Квант

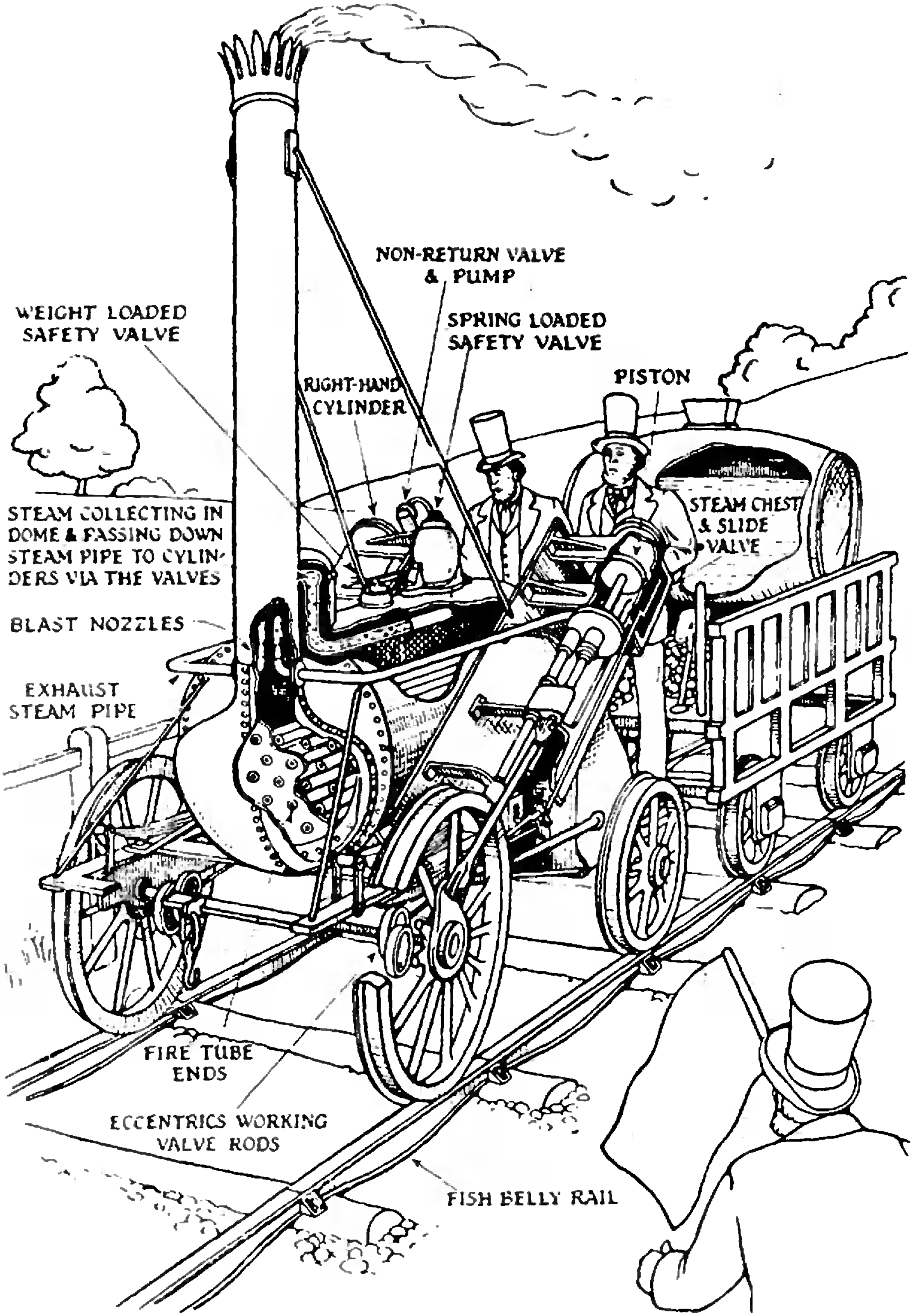
ISSN 0130-2221

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Р — значит ракета

1989


NON-RETURN VALVE
& PUMP
WEIGHT LOADED
SAFETY VALVE
SPRING LOADED
SAFETY VALVE
PISTON
RIGHT-HAND
CYLINDER
STEAM COLLECTING IN
DOME & PASSING DOWN
STEAM PIPE TO CYLIN-
DERS VIA THE VALVES
STEAM CHEST
& SLIDE
VALVE
BLAST NOZZLES
EXHAUST
STEAM PIPE
FIRE TUBE
ENDS
ECCENTRICS WORKING
VALVE RODS
FISH BELLY RAIL

Квант

1990

4

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

1 *Наверное, каждому из вас хотя бы однажды довелось наблюдать разноцветные венцы вокруг Луны или Солнца, на оконном стекле или над чашкой чая. Как возникают такие венцы? Можно ли их получить в лабораторных условиях? На эти и многие другие аналогичные вопросы вы найдете ответы в статье «Зеленый туман».*

2 *«Ракета» — так назвал свой знаменитый паровоз Р. Стефенсон. Важный элемент конструкции — устройство, преобразующее поступательное движение поршня во вращательное движение колеса. О математике подобных устройств вы можете прочитать в статье «Инверсоры».*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Новая головоломка: «часы Рубика».*

ПИСЬМА О ФИЗИКЕ

Редакция получает массу писем с самыми разными вопросами. Мы стараемся отвечать каждому нашему читателю. Но есть такие, можно сказать, глобальные вопросы, на которые трудно ответить в индивидуальном письме: в каких направлениях развивается современная физика? чем занимаются ученые в физических институтах? как стать физиком?..

В ответ на такие письма мы начинаем сегодня новый цикл публикаций, который можно условно назвать «Письма о физике». Сколько будет этих писем — покажет будущее. Физика необыкновенно многолика, и почти не существует ученых, одинаково хорошо разбирающихся во всех ее областях. А возможно, их и вовсе нет. Физик, случайно заглянувший на «не свою» конференцию, как правило, не много понимает. Поэтому письма нашим читателям будут писать разные авторы. И мы постараемся привлекать настоящих профессионалов, чтобы вы получали ответы, что называется, из первых рук.

Автор первого письма — известный физик-теоретик, крупный специалист в области физики твердого тела, доктор физико-математических наук, профессор Моисей Исаакович Каганов. Предоставляем ему слово.

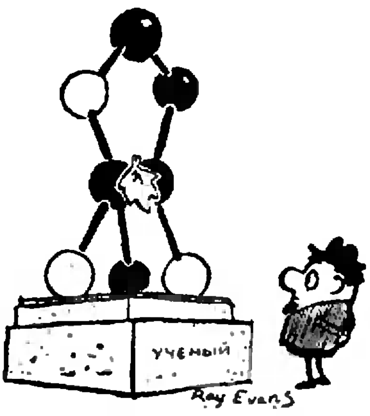
Дорогой коллега!

Думаю, я могу так обратиться к читателю. Журнал «Квант», как правило, читают те, кто решил стать физиком или математиком. Я обращаюсь к тем, кто в будущем видит себя физиком.

Не знаю, занимался ли кто-нибудь анализом выбора специальности. Конечно, каждый взрослый человек помнит, как складывалась его жизнь и почему он стал физиком, или инженером, или рабочим... Помню и я. В нашей семье не было представителей точных наук. Но было много книг. И я рано начал читать научно-популярную литературу по физике. Теперь мне ясно: понимал я мало (особенно при первом знакомстве с новой — тогда — квантовой физикой). Но было ощущение какого-то удивительного приключения, участие в котором принимают Резерфорд, Бор, Эйнштейн, Гейзенберг, Шредингер...— переживание отводило особое место «суперзвездам», актеры второго ряда уже не оставляли следа. И если в приключенческом фильме восхищает умение вскочить на коня с места или, мгновенно вытащив пистолет, метко поразить противника, то в научных приключениях меня восхищала удивительная сила ума, способность выйти за рамки старых теорий, построить новую систему представлений, адекватную новым экспериментальным данным. Надо думать, книги, которые я читал, были хорошо написаны, потому что я понял (а возможно, мне сегодня кажется, что я тогда понял): замена фундаментальной теории, прекрасно описывающей огромную совокупность фактов, новой теорией — только потому, что старая с чем-то не справляется,— мучительно трудное дело. Ведь в наследство остаются все ранее известные факты, и они по-прежнему требуют объяснения...

Вот какие проблемы волновали меня, когда я принимал решение стать физиком.

Что такое физика, чем реально занимаются физики — об этом в книгах, которые я читал, ничего не говорилось. Иногда упоминались названия научных учреждений, в которых работали «суперзвезды»: Мондовская лаборатория в Кембридже, созданный для Бора институт в Копенгагене... Конечно, я знал, что в Советском Союзе есть научные институты, в ко-



На выставке современной скульптуры.

торых работают физики, знал, что есть физические или физико-механические, физико-математические факультеты, где обучают будущих физиков. Чему и как — об этом никогда не говорилось...

Обо всем этом я думал, решив рассказать будущим физикам, что из себя представляет наука, которой они собираются себя посвятить. Рассказать, по возможности, без романтики, без преувеличений, но не пытаясь выглядеть безразличным объективным комментатором. Выбрав специальность, я в ней не только не разочаровался, но по-настоящему полюбил ее. И свою любовь не собираюсь скрывать.

* * *

Официальное определение физики таково: «...Наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы ее движения» (БСЭ, т. 27, с. 337). Конечно, чтобы наполнить это определение конкретным содержанием, надо дополнить его, указав, что значит «простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности» явления, да и неплохо бы объяснить, что́ движется, ведь материя — понятие столь всеобъемлющее...

Физика воспринимается всеми (и самими физиками, и учеными других специальностей) как фундаментальная наука, лежащая в основе всех других естественно-научных дисциплин.*) А ее конкретное содержание зависит от уровня наших знаний. Сегодня объектами исследовательской деятельности, которую принято относить к физике, являются и мельчайшие частицы вещества (вплоть до кварков), и конденсированные тела, и удаленные от нас на тысячи световых лет таинственные квазары, и — самое удивительное — Мир в целом, в его развитии от момента Большого взрыва до современности; физика изучает и объекты, которые на сегодняшний день она предполагает бесструктурными (электроны, мюоны, нейтрино...), и наиболее сложно организованную материю — мозг, в деятельности которого именно физики обнаружили много не известных биологам фактов, а главное, привнесли в исследование свои специфические физические методы...

Именно разнообразие объектов исследования привело к фактическому разделению физики на сравнительно разобщенные науки, каждая из которых имеет набор основных представлений и моделей, свой, иногда очень изощренный, математический аппарат, свои апробированные практикой экспериментальные методики. И все же, при всем многообразии объектов исследования, всех физиков можно разделить на два класса (отряда, семейства — применимо любое из подобных слов):

физиков-теоретиков и
физиков-экспериментаторов.

Что делают физики-экспериментаторы, наверное, более или менее понятно. Но это письмо — о физиках-теоретиках.

Физики-теоретики изучают Природу с помощью математических методов исследования. Эйнштейн считал величайшей загадкой то, что математика — создание человеческого ума — применима при описании явлений Природы. Не углубляясь в размышления над этой загадкой, примем как общеизвестный факт: физические явления могут быть описаны математическими уравнениями, решения которых имеют предсказательную силу. Вот что это значит. Невозможно наперед вывести все математические соотношения, которые могут понадобиться при описании физических явлений. Физики-теоретики (в данном случае речь идет о гениях) формулируют основные уравнения, причем они формулируются в столь общей форме, что применимы практически в бесконечном количестве случаев. В процессе постижения законов природы основные уравнения изменялись. Формулировка новых уравнений открывает новую эпоху в физике.

*) Прекрасный образец шуточного определения физики дал Дж. Орир: «Физика — это то, чем занимаются физики». Если вдуматься, это — содержательное утверждение...

Современная физика началась (в XVII веке) с формулировки Ньютоном основных уравнений механики. В XIX веке Максвелл сформулировал уравнения электромагнетизма. Прослеживая путь основных уравнений, надо назвать имена А. Эйнштейна, Н. Бора, Э. Шредингера, В. Гейзенберга и П. А. М. Дирака. Эйнштейн сформулировал уравнения механики, позволяющие исследовать движения со скоростями, близкими к скорости света, и построил теорию гравитации. Бор, Шредингер, Гейзенберг и Дирак создали квантовую (или волновую) механику.*)

Открытие, формулировка новых уравнений не исчерпывает деятельности физика-теоретика. Более того, подавляющее большинство физиков-теоретиков не претендует на пересмотр существующих основных уравнений (читай: основных представлений), а довольствуется решением задач на основе этих уравнений. Глагол «довольствоваться» не несет на себе какого-либо уничижительного смысла.

Задачи в теоретической физике возникают двумя способами.

Первый способ. Эксперимент обнаруживает нечто такое, что именуют новым явлением или свойством. Выбор слова (явление, свойство) зависит от ощущения важности обнаруженного. Иногда экспериментатор, хорошо понимая природу обнаруженного явления, самостоятельно дает полную интерпретацию того, что он обнаружил. Но чаще, даже зная в общих чертах, чем обусловлено открытое им явление, он не может, используя известные уравнения (представления), вычислить необходимые для объяснения величины и/или соотношения. Вычисления требуют специалиста — физика-теоретика. Возможно, что даже при детальном и подробном изучении открытого явления его природа не становится яснее. Выяснение природы явления, т. е. выяснение, какими из основных уравнений физики должно пользоваться для объяснения, — одна из важнейших задач, решаемых физиками-теоретиками. Бывает, что от возникновения задачи до ее решения проходит много лет, причем эксперимент все это время добавляет новые сведения об открытом явлении, а теория, развиваясь, скрытым образом подготавливает себя к решению задачи. Сверхпроводимость была открыта в 1911 году, а получила объяснение в 1956. Сорок пять лет понадобилось для выяснения природы этого удивительного явления. Причем объяснение не затронуло основных уравнений физики. Оно было найдено в пределах существовавших представлений.

— Генерал особенно хотел бы посмотреть, как бомбардируют атомные ядра.

Второй способ. Логика развития какой-либо области физики подсказывает возможность расчета явления или свойства, которые раньше либо не поддавались расчету, либо не представляли интереса (находились вне поля зрения физиков). Особое место среди этих задач занимают задачи, решения которых совершенствуют математический аппарат теории. Вообще между математикой и теоретической физикой существует непростая связь. Во многих случаях физик-теоретик использует готовый математический аппарат, обнаружив предварительно, что сформулированная им

*) Чтобы подчеркнуть важность открытия новых уравнений, приведем цитату из курса лекций замечательного физика-теоретика и великолепного педагога Р. Фейнмана: «В истории человечества (если посмотреть на нее, скажем, через десять тысяч лет) самым значительным событием XIX столетия, несомненно, будет открытие Максвеллом законов электродинамики. На фоне этого важного научного открытия гражданская война в Америке в том же десятилетии будет выглядеть мелким провинциальным происшествием». («Фейнмановские лекции по физике», том 5 «Электричество и магнетизм», с. 27. М.: Мир, 1966.)

задача принадлежит классу задач, изученных математиками. Но нередко физик-теоретик, сформулировав, как ему представляется, строго и полно физическую задачу, обнаруживает, что математики подобных задач не решали вовсе или им (математикам) известна только принципиальная разрешимость подобных задач, а не метод получения решения. Тогда за создание метода приходится приниматься физику-теоретику... При таком (как в этом письме) абстрактном изложении все выглядит слишком «разложенным по полочкам». В действительности чаще всего ситуация промежуточная: в математике, вроде бы, есть нужный метод, но он чуть-чуть не подходит, его требуется немного усовершенствовать. А небольшое усовершенствование оборачивается сложной, требующей большого напряжения ума работой.

Чаще всего первые свои работы будущие физики-теоретики делают под руководством. Опытный физик-теоретик всегда имеет «на примете» либо конкретные задачи, которые, как ему кажется, следует решить, либо область физики, познакомившись с которой, молодой физик-теоретик сможет найти себе посильную задачу. В этой фразе важно отметить слова «посильная задача». Хороший педагог всегда представляет себе, какой сложности задачу можно дать ученику... Я хорошо помню то свое состояние (в конце обучения в Университете), когда все задачи, казалось, делятся на два класса: решенные и нерешаемые. И до сих пор благодарен своим учителям, с помощью которых понял, что из нерешенных задач может быть выделен подкласс решаемых задач.

Конечно, работа физика-теоретика состоит в решении задач, т. е. в получении ответа, результата. Но радость доставляет не только результат — итог работы. Сам процесс решения, преодоление возникающих во время решения трудностей, обход их, знакомство с новыми методами, овладение ими — все это доставляет радость...

— Ты что-нибудь чувствуешь, папочка?

Хочется предостеречь будущего физика-теоретика. Один мой друг — очень опытный и талантливый физик-теоретик — сказал, что главное качество, которым должен обладать физик-теоретик,— оптимизм, вера в то, что ответ получить удастся. В процессе работы эта вера предельно конкретизируется. Надо надеяться: все, что надо, взаимно уничтожится при приведении подобных членов, паразитические особенности сократятся и т. д., и т. п. Но (и в этом — предупреждение!) нельзя принимать желаемое за действительное: нельзя заранее отбрасывать слагаемые, потому что они должны взаимно уничтожиться, сокращать паразитические особенности и вообще разрешать себе действовать не так, как на обычной контрольной или при решении задач из задачника. Надо с первых самостоятельных работ воспитывать в себе предельный критицизм. Автор — самый строгий критик своей работы. Надо всегда помнить: получая новый результат, необходимо обрести уверенность в его правильности. Отсутствие готового (как в задачнике) ответа заставляет создавать специальные методы проверки полученного результата.

Большое место в жизни физика-теоретика сегодня занимает ЭВМ. Но это — отдельная тема.

В заключение — о том, где учатся «на физика-теоретика». Практически во всех крупных университетах страны, а также в Московском физико-техническом институте, в Московском инженерно-физическом, в Ленинград-

(Окончание см. на с. 29)

«*И ВОЗВРАЩАЕТСЯ ВЕТЕР...*», *ИЛИ ПЕРИОДИЧНОСТЬ В МАТЕМАТИКЕ*

А. БЕЛОВ,
кандидат физико-математических наук
М. САПИР

Идет ветер к югу, и переходит к северу, кружится, кружится на ходу своем, и возвращается ветер на круги свои.

Екклезиаст, гл. 1, ст. 6

Быть может, наибольшая привлекательность математики в том, что одни и те же идеи возникают при решении самых разнообразных задач, казалось бы не имеющих ничего общего.

В этой статье мы постараемся проследить за одной из общематических идей — идеей повторяемости, цикличности, возвращаемости, которая обсуждалась в Кировской летней математической школе 1986—1988 годов, а также в Зимней школе юного математика 1988 года при Свердловском пединституте.

Многие идеи, сформулированные в «чистом виде», выглядят тривиальными, например принцип Дирихле. Но — удивительный факт — зачастую одно упоминание о такой «тривиальности» делает трудную до того задачу прозрачной. В чем здесь дело? Вы, наверное, встречали рисунки для детей, где надо найти, скажем, зайца в лесных зарослях. Мы хорошо знаем, как выглядит заяц, но где он сидит, сразу не видно. А если не сказать, что сидит именно заяц, то увидеть его очень трудно. Так и в математике полезно знать заранее, какие простые, но важные идеи скрываются в дебрях возможных рассуждений. В дальнейшем ваш опыт будет подсказывать вам, какие «звери» могут водиться в том или ином лесу. А теперь вернемся «на круги свои».

Цикличность в природе встречается повсюду: карусели и вращение планет, времена года и цифры в десятичной записи дробей — практически все сущее участвует в каком-то циклическом движении, «хороводе». Оказывается, есть общая причина, вызывающая периодичность.

В чем секрет периодичности? Так же, как при изучении живой ткани рассматривают под микроскопом одну ее клетку, рассмотрим вначале простую «одноклеточную» задачу.

Задача 1. *Найдите последнюю цифру числа 2^{1000}.*

Давайте поставим более общий вопрос: как выглядит последовательность окончаний степеней двойки? Для начала выпишем несколько членов:

$$1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, \ldots$$

Первой повторилась двойка, затем начали повторяться цифры 4, 8, 6 и почти очевидно, что так будет до бесконечности. Но все же почему? Да потому, что только последняя цифра каждой степени определяет последнюю цифру следующей степени, а остальные цифры не влияют, так что

повторение одной цифры вызывает повторение следующей, а значит, и всех последующих.

Так возникает период — отрезок ряда между двумя повторениями. Теперь уже легко определить, что последняя цифра числа 2^{1000} равна 6 (проверьте).

Следующая задача является уже «двуклеточной»: ее решение аналогично решению задачи 1, если суметь сначала доказать, что произойдет повторение.

Задача 2. *Докажите, что последовательность остатков от деления на 1990 степеней числа 7 — периодическая, причем длина периода не больше 1990.*

Вам хорошо известно, что рациональное число разлагается в периодическую десятичную дробь. Рассмотрим последовательность цифр этой периодической дроби. Как мы устанавливаем периодичность? При делении «уголком» мы работаем с последовательностью остатков (умножаем, вычитаем, берем остаток; сносим цифру, находим неполное частное, умножаем, вычитаем, берем остаток; и т. д.). Итак, каждый остаток однозначно определяет неполное частное (цифру десятичной дроби) и следующий остаток.

Остатки начнут повторяться (их конечное число), значит, начнут повторяться и десятичные знаки.

Итак, периодичность десятичных знаков рационального числа получается как следствие периодичности соответствующих остатков. Теперь можно приступить к «многоклеточной» задаче.

Задача 3. *Жители Лавайских островов гордятся тем, что у них с незапамятных времен существует президентская форма правления. Каждые 4 года президентом избирается либо республиканец, либо демократ. Местные социологи обнаружили строгий закон, по которому определяется партийность очередного президента. Хотя этот закон засекречен, в печать просочились сведения, что партийность очередного президента полностью определяется партийностью предыдущих десяти. Последние три срока на Лаваях правит республиканец. Докажите, что всегда будут периоды правления трех республиканцев подряд.*

Нам достаточно показать, что партийности президентов периодически повторяются. Назовем «предвыборным состоянием», или просто «состоянием», последовательность партий, к которым принадлежали последние 10 президентов. Каждое состояние определяет партийность следующего президента, а значит, и следующее предвыборное состояние. Состояний конечное число (не больше чем 2^{10}), следовательно, по принципу Дирихле, какое-то из них повторится. Повторение одного состояния вызовет повторение следующих состояний, и с этого момента состояния начнут периодически повторяться, а значит, и последовательность правящих партий будет периодической. Но поскольку президентская форма правления на Лаваях существует с незапамятных времен, повторение двух состояний уже произошло, и состояния давно повторяются.

Как видите, во всех разобранных задачах присутствует одно и то же рассуждение, устанавливающее периодичность. Сформулируем его в общем виде.

Рассуждение 1. *Если нечто может находиться только в конечном числе состояний, и состояние в данный момент времени однозначно определяет состояние в следующий момент времени, то, начиная с некоторого момента, состояния начнут периодически повторяться.*

Однако в задаче про президентов надо было проверить, что в данный момент мы находимся в периоде — только тогда можно утверждать, что всегда будут моменты правления трех республиканцев подряд. Для этого и потребовались «незапамятные времена». Это важный момент: рассуждение 1 утверждает периодичность, *начиная с некоторого момента,* но при этом вовсе не обязательно, чтобы повторилось первое состояние. (Это видно уже на примере задачи 1. Другой пример — периодические дроби.) Если период начинается не сразу, то последовательность состояний, предшествующая периоду, называется *предпериодом*. Чтобы доказать, что начальное состояние когда-нибудь встретится, надо еще показать отсутствие предпериода. Для этого часто используется несколько другая идея, чем в задаче о президентах,— идея «обратного хода»:

Рассуждение 2. *Если число состояний конечно, и каждое состояние* *однозначно определяет как последующее состояние, так и предыдущее, то в последовательности состояний предпериод отсутствует.*

Это простое рассуждение не сразу становится понятным. Попробуем его пояснить. С какого-то момента появится период (рассуждение 1). Выберем состояние, например, из третьего периода. Оно однозначно определяет предыдущее состояние и т. д. Во втором периоде есть такое же состояние; оно определяет предыдущее (такое же, как в третьем периоде) и т. д. Период «переносится в прошлое», а значит, все состояния периодически повторяются.

Вот типичный пример (см. статью А. И. Орлова «Принцип Дирихле», «Квант», 1971, № 7):

Задача 4. *Докажите, что найдется член последовательности Фибоначчи, делящийся на 1990. (Напомним, что последовательность Фибоначчи начинается с двух единиц, а каждый следующий член равен сумме двух предыдущих.)*

Запишем формулу для определения очередного числа Фибоначчи:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Прежде всего изучим остатки чисел Фибоначчи при делении на 1990. Хотелось бы найти остаток, равный нулю. Ну, а как его искать? В том-то и задача. Однако обратимся к прошлому (задача о президентах показала полезность изучения истории). Заметим, что последовательность можно «продолжить в прошлое» с помощью формулы:

$$u_{n-2} = u_n - u_{n-1}.$$

Тогда получим, что $u_0 = 0$. Прекрасно! Ноль делится на 1990.

Осталось установить периодичность остатков, начиная с нулевого члена. Заметим: нам не нужно находить член последовательности Фибоначчи с нулевым остатком — достаточно установить его существование. Нетрудно понять, что по остатку одного числа Фибоначчи ничего нельзя сказать об остатке следующего. Тут на помощь приходит задача о президентах: ведь и там, чтобы спрогнозировать результат выборов, недостаточно знать партийность предыдущего президента — нужны результаты последних 10 выборов. Потому-то «предвыборным состоянием» мы назвали партийность последних 10 президентов. Теперь ясно, что в качестве состояния члена u_n надо взять пару остатков от деления на 1990 членов u_{n-1} и u_{n-2}. Два предыдущих остатка уже определяют следующий. Здесь ключ к решению: во-первых, «состояние» определяет остаток числа, а во-вторых, каждое «состояние» определяет следующее состояние. Теперь все ясно: состояний конечное число (оцените сколько), они начнут повторяться, а значит, повторятся остатки чисел Фибоначчи. Впрочем, радоваться рано. Почему период начинается с нулевого члена? Тут нам поможет идея «обратного хода»: состояние каждого остатка определяет состояние не только следующего, но и предыдущего (в этом нас убеждает формула $u_{n-2} = u_n - u_{n-1}$), а отсюда отсутствие предпериода.

Упражнение 1. Могут ли два соседних числа Фибоначчи делиться на 1990?

Задача 5 (на исследование — обобщение задач 1, 2, 4). *Последовательность u_n такова, что при некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_k$ справедливо равенство $u_n = a_1 \cdot u_{n-1} + a_2 \cdot u_{n-2} + \ldots + a_k \times \times u_{n-k}$. (Такая последовательность называется возвратной, или рекуррентной. Примеры — последовательность Фибоначчи или последовательность степеней целого числа: если $u_n = m^n$, то $u_n = m \cdot u_{n-1}$.) Пусть все a_i и u_n — целые. Докажите, что остатки чисел u_n при делении на заданное целое l периодически повторяются. В каких случаях в этой последовательности остатков будет отсутствовать предпериод? Оцените длину периода. Приведите пример, когда предпериод будет.*

Одно и то же рассуждение может появляться в различной «упаковке». Например, рассуждение 2 может выглядеть так:

Несколько точек соединены стрелками, причем из каждой точки исходит одна стрелка и входит тоже одна. Тогда все стрелки (и точки) образуют несколько циклов.

Упражнение 2. Сформулируйте рассуждение 1 в терминах точек и стрелок.

Идею цикличности можно формализовать не только на языке точек и стрелок. Другой способ — на языке функций:

Теорема о периодичности. *Пусть M — конечное множество (множество состояний). Пусть f — функция из множества M в множество M. Тогда при всех x из M последовательность состояний*

$$x,\ f(x),\ f(f(x)),\ f(f(f(x))),\ \ldots,$$

начиная с некоторого момента, станет периодичной.

Кроме того, если при различных x и y состояния $f(x)$ и $f(y)$ также различны (это условие «обратного хода»! — почему?), то период начинается с первого члена.

Упражнения

3. Докажите теорему о периодичности.

4. Докажите, что сумма длин периода и предпериода в последовательности из теоремы о периодичности не превосходит числа элементов множества состояний.

Возникает вопрос: рассуждения 1 и 2 выглядят достаточно убедительными. Зачем же еще их формализовывать, да еще двумя способами? Зачем гнаться за строгостью, когда и так все ясно?

В нашем случае дело не в строгости: различные способы формализации дают возможность посмотреть на рассуждение с разных сторон, что позволяет применить его в разных ситуациях. Приведем два примера.

Упражнение 5. В некоторой компании каждый человек имеет ровно двух друзей. Докажите, что если все друзья возьмутся за руки, то они образуют один или несколько хороводов. (Здесь подходит рассуждение с точками и стрелками.)

Задача 6. *Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из правильного положения. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту комбинацию еще несколько раз.* (Здесь подходит теорема о периодичности.)

Для решения задачи 6 достаточно посмотреть на исходную комбинацию поворотов кубика как на функцию, переводящую одно его состояние в другое. Поскольку все повороты можно провести в обратном порядке, каждое состояние однозначно определяет предыдущее. Убедитесь самостоятельно, что при этом разные состояния переходят в разные, после чего примените теорему о периодичности. Оба способа формализации идеи цикличности встречаются часто: стрелки — в теории конечных автоматов, функции — в теории динамических систем.

Мы познакомились только с некоторыми приложениями идеи цикличности, причем с «дискретным» случаем, когда число состояний конечно. Но и в «непрерывном» случае, при бесконечном числе состояний, часто возникает периодичность или, вернее, «почти периодичность», когда состояния повторяются не абсолютно точно, а лишь приближенно. Так, каждое лето и похоже, и непохоже на предыдущее.

Мы закончим статью возвращением к Екклезиасту: «Восходит солнце, и заходит солнце, и спешит к месту своему, где оно восходит. Идет ветер к югу, и переходит к северу, кружится, кружится на ходу своем, и возвращается ветер на круги свои. Все реки текут в море, но море не переполняется; к тому месту, откуда реки текут, они возвращаются, чтобы опять течь... Что было, то и будет; и что делалось, то и будет делаться, и нет ничего нового под солнцем» (гл. 1, ст. 5—7, 9).

Ниже мы приводим олимпиадные задачи, которые объединены идеей цикличности, однако решение каждой требует и других идей.

Задачи

1. На конкурсе по математике в институте МИМИНО предлагалось 20 задач. На закрытие пришло 20 школьников. Каждый из них решил две задачи, причем оказалось, что среди пришедших каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач и все задачи были бы разобраны.

2. Каждый следующий член последовательности есть сумма квадратов цифр предыдущего. Докажите, что последовательность периодична.

3. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков

(Окончание см. на с. 56)

С КАКОЙ СКОРОСТЬЮ РАСТЕТ ЗЕЛЕНЫЙ ЛИСТ?

Доктор физико-математических наук
А. ВЕДЕНОВ,
кандидат физико-математических наук
О. ИВАНОВ

Вы, наверное, обращали внимание весной, как быстро покрывается новой зеленью вспаханное и засеянное поле. Некоторое время оно стоит черное или коричневое, но вот появились маленькие зеленые искры ростков, и прямо на глазах за одну-две недели поле покрывается почти сплошным зеленым ковром (все это происходит, конечно, при условии, что все посеянные семена взошли, земля достаточно влажная и хорошо удобренная и дни стоят солнечные). Интересно, что при таком быстром росте растений в течение довольно больших интервалов времени можно замечать изменение в количестве зелени на поле через небольшие одинаковые промежутки времени, практически каждый день. Не странно ли это? Ведь, казалось бы, делать это должно становиться все труднее — чем больше зелени в поле, тем сложнее заметить изменения в ее количестве.

Попробуем разобраться, при каком законе роста растений возможны такие наблюдения. Определим количество зелени в поле как суммарную площадь листьев растений (мы рассматриваем начало роста, когда листья почти не перекрываются). Будем считать, что эта величина пропорциональна средней текущей площади листьев одного растения (мы предполагаем, что все растения взошли одновременно и находятся в абсолютно одинаковых условиях).

Воспользуемся известным физиологическим законом Вебера — Фехнера. Этот закон говорит, что все органы чувств человека (слух, осязание, зрение) воспринимают изменение внешнего воздействия ΔB (силы звука, давления, яркости света) только тогда, когда относительное изменение $\Delta B/B$ больше определенного порогового значения —

$$\delta = \frac{\Delta B}{B} > \delta_{п},$$

причем $\delta_п$ не зависит от величины внешнего воздействия B.*) Если же $\Delta B/B < \delta_п$, то изменения воздействия человек не воспринимает вообще. Приведем простой пример. Если положить на ладонь груз P_0 массой несколько граммов, а затем начать изменять массу груза, то уверенно сказать, что груз стал больше или меньше, можно только тогда, когда относительное изменение веса груза — $|P-P_0|/P_0$ — достигнет одной трети. В этом примере порог восприятия изменения силы $\delta_п^P$ равен 1/3.

Для зрительного восприятия порог можно определить таким образом. Сделаем набор одинаковых геометрических фигур, например квадратов, разного размера и покажем один квадрат испытуемому. Потом будем показывать ему другие квадраты, немного отличающиеся от первого по размеру. Только тогда, когда относительное изменение длины стороны квадрата $|a-a_0|/a_0$ превысит пороговую величину $\delta_п^a$, испытуемый может ответить, больше или меньше данный квадрат,

*) Закон назван именами немецких ученых прошлого века физиолога и анатома Э. Вебера (1795—1878) и физика (а также психолога, философа и писателя-сатирика) Г. Фехнера (1801—1887). Вебер занимался экспериментальными исследованиями осязательных ощущений и глазомера, а Фехнер обобщил опытные факты, полученые Вебером и другими психологами и физиологами, в единой математической формулировке.

чем исходный. Опыт показывает, что $\delta_{п}^{a} \approx 1/10$.

В наших наблюдениях за количеством зелени в поле мы замечали изменение в количестве зелени через равные промежутки времени (пусть для простоты это будут одни сутки). Отношение изменения количества зелени ΔK_t за этот промежуток времени (за любые сутки) к имеющемуся количеству зелени K_t в эти сутки будет постоянной величиной, равной порогу восприятия изменения количества зелени:

$$\frac{\Delta K_t}{K_t} = \delta_{п}^{K}.$$

Из этого отношения мы можем получить уравнение для скорости изменения количества зелени

$$v_t = \frac{\Delta K_t}{\Delta t} = \frac{\delta_{п}^{K} K_t}{t_{п}} = CK_t \qquad (1)$$

где $C = \delta_{п}^{K}/t_{п}$ — постоянная величина, равная отношению порога восприятия изменения количества зелени ко времени, за которое изменение количества зелени на данном поле достигает порогового (у нас это одни сутки).

Полученное выражение показывает, что скорость роста количества зелени пропорциональна количеству уже имеющейся зелени. (Подобное выражение получается при описании радиоактивного распада ядер. В этом случае скорость распада, т. е. число ядер, распадающихся в единицу времени, пропорциональна числу оставшихся ядер. Но, в отличие от роста растений, для распада ядер в правой части уравнения, аналогичного (1), стоит знак минус, так как количество первоначальных ядер уменьшается со временем.) Во всех случаях, когда скорость изменения какой-либо величины пропорциональна самой величине, зависимость рассматриваемой величины от времени имеет экспоненциальный характер. В нашем случае это означает, что к моменту времени t количество зелени может быть найдено как

$$K_t = K_0 e^{Ct}, \qquad (2)$$

где K_0 — начальная величина количества зелени при $t=0$, а $e = 2{,}718$.

Чтобы показать, как из уравнения (1) получается экспоненциальная зависимость от времени (2), можно провести следующие нестрогие рассуждения. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ величина количества зелени равна K_0, и нас интересует значение K_t через время t. Разобьем временной интервал $0 - t$ на N равных промежутков времени длительностью τ ($\tau = t/N$) и будем фиксировать количество зелени в моменты времени $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$ и т. д.

Через время τ после начального момента $t_0 = 0$ количество зелени можно найти как

$$K_1 = K_0 + \Delta K_0 = K_0 + v_0\tau = \\ = K_0 + K_0 C\tau = K_0(1 + C\tau)$$

(на этом интервале времени мы приняли скорость роста постоянной и равной (см. (1)) $v_0 = CK_0$); аналогично, через время 2τ

$$K_2 = K_1 + \Delta K_1 = K_1 + v_1\tau = \\ = K_1 + CK_1\tau = K_1(1 + C\tau) = K_0(1 + C\tau)^2$$

(скорость роста постоянна и равна $v_1 = CK_1$). Интересующее нас значение K_t через время $t = N\tau$ можно найти как

$$K_t = K_N = K_0(1 + C\tau)^N = K_0\left(1 + \frac{Ct}{N}\right)^N = \\ = K_0\left(1 + \frac{1}{M}\right)^{MCt} = K_0\left(\left(1 + \frac{1}{M}\right)^M\right)^{Ct},$$

где мы ввели обозначение $M = Ct/N$ (M — безразмерная величина).

Понятно, что значение K_t будет тем точнее, чем чаще мы будем проводить промежуточные вычисления, т. е. чем больше будет N (ведь скорость роста

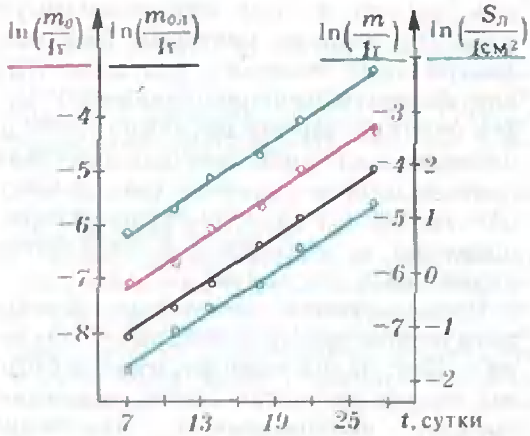


Рис. 1.

непрерывно меняется во времени, и чем меньше τ, тем ближе подставляемые нами значения v_0, v_1, ... к действительным значениям скорости). Если бесконечно увеличивать N (т. е. бесконечно уменьшать интервал времени τ), то и M будет стремиться к бесконечности, а величина $\left(1+\frac{1}{M}\right)^M$ при $M\to\infty$ стремится к постоянной, приблизительно равной 2,7182828 (например, $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2{,}7048$; $(1+0{,}001)^{1000}=2{,}7169$). Число 2,7182828... в математике обозначают e.

Таким образом, мы показали, что на начальной стадии рост растений в течение некоторого периода времени происходит по экспоненциальному закону. Экспериментальные исследования подтверждают, что при постоянных внешних условиях (постоянная освещенность, температура, влажность воздуха, регулярный полив, хорошо приготовленная почва) вес и размер всего растения и отдельных его частей на начальной стадии роста меняются экспоненциально во времени. На рисунке 1 приведены результаты опытов по выращиванию пшеницы в водном растворе питательных веществ. На этом графике масштаб по оси абсцисс линейный, а по оси ординат — логарифмический, т. е. на горизонтальной оси на равных расстояниях нанесены дни, прошедшие с начала роста, а на вертикальной оси нанесены не значения измерявшихся величин, а логарифмы этих значений.

Использование логарифмического масштаба в тех случаях, когда зависимость величин от аргумента близка к экспоненциальной $y=Ae^{Cx}$, приводит к тому, что график принимает вид прямой линии. Действительно, откладываемая на графике по оси ординат величина $\ln y$ является линейной функцией аргумента x —

$$\ln y=\ln A+Cx,$$

а график линейной функции — прямая линия. По этому графику легко определить константу C — она равна отношению приращения $\Delta(\ln y)$ к приращению аргумента Δx.

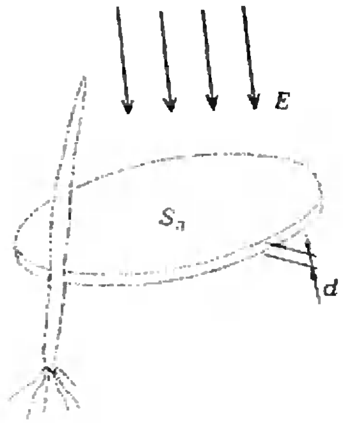


Рис. 2.

Итак, из рисунка 1 видно, что начиная с седьмого дня после появления всходов на протяжении трех недель общий вес растения m, сухой вес растения m_0 (т. е. вес органического вещества, остающегося после высушивания), сухой вес листьев $m_{0л}$, площадь листьев $S_л$ меняются экспоненциально со временем. В природе экспоненциальный рост является распространенным явлением. Примером может служить рост числа бактерий или одноклеточных организмов в сосуде при достаточном питании. В этом случае экспоненциальный рост имеет простое объяснение. Бактерия или отдельная клетка делятся на две через определенное время τ. Поэтому их число меняется со временем следующим образом: $n_t=n_0\cdot 2^{t/\tau}=n_0e^{Ct}$, где $C=\frac{\ln 2}{\tau}$.

Давайте найдем физическое объяснение экспоненциального роста растений и определим константу C скорости роста из законов сохранения вещества и энергии. Сначала надо построить модель растения, близкую к действительности и удобную для наших исследований. Задача выбора модели всегда возникает при физическом описании окружающих нас явлений. Модель должна выделять основные черты предмета или явления, которых достаточно для описания интересующих нас процессов. Возьмем такую модель растения. Будем считать, что оно состоит из одного листа (площадь которого равна площади всех его листьев), стебля и корня (рис. 2) и отношение полной массы к сухой массе как для всего растения, так и для отдельных его частей — величина постоянная:

$$\frac{m}{m_0}=\frac{m_л}{m_{0л}}=\alpha$$

($m_л$, $m_{0л}$ — полная и сухая масса листа). Кроме того, будем считать постоянными величинами толщину листа d и отношение сухой массы листа к сухой массе всего растения:

$$\frac{m_{0л}}{m_0}=\varepsilon.$$

(Такие предположения можно сделать из количественных наблюдений на стадии экспоненциального роста травянистых растений. Конечно, такую модель нельзя использовать для описания роста других растений. Например, у деревьев отношение массы листьев к массе всего растения — величина переменная.)

Из курса биологии вы знаете, что растение увеличивает свою массу благодаря процессу фотосинтеза — образованию органических веществ из углекислого газа, содержащегося в воздухе, и воды, содержащейся в растении при поглощении листьями растения световой энергии. Количество образующегося сухого органического вещества Δm_0 пропорционально поглощенной световой энергии ΔE:

$$\Delta m_0=\gamma\cdot\Delta E. \qquad (3)$$

Если интенсивность светового потока I (световая энергия, падающая на единицу площади в единицу времени) постоянная, то

$$\Delta E=IS_л\cdot\Delta t. \qquad (4)$$

Пользуясь нашей моделью растения, выразим площадь листа через сухую массу растения m_0. Площадь листа равна объему листа, деленному на его толщину,— $S_л=V_л/d$. Объем находим через сырую массу листа и его плотность — $V_л=m_л/\rho$ ($\rho\approx1$ г/см^3), а сырой вес листа выражаем через m_0 с помощью формул для коэффициентов α и ε: $m_л=\alpha\varepsilon m_0$. В результате получаем:

$$S_л=\frac{m_0\varepsilon\alpha}{\rho\alpha}. \qquad (5)$$

Теперь, объединяя выражения (3)—(5), запишем уравнение для скорости изменения количества сухого органического вещества:

$$\frac{\Delta m_0}{\Delta t}=\frac{\gamma\varepsilon\alpha I}{\rho d}m_0.$$

Следовательно, масса сухого вещества меняется со временем как

$$m_{0t}=m_0e^{\gamma\varepsilon\alpha I/\rho d},$$

и константа скорости роста равна

$$C=\frac{\gamma\varepsilon\alpha I}{\rho d}. \qquad (6)$$

Итак, константа скорости роста пропорциональна интенсивности падающего на растение света и зависит от параметров α, ε, d и γ. Для пшеницы α, ε и d можно определить с помощью графика на рисунке 1, взяв значение m, m_0, $m_{0л}$ и $S_л$ для какого-то дня. Например, на 13-й день $m=0{,}026$ г, $m_0=0{,}0043$ г, $m_{0л}=0{,}0021$ г, $S_л=1$ см^2 (эти значения мы вычислили с помощью калькулятора), и

$$\alpha=\frac{m}{m_0}=6,\ \varepsilon=\frac{m_{0л}}{m_0}=0{,}48,$$

а толщину листа определим с помощью этих же величин из отношения объема листа $V_л=m_{0л}\alpha/\rho$ к его площади:

$$d=\frac{m_{0л}\alpha}{\rho S_л}=0{,}012\text{ см}.$$

Величина «фотосинтетического эквивалента» света γ определяет, на сколько увеличивается сухая масса растения при поглощении определенного количества световой энергии. Чтобы лучше понять смысл этой величины, выведем ее, рассматривая энергетику процессов, происходящих в растительной клетке.

Суммарно процесс фотосинтеза может быть представлен в виде уравнения

$$H_2O+CO_2\xrightarrow{\text{свет}}(CH_2O)+O_2.$$

В левой части уравнения — знакомые вам молекулы воды и углекислого газа, а в правой — молекула кислорода и минимальная структурная группа углеводов CH_2O, которая получается при «усвоении» одной молекулы углекислого газа. Молекула фруктового сахара — фруктоза $C_6H_{12}O_6$ —

состоит из 6 таких групп ($C_6H_{12}O_6 = 6(CH_2O)$), а молекула обычного сахара — сахароза $C_{12}H_{24}O_{12}$ — из 12. *Слово «свет»* над стрелкой означает, что для того, чтобы такое превращение веществ могло произойти, необходимо поглощение световой энергии.

В написанном уравнении представлены только начальные и конечные продукты. А весь процесс фотосинтеза включает в себя много промежуточных веществ и реакций. В растительной клетке, точнее в расположенных внутри нее хлоропластах, работают настоящие молекулярные заводы, станки которых — белковые молекулы (ферменты) — могут, используя энергию света, вырабатывать электроэнергию, осуществлять электролиз, перераспределять атомы и группы атомов в молекулах.

Свет в хлоропластах поглощают молекулы хлорофилла. При поглощении молекулой одного фотона один из электронов молекулы переходит на более высокий энергетический уровень. В конечном итоге энергия этих возбужденных электронов идет на работу по переносу заряда по электрической цепи, составленной в основном из белковых молекул. (Молекулы хлорофилла и связанные с ними белки играют роль фотоэлементов клетки.) Текущий по цепи ток осуществляет электролиз ионов, образующихся при диссоциации молекул воды (OH^- и H^+), и ионов вещества, которое является переносчиком атомов водорода от молекул воды к молекуле углекислого газа.

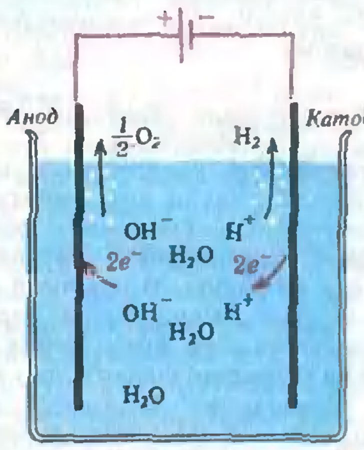


Рис. 3.

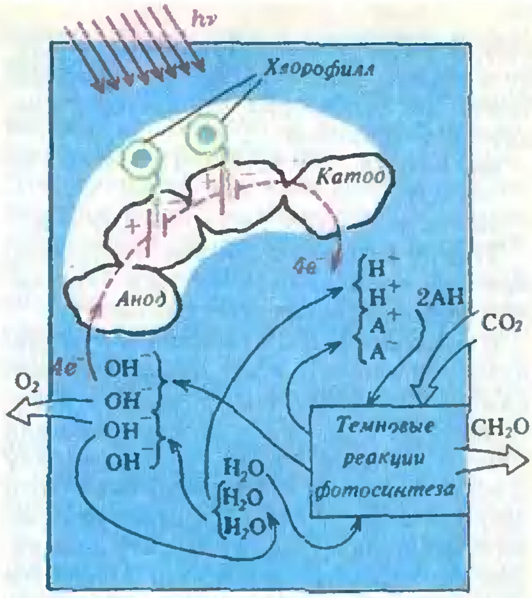


Рис. 4.

Молекулу этого вещества-переносчика и ее ион будем обозначать соответственно A и A^+.

Этот электролиз можно сравнить с электролизом чистой воды, в котором на катоде образуется водород, а на аноде — кислород. Правда, в случае электролиза чистой воды и в обычном электролизе других электролитов источник ЭДС и подводящие провода цепи находятся снаружи, вне электролита, а в электролит погружены только электроды (рис. 3). В клетке же вся цепь электролиза погружена в электролит — заполняющий клетку раствор ионов (рис. 4). Ее можно представить себе как трубку, внутри которой находятся изолированные от электролита источники ЭДС — соединенные с белками молекулы хлорофилла (клеточные фотоэлементы) и подводящие провода — белки и другие органические молекулы. На краях трубки в контакте с электролитом находятся электроды — также органические молекулы. Для совершения работы по переносу одного электрона по всей цепи электролиза требуется энергия двух возбужденных молекул хлорофилла, поэтому необходимое для электролиза напряжение на электродах создается двумя включенными последовательно клеточными фотоэлементами. На электродах происходят следующие процессы:

на катоде — $2H^+ + 2A^+ + 4e^- = 2AH$,

на аноде — $4OH^- = O_2 + 2H_2O + 4e^-$.

Теперь можно подсчитать, сколько квантов света требуется для получения одной углеводной группы.

По уравнению фотосинтеза к молекуле углекислого газа нужно присоединить 2 атома водорода. Следовательно, для проведения превращения нужно подвергнуть электролизу 2 иона A^+. Для этого надо перенести по цепи 4 электрона, а для этого нужно 8 фотонов. (Напомним, что для переноса каждого электрона требуется возбуждение двух молекул хлорофилла.) Энергия каждого фотона должна быть больше, чем 1,8 эВ — такова минимальная энергия, необходимая для возбуждения молекулы хлорофилла. Ток электролиза, происходящего под действием света в зеленых листьях, имеет значительную величину. При полной интенсивности солнечного света 400 Вт/м^2 суммарный ток электролиза во всех хлоропластах всех клеток одного квадратного сантиметра листа составляет примерно 0,005 А. Значит, в листочке площадью 30 см^2 течет ток 0,15 А, как в лампочке карманного фонаря. Правда, пока не изобретен способ для непосредственного использования этого тока.

На следующей стадии фотосинтеза — она называется темновой, потому что для нее не требуется энергия света,— атомы водорода от AH *переносятся к молекуле углекислого газа* и образуются углеводы, а молекула-переносчик в виде иона A^+ опять готова к электролизу.

Обычно растение освещается не монохроматическим светом. Та часть светового излучения, которая представлена квантами, способными возбуждать хлорофилл, называется фотосинтетической активной радиацией (ФАР). Эффективность возбуждения молекул хлорофилла зависит от энергии квантов. На рисунке 5 показаны распределение фотонов по энергиям в

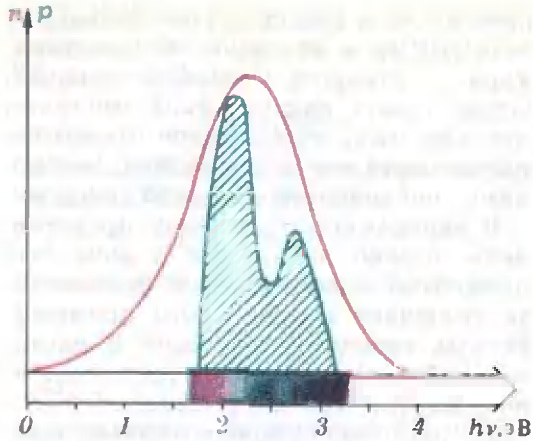


Рис. 5.

потоке солнечного излучения (красная кривая $n(h\nu)$) и кривая эффективности возбуждения молекул хлорофилла в зависимости от энергии квантов (зеленая кривая $p(h\nu)$). С помощью этих кривых можно рассчитать среднюю энергию кванта ФАР в солнечном свете; она равна $\sim$2,1 эВ. А полная энергия ФАР составляет примерно *половину всей энергии падающего на* Землю солнечного излучения. (Заметим, что у разных источников света доля ФАР в общей излучаемой энергии разная.)

Теперь по уравнению (3) определим фотосинтетический эквивалент для ФАР. Для увеличения количества углеводов на один моль ($\Delta m_0 = \mu_{CH_2O} \times$ $\times$ моль) требуется $8 \cdot N_A$ квантов излучения со средней энергией $h\nu_Ф$, т. е. $\Delta E = 8h\nu_Ф N_A$ (N_A — число Авогадро); поэтому

$$\gamma = \frac{\mu_{CH_2O} \cdot 1\ \text{моль}}{8h\nu_Ф N_A} = 18\ \text{г/МДж}.$$

Рассчитанная величина γ может наблюдаться только при особых экспериментальных условиях, когда в атмосфере, окружающей растение, отсутствует кислород. В обычной атмосфере часть промежуточных продуктов в цепи реакций фотосинтеза окисляется кислородом воздуха, что уменьшает образование углеводов вдвое. Этот процесс называется фотодыханием. Примерно 30 % синтезированных углеводов в дальнейшем используется растением как источник энергии при синтезе необходимых для роста веществ и в других процессах. Из-за этого γ обычно меньше максимального значения по крайней мере в три раза. Мы будем считать, что $\gamma = 6$ г/МДж.

Теперь мы знаем все необходимое, чтобы вычислить константу скорости роста C. В опытах, результаты которых приведены на рисунке 1, интенсивность ФАР, создаваемой при искусственном освещении, составляла $\Gamma = 30$ Вт/м^2. Каждые сутки растения освещались в течение 16 часов, а затем 8 часов находились в темноте. При этом средняя суточная интенсивность была $\bar{I} = 1{,}7$ МДж/(м$^2\cdot$сут). Подставляя численные значения всех величин в формулу (6), получаем, что $C = 0{,}21$ сут$^{-1}$. На рисунке 6 приведена зависимость C от интенсивности ФАР, полученная экспериментальным путем. Как видим, вычисленное нами значение C хорошо совпадает с данными эксперимента.

В ясный весенний день интенсивность ФАР в полдень достигает 200 Вт/м^2, а средняя суточная интенсивность $\bar{I} \approx 3{,}5$ МДж/(м$^2\cdot$сут). Согласно формуле (6) константа скорости роста при таких условиях должна быть в 2 раза больше. Но при более высоких интенсивностях света уменьшается ε, так как относительный вес корней возрастает — нужно обеспечивать возросшую потребность растений в минеральных солях; поэтому C увеличивается с ростом I не линейно, а медленнее, и при $I = 3{,}5$ МДж/(м$^2\cdot$сут) составляет 0,3 сут$^{-1}$.

Из проведенных нами расчетов следует, что в идеальных условиях растение каждый день (каждые сутки) может увеличиваться в размерах в $e^{0{,}3} = 1\frac{1}{3}$ раза, т. е. на 1/3, а такое изменение легко заметить на глаз. Если растение растет в менее благоприятных условиях и, например, $C = 0{,}1$ сут$^{-1}$, то заметное изменение будет происходить через двое суток ($e^{0{,}1\cdot 2} = 1{,}24$), т. е. действительно возможные скорости роста позволяют замечать изменение в размерах растения практически каждый день.

Мы рассматривали такой период роста растений, когда поступление веществ идет только за счет фотосинтеза. При прорастании, когда используется энергия, запасенная в семени, и при росте новых листьев, когда к растущему листу поступают продукты фотосинтеза от других листьев, скорость роста может быть больше, чем та, которая получается из наших расчетов.

Решенная нами задача о нахождении константы скорости роста растения — это простой пример задач, решаемых агрофизикой. Агрофизика — довольно молодая наука, находящаяся на стыке физики атмосферы и физики почвы, биофизики и физиологии растений, прикладной математики. Она решает задачи по описанию роста и развития отдельных растений и целых посевов, о влиянии на них внешних физических условий — интенсивности света, температуры, влажности почвы и воздуха, скорости ветра.

Задачи эти сложные и содержат в себе несколько самостоятельных задач. Одна из них — создание модели растения более точной, чем та, что мы рассмотрели. Модель должна описывать те характерные особенности взаимодействия растения с окружающей средой, которые требуется изучить. Например, если бы мы хотели узнать, как будет расти наше растение в посеве, когда на каждое растение приходится площадь S_0, то нашу модель пришлось бы дополнить зависимостью

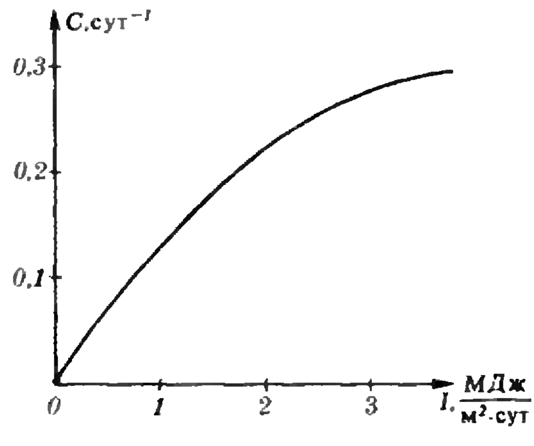


Рис. 6.

эффективной площади поглощения света листьями $S_{эф}$ от стадии развития растения. Эта эффективная площадь должна входить вместо площади листьев в формулу (4), когда листья начнут перекрываться, т. е. когда площадь листьев будет сравнима с S_0. Эту зависимость можно взять, например, в виде $S_{эф}=S_л/(1+S_л/S_0)$. Такая формула хорошо описывает изменение эффективной поглощающей площади растения с увеличением площади листьев. Действительно, если $S_л \ll S_0$, то дробь в знаменателе формулы мала, и $S_{эф} \approx S_л$, как и должно быть, когда листья не перекрываются. Когда $S_л \gg S_0$, в знаменателе можно пренебречь единицей, и тогда $S_{эф} \approx S_0$. В более сложных моделях учитывают зависимость введенных нами параметров a, ε, d, γ от внешних условий, от стадии развития растения, от других параметров.

Другие задачи связаны с описанием процессов, влияющих на рост растений,— например, диффузии углекислого газа и водяного пара в приземном слое атмосферы и в пространстве между листьями, течения воды и растворов питательных веществ в пористой почве. Цель агрофизических исследований — научиться «исправлять» внешние физические параметры среды обитания растения так, чтобы растение всегда находилось в оптимальных для своего роста условиях. Сейчас уже существуют экспериментальные поля, на которых на основе моделей развития растения и его взаимодействия с окружающей средой производят полив и подкормку посевов по показаниям установленных в поле датчиков.

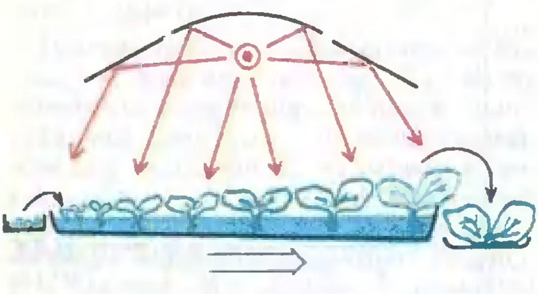


Рис. 7.

Зная об экспоненциальном росте растений, вы можете решить одну агрофизическую задачу. Но сначала познакомимся с конвейерным методом выращивания растений.

На некоторых судах и полярных метеостанциях сейчас применяются установки конвейерного выращивания зелени для экипажей, которые имеют запоминающееся название «Самород — Арктика». Установки эти устроены просто. В ванне размером 0,5×1,5 м автоматически поддерживается постоянный уровень раствора необходимых для роста растений веществ. Над ванной под зеркальным отражателем расположена мощная электрическая лампа. Вдоль ванны в пластмассовых кассетах перемещаются выращиваемые растения, корни которых слегка касаются питательных веществ. Кассеты «заряжаются» семенами и устанавливаются на один край ванны. По мере развития растений их перемещают к другому краю ванны, постепенно раздвигая таким образом, чтобы листья растений все время образовывали сплошной зеленый покров, но сильно не перекрывались (рис. 7). Такой конвейер с раздвигающимися кассетами обладает двумя достоинствами. Во-первых, свет не теряется напрасно, так как он падает только на листья растений. Во-вторых, осуществляется непрерывное производство зелени.

Применение больших конвейеров (а в лаборатории уже испытываются конвейеры длиной 10, 20 и более метров), конечно, требует автоматизации перемещения кассет. А за маленьким полем «Саморода», скажем на судне, следит кок. Он заряжает кассеты, передвигает их нужным образом и собирает урожай.

Имея модель, которая хорошо описывает рост растения в зависимости от внешних условий (и характеристик самого растения), можно получить закон перемещения кассеты вдоль конвейера $l=l(t)$, при котором между листьями нет промежутков, и определить время между установкой кассет τ. Вот эту агрофизическую задачу мы и предлагаем вам решить самостоятельно.

ПЯТНО ПУАССОНА И ШЕРЛОК ХОЛМС

(из новых рассказов о знаменитом сыщике)

В. ВАЙНИН,
кандидат физико-математических наук
Г. ГОРЕЛИК

Доктор Уотсон, на правах друга ворвавшийся без доклада, застал Холмса играющим на *скрипке*. Уот-

сон нетерпеливо кашлянул. Знаменитый сыщик слегка поморщился.

— Как поживаете, Холмс? — не выдержал Уотсон.

Холмс вздохнул и опустил смычок:

— Скверно, доктор. Замучили посетители...

— Посетители? — рассеянно переспросил Уотсон и тут же с жаром воскликнул: — Должен вам сообщить, Холмс, жизнь полна удивительных совпадений!

— Не могу с вами не согласиться.— Холмс искоса посмотрел на друга.— Всякий раз, когда я беру в руки скрипку, приходите вы и начинаете кашлять. Поразительное совпадение!

— Да что вы! — отмахнулся Уотсон.— Мой случай гораздо интересней! Только вчера вечером я вернулся из-за океана...

— ...где блестяще распутали замысловатое преступление,— невозмутимо продолжил Холмс.

— А вы полагаете, что это совершенно невозможно? — спросил несколько обескураженно Уотсон, опускаясь в кресло.

— Ну что вы! Я уверен, что ваша история весьма занимательна.

— О да! — воспрянул духом Уотсон.— Думаю, что даже вам она покажется любопытной.

— Надеюсь,— Холмс пошуровал кочергой в камине и, устроившись в кресле, принялся набивать трубку.

— Как вы знаете, недавно меня пригласили в Лос-Анджелес, на Всемирный конгресс по судебной медицине,— начал свой рассказ доктор.— Я провел там с неделю и каждый день обедал в одном и том же ресторанчике. Там собиралась довольно занятная публика, наблюдать за которой — одно удовольствие, особенно для судебного врача и криминалиста. И вот однажды я стал свидетелем такой сценки.

Трое подвыпивших парней решили, видимо, поразвлечься. По-своему, конечно, по-американски: к огромной колонне, около трех футов в диаметре, они прилепили с помощью жевательной резинки серебряный доллар, вытащили свои кольты и начали соревноваться в меткости. А за колонной какая-то парочка невозмутимо потягивала коктейль. Лица девушки я не видел — она сидела ко мне спиной, но обратил внимание на ее удивительно красивые иссиня-черные волосы. Для парочки такие переделки были, наверное, не в диковинку, да и чувствовали они себя за колонной как за крепостной стеной. А поскольку публика не обращала особого внимания на пальбу, то и мне пришлось делать вид, будто ничего особенного не происходит. Но вдруг брюнетка за колонной вскрикнула и стала сползать под столик; ее белое платье было в крови. Как из-под земли появились полицейские, схватили парней, а я поспешил на помощь пострадавшей. К счастью, она оказалась всего лишь в обмороке: пуля разбила ее бокал, содержимое которого и приняли сначала за кровь. А когда девица — некая мисс Крэзифил — очнулась, выяснилось, что один из стрелявших парней — Том Найс — был отвергнутым ее поклонником.

— Простите, Уотсон,— Холмс подбросил полено в угасающий камин и сунул в трубку раскаленный уголек,— так в чем же, собственно, сложность этого... происшествия?

— Как? Вы еще можете об этом спрашивать? — изумился доктор.— Ведь полиция совершенно растерялась, и если бы не я... Парни, развлекавшиеся стрельбой в доллар, единодушно утверждали, что и понятия не имели, кто находится за колонной. При этом они особенно напирали на то обстоятельство, что при всем желании не могли подстрелить эту пташку, даже рикошетом. И если бы не я, полиция отпустила бы с миром всю эту бандитскую компанию...

— Так к какому же выводу вы пришли, дорогой доктор? — полюбопытствовал Холмс.

— Дорогой Холмс! — торжественно произнес доктор.— Я отдаю должное вашему проницательному уму, вашим познаниям в химии и криминалистике. Но есть одна область знания, которой вы почему-то не уделили должного внимания. Это физика. И я, признаться, давно ею увлекаюсь.

— Вот как? — Холмс попытался выразить на своем лице удивление.

— Ну... если говорить точнее, я занимаюсь историей физики, которая требует меньших математических познаний, а увлекает, пожалуй, еще более, чем сама физика... Да! На чем я остановился? Так вот, полиция уже совсем было собралась отпустить Тома Найса и его дружков, как вдруг я вспомнил о пятне Пуассона, и это сразу же позволило предъявить задержанным обвинение в покушении на убийство!

— А где же, доктор, «удивительные совпадения», которыми так «полна жизнь»?

— Ну разве не удивительно то, что как раз накануне вечером я закончил читать книгу по истории оптики, в которой, в частности, подробно рассказывалось о пятне Пуассона?!

— Напомните, пожалуйста, и мне,— попросил знаменитый сыщик,— что это за пятно.

— Как, вы не знаете? — изумился Уотсон.

— Дорогой друг,— улыбнулся Холмс,— вы уже не раз объясняли мне довольно простые вещи. Будьте же снисходительны и сегодня!

Доктор Уотсон прокашлялся.

— Еще в те далекие времена, когда в физике безраздельно господствовала корпускулярная теория света, Френель выдвинул волновую гипотезу. Великий Пуассон, ознакомившись с этой работой, запротестовал: «Если дело обстоит так, как утверждает месье Френель,— заявил он,— то в центре тени, которую отбрасывает на экран непрозрачный диск, должно находиться светлое пятно. Как вы понимаете, господа, это абсурд!» Однако поставили эксперимент. И что же выяснилось? В центре тени оказалось светлое пятнышко! По иронии судьбы оно было названо пятном Пуассона.

— Занятно,— сказал Холмс.— Я и не знал, что эта штука так называется. Но какое, собственно, отношение имеет этот феномен к делу, о котором вы рассказываете?

Польщенный доктор снисходительно улыбнулся:

— Вам следовало бы знать, дорогой Холмс, что согласно законам квантовой механики не только свет, но и каждое материальное тело в какой-то степени обладает волновыми свойствами. Следовательно, даже пули подвластны эффекту Пуассона. И преступнику это было известно — он сознался, что читал научно-популярные книжки. Стреляя в колонну, Том Найс рассчитывал попасть в центр «тени» и прикончить коварную мисс Крэзифил, имея, в то же время, бесспорное алиби. Он нисколько не сомневался, что собьет невежественных полицейских с толку. И это ему удалось бы, если бы не ваш покорный слуга...

— Ловко, Уотсон. Однако,— вздохнул Холмс,— ваша версия грешит чрезмерной стройностью.

—???

— Вот вы утверждаете, например, что даже пули подвластны эффекту Пуассона. Неплохо сказано. Для поэта. Но не для криминалиста. Давайте прикинем, какова власть этого эффекта над пулями...

Холмс на мгновенье задумался. Доктор недоуменно смотрел на него.

— Ну вот, Уотсон,— проговорил Холмс,— так я и думал, приблизительно десять в минус тридцать четвертой степени.

— Ради бога, Холмс! — голос доктора дрогнул.— Что это значит?

— Это значит, во-первых, что эрудиция в области истории физики без знания самой физики вряд ли принесет вам мировую славу, а во-вторых, для того чтобы, как вы говорите, прикончить свою неверную возлюбленную, бравому парню понадобилось бы палить в колонну без отдыха на протяжение десяти... э... в двадцать седьмой степени лет. То есть в миллиарды миллиардов раз дольше, чем существует наша Вселенная. Полагаю, что за это время он наверняка придумал бы что-нибудь поостроумней. Да и бедная колонна рухнула бы за это время от усталости.

— Холмс, умоляю!.. Откуда вы взяли эти фантастические числа? Миллиарды миллиардов...

— В том-то и дело, дорогой доктор, что физика уже несколько сотен лет как стала количественной наукой. Это во времена Аристотеля можно было слыть знатоком физики, употребляя лишь слова, а не числа. Теперь о пятне Пуассона. Действительно, по корпускулярной теории света тень от круглого непрозрачного предмета — идеальный круг идеально черного цвета. Правильно и то, что согласно волновой теории тень из-за дифракции может быть «испорчена» светлым пятнышком в центре. Светло должно быть всюду на экране, куда световые волны, идущие по разным путям, приходят в фазе. Центр тени — как раз такое место. Но каков размер этого светлого пятнышка? Нетрудно убедиться, что он пропорционален длине волны. А для пули длина волны Де Бройля — которую вы, вероятно, имели в виду, упомянув о волновых свойствах пуль,— ничтожна. Ибо она равна чрезвычайно малой константе Планка, деленной на вполне ощутимые величины массы пули и ее скорости. Так что пятно Пуассона для пуль (если, конечно, не говорить о когерентности источника «пулевых волн») тоже чрезвычайно мало. Соответственно ничтожна и вероятность попадания пули в центр тени. Если подставить надлежащие численные значения величин, нетрудно получить количественный ответ, который вам и показался фантастическим.

— Хм... Вероятность мала, но все же... все же не равна нулю! А ведь убийце могло и просто повезти?! — в отчаянии воскликнул Уотсон.

— Теоретически не исключено. Однако наша Вселенная слишком молода, чтобы хоть раз обеспечить подобное везенье,— невозмутимо заметил Холмс.

— А как же бокал? — все еще не сдавался доктор.

Холмс неторопливо поднялся с кресла, положил трубку на каминную полку и снова взял в руки скрипку.

— Готов побиться об заклад,— улыбнулся он,— что среди посетителей ресторана находилась еще одна девица — назовем ее, скажем, мисс Мэдлав. Она сгорала от ревности. И, судя по всему, именно мисс Крэзифил стояла на ее пути...

— Я все понял! — воскликнул доктор Уотсон.— Мисс Мэдлав, которой колонна отнюдь не мешала, под шум чужой пальбы незаметно выстрелила в соперницу. Не так ли?

Вздохнув, Шерлок Холмс прижал подбородком скрипку.

— К счастью, она промахнулась, и благодаря общей суматохе ей удалось скрыться,— воодушевленно продолжал доктор.

В ответ ему зазвучала прелюдия си-бемоль минор с ее переплетением двух тем. Доктору Уотсону вдруг почудилось, что высоким чистым голосом наука воспевает свою историю, а та мудро и бережно задает ей вопросы...

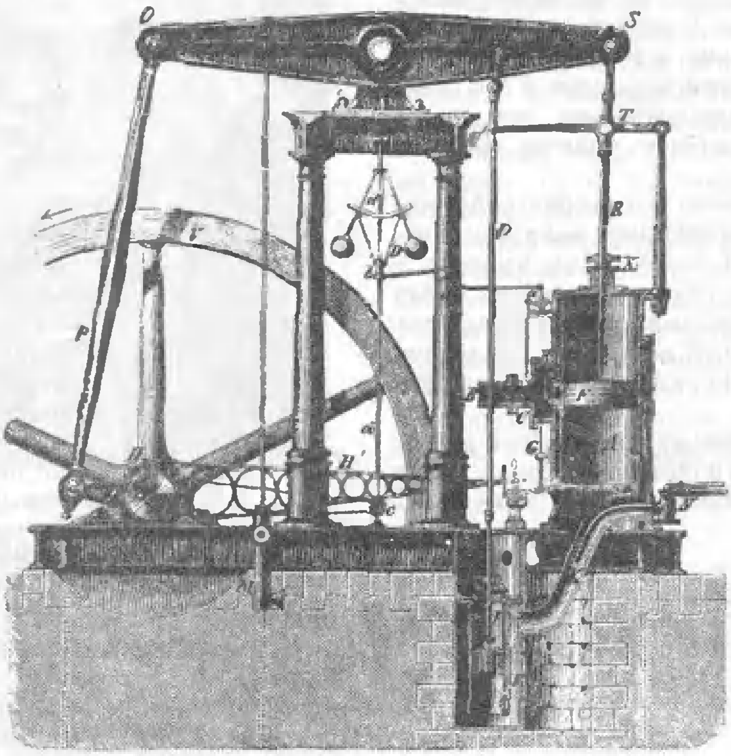
Дорогие читатели!

Напоминаем вам, что журнал «Квант» распространяется только по подписке. Подписка принимается без ограничений во всех агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи.

Подписаться на наш журнал можно начиная с любого номера, но оформить подписку нужно до первого числа предподписного месяца. Индекс «Кванта» в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 45 копеек.

ИНВЕРСОРЫ

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ



С изобретением паровой машины и паровых насосов начала бурно развиваться теория *шарнирных механизмов* — систем, составленных из твердых звеньев, соединенных между собой шарнирами и предназначенных для преобразования движения одного или нескольких звеньев в требуемые движения других звеньев. Около ста лет развитие теории шарнирных механизмов определялось стремлением наиболее удовлетворительным образом решить задачу, с которой столкнулся английский механик Джеймс Уатт при усовершенствовании паровой машины.

Уатт задумал устроить паровую машину следующим образом (рис. 1). В паровой цилиндр AB он поместил поршень, который двигался внутри цилиндра взад и вперед. От поршня шел поршневый шток CD, проходящий сквозь крышку цилиндра. Так как поршневой шток составлял с цилиндром единое целое, то головка D поршневого штока совершала *прямолинейное* движение взад и вперед. На колонку HK при помощи шарнирного соединения K было насажено коромысло EF, с которым посредством шарнира F был соединен шатун FM,

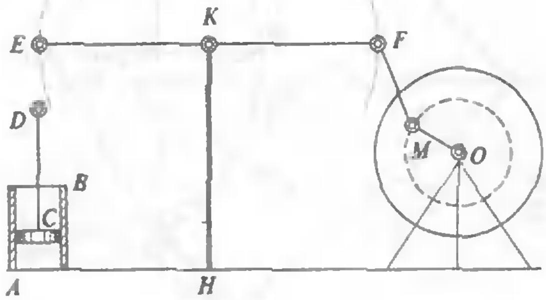


Рис. 1.

соединенный, в свою очередь, шарниром M с кривошипом OM. На кривошип OM насаживался маховик.

Если бы можно было соединить головку D поршневого штока с коромыслом EF, то движение поршня преобразовывалось бы во вращение маховика. Но точка D совершает прямолинейное движение, а точка E описывает дугу окружности радиусом KE с центром в K. Следовательно, соединить точки D и E жестко нельзя: машина сломается.

Таким образом, возникла проблема: создать спрямляющий механизм, который вел бы точку D по прямой, а точку E — по дуге окружности. Уатт решил ее, придумав шарнирный механизм, который вел точку D по кривой, очень мало уклоняющейся от прямой.

Впоследствии многие ученые разрабатывали устройства, которые вели точку D с меньшим, чем в механизме

Рис. 4.

Уатта, уклонением от прямой, и лишь в 60-е годы XIX столетия был изобретен способ точного ведения точки D по прямой.

Рис. 5.

Простой спрямляющий механизм Уатта

Уатт рассуждал следующим образом. Рассмотрим два коромысла AO и BO', вращающихся вокруг неподвижных центров O и O'. Если шарнирно соединить концы A и B коромысел AO и BO' отрезком AB — Уатт называл его серьгой,— то какая-нибудь точка серьги будет совершать движение, мало уклоняющееся от прямолинейного (рис. 2). Для определения наиболее подходящих для этой цели положения неподвижного центра O' и длины коромысла BO' рассмотрим три положения коромысла OA (рис. 3): среднее OA и два крайних OA' и OA'' и потребуем, чтобы при этих трех положениях коромысла точка m серьги находилась на некоторой прямой MN. За такую прямую Уатт принял перпендикуляр к среднему положению коромысла OA, проходящий через середину стрелки SA (стрелкой называется часть радиуса, перпендикулярного к хорде $A'A''$, заключенная между хордой и дугой).

Возьмем серьгу ab определенной длины и выберем на ней точку m (рис. 4). Описав радиусом am дуги из точек A', A и A'', получим три положения точки m серьги на пересечениях m', m и m'' этих дуг с прямой MN (рис. 3). Продолжая прямые $A'm'$, Am и $A''m''$ и откладывая на их продолжениях отрезки, равные mb, мы получим три положения B', B

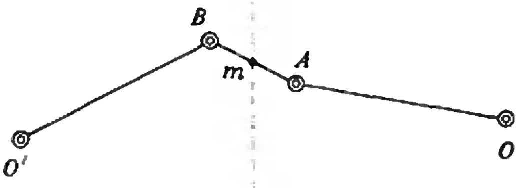


Рис. 2.

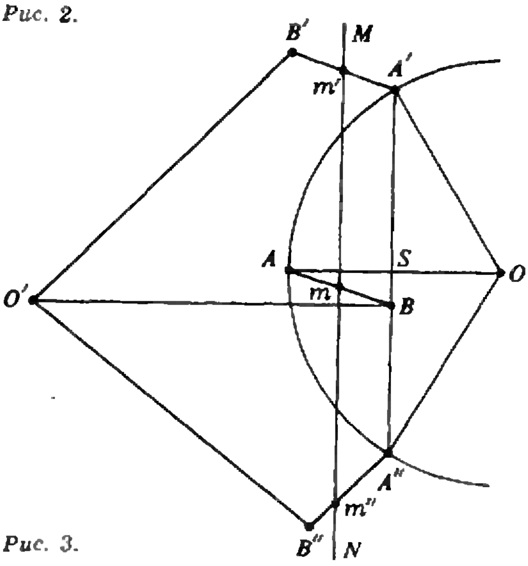
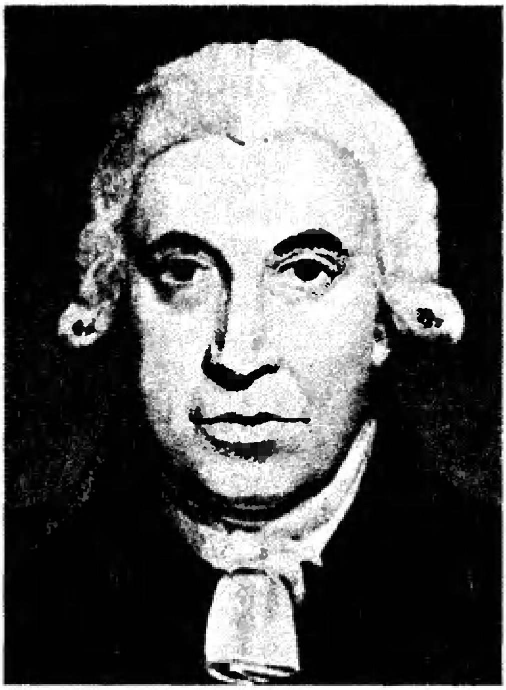


Рис. 3.



Джеймс Уатт (1736—1819).

и B'' конца серьги, или, что то же самое, конца коромысла BO'. Тремя точками полностью определяется проходящая через них окружность. Для определения центра O' этой окружности восстановим к прямым $B'B$ и BB'' в их серединах перпендикуляры, на пересечении которых и будет лежать искомый центр O'. Раз известно положение центра O', то определилась и длина коромысла BO': она равна $BO' = B'O' = B''O'$.

Теперь, если мы соединим шарниром конец B серьги с концом B коромысла, насаженного на шарнир O', то можем быть уверены, что при среднем и двух крайних положениях коромысла OA, точка m серьги окажется на прямой MN.

Уатт надеялся, что при переходе от m' к m'' точка m серьги мало отклонится от прямой. Надежда эта оправдалась: оказалось, что траектория $m'm''$ точки m весьма хорошо приближается прямой. Можно показать, что точка m в механизме Уатта движется по кривой шестого порядка, имеющей вид удлиненной восьмерки (рис. 5), но часть $m'm''$ этой кривой очень мало отклоняется от прямой линии.

Параллелограмм Уатта

В паровой машине Уатта приходилось вести по прямой линии не только головку штока, соединенного с поршнем парового цилиндра, но еще и головку штока, соединенного с поршнем насоса, который качает воду в холодильник (рис. 6). Поэтому Уатт изменил свой механизм так, что в нем оказались две точки, приближенно направляемые по прямым. Для этого Уатт продолжил звено OA своего механизма (рис. 7) и достроил параллелограмм $ABCD$.

Проводя через точки O и m прямую и обозначая через n точку пересечения этой прямой со звеном CD, мы получим, что точка n звена CD будет описывать кривую, подобную той, которую описывает точка m. Следовательно, точка n также движется по линии, мало уклоняющейся от пря-

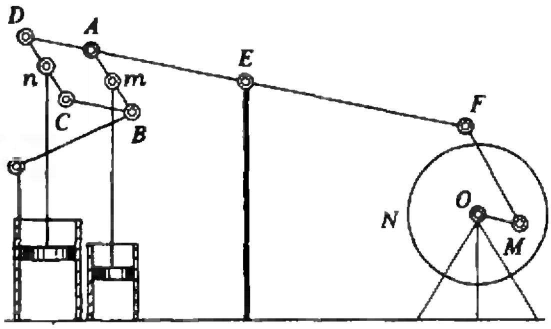


Рис. 6.

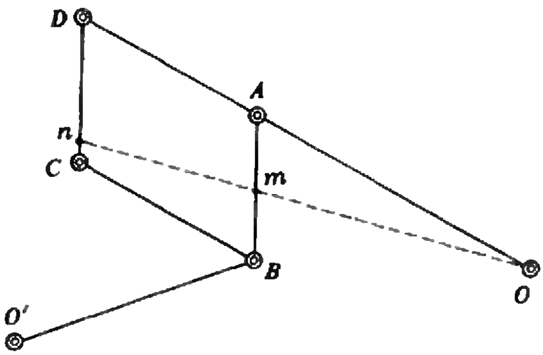


Рис. 7.

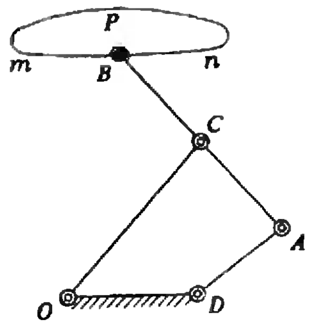


Рис. 8.

мой. Так как высота парового цилиндра больше высоты насосного цилиндра и вследствие этого ход поршневого штока парового цилиндра больше хода поршневого штока насосного цилиндра, Уатт укрепил головку парового штока в точке n, имеющей большую амплитуду, головка же насосного штока была укреплена в точке m.

Общий вид паровой машины с параллелограммом Уатта изображен на рисунке 6. В таком виде она появилась в 1784 году.

Сам Уатт считал своим высшим научным достижением изобретение спрямляющих механизмов, а отнюдь не регулятор, который носит теперь его имя и является краеугольным камнем теории автоматического управления.

Спрямляющий механизм Чебышева

Знаменитый русский математик и механик академик П. Чебышев изобрел несколько замечательных приближенных спрямляющих механизмов, кото-

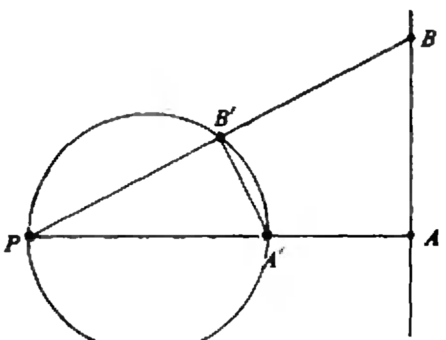


Рис. 9.

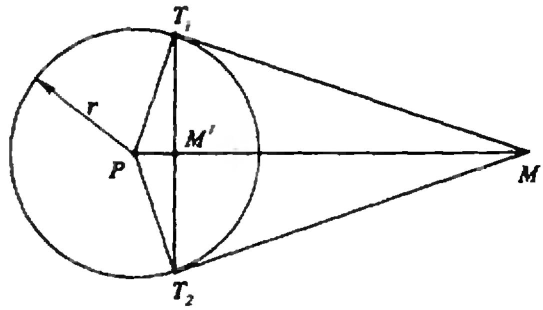


Рис. 10.

рые он нашел с помощью созданной им теории функций, наименее уклоняющихся от нуля (1858 год). Не имея возможности сколь-нибудь подробно изложить эту теорию, мы опишем только устройство одного из наиболее практичных механизмов Чебышева.

Этот механизм (рис. 8) состоит из звена AB, в середине которого устроен шарнир C. На этот шарнир надето звено OC, равное $\frac{AB}{2}$, так что $OC=AC=$ $=BC$. Другой конец O звена OC укрепляется в неподвижном шарнире O. Точка A движется по дуге окружности с помощью третьего звена DA, укрепленного в неподвижном шарнире D. При выполнении следующих соотношений между размерами звеньев:

$$OD=\frac{OC+CA+AD}{3},\quad OC=AC=BC$$

точка B механизма Чебышева описывает кривую mPn, часть которой mn очень мало отличается от прямой. Чебышев показал, что наибольшее отклонение δ отрезка кривой mn от прямолинейного направления, параллельного OD, вычисляется по формуле

$$\delta=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4}{9}(r-a)(2r+a)+\frac{(4a-r)^3 r}{12(2r+a)^2}}-\sqrt{\frac{4}{9}(r-a)(2r+a)}\right),$$

где $r=AB$, $a=2AD$. Это очень маленькая величина. Скажем, при $AC=$ $=OC=BC=32$ дюйма (81,3 см), $OD=25$ дюймов (63,5 см), $DA=$ $=11$ дюймов (27,9 см), $\delta=0{,}032$ дюйма (0,081 см).

Точные спрямляющие механизмы. Инверсия

Все описанные выше спрямляющие шарнирные механизмы были приближенными: прямая заменялась некоторой подходящей кривой. Теория точных спрямляющих механизмов основана на одном геометрическом преобразовании, имеющем большое значение в современной математике и физике — *инверсии*.

Пусть дана окружность с центром P и радиусом r (рис. 9). Возьмем какую-нибудь точку M, для определенности — внешнюю по отношению к этой окружности. Из точки M проведем к данной окружности касательные MT_1 и MT_2 и построим точку пересечения M' хорды T_1T_2 с прямой PM. Из прямоугольного треугольника PMT_1 находим

$$PM \cdot PM' = r^2. \qquad (1)$$

Обратно, если дана точка M', лежащая внутри окружности, то можно без труда построить внешнюю точку M.

Две точки M и M', лежащие на одном луче, выходящем из центра P окружности радиусом r, называются взаимно обратными относительно этой окружности, если расстояния от них до центра удовлетворяют соотношению (1). Очевидно, что точка, обратная точке окружности, с ней совпадает и что центр окружности не имеет точки, ему обратной.

Соответствие между взаимно обратными точками или, иначе, преобразование, посредством которого из каждой точки M получается обратная ей точка M', называется *инверсией* относительно данной окружности. Сама окружность называется *окружностью инверсии*, ее центр — *полюсом инверсии*, квадрат ее радиуса — *степенью инверсии*.

Из сказанного следует, что инверсия представляет собой взаимно однозначное (за исключением точки P) преобразование точек плоскости. Полюс инверсии обратной точки не имеет.

Соответствие между точками в инверсии взаимно: если точка M' соответствует точке M, то и точка M соответствует точке M'. Каждая точка окружности инверсии является неподвижной точкой.

Рассмотрим теперь важное для наших целей свойство инверсии.

Т е о р е м а 1. Прямой линии, не проходящей через полюс инверсии, соответствует окружность, проходящая через полюс инверсии.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — проекция полюса инверсии на данную прямую (рис. 10), B — произвольная точка данной прямой, A' и B' — точки, обратные точкам A и B. Из определения инверсии следует, что $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$, или $PA:PB = PB':PA'$. В силу этой пропорциональности треугольники PAB и $PB'A'$ подобны. Так как угол PAB — прямой, то и угол $PB'A'$ — прямой. Точка B' лежит на окружности, имеющей отрезок PA' своим диаметром, что и требовалось доказать.

В силу взаимности из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Окружность, проходящая через полюс инверсии, преобразуется в прямую, перпендикулярную прямой, соединяющей полюс инверсии с центром данной окружности.

Следовательно, если бы нам удалось получить механизм, реализующий инверсию, то удалось бы преобразовывать движение по окружности в движение по прямой и обратно.

Механизмы, реализующие инверсию, называются *инверсорами*.

Инверсор Поселлье

В 1864 году французский инженер Поселлье сконструировал следующий

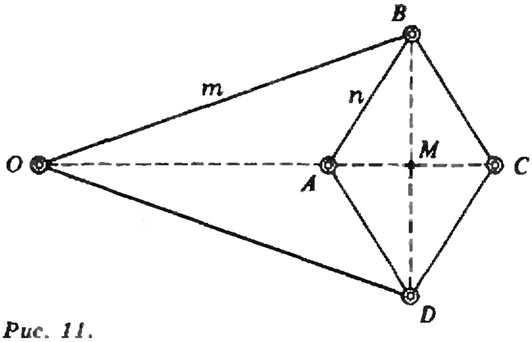


Рис. 11.

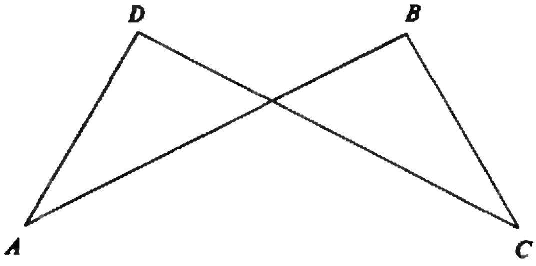


Рис. 12.

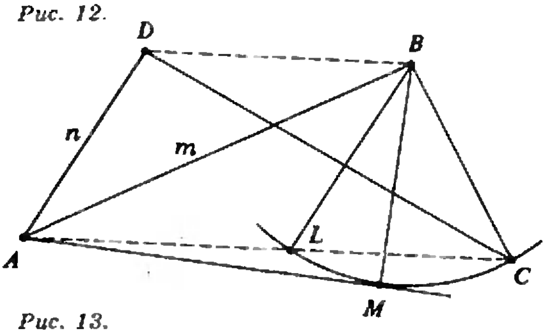


Рис. 13.

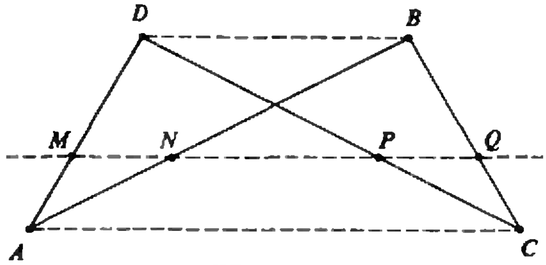


Рис. 14.

инверсор. Четыре равных между собой прямолинейных звена соединяются шарнирами в ромб $ABCD$ (рис. 11). От каких-либо двух противоположных вершин ромба проводятся два равных между собой звена BO и DO, причем каждое из них длиннее стороны ромба. В точках B, D и O помещаются шарниры. Получившийся механизм и есть инверсор Поселлье.

Теорема 3. При любом положении инверсора Поселлье произведение расстояний AO и OC есть величина постоянная.

Доказательство. Обозначим длину каждого из длинных звеньев инверсора через m, так что

$$OB = OD = m.$$

Обозначим длину каждого из коротких звеньев через n, так что

$$AB = BC = CD = DA = n.$$

Проведем диагонали ромба. Одна из них пройдет через точку O, поскольку вершины равнобедренных треугольников DOB, DAB и DCB, имеющих общее основание BD, лежат на одной прямой. Положим $OA = r$, $OC = \rho$. Из треугольника OBM имеем

$$BM^2 = m^2 - OM^2. \qquad (2)$$

Из треугольника BCM

$$BM^2 = n^2 - CM^2. \qquad (3)$$

Вычитая (3) из (2), получаем

$$m^2 - n^2 = OM^2 - CM^2 = \\ = (OM + CM)(OM - CM) = OC \cdot OA,$$

или

$$\rho \cdot r = m^2 - n^2.$$

Итак, в инверсоре Поселлье произведение

$$\rho \cdot r = OC \cdot OA$$

остается постоянным при любых изменениях OC и OA, что и требовалось доказать.

Следовательно, если мы сделаем точку O такого инверсора неподвижной и будем двигать точку A по какой-либо кривой, то точка C опишет образ этой кривой при инверсии. В частности, если точка A движется по окружности, проходящей через полюс инверсии, то точка C будет двигаться по прямой. Отметим, что в 1872 году описанный выше инверсор независимо от Поселлье изобрел ученик Чебышева студент Петербургского университета Липкин.

Инверсор Гарта

Вскоре после появления инверсора Поселлье английский математик и механик Г. Гарт построил инверсор из антипараллелограмма. Антипараллелограммом называется четырехугольник $ABCD$ (рис. 12), в котором противоположные стороны равны и стороны AB и CD взаимно пересекаются. Тот факт, что шарнирный антипараллелограмм реализует инверсию, вытекает из следующих двух теорем.

Теорема 4. Произведение диагоналей DB и AC антипараллелограмма (рис. 13) есть величина постоянная.

Доказательство. Условимся о следующих обозначениях:

$$AB = DC = m, \quad AD = BC = n.$$

Проведем отрезок BL, параллельный AD, и опишем из точки B радиусом BL дугу. Эта дуга пройдет через точку C, поскольку

$$BL = DA = BC.$$

Проведем из точки A касательную AM к этой дуге. Квадрат касательной AM равен произведению секущей на ее внешний отрезок. Следовательно,

$$AM^2 = AL \cdot AC = DB \cdot AC. \qquad (4)$$

Из треугольника ABM имеем

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = AB^2 - BC^2 = m^2 - n^2.$$

Сравнивая это равенство с (4), получаем

$$DB \cdot AC = m^2 - n^2 = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. Любые три из четырех точек пересечения сторон антипараллелограмма прямой, параллельной его диагонали, образуют на этой прямой два отрезка, произведение которых при всех положениях антипараллелограмма остается постоянным.

Доказательство. Проведем какую-либо прямую, пересекающую все стороны антипараллелограмма и параллельную его диагоналям (рис. 14). Получим четыре точки пересечения M, N, P, Q его сторон с этой прямой. Из подобия треугольников AMN и ADB вытекает, что

$$MN = BD \cdot \frac{AM}{AD}.$$

Из подобия треугольников ABC и NBQ имеем

$$NQ = AC \cdot \frac{BQ}{BC}.$$

Перемножая почленно эти равенства, получим

$$MN \cdot NQ = BD \cdot AC \cdot \frac{AM}{AD} \cdot \frac{BQ}{BC}.$$

Но отношение $\frac{AM}{AD} \cdot \frac{BQ}{BC}$ постоянно, так как в него входят только постоянные величины. Произведение $BD \cdot AC$ постоянно согласно теореме 4. Следовательно,

$$MN \cdot NQ = \text{const}.$$

Точно таким же способом можно доказать, что

$$MP \cdot PQ = \text{const}.$$

Инверсор Гарта устроен следующим образом. Приняв какую-либо из этих четырех точек за центр инверсии, будем двигать вторую точку по окружности, проходящей через первую точку. Тогда третья точка вычертит прямую.

Письма о физике

(Начало см. на с. 2)

ском политехническом институте на инженерно-физическом факультете есть специальные группы, в которых готовят физиков-теоретиков. Выбор специальности происходит, как правило, на 3-м курсе, а первые два-два с половиной года будущие физики-экспериментаторы и физики-теоретики учатся вместе. Тех, кто рано (с первых месяцев учебы) сделал выбор, решив стать физиком-теоретиком, подстерегает опасность: считая, что главное для них математика, они «не замечают» общей физики — курса, вводящего студента в мир физики... Надо помнить: стать хорошим физиком-теоретиком можно только хорошо зная и понимая не только математику (без нее, конечно, нельзя обойтись!), но и физику, с изучением которой у многих школьников и студентов первых курсов возникают трудности. Я хотел написать «почему-то возникают трудности», но почувствовал в «почему-то» фальшь. Общая физика — труднейший предмет и для преподавания, и для усвоения.

М. Каганов

(Рисунки к статье заимствованы из книги «Физики шутят».)

Задачник «Кванта»

Задачи

M1216—M1220, Ф1223—Ф1227

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 июня 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1216» или «Ф1223». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M1216. Найдите углы остроугольного треугольника ABC, если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC.

К. Нистореску (Румыния)

M1217. Докажите для любого натурального n равенство

$$\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1\right)^2=$$
$$=2n-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Ю. Бурман

M1218. На отрезке AC взята точка B и построены дуги: $\overline{AC}=\alpha$ и $\overline{BC}=\beta$, сумма градусных величин которых равна $\alpha+\beta=360°$, лежащие в одной полуплоскости от прямой AC. Произвольная дуга AB пересекает их в точках K и L (рис. 1). Докажите, что всевозможные прямые KL пересекают прямую AC в одной и той же точке.

Б. Михайлов (Болгария)

M1219*. Докажите, что для любых n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n>1)$ справедливо неравенство

$$(x_2+\ldots+x_n)^{x_1}+\ldots+(x_1+\ldots+x_{i-1}+x_{i+1}+\ldots+x_n)^{x_i}+\ldots$$
$$\ldots+(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^{x_n}>n-1.$$

Например, для любых положительных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$(x+y)^z+(y+z)^x+(z+x)^y>2.$$

А. Михайлов

M1220*. Определим последовательность b_n условиями: $b_1=0$, $b_2=2$, $b_3=3$, $b_{n+1}=b_{n-1}+b_{n-2}$ при $n\geqslant 3$. Докажите, что при простом p число b_p делится на p.

Д. Фомин

Ф1223. Горизонтальная поверхность вибротранспортера приводится в движение эксцентриками, синхронно вращающимися вокруг неподвижных горизонтальных осей O и O' (рис. 2). При какой угловой скорости вращения эксцентриков лежащие на поверхности детали начнут перемещаться? В каком направлении они будут перемещаться при вращении эксцентриков по часовой стрелке? Коэффициент трения деталей о поверхность k, радиус эксцентриков r.

Е. Бутиков

Ф1224. В горизонтальном дне цилиндрического сосуда сделано круглое отверстие диаметром $d=10$ см для слива воды. Если отверстие открыть, то не вся вода выльется, часть ее останется на дне. Оцените массу этой оставшейся воды, если дно сосуда плохо смачи-

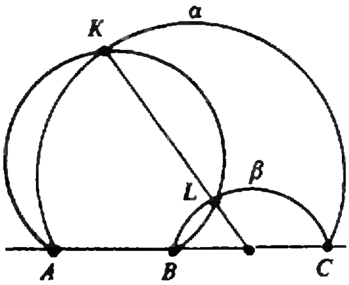


Рис. 1.

Рис. 2.

вается водой. Диаметр сосуда $D=50$ см. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}07$ Н/м.

В. Можаев

Ф1225. Свинцовая проволочка диаметром $d_1=0{,}3$ мм плавится при пропускании через нее тока $I_1=1{,}8$ А, а проволочка диаметром $d_2=0{,}6$ мм — при токе $I_2=5$ А. При каком токе разорвет цепь предохранитель, составленный из двух этих проволочек, соединенных параллельно? А из двадцати тонких и одной толстой? Длины всех проволочек одинаковы.

А. Ходулев

Ф1226. На ленте магнитофона записан синусоидальный сигнал частотой 5 кГц при скорости ленты 19,05 см/с. При воспроизведении на этой скорости амплитуда сигнала воспроизводящей головки составила 1 мВ. Какой станет частота и амплитуда этого сигнала, если увеличить скорость ленты при воспроизведении до 38,1 см/с? А если уменьшить при записи и воспроизведении до 4,75 см/с? Ширину переднего зазора воспроизводящей головки принять равной 5 мкм. Максимальную намагниченность ленты после записи в обоих случаях считать одинаковой.

Р. Александров

Ф1227. Нелинейность вольт-амперной характеристики лампы накаливания связана с тем, что сопротивление нити увеличивается с ее нагревом. Получите зависимость тока через лампу от приложенного к ней напряжения при следующих упрощающих предположениях: теплоотдачу считать связанной с излучением ($P_{изл}\sim T^4$, где T — температура нити); сопротивление нити $R\sim T$. Лампа 60 Вт, 220 В.
Снизим напряжение до 200 В. Какой будет мощность лампы? Сильно ли упадет световой поток?

А. Зильберман

Решения задач

М1191—М1195, Ф1203—Ф1207

М1191. *Пусть A_1, A_2, A_3, ...— некоторая последовательность точек на плоскости. Начав с некоторой точки T_0, построим последовательность T_1, T_2, T_3, ..., где T_n — точка, симметричная T_{n-1} относительно A_n ($n=1, 2, 3, ...$). Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять последовательность A_n, чтобы последовательность T_n получа-*

Ответ: последовательность A_n должна быть периодической с некоторым периодом p, т. е. $A_{n+p}=A_n$ при всех $n\geqslant 1$, причем при нечетном p расположение точек $A_1, ..., A_p$ может быть любым, а при четном p должно выполняться условие

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+...+\overline{A_{p-1}A_p}=\overline{0}. \qquad (*)$$

Допустим, что T_n — периодическая последовательность при каком-то T_0, тогда и последовательность отрезков $T_{n-1}T_n (n\geqslant 1)$ периодична. А поскольку A_n — середина отрезка $T_{n-1}T_n$, последовательность A_n также периодична. Ее период обозначим через p.

Точка T_p получается из T_0 в результате композиции (последовательного выполнения) центральных симмет-

лась периодической при любом выборе точки T_0 (т. е. $T_{n+p}=T_n$ для некоторого p при всех n)?

Задачник „Кванта"

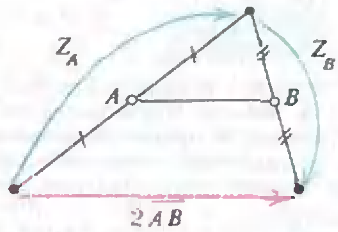


Рис. 1.

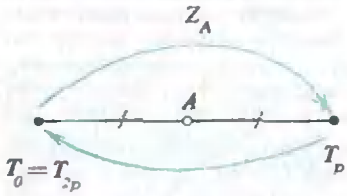


Рис. 2.

рий $Z_1, ..., Z_p$ с центрами $A_1, ..., A_p$. Как видно из рисунка 1, композиция двух центральных симметрий Z_A и Z_B с центрами A и B есть параллельный перенос $П$ на вектор $2\overline{AB}$: $Z_B\cdot Z_A=П_{2AB}$. Отсюда же следует, что $Z_B\cdot П_{2AB}=Z_A$, т. е. композиция переноса и центральной симметрии есть центральная симметрия. Поэтому при четном p композиция $Z_p\cdot ...\cdot Z_1=(Z_p\times\times Z_{p-1})\cdot ...\cdot(Z_2\cdot Z_1)$ — это параллельный перенос на вектор $2A_1A_2+2A_3A_4+...+2A_{p-1}A_p$. *Если этот перенос* оставляет на месте хотя бы одну точку T_0 ($T_0==T_p$), то его вектор — нулевой, т. е. выполнено условие (*), и тогда $T_p=T_0$ при любом T_0. Итак, при *четном* p условие (*) необходимо и достаточно для периодичности.

При нечетном p композиция $Z_{p-1}\cdot ...\cdot Z_1$ — это некоторый перенос $П$. Следовательно, $Z_p\cdot Z_{p-1}\cdot ...\cdot Z_1==Z_p\cdot П$ — центральная симметрия Z_A с некоторым центром A, т. е. $T_p=Z_A(T_0)$ *при любом* T_0, *а значит,* $T_{2p}=Z_A(T_p)=Z_A^2(T_0)=T_0$ (рис. 2). Итак, при нечетном p последовательность T_n периодична независимо от расположения точек $A_1, ..., A_p$ с периодом $2p$.

И. Акулич, В. Дубровский

М1192. *Известно, что все ребра многогранника М равны между собой и касаются некоторого шара.*
а) Пусть одна из граней М имеет нечетное число сторон. Докажите, что существует описанный вокруг М шар.
б) Обязательно ли в условиях пункта а) существует вписанный в М шар?
в) Пусть все грани М имеют одинаковое число сторон. Докажите, что существует вписанный в М шар.
г) Обязательно ли в условиях пункта в) существует описанный шар?

Пусть $A_1A_2...A_n$ — одна из граней нашего многогранника. Она описана около круга, по которому данный шар пересекает плоскость этой грани. Из равенства ее сторон и равенства касательных к кругу, проведенных из одной вершины, следует, что касательные, проведенные из двух вершин, взятых через одну (*например,* A_1 *и* A_3, A_2 *и* A_4), равны (рис. 1). Поэтому треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, ... (где O — центр круга) также равны друг другу.

а) Обходя вершины грани $A_1...A_n$ через одну, мы при нечетном n в какой-то момент попадем в вершину, соседнюю с исходной. Следовательно, касательные к кругу, проведенные из этих двух вершин, а значит, и из любой вершины, равны. Иначе говоря, данный шар касается всех сторон грани $A_1...A_n$ в их серединах. Но тогда *это верно* и для любой смежной грани. А поскольку любые две грани можно соединить цепочкой смежных граней, каждое ребро многогранника касается шара в своей середине. Отсюда следует, что все вершины удалены от центра данного шара на одно и то же расстояние (равное $\sqrt{R^2+a^2/4}$, где R — радиус шара, a — длина ребра), т. е. все вершины лежат на одной сфере.

б) Ответ: необязательно. Например, в правильную треугольную призму с равными ребрами *вписать* шар нельзя, но шар, касающийся всех ее ребер, существует.

в) Из равенства треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, ... (см. начало решения) следует, что все стороны грани

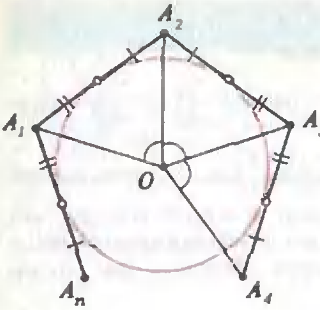


Рис. 1.

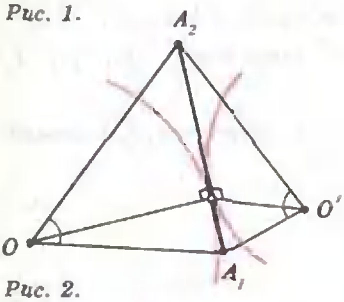


Рис. 2.

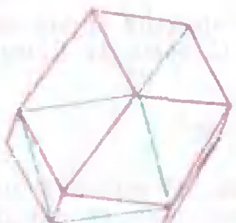


Рис. 3.

$A_1 ... A_n$ видны из центра вписанного в нее круга O под углом $2\pi/n$. Пусть O' — центр круга, вписанного в смежную грань, а общее ребро этих граней, скажем, A_1A_2. Треугольники OA_1A_2 и $O'A_1A_2$ имеют общее основание и равные углы при вершинах O и O' (т. к. обе грани имеют одинаковое число сторон), кроме того, совпадают основания высот, опущенных на A_1A_2 (рис. 2). Отсюда легко получить равенство этих высот, т. е. радиусов вписанных в грани окружностей. Рассматривая, как в пункте а), цепочку смежных граней, получаем, что все радиусы окружностей, вписанных в грани, равны одной и той же величине r. Поэтому все грани удалены от центра Z данного шара на одно и то же расстояние $ZO = \sqrt{R^2 - r^2}$.

г) О т в е т: необязательно. Построим на каждой грани куба как на основании правильную четырехугольную пирамиду с двугранным углом при основании $\pi/4$ (рис. 3). Получится многогранник, имеющий 12 граней-ромбов (ромбододекаэдр). Из соображений симметрии ясно, что все его ребра равноудалены от центра куба (т. е. касаются шара), а вершины куба и вершины пирамид находятся от центра куба на разных расстояниях.

В. Сендеров

М1193*. *Докажите (для любых чисел a, b, c, x, y, z) неравенство*

$$ax+by+cz+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqslant \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z).$$

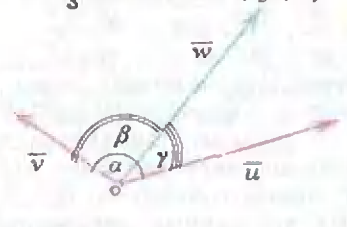


Рис. 1.

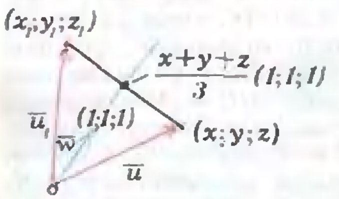


Рис. 2.

Будем считать, что ни одна из троек чисел $(a; b; c)$ и $(x; y; z)$ не нулевая (иначе неравенство очевидно). Рассмотрим векторы $\bar{v} = (a; b; c)$ и $\bar{u} = (x; y; z)$. Корень в левой части неравенства — это произведение их длин. Разделим обе части неравенства на это произведение и введем «единичный» вектор $\bar{w} = (1;\ 1;\ 1)$. Пользуясь выражением скалярного произведения в координатах, перепишем неравенство в виде

$$\frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{|\bar{v}||\bar{u}|} + 1 \geqslant 2\frac{\bar{u}\cdot\bar{w}}{|\bar{v}||\bar{w}|}\cdot\frac{\bar{u}\cdot\bar{w}}{|\bar{u}||\bar{w}|},$$

или

$$\cos\alpha + 1 \geqslant 2\cos\beta\cos\gamma,$$

где α, β и γ — углы между векторами $\bar{v}$ и $\bar{u}$, $\bar{v}$ и $\bar{w}$, $\bar{u}$ и $\bar{w}$ (рис. 1). В силу неравенства треугольника для плоских углов трехгранного угла $\alpha \leqslant \beta + \gamma$. Поэтому

$$\cos\alpha + 1 \geqslant \cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma) = 2\cos\beta\cos\gamma,$$

что и требовалось доказать.

Из рассуждения видно, что неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\beta = \gamma$, $\alpha = 2\gamma$, т. е. лучи, направленные вдоль векторов $\bar{v}$ и $\bar{u}$, симметричны относительно прямой $x = y = z$ (рис. 2). Проекция вектора $\bar{u} = (x;\ y;\ z)$ на эту прямую имеет координаты, равные $\frac{x+y+z}{3}$. При этом координаты вектора $\bar{u}_1$, симметричного $\bar{u}$, равны $(x_1;\ y_1;\ z_1)=$ $=\left(\frac{2(y+z)-x}{3};\ \frac{2(z+x)-y}{3};\ \frac{2(x+y)-z}{3}\right)$, а условие равенства можно записать как $x_1/a=y_1/b=z_1/c$. Кстати, эти соображения подсказывают чисто алгебраическое решение задачи: для доказательства неравенства достаточно в неравенство Коши

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}\geqslant ax_1+by_1+cz_1$$

подставить указанные выше выражения x_1, y_1, z_1 через x, y, z.

В. Дубровский. В. Кыртоаже

М1194. *а) Из точки M внутри прямоугольника $ABCD$ площади S проводятся биссектрисы ME, MF, MG, MH треугольников AMB, BMC, CMD, DMA. Докажите, что для площади S_0 четырехугольника $EFGH$ выполнены неравенства*

$$\frac{3}{8}S<S_0\leqslant\frac{1}{2}S.$$

б) Для каких точек M выполнено равенство $S_0=$ $=S/2$?

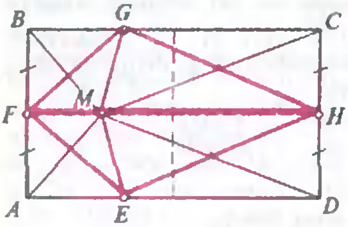


Рис. 1.

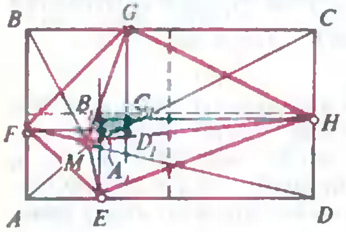


Рис. 2.

Если точка M лежит на одной из средних линий прямоугольника, то, очевидно, $S_0=S/2$ (рис. 1). Покажем, что для всех других точек M

$$\frac{3}{8}S<S_0<\frac{1}{2}S.$$

Пусть A — ближайшая к точке M вершина прямоугольника (она определяется однозначно; рис. 2). Покажем, что $AE<BG<BC/2$. Очевидно, эти неравенства эквивалентны таким: $AE^2/ED^2<BG^2/GC^2<1$. Заменяя здесь отношения, в которых биссектрисы делят отрезки AD и BC, на отношения соответствующих сторон треугольников AMD и BMC, приходим к неравенствам

$$\frac{AM^2}{MD^2}<\frac{BM^2}{MC^2}<1. \qquad (1)$$

Пусть x, x_1, y и y_1 — расстояния от точки M до сторон AD, BC, AB и CD (рис. 3), тогда

$$\frac{AM^2}{MD^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y_1^2}=1-\frac{y_1^2-y^2}{x^2+y_1^2},\quad \frac{BM^2}{MC^2}=1-\frac{y_1^2-y^2}{x_1^2+y_1^2}.$$

Отсюда и следуют неравенства (1), поскольку $x<x_1$, $y<y_1$. Аналогично доказывается, что $AF<DH<DC/2$. Проведем через точки E и G прямые, параллельные AB, а через F и H — прямые, параллельные AD. Эти прямые ограничивают прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ площадью s (см. рис. 2). Из доказанных неравенств следует, что треугольники EFA_1, FGD_1, GHC_1 и HEB_1 покрывают четырехугольник $EFGH$ в один слой, за исключением прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$, который покрывается дважды. Поэтому сумма площадей этих треугольников равна S_0+s. Добавляя к равной ей сумме площадей треугольников AEF, BFG, CGH и DHE площадь S_0, получим площадь S всего данного прямоугольника. Следовательно, $2S_0+s=S$, т. е. $S_0=(S-s)/2$. Остается заметить, что $0<s<S/4$ (правое неравенство следует из того, что $FD_1=BG<BC/2$, $EA_1=DH<DC/2$).

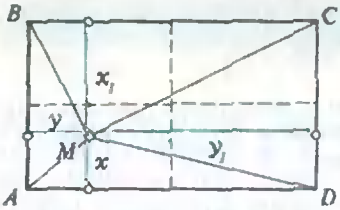


Рис. 3.

Итак, ответ к задаче б): равенство $S_0=S/2$ выполнено только для точек, лежащих на средних линиях прямоугольника.

А. Азамов

От редакции. Наш читатель *Е. Гольберг* (Ленинград) выдвинул предположение, что число $3/8$ в нижней оценке площади S_0 можно заменить на $\sqrt{2}-1=0{,}414\ldots$, причем эта оценка уже будет точной (равенство достигается, когда $ABCD$ — квадрат, а M — одна из его вершин). Правда, доказал он только неравенство $S_0>0{,}4S$ $(3/8<0{,}4<\sqrt{2}-1)$. Наметим его доказательство, оставляя читателю возможность восстановить промежуточные выкладки, а также подтвердить или опровергнуть высказанную гипотезу. Пусть расстояния от M до A, B, C, D равны a, b, c, d, тогда неравенство $S_0>0{,}4S$ можно представить в виде

$$1-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{(a+b)(d+a)}+\frac{b^2}{(b+c)(a+b)}+\frac{c^2}{(c+d)(b+c)}+\right.$$
$$\left.+\frac{d^2}{(d+a)(c+d)}\right)>0{,}4,$$

или

$$5(bd-ac)^2<(a+b)(b+c)(c+d)(d+a). \qquad (2)$$

Если a — наименьшее из четырех расстояний (рис. 2), то $a\leqslant b\leqslant d\leqslant c$ и $ac\leqslant bd$ (см. (1)); кроме того, $a^2+c^2=$ $=b^2+d^2$. Неравенство (2) выводится из этих соотношений чисто алгебраически.

М1195. *Последовательность x_1, x_2, ... такова, что для любых натуральных m и n*

$$|x_{m+n}-x_m-x_n|<$$
$$<1/(m+n).$$

Докажите, что эта последовательность — арифметическая прогрессия.

По условию при любых натуральных n и k

$$|(x_{n+1}-x_n)-(x_{k+1}-x_k)|=|(x_{n+k+1}-x_n-x_{k+1})-$$
$$-(x_{n+k+1}-x_{n+1}-x_k)|\leqslant|x_{n+k+1}-x_n-x_{k+1}|+$$
$$+|x_{n+k+1}-x_{n+1}-x_k|<\frac{2}{n+k+1}<\frac{2}{n}.$$

Фиксируя k, а n устремляя к бесконечности, получим, что последовательность $x_{n+1}-x_n$ имеет предел, равный $x_{k+1}-x_k$.

Но k здесь можно выбрать любым, следовательно, разность $x_{k+1}-x_k$ не зависит от k, т. е. x_k — арифметическая прогрессия.

О. Ижболдин

Ф1203. *На шероховатой железнодорожной платформе стоит равномерно*

Рассмотрим силы, действующие на контейнер. Это — сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и силы реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ (рис. 2). Определим N_1 из условий равновесия *заполненный контейнер высотой H и шириной L, имеющий с одной стороны маленькие колеса (рис. 1). При разгоне поезда влево контейнер начинает сползать вправо по платформе, если ускорение разгона превышает a_0. С каким минимальным ускорением должен затормозить поезд, чтобы контейнер начал сползать влево? Трением качения пренебречь.*

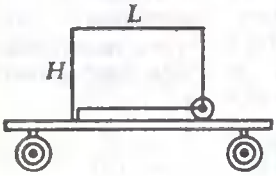


Рис. 1.

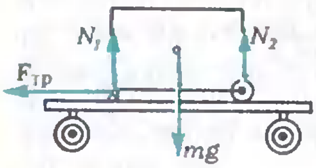


Рис. 2.

контейнера, т. е. из равенства нулю моментов всех сил относительно центра контейнера и проекций всех сил на вертикальное направление:

$$F_{тр}\frac{H}{2}+N_1\frac{L}{2}-N_2\frac{L}{2}=0,$$
$$N_1+N_2-mg=0,$$

откуда

$$N_1=\frac{1}{2}mg-\frac{H}{2L}F_{тр}.$$

При ускорении платформы $F_{тр}=ma_0$. С другой стороны, в момент начала сползания контейнера $F_{тр}=\mu N_1$, где μ — коэффициент трения. Отсюда получаем

$$ma_0=\frac{1}{2}\mu mg-\frac{H}{2L}\mu ma_0 \Rightarrow \mu=\frac{2a_0}{g-a_0H/L}.$$

При торможении платформы с ускорением a сила трения направлена вправо и равна $F_{тр}=ma$, а в момент начала сползания контейнера $F_{тр}=\mu N_1$. Аналогично предыдущему, получаем

$$ma=\frac{1}{2}\mu mg+\frac{H}{2L}\mu ma \Rightarrow \mu=\frac{2a}{g+aH/L}.$$

Из двух выражений для μ находим искомое ускорение:

$$a=\frac{a_0}{1-2a_0H/(gL)}.$$

Заметим, что при сильном трении контейнер может, не начав сползания, перевернуться. Найдем «критические» значения коэффициента трения и ускорения. При перевороте $N_2=0$ и $F_{тр}=ma_{кр}$; следовательно,

$$N_1=mg,$$
$$mg\frac{L}{2}=ma_{кр}\frac{H}{2}.$$

Отсюда

$$a_{кр}=g\frac{L}{H},\quad \mu_{кр}=\frac{L}{H}.$$

Такому значению μ соответствует ускорение при разгоне

$$a_0=g\frac{L}{3H}.$$

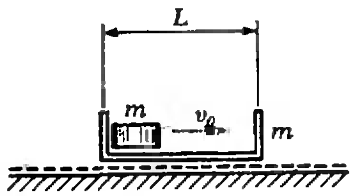
Итак,

$$a=\frac{a_0}{1-2a_0H/(gL)} \text{ при } a_0<g\frac{L}{3H}.$$

Если же $a_0>gL/(3H)$, то при достаточно интенсивном торможении контейнер перевернется не сползая.

Д. Григорьев

Ф1204. *Небольшой упругий брусок массой m может двигаться без трения внутри прямоугольной коробки такой же массы. Коробка находится на столе, покрытом тонким слоем масла (см. рисунок). Сила трения коробки о стол зависит только от скорости v движения коробки по столу и равна $F=-\gamma v$. В начальный момент времени коробка покоится, а брусок находится у ее левой стенки и имеет скорость v_0, направленную вправо. Сколько ударов о коробку совершит брусок, если длина коробки L много больше размеров бруска?*



При каждом упругом соударении бруска и коробки они обмениваются скоростями. Так, после первого соударения брусок остановится, а коробка поедет вправо, после второго — наоборот: коробка остановится, а брусок поедет вправо, но при этом скорость бруска v_1 будет меньше v_0. Таким образом, при продвижении коробки на расстояние L происходит ровно 2 удара. Найдем полный путь s, пройденный коробкой.

Заметим, что скорость движения коробки сразу после остановки бруска каждый раз в точности равна ее скорости перед остановкой, поскольку брусок движется без трения. Поэтому можно исключить из рассмотрения интервалы времени, когда коробка стоит, и считать ее движение непрерывным. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{m\Delta v}{\Delta t}=-\gamma v,$$

откуда

$$m\Delta v=-\gamma\Delta s \text{ и } mv_0=\gamma s.$$

Следовательно, число ударов бруска о коробку

$$n=2\frac{s}{L}=\frac{2mv_0}{\gamma L}.$$

Д. Григорьев

Ф1205. *При прочих равных условиях в какой шубе бо́льшие потери тепла на излучение — в белой или в черной?*

Вопрос задачи, по существу, сводится к следующему: какое тело — белое или черное — сильнее излучает при одной и той же температуре?

Поместим мысленно оба тела в теплоизолированную полость с идеально отражающими стенками. Казалось бы, черное тело, поглощающее падающее на него излучение намного эффективнее, чем белое, должно нагреваться, а белое — охлаждаться. Другими словами, должен происходить самопроизвольный переход тепла от более холодного тела к горячему. Это, однако, противоречит второму закону термодинамики. Как же разрешается этот парадокс?

Ответ состоит в том, что черное тело не только сильнее, чем белое, поглощает, но и сильнее излучает. А тогда никакой разности температур между черным и белым телами в полости не появится, и противоречия с законами термодинамики не возникнет.

Итак, раз черное тело излучает сильнее белого, в белой шубе будет теплее. Заметим, кстати, что хорошие радиаторы, предназначенные излучать тепло, лучше красить в черный цвет.

О. Никишина

Задачник „Кванта"

Ф1206. *Две длинные и широкие полосы равномерно заряжены с плотностью зарядов $+\sigma$ (верхняя) и $-\sigma$ (нижняя). Найти величину и направление напряженности электрического поля в точке M, которая находится на высоте h над краем полос на оси, лежащей в их плоскости симметрии (рис. 1). Расстояние между полосами d мало по сравнению с h.*

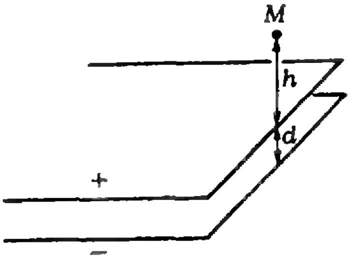


Рис. 1.

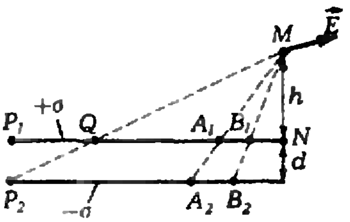


Рис. 2.

Изобразим поперечный разрез системы плоскостью ее симметрии, проходящей через данную точку M (рис. 2; заряженные полосы бесконечно продолжаются по обе стороны от плоскости рисунка). Проведем два близких луча MA_1A_2 и MB_1B_2. Заметим, что очень узкая полоска шириной A_1B_1 эквивалентна нити с линейной плотностью заряда $\rho_1=\sigma\cdot A_1B_1$, находящейся от точки M на расстоянии $r_1\approx A_1M$. Напряженность $\Delta\vec{E}_1$ создаваемого этой нитью в точке M электрического поля направлена по линии A_1M и равна

$$\Delta E_1=\frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon_0 r_1}=\frac{\sigma\cdot A_1B_1}{2\pi\varepsilon_0\cdot A_1M},$$

где ε_0 — электрическая постоянная.*)

Аналогичен вклад соответствующей нижней полоски A_2B_2:

$$\Delta E_2=\frac{\rho_2}{2\pi\varepsilon_0 r_2}=\frac{-\sigma\cdot A_2B_2}{2\pi\varepsilon_0\cdot A_2M}.$$

Из подобия треугольников MA_1B_1 и MA_2B_2 вытекает, что $\Delta\vec{E}_2=-\Delta\vec{E}_1$, т. е. полоски A_1B_1 и A_2B_2 (вернее — созданные ими электрические поля) в точности компенсируют друг друга. В конечном итоге нескомпенсированной остается только полоска P_1Q (см. рис. 2). Поскольку общая ширина полос велика ($P_1N\gg h$), напряженность $\vec{E}$ электрического поля, создаваемого полоской P_1Q, направлена практически горизонтально (вправо). Так как треугольники MQN и P_1QP_2 подобны, $P_1Q/QN=d/h\ll 1$, т. е. ширина полоски P_1Q мала по сравнению с расстоянием от нее до точки M. Значит, эту полоску опять можно заменить нитью с линейной плотностью заряда $\rho=\sigma\cdot P_1Q$, находящуюся на расстоянии $r\approx QM\approx QN$ от точки M.

Таким образом, искомая напряженность электрического поля направлена почти горизонтально вправо и равна приблизительно

$$E=\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}\approx\frac{\sigma\cdot P_1Q}{2\pi\varepsilon_0\cdot QN}=\frac{\sigma d}{2\pi\varepsilon_0 h}.$$

А. Семенов

Ф1207. *Раствор электролита налит в цилиндрический сосуд, помещенный в вертикальное магнитное поле. Между электродом, проходящим вдоль оси цилиндра, и вторым электродом, которым является боковая поверхность сосуда, все время поддерживается разность потенциалов (рис. 1). Что вы можете*

Проходящий через электролит ток радиально расходится от центрального электрода. Ток через электролит связан с движением ионов. Действующая на каждый ион сила Лоренца направлена перпендикулярно току,

*) Направление электрического поля заряженной нити легко определяется из соображений симметрии, а его величину проще всего найти с помощью теоремы Гаусса. О том, как это сделать, можно прочитать, например, в заметке А. Черноуцана «Силовые линии и теорема Гаусса», опубликованной в предыдущем номере журнала. *(Примеч. ред.)*

сказать о поведении раствора в описанной ситуации?

Задачник „Кванта"

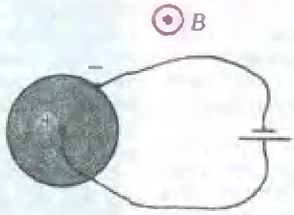


Рис. 1.

Рис. 2.

т. е. перпендикулярно радиусу, что и вызывает вращение электролита.

Заметим, что силы Лоренца, действующие на разноименно заряженные ионы, направлены в одну сторону — ведь направления движения этих ионов противоположны (рис. 2).

А. Буздин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1171—М1185, Ф1178—Ф1192, справились с задачами М1172, М1173, М1174, М1176, М1177, М1180, М1181, М1182, М1183, Ф1183, Ф1184.

Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Абрамян (Кировакан) 71; *А. Акопян* (Ереван) 71, 79; *А. Алексеев* (Донецк) 71, 78, 79; *В. Барановский* (Омск) 71, 75, 78, 79, 85; *А. Бородин* (Донецк) 71, 78, 79; *П. Бородин* (Киров) 71; *И. Брагина* (Челябинск) 79; *В. Ванчурин* (Москва) 84; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 71, 79; *В. Верзаков* (Рудный Кустанайской обл.) 71; *К. Волченко* (Донецк) 71, 78, 79, 85; *Е. Гендин* (Киев) 71; *Ю. Гринфельд* (Москва) 84; *А. Грич* (Киев) 71; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 71; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) 71, 78, 79; *С. Дошян* (Ереван) 71, 75; *И. Егорова* (Ленинград) 71; *Г. Еськов* (Ленинград) 71; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) 78, 79, 85; *С. Иноземцев* (Омск) 71, 75; *С. Кимбар* (д. Дягильно БССР) 75, 85; *Д. Коваль* (Киев) 71; *С. Коваценко* (Винница) 71, 75, 78, 79; *А. Козачко* (Винница) 71, 75, 78, 79, 84; *Д. Козлов* (Ленинград) 71, 78, 79; *А. Кудымов* (Ленинград) 71; *И. Левин* (Москва) 71; *П. Макулев* (Пловдив, НРБ) 79; *Н. Маркарян* (Баку) 85; *М. Марченко* (Гайворон) 71, 78; *Н. Мацко* (Киев) 71; *К. Мишачев* (Липецк) 75, 85; *Р. Мучник* (Винница) 71, 75, 78, 79, 84, 85; *А. Насыров* (Обнинск) 71, 78, 79, 85; *В. Некрашевич* (с. Крутые Горы Киевской обл.) 84, 85; *А. Ненашев* (Хабаровск) 71, 79; *Г. Ониани* (Кутаиси) 71; *В. Острик* (Мариуполь) 75, 79, 85; *С. Пальшин* (Харьков) 71; *Т. Панов* (Киев) 71, 78, 79; *Е. Парилов* (Усть-Каменогорск) 71; *Е. Перельман* (Ленинград) 75; *Б. Петренко* (Днепропетровск) 71, 75; *Д. Поперечный* (Хабаровск) 71, 79; *Л. Порохня* (Павлодар) 75, 79; *И. Селищев* (п. Манченки Харьковской обл.) 79; *А. Скороход* (Киев) 71; *В. Слюсарчук* (Ровно) 71, 75, 79, 85; *В. Стакаускас* (с. Вокс ЛитССР) 71, 79; *В. Темкин* (Москва) 84; *А. Тимофеев* (Павлодар) 79; *С. Тихонов* (Воронеж) 71, 79, 85; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 71; *Ю. Фенюк* (Киев) 71; *Л. Харченко* (Киев) 71; *М. Хасин* (Донецк) 78, 79; *Ю. Хорошилов* (Челябинск) 79; *А. Шиндлер* (Феодосия) 79; *А. Эгамов* (Гороховец) 71, 79, 84; *А. Юдаев* (Павлодар) 79.

Физика

Н. Абдираимов (с. Момбеково Ошской обл.) 81; *М. Абдулаев* (с. Советское ДагАССР) 89; *Н. Абдуллаев* (пгт Язъяван Ферганской обл.) 79; *А. Абжанов* (Алма-Ата) 88; *В. Александров* (Киев) 78, 79, 82; *О. Андрухов* (Ровно) 79, 82; *С. Антипин* (Северодвинск) 78, 79, 81, 82, 85, 87—92; *А. Байдаков* (Киев) 79, 82; *Т. Бакеев* (Алма-Ата) 78—82, 85, 86, 88—90, 92; *В. Бакулин* (Новосибирск) 78—80, 85, 88—90, 92; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 78—80, 82, 86, 88—90, 92; *С. Бардина* (Старый Оскол) 88, 89, 91; *Р. Баскаков* (Красноярск) 78—82, 85—92; *Д. Баско* (Москва) 78, 80, 81; *И. Башук* (Великие Мосты) 78, 80—82, 86, 87; *М. Беднюк* (Аша) 80, 87—89; *М. Беломытцев* (Москва) 79; *М. Белоус* (Люберцы) 82; *С. Бобровник* (Чер-

(Продолжение см. на с. 70)

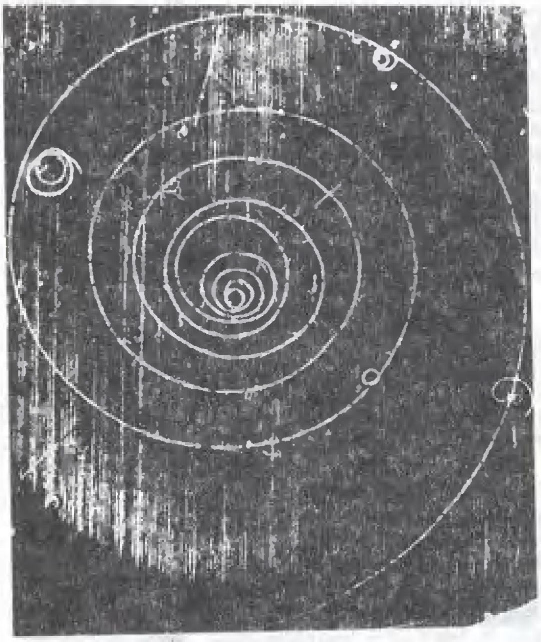
Калейдоскоп „Кванта"

Исследования, которые привели к открытию электрона, начались с попыток объяснить расхождение в поведении катодных лучей под действием магнитных и электрических сил.

Дж. Дж. Томсон

А так ли хорошо вы знаете,

как движутся заряженные частицы ?



В опытах, связанных с открытием электрона, на его движение воздействовали уже хорошо знакомые ученым и практикам электрическое и магнитное поля. И особенности взаимодействия заряженных частиц с этими полями открыли новые сферы их широчайшего применения: в электронике, неузнаваемо преобразившей мир информации и связи, в действующих и проектируемых энергетических установках, например, МГД-генераторах и токамаках, в масс-спектрометрии, позволяющей «взвешивать» атомы электрическим и магнитным полями. Изучение поведения заряженных частиц в полях привело ученых к объяснению явлений космических масштабов — от полярных сияний до процессов, идущих в звездах, дало возможность заглянуть в тайны микромира с помощью гигантских «микроскопов» — ускорителей элементарных частиц.

Этот выпуск «Калейдоскопа» — попытка прояснить картину порой замысловатых движений заряженных частиц, опираясь лишь на школьные знания.

Вопросы и задачи

1. Совпадает ли траектория движения заряженной частицы в электрическом поле с силовой линией этого поля?

2. Протон и α-частица, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Как различаются отклонения частиц полем конденсатора?

3. В металлической трубе переменного сечения движется электрон.

Изменится ли его скорость при прохождении сужения?

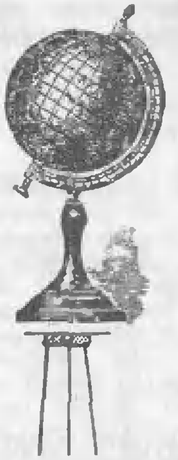
4. В центре равномерно заряженного кольца находится точечный заряд противоположного знака, которому сообщают начальную скорость вдоль оси кольца. Каков характер движения заряда?

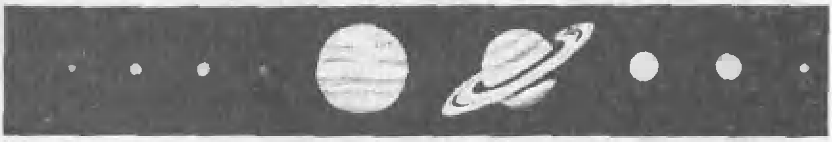
5. Может ли потенциальная энергия заряженной частицы в электростатическом поле оставаться неизменной при движении частицы?

6. Мгновенное значение магнитной индукции в распространяющейся вправо элетромагнитной волне изображается в некоторой точке вектором, идущим от нас. В какую сторону направлено ускорение электрона, оказавшегося в этой точке?

7. Какие из частиц катодных лучей отклоняются на больший угол одним и тем же магнитным полем: более быстрые или медленные?

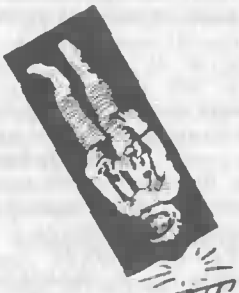
8. Пучок одинаково заряженных частиц, сперва двигавшихся параллельно, под влиянием кулоновских сил постепенно расходится. Как зависит этот эффект от скорости частиц?





9. Представьте, что на стол, обращающийся по орбите вокруг Солнца, «положили» Землю. С какой силой она будет давить на стол?

10. Как изменяется линейная скорость спутника, движущегося по орбите в разреженной атмосфере Земли, из-за сопротивления воздуха?



Мысленный микроопыт

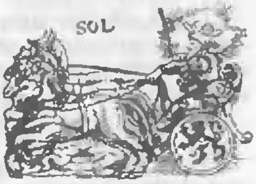
Вообразите себя на месте космонавта, возвращающегося на космический корабль с «избытком» скорости. Можно ли набить шишку, стукнувшись о корабль? Ведь дело происходит в невесомости...

Любопытно, что...

...Марк Твен родился через две недели после появления кометы Галлея в 1835 году, а умер на следующий день после ее максимального сближения с Солнцем в 1910 году. Незадолго до этого Твен в шутку заявил приятелям, что поскольку он родился в год очеред-

ного появления кометы Галлея, то он и умрет сразу после ее следующего возвращения.

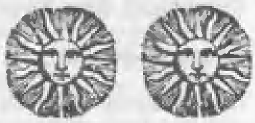
...несмотря на свою принципиальную порочность, система



Птолемея позволяет предсказывать небесные явления с любой степенью точности. С ее помощью, как это ни парадоксально, можно было бы решать некоторые задачи современной космонавтики, например вычислять видимые на небе траектории космических аппаратов.

...среди астрономов в последние годы распространилась гипотеза: у Солнца есть «напарник», который может обращаться вокруг общего с Солнцем центра масс по весьма вытянутой эллиптической орбите. Это предположение получило поддержку палеонтологов, установивших определенную цикличность вы-

мирания видов животного и растительного мира на Земле. Катастрофы связыва-



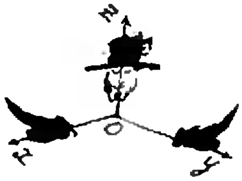
ют с падением «дождя» комет, вызванного сближением «напарника» с Солнцем. Весь путь по орбите отнимает у солнечного «собрата» не менее 26 миллионов лет, причем сейчас он находится на весьма удаленном от нас участке своей траектории, и потому-то его до сих пор никто не обнаружил.

Что читать в «Кванте» об орбитальном движении (публикации последних лет)

1. «Законы Кеплера и школьная физика» — 1986, № 2, с. 49;
2. «Вторая космическая скорость» — 1986, № 3, с. 21;
3. «Как движется Луна?» — 1986, № 4;
4. «Полет к Солнцу» — 1986, № 4, с. 18;
5. «Парадокс спутника» — 1986, № 5, с. 14;
6. «Маневрирование в космосе» — 1987, № 2, с. 48;
7. «Закон всемирного тяготения» — 1987, № 11, с. 36;
8. «Калейдоскоп «Кванта» — 1987, № 11.

„Квант" улыбается

Английский математик Джон Литлвуд (1885—1977) прожил долгую жизнь, наполненную интенсивным математическим творчеством. Он всегда ценил своеобразный математический юмор. В этом апрельском номере «Кванта» мы публикуем несколько шуток, заимствованных из его книги «Математическая смесь». Говорят, что в каждой шутке есть доля истины. Математическому юмору Литлвуда больше подходит переделанная поговорка: «в каждой шутке есть доля шутки».



О математических условностях

В одной книге по механике Литлвуд прочитал: «Оси Ox и Oy — как в двух измерениях, ось Oz — вертикальна». Для него это было совершенно неверно, так как он, Литлвуд, всегда работал, откинувшись в кресле и подняв ноги.

«Как читатель изобразил бы замкнутую кривую (например, окружность), лежащую целиком по одну сторону от одной из своих касательных? Существуют 4 школы; я принадлежу к той, для которой кривая лежит справа от вертикальной касательной; однажды мне пришлось описывать эту конфигурацию без чертежа, но то, что я говорил, оказалось непонятным для представителей 3 остальных школ.»

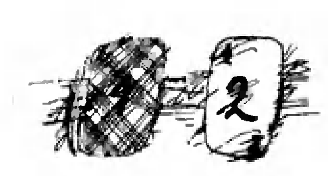
Литлвуд много лет сотрудничал с великим английским математиком Г. Харди. Однажды Литлвуд предложил ему найти опечатку на одной странице их совместной работы. Харди не смог ее обнаружить. Опечатка была в его собственном имени: «G. H. Hardy».

Одна из статей Литлвуда заканчивалась фразой: «Таким образом, σ следует сделать сколь возможно малым». В печатном тексте статьи этой фразы не было, зато стояла едва заметная точка. Наборщики восприняли фразу буквально и напечатали, вероятно, самую маленькую букву σ в истории книгопечатания.

Классификация углов из книги по альпинизму, изданной около 1900 года:

> «перпендикулярно — 60°;
> Мой дорогой сэр, абсолютно перпендикулярно — 65°;
> нависающе — 70°».

«О книгах Жордана говорили, что если ему нужно было ввести четыре аналогичные или родственные величины (такие, как, например, a, b, c, d), то они у него получали обозначения a, M'_3, ε_2, $\Pi''_{1,2}$.»



Парадоксальная игра

Имеется бесконечное количество карт, на обеих сторонах которых написано по натуральному числу. На первой карте написаны цифры 1 и 2, на второй — 2 и 3, на третьей — 3 и 4 и так далее. Игра состоит в следующем: берут произвольную карту и держат ее между двумя игроками так, что один видит одну сторону, а другой — другую. Каждый игрок имеет право спасовать, т. е. отказаться от игры. Если же оба хотят играть, то выигрывает тот, кто видит большее число.

В этой странной игре каждый раз *один* из игроков должен пасовать. Вот математическое доказательство этого утверждения. Если игрок A видит 1, то на обратной стороне карты стоит 2; поэтому A должен пасовать. Если A видит 2, то на обратной стороне стоит или 1, или 3. Если там 1, то пасовать должен B (см. выше), если же B не пасует, то он видит 3 и пасовать должен A. Далее рассуждение проводится по индукции.

Доказательство, как будто, убедительное. А может быть, нет? Поразмыслите-ка над этим...

Парадокс бесконечности

Шары, занумерованные числами 1, 2, 3,..., кладутся в ящик следующим образом. За одну минуту до полудня кладутся шары с номерами от 1 до 10, а шар с номером 1 вынимается обратно. За полминуты до полудня кладутся номера от 11 до 20, а номер 2 вынимается обратно. За треть минуты до полудня в ящик кладутся номера от 21 до 30, а шар с номером 3 вынимается обратно. И так далее. Сколько шаров останется в ящике в полдень?

Ответ, может быть, вас разочарует: ни одного. Какой бы номер мы ни назвали (например, 106), он отсутствует в ящике (так как вынимается на 106-й операции).

Задачи

1. Какой может быть последняя цифра квадрата целого числа, если предпоследняя цифра — нечетное число?

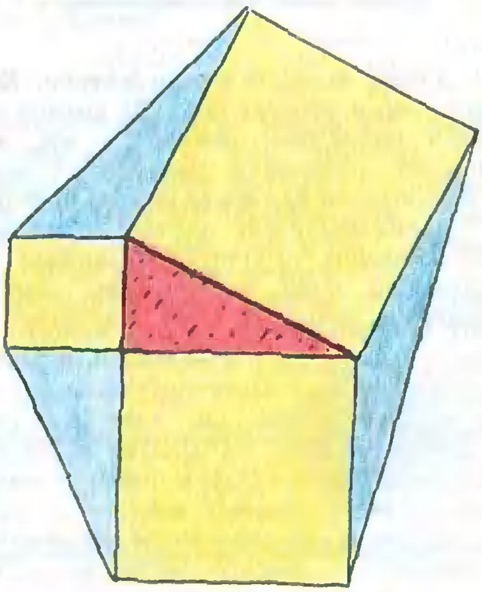
2. В студенческом шахматном турнире приняли участие два школьника. Они вместе набрали 6,5 очков, а все студенты — поровну. Сколько студентов участвовало в турнире? (В турнире каждый участник играет с каждым по одному разу, за выигрыш дается 1 очко, за ничью 0,5 очка, за поражение — 0 очков.)

3. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

```
  КВАНТ
+ КВАНТ
  КВАНТ
  ------
 ЖУРНАЛ
```

4. Докажите признак делимости на 13: число делится на 13 в том и только в том случае, если сумма числа, полученного отбрасыванием последней цифры, и учетверенной последней цифры делится на 13.

5. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты («пифагоровы штаны»). Их вершины соединены так, как показано на рисунке. Покажите, что образовавшиеся треугольники имеют одинаковые площади.



Эти задачи нам предложили Р. Рустамов, А. Маркосян, Х. Жалолов, Б. Гончаренко, Н. Авилов.

Проволока, магнитофон, пишущая машинка и математика

Кандидат физико-математических наук
А. САВИН

Существует простой способ довольно точно измерить диаметр тонкой проволоки с помощью обычной линейки. Для этого проволоку наматывают на карандаш, плотно прижимая виток к витку; считая количество витков, измеряют длину получившегося цилиндра (рис. 1), а затем делят

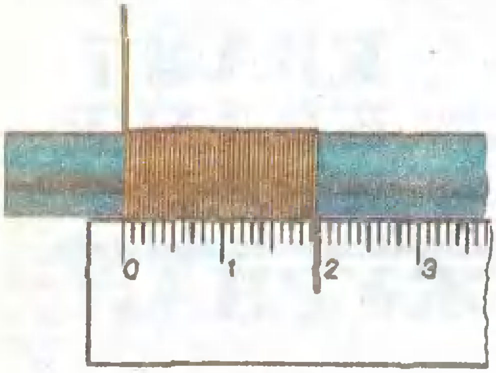


Рис. 1.

эту длину на количество витков. Если, скажем, вы сделали 20 витков, а длина оказалась равной 5 мм, то диаметр проволоки равен 0,25 мм.

А можно ли так же измерять толщину магнитофонной ленты? Конечно же! Возьмем круглый карандаш и будем на него наматывать ленту. Разделив толщину слоя на количество сделанных витков (рис. 2), мы получим толщину ленты.

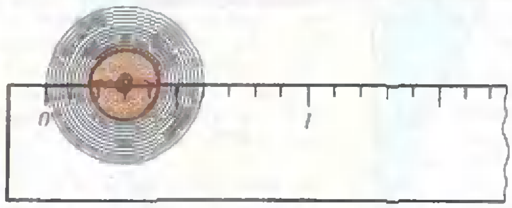


Рис. 2.

Теперь уже несложно найти число витков в катушке магнитофонной ленты*). Измерим диаметр катушки лентой — D (рис. 3) и измерим диаметр

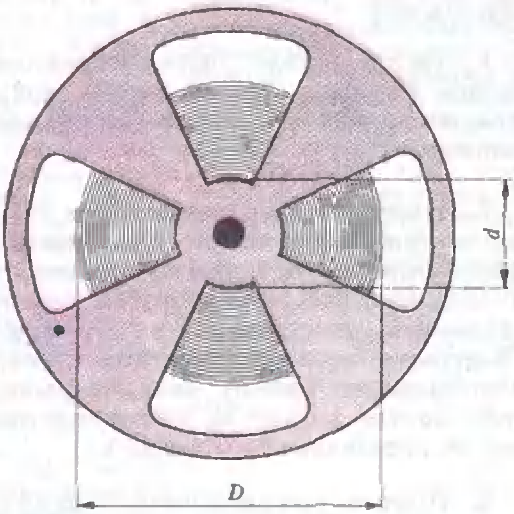


Рис. 3.

катушки, на которую намотана лента — d. Тогда $(D-d):2$ — это толщина слоя ленты, и если l — найденная нами выше толщина ленты, то $\frac{D-d}{2l}$ — количество витков.

Еще проще найти длину магнитофонной ленты. Намотанная на катушку лента имеет форму кольца, площадь которого равна $\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$. Найдем эту площадь иначе. Если толщина пленки l, а длина — L, то площадь кольца равняется lL. Отсюда $lL = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ и $L = \frac{\pi}{4l}(D^2-d^2)$. Для стандартной бобины имеем $D=170$ мм, $d=58$ мм, $l=0{,}038$ мм и $L=527590$.

Поставим катушку на магнитофон и закрепим ее второй конец на другой бобине. Теперь включим магнитофон и понаблюдаем за скоростя-

*) Читатель, возможно, думает, что бывают только кассетные магнитофоны; автор же имеет в виду катушечный. Во всех случаях устройство катушки с лентой должно быть читателю ясно из рисунка 3.

ми вращения обеих катушек. Большая катушка начала вращение постепенно ускоряясь, а маленькая, наоборот, начала свое вращение довольно быстро, а затем стала замедлять ход. Это может показаться *удивительным:* казалось бы, та катушка, на которую наматывается пленка, должна вращаться с постоянной угловой скоростью. Оказывается, пленка перемещается специальным устройством, обеспечивающим постоянную скорость движения пленки вдоль считывающей головки магнитофона. Конечно же, есть и моторы, вращающие кассеты, но они связаны с ними фрикционно (с проскальзыванием) и призваны поддерживать пленку в натянутом состоянии. Вот при *перемотке пленки работают именно они.*

Представьте себе, что катушка — это просто сердечник диаметром d, на который намотана пленка. Предположим, что диаметр этого сердечника с намотанной лентой равен D. В начальный момент пленка выглядит, как показано на рисунке 4, но

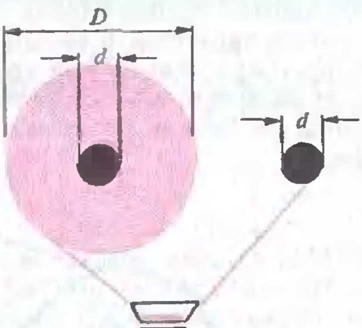


Рис. 4.

после включения магнитофона левый диск будет уменьшаться, а правый — увеличиваться (рис. 5). Понятно, что увеличение правого диска будет

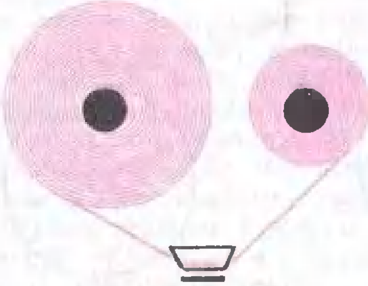


Рис. 5.

происходить быстрее, чем уменьшение левого (один виток левой катушки соответствует нескольким виткам правой), так что возникает опасение — не столкнутся ли они (рис. 6)? *Посмотрим.*

Рис. 6.

Пусть расстояние между осями катушек равно R. В начале расстояние между катушками равно $\left(R-\frac{D+d}{2}\right)$ — (см. рис. 4). Пусть длина перемотанной пленки равна x. Посчитаем расстояние между катушками теперь. Площадь большой катушки уменьшилась на xl (l — толщина пленки) и стала равной $\frac{\pi D^2}{4}-xl$, отсюда радиус этой катушки станет равным $r_1=\sqrt{\frac{D^2}{4}-\frac{xl}{\pi}}$. Соответственно радиус второй катушки увеличится, ее площадь станет равной $\frac{\pi d^2}{4}+xl$, а радиус — $r_2=\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{xl}{\pi}}$. Теперь расстояние между катушками будет равным

$$R-\left(\sqrt{\frac{D^2}{4}-\frac{xl}{\pi}}+\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{xl}{\pi}}\right).$$

Старшеклассники *могли бы найти* то значение x, при котором эта величина примет наименьшее значение, при помощи производной, а мы получим тот же результат, исходя просто из здравого смысла.

Взгляните на рисунок 7. Пусть некоторый слой пленки некоторой толщины h перемотан с одной катушки на другую. При этом радиус первой катушки стал равным a, а радиус второй катушки до перемотки был равен b, причем $a>b$. Ясно, что если одну и ту же пленку наматывать *сначала на более толстую катушку,* а потом на более тонкую, то количество слоев в первом случае будет меньше, чем во втором. Таким образом, при этой перемотке вторая катушка «растолстеет» больше, чем первая «похудеет». И этот процесс будет проходить до тех пор, пока обе катушки не станут одинаково «толстыми», т. е. $r_1=r_2$. В этом случае сумма r_1+r_2 будет наибольшей, а разность $R-(r_1+r_2)$ — наименьшей.

Найдем это расстояние. Так как $r_1=r_2$, то $\frac{D^2}{4}-\frac{xl}{\pi}=\frac{d^2}{4}+\frac{xl}{\pi}$. Отсюда $x=\frac{(D^2-d^2)\pi}{8l}$, $r_1=r_2=\sqrt{\frac{D^2}{4}-\frac{D^2-d^2}{8}}=$ $=\frac{\sqrt{D^2+d^2}}{2\sqrt{2}}$, $r_1+r_2=\frac{\sqrt{D^2+d^2}}{\sqrt{2}}=$ $=\sqrt{\frac{D^2+d^2}{2}}$. Значит, если R больше, чем $\sqrt{\frac{D^2+d^2}{2}}$, то пленку удается прослушать. А если нет — то увы...

Сев за пишущую машинку, чтобы перепечатать этот рассказ, я вновь увидел предмет моих размышлений — ленту, перематывающуюся с одной катушки на другую (рис. 8). Это — красящая лента, переносящая форму литеры, ударяющей по каретке, на бумагу. В отличие от магнитофонной катушки, катушка, на которую наматывается машинописная лента, вращается равномерно — на один и тот же угол α (в моей машинке на $12°$). При этом лента перемещается вдоль каретки на некоторую величину, и следующий удар приходится на другое место ленты.

Попробуем определить эту величину перемещения. Если обозначим радиус катушки с наматывающейся лентой через r (рис. 9), то это перемещение равно $\frac{2\pi r\alpha}{360°}$, если α выражается в градусах, и αr, если α выражается в радианах. Как видим, счет углов в этом случае удобнее вести в радианах.

Но ведь величина r не постоянна! В начале намотки ленты r мало — около 5 мм, а в конце — около 25 мм, при этом величина перемещения меняется от 1 до 5 мм. Значит, по одним участкам ленты литеры бьют чаще, чем по другим участкам той же длины.

Посмотрим на просвет долго работавшую ленту — она изношена более-менее одинаково. Почему? А потому, что катушки вращаются сначала в одну сторону, а потом в другую и та часть ленты, которая была в ее начале, потом окажется в ее конце.

«На закуску» задача для самостоятельного решения: *где же лента больше изнашивается — по краям или в середине?*

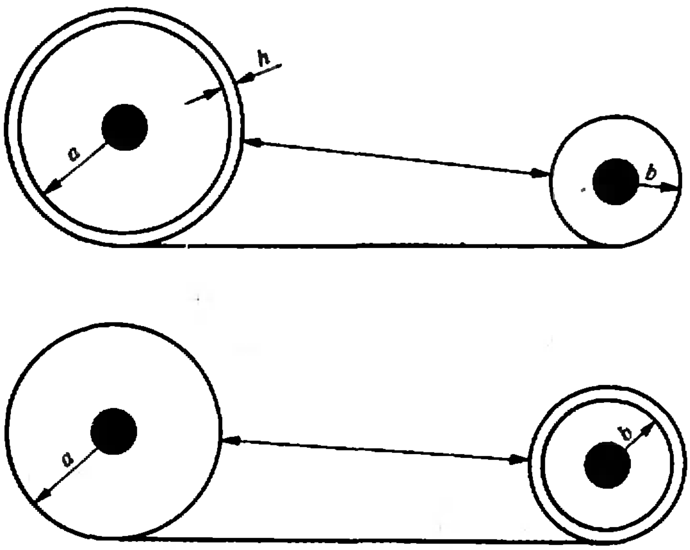


Рис. 7.

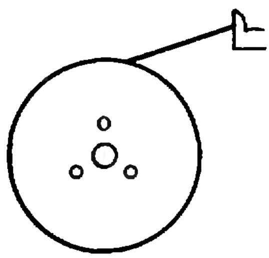


Рис. 8.

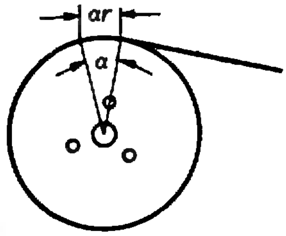
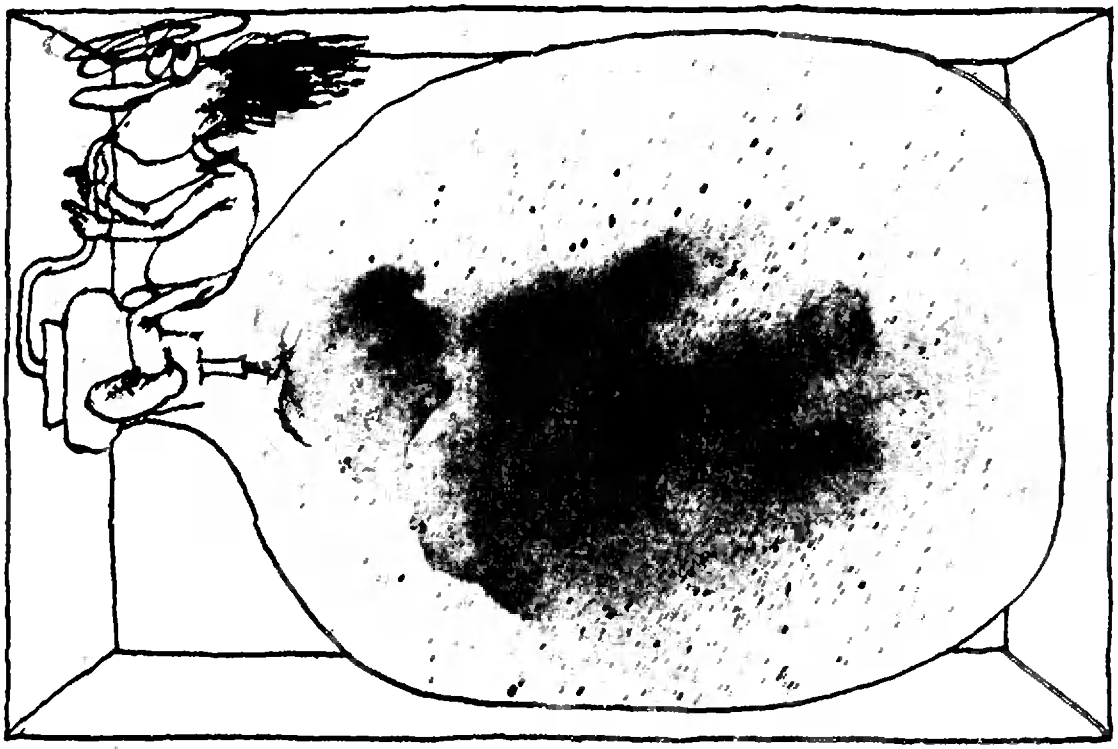


Рис. 9.



Лаборатория „Кванта"

Зеленый туман

В. МАЙЕР

Вы когда-нибудь видели зеленый туман? Нет? Не огорчайтесь, это вполне поправимо. Сейчас вы увидите сами и покажете вашим товарищам не только зеленый, но и голубой, и красный, и вообще — разноцветный туман.

Демонстрационный опыт. Удобнее всего опыт проводить в школьном физическом кабинете на демонстрационном столе. Для опыта вам понадобится прежде всего источник света. Это может быть, например, автомобильная лампочка, рассчитанная на рабочее напряжение 6 В и дающая свет силой 21 кд, или школьный осветитель для теневого проецирования (нужно только придвинуть его лампочку вплотную к собирающей линзе осветителя или линзу убрать совсем). Подойдет и любой другой источник света, лишь бы он имел небольшие размеры и не слишком ярко освещал находящиеся рядом предметы. Проще всего этого добиться, разместив источник за отверстием в большом черном экране.

Итак, установите лампочку *1* (рис. 1) и на расстоянии 20—40 см от нее расположите стеклянную бутыль *2* емкостью 20 л. (Такие бутыли диаметром примерно 25 см и высотой около 45 см с горлышком, имеющим отверстие диаметром 3,5—4,5 см, продаются в хозяйственных магазинах.) Бутыль нужно тщательно вымыть, непосредственно перед опытом ополоснуть холодной водой и внешнюю поверхность насухо протереть. На стенках бутылки ни снаружи, ни изнутри не должно оставаться капель воды.

Бутыль закройте резиновой пробкой *3*, сквозь отверстие которой пропущена стеклянная или металлическая трубка *4*. Трубку резиновым шлангом *5* соедините с нагнетающим насосом *6*. На рисунке показано также положение глаза наблюдателя *7*, расстояние от которого до бутыли может быть произвольным в пределах от 1 до 6 м.

Включите лампочку, в кабинете создайте темноту или полумрак и накачайте в бутыль воздух. Попросите зрителей внимательно смотреть на лампочку и после небольшой паузы быстро выньте из горлышка бутыли пробку. Тотчас же вокруг лампочки, в пределах размеров бутыли, можно будет увидеть широкие и довольно яркие разноцветные кольца.

Что происходит в бутыли? Вы накачиваете воздух, и давление в бутыли повышается. Когда вы делаете паузу, температура воздуха в бутыли становится комнатной. На дне бутыли имеется немного оставшейся после ополаскивания воды, а на стенках — тонкая водяная пленка. Поэтому помимо воздуха в бутыли находится насыщенный водяной пар.

Вы выдергиваете пробку, и сжатый в бутыли воздух быстро расширяется. При этом, так как процесс близок к адиабатическому (т. е. происходит без теплообмена с окружающей средой), температура воздуха в бутыли понижается, пар становится пересыщенным и легко конденсируется в капельки воды на пылинках, которых всегда так много в воздухе.

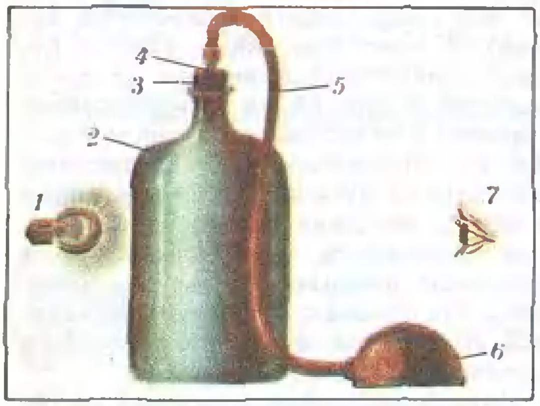


Рис. 1.

Таким образом в бутыли образуется туман. Вы его без труда обнаружите, если посмотрите на бутыль сбоку: в момент возникновения тумана идущий от лампочки световой пучок за счет рассеяния становится видимым. Сразу бросается в глаза, что туман в бутыли довольно редкий. Это свидетельствует о том, что, несмотря на значительную, по нашим субъективным оценкам, запыленность воздуха, пылинок, как центров конденсации водяного пара в бутыли, сравнительно мало.

Почему возникают кольца? В заполняющем бутыль воздухе плавают составляющие туман сферические капельки воды. Они прозрачны, значит, свет может преломляться в них, и они достаточно малы, следовательно, свет может дифрагировать на них. И преломление, и дифракция света в принципе могут дать разноцветные кольца. Какое же явление ответственно за результаты наших опытов?

Преломлением и отражением света в сферических каплях воды объясняется радуга. Но наблюдать радугу можно лишь под вполне определенными углами. Кроме того, радуга, в первом приближении, не зависит от размеров капель. В проделанных же нами опытах диаметры колец непрерывно изменялись, а это можно объяснить только изменением размеров капель тумана. Наконец, хорошая яркая радуга получается на крупных каплях воды диаметром 1—2 мм, а таких капель в бутыли заведомо нет. Итак, мы заключаем, что *наблюдаемые в описанных опытах разноцветные кольца обусловлены, скорее всего, дифракцией света на мелких каплях воды.*

А что говорит литература? Не может быть, чтобы дифракция света на множестве мелких круглых одинаковых частичек никогда раньше не обсуждалась в журнале. И действительно, полистав подшивки старых номеров «Кванта», вы обнаружите несколько соответствующих материалов. Так, в 1977 году Н. М. Ростовцев описал прекрасные опыты по дифракции света на сплющенном клубке тонкой проволоки, на множестве частичек ликоподия и даже на эритроцитах крови [1]*). Спустя пять лет Я. Е. Амстиславский вновь вернулся к этим явлениям, но описал их с несколько иных позиций [2]. Прочитав эти статьи, вы узнаете, что разноцветные кольца вокруг источника белого света называются венцами и часто наблюдаются в естественных условиях. Очень много и интересно о венцах рассказывается в книге М. Миннарта [3]. В ней, кроме того, очень удачно сформулированы основные положения теории:

«а) Дифракция на сравнительно плотном облаке, состоящем из водяных капель одинаковой величины, происходит так же, как на одной капле, лишь интенсивность дифрагировавшего света больше.

б) Дифракция на капле происходит так же, как на малом отверстии в экране...

в) Дифракция на отверстии рассчитывается согласно принципу Гюйгенса: принимается, что каждая точка отверстия излучает световые волны, и определяется, как интерферируют эти волны от всех частей отверстия, приходя в глаз».

Что касается количественных расчетов, их вы можете найти в упомянутых статьях, а также в статье Е. Е. Городецкого [4]. Нелишне, впрочем, напомнить, что чем меньшие размеры имеют препятствия, тем большими размерами при прочих равных условиях обладают соответствующие дифракционные картины.

Вообще о венцах написано немало. Удивительно, однако, что изумительные по красоте и простоте опыты с искусственным туманом даже не упоминаются! Лишь предприняв специальные поиски, мы, наконец, обнаружили в книге П. И. Броунова [5] изложение экспериментов с искусственным туманом, выполненных еще в конце прошлого века.

Самокритика. Предложенный вам демонстрационный опыт получается всегда, но яркость, контрастность, размер и длительность существования венцов от опыта к опыту меняются довольно значительно. Надо бы исследовать явление подробнее, но изображенная на рисунке 1 установка не позволяет сделать это.

В самом деле, она рассчитана на то, что опыт осуществляют минимум два человека: один создает условия эксперимента, другой проводит наблюдения. Это, конечно, крайне неудобно. Кроме того, трудно обеспечить даже примерное равенство условий опыта либо более или менее надежно проконтролировать их изменения. Наконец, частые накачивания воздуха насосом утомительны чисто физически и отвлекают от основного. Поэтому желательна другая установка, свободная от перечисленных и иных недостатков.

Еще один способ наблюдения венцов. Основной элемент рекомендуемой установки изображен на рисунке 2. Стеклянная колба *1* емкостью 0,5 л закрыта резиновой пробкой *2* со стеклянной трубкой *3*, на которую надета резиновая груша *4* диаметром около 8 см.

Вы, безусловно, и сами догадались, что в исследованиях целесообразно использовать небольшой сосуд, а насос заменить подходящим устройством, позволяющим без особых сложностей изменять давление газа в этом сосуде. Несомненно, вы уже хорошо представляете и порядок проведения опытов, но все же изложим его.

Колба должна быть чистой, снаружи сухой и без капель воды на стенках, которые так мешают наблюдениям. Перед опытами колбу ополосните холодной водой из-под крана. Небольшой источник света поместите на расстоянии 1—3 м от глаза. Перед глазом на подходящей по высоте подставке поставьте колбу и закройте ее резиновой пробкой с грушей. Теперь нажмите на грушу, сделайте небольшую паузу и, отпустив грушу, наблюдайте разноцветные венцы вокруг источника. При проведении опытов колбу лучше держать двумя пальцами вблизи пробки, чтобы зря

*) В квадратных скобках принято обозначать номер литературного источника, библиографические сведения о котором приводятся в конце статьи.

не нагревать ее и не оставлять отпечатков пальцев на стенках.

Исследование. Собрав установку, получите венцы вокруг источника света. Медленно сжимайте и отпускайте грушу. При этом венцы сначала увеличиваются, а затем уменьшаются. Полученный результат можно объяснить только тем, что при увеличении давления капельки тумана становятся меньше, а при уменьшении — больше. Это вполне естественно, так как с адиабатическим ростом давления температура газа в колбе повышается, и вода испаряется из капелек, а по мере снижения давления — конденсируется в них.

Повторите опыт снова и снова. Вы увидите, что яркость и размеры дифракционной картины постепенно уменьшаются. Примерно через две минуты венцы исчезают совсем и не появляются, сколько бы вы ни нажимали на грушу. Попробуем объяснить это.

Мы уже говорили, что уменьшение размеров картины вызвано ростом диаметра капелек тумана. Яркость же картины может снижаться только потому, что уменьшается общее число капелек тумана в колбе. Но почему это происходит? Может быть, капельки испаряются? Если на мгновение допустить это невероятное предположение, то сразу обнаруживается противоречие: при испарении капельки должны уменьшаться, а дифракционная картина — увеличиваться, но все происходит как раз наоборот. Остается наиболее естественное объяснение — водяные капельки просто оседают на дно колбы.

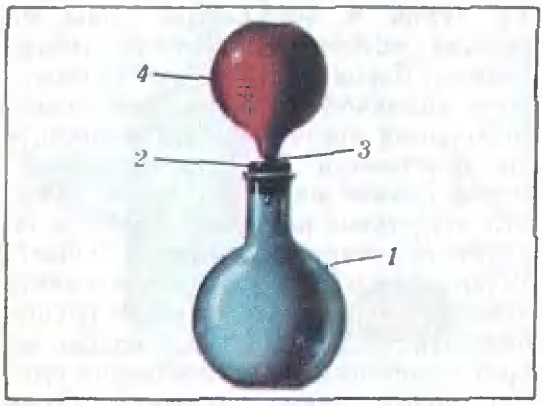


Рис. 2.

Действительно, капельки воды конденсируются на пылинках и, оседая на дно колбы, увлекают их за собой. Воздух в колбе становится все чище, центров конденсации остается все меньше, значит, капельки тумана образуются все более крупными и редкими, вследствие чего картина постепенно уменьшается и теряет яркость, пока вовсе не пропадает.

Понятно, что способность колбы давать венцы можно восстановить, если в нее ввести взвешенную в воздухе пыль. Сделайте, например, так. Откройте колбу, приблизьте конец стеклянной трубки, торчащий из пробки, к горлышку колбы и несколько раз сожмите и отпустите грушу. Тем самым вы продуете колбу комнатным воздухом, который всегда несколько запылен, и сможете снова с успехом повторять опыты по образованию венцов.

Попробуйте вводить в колбу разные «сорта» пыли, набирая ее в резиновую грушу с корешков книг, долго простоявших на полке, с ворсистой одежды и т. д. Проследите за соответствующими изменениями дифракционной картины и убедитесь в том, что пыль не позволяет существенно увеличить число центров конденсации пара в колбе. А что если воспользоваться дымом?

Напустите в колбу немного дыма от тлеющего на конце проволоки клочка ваты. Сжав и отпустив грушу, вы получите густой белый туман, сквозь который ничего хорошего не видно. Он появляется потому, что частицы дыма весьма многочисленны, на каждой из них конденсируется водяной пар, и в результате образуется очень много очень мелких капелек воды.

Попробуйте теперь уменьшать количество центров конденсации пара. Для этого откройте колбу и продуйте ее воздухом. Закрыв колбу

Рис. 3.

Рис. 4.

пробкой с резиновой грушей, вновь получите туман в ней. Повторяя эти операции, проводите наблюдения. Вы обнаружите, что по мере уменьшения центров конденсации пара в колбе у наблюдаемого в опыте белого круга с центром в источнике света появляется красноватая или, скорее, коричневатая кайма. Постепенно белый круг желтеет, а кайма формируется в коричневато-красное кольцо. Затем это кольцо становится красным, а за ним появляется синее. С каждым разом картина становится все более яркой и в ней появляются новые цвета: малиновый, зеленовато-голубой, сиреневый — всего не перечислить!

Напомним, что все эти явления обусловлены постепенным увеличением диаметра капелек тумана. В некоторый момент, глядя с расстояния вытянутой руки на колбу, вы вдруг заметите, что вся она почти равномерно окрашена в определенный яркий и насыщенный цвет (рис. 3). Это непривычное и чрезвычайно красивое явление можно объяснить интерференцией света, сфокусированного каплями и дифрагированного на них. При дальнейшем увеличении диаметра капелек тумана возникают широкие венцы, подобные показанным на рисунке 4.

Заключение. Вот и окончен рассказ о разноцветном тумане. Конечно, надо было бы упомянуть о роли ионов, которые легко получить в колбе с помощью пьезоэлектрической зажигалки. Хорошо бы рассказать о дифракционной картине в монохроматическом свете. Любопытно подробнее рассмотреть динамику явления. Было бы совсем неплохо немного посчитать.

Но все это мы вам предлагаем проделать самостоятельно. Желаем успеха!

Литература

1. Ростовцев Н. М. Как с помощью проволоки измерить длину световой волны. «Квант», 1977, № 8, с. 34.
2. Амстиславский Я. Е. Необычайные явления вокруг обычных источников света. «Квант», 1982, № 6, с. 15.
3. Миннарт М. Свет и цвет в природе. М.: Наука, 1969, с. 222.
4. Городецкий Е. Е. Дифракция света на круглом отверстии. «Квант», 1989, № 11, с. 46.
5. Броунов П. И. Атмосферная оптика. М.: Гостехиздат, 1924, с. 105.

Я — значит ракета

Космический полет — это так просто!?..

В. НИКОЛАЕВ

«...командир космического корабля майор Романов..., бортинженер Мухин... В ноль часов сорок две минуты произошла стыковка космического корабля с орбитальной научной станцией...»

— Очередной выпуск Героев Советского Союза? — кивнув на приемник, спросил мужчина.

— Не понял...

— Сели, полетели, состыковались, перевыполнили запланированный объем работ, благополучно, в расчетный срок приземлились в заданном районе. И еще: самочувствие отличное. При чем же здесь звание Героя Советского Союза, а?

— Наверное, не все там бывает гладко...

— Так и скажите, уважаемые! — возмутился мужчина.— Свои же, поймем! Не такое понимали... Вы случайно не газетчик?..

Е. Месяцев.
«Звездные дожди»
(сценарий кинофильма)

22 июля 1987 года с космодрома «Байконур» стартовал очередной космический корабль. Через 10 минут его экипаж уже был на околоземной орбите. В этом событии не было бы ничего необычного — к космическим полетам мы уже начали привыкать,— если бы не одно обстоятельство. В корабле «Союз ТМ-3» на орбиту отправились космонавты, открывшие третью сотню землян, побывавших в космическом пространстве. Командиром экипажа «Союз ТМ-3» был Александр Викторенко. Пройдет одна неделя, и вместе с ним на Землю со станции «Мир» вернется другой Александр — Лавейкин, замкнувший список второй сотни.

Кто же эти люди, поднявшиеся над всеми нами, взглянувшие на наш мир с высоты сотен километров? Герои-супермены или счастливчики, которым улыбнулась судьба? Так ли уж страшен космический полет или, как пошутил один советский космонавт, летать может каждый, кто самостоятельно добирается до своего рабочего места?

...В 1875 году совершил полет воздушный шар «Зенит», на борту которого находились три французских воздухоплавателя. Пилот Тиссандье, единственный оставшийся в живых, рассказал о том, что товарищи его «уснули», не сделав даже робкой попытки спастись. Он рассказал, как постепенно делалось необычным его состояние, ослабевали разум и тело, становилось безразличным все вокруг. Полет проходил всего лишь в восьми километрах от поверхности Земли...

...Год назад недалеко от материка в результате аварии затонула советская атомная подводная лодка. Из 69 членов экипажа были спасены только 27 человек. Многие из погибших потеряли жизнь уже после эвакуации с тонущего судна...

...За двадцать лет (в пятидесятые и шестидесятые годы) военно-воздушные силы США потеряли почти восемь тысяч самолетов, во время катастроф погибло около 8600 летчиков...

Можно ли хотя бы предположить, что космическая среда, со всеми своими неизвестностями и даже тайнами, менее опасна для человека, чем земная, кажущаяся нам такой обжитой? Существуют оценки американских специалистов, в соответствии с которыми на каждую тысячу полетов пилотируемых кораблей с пребыванием в космосе в среднем 24 часа (а таких коротких полетов уже давно практически не бывает) следует ожидать не менее 95 катастроф и аварий. Из них 65 % — в начале и конце полета, т. е. на стартовом участке и при возвращении на Землю (соответственно 50 и 15 процентов), а 25 % — в полете.

Заглянем в прошлое. За 29 лет совершено 129 космических полетов.*) Большая часть из них (особенно в первые годы) сопровождалась отказами разной степени сложности и опасности для экипажей. Расскажем лишь о некоторых из них.

21 июля 1961 года майор ВВС США В. Гриссом совершил суборбитальный полет на корабле «Меркурий-4». При посадке произошел подрыв люка, и корабль Гриссома затонул. Космонавту удалось спастись.

Через четыре года нештатную посадку (из-за отказа в контуре управления) совершил экипаж «Восхода-2».

В том же году похожий отказ (в бортовой ЭВМ) произошел и на корабле «Джемини-4». Еще через два месяца — выход из строя элементов системы электропитания, и руководители полета «Джемини-5» срочно изменяют программу испытаний.

Едва не закончился катастрофой полет корабля «Джемини-8» (март 1966 г.). После того как корабль произвел стыковку со ступенью ракеты-носителя «Аджена», началось его вращение. С трудом задействовав ручное управление, космонавты вернули корабль на Землю.

1967 год оказался наиболее трагичным для советской и американской космических программ. В конце января из-за пожара внутри корабля на стартовой позиции погиб экипаж, готовившийся к первому полету по программе «Аполлон». Командиром экипажа был уже известный нам В. Гриссом, которого в США называли самым невезучим из американских космонавтов. Гриссому принадлежат слова, сказанные им после полета на «Джемини-3»: «Если бы нам пришлось погибнуть, то мы бы хотели, чтобы люди смирились с этим... Завоевание космоса стоит такого риска...»

Три месяца спустя, при завершении первого полета по программе «Союз», погиб В. Комаров. Катастрофа произошла из-за отказа парашютной системы.

Трагедии приостановили космические полеты как в СССР, так и в США. Возобновились они спустя полтора года. Поначалу все шло сравнительно удачно. Но в 1970 году — следующий удар: на космическом корабле «Аполлон-13» взорвался баллон с жидким кислородом. Осколками поврежден другой баллон. До Земли более 300 тысяч километров, к тому же корабль

*) Данные на 10 марта 1990 г.

продолжает удаляться в сторону Луны. Недостаток электроэнергии заставляет экипаж выключить все системы, прямо не участвующие в возвращении на Землю. Температура внутри корабля опускается до отметки 5 °С. Используя двигатели и ряд систем неотработавшего пока лунного модуля, экипаж совершает облет Луны и направляет основной блок к Земле.

Через год, после завершения первой вахты на первой орбитальной станции «Салют», в результате разгерметизации кабины спускаемого аппарата на участке посадки гибнет экипаж корабля «Союз-11» — Г. Добровольский, В. Волков, В. Пацаев.

Нет нужды перечислять все аварии, произошедшие с советскими и американскими космонавтами до трагической гибели многоразового корабля «Чэлленджер» (в 1986 г.). Отметим лишь две аварии с ракетой-носителем «Союз». В первом случае (1974 г.) в результате отказа двигателей III ступени корабль (с космонавтами В. Лазаревым и О. Макаровым) по весьма крутой траектории совершил посадку в районе реки Амур. При этом перегрузка достигала 20 и более единиц.

Во втором случае (1983 г.) авария произошла на стартовой площадке. Одна-две секунды отделяли космонавтов В. Титова и Г. Стрекалова от гибели, но успела сработать система аварийного спасения (САС), буквально вырвавшая корабль с космонавтами из взрывающегося носителя.

Отсутствие САС на многоразовых кораблях «Спейс шаттл» стоила жизни семерым американским космонавтам во время злополучного старта «Чэлленджера».

Если подсчитать скрупулезно все малые и большие аварии, произошедшие за почти тридцатилетнюю историю освоения человеком космического пространства, то цифры, названные американскими специалистами, не покажутся преувеличенными.

(К сожалению, терниями покрыта не только дорога к звездам, но и приготовления к ней. Космонавты гибли на разных стадиях подготовки к космическому полету. Среди них — В. Бондаренко, входивший в первый, «гагаринский» отряд. Причиной его гибели стал пожар, произошедший во время испытаний в сурдобарокамере в 1961 году, незадолго до полета Ю. Гагарина. Последним в трагическом списке стоит имя американского астронавта С. Григгса, погибшего в прошлом году в тренировочном авиационном полете.)

До сих пор речь шла лишь об одной стороне, участвующей, или, правильнее сказать, реализующей космический полет,— о ракетно-космической технике. Но есть еще и вторая — сам человек. «Космонавт — не бесчувственный фантом, не кукла, вмонтированная в сложный космический аппарат. Он живой человек со своими слабостями,...» Прервем в этом месте цитату, чтобы вернуться к ней позже. Под этими словами стоит подпись человека, знающего профессию космонавта не понаслышке: В. Шаталов трижды командовал экипажами, осуществлял стыковки с кораблем «Союз» и станцией «Салют».

Конструкторы космических кораблей, разработчики систем, врачи и психологи уделяют большое внимание обеспечению таких условий космического полета, при которых не только не будет нанесен вред организму космонавтов, но и полностью будут реализованы достоинства человека, отсутствующие у машины.

Сейчас, когда максимальная продолжительность полета на космической орбите составила 326 суток (Ю. Романенко), могут показаться несерьезными опасения, мучившие тех, кто готовил в первый полет Юрия Гагарина. Не все, возможно, знают, что, опасаясь за его психику, конструкторы заблокировали систему управления, а число 125, позволявшее пилоту космического корабля, после его набора на пульте, снять блокировку, записали на внутренней стороне конверта. Конверт же закрепили на стенке кабины «Востока».

А опасения (не конкретно за Гагарина, конечно) были вполне серьезными. Самые мрачные прогнозы (немецкого ученого Трёбста) не исключали того, что под воздействием «космического ужаса» космонавт не только утратит способность к разумным действиям, но и причинит самому себе вред, а может, и уничтожит себя...

Были ли основания для таких опасений? Судите сами. Во время многочисленных экспериментов с имитацией условий космического полета у некоторых испытуемых появлялись такие нарушения психики, как галлюцинации, потеря способности ориентироваться, ощущение страха и прочее.

В книге Ю. Гагарина и В. Лебедева «Психология и космос» описываются реакции испытуемых в условиях одиночества. «Ситуация, казалось бы, самая безобидная. Но вот один очень квалифицированный летчик почувствовал головокружение, хотя камера не сдвинулась с места. Другому среди приборов пульта управления стали мерещиться какие-то незнакомые лица. У третьего, по профессии тоже пилота, когда «полет» подходил к концу, на его глазах приборная доска вдруг начала «таять и капать на пол». Четвертый жаловался на боль в глазах из-за расплывчатого изображения на экране телевизора, хотя экран был совершенно чист. Напрасно его пытались убедить, что ничего не произошло,— он требовал немедленного окончания опыта и, когда вышел из камеры, заявил, что, помимо зрительных иллюзий, он чувствовал, как над ним смыкаются стены помещения.» Таких случаев авторы книги приводят много. А как же быть, когда, помимо одиночества и изоляции, приходится испытывать и невесомость, и сенсорный голод, и изменение пространственной и временной структуры, и ограничение личностно-значимой информации, и, наконец, угрозу для жизни?..

Но, скажет читатель, выдюжил же Гагарин, как выдюжили и другие космонавты. И никто из них не сошел с ума, не подвел тех, кто их отправлял в полет... Здесь самое время привести вторую часть цитаты из высказывания В. Шаталова: «...но и со своей силой — ума, изобретательности, мужества, со своим высочайшим чувством ответственности за себя, за товарищей, за порученное дело. В любой момент пребывания в космосе может случиться так, что только он, космонавт, будет способен принять и осуществить единственно верное решение. Ибо Космос — это сумма не до конца познанного, это всегда риск, это работа на верхнем пределе человеческих возможностей...»

Именно человек делает машину надежной, способной выйти из затруднительной, а часто и аварийной ситуации. В той же книге «Психология и космос» приводятся результаты сравнения американскими специалистами надежности работы бортовых систем космических кораблей с участием и без участия оператора. В одном случае оператор должен был при получении сигналов от приборов принимать решения по управлению кораблем. В остальных же опытах действовали только автоматы, при этом надежность аппаратуры, как обычно, повышалась дублированием элементов схемы. Были обследованы четыре системы: с двойным, тройным, четырех- и пятикратным дублированием.

Сперва надежность всех пяти систем была равной. Но уже на четвертый день имитированного полета наметилась разница. Через две недели надежность систем с двух-, трех- и четырехкратным дублированием элементов стала неудовлетворительной. С пятикратным дублированием — тоже недостаточно высокой. В то же время система с участием человека свою надежность не потеряла.

В качестве примера, подтверждающего сказанное, можно вспомнить полет по окололунной орбите корабля «Аполлон-10». Когда двое космонавтов отрабатывали маневры на лунной кабине, отделившейся к тому времени от основного блока, началось ее непредвиденное вращение. В какой-то момент космонавтам даже показалось, что они падают на Луну. Только мужество и реакция командира корабля Т. Стаффорда позволили избежать падения. Переключив управление на ручное, он стабилизировал корабль.

И в следующем полете (именно тогда была совершена историческая посадка на Луну) лишь мастерство Н. Армстронга — «человека-машины», как его называли американцы,— помогло совершить благополучное прилунение в то время, когда до команды об отказе от посадки оставалось всего 10 секунд полета.

Ну и самый яркий пример — спасение станции «Салют-7» экипажем корабля «Союз Т-13» в составе В. Джанибекова и В. Савиных. Станция потеряла управление, источники питания, связанные с солнечными батареями, не давали тока, не работала радиосистема, обеспечивавшая сближение и стыковку. Несмотря на все трудности, космонавты осуществили сборку и перешли из корабля в станцию. То, что они увидели внутри, позволяло им без промедления возвращаться на Землю. Космонавты поступили иначе. День за днем, прибор за прибором восстанавливали они станцию. Горячую пищу им довелось попробовать лишь спустя две недели. Наконец, произошло «возрождение из пепла».

Значит, гимн человеку? Конечно... но следующий экипаж, а вернее, один из его членов, перечеркивает усилия товарищей. Его самочувствие заставляет руководителей полета свернуть программу и срочно возвратить экипаж на Землю... Эта была последняя экспедиция на «Салют-7».

Что же дальше? Заглянем на десять лет вперед, в XXI век, в третье тысячелетие. Какие физические и психические качества потребуются от космонавтов? Какими специальностями они должны будут владеть? Летными? Техническими? А может, они будут специалистами в точных науках? в биологии и медицине? астрономии, геологии, материаловедении?.. Станет ли космический полет доступным для человека, не обладающего абсолютным здоровьем?

Увидим, ведь осталось не так уж и долго ждать. А главное, космонавты будущего тысячелетия уже среди нас, среди вас.

Что же касается числа 125, того самого, что под таким секретом доставляли на борт «Востока» и о котором Ю. Гагарин должен был узнать только в полете, после вскрытия конверта, то теперь известно: по крайней мере двое из нескольких специалистов, знавших код, сообщили его Гагарину до старта, доверяя больше его силе духа, нежели бумаге, которая могла и уплыть в невесомости...

«И возвращается ветер...», или Периодичность в математике

(Начало см. на с. 6)

из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст, например: ...мама мыла раму мама мыла раму... (А если бы лента была ограничена слева, то мог бы наблюдаться и предпериод.)

4*). Имеется неограниченное число черных и белых кубиков. Надо построить из них сплошную башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый черный кубик граничил с четным числом белых, а каждый белый — с нечетным число черных. При любом ли заданном нижнем слое кубиков такую башню (конечной высоты) можно построить?

5*) (на исследование). Бесконечная в обе стороны полоса клетчатой бумаги состоит из черных и белых клеток. Каждую секунду клетка, имеющая четное число черных соседей становится белой, а имеющая нечетное число черных соседей — черной. Докажите, что:

а) если через 2^n секунд исходная раскраска повторится, то она периодична с периодом $3 \cdot 2^n$;

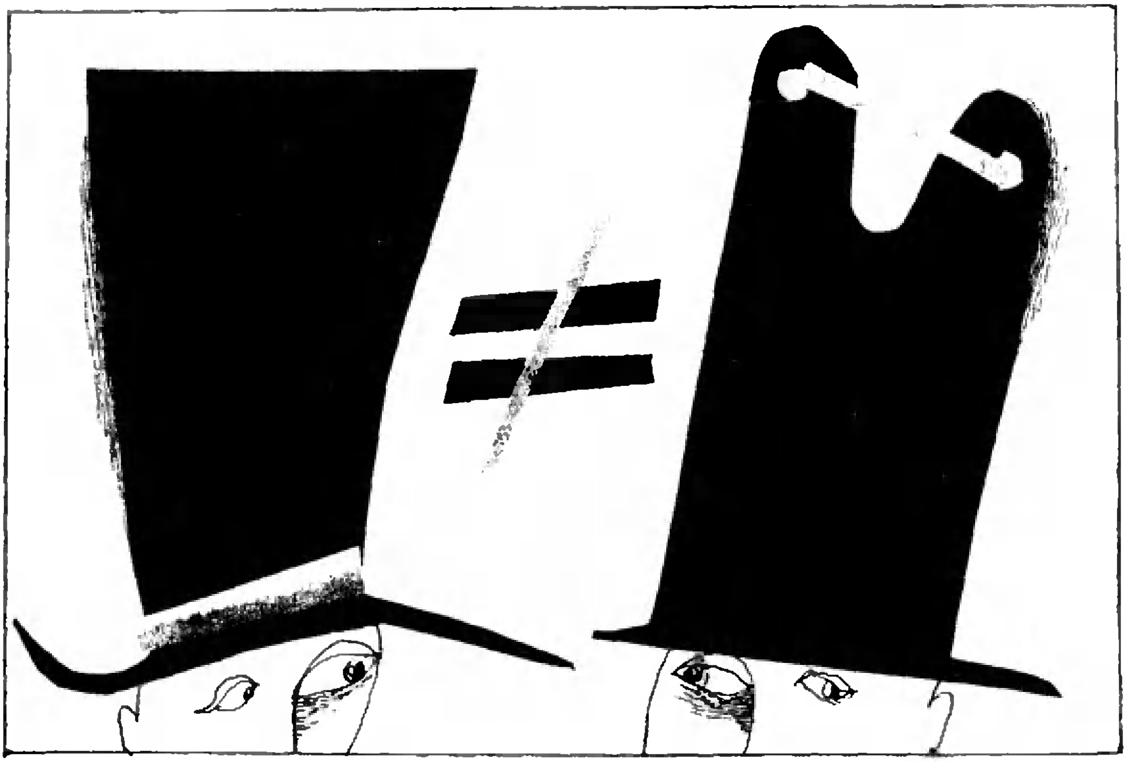
б) исходная раскраска периодически повторяется тогда и только тогда, когда она сама периодична (периодичность во времени равносильна периодичности в пространстве).

в) Что можно сказать о полосе произвольной ширины? О всей клетчатой плоскости?

6. К числу приписывают справа по одной цифре, кроме 9. Докажите, что рано или поздно получится составное число.

7*). Дан прямоугольник с отношением сторон равным $\sqrt{7}$. От него отрезают квадрат, а с оставшимся прямоугольником производят ту же процедуру. Докажите, что последовательность отношений сторон у построенных прямоугольников периодична.

*) Задачи 4, 7 взяты из книги В. А. Уфнаровского «Математический аквариум» (Кишинев, Штиинца, 1987).



Математический кружок

Неравенство Иенсена

О. ИЖБОЛДИН, Л. КУРЛЯНДЧИК

Искусством доказывать неравенства овладеть далеко не просто. Тут требуется большой опыт, интуиция, и, как в каждом искусстве, умение свободно применять различные «технические» приемы. Мы продемонстрируем один из таких приемов на ряде примеров. В этой статье будут доказаны и классические неравенства (Коши, Коши—Буняковского, Гельдера и Минковского), и менее знаменитые, но также весьма интересные.

Мы будем записывать формулы, как правило, коротко, с помощью обозначений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Советуем тем, кто еще не научился ими пользоваться, расписывать выкладки более подробно.

Выпуклые множества

В основе доказательств неравенств, о которых будет идти речь, лежит понятие выпуклости. Это очень важное математическое понятие, и вы с ним уже встречались в школьном курсе геометрии при изучении многоугольников. Однако в математике понятие выпуклости связано не только с многоугольниками. Фигуру называют выпуклой, если с любыми двумя своими точками она содержит весь отрезок с концами в этих точках. На рисунках 1, *а*—*г* показаны примеры выпуклых и невыпуклых фигур. Выпуклые фигуры обладают многими замечательными свойствами, но нас будет интересовать лишь одно из них. Сформулируем его.

Пусть в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выпуклой фигуры Ф сосредоточены массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно. Тогда центр масс этих точек также принадлежит фигуре Ф.

Из физики известно, что центр масс — это точка с координатами

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i};\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}\right), \qquad (1)$$

где x_i, y_i — координаты точки A_i.

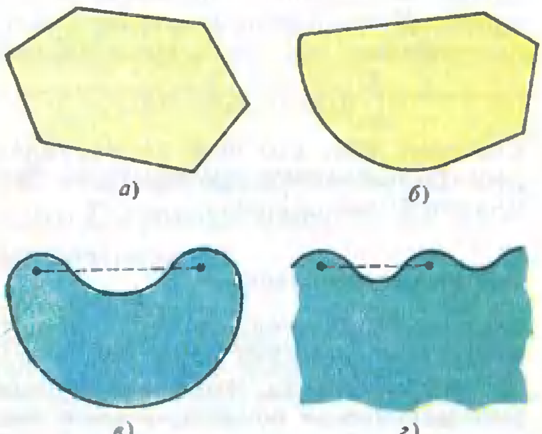
Упражнения

1. Докажите, что центр масс двух точек лежит на отрезке, их соединяющем.

2. Докажите, что центр масс n точек лежит на отрезке, соединяющем любую из них с центром масс остальных.

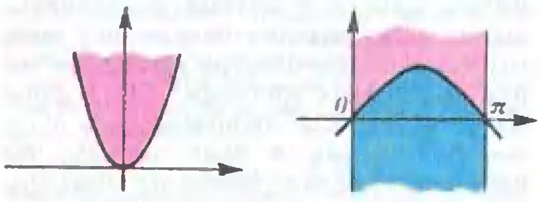
Выпуклые функции

Нарисуем график функции $y=x^2$ (рис. 2, *а*).



а) б) в) г)

Рис. 1.



а) б)

Рис. 2.

Мы видим, что надграфик этой функции (на рисунке он закрашен красным цветом) является выпуклой фигурой. Если же рассмотреть функцию $y=\sin x$ $(x\in[0;\pi])$, то ее надграфик (на рисунке 2, *б* он закрашен красным цветом) выпуклым не является. Однако выпуклым является подграфик этой функции (на том же рисунке он закрашен синим цветом).

Эти наблюдения приводят к важному определению.

Если надграфик функции является выпуклой фигурой, то говорят, что эта функция выпуклая, а если выпуклым является подграфик, то говорят, что функция вогнутая).*

Тем самым функция $y=x^2$ является выпуклой, а функция $y=\sin x$ $(x\in[0;\pi])$ — вогнутой.

Основное неравенство

Среди известных классических неравенств особое место занимает неравенство Иенсена**). Все классические неравенства, упомянутые в начале статьи, являются его следствием.

Теорема (неравенство Иенсена). *Пусть $y=f(x)$ — функция выпуклая на некотором интервале. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные числа из этого интервала, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда*

$$f(\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n)\leqslant \alpha_1 f(x_1)+\ldots+\alpha_n f(x_n). \qquad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим на графике функции $y=f(x)$ точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Расположим в этих точках грузы с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Центр масс этих точек имеет координаты

$$\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n};\ \frac{m_1f(x_1)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+\ldots+m_n}\right).$$

*) В некоторых учебниках принята другая терминология.

**) Иенсен Иоганн Людвиг (1859—1925) — датский математик.

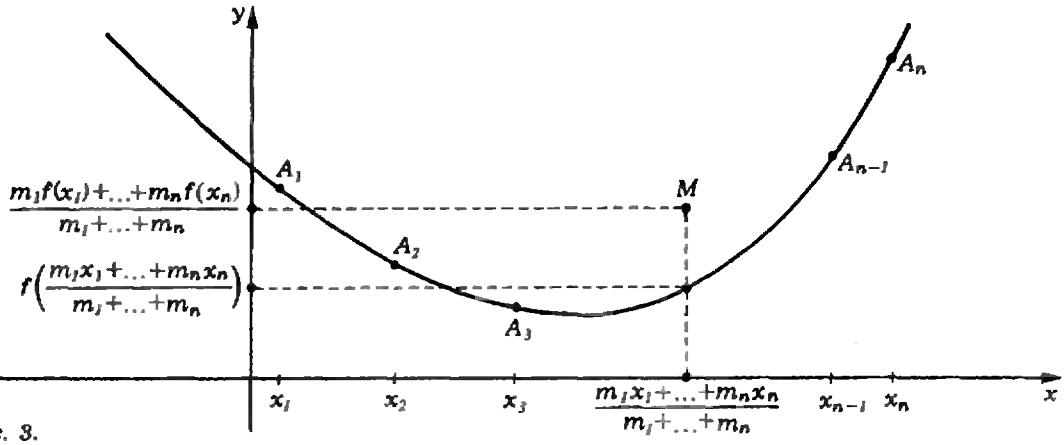


Рис. 3.

Так как точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ принадлежат надграфику выпуклой функции, то и их центр масс также принадлежит надграфику (ибо надграфик — выпуклая фигура). А это означает, что ордината центра масс не меньше ординаты точки на графике с той же абсциссой (рис. 3), т. е.

$$f\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{m_1f(x_1)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+\ldots+m_n}. \qquad (3)$$

Для завершения доказательства остается положить $m_1=\alpha_1, \ldots, m_n=\alpha_n$.

Этот пункт статьи мы хотим закончить двумя важными замечаниями. Во-первых, в процессе доказательства неравенства Иенсена (2) мы доказали неравенство (3). На самом деле эти неравенства равносильны. Положив в неравенстве (2) $\alpha_i=\frac{m_i}{m_1+\ldots+m_n}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, мы получаем неравенство (3). Поэтому естественно оба эти неравенства называть неравенствами Иенсена. Неравенство (2) выглядит более компактно, однако для приложений удобнее пользоваться неравенством (3). Во-вторых, если функция $f(x)$ вогнутая, то для нее неравенства Иенсена (2) и (3) меняются на противоположные. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть выпуклую функцию $f(x)$.

Неравенство Коши—Буняковского

На первый взгляд, неравенство Иенсена не производит особого впечатления: слишком общо выглядит формулировка. Прочитав эту статью до конца, вы убедитесь, что это впечатление обманчиво.

Продемонстрируем силу неравенства Иенсена на конкретном примере. А именно докажем знаменитое неравенство Коши—Буняковского:

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — произвольные положительные числа.

Доказательство. Как мы знаем, функция $y=x^2$ — выпуклая. Напишем для этой функции неравенство Иенсена (3)

$$\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{m_1x_1^2+\ldots+m_nx_n^2}{m_1+\ldots+m_n}\ (m_i>0).$$

Следовательно, $(m_1x_1^2+\ldots+m_nx_n^2)\times$ $\times(m_1+\ldots+m_n)\geqslant(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)^2$. Положив $m_i=b_i^2$, $x_i=\frac{a_i}{b_i}$, получим требуемое неравенство.

Упражнение 3. Докажите неравенство Коши—Буняковского для произвольных вещественных чисел a_i, b_i.

Примеры выпуклых функций

Для успешного применения неравенства Иенсена необходим простой критерий, позволяющий определять, является ли данная функция выпуклой.

Теорема. *Пусть $y=f(x)$ дважды дифференцируемая функция. Если ее вторая производная положительна, то функция выпукла, а если вторая производная отрицательная, то функция вогнута.*

Мы не будем аккуратно доказывать эту теорему, поясним только ее геометрический смысл. Пусть $f''(x)>0$ для всех x. Очевидно, что надграфик окажется выпуклым, если график функции в каждой точке «поворачивает» вверх относительно касательной в этой точке. На языке формул это означает, что если $l(x)$ — линейная функция, график которой — касательная к графику функции $f(x)$ в точке $(a, f(a))$, то $f(x)>l(x)$ при всех x, достаточно близких к a и отличных от a.

Чтобы вывести неравенство $f(x)>l(x)$ из неравенства $f''(a)>0$, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $g(x)$ — такая функция, что $g(a)=g'(a)=0$ и $g''(a)>0$. Тогда при всех x, достаточно близких к a и отличных от a, $g(x)>0$. Это понятно с физической точки зрения: если покоящемуся телу (скорость $g'(a)=0$) придать положительное ускорение (ускорение $g''(a)>0$), то тело начнет перемещаться в положительном направлении.

Рассмотрим теперь функцию $g(x)=f(x)-l(x)$. Поскольку графики функций $f(x)$ и $l(x)$ проходят через одну точку и имеют в ней одинаковый наклон, $g(a)=g'(a)=0$. Кроме того, $g''(x)=f''(x)$, так как вторая производная линейной функции $l(x)$ равна нулю. Значит, $g''(a)>0$ и, согласно сказанному в предыдущем абзаце, $g(x)>0$ при x, достаточно близких к a. Это и значит, что $f(x)>l(x)$. Случай $f''(x)<0$ рассматривается аналогично.

Пользуясь теоремой, мы «запасемся» несколькими выпуклыми и вогнутыми функциями. От вас при этом требуется умение вычислять производные.

Примеры

1. $y=x^{\alpha}$ $(x>0)$.

Так как $y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, то при $0<\alpha<1$ функция вогнутая, а при $\alpha<0$ и $\alpha>1$ — выпуклая.

2. $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

Так как $y''=a^x\ln^2 a>0$, то функция выпуклая.

3. $y=\log_a x$ $(x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$.

Так как $y''=-\dfrac{1}{x^2\ln a}$, то при $a<1$ функция выпуклая, а при $a>1$ — вогнутая.

4. $y=\ln(1+e^x)$.

Так как $y''=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$, то эта функция выпуклая.

5. $y=x\ln x$.

Так как $y''=\dfrac{1}{x}>0$, то функция $y=x\ln x$ — выпуклая.

6. $y=(1+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$ $(x>0)$.

Так как $y''=(\alpha-1)x^{\alpha-2}(1+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}-2}$, то при $\alpha<1$ функция вогнутая, а при $\alpha>1$ — выпуклая.

Теперь мы можем доказать несколько классических неравенств.

Неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\quad(x_i>0).$$

Доказательство. Прологарифмируем обе части этого неравенства

$$\ln\left(\frac{1}{n}x_1+\ldots+\frac{1}{n}x_n\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{n}\ln x_1+\ldots+\frac{1}{n}\ln x_n.$$

Полученное неравенство напоминает нам неравенство Иенсена, однако знак неравенства «смотрит не туда». Объясняется это тем, что функция $\ln x$ не выпуклая, а вогнутая (пример 3).

Неравенство Гельдера

Пусть p, q — положительные числа, причем $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\quad(a_i,\ b_i>0).$$

Доказательство. Ясно, что $p>1$, поэтому функция $y=x^p$ — выпуклая (пример 1). Напишем для этой функции неравенство Иенсена (3):

$$\left(\frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}\right)^p \leqslant \frac{\Sigma m_i x_i^p}{\Sigma m_i}.$$

Отсюда

$$\Sigma m_i x_i \leqslant (\Sigma m_i)^{\frac{p-1}{p}} (\Sigma m_i x_i^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$, и поэтому

$$\Sigma m_i x_i \leqslant (\Sigma m_i x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\Sigma m_i)^{\frac{1}{q}}.$$

Положив теперь $m_i = b_i^q$, $x_i = a_i b_i^{1-q}$, получаем требуемое неравенство.

Неравенство Минковского

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)} \quad (a_i, b_i > 0).$$

Доказательство. Поделив обе части неравенства на $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$, получим

$$1 + \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ясно, что дробь $\frac{b_i}{a_i}$ имеет смысл как-то обозначить. Но на самом деле удобнее ввести обозначение не для самой дроби $\frac{b_i}{a_i}$, а для ее логарифма: $x_i = \ln \frac{b_i}{a_i}$. Итак, заменив $\frac{b_i}{a_i}$ на e^{x_i}, мы запишем наше неравенство в виде

$$1 + e^{\Sigma \frac{1}{n} x_i} \leqslant \Pi (1 + e^{x_i})^{\frac{1}{n}}.$$

Прологарифмируем обе части получившегося неравенства:

$$\ln (1 + e^{\Sigma \frac{1}{n} x_i}) \leqslant \Sigma \frac{1}{n} \ln (1 + e^{x_i}).$$

В последнем неравенстве мы узнаем неравенство Иенсена для выпуклой функции $y = \ln (1 + e^x)$ (пример 4).

Несколько примеров использования неравенства Иенсена

Задача 1. *Докажите неравенство*

$$\Pi a_i^{a_i} \geqslant \left(\Sigma \frac{1}{n} a_i\right)^{\Sigma a_i} \quad (a_i > 0).$$

Решение. Прологарифмировав обе части неравенства и разделив на n, получим

$$\Sigma \frac{1}{n} a_i \ln a_i \geqslant \left(\Sigma \frac{1}{n} a_i\right) \ln \Sigma \frac{1}{n} a_i.$$

А это — неравенство Иенсена для выпуклой функции $y = x \ln x$ (пример 5).

Задача 2. *Докажите неравенство:*

$$\sqrt{(\Sigma a_i)^2 + (\Sigma b_i)^2} \leqslant \Sigma \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad (a_i, b_i > 0).$$

Решение. Напишем неравенство Иенсена (3) для выпуклой функции $y = \sqrt{1 + x^2}$ (пример (6):

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}\right)^2} \leqslant \frac{\Sigma m_i \sqrt{1 + x_i^2}}{\Sigma m_i}.$$

Домножив обе части неравенства на Σm_i, получим

$$\sqrt{(\Sigma m_i)^2 + (\Sigma m_i x_i)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \Sigma m_i \sqrt{1 + x_i^2} = \Sigma \sqrt{m_i^2 + (m_i x_i)^2}.$$

Остается только положить $m_i = a_i$, $x_i = \frac{b_i}{a_i}$.

В заключение рассмотрим довольно трудную задачу, которую тоже можно решить при помощи неравенства Иенсена.

Задача 3. *Докажите неравенство*

$$\frac{p_1}{p_2 + p_3} + \frac{p_2}{p_3 + p_4} + \frac{p_3}{p_4 + p_5} +$$

$$+ \frac{p_4}{p_5 + p_1} + \frac{p_5}{p_1 + p_2} \geqslant \frac{5}{2} \quad (p_i > 0).$$

Решение. Для удобства введем дополнительные переменные p_6 и p_7, равные p_1 и p_2 соответственно. Теперь данное неравенство можно записать коротко:

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{p_i}{p_{i+1} + p_{i+2}} \geqslant \frac{5}{2}.$$

Выпишем неравенство Иенсена (3) для выпуклой функции $y = \frac{1}{x}$ (пример 1):

$$\left(\frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}\right)^{-1} \leqslant \frac{\Sigma m_i x_i^{-1}}{\Sigma m_i}.$$

Отсюда следует, что

$$\Sigma \frac{m_i}{x_i} \geqslant \frac{(\Sigma m_i)^2}{\Sigma m_i x_i}.$$

Положим теперь $m_i = p_i$, $x_i = p_{i+1} + p_{i+2}$:

$$\Sigma \frac{p_i}{p_{i+1} + p_{i+2}} \geqslant \frac{(\Sigma p_i)^2}{\Sigma p_i (p_{i+1} + p_{i+2})}.$$

Тем самым достаточно доказать неравенство

$$\frac{(\Sigma p_i)^2}{\Sigma p_i (p_{i+1} + p_{i+2})} \geqslant \frac{5}{2}.$$

Избавившись от знаменателей и раскрыв скобки, приходим к неравенству

$$2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) \geqslant p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5.$$

Так как правая часть равна $\frac{1}{2}((p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2))$, то неравенство можно переписать в виде

$$5(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) \geqslant (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2.$$

Записав это в виде

$$(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) \geqslant (1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 + 1 \cdot p_4 + 1 \cdot p_5)^2,$$

мы обнаруживаем частный случай неравенства Коши-Буняковского.

Упражнения

Докажите неравенства:

4. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^p < n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^p$ при $p > 1$, $x_i > 0$.

5. $\sum_{i=1}^{n} a_i^p \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^p \geqslant n^{2-p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^p$ при $p \geqslant 2$, $a_i, b_i > 0$.

6. $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} \geqslant \frac{n}{n-1}$, где $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и $a_i > 0$.

7. $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geqslant 3\sqrt{2}$ при $a, b, c > 0$.

8. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geqslant 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$ при $a, b, c > 0$.

9. $\dfrac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leqslant \dfrac{\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)\right)^n}$ при $0 < x_i < \frac{1}{2}$.

10. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2$ при $a, b, c, d > 0$.

11. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geqslant 3$ при $a, b, c, d, e, f > 0$.

Информация

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения и, в первую очередь, на физический факультет МГУ (при поступлении на физический факультет удостоверение об окончании ЗФШ учитывается приемной комиссией).

Физический факультет МГУ готовит физиков-теоретиков и физиков-экспериментаторов по всем физическим специальностям. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, а также успешно работать в сложных областях науки и техники, где стыкуются два или несколько научных направлений. Например — биофизика и геофизика, радио-гамма-инфракрасная астрономия и создание искусственного интеллекта, химическая физика и астрофизика.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до *1 сентября* по адресу: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по приведенному здесь образцу.

Фамилия, имя, отчество	*Кузнецов Сергей Владимирович*
Класс ЗФШ	*11*
Профессия родителей	*мать — врач, отец — инженер*
Подробный домашний адрес	*240816, г. Калуга, ул. Ленина, д. 88, кв. 99*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д.3*

Решение приемной комиссии о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября. Проверенные вступительные задания не возвращаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенное задание оценивается, рецензируется и возвращается обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1—4, а поступающим в 11 класс — задачи 4—7.

1. **«Бикфордов шнур».** Из взрывчатого вещества изготовлен стержень длиной l. Скорость детонации (скорость вовлечения во взрыв новых участков взрывчатого вещества) v, а скорость разлета продуктов взрыва $u<v$. Как изменяется со временем область, занятая продуктами взрыва, если стержень подрывается с одного из концов? Сделайте рисунок.

2. **«Кумулятивный взрыв».** Из того же взрывчатого вещества (см. задачу 1) нужно изготовить тонкостенную коническую оболочку, такую, чтобы при подрыве ее с вершины продукты взрыва одновременно ударили по броневой плите. Какой угол между осью конуса и образующей нужно выбрать для этого?

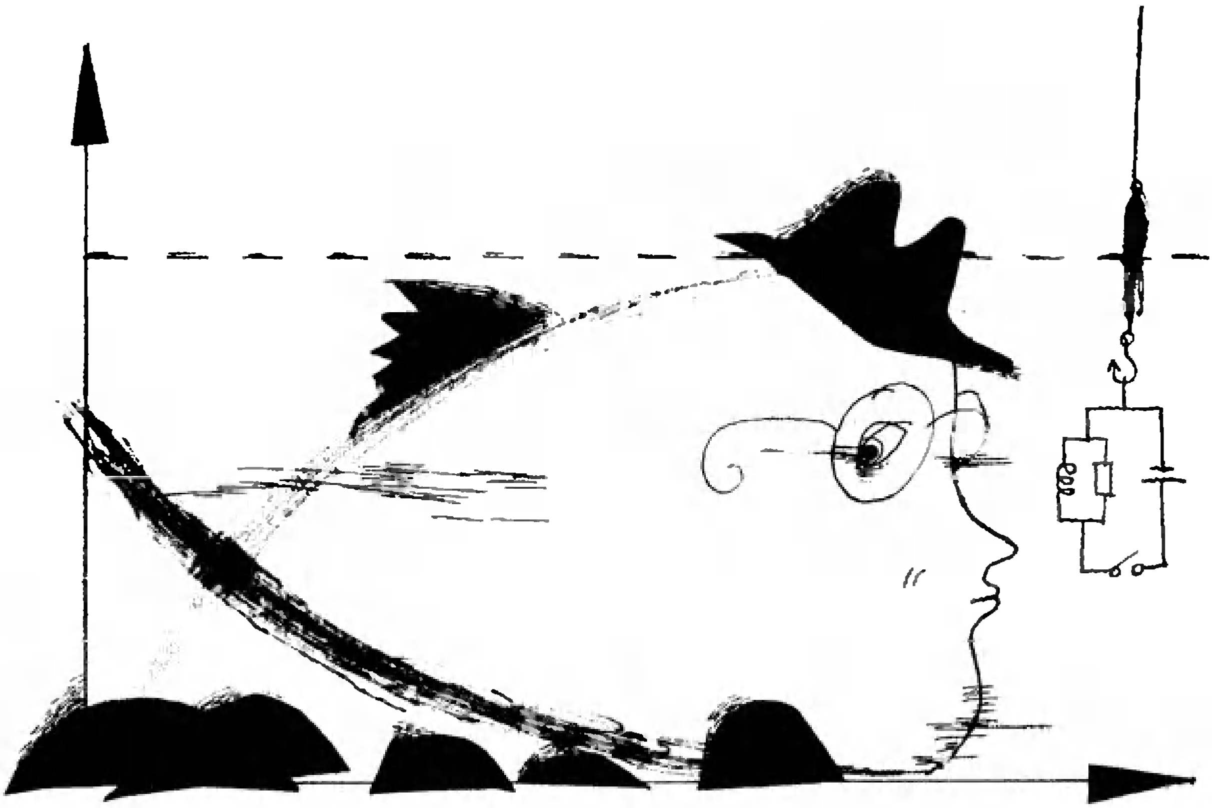
3. **«Пандус».** По деревянным сходням, образующим угол α с горизонтом, втаскивают за веревку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни μ. Под каким углом к горизонту следует тянуть веревку, чтобы втащить ящик с наименьшим усилием?

4. **«Мягкое приземление».** Оцените среднюю силу, развиваемую ногами человека при приземлении после прыжка из окна второго этажа. Считайте для определенности, что масса человека 70 кг, высота прыжка 5 м, а амортизация прыжка происходит на длине 1 м.

5. **«Противоракетная оборона».** С какой скоростью должен вылететь из пушки снаряд в момент старта ракеты, чтобы поразить ракету, летящую вертикально с ускорением a? Расстояние от пушки до места старта ракеты L. Пушка стреляет под углом 45° к горизонту.

6. **«Водяная подушка».** В полусферический колокол, края которого плотно прилегают к поверхности стола, наливают через отверстие вверху жидкость. Когда жидкость доходит до отверстия, она приподнимает колокол и начинает из-под него вытекать. Найдите массу колокола, если его внутренний радиус R, а плотность жидкости ρ.

7. **«Линейный ускоритель».** Частица массой m с зарядом q влетает в плоский конденсатор сквозь его верхнюю обкладку — обкладки выполнены в виде сеток — и ускоряется в нем. Напряженность поля в конденсаторе E, расстояние между сетками d. Начальная скорость v частицы составляет угол α с плоскостью первой сетки. С какой скоростью и под каким углом к плоскости второй сетки частица вылетит из конденсатора?



Практикум абитуриента

Переходные процессы в электрических цепях

Кандидат физико-математических наук
В. МОЖАЕВ

При замыкании или размыкании электрической цепи или при изменении ее параметров система переходит из одного установившегося состояния в другое. То, что происходит в данной цепи в течение времени этого перехода, мы и будем называть переходным процессом.

Будем рассматривать электрические цепи, в которых действуют постоянные источники ЭДС.

Установившееся состояние может быть как стационарным, так и нестационарным. В первом случае токи, заряды и напряжения во всех элементах цепи остаются постоянными во времени. В случае нестационарного режима ток в цепи или, например, заряд на конденсаторе периодически изменяются со временем, т. е. система находится в колебательном режиме. Очевидно, это возможно только тогда, когда в системе нет диссипации энергии (т. е. рассеяния части энергии в виде тепла). При наличии потерь система всегда придет к стационарному установившемуся состоянию.

В большинстве задач, предлагаемых абитуриентам, речь, как правило, идет об установившихся состояниях систем. Перейдем теперь к рассмотрению конкретных примеров.

Задача 1. *Имеется самая простая цепь: источник постоянной ЭДС $\mathscr{E}_0$ и нагрузка в виде резистора сопротивлением R (рис. 1). Найдите зависимость тока в цепи от времени после замыкания ключа K.*

Запишем закон Ома для данной цепи в произвольный момент времени после замыкания ключа:

$$\mathscr{E}_0 = I(t)R.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$I(t) = \mathscr{E}_0/R = \text{const}.$$

Ток в цепи в любой момент времени после замыкания ключа остается постоянным и равным $\mathscr{E}_0/R$, т. е. в системе мгновенно устанавливается стационарный режим. Реально даже в такой идеализированной системе (при полном отсутствии индуктивности и емкости в цепи) время выхода на стационарный режим будет хотя и очень малым, но ненулевым, что связано с конечной скоростью распространения электромагнитной волны. Но закон Ома для замкнутой цепи об этом «не знает» и не может описывать такие скоростные режимы, в которых это нужно учитывать. И мы их, естественно, рассматривать не будем.

Задача 2. *Электрическая цепь содержит резистор сопротивлением R и конденсатор емкостью C (рис. 2). Как изменяется со временем напряжение на конденсаторе?*

Запишем для этого случая закон Ома:

$$\mathscr{E}_0 = U(t) + I(t)R,$$

где $U(t)$ — напряжение на конденсаторе в произвольный момент времени (после замыкания ключа K), а $I(t)$ — ток в цепи. Используя связь $I(t) = \Delta(CU)/\Delta t$, запишем закон Ома в виде

$$RC\frac{\Delta U(t)}{\Delta t} + U(t) = \mathscr{E}_0.$$

Это уравнение описывает зависимость напряжения на конденсаторе от времени в любой момент времени после замыкания ключа K. Введем новую переменную $U^*(t) = U(t) - \mathscr{E}_0$, тогда закон Ома будет выглядеть так:

$$\frac{\Delta U^*(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{RC}U^*(t).$$

Такого вида уравнение описывает многие хорошо известные процессы, например — радиоактивный распад ядер, зависимость скорости тела от времени при действии на тело силы сопротивления, пропорциональной скорости тела, т. е. те процессы, в которых скорость изменения со временем некоторой величины пропорциональна этой величине в данный момент времени. В нашем случае скорость изменения $U^*(t)$ пропорциональна самой этой величине с коэффициентом пропорциональности — $1/(RC)$. Знак минус означает, что $U^*(t)$ убывает со временем. Мы приведем здесь решение такого уравнения, но только с познавательной целью:

$$U^*(t) = Ae^{-t/(RC)},$$

где A — некоторая константа, которая находится из начальных условий. В момент замыкания ключа K напряжение на конденсаторе было равно нулю: $U(0) = 0$, следовательно, $U^*(0) = U(0) - \mathscr{E}_0 = -\mathscr{E}_0$ и $A = -\mathscr{E}_0$. Окончательная зависимость напряжения на конденсаторе от времени будет иметь вид

$$U(t) = \mathscr{E}_0(1 - e^{-t/(RC)}).$$

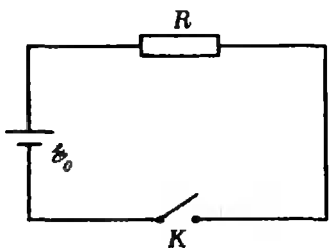


Рис. 1.

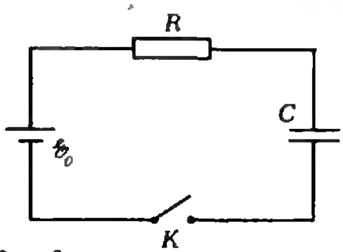


Рис. 2.

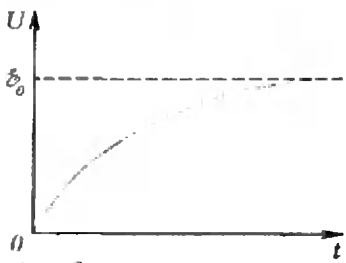


Рис. 3.

На рисунке 3 приведен соответствующий график.

Как следует из полученной зависимости, зарядка конденсатора будет происходить бесконечно долго и напряжение на конденсаторе сможет стать равным ЭДС источника $\mathscr{E}_0$ только в необозримом будущем. Но это все относится к идеализированной схеме, в которой ее параметры ($\mathscr{E}_0$, R и C) являются строго постоянными величинами и не зависят от времени. В действительности они все «дышат», т. е. меняются со временем, например из-за нестабильности окружающей температуры. Это приводит к резкому искажению полученной зависимости $U(t)$ в области больших значений $t(t \gg RC)$, т. е. когда напряжение на конденсаторе уже мало отличается от $\mathscr{E}_0$. Поэтому при всех конечных значениях R и C время зарядки всегда конечно и полностью определяется величиной RC, называемой постоянной времени. Чем меньше значение этой постоянной, тем быстрее происходит зарядка, и наоборот.

Задача 3. *Рассмотрите теперь цепь, содержащую резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L (рис. 4). Найдите зависимость тока в цепи от времени после замыкания ключа K.*

Закон Ома для данной цепи имеет вид

$$\mathscr{E}_0 - L\frac{\Delta I(t)}{\Delta t} = I(t)R.$$

Введем новую переменную $I^*(t) = I(t) - \mathscr{E}_0/R$ и получим

$$\frac{\Delta I^*(t)}{\Delta t} = -\frac{R}{L}I^*(t).$$

Это уже знакомое нам уравнение, его решение ищем в виде

$$I^*(t) = Ae^{-Rt/L},$$

где A — некоторая константа, которую находим из начальных условий. В момент замыкания ключа K ток в цепи был равен нулю: $I(0)=0$; следовательно, $I^*(0) = I(0) - \mathscr{E}_0/R = -\mathscr{E}_0/R$ и $A = -\mathscr{E}_0/R$. Тогда

$$I(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}).$$

Мы получили зависимость $I(t)$, совершенно аналогичную зависимости $U(t)$ в предыдущем случае. Постоянная времени выхода на стационарный режим в данном случае равна $\tau = L/R$ — чем меньше R, тем дольше система приходит в устойчивое состояние, при стремлении R к нулю τ стремится к бесконечности. При $R=0$ закон Ома имеет вид

$$\mathscr{E}_0 - L\frac{\Delta I(t)}{\Delta t} = 0,$$

а решение этого уравнения —

$$I(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{L}t,$$

т. е. ток в цепи будет линейно нарастать со временем и никогда не сможет выйти на стационарный режим. В действительности же рост тока будет ограничен конечным запасом энергии источника. На рисунке 5 показан график зависимости $I(t)$ при некотором конечном значении L/R.

Задача 4. *Параллельно соединенные катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R подключены через ключ K к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 6). В начальный момент времени ключ K разомкнут и тока в цепи нет. Какой заряд протечет через резистор после замыкания ключа? Сопротивлением катушки пренебречь. Нарисуйте*

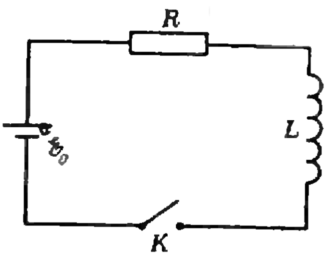


Рис. 4.

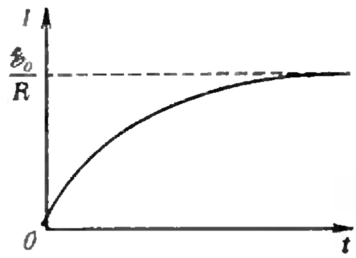


Рис. 5.

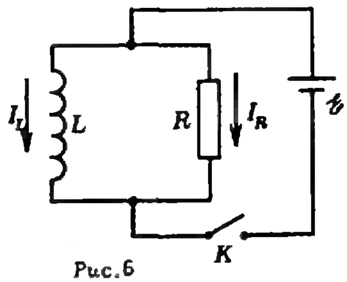


Рис.6

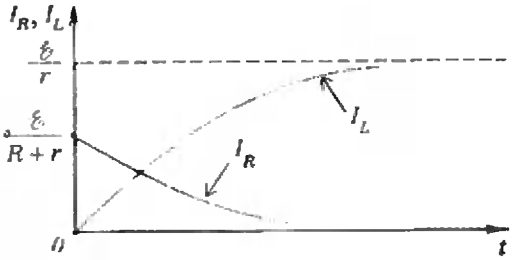


Рис. 7.

график зависимости от времени тока через резистор и тока через катушку.

Пусть в произвольный момент времени после замыкания ключа K через резистор R течет ток $I_R(t)$, а через катушку индуктивности L — ток $I_L(t)$ (см. рис. 6). Очевидно, что ток батареи равен суммарному току $I_R(t)+I_L(t)$. Выберем два замкнутых контура и запишем для каждого из них закон Ома. Для контура, охватывающего батарею и резистор, можно записать

$$\mathscr{E}=I_R(t)R+(I_R(t)+I_L(t))r. \qquad (1)$$

Аналогичное уравнение для контура, содержащего катушку и резистор, будет иметь вид

$$L\frac{\Delta I_L(t)}{\Delta t}=I_R(t)R. \qquad (2)$$

В начальный момент времени, сразу после замыкания ключа K $(t=0)$, ток $I_L(0)=0$. Из первого уравнения (это уравнение справедливо и для $t=0$) следует, что ток через резистор сразу после замыкания ключа равен $I_R(0)=$ $=\mathscr{E}/(R+r)$. Зная сами токи, мы можем найти и скорости их изменения в начальный момент времени

$$\frac{\Delta I_L}{\Delta t}\Big|_{t=0} \text{ и } \frac{\Delta I_R}{\Delta t}\Big|_{t=0}.$$

Из уравнения (2) следует, что

$$L\frac{\Delta I_L}{\Delta t}\Big|_{t=0}=I_R(0)R=\frac{\mathscr{E}R}{R+r}>0,$$

т. е. ток через катушку со временем растет. Поскольку $\mathscr{E}$ не зависит от времени, из уравнения (1) следует, что

$$\frac{\Delta I_R(t)}{\Delta t}(R+r)+\frac{\Delta I_L(t)}{\Delta t}r=0,$$

а в момент $t=0$

$$\frac{\Delta I_R}{\Delta t}\Big|_{t=0}=-\frac{\Delta I_L}{\Delta t}\frac{r}{R+r}=-\frac{\mathscr{E}Rr}{(R+r)^2L}<0$$

— ток через резистор уменьшается с некоторой конечной скоростью.

Система диссипативна, поэтому она стремится к некоторому стационарному состоянию. Обоим уравнениям удовлетворяет стационарное решение

$$I_R=0,\ I_L=\mathscr{E}/r.$$

Следовательно, ток через резистор уменьшается и асимптотически стремится к нулевому значению, а ток через катушку нарастает и стремится к значению $\mathscr{E}/r$. Зависимости $I_R(t)$ и $I_L(t)$ показаны на рисунке 7.

Для нахождения суммарного заряда Q_R, протекшего через резистор, перепишем уравнение (2) в виде

$$L\Delta I_L(t)=RI_R(t)\Delta t.$$

Здесь $I_R(t)\Delta t$ — заряд ΔQ_R, протекший через резистор за малый промежуток времени Δt; следовательно,

$$L\Delta I_L(t)=R\Delta Q_R.$$

Как видно из этого уравнения, связь между изменением тока через катушку и протекшим через резистор зарядом не зависит от времени, т. е. она остается одной и той же для любого интервала времени. За весь процесс установления стационарного состояния

$$L(I_L(\infty)-I_L(0))=RQ_R.$$

С учетом того, что $I_L(\infty)=\mathscr{E}/r$, суммарный заряд, протекший через резистор, будет равен

$$Q_R=\frac{\mathscr{E}L}{Rr}.$$

Задача 5. *Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и идеального диода D (рис. 8), через ключ K на время τ подключают к источнику постоянной ЭДС $\mathscr{E}$, а затем отключают. Найдите зависимость напряжения на конденсаторе от времени после размыкания ключа. Представьте графически эту зависимость. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением катушки пренебречь.*

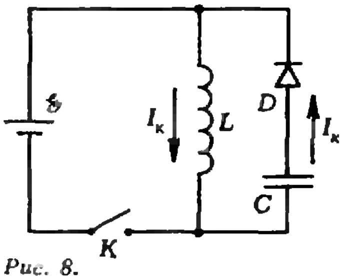


Рис. 8.

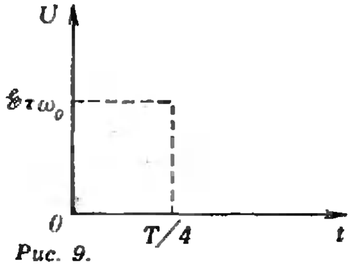


Рис. 9.

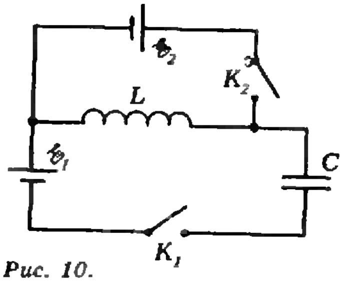


Рис. 10.

После замыкания ключа K в произвольный момент времени t для контура, содержащего источник и катушку, согласно закону Ома, можно записать

$$ℰ - L\frac{\Delta I_L(t)}{\Delta t} = 0.$$

Так как начальный ток $I_L(0)=0$, то зависимость тока $I_L(t)$ через катушку индуктивности будет иметь вид

$$I_L(t) = \frac{ℰ}{L}t,$$

т. е. ток линейно нарастает со временем и через время τ будет равен

$$I_L(\tau) = \frac{ℰ}{L}\tau.$$

Ток через диод, очевидно, все это время будет равен нулю.

Рассмотрим контур, содержащий катушку, диод и конденсатор после размыкания ключа K (через время τ). Закон Ома для данного контура выглядит так:

$$-L\frac{\Delta I_к}{\Delta t} = U(t),$$

где $I_к$ — ток в контуре (см. рис. 8), а $U(t)$ — напряжение на конденсаторе. С учетом связи $I_к = \Delta(CU)/\Delta t = CU'$ уравнение для данного контура приводится к виду

$$U'' + \frac{1}{LC}U = 0.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания в контуре, поэтому решение этого уравнения ищем в виде

$$U(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

где A и B — константы, а $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Будем отсчитывать время с момента размыкания ключа K. При $t=0$ напряжение на конденсаторе $U(0)=0$, откуда следует, что $A=0$. Из начального условия $I_к(0) = I_L(\tau) = ℰ\tau/L$, с другой стороны, $I_к(0) = C\frac{\Delta U}{\Delta t}\Big|_{t=0} = B\omega_0 C$; следовательно, $B = ℰ\tau/(LC\omega_0) = ℰ\tau\omega_0$. Окончательно получим

$$U(t) = ℰ\tau\omega_0\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right).$$

Но это справедливо не для любого момента времени, а только в интервале $0 \leqslant t \leqslant T/4$, где $T = 2\pi\sqrt{LC}$. При $t > T/4$ напряжение на конденсаторе будет оставаться постоянным и равным $ℰ\tau\omega_0$. График зависимости $U(t)$ показан на рисунке 9.

Задача 6. *В схеме, изображенной на рисунке 10, в начальный момент времени ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсатор не заряжен. Сначала замыкают ключ K_1. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе оказывается равным сумме ЭДС батарей $ℰ_1$ и $ℰ_2$, замыкают ключ K_2. Через какое время после замыкания ключа K_2 величина силы тока через катушку увеличится в 3 раза? Считать заданными индуктивность катушки L, емкость конденсатора C и отношение $ℰ_2/ℰ_1 = 0{,}8$. Всеми омическими потерями пренебречь.*

После замыкания ключа K_1 мы имеем замкнутую цепь, содержащую первый источник, катушку и конденсатор. Закон Ома для данной цепи в произвольный момент времени имеет вид

$$ℰ_1 - LCU''_C = U_C,$$

где U_C — напряжение на конденсаторе. Введем новую переменную $U_C^* = U_C - ℰ_1$, тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$U_C''' + \frac{1}{LC} U_C' = 0.$$

Как уже говорилось, уравнение такого вида описывает гармонические колебания:

$$U_C' = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t,$$

где A и B — константы, которые находятся из начальных условий, а $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Сразу после замыкания ключа K_1 $U_C(0) = 0$, $U_C'(0) = -\mathscr{E}_1$. Кроме того, $U_C'(0) = U_C''(0) = 0$ из условия равенства нулю тока в начальный момент времени. Отсюда можно найти константы A и B: $A = 0$, $B = -\mathscr{E}_1$. Зависимость напряжения на конденсаторе от времени будет иметь вид

$$U_C(t) = \mathscr{E}_1(1 - \cos \omega_0 t).$$

Эта зависимость и зависимость тока ($I(t)$) в цепи от времени показаны на рисунке 11.

Есть два момента времени за каждый период колебаний, когда $U_C(\tau_1) = U_C(\tau_2) = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = 1{,}8\mathscr{E}_1$. Несложно найти величину силы тока в эти моменты времени — либо из зависимости

$$I(t) = CU_C' = C\mathscr{E}_1\omega_0 \sin \omega_0 t = \mathscr{E}_1\sqrt{C/L} \sin \omega_0 t,$$

либо из закона сохранения энергии: работа источника с ЭДС $\mathscr{E}_1 \cdot 1{,}8\mathscr{E}_1$ пошла на приращение энергии конденсатора $C(1{,}8\mathscr{E}_1)^2/2$ и энергии магнитного поля катушки $LI_L^2(t_1)/2$. В обоих случаях

$$I(\tau_1) = 0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}, \text{ а } I(\tau_2) = -0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

После замыкания ключа K_2 закон Ома для замкнутого контура, содержащего второй источник и катушку, имеет вид

$$\mathscr{E}_2 - L\frac{\Delta I_L}{\Delta t} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$I_L(t) = I_L(0) + \frac{\mathscr{E}_2 t}{L},$$

где время t отсчитывается от момента замыкания ключа K_2. Для первого случая, когда ключ K_2 замыкается через время τ_1 после замыкания ключа K_1,

$$I_L(\tau_1) = I_L(0) = -0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Знак минус отражает тот факт, что один и тот же ток $I_L(\tau_1)$, протекаемый через катушку, для контура, содержащего первый источник и конденсатор, течет в направлении «действия» ЭДС $\mathscr{E}_1$ (от «+» к «—»), а для контура, содержащего второй источник и катушку, он течет против ЭДС $\mathscr{E}_2$. Через некоторое время t_1 после замыкания K_2

$$I_L(t_1) = 3 \cdot 0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}} = -0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}} + 0{,}8\frac{\mathscr{E}_1}{L}t_1,$$

откуда

$$t_1 = 3\sqrt{LC}.$$

Во втором случае, когда ключ K_2 замыкается через время τ_2 после замыкания ключа K_1,

$$I_L(0) = I_L(\tau_2) = 0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Тогда через время t_2 после замыкания K_2

$$I_L(t_2) = 3 \cdot 0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}} = 0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}} + 0{,}8\frac{\mathscr{E}_1}{L}t_2.$$

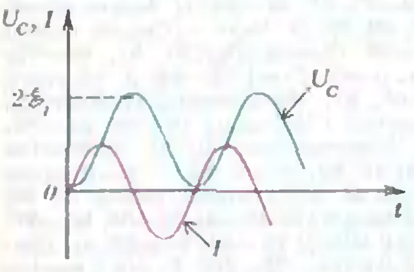


Рис. 11.

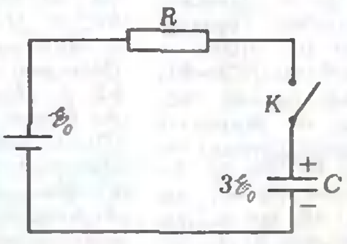


Рис. 12.

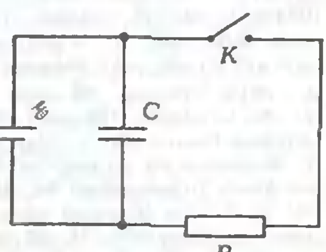


Рис. 13.

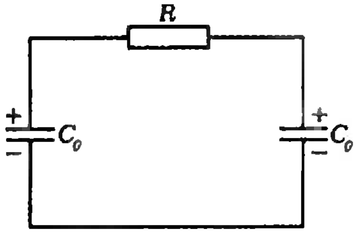


Рис. 14.

Следовательно, для второго случая увеличение величины силы тока в 3 раза произойдет через время

$$t_2 = \frac{3}{2}\sqrt{LC}.$$

Упражнения

1. В схеме, изображенной на рисунке 12, в начальный момент времени ключ K разомкнут, напряжение на конденсаторе емкостью C равно $3\mathscr{E}$. Используя решение задачи 2 в статье, определите зависимость напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа K. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

2. После замыкания ключа K (рис. 13) заряд конденсатора емкостью C уменьшился в полтора раза. Найдите внутреннее сопротивление батареи, если $R = 10$ Ом.

3. Два конденсатора, каждый емкостью C_0, заряжены до напряжения U_0 и соединены через резистор (рис. 14). Пластины одного из конденсаторов раздвигают так, что расстояние между ними увеличивается вдвое, а заряды на пластинах за время их перемещения не меняются. Найдите количество теплоты, выделившееся на резисторе во время последовавшего затем переходного процесса.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 39)

новцы) 78, 80, 82, 85—89, 91; *П. Болотских* (Губкин) 88—90, 92; *Р. Бучко* (Черновцы) 78—82, 85, 86, 88, 89, 92; *В. Быков* (Коломна) 81, 82; *Г. Важенин* (Свердловск) 78—80, 85—87; *Г. Вейтас* (Вильнюс) 78, 80, 81, 88, 89; *А. Викол* (Нерюнгри) 80, 82, 85—90; *А. Власов* (Ленинград) 88, 89; *А. Воронин* (Старый Оскол) 88, 89; *О. Воротникова* (Красноярск) 79, 86, 89; *Г. Выгон* (Москва) 78, 79, 81, 85, 86, 89, 92; *В. Высоцкий* (Киев) 79, 81, 82, 85—87, 89—91; *К. Галичский* (Северодвинск) 78—82, 85—92; *А. Гвоздев* (Рига) 89; *Е. Гендин* (Киев) 78—82, 85; *М. Грехова* (Ярославль) 81; *А. Гринчук* (д. Мохро Брестской обл.) 78—80, 82, 85, 86, 89, 91; *А. Грицан* (Новосибирск) 91; *Д. Грязных* (Челябинск) 78, 81, 85—92; *В. Губин* (Ташкент) 81, 82; *О. Гусар* (Канев) 80, 82, 85, 89, 92; *Р. Гуськов* (Шахты Ростовской обл.) 86; *Ю. Гуц* (Ровно) 78—80, 82, 85, 88—90, 92; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 79, 80, 82, 89; *А. Даниленко* (Киев) 82; *С. Демба* (Старый Оскол) 87, 89; *Н. Демчук* (Здолбунов) 78, 80, 86, 88, 91, 92; *С. Дергач* (с. Малиновка БашАССР) 81; *О. Дзюбенко* (Киев) 85; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 78—80, 82, 85, 87, 88; *А. Довгань* (Киев) 80; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) 79, 80, 82, 85—87, 89, 91; *М. Дружинин* (Москва) 78—82, 85, 87; *А. Дубовик* (Брест) 78; *Д. Душамов* (Шават) 88; *Д. Егоров* (Павлово Горьковской обл.) 80; *Ю. Ерошенко* (п. Приютово БашАССР) 82; *П. Жаврид* (Минск) 79—81; *А. Жук* (Ровно) 78—80, 82, 85—90, 92; *О. Жуманиезов* (Шават) 89; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 89; *А. Зборовский* (Столин) 79; *В. Зелевинский* (Новосибирск) 88, 89; *М. Зеленфройнд* (Бобруйск) 78, 80—82, 85—87, 89, 92; *В. Злобов* (Старый Оскол) 88, 89; *Ф. Ибрагимов* (Баку) 78, 81, 82, 88—92; *Д. Иванов* (Смоленск) 79, 82; *Н. Ивченко* (Киев) 87; *Н. Илеть* (Черновцы) 79; *А. Калашников* (Киев) 78—80, 82; *М. Калиновский* (п. Трудовое Приморского кр.) 79, 80, 82, 85, 88, 89; *Т. Калита* (Киев) 78—80, 82, 85, 89; *К. Калюжный* (Одесса) 80; *Ал. Карпенко* (Брест) 78, 81, 82, 85; *Ан. Карпенко* (Брест) 78, 81, 82, 85, 87; *И. Кацман* (Киев) 79, 82, 89; *С. Кельман* (Алма-Ата) 78—80, 82, 85, 87—90; *Ж. Китаева* (Чернигов) 79; *К. Кладько* (Харьков) 79—82, 88; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 78, 79, 81, 82, 85, 86, 89, 92; *М. Ковалев* (Губкин) 82, 88—92; *И. Ковалец* (Ровно) 85, 90, 92; *С. Коваль* (Гомель) 78—81, 85, 88—90, 92; *В. Ковальский* (Киев) 79, 81, 82, 85; *Т. Ковальчук* (Киев) 79, 81; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 78—82, 85, 87—89, 91; *Д. Кольвах* (Орджоникидзе) 87; *Д. Комисаренко* (Винница) 78—82, 86; *Е. Коновалов* (Киев) 78, 80—82; *Ю. Контиевский* (Каушаны) 78, 79; *В. Коньшин* (Ростов) 78; *И. Корель* (Новосибирск) 89; *В. Королев* (Москва) 79; *А. Короновский* (Саратов) 80; *В. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) 88, 89, 91; *С. Костюк* (Коломна) 85, 86; *С. Котковский* (Черновцы) 80; *Ю. Кравич* (с. Княжполь Львовской обл.) 85, 86; *Н. Кронский* (Горький) 78, 79; *В. Кутузов* (Рига) 78—81, 85, 87, 89, 90, 92; *А. Лабунец* (Одесса) 85; *А. Лемперт* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 79, 81, 82, 85—87, 89—92; *А. Лянин* (Москва) 78, 85, 88, 89; *В. Макаров* (Кировское) 89; *Н. Маркарян* (Баку) 81; *Д. Массино* (Ташкент) 78—82; *Ю. Матюнин* (Вольск) 80—82, 85, 87—92; *Н. Мацко* (Киев) 79—82, 88, 89, 92; *В. Меркер* (Старый Оскол) 89; *Р. Мизюк* (Ровно) 78—80, 82, 85—92; *О. Мирошниченко* (Луцк) 78—82; *А. Михович* (Могилев) 85, 87; *А. Мишенин* (Кропоткин) 82; *Е. Мищенко* (Черновцы) 78—82, 85—92; *А. Мухин* (Северодвинск) 89, 90; *В. Мытько* (Ленинград) 85, 86, 89, 90, 92; *Т. Насардинов* (Грозный) 80; *Н. Немировская* (Киев) 79, 80, 85, 89; *Д. Омецинский* (Киев) 78—82, 85—87; *А. Орловский* (Киев) 78—82, 85—87; *А. Павленко* (Краматорск) 78, 79; *К. Паламарчук*

(Окончание см. на с. 75)

Варианты вступительных экзаменов

Ленинградский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математико-механический факультет, факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$\log_{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}(x^2-4x+14-4\sqrt{6})<2.$$

2 Решите уравнение

$$\cos x=\cos\frac{1}{x}.$$

3. Решите уравнение

$$(x^2+3x-2)^2+3(x^2+3x-2)-2=x.$$

4. Два круга с одинаковыми радиусами r касаются друг друга внешним образом и касаются третьего круга с радиусом R внутренним образом. Найдите радиус круга, одновременно касающегося этих трех кругов (из двух возможных случаев рассмотрите тот, в котором центр 4-го круга и центр круга с радиусом R лежат по разные стороны от точки касания кругов с радиусом r).

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру DC, длина AB равна a, длина DC равна b. Оказалось что углы, образованные DC с гранями ACB и ABD, равны α. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2
(факультет прикладной математики — процессов управления, отделение экономической кибернетики экономического факультета, отделение математической лингвистики филологического факультета)

1. Найдите все x и y, для которых выполняются соотношения

$$4\log_2^2 x+1=2\log_2 y,$$
$$\log_2 x^2\geqslant\log_2 y.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x}+\sin x=0.$$

3. Решите уравнение

$$9+\sqrt{5}x^3+5x+\frac{\sqrt{5}}{x}=3\sqrt{5}x^2+3x+\frac{3\sqrt{5}-1}{x}+\frac{3}{x^2}.$$

4. В треугольнике ABC угол B — прямой. Точки D и E на катете CB расположены так, что отрезки AD и AE делят угол A на три равные части. $AD=a$, $AE=b$. Найдите отношение площадей треугольников ADB и AEB.

5. Основанием треугольной пирамиды служит правильный треугольник, а двугранные углы при основании равны α, α и $\frac{\pi}{2}$. Найдите объем пирамиды, если известно, что ее высота равна H.

Вариант 3
(биологический и физический факультеты)

1. Найдите без таблиц $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{4}$ и $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4-y}}\geqslant\sqrt{y-1}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy=27, \\ 2(2\log_{y^2}x+\log_{\frac{1}{x}}y)=3. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра a, при которых из неравенства $ax^2+x-4a+2<0$ следует неравенство $-2<x<0$.

5. Около шара описана правильная четырехугольная пирамида, высота которой вчетверо больше диаметра шара. Найдите отношение объема шара к объему пирамиды.

Вариант 4
(географический и химический факультеты)

1. Решите неравенство

$$x-1\geqslant\sqrt{x^3-2x+1}.$$

2. Решите уравнение

$$3\sin 2x-4\cos 2x=5.$$

3. На плоскости найдите множество точек $(p,\ q)$, для которых уравнение $x^2-2px+q=0$ имеет два таких вещественных корня x_1, x_2, что $x_1^2+x_2^2=2$.

4. Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a повернут вокруг вершины прямого угла на угол $30°$. Найдите площадь общей части исходного и повернутого треугольников.

5. Параллельными плоскостями в трехгранном угле отсечены две пирамиды с объемами U и V $(U<V)$. Найдите объем третьей пирамиды, если ее основание совпадает с основанием меньшей, а вершина лежит на основании большей пирамиды.

Вариант 5
(геологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=5\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right).$$

2. Постройте график функции

$$f(x)=|x^2+x|-x-1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-2}(1-5x^3+x^5)<0.$$

4. Сумма длин оснований трапеции равна 9, а длины диагоналей равны 5 и $\sqrt{34}$. Уг-

лы при большем основании — острые. Найдите площадь трапеции.

5. В шар радиусом R вписана правильная треугольная призма. Высота призмы равна H. Найдите объем призмы.

Вариант 6
(отделение политэкономии и прикладной социологии экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$|y^2+3y|=1-y.$$

2. Найдите все целые положительные x и y, для которых

$$x^2+4x-y^2=1.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{1-\operatorname{ctg} x}\leqslant\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}$$

на отрезке $[0;\ \pi]$...

4. На отрезке $\left[0;\ \frac{2\pi}{3}\right]$ найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=3\sin x-\sin 3x.$$

5. Прямоугольный треугольник, периметр которого равен 10, разбит высотой, опущенной на гипотенузу, на два треугольника. Периметр одного из них равен 6. Найдите периметр другого треугольника.

Публикацию подготовили
Ю. Давыдов, Б. Семенов

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Два тела равной массы движутся навстречу друг другу, при этом скорость одного тела в два раза больше скорости второго. Какая часть механической энергии этих тел перейдет во внутреннюю при центральном абсолютно неупругом соударении?

2. В процессе изобарного нагревания гелия к нему было подведено количество теплоты $Q=300$ Дж. Определите работу, совершенную газом.

3. Определите сопротивление участка AB цепи (рис. 1). Указание: используйте метод равных потенциалов.

4. Постройте изображение предмета AB в собирающей линзе (рис. 2).

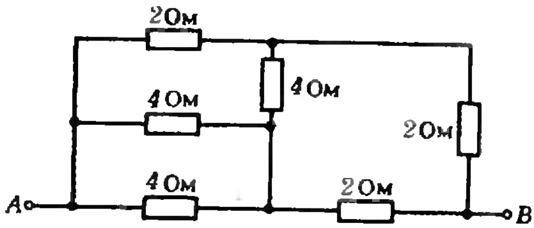


Рис. 1.

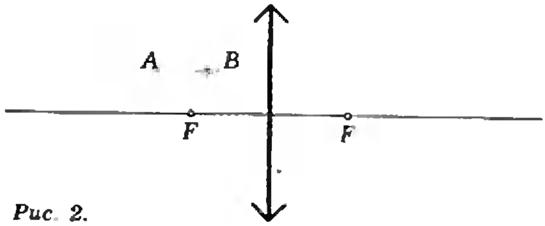


Рис. 2.

Математический факультет

1. Тело движется из состояния покоя равноускоренно. Во сколько раз путь, пройденный этим телом за восьмую секунду, больше пути, пройденного за третью секунду?

2. Тело массой $m=100$ г падает свободно. Определите изменение импульса этого тела за первые две секунды падения.

3. Источник постоянного тока с внутренним сопротивлением $r=1{,}5$ Ом замкнут на реостат, сопротивление которого может меняться от $R_1=3$ Ом до $R_2=7{,}5$ Ом. Во сколько раз при этом изменяется мощность, выделяемая на реостате?

Индустриально-педагогический факультет

1. В стакан до краев налита вода. Определите массу воды, которая выльется из стакана, если в него опустить на нити тело массой $m=20$ г, плотность которого $\rho=800$ кг/м^3.

2. Идеальная тепловая машина, работая от нагревателя с температурой $T_1=750$ К, за некоторое время совершила работу $A=300$ Дж. Какое количество теплоты за это время передано холодильнику, если его температура $T_2=300$ К?

3. Постройте изображение светящейся точки, расположенной на главной оптической оси рассеивающей линзы в одном из ее фокусов.

Публикацию подготовил Л. Бирюков

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(факультет технической кибернетики)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}9(9^y)+4\log_4^2 z=5,\\ 3(3^y)\cdot\log_4 z=1.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$5x-17(x+5)^{1/2}+31<0.$$

3. Решите уравнение

$$2\log_{9x^{-1}}\left(\frac{1}{3}\right)-3\log_{9x}3+\frac{16}{5}=0.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{5}+2x\right)=$$

$$=\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)+\frac{2}{3}.$$

5. В правильной пятиугольной пирамиде заданы G — двугранный угол при боковом ребре и H — высота пирамиды. Найдите образующую конуса, описанного около пирамиды.

Вариант 2
(физико-механический и физико-технический факультеты)

1. Решите уравнение

$$\frac{29}{2x-5}-\frac{20}{x-2}-\frac{3}{2x-1}+\frac{7}{x-1}=0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}35(64^x)+81\log_2^2 z=99,\\ -7(8^x)+9\log_2 z=1.\end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\log_{27x^{-3}}(x^{-3})\cdot\log_{27x^4}(x^2)<-\frac{1}{20}.$$

4. Решите уравнение

$$8\sin^3x\sin 3x-\cos 6x-3\cos 2x=-3\cos 4x.$$

5. В правильной треугольной пирамиде задан F — угол между высотой и боковым ребром пирамиды. Найдите отношение квадрата высоты боковой грани к боковой поверхности пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Под каким наименьшим углом к горизонту следует бросить мяч, чтобы он пролетел сквозь баскетбольное кольцо сверху, не ударившись о него? Радиус мяча r, радиус кольца $R=2r$, высота его над полом $H=3$ м. Баскетболист бросает мяч с высоты $h=2$ м, находясь на расстоянии $l=5$ м от кольца, считая по горизонтали. Изменением скорости мяча за время полета через кольцо пренебречь.

2. В сосуде, наполненном водой плотностью ρ, с ускорением a всплывает пузырек воздуха объемом V. Найдите силу давления со стороны сосуда на опору. Масса сосуда вместе с водой M.

3. Найдите центр тяжести тонкой однородной проволоки, согнутой в виде полуокружности радиусом r.

4. Какую работу нужно совершить, чтобы за время t подняться по движущемуся вниз эскалатору метро? Высота подъема h, скорость эскалатора постоянна и равна v, угол наклона эскалатора к горизонту α.

5. На поверхности жидкости плотностью ρ плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погруженный в жидкость. На сколько опустится верхняя кромка стакана, если его поставить на поверхность жидкости вверх дном? Высота стакана h, давление воздуха p_0.

6. Конец капиллярной трубки опущен в воду. Какое количество теплоты выделится при поднятии жидкости по капилляру? Коэффициент поверхностного натяжения воды σ, плотность воды ρ.

7. Сплошной металлический цилиндр радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найдите зависимость напряженности электрического поля от расстояния r до оси цилиндра и разность потенциалов между поверхностью цилиндра и осью.

8. Три одинаковых одноименно заряженных тела, заряд каждого из которых q, а масса m, соединены невесомыми, нерастяжимыми и непроводящими нитями длиной l так, что нити образуют равносторонний треугольник. Одну из нитей пережигают. Найдите максимальные скорости тел.

9. На плоскости зачерчен круг радиусом $r_0=0{,}2$ м. Стеклянный конус упирается вершиной в центр круга так, что его ось перпендикулярна плоскости. Каков видимый радиус круга, если на него смотреть с большого расстояния вдоль оси конуса? Угол при вершине конуса $2\alpha=60°$, радиус основания $r=r_0=0{,}2$ м, показатель преломления стекла $n=\sqrt{2}\approx 1{,}4$.

10. Сечение стеклянной призмы имеет форму равнобедренного треугольника. Одна из граней посеребрена. Луч света падает нормально на другую, не посеребренную грань и после двух отражений выходит через основание призмы перпендикулярно ему. Найдите углы призмы.

Публикацию подготовили С. Преображенский, В. Романов, И. Русанов

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция

$$f(x)=1+\frac{2\sin 2x+3\sin 3x}{\sin x}.$$

а) Докажите, что при $x \neq \pi n$

$$f(x)=2(6\cos^2 x+2\cos x-1).$$

б) Решите уравнение $f(x)=3$.

в) Найдите область значений функции f.

2. На стороне AD прямоугольника $ABCD$ взята точка F такая, что $FD=\frac{1}{3}AD$. Угол CAD равен α, угол CFD равен β. Положим $\gamma=\alpha+\beta$, $k=\operatorname{tg}\alpha$.

а) Докажите, что

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{4k}{1-3k^2}.$$

б) При каких значениях α величина угла γ меньше $\frac{\pi}{2}$?

в) Найдите α такое, что $\gamma=\frac{3\pi}{4}$.

г) Докажите, что $\beta<3\alpha$.

3. Дана функция

$$f(x)=\log_4(x^2-1)-\frac{1}{2}\log_4(x-4)^2.$$

а) Найдите область определения функции f.

б) Решите уравнение $f(x)=\frac{3}{2}$.

в) При каких значениях a уравнение $f(x)=\log_4 a$ имеет два корня?

Вариант 2

1. Дана функция $f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$.

а) Решите уравнение

$$f(x)=\frac{17}{4}.$$

б) При каком x функция принимает наименьшее значение?

в) Докажите, что уравнение $f(x)=a$ имеет не более трех отрицательных корней.

2. В треугольнике ABC угол A — прямой, угол C равен α. Длина гипотенузы BC равна 1. Круг радиусом r с центром в точке A касается внешним образом кругов с центрами в точках B и C. S — сумма площадей трех кругов.

а) Покажите, что

$$S=\pi(1+3r^2-2r(\sin\alpha+\cos\alpha)).$$

б) При каком r круги с центрами в точках B и C также касаются друг друга?

в) Пусть r таково, что выполнены условия предыдущего пункта. Какое наименьшее значение может принимать площадь S в зависимости от α?

3. Дана функция

$$f(x)=\log_a(1-8a^{-x}).$$

а) Найдите область определения функции f.

б) При $a=\frac{1}{2}$ решите неравенство $f(x)>x+5$.

в) Решите неравенство $f(x)+2x>0$ при всех допустимых a.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Один математический маятник имеет период колебаний T_1, другой T_2. Какой период колебаний будет у математического маятника, длина которого равна сумме длин указанных маятников?

2. Резиновый шар содержит $V=2$ л кислорода при температуре $t=20\,°C$ и атмосферном давлении $p=100$ кПа. Определите массу кислорода в шаре. Какой объем займет кислород, если шар опустить в воду на глубину $h=10$ м и охладить до температуры воды $t'=4\,°C$? Давление внутри шара принять равным давлению вне шара.

3. Во сколько раз нужно повысить напряжение источника, чтобы потери в линии электропередачи уменьшились в n раз? Мощность, отдаваемую источником, считать постоянной.

4. Расстояние между двумя точечными источниками света $l=24$ см. Где между ними надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F=9$ см, чтобы изображения обоих источников получились в одной и той же точке?

5. Как изменится положение химического элемента в таблице Менделеева после α-распада его атомов? после β-распада?

Вариант 2

1. Тонкая однородная палочка шарнирно укреплена за верхний конец, а нижним концом погружена в воду. При этом равновесие достигается, когда палочка расположена наклонно к поверхности воды и в воде находится половина палочки. Какова плотность материала палочки?

2. Какое количество теплоты необходимо сообщить гелию массой $m=40$ г, содержащемуся в баллоне, для его нагревания на $\Delta T=20$ К? Чему равна удельная теплоемкость гелия в этом процессе?

3. Определите начальную скорость сближения протонов, находящихся на достаточно большом расстоянии друг от друга, если минимальное расстояние, до которого они могут сблизиться, равно r_{min}.

4. Плоский воздушный конденсатор после зарядки отключают от источника и погружают в керосин с диэлектрической проницаемостью ε. Как изменится энергия, накопленная в конденсаторе?

5. Как нужно расположить две собирающие линзы, чтобы пучок параллельных лучей, пройдя через обе линзы, снова стал параллельным? Главные оптические оси линз не совпадают друг с другом.

Публикацию подготовили
Ю. Богачев, А. Коточигов,
Г. Лапин, С. Энтина

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 39)

(Иркутск) 78, 82, 87, 88; *Р. Пекарский* (Киев) 78—80, 82, 89; *Г. Перадзе* (Тбилиси) 78; *В. Петрова* (Криводол, НРБ) 82; *Т. Петрова* (Новосибирск) 79, 82; *И. Пилюгин* (Алма-Ата) 85, 87—90; *С. Подпрятов* (Киев) 79, 89; *В. Полищук* (Канев) 78, 80, 82, 85, 86, 89, 92; *С. Польшин* (Харьков) 78, 80—82, 85—92; *Ф. Попеленский* (Москва) 81, 85; *С. Поторочин* (Ижевск) 89, 91, 92; *Е. Призант* (Одесса) 78, 80, 82, 85, 86, 88—92; *Д. Прошин* (Загорск) 89; *В. Пузанов* (Донецк) 79, 82, 85, 88, 89; *А. Раздобудько* (Киев) 79, 81, 82; *А. Распереза* (Брест) 78, 81, 82, 85; *У. Рахимов* (Шават) 79, 89; *Х. Рахимов* (Шават) 79, 81, 85, 89; *Л. Рубчинский* (Горький) 79, 80, 82; *А. Рыбалочка* (Киев) 79, 80, 82, 85, 88, 89; *Н. Рябова* (Харьков) 79, 80, 85, 86, 88, 89, 92; *А. Савин* (Горловка) 78, 80—82; *У. Сапаев* (Шават) 89; *Р. Сеннов* (Москва) 80, 82; *В. Силаев* (Брест) 78; *А. Скабелин* (Барановичи) 78—82, 85—92; *В. Слюсарь* (Киев) 85, 86; *А. Смирнов* (Москва) 80; *В. Солдатов* (п. Краснореченск Приморского кр.) 79, 80, 82; *Ю. Спектор* (Киев) 78, 82; *М. Субботин* (Старый Оскол) 79, 80, 89; *И. Сысоев* (Семипалатинск) 79, 82, 86, 88; *С. Тайманов* (Раменское) 78, 80, 82, 88; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 78—82, 86—90, 92; *В. Тебус* (Москва) 92; *С. Тимашов* (Алма-Ата) 85, 89—92; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 80, 82, 85; *М. Титов* (Киев) 78, 80—82, 89; *С. Тихонов* (Воронеж) 78, 80—82, 85, 86, 89, 91; *Р. Тодоров* (Варна, НРБ) 79, 86, 88, 92; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 88, 89; *С. Трифонов* (Киев) 85; *А. Усинский* (п. Птичья Ровенской обл.) 79, 80, 85, 86, 88—92; *Г. Федоров* (Мамадыш) 78, 82; *Л. Френклах* (Воронеж) 79; *А. Фридлянд* (Саратов) 78, 79, 81, 82, 85, 86, 89—92; *А. Харламов* (Киев) 88; *М. Хасин* (Донецк) 82; *Г. Хачатрян* (с. Бердик АрмССР) 78, 81, 85, 89; *А. Холод* (Бердянск) 90, 91; *А. Христиченко* (Краматорск) 78, 79, 82; *Е. Чашечкина* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 80—82, 85—92; *Л. Чернышев* (Москва) 79, 80, 87, 89; *В. Чертушкин* (Мариуполь) 79; *А. Чирихин* (Жуковский) 89; *Д. Чокин* (Алма-Ата) 78, 79, 81, 82, 85, 86, 89—92; *С. Шавырин* (Серпухов) 79; *Е. Шагаров* (Грозный) 79, 80, 82, 85, 88, 89; *Г. Шаповалов* (Киев) 78—82, 85, 89; *А. Шехтер* (Бельцы) 78—82, 85; *С. Шинкевич* (Березники) 78—82, 85—92; *А. Шпагин* (Мариуполь) 87; *О. Шпырко* (Киев) 89; *И. Шуляк* (Киев) 78, 80—82, 87—89; *К. Шурунов* (Куйбышев) 78, 82, 88; *М. Энтин* (Тула) 78—82, 85—87, 89, 90, 92; *Д. Юсупов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 31; *А. Яремчук* (Артемовский) 80, 81.

Ответы, указания, решения

Переходные процессы в электрических цепях

1. $U(t)=\mathscr{E}_0(1+2e^{-t/(RC)})$.

2. $r=R/2=5$ Ом.

3. $Q={}^1/_6\, C_0U_0^2$.

Ленинградский государственный университет

Вариант 1

1. (1; 3).
2. $k\pi\pm\sqrt{k^2\pi^2-1}$, $k\neq0$, $k\in Z$; $m\pm\sqrt{m^2\pi^2+1}$, $m\in Z$.
3. $-1\pm\sqrt{3}$, $-2\pm\sqrt{2}$. Указание. Пусть $y=x^2+3x-2$. Тогда исходное уравнение запишется в виде $x=y^2+3y-2$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $(x-y)(x+y+4)=0$. Откуда следует, что или $x^2-2x-2=0$, или $x^2+4x+2=0$.
4. $R(R-r-h)/(R+r+h)$, где $h=\sqrt{R(R-2r)}$. Указание. Пусть O_1, O_2 — центры кругов с радиусами r, O_3 — центр круга радиусом R, O_4 — центр четвертого круга, A — точка касания первых двух кругов. Обозначим длину отрезка O_3A через h, длину отрезка O_4A — через h_1, радиус четвертого круга — через x (рис. 1). По теореме Пифагора из треугольников O_3O_2A и O_4O_2A получаем $\sqrt{(R-r)^2-r^2}=h$, $\sqrt{(r+x)^2-r^2}=h_1$. Подставляя h и h_1 в соотношение $h+h_1=R-x$, получим уравнение относительно x.
5. $ab^2\operatorname{tg}\alpha/12$. Решение. Проведем плоскость DCF перпендикулярно ребру AB (рис. 2). Это можно сделать, так как по условию DC и AB перпендикулярны. Искомый объем V равен сумме объемов треугольных пирамид $AFCD$ и $BFCD$, поэтому

$$V=\frac{1}{3}AF\cdot S_{\Delta DFC}+\frac{1}{3}BF\cdot S_{\Delta DFC}=\frac{1}{3}a\cdot S_{\Delta DFC}.$$

Найдем $S_{\Delta DFC}$. Заметим, что плоскость DFC будет перпендикулярна плоскостям ACB и ADB, так как они проходят через прямую AB.

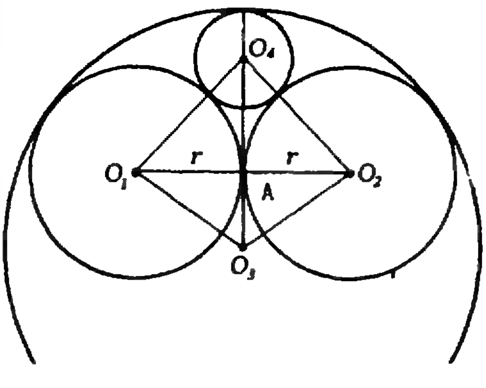


Рис. 1

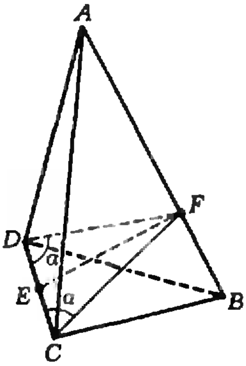


Рис. 2.

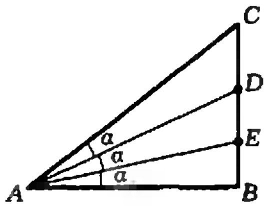


Рис. 3.

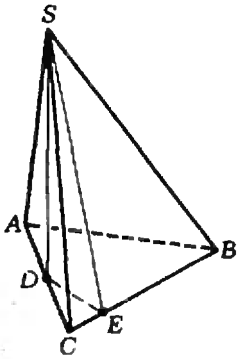


Рис. 4.

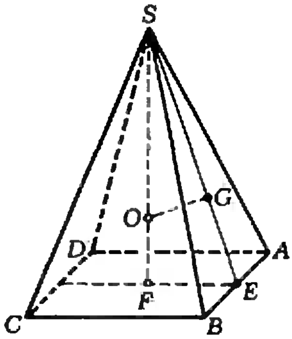


Рис. 5.

перпендикулярную DFC. Следовательно, углы FDC и FCD равны α и поэтому треугольник DFC — равнобедренный. Пусть EF — его высота. Тогда $EF=b\,\mathrm{tg}\,\alpha/2$, $S_{\Delta DFC}=\frac{1}{2}b\cdot\frac{b}{2}\times$ $\times\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{b^2}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Итак, $V=\frac{1}{3}a\frac{b^2}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha=$ $=\frac{ab^2}{12}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Вариант 2

1. $x=\sqrt{2}$, $y=2$. Указание. Из условия следует неравенство $4\log_2^2 x+1\leqslant 4\log_2 x$. Это возможно лишь при $2\log_2 x=1$.

2. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

3. $x_{1,2}=\frac{3\pm(\sqrt{5}-2)}{2}$, $x_{3,4,5,6}=$ $=\pm\sqrt{\frac{3\pm(\sqrt{5}-2)}{2\sqrt{5}}}$. Указание. После группировки слагаемых получаем

$$x\left(\sqrt{5}x^2+\frac{1}{x^2}-3\right)-3\left(\sqrt{5}x^2+\frac{1}{x^2}-3\right)+$$
$$+\frac{\sqrt{5}}{x}\left(\sqrt{5}x^2+\frac{1}{x^2}-3\right)=0,$$

откуда или

$$\sqrt{5}x^2+\frac{1}{x^2}-3=0,$$

или

$$x+\frac{\sqrt{5}}{x}-3=0.$$

4. $\frac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{2b}$. Решение. Пусть $\angle EAB=$ $=\angle DAE=\alpha$ (рис. 3). Тогда из $AB=a\cos 2\alpha=$ $=b\cos\alpha$ получим уравнение $a(2\cos^2\alpha-1)=$ $=b\cos\alpha$ для определения $\cos\alpha$. Учитывая, что α — острый угол, запишем

$$\cos\alpha=\frac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{4a}.$$

Отношение площади S_1 треугольника ADB к площади S_2 треугольника AEB равно

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2a}{b}\cos\alpha=\frac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{2b}.$$

5. $\frac{4\sqrt{3}}{9}H^3\,\mathrm{ctg}^2\alpha$. Решение. Пусть ASC — та боковая грань, которая перпендикулярна основанию (рис. 4), а SD — высота пирамиды. Так как углы между основанием ABC и гранями SAB и SBC равны α, точка D равноудалена от AB и BC, т. е. D — середина AC.

Вариант 3

1. $\sqrt{15}/7$.

2. $\left[1;\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{5}}{2};\ 4\right]$.

3. $(9;\ 3)$, $\left(\frac{1}{27};\ 729\right)$.

4. $\left[\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right]$. Указание. При $a=0$ и $a<0$ множество решений первого неравенства неограничено и поэтому не может содержаться в интервале $(-2;\ 0)$. При $a>0$ первое неравенство равносильно неравенству

$$(x+2)\left(x-\frac{2a-1}{a}\right)<0.$$

Для того чтобы решения этого неравенства удовлетворяли условию задачи необходимо и достаточно, чтобы было $-2\leqslant\frac{2a-1}{a}\leqslant 0$.

5. $\frac{3\pi}{32}$. Указание. Проведем сечение пирамиды через центр шара и середину стороны основания пирамиды (рис. 5). В точках F и G шар касается основания и боковой стороны соответственно. Из подобия треугольников SFE и SOG имеем $EF/8R=R/SG$. Так как $SG=$ $=\sqrt{49R^2-R^2}$, то $EF=2\sqrt{3}R/3$. Следовательно, объем пирамиды $V=128R^3/9$.

Вариант 4

1. $x=1$.

2. $\arcsin\frac{4}{5}\Big/2+\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$. Указание. Запишите уравнение в виде $\cos\varphi\sin 2x-$ $-\sin\varphi\cos 2x=1$, где $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$.

3. См. рис. 6. Указание. Из вещественности корней x_1 и x_2 следует, что $p^2\geqslant q$. По теореме Виета $2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=$ $=4p^2-2q$.

4. $a^2(2-\sqrt{3})$. Решение. Пусть ABC — исходный треугольник, $AB'C'$ — повернутый. D —

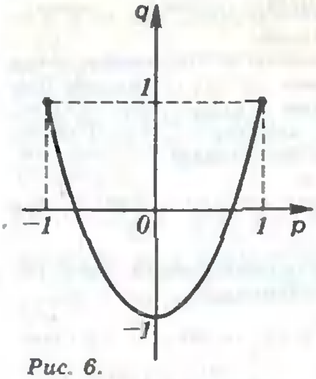


Рис. 6.

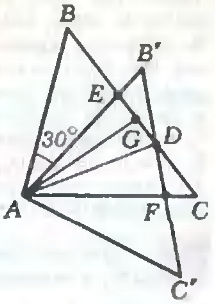


Рис. 7.

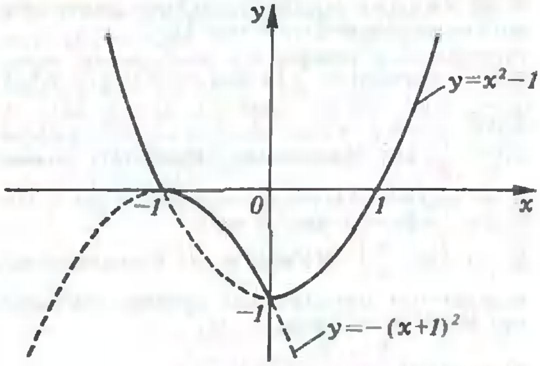


Рис. 8.

точка пересечения BC с $B'C'$ (рис. 7). Из соображений симметрии ясно, что $\angle EAD = \angle FAD = 30^\circ$. Следовательно, $AE = AD$, а искомая площадь равна $2S_{\Delta AED}$. Пусть AG — перпендикуляр, опущенный из точки A на BC. Так как $\angle EAG = 15^\circ$, то ясно, что

$$S_{\Delta AED} = AG \cdot EG = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} 15 = \frac{a^2}{2}(2-\sqrt{3}).$$

Поэтому искомая площадь равна $a^2(2-\sqrt{3})$.

5. $(V^{\frac{1}{3}} - U^{\frac{1}{3}})U^{\frac{2}{3}}$. Указание. Из подобия пирамид следует, что отношение их высот равно корню кубическому из отношения их объемов. Высота третьей пирамиды равна разности высот первых двух, т. е. $[(V/U)^{\frac{1}{3}} - 1] \cdot h$, где h — высота меньшей пирамиды.

Вариант 5

1. $\frac{2\pi}{3} + 4k\pi$, $\frac{2\pi}{3} \pm 4 \arccos \frac{1}{10} + 8k\pi$, $k \in Z$.

Указание. Заметим, что $\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$.

2. См. рис. 8. 3. $\sqrt{5} < x < 3$.

4. $\frac{27}{2}$. Указание. Получите уравнение для высоты трапеции, выразив сумму оснований трапеции через ее диагонали и высоту при помощи теоремы Пифагора.

5. $\frac{3\sqrt{3}}{16} h(4R^2 - h^2)$.

Вариант 6

1. $-2-\sqrt{5}$, -1, $-2+\sqrt{5}$.

2. $x=1$, $y=2$. Указание. Исходное уравнение равносильно уравнению $(x+2-y)(x+2+y)=5$. Так как $x+2+y>0$, то и $x+2-y>0$. Получим разложение числа 5 в произведение двух целых положительных чисел, т. е. $x+2+y=5$, $x+2-y=1$.

3. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}, \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$.

4. 4. Указание. Так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$, то $f(x) \leqslant 3+1=4$. Если $x=\frac{\pi}{2}$, то $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

5. 8. Решение. Обозначим (рис. 9) периметры треугольников ABC, ADC и BDC через p, q и x. Треугольники ABC, ADC и BDC подобны и их периметры относятся как длины соответственных сторон, т. е. $p/AB = q/AC = x/BC = k$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, откуда $p^2 = q^2 + x^2$. По условию $p=10$, $q=6$, следовательно, $x=8$.

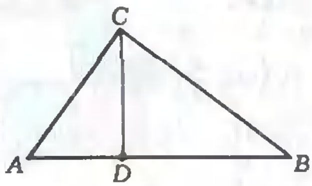


Рис. 9.

[illegible]нградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Физика

Физический факультет

1. $\Delta E/E = 0{,}9$.
2. $A = 0{,}4Q = 120$ Дж.
3. $R_{AB} = 2$ Ом.
4. См. рис. 10.

Математический факультет

1. $l_2/l_3 = 3$.
2. $\Delta(mv) = mgt = 2$ кг·м/с.
3. $\frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2(R_1+r)^2}{R_1(R_2+r)^2} = 0{,}625$.

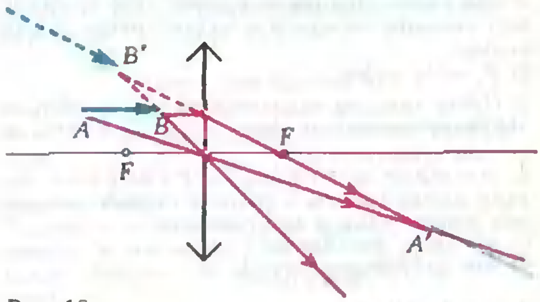


Рис. 10.

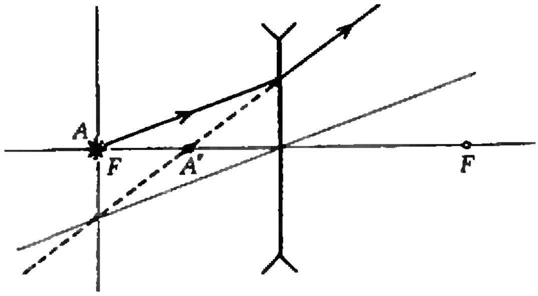


Рис. 11.

Индустриально-педагогический факультет

1. $\Delta m_в = m = 20$ г.
2. $Q_2 = AT_2/(T_1 - T_2) = 200$ Дж.
3. Изображение точки находится на оптической оси посередине между светящейся точкой и линзой (рис. 11).

[redacted]нградский политехнический институт [redacted]М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $\left\{(-1;\ 4);\ \left(\log_3 \frac{2}{3};\ 2\right)\right\}$.
2. $\left]-4\frac{21}{25};\ 4\right[$.
3. $\{3^{1/2};\ 3^{-7/8}\}$.
4. $2\pi k - \frac{\pi}{5} \pm \arccos\frac{2}{3}$, $k \in Z$. Указание. Умножьте обе части уравнения на $\sin\frac{x}{2}$ и примените формулу $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.
5. $H \operatorname{ctg} 54° \operatorname{tg}\frac{G}{2}$.

Вариант 2

1. $\left\{-\frac{2}{5};\ -\frac{1}{2}\right\}$. 2. $]0;\ 2^{8/9}[$.
3. $]3^{-3/4};\ 3^{-1/4}[\ \cup\ ]3^{3/11};\ 3[$.
4. $\varnothing$. Указание. Замените $\sin^3 x$ в уравнении, пользуясь формулой $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.
5. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3\sin^2 F} - 1}$.

Физика

1. $\alpha_{min} = \operatorname{arctg}(2(H-h)/l + r/\sqrt{R^2 - r^2}) = 45°$. Указание. При минимальном угле бросания мяч касается передней и задней точек дужки кольца.
2. $F_g = Mg - \rho V a$.
3. Центр тяжести находится на оси симметрии полуокружности на расстоянии $x = 2r/\pi$ от центра окружности.
4. $A = mg\sin\alpha(vt + h/\sin\alpha)$. Указание. Задачу проще решать в системе отсчета, связанной с движущимся эскалатором.
5. $x = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{2\rho g h}{2p_0 + \rho g h}\right)$.
6. $Q = 2\pi\sigma^2/(\rho g)$.
7. $E = (m\omega^2/e)r$; $U = m\omega^2 R^2/(2e)$, где m и e — масса и заряд электрона.
8. Скорости максимальны в тот момент, когда все три тела находятся на одной прямой. При этом скорость среднего заряда $v_1 = q/\sqrt{6\pi\varepsilon_0 m l}$, а скорости крайних зарядов $v_{2,3} = v_1/2$ (здесь ε_0 — электрическая постоянная).
9. $r' = r_0 \sin\alpha = 0{,}1$ м.
10. Угол при вершине призмы $\alpha = 36°$, а при основании $\beta = 72°$.

[redacted]нградский электротехнический институт [redacted]В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. а) Указание. Воспользуйтесь равенством $\sin 3x = \sin 2x\cos x + \sin x\cos 2x$.

б) $x = \pm\arccos\left(-\frac{5}{6}\right) + 2\pi k$, $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

в) $\left(-\frac{7}{3};\ 14\right)$. Указание. Обозначьте $t = \cos x$ и исследуйте область значений функции $g(t) = 2(6t^2 + 2t - 1)$ при $|t| < 1$.

2. б) $\left(0;\ \frac{\pi}{6}\right)$. Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущего пункта, учитывая, что $k > 0$ по условию.

в) $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{7}}{3}$.

г) Указание. Если $3\alpha \geqslant \frac{\pi}{2}$, неравенство очевидно $\left(\beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Если $3\alpha < \frac{\pi}{2}$, то вычислите $\operatorname{tg} 3\alpha$ и покажите, что $\operatorname{tg} 3\alpha > \operatorname{tg}\beta$.

3. а) $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

б) $\{-11;\ 3\}$. Указание. Решите эквивалентное уравнение $x^2 - 1 = 8|x-4|$, $x \in D(f)$.

в) $0 < a < 8 + \sqrt{60}$. Решение. Уравнение $f(x) = a$ равносильно уравнению $x^2 - 1 = a|x-4|$. Последнее всегда имеет корни на луче $(-\infty;\ 1)$ и на отрезке $(1;\ 4)$. Других корней уравнение не имеет, если $x^2 - 1 > a(x-4)$ при $x > 4$.

Вариант 2

1. а) $\left\{-2;\ -\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ 1\right\}$. Указание. Сделайте замену $t = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$.

б) $x = -\frac{1}{2}$. Найдите наименьшее значение функции $\varphi(t) = t + \frac{1}{t}$, $t > 0$ и, далее, исходя из равенства $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = t$, найдите x.

в) Решение. Рассмотрим уравнение $\varphi(t) = a$ при $t > 0$, где $\varphi(t) = t + \frac{1}{t}$. Оно имеет два корня t_1 и t_2 при $a > 2$, причем $0 < t_1 \leqslant 1 \leqslant t_2 < \infty$. Далее решаем уравнения $\frac{x}{x+1} = \pm\sqrt{t_1}$ и $\frac{x}{x+1} = \pm\sqrt{t_2}$. Анализируя вид решений, заметим, что только корень $\frac{\sqrt{t_1}}{1-\sqrt{t_1}}$ положителен.

2. б) $r=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha-1)$. Указание. Сумма радиусов кругов с центрами в точках B и C равна 1.

в) $\pi\left(\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Указание. Объединяя результаты двух предшествующих пунктов, получите выражение $S(\alpha)=\pi(2-\frac{1}{4}(\sin\alpha+\cos\alpha-1)^2-\cos\alpha-\sin\alpha)$ и исследуйте его на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

3. а) При $a>1$, $x>\log_a 8$; при $a<1$, $x<\log_a 8$.
б) $(-\infty;\ -4)\cup(-4;\ -3)$. Указание. Сделайте замену $t=2^x$ и перейдите к неравенству $256t^2-32t+1>0$, $t>0$.
в) При $a>1$, $x>\log_a(4+\sqrt{17})$; при $a<1$, $\log_a(4+\sqrt{17})<x<\log_a 8$. Указание. Неравенство $f(x)+2x>0$ равносильно:
при $a>1$ системе

$$\begin{cases} a^{2x}-8a^x>1,\\ x>\log_a 8,\end{cases}$$

при $a>1$ системе

$$\begin{cases} a^{2x}-8a^x<1,\\ x<\log_a 8.\end{cases}$$

Уравнение $t^2-8t-1=0$ имеет отрицательный корень $4-\sqrt{17}$ и корень $4+\sqrt{17}$ больший 8. Полагая $t=a^x$, вернемся к анализу систем и получим ответ задачи.

Физика

Вариант 1

1. $T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}$.
2. $m=pVM/(RT)=2{,}6$ г, $V'=pVT'/((p+\rho gh)T)=0{,}95$ л, где $\rho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды, $M=32\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса кислорода.
3. $U_2/U_1=\sqrt{n}$.
4. Линзу надо поместить на расстоянии 6 см от одного источника и 18 см от другого. При этом одно из изображений мнимое.
5. После α-распада химический элемент сместится на две клетки к началу периодической таблицы, а после β-распада — на одну клетку ближе к концу таблицы.

Вариант 2

1. $\rho=(3/4)\rho_в$ (здесь $\rho_в$ — плотность воды).
2. $Q=(3/2)(m/M)R\Delta T=2{,}5\cdot10^3$ Дж, $c=(3/2)(R/M)=3{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг$\cdot$К), где $M=4\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса гелия.
3. $v=e\sqrt{\pi\varepsilon_0 m r_{\min}}$ (здесь ε_0 — электрическая постоянная).
4. Энергия конденсатора уменьшится в ε раз.
5. Линзы $Л_1$ и $Л_2$ надо расположить так, чтобы точка пересечения лучей после прохождения первой линзы совпадала с передним для $Л_2$ и задним для $Л_1$ побочными фокусами линз.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 3)

1. Пусть скорость первого путника равна v_1, скорость второго путника равна v_2 и пусть они встретились через t часов после выхода. Тогда $16v_1=tv_2$ и $tv_1=9v_2$. Деля первое уравнение на второе, находим $\frac{16}{t}=\frac{t}{9}$, откуда $t^2=16\cdot9$, т. е. $t=12$ часов.
2. $58\,725+58\,725+3\,958\,725=4\,076\,175$.
3. 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9.
4. Пусть это числа вида $10x+y$. Тогда $10x+y=x^2+y^3$, т. е. $x(10-x)=(y-1)y(y+1)$. Числа x и $10-x$ одинаковой четности, а произведение $(y-1)y(y+1)$ делится на 6. Значит, числа x и $10-x$ оба четны и одно из них делится на 3, т. е. либо x делится на 6, либо $10-x$ делится на 6. Так как $0<x\leqslant9$, получаем, что либо $x=6$, либо $10-x=6$, т. е. $x=4$. В обоих случаях $y=3$. Получаем два решения: 63 и 43.
5. См. рис. 12.

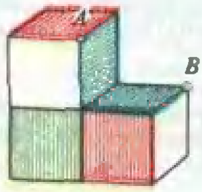


Рис. 12.

Слово, буква, число
(см. «Квант» № 3)

Язык конго

Мы видим, что запись дат на языке конго имеет вид

kilumbu ya ...ya ngonda...,

где на месте каждого пропуска стоит одно слово (tatu, mosi и др.) или словосочетание, начинающееся с kumi na. Сравнение строк показывает, что слово, стоящее после kilumbu ya, обозначает число, а слово, стоящее на последнем месте,— порядковый номер месяца, т. е. «январь» буквально означает «1-й месяц», «март» — «3-й месяц» и т. д. Числа 11 и 18 передаются (соответственно) как «10 и 1» и «10 и 8» (по-видимому, na означает «и»). Буквальный смысл слов kilumbu ya и ya ngonda остается неясным, но понятно, что общее значение конструкции —

число ... месяца номер...

Ответ: 13 августа; kilumbu ya kumi ya ngonda tatu.

Русские буквы

Числовое значение букв определяется их местом в алфавите. (Звездочкой обозначены буквы, которые мы можем выбрать по аналогии.)

Единицы	Десятки	Сотни
		Р — 100
В — 2	К — 20	*С — 200
*Г — 3	Л — 30	Т — 300
Д — 4	М — 40	
Е — 5		Ф — 500
		Х — 600

Записывая число, младшие разряды помещают справа от старших.

Ответ: 624 — ХКД, 232 — СЛВ, 333 — ТЛГ. В задаче приведены только те буквы, которые совпадают с современными по написанию (не считая мелких различий в начертании), звуковому значению и порядку следования в алфавите. Для того чтобы записать другие числа, недостаточно знать современный алфавит. Например, исходя из современного алфавита, для чисел 10, 50 и 400 нужно выбрать буквы и, н и у, но звуки, которые передаются сейчас этими буквами, раньше записывались иначе: I («и десятеричное»), N и OR. (Для звука [и] имелась еще одна буква: Н — с числовым значением 8.) Некоторые числа записывались буквами, которые вышли из употребления.

Мартовские иды

В конце даты указывалось название месяца, при этом длинные названия передавались сокращенно: APR — апрель, MAI — май, AVG — август, OCT — октябрь, NOV — ноябрь, DEC — декабрь (совпадает с началом соответствующего слова английского и ряда других языков).

Первое число месяца современного календаря имело особое обозначение. Все другие даты, встречающиеся в задаче, относятся ко второй половине месяца; их древнеримское обозначение включало в себя указание на первый день следующего месяца,— например, в конце мартовских дат указано: KAL·APR, в конце апрельских — KAL·MAI и т. д. Римляне вели обратный счет дней, т. е. указывали, каким по счету будет данный день, если считать от начала следующего месяца и включать в счет само это начало. Например, для 27 июля имеем:

27, 28, 29, 30, 31 июля, 1 августа,

— всего шесть дней; поэтому древнеримское обозначение этой даты включает в себя число VI. (На обратный счет дней второй половины месяца указывают суммы современного и древнеримского чисел: для сентября и ноября, имеющих по 30 дней, они равны 32, а для июля и октября — 33.)

Ответ: 30 марта, A·D·XII·KAL·MAI, 20 октября.

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.01.90. Подписано к печати 13.03.90. Т-06476
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл. кр.-отт. 24,09. Уч.-изд. л. 7,96. Тираж 171 765 экз.
Заказ 31. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

КОМПЬЮТЕР УГРОЖАЕТ ЧЕЛОВЕКУ

В 1988 году одна из сильнейших в мире шахматных программ «Хайтек» буквально разгромила американского гроссмейстера А. Денкера: в четырех партиях он набрал всего пол-очка. Похоже, это была первая победа машины над гроссмейстером в матче с нормальным контролем времени. Все же надо учесть, что рейтинг 75-летнего шахматиста сейчас всего 2295. А вот победа «Дип сот» в матче с Р. Бирном, другим американским гроссмейстером, недавним претендентом на корону,— истинная сенсация. Результат именно этого матча вызвал повышенный интерес к «Дип сот» и сделал интригующим поединок компьютера с Г. Каспаровым, о котором рассказывалось в прошлом номере. Две партии Бирн проиграл, две завершились вничью, и лишь на финише матча гроссмейстер выиграл партию престижа. (Дальнейшая информация о «Дип сот» основана на заметках Бирна.)

Программа «Дип сот» сочетает в себе невероятную силу расчета вариантов с глубоким анализом позиции, основанном на правильной оценке сравнительной силы фигур — в зависимости от их расположения на доске и стадии партии, и способна даже сравнивать различные планы ведения атаки. Ее создатели — пять выпускников компьютерного факультета университета Карнеги-Меллона. Забавно, что ни один из разработчиков не в состоянии оказать сколько-нибудь серьезного сопротивления своей программе. «Дип сот» анализирует 720 тысяч позиций в секунду. Такая скорость обеспечивается использованием в компьютере «Сан-4», на котором играет программа «Дип сот», двух процессоров, в каждый из которых встроен очень крупный чип (микросхема с большим количеством электронных элементов). Этот чип изобрел Фан-Сюнсю (Тайвань) в процессе работы над докторской диссертацией. Он же разработал контурную доску со 100 другими стандартными чипами (при анализе позиции каждая микросхема ведет свой собственный расчет вариантов). Впрочем, «Дип сот» может быть приспособлена к любой достаточно мощной компьютерной системе.

Помимо скоростных качеств, определяемых техническими достижениями в производстве компьютеров, в «Дип сот» реализован ряд новых алгоритмических идей, связанных прежде всего с уточнением оценочной функции. Так, Андреас Новатцик из ФРГ разработал способ более тонкого учета пешечной структуры позиции. Поясним это. При построении шкалы сравнительной силы фигур в шахматных учебниках сила пешки обычно принимается за 1, сила коня и слона — по 3,5, ладьи — 5 и ферзя — 9 единиц. Однако эти оценки существенно меняются в зависимости от конкретной ситуации. Скажем, пешки в фаланге следует оценивать выше, а сдвоенные, а тем более строенные пешки — ниже. Важными факторами являются количество фигур на доске, пространство, которое они контролируют, и т. д. Эти и другие позиционные нюансы учтены в программе «Дип сот».

А. Новатцик начал с общих оценок, известных ранее, и постепенно двигался по пути их конкретизации, используя шахматную эрудицию доктора Мэррея Кэмпбелла из Канады — самого сильного шахматиста в пятерке авторов «Дип сот». В процессе работы над программой компьютерному анализу были подвергнуты 900 партий, сыгранных гроссмейстерами и мастерами. При этом ЭВМ сравнивала оценки, которые игроки назначали фигурам в тех или иных ситуациях. Такой подход практически превратил «Дип сот» в усердного ученика нескольких гроссмейстеров.

А. Новатцик построил шкалу, содержащую около 100 оценок силы фигур в различных положениях. Например, коня в центре доски он оценил в 6,274, а на краю доски — в 4,738. Оценки могут меняться в зависимости от стадии партии. Скажем, королю в дебюте и раннем миттельшпиле крайне рискованно путешествовать в центр доски, но в окончании это чаще всего приносит пользу, и «Дип сот» дает отрицательную оценку централизованному королю в дебюте и положительную — в окончании.

Помимо чипа Фан-Сюнсю и шкалы оценок Новатцика и Кэмпбелла, в «Дип сот» есть еще одна новинка. Программа прогнозирует возможные продолжения и оценивает их. Научил машину этому Томас Анансараман из Индии. Наконец, пятый представитель группы Петер Янсен из Бельгии помог Кэмпбеллу вмонтировать в компьютерную систему базу данных для анализа окончаний, а также участвовал в создании оценочного механизма. Двое исследователей, упомянутых последними, обеспечивали и дебютную часть программы.

Так что «Дип сот» — компьютерное чудо, созданное международным содружеством ученых.

Мы уже рассказывали о победе «Дип сот» в крупном международном турнире, где компьютер впервые в истории выиграл турнирную партию у гроссмейстера — Б. Ларсена («Квант», 1989, № 6). Вот еще одна победа компьютерного гроссмейстера над сильным шахматистом в том же турнире в Лонг-Бич.

«Дип сот» — Гликсман
Французская защита

1. e4 e6 2. d4 d5 3. Kc3 Cb4 4. e5 Ke7 5. Cd2 c5 6. Kb5 C:d2+ 7. Ф:d2 Kf5 8. dc a6 9. Kd6+ K:d6 10. cd Kc6 11. f4 f6 12. Kf3 0—0 13. Ce2 fe 14. fe Лf5 15. Фc3 d4 16. Фd2 K:e5 17. K:d4 Фh4+ 18. g3 Фe4 19. 0—0—0 Лf2 20. Лhe1 Cd7 21. Фc3 Лc8 22. Cc4 Фg2 23. Л:e5 b5 24. C:e6+ C:e6 25. Лc5 Л:c5 26. Ф:c5 Cg4 27. Фc6 Лf1 28. Фe8+ Лf8 29. d7 Фd5 30. Лf1. Черные сдались.

Е. Гик

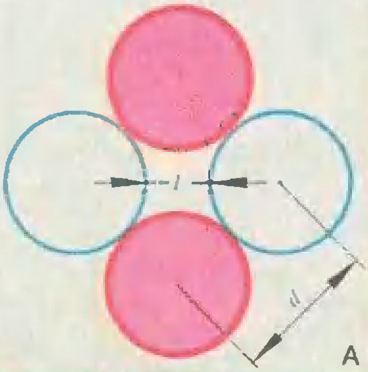
45 коп.

Индекс 70465

Чер 11-15

Как продеть толстую проволоку через узкий зазор? Над этим придется поломать голову тому, кто захочет расцепить показанные игрушки. Но читателей «Кванта» должен заинтересовать и чисто геометрический вопрос: при какой наименьшей ширине l зазора расцепление возможно, если диаметр проволоки равен d?

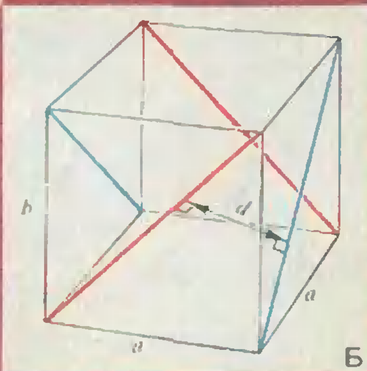
На рисунке А — сечение головоломки с фигурками зверюшек (рис. 1) в месте зазора в момент расцепления. Очевидно, l здесь $l = (\sqrt{2}-1)d \approx 0{,}41d$. Для головоломки «гвозди» (рис. 2) расчет сложнее. Если мысленно вырезать из одного гвоздя участок вблизи зазора, получатся два цилиндрика со скрещивающимися осями. При разъединении эти цилиндрики винтообразно скользят по двум скрещивающимся цилиндрическим участкам другого гвоздя. В критический момент оси всех четырех цилиндров можно представить как диагонали боковых граней правильной четырехугольной призмы (рис. Б). Задав размеры призмы a и b, можно найти расстояние d между соседними диагоналями, а оно равно наибольшему (при данных a и b) диаметру гвоздей: $d = ab/\sqrt{a^2+2b^2} = a/\sqrt{2+\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}$, где α — угол, под которым согнуты гвозди. На рисунке В показана проекция нашей вспомогательной призмы на основание и два цилиндрических кусочка одного из гвоздей. Очевидно, ширина зазора между этими кусочками $l = a - d = (\sqrt{2+\mathrm{tg}^2(\alpha/2)} - 1)d$. В частности, при $\alpha = 90^\circ$ зазор должен быть не меньше $(\sqrt{3}-1)d \approx 0{,}73\ d$. Аналогично рассчитывается зазор и для двух оставшихся головоломок.



A


1

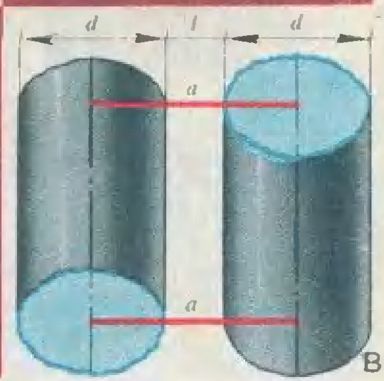

2



Б


3


4



В