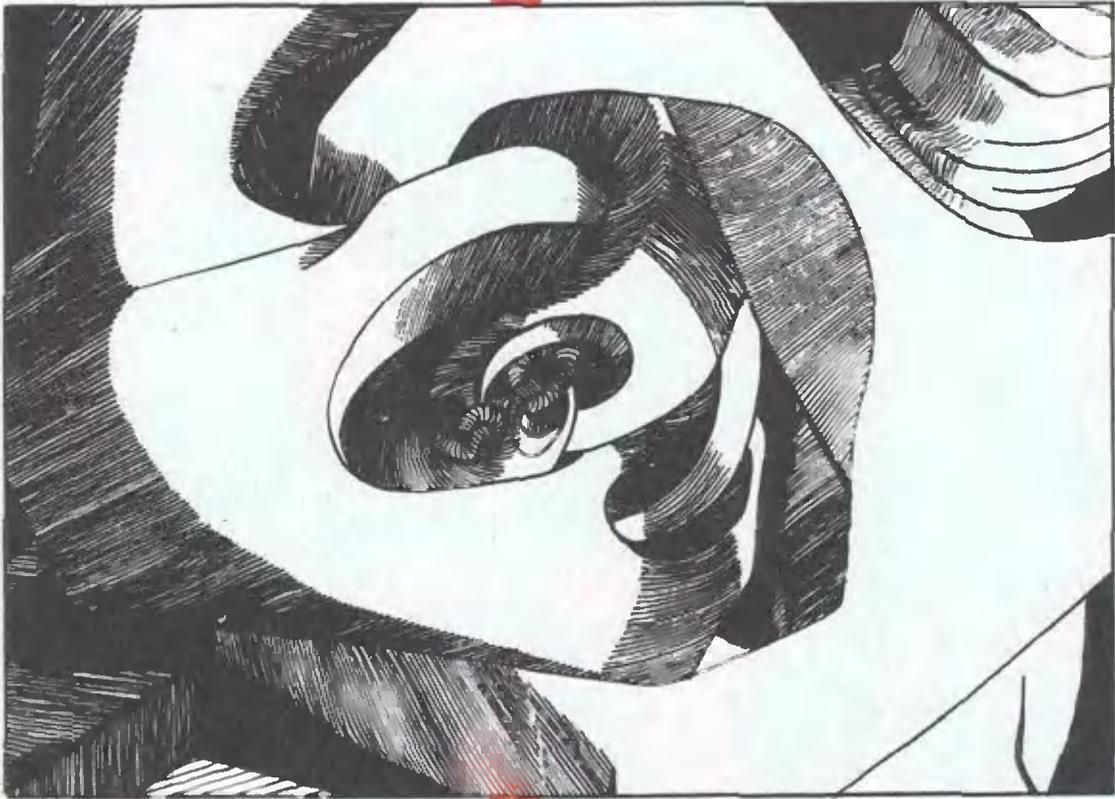


Квант

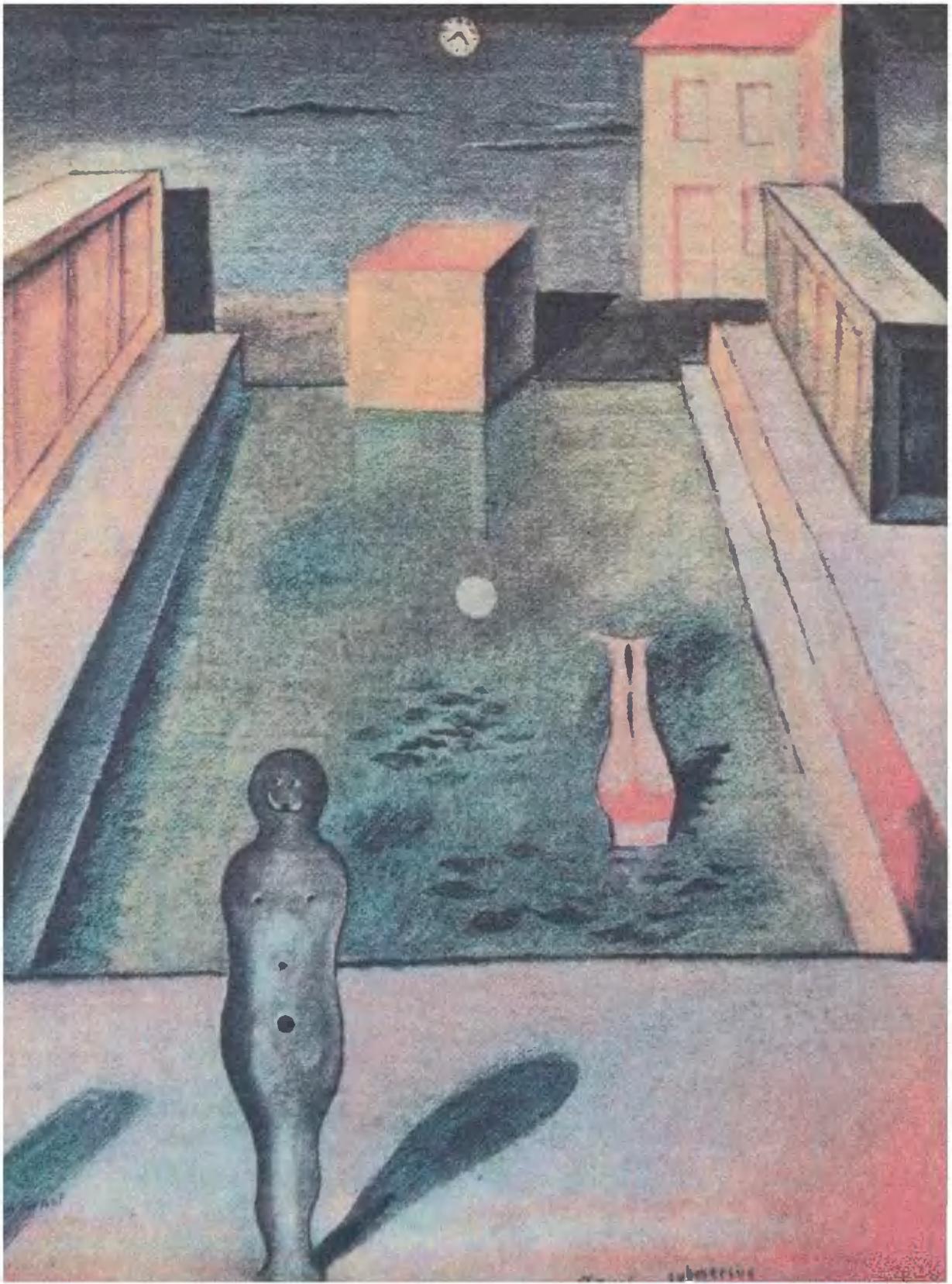
Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Рогатая сфера Александра

1990



В номере:

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

- 2 Д. Фукс. Рогатая Сфера Александра
8 Ю. Гуревич. Холодное горение
16 К. Богданов. Большие и маленькие на прогулке
23 С. Табачников. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля
25 С. Гашков. Задача Чебышева и тригонометрические многочлены
- Задачник «Кванта»**
28 Задачи М1226 — М1230, Ф1233 — Ф1237
29 Решения задач М1201 — М1205, Ф1213 — Ф1217
- 40 **Калейдоскоп «Кванта»**
«Квант» для младших школьников
43 Задачи
44 «Ты — мне, я — тебе»
- Фантастика**
46 Д. Киз. Цветы для Эдджернона
- * * *
- 52 Золотая медаль Филдса
Лаборатория «Кванта»
55 В. Креймер. Как увидеть... несуществующее
Р — значит ракета
57 Л. Горшков. Полет на Марс
- Практикум абитуриента**
63 А. Зильберман. Явление самоиндукции
67 Варианты вступительных экзаменов
77 Ответы, указания, решения
79 Анкета 6—90
«Квант» улыбается (42)
- Наша обложка**
1 Фрагмент рисунка доктора физико-математических наук А. Фоменко «Рогатая Сфера Александра» (см. статью Д. Фукса на с. 2).
2 Репродукция картины Макса Эрнста «Aquis submersus» (1919). Конечно, погруженное в воду тело не тонет, потому что его поддерживает выталкивающая сила. А так ли хорошо знакома вам выталкивающая сила? (см. с. 41)
3 Шахматная страничка.
4 Задачи на разрезание звездчатых многоугольников.

РОГАТАЯ СФЕРА АЛЕКСАНДЕРА

Доктор физико-математических наук
Д. ФУКС

Читатели «Кванта» со стажем могут помнить изображение Рогатой Сферы, помещенное на обложке журнала № 7 в 1977 году.

Это был рисунок московского математика А. Т. Фоменко, который известен также как художник-график — фрагмент этого рисунка помещен на первой странице обложки этого номера. Рисунок Фоменко передает, хотя бы отчасти, главное свойство Рогатой Сферы — она необычайно красива. Еще из рисунка видно, что отдельные части Сферы как бы зацеплены друг с другом. Однако, чтобы оценить красоту Рогатой Сферы в полной мере — а она этого заслуживает, — стоит познакомиться с ее построением во всех деталях, а заодно и понять, для решения какой задачи она была построена.

Предыстория

В конце прошлого века знаменитый французский математик Камилл Жордан занялся написанием учебника анализа. Следует сказать, что за три с лишним века существования математического анализа как отдельной дисциплины учебники этого предмета многократно подвергались переработке. (Этот процесс не остановился и теперь.) И всякий раз такая переработка не только отражала прогресс в математике, но и в значительной мере способствовала этому прогрессу. Автор оригинального учебника неизменно обнаруживал естественные вопросы, ответа на которые не было не только в предшествующих учебниках, но и вообще в математике. Находя эти ответы, он становился автором не только учебника, но и фундаментальных математических теорем.

Не стал исключением и Жордан. Изучая свойства интегралов функций двух переменных по областям и кривым на плоскости, он пришел к выводу о необходимости придать точный смысл интуитивно ясному высказыванию «кривая разделяет плоскость». Кривая — это след непрерывно движущейся точки. Движение имеет начало и конец. Если конец совпадает с началом, кривая называется замкнутой, а если ни в какие другие различные моменты времени положения движущейся точки не одинаковы, то кривая называется несамопересекающейся или простой. Теорема Жордана утверждает, что замкнутая несамопересекающаяся кривая делит плоскость на две части. Это означает, что множество всех точек плоскости, не лежащих на нашей кривой l , подразделяется на две части, причем если две точки плоскости лежат в одной из этих частей, то их можно соединить ломаной, не пересекающей кривую l , а если они лежат в разных, то нельзя (рис. 1). Теорема Жордана и теперь входит в учебники анализа, авторы которых стремятся к большей строгости.

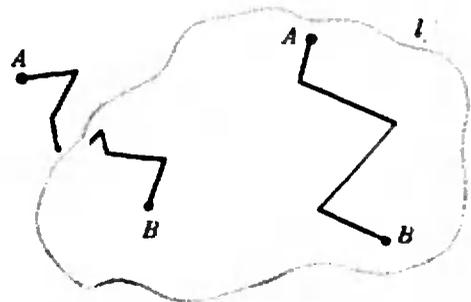


Рис. 1.

Область математики, к которой относится теорема Жордана, называется топологией. Жордан, однако, не был топологом — он, скорее, был алгебраистом; теорема о кривых интересовала его исключительно как автора учебника анализа. Но существовали ведь и топологи, и теорема Жордана не могла пройти мимо их внимания. Каковы части, на которые замкнутая несамопересекающаяся кривая делит плоскость? Оказалось, что эти части для разных несамопересекающихся замкнутых кривых устроены совершенно одинаково: эту теорему доказал в 1908 году немецкий тополог А. Шенфлис. Что значит устроены одинаково? Две области V и V' на плоскости считаются устроенными одинаково, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, непрерывное в обе стороны. Это значит, что если мы возьмем две точки x и y области V и станем двигать x так, чтобы расстояние между x и y неограниченно уменьшалось, то расстояние между соответствующими точками x' и y' также будет неограниченно уменьшаться, и наоборот, если неограниченно уменьшается расстояние между точками x' и y' , то неограниченно уменьшается и расстояние между x и y .*)

Проведенная циркулем окружность делит плоскость на две части: круг и плоскость с круглой дыркой (рис. 2). Теорема Шенфлиса утверждает, что всякая несамопересекающаяся замкнутая кривая делит плоскость на части, устроенные точно так же, как круг и плоскость с круглой дыркой.

Пространственные обобщения

Математики начала века, в принципе, имели основания относиться к пространственной геометрии более легко-

*) «Устроены совершенно одинаково» — это выражение кажется математикам чересчур громоздким, и они предпочитают заменить его изящным, с их точки зрения, словом «гомеоморфны». Я стараюсь не употреблять это слово без крайней необходимости.



Рис. 2.

мысленно, чем мы к ней относимся теперь. С точки зрения этого легкомыслия пространственные аналоги теорем Шенфлиса и Жордана должны существовать — нужно только найти правильные формулировки. Замкнутая кривая должна быть заменена замкнутой поверхностью. Правда, уже здесь есть одна неприятность: все замкнутые кривые на плоскости «устроены совершенно одинаково», а о замкнутых поверхностях этого не скажешь: бывают хорошо известные (с середины прошлого века) сферы с ручками (рис. 3), которые «устроены» иначе, чем сфера. Эту трудность мы преодолеем посредством волевого решения: сферы с ручками мы просто отменим. Именно: мы возьмем в пространстве обычную круглую сферу и произведем ее деформацию «без разрывов и склеек». В результате получится поверхность, для которой хотелось бы доказать аналоги теорем Жордана и Шенфлиса.

Аналог теоремы Жордана оказывается верным: наша поверхность делит пространство на две части (точная формулировка не отличается от фор-



Рис. 3.



Рис. 4.

мулировки теоремы Жордана). Эта теорема, в действительности, верна и для сфер с ручками и еще для более широкого класса поверхностей (точное определение состоит в том, что поверхность гомеоморфна сфере с ручками, но мы условились не употреблять этого слова). Справедливы и многочисленные многомерные аналоги теоремы Жордана, но мы даже не будем пытаться их формулировать.

А теорема Шенфлиса? Ее пространственное обобщение должно было бы утверждать, что части, на которые пространство подразделяется продеформированной сферой, стандартны: одна «устроена точно так же», как область, ограничиваемая обычной сферой, т. е. шар (без границы), а другая — как внешность шара в пространстве. (Слово «внешность» здесь и дальше употребляется не в бытовом значении «внешний вид», а в математическом смысле: «часть, расположенная вне».) И вот эту-то вполне правдоподобную гипотезу неожиданно для всех опроверг в 1924 году тогда еще совсем молодой американский тополог Джон Александер. Опровержение было весьма убедительно: Александер построил в пространстве искривленную сферу, делящую пространство на нестандартные части. В чем состояла конструкция, вы сейчас увидите.

Она необычайно красива

И проста. Главный элемент конструкции показан на рисунке 4: на плоском диске мы берем два маленьких кружка и вытягиваем из них «пальцы»,



Рис. 5.

так, чтобы их концы сблизились, но не сомкнулись. Сами эти концы мы тоже считаем плоскими дисками.

Это вытягивание пальцев обычно будет у нас производиться не с одного диска, а с двух параллельно расположенных дисков. Вытянутые пальцы будут зацеплены в «замок» (рис. 5).

Теперь опишем все построение. Берем круглую сферу. Из нее вытягиваем два почти смыкающихся пальца — как на рисунке 4 (рис. 6). Получившаяся поверхность вмещает в себя два расположенных близко один от другого параллельных диска (верх рисунка 6). Из этих двух дисков мы вытягиваем пальцы — в точности, как показано на рисунке 5. На поверхности, изображенной на рисунке 5 — присмотритесь к этому рисунку, — есть две пары параллельных дисков (концы вытянутых пальцев). Эти диски появятся (в уменьшенном виде) на нашей поверхности. Каждую из этих пар дисков мы превращаем — вытягиванием пальцев — в фигуру рисунка 5 (еще более уменьшенную). На новой поверхности будут уже четыре пары параллельных дисков, и мы опять вытягиваем из этих дисков (совсем уже маленькие) пальцы, превращая каждую пару в подобие рисунка 5. И так далее.

То, что получится после «и так далее» и есть Рогатая Сфера Александера.

Строго говоря, эту сферу изобразить на рисунке уже нельзя, потому что входящие в нее копии рисунка 5 приходится уменьшать неограниченно. (Вы знакомы с похожим эффектом по детским книжкам. Помните:



Рис. 6.

на обложке изображен человек или зверь, читающий эту же книжку.) Все же какое-то подобие Рогатой Сферы я решаюсь вам показать (рис. 7).

Я надеюсь, что конструкция вам понятна, если нет — значит я что-то плохо объяснил. Вникните в конструкцию еще раз, и, наверное, вам все станет ясно. А теперь займемся свойствами Рогатой Сферы.

Это действительно сфера

Поначалу это все-таки вызывает сомнения. Сфера Александра выглядит как гимнастическая гиря с распиленной ручкой и с какой-то сложной фигурой из проволоки различной толщины, вставленной в пропиленную щель. Не дотягиваются ли два куска ручки друг до друга? Ведь на каждом этапе



Рис. 7.

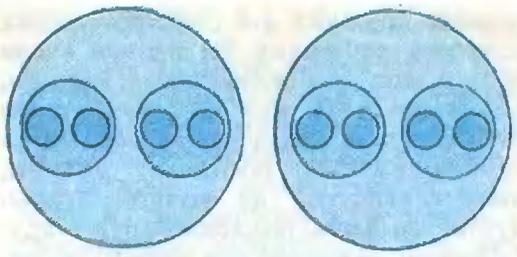


Рис. 8.

построения мы сближаем какие-то части сферы между собой — не сольются ли они в пределе?

Нет! Предыдущее построение можно провести так, чтобы при деформации сферы расстояние между любыми двумя ее точками не увеличивалось и не уменьшалось больше, чем, скажем, в 100 раз. (Я говорю «скажем», потому что на рисунках 4 и 5 не указаны размеры — длины пальцев, ширина щели и т. д.; все это можно сделать немножко больше или немножко меньше; можно подобрать размеры так, чтобы указанное выше число равнялось именно 100.)

Рассмотрим наше построение шаг за шагом. Первое вытягивание пальцев затрагивает два кружка на круглой сфере; остальные части сферы остаются неподвижными на этом этапе деформации и на всех последующих этапах. Второй шаг затрагивает четыре маленьких кружка — по два внутри каждого из предыдущих кружков (рис. 8). Части сферы, лежащие вне этих четырех кружков, неподвижны на всех этапах деформации, кроме первого. Третий этап затрагивает 8 еще более маленьких кружков (см. рис. 8), четвертый — 16 еще более маленьких кружков (на рис. 8 они уже не видны) и т. д. Всего имеется 2^n кружков n -й очереди; в каждом кружке n -й очереди лежат два кружка $(n+1)$ -й очереди; точки сферы, не лежащие ни в одном кружке n -й очереди, неподвижны на всех этапах деформации, начиная с n -го.

Проконтролируем теперь сближение точек. Пусть две точки лежат в

разных кружках 1-й очереди (самых больших кружках). На первом этапе деформации они сближаются, скажем, максимум в 10 раз (см. рис. 4). На втором этапе деформации они могут еще сблизиться, поскольку пальцы, вытягивающиеся из концов предыдущих пальцев, подходят друг к другу ближе, чем сами эти концы — скажем, еще в 10 раз (см. рис. 5). Но на последующих этапах эти точки уже не сближаются, во всяком случае существенно: сближаются точки первого кружка с точками первого кружка и точки второго кружка с точками второго кружка. Пожалуйста, вникните и убедитесь в этом: здесь центральный пункт доказательства и главная красота конструкции — гениальное изобретение великого тополога.

Две точки, лежащие в разных кружках 2-й очереди, но в одном кружке 1-й очереди, при первом вытягивании пальцев не сближаются и не расходятся: расстояние между ними сохраняется. На втором и третьем этапах они могут сблизиться — не более, чем в 10 раз на каждом этапе, на дальнейших этапах расстояние между ними существенно не меняется. Вообще точки, лежащие в разных кружках $(n+1)$ -й очереди, но в одном кружке n -й очереди, сближаются (не более, чем в 10 раз) на $(n+1)$ -м и $(n+2)$ -м этапах, а на других этапах расстояние между ними существенно не меняется. Ясно, что и увеличение расстояния между точками ограничено (оно происходит при вытягивании пальцев); можно считать, что и увеличивается расстояние не более, чем в 100 раз.

Таким образом, при нашей деформации никакие две точки не сливаются (они даже не сближаются более, чем в 100 раз). Непрерывность деформации тоже очевидна (хотя ее строгое доказательство требует небольшой техники). Значит, Рогатая Сфера — это действительно сфера, как мы ее понимали выше (см. пункт «Пространственные обобщения»).

Внешность Рогатой Сферы

Часть пространства, заключенная внутри Рогатой Сферы, устроена как открытый (т. е. лишенный границы) шар. Это легко доказать, но не это нас интересует. Главное для нас, что внешность Рогатой Сферы не гомеоморфна внешности обыкновенной круглой сферы, т. е. Рогатая Сфера опровергает гипотетическую формулировку обобщенной теоремы Шенфлиса. Доказательство этого факта просто, но весьма поучительно, ибо это — настоящая топология. Внешность круглой сферы обладает следующим свойством: любая лежащая в ней (во внешности сферы) замкнутая кривая может быть стянута в ней в точку (т. е. может быть непрерывно продеформирована в сколь угодно маленькую или даже точечную кривую, причем вся деформация протекает во внешности сферы) — см. рисунок 9. Это свойство внешности сферы наглядно очевидно (хотя строгое доказательство довольно занудно) и мы его не доказываем; оно называется односвязностью. Гомеоморфные («устроенные совершенно одинаково») области бывают односвязны одновременно: ес-

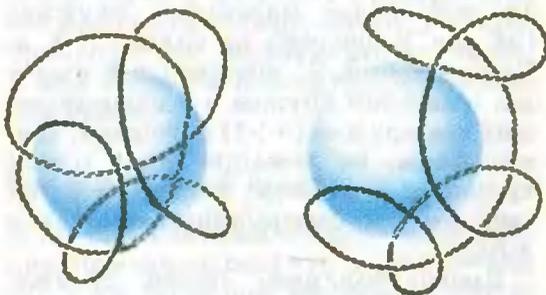


Рис. 9.

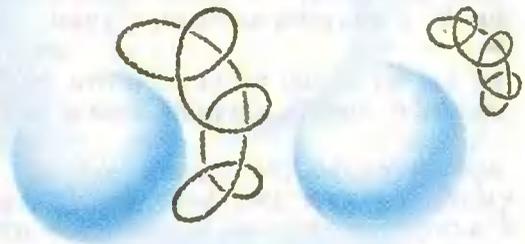




Рис. 10.

ли односвязна одна, то односвязна и другая. Но, в отличие от внешности круглой сферы, внешность Рогатой Сферы не односвязна: замкнутую кривую, охватывающую рог (рис. 10), выпутать из Рогатой Сферы невозможно. (При снятии с рога кривая должна была бы пройти между каждыми двумя противостоящими кружками каждой очереди. А это значит, что в процессе деформации кривая должна подойти к сфере сколь угодно близко: ближе любого наперед заданного расстояния. В свою очередь, это означает, что в какой-то момент при деформации кривая заденет сферу, что запрещено.)

Значит, внешность Рогатой Сферы устроена не так, как внешность круглой сферы — ожидавшееся обобщение теоремы Шенфлиса оказалось неверным.

Возможны варианты

Теперь нам легко быть умными. Рога можно было бы вытягивать не наружу, а внутрь сферы — тогда внутренняя область отличалась бы от шара (а внешность была бы устроена как внешность круглой сферы). Можно было бы вытягивать рога и внутрь, и наружу — тогда были бы нестандартны (неодносвязны) и внешность, и внутренность. Можно вытягивать сколько угодно пар рогов, можно их как угодно заузливать и зацеплять — словом, можно настроить бесчисленное количество сфер с разными внешностями и внутренностями. Однако, это неограниченное разнообразие нас больше не удивляет.

Заключение

Прошли годы и десятилетия после открытия Александра, но топологов не оставляла надежда, что трехмерный аналог теоремы Шенфлиса все же существует — нужно только исключить из рассмотрения чересчур замысловатые поверхности. Что если, скажем, поверхность будет полиэдральной, т. е. многогранной? И для таких поверхностей теорема Шенфлиса оказалась крепким орешком, но все же в 1960 году ее удалось доказать американскому топологу Мортону Брауну.

Теорема Брауна верна не только для трехмерного пространства, но и для пространства любой размерности. Впрочем, в многомерных пространствах уже в полиэдральном случае не все благополучно. Например, как обнаружили в 70-е годы Р. Карби и Л. Зибенман, часть четырехмерного пространства, заключенная между двумя полиэдральными сферами, одна из которых объемлет другую, может быть не гомеоморфна стандартному четырехмерному шаровому слою.

Но все это уже не для популярной статьи.



Т И Ш К О В

ХОЛОДНОЕ ГОРЕНИЕ

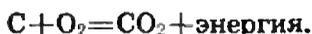
Доктор физико-математических наук
Ю. ГУРЕВИЧ

Ревущее пламя в реактивном двигателе космического корабля, спокойный огонь костра на привале, голубоватые язычки газа на кухонной плите — все они порождены одним процессом, который принято называть горением. Именно с пламенем в житейском представлении и ассоциируется этот процесс. Связь в сознании горения и пламени уходит в глубину веков: ведь именно огонь, т. е. пламя, дающее тепло, принес людям Прометей.

И лишь относительно недавно стало понятным, что горение может быть холодным. При этом с позиций «чистой выгоды» (отвлекаясь от эстетической красоты пламени) как раз холодное горение является наиболее эффективным. Устройства, в которых осуществляется процесс холодного или, как его еще именуют, электрохимического горения, называются топливными элементами.

На языке строгой науки горение — это химическая реакция, состоящая в переходе электрона (или нескольких электронов) от одного соединения к другому и сопровождающаяся выделением энергии. При этом вещество, отдающее электроны, служит горючим и в процессе горения оно окисляется. Вещество, принимающее электроны, называется окислителем.

Так, горение угля в воздухе есть химическая реакция окисления углерода кислородом; ее условно можно записать в виде



Именно эта реакция протекает в топках теплостанций, работающих на угле и других видах топлива, состоящих, в основном, из углерода. Та же реакция окисления углерода лежит в основе горения дров в печи или в костре.

Приведенный пример — процесс привычного всем «горячего» горения. Однако не всегда горение протекает привычно. Проиллюстрируем особенности холодного (электрохимического) горения на практически важном случае реакции сжигания водорода. Газообразный водород можно, как известно, непосредственно сжечь в кислороде воздуха. В результате такой реакции получается вода и выделяется тепло:



Можно, однако, поступить и иначе: разделить реакцию сгорания водорода в кислороде на два процесса, пространственно отделенных друг от друга. Рассмотрим сначала процесс с участием только водорода. Допустим, что молекула водорода приведена в соприкосновение с границей металл — раствор электролита. Молекула водорода состоит из двух атомов, и на поверхности некоторых металлов она на них распадается. (Распад связан с тем, что атомы водорода химически взаимодействуют с поверхностью металла, как бы прилипают к ней.) Находящиеся на границе металл — раствор атомы водорода (их называют адсорбированными) разрываются далее еще на две — теперь неравные — части: электрон и положительно заряженное ядро атома водорода — протон. Электрон уходит в глубину металла, а протон (или ион водорода) — в раствор.

Сходным образом, молекула газообразного кислорода на трехфазной границе металл — раствор — газ также вступает в электрохимическую реакцию. При этом, благодаря силам химического взаимодействия с кислородом, электроны отрываются от металла. В результате из кислорода, молекул воды и электронов образуются отрицательно заряженные частицы OH^- — ионы гидроксила. Они посту-

пают в раствор, где соединяются с ионами водорода, которые генерируются в другом электроде. В результате этой реакции —



— получается вода — конечный продукт горения без пламени. Но главное здесь в том, что металлический электрод, находившийся в контакте с водородом, получил избыток электронов, а тот, что был в контакте с кислородом, напротив, отдал часть электронов. Поэтому, если соединить эти электроды проводником, т. е. замкнуть внешнюю цепь, избыточные электроны будут переходить от «водородного» электрода к «кислородному» (рис. 1). Иными словами, во внешней электрической цепи пойдет ток, который может совершить полезную работу. Процесс будет идти непрерывно, если держать электрическую цепь замкнутой, а к электродам подводить «горючий материал» — водород и кислород.

Таким образом, энергию химической реакции окисления, т. е. горения, в топливном элементе удается непосредственно превратить в энергию электрическую. В соответствии с названиями «сжигаемых» материалов тот конкретный элемент, который мы рассматривали, именуется кислородно-водородным.

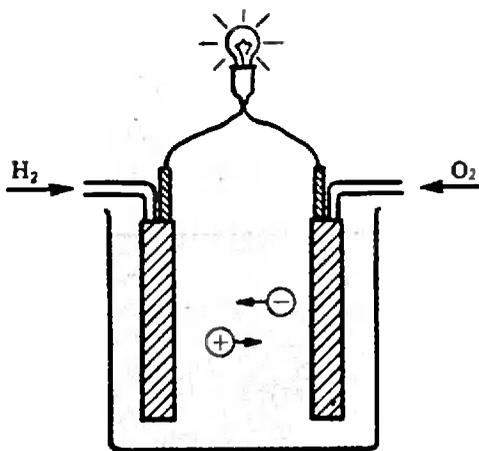


Рис. 1. Схема простейшего кислородно-водородного топливного элемента.

Интересно, что сама по себе идея создания топливного элемента отнюдь не является новой — в прошлом году ей исполнилось 150 лет. В 1839 году английский ученый У. Гров обнаружил протекание тока между двумя электродами из платины, частично погруженными в раствор серной кислоты, в условиях, когда один электрод находился в контакте с кислородом, а другой — с водородом. По сути, конструкция Грова была прообразом кислородно-водородного элемента. Однако в то далекое время результатом экспериментов Грова ни он сам, ни его современники не придали должного значения. Лишь несколько десятилетий спустя многие ученые и изобретатели пытались уже достаточно целенаправленно создать топливный элемент, пригодный для практического применения. Энтузиастом технического решения этой проблемы в семидесятых годах прошлого века был замечательный русский электротехник и изобретатель П. Н. Яблочков. Но тогда решение в руки не далось. И вот уже в наше время, во всеоружии научных знаний и технической оснащенности конца двадцатого века, ученые и инженеры вновь штурмуют ту же твердыню. Почему же так заманчиво прорваться за стены крепости и отчего эти стены столь неприступны?

Сперва о важности задачи.

Основу энергетики сегодняшнего дня составляют тепловые паротурбинные электростанции, работающие на угле, нефти, мазуте, газе. Система превращения топлива в электрическую энергию здесь многоступенчата: выделяющееся при сгорании тепло нагревает воду, вода превращается в пар высокого давления, пар приводит в движение турбину, которая, в свою очередь, вращает ротор электрического генератора.

При таком сложном, громоздком процессе не обойтись без больших энергетических потерь. Но если в сравнительно недавние времена считалось, что запасы топлива на Земле практически неисчерпаемы, то сегодня на многое открылись глаза, и эффективность превращения энергии становится одной из главных проблем.

Другая проблема — охрана окружающей среды. От отходов вроде копоти, пыли, вредных веществ избавиться относительно просто, во всяком случае принципиальных трудностей здесь нет. Гораздо сложнее обстоит дело с энергетическим засорением. Уже сейчас энергетический «товарооборот» человека в отдельных регионах земного шара сравним с тепловым оборотом природных процессов, а потребление энергии неумолимо растет. Возникает вопрос: куда «спрятать» потраченную без пользы энергию тепловых станций. Ведь при существующих темпах производства не сегодня так завтра нашей планете «станет жарко». Не будем живописать картину того, к чему это может привести. Ясно, однако, что энергетика должна быть не только экономической, но и экологичной.

И даже если обычные тепловые электростанции уступят место атомным энергоустановкам, обольщаться не нужно — сформулированные проблемы останутся. Причина в том, что нынешняя атомная и даже будущая термоядерная электростанции остаются по сути электростанциями тепловыми. Просто топка архаичного парового котла заменяется ядерным реактором, но, как и в прапрадедовские времена, здесь приходится, сжигая энергоноситель, сначала получать тепло и лишь затем, через промежуточные ступени, превращать тепловую энергию в электрическую.

Источник возникающих трудностей очень серьезен — мы наталкиваемся здесь на фундаментальный запрет, налагаемый неумолимыми законами термодинамики, который ограничивает максимальный коэффициент полезного действия (КПД) любой тепловой машины. Математически это ограничение описывается знаменитой формулой, полученной двадцативосьмилетним французским физиком и инженером Никола Сади Карно и опубликованной им в 1824 году в единственной за всю его жизнь научной работе «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу». Воспользовавшись формулой Карно, получаем ре-

зультат не слишком утешительный: максимальный КПД самых современных тепловых установок, использующих пар, нагретый под высоким давлением, оказывается лишь немногим более 60 %. Причем это — идеальное значение, а с учетом неизбежных потерь КПД не превосходит сорока (в лучшем случае — сорока «с хвостиком») процентов. Некоторый выигрыш можно ожидать от применения магнитогидродинамических установок, где теплоносителем является плазма (смесь ионизованных атомов и электронов). Но и здесь реальный КПД вряд ли превзойдет 55 %.

Законы термодинамики не перешагнуть и не обойти, поэтому единственный путь радикального разрешения проблемы — отказаться от неэффективного «вульгарного» сжигания энергоносителей. Оказывается, что осуществление холодного горения — важнейший шаг по этому принципиально иному пути. В топливном элементе (электрохимическом генераторе) выделяющаяся химическая энергия превращается непосредственно в электрическую. Отсюда следует, что топливный элемент не есть тепловой двигатель и жесткие ограничения, вытекающие из термодинамической формулы Карно, на него не распространяются. Другими словами, коэффициент полезного действия устройств, в основе работы которых лежит функционирование топливных элементов, в принципе может быть приближен к заветным ста процентам. Отметим попутно, что сказанное относится и к иным химическим источникам тока, например — к гальваническим элементам, на основе которых работают батарейки в радиоприемниках, микрокалькуляторах, электронных часах и т. д.

Причина резкого различия КПД для процессов горячего и холодного горения поддается вполне наглядному объяснению. Горение, будучи химической реакцией соединения атомов или молекул, сопровождается переходом электронов от одной частицы к другой. Но перемещение электронов из одного места в другое есть электрический ток. Поэтому каждый элемен-

тарный акт реакции горения сопровождается протеканием электрического тока, являющегося своеобразным током короткого замыкания между реагирующими частицами. Освобождающаяся при каждом акте электрическая энергия рассеивается, превращаясь в энергию хаотического движения частиц, т. е. в тепло. Наблюдаемая суммарная химическая реакция складывается из астрономически огромного числа элементарных процессов.

Другими словами, обычное — «горячее» — горение можно себе представить как беспорядочные отдельные процессы короткого замыкания, происходящие между бесчисленным количеством молекул или атомов с различными электрическими потенциалами. В результате химическая энергия исходных реагентов (фактически имеющая электрическую природу) переходит в тепловую. Однако тепловая энергия, будучи по своей сути энергией хаоса, с большим трудом переводится в энергию упорядоченного движения. По отдельности случайно движущиеся частицы обладают значительной кинетической энергией, но двигаются они в различные стороны и, как вошедшие в послоницу лебедь, рак и щука, никак не сопрягают свои усилия в одном направлении. По сути, именно в этом причина жесткого ограничения КПД тепловых машин: при превращении энергии хаоса в полезную работу потери принципиально неизбежны.

В топливном элементе все обстоит иначе: хаотические токи, связанные с протеканием химической реакции, вообще не возникают. Вспомним схему его работы: электроны от топлива (в рассматриваемом примере — водорода) непосредственно поступают в электрическую цепь. Там эти электроны совершают полезную работу, а соединяются с окислителем (в нашем примере — с кислородом) уже на другом электроде. Таким образом, между реагентами оказалась включена электрическая цепь, в результате чего беспорядочные электрические токи, характерные для «обычного» горения, непосредственно превратились в на-

правленный электрический ток. Иными словами, хаоса в топливном элементе удается избежать на самой начальной стадии процесса горения (недаром оно холодное!) и за счет этого резко повысить значение идеального коэффициента полезного действия. Так, если сжигать уголь в кислороде не обычным путем, а электрохимическим, этот коэффициент, согласно расчетам, может достигать 99,8%! При этом, поскольку в топливном элементе отсутствуют многочисленные промежуточные ступени преобразования энергии (каждая со своими «утечками», трущимися частями и т. д.), есть основания ожидать, что реальный КПД будет не слишком далек от идеального, т. е. близок к желанным ста процентам.

Открывающиеся здесь возможности были ясно осознаны уже в конце прошлого века, когда перед человечеством еще не маячили энергетический, экологический и другие кризисы. Крупнейший физико-химик того времени, Нобелевский лауреат Вильгельм Оствальд писал в 1894 году: «Путь, которым можно решить самый важный из всех технических вопросов — вопрос получения дешевой энергии, — должен быть найден электрохимией... Если мы будем иметь элемент, производящий электроэнергию непосредственно из угля и кислорода воздуха, это будет техническим переворотом, далеко превосходящим по своему значению изобретение паровой машины... Мы имеем здесь дело со случаем, когда наука заранее предсказывает полный успех».

Все в этих словах, написанных почти сто лет назад, абсолютно справедливо. И остановка, казалось бы, за малым — справиться с вопросами принципиального, а чисто технического характера. Но это «малое» оказалось столь крепким орешком, что расколоть его до конца не сумели и по сей день.

Первая волна энтузиазма среди ученых и инженеров поднялась вскоре после вдохновляющего выступления Оствальда. Для реализации эффективного электрохимического сжигания угля были использованы самые

разнообразные ухищрения: пытались применять не свободный кислород, а иные окислители; варьировали состав электролита, куда добавляли специальные вещества — переносчики окислителя; всячески модифицировали форму электрохимической ячейки и т. д. Известных успехов удалось добиться: коэффициент полезного действия некоторых установок действительно приближался к ста процентам. В целом, однако, решение проблемы ускользало из рук: маломощность, недолговечность и ненадежность работы, а также дороговизна мешали топливному элементу стать серьезным конкурентом быстро прогрессирувавших методов получения энергии из горючего путем его традиционного сжигания. Динамомашины и двигатели внутреннего сгорания праздновали полную победу. Основные усилия ведущих исследователей неуклонно смещались в иную сторону, и проблема создания совершенного топливного элемента отодвинулась в тень.

В Советском Союзе исследования в области топливных элементов развернулись вскоре после окончания Великой Отечественной войны. Большая заслуга в этом принадлежит академику А. Н. Фрумкину, который многие десятилетия был главой советской электрохимической школы. Проблему создания топливных элементов удалось существенно продвинуть вперед, что было связано с успешным решением ряда научных задач (придание материалу электродов каталитических свойств, разработка теории пористых электродов (один кубический сантиметр пористого электрода может иметь развитую поверхность площадью в десятки квадратных метров)).

Но подлинный перелом в судьбе топливных элементов наступил с началом космической эры, открытой запуском советского спутника. Почти сорок процентов его общей массы составляли химические источники тока. Отношение к топливным элементам теперь круто изменилось. Правда, «баловнями» оказались, в основном, кислородно-водородные элементы, функционирующие на принципе, открытом

Гровом. Препяды, мешавшие широкому применению на Земле — в первую очередь дороговизна, — были теперь отброшены. Важнее оказались неоспоримые преимущества топливных элементов в космосе: малая масса при большой мощности, компактность, возможность придать удобную конфигурацию, нечувствительность к перегрузкам и т. д. Вновь на первый план выступили «старые» достоинства — отсутствие вредных выбросов, бесшумность работы, обнаружилось и «новое» — отсутствие мешающих радионаводок и излучений. Итак, первое серьезное применение топливные элементы нашли не на самой Земле, а за ее пределами — на космических кораблях и станциях. Ныне они побывали даже на Луне.

После столь блестящего космического старта вновь возрос интерес к земным применениям топливных элементов. При этом отчетливо выявились неплохие перспективы у кислородно-водородных элементов. Например, электромобили на электрохимических генераторах тока имеют в условиях города ряд важных преимуществ по сравнению с привычными автомобилями с двигателями внутреннего сгорания. В первую очередь — это бездымность и бесшумность, что обеспечивает электромобилям конкурентоспособность, даже несмотря на более высокую (на сегодня) стоимость эксплуатации и меньшую автономность. По прогнозам специалистов, будущее здесь, скорее всего, именно за электромобилями, как на топливных элементах, так и на аккумуляторах.

Энергоустановки различной мощности на основе электрохимического сжигания водорода находят, естественно, применение не только на транспорте. Так, в США уже функционируют топливные элементы мощностью около 40 кВт для небольших предприятий.

Кислородно-водородные элементы начинают использоваться как важное звено при преобразовании солнечной энергии. Уже созданы солнечные батареи, достаточно эффективно превращающие энергию солнечного из-

лучения в электрическую. Они, однако, могут работать только при солнечном свете, а энергия нужна круглые сутки. В связи с этим возникает проблема накопления получаемой энергии. Возможный здесь путь связан с использованием электроэнергии от солнечных батарей для получения электролизом водорода и кислорода. Это «горючее» может храниться достаточно долго, а холодное сжигание его в топливном элементе вновь даст электрическую энергию.

Итак, с кислородно-водородными источниками дело обстоит относительно благополучно. Практическое применение нашли также элементы, работающие на таком электрохимическом горючем, как гидразин (N_2H_4), метанол (метиловый спирт CH_3OH), этиленгликоль ($HOCH_2CH_2OH$).

Одним из перспективных направлений является привлечение биологических ферментов для ускорения электродных процессов (биоэлектродкатализ). Активация ферментами может быть использована для разработки так называемых биотопливных элементов.

Вернемся, однако, к сверхзадаче исследований в области топливных элементов, как она была сформулирована первоначально. Цель — осуществление холодного горения угля либо иного природного горючего, и в перспективе — решение на этой базе проблем большой энергетики. Поэтому исследователи-первопроходцы обратились к задаче электрохимического сжигания угля (углерода). И здесь их сразу поджидала серьезная трудность. Дело в том, что реакция окисления углерода протекает при комнатных температурах с ничтожной, практически нулевой скоростью. В этом ее существенное отличие от весьма быстрой реакции окисления водорода, что, в конечном счете, и позволило кислородно-водородным элементам вырваться вперед.

Здесь трудно удержаться, чтобы в который раз не удивиться гармоничности окружающего нас мира. Ведь практически все живое состоит из молекул углерода. И если бы углерод

легко окислялся кислородом воздуха, жизнь была бы невозможна. С другой стороны, энергетическая проблема в живых организмах решается путем окисления (горения), причем при обычных температурах. Замечательно, что обязательным звеном в цепи окислительных процессов здесь оказывается именно холодное горение водорода, источником которого служит пища. Другими словами, кислородно-водородный топливный элемент в биологическом варианте — фундамент энергетики живого, а кислородно-углеродный, если бы он мог функционировать в обычных условиях, привел бы к гибели (а точнее — к «невозникновению») этого живого.

Теперь легко понять, что осуществление холодного горения угля наталкивается отнюдь не на случайную трудность. Приходится преодолевать созданный самой природой барьер, который охраняет живую материю. Таким образом, ставка на природное углеродное топливо требует перехода к высоким температурам. При этом вместо обычных водных растворов электролитов используются расплавы либо так называемые твердые электролиты.

Высокотемпературные топливные элементы предназначены для крупномасштабных стационарных установок большой мощности, которые могут длительное время работать непрерывно и обеспечивают высокую общую эффективность использования энергии природного топлива. Создание установок такого типа требует решения задач, стоящих на стыке многих областей знания — от математики и электрохимии до материаловедения и электроники. По своим масштабам и классу сложности эта проблема, взятая в целом, сопоставима с проблемой создания атомной энергетики. Достаточно полного ее решения можно ожидать лишь в следующих поколениях электрохимических энергоустановок. Вместе с тем, фундамент для будущего решения закладывается уже сейчас. Современные электрохимические генераторы конструируются на основе батарей высоко-

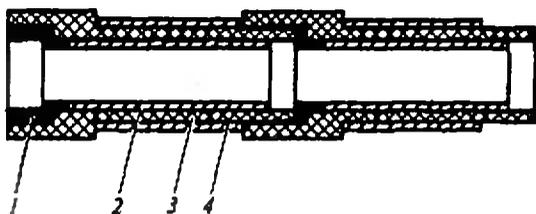


Рис. 2. Схема конструкции топливного элемента с твердым электролитом. 1 — отрицательный вывод, 2 — отрицательный электрод, 3 — твердый электролит с проводимостью по ионам кислорода, 4 — положительный электрод.

температурных топливных элементов. Эти батареи собирают из так называемых модулей, которые, в свою очередь, изготавливают последовательным соединением отдельных элементов. В элементах, представляющих собой электрохимические ячейки, происходит сгорание топлива.

Один из типов используемых элементов представлен на рисунке 2. Элемент состоит из фигурных керамических деталей (своеобразных «наперстков» без дна), собираемых в трубчатую батарею. Внутри трубки проходит топливный газ, отдающий электроны отрицательному электроду. Наружная стенка трубки контактирует с горячим воздухом. Окислитель (кислород) разряжается на положительном электроде; ионы кислорода, проходя сквозь слой твердого электролита, достигают отрицательного электрода, где и вступают в химическую реакцию с положительными ионами топливного газа. Электрохимическая цепь замыкается через токоотводы, соединенные с электродами.

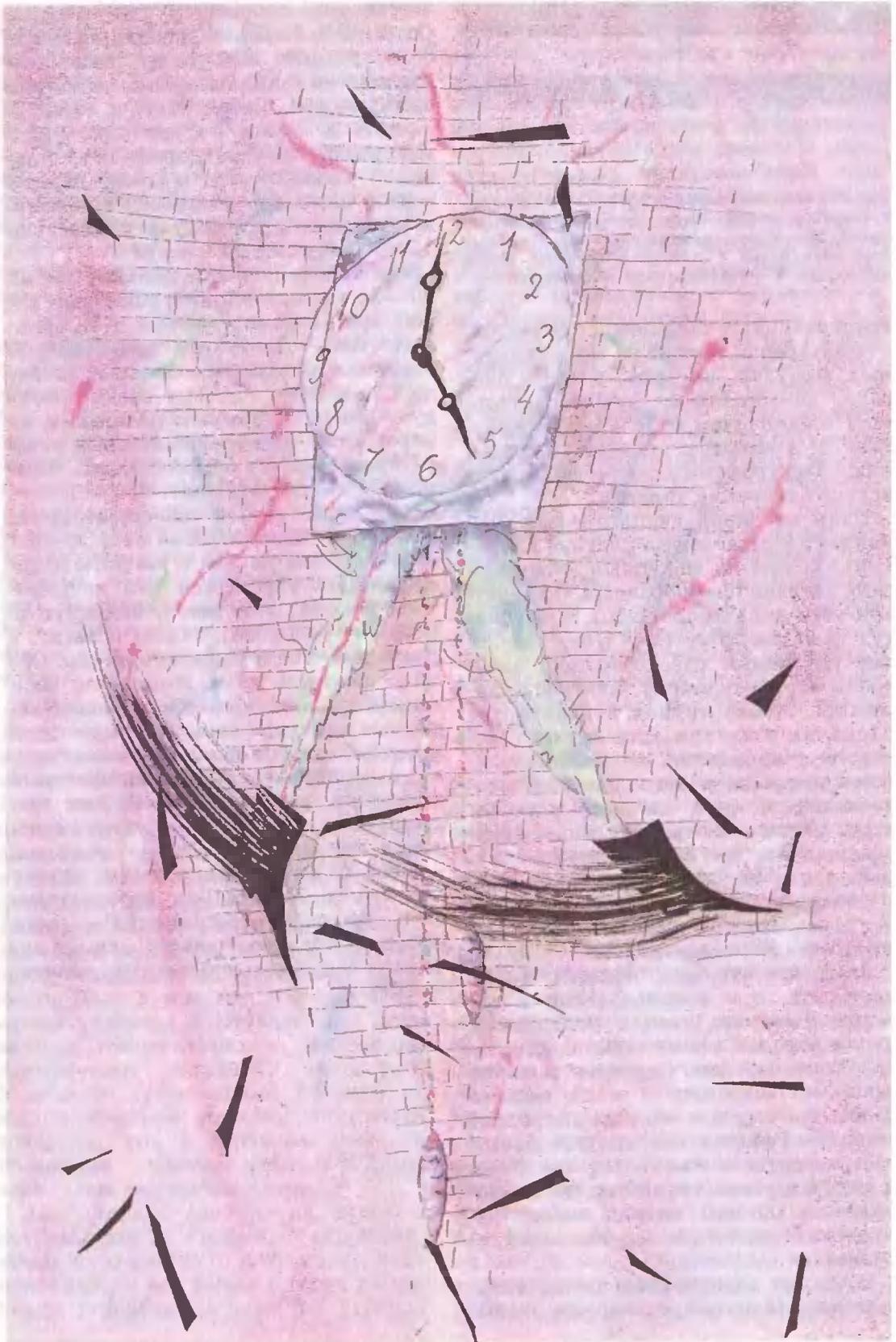
Заметные успехи достигнуты, в частности, при использовании в качестве горючего оксида углерода и углеводородов в виде природного газа. Конечно, используемые горючие газы — это не просто уголь, как хотелось бы в идеале, но уже природное топливо. Рабочая температура достигает здесь нескольких сот градусов, и такое горение трудно назвать «холодным», но это именно электрохимический процесс, а не «обычное» горение.

Создание электрохимических энергоустановок на природном газе оказы-

вается целесообразным уже сегодня. Особенно в больших городах, где наиболее реально выступают такие преимущества топливных элементов, как бесшумность, бездымность и «безводность». В одном из наиболее урбанизированных государств — Японии — планируется к концу нашего века с помощью установок с топливными элементами получать примерно 13 % требующейся энергии.

Если заглянуть еще дальше, лет на 20—30 вперед, то станет заметным конец эры нефтепродуктов и природного газа. Наступит, по-видимому, угольная эра или своеобразный угольный ренессанс. К этому времени следует ожидать не только появления, но и развития электрохимических генераторов, «сжигающих» уголь. Возможно, такие установки будут действовать совместно с газификаторами, где измельченный уголь обрабатывается водяным паром; в результате газификации образуется так называемый водяной газ (смесь окиси углерода и водорода), являющийся, в принципе, подходящим горючим. Однако на этом пути возникают свои проблемы: так, поскольку уголь обычно содержит примеси серы, при газификации дополнительно образуются и сернистые соединения, которые обладают неприятным свойством «отравлять» электроды. Требуется очистка, а это дополнительные расходы.

Есть и другие подходы и другие трудности. Но все они преодолимы. Одно не вызывает сомнения — процессу холодного горения еще предстоит серьезно послужить человечеству.



В этом году издательство «Наука» планирует выпустить в серии «Библиотечка «Квант» второе издание книги К. Ю. Богданова «Физик в гостях у биолога». Первое издание вышло в этой серии в 1986 году (выпуск 49), а в 1987 году на Всесоюзном конкурсе научно-популярной литературы книга была от-

мечена Почетным дипломом. Второе издание будет дополненным, и сегодня мы предлагаем нашим читателям несколько новых рассказов, которые в него войдут. Это рассказы о том, как выглядит движение животных с точки зрения физика.

БОЛЬШИЕ И МАЛЕНЬКИЕ НА ПРОГУЛКЕ

Кандидат физико-математических наук,
доктор биологических наук К. БОГДАНОВ

По воде, как посуху

Все мы привыкли делить животных на тех, которые обитают в воде, и на «сухопутных». Однако существует несколько видов насекомых, которые почти всю свою жизнь проводят на границе воды и воздуха. Одни из них — водомерки.

Водомерки быстро скользят по поверхности воды, напоминая конькобежцев на льду. Широко расставленные длинные лапки поддерживают тонкое продолговатое тело.

Поверхностная пленка воды с ее большим поверхностным натяжением служит для водомерки надежной опорой. Если же на пути ее движения попадется «полынья» — участок, где поверхностное натяжение будет много меньше, — насекомое погрузится в воду и будет беспомощно барахтаться в ней. Такую «полынью» можно устроить, капнув в воду немного гексана — его коэффициент поверхностного натяжения (на границе с воздухом) $\sigma = 18$ мН/м почти в четыре раза меньше, чем у воды ($\sigma_{\text{воды}} = 70$ мН/м). (Наблюдения показывают, что водомерки хорошо отличаются «подходящую» водную поверхность от «неподходящей». Несколько упавших водяных капель нарушают гладкость поверхности, и водомерки сразу устремляются к берегу, где прячутся до тех пор, пока вода не станет спокойной.)

Попробуем оценить, каким запасом плавучести должна располагать водо-

мерка. Длина ее туловища немногим более 5 мм. Она имеет две пары длинных лапок, которые, в основном, и держат ее на поверхности воды, и две коротких, которыми она манипулирует с добычей. Масса m большой водомерки не превышает 0,05 г. Силу поверхностного натяжения, удерживающую насекомое на плаву, можно оценить как произведение $\sigma_{\text{воды}} L$, где L — длина кривой, вдоль которой она действует. Из равенства $mg = \sigma_{\text{воды}} L$ (это условие удержания на поверхности воды) следует, что L должна быть равна $0,5 \text{ мН} / 70 \text{ мН} \times \times \text{м}^{-1} \approx 7,1 \text{ мм}$. Что же на самом деле?

Посмотрите на рисунок 1, где в двух проекциях изображено место касания воды одной из лапок водомерки. Секрет способности насекомого держаться на поверхности воды скрыт в концах его ножек. Они густо покрыты водоотталкивающими волосками. Так как у водомерки всего шесть лапок, то максимальная длина кривой, перпендикулярно к которой действует сила поверхностного натяжения (T), составляет около 12 мм.



Рис. 1. Лапка водомерки на поверхности воды.

Интересно, что некоторые из насекомых, обитающих на поверхности воды (например, жук стенус), в опасных для себя ситуациях выпускают струю жидкости с низким поверхностным натяжением. Пускаясь наутек, они создают позади себя «непроходимую» область, в которой преследователи начинают тонуть.

Отважные стеклолазы

Как могут мухи прогуливаться по вертикальной поверхности оконного стекла? Этот вопрос волновал еще Роберта Гука. Он полагал, что мухе помогают коготки, которые находятся на концах каждой из шести ее лапок. (В 1665 году Гук в своей работе «Микрография» подробно описал эти коготки.) Может быть, это и так, но только когда она ползает по шероховатой поверхности, а не по стеклу.

Английские ученые, вооружившись современной техникой, показали, что способность мух передвигаться по очень гладкой поверхности объясняется опять-таки силами поверхностного натяжения. Они обнаружили, что на конце каждой лапки между коготками находятся волоски, образующие щетину. Каждый из волосков оканчивается присоской, имеющей форму диска; площадь поверхности диска — около $2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$.

Изучая следы мух, гуляющих по чистым поверхностям, ученые обнаружили, что они идентичны этим дискам. Отпечатки не испарялись, а их химический анализ показал, что это жиры. Несмотря на то, что жир скользкий, он способствует слипанию волосков и стекла. Это происходит из-за того, что поверхностное натяжение у жира очень велико. (Если лапки мухи обезжирить, опустив их на короткое время в гексан, то муха на некоторое время теряет способность передвигаться по стеклянной поверхности из-за скольжения.)

Были проведены измерения силы, удерживающей муху на горизонтальной стеклянной поверхности. Для этого муху прикрепляли на привязи к специальным весам и измеряли си-

лу, необходимую для отрывания мухи от этой поверхности. Средний вес мухи составлял 0,72 мН. Когда она стояла на четырех лапках, для ее отрыва требовалась сила 1,03 мН, а если она опиралась на все шесть своих лапок, сила требовалась большая — 2,4 мН. Это и доказывало, что муху удерживали силы поверхностного натяжения. (Тот факт, что зависимость измеренной силы от количества лапок, касающихся поверхности, оказалась не линейной, по-видимому, объясняется различным количеством волосков на передних и задних лапках мухи.)

С ведром на голове

Если вам не доводилось путешествовать по Африке, по Азии, то уж в кино или по телевизору вы наверняка видели — женщины несут на голове грузы огромных размеров. Нередко вес такой поклажи достигает 70 % веса человека. Естественно, поднять себе на голову такую ношу женщина без посторонней помощи не может, и иногда двое мужчин с трудом поднимают груз, который после этого одна женщина с легкостью уносит. Неужели им легче переносить грузы на голове?

Известно, что показателем энергетических затрат человека может служить скорость потребления им кислорода, при этом 1 литр израсходованного кислорода соответствует энергии, равной 20,1 кДж. Ученые в опытах на добровольцах установили, что при обычном способе ношения груза (за спиной) потребление кислорода растет пропорционально увеличению ноши так, что груз, равный 50 % веса тела носильщика, увеличивает на 50 % его энергетические затраты. Такая же зависимость имела место и в тех случаях, когда добровольцев просили переносить груз на голове, чему их раньше не обучали.

Каково же было удивление ученых, когда они обнаружили, что африканские женщины при переносе на голове груза в 50 % собственного веса увеличивают потребление кислорода



Рис. 2. Изменение положения центра тяжести при ходьбе.

лишь на 30%! Как им это удается? Ответить на этот вопрос помогли наблюдения.

Обычная для тех мест картина — женщина возвращается домой с наполненным до краев сосудом на голове. Как это ни удивительно, но вода не расплескивается по дороге. А это значит, что при движении отсутствует (или почти отсутствует) вертикальная составляющая ускорения. Следовательно, и центр тяжести «носильницы» не движется в вертикальном направлении.

Известно, что при обычной ходьбе высота центра тяжести заметно колеблется. На рисунке 2 схематически изображены положения человека и его центра тяжести в две последовательные фазы ходьбы. Если считать, что при ходьбе нога, соприкасающаяся с землей, выпрямлена, не согнута в колене, то очевидно, что центр тяжести будет располагаться ниже всего тогда, когда обе ноги касаются земли. Наивысшему положению центра тяжести будет соответствовать момент, когда соприкасающаяся с землей нога находится в вертикальном положении.

Можно считать, что центр тяжести движется по дуге окружности, радиус которой равен длине ноги, периодически поднимаясь и опускаясь на несколько сантиметров.

Естественно, что при каждом шаге на, вообще говоря, никому не нужное поднятие центра тяжести мы вынуждены затрачивать вполне определенную энергию. Поэтому такой (обычный для нас) способ ходьбы можно

сравнить с ездой начинающего автолюбителя, который, пытаясь сохранить постоянную среднюю скорость движения, попеременно нажимает то на акселератор, то на тормоз, расходуя в результате гораздо больше топлива.

В отличие от европейцев, у многих жителей стран Азии и Африки выработалась такая походка, при которой они удерживают свой центр тяжести на постоянной высоте, что значительно уменьшает энергетические затраты при ходьбе.

Кое-что об аэробике

Каждый, наверное, помнит школьный урок физики, на котором речь шла о двух маятниках, подвешенных на одной перекладине. Колебания одного маятника уже через несколько циклов приводили к синфазным колебаниям другого. Что-то похожее можно встретить и в организме бегущего животного, когда происходит взаимодействие двух «маятников» — периодических движений животного, как целого, и его легких.

На рисунке 3 схематически показан дыхательный «маятник» кенгуру. При вдохе, когда легкие животного наполняются воздухом, центр масс брюшной полости сдвигается влево, а при выдохе — вправо. Эластические свойства диафрагмы и других тканей на схеме представлены пружиной, а органы, гасящие дыхательные колебания, — демпфером. Таким образом, органы брюшной полости служат своеобразным поршнем, колебания которого происходят синхронно с дыхательными движениями.



Рис. 3. Моделирование дыхательного «маятника» поршнем, скользящим внутри тела животного под действием пружины и демпфера.

Очевидно, что наименьшим энергетическим затратам при беге должен соответствовать тот случай, когда силы инерции, возникающие в теле животного при периодическом его ускорении и замедлении, помогают (а не препятствуют) совершать дыхательные движения. Подобные рассуждения приводят к мысли, что частота дыхания у животного должна быть очень близка к частоте его прыжков при беге.

В специальных опытах, проведенных на кенгуру, лошадах, зайцах и собаках, эта идея была проверена. Оказалось, что наиболее вероятным отношением частоты прыжков к частоте дыхания (особенно при быстром беге галопом) является 1:1. У человека связь между частотой бега и частотой дыхания выглядит более сложно. Это отношение у него может принимать целый спектр значений (4:1, 3:1, 2:1, 1:1, 5:2, 3:2), хотя отношение 2:1 представляется более вероятным.

Причина кажущейся независимости частот дыхания и бега у человека кроется, по-видимому, в вертикальном положении его тела. Дыхательные движения у него сопровождаются вертикальными перемещениями органов брюшной полости, а следовательно, силы инерции при беге, направленные горизонтально, влияют на дыхательный «маятник» человека в гораздо меньшей степени, чем это имеет место у четвероногих.

Возвращаясь к опыту с двумя маятниками, отметим, что вынужденные колебания второго маятника достигнут наибольшей амплитуды при равенстве периодов собственных колебаний маятников. Поэтому следует ожидать, что частота собственных колебаний дыхательного «маятника» должна быть близка к частоте бега. Так оно и оказалось. Опыты, проведенные на собаках, показали, что частота собственных колебаний дыхательного «маятника» составляет около 4 Гц, в то время как частота прыжков при беге галопом — 3,2 Гц.

Так как частота собственных колебаний дыхательного «маятника» есть

величина постоянная для данного животного, то при изменении скорости бега частоту прыжков также следует сохранять неизменной. Этого требует минимизация энергетических затрат. И действительно, как у четвероногих бегунов, так и у двуногих (кенгуру) частота бега галопом остается постоянной, хотя длина прыжков может изменяться в несколько раз.

Как используют принцип Бернулли живые организмы

В соответствии с принципом Бернулли ($\rho v^2/2 + p = \text{const}$, где ρ — плотность жидкости или газа, v — линейная скорость их движения и p — давление) изменение скорости потока приводит к изменению давления в нем. Как это нетрудно сообразить, принцип Бернулли прямо следует из закона сохранения механической энергии, так как величина $\rho v^2/2$ численно равна кинетической энергии единицы объема движущейся среды, а p — потенциальной энергии ее сжатия.

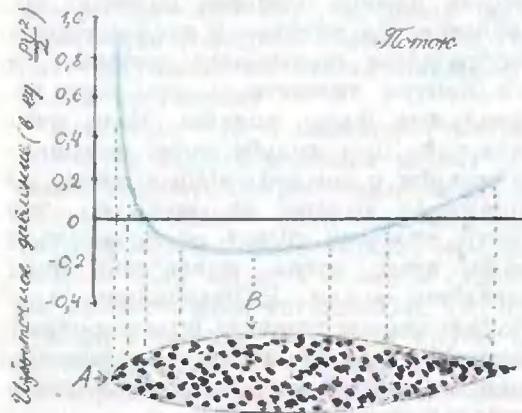


Рис. 4. Распределение давления жидкости, обтекающей тело вращения каплевидной формы. (Так как изменения давления всегда будут пропорциональны $v^2/2$, эти изменения можно выразить в безразмерных единицах $2\rho/v^2$.)



Рис. 5. Обтекание воздухом крыла самолета.

Из принципа Бернулли следует, что если какое-либо тело движется (или жидкость обтекает неподвижное тело), то давление жидкости, соприкасающейся с этим телом, будет неодинаково в различных точках потока. На рисунке 4 показано, как изменяется давление в потоке жидкости при обтекании им тела каплеобразной формы. В тех местах, где жидкость наталкивается на тело (точка А на рисунке 4), ее скорость уменьшается, и давление жидкости возрастает. Обтекая тело, жидкость ускоряется, и в некоторых областях, близлежащих к телу (точка В), она движется со скоростью большей, чем в остальных точках потока. Поэтому в точке В давление жидкости падает. Таким образом, высокое давление, действующее на часть тела, обращенную к потоку, будет стремиться сжать тело, а низкое давление вблизи боковых поверхностей — расплющить его.

Человек научился довольно эффективно использовать принцип Бернулли. На рисунке 5 изображено поперечное сечение крыла самолета. Рассмотрим движение двух частичек воздуха, которые до столкновения с крылом были рядом друг с другом. После того как они с разных сторон обойдут крыло, они опять окажутся вместе. Но частица А за этот интервал времени проделает путь больший, чем частица В; значит, при обходе средняя скорость частицы А больше. Поэтому из принципа Бернулли следует, что среднее давление над крылом должно быть меньше, чем под его плоскостью. Эта разница давлений и приводит к возникновению подъемной силы, зависящей от площади крыла и его профиля.

Как используют принцип Бернулли живые организмы? Конечно, самый наглядный пример — это парящий полет птиц. Аэродинамика этого полета, хотя она до сих пор еще не до конца изучена, мало чем отличается от полета их стальных собратьев. Однако в природе существует достаточно много других явлений, кажущуюся загадочность которых объясняет принцип Бернулли.

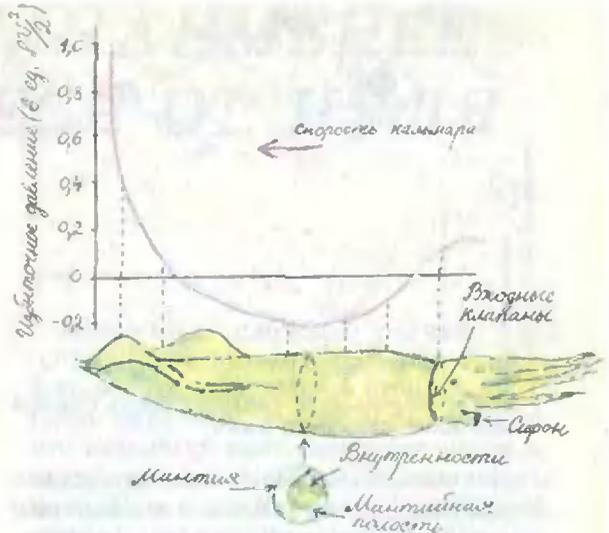


Рис. 6. Распределение давления воды вдоль поверхности движущегося кальмара. (Показано также поперечное сечение кальмара плоскостью, обозначенной пунктиром.)

Большинство читателей, конечно, знает, что кальмар, спасаясь бегством от преследующего его хищника, использует реактивный принцип движения, выбрасывая значительную массу воды из своей мантийной полости. Однако долгое время оставалось непонятным, как заполняется водой эта полость.

На рисунке 6 приведено схематическое изображение кальмара и указано направление его движения при выбрасывании струи воды из трубки (сифона), расположенной в головной части моллюска. Входные клапаны, через которые вода поступает в мантийную полость, находятся на боковой поверхности животного в центральной его части.

Все наши рассуждения о перепаде давлений жидкости, обтекающей тело, справедливы и в том случае, когда это тело — кальмар. Так что давление воды у поверхности плывущего кальмара будет минимальным в средней части его тела, вблизи мантийной полости (см. рис. 6). При этом давление жидкости у клапанов полости будет всегда несколько больше, чем среднее давление жидкости в полости. Считают, что из-за этой разности давлений и засасывается вода внутрь мантийной полости.

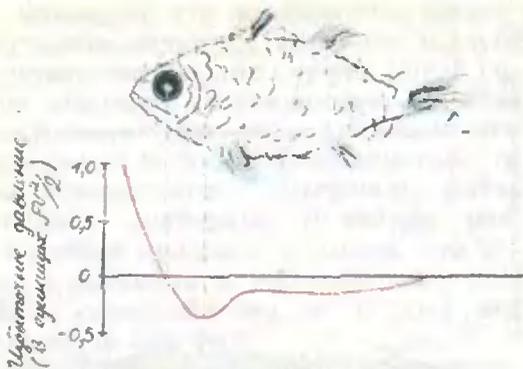


Рис. 7. Распределение давления вдоль боковой поверхности плывущей рыбы.

Насколько велик вклад принципа Бернулли в механизм заполнения мантийной полости удалось установить после проведения математического моделирования. Градиент давления (изменение давления на единицу длины), даваемый формулой Бернулли, зависит от скорости движения кальмара и обеспечивает от 50 до 90 % необходимой величины, когда эта скорость увеличивается от 3 до 9 м/с. Этот расчет дает основания считать, что в действительности принцип Бернулли очень много значит для кальмара, так как обычно его скорость составляет 5—10 м/с.

Пожалуй, никто так эффективно не использует принцип Бернулли, как рыбы. Долгий ход эволюции так оптимизировал форму их тела, что величина падения давления вблизи центральной части плывущей рыбы стала почти такой же, как и его прирост перед ней (сравните рис. 4 и рис. 7). Ученые считают, что значительное падение давления, наблюдаемое вблизи того места, где у рыбы расположено сердце, может способствовать более эффективной работе последнего — меньшее давление в полостях сердца должно увеличивать приток крови к нему.

Кроме того, форма тела у рыбы такова, что есть место, где давление окружающей воды не зависит от скорости движения и всегда равно гидростатическому, и это место совпадает с положением глаз рыбы. Таким образом, глаза рыбы — наименее защищенные от деформации органы — ни-

когда не испытывают на себе роста давления жидкости при увеличении скорости плавания.

Многим, наверное, известно, что некоторые жучки большую часть своей жизни проводят под водой. При этом они дышат воздухом, пузырек с которым таскают все время с собой. К таким «подводникам» относят, например, жучка *Potamodytes tuberosus*, обитающего в реках западной Африки. Обычно этот жучок вместе с пузырьком воздуха прикрепляется к поверхности камня, находящегося в струе воды. Как только жучок с пузырьком воздуха оказывается в спокойной (стоячей) воде, пузырек начинает медленно рассасываться и через пару часов исчезает, что заставляет жука искать новый. Поэтому, оседлав найденный пузырек воздуха, жучок старается всегда находиться в движущемся потоке воды.

Объяснить стабильность воздушного пузырька в потоке воды помогает опять-таки принцип Бернулли. Как следует из всего вышесказанного, давление воды, обтекающей продолговатый, вытянутый вдоль потока пузырек, должно быть меньше гидростатического почти вдоль всей его поверхности. Поэтому и давление воздуха в пузырьке оказывается меньшим, чем в том случае, когда вода вокруг неподвижна. Если глубина, на которой находится жучок, невелика, то движение воды может приводить к понижению давления воздуха в пузырьке ниже атмосферного. А это значит, что растворенный (при атмосферном давлении) в воде воздух будет входить в пузырек, где давление меньше. В результате пузырек будет расти.

Даже, когда жук в струе воды находится на глубине нескольких сантиметров, пузырек часто оказывается стабильным, несмотря на гидростатическое давление, которое препятствует этому. Расчеты показывают, что для такой стабильности на глубинах в 1 и 4 см необходимы скорости потока, большие соответственно 1 и 2 м/с.

МНОГОЧЛЕНЫ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ

Кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

Я расскажу об одной из самых красивых задач о многочленах — задаче Чебышева о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля. Зафиксируем некоторый отрезок числовой оси, скажем, отрезок $[-2; 2]$ (говоря «скажем», я немного лукавлю — именно для этого отрезка получаются наиболее простые формулы). Пусть

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

— приведенный многочлен n -й степени (это значит, что его старший коэффициент равен 1). Множество значений $f(x)$ на отрезке $[-2; 2]$ — отрезок $[m; M]$, где m — минимум, а M — максимум многочлена. Уклонением многочлена от нуля называется наибольшее из чисел $|m|$, $|M|$. Если уклонение многочлена от нуля равно s , то его график содержится в полосе $|y| \leq s$ и не содержится ни в какой более узкой полосе со средней линией Ox .

Задача состоит в том, чтобы найти такой приведенный многочлен n -й степени $f_n(x)$, уклонение которого от нуля было бы минимальным (условие, что старший коэффициент равен 1, не позволяет сжать график произвольно близко к оси абсцисс). На первый взгляд, задача Чебышева вызывает мало энтузиазма: чтобы искать уклонение от нуля, нужно вычислять производные и решать уравнения n -й степени... Тем более удивительно, что эта задача решается геометрически — и почти без вычислений!

Давайте сначала, «не мудрствуя лукаво», разберем случаи малых степеней. При $n=1$ речь идет просто о линейной функции $f(x)=x+a$. Ее множество значений — отрезок $[-2+a; 2+a]$ длиной 4. Поэтому наименьшее уклонение от нуля равно 2, а $f_1(x)=x$.

Немного сложнее случай $n=2$ (случай квадратного трехчлена). График многочлена второй степени — отрезок параболы; и довольно очевидно, что параболу выгоднее всего расположить так, как изображено на рисунке 1. При этом $f(x)=x^2-2$, а уклонение от нуля снова оказывается равным 2.

Упражнение 1. Проверьте интуицию вычислением: докажите, что уклонение от нуля квадратного трехчлена не меньше 2.

Я мог бы предложить вам исследовать случай многочленов третьей степени и убедиться, что и в этом случае наименьшее уклонение от нуля равно 2. Эта задача еще допускает решение «в лоб». Но мне не терпится рассказать вам общее решение.

Предположим, что нам удалось обнаружить такой приведенный многочлен n -й степени $f_n(x)$, что его график лежит в полосе $|y| \leq s$ и содержит $n+1$ точку ее границы: самая правая лежит на прямой $y=s$, следующая — на прямой $y=-s$, следующая — снова на прямой $y=s$ и т. д. ($n=5$ на рисунке 2).

Теорема. Уклонение от нуля любого приведенного многочлена n -й степени, отличного от $f_n(x)$, больше s .

Вот геометрическое доказательство, которое и делает задачу Чебышева столь привлекательной. Пусть $g(x)$ —

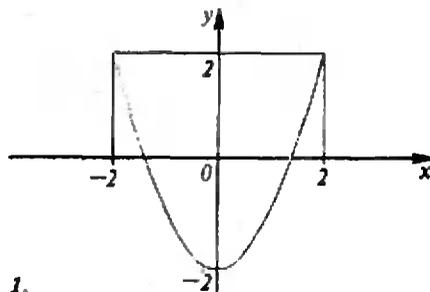


Рис. 1.

другой приведенный многочлен n -й степени, уклонение которого от нуля не превосходит c . Тогда его график тоже лежит в полосе $|y| \leq c$. Разобьем эту полосу вертикальными отрезками на n прямоугольников так, как показано на рисунке 3. Синяя кривая — график $f_n(x)$ — соединяет по диагонали противоположные вершины каждого прямоугольника. Поэтому красная кривая — график $g(x)$ — пересекает синюю внутри каждого из них. Следовательно, уравнение $f_n(x) - g(x) = 0$ имеет не менее n корней. Но степень многочлена $f_n(x) - g(x)$ не больше, чем $(n-1)$. Если такой многочлен все же имеет n корней, то он тождественно равен нулю, т. е. $g(x) = f_n(x)$. Теорема доказана.

Вдумайтесь в это доказательство. Почти даром мы получили довольно много: хотя значение c нам еще не

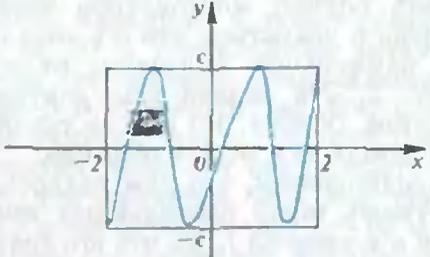


Рис. 2.

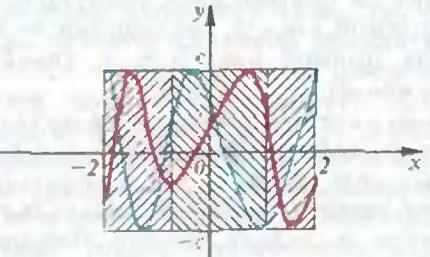


Рис. 3.

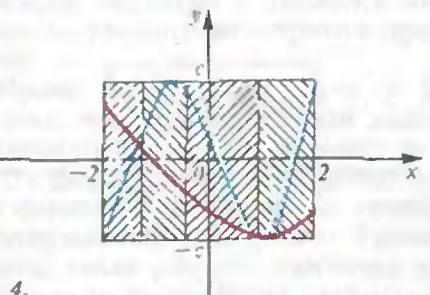


Рис. 4.

известно, мы уже знаем, что существует только один наименее уклоняющийся от нуля многочлен данной степени, и представляем, как выглядит его график.

Упражнение 2. Приведенное доказательство содержит пробел (это — плата за красоту). Как быть в случае, если графики многочленов $f_n(x)$ и $g(x)$ касаются (рис. 4)?

Подсказка: вспомните определение кратного корня многочлена.

Итак, нам нужно предъявить многочлен $f_n(x)$, график которого ведет себя так, как изображено на рисунке 2. Этот рисунок не может не напоминать вам о тригонометрических функциях. И действительно, сейчас они вступают в игру!

Проще всего было бы взять в качестве f_n что-то вроде функции $\cos na$. Но, увы, косинус — не многочлен. На помощь приходит следующая

Лемма. Функция $2 \cos na$ выражается в виде приведенного многочлена n -й степени от функции $2 \cos a$:

$$2 \cos na = f_n(2 \cos a).$$

Например,

$$2 \cos 2a = 4 \cos^2 a - 2 = (2 \cos a)^2 - 2,$$

$$\text{т. е. } f_2(x) = x^2 - 2;$$

$$2 \cos 3a = 8 \cos^3 a - 6 \cos a = (2 \cos a)^3 -$$

$$- 3(2 \cos a), \text{ т. е. } f_3(x) = x^3 - 3x.$$

Доказательство леммы проводится по индукции. Пусть ее утверждение доказано для чисел $n-1$ и n :

$$2 \cos(n-1)a = f_{n-1}(2 \cos a),$$

$$2 \cos na = f_n(2 \cos a).$$

Из формулы

$$\begin{aligned} \cos(n+1)a + \cos(n-1)a &= \\ &= 2 \cos a \cos na \end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned} 2 \cos(n+1)a &= (2 \cos a)(2 \cos na) - \\ - 2 \cos(n-1)a &= (2 \cos a)f_n(2 \cos a) - \\ &- f_{n-1}(2 \cos a). \end{aligned}$$

Значит,

$$f_{n+1}(x) = x f_n(x) - f_{n-1}(x).$$

Лемма доказана, а заодно получена рекуррентная формула для вычисления многочленов $f_n(x)$.

(Окончание см. на с. 27).

ЗАДАЧА ЧЕБЫШЕВА И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Кандидат физико-математических наук
С. ГАШКОВ

От редакции. В предыдущей статье рассказано о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля. В ней свойства многочленов Чебышева выводились из геометрии их графиков. В статье, которую мы предлагаем вашему вниманию, предлагается другой подход к этой задаче — подход, основанный на изучении тригонометрических многочленов. Что лучше — решайте сами. Мы исходили из того, что полезнее решить одну задачу несколькими способами, чем несколько задач — одним...

Многочлены алгебраические и тригонометрические

Тригонометрическим многочленом называется функция

$$f(\alpha) = a_0 + a_1 \cos \alpha + a_2 \cos 2\alpha + \dots + a_n \cos n\alpha, \quad (1)$$

где a_0, a_1, \dots, a_n — числовые коэффициенты. Число n называется степенью, а число a_n — старшим коэффициентом тригонометрического многочлена.

У вас, вероятно, возникает вопрос: почему тригонометрическая функция (1) называется «многочленом»? Причина в том, что $f(\alpha)$ — обычный, алгебраический многочлен от функции $\cos \alpha$. В предыдущей статье «Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля» доказано, что $2 \cos n\alpha$ является многочленом n -й степени от $2 \cos \alpha$ со старшим коэффициентом 1. Если вы прочитали эту статью, то знаете, что это легко доказать по индукции; а если нет, предлагаю вам сделать это самостоятельно. Во всяком случае, при любом n

$$\cos n\alpha = p_n(\cos \alpha),$$

где $p_n(x)$ — многочлен n -й степени со старшим коэффициентом 2^{n-1} :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= x = p_1(x), \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2x^2 - 1 = p_2(x), \\ \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = 4x^3 - 3x = p_3(x), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\cos n\alpha = 2^{n-1} x^n + \dots = p_n(x),$$

$(x = \cos \alpha).$

Умножая предыдущие равенства на коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n и складывая, мы увидим, что всякий тригонометрический многочлен (1) является алгебраическим многочленом n -й степени от $\cos \alpha$.

Попробуем теперь «прочитать» равенства (2) справа налево и снизу вверх. Из последнего равенства следует, что

$$x^n = 1/2^{n-1} \cos n\alpha + \dots, \quad (3)$$

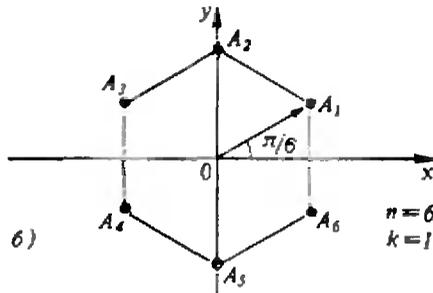
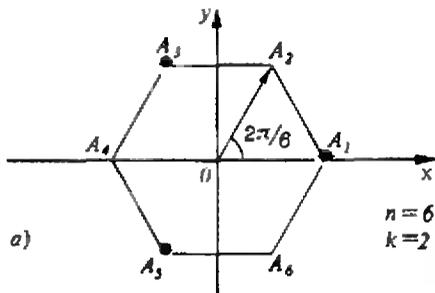
где многоточие обозначают одночлены x^k степени, меньшей n . Из предпоследнего равенства следует, что

$$x^{n-1} = 1/2^{n-2} \cos(n-1)\alpha + \dots, \quad (4)$$

где многоточие заменяет одночлены x^k степени, меньшей $n-1$. И так далее. Подставляя (4) и аналогичные им равенства вместо многоточий в (3), мы получаем следующий результат:

если $x = \cos \alpha$, то x^n является тригонометрическим многочленом n -й степени со старшим коэффициентом $1/2^{n-1}$.

Отсюда следует, что всякий алгебраический многочлен n -й степени $p_n(x)$ со старшим коэффициентом 1 при $x = \cos \alpha$ является тригонометрическим многочленом n -й степени со старшим коэффициентом $1/2^{n-1}$.



Среднее значение тригонометрического многочлена

Рассмотрим тригонометрический многочлен $f(\alpha)$ со старшим коэффициентом a_n . Разделим его область определения $[0; 2\pi]$ на $2n$ равных частей точками

$0, \pi/n, 2\pi/n, 3\pi/n, \dots, (2n-1)\pi/n$ и рассмотрим его среднее значение в этих точках с чередующимися знаками:

$$\frac{1}{2n}(f(0) - f(\pi/n) + f(2\pi/n) - f(3\pi/n) + \dots - f((2n-1)\pi/n)) \quad (5)$$

Лемма. Это число равно a_n .

Доказательство. Тригонометрический многочлен (1) состоит из слагаемых вида $g_k(\alpha) = \cos k\alpha$, где $0 \leq k \leq n$. Мы докажем, что сумма (5) для всех g_k , кроме последнего, равна нулю. Если $k=0$; то $g_0(\alpha) = 1$, так что

$$g_0(0) - g_0(\pi/n) + g_0(2\pi/n) - \dots = 1 - 1 + 1 - \dots - 1 = 0.$$

Пусть теперь $0 < k < n$. Сумма (5) равна разности двух слагаемых:

$$\cos(0) + \cos(2\pi k/n) + \cos(4\pi k/n) + \dots + \cos((2n-2)\pi k/n), \quad (6_1)$$

$$\cos(\pi k/n) + \cos(\pi k/n + 2\pi k/n) + \dots + \cos(\pi k/n + (2n-2)\pi k/n). \quad (6_2)$$

Каждая из этих сумм равна нулю. Действительно, рассмотрим два правильных n -угольника (на рисунке $n=6$). Обойдем вершины n -угольника в таком порядке: $A_1, A_{1+k}, A_{1+2k}, \dots$. Через несколько шагов наш путь замкнется (на рисунке а) $k=2$). В силу симметрии сумма векторов с началом в центре многоугольника и концами в отмеченных точках

равна нулю. Поэтому нулю равна и сумма их проекций на ось абсцисс. Но это и есть сумма (6₁)! Аналогичное рассуждение с рисунком б) — на нем $k=1$ — доказывает, что равна нулю и сумма (6₂).

Итак, остается вычислить сумму (5) при $f(\alpha) = a_n \cos n\alpha$. Но в этом случае

$$f(\pi k/n) = a_n \cos(\pi k) = (-1)^k a_n.$$

Поэтому сумма (5) равна

$$\frac{1}{2n}(1 - (-1) + 1 - (-1) + \dots) a_n = \frac{1}{2n} \cdot 2n \cdot a_n = a_n.$$

Лемма доказана.

Решение задачи Чебышева

Всякий труд вознаграждается: мы теперь в состоянии решить задачу Чебышева. Напомним, что отклонением функции от нуля на некотором интервале называется наибольшее значение ее модуля на этом интервале. Задача состоит в том, чтобы найти наименьшее возможное отклонение от нуля на отрезке $[-1; 1]$ многочлена n -й степени со старшим коэффициентом 1.

Прежде всего оценим снизу отклонение от нуля тригонометрического многочлена (1). Это делается так:

$$\frac{1}{2n}(|f(0)| + |f(\pi/n)| + |f(2\pi/n)| + \dots + |f((2n-1)\pi/n)|) \geq \frac{1}{2n}(f(0) - f(\pi/n) + f(2\pi/n) - f(3\pi/n) + \dots - f((2n-1)\pi/n)) = |a_n|. \quad (7)$$

Неравенство означает, что сумма модулей не меньше, чем модуль суммы; а равенство — это утверждение леммы из предыдущего пункта. Из неравенства (7) следует, что хотя бы для одного k выполнено неравенство $|f(\pi k/n)| \geq |a_n|$. Поэтому

уклонение от нуля тригонометрического многочлена не меньше модуля его старшего коэффициента.

Теперь задача Чебышева решается «в один ход». Согласно сказанному в начале статьи, приведенный многочлен n -й степени $p_n(x)$ при подстановке $x = \cos \alpha$ превращается в тригонометрический многочлен $f(\alpha)$ со старшим коэффициентом $1/2^{n-1}$; причем, когда α пробегает отрезок $[0; 2\pi]$, x пробегает отрезок $[-1; 1]$. С другой стороны, уклонение от нуля $f(\alpha)$ не меньше его старшего коэффициента. Значит,

уклонение от нуля приведенного многочлена n -й степени на отрезке $[-1; 1]$ не меньше, чем $1/2^{n-1}$.

Нетрудно видеть, что уклонение от нуля на отрезке $[-1; 1]$, равное $1/2^{n-1}$, имеет приведенный многочлен $p_n(x)$, для которого

$$p_n(\cos \alpha) = 1/2^{n-1} \cos n\alpha, \text{ т. е.}$$

$$p_n(x) = 1/2^{n-1} \cos(n \arccos x).$$

В заключение — несколько задач.

1. Тригонометрический многочлен n -й степени имеет на отрезке $[0; \pi]$ не более n корней, а на отрезке $[0; 2\pi]$ — не более $2n$ корней.

2. Если два тригонометрических многочлена n -й степени имеют равные значения в $(n+1)$ -й точке отрезка $[0; \pi]$, то они совпадают тождественно.

3. Единственный приведенный многочлен n -й степени с уклонением от нуля на отрезке $[-1; 1]$, равным $1/2^{n-1}$, — это многочлен Чебышева $1/2^{n-1} \cos(n \arccos x)$.

Подсказка: когда неравенство (7) обращается в равенство?

4. Докажите тождество:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos(\alpha + x) + \cos(\alpha + 2x) + \dots \\ + \cos(\alpha + nx) = \\ = \frac{\sin(\alpha + (n+1/2)x) - \sin(\alpha - x/2)}{2 \sin x/2}. \end{aligned}$$

Подсказка: $\sin(\alpha + (k+1/2)x) - \sin(\alpha + (k-1/2)x) = 2 \sin x/2 \cos(\alpha + kx)$.

5. Выведите из предыдущей задачи утверждение леммы.

6. Докажите, что тригонометрический многочлен без свободного члена $f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx$ обязательно имеет корень.

Подсказка: чему равно среднее значение $f(\alpha)$?

7. Вспомните доказательство леммы и докажите, что последовательность вершин многоугольника замкнется после $n/\text{НОД}(n, k)$ шагов.

Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля

(Начало см. на с. 23)

Как вы догадались, многочлены $f_n(x)$ — это то, что нам нужно. Действительно, пусть α пробегает отрезок $[0; \pi]$. Тогда $n\alpha$ изменяется от 0 до $n\pi$, а функции $x = 2\cos \alpha$ и $f_n(x) = 2\cos n\alpha$ принимают значения на отрезке $[-2; 2]$. При этом x пробегает этот отрезок один раз, а $f_n(x)$ — n раз, поочередно принимая значения ± 2 при $x = \arccos(\frac{\pi k}{n})$, $k = 0, 1, \dots, n$. Значит, график многочлена $f_n(x)$ лежит в полосе $|y| \leq 2$ и содержит попеременно $n+1$ точку ее верхней и нижней границы. Т. е. $f_n(x)$ — многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-2; 2]$ (а уклонение равно 2). Эти многочлены называются *многочленами Чебышева*.

Из сказанного следует неожиданный вывод:

каким бы ни был приведенный многочлен $g(x)$, найдется такая точка отрезка $[-2; 2]$, в которой модуль его значения не меньше 2.

Предвидеть такой результат, по-моему, было бы невозможно. После того как задача о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, решена на отрезке $[-2; 2]$, ее нетрудно решить и на любом другом отрезке. Для этого достаточно сделать в многочленах Чебышева линейную замену переменной.

У п р а ж н е н и е 3. Найдите наименьшее уклонение от нуля приведенных многочленов n -й степени на отрезках а) $[0; 4]$; б) $[-1; 1]$.

Многочлены Чебышева, безусловно, заслуживают более подробного разговора. Рассказ об их комбинаторных свойствах уже появлялся в «Кванте» — в № 1 за 1982 год. К нему я и отсылаю тех, кого заинтересовали многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля.

Задачи

M1226—M1230, Ф1233—Ф1237

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 августа 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1226» или «Ф1233». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M1226. Если квадрат повернуть относительно его центра на 45° , то полученный квадрат разделит стороны первоначального в некотором отношении. Возьмем произвольный выпуклый четырехугольник, разделим его стороны в том же отношении и через точки деления проведем прямые, образующие новый четырехугольник (рис. 1). Докажите, что площади этих четырехугольников равны.

А. Савин

M1227. Назовем шахматный турнир, в котором n игроков сыграли друг с другом по одной партии, логичным, если для любых двух игроков выполняется следующее условие: тот, кто набрал не больше очков, не выиграл и в личной встрече. (Напомним, что за победу дается 1 очко, за ничью — $1/2$, за поражение — 0.) Докажите, что каков бы ни был турнир, тот же итог (распределение очков между участниками) можно получить и в некотором логичном турнире.

А. Зелевинский, С. Ореков

M1228*. Докажите для любых положительных чисел a, b, c , не больших 1, неравенство

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

Д. Фокин

M1229. Докажите, что при каждом натуральном m число

а) $4^m + 5$;

б) $8^m + 9$;

в) $a^m + a + 1$ (где a — целое и не делится на 8)

не является квадратом целого числа.

Р. Хайруллаев

M1230. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

С. Генкин

Ф1233. Гонки мотоциклистов происходят по узкой круговой трассе. Трогаясь с места, мотоциклист стремится побыстрее набрать скорость. Какую часть круга он пройдет к моменту достижения максимальной скорости?

А. Черноуцан

Ф1234. Для охлаждения потока воздуха в цилиндрической трубе при нормальных условиях, в некотором ее сечении впрыскивают одинаковые капли жидкого азота, которые испаряются вниз по течению. Скорости газа и капель всюду равны между собой (их начальные значения $u_0 = 10$ м/с), стенки трубы не проводят тепла. Найти значения скорости, плотности и температуры потока после испарения всех капель, если их начальный секундный расход такой же, как и воздуха. Температура

Задачник „Кванта“

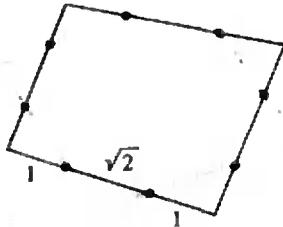
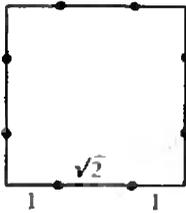


Рис. 1.

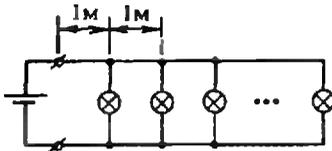


Рис. 2.

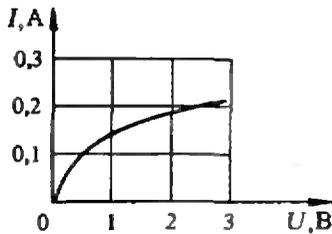


Рис. 3.

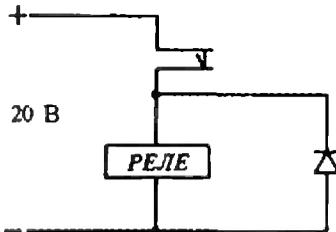


Рис. 4.

M1201. В парламент Анчурии нужно избрать по одному депутату от каждого из 999 избирательных округов с одинаковым числом избирателей. В Ан-

чичии жидкого азота при атмосферном давлении 77 К, удельная теплота парообразования $r = 2 \times 10^5$ Дж/кг. Свойства газообразных воздуха и азота считать одинаковыми.

А. Стасенко

Ф1235. Длинная гирлянда составлена из одинаковых лампочек, подключенных к паре проводов на расстоянии 1 м друг от друга (рис. 2). Сопротивление 1 м провода составляет 0,2 Ом, лампочек в гирлянде 100. Какой ток потребляет гирлянда от источника напряжением 2,5 В?

Увеличим напряжение источника на 0,1 В. На сколько увеличится мощность, переходящая в тепло в отрезках проводов, которые соединяют источник с первой лампочкой гирлянды? Вольт-амперная характеристика лампочки приведена на рисунке 3.

А. Зильберман, И. Потеряков

Ф1236. Электромагнитное реле имеет обмотку индуктивностью 1 Гн с сопротивлением 100 Ом. Обмотка реле подключена к источнику напряжением 20 В последовательно с парой нормально замкнутых контактов, которые размыкаются при срабатывании реле. Параллельно обмотке реле включен диод, как показано на рисунке 4. Ток срабатывания реле составляет 0,1 А, ток отпускания 0,09 А. Зачем может понадобиться такое устройство и для чего в нем используется диод? Рассчитайте параметры устройства. При каком минимальном напряжении источника оно может работать?

З. Рафаилов

Ф1237. Плосковыпуклая линза сделана из стекла с коэффициентом преломления $n = 1,6$. Радиус сферической поверхности $R = 10$ см, толщина линзы $d = 0,2$ см. На плоскую поверхность параллельно главной оптической оси линзы направляют параллельный пучок и фокусируют его на экране, открыв только небольшую часть линзы около оси («задиафрагмировав» линзу). После этого диафрагму убрали. Найти диаметр пятна на экране.

Р. Александров

Решения задач

M1201—M1205, Ф1213—Ф1217

Кандидаты от партии С, очевидно, смогут пройти во всех 999 округах (рис. 1). Оценим сверху число округов, в которых партия С может проиграть. Если в x округах С имеет менее чем по $N/2$ сторонников, то общее число ее сторонников (равное по условию $0,55 \cdot 999 N$; N — число избирателей в округе) не превосходит

Задачник „Кванта“

чурии создано три партии А, В, С, выдвигающие своих кандидатов. Партию А поддерживает всего 15 % избирателей, партию В — 30 %, С — 55 %. Если на первом туре выборов в округе ни один из кандидатов не набирает 50 % голосов, то во второй тур проходят двое, набравшие наибольшее число голосов. Во втором туре партии А и В поддерживают друг друга, а сторонники С голосуют за кандидата партии А. Какое наибольшее и какое наименьшее число кандидатов от каждой из партий может быть избрано в парламент?



Рис. 1.

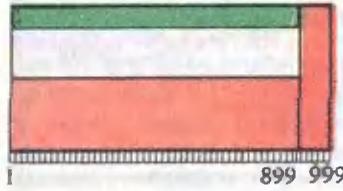


Рис. 2.

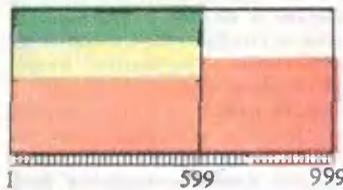


Рис. 3.

$$xN/2 + (999 - x)N = 999N - xN/2. \text{ Отсюда получаем оценку } x \leq 899.$$

Пример, когда С получает 100 мест, приведен на рисунке 2; здесь в каждом из 899 округов партия С имеет $(N/2 - 3)$ сторонников, А — $(N/6 + 1)$, В — $(N/3 + 2)$; чтобы сторонники С составляли 55 %, должно выполняться соотношение $899(N/2 - 3) + 100N = 0,55 \cdot N \cdot 999$, откуда $N = 6 \cdot 8990$.

Таким образом, партия С может получить от 100 до 999 мест в парламенте.

Ясно, что число мест, полученных каждой из партий А и В, может оказаться равным 0 и не превосходит 899. Что касается партии В, то она может получить все 899 мест: если ко второму туру во всех этих округах остаются лишь кандидаты партий В и С, то всюду в них победит В (поддержанная А). Это показано на рисунке 2. Таким образом, В может получить от 0 до 899 мест.

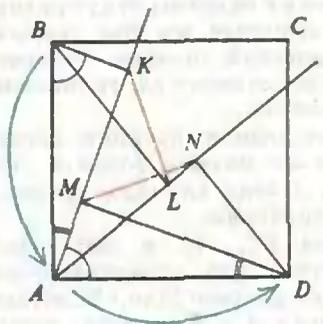
Выясним, в каком числе y округов может победить кандидат партии А. Для победы в округе нужно иметь не менее $N/4$ сторонников (иначе в нем либо будет избран кандидат в первом туре, либо на долю двух партий, идущих на втором и третьем местах, придется более 50 % голосов, и пройдет кандидат, имеющий более 25 % голосов). Итак, $y \cdot N/4$ не превосходит общего числа сторонников А, равного по условию $0,15 \cdot 999N$. Отсюда получаем оценку $y \leq 599$. Пример, когда А побеждает в 599 округах, показан на рисунке 3 (в каждом из этих округов А имеет $(N/4 + 8)$ сторонников, В — $(N/4)$, С — остальных $(N/2 - 8)$, и чтобы А имела всего 15 % сторонников, должно выполняться соотношение $599(N/4 + 8) = 0,15 \cdot 999N$, откуда $N = 2 \cdot 5990$; поскольку N делится на 20, легко обеспечить при этом и нужное соотношение для партий В и С). Таким образом, А может получить от 0 до 599 мест.

Первой задачей в Задачнике «Кванта» М1 (1970 г.) была также задача о выборах: в ней демонстрировалось, что в результате многоступенчатых «демократических» выборов президент Мирафлорес может победить, опираясь лишь на 1 % населения. Мы вспомнили про Анчурию через 20 лет, чтобы продемонстрировать другой эффект демократических выборов: при голосовании по округам может сильно нарушаться пропорциональность представительства отдельных партий (этот эффект возникает не только при выбранных в задаче достаточно произвольных условиях — он возникает практически всегда, когда сторонники оппозиции рассредоточены по разным округам). Поэтому выборы от «общественных организаций» (партий), разумеется, с демократическим — пропорциональным числом поданных голосов избирателей — представительством, в большей степени обеспечивают права меньшинства и позволяют отразить в парламенте различные точки зрения.

Н. Васильев

Задачник „Квант“

M1202. Из вершины A квадрата $ABCD$ внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры BK, BL, DM, DN из вершин B и D . Докажите, что отрезки KL и MN равны и перпендикулярны.



Рассмотрим поворот R вокруг центра квадрата на 90° , при котором точки B и A перейдут соответственно в A и D . Покажем, что при этом повороте отрезок KL перейдет в отрезок MN (см. рисунок) — тем самым задача будет решена. Поскольку $\angle KBA = 90^\circ - \angle KAB = \angle KAD$ и, аналогично, $\angle KAB = \angle ADM$, луч BK при этом повороте перейдет в луч AM , а луч AK — в DM . Следовательно, точка K пересечения лучей BK и AK перейдет в точку M пересечения лучей AM и DM , т. е. $R(K) = M$. Точно так же доказывается, что $R(L) = N$.

В. Дубровский

M1203. Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 км на а) 31 квадрат; б)* 30 квадратов так, чтобы один из них имел сторону не более 1 м.

Ответ: в обеих задачах — можно.

Самая естественная идея — разрезать квадрат на 4 квадрата поменьше; один из получившихся квадратов снова «четвертовать» и т. д. (рис. 1). Каждая такая операция увеличивает число квадратов на 3, после десятого раза квадратов станет $3 \cdot 10 + 1 = 31$, а сторона наименьшего будет в $2^{10} = 1024$ раза меньше стороны исходного квадрата. Условие пункта а) выполнено.

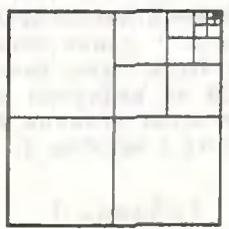


Рис. 1.

Для того чтобы ответить на вопрос пункта б), рассмотрим наш процесс «наоборот» — не как разрезание большого квадрата на маленькие, а как составление из маленьких квадратов (начиная с квадрата 1×1) большого. Перед последним шагом у нас получится квадрат 512×512 , составленный из 28 меньших квадратов. Из трех квадратов, которые мы собираемся прибавить, один попробуем взять чуть больше других — так, чтобы он поглотил маленький квадратик в углу. Один квадрат мы при этом сэкономим, а сторона большого квадрата теперь в 1023 раза больше стороны маленького (рис. 2).

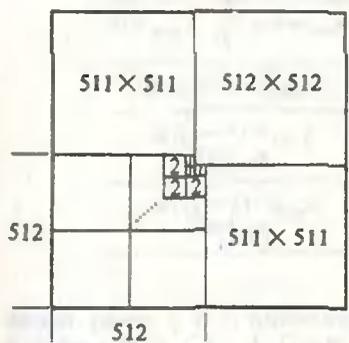


Рис. 2.

Задача решена, однако естественно возникает вопрос — каким же должно быть «наилучшее» разбиение, точнее:

при каком максимальном n квадрат $n \times n$ можно разрезать на k квадратов, минимальный из которых имеет размеры 1×1 ?

Автор собрал «коллекцию» рекордных разбиений, среди которых есть, в частности, разбиение квадрата 1121×1121 на 27 квадратов. Идеи, используемые при построении подобных разбиений, достаточно интересны, и мы надеемся вернуться к этой теме на страницах журнала, познакомившись с письмами читателей.

С. Елисеев

Задачник „Квант“

M1204*. На плоскости заданы точки A, B, C — центры трех кругов. Каждый круг равномерно раздувается (радиус увеличивается с одинаковой для всех кругов скоростью). Как только два круга касаются друг друга, они «лопаются» — их радиусы уменьшаются до 0 — и начинают расти снова. Верно ли, что если расстояния AB, BC, CA — целые числа, то этот процесс будет периодическим? Изучите, как может развиваться этот процесс, если треугольник ABC а) равносторонний; б) равнобедренный; в)* прямоугольный со сторонами 3, 4, 5. Начальное состояние может быть произвольным (не только «нулевым»).

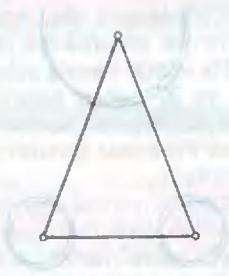


Рис. 1.

Будем рассматривать общий случай: исходные радиусы пузырей произвольны.

а) Треугольник ABC равносторонний. После первого хлопка радиусы двух пузырей будут равны нулю. При втором хлопке лопнут все три пузыря. Затем процесс будет периодически повторяться.

б—1) Треугольник ABC равнобедренный, основание меньше боковой стороны. Тогда при первом или втором хлопке лопнут два пузыря, центры которых лежат в основании треугольника. Далее их радиусы будут равны (рис. 1). Вскоре лопнут одновременно все три пузыря, после чего начнется периодический процесс. Количество хлопков в периоде (цикле) зависит от отношения длин боковой стороны и основания.

Теперь рассмотрим с более общих позиций оставшиеся случаи: б—2) (основание больше боковой стороны) и в). Мы увидим, что в этих случаях процесс, как правило, не будет периодическим.

Обозначим длины отрезков BC, AC и AB через a, b и c соответственно. Пусть для определенности $a \leq b < c$. (Вариант $b = c$ мы уже рассмотрели.) Заметим, что пузыри с центрами в точках A и B (короче: пузыри A и B) могут соприкоснуться разве лишь в самом начале процесса. После этого в каждом хлопке участвует пузырь C . Таким образом, конкретное значение величины c не играет никакой роли (лишь бы выполнялось условие $b < c$). Понятно также, что важны не сами по себе длины a и b , а их отношение $r = b/a$. Поэтому будем в дальнейшем рассматривать треугольник ABC с боковыми сторонами $BC = 1, AC = r \geq 1$ и основанием $AB > r$.

Обозначим через x и y радиусы пузырей A и B сразу после произвольного хлопка. Одна из этих двух величин заведомо равна нулю. Каким будет следующий хлопок, зависит от того, что больше — длина стороны, противоположающей уцелевшему пузырю, или разность между другой боковой стороной и радиусом этого пузыря. Таким образом, преобразование величин x и y происходит по правилу, указанному в таблице 1.

Таблица 1

	Текущее состояние	Преобразование
1	$y = 0, r - x > 1$	$x_{\text{нов}} = x + \frac{1}{2}, y_{\text{нов}} = 0$
2	$y = 0, r - x = 1$	$y_{\text{нов}} = 0, x_{\text{нов}} = 0$
3	$y = 0, r - x < 1$	$y_{\text{нов}} = (r - x)/2,$ $x_{\text{нов}} = 0$
4	$x = 0, 1 - y < r, y \neq 0$	$x_{\text{нов}} = (1 - y)/2,$ $y_{\text{нов}} = 0$

Здесь $x_{\text{нов}}$ и $y_{\text{нов}}$ — новые значения x и y сразу после очередного хлопка. Вариант $x = 0, 1 - y \geq r$ не вошел в таблицу, так как он невозможен при $r > 1$, а в случае

Задача «Кванта»

$r=1$ возможен лишь второй вариант $x=0$, $1-y=r$ (т. е. $y=0$), который описывается строкой 2.

Изучение таблицы показывает, что из состояния 3 (и только из него) мы всегда попадаем в состояние 4. Поэтому строки 3 и 4 можно объединить в одну (помня, что ей соответствует два хлопка). Теперь рассмотрение сосредоточивается на состояниях с $y=0$ (см. таблицу 2).

Таблица 2

	Состояние	Преобразование	Число хлопков
1	$x < r-1$	$x_{\text{нов}} = x + \frac{1}{2}$	1
2	$x = r-1$	$x_{\text{нов}} = 0$	1
3	$x > r-1$	$x_{\text{нов}} = (2-r+x)/4$	2

Таким образом, последовательность значений переменной x , фиксируемых в моменты хлопков пузырями B и C , определяется рекуррентно по формуле $x_{\text{нов}} = f(x)$, где функция f определена на интервале $[0; r]$ в соответствии с таблицей 2:

$$f(x) = \begin{cases} x+1/2, & \text{если } x < r-1, \\ 0, & \text{если } x = r-1, \\ (2-r+x)/4, & \text{если } x > r-1. \end{cases}$$

Для случая $r=1$ (пункт б—2) задачи график функции f приведен на рисунке 2. Из рисунка видно, что итерационный процесс периодичен при исходных значениях $x=0$ и $x=\frac{1}{3}$ (в периоде соответственно один двойной хлопок или два одинарных). В остальных случаях процесс стремится к «устойчивому» состоянию $x=\frac{1}{3}$, и тем самым он *непериодичен*.

Поскольку исходные расстояния a , b и c (при сделанных предположениях $a=b < c$) вполне могут быть целыми, ответ на первый вопрос задачи отрицательный.

Для пункта в) r равно $4/3$. График соответствующей функции f изображен на рисунке 3. На графике выделен единственный цикл, включающий 5 хлопков. Конкретные значения чисел x_1 , x_2 , x_3 (см. рис. 2) могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{x_2}{4} + \frac{1}{6} \\ x_1 = \frac{x_3}{4} + \frac{1}{6} \end{cases}$$

Они равны: $x_1 = \frac{23}{90}$, $x_2 = \frac{34}{45}$, $x_3 = \frac{16}{45}$.

Рассмотрев несколько случаев выбора исходного значения x , нетрудно показать, что любая «траектория» процесса приближается к описанному циклу. Если,

Задачник "Квант"

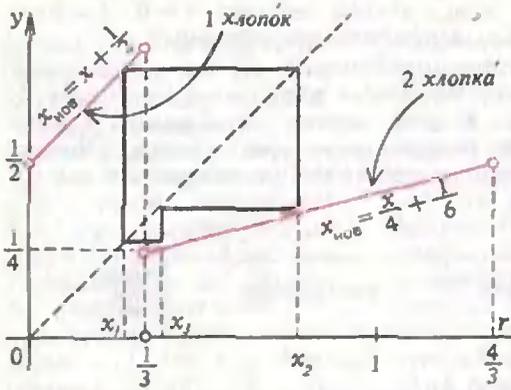


Рис. 2.

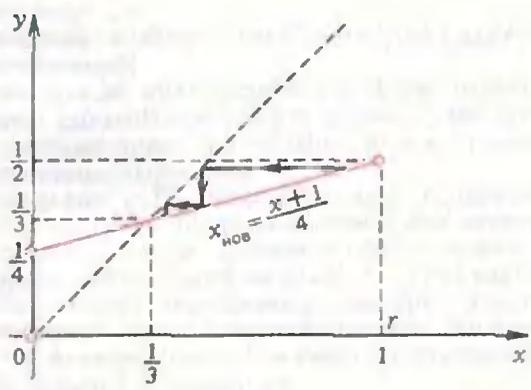


Рис. 3.

скажем, $x = x_1 + \epsilon$, где ϵ достаточно мало, то на следующем шаге $b = f(x_1 + \epsilon) = x_2 + \epsilon$, затем $x = f(x_2 + \epsilon) = x_3 + \frac{1}{4}\epsilon$, после чего $x = f(x_3 + \frac{1}{4}\epsilon) = x_1 + \frac{1}{16}\epsilon$. Таким образом, разность $x - x_1$ уменьшается за 5 хлопков в 16 раз, и процесс быстро приближается к «предельному циклу».

Вспомним, что в начале решения мы разделили все линейные размеры на a (в данном случае — на 3). С учетом этого ответ для пункта в) можно сформулировать так: если в момент первого касания пузырей B и C радиус пузыря A равен $\frac{23}{30}, \frac{34}{15}$ или $\frac{16}{15}$, то процесс будет периодичным; иначе — нет.

Аналогичным образом может быть рассмотрен и общий случай (произвольный треугольник). Хотя технические трудности здесь резко возрастают, принципиально новых типов поведения процесса не обнаруживается. Для случая четырех и более пузырей ответ (даже в качественной форме) неизвестен.

С. Фомин

М1205. Мальчик и девочка играют в такую игру: мальчик рисует на плоскости не налегающие друг на друга многоугольники, а девочка их раскрашивает. Если два многоугольника имеют общий отрезок стороны, то они должны раскрашиваться в разные цвета. Какого наименьшего числа цветов заведомо хватит девочке, чтобы следовать этим правилам,

Назовем многоугольник M *соединимым* с подобным ему многоугольником M_1 , если можно построить цепочку подобных им многоугольников, начинающуюся с M и кончающуюся M_1 , в которой соседние многоугольники соприкасаются по отрезку. Достаточно научиться раскрашивать только совокупность соединимых между собой многоугольников (несоединимые соприкасаться не могут).

а) Ответ: хватит двух цветов. Все равносторонние треугольники, соединимые с данным треугольником Δ , будут либо одинаково повернуты с Δ (как Δ_1 на рисунке 1), либо повернуты на 180° относительно Δ (как Δ_2 на рисунке 1). Треугольнички первого типа красятся одним цветом, второго — другим. Тогда одно-

Задачник „Кванта“

если мальчик рисует только
 а) равносторонние треугольники;
 б) равнобедренные прямоугольные треугольники;
 в) одинаковые квадраты?

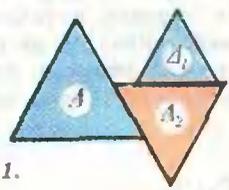


Рис. 1.

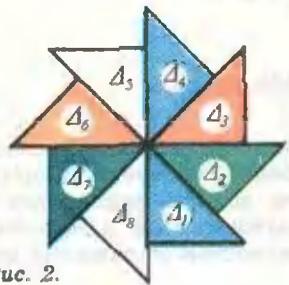


Рис. 2.

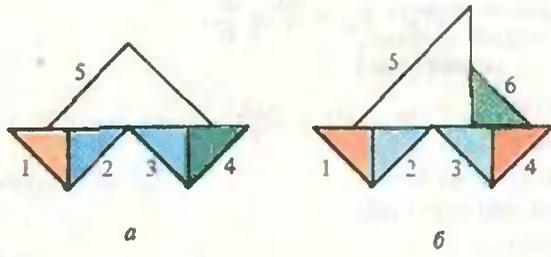


Рис. 3.

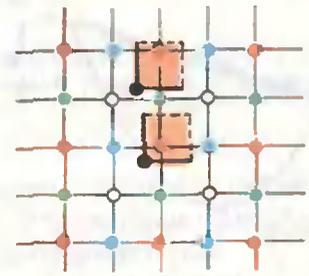


Рис. 4.

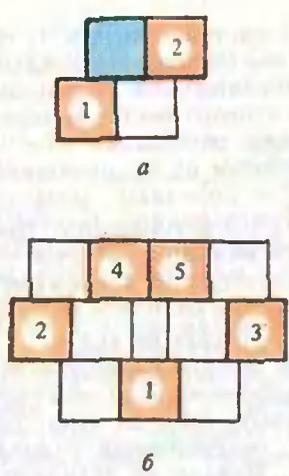


Рис. 5.

цветные треугольники всегда будут одинаково повернуты и не могут соприкасаться.

б) Ответ: хватит четырех цветов. Любой равнобедренный прямоугольный треугольник, соединенный с данным треугольником Δ_1 , будет одинаково повернут с одним из 8 треугольников $\Delta_1, \dots, \Delta_8$ на рисунке 2. Ясно, что если красить треугольник, одинаково повернутый с Δ_1 , одним цветом с Δ_1 , то одноцветные треугольники соприкоснуться не смогут. Таким образом, четырех цветов девочке будет достаточно. Покажем, что трех цветов не хватает. Пусть сначала рисуются треугольники 1—4 (рис. 3). Если покрасить их тремя цветами, то следующим нужно нарисовать треугольник 5 (рис. 3, а) — для него понадобится четвертый цвет. Если же треугольники 1—4 будут окрашены двумя цветами, то для треугольника 5 (рис. 3, б) нужен будет третий, а для треугольника 6 — четвертый цвет.

в) Ответ: хватит четырех цветов. Совокупность попарно соединимых многоугольников в этом случае состоит из квадратов с параллельными сторонами. Рассмотрим решетку, линии которой параллельны сторонам этих квадратов, а шаг равен длине стороны квадрата.

Раскрасим ее узлы в четыре цвета, как показано на рисунке 4. Чтобы определить, каким цветом надо красить очередной квадрат, выбросим из его границы верхнюю и правую стороны. Оставшийся «обструганный» квадрат всегда содержит ровно один узел решетки — цвет этого узла мы и возьмем. Очевидно, что «обструганные» квадраты, содержащие одноцветные узлы, соприкасаться не могут. Значит, правило игры будет соблюдено.

Если бы у девочки было только три краски, то квадраты 1 и 2 на рисунке 5, а пришлось бы окрашивать одинаково, а значит, на рисунке 5, б пары квадратов 1 и 2, 1 и 3, 2 и 4, 3 и 5 — тоже. Но квадраты 4 и 5 должны быть разноцветными. Следовательно, для раскраски квадратов на рисунке 5, б требуется не менее четырех цветов.

Предлагаем доказать, что в игре с квадратами произвольных размеров никакого конечного числа цветов девочке не хватит. Подумайте, сколько цветов понадобится ей в игре с равными правильными шестиугольниками.

Г. Кондаков

Задачник „Кванта“

Ф1213. Однородная нерастяжимая веревка подвешена за концы в точках A и B , находящихся на разной высоте (рис. 1). Натяжение веревки в точке A равно T_A . Найти натяжение веревки в точке B , если она находится на h выше точки A . Масса веревки m , длина l .

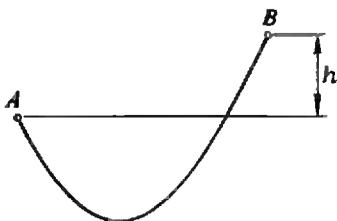


Рис. 1.

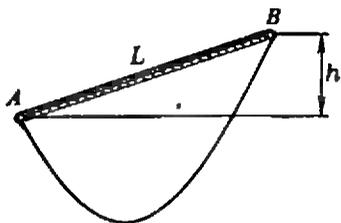


Рис. 2.

Ф1214. Вдогонку снаряду, выпущенному горизонтально с горы высотой $h = 1$ км со скоростью $v_0 = 500$ м/с, через время $t_0 = 1$ с выпущен второй снаряд. Какой минимальной начальной скоростью он должен обладать и под каким углом вылететь, чтобы догнать первый снаряд?

Приведем два решения этой задачи.

1) Представим, что у нас есть некоторый запас веревки в точке A . Выпустим веревку на малую длину Δl в точке A и выберем ту же длину Δl в точке B . Очевидно, что при этом будет совершена работа, равная $(T_B - T_A)\Delta l$, где T_B и T_A — силы натяжения веревки в точках B и A соответственно. Эта работа затрачивается на изменение потенциальной энергии участка веревки массой $m\Delta l/l$ при подъеме на высоту h . Согласно закону сохранения энергии,

$$mg \frac{\Delta l}{l} h = (T_B - T_A)\Delta l,$$

откуда получаем

$$T_B = T_A + \frac{mgh}{l}.$$

2) Соединим точки A и B гладкой наклонной плоскостью длиной L и замкнем веревку по этой плоскости (рис. 2). Понятно, что вся веревка должна находиться в равновесии. Участок веревки, лежащий на плоскости, поддерживается в равновесии разностью натяжений веревки в точках B и A :

$$T_B - T_A = \frac{mL}{l} g \frac{h}{L},$$

и

$$T_B = T_A + \frac{mgh}{l}.$$

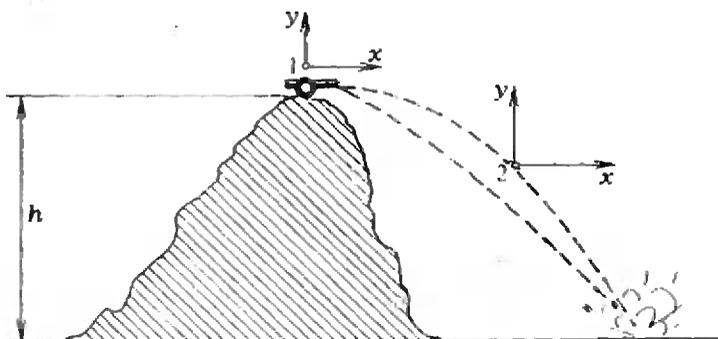
Е. Татарникова

Сначала рассмотрим задачу в системе отсчета 1 , связанной с пушкой (считаем, что оба снаряда выпускаются одной и той же пушкой, расположенной на вершине горы (см. рисунок)). К моменту второго выстрела первый снаряд пройдет по горизонтали расстояние $x_0 = v_0 t_0$, а по вертикали $y_0 = gt_0^2/2$. При этом он будет обладать скоростью, равной $v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt_0)^2}$ и направленной под углом $\alpha = \arctg(gt_0/v_0)$ к горизонту. Представим, что второй снаряд был выпущен со скоростью v_1 под углом α к горизонту. В этом случае после второго выстрела оба снаряда двигались бы, находясь на одном и том же расстоянии $s_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ друг от друга.

Свяжем систему отсчета 2 со вторым снарядом, если бы он двигался так, как мы предположили. В этой системе второй снаряд догонит первый, если он будет приближаться к нему по прямой, соединяющей снаряды, с относительной скоростью v' . Найдем ее величину и направление.

Понятно, что скорость сближения не может быть как угодно малой по величине, ибо время сближения должно быть заведомо меньше времени полета

Задача „Канна“



$t = \sqrt{2h/g}$. Итак,

$$v' \geq \frac{s_0}{t} = s_0 \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Вектор относительной скорости \vec{v}' должен составлять с горизонтом угол α' такой, что

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{y_0}{x_0} = \frac{gt_0}{2v_0}$$

Теперь вернемся снова в неподвижную систему отсчета 1. Здесь проекции искомой скорости \vec{v} должны быть равны

$$v_x = v_0 + v' \cos \alpha', \quad v_y = -gt - v' \sin \alpha',$$

где $v' \geq s_0 \sqrt{g/(2h)}$. Минимальному значению скорости $v' = s_0 \sqrt{g/(2h)}$, при котором встреча снарядов произойдет вблизи поверхности земли, соответствует угол

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}(v_y/v_x)|_{t=t_0} = 0,019 \text{ рад} = 1^\circ 5'$$

отсчитываемый вниз от горизонтали. При этом искомая скорость второго снаряда равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}|_{t=t_0} = 535,1 \text{ м/с.}$$

В. Никифоров

Ф1215. В теплоизолированный сосуд с нагревателем внутри помещены 1 кг льда и 1 кг легкоплавкого вещества, не смешивающегося с водой. Сначала температура в сосуде была равна -40°C , затем включили нагреватель, потребляющий постоянную мощность. Зависимость температуры в сосуде от времени показана на рисунке. Удельная теплоемкость льда $c_\lambda = 2 \times$

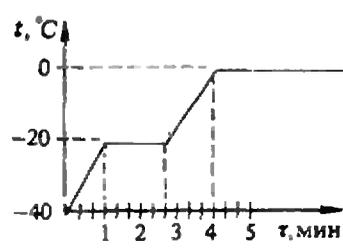
Наличие на графике «плато» (горизонтального участка), соответствующего температуре -20°C , свидетельствует о том, что именно при этой температуре и происходит плавление неизвестного вещества. (Очевидно, что «плато» при 0°C соответствует процессу таяния льда.)

Как видно из графика, для нагрева содержимого сосуда от начальной температуры $t_1 = -40^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = -20^\circ\text{C}$ потребовалось время $\tau_1 = 1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$, при этом от нагревателя было получено количество теплоты, равное $P\tau_1$, где P — мощность нагревателя. Запишем уравнение теплового баланса для этого процесса:

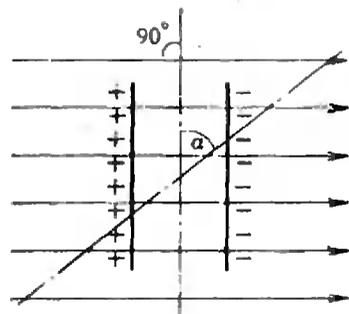
$$(c_\lambda + c)m(t_2 - t_1) = P\tau_1,$$

где $m = 1 \text{ кг}$. Для полного расплавления вещества,

$\times 10^3$ Дж/(кг·К), твердого вещества — $c = 10^3$ Дж/(кг·К). Найдите удельную теплоту плавления вещества и его удельную теплоемкость в расплавленном состоянии.



Ф1216. Плоский заряженный конденсатор внесли в область однородного электрического поля, напряженность которого направлена так, как показано на рисунке. Для этого необходимо было совершить работу A_1 . Затем конденсатор повернули на угол α , совершив при этом работу A_2 . Полагая заданным значение угла α , определить отношение работ A_2/A_1 . Считать, что все собственное поле конденсатора однородно и сосредоточено внутри его объема.



Задача "Квант"

которое длилось $\tau_2 = 5/3$ мин = 100 с, понадобилось количество теплоты

$$m\lambda = P\tau_2.$$

Поделив это уравнение на предыдущее, найдем искомую удельную теплоту плавления неизвестного вещества:

$$\lambda = (c_n + c)(t_2 - t_1)(\tau_2/\tau_1) = 10^5 \text{ Дж/кг.}$$

Дальнейший нагрев смеси льда и расплава вещества до температуры $t_3 = 0^\circ\text{C}$ проходил в течение промежуточного времени $\tau_3 = 4/3$ мин = 80 с. Уравнение теплового баланса для этого процесса запишем в виде

$$(c_n + c')m(t_3 - t_2) = P\tau_3,$$

где c' — удельная теплоемкость вещества в расплавленном состоянии. Сравнивая первый и третий этапы процесса, найдем

$$c' = (c_n + c) \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} \frac{\tau_3}{\tau_1} = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг·К).}$$

А. Буздин

Обозначим через W_0 энергию внешнего однородного поля в отсутствие конденсатора, а через $W_n = \epsilon_0 E_n^2 V/2$ — собственную энергию заряженного конденсатора (здесь E_n — напряженность поля, созданного зарядами на обкладках конденсатора, V — объем конденсатора).

До внесения конденсатора во внешнее поле полная энергия системы была

$$W = W_0 + W_n.$$

После внесения конденсатора (в положение, изображенное на рисунке) энергия системы стала

$$W_1 = (W_0 - \epsilon_0 E_0^2 V/2) + \epsilon_0 (E_0 + E_n)^2 V/2,$$

где E_0 — напряженность внешнего поля. Совершенная при этом работа A_1 равна изменению энергии системы:

$$A_1 = W_1 - W = \epsilon_0 E_0 E_n V.$$

В результате поворота конденсатора на угол α энергия системы изменится до величины

$$W_2 = (W_0 - \epsilon_0 E_0^2 V/2) + \epsilon_0 |\vec{E}_0 + \vec{E}_n|^2 V/2 = (W_0 - \epsilon_0 E_0^2 V/2) + \epsilon_0 E_0^2 V/2 + \epsilon_0 E_n^2 V/2 + \epsilon_0 E_0 E_n V \cos \alpha,$$

а совершенная при этом работа A_2 будет равна

$$A_2 = W_2 - W_1 = \epsilon_0 E_0 E_n V (\cos \alpha - 1).$$

Искомое отношение работ

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\epsilon_0 E_0 E_n V (\cos \alpha - 1)}{\epsilon_0 E_0 E_n V} = \cos \alpha - 1.$$

Задачник „Кванта“

Приведенное решение является приближенным: мы пренебрегаем перераспределением зарядов на пластинах конденсатора при его повороте на угол α .

В. Можеев

Ф1217*. В последнее время широко распространена получила новая конструкция контактных линз. (Контактные линзы используются для коррекции зрения вместо очков. Они представляют собой очень тонкие пластинки, одеваемые непосредственно на глазное яблоко.) Фокусировка света такой линзой основана на его волновой природе. Для этого вокруг центральной круговой прозрачной области линзы наносятся концентрические кольца с чередующейся прозрачностью (непрозрачное — прозрачное — и т. д.).

а) Определить диаметр центральной прозрачной области.

б) Определить диаметры двух ближайших к центру линзы прозрачных колец при условии, что фокусное расстояние линзы равно $F=25$ см.

в) Зная, что контактная линза дает четкое изображение не только удаленных предметов (в фокальной плоскости), но также и точечного объекта, расположенного на конечном расстоянии от линзы, найти это расстояние.

Считать для определенности, что длина световой волны равна $\lambda=500$ нм, что линза плоская, очень тонкая, а кольца очень узкие.

Такого рода линзы, выполненные, например, в виде прозрачной пластинки с нанесенными на нее черными кольцами, используются уже давно. Их называют зонными пластинками. Если направить на такую пластинку параллельный пучок света (на волновом языке — плоскую волну), то он окажется сфокусированным — поместим экран на нужном расстоянии от пластинки, и на экране получим ярко освещенную точку. Поясним сказанное.

Возьмем прозрачную пластинку, поставим на расстоянии F от нее экран, выбрав на нем точку — будущий фокус нашей линзы, и найдем расположение непрозрачных колец, дающих нужный нам эффект фокусировки света.

Так как расстояния от нашего фокуса до различных участков пластинки не одинаковы, колебания от них будут приходить в различных фазах. Волны, идущие от одних участков, будут усиливать волну, распространяющуюся от ближайшей к фокусу точки пластинки, от других — ослаблять эту волну. Понятно, что усиление, т. е. фокусировка, света будет происходить в том случае, если волны приходят в одинаковых фазах, а ослабление — если в противоположных фазах. (Заметим, что обычная линза ведет себя точно так же — волны от разных участков линзы приходят в ее фокус в одинаковых фазах и усиливают друг друга. А в других точках происходит соответствующее ослабление света.) Теперь нам остается найти расположение не нужных нам участков и сделать их непрозрачными, а остальные участки — оставить прозрачными.

Разность хода лучей, идущих от центра пластинки и от точки на расстоянии x от оси, равна (рис. 1 на с. 42)

$$l = \sqrt{F^2 + x^2} - F.$$

При $x \ll F$ можно упростить:

$$l = F\sqrt{1 + x^2/F^2} - F = x^2/(2F).$$

Непрозрачными должны быть места, для которых разность хода (см. рис. 2 на с. 42)

$$(\lambda/4 + n\lambda) < l < (3\lambda/4 + n\lambda),$$

или

$$\sqrt{\lambda F(1 + 4n)/2} < x_n < \sqrt{\lambda F(3 + 4n)/2}.$$

Первое кольцо ($n=0$) имеет внутренний радиус $r_0 = \sqrt{\lambda F/2} = 0,25$ мм, наружный $r'_0 = \sqrt{3\lambda F/2} = 0,43$ мм, второе — 0,56 мм и 0,66 мм и т. д.

Итак, а) диаметр центральной прозрачной области равен

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп "Кванта"



А так ли хорошо знакома вам

ВЫТАЛКИВАЮЩАЯ СИЛА ?

Герой этого выпуска «Калейдоскопа» — несомненно, Архимед. Древнегреческий ученый, с законом которого вы знакомитесь едва ли не в самом начале изучения физики, заложил научные основы гидростатики. Они были развиты лишь в XVI—XVII столетиях Стевином, Галилеем, Паскалем, а окончательную формулировку получили уже в XIX веке. Кстати, именно труды Архимеда оказали решающее влияние на становление Галилея как ученого. О практическом же применении результатов архимедовых исследований и говорить не приходится, они хорошо вам известны — от кораблестроения до воздухоплавания. Однако наглядность и простота многих задач на закон Архимеда — кажущаяся, порой они требуют серьезных размышлений. Попробуйте свои силы, не забывая, что надежным помощником вам будет эксперимент — а для проведения опытов наступившее лето дает столько возможностей!

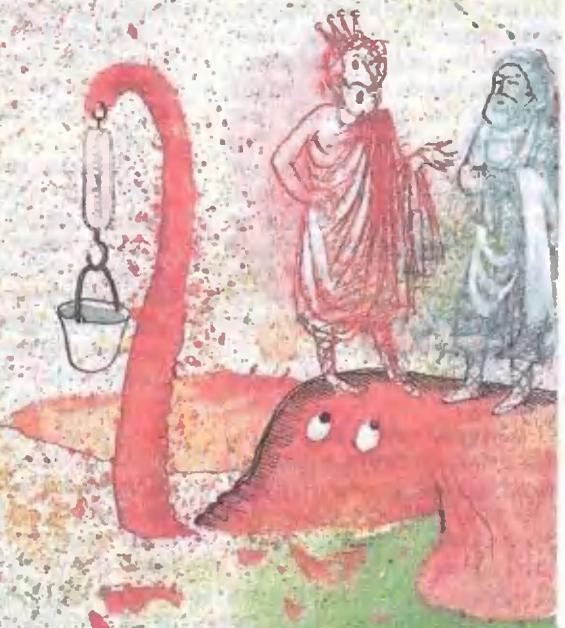
- Вопросы и задачи**
1. В сосуде с водой плавает в вертикальном положении брусок. Как изменится уровень воды в сосуде, если брусок перейдет в горизонтальное положение?
 2. Однажды царь спросил у Архимеда, сколько нужно взять золота, чтобы его масса была равна массе слона. Как Архимед справился с задачей?
 3. На крюке динамометра висит ведро. Изменится ли показание

4. Человек, неопиший автомобильную камеру, решил облегчить пошусу. Для этого он накачал камеру, увеличив ее объем и рассчитывая использовать выталкивающую силу воздуха. Достиг ли он цели?
5. Что тяжелее — тонна дерева или тонна железа?
6. Изменится ли уровень воды в сосуде,

Тела более легкие, чем жидкость, опущенные в эту жидкость насильственно, будут выталкиваться вверх...

Тела более тяжелые, чем жидкость, опущенные в эту жидкость, будут погружаться, пока не будут выткнуты до самого низа...

Архимед. О плавающих телах



7. Стальной шарик плавает в ртути. Изменится ли погружение шарика в ртуть, если сверху долить воды?
8. Рыбак для хранения живой рыбы сделал в своей лодке ящик с отверстием в дне лодки. Не потонет ли она, если спустить ее на воду?

9. В одном из сосудов с водой плавает кусок льда с пузырьком воздуха, в другом — с сморщенным стальным шариком. Изменятся ли уровни воды в сосудах, когда лед растает?

10. Одна из бутылок наполнена водой, другая — ртутью. Потонет ли первая бутылка, если ее опустить в воду? Потонет ли вторая, если ее опустить в ртуть?

11. Что произойдет с уровнем воды в бассейне, если из лодки, плывающей в нем, бросить в него камень?

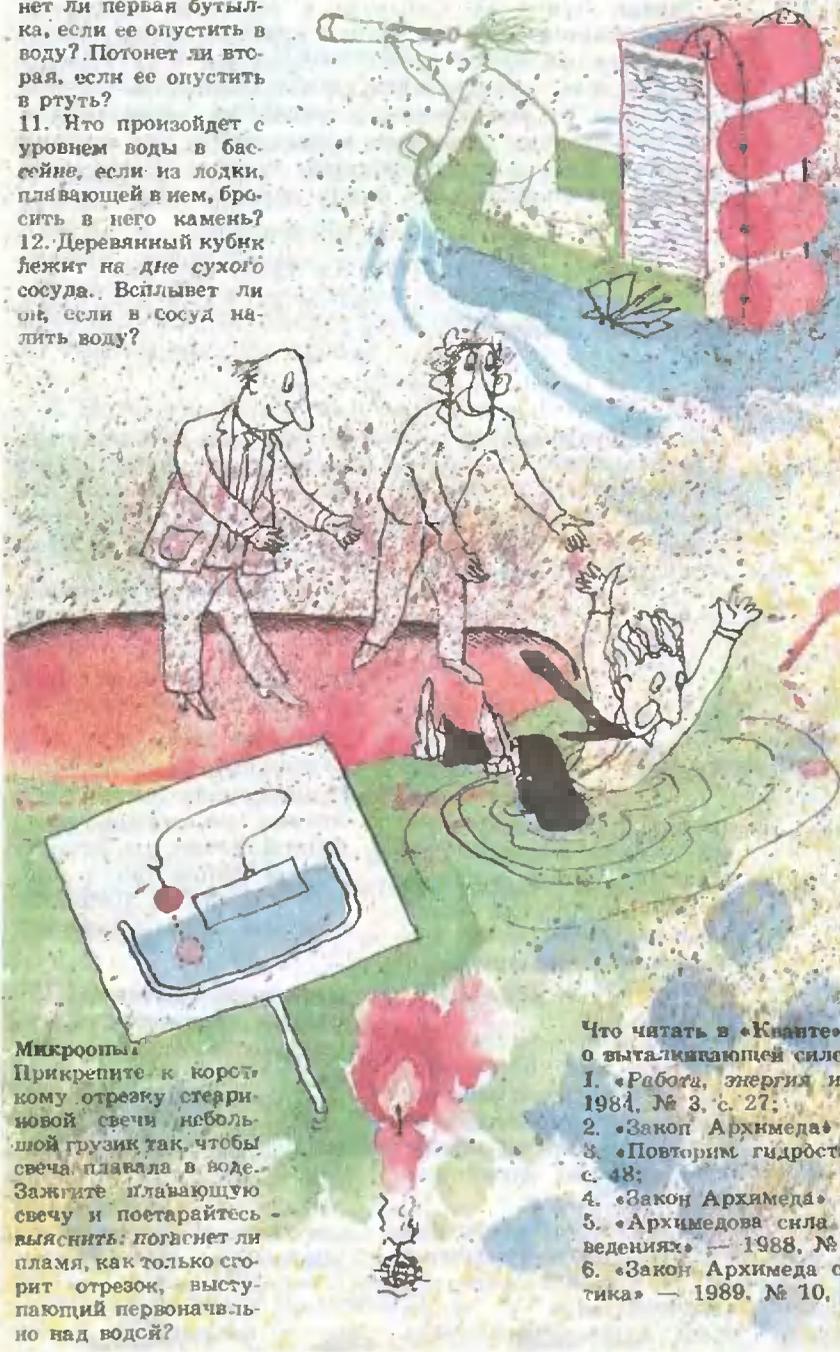
12. Деревянный кубик лежит на дне сухого сосуда. Выплывет ли он, если в сосуд налить воду?

Любопытно, что...
...история, связанная с короной царя Гиерона, добавила к прочим заслугам Архимеда почетное звание, по-видимому, первого известного нам ученого-детектива.

...в районах впадения рек в море встречаются бревна, длительное время плавающие внутри воды на удивительном расстоянии от ее поверхности. Объясняется это меньшей, чем у морской,

плотностью пресной воды. На разделе этих вод может оказаться древесина с промежуточной плотностью.

...на закон Архимеда многократно опирались авторы проектов «вечных» двигателей. Подумайте, кстати, почему не мог действовать «двигатель», изображенный на рисунке.



...задачу под номером 11 как-то предложили знаменитым физикам Дж. Гамову, Р. Оппенгеймеру и Ф. Блоху, и... все трое ответили неверно.

...до сих пор не обнаружен автор популярной школьной частушки:
После сытного обеда
По закону Архимеда
Полагается поспать...
Хорошо бы узнать, какие физические соображения позволили автору связать выталкивающую силу с послеобеденным сном?

Микроопыт.
Прикрепите к короткому отрезку стearиновой свечи небольшой грузик так, чтобы свеча плавала в воде. Зажгите плавающую свечу и постарайтесь выяснить: погаснет ли пламя, как толькогорит отрезок, выступающий первоначально над водой?

Что читать в «Кванте» о выталкивающей силе
1. «Работа, энергия и архимедова сила» — 1984, № 3, с. 27;
2. «Закон Архимеда» — 1984, № 9, с. 30;
3. «Повторим гидростатику» — 1985, № 2, с. 48;
4. «Закон Архимеда» — 1987, № 1, с. 29.
5. «Архимедова сила в литературных произведениях» — 1988, № 5, с. 41;
6. «Закон Архимеда с точки зрения математика» — 1989, № 10, с. 44.

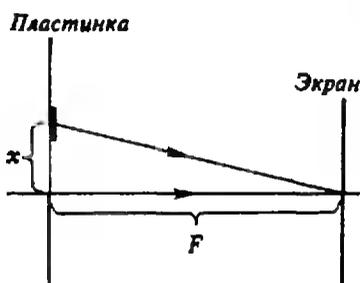


Рис. 1.

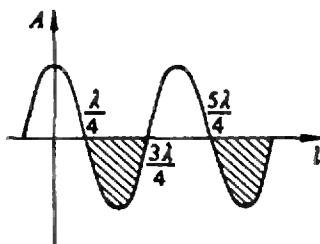


Рис. 2.

Задачник „Квант“

$$d_0 = 2r_0 = 2\sqrt{\lambda F/2} = 0,5 \text{ мм};$$

б) наружные диаметры двух ближайших к центру прозрачных колец равны соответственно

$$d_1 = 2\sqrt{5\lambda F/2} = 1,1 \text{ мм},$$

$$d_2 = 2\sqrt{9\lambda F/2} = 1,5 \text{ мм}.$$

Теперь пункт в). Сходство с обычной линзой не исчерпывается тем, что зонная пластинка фокусирует параллельный пучок лучей. Рассмотрим точечный источник света, находящийся на оси пластинки на расстоянии a от нее. Поставим экран на расстоянии b с другой стороны пластинки и посмотрим, при каком b разность хода соответствующих лучей удовлетворяет такому же условию, как и для параллельного пучка:

$$\begin{aligned} l &= (\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + x^2}) - (a + b) = \\ &= a(1 + x^2/(2a^2)) + b(1 + x^2/(2b^2)) - a - b = \\ &= x^2(1/(2a) + 1/(2b)) = x^2/(2F). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

Таким образом, если поставить экран на расстоянии b , определяемом полученной формулой, то пучок будет сфокусирован. Но эта формула — известная формула обычной тонкой линзы. Теперь по заданным свойствам глаза можно определить точку, изображение которой получится на глазном дне.

А. Зильберман

„Квант“ улыбается

Сказки

Точка зрения на плоскость

В плоскости проходило много линий — и прямые, и кривые, и ломаные. И у всех были свои точки зрения на мир.

— Все в мире делится на возвышенное и униженное, — резала правду одна прямая.

— Нет, — отрубил другая, — все в мире — или правое, или неправое.

— Не ссорьтесь, девочки, — плавно изогнувшись,

вмещивалась кривая, — все в мире диалектично: здесь ты правый, а тут — унижен.

Ломаные свое мнение высказывать стеснялись, а окружность формулировала так:

— Весь мир — или внутренний, или остальной. Ну, об остальном мне говорить неинтересно, зато мой внутренний мир очень богат. Только такие все сторонние, как я...

— Плоские личности так много болтают, — прерывала ее спираль, — а что касается мира — то он всего лишь прослойка

между витками, чтоб они не перепутались...

И никто не спрашивал мнения маленькой, незаметной точки — единственной общей точки плоскости и линии, проходившей вне этой плоскости.

Всемирное тяготение

Раньше спутников у Земли не было. А когда спутник появился, им оказалась маленькая, беззащитная Луна.

И каждый метеорит, каждая космическая пылинка ранили ее — ведь у Луны нет атмосферы, которая могла бы ее защитить.

(Окончание см. на с. 76)

„Клант” для младших школьников

Задачи

1. Незнайка хвастал своими выдающимися способностями умножать числа в уме. Чтобы его проверить, Знайка предложил ему написать какое-нибудь число, перемножить его цифры и сказать ему результат. «2310» — немедленно выпалил Незнайка, лишь успев записать число. «Не может быть» — ответил, подумав, Знайка. Как он обнаружил ошибку, не зная исходного числа?

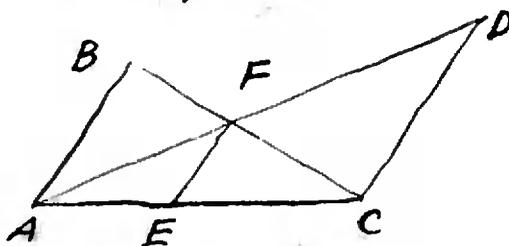
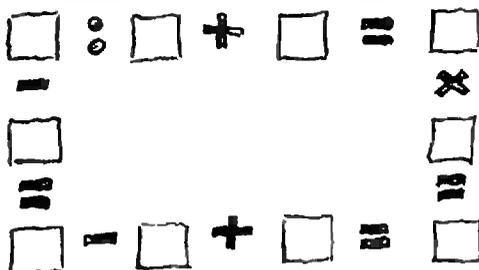
2. Впишите в клеточки рисунка все числа от 1 до 10 так, чтобы выполнялись указанные равенства.

3. На шхуне капитана Врунгеля «Победа» (а потом «Беда») был четырехзначный номер. Номер был примечателен тем, что являлся квадратом целого числа. Во время шторма смыло первую цифру, и номер стал кубом целого числа. После следующего шторма смыло следующую цифру, и номер стал четвертой степенью целого числа. Какой номер был на шхуне?

4. Отрезки AB , EF и CD , изображенные на рисунке, параллельны. Докажите, что $\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$.

5. На дискотеку собрался почти весь класс — 22 человека. Рената танцевала с семью мальчиками, Ширинат — с восемью, Вера — с девятью и так далее до Ирины, которая танцевала со всеми мальчиками. Сколько мальчиков было на дискотеке?

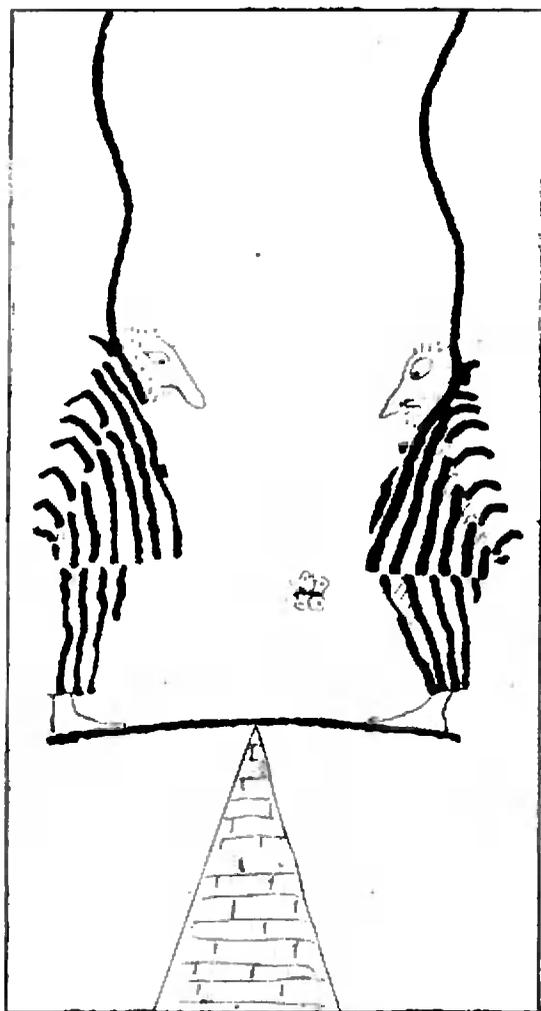
Эти задачи нам предложили А. Савин, Л. Мочалов, ученик 11 класса ФМШ при ЕРГУ Арам Акопян и ученик 11 класса Яракской средней школы ДАССР Гисмат Магомедов.



«ТЫ — МНЕ, Я — ТЕБЕ»

или дилемма заключенного

(ПО Д. ХОФСТАДТЕРУ*)



После уроков вы с приятелем заигрались в школьном коридоре. И вдруг — «бам!» — со звоном разбилось стекло, некстати попавшее вам на пути. Свидетелей не было, и вы, не сговариваясь, бросились вниз по лестнице в сторону раздевалки. И, как на зло, наткнулись прямо на директора школы.

С низко склоненными головами вы сидите в кабинете директора и ждете, что он вам скажет. «Я слышал, как разбилось стекло, и думаю, что его разбили вы. Если вы оба откажетесь признать свою вину, получите по замечанию в дневник за то, что бегали по школе. Если один из вас признается, а другой будет отрицать, что разбил стекло, я прощу того, кто признался, а другому придется расстаться с нашей школой. Наконец, если признаетесь оба, придется поставить вам «двойку» в четверти за поведение. Понятно?»

«Понятно», — отвечаете вы хором: и директор разводит вас по разным комнатам, чтобы вы обдумали его предложение. Посоветоваться друг с другом вы не можете, и решение придется принимать каждому самостоятельно. Итак: признаваться или отрицать свою вину? Постараемся отвлечься от моральных соображений — предавать товарища, конечно, не годится, — и будем считать, что вы заинтересованы только в том, чтобы отделаться как можно легче. Вы рассуждаете так: «Если мой приятель решит сознаться, то сознаваться нужно и мне — иначе меня выгонят из школы. Если он решит не сознаваться, то мне все равно нужно признаться — тогда меня вообще не накажут. Как бы то ни было — нужно сознаваться!» И вы уверенно идете к директору, чтобы рассказать, как вы разбили стекло. Но ваш приятель рассуждал точно так же и тоже пришел к выводу, что нужно признать свою вину. В результате — у обоих «двойка» по поведению. А ведь если бы оба не сознались, то отделались бы всего-то замечанием в дневнике. Получается парадоксальная ситуация — совершенно правильные рассуждения приводят к нежелательному исходу.

Это и есть знаменитый парадокс, известный как «дилемма заключенного» (обычно рассказывают историю о двух заключенных, сидящих в разных камерах, а роль директора играет судья). Этому парадоксу посвящены многочисленные статьи философов и математиков — специалистов по логике и теории игр. Но убедитель-

*) «Scientific American», май 1983 года

ного решения, похоже, так и нет.

Если вам кажется, что вопрос этот не очень-то серьезный — какое нам дело до каких-то заключенных! — подумайте еще об одном варианте этого парадокса. На этот раз в нем участвуют две враждующие державы, которые могут нанести противнику ракетно-ядерный удар. Если наносят обе страны одновременно, обе несут огромный ущерб. Если одна сторона нападает неожиданно, а вторая к ответу не готова, то начавший войну первым добивается победы. Наконец, если обе страны отказываются от нападения, то обе несут незначительный ущерб: продолжается гонка вооружений и военное противостояние. Неужели и в этом случае логика подсказывает выбор агрессивного поведения? Об этом даже подумать страшно...

Парадокс заключенного можно сформулировать на языке теории игр. Играют двое, и оба одновременно делают один из двух возможных ходов: «признаться» (или коротко «П») или «отрицать» (коротко «О»). Если оба делают ход П, то получают мало; если оба выбирают ход О, то получают больше; если же один игрок делает ход П, а другой О, то первый получает еще больше, а второй не получает ничего. Все это можно описать в виде таблицы.

Таблица

		2-й игрок	
		О	П
1-й игрок	О	(3; 3)	(0; 5)
	П	(5; 0)	(1; 1)

Величины выигрышей (1, 3, 5) выбраны более или менее произвольно. Из таблицы ясно видно, что при любом ходе первого игрока второй игрок получит больше, если сделает ход П, а не ход О — это и есть приведенное выше рассуждение.

В 1979 году ученый из Мичигана Роберт Аксельрод решил исследовать парадокс заключенного с помощью компьютера. Он обратился к ведущим специалистам с предложением провести турнир компьютерных программ в описанную игру. На его при-

зыв откликнулись 14 человек. Турнир был организован так: каждая программа играла 5 серий по 200 игр с другими программами; в том числе и сама с собой. Принципы составления программ могли быть произвольными (например, очередной ход П или О можно просто выбирать случайно), но большинство программ помнили все предыдущие ходы «противника» и выбирали очередной ход, исходя из этого. Авторы программ старались составить их так, чтобы поощрять «сотрудничество» противника (т. е. выбор хода О), и к тому же зарабатывать очки, «предавая».

Результат турнира оказался ошеломляющим: его выиграла самая простая из предложенных программ «Ты — мне, я — тебе», придуманная Анатолием Раппопортом из Торонто. Играет она так:

первый ход в игре — О;

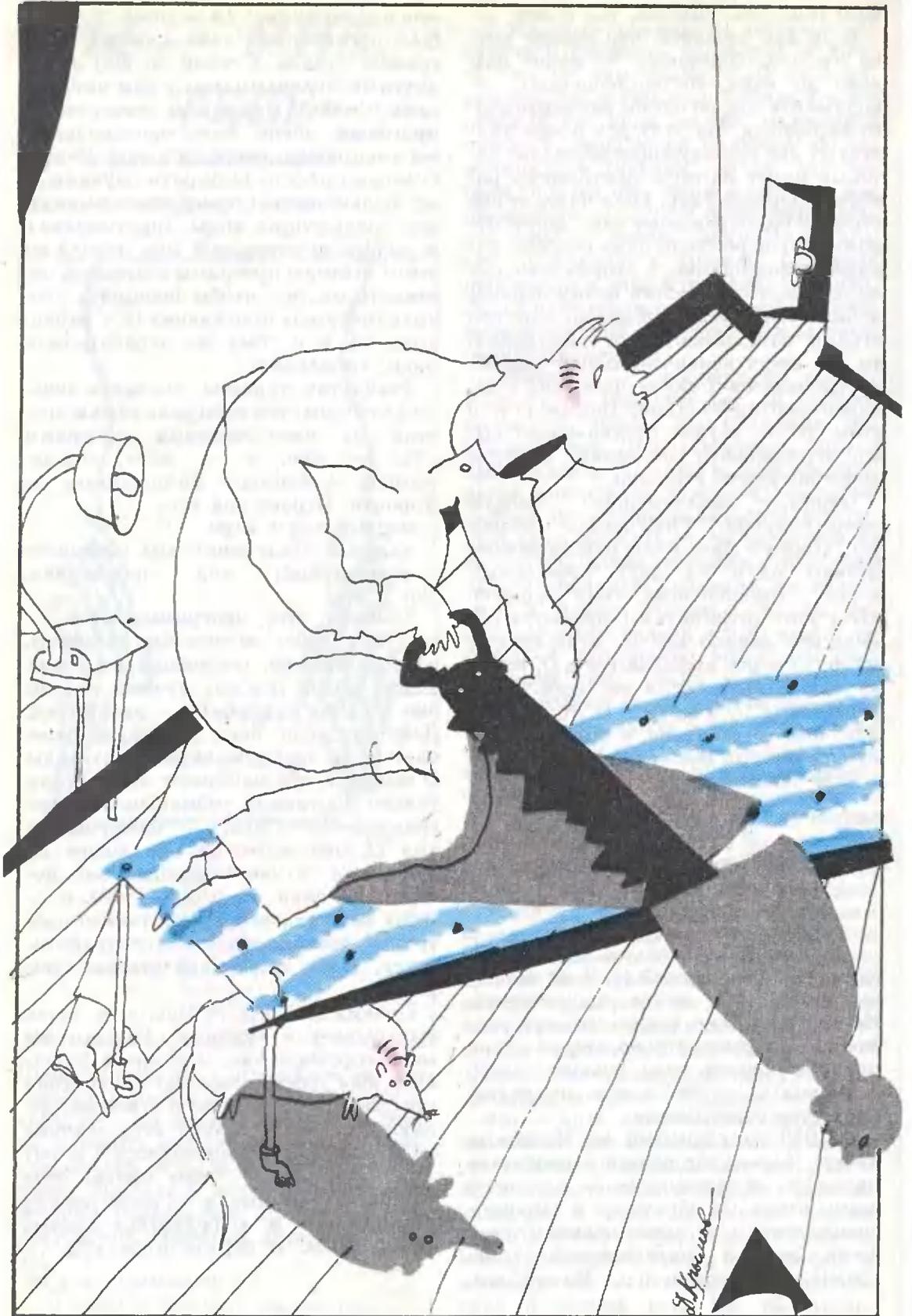
каждый следующий ход повторяет предыдущий ход противника.

Вот и все!

Заметим, что программа «Ты — мне, я — тебе» не способна выиграть ни одной игры, состоящей из серии ходов любой длины; лучшее на что она может надеяться, — это ничья. Действительно, пока противник отвечает на ее «доброжелательные» ходы О своим О, оба набирают очки; а как только противник «обманывает» программу «Ты — мне, я — тебе», сделав ход П, она мстит за это ходом П, в лучшем случае возвращая себе потерянные очки. Но «Ты — мне, я — тебе» не злопамятна: как только противник возвращается к «сотрудничеству», делая ход О, она отвечает тем же.

Почему же «Ты — мне, я — тебе» выигрывает в турнире? Рассмотрим мини-соревнование, в котором участвует еще одна, довольно зловредная программа «Предатель», всегда делающая ход П. Пусть игра состоит из 10 ходов. Всего проводятся 3 игры: «Ты — мне, я — тебе» против себя самой, «Ты — мне, я — тебе» против «Предателя» и «Предатель» против самого себя. В первой игре «Ты —

(Окончание см. на с. 56)



ЦВЕТЫ ДЛЯ ЭЛДЖЕРНОНА

(фантастический рассказ)

Д. КИЗ (США)

20 апр. Я себя очень плохо чувствую. Не так, что мне нужен доктор, а в груди у меня как-то пусто, будто у меня вышибли внутренности, и к тому же еще у меня изжога.

Я не собирался об этом писать, но мне кажется, это все-таки следует сделать, потому что это важно. Сегодня в первый раз я не вышел на работу и остался дома.

Вчера вечером Джо Карп и Френк Рейлли пригласили меня на вечеринку. Там было много девушек и несколько ребят с фабрики. Я вспомнил, как мне было плохо в прошлый раз, когда я слишком много выпил, и поэтому я сказал Джо, что не хочу ничего пить. Вместо спиртного он дал мне чистую кока-колу. У нее был странный вкус, но я подумал, что это у меня просто неприятный привкус во рту.

Вначале нам было очень весело. Джо сказал, что я должен танцевать с Эллин, и она поучит меня разным па. Я несколько раз упал и никак не мог понять почему, ведь кроме меня и Эллин никто больше не танцевал. И я то и дело спотыкался, потому что все время кто-нибудь вытягивал ногу.

Поднявшись, я увидел на лице Джо такое выражение, что почувствовал что-то странное в животе.

— Да от него просто сдохнуть можно, — сказала одна из девушек.

Все расхохотались.

— Я так здорово не смеялся с того вечера у Магги, когда мы послали его за газетой и смылись, — сказал Френк.

— Нет, вы только на него посмотрите. Какая у него красная рожа.

— Он краснеет. Чарли краснеет.

— Эй, Эллин, что ты сделала с Чарли? Я никогда его таким не видел.

Я не знал, что мне делать, куда себя девать. Все смотрели на меня и смеялись, и я почувствовал себя так, будто стою на гишом. Мне захотелось куда-нибудь спрятаться. Я выбежал на улицу, и меня вырвало. Потом я пошел домой. Странно, как я никогда не замечал, что Джо,

Френку и другим нравилось все время таскать меня за собой для того, чтобы надо мной смеяться. Теперь я понимаю, что это значит, когда они говорят «свалить Чарли Гордона»!

Мне стыдно.

10. отчет о происходящем

21 апреля. Я все еще не вышел на работу. Я попросил миссис Флинн, мою хозяйку, позвонить на фабрику и сказать мистеру Доннегану, что я заболел. Последнее время миссис Флинн очень странно поглядывает на меня, будто она меня боится.

Мне кажется, это хорошо, что я понял, как все надо мной смеются. Я много думал об этом. Это из-за того, что я такой недотепа и даже не замечаю, когда делаю глупости. Люди считают, что это смешно, когда глупый человек не может все делать так, как они.

Во всяком случае теперь я уже понимаю, что с каждым днем становлюсь умнее. Я знаю знаки препинания и могу правильно писать. Мне нравится отыскивать в словаре трудные слова, и я их запоминаю. Теперь я много читаю, и мисс Кинниен говорит, что я читаю очень быстро. Иногда я даже понимаю то, о чем читаю, и это остается в памяти.

Мисс Кинниен сказала, что кроме истории, географии и арифметики я буду учить иностранные языки. Доктор Штраусс дал мне несколько новых лент, чтобы я ставил их перед тем, как ложусь спать.

Сегодня мне значительно лучше, но кажется, я все еще немного сержусь на людей на то, что они всегда надо мной издевались и делали из меня посмешище, потому что я был глуп. Когда я, как говорит доктор Штраусс, поумнею и мой К. И. *) 68 устроится, быть может, я стану таким, как все, и люди будут любить меня и относиться ко мне по-дружески.

Мне не совсем ясно, что такое К. И. Доктор Немюр говорит, что К. И. измеряет степень умственных способностей человека — как весы в аптеке, на которых взвешивают фунты. Но доктор Штраусс не согласился с ним и сказал, что К. И.

Продолжение. См. «Квайт» № 5.

*) К. И. — коэффициент интеллекта. (Примеч. перев.)

вовсе не взвешивает интеллект. Он сказал, что К. И. показывает, насколько можно повысить интеллект, что это вроде цифр на мензурке. По ним видно, сколько еще нужно жидкости, чтобы ее наполнить.

А когда я спросил об этом Берта, который проверяет мой интеллект и наблюдает за Эдджерноном, он сказал, что они оба неправы (только я должен был пообещать, что не передам им его слова). Берт говорит, что К. И. измеряет множество различных вещей, в том числе и кое-что из того, что человек успел изучить, и что, честно говоря, этот К. И. никуда не годится.

Так я до сих пор толком и не знаю, что такое К. И., за исключением того, что мой вскоре превысит 200. Я промолчал, но мне все-таки непонятно, каким образом они узнают, сколько его у вас, если они не знают, что это такое или где это находится.

Доктор Немюр говорит, что мне нужно будет завтра пройти испытание Роршаха. Интересно, что это такое.

22 апреля. Я узнал, что такое Роршах. Это испытание, которое я проходил перед операцией, — то самое, с кляксами на кусках картона. И проводил его тот же человек.

Эти кляксы перепугали меня до смерти. Я знал, что он попросит меня найти картинки, и был уверен, что не смогу этого сделать. Я подумал про себя, что было бы неплохо как-нибудь узнать, какие же там скрыты картинки. А может, там вовсе не было никаких картинок. Вдруг это просто хитрость, чтобы выяснить, настолько ли я глуп, чтобы искать то, чего нет совсем. Стоило мне только об этом подумать, и я тут же обиделся на того человека.

— Так вот, Чарли, — сказал он, — ты уже видел однажды эти карточки, помнишь?

— Конечно, помню.

По моему тону он понял, что я рассердился, и это его явно удивило.

— Да, правда. А теперь я хочу, чтобы ты взглянул вот на эту карточку. Что это может быть? Что ты на ней видишь? Люди видят в этих кляксах самые разнообразные вещи. Скажи, что это тебе напоминает — о чем это заставляет тебя думать?

Я был потрясен. Его слова были для меня полной неожиданностью.

— Вы хотите сказать, что в этих кляксах нет никаких картинок?

Он нахмурился и снял очки.

— Что такое?

— Картинок. Скрытых в кляксах. Прошлый раз вы сказали мне, что все их видят и вы хотели, чтобы я их тоже нашел.

Он объяснил мне, что прошлый раз он говорил почти те же слова, что и теперь. Я не поверил ему и все еще подозреваю, что он нарочно тогда сбил меня с толку, чтобы позабавиться. Или... я уже ни в чем не уверен... Неужели я мог быть таким слабоумным?

Мы медленно просмотрели карточки. На одной из них клякса была похожа на пару летучих мышей, которые что-то тащат. На другой она напоминала двух сражающихся на шпагах мужчин. Я придумывал всевозможные вещи. Кажется, я увлекся. Но я больше не доверял ему и все время то так, то сяк вертел карточки и даже рассматривал их с обратной стороны, чтобы проверить, не было ли там чего-нибудь такого, что мне полагалось заметить.

Я до сих пор еще не вижу смысла в этом испытании. Мне кажется, что любой человек может солгать, выдумав то, чего он в действительности не видит. Откуда он мог знать, что я не вожу его за нос и не рассказываю о вещах, которые на самом деле вовсе не возникают в моем воображении? Быть может, я пойму это, когда доктор Штраусс разрешит мне читать про психологию.

25 апреля. Я придумал, как по-новому расположить на фабрике станки, и мистер Доннеган говорит, что это сэкономит ему в год десять тысяч долларов на рабочей силе и увеличении количества выпускаемой продукции. Он выдал мне 25 долларов премии.

Чтобы отпраздновать это событие, я пригласил Джо Керпа и Френка Рейлли позавтракать со мной, но Джо сказал, что ему нужно кое-что купить для жены, а Френк сказал, что завтракает со своей двоюродной сестрой. Мне думается, должно пройти какое-то время, пока они привыкнут к происшедшей во мне перемене. Все словно боится меня. Когда я подошел к Эмосу Боргу и похлопал его по плечу, он прямо-таки подпрыгнул до потолка.

Люди со мной теперь мало разговаривают и не шутят, как прежде. Поэтому на работе как-то одиноко.

27 апреля. Сегодня, набравшись храбрости, я пригласил мисс Кинниен пообедать со мной завтра вечером и отпраздновать мою премию.

Сперва она было усомнилась, удобно ли это, но я спросил доктора Штраусса, и он сказал, что все нормально. Доктор Штраусс и доктор Немюр, видимо, не очень-то между собой ладят. Они без конца спорят. Сегодня вечером, когда я зашел туда, чтобы выяснить у доктора Штраусса насчет обеда с мисс Кинниен, я слышал, как они друг на друга кричали. Доктор Немюр

утверждал, что это его эксперимент и его исследования, а доктор Штраусс кричал в ответ, что он вложил в это дело не меньше, чем доктор Немюр, так как это он нашел меня через мисс Кинниен и это он сделал мне операцию. Наступит день, заявил он, когда во всем мире тысячи нейрохирургов будут применять на практике разработанную им технику.

Доктор Немюр хочет в конце этого месяца опубликовать результаты эксперимента. Доктор Штраусс считает, что для большей уверенности следует еще немного подождать. Он заявил, что доктора Немюра больше интересует кафедра психологии в Принстоне, чем сам эксперимент. Доктор Немюр сказал, что доктор Штраусс не что иное, как оппортунист, который в погоне за славой пытается прокатиться на его, доктора Немюра, плечах.

Когда я потом ушел, я почувствовал, что меня бьет озноб. Я точно не знаю почему, но получилось так, словно я их обоих впервые увидел по-настоящему. Я вспоминаю, Берт говорил, что у доктора Немюра жена — сущая ведьма, которая все время подгоняет его. Берт сказал, что мечта всей ее жизни — иметь знаменитого мужа.

Неужели доктор Штраусс на самом деле пытается прокатиться на его плечах?

28 апреля. Не понимаю, почему я никогда не замечал, какая мисс Кинниен красивая. Ей только тридцать четыре года! У нее карие глаза и пушистые каштановые волосы, собранные на затылке. Я думаю, это потому, что с самого начала она казалась мне недостижимо гениальной — и очень, очень старой. А теперь с каждой нашей встречей она молодеет и становится все более привлекательной.

Мы пообедали и долго разговаривали. Когда она сказала, что я быстро иду вперед и скоро оставлю ее позади, я рассмеялся.

— Это правда, Чарли. Ты уже читаешь лучше меня. Ты одним взглядом можешь прочесть целую страницу, а я за то же время схватываю только несколько строк. И читая, ты запоминаешь каждую мельчайшую деталь. Я же, в лучшем случае, могу вспомнить только основные мысли и общий смысл прочитанного.

— Я не чувствую себя умным. Есть так много вещей, которые я не понимаю.

Она взяла сигарету, и я поднес ей горящую спичку.

— Тебе следует быть чуточку терпеливее. На то, что ты совершаешь за какие-нибудь дни и недели, у нормальных людей уходит полжизни. Именно это и поразительно. Ты впитываешь знания, словно

огромная губка. Факты, цифры, общие сведения. И вскоре ты начнешь все это сопоставлять. Ты поймешь соотношение между различными отраслями знаний. Существует множество уровней. Чарли, это ступени гигантской лестницы, которая ведет тебя все выше и выше, и ты все лучше и лучше познаешь окружающий тебя мир.

Она нахмурилась.

— Я только надеюсь...

— А что такое?

— Неважно. Чарли. Я просто надеюсь, что, посоветовав тебе пойти на это, я не совершила ошибки.

Я расхохотался.

— Да как вы можете так говорить? Ведь все идет как надо. Даже Элджернон все еще умен.

Какое-то время мы сидели молча, и я знал, о чем она думает. Мне хотелось думать об этой возможности не больше, чем старикам хочется думать о смерти. Я знал, что это только начало. Я понимал, что она подразумевала под ступенями, потому что некоторые из них я уже прошел. При мысли о том, что я оставлю ее позади, мне стало грустно.

Я влюблен в мисс Кинниен.

11. отчет о происходящем

30 апреля. Я больше не работаю в «Компании по производству пластмассовых корыток» Доннегана. Мистер Доннеган твердо заявил, что всем будет лучше, если я уйду. За что они меня так возненавидели?

Я узнал об этом впервые, когда мистер Доннеган показал мне петицию. Восемьсот сорок подписей, все, кто имеет отношение к фабрике...

Снова я горю от стыда. Этот мой новый интеллект воздвиг стену между мной и всеми теми, кого я раньше знал и любил. Прежде они смеялись надо мной и презирали меня за мое невежество и тупость; теперь они ненавидят меня за мои знания и сообразительность. Господи, что же им от меня наконец нужно?

Они вышвырнули меня с фабрики. Теперь я еще более одинок, чем когда-либо...

15 мая. Доктор Штраусс очень зол на меня за то, что я две недели не писал своих отчетов. Он по-своему прав, ведь лаборатория теперь регулярно платит мне жалованье. Я сказал ему, что был слишком занят — много читал и думал. Когда я упомянул, что медлительность процесса письма выводит меня из терпения, он посоветовал научиться печатать на машинке. Теперь писать значительно легче, потому что я за минуту могу напечатать

около семидесяти пяти слов. Доктор Штраусс постоянно напоминает мне о необходимости писать и говорить попроще, чтобы меня могли понять другие.

В прошлый вторник нас с Элджерноном продемонстрировали на заседании съезда Американской Ассоциации Психологов. Мы произвели крупную сенсацию. Доктор Немюр и доктор Штраусс очень нами гордились.

Я подозреваю, что доктор Немюр, которому шестьдесят (он на десять лет старше доктора Штраусса), считает нужным уже теперь пожать плоды своих трудов. Это, несомненно, результат давления со стороны миссис Немюр.

Вопреки впечатлению, которое сложилось у меня о нем раньше, теперь я понимаю, что доктор Немюр отнюдь не гений. У него большие способности, но ему мешает его неверие в себя. Он хочет, чтобы люди считали его гением. Поэтому для него важно знать, что его работа находит признание. По-моему, доктор Немюр боялся дальнейшей отсрочки именно потому, что кто-то другой мог бы сделать аналогичное открытие и лишить его этой чести.

Зато доктора Штраусса гением назвать можно, хотя я чувствую, что его знания слишком ограничены. Его обучали в традициях слишком узкой специализации.

Я был потрясен, узнав, что из всех древних языков он умеет читать только латыни, по-гречески и по-древнееврейски и что он почти не знает высшей математики за пределами элементарных вариационных исчислений. Когда он мне в этом признался, я почувствовал некоторое раздражение. Я воспринял это так, словно, чтобы ввести меня в заблуждение, он до сих пор скрывал эту сторону своей личности, стараясь казаться (что, как я обнаружил, свойственно многим людям) не таким, каков он в действительности.

Доктор Немюр явно испытывает по отношению ко мне какую-то неловкость. Иногда, когда я пытаюсь заговорить с ним, он только странно смотрит на меня и отворачивается. Вначале я даже рассердился, когда доктор Штраусс объяснил мне, что из-за меня у доктора Немюра возникает чувство неполноценности. Я подумал, что он надо мной издевается, а я очень остро реагирую, когда из меня делают посмешище.

Откуда я мог знать, что такой высокоуважаемый психолог-экспериментатор, как Немюр, незнаком ни с языком хинди, ни с китайским? Ведь это нелепо, если принять во внимание те исследования, которые ведутся сейчас в Индии и Китае как раз в его области.

Я спросил доктора Штраусса, каким образом Немюр сумеет опровергнуть Рахаджамати, который раскритиковал его метод и результаты исследований, если он вообще не может прочесть его труды. Странное выражение, появившееся при этом на лице доктора Штраусса, могло означать только одно из двух. Или он не хочет говорить Немюру, что пишут в Индии, или же — и это меня очень беспокоит — доктор Штраусс не знает этого сам.

18 мая. Я очень взволнован. Вчера вечером я встретился с мисс Кинниен — до этого я не видел ее больше недели. Я старался не касаться высокоинтеллектуальных вопросов и вести беседу на простые каждодневные темы, но она растерянно посмотрела на меня и спросила, что я подразумеваю под изменением математического эквивалента в «Пятом концерте» Добермана.

Когда я попытался объяснить это, она остановила меня и рассмеялась. Подозреваю, что разговариваю с ней не на том уровне. Какую бы я ни затронул тему, я не могу найти с ней общего языка. Я вижу, что уже почти не могу общаться с людьми. Хорошо, что есть на свете книги, музыка и проблемы, о которых я могу думать.

20 мая. Если бы не случай с разбитыми тарелками, я так и не заметил бы в закускойной, где я ужинаю, парнишку лет шестнадцати — нового мойщика посуды.

Тарелки с грохотом посыпались на пол, разбились вдребезги, и во все стороны под столы полетели осколки белого фарфора. Ошеломленный и испуганный, паренек замер на месте, не выпуская из рук пустого подноса. Свист и улюлюканье посетителей (крики: «Ого, вот так убыток!..», «Поздравляю!..» и «Не долго же он тут проработал...», которые, по-видимому, неизменно раздаются в ресторанах, когда бьют посуду), казалось, еще больше смутили его.

Когда на шум явился хозяин, паренек сжался от страха, словно ожидая, что его будут бить, и, как бы стремясь отразить удар, выбросил вперед руки.

— Ладно! Ладно, дурак, — заорал хозяин, — не стой столбом! Возьми щетку и вымети этот мусор. Щетку... щетку, ты, идиот! Она на кухне. Чтоб тут не осталось ни одного осколка.

Паренек понял, что его не собираются наказывать. С его лица исчезло испуганное выражение, и, вернувшись со щеткой, чтобы подмести пол, он уже улыбался и что-то мурлыкал под нос. Кое-кто из наиболее задиристых посетителей, развлека-

каюсь, продолжал отпускать на его счет замечания.

— А ну-ка, сынок, вон там позади лежит славный осколок...

— Давай-ка еще раз...

— Не так уж он глуп. Разбить-то их легче, чем вымыть...

По мере того как его пустой взгляд переходил с одного веселящегося зрителя на другого, на его лице постепенно отражались их улыбки, и наконец он неуверенно ухмыльнулся на шутку, которой скорее всего даже не понял.

При виде этой тупой невыразительной улыбки, широко открытых детских глаз, в которых неуверенность сочеталась с горячим желанием угодить, мое сердце пронзила острая боль. Они смеялись над ним, потому что он был умственно отсталым.

И я тоже над ним смеялся.

Внезапно во мне вспыхнула ярость. Я вскопчил и крикнул:

— Заткнитесь! Оставьте его в покое! Не его вина, что он ничего не понимает! Он не в силах быть другим! Ради бога... ведь это все-таки человек!

В помещении наступила тишина. Я проклял себя за то, что сорвался и устроил сцену. Стараясь не глядеть на парнишку, я заплатил по счету и вышел из закусочной, не притронувшись к еде. Мне было стыдно за нас обоих.

Как странно, что людям с нормальными чувствами, которые никогда не заденут калеку, родившегося без рук, без ног или глаз, что этим людям ничего не стоит оскорбить человека с врожденной умственной недостаточностью. Меня приводила в бешенство мысль, что не так давно я, совсем как этот мальчик, по глупости изображал из себя клоуна. А я почти об этом забыл.

Я спрятал от самого себя прежнего Чарли Гордона. Но сегодня, взглянув на этого мальчика, я впервые увидел, каким я был раньше. Я был точно таким же!

Я часто перечитываю мои отчеты и вижу безграмотность, детскую наивность, ничтожный, словно запертый в темную комнату интеллект, который жадно всматривается сквозь замочную скважину в сияющий снаружи ослепительный свет. Я вижу, что при всей своей тупости я понимал собственную неполноценность, понимал, что другие люди обладали чем-то, чего у меня не было, чем меня обделила судьба. В своей умственной слепоте я считал, что это было каким-то образом связано с умением читать и писать, и я был уверен, что, постигнув это искусство, я автоматически обрету разум.

Даже слабоумный хочет быть похожим на всех остальных людей.

Ребенок может не знать, как или чем накормить себя, но ему знакомо чувство голода.

Этот день пошел мне на пользу. Яснее увидев прошлое, я решил посвятить мои знания и способности исследованиям в области повышения интеллектуального уровня человека. Кто лучше всех подготовлен для этой работы? Кто еще жил в обоих мирах? Дайте мне возможность применить свое дарование и что-нибудь сделать для своих братьев.

Завтра я обсужу с доктором Штраусом вопрос о методе моей работы. Быть может, мне удастся помочь ему решить проблему широкого применения тех операций, первую из которых испробовали на мне. У меня есть по этому поводу кое-какие идеи.

Как много можно было бы сделать! Если меня сделали гением, то ведь таких тысячи! А какого фантастического уровня интеллекта можно было бы достигнуть у нормальных людей? А у гениев?

Сколько же открывается возможностей! Я сгораю от нетерпения.

12. отчет о происходящем

23 мая. Это произошло сегодня. Эдджернон укусил меня. Я, как повелось, зашел в лабораторию навестить его, и, когда я достал его из клетки, он впился зубами мне в руку. Я посадил его обратно и некоторое время наблюдал за ним. Он был необычно беспокоен и озлоблен.

24 мая. Берт, в ведении которого находятся экспериментальные животные, сообщил, что Эдджернон меняется. Он становится менее общительным; он отказывается бегать по лабиринту. И он не ест. Все недоумевают, что это может значить.

Перевод с английского С. Васильевой

(Окончание следует)

ЗОЛОТАЯ МЕДАЛЬ ФИЛДСА

27 ноября 1895 года крупный шведский инженер и промышленник Альфред Нобель подписал завещание, согласно которому: «...капитал мои душеприказчики должны перевести в ценные бумаги, создав фонд, проценты с которого будут выдаваться в виде премии тем, кто в течение предшествующего года принес наибольшую пользу человечеству. Указанные проценты следует разделить на пять равных частей, которые предназначаются: первая часть

тому, кто сделал наиболее важное открытие или изобретение в области физики, вторая — тому, кто совершил крупное открытие или усовершенствование в области химии, третья — тому, кто добился выдающихся успехов в области физиологии или медицины, четвертая — создавшему наиболее значительное литературное произведение, отражающее человеческие идеалы, пятая — тому, кто внесет весомый вклад в сплочение наро-

дов, уничтожение рабства, снижение численности существующих армий и содействии мирной договорности».

Как ни обиден этот факт, но математика не была упомянута в этом завещании. Сейчас, по-видимому, уже невозможно установить истинные причины того, что математика была выброшена Нобелем из первоначального варианта завещания, но определенная неприязнь к математикам у него, несомненно, была.

Человеком, решившим исправить эту несправедливость, был канадский



Альфоре Ларс Валериан (р. 18.4.1907, Хельсинки). Премия 1936 г. за работы по комплексной геометрии.



Дуглас Джессе (р. 3.7.1897, Нью-Йорк — 7.10.1965). Премия 1936 г. за работы по вариационному исчислению.



Шварц Лоран (р. 5.3.1915, Париж). Премия 1950 г. за работы по математическому анализу.



Сельберг Атле (р. 14.6.1917, Лангесунн, Норвегия). Премия 1950 г. за работы по теории чисел и математическому анализу.



Кодаира Кунихико (р. 16.3.1915, Токио). Премия 1954 г. за работы по алгебраической и дифференциальной геометрии.



Серр Жан Пьер (р. 15.9.1926, Баж, Франция). Премия 1954 г. за работы по алгебраической топологии.



Том Рене Фредерик (р. 2.9.1923, Монбельяр, Франция). Премия 1958 г. за работы по дифференциальной топологии.



Рот Клаус Фридрих (р. 29.10.1925, Бреслау). Премия 1958 г. за работы по теории чисел.

математик и лесопромышленник Джон Чарльз Филдс (1863—1932) — известный специалист по теории алгебраических функ-

ций, член Канадского и Лондонского математических обществ, член-корреспондент Национальной Академии Наук США,

иностраный член-корреспондент АН СССР.

В 1932 году, незадолго до смерти, Филдс завещал свое состояние меж-



Милнор Джон Уиллард (р. 20.2.1931, Ориндж, Нью-Джерси, США). Премия 1962 г. за работы по дифференциальной топологии.



Хермандер Ларс (р. 24.1.1935, Мьельбю, Швеция). Премия 1962 г. за работы по дифференциальным уравнениям.



Гротендик Александр (р. 28.3.1928, Берлин). Премия 1966 г. за работы по алгебраической геометрии.



Козм Пол Джозеф (р. 2.4.1934, Лонг-Бранч, США). Премия 1966 г. за работы по теории множеств.



Смейл Стефен (р. 15.7.1930, Флинт, Мичиган, США). Премия 1966 г. за работы по топологии и дифференциальным уравнениям.



Атья Майкл Френсис (р. 22.4.1929, Лондон). Премия 1966 г. за работы по алгебраической топологии.



Бейкер Алан (р. 19.8.1939, Лондон). Премия 1970 г. за работы по теории чисел.



Томсон Джон Григс (р. 13.10.1932). Премия 1970 г. за работы по алгебре.



Хиронака Хейсукэ (р. 9.4.1931, Ямагучи, Япония). Премия 1970 г. за работы по алгебраической геометрии.



Новиков Сергей Петрович (р. 20.3.1938, Горький). Премия 1970 г. за работы по дифференциальной топологии.



Мамфорд Дэвид Брайант (р. 11.6.1937, Сассекс, Великобритания). Премия 1974 г. за работы по алгебраической геометрии.



Бомбьери Энрико (р. 26.11.1940, Милан). Премия 1974 г. за работы по теории чисел, комплексному анализу и дифференциальным уравнениям.

дународному математическому союзу для создания премиального фонда по математике.

Новую премию и золотую медаль было решено присуждать молодым математикам, не достигшим в момент награждения 40 лет, за результаты, оказавшие наибольшее влияние на развитие мате-

матики. В отличие от Нобелевских премий, присуждаемых ежегодно, Филдсовские премии вручаются раз в четыре года на международных математических конгрессах. Размер премии невелик — 1500 канадских долларов, но престиж ее в математическом мире огромен. Первое вручение Филдсовских премий состоялось в 1986 году на математи-

ческом конгрессе в Осло. После большого перерыва, вызванного войной, международные конгрессы возобновились: Кембридж (США) — 1950 г. (были присуждены 2 премии),

(Окончание см. на с. 62)



Квиллен Даниэл (р. 27.6.1940, Ориндж, Нью-Джерси, США). Премия 1978 г. за работы по гомологической алгебре.



Делинь Пьер Рене (р. 3.10.1944, Брюссель). Премия 1978 г. за работы по алгебраической теории чисел.



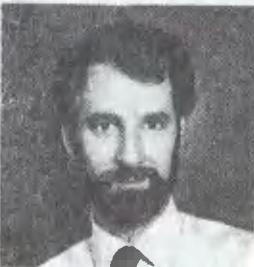
Ю Шинтан (р. 4.4.1949, Гуаньдун, Китай). Премия 1983 г. за работы по дифференциальной геометрии.



Кохн Алэн (р. 1.4.1947, Даргиньян, Франция). Премия 1983 г. за работы по функциональному анализу.



Маргулис Григорий Александрович (р. 24.2.1946, Москва). Премия 1978 г. за работы по геометрии и математическому анализу.



Фефферман Чарльз Луис (р. 18.4.1949, Вашингтон). Премия 1978 г. за работы по комплексному анализу.



Терстон Уильям (р. 30.10.1946, Вашингтон). Премия 1983 г. за работы по дифференциальной топологии.

Фридман Майкл (р. 21.4.1951, Лос-Анжелес). Премия 1986 г. за работы по алгебраической топологии.
Фалтингс Герд (р. 28.7.1954, Гельзенкирхен, ФРГ). Премия 1986 г. за работы

по алгебраической теории чисел.
Дональдсон Саймон Керван (р. 20.8.1957, Кембридж, Великобритания). Премия 1986 г. за работы по дифференциальной геометрии и топологии.

Много интересных явлений в жизни и в науке связано со стробоскопическим эффектом. Это и зрительная иллюзия остановившегося движения, и ощущение движения неподвижного объекта при прерывистом наблюдении, и использование красочной неоновой рекламы, и создание приборов для контроля и измерения частоты быстрых периодических процессов, и многое другое. Во всех случаях стробоскопический эффект обусловлен инерцией зрения, т. е. сохранением в сознании наблюдателя воспринятого им зрительного образа в течение некоторого времени (порядка 0,2 с) после того, как вызвавшая образ картина уже исчезла.

О стробоскопии написано много и научных, и популярных статей. Несколько опубликовано и в Лаборатории «Кванта». Например — статья Г. Гаврилова «Телескоп — стробоскоп» (1981, № 5), С. Гаврилова «Что такое стробоскоп» (1989, № 1), С. Белоусова и Р. Герасимова «Наблюдение и фотосъемка быстротекущих процессов» (1988, № 2), В. Утешева «Как заметить незаметное» (1989, № 4). Почитайте эти статьи!

А теперь предлагаем вашему вниманию еще одну статью на эту же тему. Автор статьи Владислав Креймер — ученик 11 класса ФМШ № 35 г. Донецка.

Лаборатория «Кванта»

Как увидеть... несуществующее

В. КРЕЙМЕР

*Если на клетке слона прочтешь
надпись «буйвол», не верь глазам
своим.*

Козьма Прутков

Проделайте такой опыт. Встаньте перед включенным телевизором на расстоянии 1,5—2 м и посмотрите на колеблющиеся ножки вертикально расположенного пинцета. На фоне экрана вы увидите, что ножки волнообразно искривлены (рис. 1). Меняя расстояние между глазом и пинцетом, можно добиться наиболее четкого эффекта.

Очевидно, конечно, что искривление пинцета — чисто оптический эффект, ибо из-за большой жесткости ножек они так изгибаться не могут. Достаточно пинцет расположить горизонтально, и вы увидите, что при колебаниях его ножки остаются прямо-

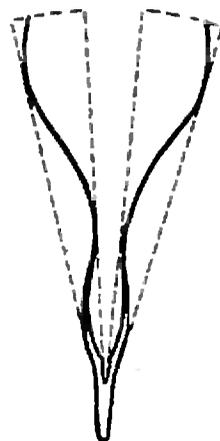


Рис. 1.

линейными. Чтобы понять этот опыт, сначала разберем более простой случай.

Возьмите карандаш, поставьте его вертикально и начните быстро перемещать в горизонтальном направлении вдоль экрана. Карандаш будет казаться наклоненным в сторону, противоположную направлению движения (рис. 2). Почему? Оказывается, все дело тут в стробоскопическом эффекте. Луч, пробегая по экрану слева направо и сверху вниз, высвечивает в каждый момент времени лишь какой-то участок экрана. Поэтому весь карандаш сразу освещен быть не может, каждый раз освещенной будет только его малая часть. Пусть в некоторый момент времени луч осветил участок карандаша, близкий к точке *a* (см. рис. 2). Наш глаз запомнит этот освещенный участок примерно на 0,2 секунды. Находясь на следующей строке, луч осветит каран-

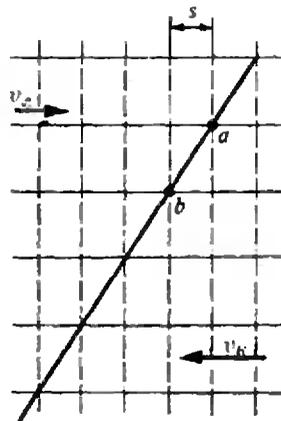


Рис. 2.

даш в точке b , смещенной относительно точки a на расстояние s . Этот путь пройдет карандаш за то время, пока луч пробежит расстояние от a до b , равное $l_c \pm s$, где l_c — длина строки, знак «+» соответствует движению карандаша вправо, а «-» — влево. Аналогичное смещение произойдет и с другими участками карандаша.

После «склеивания» всех видимых участков карандаша он покажется нам как бы наклоненным. Угол наклона к горизонту будет равен

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{l_k(v_n \mp v_k)}{(N-1)l_c(\pm v_k)},$$

где l_k — длина карандаша, v_k — скорость движения карандаша (положительное значение скорости соответствует движению вправо), v_n — скорость луча, N — количество строк, умещающихся на проекции карандаша.

Из этой формулы видно, что угол наклона карандаша уменьшается с ростом скорости карандаша и существенно зависит от направления его движения.

Таким образом, луч телевизора, освещая различные участки карандаша в различные моменты его поступательного движения, позволяет *одно-*

временно увидеть различные фазы движения карандаша, т. е. осуществляет развертку его движения во времени.

А теперь вернемся к опыту с пинцетом. При частоте колебаний порядка 10^2 Гц пинцет за то время, пока луч пройдет длину его проекции на экране, успевает сделать несколько колебаний. Благодаря развертке во времени, на фоне экрана будут одновременно видны различные фазы поперечных колебаний пинцета. Мгновенная скорость движения каждой его точки зависит от времени по синусоидальному закону, поэтому видимые волны на ножках пинцета тоже близки к синусоидальным, а искажения вызваны лишь изменением знака скорости при смене направления движения (см. выражение для угла α , приведенное выше). Интересно, что волны на ножках пинцета могут стоять на месте или перемещаться — в зависимости от соотношения между частотой колебаний пинцета и частотой кадровой развертки телевизора (50 Гц).

В заключение советуем вам провести аналогичные опыты с камертоном или с натянутой струной. В последнем случае эффект будет особенно четким и наглядным.

«Ты — мне, я — тебе»

(Начало см. на с. 44)

«Ты — мне, я — тебе» набирает 30 очков, а во второй — 9. «Предатель» в игре с «Ты — мне, я — тебе» набирает 14 очков, зато играя с самим собой — всего 10 (проверьте эти числа!). Итого: «Ты — мне, я — тебе» финиширует с результатом 39 очков против 24 у «Предателя».

Если бы программа «Ты — мне, я — тебе» была человеком, ее можно было бы назвать доброжелательной, готовой к сотрудничеству, но не прощающей предательства. Именно эти свойства привели программу к успеху в этом, да и нескольких последующих компьютерных соревнованиях. Поэтому, всем нам стоит сделать вывод из этого эксперимента!

Публикацию подготовил С. Табачников



Р-значим ракета

Полет на Марс

Доктор технических наук
Л. ГОРШКОВ

Полет человека на Марс. Что это — мечта или реальность? Во всяком случае, в настоящее время инженеры уже разрабатывают проект первого марсианского корабля.

Давайте рассмотрим некоторые особенности полета человека на соседнюю планету.

Земля и Марс вращаются вокруг Солнца почти в одной плоскости, и среднее расстояние между их орбитами примерно 80 млн. км.

Что же нужно для того, чтобы перелететь с орбиты Земли на орбиту Марса?

Представим, что межпланетный корабль находится на околоземной орбите, например, на такой, на которой сейчас летает станция «Мир», и ско-

рость корабля при этом около 8 км/с. Если после включения двигателя скорость движения корабля увеличится на 3,5—5 км/с, он начнет перелет в сторону орбиты Марса. Если время включения двигателя выбрано соответствующим образом, то корабль придет на орбиту Марса в момент, когда, двигаясь по своей орбите, Марс окажется в том же районе. Остается только еще раз включить двигатель и перейти уже на околомарсианскую орбиту. С этого момента корабль будет вращаться вокруг Марса, так же, как он вращался перед этим вокруг Земли.

На рисунке 1 показаны возможные траектории перелета с околоземной орбиты на околомарсианскую.

Самая экономичная (по расходу топлива) траектория — полуэллиптическая (так называемая орбита Го-мана — по имени ученого, предложившего такой перелет). Но зато полет по ней будет довольно длительный — около 9 месяцев.

Если бы Марс и Земля сохраняли свое относительное положение, были бы возможными перелеты по орбитам Гомана к Марсу и обратно. Но... Земля и Марс меняют свое относительное положение. Поэтому, если мы перелетели к Марсу по орбите Гомана, то для того, чтобы лететь обратно по такой траектории, нужно уже ждать несколько лет.

На рисунке 2 приведен пример траектории перелета к Марсу и обратно. Здесь показана траектория, когда за время перелета к Марсу и обратно Земля сделает почти полтора оборота вокруг Солнца, т. е. пройдет почти полтора года.

Какие двигательные установки способны переводить корабль на такие межпланетные траектории? Сегодня в ракетной технике широко используются жидкостно-реактивные двигатели. Они установлены на всех космических кораблях. Одной из главных характеристик двигателя является скорость истечения газов из реактивного сопла. Чем больше скорость истечения, тем меньше топлива требуется для разгона корабля. У жидкостно-реактивных установок скорость истечения не превышает 4500—4800 м/с.

Расчеты показывают, что если масса корабля без ракетной установки составляет 120—150 т, то начальная масса всего корабля с топливом жидкостных ракет должна быть 2000 т.

Сегодня нет носителей, которые могли бы вывести на орбиту такой груз. Поэтому корабль надо будет собирать в космосе, выводя отдельные его части на околоземную орбиту. Для этого потребуется около 20 пусков ракеты-носителя «Энергия». Это будет очень дорогой вариант марсианской экспедиции.

В настоящее время разработаны электрореактивные двигатели со скоростью истечения газов 8—9 км/с. Такие скорости достигаются за счет ускорения рабочего тела (так называют вещество реактивной струи) в электростатическом поле. Это наиболее экономичные двигатели, для их работы нужно почти в 20 раз меньше топлива, чем для жидкостно-реактивных. Но в этом случае требуется мощная электростанция для создания электростатического поля.

Такая электростанция может быть построена на различных принципах. Один из вариантов — атомная мини-электростанция на корабле. Другой вариант — электростанция, использующая солнечную энергию.

Наиболее простой способ — прямое преобразование солнечных лучей в электричество с помощью фотопреобразователей, аналогичных тем, которые установлены на космических кораблях и орбитальных станциях.

Можно создать большой параболаид, собирающий солнечные лучи в своем фокусе, где будет расположен

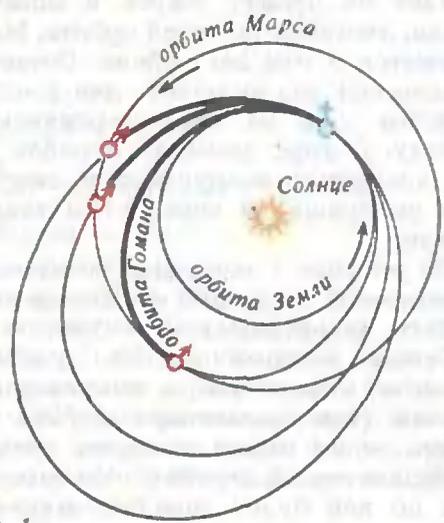


Рис. 1.

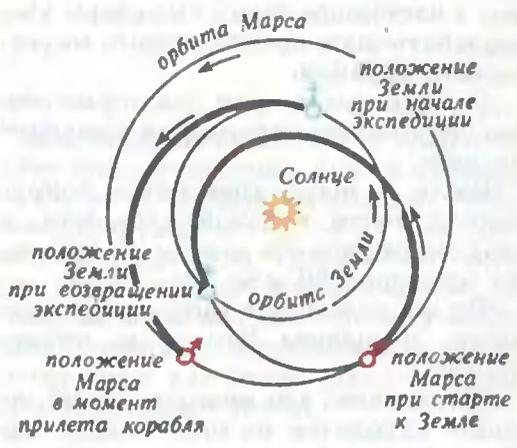


Рис. 2.

приемник, который тоже преобразует тепло в электроэнергию.

Сегодня конструкторы склоняются к варианту марсианского корабля с электрореактивными двигателями и с электростанцией в виде больших солнечных батарей.

Межпланетный корабль состоит из трех частей: жилого блока, в котором в течение всего полета работает экипаж и где сосредоточена основная аппаратура управления; посадочного аппарата, в котором экипаж или его часть спускается и возвращается с поверхности планеты (это что-то вроде шлюпки на океанском корабле); двигательной установки для межпланетных перелетов (см. рис. 3).

Рассмотрим подробнее каждую из этих частей.

Жилой блок — это несколько герметичных отсеков. Здесь каюты для экипажа из четырех человек. Почему именно 4 человека? Ограничение диктуется соображениями экономии, тем, что увеличение экипажа резко усложняет работы по созданию корабля. А меньше четырех человек иметь нельзя из соображений безопасности: при посадке на Марс экипажу придется разделить — часть должна спуститься на поверхность планеты, другая останется на корабле, и при этом ни на корабле, ни на поверхности Марса не должно быть меньше двух человек (необходима взаимопомощь). Вот и получается, что экипаж первой межпланетной экспедиции должен состоять из четырех человек.

В жилом блоке расположены системы, обеспечивающие экипаж водой, кислородом; здесь запасы пищи, средства удаления отходов. На рисунке 4 показана схема обеспечения экипажа водой и кислородом. Основной принцип — максимальное использование выделяемых человеком углекислого газа и воды.

Вода, поступающая в ассенизационное устройство, и водяной пар, выделяемый экипажем в атмосферу жилого блока, проходят через так называемую систему регенерации воды. Там вода очищается от вредных примесей, обогащается необходимыми со-

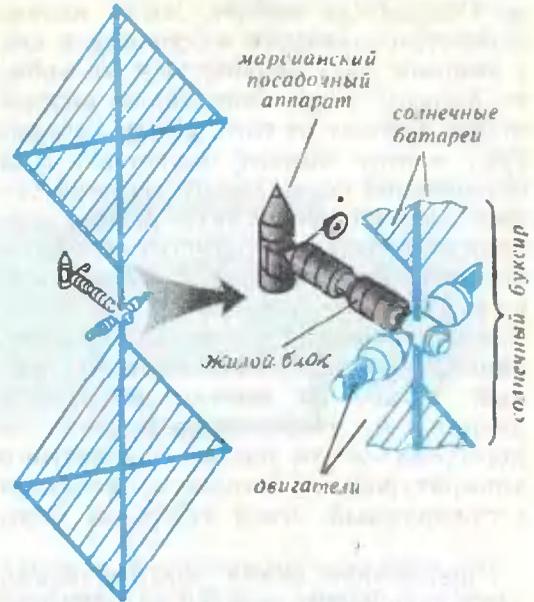


Рис. 3.

лями и вновь готова для питья. Такие системы уже работают на орбитальной станции «Мир».

Кислород для дыхания получается электролитическим разложением воды — $2\text{H}_2\text{O} = 2\text{H}_2 + \text{O}_2$. На станции «Мир» работает такая система, она называется «Электрон». Водород в этой системе является побочным продуктом, он тоже будет использоваться, но уже в системе переработки углекислого газа — $\text{CO}_2 + 4\text{H}_2 = \text{CH}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$. Образующийся метан удаляется за борт, а вода направляется в систему электролиза для получения кислорода.

Таким образом, круговорот воды, организованный на станции, обеспечивает экипаж и кислородом для дыхания, и водой для питья. Но при этом неизбежны потери, которые компенсируются специальными запасами воды на борту.

Для нормальной работы экипажа и аппаратуры температура внутри жилого отсека должна быть постоянной, около 20°C . Но отсек подвергается различным температурным воздействиям (солнечные лучи, выделение тепла экипажем, работающей аппаратурой). Воздействия эти переменны. Нагрев от солнечных лучей зависит от ориентации корабля и от расстояния

до Солнца (на орбите Земли интенсивность солнечного излучения в два с лишним раза больше, чем на орбите Марса); выделение тепла внутри отсека зависит от того, какая аппаратура в этот момент включена. Для обеспечения нормального температурного режима предусматриваются специальная система терморегуляции и теплоизоляция. Оболочка жилого блока укутывается «шубой» — так называемой экранно-вакуумной теплоизоляцией. Это, по существу, многослойный термос из металлизированной пленки. А чтобы жилой блок не перегревался от тепла, выделяемого аппаратурой и экипажем, вводится регулируемый отвод тепла за борт.

Упрощенная схема регулирования приведена на рисунке 5. Снаружи жилого блока расположен радиатор, внутри — теплообменник, через который продувается воздух отсека. Между радиатором и теплообменником циркулирует жидкость. Поток циркулирующей жидкости можно управлять: если нужно увеличить отвод тепла — увеличивают поток жидкости через теплообменник, если надо уменьшить охлаждение и поднять температуру в отсеке — уменьшают скорость циркуляции. Отражающая поверхность радиатора выполнена таким образом, что даже при освещении радиатора прямыми солнечными лучами он работает как излучатель.

Одной из опасностей, подстерегающих корабль, являются метеоры. Небольшие метеоры — так называемые микрометеоры — достаточно часто встречаются с космическими кораблями, но при той толщине оболочки, которой обладают эти корабли, такие встречи не страшны.

Однако не исключены и столкновения с более крупными метеорами, которые способны повредить герметичную оболочку. Чтобы предотвратить опасные последствия таких встреч, на некотором расстоянии от оболочки устанавливается специальный экран, служащий своеобразным зонтиком. Метеор ударяется в экран, выделяющееся при этом тепло испаряет вещество метеора, и в герметичную оболочку ударяет уже не метеор, а газовая струя. Конечно, экран не спасает оболочку при встрече с более крупными метеорами, но такая встреча крайне маловероятна. Если же все-таки произойдет пробой оболочки, в распоряжении экипажа будут средства заделки отверстия. Для большей безопасности жилой блок разделен на несколько отсеков, соединенных между собой люками. Вдоль цилиндрической оболочки расположены рамы с аппаратурой. Их можно отвести, для того чтобы обеспечить доступ к герметичной оболочке, если потребуется ее ремонт.

Еще одна опасность, характерная для межпланетного перелета, — космическая радиация. При полетах на

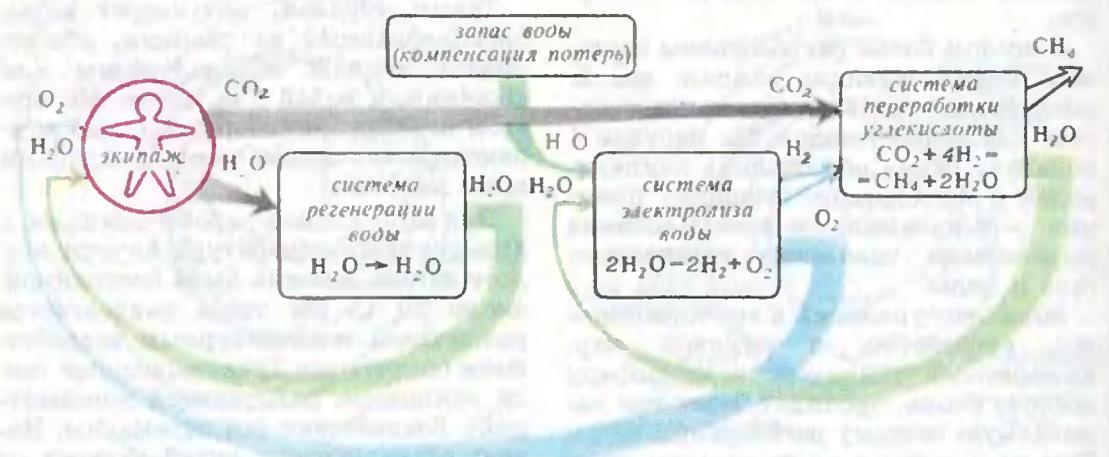


Рис. 4.

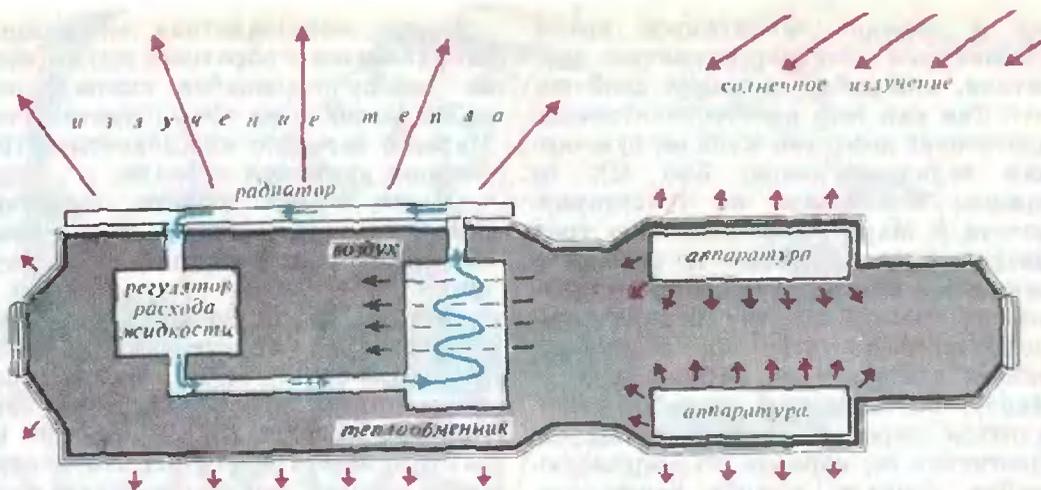


Рис. 5.

околоземных орбитах экипаж защищен радиационными поясами Земли, а при полете к Марсу этой защиты не будет. Особенно мощному радиационному излучению жилой блок будет подвергаться во время солнечных вспышек. При коротких экспедициях, например на Луну, вероятность попасть под мощную солнечную вспышку невелика. За время же длительного, почти двухлетнего, путешествия такие вспышки будут обязательно. На этот случай в жилом блоке предусматривается специальное помещение с радиационной защитой.

Вообще нужно сказать, что жилой блок очень похож на орбитальную станцию, только размеры больше. И это понятно: ведь задачи жилого блока почти такие же, как и орбитальной станции — обеспечить условия для длительной работы экипажа и аппаратуры.

Аппарат для посадки на поверхность Марса состоит из кабины экипажа, посадочной и взлетной двигательных установок. Предусмотрено специальное помещение, в котором экипаж живет в комфортных условиях в течение нескольких дней, которые выделены для работы на поверхности планеты. Посадочный аппарат имеет такую аэродинамическую форму, которая обеспечивает торможение в атмосфере Марса, плотность которой в 100 раз меньше плотности земной атмосферы. При этом исполь-

зуется и жидкостно-реактивная двигательная установка. Она-то и позволяет совершить мягкое «примарсение». Жизнеобеспечивающие системы аппарата построены на тех же принципах, что и системы жилого блока.

Двигательная установка корабля — солнечный буксир — состоит из электрореактивных двигателей, баков с «рабочим телом» и электростанции с двумя большими солнечными батареями размерами 200×200 м каждая. Тонкая пленка фотопреобразователей натянута на ферменную раму, подобную той конструкции, которую разворачивали космонавты на станции «Салют-7» (она называлась «Маяк»). Батареи имеют возможность поворачиваться относительно корпуса корабля таким образом, чтобы их плоскость все время была направлена на Солнце, а двигатели создавали тягу в нужном направлении.

Вот и весь межпланетный корабль. Как же будет проходить полет?

В начале на околоземную орбиту выводятся части марсианского корабля. Для этого потребуется 4—5 пусков ракеты-носителя «Энергия». Эти части собираются на орбите с использованием автоматической системы сборки (система уже обеспечила безотказную стыковку со станциями «Салют» и «Мир» более 50 кораблей «Прогресс»).

Затем проводятся тщательные предстартовые проверки корабля. Когда

все в порядке, в заданное время включаются электрореактивные двигатели, и корабль начинает свой полет. Так как тяга электрореактивных двигателей довольно мала (ее суммарная величина около 300 Н), то прежде чем выйти на траекторию полета к Марсу, корабль около трех месяцев будет двигаться по развертывающейся спирали, медленно удаляясь от Земли. Но вот корабль выходит из сферы тяготения Земли и начинает движение по направлению к Марсу. Восемь-девять месяцев будет длиться перелет на орбиту Марса. Достигнув ее, корабль по свертывающейся спирали начнет снижаться, пока не выйдет на рабочую орбиту вокруг Марса высотой 500—700 км.

Здесь два члена экипажа переходят в марсианский посадочный аппарат, отстыковываются от корабля и совершают спуск.

Какой район будет выбран для посадки? Русло древней реки или интересное нагромождение скальных пород? Сейчас трудно сказать. Неизвестно и то, какие открытия ждут первых землян на соседней планете.

После окончания работ экипаж вновь занимает места в марсианском аппарате и возвращается на корабль.

Теперь межпланетная экспедиция направляется в обратный путь. Снова по раскручивающейся спирали корабль выходит из сферы притяжения Марса и затем по межпланетной траектории движется к Земле.

Общее время полета (включая участки «спиральных» разгонов и торможений) будет составлять около двух лет.

После того как корабль выйдет на околоземную орбиту, возвращение экипажа будет такой же обычной транспортной операцией, как смена экипажа на орбитальной станции. Но до этого возвращения ему необходимо будет пройти тщательный карантин. Дело в том, что не исключено наличие на Марсе каких-то форм жизни, которые могут быть опасны для Земли. Поэтому осторожность здесь обязательна: длительные исследования должны подтвердить отсутствие такой опасности, прежде чем космонавты вернутся на Землю.

Сегодня конструкторы разрабатывают проект первого межпланетного корабля, а его экипаж, возможно, еще только учится в школе. Но время первой межпланетной экспедиции все ближе и ближе...

Золотая медаль Филдса

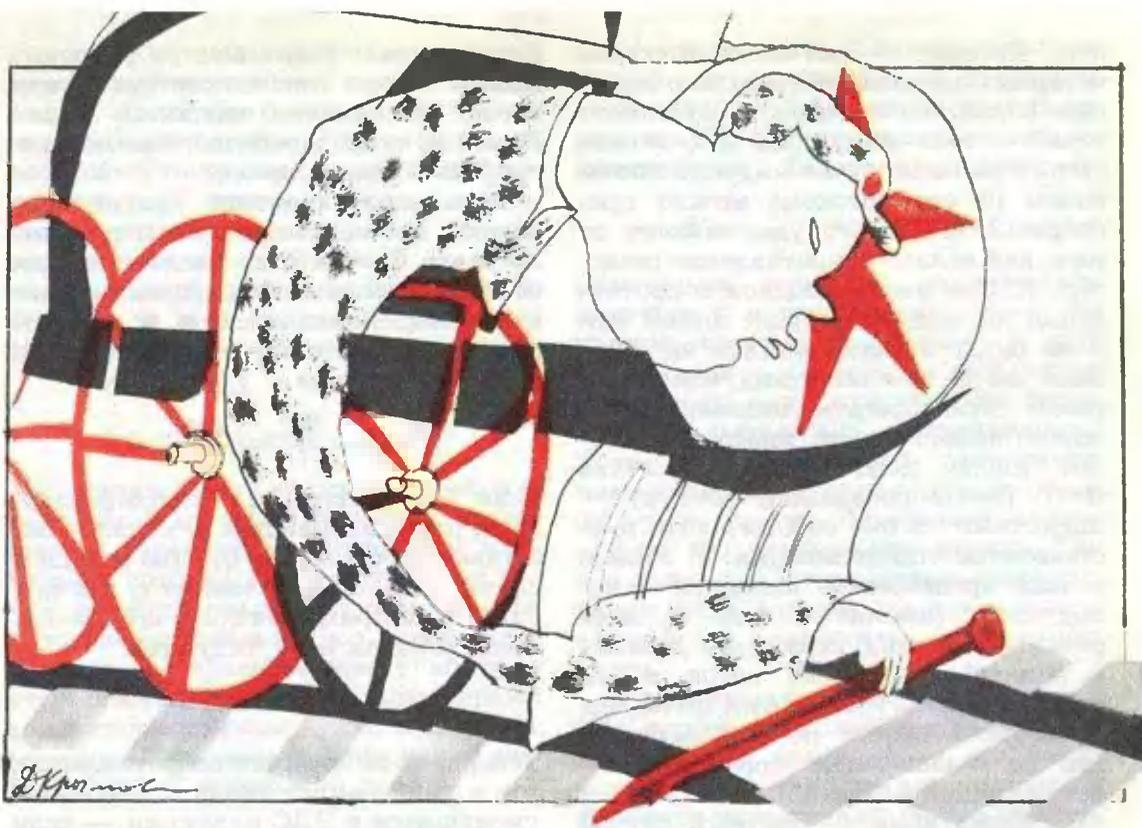
(Начало см. на с. 52)

Амстердам — 1954 г. (2 премии), Эдинбург — 1958 г. (2 премии), Стокгольм — 1962 г. (2 премии), Москва — 1966 г. (4 премии), Ницца — 1970 г. (4 премии), Ванкувер — 1974 г. (2 пре-

мии), Хельсинки — 1978 г. (4 премии), Варшава — 1983 г. (3 премии), Беркли — 1986 г. (3 премии). Итак, к настоящему времени всего лишь тридцать человек достигли математического Олимпа, двое из них — наши соотечественники. Следующий международный математический конгресс состоится 21—29 августа этого года

в японском городе Киото. Надеемся, что среди новых филдсовских лауреатов будут читатели нашего журнала.

Ю. Соловьев



Д. Кривоносов

Трактикун абитуриента

Явление самоиндукции

А. ЗИЛЬБЕРМАН

Начнем со стандартной задачи, которая есть чуть ли не во всех задачниках.

Задача 1. Параллельные проводящие рельсы соединены резистором сопротивлением R и помещены во внешнее магнитное поле, индукция которого равна B_0 и перпендикулярна плоскости рельсов (рис. 1). Еще один проводник, замыкающий рельсы, движется вдоль них с постоянной скоростью v_0 . Считая, что все сопротивление цепи сосредоточено в резисторе, найдите индукционный ток, протекающий по цепи.

Приведем обычное решение. Ток определяется электродвижущей силой индукции, а она — изменением магнитного потока. За малый промежуток времени Δt проводник сдвинется на $v_0 \Delta t$, поток изменится на $\Delta \Phi = B_0 l v_0 \Delta t$, и ток будет равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\Delta \Phi / \Delta t}{R} = \frac{B_0 l v_0}{R}.$$

Внимание! Это, решение содержит грубую ошибку, и ответ неверен! Подумайте — все ли мы учли, когда рассчитывали магнитный поток? Конечно, нет. Магнитный поток Φ в за-

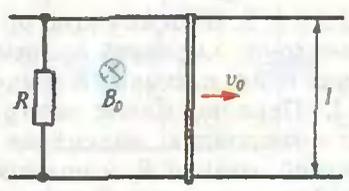


Рис. 1.

коне Фарадея — это полный поток, который определяется не только внешним полем, но и полем собственного тока — тока индукции. Но, может быть, в данном случае индукционным полем (и его потоком) можно пренебречь? А вот это уже зависит от того, как велико сопротивление резистора R . При очень большом сопротивлении ток индукции будет совсем мал и не будет заметно влиять на ЭДС. Если же R невелико, индукционным током пренебрегать нельзя, иначе можно ошибиться во много раз. Совсем плохо дело будет в случае $R=0$ (сверхпроводящий контур) — магнитный поток собственного тока становится определяющим. В общем, нельзя пренебрегать явлением самоиндукции (именно о нем и идет речь) — ток индукции дает добавку в полный магнитный поток и эта добавка важна. (Часто этим пытаются пренебречь просто по той причине, что не очень легко провести соответствующий расчет.)

Самоиндукция — частный случай общего явления электромагнитной индукции, выделяют его скорее по традиции. В чистом виде явление самоиндукции встречается в электротехнике и радиотехнике, где обычно контур изображают на схемах в виде катушки (так и резисторы, независимо от их конкретного устройства, на схемах выглядят одинаковыми прямоугольниками). Нужно иметь в виду, что магнитное поле возникает вокруг любого проводника с током, а значит, в любом случае можно говорить о магнитном потоке, энергии магнитного поля и т. д. Иными словами, даже небольшой кусочек провода имеет определенную индуктивность, которой далеко не всегда можно пренебрегать.

Разберем еще одну полезную задачу.

Задача 2. Плоский контур сделан из проволоки, имеющей полное сопротивление r ; его площадь S и индуктивность L . Первоначально контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией, равной B_0 и направленной перпендикулярно плоскости контура.

Внешнее поле очень быстро убирают. Каким станет ток в контуре сразу после выключения внешнего поля? Какой полный заряд протечет по контуру за большое время?

Начальное значение магнитного потока, пронизывающего контур, было равно $\Phi_0 = B_0 S$, но после того, как поле убрали скачком, поток не мог мгновенно измениться и в контуре возник ток, который скомпенсировал изменение потока:

$$I_0 = \frac{\Phi_0}{L} = \frac{B_0 S}{L}.$$

Если бы контур был сверхпроводящим, ток в дальнейшем не менялся бы, оставаясь равным I_0 . Однако в нашем случае есть сопротивление r , значит, падение напряжения составит $U = I_0 r$. Возникающая ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = U = \frac{B_0 S r}{L}.$$

Теперь, из-за наличия сопротивления, ток в цепи начнет спадать. При этом уменьшится и ЭДС индукции — если бы она оставалась неизменной, ток уменьшался бы по линейному закону и упал до нуля за время

$$\tau = \frac{L I_0}{r I_0} = \frac{L}{r}.$$

Обратите внимание на то, что этот отрезок времени не зависит от начального магнитного поля и определяется только параметрами самого контура — его индуктивностью и омическим сопротивлением. Разумеется, за такое время ток до нуля не спадет — чем меньше ток, тем меньше ЭДС индукции и тем медленнее ток спадает. Формально говоря, он вообще никогда до нуля не упадет, однако за время в 3—5 раз большее, чем τ , он уменьшится во много раз, и его энергия (именно за счет этой энергии и поддерживается ток в контуре) тоже составит очень малую часть начальной величины. В общем, на практике можно считать, что время спада тока до нуля в цепи с катушкой составляет (3—5) τ .

Мы не ответили еще на один вопрос — какой заряд протечет по контуру за большое время. Если отвечать

«в лоб», то пришлось бы находить закон изменения тока в цепи со временем, а потом брать интеграл — для нахождения заряда. Однако тут есть возможность применить красивый искусственный прием, сравнив совершенно разные выражения — для изменения магнитного потока за некоторый малый отрезок времени и протекшего за этот же промежуток времени заряда:

$$\Delta\Phi_i = \Delta B_i S,$$

$$\Delta q_i = I_i \Delta t_i = \frac{\mathcal{E}_i}{r} \Delta t_i = \frac{\Delta\Phi_i}{r}.$$

Мы видим, что суммарный заряд, протекший по контуру, прямо выражается через сумму изменений магнитного потока (полного потока, включая и собственный). Но собственный поток первоначально был равен нулю (до начала процесса ток в контуре отсутствовал) и через большое время тоже станет равным нулю, т. е. сумма изменений полного потока равна Φ_0 . Значит, весь протекший заряд

$$q = \frac{\Delta\Phi}{r} = \frac{\Phi_0}{r} = \frac{B_0 S}{r}.$$

Обратите внимание на то, что это заряд, протекший за большое время — время спада тока в контуре, т. е. внешнее поле убрали за малое время, а контур еще долго «не мог прийти в себя». Для магнитных явлений это обычное дело — на практике приходится предвидеть и принимать меры для того, чтобы последствия резкого изменения режима цепи, накопившей значительную энергию магнитного поля (пример — линия электропередачи), не оказались разрушительными.

Еще одна задача.

Задача 3. Катушку, индуктивность которой L , подключают к источнику с напряжением U_0 . Считая сопротивление цепи пренебрежимо малым, найдите ток в катушке через время t после подключения.

Напряжение на катушке после подключения к источнику равно U_0 . А чему равна ЭДС самоиндукции? Она тоже равна U_0 . Собственно, напряжение, возникшее на концах идеальной катушки при включении ее в цепь, это и есть ее ЭДС самоиндук-

ции (если катушка обладает сопротивлением, то напряжение на ее концах отличается от ЭДС самоиндукции на величину падения напряжения на сопротивлении). Теперь все просто:

$$I' = \frac{U_0}{L}, \quad I(t) = \frac{U_0}{L} t.$$

(Мы учли, что при подключении катушки к источнику ток через нее не мог измениться скачком — при скачке тока и связанном с ним скачке магнитного поля возникла бы бесконечно большая ЭДС самоиндукции.) Ясно, что пренебрегать сопротивлением цепи можно только при не очень больших токах. Идеальный источник — это упрощенная модель. Так что даже при очень малом сопротивлении цепи ток все же установится, а не будет возрастать до бесконечности.

При размыкании цепи с катушкой ЭДС индукции может достигать весьма больших значений, и это часто используют в технике для получения высоких напряжений — например, в цепях зажигания двигателей внутреннего сгорания.

Разберем такую задачу.

Задача 4. В схеме, изображенной на рисунке 2, катушку подключают к источнику на время $t = 0,1$ с, а затем отключают. До какого напряжения зарядится конденсатор? Элементы цепи будем считать идеальными, $L = 1$ Гн, $C = 1$ мкФ, $U_0 = 10$ В.

Перед размыканием цепи ток через катушку достигнет значения

$$I_{\text{к}} = \frac{U_0 t}{L}.$$

После размыкания ключа ток через катушку не прекратится, он найдет себе другой путь — через диод, заряжая конденсатор. По мере зарядки конденсатора напряжение на ка-

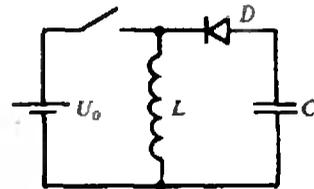


Рис. 2.

тушке (диод — идеальный, пока он открыт, катушка и конденсатор соединены параллельно) возрастает, ток спадает. Диод закроется в тот момент, когда ток упадет до нуля. Потерь энергии нет, значит, можно воспользоваться законом сохранения:

$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}, \quad U_m = \frac{U_0 t}{\sqrt{LC}} = 10^3 \text{ В.}$$

Если бы не диод, в цепи возникли бы колебания, а в нашем случае — энергия, накопленная в контуре, перекачалась бы в конденсатор.

Если ключ замыкать и размыкать периодически, то напряжение конденсатора можно использовать для питания высоковольтных цепей, что часто и делают (конечно, применяя не механические, а электронные переключатели).

И наконец, разберем задачу сложнее.

Задача 5. Через катушку, индуктивность которой $2L$, течет постоянный по величине ток I_0 от внешнего источника. Параллельный контур, составленный из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L , подключают параллельно первой катушке, после чего размыкают внешнюю цепь (рис. 3). Каким окажется максимальное напряжение конденсатора? Чему равно максимальное значение тока через катушку индуктивностью L ?

При подключении контура конденсатор заряжаться не будет, и ток через катушку индуктивностью L не потечет, так как при постоянной величине тока I_0 напряжение между концами катушки индуктивностью $2L$ равно нулю. Изменения начнутся после размыкания внешней цепи: конденсатор начнет заряжаться, и появится

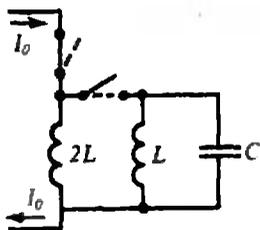


Рис. 3.

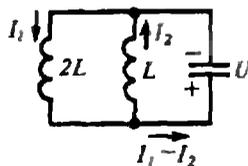


Рис. 4.

ток через катушку индуктивностью L (рис. 4). Катушки соединены параллельно, поэтому изменения магнитных потоков будут одинаковы для обеих катушек:

$$2L(I_0 - I_1) = LI_2$$

(здесь учтены направления токов, показанные на рисунке 4). Элементы цепи считаем идеальными — потерь энергии нет:

$$\frac{2LI_1^2}{2} = \frac{2LI_0^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2} + \frac{CU^2}{2}.$$

Если токи в катушке не равны, то конденсатор либо заряжается, либо разряжается. Условие максимальной напряженности на конденсаторе:

$$I_1 = I_2.$$

Тогда систему этих уравнений можно решить и найти U_m :

$$U_m = I_0 \sqrt{\frac{2L}{3C}}.$$

Условие максимальности (и минимальности) токов через катушки можно получить, если вспомнить, что нуль производной тока дает ЭДС индукции, равную нулю. Значит, в такие моменты конденсатор не заряжен (он подключен параллельно катушкам, и его напряжение равно ЭДС индукции любой из них) и вся энергия сосредоточена в катушках:

$$\frac{2LI_1^2}{2} = \frac{2LI_m^2}{2} + \frac{LI_m^2}{2}.$$

Объединив это уравнение и уравнение для потоков, получим

$$I_{2m} = \frac{4}{3} I_0.$$

Упражнения

1. Резистор сопротивлением $R = 100$ Ом подключен параллельно катушке индуктивностью $L = 2$ Гн. В данный момент по этому контуру течет ток $I_0 = 1$ А. Через какое время ток спадет до $I = 0,99$ А? Какое количество теплоты за это время выделится в резисторе? Какое количество теплоты выделится в резисторе за следующие 5 секунд?

2. Катушка состоит из 10 витков тонкого провода, намотанных на деревянный цилиндр вплотную друг к другу (получившаяся толщина катушки существенно меньше диаметра цилиндра). Доматаем в ту же сторону еще один виток. Во сколько раз увеличится индуктивность? А если этот виток доматать, сменив направление намотки на противоположное?

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1989 году

Предлагаем подборку задач письменных и устных вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Азербайджанский (1), Горьковский (2), Казанский (3), Киевский (15), Омский (4), Саратовский (5), Ташкентский (6) и институты — Горьковский политехнический (7), Киевский педагогический (8), Минский радиотехнический (9), Московский инженерно-строительный (10), Московский институт тонкой химической технологии (11), Рижский политехнический (12), Томский политехнический (13), Ярославский педагогический (14).

Математика

Алгебра

1 (6). В РОВД работают 140 сотрудников, 15 % из них имеют высшее юридическое образование. 3/14 окончили среднюю школу милиции, остальные подали документы на юридический факультет. Сколько человек подали документы на юрфак?

2 (9). Найдите число, зная, что 10 % его составляют 20 % от 16,5.

3 (3). На сколько процентов увеличится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 20 %, а другое — на 40 %?

4 (5). Дед старше своего внука в 5 раз. Если бы он был моложе на 16 лет, то он был бы старше своей внучки в 4 раза. Сколько лет деду, внуку и внучке, если про внука и внучку можно сказать, что отношение их возрастов есть число целое.

5 (9). Найдите двузначное число, у которого цифра единиц больше цифры десятков на 5, а утроенная сумма цифр равна самому числу.

6 (9). Проехав за час половину пути, шофер увеличил скорость машины на 15 км/ч и поэтому вторую половину пути проехал за 45 минут. Какой (в км) путь прошла машина?

7 (5). Первое целое число больше второго на 4, а число обратное к первому, более чем на $\frac{5}{4}$ превосходит обратное ко второму числу. Найдите эти числа.

8 (9). Два крана, работая одновременно, наполняют бассейн за 6 часов. За сколько часов наполнит этот бассейн первый кран, если из-

вестно, что он наполняет бассейн на 5 часов дольше, чем второй?

9 (8). Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В и встретились через два часа. Сколько времени потратил на путь АВ каждый, если тот, что вышел из А, пришел в пункт В на 1 ч. 40 мин. позже, чем другой пришел в А?

10 (6). Когда патрульная машина группы захвата получила приказ о преследовании преступника, расстояние между ней и машиной преступника было 3 км. Машина преступника уходит от машины группы захвата со скоростью 72 км/ч, а машина группы преследует ее со скоростью 75 км/ч. Какое расстояние будет между машинами через 4 мин.?

11 (6). Турист проехал в лодке по реке из города А в город В и обратно, затратив на это 10 часов. Расстояние между городами 20 км. Найдите скорость течения реки, зная, что турист проплыл 2 км против течения за такое же время, как 3 км по течению.

12 (8). Два всадника выезжают одновременно из А и В навстречу друг другу, и один прибывает в В через 27 минут, а второй в А через 12 минут после встречи. За какое время проехал каждый всадник путь АВ?

13 (8). Уборку урожая с участка начал один комбайн. Через 2 часа к нему присоединился другой комбайн, и после 8 часов работы вместе они собрали 80 % урожая. За сколько часов мог бы собрать урожай с участка каждый комбайн, если известно, что первому на это необходимо на 5 часов больше, чем второму?

14 (9). Если на заводе будут ежедневно сжигать 3,6 т топлива, то расходы на топливо за полгода составят 3333 рубля. Сколько рублей будет сэкономлено на топливе за тот же период, если ежедневно будут сжигать на 600 кг меньше?

15 (6). Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй — 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Сколько килограммов олова содержится в получаемом новом сплаве?

16 (2). Два автобуса вместили более 24 человек. Если из второго автобуса выйдут 15 человек, то удвоенное число оставшихся там людей будет меньше числа людей в первом автобусе. Если из первого автобуса выйдут 5 человек, то в 7 раз увеличенное число оставшихся там людей будет меньше числа людей во втором автобусе. Сколько людей в каждом автобусе?

17 (5). Бригаде водителей тяжелых грузовиков сообщили, что им предстоит перевезти груз от 170 до 195 т. Однако два грузовика оказались поломанными в пути, поэтому, чтобы доставить весь груз, пришлось в остальные грузовики догрузить по одной тонне. Сколько тонн груза было перевезено, если все грузовики были одинаково загружены?

18 (5). Некто решил накопить деньги на цветной телевизор, который может стоить от 550 до 640 рублей. Для этого он откладывал каждый месяц одну и ту же сумму денег. После того

как покупка была сделана, он рассудил что, если бы он откладывал ежемесячно на 5 рублей меньше, то копить пришлось бы всего на 4 месяца дольше. Сколько стоил телевизор?

19 (5). На одинаковых грузовиках перевезли 10560 кг груза. Число легковых автомобилей, на которых перевезли 560 кг, было на 6 меньше, чем грузовиков. Сколько было легковых автомобилей, если каждый из них перевозил груза меньше, чем грузовик, более чем на 1 т (транспорт грузился равномерно)?

20 (5). Известно, что в коробке лежит 40 карандашей. Число синих карандашей в 4 раза больше числа зеленых, а числа красных и зеленых карандашей кратны. Если в коробку добавить 22 синих карандаша, то их станет в 5 раз больше красных. Сколько лежит в коробке карандашей цвета, отличного от красного, синего и зеленого?

21 (1). Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Определите второй член этой прогрессии.

22 (1). Сумма первых 12 членов арифметической прогрессии равна 354. Отношение суммы членов, стоящих на четных местах, к сумме членов, стоящих на нечетных местах, равно 32:27. Найдите разность этой прогрессии.

23 (1). Числа m, n, p , отличные от нуля, образуют геометрическую прогрессию, а числа $m+n, n+p, p+m$ — арифметическую. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

24 (1). Три отличных от нуля действительных числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел, взятые в том же порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой геометрической прогрессии.

25. Вычислите

а) (9). $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

б) (8). $\frac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \frac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$.

в) (3). $\log_a bc$, если $\log_b a = 4$, $\log_c a = 2$.

г) (9). $\frac{5^{18} 20}{20^{18} 5^{11}}$.

д) (12). $2^{\log_2(2-\sqrt{3})} + 3^{\log_3(3+\sqrt{3})}$.

е) (3). $\sin 150^\circ - \cos 120^\circ + \operatorname{ctg} 315^\circ + \operatorname{tg}(-135^\circ)$.

ж) (4). $\arccos\left(\sin \frac{\pi}{8}\right)$.

з) (12). $\sin(90^\circ - \alpha)$, если $\sin \alpha = \sqrt{0,51}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

26 (9). Найдите $x+y$, если $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13 = 0$.

27. Упростите выражения

а) (1). $(1-a^2) : \left(\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a} \right) \right) + 1 - 1-a$.

б) (13). $\left(\frac{(a^{3/4} - b^{3/4})(a^{3/4} + b^{3/4})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \sqrt{ab} \right) \times \frac{\sqrt{2,5(a+b)}^{-1}}{10^{-0,5}}$.

в) (8). $\frac{1-m^{-2}}{m^{1/2}-m^{-1/2}} - \frac{2}{m^{3/2}} + \frac{m^{-2}-m}{m^{1/2}-m^{-1/2}}$.

г) (9). $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$.

28. Решите уравнения

а) (6). $x^2 + 2x + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$.

б) (12). $3\left(x + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$.

в) (12). $\frac{27}{x+5} + \frac{1}{x-5} = 2$.

г) (12). $\sqrt{6x+1} - \sqrt{x-3} = \sqrt{3x+4}$.

д) (13). $x^2 + \sqrt{x^2 + 20} = 22$.

е) (14). $\sqrt{x-7} - \frac{21}{\sqrt{x-7}} + \sqrt{2x} = 0$.

ж) (10). $\frac{25-9x}{3} + (\sqrt{3x-2}-3)(\sqrt{3x-2}+1) = 2$.

з) (9). $\sqrt{8-2x+x^2} = \sqrt{x^2+2} + \sqrt{6-2x}$.

и) (3). $4^{x-2} + 2 \cdot 4^{x-1} = 9$.

к) (13). $2^{\sqrt{x}} - 5 \cdot 2^{0,5\sqrt{x}} = 24$.

л) (10). $3 \cdot 5^{x+1} + 6 \cdot 5^{-(x+1)} = \frac{81}{5^{x-1}}$.

м) (1). $(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}})^x + (\sqrt[3]{4+\sqrt{15}})^x = 8$.

н) (10). $\lg^2 x - 2 \lg 10x - 6 = 0$.

о) (7). $81 \cdot 3^{2x} + 45 \cdot 6^x = 9 \cdot 2^{2x+2}$.

п) (5). $\sqrt{\log_2 x} + \sqrt{\log_2 2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

р) (10). $2 \log_{0,3} \sqrt{2-x} = \log_{0,3}(5+x-x^2)$.

с) (9). $2x \log_2 3 = \log_2(\lg^2 x + 9^x - 1)$.

т) (5). $\sqrt{\log_3(9x-3)} = \log_3\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

у) (13). $5^{\log_2 x} + x^{\log_2 5} = 50(4 - 2^{0,5 \log_2 9})$.

ф) (1). $2^{\log_2 x} + 3 \cdot x^{\log_2 2} = 4$.

х) (1). $x^{2 \log_2 x} = 4x^3$.

ц) (12). $9 \cdot x^{2 - \log_2 x} = (\sqrt{3})^{2 \log_2 x - 8}$.

29. Решите тригонометрические уравнения

а) (6). $8 \sin^2 x - 7 \cos^2 x = 8$.

б) (6). $8 \cos^2 x - 7 \sin 2x = 5$.

в) (1). $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$.

г) (1). $\cos 2x(\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 6x) = 4 \sin 6x \cdot \sin 8x$.

д) (2). $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin x + \sqrt{3}$.

е) (12). $\sin x + \operatorname{tg} x = \frac{1 - \cos x}{\cos x} - \frac{\cos x}{2 \sin x}$.

ж) (4). $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$.

з) (5). $1 - (\cos x + \sin x) \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2\left(\frac{3}{2}x\right)$.

и) (5). $\cos^2 3x + \cos^2 2x = \sin^2 6x + \sin^2 7x$.

к) (1). $\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3x}{2} = 3 \cos^2 \frac{x}{2}$.

л) (8). $4(1 + \cos x) = 3 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

м) (10). $\cos^2 3x - \cos^2 5x = \cos(\pi + 10x)$.

н) (14). $5 \sin^2 2x = 2 \cos^2 x + 1 + 5 \cos^2 2x$.

- о) (13). $3 \sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x = 1$.
 п) (5). $\frac{2 \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x + 2 \sin x} = \sin x$.
 р) (2). $2(\sin^3 x - \cos^3 x) = 1 + (\sin x + \cos x)^2$.
 с) (2). $\sin \frac{x}{4} + 3 \cos x = 4$.
 т) (1). $16 \cos z \cdot \cos 2z \cdot \cos 4z \cdot \cos 8z = 1$.

30. Решите неравенства

- а) (10). $x(x-1) - \frac{(x-4)^2}{4} > \frac{5x+4}{2}$.
 б) (2). $4x^4 - 9x^2 + 2 \leq 0$.
 в) (9). $x^2 - 4(\sqrt{x})^2 - 12 \leq 0$.
 г) (9). $\frac{x^2 - 4x}{x^2 + 4x - 32} < 0$.
 д) (6). $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x+2}$.
 е) (5). $|5x+1| - |2x-4| \geq 3$.
 ж) (5). $x^2 + |5x-4| - 1 \leq |3x-2|$.
 з) (5). $x^2 + 2|x-1| + 7 \leq 4|x-2|$.
 и) (9). $|x^2 - 6x + 8| > x^2 - 6x + 8$.
 к) (5). $\sqrt{x^2 + 3x - 18} > 2x + 3$.
 л) (9). $\sqrt{-x^2 + 10x - 16} + 3x^2 > -1$.
 м) (12). $(x-2)\sqrt{-x^2 + 4x + 5} \geq 0$.
 н) (3). $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2 + x - 3} \leq \frac{8}{27}$.

- о) (4). $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}$.
 п) (5). $2x \cdot 7^{x-1} \geq |x|$.
 р) (5). $x \cdot 3^{|x-1|} \geq 5x$.
 с) (13). $8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1} \geq 9^{\sqrt{x}}$.

- т) (7). $3^{x-2} < \frac{3}{9^{1/x}}$.
 у) (12). $(x-2)^{2x^2-5x} > 1$.

ф) (10). $(\sqrt{2})^{2x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-6x} > 1$.

х) (10). $\frac{4^x - 2}{2^{2x} - \sqrt{2}} < 1$.

ц) (13). $\lg^2 x - 2 \lg x - 8 \leq 0$.

ч) (9). $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{x} \geq 2$.

ш) (10). $2 \log_2(x+2) < \log_2(x+5) + 2$.

э) (2). $\log_3(3^x - 8) \leq 2 - x$.

ю) (7). $\log_x \sqrt{x+12} > 1$.

я) (2). $\log_3 \log_2 \log_2(x^2 + x + 2) \leq -1$.

31. Решите тригонометрические неравенства

- а) (4). $3 \sin x > 2 \cos^2 x$.
 б) (4). $2 \cos^2 x + \sin x - 1 < 0$.
 в) (2). $\cos^2 x - \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x - 2 \leq 0$
 при условии $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

г) (8). $\frac{15}{\cos x + 1} < 11 - 2 \cos x$.

д) (8). $\frac{2}{\operatorname{ctg} x + 1} > 2 - \operatorname{ctg} x$.

32. Решите системы уравнений

а) (4).
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}, \\ \log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 1. \end{cases}$$

б) (8).
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ xy = 9. \end{cases}$$

в) (8).
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x\sqrt{y}} + \sqrt{x\sqrt[3]{y}} = 12, \\ xy = 64. \end{cases}$$

г) (2).
$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}, \\ \frac{1}{9} \cdot 3^y = 3^x. \end{cases}$$

д) (2).
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ 4 \sin x \cdot \sin y = 3. \end{cases}$$

33 (5). При каких a имеет решение система

$$\begin{cases} 3^{2x+y} + 3^{x+3y} = 3, \\ 3^y + \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3y} = 3^{a-2x} \end{cases}$$

34 (5). При каких a система имеет единственное решение? Найдите это решение.

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^2, \\ 2^{4x} - 2^{x+3y+1} = 3 \cdot 2^{2+2y} - 2^{2y+2}. \end{cases}$$

35 (9). При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 31y = -23, \\ 2x + 2ay = 23. \end{cases}$$

не имеет решений?

36 (6). Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $9x^2 - 18x + 1 = 0$.

37 (9). x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - x + q = 0$. Найдите q , если $x_1^3 + x_2^3 = 19$.

38 (3). Сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + p = 0$ равна 12. Найдите p .

39 (9). Сколько существует целых значений a , при которых уравнение $1 + a \cos x = (a+1)^2$ имеет хотя бы одно решение?

40 (11). Найдите наибольшее целое значение a , при котором уравнение $x^4 - 2x^2 + 0,125a = 0$ имеет 4 действительных различных корня.

41 (11). Найдите число b , при котором один из корней уравнения $x^3 - 5x^2 + 3x + b = 0$ равен $2 + \sqrt{5}$.

42 (11). При каком значении a уравнение $|\log_3(x+2)| = -(x+a)^2$ имеет решения?

43 (11). При каком значении a графики функций

$$f_1(x) = 3^{2-|x|} \text{ и } f_2(x) = x^2 + a$$

пересекаются в точке, лежащей на оси OY ?

44 (11). При каком значении a графики функций

$$f_1(x) = |\log_3(a-x)| \text{ и } f_2(x) = -|x-3|$$

пересекаются в точке, лежащей на оси OX ?

45 (5). Найдите наибольшее число x , удовлетворяющее для некоторого натурального n системе уравнений

$$\begin{cases} 3nx + y = -30, \\ \frac{y}{2n} - \frac{3x}{2} = n + \frac{15}{n} + 196. \end{cases}$$

Аналитика

1 (13). Постройте графики функций $y = -x|x| + 1$ и $y = 3$ и найдите число их точек пересечения.

2 (4). Постройте график функции

$$y = x^2 - |x| + 2.$$

3 (7). Постройте фигуру, ограниченную графиками функций

$$y = |x - 1| - |x + 1| \text{ и } y = x^2 - 1.$$

4 (7). Найдите производную функции $y = 1 + x + \operatorname{tg} 2x$.

5 (1). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ на отрезке $[-1; 1]$.

6 (10). Найдите точки максимума и минимума функции $f(x) = -x^3 - 9x^2 + 3$.

7 (12). Найдите наименьшее значение функции $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

8 (10). Найдите интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^4 - 32x^2 - 26$.

9 (11). При каком значении x функция

$$f(x) = 5^{2x+1} + \frac{1}{5^{2x+1}} + 2$$

принимает наименьшее значение?

10 (6). Найдите наименьшее значение функции $y = 2x \ln x - x \ln 49$ на отрезке $[1; 7]$.

11 (11). Среди всех треугольников, тупой угол которых равен 150° , а сумма сторон, образующих этот угол, равна 1,6, найдите тот, площадь которого максимальна. В ответе укажите площадь этого треугольника.

12 (11). Боковая сторона равнобокой трапеции равна ее меньшему основанию, длина которого равна 13. Какова должна быть длина большего основания, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

13 (11). Среди всех правильных четырехугольных пирамид с боковой поверхностью 4 найдите ту, у которой боковое ребро минимально. В ответе укажите длину стороны основания такой пирамиды.

14 (11). Вычислите площадь фигуры, образованной осями координат и касательными, проведенными из точки $M(3; 4)$ к кривой $y = -4x - x^2$.

15 (7). Найдите радиус основания R и высоту H цилиндра, имеющего при данном объеме $V = 16\pi$ наименьшую полную поверхность.

16 (2). Рассматриваются всевозможные цилиндры заданного объема V . В каждый из них вписана правильная 7-угольная призма. Найдите высоту той из этих призм, площадь полной поверхности которой минимальна.

17 (4). Каковы должны быть размеры открытого бассейна объемом 32 м^3 с квадратным дном, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала?

Геометрия

1 (7). Даны вектор $\vec{a} = (-2; 1; 4)$ и точка $M(1; 0; -1)$. Найдите координаты точки N , если $2\vec{a} + 3\vec{MN} = \vec{0}$.

2 (7). В треугольнике ABC вектор $\vec{AB} = \vec{m}$ и вектор $\vec{AC} = \vec{n}$. Разложите по векторам \vec{m}

и \vec{n} вектор \vec{BM} (точка M делит отрезок AC в отношении $AM:MC = 1:3$).

3 (14). Выясните, подобны ли треугольники, если вершины одного находятся в точках $A(2; 1; -2)$, $B(-1; 4; 1)$, $C(3; -1; 5)$, а другого — в точках $M(-3; -7; 0)$, $K(-1; 3; 2)$, $P(5; 0; -1)$.

4 (14). Вычислите координаты центра $M(x; y)$ окружности, описанной около треугольника ABC , если известны координаты его вершин: $A(2; 1)$, $B(-1; 4)$, $C(3; -1)$.

5 (1). В треугольнике ABC $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между вершиной C треугольника и точкой касания окружности с катетом AB .

6 (9). Высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, равна 4. Угол при вершине равен $\frac{2}{3}\pi$. Найдите длину основания треугольника.

7 (3). В равносторонний треугольник ABC вписана окружность и проведен отрезок MN , который касается ее и параллелен стороне AB . Определите периметр трапеции $AMNB$, если длина стороны AB равна 18.

8 (2). Из точки, расположенной внутри правильного треугольника ABC , длина стороны которого равна a , опущены перпендикуляры на стороны AB , BC , CA . Длины перпендикуляров соответственно равны m , n , k . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

9 (2). Точка N лежит на стороне BC треугольника ABC , точка M на продолжении стороны AC за точку A , при этом $AM = AC$, $BN:NC = 3:4$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB ?

10 (9). Площадь параллелограмма со сторонами 5 и 8 равна 32. Чему равен косинус большего угла параллелограмма?

11 (6). На плоскости лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого катеты имеют длину a . Поворотом в этой плоскости данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на угол 45° получается другой равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите площадь четырехугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.

12 (5). В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AD равна 8. Биссектриса угла ADC пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность с центром в точке O , касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке L . Найдите величину угла KOL , если длина KL равна 2.

13 (2). Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD . Длина диагонали AC равна a , длина боковой стороны BC равна b . Найдите площадь трапеции.

14 (3). Сумма квадратов параллельных сторон трапеции равна 288. Определите длину отрезка, параллельного этим сторонам и делящего площадь трапеции пополам.

15 (5). В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна 4. Биссектриса угла BAD пе-

ресекает прямую BC в точке E . В треугольник ABE вписана окружность с центром в точке O , касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке N . Найдите величину угла MON , если длина отрезка MN равна 2.

16 (2). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна a , сторона AC равна b . Из вершин B и C опущены перпендикуляры BK и CN на диагональ AD , причем $AK < AN$. Найдите отношение $OC:OA$, где O — точка пересечения диагоналей четырехугольника, если $AK = k$, $AN = n$.

17 (2). В правильной треугольной пирамиде известна высота H и величина двугранного угла 2α , образованного боковыми гранями. Найдите длину стороны основания.

18 (8). Основанием пирамиды является правильный треугольник: одна из боковых граней перпендикулярна к основанию, а две другие наклонены к нему под углом α . Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?

19 (12). Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60° . Сторона основания 2. Определите боковую поверхность пирамиды.

20 (5). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной 2. Боковое ребро пирамиды SA перпендикулярно плоскости основания. На ребре SC выбрана точка L так, что $|SC| = 3|SL|$. Найдите расстояние между прямой SA и прямой, проходящей через точку L и середину ребра SB .

21 (5). Найдите плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды, если этот угол равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

22 (5). Длина стороны правильного треугольника, лежащего в основании пирамиды, равна 3. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна основанию, а площади двух других боковых граней равны 5 и 4. На какие по величине отрезки высота пирамиды делит сторону основания?

23 (5). В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и углом ACB , равным 120° . Боковая грань, опирающаяся на AB , перпендикулярна основанию пирамиды. Площади двух других боковых граней равны 3 и 2. Найдите стороны треугольника ABC , если сторона AB делится высотой пирамиды на отрезки, длины которых относятся как 2:1.

24 (11). В правильной треугольной пирамиде через сторону основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость, которая оказалась перпендикулярной этому ребру. Найдите высоту боковой грани (апофему) пирамиды, если сторона основания равна 1.

25 (8). Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 5 и 8. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60° . Найдите высоту пирамиды.

26 (5). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC . Боковое ребро пирамиды SA перпендикулярно плоскости основания. Найдите объем пирамиды, если величина угла между прямой SA и прямой, проходящей через точку C и середину

ребра SB , равна 60° , а расстояние между этими скрещивающимися прямыми равно 2.

27 (1). Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный d . Найдите объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен β .

28 (1). Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен α . Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β . Радиус шара, описанного около пирамиды, равен R . Найдите объем пирамиды.

29 (1). Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует со стороной основания угол α . Радиус шара, описанного около пирамиды, равен R . Найдите полную поверхность этой пирамиды.

30 (4). В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник с диагональю 10. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом β . Найдите площадь поверхности и объем шара.

31 (4). Найдите двугранный угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием, равен α .

32 (14). Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при точке B ; ребро $AD = a$ и перпендикулярно основанию; ребра AD и CD составляют с ребром BD углы α и β . Определите объем пирамиды и расстояние от точки C до плоскости ABD .

33 (10). Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует с высотой пирамиды угол 45° . Длина бокового ребра равна 2. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

34 (13). Основанием пирамиды служит ромб со стороной, равной 6 и острым углом в 30° . Двугранные углы при основании равны 60° . Найдите полную поверхность пирамиды.

35 (6). В основании пирамиды $SABCD$ с вершиной S лежит равнобокая трапеция $ABCD$ с меньшим основанием $AB = a$ и острым углом α . Высота SO пирамиды равна h . Прямая AO пересекает сторону CD основания в точке K , являющейся ее серединой. Найдите угол, образованный боковой гранью SBC с плоскостью основания, если $AO:OK = 8:1$ и $\angle AOB = 90^\circ$.

36 (1). Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм со сторонами a , b и углом между ними 30° . Найдите объем параллелепипеда, если его боковая поверхность равна S .

37 (5). В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью получается ромб с острым углом 60° . Под каким углом пересекает плоскость сечения боковые ребра параллелепипеда?

38 (10). Основание наклонного параллелепипеда — прямоугольник с длинами сторон 5 и 12. Боковое ребро равно диагонали основания и образует с плоскостью основания угол 30° . Найдите объем параллелепипеда.

39 (14). Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб со стороной a

и острым углом α . Меньшая диагональ параллелепипеда образует с основанием угол β . Определите объем параллелепипеда.

40 (5). Через диагональ AC квадрата, лежащего в основании прямого параллелепипеда, и вершину другого основания параллелепипеда проведена плоскость так, что в сечении получился треугольник ABC с углом при вершине B в два раза большим, чем угол между плоскостью сечения и основанием параллелепипеда. Найдите угол ABC .

41 (5). В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью получается ромб. Найдите внутренние углы ромба, если двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен 30° .

42 (13). Высота конуса равна 8, а образующая — 10. Определите радиус вписанного шара.

43 (8). Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a ; одна из боковых граней перпендикулярна к основанию и является ромбом, меньшая диагональ которого равна s . Найдите объем призмы.

Физика*)

Механика

1(9). Пловец переплывает реку по прямой, перпендикулярной берегу. Определите скорость течения, если численное значение скорости пловца относительно воды в $\sqrt{2}$ больше скорости течения. Скорость пловца относительно берега $v=0,5$ м/с.

2(10). Тело, падающее с высоты h на поверхность земли, проходит за последнюю секунду падения $1/4$ часть всего пути. Определите высоту и время падения.

3(9). С какой минимальной скоростью следует бросить под углом $\alpha=45^\circ$ к горизонту камень, чтобы он достиг высоты $h=2,5$ м? Сопротивление воздуха не учитывать.

4(9). Два тела одновременно брошены из одной точки. Начальная скорость первого тела равна $v_1=10$ м/с и направлена вертикально вверх, второго — $v_2=20$ м/с и направлена под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту. Определите расстояние между телами спустя секунду. Сопротивлением воздуха пренебречь.

5(7). С наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, без трения соскальзывает тело. Начальная скорость тела равна нулю. Определите (выведите формулу), как зависит скорость тела от пройденного пути s . За какое время от начала движения тело достигнет основания наклонной плоскости, если в начальный момент тело находилось на высоте h от основания?

6(13). Шкив, радиус которого $R=20$ см, приводится во вращение грузом, подвешенным на нерастяжимой невесомой нити, постепенно сматывающейся со шкива. В начальный момент груз был неподвижен, а затем стал опускаться с ускорением $a=2$ см/с². Определите угловую

скорость шкива в момент времени, когда груз пройдет путь $s=100$ см.

7(9). Масса некоторой планеты в 2 раза больше массы Земли, а радиус равен радиусу Земли. Определите модуль ускорения свободного падения на поверхности этой планеты.

8(13). Груз массой $m=50$ кг перемещается по горизонтальной плоскости под действием силы, равной $F=300$ Н и направленной под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту. Коэффициент трения груза о плоскость $\mu=0,1$. Определите ускорение движения груза.

9(9). К телу массой $m=0,5$ кг, лежащему на поверхности земли, прикрепили вертикально расположенную невесомую пружину, жесткость которой $k=300$ Н/м. Определите модуль силы давления тела на поверхность, если пружина сжата на $\Delta l=2$ см.

10(7). Чему должен быть равен минимальный коэффициент трения скольжения между шинами колес автомобиля и поверхностью наклонной дороги с уклоном $\alpha=30^\circ$, чтобы автомобиль мог двигаться по ней вверх с ускорением $a=1$ м/с²? При движении колеса проскальзывают относительно дороги.

11(9). Три грузика массой $m=0,02$ кг каждый связаны двумя нитями и подвешены с помощью третьей нити к потолку. Найдите модуль силы натяжения той нити, которая растянута менее других. Жесткости нитей одинаковы.

12(2). Тело, закрепленное на невесомом нерастяжимом шнуре длиной $l=60$ см, движется по окружности в горизонтальной плоскости (рис. 1). Шнур образует с вертикалью угол $\alpha=45^\circ$. Найдите период вращения тела.

13(9). Однородная лестница массой $m=6$ кг и длиной $l=3$ м приставлена к стенке и образует с ней угол $\alpha=30^\circ$. Определите момент силы тяжести, действующей на лестницу, относительно оси, проходящей через нижний ее конец параллельно ступенкам.

14(9). На тело массой $m=1$ кг, брошенное с поверхности земли вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=11$ м/с, действует постоянная сила сопротивления, равная $F=1$ Н. Определите работу силы тяжести за время подъема тела до максимальной высоты.

15(9). Максимальная высота подъема тела массой $m=2$ кг, брошенного с поверхности земли с начальной скоростью $v_0=10$ м/с, составляет $h=3$ м. Определите кинетическую энергию тела в момент достижения максимальной высоты. Сопротивлением воздуха пренебречь.

16(9). Какую минимальную среднюю мощность должен развить кузнечик массой $m=0,01$ кг для прыжка на высоту $h=1$ м относительно поверхности земли? Время отталкивания $\tau=0,2$ с. Размерами кузнечика пренебречь.

17(2). На дощечке укреплен ствол пружинного пистолета (рис. 2). Дощечка положена на гладкий горизонтальный стол. Пистолет заряжен шариком массой $m=20$ г, а масса дощечки вместе с пистолетом $M=200$ г. Легкая пружина жесткостью $k=2,2$ Н/см сжата до длины $l=5$ см при свободной длине $l_0=10$ см. Определите скорости разлета шарика и дощечки после выстрела. Оцените время выстрела (время выталкивания шарика пружиной).

*) Во всех задачах табличные данные считайте известными.

18(7). По рельсам катится тележка массой M со скоростью v . Человек массой m а) прыгает с места на тележку перпендикулярно рельсам; б) прыгает с тележки перпендикулярно рельсам. Как изменится скорость тележки в обоих случаях? Трение пренебрежимо мало.

19(3). Абсолютно упругий шарик, подвешенный на нити длиной l , отклоняют на угол α и отпускают (рис. 3). В нижней точке он сталкивается с таким же шариком, висящим на нити длиной R . При каком минимальном значении угла α второй шарик после удара будет двигаться по окружности радиусом R вплоть до точки A ?

20(15). Колена U-образного сосуда удалены друг от друга на $l=15$ см. Найдите максимальную разность уровней воды в них, если сосуд движется с горизонтальным ускорением $a=6$ м/с².

Молекулярная физика. Тепловые явления

1(10). В баллоне емкостью $V=100$ л при нормальных условиях содержится $m=8,9 \times 10^{-3}$ кг газа. Определите молярную массу этого газа.

2(7). Определите плотность идеального газа при температуре $t=100$ °С и давлении $p=10^5$ Па. Определите также массу одной молекулы этого газа, если известно, что молярная масса газа $M=32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

3(2). Посередине запаянной с обоих концов горизонтальной трубки длиной $L=100$ см находится столбик ртути длиной $l=20$ см. Трубку ставят вертикально, и столбик ртути смещается на $h=10$ см. До какого давления был откачан воздух в трубке?

4(9). В ходе изохорического охлаждения давление газа уменьшилось на $\Delta p=100$ кПа. Определите (в килопаскалях) начальное давление, если абсолютная температура газа уменьшилась в 1,5 раза.

5(7). На дне цилиндра, заполненного газом, лежит шар. До какого давления надо сжать газ, чтобы шар поднялся вверх? Считать, что газ при больших давлениях подчиняется уравнению Менделеева—Клапейрона. Температура газа постоянна и равна $t=20$ °С, молярная масса газа $M=29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, плотность шара $\rho=7,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

6(3). Два одинаковых сосуда соединены трубкой, объемом которой можно пренебречь. Система наполнена газом под давлением p_0 . Во

сколько раз нужно изменить температуру газа в одном из сосудов, чтобы давление во всей системе стало p_1 ?

7(9). Два моля идеального одноатомного газа расширяются без теплообмена с окружающей средой. Температура газа в ходе расширения уменьшилась на $\Delta T=10$ К. Определите работу, совершенную газом при расширении.

8(7). Один моль идеального газа участвует в некотором процессе, изображенном на рисунке 4 в p, V координатах, проходя последовательно состояния 1, 2, 3, 4, 1. При этом $V_1=V_3=2V_0$, $V_4=V_0$, $V_2=4V_0$, $p_1=p_2=2p_0$, $p_3=p_4=p_0/2$. Найдите работу, совершенную газом за этот цикл (выразив ее через p_0 и V_0).

9(9). В p, V координатах, где p — давление в килопаскалях, а V — объем в литрах, график циклического процесса в идеальном газе имеет вид прямых, соединяющих точки (100; 3), (200; 3) и (200; 5). Определите работу газа за цикл.

10(9). В цилиндрическом сосуде поршень массой $m=100$ кг и площадью $S=0,01$ м² начинает двигаться вверх. Давление газа под поршнем постоянно и равно $p=600$ кПа, атмосферное давление $p_0=100$ кПа. Определите скорость поршня, когда он пройдет путь $l=1,8$ м. Трение не учитывать.

11(9). Тепловая машина работает по циклу Карно, и ее КПД $\eta=60$ %. Во сколько раз количество теплоты, полученное при изотермическом расширении рабочего вещества, больше количества теплоты, отданного при изотермическом сжатии?

12(18). Чтобы охладить $V=4,5$ л воды от $t_1=30$ °С до $t_2=10$ °С, в воду бросают кусочки льда при температуре $t_3=0$ °С. Какое количество льда потребуется для охлаждения воды?

13(13). Свицовая гиря падает на землю и ударяется о препятствие со скоростью $v=330$ м/с. Какая часть гири (в процентах) расплавится, если все тепло, выделяемое при ударе, поглощается гирей? Температура гири в момент удара $t=27$ °С.

14(15). В одной комнате площадью $S_1=10$ м² относительная влажность воздуха $\phi_1=65$ %, в смежной, площадью $S_2=15$ м², — $\phi_2=40$ %. Вычислите относительную влажность после объединения комнат в одну. Температура воздуха постоянна.

Основы электродинамики

1(3). Два одинаковых заряженных шарика притягиваются друг к другу. После того как

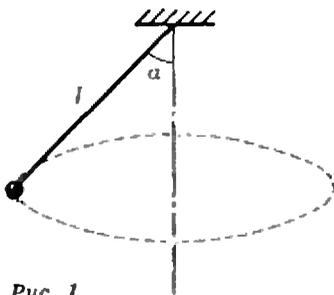


Рис. 1.



Рис. 2.

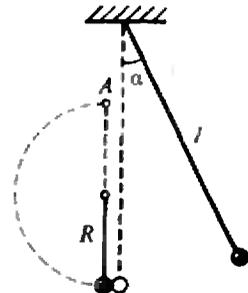


Рис. 3.

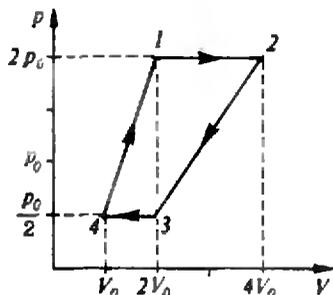


Рис. 4.

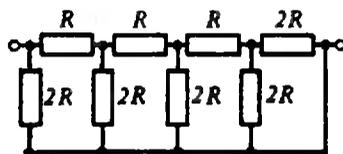


Рис. 5.

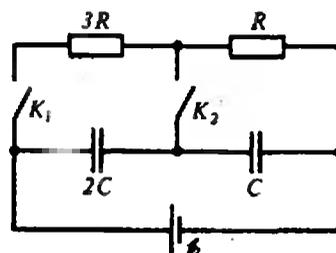


Рис. 6.

шарики были приведены в соприкосновение и раздвинуты на расстояние в $n=2$ раза большее, чем прежде, сила взаимодействия между ними уменьшилась в $m=12$ раз. Каков был заряд первого шарика до соприкосновения, если заряд второго шарика был $q=1$ Кл?

2(15). Металлическая сфера радиусом R имеет положительный заряд q . Электрон поместили на расстоянии h от поверхности сферы и отпустили. С какой скоростью в вакууме он достигнет поверхности сферы? Эффектов СТО не учитывать.

3(9). Электрон с кинетической энергией $W=120$ эВ влетает в плоский конденсатор под углом $\alpha=30^\circ$ к пластинам. Определите разность потенциалов электрического поля между точками влета и вылета электрона из конденсатора, если электрон вылетает из конденсатора под углом $\beta=45^\circ$ к пластинам.

4(3). Из куска проволоки сопротивлением $R=100$ Ом сделано кольцо. В каких точках следует присоединить провода, подводящие ток, чтобы сопротивление между ними стало $r=9$ Ом?

5(8). Определите общее сопротивление электрической цепи, изображенной на рисунке 5.

6(13). Вольтметр, внутреннее сопротивление которого $R_1=50$ кОм, подключен к источнику вместе с дополнительным сопротивлением $R_2=120$ кОм. При этом вольтметр показывает напряжение $U=100$ В. Определите напряжение на зажимах источника.

7(2). В схеме, изображенной на рисунке 6, ЭДС батареи $\mathcal{E}=60$ В, ее внутреннее сопротивление равно нулю. Определите разности потенциалов на конденсаторах в случаях:

- ключи K_1 и K_2 замкнуты;
- ключ K_1 замкнут, K_2 разомкнут;
- ключ K_1 разомкнут, K_2 замкнут.

8(13). Рассчитайте длину никелиновой проволоки кипятильника, с помощью которого можно в течение $t=1$ ч довести до кипения $m=10$ кг воды, взятой при температуре $t=10^\circ\text{C}$, если его КПД $\eta=84\%$, напряжение в сети $U=120$ В, поперечное сечение проволоки $S=5 \cdot 10^{-7}$ м².

9(9). Обмотка электродвигателя постоянного тока сделана из провода общим сопротивлением $R=2$ Ом. По обмотке работающего двигателя, включенного в сеть с напряжением $U=110$ В, течет ток $I=11$ А. Определите КПД двигателя (в процентах).

10(10). Сколько цинка было получено при электролизе раствора ZnSO_4 , если затрачена энергия $W=2$ кат. ч и разность потенциалов между зажимами ванн $U=2$ В?

11(9). За $t=1$ ч на площади $S=1$ м² железного листа при электролизе осаждается $m=576$ г двухвалентного цинка. Плотность тока в электролитической ванне $j=500$ А/м². Найдите по этим данным число Фарадея (в килокулонах на моль).

12(9). Проволочный квадрат с током находится в однородном магнитном поле. Плоскость квадрата перпендикулярна магнитным линиям. Определите (в градусах) угол между силами Ампера, действующими на противоположные стороны квадрата.

13(15). Протон влетает в однородное магнитное поле, занимающее полупространство $x \geq 0$, со скоростью \vec{v} , перпендикулярной вектору магнитной индукции \vec{B} . Вычислите период T вращения протона в поле и расстояние от точки влета до точки, где он будет через время $t=3/4T$.

14(7). Прямой проводник (рис. 7) длиной l и массой m подвешен горизонтально на двух легких нитях ($OO'=l$) в однородном магнитном поле, вектор индукции \vec{B} которого направлен вертикально и перпендикулярен проводнику. Каждая нить разрывается при нагрузке, превышающей T . Определите силу, действующую на проводник со стороны магнитного поля при пропускании по проводнику тока I_1 . Определите угол, который составит с вертикалью каждая нить, если по проводнику пропустить ток I_2 . Какой величины ток надо пропустить через проводник, чтобы одна из нитей разорвалась в тот момент, когда проводник придет в неподвижное состояние?

15(2). С какой скоростью надо перемещать перемычку AB длиной l (рис. 8) в однородном магнитном поле B перпендикулярном плоскости $ABCD$, чтобы поддерживать разность потенциалов U между точками C и D ?

16(13). В однородном магнитном поле с индукцией $B=0,1$ Тл расположен плоский проволочный виток, площадь которого $S=10^3$ см², а сопротивление $R=2$ Ом, таким образом, что его плоскость перпендикулярна магнитным линиям. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, протекший через гальванометр при повороте витка, равен $q=2,5 \cdot 10^{-8}$ Кл. На какой угол (в градусах) повернули виток?

17(7). Из провода длиной $l=2$ м, обладающего сопротивлением $R=4$ Ом, спаян квадрат (рис. 9). В две стороны квадрата включены источники с ЭДС $\mathcal{E}_1=10$ В и $\mathcal{E}_2=8$ В. Цепь помещена в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости квадрата и направленное за чертеж. Индукция магнитного поля равномерно увеличивается на $\Delta B=16$ Тл за каждую секунду (т. е. изменяется по закону $B=kt$). Определите величину возникающей ЭДС индукции. В каком направлении протекал бы индукционный ток, если бы источники с ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 отсутствовали? Найдите силу тока в цепи, если пренебречь внутренним сопротивлением источников.

18(7). На горизонтальных проводящих стержнях, расположенных на одном уровне, лежит проводящая перемычка массой m (рис. 10). Коэффициент трения между стержнями и перемычкой μ . Стержни замкнуты на резистор сопротивлением R . Сопротивления стержней и перемычки пренебрежимо малы. Система находится в магнитном поле, индукция которого направлена вертикально вверх и равномерно меняется с течением времени по закону $B=At$ (A имеет размерность Тл/с). Определите направление индукционного тока. Найдите величину возникающей ЭДС индукции в моменты времени, когда перемычка покоилась. В какой момент перемычка начнет двигаться по стержню? Геометрические размеры l и h известны.

Колебания и волны

1(9). Два математических маятника с периодами колебаний $T_1=8$ с и $T_2=5$ с соответственно одновременно начинают колебания в одинаковых фазах. Через какое наименьшее время фазы их колебаний снова будут одинаковыми?

2(15). Висящее на пружине тело имело период вертикальных колебаний T_1 . Увеличение его массы изменило период колебаний до значения T_2 . Вычислите смещение положения рав-

новесия конца пружины под действием тела после увеличения его массы.

3(8). В кабине подъемника на длинной нити висит шарик. Когда кабина неподвижна, период его колебаний $T=1$ с. В движущейся с постоянным ускорением кабине период колебаний равен $T'=1,2$ с. Определите величину и направление ускорения кабины.

4(10). Спиральная пружина под действием подвешенного к ней груза растянулась на $x=6,5$ см. Если груз оттянуть вниз, а затем отпустить, то он начнет колебаться вдоль вертикальной оси. Определите период таких колебаний.

5(8). Подставка совершает в вертикальном направлении гармонические колебания с амплитудой $A=0,5$ м (рис. 11). Каким должен быть наименьший период колебаний, чтобы лежащий на подставке предмет не отделился от нее?

6(9). Конденсатор емкостью $C_1=200$ мкФ включен в цепь переменного тока с частотой $\nu_1=60$ Гц, а конденсатор емкостью $C_2=300$ мкФ включен в цепь с частотой $\nu_2=50$ Гц. Найдите отношение емкостного сопротивления первого конденсатора к емкостному сопротивлению второго конденсатора.

7(10). Емкостное сопротивление контура $C=300$ пФ. Какова должна быть индуктивность контура, чтобы он резонировал на частоту электромагнитных колебаний $\nu=10^6$ Гц?

8(8). Какова длина волны электромагнитного излучения колебательного контура, имеющего конденсатор емкостью $C=2$ пФ, если в нем возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}=0,04$ В? Скорость изменения силы тока в катушке индуктивности $\Delta I/\Delta t=4$ А/с.

Оптика

1(9). Определите абсолютный показатель преломления стекла, если скорость света в стекле $v=2 \cdot 10^8$ м/с.

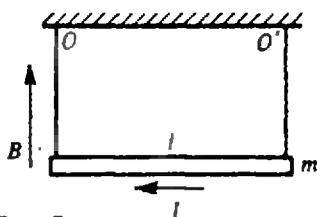


Рис. 7.

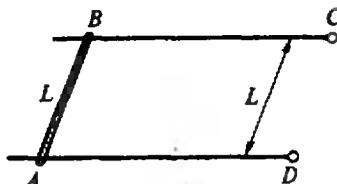


Рис. 8.

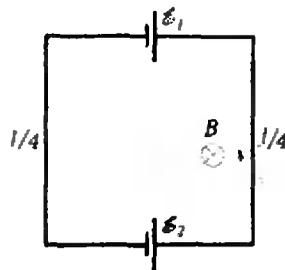


Рис. 9.

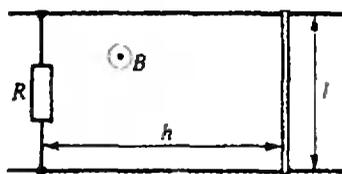


Рис. 10.

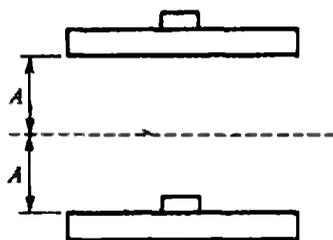


Рис. 11.

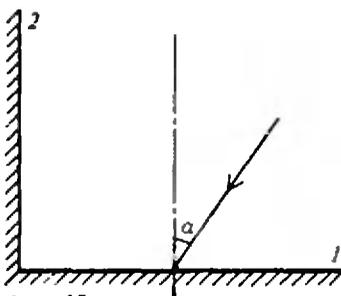


Рис. 12.

2(9). Луч света падает на систему двух взаимно перпендикулярных зеркал (рис. 12). Угол падения луча на первое зеркало $\alpha=17^\circ$. Отражаясь от первого зеркала, луч падает на второе. Определите угол отражения луча от второго зеркала (в градусах).

3(7). Луч света падает на границу раздела двух сред под углом $\alpha=30^\circ$. Показатель преломления первой среды $n_1=2,4$. Определите показатель преломления второй среды, если известно, что отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

4(10). Луч света переходит из стекла в воду. Угол падения луча постепенно увеличивается. Каков предельный угол полного отражения? Показатель преломления стекла $n_1=1,57$, воды $n_2=1,33$.

5(9). Оптическая сила тонкой собирающей линзы $D=4$ дптр. Определите фокусное расстояние линзы (в сантиметрах).

6(13). Собирающая линза увеличивает изображение предмета в $\Gamma=4$ раза. Если этот предмет передвинуть на $l=10$ см, то увеличение уменьшится в 2 раза. Изображение в обоих случаях действительное. Найдите фокусное расстояние линзы.

7(15). Расстояние наилучшего видения для пожилого человека равно $d_1=60$ см. Вычислите оптическую силу очков, способных обеспечить ему уменьшение этого расстояния до $d_2=20$ см.

Элементы теории относительности

1(13). Чайник, содержащий $V=3$ л воды, нагрели от $t=10^\circ\text{C}$ до кипения. На сколько изменилась масса воды (в микрограммах; $1 \text{ мкг}=10^{-12}$ кг)?

Квантовая физика

1(17). Определите энергию кванта света с длиной волны $\lambda=6 \cdot 10^{-7}$ м. Определите частоту

колебаний напряженности электрического поля световой волны.

2(13). При освещении пластинки, изготовленной из некоторого металла, светом с частотой $\nu_1=8 \cdot 10^{14}$ Гц, а затем $\nu_2=6 \cdot 10^{14}$ Гц обнаружили, что максимальная кинетическая энергия электронов изменилась в три раза. Определите работу выхода электронов из этого металла (в электронвольтах; $1 \text{ эВ}=1,6 \times 10^{-19}$ Дж).

3(10). Красная граница фотоэффекта для некоторого металла $\lambda_{\text{max}}=2,75 \cdot 10^{-7}$ м. Найдите работу выхода электрона из этого металла и максимальную скорость электронов, вырываемых из этого металла светом с длиной волны $\lambda=1,8 \cdot 10^{-7}$ м.

4(9). Энергия фотонов, вызывающих фотоэффект с поверхности цезия, возросла на 2 электронвольта. На сколько увеличилась при этом максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов?

5(9). Удельная энергия связи ядра гелия $E_{\text{св.уд}}=7$ МэВ/нук. Найдите минимальную энергию гамма-кванта (в мегаэлектронвольтах), способного разделить это ядро на 4 свободных нуклона.

6(7). При переходе электрона в атоме водорода с одной орбиты на другую, более близкую к ядру, излучается фотон с энергией $E=3,0 \cdot 10^{-19}$ Дж. Определите частоту излучения атома и частоту колебаний напряженности электрического поля световой волны.

7(13). Атомный реактор приводит в действие турбогенератор мощностью $N=2 \cdot 10^6$ Вт. Определите КПД турбогенератора, если в течение суток расход урана ${}^{235}_{92}\text{U}$ составляет $m=0,54$ кг, а при делении одного ядра этого элемента выделяется энергия, равная в среднем $\Delta E=3,2 \cdot 10^{-11}$ Дж.

Публикацию подготовили А. Егоров, В. Тихомирова

„Квант“ улыбнется

Сказки

(Начало см. на с. 42)

Задумалась Земля, склонилась земная ось. Казалось бы — Земле что? У нее и атмосфера, и даже вода — зачем же ей тревожиться? Но тревожится Земля: ведь рядом — планета, которую необходимо защитить. Тревожится Земля, протягивает Луне свой воздух, свою воду — бери, Луна,

мне не жалко. Тянется Земля к Луне. Тянется Луна к Земле. Так возникли приливы. Так возникло то, что позже люди назовут бескорыстной дружбой.

Тяга к сильным ощущениям Свет распространяется по прямой — если в пустоте. А если рядом яркая, большая звезда? Он хоть чуть-чуть, да искривит свой путь, чтобы пройти к ней поближе.

— Ну, я только чуточку, самую малость! Уж очень тянет взглянуть! — оправдывается свет. А потом ему встречается черная дыра — коллапсар. Ни лучика не выпускает он из своих цепких объятий, свой свет от других, как скопидом, прячет, да еще и чужой норовит захватить. А тот и сам из любопытства к коллапсару искривляется. — Ну, в самый последний разочек! В самый последний. Не искривляйте своего пути! Даже если очень тянет. А. Филонов

Ответы, указания, решения

Задачи самоиндукции

1. $At = L\Delta I / (RI_0) = 2 \cdot 10^{-4}$ с; $Q_1 = LI_0^2 / 2 - LI^2 / 2 \approx 0,02$ Дж; $Q_2 = LI_0^2 / 2 = 1$ Дж.
2. В 1,21 раза. Уменьшится в $100/81 \approx 1,23$ раза.

Результаты вступительных экзаменов в различные вузы в 1989 году

Математика

Алгебра

1. 89. 2. 33. 3. 68%. 4. 80, 16, 16. 5. 27. 6. 90 км. 7. 1 и -3, 3 и -1. 8. 15 ч. 9. 10/3 ч, 5 ч. 10. 2,8 км. 11. 5/6 км/ч. 12. 3/4 ч, 1/2 ч. 13. 20 ч, 25 ч. 14. 555,5 р. 15. 170 кг. 16. 7 и 18. 17. 180 т. 18. 600 р. 19. 2. 20. 24. 21. 6. 22. 5. 23. 1; -2. 24. $3 \pm 2\sqrt{2}$; 1. 25. а) 5050; б) 2; в) 0,5; г) 0,05; д) 4; е) 1; ж) $3\pi/8$; з) 0,7. 26. 5. 27. а) 0; б) 100; в) $-(m^2+2)/m\sqrt{m}$; г) -1. 28. а) {0}; б) {-1; 1/3; 3}; в) {4; 10}; г) {4}; д) {-4; 4}; е) {14}; ж) {22/27}; з) {3}; и) {2}; к) {36}; л) {0}; м) {-3; 3}; н) $\{10^4; 10^{-2}\}$; о) {-2}; п) $\{\sqrt{2}; 8\}$; р) {-1}; с) {10; 1/10}; т) {28/3}; у) {9}; ф) {1}; х) $\{1/4; 2^{1+\sqrt{6}}; 2^{1-\sqrt{6}}\}$; ц) {1/9; 27}.
29. а) $\pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \arctg 0,1 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) $\pi k/3, (2k+1)\pi/6, k \in \mathbb{Z}$; г) $\pi k/8, (-1)^n \pi/72 + \pi n/12, k, n \in \mathbb{Z}, k \neq 3p+1$; д) $\pi k, 2\pi(3k-1)/3, k \in \mathbb{Z}$; е) $\pm 2\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; ж) $\pi k/2; \pi(2k+1)/8, k \in \mathbb{Z}$; з) $\pi(8k+5)/16; \pi(8k+3)/8, k \in \mathbb{Z}$; и) $\pi(2k+1)/18; \pi(2k+1)/8; \pi(2k+1)/2, k \in \mathbb{Z}$; к) $\pi(2k+1); (-1)^k 2 \arcsin 3/4 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; л) $\pi(2k+1), \pm 2 \arccos 1/3 + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$; м) $\pi(2k+1)/16, \pi(2k+1)/4, k \in \mathbb{Z}$; н) $\pm 1/2 \arccos(-3/5) + \pi k, \pm \pi/6 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; о) $\pi k, -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; п) $\pi(4k+1)/4, -\arctg 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; р) $\pi/4(1+(-1)^k) + \pi k, \pm 5\pi/4 - \pi/4 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; с) $2\pi(1+4k)$. Указание. Уравнение равносильно системе $\sin x/4 = 1, \cos x = 1$; б) $\pi k/3, \pi(2k+1)/6, k \in \mathbb{Z}$;
30. а) $(-\infty; -2) \cup (4; \infty)$; б) $[-\sqrt{2}; -1/2] \cup [1/2; \sqrt{2}]$; в) {0; 6}; г) (-8; 0); д) (-2; $(3-\sqrt{17})/2$) \cup (0; 2) \cup $(3+\sqrt{17})/2; \infty)$; е) $(-\infty; -8/3] \cup [6/7; \infty)$; ж) $[4-\sqrt{11}; 1]$;

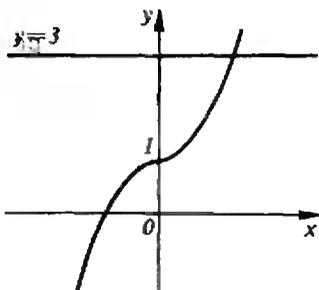


Рис. 1.

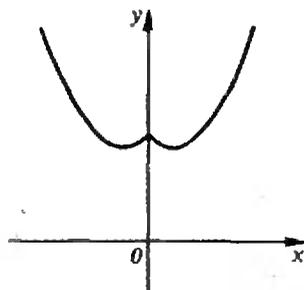


Рис. 2.

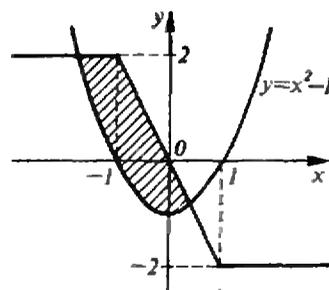


Рис. 3.

- з) {-1}; и) (2; 4); к) $(-\infty; -6]$; л) [2; 8]; м) $\{-1\} \cup [2; 5]$; н) $(-\infty; -3] \cup [2; \infty)$; о) $(-4; 0)$; п) $\{0\} \cup [1 - \log_3 2; \infty)$; р) $[1 - \log_3 5; 0] \cup [1 + \log_3 5; \infty)$; с) [0; 16]; т) $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$; у) (2; 5/2) \cup (3; $\infty)$; ф) $(-\infty; -7) \cup (1; \infty)$; х) (1/4; $\infty)$; ц) (0,01; 10 000); ч) $\{\sqrt{2}; 2\}$; ш) (-2; 4); э) (3 log₃ 2; 2); ю) (1; 4); я) $[-3; -1) \cup (0; 2]$.

31. а) $(\pi/8 + 2\pi k; 5\pi/8 + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$; б) $(-5\pi/8 + 2\pi k; -\pi/8 + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$; в) $[-\pi/4; -\pi/6] \cup [\pi/6; \pi/4]$; г) $(-\pi/3 + 2\pi k; \pi/3 + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$; д) $(\pi k; \pi/4 + \pi k) \cup (\pi/2 + \pi k; 3\pi/4 + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.

32. а) {(2; 1)}; б) {(9; 1); (1; 9)}; в) {(64; 1); (1; 64)}; г) {(-2; 0)}; д) $\{ \pm \pi/3 + 2\pi(k+n); \pm \pi/3 + 2\pi(k-n) \}, k, n \in \mathbb{Z}$.

33. $\alpha > -1$. 34. 0, {0; 0}. 35. 31/2. 36. $x^2 - 18x + 9 = 0$. 37. -6. 38. 2. 39. 4. 40. 7. 41. 1. 42. 1. 43. 9. 44. 4. 45. -69.

Анализ

1. 1 (см. рис. 1). 2. См. рис. 2. 3. См. рис. 3. 4. $1 + 2/\cos^2 2x$. 5. $\max f(x) = f(0) = 3, \min f(x) = f(-1) = -1$. 6. $x_{\max} = 0, x_{\min} = -6$. 7. 1. 8. Промежутки возрастания: $(-4; 0)$ и $(4; \infty)$, промежутки убывания: $(-\infty; -4)$ и $(0; 4)$. 9. -1/2. 10. -14/e. 11. 4/25. 12. 26. 13. 2. 14. 14. 15. $R = 2, H = 4$. 16. $\sqrt[3]{4V \cos^2 \pi/7} / \pi$. 17. Сторона основания бассейна 4 м, глубина - 2 м.

Геометрия

1. (7/3; -2/3; -11/3). 2. $\vec{BM} = -\vec{m} + \frac{1}{4}\vec{n}$. 3. Треугольники ABC и MKP подобны с коэффициентом подобия $k = 1/\sqrt{2}$. 4. (-13/2; -9/2). Указание. Пусть O(x, y) — центр описанной около треугольника ABC окружности. Записав равенства $OA^2 = OB^2 = OC^2$, получите систему уравнений относительно x и y.
5. $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$. 6. 8. 7. 48. 8. $\frac{a^2}{mk+nk+mn}$.
9. 3:2. 10. -3/5. 11. $a^2(\sqrt{2}-1)/2$.
12. $2 \arccos \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$. 13. 3ab/4. 14. 12. 15. $2\pi/3$.
16. $\frac{\sqrt{(b^2-n^2)(a^2+b^2-2kn)+2\sqrt{(a^2-k^2)(b^2-n^2)}}}{n\sqrt{a^2-k^2+k\sqrt{b^2-n^2}}}$.

17. $H\sqrt{3(3\text{tg}^2\alpha-1)}$. 18. $\text{arctg}(\sqrt{3/2}\text{tg}\alpha)$, $\text{arctg}(1/2\text{tg}\alpha)$.

19. 8. 20. $\sqrt{8/7}$. 21. $2\text{arcsin}(\sqrt{7}-1)/2\sqrt{3}$.
22. $43/18$, $11/18$. 23. $\sqrt{720}$, $\sqrt{80}$, $\sqrt{80}$.
24. $3/2$. 25. $2\sqrt{3}$. 26. $16/\sqrt{3}$.

27. $\frac{9\sqrt{3}d^3\text{tg}^2\beta/2\sin\beta/2}{8\sqrt{\sin(\beta/2+\pi/6)\sin(\beta/2-\pi/6)}}$.

28. $2/3R^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha$; $a^2\sin\alpha/\cos\beta$.

29. $-4R^3\sin 4\alpha$.

30. $100\pi/\sin^2 2\beta$, $500\pi/3\sin^2 2\beta$.

31. $2\text{arcsin}(\sqrt{1+3\cos^2\alpha}/2)$.

32. $a^3\text{tg}\beta/6\cos^2\alpha$, $a\text{tg}\beta/\cos\alpha$.

33. $4\sqrt{3}$. 34. 54. 35. $\text{arctg}\frac{3h}{a\sqrt{5}\sin(\alpha+\arcsin 2/3)}$. 36. $abS/4(a+b)$.

37. $\text{arcsin} 1/\sqrt{3}$.

38. 390. 39. $2a^3\sin\alpha\sin\alpha/2\text{tg}\beta$.

40. $2\text{arcsin}(\sqrt{5}-1)/2$. 41. $2\text{arctg}\sqrt{3/2}$, $\pi-2\text{arctg}\sqrt{3/2}$.

42. 3. 43. $ac\sqrt{12a^2-3c^2}/8$.

Физика

Механика

1. $v_x=v=0,5$ м/с.

2. $h=272,7$ м; $t=7,46$ с.

3. $v_{\text{min}}=\sqrt{2gh/\sin\alpha}=10$ м/с.

4. $t=\sqrt{(v_1-v_2\sin\alpha)^2+(v\cos\alpha)^2}/v_2\cos\alpha=17,3$ м.

5. $v=\sqrt{2gs\sin\alpha}$; $t=\sqrt{2h/(g\sin^2\alpha)}$.

6. $\omega=\sqrt{2as/R}=10$ с⁻¹.

7. $g_n=2g_3=20$ м/с².

8. $a=F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)/m-\mu g=4,6$ м/с².

9. $F_{\Delta}=mg+k\Delta l=11$ Н.

10. $v_{\text{min}}=(a+g\sin\alpha)/(g\cos\alpha)=0,7$.

11. $F_{\text{н min}}=mg=0,2$ Н (меньше других растянутая самая нижняя нить).

12. $T=2\pi\sqrt{l/(g\cos\alpha)}\approx 1,8$ с.

13. $M=(mgl\sin\alpha)/2=46$ Н·м.

14. $A=-mgv_0^2/(2(g+F/m))=-55$ Дж.

15. $E_x=mv_0^2/2-gh=40$ Дж.

16. $N_{\text{ср min}}=0,5$ Вт.

17. $v_x=\sqrt{\frac{h(l_0-l)^2m}{M(M+m)}}=0,5$ м/с; $v_{\text{ш}}=\frac{M}{m}v_x=5$ м/с; $\tau\approx\frac{2mv_{\text{ш}}}{h(l_0-l)}\approx 2\cdot 10^{-2}$ с.

18. а) $\Delta v=-mv/(m+M)$; б) $\Delta v=0$.

19. $\alpha_{\text{min}}=\arccos(1-5R/(2l))$.

20. $\Delta h_{\text{max}}=la/g=9$ см.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $M=mRT/(pV)=2\cdot 10^{-3}$ кг/моль (здесь $T=273$ К и $p=10^5$ Па — температура и давление при нормальных условиях).

2. $\rho=pM/(RT)=1,03$ кг/м³; $m_0=M/N_A=5,4\cdot 10^{-26}$ кг.

3. $p=15/8\rho gl=5,1\cdot 10^4$ Па.

4. $p=3\Delta p=300$ кПа.

5. $p\geq\rho RT/M=6,55\cdot 10^6$ Па.

6. $\alpha=p_1/(2p_0-p_1)$.

7. $A=3/2\nu R\Delta T=249$ Дж.

8. $A=9/4\rho_0 V_0$.

9. $A=100$ Дж.

10. $v=\sqrt{2((p-p_0)S-mg)l/m}=12$ м/с.

11. $k=1/(1-\eta/100\%)=2,5$.

12. $m=\frac{\rho Vc(t_1-t_2)}{\lambda+c(t_2-t_3)}=1$ кг.

13. $\frac{\Delta m}{m}=\frac{v^2/2-c(t_{\text{пл}}-t)}{\lambda}100\%=63\%$.

14. $\varphi=(\varphi_1S_1+\varphi_2S_2)/(S_1+S_2)=50\%$.

Основы электродинамики

1. $q_1=-1/3$ Кл или $q_1=-3$ Кл.

2. $v=\sqrt{\frac{eqh}{2\pi\epsilon_0 mR(R+h)}}$.

3. $U=W(\text{tg}^2\beta\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)/e=60$ В.

4. Провода следует присоединить в точках, делающих длину проволоки в отношении 1:9.

5. $R_{\text{общ}}=R$.

6. $U_{\text{ист}}=U(1+R_2/R_1)=340$ В.

7. а) $U_C=1/4\mathcal{E}=15$ В, $U_{2C}=3/4\mathcal{E}=45$ В;

б) $U_C=2/3\mathcal{E}=40$ В, $U_{2C}=1/3\mathcal{E}=20$ В; в) $U_C=0$, $U_{2C}=\mathcal{E}=60$ В.

8. $t=\eta U^2S_1/(\rho cm(t_k-t))=13,7$ м.

9. $\eta=(1-IR/U)100\%=80\%$.

10. $m=kW/U=1,2$ кг.

11. $F=MjSt/(\pi m)=100$ кКл/моль (здесь $\pi=2$ — валентность цинка).

12. $\alpha=180^\circ$.

13. $l=mv\sqrt{16+\pi^2}/(2qB)$; $T=2\pi m/(qB)$.

14. $F=BIl$; $\alpha=\text{arctg}(BIl/(mg))$;

$I_3=\sqrt{(2T)^2-(mg)^2}/(Bl)$.

15. $v=U/(BL)$.

16. $\alpha=\arccos(1-qR/(BS))=60^\circ$.

17. $\mathcal{E}_{\text{инд}}=kl^2/16=4$ В; индукционный ток течет бы против часовой стрелки; $I=(\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_{\text{инд}})/R=0,5$ А.

18. Индукционный ток направлен по часовой стрелке; $\mathcal{E}_{\text{инд}}=Ahl$; $\tau=mg\mu R/(A^2l^2h)$.

Колебания и волны

1. $\Delta t=T_1T_2/(T_1-T_2)=30$ с.

2. $\Delta t=g(T_2^2-T_1^2)/(4\pi^2)$.

3. Ускорение кабины направлено вниз и равно $a=3$ м/с².

4. $T=2\pi\sqrt{x/g}=0,5$ с.

5. $T_{\text{min}}=2\pi\sqrt{A/g}=1,4$ с.

6. $X_{C1}/X_{C2}=(C_2v_2)/(C_1v_1)=1,25$.

7. $L=1/(4\pi^2v^2C)=8,5\cdot 10^{-6}$ Гн.

8. $\lambda=266$ м.

Оптика

1. $n=c/v=1,5$.

2. $\gamma=\pi/2-\alpha=73^\circ$.

3. $n_2=n_1\text{tg}\alpha=1,39$.

4. $\alpha_0=\arcsin(n_2/n_1)=58^\circ$.

5. $F=1/D=25$ см.

6. $F=fl=0,4$ м.

7. $D=1/d_2-1/d_1\approx 3,3$ дптр.

Элементы теории относительности

1. $\Delta m=c_0V(t_k-t)/c_0^2=12,6$ пкг (здесь $c_0=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света).

Квантовая физика

1. $E=hc/\lambda=3,3\cdot 10^{-19}$ Дж; $v=c/\lambda=0,5\cdot 10^{15}$ Гц.

2. $A=h(3v_2-v_1)/2=2$ эВ.

3. $A=hc/\lambda_{\text{max}}=7,2\cdot 10^{-19}$ Дж;

$$v_{\max} = \sqrt{2(hc/\lambda_{\max} - A)/m} = 9,1 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

$$4. \Delta E_k = 2 \text{ эВ.}$$

$$5. E_{\gamma \min} = 4E_{\text{св у д}} = 28 \text{ МэВ.}$$

$$6. \nu = E/h = 4,5 \cdot 10^{14} \text{ Гц.}$$

$$7. \eta = (Nm/(\Delta EN_A m))100 \% = 39 \%.$$

ит» для младших школьников
«Квант» № 5)

1. 5 литров. Очевидно, что сдавать следует в первую очередь пол-литровые бутылки, а купленное молоко нести в литровых бутылках.
2. 4 часа.
3. $1049 + 1049 + 1049 + 1049 + 1049 = 5245$.
4. Сумма n последовательных натуральных чисел, первое из которых равно a , составляет

$$\frac{(2a + (n-1))n}{2}. \text{ Поэтому из условия задачи по-}$$

лучаем, что $(2a + (n-1))n = 3980 = 4 \cdot 5 \cdot 199$. Заметим, что числа n и $(2a + (n-1))$ имеют разную четность, и число n больше единицы. Поэтому для решения задачи следует представить число 3980 в виде произведения двух положительных чисел разной четности. Это можно сделать шестью способами: $3980 = 4 \cdot 995 = 5 \cdot 796 = 20 \cdot 199 = 199 \cdot 20 = 796 \cdot 5 = 995 \cdot 4$. В первом случае имеем сумму четырех последовательных чисел, начинающихся с числа 496; во втором случае — сумму пяти последовательных чисел, начинающихся с числа 396, в третьем — сумму двадцати чисел, начинающихся с числа 90. Четвертый, пятый и шестой случаи приводят к рассмотрению отрицательных чисел. Поскольку в задаче идет речь о натуральных числах, мы должны ограничиться первыми тремя случаями. 5. Передвигаем отрезки MN и PQ параллельно так, чтобы они проходили через центр квадрата. Сумма периметров рассматриваемых четырехугольников при этом не изменяется.

Редакция получает много писем с просьбами ответить на те или иные вопросы, касающиеся проблем развития науки и образования. Мы решили собрать «пакет» таких вопросов и передать его главному редактору академику Ю. А. Осипьяну с тем, чтобы он ответил на них на страницах журнала. Возможно, такие «интервью» станут регулярными. Поэтому в нашу анкету мы включили специальный пункт «Ваш вопрос главному редактору» (см. на обороте). Спрашивайте! И ждите ответа.

АНКЕТА 6—90

Дорогой читатель!

Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 6—90».

1. Класс, в котором Вы учитесь:

Ваша профессия (если Вы работаете):

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны?

Ваш вопрос главному редактору:

АНКЕТА 6—90

3. Какие статьи и задачи из номеров 4—6 (номер укажите) Вам понравились?

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?

5. Какая обложка из номеров 4—6 Вам больше всего понравилась?

6. Ваши общие замечания и пожелания:

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стаенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцаи, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Коистантинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал,
В. Можаяев, И. Новиков, В. Разумовский,
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
В. Фабрикант, Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Вуздин, А. Виленкин, М. Денксова, А. Егоров,
Л. Кардасьянч, И. Клумова, Т. Петрова,
С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
М. Дубах, С. Иванов, Д. Крымов, С. Лукин,
Э. Назаров, И. Смирнова, Л. Тишков,
П. Червуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Манарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор Л. Сомова

108006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-83-54

Сдано в набор 22.03.90. Подписано к печати 4.05.90.
Т-06583. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,94.
Тираж 17903 экз. Заказ 490. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

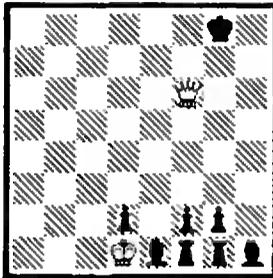
Шахматная страничка

НЕПОДВИЖНЫЙ КОРОЛЬ

Хорошо известна задача о неподвижном короле, которую придумал еще в прошлом веке И. Клинг (см. например, «Квант», 1981, № 11; 1987, № 8).

Белый король расположен на с3, и ему запрещено двигаться. На доске находятся также белый ферзь и черный король. Могут ли белые заматовать короля противника?

Профессор математики из Австрии И. Халумбирек придумал следующую конструкцию, где идея «неподвижного короля» реализуется при соблюдении всех правил шахматного кодекса.



И. Халумбирек, 1948 г.
Мат в 17 ходов.

Здесь белому королю никто не запрещает двигаться, но он сам не может себе это позволить (за редкими исключениями — об этом ниже): после Крс2 (e2) d1Ф+ черные фигуры вырываются на свободу, и хорошо еще, если ферзю удастся объявить вечный шах. Так что двигаться могут лишь белый ферзь и черный король.

При данном их положении мат дается на 17-м ходу.
1. Фe7! Крh8 2. Фg5 Крh7 3. Фe5! Крg8 4. Фf6 Крh7 5. Фf8 Крg6 6. Фe7 Крf5 7. Фd6 Крe4 8. Фc5 Крd3 9. Фb4 Крc3 10. Фc4 Крf3 11. Фd4 Крg3 12. Фe4 Крb3 13. Фe6+! Крg3 14. Фf5 Крh4 15. Фg6 Крh3 16. Фg5 Крh2 17. Фh4×.

Сорок с лишним лет назад решение задачи (кратчайший путь к мату) искали «вручную». В наше время к исследованию позиций с небольшим числом фигур все чаще привлекается компьютер. Г. Рин-

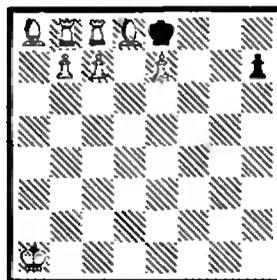
дер из ФРГ написал программу исследования конструкции Халумбирека. В результате удалось найти позицию, рекордную по длительности игры.

Переставим на предыдущей диаграмме черного короля на a4, а белого ферзя на d8 (Г. Мюллер, Г. Риндер, 1970 г.; мат в 32 хода). Вот как тогда протекает наилучшая игра обеих сторон.

1. Фa8+ Крb3 2. Фa1 Крb4 3. Фa2 Крb5 4. Фa3 Крb6 5. Фa4 Крb7 6. Фa5 Крb8 7. Фa6 Крc7 8. Фb5 Крc8 9. Фb6 Крd7 10. Фc5 Крd8 11. Фc6 Крe7 12. Фd5 Крe8 13. Фd6 Крf7 14. Фe5 Крf8 15. Фe6 Крg7 16. Фf5 Крh8 17. Фg5. Возникла знакомая позиция (после 2-го хода белых в предыдущем решении)... 31. Фg5 Крh2 32. Фh4×.

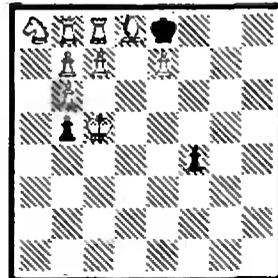
Компьютер доказал, что если черный король находится вне квадрата a1—a2—b2—b1, то ферзь заманивает его на поле h2 и ставит мат не позднее 32-го хода. Если же король прорвется в левый нижний угол, то из этой крепости его не прогнать. Впрочем, неожиданно выяснилось (и ЭВМ тут ни при чем), что при черном короле на a1 и белом ферзе на одном из девяти полей, с которых он контролирует поле d1 (d3, d5—d8, e2, f3, g4, h5), король получает мат в самом «надежном» месте: 1. Крс2! d1Ф+ (при 1...Кра2 следует мат по линии «a») 2. Ф:d1+ Кра2 3. Фb1+ Кра3 4. Фb3×.

Благодаря сотрудничеству с ЭВМ М. Шлоссер предложил забавную ничейную схему (конструкция Халумбирека с переменной цветов).



Ничья.

Белый король вне квадрата черной пешки, но пока пешка движется в ферзю, король идет по диагонали a1—h8, успевая попасть в спасительную зону. А вот более эффективный пример.



М. Шлоссер, 1987 г.
Ничья.

Соблазнительно взять пешку «b», но это ведет к гибели: 1. Кр:b5 f3 2. Кра6 f2 3. Кра7 (в надежде на пат, в противном случае появившийся на доске ферзь загонит короля на a6 и в финале последует Фa4×) 3...f1Л! Неприятный сюрприз для белых. 4. Кра6 Лf5! (для реализации этой идеи и была изменена стандартная конструкция фигур) 5. Кра7 Ла5×.

1. Крd4! b4. Ничего не дает и движение другой пешки: 1...f3 2. Крe3 f2 3. Кр:f2 b4 4. Крf3 b3 5. Крg4 b2 6. Крg5 b1Ф 7. Крh6!, и король прорывается в желанный угол.

2. Крe4 b3 3. Кр:f4 b2 4. Крg5 b1Ф 5. Крh6 со знакомой ничьей.

Любопытно, что неточность белых на предыдущем ходу — 4. Крf5 привела бы их к печальному последствию: 4...b1Ф+ 5. Крg5 Фh7! 6. Крg4 Фh6 7. Крg3 Фh5 8. Крg2 Фh4 9. Крg1 Фh3. Метод отгесения иам уже известен, король медленно, но верно вынужден направиться в смертельную зону. 10. Крf2 Фg4 11. Крf1 Фg3 12. Крe2 Фf4 13. Крe1 Фf3 14. Крd2 Фe4 15. Крd1 Фe3 16. Крc2 Фd4 17. Крc1 Фd3 18. Крb2 Фc4 19. Кра1 Фb4 20. Кра2 Фd4! 21. Крb1 Фc3 22. Кра2 Фc1 23. Крb3 Фd2 24. Кра4 Фe3 25. Крd5 Фf4 26. Кра6 Фg5 27. Крd6 Фf5 28. Кра6 Фd7+ 29. Кра5 Фd3 30. Крb4 Фc2 31. Кра3 Фb1 32. Кра4 Фb2 33. Кра5 Фb3 34. Кра6 Фa4×.

Е. Гук

Сегодня мы предлагаем вам задачи на разрезание звездчатых многоугольников. Обычно в головоломках такого рода требуется разрезать данную фигуру на кусочки, из которых можно сложить другую указанную фигуру. (Это всегда возможно для двух равновеликих многоугольников.) Впрочем, первую часть работы — разрезание — мы уже проделали. Но любители особо трудных задач могут поискать нужное разрезание самостоятельно, скопировав только контуры данных фигур.

1. Превратить 12-конечную звезду, состоящую из 24 элементов (рис. 1), в 3 меньшие звезды одинакового размера и той же формы.

2. Из 5 кусочков 6-конечной звезды (рис. 2) нужно сложить треугольник. По-видимому, невозможно разрезать звезду на меньшее число частей так, чтобы из них складывался треугольник.

3. Правильную 10-конечную звезду (рис. 3) требуется превратить в правильную 10-конечную звезду другой формы.

4. Звезду, состоящую из 7 частей (рис. 4), необходимо перестроить в латинский крест. (Он образуется, если к трем сторонам квадрата 1×1 приставить такие же квадраты, а к четвертой стороне — прямоугольник 1×2 .)

Д. К.

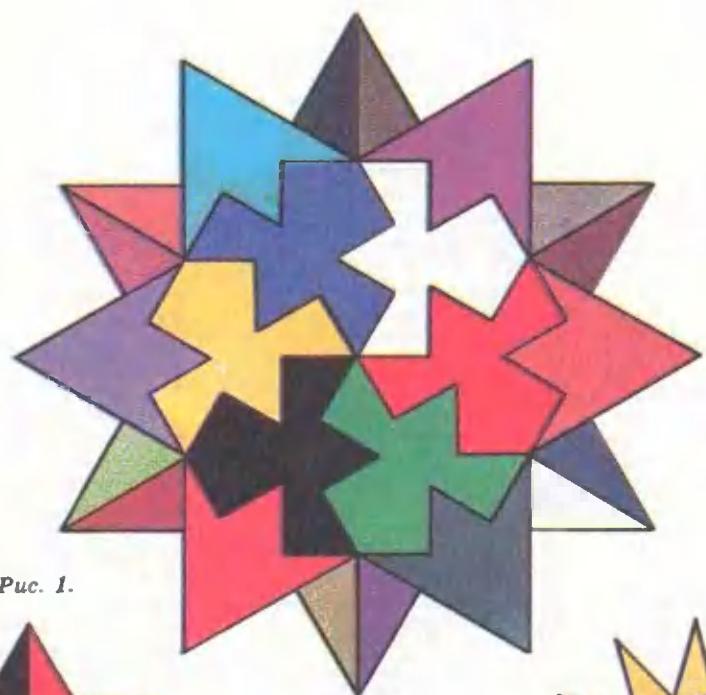


Рис. 1.

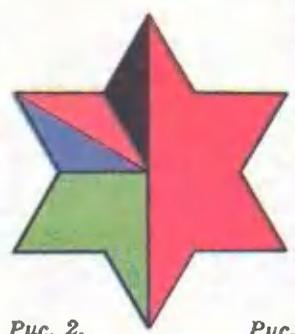


Рис. 2.

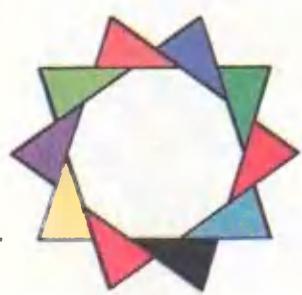


Рис. 3.

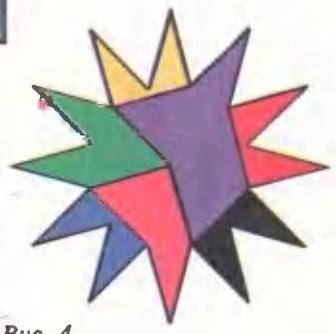


Рис. 4.