в различных СПД колеблются от 10^{-6} в большинстве служб общего пользования до 10^{-9} — 10^{-12} в банковских системах и специальных системах управления. Заметим, что достоверности величиной 10^{-6} соответствует одна опечатка в книге объемом 400 страниц.

Часто несколько ЭВМ работают совместно, образуя локальную или территориальную сети. При этом они должны обмениваться информацией, т. е. ЭВМ-источнику информации надо дать возможность, передавая сообщения, адресовать его конкретной ЭВМ-получателю информации. К СПД предъявляется требование доставки информации по заданному адресу, причем вероятность засылки не по адресу должна быть весьма мала, например, одно сообщение на миллиард переданных (10^{-9}).

ЭВМ как источники и получатели информации в СПД могут иметь различные характеристики: разные способы передачи информации, различающиеся скорости передачи, разные коды. Требование обеспечения взаимодействия таких ЭВМ равносильно, например, требованию, чтобы телефонная связь обеспечивала общение абонентов, говорящих на разных языках (чего, как известно, не только не существует, но пока и не предполагается). И тем не менее к СПД требование возможности обмена сообщениями между разнотипными ЭВМ предъявляется.

Естественно, что от СПД, как и других служб электросвязи, требуется высокая надежность, живучесть и экономичность, нередко — защита передаваемых данных от разглашения, способность к развитию и предоставлению дополнительных услуг абонентам.

Для того чтобы понять, как все эти требования со стороны ЭВМ обеспечиваются средствами электросвязи, рассмотрим, как осуществляется передача информации между ЭВМ.

Связь для ЭВМ

Общая схема передачи информации между двумя ЭВМ: ЭВМ-источником (ЭВМ-И) и ЭВМ-получателем (ЭВМ-П) показана на рисунке 1. При возникновении в ЭВМ-И необходимости передать сообщение оно в виде последовательности импульсов из выходного устройства ЭВМ-И поступает в СПД, с помощью которой переда-

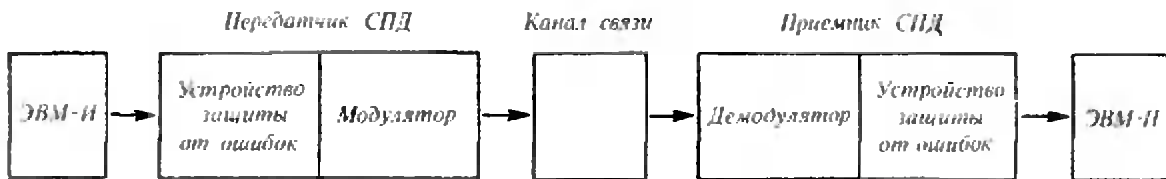


Рис. 1.

ется ко входу ЭВМ-П. Связующим элементом между ЭВМ-И и ЭВМ-П является канал связи.

В качестве каналов связи при передаче на небольшие расстояния (до 10 км) используют физические цепи, т. е. пары проводов кабельных линий связи, а на больших расстояниях — каналы систем передачи по кабельным, радиорелейным или спутниковым системам связи.

Кабель связи — это несколько изолированных медных проводников или тонких стеклянных нитей (в волоконно-оптических кабелях), заключенных в защитную оболочку. В линиях радиосвязи в отличие от кабельных распространение электромагнитных волн происходит не в замкнутом пространстве (кабеле), а в открытом. В радиорелейных линиях передача сигналов из одного пункта в другой осуществляется через ряд промежуточных пунктов, в которых сигналы принимаются, усиливаются и передаются дальше. В спутниковых системах связи сигналы с наземной передающей станции излучаются в направлении искусственного спутника Земли, где принимаются, усиливаются и передаются в направлении наземной станции приема.

В радиосвязи большое число радиостанций работают одновременно в разных частотных диапазонах, не мешая друг другу. Такое частотное разделение каналов может применяться и в СПД, что позволяет на одной паре проводов (физической цепи) образовывать много каналов, по каждому из которых может одновременно передаваться различная информация.

Требования к параметрам сигналов на выходе ЭВМ-И и входе ЭВМ-П обычно не согласованы с характеристиками каналов связи. К тому же сигналы в каналах связи подвер-

гаются воздействиям помех. В результате сигнал на выходе из канала связи в той или иной степени отличается от сигнала на его входе, что может привести к снижению достоверности ниже допустимых требований.

Для уменьшения искажений сигнала на входе в канал и выходе из него применяют специальные устройства преобразования сигналов, а для повышения достоверности вводят устройства защиты от ошибок (УЗО). Эти устройства вместе с устройствами управления передачей образуют *передатчик*, включаемый между ЭВМ-И и каналом связи, и *приемник*, включаемый между каналом связи и ЭВМ-П.

При телефонном разговоре один из собеседников, плохо расслышав какую-либо фразу, просит другого повторить ее еще раз. В СПД обнаружение ошибок, запрос на повторение и повторение искаженной части сообщения приемник и передатчик должны осуществлять автоматически. Для этого используются коды, обнаруживающие ошибки, в сочетании с обратной связью. Чтобы закодировать все основные символы, отображаемые в ЭВМ (буквы прописные и строчные, русские и латинские, цифры и знаки препинания), достаточно использовать семиразрядный код, который допускает $2^7 = 128$ кодовых комбинаций. В нем для передачи буквы А используется кодовая комбинация 1100001. Если в результате помех и искажений в канале она будет принята в виде 1110001, то получателю будет выдана буква Я. Для обнаружения ошибок используется не семи-, а восьмиразрядный код: исходная кодовая комбинация дополняется в УЗО нулем или единицей так, чтобы число единиц в кодовой комбинации было четным. В этом случае для передачи

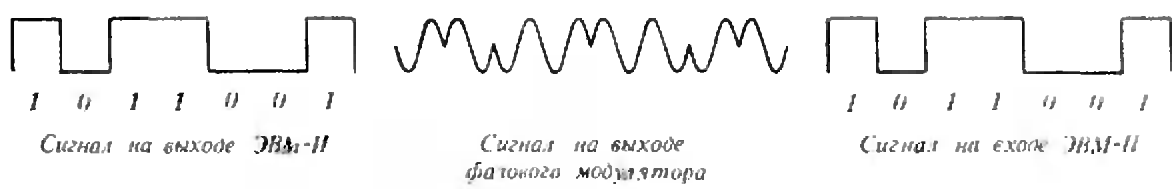


Рис. 2.

буквы А используют кодовую комбинацию 11000011 (последний знак вводит передатчик) и в случае приема 11100011 приемник обнаруживает ошибку (число единиц в принятой кодовой комбинации нечетно). Забракoванная кодовая комбинация в ЭВМ-П не выдается, а по каналу обратной связи приемник посылает передатчику запрос на ее повторную передачу.

Для обеспечения секретности передаваемых данных они могут быть зашифрованы. Шифровку и дешифровку также делают передатчик и приемник СПД по некоторому алгоритму с варьируемой частью (ключом). Ключ может передаваться по отдельному каналу.

В качестве каналов связи наиболее часто применяются так называемые каналы тональной частоты, используемые для телефонной связи. Они имеют полосу частот 300—3400 Гц и по ним осуществляют ПД со скоростями 4800 и 9600 бит/с, а в отдельных случаях и до 16 000 бит/с. Для согласования ЭВМ и канала связи в передатчик СПД входит модулятор, который преобразует поступающую от ЭВМ последовательность прямоугольных импульсов в ряд синусоидальных сигналов с частотами от 300 до 3400 Гц. Демодулятор приемника СПД осуществляет обратное преобразование (см. рис. 1). Передача в СПД осуществляется, как правило, в обоих направлениях, поэтому в каждой оконечной установке СПД имеется модулятор и демодулятор, объединенные в единое устройство — модем. Разработано много типов модемов, использующих разные методы модуляции с соответствующей скоростью передачи данных.

Амплитудная модуляция заключается в том, что передаче 1 от ЭВМ-И соответствует посылка в канал

связи отрезка синусоидального сигнала определенной длительности, а передаче 0 — пауза (той же длительности). Такая модуляция позволяет создавать СПД только с низкими скоростями (200—600 бит/с).

Для достижения скорости передачи данных 600—1200 бит/с применяется *частотная модуляция*, при которой для передачи 1 от ЭВМ-И в канал связи посылается синусоидальный сигнал одной частоты, а для передачи 0 — другой (например, 1100 и 2100 Гц).

Скорость передачи данных выше 1200 бит/с обеспечивает *фазовая модуляция*, при которой передаче 1 от ЭВМ-И соответствует посылка в канал связи синусоидального сигнала одной фазы, а передаче 0 — другой (например, 180° и 0°; см. рис. 2).

При необходимости в более высоких скоростях передачи используют широкополосные каналы с полосами частот 48, 240, 1200 кГц.

Но и по каналу телефонной связи можно осуществить передачу данных со скоростью до 64 000 бит/с. Для этого используется *временное разделение каналов*, когда, например, разные пары ЭВМ по очереди обмениваются информацией по одному каналу связи.

В каналах связи систем с временным разделением (их называют цифровыми) переносчиком информации являются последовательности импульсов. В устройстве преобразования сигналов передатчика СПД на эти импульсы накладываются импульсы от ЭВМ. В этом случае модемы не требуются.

При взаимодействии большого числа ЭВМ возникает задача организации обмена информацией между ними. Если использовать для каждой пары ЭВМ-И — ЭВМ-П отдельный ка-

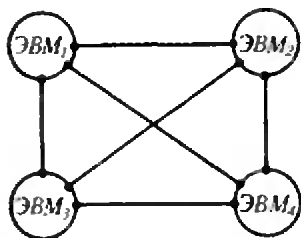


Рис. 3.

нал ПД, то для связи n ЭВМ требуется $n(n-1)/2$ двусторонних каналов и по $n-1$ входу-выходу у каждой ЭВМ (рис. 3), а время полезного использования каждого канала и входа-выхода ЭВМ будет, как правило, мало. Но можно обойтись одним входом-выходом каждой ЭВМ и меньшим числом каналов. В качестве примера на рисунке 4 изображена сеть ЭВМ с одним узлом распределения информации и всего n каналами, позволяющими соединить каждую ЭВМ с любой другой. Задачей такого узла, получившего название *узла коммутации*, является организация соединения, позволяющего передавать сообщения по заданному ЭВМ-И адресу ЭВМ-П. Поэтому современные сети связи представляют собой совокупность каналов связи, узлов коммутации и абонентских устройств (рис. 5). И в каждом из этих компонентов широко используется техника ЭВМ.

ЭВМ для связи

Наиболее широкое применение ЭВМ нашли в коммутационных устройствах. Причина этого заключается в том, что функции коммутационных устройств связи по сути тождественны классическому алгоритму функционирования ЭВМ и сводятся к следующим основным операциям:

прием сообщения из канала связи и запись его в память;

логическая обработка сообщения, например, перекодирование;

считывание сообщения из памяти (при необходимости с другой скоростью) и передача по заданному адресу в другой канал связи.

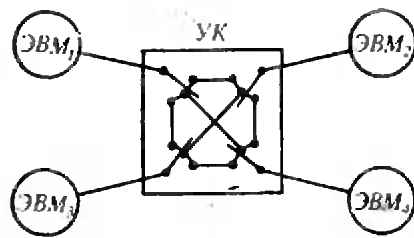


Рис. 4. Узел коммутации (УК) для четырех ЭВМ.

Применение ЭВМ обеспечивает функциональную гибкость, контроль и автоматизацию поиска неисправностей, учет стоимости и предоставление абонентам дополнительных услуг, как например: сокращенный набор номера для наиболее часто вызываемых абонентов (3 цифры вместо 7), постановку вызова на ожидание при занятости абонента, переадресацию на другой номер и т. п.

Не менее широко ЭВМ используются и для построения конечных устройств: для защиты от ошибок, преобразования сигналов, контроля, диагностики, управления процессами установления соединения.

Как и в других отраслях техники, ЭВМ широко используются в связи для автоматизации научных исследований, проектирования и конструирования, управления экономическими и социальными процессами.

Современные информационно-вычислительные системы представляют собой совокупность средств вычислительной техники (обработка сообщений) и средств связи (передача сообщений). Развитие техники ЭВМ и связи вызвало создание новых служб электросвязи — *телематических служб*. Одной из таких служб является Телетекс, предназначенный для подготовки и передачи писем по телефонной сети. Абонентская установка состоит из персональной ЭВМ и устройства преобразования сигналов с автоматическим вызывным устройством. Она обеспечивает подготовку оператором писем и их редактирование, запоминание подготовленных писем для их последующей

передачи по телефонной сети, автоматическую (без участия оператора) передачу и прием писем, автоматическое исправление ошибок, возникающих в канале связи, автоматическое выполнение широкого ряда оргтехнических функций (составление журналов передачи, приема, присвоение входящих и исходящих номеров, генерация штампа предприятия-отправителя и др.), распечатку принимаемых писем.

Оборудование обеспечивает высокую скорость передачи информации — одна страница текста на скорости 2400 бит/с передается за 10—12 секунд. С учетом времени установления соединения по телефонной сети каждое деловое письмо может быть передано получателю за 1—2 минуты.

Возможности службы Телетекс могут быть значительно увеличены при планируемой в будущем установке специализированных ЭВМ, память которых разделена на отдельные участки — боксы. Каждый пользователь (абонент) службы, арендующий бокс (или несколько боксов), сможет в любое удобное время, например в периоды наименьшей загрузки сети, вводить сообщения в бокс и получать из него информацию. Такая ус-

луга подобна традиционной почтовой услуге «до востребования». Передаваемые сообщения вводятся в систему и при необходимости дополняются накопленной в боксе информацией. Бокс может «сам» принимать информацию от абонентов других боксов или передавать сообщения в другие боксы и даже давать отправителю подтверждение того, что получатель прочитал переданное ему сообщение. Предусматривается возможность многоадресной передачи сообщений, т. е. одновременной ее передачи нескольким получателям. Такая услуга по аналогии с надписью на грифельной доске, доступной для всеобщего обозрения, получила название «черной доски».

Возможен «просмотр» принятых боксом сообщений путем вывода на печать краткого содержания писем, в том числе целенаправленный, например только сообщений, полученных от определенного абонента, или сообщений по определенному вопросу (указывается ключевое слово, например, «электронная почта»).

Другая служба — Видеотекс — представляет собой информационно-справочную систему, обеспечивающую связь пользователей, располагающих соответствующим оконечным оборудованием, с банками данных. Основу банка данных системы Видеотекс составляет ЭВМ, обладающая большой памятью и развитыми связными функциями и снабженная соответствующим математическим обеспечением (рис. 6). Эта ЭВМ хранит информацию, предназначенную для пользователей. Важным элементом банка данных является так называемый служебный центр, в задачи которого входит определение правомочности вызова, поступившего от пользователя по телефонной сети, тарификация услуг, обеспечение взаимодействия с оконечным оборудованием пользователя, а также ряд других задач.

Служба Видеотекс предназначена для самых широких кругов населения, поэтому оконечное оборудование обычно выполняется максималь-

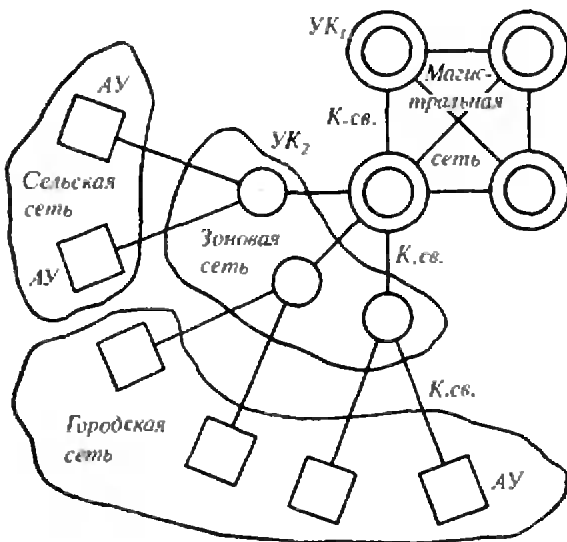


Рис. 5. Сеть связи ($К. св.$ — канал связи; AU — абонентские устройства; UK — узлы коммутации).

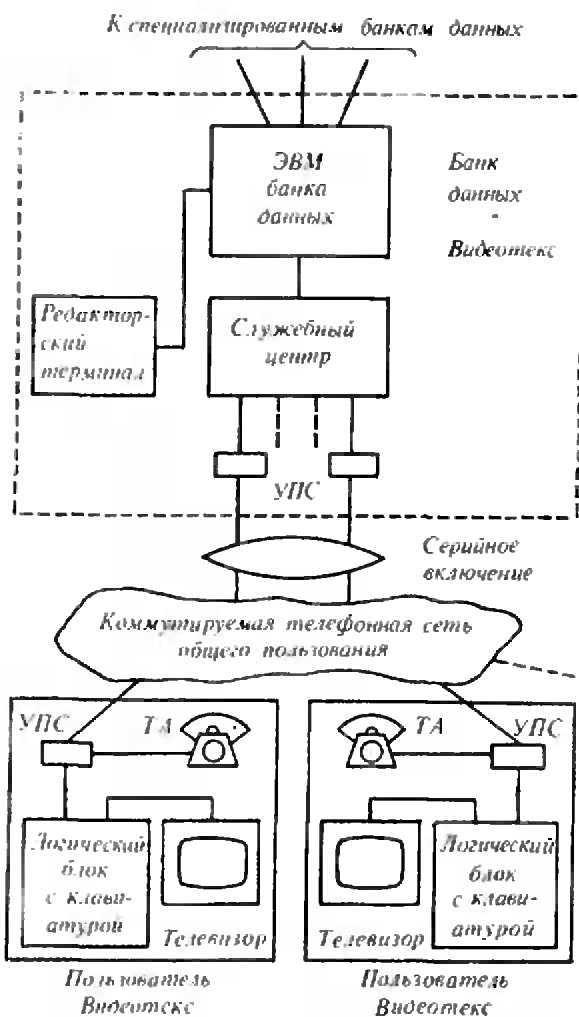


Рис. 6. Схема системы Видеотекс.

но простым. Это оборудование состоит из логического блока с клавиатурой, модема и обычного бытового телевизора, выполняющего функции дисплея. В качестве сети связи используется телефонная сеть, а в роли логического блока с клавиатурой — специально разработанные устройства с упрощенной клавиатурой либо бытовая персональная ЭВМ.

Пользователь, установив связь с банком данных, запрашивает у него сведения самого различного характера.

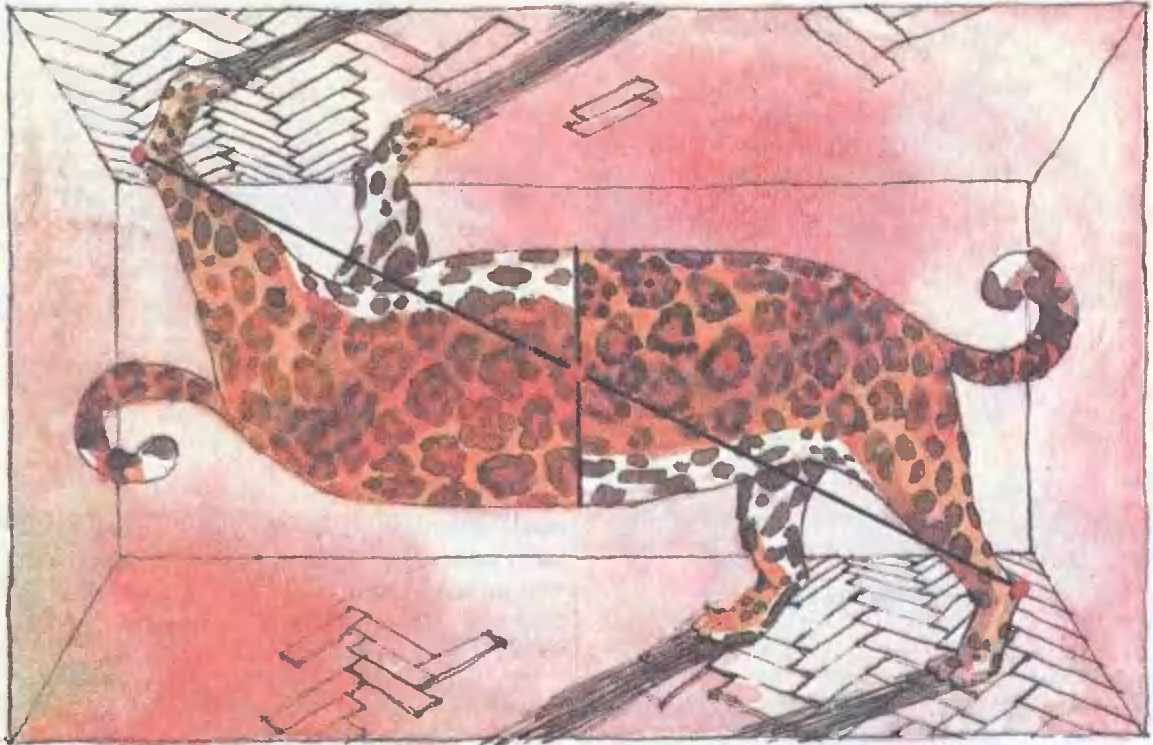
Служба Видеотекс передает информацию о новостях (по городу, стране, зарубежные новости), о погоде, спортивных и культурных мероприятиях, сообщает адреса и телефоны различных учреждений, рекламирует

услуги предприятий государственного и кооперативного секторов и т. д. Упомянем еще различного рода полезные советы (по ведению домашнего хозяйства, садоводству, медицине), предложения работодателей государственного и кооперативного секторов, обучение (школьное, вузовское, переподготовку, повышение квалификации и др.), развлечения (телевизионные игры).

Система Видеотекс может использоваться и для совершения всевозможных покупок, резервирования билетов и т. д. Пользователям доступна не только информация, хранящаяся в банке данных системы Видеотекс. Часть информации, носящая специализированный характер, может храниться в других банках, например в банках данных торговли, снабжения и т. д. Банк данных системы Видеотекс обращается к специализированным банкам данных по мере возникновения запросов у пользователей. Для этого между банками предусмотрены соответствующие связи.

По мере распространения на всю страну служба Видеотекс приобретет новые возможности: обмен информацией между пользователями (а не только между банками данных и пользователями), обмен информацией между пользователями службы Видеотекс и другими телематическими службами.

Таким образом, эффективное использование ЭВМ немислимо без быстрой и надежной доставки информации к ним и от них. А это может обеспечить только сеть электро-связи. С другой стороны, современная сеть связи не может работать без ЭВМ. Мысль о взаимном и последовательном сотрудничестве средств связи и ЭВМ очень образно выразил американский специалист по информационным системам Р. Фано: «Брак между ЭВМ и средствами связи свершился, свадьба сыграна, медовый месяц позади, и супруги начинают все больше и больше ощущать, как они стали зависеть друг от друга».



Математический кружок

Паркет из четырехугольников

Доктор физико-математических наук
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

На VI Московской математической олимпиаде (в 1940 году) предлагалась такая задача: *данным четырехугольником произвольной формы настлать паркет, т. е. заполнить всю плоскость без пропусков и перекрытий*. Решение ее можно получить с помощью центральной симметрии. Отразим четырехугольник $ABCD$ симметрично относительно середины стороны AB . На рисунке 1 исходный четырехугольник помечен цифрой 1, а симметричный — цифрой 2. Теперь четырехугольник 2 отразим симметрично относительно середины его стороны BC , а полученный четырехугольник 3 — относительно середины его

стороны CD . Четырехугольники 1, 2, 3, 4 примыкают к их общей вершине углами A, B, C, D . А так как сумма углов четырехугольника равна 360° , то эти четыре четырехугольника располагаются вокруг их общей вершины без пропусков и перекрытий. Такое же построение можно провести вокруг каждой вершины каждого из новых четырехугольников, что и дает паркет на всей плоскости (рис. 2).

Закрасим четырехугольники в два цвета (рис. 3). В раскрашенном таким образом паркете два четырехугольника одного цвета получаются друг из друга параллельным переносом, а два

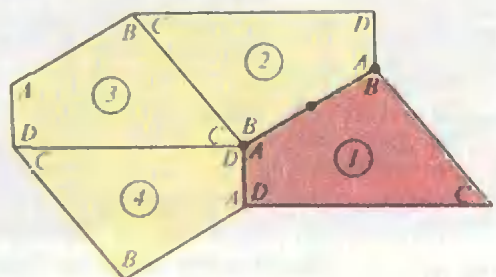


Рис. 1.

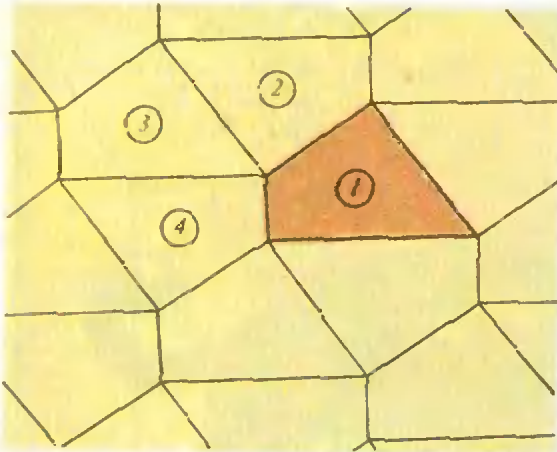


Рис. 2.

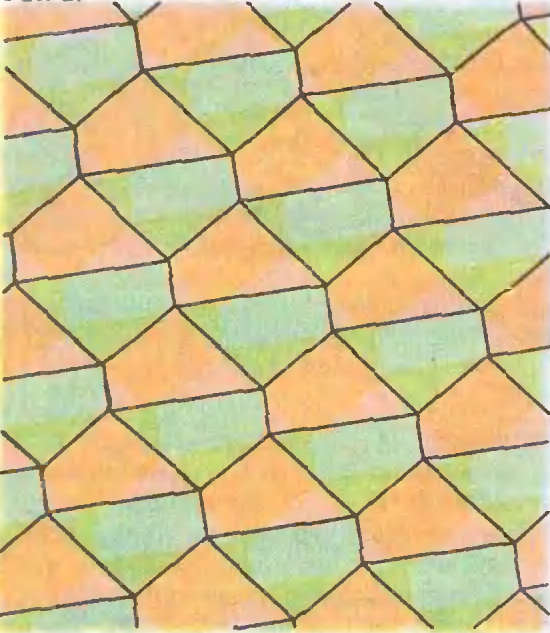


Рис. 3.

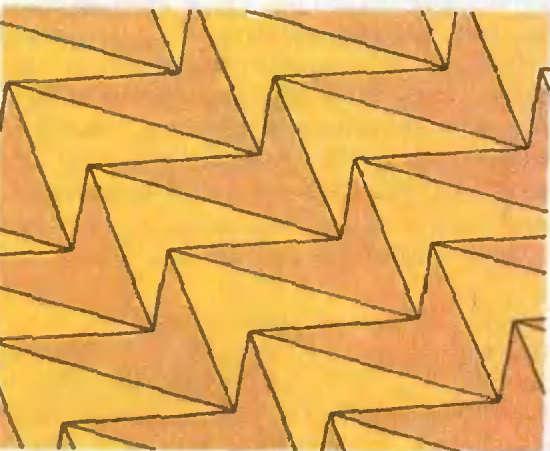


Рис. 4.



Рис. 5.

четыреугольника разных цветов — центральной симметрией. Заметим, что исходный четырехугольник может быть и невыпуклым — паркет получается и в этом случае (рис. 4).

Построенные паркеты позволяют решить ряд задач, связанных со свойствами четырехугольников. Решение каждой из рассматриваемых ниже задач можно изложить без использования паркета: рассмотреть только те четырехугольники, которые нужны для решения, а остальные «следы» паркета стереть. Однако найти решение проще с помощью паркета.

Задача 1. Из бумаги изготовили два одинаковых выпуклых четырехугольника. Один разрезали по одной диагонали, второй — по другой. Докажите, что из четырех полученных треугольников можно составить параллелограмм.

Решение этой задачи становится очевидным при разглядывании паркета, изображенного на первой странице обложки.

Задача 2. В выпуклом четырехугольнике проведены средние линии, т. е. отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Докажите, что из получившихся четырех частей можно составить параллелограмм.

Решение. На рисунке 5 фрагмент паркета разделен на части средними линиями (средние линии MN и NP лежат на одной прямой, так как они симметричны относительно точки N ; то же относится и к другим средним линиям). Части m , n , p , q составляют

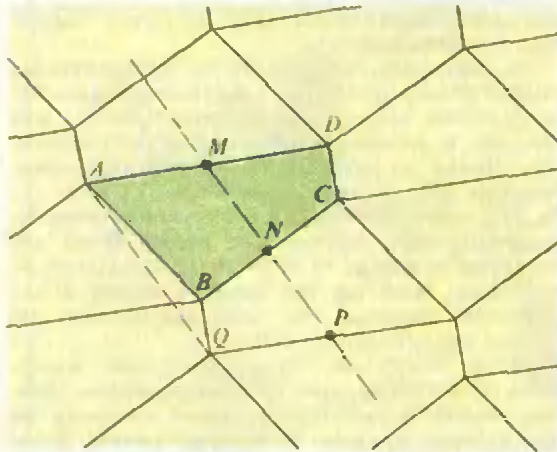


Рис. 6.

один из четырехугольников паркета, а равные им части m, n', p', q' составляют параллелограмм.

Задача 3. Докажите, что если средняя линия, соединяющая середины двух противоположных сторон четырехугольника, равна полусумме двух других противоположных сторон, то этот четырехугольник — трапеция (или параллелограмм).

Решение. На рисунке 6 MN и NP — средние линии; отрезки AQ и MP равны и параллельны (поскольку AM и QP равны и параллельны). Если $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$, т. е. $AQ = MP = AB + BQ$, то точка B принадлежит отрезку AQ . Следовательно, $AB \parallel CD$, т. е. $ABCD$ — трапеция.

Задача 4. В древнем Вавилоне для вычисления площади четырех-

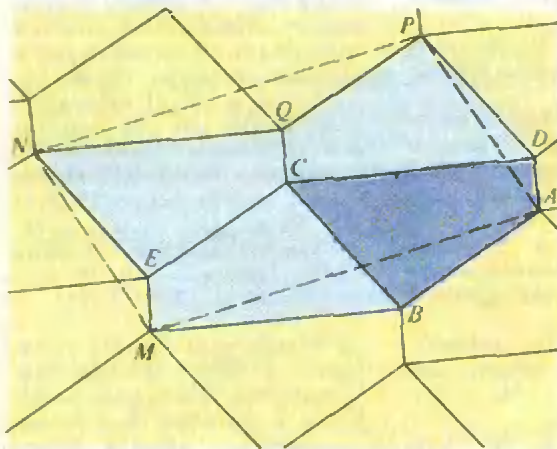


Рис. 7.

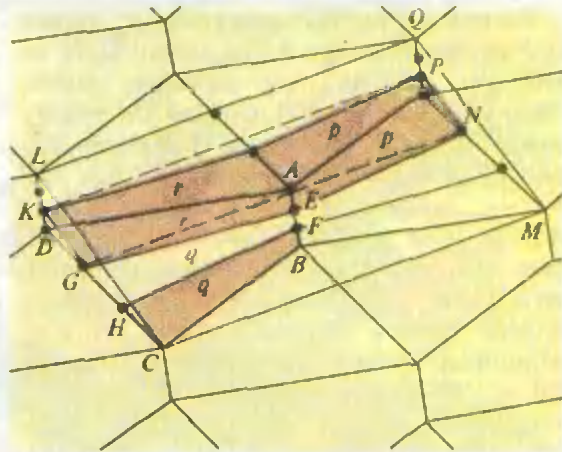


Рис. 8.

угольника $ABCD$ перемножали полусуммы противоположных сторон:

$$S = \frac{AB + CD}{2} \cdot \frac{AD + BC}{2}. \quad (1)$$

Докажите, что такой способ вычисления площади приводит к правильному результату только в случае прямоугольника.

Решение. На рисунке 7 четыре закрашенных четырехугольника составляют фигуру, равновеликую параллелограмму $AMNP$ (это вытекает из того, что $\triangle AMB = \triangle PNQ$ и $\triangle MEN = \triangle ADP$). Далее,

$$AB + CD = AB + BM \geq AM, \quad (2)$$

$$AD + BC = AD + DP \geq AP.$$

Пусть теперь четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом, т. е. хотя бы одна из точек B, D не лежит на контуре параллелограмма $AMNP$. Тогда в (2) хотя бы одно из неравенств — строгое, и потому правая часть в (1) больше одной четверти площади параллелограмма $AMNP$, т. е. больше S . Итак, формула (1) заведомо неверна, если $ABCD$ — не параллелограмм. Для параллелограмма, не являющегося прямоугольником, формула (1), очевидно, также неверна.

Задача 5. Проведены две прямые, делящие две противоположные стороны выпуклого четырехугольника на три равные части, причем внутри четырехугольника эти прямые не пересекаются. Докажите, что между этими прямыми заключена третья часть площади четырехугольника.

Решение. На рисунке 8 точки E, F делят сторону AB , а точки G, H — сторону DC на три равные части. Отрезки CM, GN, KP, LQ равны между собой и параллельны. Площадь параллелограмма $CMQL$ равна $4S$, где S — площадь четырехугольника $ABCD$ (это устанавливается так же, как при решении предыдущей задачи). Далее, площадь параллелограмма $KGNP$ равна $2(p+r)$, где p, q, r — площади частей, на которые отрезки GE и HF делят площадь S четырехугольника $ABCD$. Так как отрезок KG параллелен отрезку LC и втрое меньше его, площадь параллелограмма $KGNP$ втрое меньше площади параллелограмма $CMQL$, т. е. $2(p+r) = \frac{1}{3} \cdot 4S$, и потому $p+r = \frac{2}{3} S$. Следовательно, $q = \frac{1}{3} S$ (поскольку $p+q+r=S$), что и требовалось доказать.

Приведем теперь несколько задач для самостоятельного решения.

6. Докажите, что с помощью центрально симметричных шестиугольников (произвольной формы, даже невыпуклых) можно застелить паркетом плоскость так, что любые два шести-

угольника получаются друг из друга параллельным переносом.

7. Докажите, что паркет из четырехугольников можно получить следующим образом: застилается паркет из шестиугольников, как указано в задаче 6, а затем во всех шестиугольниках проводятся через центры параллельные диагонали.

8. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике одна из средних линий делит его площадь пополам, то этот четырехугольник — трапеция. Если же обе средние линии делят площадь пополам, то четырехугольник является параллелограммом.

9. В выпуклом четырехугольнике диагональ не проходит через точку пересечения средних линий и делится средними линиями на три отрезка, крайние из которых равны. Докажите, что вторая диагональ проходит через точку пересечения средних линий.

10. Докажите обратное утверждение: если в выпуклом четырехугольнике одна диагональ проходит через точку пересечения средних линий, то вторая диагональ, если она не проходит через эту точку, делится средними линиями на три отрезка, крайние из которых равны.

11. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике сумма длин средних линий равна его полупериметру, то этот четырехугольник — параллелограмм.

12. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике сумма расстояний от точки пересечения средних линий до вершин равна сумме длин его диагоналей, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Вниманию наших читателей

Магазин № 3 «Академкнига» г. Москвы высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Ветров Г. С. *С. П. Королев в авиации. Идеи. Проекты. Конструкции.* (История науки и техники).— 1988.— 55 к.

Вихман Э. *Квантовая физика.* Учебное руководство. Пер. с англ. Изд. 3-е, испр. (Берклевский курс физики. Т. 4).— 1986.— 1 р. 20 к.

Воспоминания об академике Л. А. Арцимовиче. Изд. 2-е.— 1988.— 2 р. 70 к.

Глушков В. М. *Основы безбумажной информатики.* Изд. 2-е, испр.— 1987.— 2 р. 60 к.

Гурский И. П. *Элементарная физика с примерами решения задач.*— 1989.— 1 р. 10 к.

Информатика и научно-технический прогресс. (Кибер-

нетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 1987.— 65 к.

Иптинский А. Ю. *Классическая механика и силы инерции.*— 1987.— 2 р. 30 к.

Кириллин В. А. *Страницы истории науки и техники.* Изд. 2-е. (Наука. Мирозрение. Жизнь).— 1989.— 2 р. 80 к.

Кирсанов В. С. *Научная революция XVII в.*— 1987.— 2 р. 70 к.

Компьютер и задачи выбора. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 1989.— 80 к.

Кушниренко А. Г., Лебедев Г. В. *Программирование для математиков.*— 1988.— 1 р. 10 к.

Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Учебник. Ч. 2.— 1988.— 50 к.

Новосельцев В. П. *Организм в мире техники: ки-*

бернетический аспект. (Проблемы науки и технического прогресса).— 1989.— 85 к.

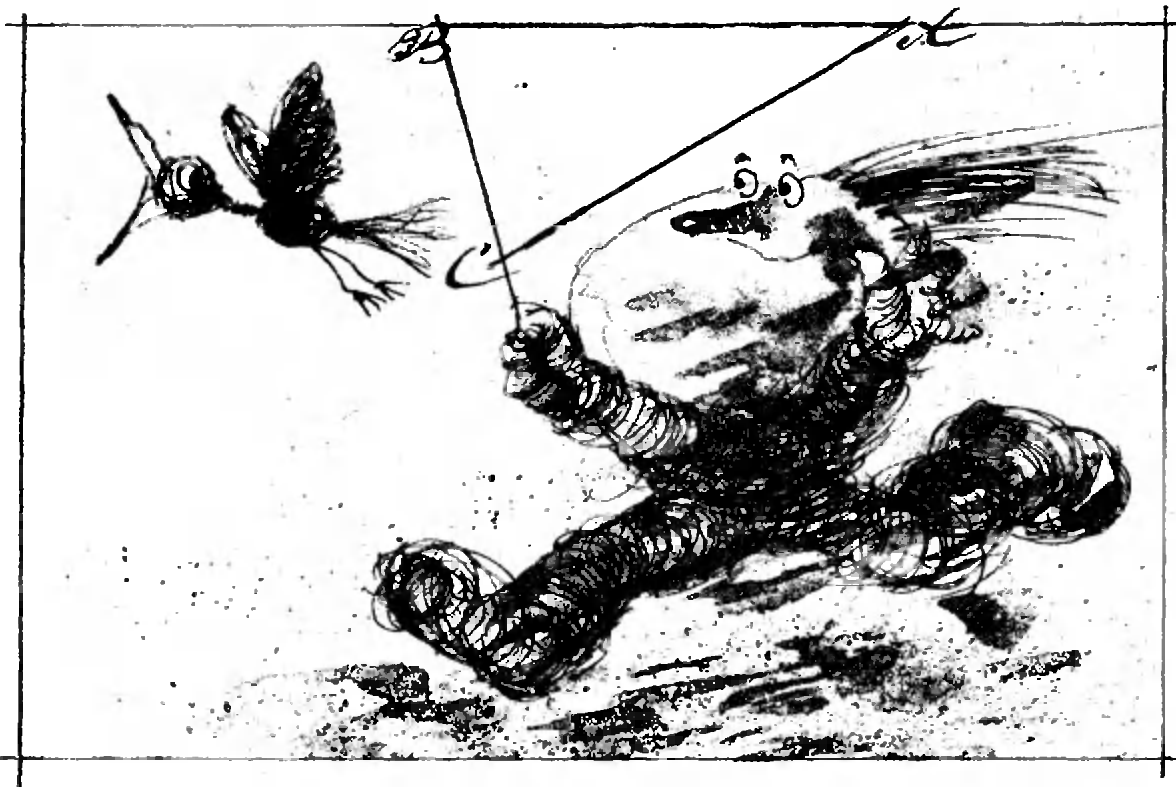
Савельев И. В. *Курс общей физики.* В 3-х т. Т. 2. *Электричество и магнетизм. Волны. Оптика.*— 1988.— 1 р. 20 к.

Сонин А. С. *Дорога длиною в век: из истории открытия и исследования жидких кристаллов.* (История науки и техники).— 1988.— 55 к.

Хазен А. М. *О невозможном в науке, или Где границы моделирования интеллекта.* (Проблемы науки и технического прогресса).— 1988.— 1 р. 50 к.

Эйнштейновский сборник 1984—1985 г.— 2 р. 20 к.

Заказы направляйте по адресу: 117393, Москва, ул. Академика Пилюгина, д. 14, корп. 2, магазин № 3 «Академкнига», «Книга — почтой».



Артикулы абсурденна

Геометрические решения негеометрических задач

И. А. КУШНИР

Многие задачи алгебры и тригонометрии могут быть решены с помощью геометрии. В этой заметке мы покажем несколько примеров таких задач.

Числовые равенства

Задача 1. Докажите равенства

а) $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}$

Решение. а) Для доказательства рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углами $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$ (см. рис. 1) и проведем биссектрису BD угла B . Тогда $BC=BD=AD$. Пусть, для определенности, $BC=1$. Из треугольников ABD и BDC полу-

чим $AB=2\cos \frac{\pi}{5}$, $CD=2\cos \frac{2\pi}{5}$, а из равенства $AD=AB-AC$ сразу следует соотношение,

б) Доказывается аналогично. Следует лишь рассмотреть равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине $\frac{\pi}{7}$ (см. рис. 2) и высотой $BB_1=1$. Из треугольников ABB_1 , BDB_1 , BCB_1 находим

$$AB=AC = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}}; \quad BD=AD = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}};$$

$$BC = \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}.$$

Осталось заметить, что $AC=AD+CD$.

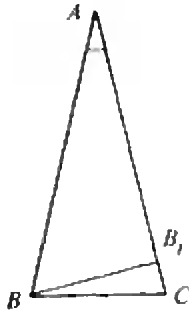


Рис. 1.

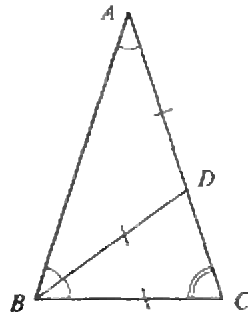


Рис. 2.

Задача 2. Докажите, что

$$\operatorname{ctg}30^\circ + \operatorname{ctg}75^\circ = 2.$$

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC такой, что $\angle A = 30^\circ$, $AB = AC$. Проведем его высоту BD . Пусть $BD = 1$. Тогда $AB = AC = 2$, $AD = \operatorname{ctg}30^\circ$, $CD = \operatorname{ctg}75^\circ$ и $AD + CD = AC$.

Задача 3. Вычислите $\operatorname{tg}15^\circ$.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC из предыдущей задачи. Тогда $\angle CBD = 15^\circ$, $AD = \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg}15^\circ = CD = 2 - \sqrt{3}$.

Задача 4. Вычислите $\sin 18^\circ$.

Решение. Вернемся к рисунку 1. Пусть $AB = 1$, $BC = x = 2\sin 18^\circ$. Поскольку $\triangle BDC \sim \triangle ABC$, имеем

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}, \text{ откуда } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \text{ Итак,}$$

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Упражнение 1. Вычислите а) $\sin 36^\circ$; б) $\operatorname{tg}36^\circ \operatorname{tg}72^\circ$.

Задача 5. Докажите, что

$$\sin 9^\circ + \sin 49^\circ + \sin 89^\circ + \dots + \sin 289^\circ + \sin 329^\circ = 0.$$

Решение. Рассмотрим правильный девятиугольник $A_1A_2\dots A_9$, вписанный в единичную окружность с центром в точке O (см. рис. 3). Пусть $\vec{e}_i = \vec{OA}_i$. Тогда $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dots + \vec{e}_9 = 0$. Требуемое равенство означает (см. упражнение 2), что сумма координат векторов $e_i = (\cos(9^\circ + i40^\circ); \sin(9^\circ + i40^\circ))$ равна нулю.

Упражнения

2. Докажите, что для любого правильного n -угольника $A_1\dots A_n$ сумма всех векторов $e_i = \vec{OA}_i$ равна нулю (O — центр описанной окружности n -угольника $A_1A_2\dots A_n$).

3. Найдите суммы

а) $\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$;

б) $\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n}$;

в) $\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$.

Тождества

Задача 6. Докажите, что при $0 < \alpha < 180^\circ$

а) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$; б) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$.

Решение. а) Пусть в равнобедренном треугольнике ABC угол A равен α , $AB = AC = 1$. Проведем высоту BB_1 . Тогда $BB_1 = \sin \alpha$, $B_1C = 1 - \cos \alpha$,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{B_1C}{BB_1} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

б) Пусть теперь AD — высота треугольника ABC . Тогда $\frac{CD}{CB_1} = \frac{AC}{BC}$, или $CD \cdot BC = CB_1 \cdot AC$. Осталось воспользоваться равенствами

$$CD = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad BC = 2 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad AC = 1,$$

$$CB_1 = 1 - \cos \alpha.$$

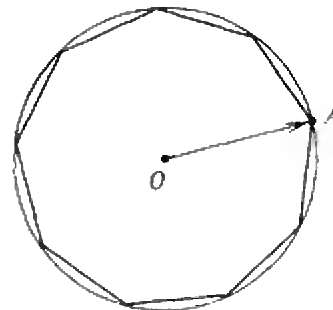


Рис. 3

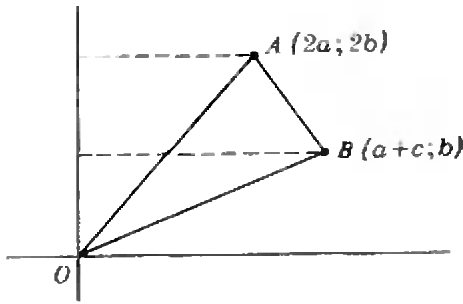


Рис. 4.

Задача 7. Докажите, что если $A+B+C=\pi$, причем $A>0, B>0, C>0$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \\ + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1. \end{aligned}$$

Указание. Рассмотрим треугольник с углами A, B и C . Пусть a, b, c — его стороны, r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр. Тогда

$$\begin{aligned} r &= (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \text{ (докажите!)}. \text{ Поэтому} \\ \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \times \\ \times \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \\ &= r^2 \left(\frac{1}{p-a} \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-b} \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-c} \times \right. \\ \times \left. \frac{1}{p-a} \right) &= \frac{r^2 p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{r^2 p}{S^2} = 1 \end{aligned}$$

(мы воспользовались формулой для площади $S=rp$ и формулой Герона).

Доказательство неравенств

Задача 8. Докажите, что

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq \\ \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}, \end{aligned}$$

где a, b, c — действительные числа.

Решение. В прямоугольной системе координат xOy (см. рис. 4) рассмотрим точки $O(0; 0), B(2a; 2b),$

$A(a+c; b)$ и воспользуемся неравенством треугольника $OB \leq OA + AB$.

Упражнения

4. При каких a, b, c неравенство задачи 8 превращается в равенство?

5. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

Указание: отложите отрезки на трех лучах, выходящих из некоторой точки O плоскости и образующих попарно углы в 120° (при $x>0, y>0$ и $z>0$); подумайте, как поступить, если среди чисел x, y и z есть отрицательные.

Задача 9. Докажите, что

$$\begin{aligned} A = |\sin x \sin y \sin z + \\ + \cos x \cos y \cos z| \leq 1 \end{aligned}$$

при любых x, y, z .

Указание. Рассмотрим векторы $\vec{a} = (\sin x \sin y; \cos x \cos y), \vec{b} = (\sin z; \cos z)$.

Тогда

$$|A| = |(\vec{a}, \vec{b})| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \leq 1.$$

Упражнения

6. Докажите, что если $x+y+z=1$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

7. Докажите, что при $a+b+c=1$ справедливо неравенство

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}.$$

Указание. Воспользуйтесь неравенством $(\vec{a}, \vec{b}) \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ для подходящим образом подобранных векторов.

„Квант“ улыбается

Эффект Чизхолма

Подобно большинству научных открытий, общие принципы, сформулированные в настоящей работе, покоятся на экспериментальных данных, в болезненном процессе накопления которых участвовало несколько поколений наблюдателей. Мой приятный долг поблагодарить их за объемистые записки, в которых зарегистрировано все, что касается разного рода проволочек и провалов; это целая гора данных, и до сих пор не было строгой теории, которая связала бы их в цельную науку.

Я не хочу сказать, что ощущался недостаток в попытках объяснить, что именно происходит, когда люди стараются донести какое-то дело до конца. Уже в средние века фортуны считали капризной богиней, и Шекспир был близок к сути дела, когда назвал ее «непостоянной». Строго научное объяснение рассматриваемого феномена стало возможным только в наше время. Разница между ожидаемыми и получаемыми результатами, как оказалось, может быть записана в виде точного соотношения... Организация под названием «Международная ассоциация инженеров-философов» уже опубликовала некоторые свои наблюдения: «Какой бы расчет вы ни делали, любая ошибка, которая может в него вкрасться, — вкрадется» и «Любое устройство, требующее наладки и регулирования, с максимальным трудом под-

дается и тому и другому».

Остается только обобщить эти и многие другие наблюдения, сделанные в различных специальных областях, и записать стоящий за ними совершенно общий, всеобъемлющий принцип, которому подчиняется во всех случаях целенаправленная человеческая деятельность. Это обобщение я называю *первым законом Чизхолма*:

Все, что может испортиться, — портится.

Дальнейшее исследование показывает, что логика, которой подчиняются рассматриваемые нами явления, не Аристотелева, поскольку следствие первого закона Чизхолма имеет такой вид:

Все, что не может испортиться, — портится тоже.

Все, кому приходится иметь дело с планами, проектами и программами, сразу заметят, какой норовок наводят эти простые утверждения в хаосе их собственных неудач. Действительно, эти обобщения отличаются той классической простотой, по которой мы сразу узнаем фундаментальные открытия типа $E=mc^2$. Администраторы, футбольные тренеры, генералы и жены, пытающиеся перевоспитать своих мужей, сразу вынуждены будут признать (каждый для своего поля деятельности) справедливость первого закона.

Давно известно, что в физических системах энтропия (мера беспорядка) стремится к увеличению и что системы с большой энергией теряют ее в борьбе с менее высокоорганизованным окружением. Аналог этого второго

закона термодинамики действует и в жизни... Поэтому я формулирую в самом общем виде *второй закон Чизхолма*:

Когда дела идут хорошо, что-то должно испортиться в самом ближайшем будущем.

У этого закона также есть очевидное следствие:

Когда дела идут хуже некуда, в самом ближайшем будущем они пойдут еще хуже.

Без труда можно получить и второе следствие:

Если вам кажется, что ситуация улучшается, значит, вы чего-то не заметили.

По традиции фундаментальные научные законы объединяются по три, поэтому я поспешу сформулировать *третий закон Чизхолма*. Предварительная работа в этой области проведена многими лекторами, писателями, председателями комиссий и влюбленными, которые часто замечают, что люди слышат от нас вещи, которых вы им не говорили. Итак, обобщая:

Любую цель люди понимают иначе, чем человек, ее указующий.

Следствие первое:

Если ясность вашего объяснения исключает ложное толкование, все равно кто-то поймет вас неправильно.

Следствие второе:

Если вы уверены, что ваш поступок встретит всеобщее одобрение, кому-то он не понравится.

Учет законов Чизхолма как решающих факторов при планировании любого процесса должен понизить всеобщее нервное напряжение и решить национальную проблему перепроизводства адреналина.

Ф. Чизхолм
(Из книги «Физики продолжают шутить»)

Олимпиады

XXIII Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. В. РЕЗНИЧЕНКО

В заключительном этапе XXIII Всесоюзной математической олимпиады, проходившем с 15 по 22 апреля 1989 года в Риге, приняли участие 30 команд: 14 команд союзных республик, по одной команде от каждой из четырех зон РСФСР, команды Москвы, Ленинграда, Риги и Рижского района и 8 команд специализированных школ-интернатов при ведущих университетах страны — 164 школьника (48 восьмиклассников, 62 девятиклассника и 54 десятиклассника).

Как обычно участникам олимпиады было предложено в каждом из двух туров по 4 задачи, на решение которых отводилось по 5 часов. Оценка сложности предложенных задач в баллах приведена в таблице 1.

В таблице 1 баллы характеризуют относительную сложность задач в пределах одного класса. В целом же, как позволяют заключить результаты проверки, задание для восьмиклассников оказалось слишком сложным; задания для 9 и 10 классов оказались хорошо сбалансированными и по сложности, и по тематике, они понравились школьникам, о чем свидетельствуют результаты опроса, проведенного жюри. О том, как участники справились с задачами олимпиады, можно узнать из таблицы 2, в которой указано число школьников, решивших каждую из задач.

По окончании проверки каждый участник олимпиады мог ознакомиться-

ся со своей работой и обсудить с членами жюри свои ошибки, оценку, выставленную за работу проверяющими. При этом иногда оценка работы изменялась. В таблице 3 приведены данные о количестве призов по каждому классу.

На олимпиаде устраивались и неофициальные мероприятия с участием членов жюри, в частности, ставшая

Таблица 1

Задачи \ Класс	Задачи								Сумма
	1	2	3	4	5	6	7	8	
8	7	6	10	7	6	8	8	8	60
9	5	6	10	9	6	7	8	9	60
10	5	7	9	9	5	7	8	10	60

Таблица 2

Задачи \ Класс	Задачи							
	1	2	3	4	5	6	7	8
8	13	24	5	14	23	6	7	10
9	49	22	6	16	34	25	14	15
10	47	40	7	8	47	31	23	7

Таблица 3

Премия \ Класс	Класс		
	8	9	10
I	3	4	2
II	9	10	11
III	9	11	7
Грамота, спецприз	7	7	13



Компьютерный турнир.

традиционной встреча школьников с членами редколлегии журнала «Квант», математический бой между командами школьников и жюри. Впервые был проведен компьютерный турнир, в котором участвовали 112 школьников — все, кто пожелал.

Работа олимпиады освещалась местной печатью, радиовещанием и телевидением. Культурная программа олимпиады включала экскурсии по Риге, в города Юрмалу, Елгаву и Бауску, на агрофирму «Адажи», в Этнографический музей, в Рундальский замок.

В целом олимпиада прошла на высоком научно-методическом уровне, была хорошо организована. Этому в немалой степени способствовала высокая квалификация ее организаторов из Латвии, в частности, четкая работа Оргкомитета по подготовке заключительного этапа олимпиады во главе с председателем Первым заместителем министра народного образования Латвийской ССР т. Кубули-

ня Б. А. Хочется сказать слова благодарности всем, кто помог организовать и провести Олимпиаду-89, в частности, спонсору олимпиады комплексному кооперативу «Интер».

Приводим задачи заключительного тура.

Первый день

8 класс

1. Каждый из семи мальчиков в воскресенье 3 раза подходил к киоску мороженого. Известно, что каждые два из них встречались около киоска. Докажите, что в некоторый момент около киоска одновременно встретились по крайней мере трое мальчиков.

А. Анджанс

2. Имеется 77 прямоугольных брусков размером $3 \times 3 \times 1$. Можно ли все эти бруски уложить в прямоугольную коробку размером $7 \times 9 \times 11$ (коробка с крышкой)?

А. Берзиньш

3. Пусть M — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC , со стороной AB . T — произвольная точка стороны BC , отличная от вершины. Докажите, что три окружности, вписанные в треугольники BMT , MTA и ATC , касаются одной прямой.

А. Анджанс

4. Натуральное число N имеет ровно 12 делителей (включая 1 и N). Занумеруем их в порядке возрастания: $d_1 < d_2 < \dots < d_{12}$. Известно, что делитель с номером $d_i - 1$ равен произведению $(d_1 + d_2 + d_4)d_n$. Найдите число N .

А. Берзиньш

9 класс

1. Имеется 2000 монет, из которых две — фальшивые: одна легче настоящей, а другая тяжелее. Как за четыре взвешивания на чашечных весах без гирь установить, что больше: суммарный вес двух фальшивых монет или суммарный вес двух настоящих монет: или же эти веса равны?

С. Августович

2. Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника и $a + b + c = 1$, то справедливо неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}.$$

Д. Тершин

3. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K и M соответственно. Пусть L — точка пересечения отрезков AM и KD , N — точка пересечения отрезков KC и BM .

а) Докажите, что если K и M — середины сторон AB и CD , то $S_{KLMN} < \frac{1}{3} S_{ABCD}$.

б) Докажите, что если $AK:KB = CM:MD = m:n$, то

$$S_{KLMN} < \frac{mn}{m^2 + mn + n^2} S_{ABCD}.$$

Д. Тершин

4. Из квадратиков 1×1 , 2×2 , 3×3 составили квадрат 23×23 . Какое наименьшее число квадратиков 1×1 могло быть при этом использовано?

Н. Агаханов

10 класс

1. При каком наименьшем натуральном n уравнение

$$\left[\frac{10^n}{x} \right] = 1989$$

имеет целое решение через $\{a\}$ обозначена целая часть числа a , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a)?

С. Гашков

2. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D , E , и F так, что $DE=BE$ и $FE=CE$. Докажите, что центр описанной около треугольника ADF окружности лежит на биссектрисе угла DEF .

В. Протасов

3. На одной из двух данных пересекающихся сфер взяты точки A и B , на другой — точки C и D . Отрезок AC проходит через общую точку сфер. Отрезок BD проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, содержащей центры сфер. Докажите, что проекции отрезков AB и CD на прямую AC равны.

И. Шарыгин

4. Два туриста находятся на одинаковой высоте (над уровнем моря) в точках A и B , расположенных по разные стороны от горной цепи. Путь по перевалу, соединяющий точки A и B , имеет форму ломаной, все вершины которой находятся выше ее концов A и B . Могут ли оба туриста пройти через весь перевал, оставаясь в любой момент времени на одинаковой высоте?

Е. Абикумов, Д. Фокин

Второй день

8 класс

5. На шахматной доске расставлены 8 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду клеток стоит по одной фигурке. Докажите, что на черных клетках шахматной доски стоит четное число фигур.

В. Проилов

6. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC зеленой краской отметили соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 , отличные от вершин треугольника. Оказалось, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A}$, а

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Докажите, что треугольник с зелеными вершинами подобен треугольнику ABC .

И. Шарыгин

7. В некоторой роще имеются $n \geq 3$ скворечников, причем все расстояния между скворечниками различны. В каждом из скворечников живет по скворцу. В какой-то момент некоторые из них покинули свои скворечники и перелетели в другие так, что снова в каждом скворечнике оказалось по скворцу. При этом если расстояние между какой-то парой скворцов было меньше расстояния между другой парой скворцов (один скворец может засчитываться в разных парах), то после перелета расстояние между первой парой скворцов стало больше

расстояния между второй парой. При каких n это возможно?

А. Берлиньш

8. Докажите, что все пятизначные числа, в записи которых каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5 встречается по одному разу, можно разбить на две группы с одинаковыми суммами квадратов.

Д. Фокин

9 класс

5. Существуют ли такие действительные числа a и b , что

а) число $a+b$ рационально, а число $a^n + b^n$ иррационально при любом натуральном $n \geq 2$;

б) число $a+b$ иррационально, а число $a^n + b^n$ рационально при любом натуральном $n \geq 2$?

Н. Агаханов

6. На квадратном потолке размером 1×1 м находится паук и муха. За одну секунду паук может переместиться в середину любого из четырех отрезков, соединяющих его с углами потолка. Муха неподвижна. Докажите, что за 8 секунд паук может приблизиться к мухе на расстояние менее 1 см.

В. Ильичев

7. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны. Треугольник $A'B'C$ получен из треугольника ABC поворотом вокруг точки C на некоторый угол. Докажите, что середины отрезков $A'D$, BC и $B'C$ лежат на одной прямой.

В. Протасов

8. Дан бесконечный лист клетчатой бумаги со стороной клетки 1. Докажите, что для любого натурального n существует многоугольник (не обязательно выпуклый) со сторонами, расположенными на линиях сетки, который можно разрезать на прямоугольники 2×1 ровно n различными способами.

В. Кукушкин, Д. Туляков

10 класс

5. Найдите наименьшее значение выражения $(x+y)(y+z)$ при условии, что x, y, z — положительные числа, удовлетворяющие равенству $xyz(x+y+z)=1$.

О. Христенко

6. Дан многогранник с четным числом ребер. Докажите, что на всех ребрах можно так расставить стрелки, чтобы в каждую вершину этого многогранника входило четное число стрелок.

О. Ляшко, О. Мусин

7. Существует ли функция $f(n)$, отображающая множество натуральных чисел в себя и удовлетворяющая при каждом натуральном $n > 1$ равенству

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1))?$$

Е. Барабанов, И. Воронович

8. Дан выпуклый многоугольник. Длина любого отрезка, соединяющего вершину этого многоугольника с некоторой точкой его границы и делящего его площадь пополам, не превосходит 1. Докажите, что площадь многоугольника меньше $\frac{\pi}{4}$.

С. Анисов, Д. Туляков

XXIII Всесоюзная олимпиада по физике

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

В этом году олимпиаду принимал Кишинев. Торжественное открытие заключительного этапа Всесоюзной физической олимпиады состоялось 13 апреля, а уже 14 апреля участники решали задачи теоретического тура.

Как обычно, восьмиклассникам было предложено 4 задачи (на 4 часа), а девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач (на 5 часов). Вот условия этих задач (большинство из них включено в «Задачник «Кванта» и опубликовано в 9 и 10 номерах журнала за этот год):

8 класс

1. В пространстве движется кубик (рис. 1). В данный момент грань $AB\Gamma$ горизонтальна, а скорости точек A и B направлены вертикально вниз и равны по модулю v . Известно, что скорость точки B в этот же момент равна по модулю $2v$. Какую максимальную по модулю скорость могут иметь в этот момент другие точки кубика?

2. Между двумя высокими гладкими кольцевыми стенками (рис. 2) находится колесная пара — два тяжелых диска массой M каждый, посаженных жестко на легкую ось длиной L ($L \approx R_2 - R_1$). Прилагая к оси горизонтально направленную силу, заставляют колесную пару двигаться по кругу без перекосов (так, что ось все время направлена по радиусу). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы пройти весь круг? Коэффициент трения колес о землю μ . Колеса считать узкими.

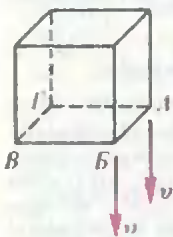


Рис. 1.

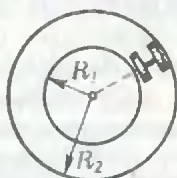


Рис. 2.

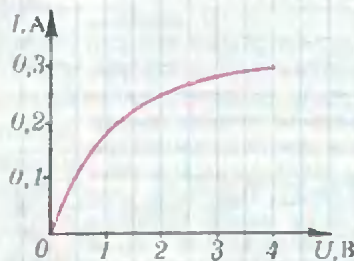


Рис. 3.

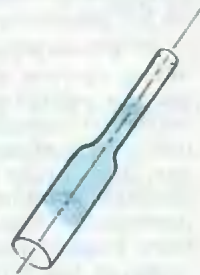


Рис. 4.

3. В большой комнате зимой поддерживается постоянная температура $t_k = +15^\circ\text{C}$ при помощи трех радиаторов центрального отопления, соединенных последовательно, по которым прокачивается горячая вода. При этом температура первого радиатора $t_1 = +80^\circ\text{C}$, а последнего — третьего — $t_3 = +30^\circ\text{C}$. Чему равна температура второго радиатора? Считайте, что теплообмен — как между радиатором и комнатой, так и между горячей водой и радиатором, пропорционален соответствующей разности температур.

4. Рабочее напряжение лампочки, вольт-амперная характеристика которой приведена на рисунке 3, равно 3,5 В (кривая обрывается при напряжении 4 В — лампочка перегорает). Две такие лампочки соединяют последовательно и подключают к мощному источнику напряжением 5 В. Какой ток при этом потечет по цепи? Какой резистор нужно подключить параллельно одной из лампочек, чтобы напряжение на другой составило 3,5 В? Перегорит ли какая-нибудь из лампочек, если этот резистор заменить еще одной такой же лампочкой?

9 класс

1. Во время высадки на поверхность маленького астероида сферической формы, удаленного от всех других космических тел, космонавты произвели салют, стреляя вертикально вверх. Ровно через 20 лет на астероид выпал град нуля. Средняя плотность астероида 5 г/см^3 , начальная скорость нуль 600 м/с . Определите по этим данным массу астероида.

2. Капилляр сделан из двух тонких стеклянных трубочек с внутренними диаметрами d_1 и d_2 , имеющих общую ось (рис. 4). В него ввели большую каплю воды массой M . Когда капилляр расположили горизонтально, вся капля «уползла» в тонкую часть, а когда его установили вертикально — вся вода из него вытекла. При каких углах между осью капилляра и вертикалью капля будет располагаться частью в толстой, а частью в тонкой трубке? Коэффициент поверхностного натяжения воды σ , плотность воды ρ . Смачивание считать полным.

3. Тонкостенная проводящая сфера радиусом R (рис. 5) подключена к источнику тонкими проводами, присоединенными в точках A и B ($AO \perp OB$). Ток через источник равен I_0 . В каком направлении движутся

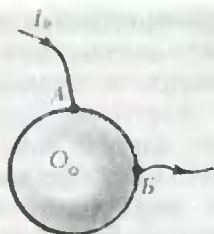


Рис. 5.

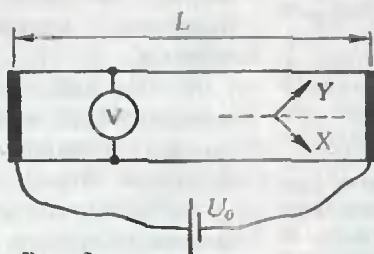


Рис. 6.

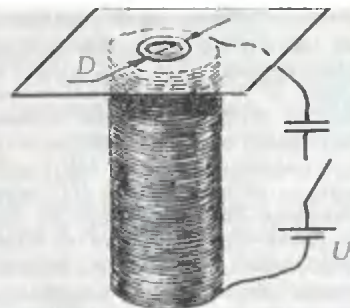


Рис. 7.

заряды в точке B ($OB \perp AO$ и $OB \perp BO$)? Сделаем на сфере около точки B две отметки так, чтобы расстояние между ними составляло $R/1000$, а соединяющий их отрезок оказался перпендикулярным направлению движения зарядов. Какая часть общего тока протекает по сфере между этими отметками?

4. Вертикальная труба высотой $H=1$ м и площадью поперечного сечения $S=50$ см² открыта с двух концов. В нижней части трубы установлен нагреватель мощностью $N=100$ Вт. Какая скорость восходящего потока установится в трубе? Считайте, что нагреватель не загромождает поперечное сечение трубы. Атмосферное давление $p=1$ атм, температура снаружи комнатная. Теплоемкость одного моля воздуха при неизменном объеме $C_V=2,5R$.

5. К батарее с внутренним сопротивлением $r=1$ Ом подключены последовательно два одинаковых конденсатора. Параллельно одному из них присоединяют резистор сопротивлением $R=1000$ Ом, при этом в схеме выделяется некоторое количество теплоты. Какая часть этого тепла выделится на внутреннем сопротивлении батареи?

10 класс

1. В отдаленной точке Вселенной вокруг звезды, очень похожей на Солнце, вращалась по круговой орбите планета, почти такая же, как Земля. Тамосиные физики провели ужасный эксперимент, направив с планеты на свою звезду мощный пучок протонов, причем часть этих протонов достигла цели. После эксперимента, длившегося несколько часов, заряды планеты и звезды больше не изменились, а орбита планеты изме-

нилась — теперь минимальное расстояние до звезды уменьшилось вдвое. Во сколько раз изменилась продолжительность года? Прежде заряды небесных тел были пренебрежимо малы.

2. См. задачу 4 для 9 класса.

3. При исследовании электрических свойств тонкой пластинки нового соединения было обнаружено, что его проводимость существенно анизотропна: вдоль одного направления (ось X) она максимальна, а вдоль перпендикулярного направления (ось Y) — минимальна. Из пластинки вырезали образец в виде полоски длиной L и шириной d ($L \gg d$) под углом 45° к направлению осей X и Y , и к концам полоски подключили источник с напряжением U_0 (рис. 6). Измерив напряжение между краями полоски в поперечном направлении, получили величину V ($V \ll U_0$). Определите отношение проводимостей вдоль осей X и Y .

4. На торце цилиндрического соленоида лежит тонкий лист картона, а на нем — маленькое сверхпроводящее кольцо из тонкой проволоки, диаметр которой d , существенно меньше диаметра кольца D (рис. 7). При подключении соленоида к источнику последовательно с конденсатором кольцо подпрыгивает при $U > U_0$. Каким должно быть напряжение источника в аналогичном опыте с кольцом такого же диаметра, но сделанного из проволоки толщиной d ? Индуктивность такого кольца с достаточной для практики точностью можно оценивать по формуле $L = kD \ln(1,4 D/d)$. Активное сопротивление соленоида считать малым.

5. Атомарный цезий испускает при возбуждении две близкие по частоте монохрома-

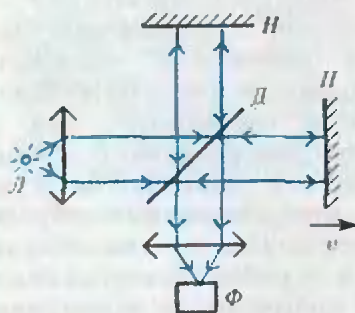


Рис. 8.

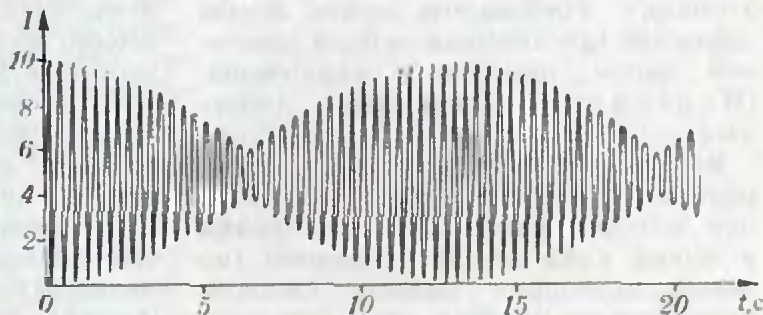


Рис. 9.

тические линии. Для анализа этого излучения в опыте используется интерферометр Майкельсона (рис. 8). Излучение цезиевой лампы L в виде параллельного пучка падает на полупрозрачное зеркало-делитель H . Далее излучение, частично отражаясь, попадает на неподвижное (H), а прошедшая его часть — на подвижное (II) зеркала. Затем отраженные от зеркал пучки собирают на поверхности фотоэлемента Φ , ток которого пропорционален мощности падающего на него потока. Зеркало II начинает двигаться от источника с постоянной по величине скоростью $v = 2 \cdot 10^{-6}$ м/с, и ток фотоэлемента со временем изменяется. График этой зависимости приведен на рисунке 9. Определите среднюю длину волны λ , разность длин волн $\Delta\lambda$ и отношение мощностей, испускаемых атомами цезия на этих длинах волн. Считать $\Delta\lambda \ll \lambda$.

В 8 классе наиболее сложной оказалась задача 3 — и по мнению членов жюри, и с точки зрения участников. (О мнении участников можно судить по результатам анкетирования — примерно каждый третий в каждом классе заполнил и сдал анкету, где оценил задачи по трудности и «интересности».) В 9 классе ребята выделили задачи 3, 4 и 5. В 10 классе подбор задач оказался относительно равномерным. Вообще в этом году задачи были труднее, чем раньше, особенно в 8 и 9 классах. Это отметили и руководители команд, однако их мнения о том, хорошо ли это, разделились.

После дня отдыха был проведен экспериментальный тур. Каждый участник решал две задачи, для работы отводилось 4 часа. В 8 классе были предложены механическая и электрическая задачи. Для решения первой из них участники получили довольно скудный набор приборов. Из стержней различной массы был сделан неразъемный треугольник. Требовалось найти массы стержней при помощи гирьки известной массы, линейки и карандаша. (Подсказка: карандаш (круглый) — хорошая опора для рычага.)

Во второй задаче нужно было определить сопротивление резистора при помощи амперметра, батарейки и куска нихромовой проволоки (из такой проволоки делают спирали электроплиток). Был дан штангенциркуль, при помощи которого мож-

но было измерить необходимые размеры, а удельное сопротивление нихрома приводилось в условии задачи.

В первой задаче для 9 класса нужно было измерить массу цилиндра из неизвестного материала при помощи блока, нити, набора гирек и миллиметровой бумаги. Трудность состояла в том, что даже суммарная масса гирек была меньше массы цилиндра. Подумайте сами, как решить задачу. (Подсказка: используйте условия равновесия, не забудьте о силах трения — разумный вариант решения позволяет эту проблему обойти.) При аккуратном выполнении работы вполне возможно получить точность не хуже 1—2%.

Во второй задаче требовалось определить мощность нагревателя при помощи калориметра, термометра и секундомера (и, разумеется, воды). Эта задача довольно проста по идее, однако требует грамотного подхода, позволяющего учесть теплообмен с окружающей средой и все «лишние» теплоемкости.

В 10 классе были предложены задачи по электричеству и по механике колебательного движения. В первой задаче требовалось найти емкость электролитического конденсатора (был дан конденсатор довольно большой емкости — 5000 мкФ, такие конденсаторы предназначаются обычно для работы в фильтрах выпрямителей, поэтому емкость их может сильно отличаться от номинальной в сторону увеличения — до 80%) при помощи резистора с известным сопротивлением и секундомера. Источником служили батарейки, а трудность была создана искусственно — вместо вольтметра предлагалось воспользоваться пороговым индикатором — светодионом (вольт-амперная характеристика светодиода, как и всякого полупроводникового диода, весьма крутая, и поэтому он ярко загорается при достижении определенного напряжения — для использованных в работе светодиодов АЛ-307 это напряжение составляет примерно 1,7—1,9 В). Для определе-

ния этого напряжения — в относительных единицах — можно было воспользоваться реостатом с равномерной намоткой провода и линейкой.

Во второй задаче нужно было исследовать колебательную систему, состоящую из закрепленного на оси стержня, который мог вращаться относительно этой оси в вертикальной плоскости, и вертикально расположенной пружины, которая удерживала стержень в горизонтальном положении равновесия, а также груза известной массы, который мог прикрепляться в разных точках стержня. Требовалось найти зависимость периода колебаний от положения прикрепленного груза и рассчитать на основе полученной зависимости период колебаний для другого груза — большей массы. Трудность задачи была в том, что и стержень, и пружина имели заметную массу.

Все задачи экспериментального тура по традиции готовились хозяевами олимпиады — учеными Кишинева. В анкетах экспериментальные задачи оценивались даже выше теоретических.

На следующий день, 17 апреля, был проведен серьезный разбор задач для участников с подробным изложением критериев оценки решений как теоретических, так и экспериментальных задач. Такой подход позволяет участникам сравнить полученные ими оценки с ожидаемыми и в случае их несовпадения обратиться в жюри с апелляцией. В этом году жюри принимало апелляции и по теоретическому, и по экспериментальному турам, что несколько усложнило работу комиссии, однако сняло многие вопросы. Тем, кто не участвовал в заключительном этапе олимпиады, может показаться, что уж зная решения задач можно «отследить» без труда сколько-нибудь баллов. Уверяю, что это не так, хотя на апелляции всякое бывает.

Торжественное закрытие олимпиады состоялось 19 апреля. Как обычно, участникам были вручены многочисленные призы, в том числе специальные — за лучшие теоретиче-

ские и экспериментальные работы, за оригинальные решения отдельных задач, за успешные выступления в течение нескольких лет, самому молодому из участников и участнику из самого отдаленного уголка страны. По установившейся традиции был вручен и специальный приз имени академика И. К. Кикоина — основателя физических олимпиад в нашей стране. Этот приз достался восьмикласснику из Винницы Сергею Джосюку за лучшую экспериментальную работу.

Из победителей олимпиады будет сформирована команда СССР для участия в Международной физической олимпиаде школьников 1990 года. Для этого на зимние сборы приглашены 13 человек — получившие дипломы I и II степени девятиклассники и один восьмиклассник из Тулы — Михаил Иванов, который обогнал других участников.

Желаем успехов всем участникам XXIII Всесоюзной физической олимпиады!

II Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

А. Н. ВИЛЕНКИН

Заключительный этап II Всесоюзной олимпиады школьников по информатике прошел с 15 по 22 апреля 1989 года. В столицу Белоруссии г. Минск в составе 19 команд (от союзных республик, МПС, Москвы, Ленинграда, Минска) приехали 82 школьника, победившие в предыдущих турах олимпиады или в I Всесоюзной олимпиаде.

Торжественное открытие олимпиады проходило в Республиканской школе-интернате по музыке и изобразительному искусству им. И. О. Ахремчика, ставшей основной базой олимпиады. Жюри олимпиады возглавлял академик АН БССР В. А. Лабунув. В тот же день участники олимпиады начали знакомиться с вычислительной техникой. Минчане предоставили достаточное число «Ямах» и ЕС1840. Большинство школьников выбрали «Ямаху», но некоторые предпочли более мощные персонально-профессиональные ЭВМ ЕС1840.

Первый тур олимпиады (теоретический) состоялся 17 апреля, второй (практический — на ЭВМ) — 19 апреля. В отличие от первой Всесоюзной олимпиады при оценке задач не вводился коэффициент, характеризующий трудность задачи (зависящий от числа участников, решивших эту задачу). Решение каждой задачи оценивалось в пределах 0—10 баллов, дополнительно начислялось до 5 баллов за особые достижения. Приведем условия задач.

Задачи теоретического тура

T1. По итогам работы составлены два списка по оценке трудового участия одних и тех же N сотрудников ($1 \leq N \leq 6$): первый — по решению трудового коллектива, второй — по мне-

нию начальника. Начисленная сотруднику премия определяется формулой:

$$S_i = i(N+1)^{-1} + 2i + 3j,$$

где i — номер сотрудника в списке коллектива, j — номер его в списке начальника.

Зная лишь сумму премий сотрудников и первый из списков, составить алгоритм, позволяющий установить второй список.

T2. Структура простого предложения имеет вид: [определение 1] подлежащее сказуемое [определение 2] [дополнение] [обстоятельство]; члены в квадратных скобках могут отсутствовать.

Сформулировать правила составления простого предложения и предложить алгоритм, генерирующий по ним все простые предложения из заданного вами словаря. Словарь состоит из 4-х групп слов (в каждой группе не менее двух слов): существительных, глаголов, прилагательных, наречий.

T3. На плоскости задано множество из l прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат, при этом каждый прямоугольник задается координатами левой нижней и правой верхней его вершин.

Составить алгоритм определения наибольшего натурального числа k , для которого существует точка плоскости, принадлежащая одновременно k прямоугольникам.

Примечание: эффективным считается алгоритм, число действий в котором пропорционально l^2 . Точка, лежащая на границе прямоугольника, принадлежит ему.

Упрощенный вариант: прямоугольники заменить отрезками на оси Ox .

Задачи практического (машинного) тура

M1. Написать программу определения количества $2l$ -значных билетов, у которых сумма



Машинный тур.



*Победители олимпиады (слева направо): И. Жильцов, Г. Че-
саков, Д. Козлов, Л. Новик,
И. Доголяцкий, В. Снар.*

первых l десятичных цифр равна сумме l последних десятичных цифр; при этом l — произвольное натуральное число.

Программа должна вывести на экран последовательность искомого количества для $l=1, 2, 3, \dots$ При оценке программы учитываются количество выведенных чисел (количество обработанных l).

М2. На столе лежит игральный кубик гранью i_0 к нам, гранью j_0 вверх. Написать программу, определяющую последовательность «кантований» кубика (вперед, назад, вправо, влево), после выполнения которых кубик окажется на прежнем месте, но гранью i_k к нам и гранью j_k вверх.

Примечание: под кантованием понимается перекачивание кубика через соприкасающееся со столом ребро без скольжения. Другие способы перемещения кубика запрещены.

Нумерация граней кубика такова, что если его положить на грань с цифрой «5», то боковые грани будут иметь номера «1», «6», «4», «3» при обходе по часовой стрелке, а верхняя — номер «2».

Задачи оказались неравноценными. 1168 баллов, набранные всеми 82 участниками олимпиады по итогам решения задач, распределились по задачам так: T1 — 337,5 балла; T2 — 379; T3 — 172,5; M1 — 254; M2 — 25. (Указания к задачам и критерии оценки каждой задачи приведены в конце журнала.)

Разбор задач проводился 20 апреля после обеда, затем рассматривались апелляции.

Вечером 21 апреля состоялось награждение победителей и закрытие олимпиады. Дипломы I степени получили 6 школьников (они набрали 49,5—30,5 балла), дипломы II степени — 9 школьников (27—19,5 балла), дипломы III степени — 10 школьников (19—16,5 балла). Многие школьники и команды были награждены призами общественных и научных организаций, в том числе призами журнала «Квант» (за высокую математическую культуру работы) А. Савченко (Могилев, с. ш. № 1, 10 кл.), И. Доголяцкий (Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.) и Д. Козлов (Ленинград, с. ш. № 566, 9 кл.). Лучшие командные результаты показали ленинградцы. Они, как и хозяева олимпиады, получили в награду компьютер МК-90.

Отрадно, что в этом году победители Всесоюзной олимпиады поехали на Международную олимпиаду по информатике (правда, команда состояла лишь из трех человек). Об этой олимпиаде мы планируем рассказать в одном из следующих номеров.

Призеры XXIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Амбайнис А. (Даугавпилс, с. ш. № 12),
Андерсон Г. (Рига, с. ш. № 1),
Малинникова Е. (Ленинград, с. ш. № 239);

по 9 классам —

Дубров Б. (Минск, с. ш. № 107),
Симановские Р. (Рига, с. ш. № 1),
Смогров Ю. (Рига, с. ш. № 1),
Соловьев И. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82);

по 10 классам —

Иванов Д. (Москва, с. ш. № 57),
Рогинская М. (Ленинград, с. ш. № 239).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Балашов О. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Гриншпон М. (Томск, с. ш. № 32),
Днестранский А. (Рязань, с. ш. № 2),
Ковачко А. (Винница, с. ш. № 6),
Кожаров Д. (Саранск, с. ш. № 4),
Перлин А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Рябичева О. (Киров, с. ш. № 8),
Хорошилов Ю. (Челябинск, с. ш. № 31),
Янсон М. (Сигулда, с. ш. № 1);

по 9 классам —

Абрамов Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Аржанцев И. (Киев, с. ш. № 145),
Барановский В. (Омск, с. ш. № 115),
Бачурин А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Вердиныш Р. (Рига, с. ш. № 1),
Городецкий А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Милгузис А. (Екабпилс, с. ш. № 1),
Пихурко О. (Нестерово, с. ш. № 1),
Разин М. (Запорожье, с. ш. № 28),
Стояновский А. (Москва, с. ш. № 57);

по 10 классам —

Андреанов Н. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Виро А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Всемирнов М. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Иванов С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Ли Р. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Процак В. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Скаорцов М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Скопенков А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Тервит Г. (Рига, с. ш. № 1),
Хасидовский М. (Ташкент, с. ш. № 110),
Шумакович А. (Ленинград, с. ш. № 239).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Браверман А. (Москва, с. ш. № 43),
Герасимов Д. (Бердск, с. ш. № 11),
Каспярвичуте Р. (Вильнюс, с. ш. № 7),
Кириллов И. (Усть-Каменогорск, с. ш. № 25),
Мишачев К. (Липецк, с. ш. № 14),

Наумович А. (Минск, с. ш. № 53),
Паков Т. (Киев, с. ш. № 145),
Юшкевич Ю. (Апатиты, с. ш. № 2),
Яценко Р. (Воронеж, с. ш. № 74);

по 9 классам —

Баринев Г. (Рига, с. ш. № 73),
Белянкина З. (Жодино, с. ш. № 7),
Богданов А. (Старый Оскол, с. ш. № 3),
Короткий А. (Днепропетровский, с. ш. № 20),
Мавлютов Р. (Набережные Челны, с. ш. № 12),
Насыров А. (Обнинск, с. ш. № 11),
Пилипенко А. (Киев, с. ш. № 145),
Цилевич Н. (Ленинград, с. ш. № 366),
Федотов А. (Красноярск, с. ш. № 41),
Шабес Д. (Минск, с. ш. № 13),
Щук С. (Ржев, с. ш. № 10);

по 10 классам —

Баранников С. (Москва, с. ш. № 57),
Гладышев А. (Красноярск, с. ш. № 101),
Гончаров И. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Дахов А. (Харьков, с. ш. № 24),
Фельдман Д. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Чуприна А. (Рязань, с. ш. № 64),
Шефтель И. (Ленинград, с. ш. № 302).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Джосюк С. (Винница, с. ш. № 17),
Добровольский С. (Днепропетровский, с. ш. № 13),
Иванов М. (Тула, с. ш. № 20),
Ляпин А. (Нальчик, с. ш. № 9),
Марташвили Л. (Тбилиси, с. ш. № 42),
Ненашев А. (Хабаровск, с. ш. № 2);

по 9 классам —

Иванов В. (Тула, с. ш. № 36),
Кузьменко В. (Ивано-Франковский, с. ш. № 1),
Мартин И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Чокин Д. (Алма-Ата, РФМШ),
Шинкевич С. (Березники, с. ш. № 3),
Эктин М. (Тула, с. ш. № 36);

по 10 классам —

Макеев В. (Алма-Ата, РФМШ),
Михайлов А. (Москва, с. ш. № 899),
Пластов А. (Саранул, с. ш. № 12),
Старокольцев Е. (Днепропетровский, с. ш. № 37),
Фалькович Д. (Москва, с. ш. № 57).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Дрибинский В. (Харьков, с. ш. № 24),
Катков А. (Канаш, с. ш. № 63),
Кулешов М. (Усть-Каменогорск, с. ш. № 17),
Литвак А. (Горький, с. ш. № 40),
Пузыня П. (Гродно, с. ш. № 19),
Саввиди К. (Ереван, ФМШ при ЕРГУ),
Тайманов С. (Раменское, с. ш. № 4),
Шагаров Е. (Грозный, с. ш. № 10),
Усольцев К. (Владивосток, с. ш. № 23);

по 9 классам —

Заркевич Н. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Капустин М. (Львов, с. ш. № 50),
Тамошюнас В. (Вильнюс, с. ш. № 45),
Трощенко А. (п/о Шентальское Краснодарского кр., с. ш. № 36),
Усинский А. (Ровенская обл., Вербская школа-интернат),
Шейнов В. (Ленинград, с. ш. № 566);

по 10 классам —

Гречко А. (Харьков, с. ш. № 24),
Гундарь В. (Свердловск, с. ш. № 9),
Зув К. (Вологда, с. ш. № 8),
Коршков А. (Мозырь, с. ш. № 8),
Кузьма Н. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1),
Мацукевич Д. (Минск, с. ш. № 107),
Нестеров И. (Челябинск, с. ш. № 31),
Столяр М. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Терещенко В. (Киев, с. ш. № 145),
Уваров Ю. (Ленинград, с. ш. № 239),
Храпов С. (Коломна, с. ш. № 30).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Аверин И. (Ташкент, с. ш. № 209),
Барышников Б. (Новгород, с. ш. № 1),
Вейтас Г. (Вильнюс, с. ш. № 45),
Денисов И. (Чаусский р-н Могилевской обл., Осиповская с. ш.),
Лукке Ю. (Красноярск, с. ш. № 174),
Романчук С. (Уральск, с. ш. № 35),
Рязанцев А. (Каменск-Уральский, с. ш. № 5),
Санкин Г. (пгт Саянск Иркутской обл., с. ш. № 1),

Субботин Д. (Москва, с. ш. № 57),
Токтогулов Э. (Фрунзе, с. ш. № 61),
Туровцев В. (Мичуринск, с. ш. № 21),
Чернышев А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 9 классам —

Высоцкий В. (Киев, с. ш. № 77),
Гайцгори Д. (Душанбе, с. ш. № 1),
Галицкий К. (Северодвинск, с. ш. № 17),
Горохов Д. (Ленинград, с. ш. № 66),
Жириков С. (пгт Уваровичи Гомельской обл., с. ш.),
Жук А. (Ровно, с. ш. № 15),
Жуков Р. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Потапенко Д. (Тольятти, с. ш. № 28),
Разилев Р. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Савченков А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Соколинский И. (Москва, с. ш. № 47),
Фридлянд А. (Саратов, с. ш. № 13),
Шитов А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ);

по 10 классам —

Атамановский А. (Лениногорск КазССР, с. ш. № 10),
Атанелишвили Т. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Бескровный В. (Донецк, с. ш. № 20),
Блайвас И. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Жданов А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Зазулинский О. (Павлодар, с. ш. № 3),
Ивинский А. (Саратов, с. ш. № 13),
Кожевников А. (Калуга, с. ш. № 24),
Мороз М. (Киев, с. ш. № 145),
Павлов С. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ).

Призеры II Всесоюзной олимпиады школьников по информатике

Дипломы I степени получили

Доголяцкий И. (Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.),
Жильцов И. (Свердловск, с. ш. № 37, 10 кл.),
Козлов Д. (Ленинград, с. ш. № 566, 9 кл.),
Новик Л. (Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.),
Саар В. (п. Нью ЭССР, Ньюсская с. ш., 12 кл.),
Чесаков Г. (Москва, с. ш. № 7, 10 кл.).

Дипломы II степени получили

Алиевский Д. (Свердловск, с. ш. № 36, 10 кл.),
Вайнштейн В. (Киев, ФМШ при КГУ, 10 кл.),
Варблане Р. (п. Нью ЭССР, Ньюсская с. ш., 11 кл.),
Гомолко А. (Москва, с. ш. № 7, 10 кл.),
Зайцев Ю. (Киев, с. ш. № 57, 9 кл.),
Карнитис Г. (Рига, с. ш. № 1, 8 кл.),
Менагаршвили Д. (Тбилиси, с. ш. № 42, 11 кл.),

Тарасюк В. (Киев, с. ш. № 57, 10 кл.),
Труу А. (п. Нью ЭССР, Ньюсская с. ш., 11 кл.).

Дипломы III степени получили

Датуашвили Г. (Тбилиси, с. ш. № 25, 11 кл.),
Зелвинский В. (Новосибирск, с. ш. № 130, 9 кл.),
Калашников В. (Москва, с. ш. № 52, 10 кл.),
Коровик Н. (Горький, с. ш. № 1, 10 кл.),
Линев С. (Минск, с. ш. № 35, 9 кл.),
Маггеррамов М. (Баку, с. ш. № 23, 9 кл.),
Морозов Ю. (Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 11 кл.),
Розис Р. (Рига, с. ш. № 50, 11 кл.),
Русанов Р. (Москва, с. ш. № 542, 9 кл.),
Савченко А. (Могилев, с. ш. № 1, 10 кл.).

Дифференциальная геометрия
Круг нас

- $L_1 = L$.
- $S_1 = S + rL + \pi r^2$.
- $V_1 = V + rS + r^2 I + \frac{4}{3} \pi r^3$, где I — интеграл средней кривизны по исходной поверхности.
- Обозначим угол сектора через α , его радиус — образующую конуса — через l . Тогда длина параллели равна αl . С другой стороны, радиус сечения сферы равен $l \sin \varphi$, а длина параллели равна $2\pi l \sin \varphi$. Значит, $\alpha = 2\pi \sin \varphi$.
- Геодезическая кривизна параллели постоянна. Длина параллели равна $2\pi R \cos \varphi$, а $r = R \sin \varphi$. Поэтому $\lim |L_1 - L| / rL = \frac{2\pi R \cos \varphi \cdot \frac{1}{2\pi R \cos \varphi}}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi$.

II Всесоюзная олимпиада
Математике

8 класс

- Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (это задача M1188).
- Ответ: нельзя. Указание. Если бруски можно было бы уложить в коробку, то каждый слой $11 \times 7 \times 1$ оказался бы заполненным, но это невозможно, так как число 11×7 не делится на 3.
- Указание. Пусть l — общая касательная к окружностям, вписанным в треугольники BMT и ATC (рис. 1). Докажите, что в четырехугольник $AMNP$ можно вписать окружность, т. е. что $AM + NP = MN + AP$. Для этого достаточно доказать равенство $MN + AP - NP = AM + AC - BC - AM$ и заметить, что $2AM = AB + AC - BC$.
- Ответ: $N = 1989$. Указание. Пусть d_1, d_2, \dots, d_{12} — все делители числа N , записанные в порядке возрастания. Тогда $d_i d_{13-i} = N$ при всех натуральных $i \leq 12$. Пусть $d_1 - 1 = k$. Число $d_1 + d_2 + d_3$ — делитель d_3 , и потому $d_1 + d_2 + d_1$ — делитель N , причем $d_1 + d_2 + d_1 \geq d_3$. Но тогда $d_1 = (d_1 + d_2 + d_1) d_3 \geq d_3 d_3 = N$, откуда следует, что $d_1 = N$, т. е. $k = 12$, $d_1 = 13$ и $d_3 = d_1 + d_2 + d_1 = d_2 + 14$. Поскольку d_2 — простое число, причем $d_2 \leq d_1 - 2 = 11$, осталось перебрать случаи $d_2 = 2, 3, 7, 11$ и убедиться в том, что $d_2 = 3$, $d_1 = 13$, $d_3 = 17$, причем больше трех простых делителей N иметь не может. Поэтому $d_3 = 9$ и $N = 9 \cdot 13 \cdot 17 = 1989$.

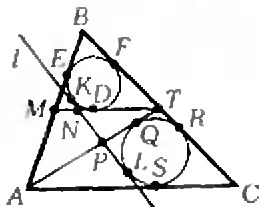


Рис. 1.

5. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (это задача M1186).

6. Проведем прямую $C_1M \parallel AC$ (рис. 2). Из условия и по теореме Фалеса $\frac{CM}{MB} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CB_1}{B_1A}$,

откуда следует, что $B_1M \parallel AB$ и, таким образом, AC_1MB_1 — параллелограмм. Далее, точки A_1, B_1, C_1 и M лежат на одной окружности. Если M лежит на отрезке A_1C_1 (рис. 2, а), то $\angle C_1B_1A_1 = \angle C_1MA_1 = \angle ACB$. Если M лежит на отрезке A_1B_1 (рис. 2, б), то $\angle C_1B_1A_1 = 180^\circ - \angle C_1MA_1 = \angle ACB$. В обоих случаях треугольники ABC и $A_1C_1B_1$ имеют соответственно равные углы и потому подобны.

7. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (это задача M1187).

8. Указание. Назовем две группы k -значных чисел дружными, если в них содержится поровну чисел, причем и суммы, и суммы квадратов входящих в эти группы чисел равны. Достаточно доказать, что все пятизначные числа, составленные из цифр 1, 2, 3, 4, 5, можно разбить на две дружные группы. Все трехзначные числа, составленные из трех различных цифр, не равных 0, можно разбить на две дружные группы: $\{abc, cab, bca\}$ и $\{acb, bac, cba\}$.

Осталось воспользоваться следующей леммой. Лемма. Пусть $\{A_1, \dots, A_N\}$ и $\{B_1, \dots, B_N\}$ — две дружные группы k -значных чисел, d — произвольная цифра, не равная 0. Тогда группы $(k+1)$ -значных чисел $\{A_1^*, \dots, A_N^*\}$ и $\{B_1^*, \dots, B_N^*\}$ (где $A_i^* = A_i + d \cdot 10^k$, $B_i^* = B_i + d \cdot 10^k$, $i = 1, \dots, N$) — также дружные.

9 класс

1. Разобьем монеты на 4 группы по 500 штук и обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4 суммарные веса монет в этих группах. Сравним A_1 с A_2 и A_3 с A_4 . Достаточно рассмотреть три случая: 1) $A_1 = A_2, A_3 = A_4$. Тогда обе фальшивые монеты лежат в одной группе, и их суммарный вес равен весу двух настоящих монет. В этом случае достаточно двух взвешиваний.

2) $A_1 = A_2, A_4 > A_3$. Тогда обе фальшивые монеты находятся среди монет третьей и четвертой групп. Образует две новые группы по 1000 монет, объединив первую группу со второй, а третью — с четвертой. Сравним суммарные веса монет во вновь образованных группах, получим ответ на вопрос задачи. При этом понадобится три взвешивания.

3) $A_1 > A_2, A_4 > A_3$. В этом случае могут представиться две возможности: либо тяжелая монета находится в первой группе, а легкая —

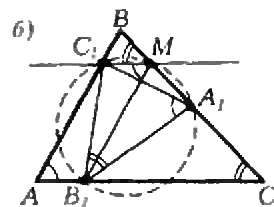
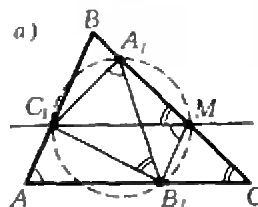


Рис. 2.

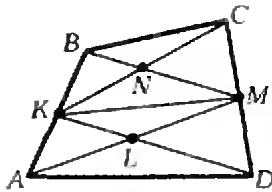


Рис. 3.

в четвертой, либо тяжелая монета находится в третьей группе, а легкая — во второй. Сравнив A_1 с A_4 , узнаем, какая из этих возможностей реализуется на самом деле. После этого, сравнив $A_1 + A_4$ с $A_2 + A_3$, получим ответ на вопрос задачи. В этом случае нужно выполнить четыре взвешивания.

2. Пусть S — площадь треугольника со сторонами a, b, c . По формуле Герона

$$S = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{1}{2} - b \right) \left(\frac{1}{2} - c \right)}, \text{ откуда}$$

$$16S^2 = -1 + 4(ab + bc + ca) - 8abc.$$

Кроме того, $4(ab + bc + ca) = 2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)$, и потому

$$16S^2 = 1 - 2(a^2 + b^2 + c^2) - 8abc > 0.$$

3. а) Утверждение этого пункта — частный случай утверждения пункта б) при $m = n = 1$.

б) Обозначим площадь четырехугольника $ABCD$ через S , площади треугольников ABC, BCD, CDA, DAB — через b, c, d и a соответственно (рис. 3); площади треугольников AMB, DKC — через S_1 и S_2 . Пусть также $S_3 = S_{AKMP}, S_4 = S_{KBCM}$ и $\alpha = \frac{m}{m+n}$. Тогда $S_1 = \alpha a + (1-\alpha)b, S_2 = \alpha c + (1-\alpha)d, S_3 = \alpha S_1 + (1-\alpha)d, S_4 = \alpha S_2 + (1-\alpha)b$.

Вычисляя $S_{KLM} = \alpha(1-\alpha) \frac{S_1 S_2}{S_3}$ и $S_{KMN} = \alpha(1-\alpha) \frac{S_1 S_2}{S_4}$, получим $S_{KLMN} = \alpha(1-\alpha) \frac{S_1 S_2}{S_3 S_4} S$.

Неравенство $S_{KLMN} < \frac{\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha+\alpha^2} S$ равносильно неравенству $(1-\alpha+\alpha^2)S_1 S_2 < S_3 S_4$. Подставляя вместо S_1, S_2, S_3, S_4 их выражения через a, b, c, d , приходим к неравенству $\alpha(ab+cd-ac) + (1-\alpha)(b^2+d^2+bd-ad-bc) > 0$, так что достаточно доказать, что $ab+cd-ac > 0$ и $b^2+d^2+bd > ad+bc$, для чего заметим, что

$$ab+cd > S \min(a, c); \quad ad+bc \leq S \max(b, d) = \max(b, d)(b+d) < b^2+d^2+bd.$$

4. Ответ: мог быть использован один квадратик 1×1 .

Раскрасим квадрат 23×23 , как показано на рисунке 4. Тогда будет закрашено нечетное число квадратиков 1×1 , но каждый квадрат 2×2 и 3×3 содержит четное число закрашенных квадратиков 1×1 . На рисунке 5 показано, как можно составить квадрат 23×23 , используя ровно один квадратик 1×1 .

5. а) Ответ: существуют, например, $a = 2 + \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$.

б) Ответ: не существуют. Предположим про-

тивное. Пусть числа a и b удовлетворяют условию задачи. Тогда $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Из тождества $a^2 b^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2 - \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2$ следует, что

число $a^2 b^2$ рационально, а из тождества $a^2 + b^2 = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2) - a^2 b^2(a + b)$ следует, что число $a + b$ рационально. Противоречие!

6. Введем прямоугольную систему координат в плоскости потолка с началом в одной из вершин потолка-квадрата и осями, идущими по его сторонам. За единицу длины возьмем 1 м. Пусть $(x; y)$ — начальное положение пау-

ка. Рассмотрим множество точек $\Pi_i = \left\{ \left(\frac{x+i}{2^k}; \frac{y+j}{2^k} \right) \right\}$, где i, j — целые числа, $0 \leq i < 2^k, 0 \leq j < 2^k$.

Оно представляет собой сеть в квадрате с ячейками размером $\frac{1}{2^k}$ м (на рисунке 6 точки Π_i отмечены звездочками, точки Π_j — крестиками; Π_0 , очевидно, состоит из одной точки $(x; y)$).

Для любой точки квадрата найдется точка в множестве Π_k , удаленная от нее на расстояние,

не большее $\frac{\sqrt{2}}{2^k}$ м, причем в каждую

точку множества Π_k паук может попасть за k перемещений (докажите это по индукции).

7. Пусть, для определенности, треугольники ABC и $A'B'C'$ расположены так, как показано на рисунке 7 (остальные случаи рассматриваются аналогично), K — середина отрезка $B'C'$, M — середина BC . Треугольники CMD и $B'KA'$ равны. Отсюда следует, что $\angle CMD = \angle B'KA'$. Треугольник MCK равнобедренный, поэтому $\angle MKC = \angle KMC$, но тогда $\angle A'KM = \angle DMQ$, откуда следует, поскольку $A'K \parallel DM$, что точки A' и D равноудалены от прямой MK .

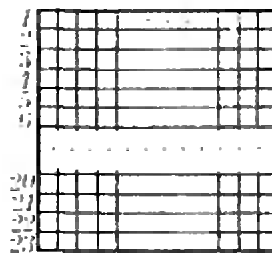


Рис. 4.

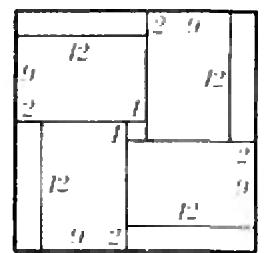


Рис. 5.

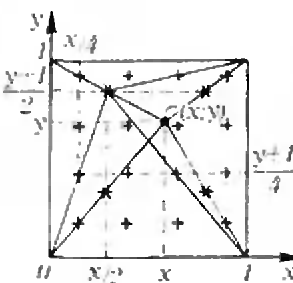


Рис. 6.

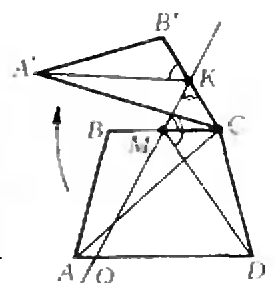


Рис. 7.

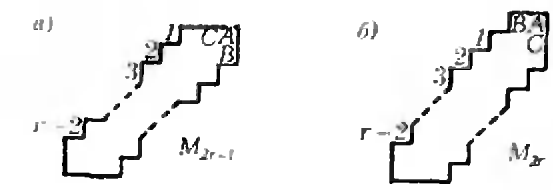


Рис. 9.

8. Указание. На рисунке 8 показаны фигуры, которые можно разрезать на прямоугольники 2×1 соответственно одним, двумя, тремя и четырьмя способами. На рисунках 9, а и 9, б изображены фигуры M_n ($n \geq 5$), которые можно разрезать на прямоугольники 2×1 ровно n способами. Действительно, если от фигуры M_n отрезать две клетки, обозначенные буквами А и С, то оставшаяся фигура, как легко видеть, может быть разрезана на прямоугольники 2×1 единственным способом. Если же от фигуры M_n отрезать две клетки, обозначенные буквами А и В, то получится фигура M_{n-1} .

10 класс

1. Ответ: при $n=7$.
 2. Как видно из рисунка 10, $\angle DEF = 180^\circ - (180^\circ - 2\angle B) - (180^\circ - 2\angle C) = 180^\circ - 2\angle A$, т. е. угол А — острый. Следовательно, центр O описанной около треугольника ADF окружности и вершина A лежат по одну сторону от FD , и поэтому $\angle DOF = 2\angle A = 180^\circ - \angle DEF$. Отсюда следует, что точки O, D, E и F лежат на одной окружности; значит, $\angle DEO = \angle DFO = \angle FDO = \angle FEO$, т. е. EO — биссектриса угла DEF .

3. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (это задача M1180).

4. Ответ: могут. Указание. Без ограничения общности можно считать, что вся ломаная (путь через перевал) лежит в одной вертикальной плоскости, а каждое ее звено (склон) составляет с горизонталью угол 45° . Определим следующие правила движения: оба туриста идут с постоянной скоростью все вре-

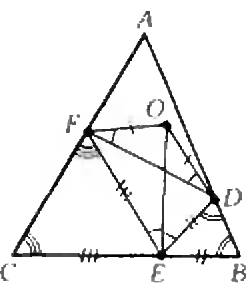


Рис. 10.

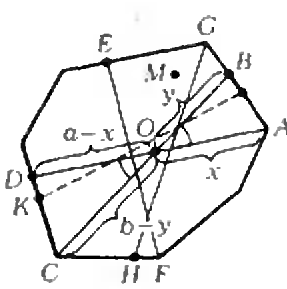


Рис. 11.

мя, пока это возможно (при условии их нахождения на одинаковой высоте); если же кто-то из туристов не может идти в прежнем направлении (по горизонтали), то он поворачивает в противоположную сторону. Докажите, что двигаясь по этим правилам, оба туриста доберутся до противоположных концов ломаной.

5. Решение этой задачи было опубликовано в «Кванте» (это задача M1158).

6. Указание. Расставим стрелки на ребрах данного многогранника произвольно. Тогда количество вершин, в которые входит нечетное число стрелок (назовем такие вершины нечетными), будет четным. Выберем пару «нечетных» вершин A_i и A_j (если таковые найдутся) и пройдем по ребрам многогранника из A_i в A_j , меняя на пройденных ребрах направления стрелок. В результате A_i и A_j перестанут быть «нечетными», тогда как множество остальных «нечетных» вершин не изменится. Повторив указанную операцию необходимое число раз, мы добьемся того, что «нечетных» вершин не останется вовсе.

7. Ответ: не существует. Указание. Если бы такая функция существовала, то среди ее значений при $n > 1$ нашлось бы наименьшее значение $f(n_0) > 1$, для которого (из условия) имели бы

$$f(n_0) > 1 + f(n_0).$$

8. Указание. Назовем медианой любой из описанных в условии отрезков. Направление границы многоугольника по часовой стрелке будем называть правым, а против часовой стрелки — левым.

Проведем все медианы многоугольника и заметим, что любые две медианы пересекаются внутри него. Будем двигаться по границе многоугольника влево от конца А медианы AD. Если конец В медианы BC окажется ближайшим слева к точке А (рис. 11), то и конец С окажется ближайшим слева к точке D (докажите!). Таким образом, соседние медианы BC и AD образуют «бабочку» — фигуру, составленную из треугольников AOB и COD. Площади треугольников AOB и COD равны. Площадь «бабочки» равна

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} xy \sin \alpha + \frac{1}{2} (a-x)(b-y) \sin \alpha = \\ &= \frac{ab \sin \alpha}{4} + \left(\frac{a}{2} - x\right) \left(\frac{b}{2} - y\right) \sin \alpha, \end{aligned}$$

где $AD=a, BC=b, x=OA, y=OB, \angle BOA=\alpha$, причем $\alpha < \frac{\pi}{4}$, поскольку $a \leq 1, b \leq 1, a \left(\frac{a}{2} - x\right) \left(\frac{b}{2} - y\right) \leq 0$.

Двигаясь дальше по границе многоугольника влево от точки В до точки D, мы получим поочередно все «бабочки», образованные соседними медианами. Сумма площадей этих «бабочек», согласно доказанному, будет меньше четверти суммы соответствующих им углов, т. е. меньше $\pi/4$.

Осталось доказать, что «бабочки» полностью покрывают многоугольник.

II Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

T1. Сложив все премии (для i от 1 до N), мы найдем, что члены $2i+3j$ в сумме дадут $5N(N+1)/2$, а остальная часть — запись в системе счисления с основанием $N+1$ номеров сотрудников в списке коллектива в порядке, обратном списку начальника. За алгоритм, использующий эту идею (например, деление на $N+1$ и выделение дробной части и т. д.; см. «Квант» № 5 за 1989 г., с. 66, 70), давалось 10 баллов, за переборный ($N!$ перестановок) — от 3 до 7 баллов.

T2. За формулировку правил давалось 4 балла, за алгоритм — еще 6.

T3. Надо спроектировать вертикальные стороны прямоугольника на ось x (это даст $2n$ точек: x_1, x_2, \dots, x_{2n}), а горизонтальные — на ось y (тоже $2n$ точек: y_1, y_2, \dots, y_{2n}), и для каждого «узла» (x_i, y_j) определить, скольким прямоугольникам он принадлежит (n проверок); это и дает порядка n^3 действий. Перебор разных наборов прямоугольников дает 2^n действий. За решение с проведением «частой сетки» (были и такие) давался 1 балл, с перебором — 2 балла, с рассмотрением узлов — 10 баллов. Два школьника уложились в n^2 действий, используя такую идею: спроектировав стороны на ось x , они их занумеровали подряд, заведя при этом массивы указаний, какой прямоугольник начинается или кончается (при совпадении проекций сначала брались левые стороны), а тогда каждый просмотр по горизонтали (для точек y_j ; $2n$ просмотров) требует лишь порядка $2n$ действий. За такое решение жюри дало 15 баллов.

M1. Пусть P_{2n} — число искоемых «счастливых» $2n$ -значных чисел; $S_i(k)$ — число i -значных чисел с суммой цифр k . Тогда

$$P_{2n} = \sum_{k=0}^{9n} (S_n(k))^2,$$

$$S_{n+1}(k) = \sum_{j=0}^{\min(k,9)} S_n(k-j).$$

Первая формула отражает разбиение $2n$ -значных счастливых чисел на группы с требуемыми суммами цифр, равными 0, 1, ..., $9n$; вторая — разбиение $n+1$ -значных чисел с суммой цифр k на группы чисел с первой цифрой 0, 1, ..., 9 (или k , если $k < 9$). Вторая формула позволяет быстро построить таблицу $S_n(k)$. Эти числа быстро растут и на Бейсике при $n > 7$, а на Паскале при $n > 6$ выходят за пределы диапазона целых чисел, допускаемых компьютером, поэтому надо использовать специальные программы для работы с большими

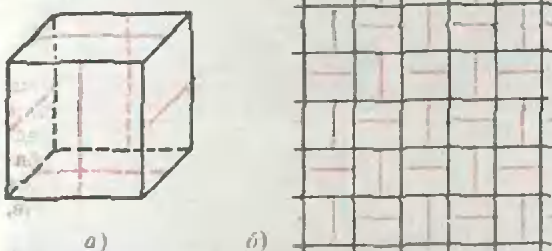


Рис. 12.

целыми числами. Пределом возможностей участников олимпиады было, видимо, $n=60$ (на компьютерах с доступным объемом памяти 64К за отведенное время). За перебор $2n$ -значных чисел давалось не более 3 баллов, за перебор n -значных чисел (с использованием формулы для P_{2n}) — не более 6 баллов. В зависимости от достигнутых n ставились такие оценки: $n=1$ — 1 балл, 2 — 2, 3 — 3, 4 — 5, 5 — 7, 6 — 9, >6 (на Паскале с округлением машиной полученных чисел, >7 на Бейсике) — 10; дальше шли три программы со специальной арифметикой: $n=10$ — 12 баллов, $n=15$ — 13 баллов, $n=28$ — 15 баллов.

M2. В половине случаев перекантовать кубик в требуемое положение не удастся. Это следует из такого соображения. Нарисуем на гранях кубика красные линии (рис. 12, а); ребра кубика закрасим черным. Пусть при перекатовывании кубика на столе остаются черные и красные отпечатки (рис. 12, б). Тогда горизонтальные и вертикальные красные отрезки чередуются, и вернуть кубик на место так, чтобы впереди была горизонтальная линия, невозможно (например, невозможно повернуть кубик на 90°). При совпадении «ориентаций» данного и требуемого положений достаточно 4 или 8 кантований (иногда 6).

При проверке программ члены жюри задавали 4 варианта нового положения кубика (совпадающее с исходным, невозможное, достигаемое за 4 кантования, достигаемое за 8 кантований) и катали кубик согласно указаниям компьютера. Ненулевые оценки получали лишь 5 участников олимпиады. 10 баллов было дано за такие результаты: 28 кантований (вместо 4), 12 (вместо 8), сообщение 0 (исходное), сообщение ∞ (невозможное). Другие программы не выдерживали каких-либо из этих тестов и получили 3—4 балла.

Интересно, что в этой задаче простой перебор кантований (с экономией за счет требования возврата на прежнее место и не перекатовывания вперед-назад) быстро давал бы ответ (если требуемое положение достижимо), но как раз здесь никто из участников олимпиады составить переборную программу не отважился.

Калейдоскоп «Кванта»

(ж. «Квант» № 10)

Вопросы и задачи

1. Необходимо, чтобы процессы протекали без теплообмена с окружающей средой и без совершения работы за счет изменения объема.
2. Нет, так как удельные теплоемкости воды и алюминия различны.
3. Теплоемкость пилы меньше, чем дерева.
4. Изменения температур кофе и молока обратно пропорциональны их массам. Поэтому при добавлении, скажем, 10 г молока при 5°C в чашку кофе — 200 г при 95°C — температура кофе понизится меньше чем на 5°C .
5. У воздуха меньшая, чем у воды, удельная теплоемкость, поэтому воздушная грелка быстро охлаждается.
6. Изменения температур меди и железа обратно пропорциональны их удельным тепло-

емкостям. Поэтому сильнее нагреется медное тело.

7. Нет, поскольку помимо одинакового изменения внутренней энергии потребуется совершить различную работу при подъеме центра тяжести первого ($A_1 > 0$) и опускании второго ($A_2 < 0$) шара.

8. Нет; надо учитывать совершенную газом работу.

9. Да, если тело будет совершать работу (или переходить в иное агрегатное состояние).

10. Процессы 1—2 и 4—1 протекают с поглощением теплоты, 2—3 и 3—4 с теплоотдачей.

11. Во втором случае подводимая энергия расходуется не только на нагревание газа, но и на совершение механической работы.

12. Из-за превращения части внутренней энергии в механическую работу, совершаемую при расширении газа, его температура будет понижаться.

13. Теплый воздух, поднимаясь по склонам гор, попадает в область более низкого атмосферного давления, расширяется и охлаждается.

Микроопыт

Сжатый в бутылке газ быстро расширяется, совершая работу против сил атмосферного давления, его температура падает, и часть содержащегося в газе водяного пара конденсируется в виде тумана. Подобная картина наблюдается при выпуске сжатого газа из баллона, когда вентиль покрывается росой или даже инеем.

«Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 10)

1. 6 дней.

2. Если Людмиле $10x + y$ лет, то ее прадеду $100x + y$ лет, и $60x + 6y = 100x + y$. Отсюда $8x = y$. Людмиле 18 лет.

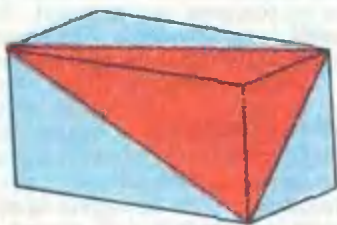


Рис. 13.

3. Раз число делится на 5, то оно оканчивается на 0 или на 5, но 0 быть не может. Заметим, что число должно при этом делиться на 25, при этом вторая цифра — либо 2, либо 7. Но 2 быть не может, так как в этом случае число должно было бы оканчиваться на 0. Осталось найти первую цифру. Обозначим ее через x ; тогда $100x + 70 + 5 = 5 \cdot x \cdot 7 \cdot 5$. Отсюда $x = 1$. Искомое число равно 175.

4. $540498 + 60898 + 142058 = 743454$.

5. Шестиугольник разрежем на три параллелограмма (см. рис. 13). В каждом из них половину площади занимает красный треугольник и половину — синий.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:

А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкии, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
И. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:

А. М. Балдин, С. Т. Белаяев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурина, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. И. Буздин, А. Н. Виленики,
А. А. Егоров, Л. В. Кардаевич,
Н. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:

М. В. Дубак, С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров,
И. Е. Смирнова, Л. А. Тишков, П. И. Чернуский,
В. В. Юдия

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-64

Сдано в набор 24.08.89. Подписано к печати 17.10.89.
Т-16644. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,43. Усл. кр.-отт. 27,08. Уч.-изд. л. 7,87.
Тираж 127 829 экз. Заказ 1938. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР по печати
142300, г. Чехов Московской области

45 коп.

Индекс 70465

095-43

Самая симметричная фигура, образуемая из змейки Рубика из 24 секций (призм) — усеченный октаэдр. Для продажи ее стали упаковывать именно в таком виде. Если взять змейку в два раза длиннее, состоящую из 48 секций, то нетрудно сложить «ребристый» октаэдр (рис. 1). Внутри него имеется свободное место как раз для октаэдра из одной короткой змейки. Если бы мы имели бесконечное число змеек, то скрутив каждую из них в усеченный октаэдр, можно было бы выстроить их в бесконечную цепь. Оказывается, такую цепь можно построить и из двух «бесконечных» змеек. Для этого одну из них (например, желто-зеленую)

следует свить в спираль (рис. 2). Тогда спираль, свитая из другой (красно-синей) змейки, заполняет промежутки между витками. Фрагмент такой цепи, образованный из двух стандартных змеек, показан на рисунке 3, а на рисунке 4 дана схема того, как этот фрагмент повторяется периодически.

Можно ли заполнить пространство а) конечным числом бесконечных змеек? б) «змеиными» усеченными октаэдрами? Ответить на эти вопросы, требующие не только целой «орды» змеек, но и немалого геометрического воображения, предоставляем читателю.

А. Азамов

