

# Квант

Научно-популярный  
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



«Кванту» — двадцать лет

1036

1970 1990



Выходит с января 1970 года

Ежемесячный  
научно-популярный  
физико-математический  
журнал Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Москва, «Наука»  
Главная редакция физико-  
математической литературы

## В номере:

- 2 «Кванту» — двадцать лет  
7 *И. Капица*. О сверхтекучести жидкого гелия II  
15 *Л. Асламазов*. Снежные заносы  
16 *Н. Васильев*. Метрические пространства  
24 *А. Стасенко*. Волны на воде и «Заморские гости» Н. Рериха  
30 *Д. Фукс*. Лента Мёбиуса
- Задачник «Кванта»**  
38 Задачи M1201 — M1205, Ф1208 — Ф1212  
40 Решения задач M1176 — M1180, Ф1188 — Ф1192  
47 Список читателей, приславших правильные решения
- «Квант» для младших школьников**  
Задачи  
50 *А. Савин*. Камушки и шахматная доска
- Школа в «Кванте»**  
54 *В. Дубровский*. Шесть доказательств теоремы о медианах
- Лаборатория «Кванта»**  
57 *В. Драчев, А. Мазур*. Фотокамера «Рыбий глаз»
- Математический кружок**  
59 *М. Башмаков*. О постулате Бертрана
- Практикум абитуриента**  
63 *И. Слободецкий*. Электрические машины постоянного тока  
68 **Варианты вступительных экзаменов**
- Информация**  
72 Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу  
74 Избранные задачи Ленинградской городской математической олимпиады 1989 года  
75 Компьютерный турнир XXIII Всесоюзной олимпиады по математике  
76 **Ответы, указания, решения**
- Наша обложка**  
1 *Двести сорок первая 1-я страница.*  
2 *Репродукция картины Макса Эрнста «Au premier mot littride» (1923). Мы не беремся за точный перевод авторского названия, а от себя предлагаем такое: «Отображение двух метрических пространств» (см. статью Н. Васильева).*  
3 *Шахматная страничка.*  
4 *Головоломка «Солнце».*



Вот Квант, который построил Исаак,  
А вот ученица,  
Которая изредка любит хвалиться,  
Что все понимает на целой странице  
В Кванте, который построил Исаак.



Вот автор статьи — знаменитый ученый,  
Который писал ее так увлеченно  
Для этой без меры серьезной девицы,  
Которая изредка любит хвалиться,  
Что все понимает на целой странице  
В Кванте, который построил Исаак.



А вот рецензент — давний член редсовета,  
Который прочел сочинение это,  
Представив себя симпатичной девицей,  
Которая тщетно мурыжит страницу,  
Пытаясь понять то, о чем говорится  
В Кванте, который построил Исаак.



А это редактор, статью эту правивший,  
Лишь автора имя на месте оставивший,  
Чтоб даже тупейшая в мире девица  
Смогла хоть единожды в год похвалиться,  
Что все понимает на целой странице  
В Кванте, который построил Исаак.



А это художник в глубокой протрации  
Пытается выдумать те иллюстрации,  
Которые так очаруют девицу,  
Что сходу она прочтает страницу  
В Кванте, который построил Исаак.



Вот главный редактор — большой  
академик,  
Он правит (за это не требуя денег),  
Чтоб делалось все только так и вот так,  
Поскольку он есть этот самый Исаак,  
Который по уши влюбился в девицу,  
Которая пальчиком тычет в страницу,  
Пытаясь понять то, о чем говорится  
В Кванте, который построил Исаак.

Это стихотворение было опубликовано в спецвыпуске журнала «Квант», изданном в единственном экземпляре в 1983 году к 75-летию академика И. К. Кикоина. Автор стихотворения — член редакционной коллегии нашего журнала А. П. Савин.

# «КВАНТУ» — ДВАДЦАТЬ ЛЕТ

Перед учеными всегда стоит очень важная задача — искать таланты и помогать их быстрому развитию. Первым «инструментом» такого поиска в области физико-математических наук стали школьные олимпиады. В 30-х годах их начали проводить некоторые институты в Москве, Ленинграде, Новосибирске, а в 60-х годах олимпиады приобрели всесоюзный масштаб.

Появились физико-математические школы-интернаты, вечерние и заочные школы. И наконец, новый этап — первый научный журнал для школь-

ников. Идея его издания возникла в 60-х годах и принадлежала молодым ученым, имевшим большой опыт работы со школьниками. Это было время всплеска интереса к физике и математике, вызванного успехами в космосе, бурным развитием ядерной физики, физики твердого тела, ЭВМ.

Зачем создавался журнал? Об этом можно судить, прочитав письмо в ЦК КПСС шести академиков, выдающихся советских физиков и математиков, поддержавших идею молодых ученых. Письмо публикуется с сокращениями.

*Известно, что наука успешно развивается только в том случае, когда научно-исследовательские институты пополняются хорошо отобранной талантливой молодежью. Чтобы этот отбор был наиболее успешным, нужно уже со школьной скамьи воспитывать у нее те основные черты, которые необходимы для активной научной работы. Этими чертами являются: творческое воображение, смелость и любовь к изысканиям. Развивать их в полной мере сейчас для нашей школы — непосильная задача. К тому же такого воспитания будет требовать только сравнительно небольшая часть наших школьников. Чтобы охватить по возможности все наши школы, надо создать специальный журнал. В отличие от существующих у нас хороших научно-популярных журналов для молодежи, таких как «Техника — молодежи», «Знание — сила», «Наука и жизнь», предлагаемый журнал должен ставить своей основной задачей развитие у школьников творческого интереса к науке и воспитание активного восприятия знаний и умения связывать теорию с практикой. Хотя такое воспитание и следовало бы производить по всем областям естественных наук, сейчас мы предлагаем начать с издания физико-математического журнала.*

*Этот журнал должен быть предназначен для руководства и систематической помощи учащимся в самостоятельной работе по физике и математике. Он должен направлять внеклассную работу, проводимую в предметных кружках школ и домов пионеров, установить непосредственный контакт с учащимися...*

*Для осуществления этой цели журнал должен будет публиковать обширный материал, накопленный в физико-математических школах и кружках при ведущих вузах страны, наиболее интересные и поучительные задачи физико-математических олимпиад, а также все лучшее, что появляется по этим вопросам в зарубежной печати. Журнал также предоставит возможность школьникам публиковать свои статьи, задачи и описания приборов, которые они сами строят...*

*При журнале должна быть создана группа молодых ученых, могущих внимательно вести переписку как со школьниками, так и с их учителями и таким путем направлять и стимулировать со школьной скамьи самостоятельную работу учеников. Журнал мог бы иметь группу инспекторов-консультантов, которые могли бы ездить по школьным кружкам и направлять их работу. Журнал должен руководиться*

редакцией, состоящей в основном своем большинстве из ученых, а не из педагогов.

Во главе журнала должно стоять авторитетное лицо — академик. Желательно, чтобы Академия наук взяла шефство над этим журналом и чтобы он издавался в издательстве «Наука»...

Академик П. Л. Капица  
Академик И. К. Кикоин  
Академик И. В. Обреимов

Академик М. А. Лаврентьев  
Академик А. Н. Колмогоров  
Академик П. С. Александров

Почему идея создания научного журнала для школьников нашла поддержку именно у этих ученых? Академики П. Л. Капица, И. К. Кикоин и И. В. Обреимов — физики, воспитанные в знаменитом Ленинградском физико-техническом институте под руководством академика А. Ф. Иоффе. Их учитель стремился вовлекать в науку молодых людей прямо со студенческой скамьи. Недаром его институт шутя называли «детским садом папы Иоффе». Об этой замечательной традиции рассказано в статье И. К. Кикоина «Как создавалась советская физика», опубликованной в 10—12 номерах нашего журнала в 1977 году. (Кстати, свои первые серьезные научные исследования Кикоин выполнил еще будучи студентом.) Подобная традиция сложилась и в Москве в научной школе выдающегося математика Н. И. Лузина, знаменитой «Лузитании», из которой вышли академики П. С. Александров, А. Н. Колмогоров и М. А. Лаврентьев. Рассказ П. С. Александрова об этой школе помещен в «Кванте» № 10 за 1977 год.

Просьба ученых была удовлетворена — в августе 1969 года было принято решение о создании журнала «Квант». А в начале 1970 года к читателям пришел его первый номер. Главным редактором стал академик Исаак Константинович Кикоин, первым заместителем главного редактора — академик Андрей Николаевич Колмогоров. Оба они выполняли эти функции до последних дней жизни. Трудно переоценить их вклад в создание «Кванта», которому они уделяли огромное внимание — определяли

структуру, подбирали редколлегию, искали авторов, внимательно читали статьи, нередко сами писали для журнала.

Почему журнал получил такое название? Идея о том, что электромагнитная энергия излучается и поглощается отдельными порциями — квантами, принадлежит знаменитому немецкому физическому Макс Планку. Она проложила путь к созданию квантовой механики, новой области физики, революционно изменившей возможности этой науки. Создатели журнала надеялись, что «появление нового журнала тоже вызовет... заметный скачок вперед в деле приобщения школьников к современной науке»



И. К. Кикоин.

(именно так сказано в обращении к читателям, которым открывался первый номер «Кванта»). А в качестве эмблемы решено было использовать символ  $h$ , именуемый «постоянной Планка», которая неизменно присутствует во многих разделах квантовой физики.

Сразу же выяснилось, что писать статьи в наш журнал очень трудно — ведь они должны быть научно достоверными и одновременно доступными для школьников. Если автор статьи — ученый, он, как правило, недостаточно знаком со школьными программами и учебниками, если же он — педагог, то ему трудно представить себе передний край современной науки. Многие из наших авторов — активно действующие ученые, но статьи в «Кванте» обычно — это плод коллективного труда, в который вносят вклад члены редакционной коллегии и сотрудники редакции журнала.

Не сразу сложился современный облик журнала, хотя основные его разделы — общие статьи, «Задачник «Кванта», «Лаборатория «Кванта», «Практикум абитуриента», «Математический кружок», «Олимпиады», «Информация» — идут у нас с первых номеров.

Позднее появились рубрики «Школа в «Кванте», «Информатика и программирование», «Игры и головоломки», «Квант улыбается» и некоторые другие. В прошлом году возникли еще два раздела — «Р — значит ракета» (рассказывающий о проблемах изучения и освоения космического пространства) и «Есть идея?!» (посвященный физике, математике и эвристике). Конечно, журнал — не учебник, читать его «от корки до корки» совсем не обязательно, а ко многим трудным статьям и задачам можно вернуться позднее.

Мы стремимся к тому, чтобы школьник, подписавшийся на «Квант», получил возможность не просто прочитать интересную статью, но и самостоятельно поработать над его страницами. Как было сказано в самом первом номере, «задачи надо решать, статьи читать с бумагой и каранда-

шом в руках, описываемые опыты надо постараться самим воспроизвести». Поэтому с первых же номеров в «Кванте» публикуется много разнообразных задач. Это задачи в разделах «Квант» для младших школьников», «Избранные школьные задачи», «Практикум абитуриента», занимательные вопросы, задачи, опыты в «Калейдоскопе «Кванта», задачи вступительных экзаменов в вузы... Но особенно важным для нас является конкурсный раздел «Задачник «Кванта», позволяющий вести постоянную переписку с читателями, активно работающими с журналом. Те, кто успешно справляется с этими задачами, награждаются дипломами «Кванта», а победители конкурса приглашаются сразу на республиканские олимпиады. В прошлом году школьники из числа победителей этого конкурса приняли участие в советско-американских летних физико-математических школах, которые проходили в США и СССР. Аналогичные школы намечается провести и в этом году.

Двадцать лет в жизни человека срок немалый, и за это время многие наши читатели прочно вошли в науку, стали



А. Н. Колмогоров.

кандидатами и докторами наук. Вырос и авторитет журнала. Он получил высокую оценку экспертов «ЮНЕСКО» (Организации Объединенных Наций по вопросам образования, науки и культуры). Статьи из «Кванта» публиковались во Франции, Японии, Греции, Болгарии, ГДР и других странах.

Регулярно встречаясь с нашими читателями, просматривая письма и ответы на анкеты, мы видим немало проблем, которые журналу придется решать. Многие просят чаще рассказывать об истории науки, помещать больше занимательных задач и других материалов для младших школьников.

Конечно, хотелось бы на страницах нашего журнала предоставить место и научной фантастике, хотелось бы возродить раздел «Рецензии, библиография», представляющий новые научно-популярные книжки по математике, физике, астрономии, космонавтике, кибернетике, возобновить публикации заметок под заголовками «Задачи для исследования», «Спрашиваете — отвечаем». Мы надеемся также чаще рассказывать о приложениях физики и математики, о смежных науках.

К сожалению, годы приносят и неизбежные утраты. Ушли из жизни

академики — основатели журнала, один из наиболее активных сотрудников первого состава редакционной коллегии И. Ш. Слободецкий, заместитель главного редактора Л. Г. Асламазов, основатель «Лаборатории «Кванта» Г. И. Косоуров, активный участник «Задачника «Кванта» Б. Б. Буховцев, руководитель раздела «Искусство программирования» А. П. Ершов... Но многие из тех, кто начинал работать в «Кванте» с первого номера, продолжают успешно сотрудничать с журналом — академик АПН СССР В. А. Фабрикант, член-корреспондент АПН СССР В. Г. Болтянский, доктор физико-математических наук М. И. Башмаков, И. Ф. Гинзбург, Н. Х. Розов и Я. А. Смородинский, кандидаты физико-математических наук Н. Б. Васильев и А. П. Савин, В. А. Лешковцев. И мы обращаем к ним слова искренней благодарности.

Этот юбилейный номер в основном состоит из статей, которые уже были опубликованы в журнале. Конечно, нам хотелось бы вспомнить и другие удачные статьи прошлых лет, и мы предполагаем изредка к ним возвращаться.



#### **«Квант» — «Quantum»**

*В США вышел первый номер советско-американского журнала*

*«Quantum» — англоязычной версии «Кванта».*

*На фото (по часовой стрелке сверху):*

*Ш. Глэшоу (США) и Ю. Осипьян (СССР) — главные редакторы.*

*Б. Олдридж — исполнительный директор,*

*Э. Лозанский — международный консультант журнала,*

*Х. Андерсен — издатель (все — США).*

Этот доклад был прочитан академиком Петром Леонидовичем Капицей на общем собрании Академии наук СССР в сентябре 1948 года, спустя 5 лет после открытия сверхтекучести жидкого гелия. В конце доклада ученый сказал о некоторых проблемах, стоящих перед экспериментаторами и теоретиками, изучающими это явление. Сейчас эти проблемы уже решены. Экспериментально подтверждено существование в сверхтекучем гелии

температурных волн, подобных звуковым (второй звук); исследование критических скоростей течения сверхтекучего гелия привело к открытию удивительного явления — макроскопических квантовых вихрей. Некоторые численные данные, которые автор приводил в докладе, на сегодняшний день уточнены. Однако мы решили не вносить соответствующих изменений в оригинальный текст.

## О СВЕРХТЕКУЧЕСТИ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ II

Академик П. КАПИЦА



Изучение жидкого гелия и его свойств относится к области физики наиболее низких температур. Это одна из тех областей физики, где стремятся изучать явления природы в крайних условиях. Открытия новых интересных явлений мы можем скорее всего ожидать тогда, когда изучаем природу в крайних допустимых для нее условиях, как например, при исключительно сильных магнитных полях, высоких давлениях, высоких электрических напряжениях и т. д., а также в области глубокого холода, приближающегося к абсолютному нулю. Здесь мы тоже можем надеяться обнаружить новые явления, которые в обычных условиях либо ускользают от наблюдения, либо просто даже не происходят. В этом отношении область температур вблизи абсолютного нуля особенно интересна. Работы последнего десятилетия это подтвердили со всей очевидностью.

Что такое абсолютный нуль температурной шкалы? Последнее определение абсолютного нуля:  $-273,13^{\circ}\text{C}$ . Известно, что абсолютного нуля мы никогда не сможем достигнуть. Обычное, школьное, определение абсолютного нуля говорит, что это та температура, при которой прекращается

тепловое движение материи. Но это определение неточно. С современной точки зрения, основывающейся на теории квантов, допускается существование движений при абсолютном нуле. Энергия этого движения ненулевая и определяется тем минимальным молекулярным движением, которое в данном веществе может существовать. Приведу простой пример. Если сильно нагревать вещество, то электроны атомов, которые движутся вокруг атомного ядра по определенным орбитам, будут под воздействием температурных движений отрываться, отлетать, наступит так называемая диссоциация. При охлаждении вещества движение атомов замедляется, электроны начинают опять обращаться по своим орбитам и до самого абсолютного нуля сохраняют свое движение. Но, кроме движения электронов по орбитам каждого атома в отдельности, еще есть целый ряд комбинированных движений в твердом теле, которые с современной точки зрения должны сохраняться до самых низких температур. Благодаря этому так называемому вырождению движения в этой области температур и могут появиться совершенно новые явления, которые мы не можем наблюдать при обычных температурах.

Одно из таких интересных явлений, которое уже приобрело широкую известность, открыто Камер-

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 10 за 1970 год.

линг-Оннесом — это явление сверхпроводимости. Оно заключается в том, что при очень низких температурах электрический ток получает возможность течь по некоторым проводникам без сопротивления, без образования тепла. Опыт показывает, что если в замкнутом сверхпроводнике индуктивным путем возбуждается ток, он течет, не выделяя тепла и не убывая, столько времени, сколько экспериментатору удавалось его наблюдать. Другим из таких явлений, которые можно обнаружить только при очень низких температурах, является найденная нами пять лет назад в жидком гелии сверхтекучесть.

Исследования этого и других явлений вблизи абсолютного нуля производятся посредством самого жидкого гелия как холодильного агента. Жидкий гелий — это единственное известное вещество, которое даже при самых низких температурах (вплоть до тысячных долей градуса от абсолютного нуля) при нормальном давлении остается жидким и не переходит в твердое состояние. Его можно превратить в твердое тело только при давлении начиная с 25 атм.

Сам по себе жидкий гелий представляет чрезвычайно интересный объект для изучения.

Гелий сжижается при температуре 4,8 К и образует легкую, раз в 7—8 легче воды, прозрачную жидкость. Из-за небольшой теплоемкости жидкий гелий во время опыта приходится держать за хорошей теплоизоляцией в вакуумном дьюаровском сосуде, еще окруженном другим таким же сосудом с жидким воздухом. Экспериментирование с жидким гелием представляет значительные технические трудности. Это объясняет то, что до сих пор только в нескольких лабораториях холода во всех странах жидкий гелий получается в достаточных количествах.

Если понижать температуру жидкого гелия от точки его сжижения (4,8 К), то, когда мы достигнем температуры 2,19 К, он претерпевает изменения, и принято говорить, что

гелий I переходит в гелий II. Эту температуру называют  $\lambda$ -точкой. Находясь в своем первоначальном состоянии, жидкий гелий обычно непрерывно кипит благодаря малейшему доступу тепла, которого трудно избежать даже при наилучшей теплоизоляции. Ниже  $\lambda$ -точки гелий вдруг перестает кипеть, поверхность его становится гладкой; это связано с изменением ряда физических свойств жидкого гелия. Новое состояние жидкого гелия было впервые обнаружено Камерлинг-Оннесом, начало изучаться Кеезом и оказалось чрезвычайно любопытным.

Кеезом нашел, что гелий II приобретает в этом состоянии большую теплопроводность. Теплопроводность его, изучаемая в капиллярах, оказалась во много раз больше, например, чем у меди или серебра — наиболее теплопроводных металлов. Поэтому Кеезом и назвал жидкий гелий II сверхтеплопроводным веществом. Я повторил опыт Кеезома в несколько измененных условиях и в результате получил еще большую теплопроводность.

Попытка осветить экспериментальные данные на основании современных взглядов на теплопроводность вскрыла глубокое противоречие между теорией и опытом. Я не буду вдаваться в подробное описание довольно сложных теоретических воззрений на теплопроводность... Физическую картину теплопроводности мы можем представить себе так: повышение температуры какого-либо тела в какой-либо точке увеличивает среднюю скорость колебательного движения молекул вещества; при этом тотчас начинается процесс выравнивания — более «горячие», т. е. более возбужденные, молекулы воздействуют на соседние. Процесс последовательного выравнивания скоростей будет распространяться все дальше и дальше от нагреваемого места, т. е. будет иметь место процесс распространения тепла, который мы и называем теплопроводностью. Более подробный анализ, произведенный на основании этих воззрений на теплопроводность, показывает, что для

каждого тела в природе есть предельное количество тепла в единицу времени, которое можно через него провести. Оказалось, что такую большую теплопроводность, которая экспериментально была обнаружена в наших последних опытах в жидком гелии II, с помощью этих воззрений объяснить нельзя. Выход из этого противоречия мы можем искать, либо отказавшись от основных взглядов на механизм теплопроводности, которые прочно установились в науке, либо надо признать, что явление теплопроводности в гелии II обязано своим происхождением какому-либо иному механизму.

Как известно, тепло может передаваться не только посредством описанного механизма, как оно распространяется в твердых телах и, как предполагалось, в жидком гелии в узких капиллярах. Тепло может еще передаваться в жидких и газообразных телах посредством так называемых конвекционных потоков. Например, конвекционные потоки в воздухе хорошо известны каждому, вы их неоднократно ощущали, когда держали руку над теплым радиатором. Та же рука совсем не чувствует тепла, если ее держать на этом же расстоянии от радиатора, но внизу, так как здесь нет восходящих потоков нагретого воздуха, которые конвекционным путем уносят тепло вверх. Если интенсивную передачу тепла в жидком гелии нельзя объяснить с точки зрения обычного механизма теплопроводности, то мне думалось, что, может быть, здесь имеет место как раз именно конвекционная передача тепла. Для этого нужно предположить, что в жидком гелии II чрезвычайно легко возникают потоки жидкости, которым и обязана чрезвычайно большая способность гелия II переносить тепло. Подсчеты показали, что такая интенсивность, с которой в жидком гелии передавалось тепло, могла быть осуществлена только такими конвекционными потоками, которые должны течь в этой жидкости с необычайной легкостью. Поэтому по аналогии со сверхпроводимостью я предположил, что ге-

лий II при сверхнизких температурах представляет собой жидкость чрезвычайно текучую, т. е. такую жидкость, которая не имеет вязкости. Оставалось проверить это опытом.

Наблюдать небольшую вязкость, да еще при низкой температуре, оказалось нелегкой экспериментальной задачей. Надо было найти специальный метод для ее измерения. Когда был найден и разработан необходимый метод, то само наблюдение не заняло много времени и показало, что вязкость жидкого гелия действительно исчезающе мала. Жидкий гелий оказался свыше чем в миллиард раз более текучей жидкостью, чем вода. Такую текучую среду очень трудно себе представить, а между тем приведенное число означает предел не вязкости, а только чувствительности наших измерений. Более чувствительного метода мы пока не имеем. Поэтому я предположил, что есть все основания считать, что жидкий гелий не имеет вязкости; я назвал его сверхтекучим. Сначала это встретило большие возражения. Искали в моих опытах экспериментальные ошибки в методике, в измерениях и прочее. Открытие сверхтекучести в жидком гелии, таким образом, всесторонне обсуждалось, и теперь можно, я думаю, считать признанным существование сверхтекучего состояния в гелии II.

Когда это явление было впервые сформулировано, нам казалось, что сверхтекучесть гелия II вполне достаточна, чтобы объяснить большую теплопроводность, наблюдавшуюся в жидком гелии, в соответствии с той картиной существования конвекционных потоков, которую я вам только что набросал. Но дело оказалось гораздо интереснее и сложнее, чем мы думали вначале.

Рассказ о том, как развивались наши взгляды на этот вопрос дальше, представляет некоторые трудности. Я попытаюсь рассказать, с какими противоречиями мы сталкивались, как менялись наши взгляды и как постепенно складывались у нас представления, которые выглядели бы ни с чем не сообразной фанта-

стикой, если бы их изложить вне связи с реальными опытами.

Если стоять на точке зрения наших обычных механических представлений, вполне исчерпывающе описывающих поведение обычных веществ при обычных условиях, то оказывается, что сверхтекучий гелий не может переносить тепло столь интенсивно, как того требуют результаты измерения конвекционных потоков. Мы упираемся в трудность найти механизм, который мог бы вызвать необходимое быстрое течение гелия при конвекции. В обычном механизме переноса тепла конвекцией мы обязаны движением среды тому, что более нагретая жидкость или газ становятся несколько менее плотными, почему стремятся вверх, как бы всплывая в более плотной среде, а более холодные, более плотные, стремятся вниз. «тонут». Происходит перемешивание, причем очевидно, что причина, вызывающая движение, это — сила тяжести. Но подсчет показывает, что этой силы в гелии II недостаточно, чтобы вызвать такую большую теплопроводность, которая наблюдалась на опыте. Это делало явление опять непонятным. Надо было искать для его объяснения какие-то другие, новые механизмы. Рядом опытов, наконец, удалось натолкнуться на совсем новый механизм движения гелия II.

Оказалось, что под влиянием разности температур в жидком гелии II возникают очень сильные потоки, несколько напоминающие конвекционные. Под действием разности температур жидкость приходит в движение, но это движение совершенно особого рода, специфичное для жидкого гелия II, не известное ни в какой другой жидкости и ни в каких других условиях.

Прежде чем пытаться объяснить сущность этого движения, познакомимся с его особенностями. Посмотрим, как оно выглядит на эксперименте. Я не буду детально описывать технических подробностей этого эксперимента. Основные его особенности вы можете себе представить из схемы, изображенной на рисунке 1.

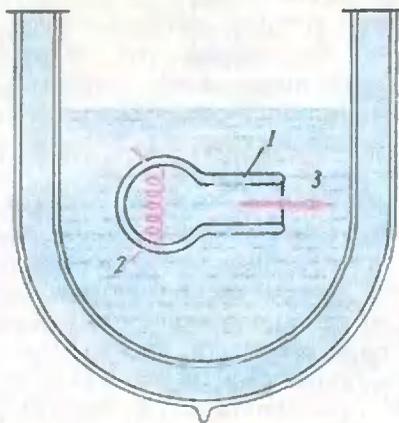


Рис. 1.

В сверхтекучий гелий II погружена колбочка 1. В широкой части этой колбочки помещена нагревательная спираль 2, а колбочка открыта с одной стороны 3. Когда к нагревателю 2 подается ток, около горлышка 3 колбочки обнаруживается непрерывный поток вытекающего из нее гелия. Поток этот может быть обнаружен и даже измерен с помощью легкого крылышка, если его подвесить у горлышка. Поток на него давит и отклоняет его.

Некоторое более эффектное и поучительное видоизменение этого опыта для целей демонстрации было снято на киноленту (один из кадров которой приводится на рисунке 2). Схема заснятого в действии прибора изображена на рисунке 3. Стекланный «паучок» состоит из «бульбочки» 2, снабженной несколькими выводными трубочками, отогнутыми в одну сторону. Таким образом, вся эта конструкция повторяет известное «сегнерово колесо» (только по внешности, конечно; рассмотрев его, легко убедиться, что у «паучка» нет сквозного протока для жидкости). Бульбочка поставлена на ось из острого иглы 1. Весь «паучок» погружен в жидкий гелий. Гелий, находящийся в бульбочке, может быть нагрет с помощью пучка света через линзу 3. Этот пучок света, падающий на зачерненную часть внутри бульбочки, играет роль нагревателя, которым в предыдущем опыте была

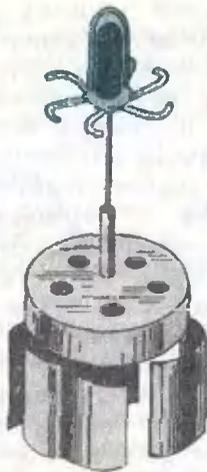


Рис. 2.

спираль. Из трубочек — «ножек паука», — так же как из шейки колбочки в предшествующем опыте, при нагревании среднего сосуда происходит непрерывное вытекание струи. Под давлением вытекающих струй вращается весь «паучок».

Съемка этого опыта трудна. Жидкий гелий совершенно прозрачен, и коэффициент преломления в нем луча света таков, что его очень трудно рассмотреть через стекло. Нелегко также проводить эксперимент в условиях общей яркой освещенности, которая необходима для съемки. Поэтому понадобилось значительное искусство кинооператоров московской кинохроники, чтобы эту съемку произвести.

Взглянем снова на рисунок 1. Теперь я обращаю ваше внимание на самый большой парадокс этого опыта. Если мы обнаруживаем все время вытекающую из колбочки жидкость и при этом в колбочке не образуется пустоты, это значит, что жидкость должна все время натекает внутрь колбочки. Как же жидкость попадает в колбочку? Не может же она вытекать, не попадая туда. Стенки у колбочки двойные, простенки между ними эвакуированы, и очевидно, что жидкость не может проходить через них. Посредством крылышка, располагавшегося в самых разнообразных положениях у горлышка, никак не удавалось обнаружить существования обратного пото-

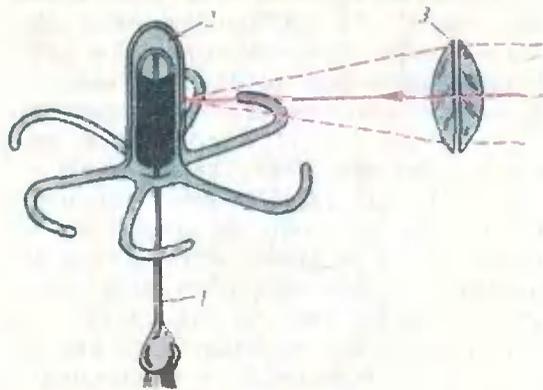


Рис. 3.

ка. Поэтому первоначально мы решили, что должен существовать поток вдоль очень тонкого слоя у самых стенок (тогда он не мог бы быть обнаружен крылышком). Но при дальнейших опытах эта гипотеза оказалась недостаточной. Я стал менять условия опыта: вместо колбочки с широким горлом я применял очень узкие щели. Идея этих опытов состояла в том, чтобы по возможности занять все сечение щели обратным пристенным потоком и таким образом попытаться изменить характер наблюдаемых явлений. Щель в этих опытах изготовлялась очень точно из тщательно (оптически) отполированных поверхностей и имела ширину до 0,14 мкм, то есть порядка десятитысячных миллиметра. Но изменений в характере явлений не было обнаружено.

Таким образом, явление становилось все загадочнее.

Перед тем как рассказать, как оно теперь объясняется, я хочу упомянуть еще о некоторых опытах.

Прежде всего позвольте остановиться на понятии обратимости тепловых явлений. Это понятие впервые установлено еще более ста лет назад Карно; оно дает чрезвычайно важную связь между возможностями перехода работы в тепло и обратно. Обратимыми явлениями в термодинамике считаются такие теоретические процессы, когда тепло превращается в работу и обратно — работа

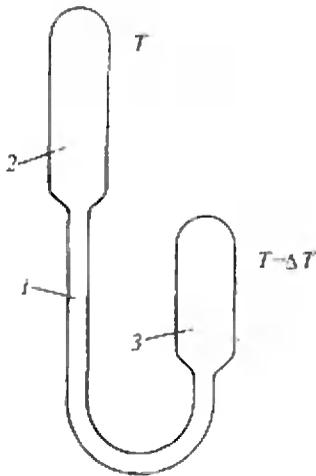


Рис. 4.

в тепло, причем при этом не происходит рассеяния тепла. Полностью обратимых процессов вообще в природе не существует, но к ним можно подходить очень близко. Переход тепла в движение гелия, которое мы наблюдаем, например, в нашем «паучке», надо было в первую очередь изучить и с этой точки зрения. Если разность температур между гелием в колбочке и наружным гелием вызывает движение гелия и если это явление обратимо, то теоретически должно существовать и обратное явление: при вынужденном движении гелия должна появиться и разность температур. Если эти явления обратимы, то они должны быть связаны между собой определенными количественными соотношениями.

В опыте со щелями удалось показать, что при передаче давления, заставляющего перетекать через щель жидкий гелий, действительно возникает разность температур. Удалось количественно измерить все необходимые величины и показать, что все эти явления в жидком гелии II действительно протекают термодинамически обратимо. Если при этом помнить, что гелий II сверхтекуч и что поэтому при его течении нет потерь на трение, то нетрудно видеть, что механизм температурного течения гелия работает с хорошим коэффициентом полезного действия. Таким образом, например, наш вертящийся «паучок» на рисунках 2 и 3 пред-

ставляет собой машину с хорошим коэффициентом полезного действия. Конечно, никакого практического применения такой механизм иметь не может, и трудно ждать, чтобы когда-нибудь он его получил.

Но тут следует отметить, что это удивительное термодинамическое свойство гелия II, открывающее совсем новый путь к переводу тепла обратным путем непосредственно в механическую работу, не имеет ничего похожего в известных нам до сих пор явлениях природы.

Обратимость термомеханических, точнее термодинамических, явлений в жидком гелии представляется нам чрезвычайно важным обстоятельством и для дальнейшего изучения явлений при низких температурах. Предположим, что у нас есть капилляр 1 (рис. 4) с двумя сосудами на разных уровнях. Между концами его мы создаем разность давлений. Это мы можем сделать, поместив сосудик 2 на конце капилляра выше сосудика 3 на другом его конце. Тогда в результате особых свойств гелия и обратимости процесса у нас на концах капилляра в сосудах 2 и 3 возникает разность температур  $\Delta T$ . В низком резервуаре 3 гелий II станет более холодным.

Таким образом, у нас есть метод понижения температуры гелия II, который состоит в том, чтобы заставить гелий II течь под давлением. Конечно, рисунок 4 является только схематической иллюстрацией этого принципа, на самом деле опыт, разумеется, сложнее.

Но поскольку это явление остается обратимым до самых низких температур, возникает возможность сделать очень интересные практические выводы. Если проталкивать гелий II насосом или каким-либо другим путем через тонкие капиллярные щели в некоторый объем, то температура в этом объеме ощутительно понизится. Повторяя эту операцию несколько раз, мы получаем метод для понижения температуры сколь угодно низко, и, таким образом, для нас откроется путь приближения к абсолютному нулю сколь угодно близко.

Этот метод имеет важное значение для экспериментатора, поскольку до сих пор не существовало еще метода, даже теоретического, для приближения к абсолютному нулю сколь угодно близко.

Накануне войны мы начали в наших работах развивать этот метод и сделали несколько успешных опытов в этом направлении. Мне удалось этим методом получить понижение температуры на  $0,4^\circ$ . Конечно, получение температур в непосредственной близости к абсолютному нулю новым методом является технически нелегкой задачей, и сразу на его удачу рассчитывать трудно. Тут много технических трудностей, и успех во многом зависит от искусства и изобретательности экспериментатора. Но все эти возможные затруднения не будут означать, что существуют какие-то принципиальные запреты для приближения к абсолютному нулю.

Но перейдем теперь к теоретическому объяснению механизма явления вытекания жидкого гелия из сосуда при его нагревании (см. рис. 1). Как я уже говорил, первоначально я объяснял явление заполнения сосуда гелием течением гелия в обратном направлении в тонком слое. Я предполагал также, что энергетическое состояние гелия II в этом тонком слое отличается от энергетического состояния свободного гелия II и таким образом можно было объяснить кажущуюся большую теплопроводность гелия. Также можно было примерно подсчитать возможную толщину этого слоя так, чтобы скорость течения гелия в нем не принимала чрезмерно большое значение. Далее, как говорилось, я пытался в своих опытах обнаружить толщину этого слоя экспериментально. Для этого я заставлял течь гелий в очень тонком слое. Постепенно я дошел до толщины слоя гелия в  $0,00014$  мм, но опыт показал, что характер всех явлений при этом сохранился. Таким образом, объяснение пришлось пересмотреть, и это привело к совершенно новым воззрениям на природу гидродинамических

явлений в гелии II. Первые наброски этих идей были высказаны Тиссой, но научная разработка их, подведение под них теоретического обоснования и создание гидродинамической теории явления принадлежат нашему ученому Л. Ландау.

Постараюсь дать самую общую картину этих взглядов. Согласно этой теории тот противоток, который я пытался объяснить течением гелия в одном энергетическом состоянии по стенке другого внутри бульбочки, заменяется противотоком гелия, проходящим в самом себе.

Объяснение этого явления, данное Л. Д. Ландау, заключается в следующем.

Жидкий гелий представляет собой как бы смесь двух жидкостей. Эти две компоненты жидкого гелия находятся в двух различных квантовых состояниях. Благодаря этому он показал, что могут существовать одновременно встречные течения одной и той же жидкости, которые мы и наблюдаем в горлышке сосуда на рисунке 1.

Если бы это теоретическое положение не было так полно подкреплено экспериментальными доказательствами, оно звучало бы как идея, которую очень трудно признать разумной.

Теория Ландау хорошо описывает физическую сущность тех двух состояний, в которых гелий может одновременно существовать при температурах ниже  $\lambda$ -точки. Как я уже говорил, если гелий после сжижения продолжать охлаждать, то он будет находиться в состоянии обычной жидкости вплоть до  $2,19$  К, т. е.  $\lambda$ -точки. Тогда, согласно теории Ландау, в этой жидкости появляется в качестве как бы примеси гелий в новом состоянии. Это новое состояние характеризуется тем, что в нем отсутствует вязкость. Этот гелий представляет собой жидкий гелий II в том состоянии, в каком он был бы весь при абсолютном нуле. Но при всякой другой температуре одновременно с этим состоянием существует как бы смешанный с ним гелий и в нормальном состоянии. По мере понижения

температуры концентрация гелия II начинает преобладать. Только при абсолютном нуле весь гелий, согласно теории, должен перейти в сверхтекучее состояние. Эта картина достаточна для описания наблюдавшихся нами явлений. Например, явление, наблюдаемое в опыте с перетеканием гелия из колбочки, изображенной на рисунке 1, объясняется следующим образом. Поскольку гелий в сверхтекучем состоянии не испытывает трения ни о стенки, ни о гелий, находящийся в нормальном состоянии, поток, текущий по капилляру, не создает реакции трения и может как бы незаметно наполнять сосудик \*). Наоборот, гелий в нормальном состоянии течет из сосудика с трением, и поток его является обычным потоком жидкости, давно изученным гидродинамикой. Этот нормальный поток и улавливается крылышком, поставленным перед горлышком трубочки на рисунке 1, в то время как идущий ему навстречу поток гелия в сверхтекучем состоянии обычными методами не удается обнаружить.

На основании этой же картины можно объяснить и большую теплопроводность гелия II. Как видно, в сосуд попадает гелий в сверхтекучем состоянии, а возвращается гелий в нормальном состоянии. Чтобы перевести гелий из одного состояния в другое, нужно затратить заметное количество тепла. Такой процесс своеобразной конвекции и создает впечатление большой теплопроводности гелия II.

Все эти явления, для объяснения которых требуется представить себе сложные взаимодействия между двумя различными состояниями одной и той же жидкости в одном и том же объеме, с трудом укладываются в наши привычные рамки даже физического мышления. Чтобы попытаться несколько облегчить хотя бы поверхностное восприятие этой сложной

картины механизма теплопроводности гелия II, я позволю себе прибегнуть к аналогии с теми встречающимися потоками одетых и не одетых людей, которые циркулируют по проходу в раздевалке театра. Одетые будут представлять собой нормальные атомы гелия, получившие около нагревателя («в раздевалке») нужную им энергию, а не одетые — это сверхтекучие атомы гелия. К сожалению, аналогия более чем неполная, так как атомы гелия в сверхтекучем состоянии проходят мимо своих собратьев в нормальном состоянии без всякого взаимодействия, тогда как не получившие пальто никак не могут продвигаться через толпу без сильного трения.

На основании этой картины можно объяснить, почему при протекании гелия II через узкое отверстие или щель появляется разность температур. Так как гелий в сверхтекучем состоянии протекает легче, без трения, через малое отверстие, чем гелий в состоянии нормальном, то получается как бы своеобразная фильтрация. После протекания увеличивается концентрация сверхтекучего гелия, а это соответствует такой концентрации его, которая предполагает более низкую температуру.

Между теорией, развитой Л. Ландау, и экспериментом в основных вопросах существует не только качественное, но и количественное совпадение. Но есть еще и явления, которые не охватываются теорией. Выяснение их — дело будущего. Теория указывает на некоторые явления, такие как наличие сосуществования двух скоростей звука, которые еще не удалось наблюдать в жидком гелии. Теория не учитывает еще критических скоростей, которые в действительности наблюдаются. Но мне кажется, что в основных своих пунктах теория очень близко подошла к существу объяснения этого изумительного явления и представляет исключительно ценный вклад в изучение этого явления. Работа над дальнейшим разъяснением этих явлений представляет большой интерес.

\* ) Поток сверхтекучей жидкости идеально обтекает помещенные в него тела, так что давления перед телом и за ним одинаковы. Благодаря этому крылышко не могло уловить поток сверхтекучего гелия II в опыте, показанном на рисунке 1. (Примеч. ред.)

# Снежные заносы

Доктор физико-математических наук Л. АСЛАМАЗОВ



Участки железных или шоссейных дорог, проходящие в ложбинах, заносятся снегом, даже если нет снегопада. Почему это происходит? На первый взгляд ответ ясен: снег переносит ветер. Однако чтобы детально разобраться в механизме этого процесса, потребовалось целое исследование.

В 1936 году английский физик Бэнгольд изучал перенос песка ветром в аэродинамической трубе.

Оказалось, что если скорость ветра меньше некоторой скорости  $v_1$ , то песок не движется. При скорости ветра, большей чем  $v_1$ , но меньшей некоторой другой скорости  $v_2$ , песок также может оставаться в покое. Но если при этом в неподвижную массу песка откуда-нибудь падает песчинка, от ее удара подскакивает вверх несколько других песчинок. Эти песчинки увлекаются ветром, падают, приводят в движение другие песчинки, и в результате песок переносится по ветру. При скорости ветра, большей чем  $v_2$ , песчинки поднимаются вверх, образуя песчановоздушный поток довольно значительной, но уменьшающейся кверху плотности. О траекториях песчинок дает представление рисунок 1.

Теперь можно объяснить, почему снег в ветре

новую погоду заполняет выемки. В месте углубления поток расширяется (это сразу становится видимым по картине линий тока на рисунке 2), и поэтому скорость его падает. В результате равновесие между увлекаемыми вверх и падающими вниз частицами нарушается: в углубление падает больше частиц, чем из него поднимается, и углубление постепенно заполняется снегом.

Аналогичные процессы происходят и в том случае, когда снег, переносимый ветром, встречает на своем пути какое-нибудь препятствие, например дерево. Перед стволом дерева с той его стороны, откуда дует ветер, возникает восходящее движение воздуха. Оно приводит к тому, что с наветренной стороны ствола и с боков на поверхности снега образуется глубокая выемка. Перед

этой выемкой и немного позади ствола, где скорость ветра меньше, образуется, наоборот, возвышение.

Описанное явление используют для защиты участков дорог, проходящих в ложбинах, от заноса. На определенном расстоянии перед выемкой или ложбиной с той стороны, откуда дует ветер, устанавливают забор из дощатых щитов. За щитами образуется спокойная зона с равномерным слабым ветром, в которой полностью отлагается весь увлекаемый ветром снег.

Так же объясняется и движение песчаных дюн. Ветер достаточной силы, набегающий на песчаную дюну, поднимает песок с наветренной стороны. На подветренной стороне, где скорость ветра меньше, песок падает вниз. В результате с течением времени дюны постепенно перемещаются в направлении ветра — «кочуют».

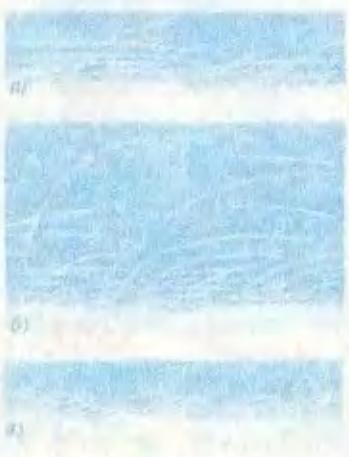


Рис. 1.



Рис. 2.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 6 за 1971 год.



# МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Кандидат физико-математических наук  
Н. ВАСИЛЬЕВ



В этой статье рассказывается о понятии расстояния, которое часто используется в современной математике и как основа для построения общих теорий, и для решения конкретных задач.

В железнодорожном справочнике указано, что расстояние от Новосибирска до Душанбе равно 3895 км; если измерить расстояние между этими городами по карте (или заглянуть в справочник авиационных кассиров), то получится другое число: 2100 км. В этом, конечно, нет ничего удивительного: поезда не могут ездить почти напрямик, как летают самолеты, поэтому железнодорожники и летчики оценивают расстояния по-разному.

Жители большого города вообще редко измеряют расстояния внутри города в километрах. Скажем, если москвича спросить: «А далеко ли от университета на Ленинских горах до Бескудникова?»\*) — он, скорее всего, ответит: «Часа полтора», — и это будет более полезный ответ, чем «28 километров». Например, от того же университета до станции метро «Щелковская» расстояние в километрах больше, а «расстояние в минутах» меньше: туда можно доехать (с пересадкой) на метро не больше чем за час.

«Расстояния», о которых мы сейчас говорили, и обычное расстояние между двумя точками на плоскости или в пространстве обладают некоторыми общими свойствами. Таких основных свойств немного, но уже достаточ-

но для того, чтобы, приняв их за аксиомы, построить содержательную и полезную теорию. Здесь мы ограничимся обсуждением некоторых первоначальных понятий и отдельных примеров.

## Аксиомы и первые примеры

Пусть нам дано некоторое множество  $X$ . Мы говорим, что на нем *определено расстояние*, если каждому двум элементам  $a$  и  $b$  множества  $X$  сопоставлено некоторое неотрицательное число  $\rho(a, b)$  — «расстояние от  $a$  до  $b$ », — причем выполняются следующие три условия (см. рис. 1, а, б, в):

1°.  $\rho(a, b) = 0$  тогда и только тогда, когда  $a = b$ .

2°.  $\rho(a, b) = \rho(b, a)$  для любых двух элементов  $a$  и  $b$  из  $X$  («аксиома симметрии»).

3°.  $\rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c)$  для любых трех элементов  $a, b$  и  $c$  из  $X$  («аксиома треугольника»).

Множество с определенным на нем расстоянием («метрикой») называется *метрическим пространством*»). Сами элементы  $x$  при этом называются обычно *точками* метрического пространства. На рисунке 2, а изображено метрическое пространство из 5 точек; а на рисунке 2, б не выполнена «аксиома треугольника» (проверьте!).

Приведем еще несколько примеров метрических пространств.

**Пример 1.**  $X$  — числовая прямая, т. е. множество  $R$  всех вещественных чисел. Расстояние  $\rho$  определяется по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|. \quad (1)$$

\*) Район на севере Москвы.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 10 за 1970 год.

\*) Корень «метр» встречается во многих русских словах и происходит от слова metron — метр, размер.

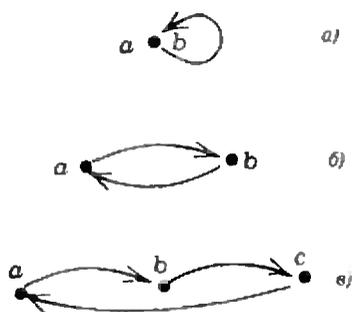


Рис. 1.

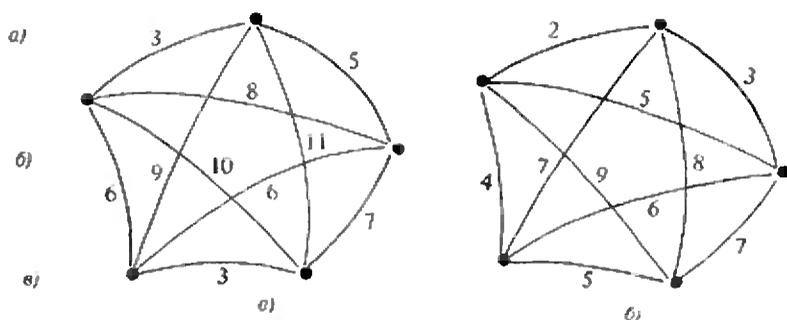


Рис. 2.

Напомним, что  $|a-b|=a-b$ , если  $a \geq b$  и  $b-a$ , если  $b \geq a$ , так что во всех случаях  $\rho(a, b)$  равно длине отрезка числовой оси с концами  $a$  и  $b$ .

Проверьте, что  $\rho$  удовлетворяет всем трем требованиям 1°–3°.

В частности, неравенство 3° принимает вид

$$|a-c| \leq |a-b| + |b-c|. \quad (2)$$

(Оно обращается в равенство, если  $b$  лежит между  $a$  и  $c$ )

Пример 2 («Метрика Хэмминга»).  $X$  — множество слов из какого-то одинакового числа букв. Расстояние  $\rho$  между словами  $a$  и  $b$  — число букв, в которых они отличаются (если их написать одно под другим). Например,  $\rho(\text{самолет}, \text{бегемот})=6$ ;  $\rho(\text{адсорбция}, \text{абсорбция})=1$ ,  $\rho(\text{абсорбция}, \text{абerrация})=3$ . Похожие расстояния между словами используются в молекулярной биологии. Макромолекулы ДНК и РНК задаются словами из четырех типов химических «букв» — нуклеотидов (а белков — из двадцати «букв» — аминокислот). Сравнивая похожие фрагменты этих «слов», биологи определяют скорость и пути эволюции. При этом используется не только простейшая «метрика Хэмминга», но и более сложные формулы для расстояния, позволяющие учитывать возможность выпадения или вставки отдельных букв, а также степени сходства отдельных букв.

Пример 3, о котором мы уже немного говорили выше. Предположим, что у нас есть план Москвы, на котором перечислены все остановки городского транспорта и для каждого промежутка между остано-

ками указано, за сколько минут проходит этот промежуток автобус (соответственно трамвай, метро, троллейбус). С помощью такого плана для любых двух остановок  $a$  и  $b$  можно найти величину  $t(a, b)$  — минимальное время, необходимое для того, чтобы попасть из  $a$  в  $b$  (не будем в нашей «модели» учитывать время, затраченное на пересадку с одного вида транспорта на другой и на ожидание). Проверим, выполняются ли для функции  $t$  свойства 1°–3°; другими словами, будет ли множество всех остановок  $X$  с расстоянием  $t$  метрическим пространством. Свойство 1°, как всегда, очевидно; 3° тоже не вызывает сомнений: ясно, что можно ехать из  $a$  в  $c$  через  $b$ , поэтому минимальное время  $t(a, c)$  заведомо не больше  $t(a, b) + t(b, c)$ . А вот свойство 2°, особенно теперь, когда в Москве стало много улиц с односторонним движением, может, конечно, нарушаться.

Проверьте, что для функции

$$t'(a, b) = \frac{t(a, b) + t(b, a)}{2}$$

выполнены уже все свойства 1°–3°.

Пример 4. Пусть  $X$  — множество натуральных чисел,  $p$  — фиксированное простое число. Положим для любых  $a > b$  из  $X$

$$\rho(a, b) = p^{-n}, \quad (3)$$

где  $n \geq 0$  — наибольшая степень  $p$ , на которую делится разность  $a-b$ . Это так называемая  $p$ -адическая метрика, находящая интересные применения в теории чисел; два числа в ней близки, если их разность делится на высокую степень числа  $p$ .

## Метрики на плоскости

Занявшись несколько экзотическими примерами, мы оставили в стороне самый естественный.

**Пример 5.**  $X$  — множество всех точек плоскости,  $\rho$  — обычное расстояние, с которым мы имеем дело в школьной геометрии, т. е.  $\rho(A, B)$  — длина отрезка, соединяющего две точки  $A$  и  $B$ . Свойства 1° и 2° здесь и во всех следующих примерах совершенно очевидны, и мы не будем больше о них говорить. А свойство 3° — не что иное, как утверждение «в треугольнике каждая сторона не больше суммы двух других». При обычном построении курса геометрии это утверждение является несложной теоремой.

Вы, вероятно, знаете, что на плоскости с прямоугольной системой координат  $Oxy$  расстояние  $\rho(M_1, M_2)$  между двумя точками  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  выражается такой формулой (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{1} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, то же самое метрическое пространство можно описать без всяких ссылок на геометрию следующим образом:  $X$  — множество всех пар  $(x, y)$  действительных чисел\*), расстояние между парами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  задается формулой (4). Но при этом, чтобы проверить свойство 3°, нужно доказать такое неравенство:

\*) Это множество имеет специальное обозначение  $R^2$  и называется числовой плоскостью.

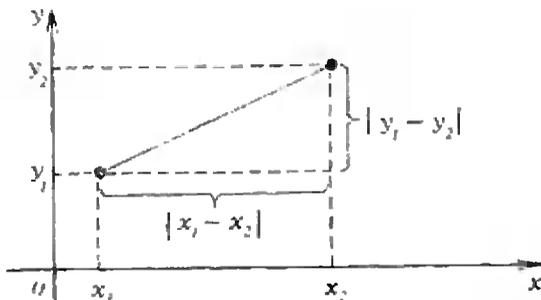


Рис. 3.

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &\quad + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \end{aligned}$$

Попробуйте сделать это!

В принципе, все геометрические теоремы можно было бы доказывать на числовой плоскости чисто алгебраически и таким образом построить курс геометрии; но, как видите, доказательства теорем на этом пути не всегда становятся проще — вместо «неравенства треугольника» пришлось бы доказывать довольно хитрое алгебраическое неравенство.

Мы уже говорили о том, что на одном и том же множестве можно по-разному определять расстояния. Вот два примера метрик на числовой плоскости  $R^2$ , отличных от (4).

**Пример 5'.**

$$\rho'(M_1, M_2) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad (5)$$

т. е.  $\rho'(M_1, M_2)$  равно сумме длин проекций отрезка  $M_1M_2$  на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

Такую метрику можно назвать «метрикой прямоугольного города»: если все улицы на плане города параллельны осям  $Ox$  и  $Oy$ , то кратчайший путь по улицам от одной точки  $(x_1, y_1)$  к другой  $(x_2, y_2)$  задается формулой (5).

**Пример 5''.**

$$\rho''(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad (6)$$

(запись  $\max\{a, b\}$  обозначает наибольшее из чисел  $a, b$ ), т. е.  $\rho''(M_1, M_2)$  равно наибольшей из длин проекций отрезка  $M_1M_2$  на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

Неравенство треугольника в двух последних примерах легко доказывается с помощью неравенства (2). Скажем, для  $\rho''$ :

$$\begin{aligned} |x_1 - x_3| &\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| \leq \\ &\leq \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \\ &\quad + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}, \\ \text{и } |y_1 - y_3| &\leq |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| \leq \\ &\leq \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \\ &\quad + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}. \end{aligned}$$

поэтому наибольшее из двух чисел  $|x_2 - x_3|, |y_1 - y_3|$  не превосходит  $\rho''(x_1, x_2) + \rho''(x_2, x_3)$ .

Точно так же на множестве  $R^3$  всех наборов  $(x, y, z)$  из трех вещественных чисел расстояние между точками  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  можно задать любой из формул

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|,$$

или

$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}.$$

В первом случае мы получаем обычное трехмерное пространство, которое изучает школьная стереометрия и которое является удобной абстракцией реального пространства, в котором мы живем. Все аналогичные  $m$ -мерные пространства также полезны — с их помощью удобно строить теорию функций от  $m$  переменных, причем иногда удобнее пользоваться одной формулой для расстояния, иногда — другой.

### Расстояния между функциями

Расстояние удобно определяется не только для чисел или точек плоскости и пространства, но и для многих других математических объектов. Вот пример из геометрии. Расстояние между двумя выпуклыми многоугольниками  $M_1$  и  $M_2$  на плоскости можно определить так: для каждой вершины многоугольника  $M_1$  и  $M_2$  находим расстояние\* до ближайшей к ней вершины другого многоугольника, и

\* Имеется в виду обычное расстояние (4).

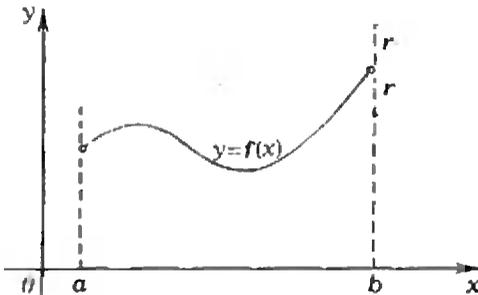


Рис. 4.

из всех этих чисел берем наибольшее (таким образом, на расстоянии, не большем  $r$ , от данного многоугольника  $M_0$  находятся многоугольники  $M$ , у которых все вершины лежат в кружках радиуса  $r$  с центрами в вершинах  $M_0$ , причем в каждой кружке лежит хотя бы одна вершина  $M$ ); проверьте, что множество выпуклых многоугольников с таким расстоянием — метрическое пространство. Число таких примеров легко можно было бы увеличить.

Но наиболее важные применения, которым теория метрических пространств обязана своим возникновением и развитием, связаны не с геометрией, а с анализом и теорией функций.

Очень часто, чтобы исследовать данные функции или просто вычислять их значения, удобно приближенно заменить их другими, более простыми функциями, скажем, многочленами. Вы, вероятно, слышали, что при  $x$ , близком к нулю,  $\sin x$  приближенно равен  $x$  (здесь  $\sin x$  означает синус числа  $x$ , т. е. синус угла в  $x$  радианов). Еще более точная формула:  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ . Пусть, например,

$x$  изменяется на отрезке  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ .

Как оценить, насколько хорошо функция  $f_1(x) = x - \frac{x^3}{6}$  приближает функцию  $f_2(x) = \sin x$ , как велико «расстояние» между этими функциями?

Одно из естественных расстояний такое: найдем при каждом  $x$  разность  $f_1(x) - f_2(x)$ , возьмем то  $x = x_0$ , где эта разность наибольшая (по мо-

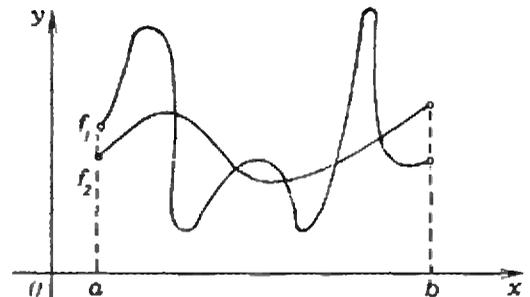


Рис. 5.

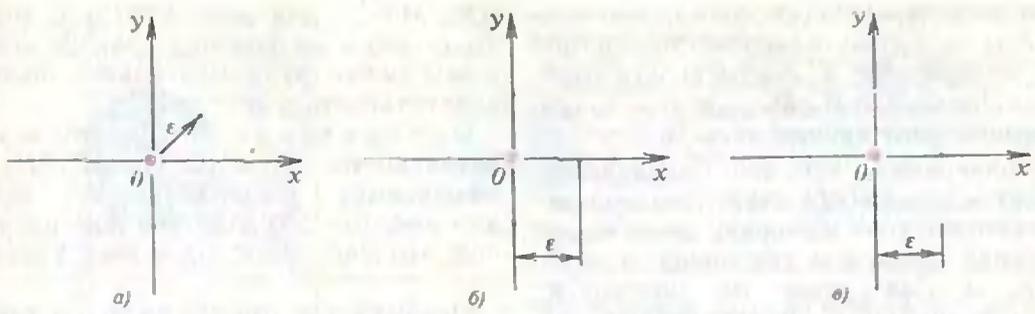


Рис. 6.

дулю), и положим  $\rho(f_1, f_2) = |f_1(x_0) - f_2(x_0)|$ .

Для наших конкретных функций  $\rho(f_1, f_2) = |\sin \frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{384})| \approx 0,0025$ .  
(Можно доказать, что максимум достигается в точке  $x = \frac{\pi}{4}$ .)

Точно так же в общем случае примем за расстояние между функциями  $f_1, f_2$ , определенными на отрезке  $[a, b]$ , величину

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|. \quad (7)$$

Проверьте, что аксиомы 1°—3° здесь выполнены! При этом на расстоянии, не большем  $r$ , от данной функции находятся такие функции, графики которых лежат в полоске ширины  $2r$  вокруг графика функции  $f$  (рис. 4).

Очень часто применяются и такие расстояния:

$$\rho(f_1, f_2) = s(f_1, f_2), \quad (8)$$

где  $s$  — величина площади, заключенной между графиками  $f_1$  и  $f_2$  (рис. 5), и особенно такое:

$$\rho(f_1, f_2) = \sqrt{S(f_1, f_2)}, \quad (9)$$

где  $S(f_1, f_2)$  — величина площади, заключенной между графиком функции  $y = (f_1(x) - f_2(x))^2$  и осью  $Ox$ .

Расстояние (7) мало, когда значения функций  $f_1$  и  $f_2$  близки для всех значений аргумента, а расстояния (8) и (9) показывают, насколько функции  $f_1$  и  $f_2$  близки «в среднем» (на небольших отрезках они могут значительно отличаться друг от друга). Пусть, например,  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  — потенциалы двух определенных точек электрической цепи в момент времени  $t$ ; тогда мощность, выделяющаяся

на участке цепи между этими точками за промежуток времени  $a \leq t \leq b$ , пропорциональна  $S(f_1, f_2)$  (если сопротивление постоянно, мощность пропорциональна  $(f_1(t) - f_2(t))^2$ ). А если нам важно, чтобы напряжение  $f_1(t) - f_2(t)$  все время не превышало какой-то величины  $V$ , то мы должны оценивать расстояние по формуле (7): нужно, чтобы величина  $\max_{a \leq t \leq b} |f_1(t) - f_2(t)|$  не превосходила  $V$ .

Заметим, что мы здесь не даем точных формулировок, что значит «площадь между двумя графиками», и не обсуждаем, для каких функций можно ввести расстояние (7)—(9). Всем этим тонкостям уделяется много места в учебниках математического анализа и функционального анализа.

**Несколько определений из анализа**

Приведем несколько понятий из математического анализа, которые можно определить в любом метрическом пространстве  $X$ .

**Определение 1.** Пусть  $\epsilon$  — положительное число. Шаром радиуса  $\epsilon$  с центром в точке  $C$  из  $X$  называется множество точек  $M$ , для которых  $\rho(M, C) \leq \epsilon$ . Это множество называют также  $\epsilon$ -окрестностью точки  $C$ .

На рисунке 6, а, б, в показаны  $\epsilon$ -окрестности точки  $O(0, 0)$  для расстояний (4), (5), (6) на плоскости (для других точек  $C$  они получаются параллельным переносом, переводящим центр  $O$  в  $C$ ).

**Определение 2.** Точка  $A$  называется пределом последовательности  $M_1, M_2, M_3, \dots$ , если для любого положительного числа  $\epsilon$  существует такой

номер  $n$  (зависящий от  $\varepsilon$ ), что все члены последовательности, начиная с  $x_n$ , содержатся в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$ . (Здесь  $M_1, M_2, M_3, \dots$  и  $A$  — точки метрического пространства  $X$ .)

Подчеркнем, что это определение годится для любого метрического пространства, т. е. мы сразу дали определение предела и для чисел на прямой, и для точек на плоскости, и для функций, определенных на отрезке.

Например, можно доказать, что функция  $f(x) = \sin x$ ,  $a \leq x \leq b$ , является пределом последовательности функций  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , где

$$f_n(x) = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots - (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-1)},$$

независимо от того, каким расстоянием пользоваться: (7), (8) или (9) и какие числа взять в роли  $a$  и  $b$ .

**О п р е д е л е н и е 3.** Пусть  $X$  и  $Y$  — два метрических пространства,  $F$  — отображение множества  $X$  в  $Y$ ;  $x_0$  — точка в  $X$ . Тогда  $F$  называется непрерывным в точке  $x_0$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется такое  $\delta$  (зависящее от  $\varepsilon$ ), что все точки из  $\delta$ -окрестности  $x_0$  отображаются в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $y_0 = F(x_0)$ .

Например, любая «школьная» функция представляет собой отображение своей области определения  $E$  в числовую прямую, непрерывное в каждой точке  $E$ . Вот пример непрерывного отображения множества выпуклых многоугольников (мы говорили о том, как превратить его в метрическое пространство) в числовую прямую: каждому многоугольнику ставится в соответствие его площадь.

Следующие определения помогают построить естественное пополнение любого метрического пространства — подобно тому, как множество рациональных чисел (или конечных десятичных дробей) пополняется до множества  $R$  всех вещественных чисел.

**О п р е д е л е н и е 4.** Последовательность  $M_1, M_2, \dots$  точек  $X$  называется фундаментальной, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $n$  такой, что

$\rho(M_k, M_l) < \varepsilon$  для всех  $k \geq l \geq n$ . Пространство  $X$  называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность имеет предел.

**О п р е д е л е н и е 5.** Две последовательности  $M'_1, M'_2, \dots$  и  $M''_1, M''_2, \dots$  называются эквивалентными, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $n$  такой, что  $\rho(M'_k, M''_l) < \varepsilon$  для всех  $k \geq l \geq n$ .

Оказывается, приняв за точки классы эквивалентных последовательностей, можно получить новое пространство, содержащее  $X$ , но уже обязательно полное. Интересно, что пополнение пространства каких-то простых функций (скажем, многочленов) по метрикам (7), (8) и (9) приводит к разным по запасу «функций» полным пространствам.

Не менее любопытное пополнение получается и для  $p$ -адической метрики (пример 4): оно состоит из «чисел», записываемых в  $p$ -ичной системе «бесконечными влево» строчками цифр\*).

Теория метрических пространств, возникшая в начале XX века в работах Фреше и Хаусдорфа, излагается сейчас в первых главах учебников с такими, приблизительно, названиями, как «Элементы функционального анализа», «Введение в теорию множеств и функций», «Основы современного анализа». Разумеется, большая часть этой теории, связанная с понятием предела, содержательна только для пространств с бесконечным числом точек.

Но общее понятие «расстояния» полезно и для некоторых задач про конечные множества и графы. В частности, «расстояние между словами», о котором мы говорили в примере 2, оказалось очень удобным инструментом в бурно развивающихся сейчас областях науки: теории кодов, исправляющих ошибки, и молекулярной биологии. Однако это уже — темы для отдельного разговора.

\* См. статьи «О четырех решениях уравнения  $x^2 = x^*$ », «Квант» № 11 за 1989 год, «2-адические числа», «Квант» № 2 за 1979 и книгу 4 в списке «Литература».

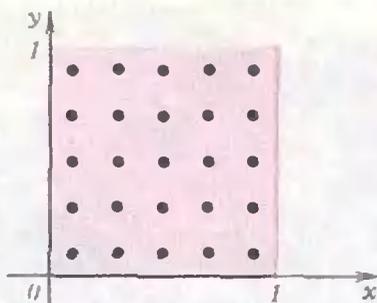


Рис. 7.

## Задачи

1. Докажите для четырех точек  $A, B, C, D$  метрического пространства неравенство  $\rho(A, C) + \rho(B, D) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C) + \rho(C, D) + \rho(D, A)$ .

2. Докажите, что для любых  $n$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n \geq 3$ )  $\rho(A_1, A_2) + \rho(A_2, A_3) + \dots + \rho(A_{n-1}, A_n) \geq \rho(A_1, A_n)$ .

3. Доктор Шарадек, знающий хорошо стратегию, интересовался последней войной и в 1940 году познакомился с картой французского театра военных действий. Отсюда, вероятно, и возникла следующая задача. Расстояние (по воздуху, как и все расстояния в этой задаче) из Шалона до Витри равно 30 км, из Витри до Шомона 80 км, из Шомона до Сэн-Кантена 236 км, из Сэн-Кантена до Ремса 86 км, из Ремса до Шалона 40 км. Вычислите в этом замкнутом многоугольнике расстояние от Ремса до Шомона. Без карты это умеет делать только доктор Шарадек\*).

4. Множество  $E$  точек метрического пространства  $X$  называется  $\varepsilon$ -сетью, если  $\varepsilon$ -окрестности точек множества  $E$  (все вместе) целиком покрывают множество  $X$ ; другими словами, если для каждой точки  $x$  из  $X$  найдется хотя бы одна точка множества  $E$ , отстоящая от  $x$  не более чем на  $\varepsilon$ . (Здесь  $\varepsilon$  — некоторое положительное число.)

Например, множество черных точек на рисунке 7 является  $\varepsilon$ -сетью для квадрата  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  на плоскости  $Oxy$  с расстоянием (6) при  $\varepsilon > 1/10$ . Для каких  $\varepsilon$  это же множество является  $\varepsilon$ -сетью в смысле расстояний (4) и (5) на том же квадрате?

5. Пусть  $N(\varepsilon)$  — наименьшее число точек в  $\varepsilon$ -сети пространства  $X$ ,  $M(\varepsilon)$  — наибольшее число точек в  $X$ , расстояние между любыми двумя из которых не меньше  $\varepsilon$ .

Докажите, что  $M(2\varepsilon) \leq N(\varepsilon) \leq M(\varepsilon)$ .

6. Пусть  $S$  — множество функций, определенных на отрезке  $[0; 1]$  и принимающих значения на том же отрезке, графики которых — ломаные линии. Будем определять расстояние в  $S$  по формуле (7).

Докажите, что можно выбрать бесконечное количество функций из  $S$ , все попарные расстояния между которыми равны единице. Вы-

вести отсюда, что при  $\varepsilon < 1/2$  в  $S$  нельзя выбрать конечную  $\varepsilon$ -сеть.

7. Может ли в некотором метрическом пространстве быть так, что 3-окрестность точки  $A$  целиком содержится в 2-окрестности другой точки  $B$  и не заполняет ее целиком? Каков будет ответ, если заменить 3 и 2 другими числами?

8. Докажите, что среди  $n$ -значных чисел из двух цифр 1 и 2 нельзя выбрать более чем  $2^{n+1}$  чисел так, чтобы любые два из них отличались друг от друга по крайней мере в трех разрядах.

9. Постройте пример последовательности функций, определенных на отрезке  $[0; 1]$ , которая стремится к пределу  $f_0$ , если пользоваться расстоянием (8), и не имеет  $f_0$  пределом, если пользоваться расстоянием (7).

10. Пусть  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — два расстояния на некотором множестве  $X$ , которые обладают тем свойством, что  $\rho_1(A, B) \leq k\rho_2(A, B)$  для любых двух точек  $A$  и  $B$ , где  $k$  — некоторое положительное число (одно и то же для всех  $A$  и  $B$ ).

Докажите, что если  $P$  является пределом последовательности  $M_1, M_2, M_3, \dots$  в смысле расстояния  $\rho_2$ , то  $P$  будет пределом этой последовательности в смысле расстояния  $\rho_1$ . Пользуясь этим, докажите, что на плоскости утверждение «пределом последовательности  $M_1, M_2, M_3, \dots$  является точка  $P$ » имеет один и тот же смысл, независимо от того, каким из расстояний (4), (5), (6) мы пользуемся.

11. а) Придумайте расстояние  $\rho$  на множестве всех прямых на плоскости, для которого выполнялось бы следующее условие: если последовательности точек  $A_1, A_2, A_3, \dots$  и  $B_1, B_2, B_3, \dots$  имеют пределами две различные точки  $A$  и  $B$ , то последовательность прямых  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$  имеет (в смысле расстояния  $\rho$ ) пределом прямую  $AB$ .

б) Докажите, что подобное расстояние  $\rho$  нельзя задать так, чтобы расстояние между любыми двумя пересекающимися прямыми зависело только от угла между ними.

## Литература

1. П. С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977. — 368 с.
2. Ф. Хаусдорф. Теория множеств. — ОНТИ, 1934.
3. Ю. А. Шрейдер. Что такое расстояние. — М.: Физматгиз, 1963.
4. З. А. Борович, И. Р. Шафаревич. Введение в теорию чисел. — М.: Наука, 1987.

\* Г. Штейнгауз. Сто задач. — М.: Наука, 1976, задача № 100 (в задаче речь идет о первой мировой войне).



## ВОЛНЫ НА ВОДЕ И «ЗАМОРСКИЕ ГОСТИ» Н. РЕРИХА

Доктор технических наук  
А. СТАСЕНКО



«Глубока, по-весеннему студена подернутая рябью синь реки. Весело плывут по ней нарядные расписные ладьи с пестрыми парусами. Лихо поднялись их носовые части, завершающиеся головами драконов. Их яркая раскраска горит на

солнце... Далек и опасен путь варягов» (из книги В. П. Князевой «Н. Рерих» (М.: Искусство, 1968)).

Речь идет о картине прекрасного русского художника Николая Рериха «Заморские гости» (1901).

Используем это яркое поэтическое полотно для размышлений на некоторые физические темы: о законе сохранения энергии, теории размерностей физических величин и о статистиче-

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 9 за 1972 год.

ской обработке результатов эксперимента. А при чем тут картина? Просто, чтоб было веселее.

В самом деле, разве не интересно попытаться определить, глядя на эту картину, с какой скоростью плывут заморские гости? Пусть относительно текущей воды, а не относительно берегов. А что в картине может нам дать необходимую информацию? Прежде всего — носовая волна, образующаяся с обоих бортов у форштевня, завершающегося драконом. Далее, круговые волны, которые бегут по поверхности воды от корабля; качественно они похожи на окружности

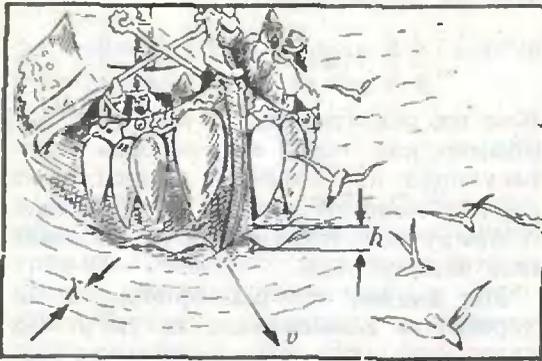


Рис. 1.

с общим центром, лежащим где-то в плоскости ватерлинии (рис. 1). Добавим к этому постановку реи и паруса относительно осевой плоскости корабля. Может быть, вы найдете и еще что-нибудь, дающее сведения о направлении или модуле скорости корабля, ветра, реки. Мы же ограничимся здесь рассмотрением двух явлений, тесно связанных с волнами на воде. Итак,

### Носовая волна

Почему она образуется? Пусть вода симметрично набегает на клин (нос корабля) с вертикальными гранями и углом при вершине  $2\alpha$  (рис. 2) со скоростью  $v$  (очевидно, это и есть скорость корабля относительно воды). У самого носика клина мы можем разложить вектор  $v$  на две компоненты: параллельную одной из граней (одному из бортов корабля)  $v_{\parallel}$  и пер-

пендикулярную ей  $v_{\perp}$ . Таким образом, вода относительно рассматриваемого борта участвует в двух движениях: скользит вдоль борта со скоростью  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$  и «налетает» на него перпендикулярно со скоростью  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ .

Во втором движении она разделяется на слои: нижние слои «ныряют» под днище корабля (рис. 3), верхний же слой поднимается вертикально, и мы можем легко оценить, на какую высоту. Действительно, каждая частица воды из этого верхнего слоя, обладая энергией  $mv_{\perp}^2/2$ , резко изменив направление движения, может забраться вверх на такую высоту  $h$ , где ее потенциальная энергия  $mgh$  будет не больше кинетической энергии

$$mgh \leq m \frac{v_{\perp}^2}{2}.$$

Отсюда

$$h \leq \frac{v_{\perp}^2}{2g}.$$

Таким образом, закон сохранения энергии и принцип суперпозиции движений позволяют нам сделать оценку для скорости корабля:  $v_{\perp}^2 \geq 2gh$ , сле-

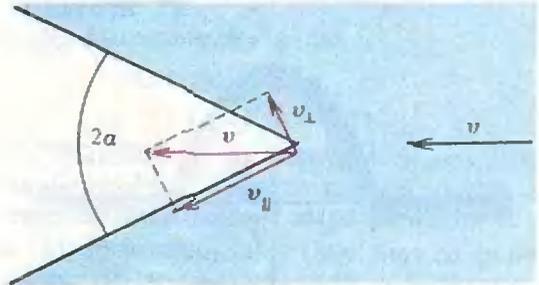


Рис. 2.

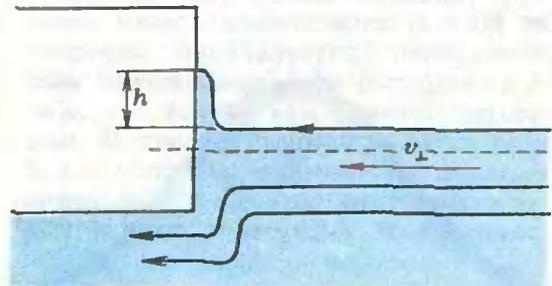


Рис. 3.

довательно,

$$v^2 \geq \frac{2gh}{\sin^2 \alpha} \quad (1)$$

Нам нужно лишь измерить угол  $\alpha$  и высоту носовой волны  $h$ . Соответствующий расчет будет проведен ниже, а сейчас рассмотрим второй источник информации о движении корабля, которым мы располагаем.

### Поверхностные волны

Поверхностные волны — довольно сложный объект исследования, но мы можем многое узнать о них, исходя из очень простых соображений размерности тех физических величин, которые описывают это явление. Для этого нужно прежде всего ясно представить себе причины явления. Волна — это распространяющееся колебание. А почему поверхность воды, выведенная чем-то из положения равновесия, может колебаться? Всякое колебание является результатом «игры» двух факторов: силы, возвращающей в положение равновесия, и инерции, заставляющей проскакать это положение равновесия.

Если на поверхности жидкости образуется «горб», то вернуть частицы

жидкости в положение равновесия может, например, сила тяжести  $F_g$  (см. рис. 4а), пропорциональная ускорению земного тяготения  $g$ . Падая вниз, по инерции «горб» провалится ниже положения равновесия; по соседству с ним будет вытеснен другой «горб» и т. д., в результате чего побегит волна, характеризуемая некоторой скоростью  $u$  и длиной  $\lambda$  (расстояние между «горбами»). В рассматриваемом нами случае мерой инертности колеблющейся воды является ее плотность.

Итак, движение волны по поверхности жидкости описывается следующими величинами (будем сразу писать их размерности):

$$u \left[ \frac{м}{с} \right], \lambda [м], g \left[ \frac{м}{с^2} \right], \rho \left[ \frac{кг}{м^3} \right].$$

Как их связать друг с другом? Например, как найти зависимость интересующей нас скорости волны  $u$  от других величин  $\lambda, g, \rho$ ? Здесь-то нам и придут на помощь уже выписанные размерности.

Мы видим, что размерность  $u$  содержит в знаменателе секунду. Из трех других величин размерность времени входит только в  $g$  (там в знаменателе стоит  $с^2$ ). Отсюда немедленно пишем  $u \sim \sqrt{g}$ , и, очевидно,  $g$  больше трогать нельзя: мы получили от него требуемую секунду в знаменателе размерности  $u$ . Но вместе с этим  $\sqrt{g}$  дал нам в числителе  $\sqrt{м}$ , а нам нужен в числителе метр без всякого корня. Значит, мы можем  $\sqrt{g}$  домножить на  $\sqrt{\lambda}$ , и тогда все будет в порядке: величина  $\sqrt{g\lambda}$  имеет нужную нам размерность  $[м/с]$ .

Итак,

$$u \left[ \frac{м}{с} \right] \sim \sqrt{g \left[ \frac{м}{с^2} \right] \cdot \lambda [м]}.$$

Заметим, что мы получили только пропорциональность, а не равенство, так как перед  $\sqrt{g\lambda}$  может стоять любой множитель  $k$ , не имеющий размерности, т. е.  $u = k\sqrt{g\lambda}$ . Может быть,  $k = 1/2$ , а может быть,  $k = 10$ . Здесь наша теория бессильна, но она нам позволила выяснить главное — физи-

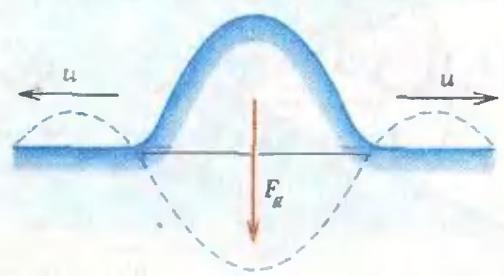


Рис. 4а.

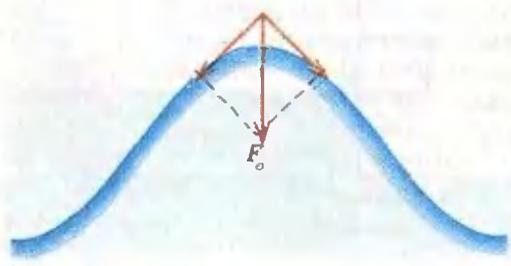


Рис. 4б.

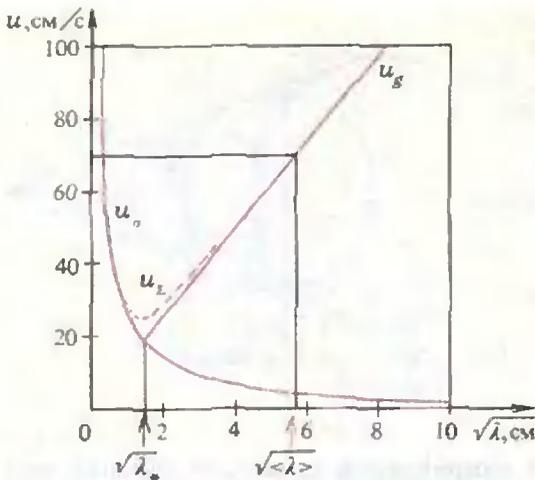


Рис. 5.

ку явления. Точное решение задачи дает значение  $k = 1/\sqrt{2\pi}$ , т. е.

$$u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (2)$$

А где же здесь  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>]? Его нет, ибо нам просто некуда деть килограммы, входящие в размерность  $\rho$ , их не с чем сократить, чтобы в конечном результате величина  $u$  измерялась только в м/с. Это физически понятно: ведь и сила тяжести, ускоряющая «горб» вниз, и масса «горба», определяющая его инерционность, пропорциональны  $\rho$  — вот плотность и выпала из формулы (2). (Аналогичная ситуация имеет место в случае математического маятника, период которого  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$  по той же самой причине не зависит от массы, подвешенной на нити длиной  $l$ .)

Но если волны становятся очень мелкими, «рябью» (ниже мы оценим, что значит очень мелкими), и сила тяжести, действующая на «горб», мала, то вернуть «горб» в положение равновесия стремится другая сила — сила поверхностного натяжения, связанная с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  [Н/м]. Это похоже на то, как если бы мы натянутую горизонтально резиновую пленку приподняли пальцем кверху: тогда из-за натяжения пленки на палец вниз стала бы действовать сила  $F_\sigma \sim \sigma$  (рис. 4 б). В этом случае распространение волн

будет зависеть от величин  $\sigma$  [Н/м],  $\lambda$  [м],  $u_0$  [м/с],  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>]. (Мы обозначили скорость волн, связанных с поверхностным натяжением, через  $u_0$ , чтобы отличить ее от  $u$  из формулы (2).)

Теперь у нас достаточно опыта, чтобы, пользуясь размерностями, получить выражение для скорости волн (вспомним, что  $1\text{Н} = 1\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$ ):

$$u_0 \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right] \sim \sqrt{\frac{\sigma[\text{кг}/\text{с}^2]}{\rho[\text{кг}/\text{м}^3] \cdot \lambda[\text{м}]}}.$$

Если мы хотим знак пропорциональности заменить на знак равенства, нужно учесть недостающий безразмерный множитель. Согласно точной теории он равен  $\sqrt{2\pi}$ . Итак,

$$u_0 = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}}. \quad (3)$$

Разве не удивительно, что мы почти «бесплатно», не зная никаких теорий, получили основное: характер зависимости между величинами! Здесь уместно вспомнить, что по мнению знаменитого итальянского физика Энрико Ферми «в физике... нет места для путаных мыслей... действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности» \*).

Для «студеной» воды

$$\sigma \approx 8 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м},$$

$$\rho = 1 \text{ г/см}^3 = 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Учитывая это, мы построили график зависимости скорости поверхностных волн, определяемой выражениями (2) и (3), от величины  $\sqrt{\lambda}$  (рис. 5; и из формулы (2) мы обозначили  $u_n$ ). Видно, что обе кривые пересекаются при  $\lambda = \lambda_* \approx 2$  см. Таким образом, при очень малых длинах волн ( $\lambda \ll \lambda_*$ ) их скорость определяется поверхностным натяжением, при больших ( $\lambda \gg \lambda_*$ ) — ускорением земного тяготения. В промежуточной области ( $\lambda \approx \lambda_*$ ) скорость поверхностных волн определяется обоими факторами (силой земного тяготения и поверхно-

\*) Понтекорво В. Энрико Ферми. М.: Знание, 1971, с. 27.

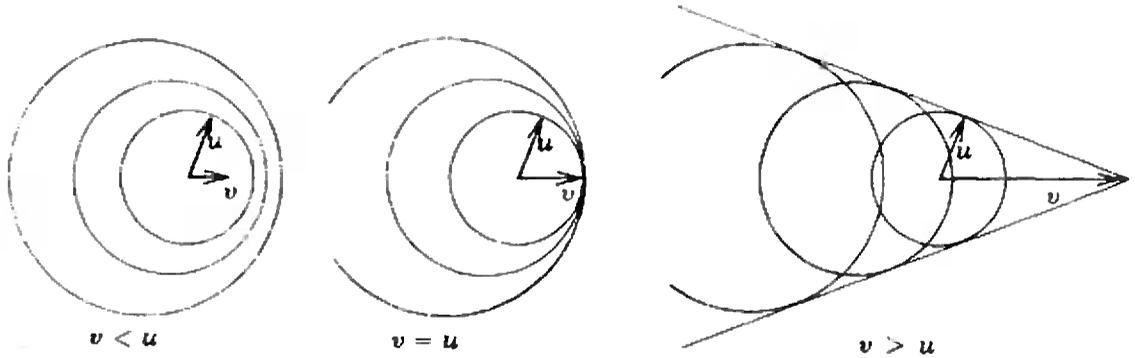


Рис. 6.

ственным натяжением). Выражение для скорости волны становится сложнее ( $u_x = \sqrt{u_g^2 + u_0^2}$ ). Зависимость  $u_x$  от  $\sqrt{\lambda}$  показана на рисунке 5 пунктирной линией.

В физике часто бывает так, что гораздо проще исследовать некоторые предельные случаи (у нас это  $\lambda \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$ ), а «промежуточная область» требует больших усилий. К счастью, для нас эта область несущественна, потому что, взглянув на картину Рериха, мы можем сказать достоверно, что круговые волны имеют длину, явно большую  $\lambda_*$ , и, следовательно, их скорость описывается выражением (2). Чтобы найти ее, надо только «измерить»  $\lambda$ . Вычисления мы проведем ниже, а пока что сделаем еще один шаг.

Вспомним, что когда жук-водомер быстро бежит по воде или пуля летит в воздухе быстрее звука, всегда образуются характерные «усы», которые тем теснее прижимаются к движущемуся телу, чем больше его скорость  $v$  по сравнению со скоростью  $u$  распространения возмущений, вызываемых телом. На рисунке 6 приведены три характерных случая: если  $v < u$ , волны обгоняют тело и лишь теснее сжимаются в направлении движения; если  $v = u$ , то гребни волн в одной точке (в направлении движения) наползают друг на друга; если  $v > u$ , то тело обгоняет волны и образуются «усы».

Взглянув на картину Рериха, мы видим, что на ней изображен первый случай; более того, поскольку не заметно даже намек на сжатие волн

в направлении движения корабля, мы должны заключить, что его скорость намного меньше, чем скорость движения волн:

$$v \ll u. \quad (4)$$

Таким образом, с точки зрения поверхностных круговых волн корабль просто «топчется на месте».

А теперь приступим к вычислениям. Для этого нам нужно «измерить» высоту носовой волны  $h$ , угол  $2\alpha$  и длину поверхностной волны  $\lambda$ .

### Измерения

Мы могли бы постараться измерить нужные нам величины по картине поточнее, с учетом перспективы, проекций, ракурсов и т. д. Но, во-первых, это довольно сложно и утомительно; во-вторых, мы оказались бы при этом в смешном положении: действитель-

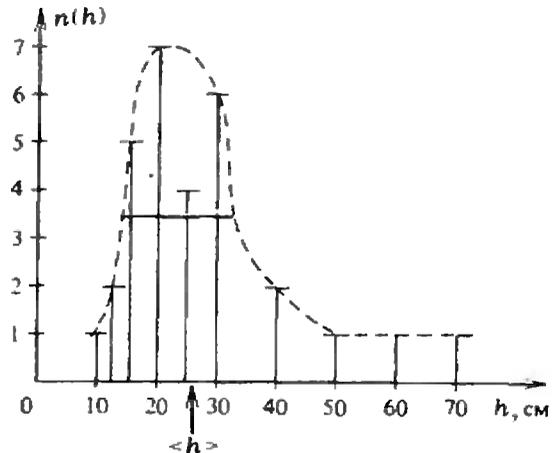


Рис. 7.

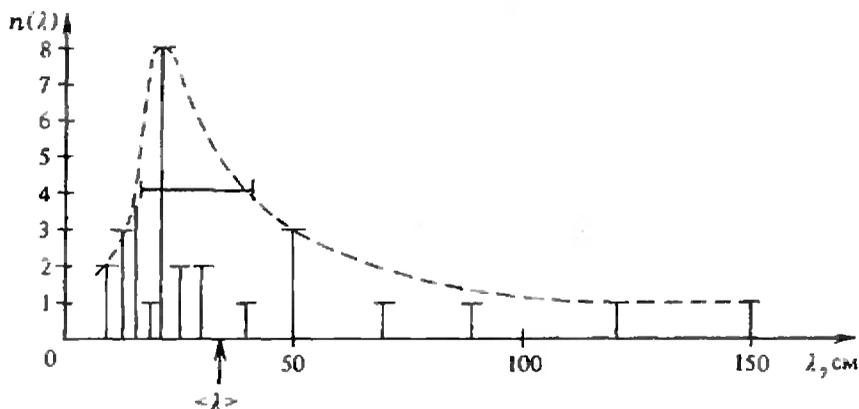


Рис. 8.

но, нелепо подходить к сказочному вымыслу художника как к экспериментально полученной фотографии. К тому же мы не знаем, какой высоты был, например, нос у изображенного корабля, какого размера нарисованные щиты. Есть, правда, на картине один характерный размер, который, по-видимому, мало изменился со времен варягов, — размер головы.

Прежде чем читать дальше, попробуйте сами, пользуясь хотя бы этим «эталоном», оценить  $h$  и  $\lambda$ . Это будет ваше личное «измерение». Нельзя, однако, забывать, что картина воспринимается каждым зрителем очень индивидуально. Покажите эту картину всем ребятам вашего класса и спросите каждого, что он думает о значениях  $h$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$  (хорошо, если спрашиваемый при этом не слышал ответов других товарищей; тогда «показания» всех учеников будут похожи на независимые показания прибора). Полученные ответы запишите, затем постройте график, где по горизонтальной оси отложите значения  $h$ , а по вертикальной — число человек  $n$ , назвавших это значение  $h$ .

Автор проделал это со своими товарищами (всего было опрошено 30 человек) и получил графики, приведенные на рисунках 7 и 8. Интересно, что большинство опрошенных назвали значения  $h$  и  $\lambda$ , кратные 5 см, некоторые — кратные 2—2,5 см, но не менее (никто не назвал, например,  $h=27,1357891439$  см). Это похоже на то, как если бы измеряли расстояния линейкой с минимальной ценой деления 2—2,5 см.

При помощи этих графиков мы можем найти средние значения  $\langle h \rangle$  и  $\langle \lambda \rangle$  и считать их достаточно объективными.

Процедура определения средних обычна. Каждое значение  $h_i$  нужно умножить на число людей  $n_i$ , назвавших его, взять сумму по всем  $i$  и разделить на полное число опрошенных. В результате получим

$$\begin{aligned} \langle h \rangle &= \frac{\sum_{i=1}^{30} h_i n_i}{\sum_{i=1}^{30} n_i} = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} h_i n_i = \\ &= \frac{1}{30} (1 \cdot 10 + 2 \cdot 12 + 5 \cdot 15 + 7 \cdot 20 + \\ &\quad + 4 \cdot 25 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 50 + \\ &\quad + 1 \cdot 60 + 1 \cdot 70) \text{ см} \approx 26 \text{ см} = 0,26 \text{ м}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle \lambda \rangle &= \frac{1}{30} (2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 15 + \\ &\quad + 1 \cdot 18 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 30 + \\ &\quad + 1 \cdot 40 + 3 \cdot 50 + 1 \cdot 70 + 1 \cdot 90 + \\ &\quad + 1 \cdot 120 + 1 \cdot 150) \text{ см} \approx 34 \text{ см} = \\ &= 0,34 \text{ м}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эти средние значения отмечены на рисунках 7 и 8 красными стрелками.

Точность наших «измерений»-опросов можно грубо оценить шириной плавной пунктирной кривой, взятой на половине ее высоты (красные линии на рисунках 7 и 8). (Для физических экспериментов разработана, конечно, целая теория ошибок, в общем очень похожая на то, что мы сделали.)

(Окончание см. на с. 62)



# ЛЕНТА МЁБИУСА

## Вариации на старую тему

Доктор физико-математических наук  
Д. ФУКС



Эта статья возвращает нас к замечательной представительнице односторонних поверхностей — ленте Мёбиуса. Получается она из перекрученной на  $180^\circ$  длинной узкой бумажной полоски, склеенной в кольцо. Здесь обсуждается вопрос, какая именно полоска подойдет для изготовления модели ленты Мёбиуса.

Я не буду предлагать вам водить по ленте Мёбиуса пальцем или разрезать ее по средней линии. Речь пойдет о вещах, менее известных. Начну с вопроса:

1. Какой формы бумажную полоску следует взять, чтобы склеить ленту Мёбиуса?

Ожидаемый ответ: полоска должна быть узкой и длинной, с возможно большим отношением длины к ширине. Скажем, из квадратного листа ленты Мёбиуса не сделаешь.

Это верно, но с одной оговоркой, которую легко недооценить: ограничения на размер имеют значение лишь в том случае, когда бумагу запрещается мять. Если же мять бумагу не запрещается, то ленту Мёбиуса можно

склеить не только из квадрата, но из прямоугольника любых размеров — склеиваемые стороны могут быть даже во сколько угодно раз длиннее несклеиваемых.

Сделать это можно так (рис. 1). Сложим прямоугольный лист в гармошку, перегнув его четное число раз. Затем из этой гармошки, как из толстой бумажной полоски, склеим ленту Мёбиуса, вставляя соответствующие части гармошки друг в друга. Из рисунка 1 видно, что лист бумаги, из которого склеена лента Мёбиуса, оказался смятым.

Предположим теперь, что бумажную полоску можно изгибать, но не мять. Примем ширину полоски за единицу. Ясно, что чем длиннее полоска, тем легче склеить из нее ленту Мёбиуса. Таким образом, существует такое число  $\lambda$ , что из полоски длины больше  $\lambda$  ленту Мёбиуса склеить можно, а из полоски длины меньше  $\lambda$  — нельзя (что будет для полоски, длина которой в точности равна  $\lambda$ , нас не интересует). Очень хотелось бы найти это  $\lambda$ .

Удивительно, но решение этой задачи до сих пор неизвестно.

Здесь я докажу для  $\lambda$  неравенства

$$1,57... \approx \frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \sqrt{3} \approx 1,73...$$

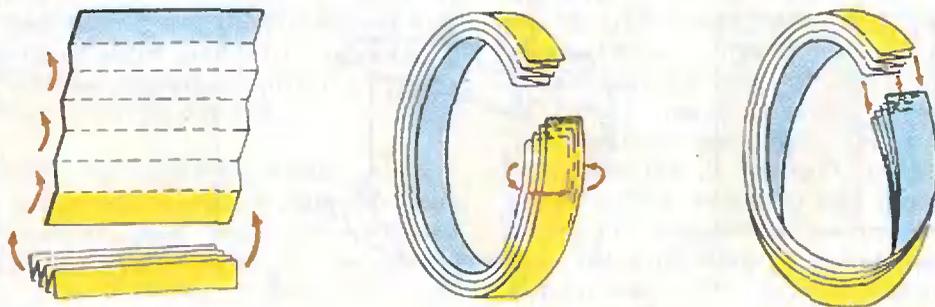


Рис. 1.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 1 за 1979 год.

(при этом наличием склеиваемых участков полоски мы пренебрегаем: предполагается, что края полоски склеиваются встык) и постараюсь объяснить, почему не удастся вычислить  $\lambda$  точнее.

2. Несмятый лист бумаги — «развертывающаяся поверхность»

Раз требование не мять бумагу так важно, посмотрим, каков его математический смысл.

Легко понять, что запрещение мять бумагу значительно ограничивает возможность манипулировать бумажным листом. Например, лист бумаги, не помяв, можно свернуть в трубку или сложить без складки пополам, но нельзя сложить вчетверо. Из листа бумаги, не смяв его, можно сделать конус («фунтик»), но нельзя сделать сферу или даже ее кусочек: прижмите лист бумаги к глобусу, и обязательно появятся складки. Как видно, листу бумаги можно придать далеко не всякую форму.

Поверхности, которые можно сделать из листа бумаги, изгибая, но не смяв его, математики называют *развертывающимися*. Конечно, в математике развертывающиеся поверхности определяются не так: в математическом языке отсутствуют слова «бумага», «сминать», «сделать». Существует целая теория развертывающихся поверхностей, среди достижений которой — удовлетворительный ответ на вопрос, какими они могут быть: математики называют это «классификацией» (ответ принадлежит Леонарду Эйлеру). Я не собираюсь здесь излагать общую теорию развертывающихся поверхностей:

всякая общая теория скучновата\*). Я приведу только некоторые свойства развертывающихся поверхностей, нужные для дальнейшего. Наше наглядное определение не позволяет их доказать, так что придется рассматривать эти свойства как экспериментальные факты (возьмите лист бумаги и убедитесь в их справедливости).

1. *Через каждую точку A развертывающейся поверхности, не лежащую на ее границе, проходит лежащий на поверхности отрезок, не кончающийся в A.* Иначе говоря, в каждой точке к развертывающейся поверхности (изогнутому, но не смятому листу бумаги) можно приложить спицу так, чтобы она прилегла к поверхности на некотором протяжении по обе стороны от взятой точки. Такой отрезок называется *образующей* поверхности (условимся, что это название относится только к отрезкам максимальной длины, целиком лежащим на поверхности, т. е. к отрезкам, не содержащимся в больших отрезках с этим свойством).

2. *Если через точку A, не лежащую на границе поверхности, проходят две различные образующие, причем A не является концом ни одной из них, то достаточно маленький кусок поверхности, окружающий A, является плоским.* В таком случае точку A мы будем называть *плоской*.

3. *Если точка A, не лежащая на границе поверхности, является концом какой-нибудь образующей, скажем, a, то окрестность точки A устроена так. Через точку A проходит един-*

\*1 За 10 лет, прошедших со времени первого опубликования этой статьи, автор изменил свое мнение и изложил эту теорию в увлекательной, по его мнению, форме: см. «Квант», 1988, № 9.

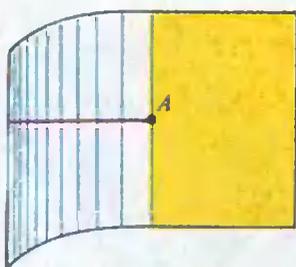


Рис. 2.

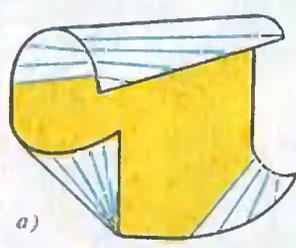


Рис. 3.

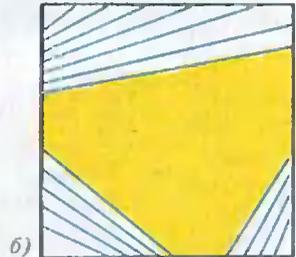




Рис. 4.

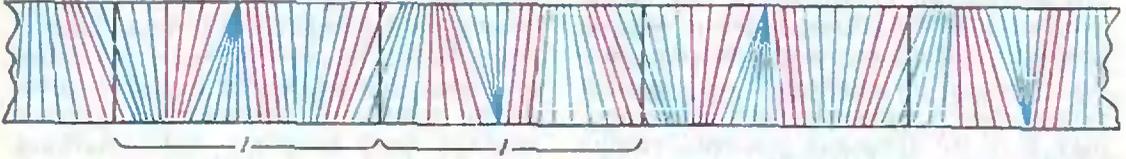


Рис. 5.

ственная не кончающаяся в ней образующая, скажем,  $b$  (рис. 2). Образующая разделяет поверхность на две части. С той стороны от образующей  $b$ , с которой находится образующая  $a$ , к образующей  $b$  прилегает плоский кусок, с другой стороны от  $b$ , сколь угодно близко от точки  $A$ , имеются не плоские точки. Точку  $A$  в этой ситуации мы будем называть *полуплоской*.

Подчеркнем, что если точка поверхности не является ни граничной, ни плоской, то через нее проходит единственная не кончающаяся в ней образующая, причем концы этой образующей лежат на границе поверхности.

Примеры. Лист бумаги, свернутый в трубочку или в фунтик, плоских (и полуплоских) точек не имеет. У трубочки образующие составляют семейство параллельных отрезков, у фунтика — семейство отрезков, веером расходящихся из одной точки. Возможны более сложные расположения образующих. Например, образующие и плоские точки развертываемой поверхности, изображенной на рисунке 3,  $a$ , показаны на рисунке 3,  $b$  (на нем поверхность *развернута* в плоский лист бумаги): тонкие синие линии — образующие, а закрашенные области состоят из плоских точек.

Точки, лежащие на границе области плоских точек, являются либо граничными для всей поверхности, либо полуплоскими. Если поверхность сделана из бумажного многоугольни-

ка (скажем, из прямоугольника), то плоские точки составляют один или несколько плоских многоугольников, причем у каждого из этих многоугольников вершины лежат на границе поверхности, а стороны либо лежат на границе, либо состоят из полуплоских точек (см. еще раз рисунок 3,  $b$ ).

Упражнение 1. Развертываемая поверхность сделана из  $a$ ) квадратного листа со стороной 1;  $b$ ) круга диаметром 1. Докажите, что хотя бы одна из ее образующих имеет длину не меньше  $a$ ) 1;  $b$ )  $\sqrt{3}/2$ .

Вернемся к нашему основному сюжету: вычислению  $\lambda$  — нижней грани длин бумажных полосок ширины 1, из которых можно склеить несмятую ленту Мёбиуса.

### 3. Теорема 1: $\lambda \geq \frac{\pi}{2}$

Доказательство: Пусть лента Мёбиуса сделана из бумажной полоски длины  $l$ . Наматываем на нее длинную бумажную ленту. Эта лента (толщиной бумаги пренебрегаем) будет составлена из прямоугольников одинаковой длины, каждый из которых принимает форму нашей ленты Мёбиуса. Отметим на длинной ленте прямолинейные образующие и плоские точки (как на рисунке 3,  $b$ ). Получится что-то вроде рисунка 4. Картина периодична: все повторяется с периодом, равным  $2l$ . Можно сказать больше: при сдвиге влево или вправо на  $l$  картинка меняется, но строго определенным образом; именно, она переворачивается (т. е. зеркально отра-

жаются в средней линии полоски). Области плоских точек представляют собой четырехугольники (которые могут вырождаться в треугольники), ограниченные двумя отрезками противоположных краев ленты и двумя отрезками, проходящими по ленте. Части ленты, не попавшие в эти области, вымощены образующими, концы которых лежат на краях ленты. (Все это следует из свойств 1—3 развертывающихся поверхностей, приведенных в п. 2.) Плоские участки также можно вымостить образующими, так что вся лента будет покрыта непрерывным семейством образующих (рис. 5). Образующие в одинаковых четырехугольниках можно выбирать одинаковым образом, так что описанная выше периодичность сохранится.

Возьмем любую образующую из нашего семейства, скажем,  $AB$ . Если симметрично отразить ее в средней линии полоски и затем перенести в любую сторону (скажем, вправо) на  $l$ , то получится отрезок  $CD$ , который тоже является образующей из нашего семейства (рис. 6). Заметим (это важно), что  $AC + BD = 2l$ . При наматывании нашей длинной ленты на ленту Мёбиуса образующие  $AB$  и  $CD$  займут одинаковое положение, причем точка  $A$  совместится с  $D$ , а точка  $B$  — с  $C$ ; другими словами, отрезки  $AB$  и  $CD$  составят в пространстве угол в  $180^\circ$ . Между  $AB$  и  $CD$  располагается непрерывное семейство образующих. При движении от  $AB$  к  $CD$  величина угла, который эти образующие составляют в пространстве с  $AB$ , непрерывно изменяется от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ . (Напомним, что величина угла между отрезками  $KL$  и  $MP$  в пространстве определяется как  $KLQ$ , где  $Q$  — такая точка, что отрезки  $LQ$  и  $MP$  равны по длине, параллельны и направлены в одну сторону.)

Возьмем любое  $n$  и найдем между  $AB$  и  $CD$  такие образующие  $A_1B_1, \dots, A_{n-1}B_{n-1}$ , что величина угла между  $AB$  и  $A_kB_k$  равна  $k \frac{180^\circ}{n}$  (точки  $A_1, \dots, A_{n-1}$  в этом порядке лежат между  $A$  и  $C$ , а точки  $B_1, \dots, B_{n-1}$  в этом порядке лежат между  $B$  и  $D$ ; см. рис. 7). Длина каждой из образующих больше

или равна 1, а величина угла между пространственными положениями двух соседних образующих не меньше  $\frac{180^\circ}{n}$ . Покажем, что каждая из сумм  $AA_1 + BB_1, A_1A_2 + B_1B_2, \dots, A_{n-1}C + B_{n-1}D$  не меньше длины  $a_{2n}$  стороны правильного  $2n$ -угольника, вписанного в окружность радиусом 1. Это видно из рисунка 8. На этом рисунке отрезки  $A_kE$  и  $A_{k+1}B_{k+1}$  равны по длине, параллельны и направлены в одну сторону,  $A_kF = A_kH = 1$  и  $EG \parallel EB_k$  (рисунок 8 сделан в предположении, что  $A_{k+1}B_{k+1} < A_kB_k$ ; изменения, необходимые в случае  $A_{k+1}B_{k+1} = A_kB_k$  и  $A_{k+1}B_{k+1} > A_kB_k$ , очевидны). Мы видим, что  $A_kA_{k+1} + B_kB_{k+1} = EB_{k+1} + B_kB_{k+1} \geq EB_k \geq FG \geq FH \geq a_{2n}$  (здесь  $A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1}, EB_{k+1}$  — длины изображенных на рисунке 8 криволинейных отрезков; эти длины совпадают с длинами отрезков  $A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1}$

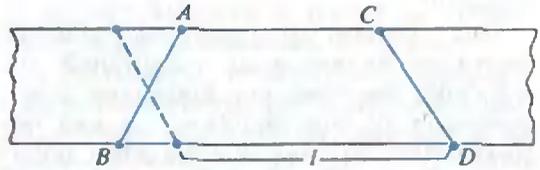


Рис. 6.

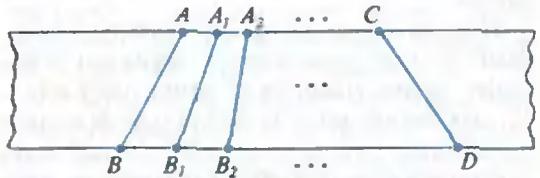


Рис. 7.

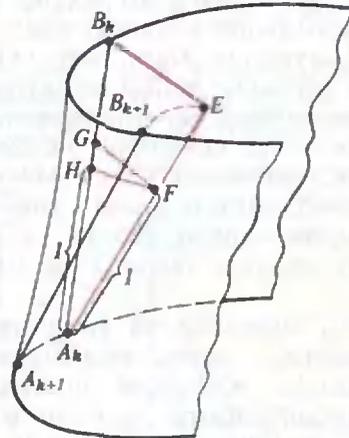


Рис. 8.

рисунка 7; предпоследнее неравенство следует из того, что  $FHG > 90^\circ$ , а последнее — из того, что  $FA_2H \geq \geq \frac{180^\circ}{n}$ .

Итак,  $2l = AC + BD = (AA_1 + BB_1) + (A_1A_2 + B_1B_2) + \dots + (A_{n-1}C + B_{n-1}D) \geq na_{2n}$ , т. е.  $2l$  при любом  $n$  не меньше половины периметра правильного  $2n$ -угольника, вписанного в окружность радиусом 1. Значит,  $2l$  не меньше половины длины самой этой окружности, т. е.  $l \geq \pi/2$ . Теорема доказана.

#### 4. Теорема 2: $\lambda \leq \sqrt{3}$

Эта теорема проще предыдущей: для ее доказательства достаточно объяснить, как склеить ленту Мёбиуса из полоски, длина которой больше  $\sqrt{3}$ . Предположим сначала, что ее длина в точности равна  $\sqrt{3}$ . Тогда на этой полоске можно расположить два пра-

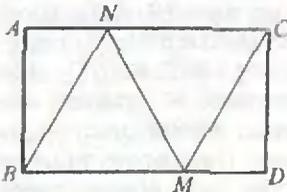


Рис. 9.

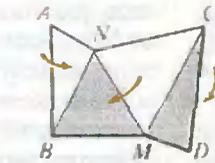


Рис. 11.

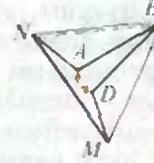
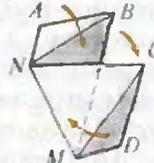


Рис. 10.

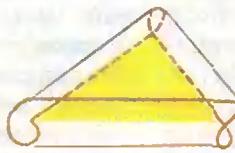
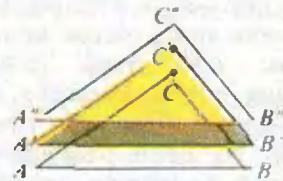


Рис. 12.



вильных треугольника (рис. 9). Перегнем полоску по боковым сторонам этих треугольников, чередуя направления сгиба (рис. 10; возьмите ножницы и бумагу и проделайте это). Края  $AB$  и  $CD$  полоски совместятся, причем точка  $A$  совместится с точкой  $D$ , а точка  $B$  — с точкой  $C$ . Получится лента Мёбиуса.

При этом построении было нарушено главное правило — не мять бумагу. Но легко понять, что если длина полоски хоть немного больше  $\sqrt{3}$ , то излом по образующей можно заменить изгибанием, производимым на узком участке (рис. 11). Короче

говоря, излом вдоль прямолинейного отрезка нам не страшен; его можно заменить близким к нему изгибанием. (Непоправимое сминание бумаги происходит, когда две линии перегиба пересекаются, то есть когда лист складывается наподобие носового платка — все это известно нам из повседневного опыта.)

Как выглядит получившаяся лента Мёбиуса, показано на рисунке 12. Ее устройство можно представить себе так: три одинаковых правильных треугольника  $ABC$ ,  $A'B'C'$ ,  $A''B''C''$  лежат параллельно друг другу, соответствующие вершины над соответствующими вершинами; стороны  $AB$  и  $A'B'$ ,  $B'C'$  и  $B''C''$ ,  $C''A''$  и  $CA$  соединены перемычками. Линия склейки проходит по медиане одного из треугольников.

Упражнение 2. Нарисуйте для ленты Мёбиуса, построенной в доказательстве теоремы 2, схему прямолинейных образующих и плоских точек (подобно рисунку 4).

#### 5. Почему не удастся найти $\lambda$ точнее?

Пока задача не решена, трудно сказать, почему она не решена. Все же иногда в разных нерешенных задачах удается проследить общие трудности, отметить, так сказать, на математической карте труднопроходимые места, что позволяет подчас предсказать успех или неудачу при решении той или иной задачи.

В предыдущем параграфе мы доказали, что  $\lambda$  есть одна из точек отрезка  $[\pi/2; \sqrt{3}]$ . Какая же? Может быть, на этот счет можно высказать хотя бы правдоподобную гипотезу?

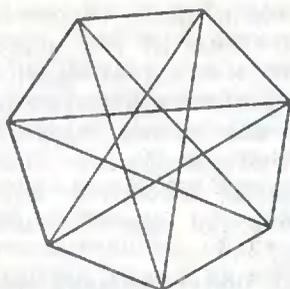


Рис. 13.

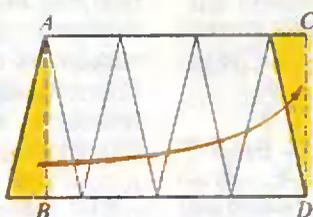


Рис. 14.

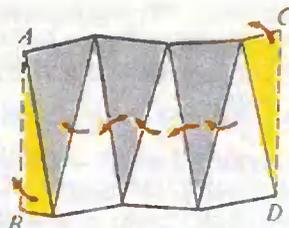


Рис. 15.

Я думаю, что  $\lambda = \sqrt{3}$ , и меня не удивляет, что доказать этого не удастся.

Дело вот в чем. Доказательство теоремы 1 оставляет неиспользованным одно важное свойство нашей ленты Мёбиуса — отсутствие у нее самопересечений. Самопересекающуюся ленту нельзя сделать из бумаги, но представить себе ее можно: подобно самопересекающейся линии на плоскости она «проходит сквозь себя», причем можно разделить ее на части, каждая из которых самопересечений не имеет.

Допустим, что, говоря о бумажных лентах Мёбиуса, мы с самого начала разрешили им иметь самопересечения. Тогда  $\lambda$  приобретает новый смысл — новое значение  $\lambda$  будет меньше прежнего или равно ему. При этом теорема 1 останется верной, и в ее доказательстве не придется менять ни одного слова: отсутствие самопересечений в этом доказательстве нигде не используется. Что же касается теоремы 2, то, если разрешены самопересечения, ее можно значительно улучшить. Именно:

**Теорема 3. Ленту Мёбиуса с самопересечениями можно склеить из полоски любой длины, большей  $n/2$ .**

Делается это так. Возьмем достаточно большое нечетное  $n$  и построим правильный  $n$ -угольник, вписанный в окружность диаметром 1. Рассмотрим, далее,  $n$  содержащих центр окружности треугольников, каждый из которых ограничен стороной и двумя диагоналями  $n$ -угольника (рис. 13; здесь  $n = 7$ ). Эти треугольники покрывают наш  $n$ -угольник, некоторые его места — по несколько раз. Приложим теперь эти  $n$  треугольников друг к другу так, как показано на рисунке 14,

после чего отрезем по длинной медиане половину самого левого треугольника и приложим ее к самому правому треугольнику (рис. 14). Получится прямоугольная полоска с отношением длины к ширине, большим  $n/2$  и стремящимся к  $n/2$  при  $n$ , стремящемся к  $\infty$  (ширина полоски стремится к 1, а длина — к  $n/2$ ). Если последовательно перегнуть эту полоску по всем проведенным на ней линиям, чередуя направления сгиба (рис. 15), то треугольники расположатся, как на рисунке 13 (возьмите еще раз ножницы и бумагу и проделайте это). Отрезки  $AB$  и  $CD$  при этом почти совместятся — между ними окажется только несколько слоев сложенной бумаги. При этом «почти совмещении» точка  $A$  совместится с  $D$ , а точка  $B$  — с  $C$ , так что если бы мы смогли «пропустить ленту сквозь себя» и склеить  $AB$  с  $CD$ , то получилась бы лента Мёбиуса. Если ленту взять чуть более длинной, можно избежать складок, подобно тому, как мы это сделали в доказательстве теоремы 2. Что получится, я попробовал изобразить на рисунке 16.

**Упражнение 3.** Нарисуйте для ленты Мёбиуса, изображенной на рисунке 16, диаграмму плоских точек и прямолинейных образующих.

Таким образом, если бы мы захотели (для лент без самопересечений) доказать, что  $\lambda \geq \mu$ , где  $\mu > \sqrt{3}$ , нам пришлось бы в доказательстве обязательно учитывать отсутствие самопересечений. Наличие или отсутствие самопересечений у той или иной фигуры в трехмерном пространстве — это задача «трехмерной геометрии расположения». Весь опыт математики показывает, что задачи о распо-

ложении в трехмерном пространстве очень трудны. Ведь эта геометрия включает в себя, скажем, теорию узлов и зацеплений, известную своей неприступностью («Квант», 1975, № 7, с. 6); в ней возможны такие феномены, как «рогатая сфера Александра» («Квант», 1977, № 7, с. 22); простейшие ее вопросы, например, можно ли через маленькую дырку вывернуть наизнанку тор, — ставят в тупик нашу интуицию. И вот что удивительно. Казалось бы, в пространствах размерности больше трех проблемы расположения должны стоять еще более остро. Но нет; с ростом размерности эти трудности сглаживаются. Впрочем, «сглаживание» начинается с размерности 5; четырехмерное пространство в известном смысле не проще трехмерного. К сожалению, здесь я не могу аргументировать только что сказанное, так что прошу поверить мне на слово.

Но вернемся к ленте Мёбиуса. Теорема 1, как мы видели, в действительности относится к самопересекающимся лентам. Маловероятно, чтобы условие отсутствия самопересечений не воздействовало на  $\lambda$ ; однако учесть это воздействие не удастся, поскольку математика не обладает достаточными техническими средствами для изучения самопересечений в трехмерном пространстве. Напротив, вполне вероятно, что теорема 2 не улучшится. Ведь улучшить ее — значит придумать новую конструкцию ленты. Опыт показывает, что оптимальные конструкции бывают простыми и гармоничными, каковой и является конструкция из доказательства теоремы 2. Естественно предположить, что если бы лучшая конструкция существовала, она была бы найдена — за столько лет!

Вот почему можно ожидать, что  $\lambda = \sqrt{3}$ .

## 6. Заключение: об одной аналогичной задаче

Склеим из бумажной полоски не ленту Мёбиуса, а цилиндр (размеры полоски — любые). Можно ли, не сми-

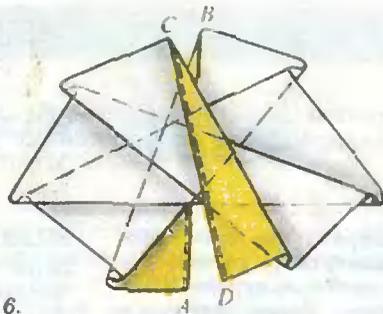


Рис. 16.

ная бумаги, вывернуть цилиндр наизнанку? Если цилиндр широк и низок, то, конечно, можно, а если он узок и высок — то нельзя. Обозначим через  $\sigma$  такое число, что если отношение длины полоски к ширине больше  $\sigma$ , то цилиндр вывернуть можно, а если меньше — то нельзя. Доказательство трех следующих теорем (более трудных, чем теоремы 1, 2, 3) я оставляю вам в качестве задач:

Теорема 1'.  $\sigma \geq \pi$ .

Теорема 2'.  $\sigma \leq \pi + 2$ .

Теорема 3'. Предположим, что в процессе выворачивания допускаются самопересечения. Тогда любой цилиндр, сделанный из полоски, у которой отношение длины к ширине больше  $\pi$ , можно вывернуть наизнанку (не сгиная бумаги).

Больше ничего об этом не известно.

\* \* \*

В заключение я хочу сказать, что мысль написать эту статью возникла у меня при чтении статьи Б. Гальперина и К. Уизера в журнале «Transactions of the American Mathematical Society» (1977, т. 230), из которой я узнал о современном положении дел с обсуждавшимися проблемами.

## Задачи

M1201—M1205, Ф1208—Ф1212

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают право участвовать сразу в республиканских турах Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 марта 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта». № 1 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1201» или «Ф1208». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма про-

**M1201.** В парламент Анчурии нужно избрать по одному депутату от каждого из 999 округов с одинаковым числом избирателей. В Анчурии создано три партии  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , выдвигающие своих кандидатов. Партию  $A$  поддерживает всего 15 % избирателей,  $B$  — 30 %,  $C$  — 55 %. Если на первом туре выборов в округе ни один из кандидатов не набирает 50 % голосов, то во второй тур проходят двое, набравшие наибольшее число голосов. Во втором туре партии  $A$  и  $B$  договорились поддерживать друг друга, а сторонники  $C$  голосуют за кандидата партии  $A$ . Какое наибольшее и какое наименьшее число кандидатов от каждой из партий может попасть в парламент?

*Н. Васильев*

**M1202.** Из вершины  $A$  квадрата  $ABCD$  внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры  $BK$ ,  $BL$ ,  $DM$ ,  $DN$  из вершин  $B$  и  $D$ . Докажите, что отрезки  $KL$  и  $MN$  равны и перпендикулярны друг другу.

*Д. Намсуреж (Монголия)*

**M1203.** Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 км на а) 31 квадрат; б)\* 30 квадратов так, чтобы один из них имел сторону не более 1 м?

*С. Елисеев*

**M1204\*.** На плоскости заданы точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — центры трех кругов. Каждый круг равномерно раздувается (радиус увеличивается с одинаковой для всех кругов скоростью). Как только два круга касаются друг друга, они «лопаются» — их радиусы уменьшаются до 0 — и начинают расти снова. Верно ли, что если расстояния  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  — целые числа, то этот процесс будет периодическим?

Изучите, как может развиваться этот процесс, если треугольник  $ABC$  а) равносторонний; б) равнобедренный; в)\* прямоугольный со сторонами 3, 4, 5. Начальное состояние может быть произвольным (не только «нулевым»).

*М. Хованов*

**M1205.** Мальчик и девочка играют в такую игру: мальчик рисует на плоскости не налегающие друг на друга многоугольники, а девочка их раскрашивает. Если два многоугольника имеют общий отрезок стороны, то она должна раскрашиваться в разные цвета. Какого наименьшего числа цветов заведомо хватит девочке, чтобы следовать этим правилам, если мальчик рисует только а) равносторонние треугольники; б) равнобедренные прямоугольные треугольники; в) одинаковые квадраты?

*Г. Кондаков*

**Ф1208\*.** Многие из вас, по-видимому, замечали, что в тот момент, когда вы ступаете на мокрый песок, он светлеет. Это связано с тем, что песок становится суше.

сним указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи М1201—М1204 предлагались в этом году на Всеннем турнире городов. Задачи Ф1208—Ф1212 в разные годы уже были опубликованы в нашем журнале.

## Задачник „Квант“

Но как только вы убираете ногу, след, оставленный ногой, немедленно заполняется водой. Объясните это явление.

**Ф1209.** Груз висит на упругой нити. Если к грузу прикладывать силу, медленно нарастающую от нулевого значения, то нить оборвется, когда величина силы достигнет значения  $F_1$ . При какой минимальной величине силы оборвется нить, если прикладываемая сила мгновенно достигает некоторого значения и в дальнейшем остается неизменной?

Г. Баронов

**Ф1210.** Для исследования свойств нелинейного резистора был произведен ряд экспериментов. Вначале была исследована зависимость сопротивления резистора от температуры. При повышении температуры до значения  $t_1=100^\circ\text{C}$  мгновенно происходил скачок сопротивления от величины  $R_1=50\ \text{Ом}$  до величины  $R_2=100\ \text{Ом}$ ; при охлаждении обратный скачок происходил при температуре  $t_2=99^\circ\text{C}$  (рис. 1).

Во втором опыте к резистору приложили постоянное напряжение  $U_1=60\ \text{В}$ , при котором его температура оказалась равной  $t_3=80^\circ\text{C}$ .

Наконец, когда к резистору приложили постоянное напряжение  $U_2=80\ \text{В}$ , в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определите период этих колебаний, а также максимальное значение тока. Температура воздуха в лаборатории постоянная и равна  $t_0=20^\circ\text{C}$ . Теплоотдача от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающего воздуха. Теплоемкость резистора  $c=3\ \text{Дж/К}$ .

А. Буздин

**Ф1211.** В запаянной капиллярной трубке находятся два столбика ртути, разделенные капелькой водного раствора электролита  $\text{HgI}_2$ . Внутренний диаметр трубки  $d=0,3\ \text{мм}$ . Трубка подключена последовательно с резистором с сопротивлением  $R=390\ \text{кОм}$  к батарее с ЭДС  $\mathcal{E}=10\ \text{В}$  (рис. 2). Через какое время капелька сместится на одно деление шкалы (см. рисунок)?

Е. Юносов, И. Яминский

**Ф1212.** Коэффициент преломления атмосферы планеты  $X$  уменьшается с высотой  $h$  над ее поверхностью по закону  $n=n_0-ah$ . Радиус планеты  $R$ . Найти, на какой высоте  $h_0$  над поверхностью планеты находится оптический канал, по которому световые лучи будут обходить планету, оставаясь на постоянной высоте.

Н. Седов

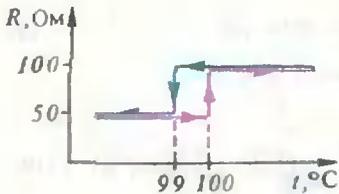


Рис. 1.

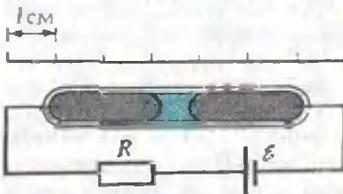


Рис. 2.

# Задачник „Кванта“

## Решения задач

М1176 — М1180, Ф1188 — Ф1192

**М1176.** Два квадрата  $AKBM$  и  $CNDL$  расположены на плоскости так, что  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник, причем точки  $K$  и  $L$  лежат внутри этого четырехугольника. Докажите, что площадь этого четырехугольника равна  $(MN^2 - KL^2)/4$ .

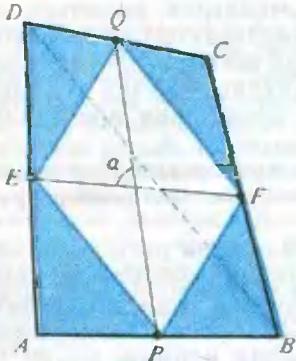


Рис. 1.

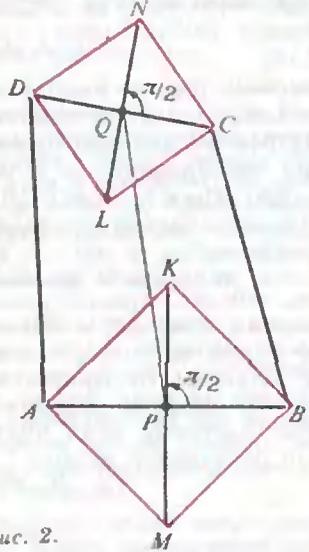


Рис. 2.

Обозначим через  $PQ$  и  $EF$  средние линии четырехугольника  $ABCD$ , как показано на рисунке 1; тогда его площадь  $S$  вдвое больше площади  $PEQF$  (общая площадь синих треугольников равна  $S/2: S_{PAE} + S_{QCE} = S_{BAD}/4 + S_{BCD}/4 = S/4 = S_{PBF} + S_{QDE}$ ). Таким образом,

$$S = 2S_{PEQF} = PQ \cdot EF \cdot \sin \alpha, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — угол между прямыми  $PQ$  и  $EF$ .  
С другой стороны,

$$\frac{1}{4} (MN^2 - KL^2) = \frac{1}{4} (\overline{MN} + \overline{KL}) \cdot (\overline{MN} - \overline{KL}) = \overline{PQ} \cdot \bar{v}, \quad (2)$$

где  $\bar{v} = (\overline{MK} + \overline{LN})/2$ , поскольку

$$\overline{MN} + \overline{KL} = (\overline{MP} + \overline{PQ} + \overline{QN}) + (\overline{KP} + \overline{PQ} + \overline{QL}) = 2\overline{PQ}, \quad (3)$$

$$(\overline{KP} = -\overline{MP}, \overline{QL} = -\overline{QN}),$$

а

$$\overline{MN} - \overline{KL} = (\overline{MK} + \overline{KN}) - (\overline{KN} + \overline{NL}) = \overline{MK} + \overline{LN}.$$

Докажем, что правые части формул (1) и (2) равны. Векторы  $\overline{MK}$  и  $\overline{LN}$  получаются из  $\overline{AB}$  и  $\overline{DC}$  соответственно поворотом на  $\pi/2$  в одном и том же направлении (на рисунке 2 — против часовой стрелки). Поэтому их полусумма  $\bar{v}$  получается тем же поворотом из  $(\overline{AB} + \overline{DC})/2$ . Но полусумма векторов, соединяющих концы двух отрезков, равна вектору, соединяющему середины этих отрезков, — мы уже доказали это для отрезков  $\overline{MK}$  и  $\overline{NL}$  (см. (3)), т. е.  $(\overline{AB} + \overline{DC})/2 = \overline{EF}$ . Итак, вектор  $\bar{v}$  равен вектору  $\overline{EF}$ , повернутому на  $\pi/2$ . Следовательно, угол между векторами  $\overline{PQ}$  и  $\bar{v}$  равен  $\pi/2 \pm \alpha$  (напомним, что  $\alpha$  — это угол между прямыми  $PQ$  и  $EF$ ). Но по условию угол  $\overline{KPQ}$ , то есть угол между векторами  $\overline{PQ}$  и  $\overline{MK}$ , и угол  $\overline{PQL}$  — между  $\overline{PQ}$  и  $\overline{LN}$  — острые, поэтому  $\overline{PQ} \cdot \bar{v} = (\overline{PQ} \cdot \overline{MK} + \overline{PQ} \cdot \overline{LN})/2 > 0$ , а значит, угол между  $\overline{PQ}$  и  $\bar{v}$  острый и равен  $\pi/2 - \alpha$ . Теперь мы получаем, что  $\overline{PQ} \cdot \bar{v} = PQ \cdot |\bar{v}| \cdot \cos(\pi/2 - \alpha) = PQ \times EF \cdot \sin \alpha = S$ , что и требовалось.

Попутно предлагаем доказать, что сумма  $MN^2 + KL^2$  равна сумме квадратов диагоналей  $AC^2 + BD^2$  данного четырехугольника или удвоенной сумме квадратов средних линий  $2(PQ^2 + EF^2)$ .

Н. Васильев, В. Дубровский

**М1177.** Докажите, что для положительных чисел  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , не превосходящих 1, выполнено не-

Воспользуемся известным неравенством Бернулли —

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \text{ при } \alpha > 1, x > -1.$$

(Для его доказательства достаточно заметить, что функ-

равенство

$$(1+x_1)^{1/x_1} (1+x_2)^{1/x_2} \times \dots \times (1+x_n)^{1/x_n} \geq 2^n.$$

## Задача "Кванта"

ция  $f(x) = (1+x)^{\alpha} - 1 - \alpha x$  имеет в точке  $x=0$  минимум, так как  $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha < 0$  при  $-1 < x < 0$  и  $f'(x) > 0$  при  $x > 0$ , причем  $f(0) = 0$ .) В силу этого неравенства и неравенства о средних

$$(1+x_1)^{1/x_1} (1+x_2)^{1/x_2} \dots (1+x_n)^{1/x_n} \geq \left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right) \left(1 + \frac{x_2}{x_3}\right) \dots \left(1 + \frac{x_n}{x_1}\right) \geq 2 \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \cdot 2 \sqrt{\frac{x_2}{x_3}} \dots \cdot 2 \sqrt{\frac{x_n}{x_1}} = 2^n.$$

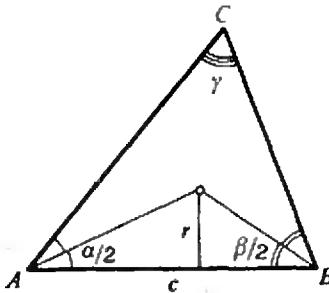
Можно провести и доказательство по индукции.

К. Кохась, М. Телева

**М1178.** а) Докажите, что для тупоугольного треугольника  $ABC$  со сторонами  $a, b, c$ , радиусом вписанной окружности  $r$  и описанной  $R$  выполнено неравенство

$$2(R+r) \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

б) При каком условии это неравенство обращается в равенство?



а) Обозначим углы треугольника через  $\alpha, \beta, \gamma$  (см. рисунок). По теореме синусов  $a = 2R \sin \alpha$ ,  $b = 2R \sin \beta$ ,  $c = 2R \sin \gamma$ , а, как видно из рисунка,

$$c = r \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) = r \frac{\sin(\alpha + \beta)/2}{\sin \alpha/2 \sin \beta/2},$$

откуда

$$r = \frac{2R \sin \gamma \sin \alpha/2 \sin \beta/2}{\cos \gamma/2} = 4R \sin \alpha/2 \sin \beta/2 \sin \gamma/2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R+r &= R(1 + 4 \sin \alpha/2 \sin \beta/2 \sin \gamma/2) = \\ &= R \left( 1 + 2 \left( \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \right) = \\ &= R(1 - 2 \sin^2 \gamma/2 + \cos \alpha + \cos \beta) = R(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma), \end{aligned}$$

а доказываемое неравенство с учетом теоремы синусов принимает вид

$$(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) \leq 0.$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} &2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \cos \gamma (\cos \alpha + \cos \beta) + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \\ &+ 2 \cos^2 \gamma - 1 = \cos(\alpha - \beta) - 1 + \cos(\alpha + \beta) + \\ &+ 2 \cos \gamma (\cos \alpha + \cos \beta) + 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \\ &+ 2 \cos^2 \gamma = \cos(\alpha - \beta) - 1 - \cos \gamma (1 - 2 \cos \alpha - 2 \cos \beta + \\ &+ 2 \cos(\alpha - \beta) + 2 \cos(\alpha + \beta)) = (\cos(\alpha - \beta) - 1) - \\ &- \cos \gamma (1 - 2 \cos \alpha - 2 \cos \beta + 4 \cos \alpha \cos \beta) = \\ &= (\cos(\alpha - \beta) - 1) - \cos \gamma (1 - 2 \cos \alpha)(1 - 2 \cos \beta). \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что либо оба угла  $\alpha$  и  $\beta$  не меньше  $60^\circ$ , либо оба они не больше  $60^\circ$ , тогда  $(1 - 2 \cos \alpha)(1 - 2 \cos \beta) \geq 0$ . Кроме того, очевидно,  $\cos(\alpha - \beta) - 1 \leq 0$ ,  $\cos \gamma \geq 0$  (треугольник не тупоугольный). Следовательно, полученное выражение неположительно.

б) Ответ: равенство достигается только для равносided или равнобедренного прямоугольного треугольника. Действительно, из проведенных выше вы-

# Задачник "Квант"

кладок следует, что для достижения равенства необходимо и достаточно, чтобы  $\cos(\alpha - \beta) = 1$ , то есть  $\alpha = \beta$ , и либо  $\cos \gamma = 0$ , то есть  $\gamma = 90^\circ$ , либо  $\cos \alpha = \cos \beta = 1/2$ , т. е.  $\alpha = \beta = 60^\circ$ .

Э. Гогман

**M1179.** Найдите  $a_{1000}$ , если  $a_1 = 0$  и при  $n = 1, 2, 3, \dots$

а)  $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} (a_n + 1)$ ;

б)  $a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} \times (a_n + 1)$ ;

в)  $a_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)} \times (a_n + 1)$ .

Ответ: а)  $999/2$ , б)  $999 \cdot 2001/10010$ , в)  $16650/167$ .

Докажем по индукции, что общие члены рассматриваемых последовательностей выражаются через номер  $n$  следующими формулами:

а)  $a_n = \frac{n-1}{2}$ ; б)  $a_n = \frac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)}$ ; в)  $a_n = \frac{n(n-1)}{10(n+2)}$ .

При  $n=1$  все формулы дают  $a_n = 0$ . Проверим их справедливость для  $a_{n+1}$ , считая их верными для  $a_n$ .

Случай а):  $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} \left( \frac{n-1}{2} + 1 \right) = \frac{n}{2} = \frac{(n+1)-1}{2}$ .

Случай б):  $a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} \times \frac{2n^2 - n - 1 + 10n + 10}{10(n+1)} = \frac{n \cdot (n+3)(2n+3)}{10(n+2)(n+3)} = \frac{n(2n+3)}{10(n+2)}$ .

Случай в):  $a_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)} \times \frac{n^2 + 9n + 20}{10(n+2)} = \frac{n(n+1)}{10(n+3)}$ .

Осталось подставить  $n=1000$  в формулы для  $a_n$ .

Б. Вергейм

**M1180\*.** На одной из двух данных пересекающихся сфер взяты точки  $A$  и  $B$ , на другой —  $C$  и  $D$ . Отрезок  $AC$  проходит через общую точку сфер. Отрезок  $BD$  проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, содержащей центры сфер. Докажите, что проекции отрезков  $AB$  и  $CD$  на прямую  $AC$  равны.

Пусть  $E$  и  $F$  — общие точки сфер, лежащие соответственно на  $AC$  и  $BD$ ,  $O_1$  и  $O_2$  — центры сфер,  $G$  — точка, симметричная  $F$  относительно прямой  $O_1O_2$ . Очевидно,  $G$  — также общая точка сфер, причем  $BG$  и  $DG$  — диаметры сфер (рис. 1).

Будем обозначать через  $X'$  проекцию произвольной точки  $X$  на  $AC$ . Тогда ясно, что  $O_1'$  — это середина хорды  $AE$  сферы  $O_1$ ,  $O_2'$  — середина хорды  $EC$  сферы  $O_2$ . В то же время  $O_1'$  — середина отрезка  $B'G'$ , так как  $O_1$  — середина  $BG$ , а  $O_2'$  — середина отрезка  $G'D'$ . От-

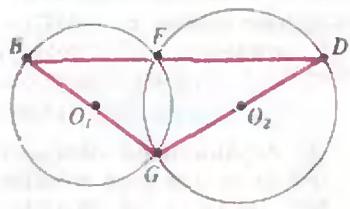


Рис. 1.

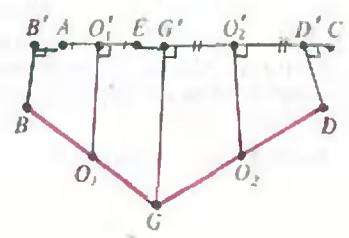


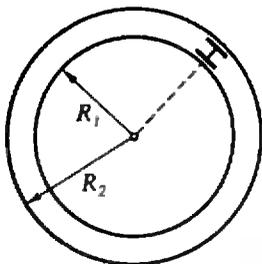
Рис. 2.

## Задачник „Квант“

сюда следует (см. рис. 2), что  $AB' = G'E$ , а  $G'E = D'C$ , то есть  $AB' = D'C$ .

И. Шарыгин

**Ф1188.** Между двумя высокими гладкими кольцевыми стенками находится колесная пара (см. рисунок) — два тяжелых диска массой  $M$  каждый, посаженных жестко на легкую ось длиной  $L$  ( $L \approx R_2 - R_1$ ). Прилагая к оси горизонтально направленную силу, мы заставляем колесную пару двигаться по кругу без перекаоса (так, что ось все время направлена по радиусу). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы пройти весь круг? Коэффициент трения колес о землю  $k$ ; колеса считать узкими.



**Ф1189.** В большой комнате зимой поддерживается постоянная температура  $T_k = +15^\circ\text{C}$  при помощи трех радиаторов центрального отопления, соединенных последовательно, по которым прокачивается горячая вода. При этом температура первого радиатора  $T_1 = +75^\circ\text{C}$ , а последнего (третьего) —  $T_3 = +30^\circ\text{C}$ . Чему равна температура второго радиатора? Считайте, что теплообмен — как между радиатором и комнатой, так

ясно, что в заданной ситуации невозможно добиться того, чтобы оба колеса двигались без проскальзывания. Поэтому искомая работа равна работе сил трения, взятой со знаком минус.

При медленном движении колесной пары мощность силы трения для каждого колеса равна  $-F_{\text{тр}}|v_n| = -kMg|v - \omega r|$ , где  $v_n$  — скорость нижней точки колеса относительно земли,  $r$  — радиус колеса,  $v$  — скорость центра колеса,  $\omega$  — угловая скорость вращения колеса вокруг своей оси. Мощность сил трения, действующих на оба колеса, равна  $-kMg(|v_1 - \omega r| + |v_2 - \omega r|)$ , где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости центров первого и второго колес. При фиксированных  $v_1$  и  $v_2$  величина в скобках минимальна при  $v_1 \leq \omega r \leq v_2$ , что соответствует случаю, когда колеса проскальзывают в противоположных направлениях. В этом случае суммарная мощность сил трения —

$$P_{\text{тр}} = -kMg(v_2 - v_1),$$

а работа сил трения при прохождении полного круга —

$$A_{\text{тр}} = -kMg \cdot 2\pi(R_2 - R_1).$$

Отсюда искомая работа —

$$A = -A_{\text{тр}} = kMg \cdot 2\pi(R_2 - R_1) = 2\pi kMgL.$$

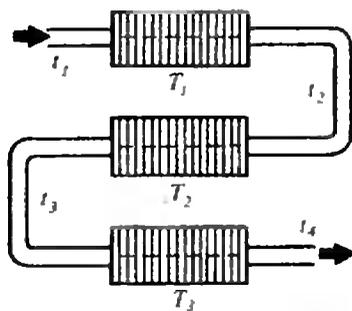
М. Цыпин

Обозначим температуру воды на входе и выходе радиаторов так, как изображено на рисунке. Температура воды на входе каждого радиатора однозначно определяет температуру самого радиатора и температуру воды на его выходе. Условием равновесия является равенство потоков тепла «вода — радиатор» и «радиатор — комната».

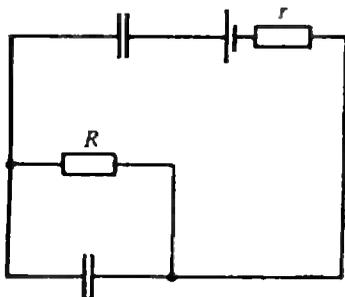
Будем отсчитывать все температуры от комнатной, т. е. от  $T_k$ . Предположим, что мы изменили все температуры в  $a$  раз. Тогда во столько же раз изменятся оба потока тепла для каждого радиатора, и равновесие не нарушится. Это означает, что для всех трех радиаторов одинаковы отношения температуры на входе к температуре радиатора:

$$\frac{t_1 - T_k}{T_1 - T_k} = \frac{t_2 - T_k}{T_2 - T_k} = \frac{t_3 - T_k}{T_3 - T_k},$$

и между горячей водой и радиатором — пропорционален соответствующей разности температур.



**Ф1190.** К батарее с внутренним сопротивлением  $r=1$  Ом подключены последовательно два одинаковых конденсатора. Параллельно одному из них присоединяют резистор сопротивлением  $R=1000$  Ом, при этом в схеме выделяется некоторое количество теплоты. Какая часть этого тепла выделится на внутреннем сопротивлении батареи?



**Ф1191.** Тонкостенная проводящая сфера радиусом  $R$  подключена к источнику тонкими проводками (рис. 1), присоединенными в точках  $A$  и  $B$  ( $AO \perp OB$ ,  $O$  — центр сферы). Ток через источник равен  $I_0$ . В каком направлении движут-

## Задачник „Квант“

и температуры на входе к температуре на выходе:

$$\frac{t_1 - T_k}{t_2 - T_k} = \frac{t_2 - T_k}{t_3 - T_k} = \frac{t_3 - T_k}{t_4 - T_k}.$$

Отсюда получаем

$$(T_1 - T_k)(T_3 - T_k) = (T_2 - T_k)^2, \\ T_2 = 45^\circ \text{C}.$$

А. Андрианов

Ток через резистор  $R$  складывается из тока разрядки «нижнего» конденсатора и тока зарядки «верхнего» (см. рисунок). Значит, ток, текущий через резистор  $r$ , в любой момент времени меньше тока, текущего через резистор  $R$ . Максимальное напряжение на большом резисторе не превышает напряжения батареи  $U$ , и напряжение на малом резисторе заведомо меньше величины  $0,001U$ , поэтому мы им пренебрежем и будем считать, что сумма напряжений на конденсаторах в точности равна напряжению батареи  $U$ .

Тогда решение задачи становится совсем простым: при подключении внешнего резистора изменения напряжения на конденсаторах одинаковы по абсолютной величине, только у «нижнего» конденсатора это изменение отрицательное, а у «верхнего» — положительное. Конденсаторы имеют одинаковые емкости (случай различных емкостей предоставляем вам разобрать самостоятельно), следовательно, и изменения зарядов конденсаторов также одинаковы по абсолютной величине. Это означает, что в любой момент времени ток через резистор  $R$  ровно в два раза больше тока через резистор  $r$ , а отношение соответствующих тепловых мощностей равно  $4000:1$ .

Итак, на внутреннем сопротивлении батареи (на резисторе  $r$ ) выделится примерно  $1/4000$  часть общего количества теплоты.

А. Зильберман

Сначала рассмотрим совсем простое подключение сферы к источнику — полюсами (рис. 2). Ясно, что на экваторе между отметками, находящимися на малом расстоянии  $\Delta l$  друг от друга, будет течь ток

$$i = \frac{I_0}{2\pi R} \Delta l.$$

Теперь подключим к сфере два источника (рис. 3) — один между полюсами, а другой между противо-

# Задача "Кванта"

ся заряды в точке  $C$  ( $OC \perp \perp OA$ ,  $OC \perp \perp OB$ )? Сделаем на сфере около точки  $C$  две отметки, так, чтобы расстояние между ними составляло  $R/1000$ , а соединяющий их отрезок оказался перпендикулярным направлению движения зарядов. Какая часть общего тока протекает по сфере между этими отметками?

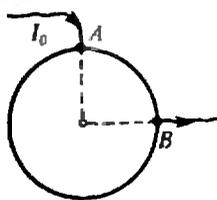


Рис. 1.

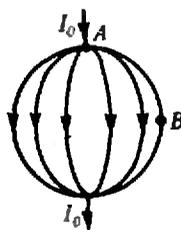


Рис. 2.

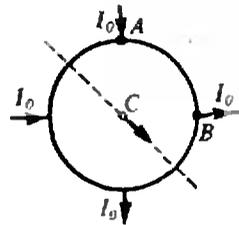


Рис. 3.

положными точками экватора. Тогда ток в точке  $C$  будет равен геометрической сумме двух взаимно перпендикулярных токов. Но этот ток ровно в два раза больше искомого.

Окончательно получим, что между заданными отметками на сфере протекает ток

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{I_0 R}{2\pi R 1000} = \frac{\sqrt{2}}{4000\pi} I_0 \sim 0,0001 I_0$$

в направлении под углом  $45^\circ$  к экватору.

Л. Маркович

**Ф1192.** На торце цилиндрического соленоида лежит тонкий лист картона, на нем — маленькое сверхпроводящее кольцо из тонкой проволоки, диаметр которой  $d_1$  существенно меньше диаметра кольца  $D$ . При подключении соленоида к источнику последовательно с конденсатором (см. рисунок) кольцо подпрыгивает при  $U > U_0$ . Каким должно быть напряжение источника в аналогичном опыте с кольцом такого же диаметра, но сделанным из проволоки толщиной  $d_2$ ? Индуктивность такого кольца с достаточной для практики точностью можно оценивать по формуле  $L = kD \ln(1,4D/d)$ . Сопротивление соленоида считать малым.

Пренебрегая активным сопротивлением соленоида, запишем закон Ома для замкнутой цепи соленоида:

$$U - L_c \frac{\Delta I_c}{\Delta t} = \frac{q}{C},$$

где  $L_c$  — индуктивность соленоида,  $I_c$  — ток через соленоид,  $q$  — заряд на конденсаторе. Используя выражение  $I_c = \Delta q / \Delta t$ , получим уравнение

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{L_c C} = \frac{U}{L_c}.$$

Введем обозначения:  $1/(L_c C) = \omega_0^2$ ,  $q - UC = q^*$ . Тогда уравнение, описывающее зависимость заряда  $q^*$  от времени, будет иметь вид

$$\frac{d^2 q^*}{dt^2} + \omega_0^2 q^* = 0.$$

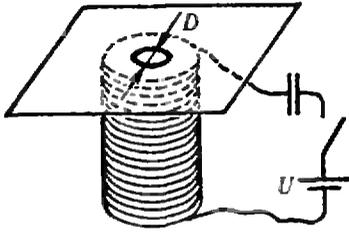
Это уравнение описывает гармонические колебания заряда  $q^*$ , который с точностью до константы  $UC$  равен заряду на конденсаторе. Решение этого уравнения ищем в виде

$$q^*(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t,$$

где  $A$  и  $B$  — константы, которые определяются из начальных условий. В момент замыкания ключа цепи соленоида

$$q^*(0) = q(0) - UC = -UC,$$

$$\frac{\Delta q^*}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = 0,$$



## Задача "Кванта"

откуда находим

$$A = 0, B = -UC.$$

Следовательно,

$$q^*(t) = -UC \cos \omega_0 t, \quad q(t) = UC(1 - \cos \omega_0 t).$$

В дальнейшем нас будет интересовать ток соленоида:

$$I_c(t) = \frac{\Delta q(t)}{\Delta t} = UC \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Запишем теперь закон Ома для сверхпроводящего кольца:

$$-\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} - L_k \frac{\Delta I_k}{\Delta t} = 0,$$

где  $\Phi$  — внешний поток вектора магнитной индукции, пронизывающий кольцо,  $I_k$  — ток в кольце, а  $L_k$  — индуктивность кольца. Решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi + L_k I_k = \text{const},$$

но в начальный момент времени эта константа равна нулю, поэтому

$$I_k = -\frac{\Phi}{L_k}.$$

Поток  $\Phi$  пропорционален индукции соленоида, которая, в свою очередь, пропорциональна  $I_c$  и площади кольца:

$$\Phi \sim I_c D^2 \sim U D^2.$$

С учетом этого соотношения получим

$$I_k \sim \frac{D^2 U}{L_k}.$$

Максимальная сила Ампера  $F$ , действующая в вертикальном направлении на кольцо, пропорциональна длине кольца, току в кольце и току в соленоиде:

$$F \sim D I_k I_c \sim \frac{D^3 U^2}{L_k}.$$

Кольцо будет подпрыгивать, если сила  $F$  будет больше силы тяжести кольца, пропорциональной  $Dd^2$ . В предельном случае

$$\frac{D^3 U^2}{L_k} \sim Dd^2 \rightarrow U \sim \frac{L_k^{1/2} d}{D}.$$

Для первого случая

$$U_0 \sim (\ln(1,4D/d_1))^{1/2} d_1,$$

для второго —

$$U_0 \sim (\ln(1,4D/d_2))^{1/2} d_2.$$

Следовательно,

$$U_0 = U_c \left( \frac{\ln(1,4D/d_2)}{\ln(1,4D/d_1)} \right)^{1/2} \frac{d_2}{d_1}.$$

Напряжение на источнике должно быть больше  $U_0$ .

В. Можеев

## Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1156 — М1170, Ф1163 — Ф1177, справились с задачами М1156, М1158, М1159, М1166, М1169. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

## Математика

Ю. Абаянцев (Ленинград) 65; А. Акимов (Евпатория) 57, 60, 61, 65, 67, 68, 70; А. Аюбян (Ереван) 57, 62, 64, 67, 68; А. Алексеев (Донецк) 57, 60, 62, 64, 65, 67, 70; Д. Алешин (Киев) 57, 60, 62; Р. Алиев (Джамелабад) 60; Д. Андриенко (Киев) 57, 60; И. Аржанцев (Киев) 57; А. Ахмедов (Баку) 57, 61, 64, 65, 67; Г. Баженова (Омск) 57; Е. Баженов (Караганда) 57; В. Бакулин (Новосибирск) 57; В. Барановский (Омск) 57, 60—65, 67; А. Блинова (Ленинград) 57, 60; В. Бодунов (Кемерово) 60; Д. Болдырев (Черкесск) 60; А. Бородин (Донецк) 57, 60—62, 65, 67; И. Брагва (Челябинск) 67; В. Бразилер (Киев) 60; Н. Бродский (Челябинск) 57, 60; Ц. Васильев (София, НРБ) 62; Б. Великович (Москва) 60; Ю. Великина (Днепропетровск) 57, 60; О. Вож (Киев) 62; К. Волченко (Донецк) 57, 60—62, 64—66, 70; Р. Гандлича (Бобруйск) 62; М. Гельбанд (Одесса) 60; Е. Гендин (Киев) 57; И. Герман (Ленинград) 57, 60, 62, 65, 67, 68; А. Гирич (Киев) 57, 60; А. Глебов (Новосибирск) 67; П. Гольдберг (Севастополь) 60; Э. Горянский (Берегово Закарпатской обл.) 60; М. Гришин (Минск) 57, 60; С. Гудилин (Челябинск) 67; И. Гуревич (Пермь) 60; А. Гурман (Одесса) 57, 60—62, 64, 68; С. Дашиял (Ереван) 57, 60, 67, 68; Х. Джафаров (с. Тюркоба АзССР) 57, 60, 67; А. Днестрянский (Рязань) 60; С. Дориченко (Берегово Закарпатской обл.) 57, 60, 67; М. Дружинин (Москва) 68; В. Дубровнер (Киев) 62; Ю. Ерошенко (п. Приютово БашАССР) 57, 60, 61, 67; А. Зайцев (Калинин) 60; Н. Зарубин (Харьков) 57, 60, 61, 64, 65; О. Златковский (Харьков) 57; О. Иванова (Протвино) 67; И. Изместьев (п. Суна Кировской обл.) 57, 67, 68, 70; С. Иноземцев (Омск) 64, 65, 67; Д. Кабыш (Москва) 57, 60, 62, 64; Т. Калита (Киев) 60, 64; К. Кацман (Киев) 60; А. Кеце (Караганда) 62; С. Кимбар (д. Дятлыно ВССР) 57, 65, 67; И. Кириллов (Усть-Каменогорск) 67; С. Коващенко (Винница) 57, 60, 62, 64, 65, 67, 68; А. Козачко (Винница) 57, 60, 63—65, 67, 68, 70; Д. Козлов (Ленинград) 57, 61—64; И. Колков (Ленинград) 62; А. Копылов (п. Черноголовка Московской обл.) 60, 67; Д. Королев (Ленинград) 67, 68, 70; А. Крапчин (Харьков) 62; А. Кудрявцева (Киев) 60, 65, 67; А. Кудымов (Ленинград) 57, 60; М. Лоенко (Павлодар) 60, 62; Я. Лотоцкий (Тернополь) 57; В. Малиновский (Набережные Челны) 57; К. Малков (Саратов) 62; С. Марквич (Минск) 57; М. Марченко (Гайворон) 57, 60, 62—65, 67, 68, 70; Н. Мацко (Киев) 67; К. Мишачев (Липецк) 57, 60—65, 67, 70; А. Мишин (Рыбница) 60; Э. Молдавская (Киев) 63; А. Морозова (Одесса) 60, 62, 64, 68; М. Мукин (Там-

бов) 57, 60, 63, 67; Р. Мучник (Винница) 57, 60, 62, 64, 65, 67, 68, 70; Т. Надева (Пловдив, НРБ) 57; А. Насыров (Обнинск) 61, 64, 67, 70; А. Наумович (Минск) 60, 62—65; В. Некрашевич (с. Крутые Горы Киевской обл.) 57, 60—62, 64, 67, 70; Н. Немировская (Киев) 57, 64; А. Нешев (Хабаровск) 67, 70; Н. Никончук (Брест) 60, 62; И. Новак (Житомир) 62; А. Олжабаев (Караганда) 57; Г. Ониани (Кутаиси) 60; П. Оруджев (Баку) 57, 62; В. Острик (Мариполь) 57, 60, 62, 64, 67, 70; Т. Панов (Киев) 57, 60, 62; Л. Перельман (Ленинград) 61, 62, 64, 67, 70; Б. Петренко (Днепропетровск) 61; З. Пикаренко (п. Дружный Минской обл.) 62; Э. Пикалите (Вильнюс) 57, 60; А. Пилипенко (Киев) 57, 60; В. Плескунин (Москва) 60; Ф. Попеленский (Москва) 57, 60, 67; Д. Поперечный (Хабаровск) 57, 60; Л. Порохня (Павлодар) 64, 67, 70; С. Потехин (Саратов) 60, 61; В. Рейцман (Москва) 60; Р. Ролинский (Киев) 60; Д. Рубанович (Одесса) 60; А. Рябов (Мурманск) 62; К. Саввиди (Ереван) 57, 60; А. Савченко (с. Молны Черкасской обл.) 57, 60; И. Селищев (п. Манченки Харьковской обл.) 57, 60, 62—64, 67, 68; А. Скопенков (Москва) 57, 60—64, 67, 70; А. Скороход (Киев) 57, 60, 62; В. Слюсарчук (Ровно) 62, 64, 67; М. Срдан (Лабинск) 60; И. Сперанский (Донецк) 57; В. Стакаукас (с. Боке ЛитССР) 57, 62—64, 67, 68; С. Тайманов (Раменское) 60, 65, 67; А. Тилишман (Одинцово) 57; А. Тимофеев (Павлодар) 60, 62; С. Тихонос (Воронеж) 57, 60, 62, 64, 67, 68, 70; С. Трифонос (Киев) 67; Д. Угай (п. им. Морозова Ленинградской обл.) 67; А. Уханов (Евпатория) 57, 60; В. Файнберг (Черновцы) 61, 62; В. Фейнберг (Черновцы) 57, 60; К. Фельдман (п. Черноголовка Московской обл.) 57, 60, 61, 64, 67; Л. Харченко (Киев) 62; М. Хасин (Донецк) 57, 60, 62; Г. Хачатрян (с. Бердик Арм. ССР) 57; А. Хисамиев (Алма-Ата) 57; Ю. Хорошилов (Челябинск) 60; М. Худойназаров (к-з Абад Хорезмской обл.) 62; А. Чуприна (Рязань) 60; Г. Шаповалов (Киев) 57, 60; А. Шиндлер (Феодосия) 67; А. Шнайрман (Киев) 60; К. Щербакян (Арзамас) 64; А. Эгамов (Гороховец) 57, 60, 61, 63, 64; О. Южаков (п. Юргамыш Курганской обл.) 67; О. Яцун (Киев) 57.

## Физика

Ю. Абаянцев (Ленинград) 68, 69; М. Авербух (Львов) 74; Д. Андриенко (Киев) 67; С. Анпилин (Северодвинск) 63, 64, 67—71, 74, 76; Т. Бакеев (Алма-Ата) 63, 65, 67—70, 74; В. Бакулин (Новосибирск) 67, 69, 74; Н. Балюнас (Вильнюс) 64—72, 74, 77; Р. Баскаков (Красноярск) 64—67, 69, 70, 74—77; И. Башук (Великие Мосты) 63—68, 70, 72, 74—77; М. Беднюк (Ашга) 69, 70; М. Белоус (Люберцы) 70; Л. Беркович (Киев) 65; С. Бобровник (Черновцы) 63—66; Е. Бокос (Кирово-Чепецк) 75; Р. Бучко (Черновцы) 64—67, 69, 70; Г. Важенин (Свердловск) 64, 65, 68—70, 72, 74, 76, 77; М. Васильев (Саратов) 74; Г. Вейтас (Вильнюс) 64, 65, 67—70, 74; А. Викол (Нерюнгри) 69—71; А. Власов (Ленинград) 69; Г. Выгон (Москва)

63—67, 69, 70, 74—76; В. Высоцкий (Киев) 63—67, 74—77; К. Галицкий (Северодвинск) 63, 64, 67—70, 74, 76, 77; А. Гвозденко (Нежин) 63, 69, 70; Е. Гендин (Киев) 64—67, 69, 70; Ф. Гнускин (Вольск) 69; В. Головок (Старый Оскол) 63, 64, 67; А. Гринчук (д. Мохро Брестской обл.) 65, 68—72, 74; Д. Грязных (Челябинск) 64, 66—70, 72, 74—77; В. Губин (Ташкент) 65, 67, 69, 70, 76; С. Гудилин (Челябинск) 64, 74; О. Гусар (Канев) 64, 69—71; А. Гусев (Липецк) 70; Ю. Гуц (Ровно) 63, 67, 69, 70, 74, 76; А. Давлетов (Алма-Ата) 65, 69, 70; С. Демба (Старый Оскол) 63, 64, 67, 74; Н. Демчук (Здолбунов) 64, 66, 69, 70, 74; О. Дзюбенко (Киев) 70; Р. Димитров (Варна, НРБ) 64, 74, 76; С. Добровольский (Днепропетровск) 69, 70, 72, 74, 76; М. Дорохова (п. Черноголовка Московской обл.) 64, 65, 67, 69, 70, 72—74; О. Дробенко (Киев) 67; М. Дружинин (Москва) 63, 64, 66—70, 75, 76; М. Дьяк (Владимир) 68, 69; Ю. Ерошенко (п. Приютово БашкАССР) 64, 67, 69, 70; А. Жук (Ровно) 63—70, 72, 74—76; В. Жуликов (ст. Рязанская Краснодарского кр.) 69; А. Зборовский (Столин) 74; М. Зеленфройд (Бобруйск) 69, 70, 74, 76, 77; О. Златковский (Харьков) 69, 70; В. Иванов (Тула) 64—67; Д. Иванов (Смоленск) 70; А. Ионес (Ленинград) 68—70, 74; М. Калиновский (п. Трудовое Приморского кр.) 68—70, 74, 75; Т. Калита (Киев) 70, 74; К. Калюжный (Одесса) 70; Г. Каминский (Киев) 69; Ал. Карпенко (Брест) 63—65, 67, 69, 70, 74—76; Ан. Карпенко (Брест) 63—65, 67, 69, 70, 74, 75; Е. Кац (Гулистан) 64; И. Кацман (Киев) 67; С. Кельман (Алма-Ата) 63, 64, 67, 69, 70, 74; Т. Кислюцаева (Канев) 69—71; К. Кладько (Харьков) 67—71, 74—76; Е. Климчук (Кузнецовск) 64, 65, 69, 70, 74—76; С. Клоков (Киев) 69; М. Ковалев (Губкин) 64, 76; В. Ковальский (Киев) 64, 65, 67; Е. Козленко (Саратов) 70, 71; А. Коломиец (Северодвинск) 70; М. Колпаков (п. Почет Красноярского кр.) 64, 66—70, 72—74, 76, 77; Д. Комисаренко (Винница) 69, 70; Е. Коновалов (Киев) 68—70; И. Коновалов (Киев) 74, 76; А. Короновский (Саратов) 70; М. Корпусов (Москва) 75, 76; С. Когковский (Черновцы) 70; Ю. Кравиш (с. Княжиполь Львовской обл.) 69; В. Кузьменко (Ивано-Франковск) 74, 76, 77; А. Кульбачевский (п. Ханкала Ч.И. АССР) 69, 70; В. Кутузов (Рига) 69, 70, 74—76; В. Кухтиков (Таллинн) 74; Д. Лабутин (Иваново) 66, 67; А. Лапенко (Южноукраинск Николаевской обл.) 63, 64, 69, 70, 74, 77; К. Латышев (Москва) 63; М. Левитин (Тюмень) 69; А. Лемперт (п. Черноголовка Московской обл.) 65, 67, 69, 70, 73—77; А. Лигвак (Киев) 67; Н. Маллабаев (Ташкент) 69, 71; Ю. Маравин (Евпатория) 70; С. Маркевич (Минск) 65; Д. Массино (Ташкент) 64, 67—70, 74; Ю. Матюнин (Вольск) 64—67, 69—72, 74—77; Н. Мацко (Киев) 63, 66, 67, 69, 70, 72, 74, 75, 77; Д. Медведев (Алма-Ата) 68—70; В. Мейтус (Киев) 63, 64, 67; Р. Мизюк (Ровно) 63—70, 74, 76, 77; С. Милихисьянц (Фергана) 63—65, 67, 69, 70, 74, 76; О. Мирошниченко (Луцк) 64, 66, 74; А. Михович (Могилев) 67, 74; Е. Мищенко (Черновцы) 64—67, 69—72; А. Мороз (Харьков) 74, 77; Т. Муханова (Калининград Московской обл.) 69, 70; В. Мыгько (Ленин-

град) 63—65, 67, 69, 70, 74—77; Р. Невзоров (Мытищи) 67; Н. Немировская (Киев) 67, 70, 74; С. Никитин (п/о Кузьмолово Ленинградской обл.) 74; А. Николаев (Киев) 69, 70; А. Носиков (Киев) 67; Ц. Нямхуу (Улак-Батор, МНР) 65, 67; Д. Омецкий (Киев) 64, 66—72; В. Онищук (Минск) 68, 69; Г. Орепер (Киев) 67; А. Орловский (Киев) 64—67, 69, 70, 72, 74—77; Д. Офенгенден (Донецк) 74, 75; А. Паужште (Вильнюс) 68, 69; А. Пензин (Куйбышев) 64, 67; Г. Перадзе (Тбилиси) 67; Т. Петрова (Новосибирск) 70; И. Пилюгик (Алма-Ата) 63, 64, 67—70, 74, 76; С. Подпратов (Киев) 69, 70, 75; В. Полищук (Канев) 64, 66, 69—71; С. Польшин (Харьков) 63—65, 67—75; Ф. Попеленский (Москва) 74; Н. Потапов (Брест) 65; С. Поторочин (Ижевск) 63, 69, 72, 74, 76, 77; Е. Призонт (Одесса) 64, 67—70, 73, 74, 76; В. Пузанов (Донецк) 69, 70, 74; А. Раевский (Москва) 69; В. Раймундас (Друскининкай) 63, 67; А. Распереза (Брест) 63—67, 69, 70, 74—77; У. Рахимов (Шават) 65, 70; Х. Рахимов (Шават) 65, 74; А. Ружук (Винница) 65; А. Рыбалочка (Киев) 65, 67; Н. Рябова (Харьков) 64, 65, 67, 69, 70, 72—75; Н. Савельев (Кузнецовск) 65; А. Савин (Горловка) 64, 65, 69, 70, 76; А. Савченко (с. Мошны Черкасской обл.) 64, 68—70, 74, 76; А. Салмысено (Семипалатинск) 64, 68, 69, 71; А. Самченко (Запорожье) 75; У. Санаев (Ургенчский р-н Хорезмской обл.) 69; А. Светашов (с. Сергеевка Воронежской обл.) 67; В. Силаев (Брест) 63, 64, 67, 69, 70; А. Скабелин (Барановичи) 63—65, 67—70, 74, 76; А. Смирнов (Тихвин) 65; В. Солдагов (п. Краснореченск Приморского кр.) 68, 70, 74; Ю. Спектор (Киев) 64, 69, 70; М. Субботин (Старый Оскол) 68—70; И. Сысоев (Семипалатинск) 64, 65, 69, 71; С. Тайманов (Раменское) 63, 67, 69; В. Тамошюнас (Вильнюс) 64—67, 69, 70, 72—75, 77; С. Тимашов (Алма-Ата) 74; М. Титов (Киев) 70, 74, 76; С. Тихонов (Воронеж) 63—67, 73, 76, 77; Р. Тодоров (Варна, НРБ) 70; А. Тугос (Рига) 69, 70, 74; А. Усикский (с. Птичьа Ровенской обл.) 63, 65—67, 69, 70, 72—75; И. Фельдман (Киев) 65, 67; А. Филагов (Кузнецовск) 65; Л. Френклянд (Воронеж) 64, 65, 69, 76, 77; А. Фришланд (Саратов) 63, 67, 69, 70, 72, 74, 76, 77; Г. Хачагрян (с. Бердик АрмССР) 64, 67; В. Хаямина (пгт Южный Аламышик Андижанской обл.) 69, 70; А. Холод (Бердянск) 64, 66, 67; А. Христинченко (Краматорск) 64—67, 70; Е. Чашечкина (п. Черноголовка Московской обл.) 64, 65, 67—70, 72, 74—77; Л. Чернышев (Москва) 69, 70, 76; А. Черняк (Винница) 70; Д. Чоким (Алма-Ата) 63, 65—67; Е. Шагаров (Грозный) 64, 65, 67; А. Шагинян (Ростов) 68; Г. Шаповалов (Киев) 64, 68—70, 74; В. Шарый (пгт Ноябрьск Тюменской обл.) 63, 64; А. Шведов (Чарджоу) 68, 69; С. Шинкевич (Березники) 64—67, 69, 70, 73—77; А. Шитов (пгт Научный Крымской обл.) 63, 65, 67, 74, 76, 77; А. Шнайдман (Киев) 65; А. Шпагин (Марнуполь) 69, 70; И. Шуляк (Киев) 64, 65, 68—72, 74, 76, 77; К. Шурунов (Куйбышев) 64, 67—70; М. Энгин (Тула) 63—70, 72, 74, 75, 77; А. Эрден-Груз (Москва) 67; Н. Ягольницер (Черновцы) 64, 67.

# „Квант“ для младших школьников

## Задачи

1. Если человек, стоявший в очереди перед вами, был выше человека, стоявшего после того человека, который стоял перед вами, то был ли человек, стоявший перед вами, выше вас?

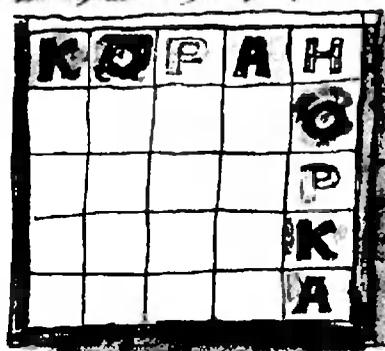
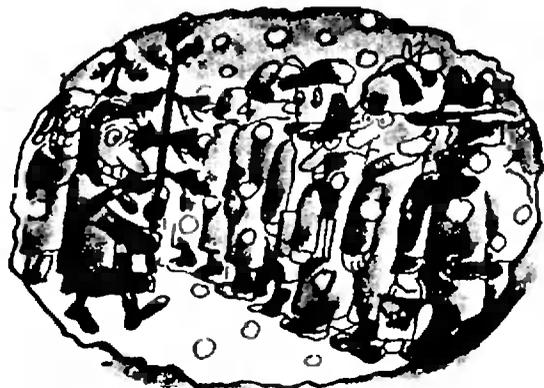
2. У окна стоят четыре девочки (см. рисунок). Каких девочек достаточно попросить повернуться, чтобы выяснить, истинно ли такое утверждение: «Если девочка без очков, то у нее в волосах бантик»?

3. Найдите два натуральных числа, разность и частное которых — одно и то же целое число.

4. Заполните пустые клетки квадрата буквами К, О, Р, А и Н так, чтобы в каждом горизонтальном и вертикальном ряду, а также по диагоналям все буквы были различны.

5. Сколько оборотов в сутки делает биссектриса между часовой и минутной стрелками?

*Задачи, присылаемые в редакцию, мы часто «переодеваем»: меняем фабулу, уточняем, обобщаем. В этом юбилейном номере мы «переодели» пять задач, опубликованных в 1980 году.*



# КАМУШКИ И ШАХМАТНАЯ ДОСКА

(воспоминания о летних каникулах)

Кандидат физико-математических наук  
А. САВИН



Жарким июльским днем мы с Колей отправились на пляж. Вдоволь накупавшись, мы улеглись на песке загорать. Рядом с нами двое мужчин играли в шахматы.

Естественно, мы тотчас начали обсуждать позицию на доске и подсказывать: я — одному, а Коля — другому. Но игроки были невозмутимы и на наши подсказки совершенно не реагировали. Отчаявшись превратить эту партию в шедевр шахматного искусства, мы стали думать, чем же нам заняться.

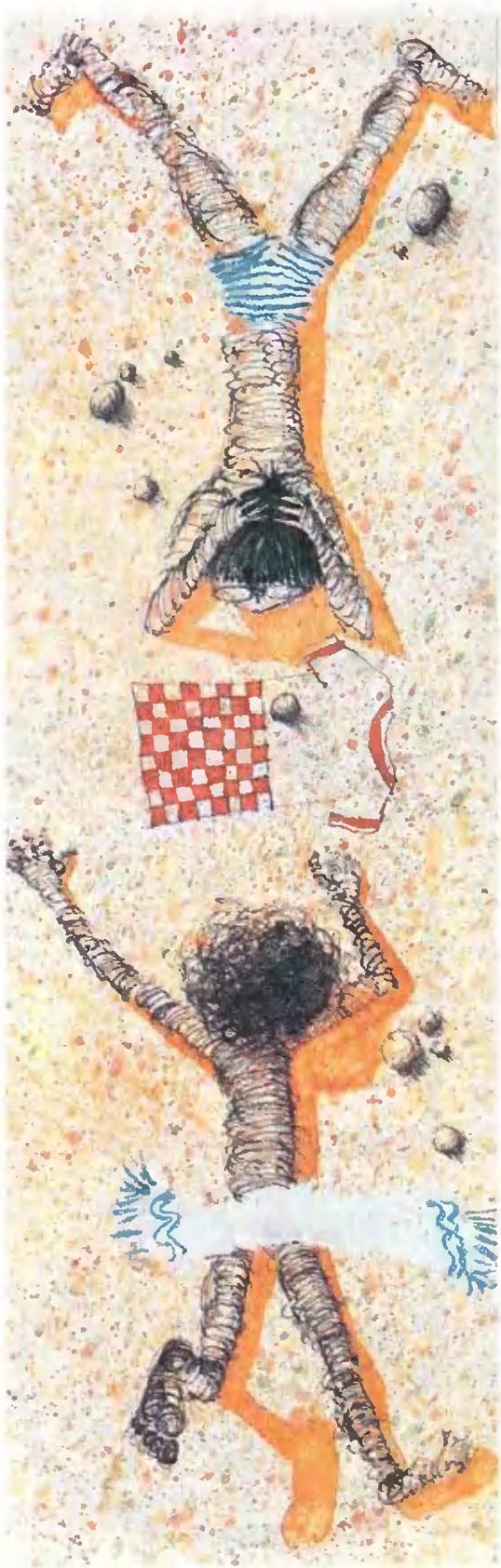
«А не сыграть ли нам в камушки?» — спросил у меня Коля. «Это что — подбрасывать и ловить?» «Да нет! — ответил он, — гораздо интереснее! Для начала сыграем в такую игру.

*Имеется кучка камней. Мы по очереди берем по одному, по два или по три камня. Выигрывает тот, кто берет последний камень».*

Я решил играть так, чтобы у меня всегда было четное число камней, — и проиграл. Во второй партии я стал брать камни так, чтобы у меня все время было нечетное число камней, — и снова проиграл. Проигрывать в третий раз мне очень не хотелось, и я решил попытаться понять смысл игры.

И в первый раз, и во второй раз получилось так, что перед моим последним ходом в кучке оказывалось

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 1 за 1982 год.



4 камня. Если я брал только один камень, Коля забирал остальные три. Если же я брал два или три камня, он забирал оставшиеся два или единственный последний камень.

Как же мне сделать, чтобы вновь не оказаться перед четырьмя камнями? Оставлять ему 5, 6 или 7 камней нельзя: взяв 1, 2 или 3 камня, он вновь оставит мне 4 камня. А если я оставляю ему 8 камней? Тогда уже он будет вынужден оставить мне 5, 6 или 7 камней, а я заставлю его делать ход в ситуации, когда в кучке лежит 4 камня. И тут меня осенило! Если игрок получает на своем ходе кучку камней, количество которых делится на 4, то после любого его хода количество оставшихся камней уже не сможет делиться на 4, а его партнер вновь сможет сделать ход, приводящий к кучке, количество камней в которой вновь делится на 4, и так далее, пока не исчерпаются все камни. Все ясно!

Пересчитав камни в кучке (их оказалось 25), я поднял голову, чтобы сказать Коле, что беру один камень, но... он уже махал мне рукой с середины реки.

Когда мы, накупавшись, вернулись на старое место, я, как бы нехотя, спросил: «Сыграем еще партию в камни? Начинать должен вроде бы я?» «Что ж, — ответил Коля, — давай; только сейчас будем играть по новым правилам:

*Из кучки камней снова берем по одному, по два или по три камня. Проигрывает тот, кто берет последний камень. Ну, начинай!»*

Я задумался, а через минуту, еще раз пересчитав камни в кучке — их как было, так и осталось 25, поднял руки вверх. «Сдаюсь, проиграл!» «Почему?» — удивился Коля. В ответ

я разложил камни так, как показано на рисунке 1, — шесть кучек по 4 камня и еще один камень.

«В первой игре я выигрывал, беря первым ходом один камень, — сказал я, — а потом — столько камней, чтобы в сумме с камнями, взятыми перед этим тобой, получилось четыре камня. А теперь, сколько бы камней я ни взял, ты, беря всякий раз столько камней, чтобы в сумме со взятыми перед этим мной камнями получалось четыре камня, оставишь мне последний камень».

«Молодец, — похвалил меня Коля. — Ты нашел выигрышную стратегию для второго игрока. Что же мы будем делать дальше?»

Тут мы заметили, что наши соседи-шахматисты ушли купаться. «Эх, жаль, не попросили у них шахматы поиграть, пока они купаются!» — сказал я, глядя на пустую шахматную доску. Фигуры наши соседи убрали в сумку. На песке валялась лишь одна забытая пешка. А мне хотелось после всех моих неудач взять реванш у Коли.

«Знаешь что, — сказал Коля, придвигая шахматную доску и устанавливая эту единственную пешку в угол доски, — давай сыграем в нгру, автором которой является известный советский математик, член-корреспондент Академии наук СССР\*) И. М. Гельфанд. Играют в нее так: сначала пешка стоит в одном из углов доски, а затем мы ее по очереди будем передвигать на одну из соседних клеток, причем назад ходить нельзя, — и он, поставив пешку на одно из центральных полей, показал, на какие поля ее можно передви-

\*) Ныне академик.



нуть (на рисунке 2 эти ходы указаны стрелками). — *Выигрывает тот, кто поставит пешку в противоположный угол доски*».

Я тотчас согласился — ведь в шахматы я играю куда лучше Коли, а здесь не какие-то там камушки, а настоящая шахматная доска, настоящая пешка, которая, правда, ходит почти как король.

Первую партию я проиграл и решил во второй не торопиться, а хорошенько обдумывать позицию. Однако тут вернулись наши соседи, и нам пришлось, извинившись, вернуть им доску с пешкой. «Не расстраивайся, — сказал мне Коля, — в эту игру можно играть и при помощи камушков».

Я тут же расчертил на песке квадрат, провел линии, делящие его на 64 квадрата, а на угловое поле поставил камушек.

«Можно, конечно, и так, — сказал Коля, — но я имел в виду совсем другое».

Он сложил две кучки камней, по 7 камней в каждой. «*Будем по очереди брать камни: либо один камень из первой кучки, либо один камень из второй кучки, либо два камня — по одному из каждой кучки; а можно не брать камни, а переложить один камень из одной кучки в другую. Выигрывает тот, кто забирает последний камень*».

«Не хочу я играть в твои дурацкие камни, — возмутился я, — давай играть в игру Гельфанда! Ты что — боишься?» «А это и есть та же самая игра Гельфанда, — ответил Коля, — Вот смотри!» И он нарисовал на песке около начерченного мной квадрата цифры от 0 до 7 сначала вдоль одной стороны, а потом вдоль другой стороны, как на рисунке 3.

«Посмотри, что происходит. Пусть фишка стоит на поле, скажем, (5; 6), то есть на пересечении вертикали, помеченной цифрой 5, и горизонтали, помеченной цифрой 6 (см. рис. 3). Положим в сторонке две кучки камней: в первой 5 камней, а во второй 6. В какие клетки я имею право передвинуть фишку? В клетки (6; 5),

(5; 5), (4; 5), (4; 6) и (4; 7). Как из наших двух кучек, содержащих 5 и 6 камней, получить кучки, соответствующие новым положениям фишки? Очень просто! Чтобы получить положение (6; 5), нужно один камень переложить из второй кучки в первую; положение (5; 5) получается, если взять из второй кучки один камень; (4; 5) — если взять по камню из обеих кучек; (4; 6) — если взять один камень из первой кучки; наконец, положение (4; 7) получается, если один камень переложить из первой кучки во вторую. Поскольку начальное поле занумеровано цифрами (7; 7), вначале в каждой кучке должно быть по 7 камней. Конечное же поле занумеровано цифрами (0; 0) — в кучках не остается ни одного камня».

«А мне игра на шахматной доске нравится гораздо больше, — сказал я. — Вот смотри: клетка (0; 0) — проигрышная в том смысле, что если ход мой, а фишка уже стоит в этой клетке, то я проиграл. А соседние с ней клетки (0; 1), (1; 1) и (1; 0) — выигрышные. Тогда клетки (0; 2) и (2; 0) — проигрышные, так как с них можно пойти лишь на выигрышные клетки (на рисунке 4 проигрышные клетки помечены буквой П, а выигрышные — знаком +). Продолжая эти рассуждения, я смогу для каждой клетки определить, выигрышная она или проигрышная, — сказал я, заканчивая разметку полей квадрата (в результате получился рисунок 4). — Теперь я могу с тобой сыграть и в «каменный» вариант игры Гельфанда: буду передвигать фишку по доске и соответственным образом брать или перекладывать камни». «А я могу сформулировать совсем простое правило, — сказал Коля. — Посмотри, проигрышные клетки — это те, у которых обе «координаты» четные; у выигрышных же клеток хотя бы одна «координата» нечетна. Таким образом, в «каменной» игре Гельфанда стратегия у начинающего игрока очень простая: он должен брать камни так, чтобы в обеих кучках было четное число

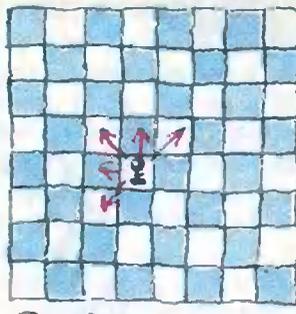


Рис 2.

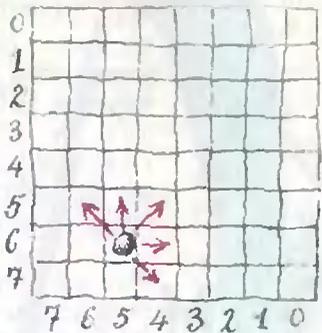


Рис 3

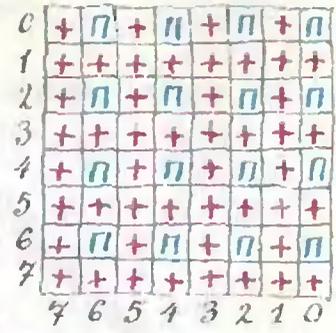


Рис 4.

камней, причем если в каждой кучке нечетное число камней, то это можно сделать двумя способами: либо взяв по одному камню из каждой кучки, либо переложив камень из одной кучки в другую». «А вот этого делать как раз не следует,— сказал я,— так мы и будем перекладывать камни по очереди из одной кучки в другую до бесконечности. В этом случае нужно брать два камня, тогда общее количество камней в кучках все время будет уменьшаться и начинающий сможет торжествовать победу, если, конечно, он сделает правильный первый ход — на поле (6, 6) — и дальше будет придерживаться нашей стратегии».

Таким образом, мы полностью разобрались в «игре Гельфанда», а раз так, то играть в нее стало неинтересно. Другое дело — шахматы! Там сыграны, наверно, уже миллионы партий, а выигрышной стратегии пока так и не нашли. Зато в игре с камушками можно придумывать все новые и новые правила игры, а найти стратегию, приносящую

выигрыш, не менее, если не более, интересно, чем найти решение замысловатого шахматного этюда.

Попробуйте найти, кто и как выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер — в следующих играх:

1. Имеется две кучки по 10 камней. Двое по очереди берут камни из какой-нибудь кучки (не обязательно всякий раз из одной и той же). Выигрывает тот, кто заберет последние камни.

2. Условия те же, что и в предыдущей игре, но игрокам запрещается брать такое количество камней, при котором в кучках в результате остается одинаковое количество камней.

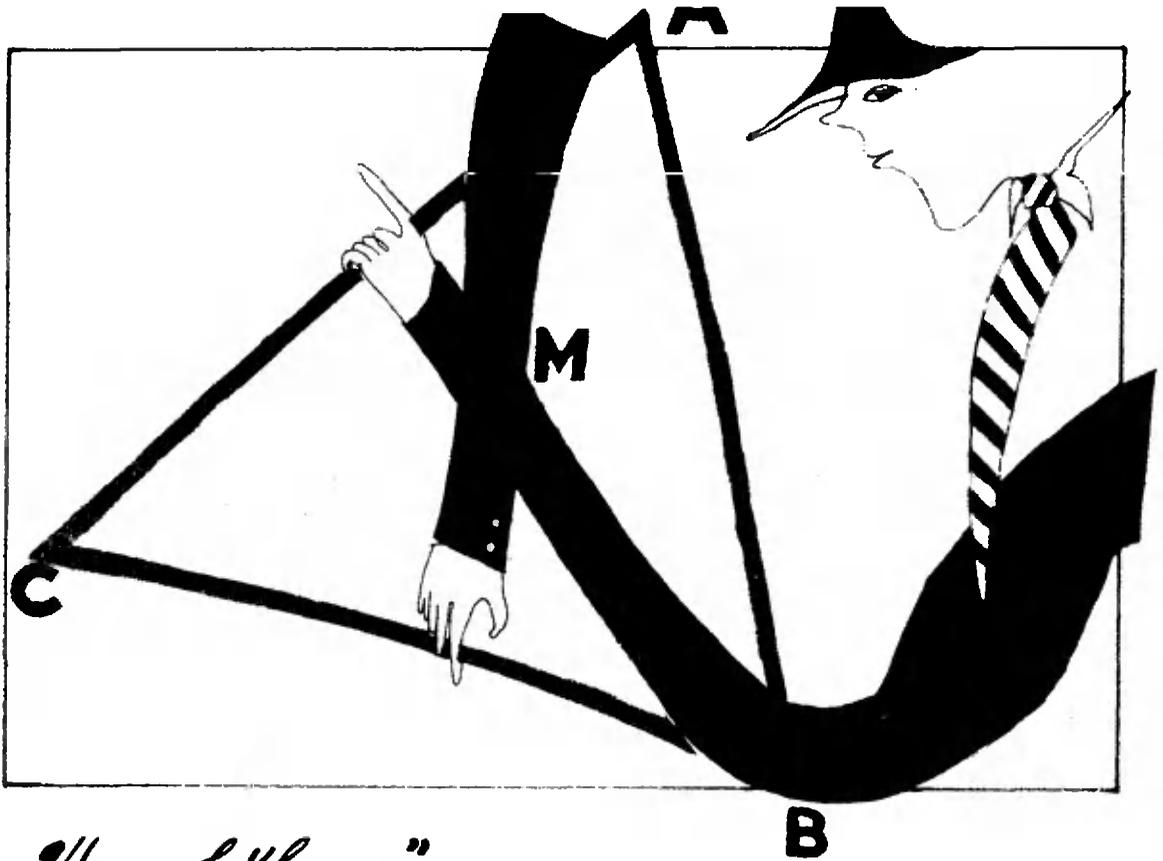
3. На столе лежат две кучки по 9 конфет. Каждый из двух играющих должен сначала переложить одну конфету из одной кучки в другую, а потом съесть две конфеты из одной кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать своего очередного хода.

4. На столе лежат две кучки очищенных орехов, в одной — 7, а в другой — 6 орехов. Двое играющих ходят по очереди. Ход состоит в том, что играющий съедает орехи в одной из кучек, а другую делит на две части (любые). Если он не сможет разделить эту кучку на две части из-за того, что в ней один орех, то он его съедает и выигрывает.

### Дорогие подписчики!

Мы выражаем сожаление по поводу того, что в прошлом году не все номера «Кванта» доходили до вас вовремя, а некоторые не дошли вовсе. Сбой происходил по независящим от нас причинам и вопреки нашим усилиям. Надеемся, что в нынешнем году таких срывов не будет.

Редакция



*Школа "Кванте"*

## Шесть доказательств теоремы о медианах

Кандидат физико-математических наук  
В. ДУБРОВСКИЙ

*Кашу маслом не испортишь*



Давно замечено, что познакомиться с разными решениями одной задачи бывает полезнее, чем с однотипными решениями разных задач. Одной из теорем, допускающих, как и многие другие классические теоремы элементарной гео-

метрии, несколько поучительных доказательств, является

Теорема о медианах треугольника. Медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в некоторой точке  $M$ , причем каждая из них делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины:  
 $AM:MA_1 = BM:MB_1 = CM:MC_1 = 2$ . (1)

Во всех приводимых далее доказательствах, кроме шестого, мы устанавливаем только, что медиана  $BB_1$  проходит через точку  $M$ , которая делит медиану  $AA_1$  в отношении 2:1. Если в соответствующем рассуждении заменить отрезок  $BB_1$  на отрезок  $CC_1$ , то мы получим, что и  $CC_1$  проходит через  $M$ . Этим будет доказано, что все три медианы пересекаются в некоторой точке  $M$ , причем  $AM:MA_1 = 2$ . Поскольку все медианы равноправны, можно заменить  $AA_1$  на  $BB_1$  или  $CC_1$ ; отсюда вытекает (1).

Первое доказательство (8 класс). Пусть  $K$  — середина отрез-

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 4 за 1978 год.

ка  $AM$ ,  $B'$  — точка пересечения прямой  $BM$  со стороной  $AC$ . Нам достаточно доказать, что  $AB' = B'C$ . Через точки  $K$  и  $A_1$  параллельно прямой  $BM$  проведем отрезки  $KL$  и  $A_1N$  (рис. 1). Поскольку  $AK = KM = MA_1$  и  $CA_1 = A_1B$ , по теореме Фалеса получаем  $AL = LB' = B'N = NC$ . Отсюда  $AB' = B'C$ .

Второе доказательство (8 класс). Рассмотрим гомотегию с центром  $M$  и коэффициентом  $-1/2$ . Точка  $A$  переходит при этой гомотегии в  $A_1$ . Пусть  $B$  переходит в  $B'$  (рис. 2). Тогда  $\overline{A_1B'} = -\frac{1}{2}\overline{AB}$ . С другой стороны, средняя линия  $A_1B_1$  получается из стороны  $BA$  при гомотегии с центром  $C$  и коэффициентом  $1/2$ ; таким образом,  $\overline{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overline{BA} = -\frac{1}{2}\overline{AB}$ . Итак,  $\overline{A_1B'} = \overline{A_1B_1}$ , следовательно,  $B' = B_1$ . Таким образом, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  гомотетичны, причем центр гомотетии лежит в точке  $M$ . По определению гомотетии, точки  $B$ ,  $M$  и  $B' = B_1$  лежат на одной прямой.

Третье доказательство (9 класс). Рассмотрим треугольники  $MAC$  и  $MA_1C$  (рис. 3). Их высоты, опущенные из вершины  $C$ , совпадают, а длины противолежащих этой вершине сторон относятся как  $2:1$ , поэтому  $S_{AMC} = 2S_{A_1MC}$ , где  $S$  обозначает площадь. Аналогично,  $S_{AMB} = 2S_{A_1MB}$ . Но  $S_{A_1MC} = S_{A_1MB}$ . Следовательно,  $S_{AMC} = S_{AMB} = S_{A_1MC} = S_{A_1MB}$ . Таким образом, треугольники  $MAC$  и  $MA_1C$  равновелики. Пусть  $B'$  — точка пересечения прямых  $BM$  и  $AC$ . Докажем, что

$$AB' = B'C. \text{ С одной стороны, } \frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AB'M}}{S_{CB'M}}. \text{ С другой стороны, } \frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AB'B}}{S_{CB'B}}. \text{ Итак, } \frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AB'M}}{S_{CB'B}} = \frac{S_{AB'B}}{S_{CB'B}}.$$

Пользуясь теоремой  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c-a}{d-b} = \frac{a}{b}$ , отсюда получаем

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AB'B} - S_{AB'M}}{S_{CB'B} - S_{CB'M}} = \frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = 1.$$

Значит,  $AB' = B'C$ .

Четвертое доказательство (9 класс). Из рисунка 4

$$\begin{aligned} \overline{BM} &= \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AM} = \overline{BC} + \overline{CA} + \\ &+ \frac{2}{3}\overline{AA_1} = \overline{BC} + \overline{CA} + \frac{2}{3}(\overline{AC} + \\ &+ \overline{CA_1}) = \overline{BC} + \overline{CA} + \frac{2}{3}(\overline{AC} + \\ &+ \frac{1}{2}\overline{CB}) = \overline{BC} + \overline{CA} + \frac{2}{3}\overline{AC} + \\ &+ \frac{1}{3}\overline{CB} = \overline{BC} - \frac{1}{3}\overline{BC} + \overline{CA} - \frac{2}{3}\overline{CA} = \\ &= \frac{2}{3}\overline{BC} + \frac{1}{3}\overline{CA} = \frac{2}{3}(\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA}) = \\ &= \frac{2}{3}(\overline{BC} + \overline{CB_1}) = \frac{2}{3}\overline{BB_1}. \end{aligned}$$

Следовательно, точка  $M$  лежит на медиане  $BB_1$ .

Пятое доказательство (9 класс). Опять рассмотрим точку  $B'$  пересечения прямых  $BM$  и  $AC$  (рис. 3). Применяя теорему синусов сначала к треугольникам  $AB'B$  и  $CB'B$ , а затем — к треугольникам  $ABM$  и  $A_1BM$  и учитывая, что  $\sin \angle AB'B = \sin \angle CB'B$ ,  $\sin \angle AMB = \sin \angle A_1MB$ ,  $BC = 2A_1B$  и  $MA =$

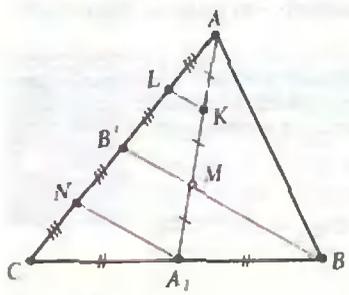


Рис. 1.

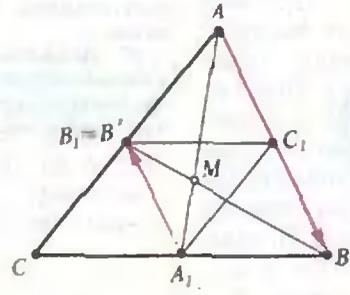


Рис. 2.

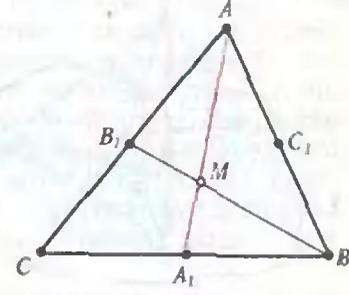


Рис. 3.

$$= 2MA_1, \text{ получим}$$

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB \sin \angle ABM}{\sin \angle AB'B} : \frac{BC \sin \angle A_1BM}{\sin \angle CB'B} =$$

$$= \frac{MA \sin \angle AMB}{2MA_1 \sin \angle A_1MB} = 1.$$

Значит,  $AB' = B'C$ .

Шестое доказательство (10 класс). Проведем через точки  $A$  и  $B$  плоскость  $\alpha$ , не содержащую  $C$ , и построим в этой плоскости правильный треугольник  $ABC'$  (рис. 5). Из общих свойств параллельной проекции следует, что параллельная проекция вдоль прямой  $CC'$  переводит  $\triangle ABC$  в  $\triangle ABC'$ , причем медианы треугольника  $ABC$  проектируются в медианы треугольника  $ABC'$ . Но в правильном треугольнике медианы являются и биссектрисами, а следовательно, пересекаются в одной точке. Легко доказать также (докажите!), что для треугольника  $ABC'$  справедливы равенства (1).

Отсюда вытекает, что наша теорема верна и для  $\triangle ABC$ .

Упомянем еще одно, быть может, самое простое и естественное доказательство теоремы о медианах: если поместить в вершины треугольника равные массы и поочередно группировать их парами, мы получим, что

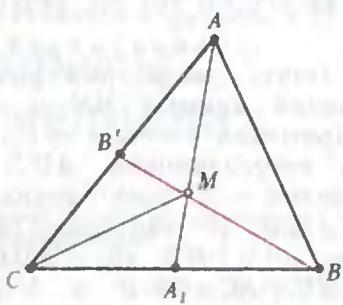


Рис. 4.

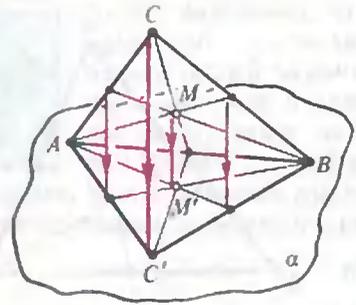


Рис. 5.

центр всех трех масс лежит на каждой из медиан. Центр системы равных масс, помещенных в некоторые точки, называется центроидом этого набора точек, поэтому и точку пересечения медиан треугольника часто называют его центроидом. Подробнее о применениях и обосновании метода центров масс можно прочитать в недавно вышедшей книге М. Б. Балка и В. Г. Болтянского «Геометрия масс» (М.: Наука, 1988).

**Задачи**

1. Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой. Вывести отсюда теорему о медианах.
2. Дан треугольник  $ABC$ . Укажите все такие точки  $P$ , что  $S_{PAB} = S_{PBC} = S_{PCA}$ .
3. Каждая из вершин пятиугольника соединена с серединой противоположной стороны. Докажите, что если четыре из полученных прямых пересекаются в одной точке, то и пятая прямая проходит через эту точку.
4. Через каждое из ребер трехгранного угла и биссектрису противоположного плоского угла проведена плоскость. Докажите, что три полученные плоскости имеют общую прямую.
5. Точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат соответственно на сторонах  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ . Известно, что отрезки  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $P$ , причем

$$\frac{AP}{PA_1} = \frac{BP}{PB_1} = \frac{CP}{PC_1}.$$

Докажите, что  $P$  — центроид треугольника  $ABC$ .

6. Докажите, что семь отрезков: отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, и отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, — пересекаются в одной точке. В каких отношениях эти отрезки делятся их общей точкой?

7. Докажите, что точка  $M$ , рассматриваемая в статье, а) является единственной точкой треугольника, для которой  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$ ; б) имеет координаты (относительно произвольных осей), равные средним арифметическим соответствующих координат вершин треугольника. Выведите отсюда теорему о медианах.

8. Докажите, что центроид треугольника является единственной точкой, в которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника достигает своего минимального значения.



*Лаборатория «Кванта»*

*Группой учащихся ФМШ № 165 г. Новосибирска был сконструирован прибор для получения фотографий, имеющий угол обзора близкий к 180°. Об этом приборе они рассказали на научной конференции учащихся физико-математических школ-интернатов, которая проходила в марте 1974 года в г. Тбилиси, а затем написали статью в «Квант». Ее мы и предлагаем вашему вниманию.*

## Фотокамера «Рыбий глаз»

В. ДРАЧЕВ, А. МАЗУР



Представим себе пловца, который без маски нырнул под воду. Какая картина откроется ему, если он будет смотреть вверх через спокойную поверхность водоема?

При условии, что водоем сравнительно небольшой, пловец увидит следующее. На темном потолке (поверхность воды) — яркое круглое окно, в которое «зажато» все небо от горизонта до горизонта. Все предметы, окружающие водоем, стоят по краям этого окна, устремленные своими «верхушками» к его центру. Более того, можно будет увидеть даже часть прибрежного дна.

Все это можно легко объяснить на основе явления полного внутреннего отражения света. Известно, что при переходе света из оптически более плотной в оптически менее плотную среду существует предельный угол падения ( $\alpha_0$  на рисунке 1), начиная с которого свет не будет выходить из первой среды во вторую. Говорят, что в этом случае свет испытывает полное внутреннее отражение. Например, для перехода вода — воздух  $\alpha_0 = 49^\circ$ .

А теперь представим себе, что все лучи идут в обратном порядке, т. е.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 11 за 1974 год.

из воздуха в воду. Тогда, если поле обзора в воде заключено в конусе с углом раствора около  $98^\circ$  (т. е. два предельных угла  $\alpha_0$ ), то угол обзора в воздухе будет  $180^\circ$ . Поле обзора становится гораздо шире.

Именно так видят, например, рыбы (рис. 2). Правда, предметы, размещенные по краям воздушной полусферы, оказываются сильно искаженными и, конечно, смещенными из своего положения.

Рыба может также видеть предметы, находящиеся в воде и не попадающие, казалось бы, в поле зрения рыбы (например, маленькая рыбка на рисунке 2). Все дело в том, что при полном внутреннем отражении поверхность воды становится хорошим зеркалом, так как резко увеличивается коэффициент отражения света. Для углов падения, близких к нулю, коэффициент отражения у воды примерно 2%, а для углов, больших предельного, он почти 100%. На рисунке показано, что зеркальное отражение рыбки видно под меньшим углом зрения, чем сама рыбка. Конечно, изображение будет хорошим, если поверхность водоема гладкая.

Для моделирования этого явления мы сделали фотокамеру, которая называется «Рыбий глаз». Камера (рис. 3) состоит из жестяной круглой коробки (диаметром 18 см, высотой 4 см) — корпуса 6 с крышкой 1, оргстекла 4, фольги с дырочкой — диафрагмы 3, кружочка обыкновенного плоского стекла 2<sup>\*</sup>) и фотопластинки 5.

Преломление света происходит на верхней поверхности оргстекла, т. е.

оргстекло здесь играет ту же роль, что и вода в описанных выше экспериментах.

Стекло, которое является прозрачной крышкой, закрывающей сверху диафрагму, представляет собой тонкую плоскопараллельную пластинку, поэтому оно никаких существенных дополнительных эффектов не дает.

Коробка обязательно должна быть заполнена жидкостью с показателем преломления примерно таким же, как у оргстекла (мы использовали смесь воды и глицерина), иначе свет по выходе из оргстекла примет направление, параллельное исходному, и ожидаемого изображения на фотопластинке не получится. (Аналогично: не увидит вышеописанной картины пловец, нырнувший в маске.)

При расчете диафрагмы надо учитывать следующий фактор. Изображение на фотопластинке получается с помощью дырочной камеры, поэтому диаметр отверстия должен быть малым по сравнению с расстоянием до фотопластинки. Но с уменьшением диаметра диафрагмы все заметнее проявляет себя дифракция света. Это приводит к ухудшению качества изображения. Теоретический расчет дает, что оптимальное значение диаметра отверстия должно быть порядка  $d = \sqrt{\lambda h}$ , где  $\lambda$  — длина волны света,  $h$  — расстояние от отверстия до фотопластинки. У нас лучшие по качеству снимки получались в солнечный день при диаметре диафрагмы 0,3 мм; чувствительность фотопластинки была 180 ед.

\* Тонкое стекло можно резать ножницами, если погрузить в то и другое в воду.

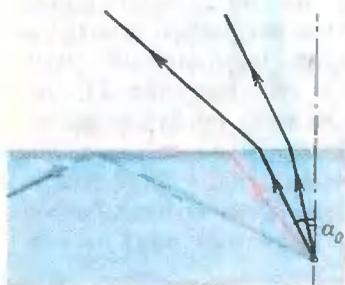


Рис. 1.

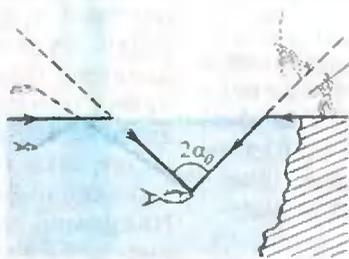


Рис. 2.

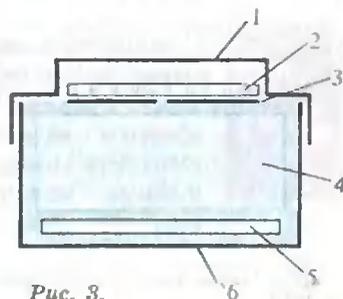
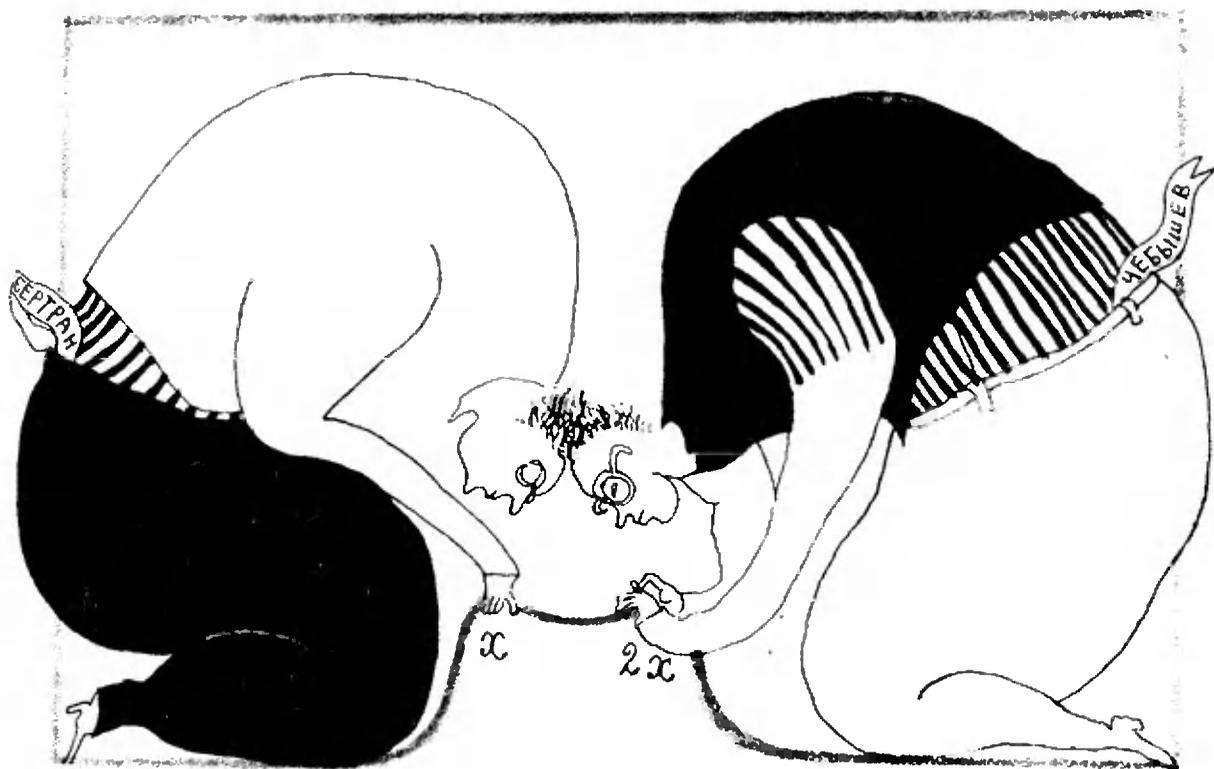


Рис. 3.



## Математический кружок

### О постулате Бертрана

Доктор физико-математических наук  
М. БАШМАКОВ



Среди 69 работ Пафнутия Львовича Чебышева две работы сыграли особенно важную роль в развитии теории чисел. Эти работы: «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» и «О простых числах», написанные им в молодые годы, посвящены труднейшему в теории чисел вопросу о распределении простых чисел.

Во второй из них указаны неравенства, позволяющие достаточно точ-

но оценить количество простых чисел в данном отрезке натурального ряда и, в частности, доказан такой факт: между  $x$  и  $2x$  (где  $x > 1$ ) всегда есть хотя бы одно простое число. Это утверждение высказал известный французский математик Бертран, который проверил его в пределах имевшихся таблиц простых чисел, но доказать не сумел и принял в качестве постулата.

Мы проследим основные идеи Чебышева, приведшие его к этим оценкам, а затем предложим ряд задач, решение которых позволит читателям (достаточно хорошо знакомым со свойствами логарифмов) восстановить чебышевское доказательство постулата Бертрана и получить неравенство для количества простых чисел, не превосходящих заданной величины.

Читатель может удивиться, какое отношение имеют логарифмы к простым числам? В том-то и состоит заслуга Чебышева, что он указал, как

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 5 за 1971 год.



ливость постулата Бертрана устанавливается прямой проверкой.

Дальнейшее развитие чебышевских идей привело к такому результату:

для  $x \geq 48$   $\theta\left(\frac{9}{8}x\right) - \theta(x) > 0$ , т. е. начиная с указанного места, между  $x$  и  $\frac{9}{8}x$  всегда есть хотя бы одно простое число.

Вы можете более детально проследить за ходом рассуждений Чебышева, решая следующие ниже задачи 1—5.

Для того чтобы  $T(x)$  выразить через  $\theta(x)$ , удобно ввести еще одну вспомогательную функцию. Пусть  $p^{\alpha}$  — наивысшая степень  $p$ , не превосходящая  $x$ . Определим функцию  $\psi$  так:

$$\psi(x) = a_2 \log 2 + a_3 \log 3 + a_5 \log 5 + \dots = \sum_{p \leq x} a_p \log p.$$

Ясно, что  $\psi(x)$  есть логарифм наименьшего общего кратного для всех целых чисел, не превосходящих  $x$ .  $T$  легко выражается через  $\psi$ .

**Задача 1.** Докажите, что

$$T(x) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \dots$$

Теперь надо связать функции  $\psi$  и  $\theta$ .

**Задача 2.** Докажите, что

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \theta(\sqrt[4]{x}) + \dots$$

Решив задачи 1 и 2, вы установите тождество (2). Оценим теперь  $T(x)$ .

**Задача 3.** Докажите, что существует такое вещественное число  $e$ , что при всех натуральных  $n$

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(где  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ).

Для решения этой задачи полезно показать, что каждое из чисел

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

меньше каждого из чисел

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1};$$

отсюда следует, что существует такое число  $e$ , которое больше всех  $a_n$  и меньше всех  $b_n$ . Это и есть то число, которое мы ищем (о некоторых его свойствах рассказывалось на последней странице нашего журнала № 1, 1971).

Решив эту задачу, вы получите такие неравенства для  $T(x)$ :

$$(x-1) \log(x-1) < T(x) < (x+1) \log x - x. \quad (4)$$

Сам Чебышев пользовался более точными неравенствами.

Из оценки для  $T(x)$  Чебышев получает оценки для  $\psi(x)$ , а затем и для  $\theta(x)$ .

Чтобы выразить  $\psi$  через  $T$ , Чебышев замечает следующее. Рассмотрим сумму

$$S = T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) + T\left(\frac{x}{30}\right).$$

Воспользуемся результатом задачи 1 и приведем эту сумму к такому виду:

$$S = A_1 \psi(x) + A_2 \psi\left(\frac{x}{2}\right) + A_3 \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \dots$$

**Задача 4.** Проверьте, что коэффициенты  $A_1, A_2, A_3, \dots$  меняются с периодом 30 и что для первых тридцати значений  $n$  коэффициенты  $A_n$  составляют следующую последовательность: 1, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, -1, 1, -1, 1, 0, -1, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, -1.

Отсюда видно, что сумма  $S$  записывается знакопеременным рядом  $S = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \psi\left(\frac{x}{11}\right) - \dots$

Так как  $\psi$  — неубывающая функция,

$$S = \psi(x) - \left(\psi\left(\frac{x}{6}\right) - \psi\left(\frac{x}{7}\right)\right) - \left(\psi\left(\frac{x}{10}\right) - \psi\left(\frac{x}{11}\right)\right) \dots \leq \psi(x). \quad (5)$$

Аналогично

$$S = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \dots \geq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right). \quad (6)$$

Из (2) сразу получается неравенство для  $\psi$ , которое оценивает ее снизу, так как мы знаем неравенства для  $T$  и получили оценку для  $\psi$  через  $S$ , т. е. комбинацию значений  $T$ . Эта оценка будет иметь такой вид:  $\psi(x) \geq A_1(x) + \omega_1(x)$ , где  $\omega_1$  растет медленнее, чем  $x$ , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\omega_1(x)}{x} = 0.$$

Для получения оценки сверху надо осведомиться еще от  $\psi\left(\frac{x}{6}\right)$ . Применяя неравен-

ство (6) к  $\frac{x}{6}, \frac{x}{6^2}, \frac{x}{6^3}$  и т. д. и складывая их, найдем неравенство для  $\psi(x)$  типа  $\psi(x) \leq A_2 x + \omega_2(x)$ , где  $\omega_2$  растет медленнее, чем  $x$ .

**Задача 5.** Докажите, что

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leq \theta(x) \leq \psi(x) - \psi(\sqrt{x}).$$

Отсюда уже получают нужные оценки (3).

Из результатов Чебышева не только вытекала справедливость постулата Бертрана, но, что еще более важно, из них получались неравенства, позволяющие хорошо оценить функцию  $\pi(x)$ :

$$c_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{\log x},$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — некоторые положительные

ные постоянные\*). Вы сможете доказать такие неравенства, решив следующую задачу.

Задача 6. Докажите, что

$$\frac{\psi(x)}{\log x} < \pi(x) < \frac{\psi(x) + \theta(x)}{\log x}.$$

\*) Логарифм здесь можно брать по любому основанию  $a$ , большему единицы; от  $a$  зависят только значения постоянных  $c_1$  и  $c_2$ , поскольку  $\log_b x$  получается из  $\log_a x$  умножением на постоянное число  $\log_a b$ . Более естественно использовать натуральный логарифм, потому что именно функция  $x/\log_e x$  эквивалентна  $\pi(x)$  при больших  $x$ , т. е.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log_e x} = 1$ . Это было доказано уже значительно позже, а из работы самого Чебышева следовало только, что отношение  $\pi(x)$  к  $x/\log_e x$  заключено между 0,921 и 1,106 и что если предел при  $x \rightarrow \infty$  существует, то он равен единице.

Несколько иные доказательства постулата Бертрана и неравенств для  $\pi(x)$  можно прочесть в книгах [2] и [3]. В них вместо  $n!$  оценивается  $C_{2n}^\alpha = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$  (см. решение задачи М23, «Квант» № 2, 1971, с. 27).

#### Литература

1. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел.— Изд-во АН СССР, 1947.
2. Э. Трост. Простые числа.— М.: Физматгиз, 1959.
3. И. М. Яглом, А. М. Яглом. Неэлементарные задачи в элементарном изложении.— М.: Гостехиздат, 1954, раздел II, п. 14.

## Волны на воде и «Заморские гости» Н. Рериха

(Начало см. на с. 24)

А как быть с углом  $\alpha$ ? Все опрошенные сошлись на том, что он лежит где-то в пределах  $90^\circ < 2\alpha < 180^\circ$  (корабль на картине довольно тупоносый). Таким образом,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ < \sin \alpha < \sin 90^\circ = 1. \quad (7)$$

Теперь у нас есть все, чтобы сделать оценки скорости корабля и поверхностных волн.

#### Результаты

Подставляя значения  $h$ ,  $\lambda$  и  $\sin \alpha$  из (5), (6), (7) в формулы (1) и (2), получим

$$v \geq \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 0,26 \text{ м}}{1 \div \sqrt{2}/2}} \approx$$

$$\approx \sqrt{5,1 \div 7,25 \text{ м}^2/\text{с}^2} \approx 2,25 \div 2,7 \text{ м/с}, \quad (8)$$

$$u = \sqrt{\frac{9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 0,34 \text{ м}}{2\pi}} \approx 0,7 \text{ м/с}. \quad (9)$$

Теперь мы с удивлением замечаем, что соотношения (8) и (9) несовместимы с неравенством (4). Действительно, судя по высоте носовой волны, корабль плывет со скоростью  $v$  не меньшей, чем 2,25 м/с, а если ориентироваться на круговые поверхностные волны, которые на картине почти концентричны, скорость корабля должна быть намного меньше скорости этих волн  $u = 0,7$  м/с, которая и без того меньше  $v$ .

При известной внимательности вы найдете много подобных физических неточностей и в других произведениях искусства (по-видимому, это связано с тем, что у него свои задачи и законы). Тогда вы сможете не только полюбоваться ими и получить эстетическое удовольствие, но и поговорить с младшим братом о законах физики, используя очень привлекательные иллюстрации.



*Трагический абитуриент*

## Электрические машины постоянного тока

Кандидат физико-математических наук  
И. СЛОБОДЕЦКИЙ



В этой статье мы не будем подробно обсуждать устройство различных электрических машин. Мы рассмотрим работу электромотора и динамо-машины (динамо-машина — старое название индукционного генератора электрического тока), используя два основных закона — закон Ома и закон сохранения энергии.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 5 за 1974 год под псевдонимом И. А. Зайцев.

Статья состоит в основном из вопросов и ответов. Работая над статьей, прежде чем прочитать ответ, попробуйте ответить на вопрос самостоятельно. Даже если вам это не удастся, размышление над вопросом принесет несомненную пользу, благодаря чему лучше запомнится правильный ответ.

### Электромоторы

Во всех электромоторах (или, по-другому, электродвигателях) обязательно есть одни и те же основные части. Это, прежде всего, индуктор и якорь. Индуктор является источником магнитного поля. Когда по обмотке якоря пропускается электрический ток, якорь, находящийся в магнитном поле, приходит во вращение. Таким образом происходит преобразование электрической энергии в механическую. Если, например, вал мотора соединить со станком, станок можно привести в движение.

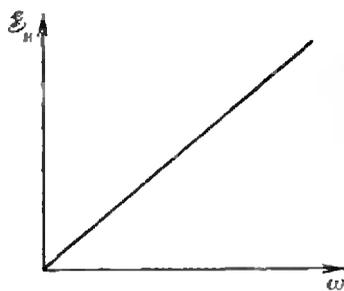


Рис. 1.

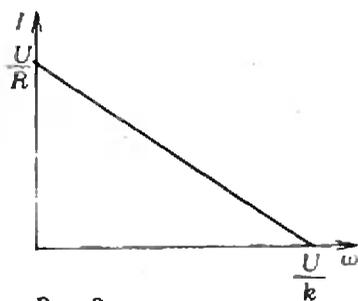


Рис. 2.

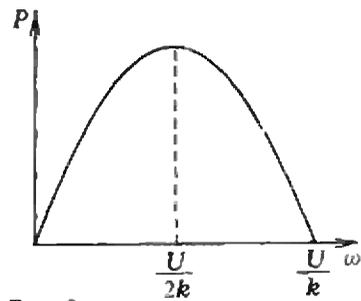


Рис. 3.

Вопрос. Рассмотрим мотор постоянного тока с независимым возбуждением (в нем индуктором является или постоянный магнит, или электромагнит, обмотка которого питается независимо от обмотки якоря). Как записывается закон Ома для цепи якоря источника постоянного тока?

Ответ. В электрической цепи якоря имеются две электродвижущие силы — напряжение источника тока  $U$  и ЭДС индукции  $\mathcal{E}_n$ , возникающая в обмотке якоря при его вращении в магнитном поле индуктора. Причем ЭДС индукции, согласно правилу Ленца, противоположна по знаку напряжению источника тока. Поэтому закон Ома запишется так:

$$U - \mathcal{E}_n = IR, \quad (I)$$

где  $I$  — ток в цепи, а  $R$  — общее сопротивление обмотки якоря и подводящих проводов.

Вопрос. Как записывается закон сохранения энергии для такой цепи?

Ответ. Энергия  $W_{\text{п}} = UIt$ , потребляемая от источника, тратится на джоулево тепло, которое выделяется на сопротивлении  $R$ , и на совершение полезной работы  $A$ . Поэтому, согласно закону сохранения энергии,

$$UIt = I^2Rt + A,$$

или для мощностей

$$UI = I^2R + P. \quad (II)$$

Из равенств (I) и (II) можно получить много важных следствий.

Вопрос. Чему равна полезная мощность  $P$ ?

Ответ. Умножив обе части равенства (I) на ток  $I$ , получим

$$UI - \mathcal{E}_n I = I^2 R,$$

или

$$UI = I^2 R + \mathcal{E}_n I.$$

Сравнивая полученное равенство с равенством (II), можно сразу же заметить, что

$$P = \mathcal{E}_n I.$$

т. е. полезная мощность мотора равна произведению ЭДС индукции на ток.

При неизменных  $U$  и  $R$  величина тока зависит от ЭДС индукции:

$$I = \frac{U - \mathcal{E}_n}{R}.$$

Из закона электромагнитной индукции следует, что ЭДС индукции, возникающая в обмотке якоря, пропорциональна скорости изменения магнитного потока  $\Delta\Phi/\Delta t$  через эту обмотку:

$$\mathcal{E}_n \sim \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

В свою очередь, скорость изменения магнитного потока пропорциональна угловой скорости вращения якоря  $\omega$ . Таким образом,

$$\mathcal{E}_n \sim \omega,$$

$$\mathcal{E}_n = k\omega,$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности. График зависимости  $\mathcal{E}_n$  от  $\omega$  показан на рисунке 1.

Теперь посмотрим, как зависят от  $\omega$  ток в цепи якоря и полезная мощность двигателя. Из закона Ома

$$I = \frac{U - \mathcal{E}_n}{R} = \frac{U - k\omega}{R}$$

а из закона сохранения энергии

$$P = UI - I^2 R = \mathcal{E}_n I = \frac{kU\omega - (k\omega)^2}{R}.$$

Графики зависимости  $I$  и  $P$  от  $\omega$  приведены на рисунках 2 и 3.

Итак, каждому значению угловой скорости  $\omega$  соответствуют определенные значения ЭДС индукции  $\mathcal{E}_n$  и тока  $I$ . Причем при увеличении  $\omega$  величина  $\mathcal{E}_n$  увеличивается, а величина  $I$  уменьшается. При этом полезная мощность, развиваемая мотором, оказывается одинаковой при двух разных значениях скорости вращения якоря.

Вопрос. В свою очередь, угловая скорость вращения якоря зависит от нагрузки двигателя. Как?

Ответ. Электрические силы, действующие на якорь в магнитном поле индуктора, пропорциональны току, идущему по обмотке. Пропорциональны току и моменты этих сил, т. е.

$$M_s = k_1 I,$$

где коэффициент пропорциональности  $k_1$  зависит от конструкции двигателя. Так как

$$I = \frac{U - k\omega}{R},$$

то

$$M_s = k_1 \frac{U - k\omega}{R},$$

т. е. суммарный момент электрических сил, действующих на якорь, линейно зависит от угловой скорости вращения якоря. При малой угловой скорости вращения якоря момент сил большой, при увеличении угловой скорости он уменьшается и становится равным нулю при

$$\omega = \frac{U}{k}.$$

С другой стороны, на вал двигателя действует момент механических сил, так называемый момент нагрузки  $M$ . Например, если двигатель равномерно поднимает на веревке груз, то момент нагрузки равен произведению силы натяжения веревки, которая равна весу груза, на радиус вала. В установившемся режиме якорь мотора, очевидно, вращается с такой скоростью  $\omega$ , при которой момент электрических сил, действующих на якорь, равен моменту нагрузки. Действительно, пусть, например, скорость вращения якоря меньше  $\omega$ . В этом случае момент

электрических сил больше момента нагрузки, так что угловая скорость вращения якоря будет увеличиваться. Если угловая скорость вращения якоря больше  $\omega$ , то момент электрических сил меньше момента нагрузки. Это будет приводить к уменьшению скорости вращения якоря до  $\omega$ .

Таким образом, устанавливается такая угловая скорость вращения якоря, при которой

$$M_s = M,$$

или

$$k_1 \frac{U - k\omega}{R} = M,$$

откуда

$$\omega = \frac{k_1 U - MR}{k_1 k},$$

т. е. угловая скорость вращения якоря линейно зависит от момента нагрузки.

Итак, нагрузка определяет ток в обмотке якоря и угловую скорость его вращения.

Рассмотрим такую задачу.

**Задача 1.** Электродвигатель присоединен к источнику постоянного напряжения. При числе оборотов  $n_1 = 1000$  об/мин ток в цепи якоря равен  $I_1 = 10$  А, а при числе оборотов  $n_2 = 900$  об/мин он равен  $I_2 = 15$  А. Найти число оборотов двигателя на холостом ходу (без нагрузки).

Так как  $I = (U - k\omega) / R$ , а  $\omega = 2\pi n$ , то

$$I_1 = \frac{U - 2\pi k n_1}{R}$$

и

$$I_2 = \frac{U - 2\pi k n_2}{R}.$$

В режиме холостого хода  $I_3 = 0$ , поэтому

$$U - 2\pi k n_3 = 0.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$n_3 = \frac{I_2 n_1 - I_1 n_2}{I_2 - I_1} =$$

$$= \frac{15 \cdot 1000 - 10 \cdot 900}{5} \frac{\text{об}}{\text{мин}} = 1200 \text{ об/мин.}$$

...тивность электрических машин  
 машины постоянного тока обра-  
 Если на клеммы машины по-  
 постоянное напряжение, то якорь  
 вращаться, совершая механиче-  
 работу, т. е. получим электро-  
 С другой стороны, если вра-  
 якорь с помощью другой маши-  
 то электрическая машина будет  
 работать как динамо-машина, выраба-  
 тывающая ток.

**Вопрос.** Предположим, одна и та же машина вращается с одинаковой скоростью, работая один раз в качестве динамо-машины, а другой раз — в качестве мотора. Что можно сказать об ЭДС индукции, возникающей в якоре в обоих случаях?

**Ответ.** Так как ЭДС индукции зависит только от конструкции якоря и угловой скорости вращения якоря, то ЭДС индукции в обоих случаях будет одна и та же.

**Вопрос.** А если угловые скорости вращения динамо-машины и мотора разные?

**Ответ.** В этом случае отношение электродвижущих сил индукции будет равно отношению угловых скоростей вращения якоря.

**Вопрос.** Мы уже говорили о законе Ома и о законе сохранения энергии для мотора и записали соответствующие равенства (I) и (II). Как будут выглядеть аналогичные равенства для динамо-машины?

**Ответ.** Пусть сопротивление цепи динамо-машины равно  $R$ . Тогда, согласно закону Ома,

$$\mathcal{E}_d = I_d R,$$

где  $\mathcal{E}_d$  — ЭДС индукции динамо-машины и  $I_d$  — ток. Далее, если пренебречь потерями энергии (например, на трение), то можно записать закон сохранения энергии так:

$$P_m = \mathcal{E}_d I_d.$$

Здесь  $P_m$  — механическая мощность, затрачиваемая на вращение якоря,  $\mathcal{E}_d I_d$  — электрическая мощность, развиваемая динамо-машиной.

Решим теперь несколько задач.

**Задача 2.** Электромотор постоянного тока с независимым воз-

буждением, включенный в цепь батареи с напряжением  $U = 24$  В, при полном сопротивлении цепи  $R = 20$  Ом делает  $n_1 = 600$  об/мин при токе в цепи  $I = 0,2$  А. Какую ЭДС разовьет тот же мотор, работая в качестве динамо-машины, при  $n_2 = 1400$  об/мин?

ЭДС, развиваемая динамо-машиной, равна

$$\mathcal{E}_d = \frac{n_2}{n_1} \mathcal{E}_m,$$

где  $\mathcal{E}_m$  — ЭДС индукции, возникающая в обмотке якоря мотора при скорости вращения  $n_1 = 600$  об/мин. Ее можно найти из закона Ома:

$$\mathcal{E}_m = U - IR.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_d &= \frac{n_2}{n_1} (U - IR) = \\ &= \frac{1400}{600} (24 - 0,2 \cdot 20) \text{ В} \approx 46,7 \text{ В}. \end{aligned}$$

**Задача 3.** Груз массой  $m$  подвешен на нити, намотанной на ось якоря динамо-машины с независимым возбуждением. Нить сматывается с оси так, что груз опускается с постоянной скоростью  $v_1$ . Динамо-машина замкнута на сопротивление  $R$ . С какой скоростью  $v_2$  будет подниматься вверх тот же груз, если динамо-машину включить как электромотор в цепь постоянного тока с напряжением  $U$  и с тем же сопротивлением цепи  $R$ ?

Мощность мотора, поднимающего груз массой  $m$  со скоростью  $v_2$ , равна  $mgv_2$ . Из закона Ома и закона сохранения энергии следует, что

$$U - \mathcal{E}_m = IR \quad (1)$$

и

$$UI = I^2 R + mgv_2, \quad (2)$$

где  $I$  — ток и  $\mathcal{E}_m$  — ЭДС индукции в обмотке якоря. Эта ЭДС связана с ЭДС индукции динамо-машины соотношением

$$\frac{\mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_d} = \frac{v_2}{v_1}. \quad (3)$$

Запишем теперь закон Ома и закон сохранения энергии для динамо-машины:

$$\mathcal{E}_d = I_d R$$

и

$$\mathcal{E}_A I_A = mgv_1.$$

Отсюда

$$\mathcal{E}_A = \sqrt{mgv_1 R},$$

и из соотношения (3)

$$\mathcal{E}_M = \frac{v_2}{v_1} \mathcal{E}_A = \frac{v_2}{v_1} \sqrt{mgv_1 R}.$$

Подставив полученное выражение для  $\mathcal{E}_M$  в уравнение (1) и решая затем уравнения (1) и (2) совместно, найдем

$$v_2 = \frac{\sqrt{mgv_1 R U} - mgv_1 R}{mgR} = U \sqrt{\frac{v_1}{mgR}} - v_1.$$

**Задача 4.** *Электромотор постоянного тока с независимым возбуждением (с постоянным магнитом) поднимает груз со скоростью  $v_1$  при помощи нити, наматывающейся на ось мотора. В отсутствие груза невесомая нить поднимается со скоростью  $v_0$ . С какой скоростью  $v_2$  будет опускаться тот же груз, если в цепи якоря произойдет замыкание, в результате которого обмотка якоря окажется замкнутой накоротко? Трением в подшипниках пренебречь.*

После того как обмотка окажется замкнутой накоротко, мотор превратится в динамо-машину, причем ток  $I$  в якоре динамо-машины будет таким же, каким он был, когда машина работала как электромотор. Действительно, в обоих случаях один и тот же груз движется (поднимается или опускается) равномерно. Поэтому момент сил, действующих на якорь со стороны магнитного поля индуктора и пропорциональный величине тока, равен моменту силы тяжести груза. При подъеме невесомой нити (в режиме холостого хода) момент нагрузки равен нулю, следовательно, и ток  $I_0 = 0$ . Запишем закон Ома для всех трех случаев:

при подъеме груза с помощью мотора

$$U - \mathcal{E}_M = IR,$$

где  $U$  — напряжение на клеммах мотора;

при опускании груза, когда мотор работает как динамо-машина,

$$\mathcal{E}_A = IR;$$

когда мотор работает на холостом ходу,

$$U - \mathcal{E}'_M = 0.$$

Для трех ЭДС  $\mathcal{E}_M$ ,  $\mathcal{E}'_M$  и  $\mathcal{E}_A$  можно записать следующие соотношения:

$$\mathcal{E}_M = \frac{v_1}{v_2} \mathcal{E}_A$$

и

$$\mathcal{E}'_M = U = \frac{v_0}{v_2} \mathcal{E}_A.$$

Окончательно находим

$$v_2 = v_0 - v_1.$$

**Упражнения**

1. Электромотор без нагрузки делает  $n_1 = 1000$  об/мин, а с некоторой нагрузкой —  $n_2 = 700$  об/мин. Какой будет частота вращения, если момент нагрузки увеличится на 20 %?

2. Электродвигатель присоединили к источнику напряжения  $U = 500$  В. Зная, что при токе  $I_1 = 10$  А двигатель развивает мощность  $P_1 = 4$  кВт, найти его мощность при токе  $I_2 = 20$  А (ток меняется вследствие изменения нагрузки).

3. Угловая скорость вращения якоря динамо-машины с постоянным магнитом увеличилась на 10 %. На сколько процентов увеличилась при этом полезная мощность динамо-машины?

4. Сопротивление обмотки якоря мотора равно  $R_1$ , а обмотки индуктора —  $R_2$ . Если обмотки якоря и индуктора соединены последовательно и подключены к одному источнику тока, говорят о моторе с последовательным возбуждением, или о серийном двигателе. Если же обмотки соединены параллельно, говорят о моторе с параллельным возбуждением, или о шунтовом двигателе. В каком случае максимальная полезная мощность будет больше? Каковы при этом коэффициенты полезного действия шунтового и серийного двигателей? Напряжение на клеммах мотора равно  $U$ .

**Московский  
физико-технический  
институт**

**Математика**

*Письменный экзамен*

**Вариант 1**

1. Решите неравенство

$$\log_3(1+x) > (1 - \log_3(1-x)) \cdot \log_3 x.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = \frac{8}{\sin 2x}.$$

3. Основание  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  является хордой окружности, центр которой лежит внутри треугольника  $ABC$ . Прямые, проходящие через точку  $B$ , касаются окружности в точках  $D$  и  $E$ . Найдите площадь треугольника  $DBE$ , если  $AB=BC=2$ ,  $\angle ABC = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$ , а радиус окружности равен 1.

4. На координатной плоскости рассматривается фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(a; b)$  которых таковы, что система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (3-a^2-b^2)x - 3(a^2+b^2) < 0, \\ 2x^2 + (2a+2b-25)x - 25(a+b) > 0 \end{cases}$$

не имеет решений. Найдите площадь фигуры  $\Phi$ .

5. Сфера радиуса 13 касается граней  $ABCD$ ,  $AA_1D_1D$  и  $AA_1B_1B$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Вторая сфера радиуса 5 касается граней  $ABCD$ ,  $AA_1D_1D$  и  $CC_1D_1D$  куба и касается первой сферы. На ребре  $BC$  взята точка  $F$ , на продолжении ребра  $DC$  за точку  $C$  — точка  $E$  так, что  $CE=CD$ . Плоскость  $C, EF$  пересекает первую сферу по окружности, радиус которой в 2,6 раза больше радиуса окружности, по которой эта плоскость пересекает вторую сферу. Найдите отношение  $BF^2/FC$ .

**Вариант 2**

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos 2x} = 1 + 2 \sin x.$$

2. Окружность, построенная на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  как на диаметре, проходит через середину стороны  $BC$  и пересекает сторону  $AB$  в точке  $D$  так, что  $AD = \frac{1}{3} AB$ .

Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AC=1$ .

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + \log_3(x+y) \cdot \log_2 3 = 2 \log_4 7 - \log_2 x, \\ \log_2(xy+1) = 2 \log_4 y + \log_1(x-2y)^2. \end{cases}$$

8

4. Точка  $D$  является серединой ребра  $BB_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ . На боковой грани  $AA_1C_1C$  взята точка  $E$ , на основании  $ABC$  — точка  $F$  так, что прямые  $EB_1$  и  $FD$  параллельны. Какой наибольший объем может иметь призма  $ABCA_1B_1C_1$ , если  $EB_1=1$ ,  $FD = \frac{3}{4}$ ,  $EF = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ ?

5. Найдите все значения  $a$ , при которых уравнения

$$22x^4 + 33x^3 - 16ax^2 - 3x + 2 = 0$$

и

$$11x^4 + 33x^3 + 21x^2 - 2ax - 2 = 0$$

имеют общие корни. Найдите эти корни.

**Физика**

*Письменный экзамен*

**Вариант 1**

1. Через неподвижный блок перекинута легкая веревка, к концу которой прикреплен груз массой  $m=9$  кг (рис. 1). Для поднятия груза с поверхности земли на высоту  $H_1=4$  м за время  $t=6$  с надо тянуть веревку с постоянной силой  $F$ . На какую величину потребуются увеличить силу, чтобы поднять груз с поверхности земли за то же время на высоту  $H_2=6$  м? Массой блока и трением в его оси пренебречь.

2. КПД тепловой машины, работающей по циклу, состоящему из изотермы 1—2, изохоры 2—3 и адиабаты 3—1 (рис. 2), равен  $\eta$ , разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна  $\Delta T$ . Найдите работу, совершенную  $\nu$  молями одноатомного идеального газа в изотермическом процессе.

3. Два закрепленных одинаковых тонких металлических кольца расположены соосно на некотором расстоянии друг от друга (рис. 3). Кольца заряжены равными по модулю, но противоположными по знаку зарядами. Для пролета вдоль прямой, проходящей через центры колец перпендикулярно их плоскостям, заряженная частица на большом удалении от колец должна обладать некоторой минимальной скоростью  $v_0$ . Найдите отношение максимальной скорости частицы к минимальной при пролете колец, если при неизменном знаке зарядов колец их абсолютная величина будет уменьшена в  $\lambda$  раз, а скорость частицы на бесконечности останется равной  $v_0$ .

4. Термоядерная реакция  ${}^2_1\text{H} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$  идет с выделением энергии  $E_1=18,4$  МэВ (кинетическая энергия образовавшихся частиц на величину  $E_1$  больше кинетической энергии исходных). Какая энергия выделяется в реакции  ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2{}^1_0\text{n}$ , если дефект масс ядра  ${}^3_2\text{He}$  на  $\Delta m=0,006$  а.е.м. больше, чем у ядра  ${}^2_1\text{H}$ ? Одной атомной единице массы (а.е.м.) соответствует энергия 931,5 МэВ.

**Вариант 2**

1. Мяч брошен под углом  $\alpha_1=30^\circ$  к горизонту (рис. 4), и за время полета горизонтальная составляющая его скорости уменьшилась на 12%. Когда мяч бросили с той же начальной скоростью под углом  $\alpha_2$  к горизонту, горизонтальная составляющая его скорости за время

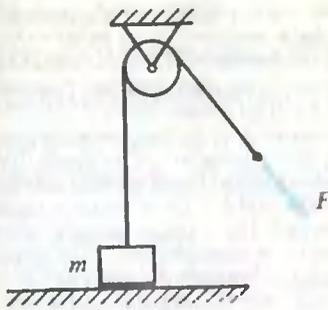


Рис. 1.

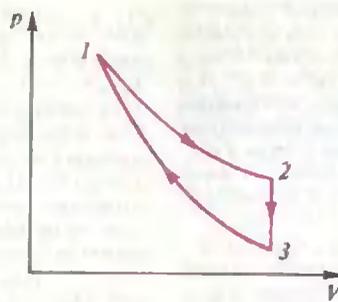


Рис. 2.

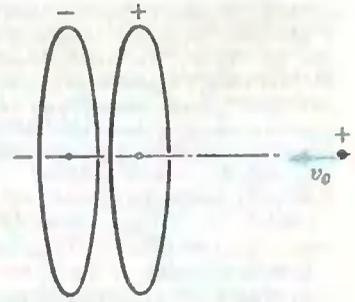


Рис. 3.

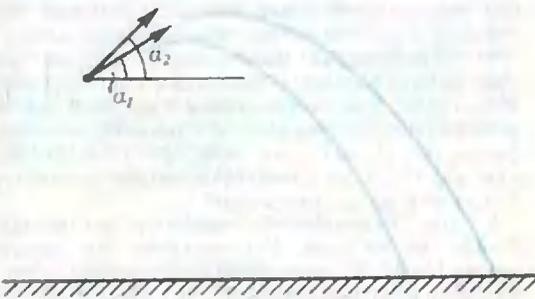


Рис. 4.

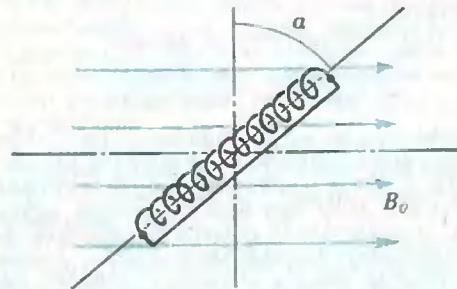


Рис. 5.

полета уменьшилась на 20 % и мяч пролетел вдоль поверхности расстояние на 10 % большее, чем в первом случае. Под каким углом брошен мяч во втором случае? Считать, что сила сопротивления движению мяча пропорциональна его скорости.

2. В калориметр, содержащий  $m_1=2$  кг льда при температуре  $t_1=-5^\circ\text{C}$ , добавили  $m_2=200$  г воды при температуре  $t_2=+5^\circ\text{C}$ . Сколько льда будет в калориметре после установления равновесия? Удельная теплоемкость льда  $c_1=2.1 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К), воды  $c_2=4.2 \times 10^3$  Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда  $\lambda=3.34 \cdot 10^5$  Дж/кг.

3. Обмотку короткозамкнутой катушки (рис. 5), находящейся во внешнем однородном магнитном поле с неизвестной индукцией  $B_0$ , охлаждением переводят в сверхпроводящее состояние. Затем величину индукции внешнего поля, не изменяя направления, уменьшают в 3 раза. После этого оказалось, что для удержания катушки при заданном угле  $\alpha$  необходимо приложить момент сил  $M$ . Определите начальное значение индукции  $B_0$  внешнего поля. Объем катушки  $V$ . Считать, что собственное поле катушки однородно, сосредоточено внутри ее объема, а величина индукции этого поля равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на число витков катушки и на величину тока в ней, деленному на длину катушки.

4. Две тонкие положительные линзы с одинаковыми фокусными расстояниями  $F$  расположены так, что их главные оптические оси совпадают. Расстояние между линзами  $L=4F$ . Эта система дает изображение точечного источника света, находящегося на главной

оптической оси на расстоянии  $a=2F$  от передней линзы. На сколько и в какую сторону сместится изображение источника, если переднюю линзу (ближнюю к источнику) сместить перпендикулярно главной оптической оси на  $l=1$  см?

Публикацию подготовили  
С. Резниченко, В. Чивилёв

## Московский институт электронного машиностроения

Математика  
Письменный экзамен  
Вариант 1

1. Постройте график функции

$$y = \frac{(3x+1)|x-1| + 3x^2 - 2x - 1}{|x| + 2x + 1}$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - \sqrt{3} \sin x} + \sqrt{10 \cos x} = 0.$$

3. В кубе  $ABCA'B'C'D'$  с ребром  $a$  точка  $M$  — середина ребра  $BC$ , точка  $N$  — середина ребра  $C'D'$ , точка  $P$  — середина ребра  $AA'$ . Найдите периметр треугольника  $MNP$ . Какая из двух частей, на которые разбивается куб плоскостью  $MNP$  имеет больший объем?

4. Если при расширении центральной усадьбы колхоза число одноэтажных домов увели-

чить в 28 раз и число двухэтажных домов — в 10 раз, то общее число домов станет больше 84. Если же число одноэтажных домов увеличить в 14 раз, а двухэтажных — в 20 раз, то общее число домов будет меньше 90. Сколько одноэтажных домов на центральной усадьбе, если одноэтажных домов меньше, чем двухэтажных?

5. Решите уравнение

$$\sqrt{a^2 - x^2} + x - 1 = 0.$$

Вариант 2

1. При  $a=2$  решите систему

$$\begin{cases} x - y = a + 1, \\ 2xy + 2y = -a^2 - 4. \end{cases}$$

Имеет ли эта система решение при других значениях  $a$ ?

2. Решите относительно  $x$  уравнение

$$\frac{a - 3 \sin x}{a \cos x - 3} = \frac{a - 3 \cos x}{a \sin x - 3}$$

и определите число его корней на  $[40\pi; 49\pi]$ .

3. Что такое правильная пирамида? Докажите, что в правильной треугольной пирамиде двугранные углы при боковых ребрах равны.

4. Для размещения комплекта журнала достаточно купить 13 стандартных полок. Однако в продаже оказались полки, на которых помещается на 7 журналов меньше, чем на стандартных, поэтому пришлось купить 27 полок и в результате осталось свободное место для 3 журналов. Сколько журналов в комплекте?

5. Дано неравенство

$$\sqrt{1 - (x + 2a)^2} \geq \frac{4}{3} x.$$

При  $a=0$  решите его и убедитесь, что множество его решений есть отрезок. При каких значениях  $a$  множество решений данного неравенства есть отрезок длины  $\frac{9}{5}$ ?

## Физика

### Задачи устного экзамена

1. На концах нити, перенесенной через неподвижный блок, подвешены два груза массой  $m=300$  г каждый. Какой добавочный грузик надо положить на один из грузов, чтобы каждый из них прошел за время  $t=0,5$  с путь  $l=50$  см? Изменится ли время прохождения этого пути, если добавочный грузик положить на другой груз? Найдите давление на ось блока. Массой блока и нити пренебречь, считать  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

2. Тело массой  $m=5$  кг падает с некоторой высоты, имея начальную скорость, равную  $v_0=2$  м/с и направленную вертикально вниз. Вычислите работу против сил сопротивления, совершенную в течение  $t=10$  с, если известно, что в конце этого промежутка времени тело имело скорость  $v=50$  м/с. Силу сопротивления считать постоянной.

3. Резиновую камеру накачали на берегу до нормального давления ( $p_0=10^5$  Па). На какую глубину нужно опустить камеру в воду, чтобы ее объем уменьшился вдвое? Температура воздуха на берегу  $t_1=27^\circ\text{C}$ , температура воды

$t_2=4^\circ\text{C}$ , плотность воды  $\rho=10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Определите массу воздуха в камере, если ее начальный объем  $V_1=2$  л, молярная масса воздуха  $M=29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, универсальная газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К).

4. В цилиндрическом сосуде под легким подвижным поршнем находится  $m=3$  кг воды при  $t_0=20^\circ\text{C}$ . При нагревании воде сообщают количество теплоты  $Q=1017$  кДж. Сколько пара при этом образуется? На какую высоту поднимется поршень? Атмосферное давление  $p_0=10^5$  Па, площадь сечения поршня  $S=3$  дм<sup>2</sup>, удельная теплоемкость воды  $c=4,19$  кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования  $r=2,26 \cdot 10^6$  Дж/кг, молярная масса воды  $M=18 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, универсальная газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К). Тепловым расширением воды пренебречь.

5. Парафиновая пластина заполняет все пространство между обкладками плоского конденсатора. Диэлектрическая проницаемость парафина  $\epsilon=2,0$ . Емкость конденсатора с парафином  $C=4,0$  мкФ, его заряд  $q=0,2$  мкКл. Какую работу надо совершить, чтобы вытащить пластинку из конденсатора?

6. Две одинаковые лампочки мощностью  $P_1=50$  Вт каждая, рассчитанные на напряжение  $U=10$  В, соединены параллельно и присоединены к аккумулятору с внутренним сопротивлением  $r=0,5$  Ом. Одна из лампочек перегорела, и ее заменили другой, рассчитанной на то же напряжение, но с мощностью  $P_2=25$  Вт. Во сколько раз изменится при этом КПД аккумулятора?

7. Силовые линии однородных электростатического и магнитного полей взаимно перпендикулярны. Напряженность электростатического поля  $E=1$  кВ/м, индукция магнитного поля  $B=1$  мТл. Какими должны быть направление и модуль скорости электрона, чтобы его движение в этих полях было прямолинейным?

8. Линза дает увеличение  $\Gamma=3,0$  предмета, находящегося на расстоянии  $d=40$  см от нее. Найдите фокусное расстояние линзы. Покажите ход лучей.

9. На металлическую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda=4,13 \cdot 10^{-7}$  м. Поток фотоэлектронов, вырывааемых этим светом с поверхности металла, полностью задерживается разностью потенциалов  $U=1$  В. Определите работу выхода электронов из металла и длину волны света, соответствующую красной границе фотоэффекта. Постоянная Планка  $h=6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, заряд электрона  $e=1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, масса электрона  $m=9 \cdot 10^{-31}$  кг, скорость света  $c=3 \times 10^8$  м/с. Будет ли наблюдаться фотоэффект, если длина волны падающего света равна  $\lambda_1=7 \cdot 10^{-7}$  м?

10. В результате термоядерной реакции  ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$  выделяется энергия. Какую часть выделившейся энергии уносит нейтрон? Кинетическую энергию ядер дейтерия и трития не учитывать. Различием масс нейтрона и протона пренебречь.

Публикацию подготовили  
Г. Ефашкин, В. Тоняя

# Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

## Математика

### Письменный экзамен

#### Вариант 1

##### (математический факультет)

1. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  вышел пешеход и выехал велосипедист, а из  $B$  в  $A$  выехал верховой. Все трое отправились в путь одновременно. Через 2 часа велосипедист и верховой встретились на расстоянии 3 км от середины  $AB$ , а еще через 48 мин встретились пешеход и верховой. Найдите скорость каждого и расстояние  $AB$ , если известно, что пешеход движется вдвое медленнее велосипедиста.

2. Решите неравенство

$$\log_3 - \frac{1}{2}x^2 < 2.$$

3. Решите уравнение

$$5 \sin^2 x + 8 \cos x + 1 = |\cos x| + \cos^2 x.$$

4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \frac{x}{x - x^2 - 1} \text{ на отрезке } [-2, 2].$$

5. Основанием пирамиды  $SABCD$  служит параллелограмм  $ABCD$  с углом  $A = 60^\circ$ . Боковые грани наклонены к основанию пирамиды под углом  $\alpha$ . Найдите угол наклона ребра  $SA$  к плоскости основания.

#### Вариант 2

##### (физический факультет)

1. Найдите объем шара, вписанного в усеченный конус, образующая которого равна 10 и составляет угол в  $45^\circ$  с плоскостью основания.

2. Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x.$$

3. Решите уравнение

$$2^{4x+2} \cdot 4^{-x^2} - 5 \cdot 2^{-x^2+2x} + 1 = 0.$$

4. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{x-1}(x^2-9)}.$$

5. Найдите промежутки возрастания функции

$$y = 5x^3 - 3|x|.$$

## Физика

### Задачи устного экзамена

1. По склону горы, имеющей длину  $l = 50$  м и высоту  $h = 10$  м, на веревке спускают без

начальной скорости санки массой  $m = 60$  кг. Найдите силу натяжения веревки, если санки у основания горы имеют скорость  $v = 5$  м/с, а сила трения между санками и поверхностью горы составляет 10 % веса санок. Веревка натянута вдоль склона горы.

2. С каким ускорением и в каком направлении должна двигаться кабина лифта, чтобы находящийся в ней секундный маятник за время  $t = 2$  мин 30 с совершил  $n = 100$  колебаний?

3. Открытую пробирку с воздухом при давлении  $p$ : медленно нагрели до температуры  $T_1$ , затем герметически закрыли и охладили до температуры  $T_2 = 10^\circ\text{C}$ . Давление при этом упало до  $p_2 = 0,7 p_1$ . До какой температуры  $T_1$  была нагрета пробирка? Тепловым расширением пробирки пренебречь.

4. В однородном электрическом поле с напряженностью  $E = 1$  МВ/м висит на нити шарик массой  $m = 2$  г, несущий заряд  $q = 10$  нКл. Найдите силу натяжения нити, если вектор напряженности составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с вертикалью.

5. На сколько равных частей надо разделить проводник, имеющий сопротивление  $R = 49$  Ом, чтобы сопротивление его частей, соединенных параллельно, было  $r = 1$  Ом?

6. К элементу с ЭДС  $\mathcal{E} = 1,5$  В присоединили резистор с сопротивлением  $R = 0,1$  Ом, при этом амперметр показал ток  $I_1 = 0,5$  А. Когда к первому элементу последовательно с ним присоединили второй элемент с той же ЭДС, амперметр показал ток  $I_2 = 0,4$  А. Определите внутренние сопротивления первого и второго элементов.

7. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов  $U$ , влетел в однородное магнитное поле с индукцией  $B$  и начал двигаться по окружности. Найдите радиус этой окружности.

8. В жидкости с показателем преломления  $n = 1,8$  находится точечный источник света. На каком максимальном расстоянии от источника надо поместить диск диаметром  $d = 2$  см, чтобы свет не вышел из жидкости в воздух? Плоскость диска параллельна поверхности жидкости.

9. Предмет находится на расстоянии  $a = 0,1$  м от переднего фокуса собирающей линзы, а экран, на котором получается четкое изображение предмета, — на расстоянии  $b = 0,4$  м от заднего фокуса линзы. Найдите фокусное расстояние линзы и увеличение предмета.

10. Определите работу выхода электрона с поверхности фотокатода и красную границу фотоэффекта, если при облучении фотозлемента светом с частотой  $\nu = 1,6 \cdot 10^{15}$  Гц фототок прекращается при запирающем напряжении  $U = 4,1$  В. Постоянная Планка  $h = 6,62 \times 10^{-34}$  Дж·с, масса электрона  $m = 9,1 \times 10^{-31}$  кг, заряд  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Публикацию подготовили  
О. Овчинников, М. Чернецов

## Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова принимаются на индивидуальное обучение учащиеся восьмых классов\*) общеобразовательных школ и СПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Цель ВЗМШ — рассказать своим ученикам о многих увлекательных вещах, связанных со школьным курсом математики, научить решать интересные разнообразные задачи, приучить самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге. Всем успешно окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик») выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ надо выполнить контрольную работу, помещенную ниже. Преимуществами пользуются ребята, проживающие в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах.

Чтобы быть принятым в ВЗМШ, не обязательно решить все задачи. Решения задач надо выполнить на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не сворачивайте ее

в трубку. На обложку тетради наклейте листок бумаги, разграфив и заполнив его по образцу, приведенному внизу страницы.

В тетрадь надо вложить два листа бумаги размером  $6 \times 14$  см с четко написанным почтовым адресом (включая индекс), фамилией и именем ученика, а также конверт с написанным на нем Вашим адресом.

Задачи в работе должны идти в том же порядке, что и у нас: сначала условные, потом — решения.

Срок отправки работы — не позднее 15 марта 1990 года (по почтовому штемпелю).

Если Вы выдержите конкурс, то, начиная с сентября 1990 года, будете получать наши задания, которые содержат теоретический материал и задачи для самостоятельного решения, а также контрольные задачи. Все контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому

рекомендуем на него подписаться (это можно сделать без ограничений, с любого месяца в любом отделении связи; подписной индекс 70465; журнал распространяется только по подписке).

Вступительную работу надо выслать по адресу: 119823 Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ, на прием, или по адресу соответствующего филиала. Если Вы живете в зоне действия одного из наших филиалов, но пришлете работу в Москву, то Ваша работа будет нами туда переслана.

Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Иваново, Ижевск, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Ташкент, Фрунзе, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинобад, Луцк, Магадан, Магнитогорск, Орел, Павлодар, Петрозаводск, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в Дубне при Объединенном институте ядерных исследований, в Могилеве — при областном дворце пионеров и школьников.

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), присылают свои работы по адресу: 198097 Ленинград, ул. Трефолева, 32, С-3 ЗМШ, на прием.\*)

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик».

\*) Северо-западная ЗМШ проводит прием (по той же работе) также и десятиклассников — на двухгодичный поток.

\*) По новой нумерации: обучение начинается с 1-го класса и продолжается 11 лет.

Область  
Фамилия, имя ученика  
Год рождения  
Класс и школа  
Ф. И. О. учителя математики  
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)

Московская  
Иванов Петр  
1976  
8 класс «Б» школа № 2  
Орлов Борис Петрович  
123456, Клин, ул. Строителей,  
д. 1, кв. 1

1	2а	2б	3	4а	4б	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Всего
---	----	----	---	----	----	---	---	---	---	---	----	----	----	----	-------

Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1990 года на два потока: для тех, кто с сентября 1990 года начнет учиться в 9 классе, и для тех, кто начнет учиться в 10 классе (соответственно для учащихся I и II курсов СПТУ).

Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться в 1990/91 учебном году.

Заявление должно быть подписано директором школы (СПТУ) и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик» ВЗМШ может оплачиваться

школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявление следует направлять в адрес ВЗМШ.

Без контрольной работы, только по заявлениям, принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзной и республиканских, а также победители краевых и областных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

### Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ 1990 г.

1. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов  $A$  и  $B$  и встретились через час. Прибыв в пункты  $B$  и  $A$  соответственно, велосипедисты сразу же повернули назад и встретились вновь. Через сколько времени после первой встречи это произошло?

2. Дана квадратная таблица размером  $4 \times 4$  клетки. Можно ли пометить некоторые клетки крестиками так, чтобы в каждой строке, в каждой строке и на каждой большой диагонали стояло: а) по два крестика; б) по три крестика?

3. Натуральное число, делящееся на 37, должно иметь в десятичной записи 3980 цифр, причем первые 1990 цифр должны быть одинаковы и последние 1990 цифр должны быть одинаковы. Какими могут быть эти цифры?

4. а) Докажите, что сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров вписанной в него и описанной около него окружностей.

б) Высота  $h$  прямоугольного треугольника делит его на два меньших треугольника. Во все три треугольника вписаны окружности. Найдите сумму радиусов этих окружностей.

5. Два пешехода вышли навстречу друг другу одновременно из пунктов  $A$  и  $B$ . Через два часа они встретились и продолжили путь в том же направлении, причем первый пришел в  $B$  через 3 часа после того, как второй пришел в  $A$ . Сколько времени шел каждый?

6. В точках  $A$  и  $B$  посреди океана находятся два корабля. Расстояние  $AB$  равно 50 км. Корабли одновременно начинают двигаться прямолинейно в неизвестных направлениях с постоянными скоростями 15 км/ч и 20 км/ч, пока не встречаются в точке  $C$ . Каково наибольшее возможное время их движения до встречи?

7. В квадрате  $ABCD$  со стороной  $a$  расположена четверть окружности с центром  $A$ . Отрезок  $MN$  касается этой кривой (точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $BC$  и  $CD$  соответственно). Докажите, что  $MC + CN > a$ .

8. Среди всех дробей  $\frac{p}{q}$  таких, что

$$\frac{1}{1990} < \frac{p}{q} < \frac{1}{1989},$$

найдите дробь с наименьшим возможным знаменателем  $q$  ( $p$  и  $q$  — натуральные числа).

9. В городе Буле некоторые жители — лжецы, и они всегда лгут, а все остальные всегда говорят правду. Однажды в одной комнате находилось несколько жителей этого города, и трое из них сказали следующее:

— Нас тут не больше трех человек. Все мы — лжецы.

— Нас тут не больше четырех человек. Не все мы лжецы.

— Нас тут пятеро. Трое из нас лжецы.

Определите, сколько в комнате человек и сколько среди них лжецов.

10. Найдите числа  $x$ ,  $y$  из уравнения

$$2x^2 + 2y^2 = 4xy - 1.$$

11. Найдите все такие пары натуральных чисел  $(a; b)$ , что число  $3a + 2$  делится на  $b + 1$ , а число  $3b + 2$  делится на  $a + 1$ .

12. Начнем строить последовательность цифр 1, 2, 5, 3, ... следующим образом. Первая цифра равна 1, далее — если написано сколько-то первых членов последовательности, то очередной член вычисляется так: к сумме всех уже написанных цифр прибавляется последняя из написанных цифр и берется последняя цифра полученной таким образом суммы — она и есть очередной член последовательности. (Проверьте, что написанные нами цифры получены по этому правилу.) Какая цифра будет стоять на 1990-м месте?

13. Для каждого четырехзначного числа составляется дробь: отношение суммы цифр числа к самому числу. Для какого четырехзначного числа эта дробь наибольшая?

# Олимпиады

## Избранные задачи Ленинградской городской математической олимпиады 1989 года

В скобках указано, в каком классе предлагалась задача.

1 (5, 7). Найдите два шестизначных числа таких, что если первое приписать слева ко второму, то полученное двенадцатизначное число будет делиться на произведение двух исходных шестизначных чисел.

2 (5). Двое играют в игру: каждый из них своим ходом ставит крестик или нолик (по своему усмотрению) на любое свободное поле доски  $10 \times 10$ . Выигрывает тот, после чьего хода на доске появляются три стоящих подряд по линии одинаковых знака. Кто выигрывает при правильной игре? (А может быть, это ничейная игра?)

3 (6). Найдите все возможные тройки чисел  $A$ ,  $B$  и  $C$  такие, что

$$\begin{cases} A^2 + 2B^2 - 2BC = 100, \\ 2AB - C^2 = 100. \end{cases}$$

4 (6). Найдите наименьшее натуральное число, большее 1, которое по крайней мере в 600 раз больше каждого своего простого делителя.

5 (7). За круглым столом сидят  $2N$  человек:  $N$  физиков и  $N$  химиков, причем некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Известно, что количество химиков-лжецов равно количеству физиков-лжецов. На вопрос: кто ваш сосед справа? — все сидящие за столом ответили: «химик». Докажите, что  $N$  — четно.

6 (7). Двое играют в следующую игру: на центральном узле клетчатого квадрата  $10 \times 10$  стоит фишка. За один ход каждый из игроков имеет право переставить ее на любой другой узел квадрата, но при этом длина его хода (т. е. расстояние, на которое он передвинул фишку) должна быть больше, чем длина предыдущего хода, сделанного его партнером. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто из партнеров выигрывает при правильной игре?

7 (7). Существует ли набор из ста различных натуральных чисел, произведение любых пяти из которых делится на их сумму?

8 (8).  $A$  — натуральное число, большее 1, а  $B$  — натуральный делитель числа  $A^2 + 1$ . Докажите, что если  $B - A > 0$ , то  $B - A > \sqrt{A}$ .

9 (8). Докажите, что у системы

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 1/x + 1/y + 1/z = 0, \end{cases}$$

нет решений в вещественных числах.

10 (8). По окончании шахматного турнира, проходившего в  $k$  кругов, оказалось, что коли-

чества очков, набранные участниками, образуют геометрическую прогрессию с натуральным знаменателем, большим 1. Сколько могло быть участников, если а)  $k=1989$ , б)  $k=1988$ ?

11 (9). Замкнутая 5-звенная ломаная образует равноугольную звезду (см. рис.). Чему равен периметр  $ABCDE$ , если периметр звезды равен 1?

12 (9). Можно ли расставить в клетках таблицы  $10 \times 10$  числа  $-1, 0, 1$  так, чтобы все 20 сумм чисел в строках и столбцах были различны?

13 (10). В основании пирамиды лежит равно-сторонний треугольник, и все плоские углы при вершине пирамиды равны. Докажите, что некоторые две боковые грани пирамиды равны.

14 (10). Дана операция  $*$ , сопоставляющая двум целым числам целое число. Известно, что каждое целое число равно  $X * Y$  при некоторых целых  $X$  и  $Y$ . Докажите, что такая операция не может одновременно обладать свойствами  $A * B = -B * A$  и  $A * (B * C) = (A * B) * C$ .

15 (8, 10). Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $M$  такая, что  $\angle BMC = 90^\circ + \angle BAC/2$  и прямая  $AM$  содержит центр окружности, описанной около треугольника  $BMC$ . Докажите, что  $M$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

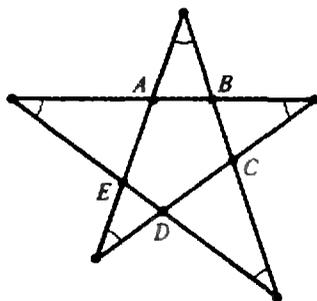
16 (8, 10). Дан конечный набор различных натуральных чисел, обладающих следующим свойством: все их простые делители не превосходят данного числа  $N$ . Докажите, что сумма величин, обратных к этим числам, не превосходит  $N$ .

17 (8).  $k$  — натуральное число, большее 1. Докажите, что в клетках таблицы размером  $k \times k$  нельзя расставить числа  $1, 2, 3, \dots, k$  так, чтобы все суммы чисел в строках и столбцах таблицы являлись степенями двойки.

18 (8, 9). На полях доски  $10 \times 10$  стоит 91 белая шашка. Маляр берет одну из них, перекрашивает ее в черный цвет и ставит на любое свободное поле доски. Затем он опять берет одну из белых шашек, перекрашивает ее в черный цвет и ставит на любое свободное поле, и т. д. до тех пор, пока все шашки не станут черными. Докажите, что в какой-то момент на некоторых двух соседних (по стороне) клетках будут стоять шашки разных цветов.

19 (8, 10). Какую максимальную площадь может иметь четырехугольник, длины сторон которого равны 1, 4, 7, 8?

20 (8). Двое играют в следующую игру. На доске написано число 2. Каждый из игроков



своим ходом заменяет число  $n$ , написанное на доске, на число  $n+d$ , где  $d$  — произвольный делитель числа  $n$ , меньший его. Проигрывает тот, кто напишет на доске число, большее  $a$ ) 19 891 989, б) \* 19 891 990. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

21 (8). В квадратном зале с зеркальными стенами стоит профессор Смит. Профессор Джонс хочет расставить в зале несколько студентов так, чтобы со своего места Смит не мог увидеть собственного отражения. Удастся ли профессору Джонсу это сделать?

22 (9). Все возможные последовательности из семи цифр (начиная с 0 000 000 и кончая 9 999 999) выписаны одна за другой в некотором порядке. Докажите, что получившееся 70 000 000-значное число делится на 239.

23 (9). Пусть  $x, y, z$  — вещественные числа из отрезка  $[0; 1]$ . Докажите, что

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3.$$

24 (10). Сколько решений в действительных числах имеет уравнение

$$\sin(\sin(\sin(\sin(x)))) = x/3?$$

25 (10). Микрокалькулятор «ФН-89» выполняет только две операции:  $x \rightarrow 2x-1$  и  $x \rightarrow 2x$ . В микрокалькулятор введено некоторое натуральное число. Докажите, что, нажимая кнопки, из него можно получить число, являющееся точной пятой степенью.

*Задачи предложили: А. Бураго (20), С. Генкин (2, 4, 14), А. Голованов (3), М. Гусаров (1, 13), В. Козырев (2), А. Меркуров (22), Ф. Назаров (6, 17, 25), Н. Нецветаев (11), Д. Фомин (5, 7, 8, 10, 12, 16, 18, 19, 21, 23, 24), С. Фомин (9), И. Шарыгин (15). Еще пять задач этой олимпиады составляют «Задачник «Кванта» по математике № 11, 1989 (М1191—М1195).*

## Компьютерный турнир XXIII Всесоюзной олимпиады по математике

В 1989 году на Всесоюзной математической олимпиаде жюри впервые решило провести компьютерный турнир. Это решение зрело давно; уже несколько лет для участников олимпиады проводились компьютерные игры, и жюри имело возможность убедиться воочию, как велика тяга ребят к компьютеру. Конечно пока еще рано говорить о включении компьютерного турнира в официальный зачет олимпиады, однако в перспективе Всесоюзная математическая олимпиада может получить свой практический тур. Это было бы очень желательно, так как математику опасно отрывать от живительных истоков ее приложений, — разорвав связывающую их нить, мы рискуем обескровить обе стороны.

### Задачи компьютерного турнира

1. С парой чисел  $(a, b)$  разрешается сделать следующее преобразование: к одному из этих чисел прибавить другое и превратить имеющуюся пару либо в пару  $(a+b, b)$ , либо в пару  $(a, a+b)$ . Написать и запрограммировать алгоритм, вычисляющий наименьшее число таких преобразований, необходимых для превращения пары  $(1, 1)$  в пару, содержащую число  $N$  ( $1 \leq N \leq 2000$ ).

*В. Рождественский*

2. Последовательность  $\{a_n\}$  задана своим первым членом  $a_1 = 1/e$  и рекуррентным соотношением  $a_n = 1 - na_{n-1}$ . Вычислить число  $a_n$  для  $n \leq 50$  с точностью до четырех знаков после запятой. Считать известным, что

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots$$

*Е. Тыртышников*

3. Последовательность  $\{x_n\}$  называется периодической, если для некоторых натуральных чисел  $M$  и  $T$  равенство  $x_n = x_{n+T}$  имеет место для любых  $n > M$ . Наименьшие числа  $M$  и  $T$  с этим свойством называются *длиной нерегулярной части* и *длиной периода* соответственно.

Известно, что для некоторой ограниченной функции натурального аргумента  $f(x)$  для всех  $i \geq 1$  справедливо равенство  $x_{i+1} = f(x_i)$ , так что последовательность  $\{x_n\}$  периодическая.

а) Указать алгоритм, который по заданной такой последовательности определяет  $M$  и  $T$ , используя число сравнений, линейное по максимуму этих двух чисел;

б) Запрограммировать этот алгоритм вычисления длины периода и длины нерегулярной части последовательности  $\{x_n\}$  по заданному ее первому члену  $x_1$  для функции  $f(x)$ , значение которой в точке  $x$  является остатком от деления на  $10^6$  числа  $g(x)$ , определенного формулой

$$g(x) = \begin{cases} x/3 & \text{при } x = 3k \\ 2(x-1)/3 & \text{при } x = 3k+1 \\ 13(x-2)/3 & \text{при } x = 3k+2. \end{cases}$$

*Ю. Нестеренко, А. Слинько*

При проверке заданий жюри столкнулось с рядом трудностей, которые, по-видимому, являются типичными для всех компьютерных соревнований. Вот лишь некоторые из них: отсутствие возможности проверки правильности программ и корректности алгоритмов в связи с ограниченностью времени и количества членов жюри; разнотипность используемой вычислительной техники и языков программирования; невозможность учета временных характеристик программ в связи с указанной разнотипностью.

После написания программы и объявления своей готовности ученику предлагалось просчитать три тестовых примера по каждой задаче. За правильный ответ по каждому тесту давался один балл. Всего каждый участник мог набрать девять баллов. Их и набрали, заняв тем самым первое место в турнире, Б. Дубров (Минск, с. ш. № 107), М. Хосидов-

ский (Ташкент, с. ш. № 110) и А. Шумакович (Ленинград, с. ш. № 239).

По общему мнению компьютерный турнир удался и его следует проводить и впредь. Надо, однако, заметить, что не всякий город сейчас сможет, как Рига, предложить участникам более ста персональных компьютеров, ведь участвовать в турнире изъявили желание 116 школьников.

Этот турнир не смог бы также состояться без героических усилий его организаторов и, в пер-

вую очередь, председателя жюри олимпиады заместителя директора Вычислительного центра Латвийского университета им. П. Стучки профессора Р.-М. В. Фрейвалда и ответственной за компьютерный турнир Л. А. Андерсонс. Спонсором турнира выступила фирма ИНМАК, действующая в составе комплексного кооператива ИНТЕР.

А. Слинко

**Ответы,  
указание,  
решения**

**Электрические машины постоянного тока**

- $n_3 = n_1 - 1, 2(n_1 - n_2) = 640$  об/мин.
- $P_2 = P_1 \frac{I_2^2}{I_1^2} - \frac{UI_2(I_2 - I_1)}{I_1} = 6$  кВт.
- Полезная мощность увеличилась на 21 %.
- $P_{с\max} = \frac{U^2}{4(R_1 + R_2)} < P_{ш\max} = \frac{U^2}{4R_1}$ ;  
 $\eta_c = \frac{1}{2}$ ;  $\eta_{ш} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + 2R_1/R_2}$ .

**Ленинградский физико-технический институт**

**Математика**

**Вариант 1**

- $(0; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2})$ .
- $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .
- $\frac{8}{9\sqrt{5}}$ .
- $\frac{25}{2} \arccos \frac{3}{5} - 6$ . Указание. Множество решений первого неравенства — интервал  $(-3; a^2 + b^2)$  — должен целиком содержаться в отрезке с концами  $-(a+b)$  и  $25/2$ . Поэтому

$$\begin{cases} a + b \geq 3, \\ a^2 + b^2 \leq \frac{25}{2}. \end{cases}$$

Фигура  $\Phi$  изображена на рисунке 1. Для вычисления ее площади следует из площади сектора  $OAtB$  вычесть площадь треугольника  $AOB$ . 5. 183:40. Решение. Пусть  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы окружностей, по которым плоскость  $C_1EF$  пересекает первую (радиуса  $R_1 = 13$ ) и вторую (радиуса  $R_2 = 5$ ) сферы соответственно (рис. 2),  $h_1$  и  $h_2$  — расстояния от центров  $O_1$  и  $O_2$  этих сфер до плоскости  $C_1EF$ . Тогда  $h_i = \sqrt{R_i^2 - r_i^2}$ ,  $i = 1, 2$ . Из условия следует, что  $r_1:r_2 = R_1:R_2 =$

$= 13:5$ , поэтому  $h_1:h_2 = 13:5$ , т. е.  $h_1 \neq h_2$ , и, значит, линия центров сфер  $O_1O_2$  не параллельна плоскости  $C_1EF$ . Пусть  $P$  — точка пересечения прямой  $O_1O_2$  с плоскостью  $C_1EF$ . Тогда  $PO_1:PO_2 = h_1:h_2$ . Отсюда следует, что точка  $P$  совпадает либо с точкой  $P_1$  касания сфер, либо с точкой  $P_2$  пересечения прямых  $O_1O_2$  и  $AD$ . Второй случай невозможен, поскольку плоскость, проходящая через точки  $C_1$ ,  $E$  и  $P_2$ , не пересекает, очевидно, ребро  $BC$ . Следовательно, плоскость  $C_1EF$  пересекает отрезок  $O_1O_2$  в точке  $P_1$  касания данных сфер.

Рассмотрим сечение куба плоскостью  $AB_1C_1D$  (рис. 3). Пусть  $M_1, T, M_2$  — ортогональные проекции точек  $O_1, P_1, O_2$  на отрезок  $AD$ . Тогда сторона  $AD$  куба равна  $AM_1 + M_1M_2 + M_2D = R_1 + M_1M_2 + R_2 = 18 + M_1M_2$ . Найдем  $M_1M_2$ . Так как  $O_1M_1 = R_1\sqrt{2}$ ,  $O_2M_2 = R_2\sqrt{2}$ ,  $O_1O_2 = R_1 + R_2$ , то  $M_1M_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - (O_1M_1 - O_2M_2)^2} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - 2(R_1 - R_2)^2} = 14$ . Поскольку  $FC = \frac{1}{2}HD$ , а искомое

отношение  $\frac{BF}{FC} = \frac{BC - FC}{FC} = \frac{BC}{FC} - 1 = \frac{2AD}{HD} - 1$ , остается найти  $HD$ . Из подобия прямоугольных треугольников  $O_1LO_2$  и  $P_1NO_2$  (см. рис. 3), следует, что  $P_1N = \frac{O_1L \cdot P_1O_2}{O_1O_2} = \frac{\sqrt{2}(R_1 - R_2)R_2}{R_1 + R_2}$ , и

поэтому  $P_1T = P_1N + NT = P_1N + O_2M_2 =$

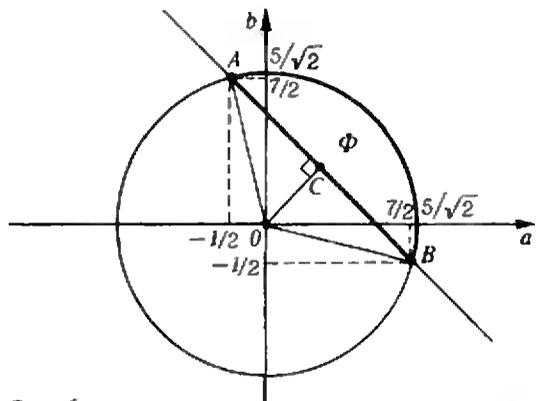


Рис. 1.

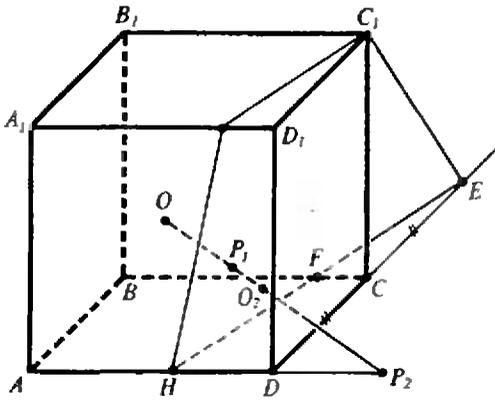


Рис. 2.

$$= \frac{2\sqrt{2}R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{65\sqrt{2}}{9}$$
. Теперь заметим, что  $TM_2 : M_1T = NO_2 : LN = P_1O_2 : P_1O_1 = R_2 : R_1$ . Кроме того,  $TM_2 + M_1T = M_1M_2$  и потому  $TM_2 = \frac{R_2}{R_2+R_1} \times M_1M_2 = \frac{35}{9}$ . Пусть  $x = HD$ . Из подобия прямоугольных треугольников  $HC_1D$  и  $HP_1T$  получаем  $\frac{HT}{HD} = \frac{P_1T}{C_1D}$ , или  $\frac{HD - TM_2 - M_2D}{HD} = \frac{P_1T}{C_1D}$  и, наконец,  $\frac{x - \frac{35}{9}}{x} = \frac{65}{288}$ , откуда  $x = \frac{80 \cdot 32}{223}$ . Следовательно,  $BF : FC = \frac{2AD}{x} - 1 = 183 : 40$ .

Вариант 2

1. л.п.,  $n \in \mathbb{Z}$ .

2.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

3.  $(\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{2}{5}})$ . Указание. Данная система равносильна такой

$$\begin{cases} 2(x+y) = \frac{7}{x}, \\ \frac{y}{x-2y} = xy + 1, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad x > 2y. \end{cases}$$

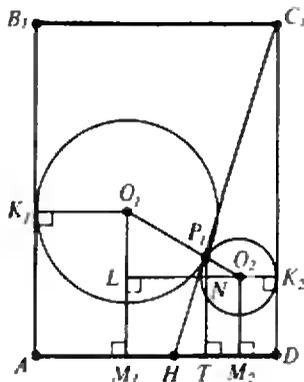


Рис. 3.

Выразив  $y$  через  $x$  из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение

$$6x^3 - 43x^2 + 70 = 0.$$

4.  $\frac{4\sqrt{3}}{27}$ . Решение. Рассмотрим сечение  $KB_1BL$  призмы плоскостью, определяемой параллельными прямыми  $EB_1$  и  $FD$  (рис. 4). Пусть  $\alpha = \angle KB_1E = \angle DFB$ . Тогда  $BL = EB_1 \cdot \cos \alpha = \cos \alpha$ ,  $BF = FD \cdot \cos \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha$ ,  $LF = BL - BF = \frac{1}{4} \cos \alpha$ ,  $KE = EB_1 \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$ ,  $KL = 2BD = 2FD \cdot \sin \alpha = \frac{3}{2} \sin \alpha$ ,  $EL = KL - KE = \frac{1}{2} \sin \alpha$ , и так как  $EL^2 + LF^2 = EF^2 = \frac{1}{12}$ , то  $\frac{1}{4} \sin^2 \alpha + \frac{1}{16} \cos^2 \alpha = \frac{1}{12}$ , откуда  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ . Объем призмы равен  $V = KL \cdot S_{A_1B_1C_1} = KL \times \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ , где сторона  $a$  — сторона треугольника  $A_1B_1C_1$ . Так как  $KL = \frac{1}{2}$ , объем будет наибольшим при наибольшем возможном значении  $a$ , т. е. в том случае, когда  $KB_1 \perp A_1C_1$ . При этом  $a_{\max}^2 = \frac{32}{27}$  и, следовательно, наибольший возможный объем призмы  $ABC_1A_1B_1C_1$ , удовлетворяющей условию задачи, равен  $V_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$ .

5. При  $a = \frac{3}{16}$ ,  $x = -\frac{1}{2}$ ; при  $a = \frac{297}{128}$ ,  $x = -\frac{1}{4}$ ; при  $a = \frac{3}{2}$ ,  $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{11}}$ ,  $x_3 = -2$ .

Решение. Пусть  $a$  — искомое значение. Сложив данные уравнения и сократив на  $x \neq 0$ , получим уравнение

$$33x^3 + 66x^2 + (21 - 16a)x - (2a + 3) = 0. \quad (1)$$

Затем вычтем из первого уравнения второе, умноженное на 2, получим уравнение

$$-33x^3 - (16a + 42)x^2 + (4a - 3)x + 6 = 0. \quad (2)$$

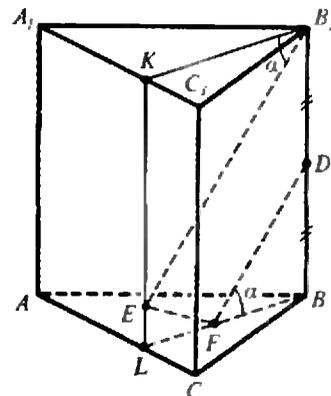


Рис. 4.

После сложения (1) и (2), приходим к уравнению

$$(24 - 16a)x^2 + (18 - 12a)x + (3 - 2a) = 0$$

или

$$(3 - 2a)(8x^2 + 6x + 1) = 0.$$

Итак, если  $a$  — искомое значение, то либо  $a = \frac{3}{2}$ , либо общие корни двух данных уравнений являются корнями квадратного уравнения  $8x^2 + 6x + 1 = 0$ , т. е. какими-то из чисел  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{4}$ .

Подставляя каждое из чисел  $x_1$  и  $x_2$  в оба данных уравнения, получаем два искомого значения  $a$ , соответственно  $a_1 = \frac{3}{16}$  и  $a_2 = \frac{297}{128}$ .

Подставив  $a = \frac{3}{2}$  в данные уравнения, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 22x^4 + 33x^3 - 24x^2 - 3x + 2 = 0, \\ 11x^4 + 33x^3 + 21x^2 - 3x - 2 = 0. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим биквадратное уравнение  $11x^4 - 45x^2 + 4 = 0$ , решая которое, находим для  $x$  четыре возможные значения:  $-2, 2, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}$ .

Проверка показывает, что значение  $x = 2$  является посторонним, а остальные три значения удовлетворяют условию.

### Физика

#### Вариант 1

1.  $\Delta F = 2m(H_2 - H_1)/t^2 = 1$  Н.

2.  $A_{12} = 3vR\Delta T/(2(1 - \eta))$ . Указание. Газ получает тепло только на участке 1—2, а совершает работу на участках 1—2 и 3—1, так что  $\eta = (A_{12} + A_{31})/Q_{12}$ . При этом  $Q_{12} = A_{12}$ , а  $A_{31} = -3/2vR\Delta T$ .

3.  $v_{\max}/v_{\min} = \sqrt{(n+1)/(n-1)}$ . Указание. Справа от колец на их общей оси имеется точка, в которой потенциал поля, созданного зарядами колец, максимален. Пусть он равен  $\varphi$ . Тогда слева от колец в соответствующей симметричной точке потенциал поля будет равен  $-\varphi$ . Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} = q\varphi,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = q\frac{\varphi}{n} + \frac{mv_{\min}^2}{2},$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = q\left(-\frac{\varphi}{n}\right) + \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

где  $q$  — заряд частицы. Отсюда и находим искомое отношение скоростей.

4.  $E_2 = E_1 - \Delta mc^2 = 12,8$  МэВ.

#### Вариант 2

1.  $\alpha_2 = \arccos 0,57 = 55^\circ$ . Указание. Горизонтальная координата  $x$  мяча и изменение  $\Delta v_x$  горизонтальной составляющей его скорости связаны соотношением  $-kx = m\Delta v_x$ . Здесь  $k$  —

коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью мяча,  $m$  — его масса.

2.  $m_1' = m_1 + \frac{-c_1 m_1 t_1 - c_2 m_2 t_2}{\lambda} = 2,05$  кг. Указание. В состоянии равновесия температура смеси равна  $0^\circ\text{C}$ .

3.  $B_0 = 3\sqrt{\mu_0 M/(V \sin 2\alpha)}$ . Указание. После охлаждения обмотки и уменьшения внешнего поля в катушке возникает ток  $I = (2/3B_0 \sin \alpha) \times \times l/(\mu_0 N)$ , где  $l$  — длина катушки,  $N$  — число ее витков. Со стороны внешнего поля на катушку действует момент сил  $M = (1/3B_0 \cos \alpha) ISN$ .

4. Изображение источника сместится в противоположном направлении (относительно смещения линзы) на  $x = 2l = 2$  см.

### Инженерский институт строительного машиностроения

#### Математика

##### Вариант 1

1. Указание. При построении графика воспользуйтесь тем, что функция задается следующими соотношениями

$$y = \begin{cases} 2x - 2 & \text{при } x \geq 1, \\ 0 & \text{при } x < 1, x \neq -1. \end{cases}$$

2.  $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{3} \sin x = 10 \cos^2 x, \\ \cos x \leq 0. \end{cases}$$

3.  $3\sqrt{6}/2$ , плоскость делит объем куба пополам.

4. Одноэтажных домов 2, двухэтажных 3. Указание. Если  $x$  и  $y$  числа одноэтажных и двухэтажных домов соответственно, то, по условию,

$$\begin{cases} 28x + 10y > 84, \\ 14x + 20y < 90, \\ x < y. \end{cases}$$

Из этой системы получаем, исключив  $y$ ,  $x \geq 2$ , а  $y \leq 3$ .

5.  $\left\{ \frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}; \frac{1 - \sqrt{2a-1}}{2} \right\}$  при  $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ ,  
 $\frac{1 - \sqrt{2a-1}}{2}$  при  $a > 1$ .

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 - a < 0, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

#### Вариант 2

1. При  $a = 2$ ,  $x = 1$ ,  $y = -2$ . При других  $a$  решений нет.

2.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  при  $a \neq \pm 3/\sqrt{2}$ ;

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z} \text{ при } a = \frac{3}{\sqrt{2}};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l \text{ при } a = -\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Указание. После несложных преобразований уравнение приводится к виду

$3a(\sin^2 x - \cos^2 x) + (a^2 + 9)(\cos x - \sin x) = 0$ ,  
откуда либо  $\sin x = \cos x$ , либо

$$3a(\sin x + \cos x) = a^2 + 9. \quad (*)$$

Уравнение (\*) не имеет корней ни при каких  $a$ , так как

$$\left| \frac{a^2 + 9}{3a} \right| = \left| \frac{a}{3} + \frac{3}{a} \right| \geq 2 > \sqrt{2},$$

и

$$|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}.$$

Необходимо учесть также условия  $a \cos x \neq 3$ ,  $a \sin x \neq 3$ .

3. Указание. Боковые грани правильной треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники. Плоскость, проходящая через сторону основания и перпендикулярная боковому ребру пересекает плоскости боковых граней по высотам этих треугольников.

4. 186. Указание. Пусть  $x$  — число журналов в комплекте,  $y$  — число журналов, помещающихся на полке. Из условия следует, что

$$\begin{cases} 13y \leq x < 14y, \\ x = 27(y-7) - 3, \text{ откуда} \\ \frac{192}{4} \leq y < \frac{192}{13}, \text{ т. е. } y = 14. \end{cases}$$

5. При  $a=0$ ,  $[-1; 3/5]$ ;  $a=7/40$ .

Указание. Обозначив  $b=2a$ ,  $t=x+b$ , приведем неравенство к виду

$$\sqrt{1-t^2} \geq \frac{4}{3}(t-b). \quad (**)$$

Для решения неравенства (\*\*) удобно воспользоваться графиками. На плоскости  $yOt$ . Уравнение  $y = \sqrt{1-t^2}$  задает на плоскости полуокружность, построенную на отрезке  $[-1; 1] Ot$  как на диаметре. Уравнение  $y = \frac{4}{3}(t-b)$

есть уравнение прямой. Для решения задачи следует изучить различные взаимные расположения (в зависимости от  $b$ ) прямой и полуокружности.

#### Физика

1.  $M = 4lm/(gt^2 - 2l) = 0,4$  кг; время не изменится;  $F = 2m(g + 2l/t^2) = 8,4$  Н.

2.  $A = m(v - v_0)(v_0 + gt - v)/2 = 6240$  Дж.

3.  $h = \rho_0 2T_2 - T_1 / (\rho_0 g T_1) = 8,5$  м;

$m = \rho_0 V M / (RT_1) = 2,3$  г.

4.  $m_n = (Q - cm(t_n - t_0)) / r = 5$  г;

$h = m_n RT_n / (\rho_0 S M) = 28$  м (здесь  $t_n(T_n)$  — температура кипения воды).

5.  $A = (e-1)q^2 / (2C) = 5$  мДж.

6. КПД аккумулятора увеличится примерно в 1,4 раза.

7. Скорость электрона равна  $v = E/B = 10^5$  м/с и направлена перпендикулярно векторам  $E$  и  $B$ .

8.  $F = \Gamma d / (\Gamma + 1) = 30$  см или  $F = \Gamma d / (\Gamma - 1) = 60$  см.

9.  $A = hc/\lambda - eU = 3,2 \cdot 10^{-18}$  Дж;  $\lambda_{\max} = hc/A = 6,2 \cdot 10^{-7}$  м; при длине волны  $\lambda$ , фотоэффекта не будет.

10.  $E_n/E = 4/5$ .

#### Московский государственный

педагогический институт им. В. И. Ленина

#### Математика

##### Вариант 1

1. 6 км/ч, 9 км/ч, 12 км/ч, 42 км. Указание. Необходимо рассмотреть 2 случая и убедиться, что встреча велосипедиста с верховым произошла ближе к  $B$ , чем к  $A$ .

2.  $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 1,5)$ .

3.  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ .

4.  $y_{\min} = y(1) = -1, y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{3}$ .

5.  $\text{arctg} \left( \frac{1}{2} \text{tg} \alpha \right)$ . Указание. Докажите, что  $ABCD$  — ромб.

##### Вариант 2

1.  $\frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$ .

2.  $\frac{\pi(4n-1)}{4}, \frac{\pi(4n+1)}{2}, 2\pi n, n \in Z$ .

3. 0; 2;  $\pm \sqrt{3}$ .

4.  $(\sqrt{10}; \infty)$ .

5.  $(-\infty; 0), \left( \frac{1}{\sqrt{5}}; \infty \right)$ .

#### Физика

1.  $F_n = mg \left( \frac{h}{l} - \frac{v^2}{2gl} - 0,1 \right) = 45$  Н.

2. Кабина лифта должна двигаться вниз с ускорением  $a = g(1 - T_0^2/t^2) = 5,5$  м/с<sup>2</sup>.

3.  $T_1 = T_2 / 0,7 = 404$  К.

4.  $F_n = \sqrt{m^2 g^2 - 2mgqE \cos \alpha + q^2 E^2} = 1,2 \times 10^{-2}$  Н, если напряженность электрического поля «смотрит» вверх, и  $F_n =$

$\sqrt{m^2 g^2 + 2mgqE \cos \alpha + q^2 E^2} = 2,9 \cdot 10^{-2}$  Н, если напряженность «смотрит» вниз.

5.  $n = \sqrt{R/r} = 7$ .

6.  $r_1 = \mathcal{E}/I_1 - R = 2,9$  Ом;

$r_2 = 2\mathcal{E}/I_2 - \mathcal{E}/I_1 = 4,5$  Ом.

7.  $R = \sqrt{2mU/q/B}$ .

8.  $l_{\max} = d\sqrt{n^2 - 1}/2 = 1,5$  см.

9.  $F = \sqrt{ab} = 0,2$  м;  $\Gamma = (b + \sqrt{ab}) / (a + \sqrt{ab}) = 2$ .

10.  $A = h\nu - eU = 4 \cdot 10^{-19}$  Дж;  $\lambda_{\max} = hc/A = 5 \cdot 10^{-7}$  м.

#### Компьютерный турнир

##### II Всесоюзной олимпиады

##### по математике

1. Пусть  $(N, M)$  — пара чисел, получившаяся из пары  $(1, 1)$  с помощью разрешенных преобразований. Мы можем восстановить всю ее предисторию, так как пара  $(a, b)$ , где  $a \geq b$ , может быть получена только из пары  $(a-b, b)$ . Совершая обратный процесс, мы рано или поздно получим пару  $(1, 1)$  и можем подсчитать необходимое число преобразований. Пара  $(N, M)$  может быть получена из пары  $(1, 1)$  только лишь в том случае, когда  $N$  и  $M$  взаимно просты. В противном случае, совершая обратный процесс, мы остановимся на паре  $(L, 0)$  где  $L > 1$ . Пары  $(N, i)$  и  $(N, N-i)$  дают после обратного преобразования одну и ту же пару  $(N-i, i)$ .

После этих замечаний ясно, как осуществлять перебор: надо для каждой пары  $(N, i)$ , где  $1 \leq i < [N/2]$ , совершить все обратные преобразования и сравнивать числа этих преобразо-



ваний в случае, когда процесс заканчивается на паре (1, 1).

Более быстрый алгоритм даст применение обратных преобразований вида  $(a, b) \rightarrow (a - qb, b)$ , где  $a \geq b$  и  $q = [a/b]$ .

2. Число  $a_1$  нельзя представить в ЭВМ точно, вместо него будет записано число  $A_1 = a_1 + \epsilon$ . Даже если считать, что при дальнейших вычислениях ошибки округления отсутствуют, то, вычисляя последовательно  $A_2, A_3, \dots$ , получим  $A_n = a_n + \epsilon_n$ , где  $|\epsilon_n| = |\epsilon| \cdot n!$  (начальная ошибка увеличивается в  $n!$  раз). Все это подтверждается при счете на ЭВМ — при таком способе вычисления даже с использованием двойной точности число  $A_{20}$  получается отрицательным! В то же время по индукции легко показать, что

$$a_n = n! \left( \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \dots \right)$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots$$

и  $0 < a_n < 1/(n+1)$ . Поэтому в этой задаче лучше использовать обратный счет по формуле  $a_{n-1} = (1 - a_n)/n$ , взяв в качестве приближения для достаточно далекого числа  $a_n$  число 0, тогда начальная ошибка будет уменьшаться и в конце концов станет несущественной. Расчеты показывают, что число  $a_{m-20}$  будет найдено с шестью верными знаками после запятой.

3. Будем сравнивать числа пар  $(x_i, x_{n_i})$  вплоть до их совпадения. Пусть  $n_0$  — первое число, для которого  $x_{n_0} = x_{2n_0}$ . Тогда  $n_0$  есть наименьшее число, большее  $M$  и кратное  $T$ , и поэтому  $M < n_0 \leq M + T$ . Далее рассматриваем пары  $(x_{n_0}, x_{n_0+1})$  до совпадения в них чисел. Наименьшее  $i$  такое, что  $x_{n_0} = x_{n_0+i}$  есть период  $T$ . Нахождение его требует  $T$  сравнений. Далее сравниваем пары  $(x_j, x_{j+T})$ . Если  $j$  — наименьшее число, при котором происходит совпадение, то  $M = j - 1$ . Здесь надо  $M$  сравнений. Таким образом, общее число сравнений не превосходит  $2(M + T)$ .

**Поправка**

В «Кванте» № 11 за 1989 год на с. 34 в рисунке к задаче 4 допущена ошибка. Головоломка должна выглядеть так:  $11^0 = \sqrt{D \cdot Y} = MA - Y = T < E$ . Редакция приносит свои извинения читателям.

**Главный редактор —**  
академик Ю. А. Осипьян

**Заместители главного редактора:**  
В. П. Боровишки, А. А. Варламов,  
Ю. П. Соловьев

**Редакционная коллегия:**

- А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
- В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтынский,
- А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
- Н. Б. Васильев, С. М. Вороин, Б. В. Гнеденко,
- Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
- А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
- С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонovich,
- В. А. Лепиковцев, С. П. Новиков,
- Т. С. Петрова, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
- Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
- Я. А. Смородицкий, А. Б. Сосинский,
- В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

**Редакционный совет:**

- А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
- И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
- Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
- Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
- Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев,
- В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
- А. Л. Стасишко, И. К. Сурия, Е. Л. Сурков,
- Л. Д. Фаддеев, Б. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

**Номер подготовили:**

- А. И. Буздин, А. Н. Виленики,
- А. А. Егоров, Л. В. Кардашович,
- И. К. Клумова, Т. С. Петрова,
- С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

**Номер оформили:**

- М. Б. Дубах, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина,
- С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова,
- Л. А. Тишкова, П. И. Чернуцкий, В. В. Юдин

Фото представил В. И. Плюшкин

Редактор отдела художественного оформления  
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор М. Н. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,  
тел. 250-33-64

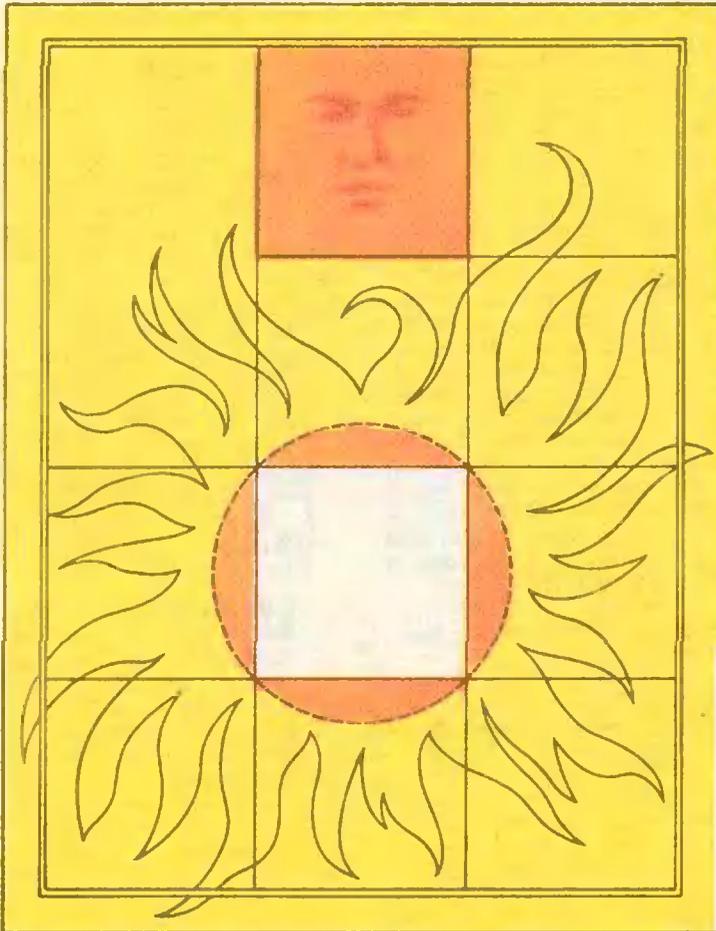
Сдано в набор 18.10.89. Подписано к печати 5.12.89  
Т-17331. Формат 70 × 100/16. Бумага офс. № 1  
Гарнитура школьная. Печать офсетная  
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,64  
Тираж 190 000 экз. Заказ 2436. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
Государственного комитета СССР  
по печати  
142300, г. Чехов Московской области



45 коп.

Индекс 70465



Разрезав эту картинку по линиям на квадратики, вы получите любопытную головоломку. Она сродни игре «15»: двигая квадратiki, нужно переместить изображенное лицо на свободное место. Не спешите на нас обижаться за такую детскую задачу. Она отнюдь не так уж проста. Для ее решения необходимо поменять местами квадратик с лицом и квадратик, расположенный под ним. Но в любой книжке, где хоть что-то говорится об игре «15», вы прочтете, что поменять местами ровно две фишки в ней невозможно. А вот головоломка «солнце» разрешима. В чем же ее секрет? Ответ — в следующем номере журнала.

Д. К.

