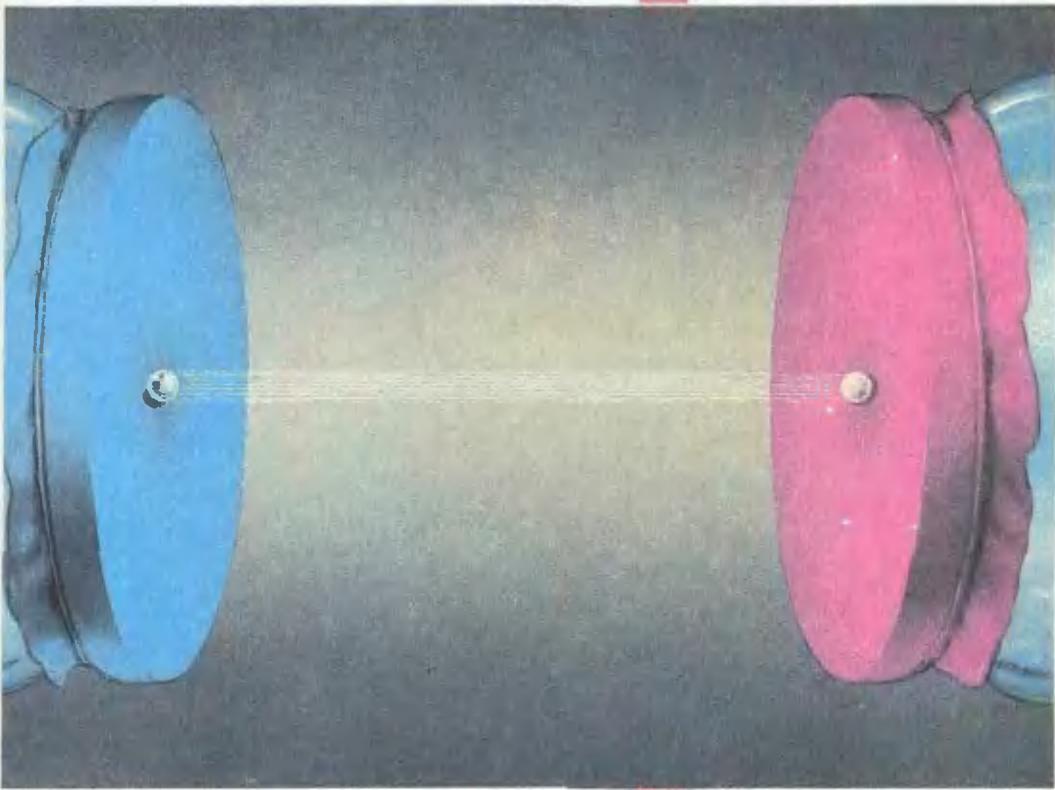


Квант

Научно-популярный
физико-математический журнал

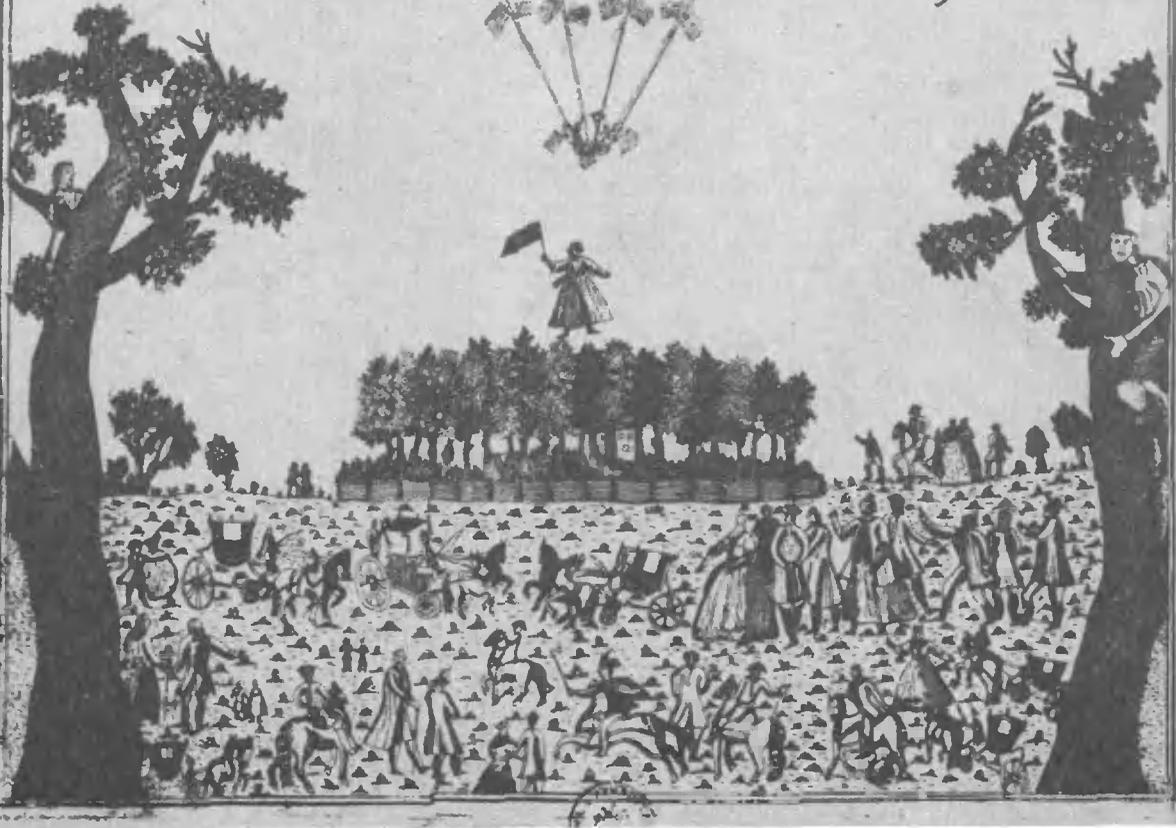
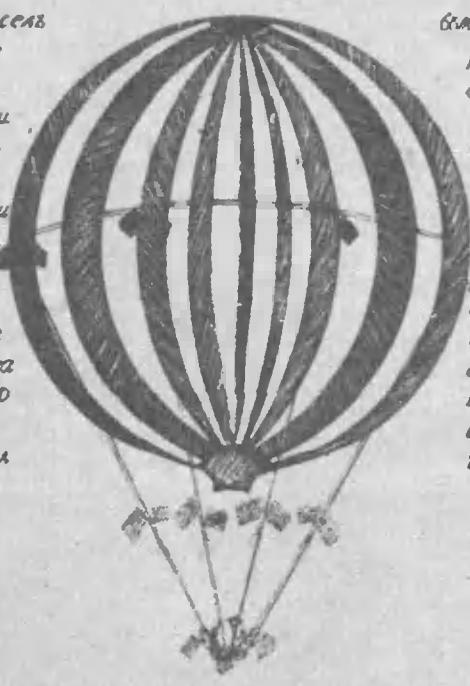
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Механическая модель лазера

1804 года в 20 мая и 15 числа
 воздушное путешествие эжи за
 нейтральность плавали в
 залогах всех гравитных ударов и си
 она поднялись навоздухъ более 900
 въ высоте вухтовали неогоснои
 отступились окрестности къ царю
 щение их последовало неволеу
 маго ветра дующаго напуть
 в инадревля где сопутница
 кто было потомъ она понесе
 рыль поднялись сверхъ и миль
 ржмо наконецъ фосили лкор
 ю подоспевшихъ людей и дамъ
 рльз духа которои неоставали

вмаки бакале проишариле
 ржень св росискою дамю ише
 свирпое время отприсходилла
 лнаго дошла и в 7 часе пополуни
 таюво шуреданлява что оне
 марз и чрезъ три четверти часа
 шна хъ 20 верстге ованала апу
 иопасности допритине амь
 рас отого бивъ брошенне налс
 гми гарчарень ударилась чаро
 нани копширнату пружу нежего
 въ оной несколько разъ ударилась
 в ишарз остановила съпомощи
 сошли насуной путь. наподе
 в илз во все продолжение сего
 п у т е ш е с т в и я



В номере:

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Москва, «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы

- 2 А. Панов. Прыгающий мячик и теория удара
10 А. Кикоин. Температура, теплота, термометр
20 О. Котий, А. Майоров. Семейство прямых, делящих
площадь пополам
26 Д. Фукс, С. Табачников. Сегменты постоянной площади
32 Дж. Дж. Томсон. О динамике мяча для игры в гольф
- Новости науки**
25 Распределение Планка и реликтовое излучение
40 Калейдоскоп «Кванта»
- Задачник «Кванта»**
43 Задачи M1236—M1240, Ф1243—Ф1247
44 Решения задач M1211—M1215, Ф1223—Ф1227
- «Квант» для младших школьников**
53 Задачи
54 И. Акулич. Вычислять или угадывать — выбирайте
сами!
- Р — значит ракета**
58 Л. Ксанфомалити. Перспективы поиска обитаемых
планет
- Школа в «Кванте»**
Математика 9—11:
66 Несколько эпизодов из жизни вписанных и описанных
окружностей
- Лаборатория «Кванта»**
70 Дж. Уокер. «Электрический злодей и волшебное
колечко»
- Практикум абитуриента**
78 Д. Александров. Газовые законы и механическое
равновесие
- Информация**
19 Заказы принимаются
77 Вечерняя физическая школа при МГУ
77 Школа будущих инженеров
78 Ответы, указания, решения
- «Квант» улыбается (65)**
Смесь (9)
- Наша обложка**
1 Две стеклянные банки, два кусочка резиновой пленки,
зафиксированные на банках резиновыми колечками,
стальной шарик и... условия невесомости — и мы
получаем механическое устройство, моделирующее работу
лазерного резонатора (см. заметку на с. 9).
2 Думали ли „джа гарнеренъ съ росискою дамою“, что
они совершили свое путешествие «не без помощи»
газовых законов? (см. статью Д. Александрова)
3 Шахматная страничка.
4 Разноцветные фишки на треугольном поле (головоломка).

ПРЫГАЮЩИЙ МЯЧИК И ТЕОРИЯ УДАРА

Кандидат физико-математических наук
А. ПАНОВ

Прыгающий мячик — это черный (а может быть, прозрачный или даже разноцветный, кому как повезет) литой резиновый шарик диаметром в несколько сантиметров. Думаю, что эта игрушка знакома многим из вас. Каждую весну я с удовольствием наблюдаю, как на просохшем асфальте вслед за любительницами классиков появляются многочисленные любители прыгающих мячей. Давайте и мы возьмем в руки прыгающий мячик и начнем наши эксперименты.

Прыгающий мячик и гипотеза Ньютона

Пусть шарик падает с высоты h на горизонтальную плоскость, ударяется о нее и отскакивает вертикально вверх (рис. 1). Из школьного курса физики известно, что скорость шарика в момент удара равна $v = \sqrt{2gh}$, где g — ускорение свободного падения. Нас интересует скорость v' , с которой шарик начнет двигаться вверх после удара.

В свое время Ньютон, анализируя подобные опыты с шарами, пришел к выводу, что величина $e = -v'/v$ постоянна для данного шара и данной поверхности.

Предположение о постоянстве величины e называется гипотезой Ньютона, а сама постоянная e — коэффициентом восстановления. Если допустить, что гипотеза Ньютона верна, то для определения величины e для данного шарика и данной поверхности достаточно провести только один опыт. А именно, отпустить шарик с высоты h и измерить максимальную высоту h' , на которую он поднимется после удара. Тогда предударная скорость шарика будет $v =$

$= -\sqrt{2gh}$, а послеударная $v' = \sqrt{2gh'}$ и, значит, $e = \sqrt{h'/h}$.

Я отпустил прыгающий мячик с высоты $h = 1$ м на гладкую бетонную плиту, и он отскакивал на высоту $h' = 0,80 \pm 0,01$ м. Таким образом, для прыгающего мячика и бетонной плиты предыдущая формула с точностью до 0,01 дает $e = 0,90$. Это очень высокий коэффициент восстановления. При тех же условиях для стеклянного шарика $e = 0,80$, а для стального и того меньше — $e = 0,6$. Итак, для прыгающего шарика $e = 0,90$. Как можно использовать этот результат? Давайте снова отпустим шарик с высоты h , но на этот раз не будем его ловить после первого удара, а дадим ему возможность неограниченно отскакивать.

Задача 1. Докажите, что из гипотезы Ньютона следует, что шарик будет отскакивать в течение времени

$$T = \frac{1+e}{1-e} \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

Указание. Пусть t_0 — время до первого удара, а t_n — время между ударами с номерами n и $n+1$. Тогда $t_1 = 2et_0$, $t_{n+1} = et_n$ при $n \geq 1$ и $T = t_0 + t_1 + \dots + t_n + \dots$

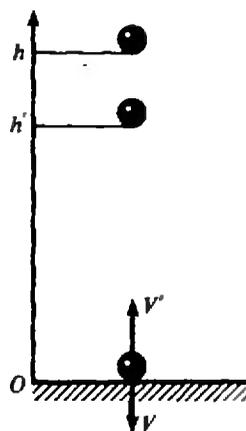


Рис. 1.

Для прыгающего мячика $e=0,90$, и если начальная высота $h=1$ м, то формула (1) дает $T=8,6$ с. Конечно же, этот результат сразу следует проверить экспериментально. Я отпускал шарик с высоты $h=1$ м и засекал время T' , в течение которого были слышны соударения. Ясно, что общее время соударений T не меньше, чем T' , т. е. $T \geq T'$. Так вот, у меня получилось $T'=15$ с и, значит, $T \geq 15$ с. В чем же причина такого расхождения (почти в 2 раза)?

Все дело в приближенном характере гипотезы Ньютона. На рисунке 2 показана экспериментальная зависимость отношения $e(v) = -v'/v$ для стального шарика диаметром 2,54 см (1 дюйм), ударяющегося о стальную плиту. Видно, что величина $e(v)$, действительно, почти не изменяется при изменении v в широких пределах. Однако, при приближении v к нулю $e(v)$ начинает быстро расти и, видимо, приближается к 1. А в нашем эксперименте как раз предударная скорость v с каждым соударением все больше и больше приближается к нулю. Поэтому величина $e(v) = -v'/v$, начиная с $e(v)=0,90$, с каждым ударом возрастает. Значит, интервалы t_n времени между ударами убывают медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем $e=0,9$ (вспомните, что $t_{n+1} = et_n$). Стало быть, и общее время T должно быть больше, чем дает формула (1) с $e=0,9$.

Вечное движение

График функции $e(v) = -v'/v$ обрывается на рисунке 2 при малых значениях v , при которых «трудности проведения эксперимента ставят под сомнение точность результатов». Но мы уже убедились, что при вычислении общего времени T соударений нам как раз необходима информация о поведении $e(v)$ при малых v . Давайте попробуем построить свои гипотезы относительно этого поведения. Будем считать (все это согласуется с рисунком 2), что для $e(v)$ при $v \neq 0$ выполняются неравенства $0 < e(v) < 1$

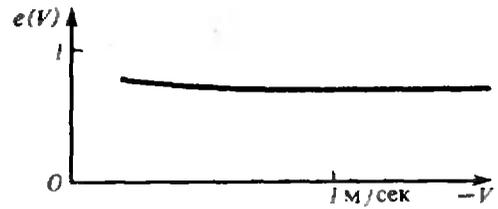


Рис. 2

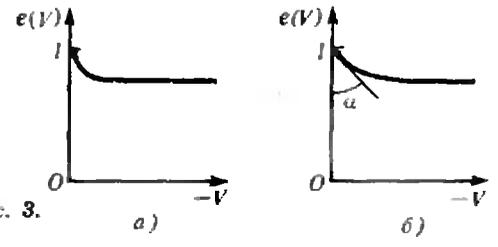


Рис. 3.

и при приближении v к нулю $e(v)$ действительно приближается к 1. Однако, каким именно образом должно происходить это приближение? То ли как на рисунке 3, а, где график $e(v)$ касается вертикальной оси, то ли как на рисунке 3, б, где график $e(v)$ пересекает эту ось под некоторым углом. Экспериментальная кривая на рисунке 2 не позволяет дать однозначный ответ на этот вопрос. Тем более интересно посмотреть, к каким следствиям ведет та или другая гипотеза. Вот хороший пример.

Задача 2. Пусть график функции $e(v)$ пересекает вертикальную ось под некоторым углом. Докажите, что в этом случае соударения шарика с горизонтальной плоскостью никогда не прекратятся, т. е. общее время соударений T будет бесконечным.

Это трудная и, как мне кажется, достаточно интересная задача.

Итак, самый простой эксперимент с прыгающим мячиком дал нам повод познакомиться с гипотезой Ньютона, подробно обсудить и опровергнуть ее.

Еще два эксперимента

Пусть опять прыгающий мячик с высоты h падает на горизонтальную поверхность и при этом он еще вращается вокруг горизонтальной оси. Движение шарика в этом случае изображено на рисунке 4. В промежутках между соударениями шарик под дей-

ствием силы тяжести движется по параболе. Но, что удивительно, сами параболы сильно отличаются друг от друга — крутые чередуются с пологими. Если вы попытаетесь провести этот эксперимент с мячами и шарами другого рода, такого чередования не будет наблюдаться. Параболы будут становиться все более пологими.

А вот второй, еще более удивительный эксперимент. Отыщем две вертикальные близко отстоящие друг от друга параллельные стенки. Например, стенки, ограничивающие узкий коридор. Чем меньше будет расстояние между ними, тем лучше. Бросим шарик на одну из стенок так, чтобы он не вращался и в момент соударения двигался перпендикулярно к ней. Тогда шарик будет двигаться, как это изображено на рисунке 5. В промежутках между соударениями шарик движется по параболам, и, как ни странно, после пятого соударения скорость его центра окажется направленной вверх. Да, все происходит именно так — каждый раз скорость шарика после пятого соударения оказывается направленной вверх. Но это опять только для литого резинового шарика. Остальные шары после каждого соударения благополучно опускаются вниз. Ну а теперь снова обратимся к теории и посмотрим, как она сможет объяснить нам эти эксперименты.

Теория

Начнем этот раздел цитатой из интереснейшей статьи В. Козлова «Соударения тел», опубликованной в «Кванте» № 9 за 1988 г.

«Некоторые физические теории построены по образцу, принятому в математике, — из небольшого числа физических утверждений, которые играют ту же роль, что аксиомы в математических теориях, логически строго выводятся разнообразные следствия... Одна из таких теорий — теория соударения тел». При обсуждении теории удара мы используем как раз такой аксиоматический подход.

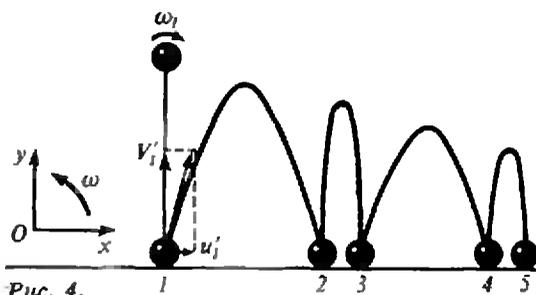


Рис. 4.

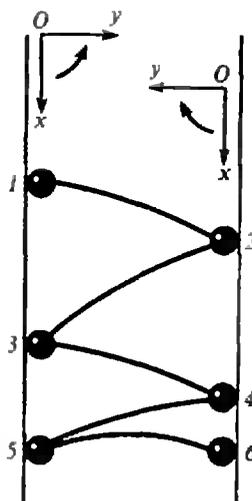


Рис. 5.

Итак, пусть шар радиусом r соударяется с некоторой плоскостью (не обязательно горизонтальной). Введем неподвижную относительно этой плоскости систему координат, как это показано на рисунке 6. Пусть центр шарика движется в плоскости рисунка и имеет скорость $(u; v)$, v — компонента скорости, направленная перпендикулярно к плоскости, u — вдоль плоскости. И пусть еще шарик вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка с угловой скоростью ω (положительное направление вращения от Ox к Oy). Скорость центра шарика и угловую скорость непосредственно после удара обозначим соответственно через $(u'; v')$ и ω' . Все, что нам нужно от теории, — это знать, как величины u' , v' , ω' зависят от предударных скоростей u , v , ω . А на этот счет существует даже несколько теорий. Чтобы познакомиться с ними, можно заглянуть в любой учебник по теории

удара. Например, можно порекомендовать интересную и сравнительно простую книгу Я. Пановко «Введение в теорию механического удара» (М., 1977). Здесь нам нет необходимости входить в подробности; достаточно знать, что во всех этих теориях выполняются следующие три соотношения между u, v, ω и u', v', ω'

$$u' - \frac{2}{5} r\omega' = u - \frac{2}{5} r\omega, \quad (2)$$

$$0 \leq -v'/v \leq 1, \quad (3)$$

$$0 \leq (u' + r\omega') / (u + r\omega) \leq 1. \quad (4)$$

Это и есть те аксиомы, которыми мы будем оперировать. Соотношение (2) — это закон сохранения момента количества движения при ударе, мы примем его без какого-либо обсуждения. Соотношение (3) показывает, что составляющая v скорости центра шарика при соударении меняет знак и не возрастает по абсолютной величине. Чтобы разобраться с (4), обратимся к рисунку 6. Мы видим, что величина $u_A = u + r\omega$ — это составляющая скорости соударяющейся точки A шарика, направленная вдоль оси Ox . И соотношение (4) показывает, что при ударе эта составляющая не возрастает и не может изменить свой знак. Соотношения (2) — (4), конечно, не позволяют по значениям величин u, v, ω однозначно определить послеударные значения u', v', ω' . Но пока нам это и не понадобится.

Условия (2) и (4) допускают простое и чрезвычайно полезное геометрическое истолкование. На плоскости введем систему координат, в которой по горизонтальной оси будем откладывать величину u , а по вертикальной — $r\omega$. Пусть точка $(u; r\omega)$ соответствует предударному состоянию шарика, точка $(u'; r\omega')$ — послеударному. Тогда условие (2) говорит о том, что если точка $(u; r\omega)$ лежит на прямой $u - (2/5)r\omega = \text{const}$, то на той же прямой лежит и точка $(u'; r\omega')$. А условие (4) показывает, что точки $(u; r\omega)$ и $(u'; r\omega')$ лежат по одну сторону от прямой $u + r\omega = 0$ и точка $(u'; r\omega')$ ближе к этой прямой, чем точка $(u; r\omega)$

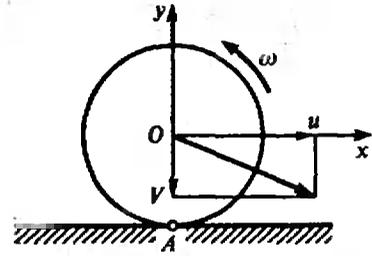


Рис. 6.

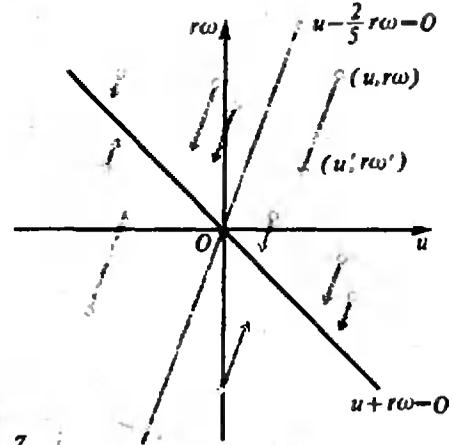


Рис. 7.

(рис. 7). Коротко и, может быть, не совсем точно можно сказать, что отображение $(u; r\omega) \rightarrow (u'; r\omega')$, описывающее удар, представляет собой сжатие координатной плоскости к прямой $u + r\omega = 0$ вдоль пучка параллельных прямых $u - (2/5)r\omega = \text{const}$.

Противоречие между теорией и экспериментом

Теперь мы можем приступить к анализу наших экспериментов. Вернемся к рисунку 4. И занумеруем удары как там показано. Через u_n, v_n, ω_n обозначим соответствующие скорости непосредственно перед ударом с номером n , а через u'_n, v'_n, ω'_n — соответствующие послеударные скорости. На рисунке 4 вторая парабола поднимается круче, чем первая. На языке скоростей это означает, что $|v'_2/u'_2| > |v'_1/u'_1|$. Между тем,

Задача 3. Пусть закрученный мячик падает отвесно на горизонтальную плоскость (см. рис. 4), перед первым ударом $u_1 = 0, \omega_1 < 0$, и пусть при ударе выполняются соотношения

(2)—(4). Покажите, что $|v'_{n+1}/u'_{n+1}| \leq \leq |v'_n/u'_n|$ для любого n , т. е. возможны только такие траектории, в которых параболы становятся все более и более пологими.

Указание. Из (3) следует, что величины $|v'_n|$ убывают. Используя геометрическую интерпретацию соотношений (2) и (4), а именно рисунок 8, покажите, что последарные величины u'_n с ростом n возрастают.

А вот, что касается второго эксперимента:

Задача 4. Пусть шарик движется между двумя вертикальными параллельными плоскостями u , как на рисунке 5, перед первым ударом $u_1=0$, $\omega_1=0$. Пусть также при ударе выполняются соотношения (2) и (4). Покажите, что тогда для любого n $u'_n \geq 0$, т. е. после каждого удара скорость шарика направлена вниз.

Эта задача потруднее, чем предыдущая. Скажу лишь, что и здесь следует использовать геометрическую интерпретацию соотношений (2) и (4). Таким образом, задача 3 показывает, что при выполнении соотношений (2)—(4) не может существовать траекторий типа той, что на рисунке 4. А задача 4 показывает, что при выполнении (2) и (4) не может существовать траекторий типа той, что на рисунке 5. Отсюда делаем вывод, что для прыгающего мячика должно нарушаться по крайней мере одно из соотношений (2) или (4). Чтобы найти какое, достаточно вернуться к эксперименту, изображенному на рисунке 4. Перед первым ударом $u_1=0$, $\omega_1 < 0$, поэтому $u_1 + r\omega_1 < 0$. Эксперимент показывает, что после первого удара $u'_1 > 0$ и $\omega'_1 > 0$, т. е. $u'_1 + r\omega'_1 > 0$. Следовательно, $(u'_1 + r\omega'_1) / (u_1 + r\omega_1) < 0$, что противоречит соотношению (4).

Мы получили важный результат. Оказывается, что прыгающий мячик ведет себя не так, как предписывает ему теория. И точно указали место, где теория нарушается, — это соотношение (4). Но, конечно, еще нужно выяснить, на самом ли деле отказ от (4) позволяет получить траектории, подобные тем, что на рисунках 4 и 5.

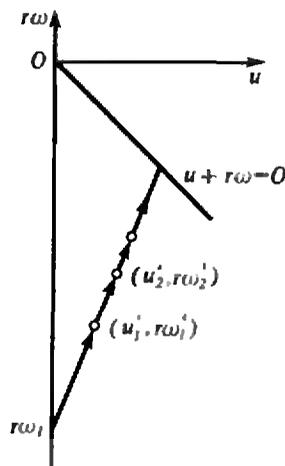


Рис. 8.

Линейные модели

Используя наш предыдущий опыт по обсуждению гипотезы Ньютона, попытаемся построить такую простую математическую модель удара, чтобы она все-таки позволила получить и траекторию, изображенную на рисунке 4, и траекторию, изображенную на рисунке 5. Напомню, что мы все время придерживаемся обозначений рисунка 6, где v — это компонента предударной скорости центра шарика, направленная перпендикулярно к плоскости соударения, u — компонента, направленная вдоль этой плоскости, и ω — предударная угловая скорость шарика; u' , v' , ω' — соответствующие последарные скорости.

Хоть мы и опровергли гипотезу Ньютона и выяснили, что отношение v'/v зависит от величины предударной скорости v , но мы и заметили также, что величина v'/v мало меняется при изменении v в широких пределах. Поэтому примем в нашей модели гипотезу Ньютона и будем считать, что коэффициент восстановления $e = -v'/v$ есть величина постоянная, не зависящая от предударной скорости v . Для прыгающего мячика можно принять $e=0,9$, а вообще, e — некоторая постоянная, заключенная в пределах $0 \leq e \leq 1$. Величина $u_A = u + r\omega$ — это компонента скорости соударения (рисунок 6), направленная вдоль плоскости. Примем и ги-

потезу о постоянстве отношения u'_A/u_A , т. е. будем считать, что для данного шарика и данной поверхности величина $k = (u' + r\omega') / (u + r\omega)$ — это некоторая постоянная, заключенная в пределах $-1 \leq k \leq 1$. В общепринятой теории удара, когда выполняются соотношения (2)–(4), $k \geq 0$, а из эксперимента следует (рис. 9), что для прыгающего мячика $k < 0$. Будем, разумеется, считать, что выполняется закон сохранения момента количества движения (2). Итак,

$$\begin{cases} u' - \frac{2}{5} r\omega' = u - \frac{2}{5} r\omega, \\ v' = -ev, \\ u' + r\omega' = k(u + r\omega), \end{cases} \quad (5)$$

где e и k постоянные ($0 \leq e \leq 1$, $-1 \leq k \leq 1$). На плоскости $(e; k)$ эти неравенства задают прямоугольник (рис. 10). Каждой точке из этого прямоугольника соответствует своя модель удара. Эти модели называются *линейными моделями* удара. Если точка $(e; k)$ из верхней половины прямоугольника, то в такой модели выполняются все три соотношения (2)–(4) и поэтому не может быть траекторий типа тех, что на рисунках 4 и 5. Значит, нам нужно обратиться к моделям, для которых $k < 0$.

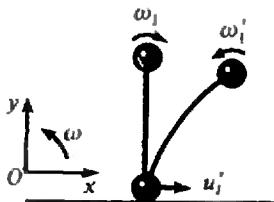


Рис. 9.

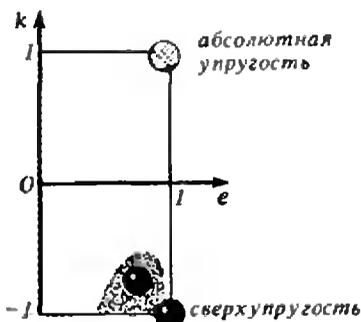


Рис. 10.

Задача 5. Покажите, что для линейной модели

$$\begin{cases} u' = \left(\frac{2}{7}k + \frac{5}{7}\right)u + \left(\frac{2}{7}k - \frac{2}{7}\right)r\omega, \\ v' = -ev, \\ \omega' = \left(\frac{5}{7}k - \frac{5}{7}\right)u/r + \left(\frac{5}{7}k + \frac{2}{7}\right)\omega. \end{cases} \quad (5')$$

Указание. Соотношения (5') вытекают из системы (5).

Таким образом, если заданы радиус шарика r и величины e и k , то предударные скорости u, v, ω однозначно определяют послеударные величины u', v', ω' . И, используя эти соотношения и уравнения движения в поле силы тяжести, мы можем рассчитать траекторию шарика.

Задача 6. Выясните, при каких значениях e и k линейная модель дает возможность получить траектории типа тех, что на рисунках 4 и 5.

Указание. Конечно, для решения этой задачи лучше всего воспользоваться компьютером. Задавая те или иные значения e и k , вы можете строить на дисплее соответствующие траектории и сравнивать их с рисунком 4 и 5.

Решив эту задачу, вы убедитесь, что интересующие нас точки $(e; k)$ заполняют правый нижний угол прямоугольника, т. е. расположены вблизи точки $(1; -1)$. Так что, по-видимому, соударения прыгающего мячика с достаточной точностью можно описать линейной моделью (5) с коэффициентами e и k , близкими к 1 и -1 .

Абсолютно упругий и сверхупругий удары

До этого момента мы в общем-то игнорировали физическую сторону вопроса. Даже соотношение (2) — закон сохранения момента количества движения шарика при ударе — мы приняли как неизвестно откуда взявшуюся аксиому. Но зато сейчас мы обсудим физически важный вопрос о сохранении кинетической энергии при ударе. Кинетическая энергия движущегося шарика вычисляется следующим образом:

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{1}{5}mr^2\omega^2. \quad (6)$$

Сумма первых двух слагаемых — это кинетическая энергия поступательно-го движения шарика, третье слагаемое — кинетическая энергия его вращательного движения.

Задача 7. Докажите, что среди линейных моделей, задаваемых системой (5), есть только две, в которых при ударе шарик сохраняет свою кинетическую энергию. Это модель с $e=1, k=1$ и модель с $e=1, k=-1$.

Указание. Используя (6), покажите, что $2K/m = v^2 + \frac{5}{7} \left(u - \frac{2}{5} r\omega\right)^2 + \frac{2}{7} (u+r\omega)^2$.

Пусть K' — послесударная кинетическая энергия шарика. Используя (5), покажите, что $2K'/m = e^2 v^2 + \frac{5}{7} \left(u - \frac{2}{5} r\omega\right)^2 + \frac{2}{7} k^2 (u+r\omega)^2$.

Соударения, в которых сохраняется кинетическая энергия, называются *упругими*. Таким образом, среди линейных моделей имеются две с упругими соударениями. Для модели (5) с $e=1$ и $k=1$ имеем

$$u' = u, v' = -v, \omega' = \omega. \quad (7)$$

Шарик, для которого при ударе выполняются соотношения (7), назовем *абсолютно упругим*. И есть еще одна упругая модель с $e=1, k=-1$. Для нее

$$\begin{cases} u' - \frac{2}{5} r\omega' = u - \frac{2}{5} r\omega, \\ v' = -v, \\ u' + r\omega' = -(u+r\omega). \end{cases} \quad (8)$$

Шарик, для которого выполняются соотношения (8), назовем *сверхупругим*. А теперь стоит сравнить поведение абсолютно упругого, сверхупругого и реального прыгающего мячиков.

Задача 8. Пусть упругий шарик соударяется с горизонтальной плоскостью и перед первым ударом $u_1=0, \omega_1 < 0$. Покажите, что его траектория такая, как на рисунке 11, а, а сверхупругого — как на рисунке 11, б.

Задача 9. Пусть шарик движется между вертикальными стенками и перед первым ударом $u_1=0, \omega_1 < 0$. Докажите, что абсолютно упругий шарик будет равноускоренно опускаться вниз, для него $u=gt$ в момент времени t (рисунк 12, а). Проверьте,

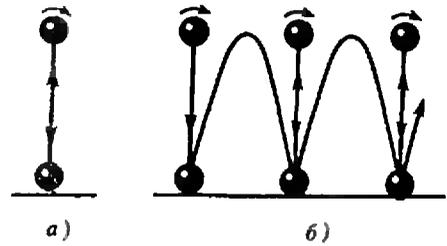


Рис. 11.

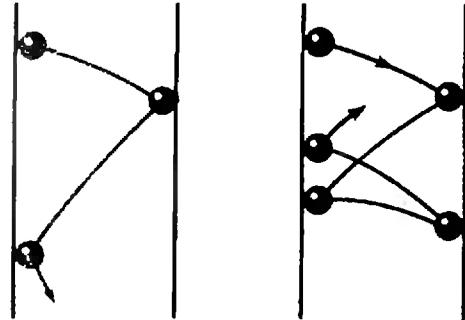


Рис. 12. а)

что после третьего соударения скорость сверхупругого шарика будет направлена вверх — $u'_3 < 0$ (рисунк 12, б). Но и этого мало — докажите, что сверхупругий шарик никогда не опустится ниже некоторого определенного предела.

Я думаю, вы согласитесь, что имеется большое сходство между рисунками 11, б, 12, б и рисунками 4, 5, где изображен прыгающий мячик. Такое же сходство, как между хорошей карикатурой и оригиналом. Конечно, интересно было бы отыскать реальный объект со сверхупругими свойствами. Однако известно, что при столкновении макроскопических тел часть кинетической энергии обязательно переходит в тепло и колебания. Но давайте процитируем Ричарда Фейнмана:

«Упругое соударение особенно часто встречается между системами, у которых нет никаких внутренних механизмов, никаких «шестеренок, маховиков или других частей». В таких случаях кинетическая энергия не может ни на что расходоваться: ведь разлетающиеся тела находятся в тех же условиях, что и налетающие.

Поэтому между элементарными объектами соударения всегда или почти всегда упругие. (Фейнмановские лекции по физике, т. 1, 2, М., 1976). Поэтому возможно, что именно среди объектов микромира найдется такой, который обладает сверхупругими свойствами. Ну а пока у нас имеется модель (8) сверхупругого соударения и почти сверхупругий объект — прыгающий мячик. Так что есть над чем подумать и есть с чем поэкспериментировать.

Под конец еще две задачи на сравнение абсолютной упругости и сверхупругости. Представим, что мы находимся в условиях невесомости.

Задача 10. Пусть опять шарики движутся между параллельными стенками. Докажите, что абсолютно упругий шарик, двигаясь по пилообразной траектории, уйдет на бесконечность. Также докажите, что движение сверхупругого шарика будет происходить в ограниченной области (рис. 13).

Задача 11. Пусть шарики движутся в области, ограниченной двумя перпендикулярными стенками. Докажите, что для абсолютно упругого

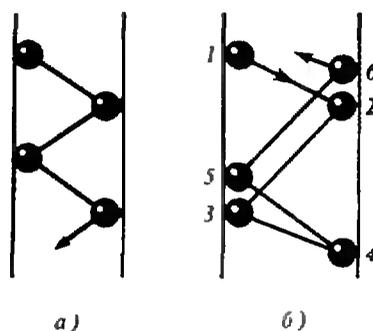


Рис. 13.

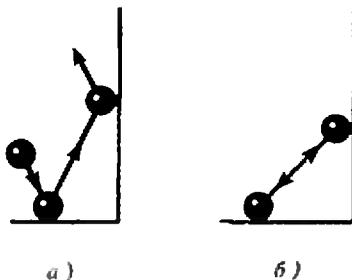


Рис. 14.

шарика возможны самое большее два соударения, после чего он уходит на бесконечность. А для сверхупругого шарика соударения вообще могут не прекратиться (рис. 14).

Наша обложка

Механическая модель лазера

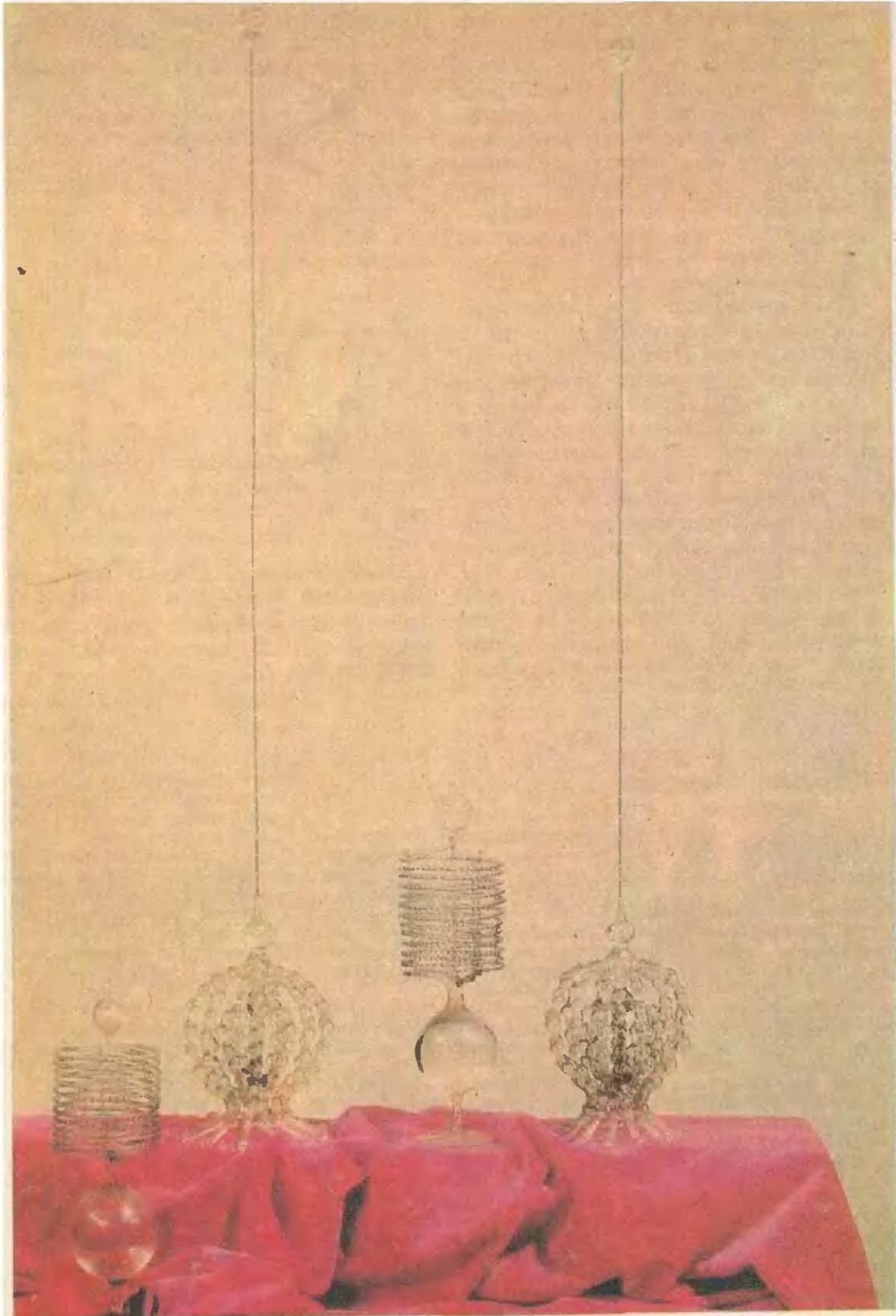
Натянем на стеклянную банку кусок резиновой пленки от воздушного шарика. Продавим пленку, чтобы из-под нее вышло немного воздуха и она прогнулась внутрь. Зафиксируем пленку на банке резиновым колечком. Теперь возьмем стальной шарик и отпустим его с небольшой высоты по центру пленки. Шарик будет отскакивать очень долго, до 50 секунд. Если начальная высота H , с которой падает шарик, достаточно мала, то все соударения происходят вблизи центра пленки. Однако, если H больше некоторой критической высоты $H_{кр}$, то движение шарика становится неустойчивым — после двух-

трех соударений он выскакивает за пределы пленки. Используя модель абсолютно упругих соударений (см. статью «Прыгающий мячик и теория удара»), можно рассчитать, что $H_{кр}$ — это высота оптического фокуса поверхности пленки.

Представим теперь, что мы находимся в условиях невесомости, например на борту космического корабля. Тогда можно расположить друг против друга две такие банки и заставить шарик двигаться между ними. Это механическое устройство очень точно моделирует работу лазерного резонатора, в котором световой поток движется между двумя, например, сферическими зеркалами с радиусами кривизны R_1 и R_2 , $R_1 < R_2$. Тут, как и в первом экспе-

рименте, возникает вопрос об устойчивости движения шарика между двумя отражающими поверхностями. В оптике аналогичная задача известна как задача об устойчивости лазерного резонатора. Ответ довольно неожиданный. Оказывается, что когда пленки достаточно близки друг к другу, шарик устойчиво движется вблизи отрезка, соединяющего их центры. При увеличении расстояния появляется зона неустойчивости — после нескольких соударений шарик выбрасывается из пространства между пленками. Однако, что удивительно, при дальнейшем увеличении расстояния снова появляется зона устойчивости. И лишь при достаточном удалении отражающих поверхностей друг от друга опять возникает неустойчивость.

А. Панов



ТЕМПЕРАТУРА, ТЕПЛОТА, ТЕРМОМЕТР

Доктор физико-математических наук
А. КИКОИН

Температура — одна из тех не очень многих физических величин, о которых человек узнает не только до того, как начнет изучать физику, но и до того, как научится грамоте. Уже в раннем детстве мы узнаем, что словом горячее, теплое, холодное, отражающим наши ощущения, соответствуют различные значения температуры. Мы слышим о том, что летом температура высокая, а зимой низкая, что у здорового человека температура тела 36,6 градуса, а если она выше, то нужно вызывать врача...

Из-за привычности понятия температуры мы обычно не отдаем себе отчета в том, насколько эта величина своеобразна, насколько она отличается от других привычных величин, таких как длина, масса, объем. А различие здесь очень существенное. Состоит оно вот в чем.

Если соединить десять стержней длиной в 1 м каждый, приставив их один к другому, то получится стержень длиной в 10 м. Десять масс в 1 кг каждая в сумме дадут массу в 10 кг и т. д. Но если соединить десять тел, каждое из которых имеет температуру 20 градусов, то мы получим тело, температура которого 20 градусов, а не 200. Температуры тел при их соединении не складываются, как складываются их длины, объемы, массы и т. д. Длина в 100 м — эта сумма ста длин в 1 м, но температура в 100 градусов — это не сумма ста температур в 1 градус каждая, подобно тому, как человек в возрасте 15 лет — это не то же самое, что 15 годовалых детей! Температура, как говорят, величина не аддитивная. В этом — одна из важнейших особенностей этой величины.

С этой особенностью связан и способ измерения температуры. Чтобы измерить длину тела, нужно сравнить его с другим телом, длина которого принята за единицу. Определить массу тела — значит сравнить ее с другой массой, принятой за единицу. Ведь и длина, и масса тела равны соответственно сумме длин и масс его частей.

Но температуру так измерить нельзя. Но это значит, что сама величина температуры вообще не может быть измерена, раз ее нельзя сравнивать с эталоном температуры. Каким же образом температуру все-таки измеряют?

Немного истории

Прибор для измерения температуры — термометр — впервые был изобретен Галилеем около 1592 года (само слово «термометр» впервые встречается в литературе в 1624 году). Способ измерения температуры, предложенный Галилеем, принципиально не отличается от того, которым пользуются и в наше время.

Схема придуманного им прибора показана на рисунке 1.

Небольшой стеклянный баллон (а) припаян к тонкой длинной трубке (б) с открытым концом. Баллон нагревают руками и погружают нижний конец трубки в сосуд с водой (с). По мере того как баллон охлаждается до температуры окружающего воздуха, уровень воды в трубке поднимается над уровнем воды в сосуде.

Легко понять, что в приборе Галилея используется тот факт, что объем газа в баллоне с трубкой зависит от температуры. Поэтому по изменению объема газа можно судить и об изменении температуры.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 6 за 1976 год.

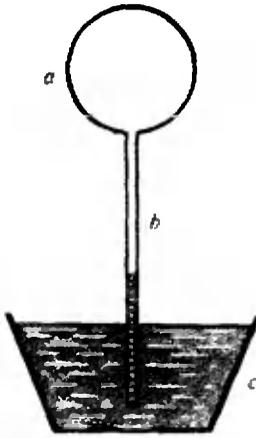


Рис. 1.

Конечно, описанный прибор еще не термометр. По нему нельзя отсчитывать числовое значение температуры. Поэтому его следует называть не термометром, а термоскопом. Но если термоскоп тем или иным способом снабдить шкалой, то он станет термометром. На решение этой задачи потребовалось почти 150 лет. Пока для нас важно, что уже в приборе Галилея содержится принцип измерения температуры, и принцип этот не пришлось изменять вплоть до наших дней: температура непосредственно не измеряется. Измеряется величина, зависящая от температуры. В термоскопе Галилея такой величиной был объем газа. В современном ртутном термометре величиной, зависящей от температуры, по изменению которой судят об изменении температуры, тоже является объем, но не газа, а ртути. Наряду с объемом газа такой величиной может быть давление газа (при постоянном объеме), длина твердого стержня, электрическое сопротивление проводника и т. д.

Закон природы, который нельзя открыть без термометра

Уже первые несовершенные термометры и даже термоскопы позволили открыть один из важнейших законов природы — закон теплового равновесия. Закон этот многим кажется и казался настолько очевидным, что на его открытие не претендует

ни один ученый и никто не может указать даты его открытия. Состоит этот закон в том, что любая изолированная группа (система) тел сама собой с течением времени приходит в состояние, при котором температуры всех тел системы одинаковы. Такое состояние и называется состоянием теплового равновесия.

Ясно, что закон теплового равновесия мог быть открыт только после изобретения термометра. С другой стороны, само измерение температуры с помощью термометра основано на законе теплового равновесия. Ведь термометр тоже тело, имеющее определенную температуру. И он измеряет именно собственную температуру. А если мы хотим с его помощью измерить температуру какого-то другого тела, оно должно быть в тепловом равновесии с термометром, потому что в этом случае температуры тела и термометра одинаковы. Вот почему при измерении температуры тела с помощью термометра всегда приходится ждать некоторое время — ждать установления теплового равновесия между телом и термометром.

Еще немного истории

Итак, термоскоп появился в конце XVI века. Термометром он стал примерно в середине XVIII века. Но что именно измеряет термометр? Что такое температура? Правильный ответ на этот вопрос был дан еще через сто лет после того, как появился термометр.

Температура — величина, которая характеризует тепловое состояние тела. О холодных и горячих телах мы говорим, что у них разная температура. Следовательно, вопрос о том, что такое температура, сводится к вопросу: чем отличается холодное тело от горячего?

Первый ответ на этот вопрос дал сам Галилей. Из того легко наблюдаемого факта, что если вблизи горячего тела находится холодное, то горячее тело охлаждается, а холодное нагревается, Галилей сделал естест-

венный вывод, что от горячего тела к холодному что-то переходит (с таким же правом можно было считать, что что-то переходит от холодного к горячему!). Галилей считал, что это «что-то» есть особое тепловое вещество. И большинство исследователей XVII—XVIII веков придерживались такой же точки зрения и называли это вещество теплородом.

Согласно теории, основанной на представлении о теплороде, горячее тело отличается от холодного тем, что в нем больше теплорода, чем в холодном. Установление теплового равновесия по этим представлениям состоит в том, что теплород переходит от горячего тела к холодному. Значит, всякое тело состоит как бы из двух веществ — вещества самого тела (вода, медь, железо, стекло) и теплорода. Каждое тело — это смесь вещества тела и вещества теплоты (теплорода). Слово «температура» как раз и означает смесь. И в течение почти полутора столетий считалось, что измеряя температуру, мы измеряем концентрацию теплорода в теле. Отсюда и название единицы температуры — градус. Именно в таких единицах измеряли, например, концентрацию водных растворов.

Такой взгляд на температуру держался очень долго — до конца XVIII века. Так и говорили — градусы теплоты.

Но одновременно с «вещественной» теорией теплоты существовала и другая теория, одним из создателей и поборников которой был великий русский ученый М. В. Ломоносов. Эта теория основывалась на том факте, что нагревание тела может быть вызвано движением. Ломоносов писал: «Очень хорошо известно, что теплота возбуждается движением: от взаимного трения руки согреваются, дерево загорается пламенем; при ударе кремня об огниво появляются искры; железо накаливается от проковывания частыми и сильными ударами...» Отсюда делался вывод, что теплота — это не вещество, а движение маленьких частиц, из которых состоят все тела («не-

чувствительных частиц», как их тогда называли).

Свыше двухсот лет шла борьба между этими двумя теориями. В течение долгого времени господствовала первая теория, но в конце концов победу одержала вторая.

Уже в XVIII веке были выполнены опыты, которые заставили многих физиков пересмотреть представление о том, что температура — это концентрация теплоты (теплорода) в теле.

В 1760 году английский физик и врач Блэк показал, что одно и то же количество теплоты, подведенное к равным массам различных веществ, приводит к различным изменениям температуры. Но если бы температура действительно представляла концентрацию теплоты в теле, то получение одного и того же количества теплоты должно было бы вызывать у равных масс любых веществ одно и то же изменение температуры. В этих опытах Блэк открыл, как мы теперь знаем, что у разных веществ различная теплоемкость. Но с теорией теплорода это несовместимо.

В 1764 году тот же Блэк показал, что при плавлении льда им поглощается значительное количество теплоты, но температура его при этом остается неизменной. Эту теплоту со времен Блэка часто называют скрытой теплотой плавления. Точно так же, при отвердевании воды выделяется теплота и опять — без изменения температуры. Ясно, что если температура — это концентрация теплоты в теле, то невозможно поглощение теплоты без повышения температуры и невозможна потеря теплоты телом без понижения его температуры.

Что же в действительности представляет собой температура — величина, смысл которой так долго оставался непонятным?

Это стало ясным лишь после того, как появилась кинетическая теория строения вещества. И мы поймем смысл температуры из сопоставления двух как будто бы совсем разных вещей — одного из результатов ки-

нетической теории и способа измерения температуры.

О молекулярном хаосе и о его законах

Основой кинетической теории строения вещества является утверждение о том, что всякое вещество состоит из маленьких частиц — молекул, непрерывно и беспорядочно движущихся. Между молекулами действуют сложные силы притяжения и отталкивания. Но в газах при обычных давлениях эти силы малы. И можно представить себе газ, в котором силы взаимодействия между молекулами вообще отсутствуют. Так как такой газ можно себе лишь представить, то он получил название идеального газа.

Идеальный газ — это скопление огромного числа молекул, беспорядочно движущихся по всем направлениям со скоростями в сотни метров в секунду, то и дело сталкивающихся между собой и со стенками сосуда. В этом невообразимом хаосе (возможно, что само слово газ произошло от древнего слова хаос) действуют, однако, строгие и нерушимые законы. Благодаря тому, что в идеальном газе не надо учитывать сил взаимодействия между молекулами, эти законы можно установить теоретически. В частности, можно, пользуясь законами механики, *вычислить* давление газа, т. е. силу, с которой газ действует на единицу площади стенки сосуда. Сила эта есть результат ударов движущихся молекул о стенки.

Расчет показывает, что если в сосуде объемом V находится N молекул газа, то давление, оказываемое газом на стенки сосуда, равно

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \bar{E}, \quad (1)$$

где $\bar{E} = \frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия хаотического движения, приходящаяся в среднем на 1 молекулу газа. Формула (1) показывает, что давление газа равно $\frac{2}{3}$ средней кинетической энергии хаотического движения молекул, содержащихся в едини-

це объема (ведь N/V — это как раз и есть число молекул в единице объема).

Для реальных газов расчет давления довольно сложный, но при определенных условиях формула (1) достаточно точна. Она тем точнее, чем меньше величины N/V и \bar{E} . Практически этой формулой можно пользоваться при давлениях около 1 атм и меньше.

Но какое отношение все это имеет к температуре? Ведь в формулу (1) температура не входит!

Чтобы это понять, вернемся к незаконченному нами рассмотрению способа измерения температуры.

О температурных шкалах

Первыми термометрами, которыми практически пользовались, были жидкостные термометры, изготовлявшиеся группой флорентийских ученых. Потом их стали конструировать и изготовлять и в других странах. В них использовались различные жидкости, но главным образом — спирт и ртуть (иногда масло).

Жидкостные термометры представляли собой тонкие стеклянные трубки, заканчивавшиеся внизу небольшим шариком или цилиндром. Шарик и нижняя часть трубки заполнялись жидкостью (спиртом, ртутью, маслом). На странице 10 вы видите образцы флорентийских термометров. (Не правда ли, это не только приборы, но и, своего рода, произведения искусства. Вообще, в старину приборы изготовлялись с «художественным подходом».)

Что касается термометрических шкал, то использовались самые различные способы их построения. Каждый конструктор и изготовитель термометров придумывал и способ создания шкалы к ним. К концу XVIII века в ходу было около двух десятков различных термометрических шкал, из которых до наших дней сохранились три (что тоже слишком много).

В конце концов восторжествовал принцип построения термометрических шкал, предложенный голланд-

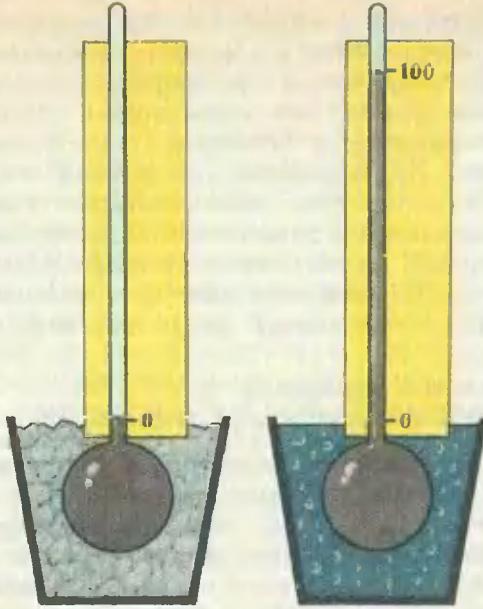


Рис. 2.

ским стеклодувом и физиком-любителем Фаренгейтом и шведским астрономом Цельсием. Принцип основан на использовании двух так называемых реперных точек, т. е. тепловых состояний, отличающихся своим постоянством. Такими точками были температуры таяния льда и кипения воды при атмосферном давлении. (Температура плавления любого твердого вещества и температура кипения любой жидкости при данном давлении также постоянны, но вода и лед наиболее доступны.)

В 1742 году Цельсий предложил такой способ градуировки, т. е. создания шкалы термометров.

Термометр, каков бы он ни был, приводится в контакт с тающим льдом, и после установления теплового равновесия уровень жидкости в термометре (если это жидкостный термометр) отмечается некоторым числом. Затем тающий лед заменяется кипящей водой, и новый уровень жидкости в термометре отмечается числом, которое отличается от первого на 100. А разность уровней делится на 100 равных частей — градусов. Сейчас кажется курьезом, что Цельсий отмечал уровень жидкости в термометре при температуре кипения воды цифрой нуль, а уровень ее при

температуре тающего льда — числом 100. Впрочем, через 8 лет, в 1750 году, шкала была перевернута, и в таком виде ею пользуются и теперь (рис. 2).

Еще до Цельсия, в 1724 году, Фаренгейт, тоже используя в качестве реперных точек температуры тающего льда и кипящей воды, изготавливал термометры, в которых температура тающего льда отмечалась числом 32, а температура кипящей воды — числом 212, так что интервал температур тающий лед — кипящая вода оказывался разделенным не на 100, а на 180 равных частей — градусов. Французский ученый Реомюр, подобно Цельсию, приписывал температуре тающего льда значение 0, но по термометру Реомюра вода кипит при температуре 80 градусов.

Как видим, в построении термометрических шкал был немалый произвол. Произвольным было число градусов, на которые делился интервал температур между реперными точками. Произвольными были и значения температур самих реперных точек. Ведь нет разумных оснований считать, что температура тающего льда равна нулю, т. е. что тающий лед не имеет никакой температуры!

Для нас здесь важно, что разделяя интервал температур между точками таяния льда и кипения воды на *равные* части (на 100, 80 или 180), мы тем самым полагаем заранее, что объем жидкости, которой заполнен термометр, *строго линейно* зависит от температуры. Если обозначить объем жидкости при температуре тающего льда через V_0 , объем той же жидкости при температуре кипящей воды через V , а сами эти температуры через t_0 и t , то деление интервала температур на равные части означает, что

$$\frac{V - V_0}{t - t_0} = c,$$

где c — постоянная величина. Если принять, что $t_0 = 0$, то

$$V = V_0 + ct.$$

Можно ли проверить, что объем в самом деле линейно зависит от

температуры? Очевидно, нет. Ведь для опытной проверки необходимо пользоваться термометром. Но при устройстве термометра заранее было предположено, что объем пропорционален температуре. Поэтому опыт ничего другого дать не может.

Существует старый анекдот. В одном морском порту ежедневно ровно в полдень стреляла пушка. Капитаны кораблей, покидая порт, проверяли по пушечному выстрелу свои судовые хронометры, при помощи которых определяют географическую долготу. Один из капитанов пожелал узнать, насколько можно быть уверенным в том, что пушка стреляет действительно в полдень. И выяснилось, что артиллерист определяет время по «очень точным часам», имеющимся у местного часовщика. А часовщик сказал капитану, что он проверяет свои «очень точные часы»... по выстрелу портовой пушки. Ясно, что при таких условиях нельзя судить ни о достоинствах часов, ни о том, действительно ли ровно в полдень раздается пушечный выстрел...

Для техники измерения температур важно, что термометры с различными жидкостями, а тем более термометры, в которых о температуре судят не по объему жидкости, а по каким-нибудь другим свойствам, дают при измерении одной и той же температуры не совпадающие показания, причем различие в показаниях не одинаково в разных температурных

областях. В связи с этим возникла необходимость в каком-то стандартном термометре, по которому градуировались бы все термометры. Тогда их показания, конечно, будут совпадать. Как решается эта задача?

В настоящее время стандартным термометром служит так называемый газовый термометр постоянного объема. Об этом термометре и о новой шкале температур мы и расскажем.

Газовый термометр и абсолютная шкала температур

В газовом термометре в качестве величины, зависящей от температуры, по которой судят о самой температуре, принимается давление газа в закрытом сосуде, т. е. при постоянном объеме. Опыт показывает, что давление нагретого газа больше, чем давление холодного. Сам газовый термометр состоит из сосуда *A*, заполняемого «идеальным» газом (любым газом при малом давлении), и присоединенного к нему манометра *M* для измерения давления (рис. 3).

Если сосуд поместить в тающий лед, а затем в кипящую воду и измерить значения давлений при этих температурах, обеспечив тепловое равновесие, то окажется, что давление при температуре кипящей воды в 1,3661 раза больше, чем при температуре тающего льда. Если обозначить давление и температуру, соответствующие кипящей воде, через *p* и *T*, а значения этих величин, соответствующие тающему льду, через *p*₀ и *T*₀, то

$$\frac{p}{p_0} = 1,3661. \quad (2)$$

Чтобы не порывать со ставшей за двести лет привычной стоградусной шкалой Цельсия, по-прежнему полагают, что

$$T - T_0 = 100. \quad (3)$$

Разность давлений при температурах кипения воды и тающего льда делят на 100 равных частей — градусов. Это значит, что и теперь мы заранее полагаем, что температура линейно зависит от давления газа

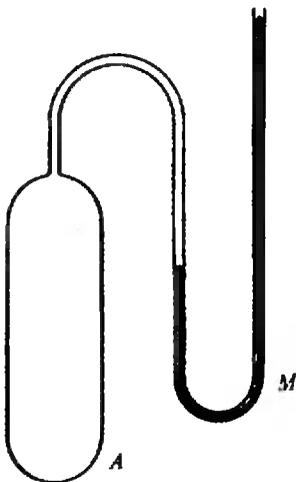


Рис. 3.

при постоянном объеме. Более того, мы можем считать, что температура газа прямо пропорциональна его давлению. Проверить это допущение, разумеется, нельзя по той же причине, по которой в приведенном выше анекдоте нельзя по пушечному выстрелу проверять правильность хода часов, а по часам — своевременность выстрела. Просто само измерение температуры основано на том, что давление газа и его температура считаются пропорциональными друг другу.

Приписывать температуре таящего льда значение нуль теперь нет необходимости. Ее можно просто вычислить. В самом деле, если температура газа прямо пропорциональна давлению, то отношение давлений газа при температурах кипящей воды и таящего льда равно отношению самих этих температур, т. е.

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0}. \quad (4)$$

Но отношение, стоящее в левой части этого равенства, равно 1,3661. Следовательно, и правая часть равна этому числу:

$$\frac{T}{T_0} = 1,3661.$$

Отсюда получаем

$$T = 1,3661 T_0.$$

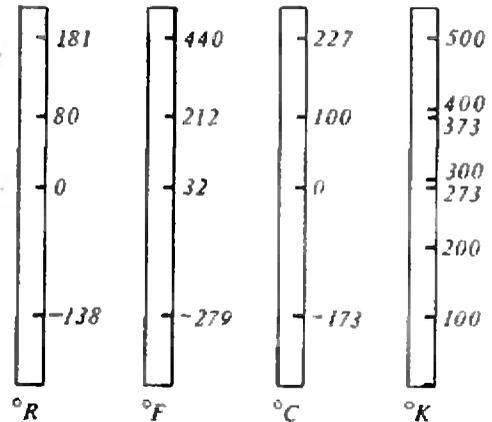
Подставив это значение для T в равенство (3), находим

$$1,3661 T_0 - T_0 = 100,$$

и мы сразу получаем

$$T_0 = \frac{100}{0,3661} \approx 273,15.$$

Этим и отличается новая шкала от шкалы Цельсия: температура таяния льда по этой шкале равна не нулю, а 273,15 градуса. А нуль температуры на 273,15 (для краткости на 273) градуса ниже температуры таяния льда. Это, как говорят, абсолютный нуль. Это — та температура, при которой давление идеального газа стало бы равным нулю, если бы такая температура была достигнута и если бы газ еще оставался при этой температуре газом. Так как давление газа не



Различные температурные шкалы: Реомюра, Фаренгейта, Цельсия и Кельвина.

может быть меньше чем нуль, то температура на такой шкале отрицательной (меньше нуля) быть не может.

Описанная только что температурная шкала (некоторые тонкости в ее определении, практически несущественные, мы опускаем) носит название абсолютной шкалы температур или шкалы Кельвина. И сама температура, отсчитываемая по этой шкале, называется абсолютной температурой. Обозначается она буквой T и выражается в кельвинах (сокращенно К), так что температура таяния льда равна 273,15 К, температура кипения воды равна 373,15 К и т. д.

Но шкалой Цельсия тоже пользуются на практике. Температуру, отсчитываемую по этой шкале, обозначают буквой t и выражают в градусах Цельсия (сокращенно °С). По этой шкале температура таяния льда равна 0 °С, температура кипения воды равна 100 °С и т. д. Ясно, что

$$t \text{ } ^\circ\text{C} = (T - 273,15) \text{ К}.$$

В физике почти всегда пользуются шкалой Кельвина.

Теперь нам будет нетрудно выяснить, в чем же состоит истинный смысл температуры.

Что же такое температура?

Итак, по принятому теперь способу измерения температуры давление p произвольной массы газа M , т. е. произвольного числа N молекул газа, в

сосуде объемом V пропорционально его абсолютной температуре T .

Это видно из уравнения (4), которое можно переписать в виде

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0}. \quad (5)$$

Соотношение (5) показывает, что при постоянном объеме отношение давления газа к его абсолютной температуре — постоянная величина. С другой стороны, давление газа, как мы видели, определяется формулой (см. (1))

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \bar{E}.$$

Подставив это значение p в выражение (5), получаем

$$T = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{T_0}{p_0} \bar{E}. \quad (6)$$

Уравнение (6) относится к газу в закрытом сосуде постоянного объема. Поэтому число N молекул газа сохраняет постоянное значение; отношение $\frac{T_0}{p_0}$, как мы видели, тоже постоянно. Следовательно, коэффициент при \bar{E} в формуле (6) — постоянная величина для любого газа, т. е.

$$T = \frac{2}{3} A \bar{E}, \quad (7)$$

где $A = \frac{N T_0}{V p_0}$ — константа. Это означает, что абсолютная температура газа — это то же, что средняя кинетическая энергия хаотического движения одной его молекулы, только выраженная не в джоулях, а в кельвинах. Коэффициент же $\frac{2}{3} A$ — это переводный множитель, показывающий, во сколько раз 1 К больше 1 Дж/молекулу. Подобно этому, одну и ту же длину можно выразить в метрах и в дюймах. Необходимо только знать, что 1 м = 40 дюйм. Коэффициент 40 — переводный множитель, показывающий, во сколько раз 1 метр больше 1 дюйма.

Обычно формулу (7) записывают в виде

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT, \quad (8)$$

где

$$k = \frac{1}{A} = \frac{V p_0}{N T_0}. \quad (9)$$

Коэффициент k называется постоянной Больцмана.

Из формулы (9) видно, как из опыта получить значение постоянной Больцмана. Для этого нужно наполнить сосуд известного объема V известной массой M газа (массу газа можно определить взвешиванием). Затем поместить сосуд в тающий лед (его температура $T_0 = 273,15$ К), измерить с помощью манометра давление p_0 газа. Зная массу M газа, легко определить значение N . Действительно, если молярная масса газа μ , то число молей газа равно M/μ ; а поскольку в каждом моле газа имеется N_A молекул (N_A — число Авогадро), то число молекул N в массе M газа равно $N = \frac{M}{\mu} N_A$. Итак, зная массу газа M , его молярную массу μ , объем сосуда V и давление газа p_0 при температуре T_0 , можно определить значение постоянной Больцмана k .

Такого рода измерения (а также и многие другие) неоднократно проводились. Все они дают для постоянной Больцмана значение

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

Как мы видим, значение k очень малое. Это значит, что средняя кинетическая энергия беспорядочных движений одной молекулы, и определяющая то, что мы называем температурой, чрезвычайно мала. При температуре в 1 К средняя кинетическая энергия молекулы \bar{E} равна

$$\begin{aligned} \frac{m\bar{v}^2}{2} &= \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \approx \\ &\approx 2 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/молекулу.} \end{aligned}$$

Таково соотношение между кельвином и джоулем на молекулу.

В заключение нам остается еще выяснить, какова связь между температурой и теплотой — двумя понятиями, которые в течение веков считались чуть ли не синонимами.

Известно, что теплотой называется энергия тепловых беспорядочных движений, *передаваемая* от одного тела к другому (при теплопередаче). Ясно поэтому, что теплота не

является величиной, характеризующей состояние тела. О ней нельзя сказать, что она содержится в теле. Температура же характеризует состояние тела, потому что она определяется средней кинетической энергией его молекул. Понятно, что между теплотой и температурой в сущности никакой связи нет. Можно только сказать, что *если два тела имеют различную температуру, то более высокой является температура того из них, которое передает теплоту другому.* Температура тела — это величина, которая определяет, будет ли данное тело отдавать теплоту другим телам или получать ее от них. Такое определение температуры в свое время дал Максвелл.

Нужна ли величина, которая называется температурой?

Температура как понятие и как физическая величина появилась в науке задолго до того, как можно было понять ее истинный смысл. Но теперь, когда он известен, стоит ли сохранять эту как будто бы архаическую

величину? Не лучше ли всюду, где мы привыкли говорить о температуре, о кельвинах, о градусах Цельсия, заменить их тем, что они есть в действительности — средней кинетической энергией частицы, и измерять ее в джоулях?

Но нетрудно видеть, что для отказа от температуры и от градусов нет оснований.

Во-первых, едва ли будет удобно, например, врачу считать пациента больным на том основании, что средняя кинетическая энергия его молекулы равна $6,64 \cdot 10^{-21}$ Дж, вместо того, чтобы говорить о температуре в 38°C .

Во-вторых, замена градусов джоулями может породить и недоумения. Ведь энергия, например, в 100 Дж, вообще говоря, означает, что за ее счет может быть получена и работа в 100 Дж. Между тем если температура тела равна 100 Дж/молекулу (для температуры — это фантастическое значение), то это вовсе не значит, что за ее счет можно получить такую же работу.

Информация

Заказы принимаются

Главная редакция физико-математической литературы ИПКО «Наука» (Физматлит) является крупнейшей издательской организацией, выпускающей литературу по физико-математическим наукам — математике, механике, физике, астрономии, кибернетике, и информатике.

На все издания Главной редакции физико-математической литературы, включенные в аннотированный тематический план выпуска на 1991 год, гарантируется полное выполнение заказов книготорговых организаций.

Ниже приведен список книг, которые могут заинтересовать

наших читателей. Нумерация соответствует тематическому плану. Цена — ориентировочная.

Заказать эти книги можно в ближайшем (крупном) книжном магазине или в магазине, имеющем отдел «Книга — почтой», в ближайшие 1—2 месяца. Там же можно ознакомиться с аннотированным тематическим планом.

Математика

13. Колмогоров А. Н. *Математика в ее историческом развитии*. 1 р. 10 к.

24. Ферма П. *Исследования по теории чисел и диофантов анализу*. 3 р. 50 к.

25. Воробьев Н. Н. *Числа Фибоначчи*. 40 к.

26. Иванов Л. Д. *Выпуклые функции*. 20 к.

27. Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии*. Ч. 1.— 2-е изд. 1 р. 20 к.

28. Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии*. Ч. 2.— 2-е изд. 80 к.

30. Корн Т., Корн Г. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*.— 6-е изд. 3 р. 80 к.

35. *Лекции по теории графов*. 1 р. 20 к.

36. Мысовских И. П. *Лекции по методам вычислений*. 1 р. 20 к.

41. Гнеденко Б. В. *Введение в специальность математика*. 1 р.

43. Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л. *Математика для техникумов на базе среднего образования*. 75 к.

44. Гельфанд И. М., Шень А. Х. *Алгебра*. 20 к.

СЕМЕЙСТВО ПРЯМЫХ, ДЕЛЯЩИХ ПЛОЩАДЬ ПОПОЛАМ

Кандидат физико-математических наук
О. КОТНИ,
А. МАЙОРОВ

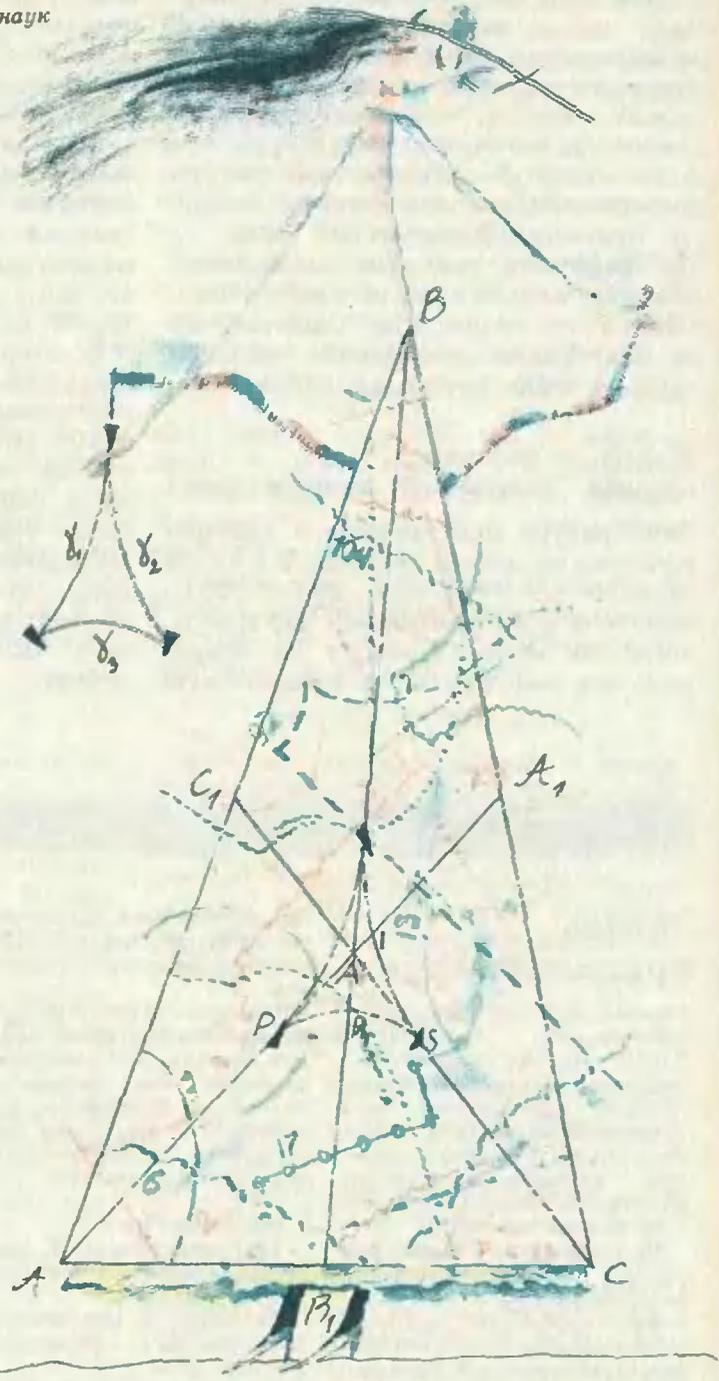
В статье рассматривается задача о числе прямых, проходящих через данную точку плоскости и делящих данный треугольник или выпуклый четырехугольник на две равновеликие части, т. е. две части, площади которых равны.

Три задачи на построение

Рассмотрим сначала случай, когда точка лежит на стороне треугольника или четырехугольника. В этом случае всегда существует, причем единственная, искомая прямая. Укажем несколько способов ее построения.

Задача 1. Через точку M , лежащую на стороне треугольника ABC , провести прямую, которая делит треугольник на две равновеликие части.

Если точка совпадает с вершиной треугольника, то искомой прямой является, очевидно, медиана, проведенная из этой вершины. Медиана будет искомой прямой и в случае, если точка M является серединой одной из сторон. Предположим, что точка M лежит, например, на стороне AC треугольника и ближе к A , чем к C . Рассмотрим два способа построения искомой прямой.



Первый способ. Пусть B_1 — середина стороны AC треугольника ABC , M — внутренняя точка отрезка AB_1 (рис. 1). Проведем медиану AA_1 треугольника и через вершину A проведем прямую, параллельную прямой MA_1 , пересекающую сторону BC в точке X . Тогда MX — искомая прямая. Действительно, $S_{AA_1M} = S_{MHA_1}$, значит, $S_{APM} = S_{PXA_1}$ и $S_{MXC} = S_{ABXM}$.

Второй способ. Через точку B_1 — середину отрезка AC (рис. 2) — проведем прямую B_1X параллельно прямой MB . Тогда, в силу того, что $S_{MPB_1} = S_{PB_1X}$, MX — искомая прямая.

Задача 2. Через вершину выпуклого четырехугольника провести прямую, которая делит четырехугольник на две равновеликие части.

Первый способ. Проведем диагонали AC и BD четырехугольника (рис. 3). Через точку E — середину отрезка BD — проведем прямую, параллельную прямой AC и пересекающую CD в точке X . Тогда AX — искомая прямая. Действительно, $S_{ABCE} = S_{ABCD}$, так как $S_{ABE} = S_{AED}$ и $S_{BCE} =$

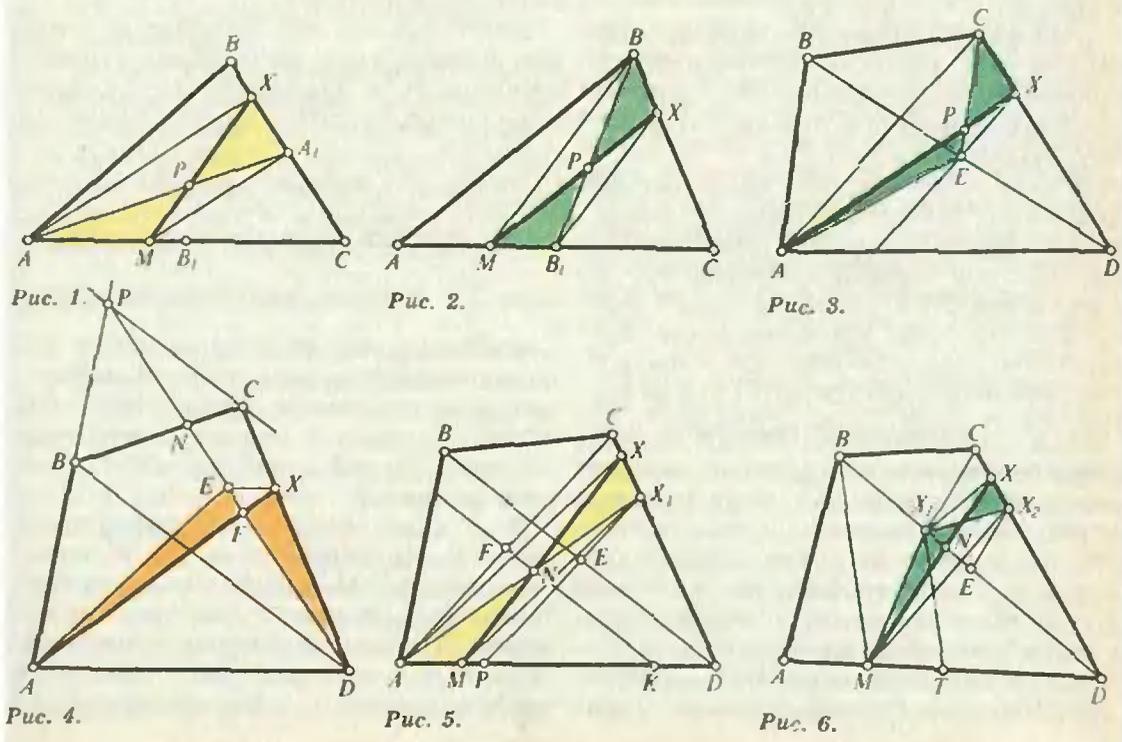
$= S_{CED}$. Но $S_{APE} = S_{PCX}$, следовательно, $S_{ABCX} = S_{AXD}$.

Второй способ. Через вершину C четырехугольника проведем прямую, параллельную диагонали BD (рис. 4) и пересекающую прямую AB в точке P . Заметим, что $S_{APD} = S_{ABCD}$, так как $S_{BPN} = S_{NCD}$. Медиана AE делит треугольник APD на два равновеликих треугольника. Через точку E проведем прямую, параллельную AD и пересекающую CD в точке X . Тогда AX — искомая прямая, так как $S_{AEF} = S_{FXD}$.

Задача 3. Через точку M , лежащую на стороне выпуклого четырехугольника, провести прямую, делящую его на две равновеликие части.

Пусть точка M лежит, например, на стороне AD четырехугольника. Через точки E и F — середины диагоналей BD и AC — проведем прямые PE и KF , параллельные AC и BD соответственно. Предположим, что M — внутренняя точка отрезка AP .

Первый способ. Проведем прямую AX_1 (рис. 5), делящую четырехугольник на две равновеликие части



(см. задачу 2, 1 способ), и прямую AX , параллельную MX_1 . Тогда MX — искомая прямая, так как $S_{ANM} = S_{VXY}$.

Второй способ. Проведем диагональ BD четырехугольника и построим ломаную MX_1X_2 (рис. 6), делящую его на две равновеликие части (см. задачу 1, 2 способ). Через точку X_1 проведем прямую, параллельную прямой MX_2 и пересекающую сторону CD в точке X . Тогда MX — искомая прямая (зеленые треугольники на рисунке 6 равновелики).

Для решения общей задачи рассмотрим одно свойство касательных к гиперболе.

Свойство касательных к гиперболе

Рассмотрим ветвь гиперболы, $y = \frac{k}{x}$ (иначе говоря, $xy = k$), расположенную в первом координатном угле. Пусть A — точка этой ветви. Проведем через точку A касательную к гиперболе и обозначим через B и C точки пересечения этой касательной с осями координат.

Теорема 1. Точка A является серединой отрезка BC .

Доказательство.

I случай: точка A лежит на диагонали угла, образованного осями координат. Тогда прямая BC перпендикулярна этой диагонали, $\triangle OAB = \triangle OAC$ и $AB = AC$.

II случай: точка A не лежит на диагонали угла, образованного осями координат. Произведем преобразование нашего чертежа: сожмем его в λ раз к оси Ox и растянем его в λ раз от оси Oy . Это преобразование называется *гиперболическим поворотом*; оно переводит точку $(x; y)$ в точку $(\lambda x; \frac{y}{\lambda})$. Произведение координат при гиперболическом повороте не меняется, поэтому точки нашей гиперболы переходят в точки, лежащие на той же гиперболе. В то же время оси координат переходят в себя, касательные к гиперболе переходят в касательные к гиперболе, точки касания — в точки касания, середины отрезков — в середины отрезков. Очевидно, любая точка

нашей гиперболы может быть получена из точки, рассмотренной в случае I, при помощи надлежащего гиперболического поворота. Значит, из справедливости нашего утверждения для точки, рассмотренной в случае I, вытекает его справедливость для любой точки A .

Из доказанной теоремы 1 почти сразу вытекает следующее важное для нас утверждение.

Теорема 2. Касательные к гиперболе $xy = k$ отсекают от угла xOy треугольники равной площади.

Доказательство. Так как точка касания является серединой отрезка касательной, т. е. A — середина отрезка BC , то OB — это удвоенная ордината точки A , а OC — ее удвоенная абсцисса. Поэтому $S_{OBC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 2x = 2xy = 2k$, т. е. площадь не зависит от точки A (x и y — координаты точки A).

Верно также и утверждение, обратное теореме 2.

Теорема 3. Прямые, отсекающие от сторон прямого угла треугольники равной площади, касаются ветви гиперболы, асимптотами которой являются оси координат.

Пусть прямая BC отсекает от сторон прямого угла треугольник данной площади S , и пусть $A(x; y)$ — середина отрезка BC . Тогда $OB = 2y$,

$$OC = 2x, \quad S = S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 2x = 2xy, \text{ и точка } A \text{ лежит на гиперболе}$$

$xy = \frac{S}{2}$. Отрезок касательной к гиперболе, проведенной через точку A , заключенный между осями координат, делится, как и отрезок BC , этой точкой пополам и поэтому этот отрезок касательной совпадает с BC . Теорема доказана.

Для дальнейшего нам понадобится знать число касательных к ветви гиперболы, проходящих через данную точку. Геометрически понятно, что по мере того, как касательные огибают гиперболу, они заматают внешнюю часть гиперболы в первом координат-

ном угле дважды, а второй и четвертый координатные углы — по одному разу. Поэтому число касательных, проходящих через данную точку, в первом случае равно двум; во втором случае, так же как и для точек, лежащих на гиперболе, — единице; для внутренней части гиперболы, которая задается неравенствами $0 < \frac{1}{x} < y$, и для точек третьего координатного угла — нулю.

В заключение этого раздела заметим, что сформулированные выше теоремы справедливы для любой гиперболы и для любого угла, образованного ее асимптотами. Для того чтобы сделать переход от гиперболы с перпендикулярными асимптотами к любой другой, достаточно совершить сжатие этой гиперболы к любой прямой, не являющейся асимптотой, например к диагонали между асимптотами (или растяжение гиперболы от этой прямой). Ясно, что при таком сжатии (или растяжении) угол между асимптотами меняется и может стать любым, гипербола переходит в гиперболу, асимптоты — в асимптоты, касательные — в касательные, середины отрезков — в середины отрезков и т. д. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 4. *Прямые, отсекающие от данного угла треугольники данной площади, касаются гиперболы, асимптотами которой служат стороны этого угла. Точками касания являются середины отрезков секущих, заключенных между сторонами угла.*

Задача о треугольнике

При решении некоторых геометрических задач возникают семейства прямых. Например, прямые, проходящие через данную точку; прямые, равноотстоящие от данной точки; прямые, отсекающие от данного угла треугольники равной площади, и т. д. Общее свойство, которому удовлетворяют прямые семейства, заключается в том, что коэффициенты в уравнениях этих прямых зависят от параметра, пробегающего некоторый числовой промежуток. Другим общим

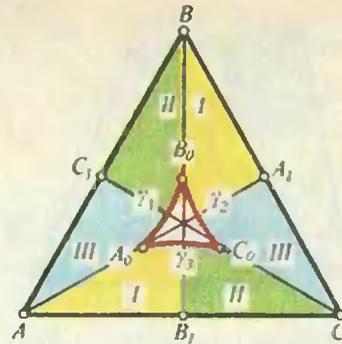


Рис. 7.

свойством семейства прямых является то, что они касаются некоторой кривой, которая называется *огibaющей* данного семейства прямых. В приведенных выше примерах семейств прямых огibaющая в первом случае вырождается в точку, во втором — в окружность, третий случай разобран ниже. Итак:

найдем огibaющую множества прямых, делящих данный треугольник на две равновеликие части.

Прямыми, делящими площадь треугольника ABC пополам и проходящими через его вершины, являются медианы треугольника. Медианы разбивают семейство всех прямых, делящих площадь треугольника пополам, на три класса прямых I, II, III (рис. 7) и являются граничными прямыми в этих классах. Прямые класса I отсекают от угла ACB треугольника постоянной площади, следовательно, по теореме 4, касаются «кусочка» гиперболы γ_1 , концами которого являются середины A_0 и B_0 медиан AA_1 и BB_1 . Аналогичные рассуждения можно провести для двух других углов треугольника.

Таким образом, огibaющей множества всех прямых, делящих площадь данного треугольника пополам, является криволинейный треугольник, вершины которого — середины медиан треугольника, а стороны — «кусочки» гипербол $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, асимптоты которых — соответствующие стороны треугольника.

Зная огibaющую, можно ответить на вопрос о числе прямых, проходящих через данную точку и делящих

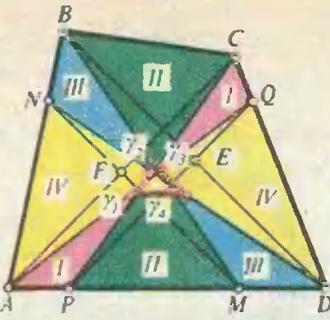


Рис. 8.

площадь треугольника пополам.*) Для каждой точки, лежащей внутри красного криволинейного треугольника, существуют три прямые, делящие его на две равновеликие части (две касательные к одной ветви гиперболы и одна к одной из двух оставшихся, для центроида — по одной касательной к каждой гиперболе); для точек, лежащих на сторонах криволинейного треугольника, исключая вершины, — две прямые; для остальных точек плоскости — одна прямая. В последнем случае множество точек плоскости, лежащих вне криволинейного треугольника, распадается на три класса I, II, III, в зависимости от того, какой гиперболы — γ_1 , γ_2 , γ_3 — касается прямая.

Задача о четырехугольнике

Решим задачу, аналогичную задаче об огибающих для треугольника, для произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$. Для этого проведем через точки E и F — середины диагоналей BD и AC четырехугольника (рис. 8) — прямые PQ и MN , параллельные диагоналям AC и BD соответственно. Тогда прямыми, проходящими через вершины четырехугольника и делящими его площадь пополам, являются AQ , CP , BM и DN (см. задачу 2). Получаем четыре класса прямых, делящих площадь четырехугольника пополам. Границы этих классов — перечисленные выше прямые AQ , CP , BM и DN . Прямые клас-

сов I и III отсекают от углов ADC и BAD треугольники постоянной площади; прямые классов II и IV отсекают треугольники постоянной площади от углов, образованных прямыми BC и AD , AB и DC . Следовательно, огибающей семейства прямых, делящих четырехугольник на две равновеликие части, является криволинейный четырехугольник с вершинами в серединах граничных прямых, стороны которого — «кусочки» гипербол. Впрочем, называть эту фигуру четырехугольником нет особых оснований: отрезки гипербол γ_1 и γ_2 в точке своего стыка имеют общую касательную (прямую CP) и сопрягаются в одну гладкую кривую; так что скорее это — треугольник, сделанный из кусочков четырех гипербол.

Некоторые вырождения рисунка 8 (анализ которых мы оставляем читателю) происходят в случаях, когда либо две противоположные стороны четырехугольника параллельны, либо какая-нибудь диагональ делится точкой пересечения диагоналей пополам. Впрочем, внешний вид картинке меняется при этом мало — за исключением случая, когда два указанных события происходят оба сразу, т. е. когда наш четырехугольник является параллелограммом. В этом случае описанный выше криволинейный треугольник сжимается в одну точку.

Наконец, ответ на вопрос, поставленный в начале статьи, — о числе прямых, проходящих через данную точку и делящих площадь пополам, — для четырехугольника тот же, что для треугольника: если точка лежит вне криволинейного треугольника, такая секущая единственна; для внутренних точек треугольника — их три; для граничных точек, кроме вершин, — их две; в вершинах треугольника — такая секущая снова одна.

*1) Задачу на эту тему прислал также десятиклассник из Киева Д. Ароцкер.

Распределение Планка (и реликтовое излучение)

Кривая, которую вы видите на рисунке, — знаменитое распределение Планка, показывающее, какую энергию излучает в виде фотонов определенная длины волны единица поверхности нагретого тела в единичный телесный угол в единицу времени. Именно с этой кривой 90 лет назад началась эра квантовой физики. Почему же очередное измерение этой кривой в начале 1990 года произвело сенсацию среди физиков?

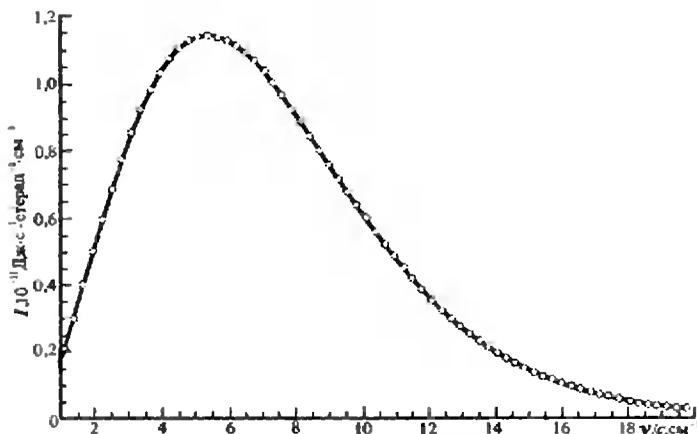
Приведенная на рисунке кривая была получена не в лаборатории при спектральном анализе излучения раскаленного образца, а на спутнике COBE, который был запущен в США в ноябре 1989 года (аббревиатура COBE расшифровывается так: COsmic Background Explorer, что по-русски означает исследователь космического фона). Прибор на спутнике регистрировал фотоны, не имеющие видимых источников. В каком бы направлении прибор ни ориентировался, спектр этого излучения, называемого реликтовым, был одним и тем же. Это говорит о том, что реликтовое излучение однородно и изотропно, заполняет всю Вселенную. Кривая очень точно воспроизводит формулу Планка для потока энергии:

$$f(n) = \frac{2\epsilon_v c n^2}{\exp(\epsilon_v/kT) - 1},$$

где $\epsilon_v = h\nu$ — энергия фотона, а n — это число волн, которое укладывается на единицу длины: $n = 1/\lambda$, $\nu = cn$. По этой кривой можно определить темпе-

ратуру реликтового излучения с точностью до тысячных долей кельвина: $T = 2,735$ К.

Исследование реликтового излучения позволяет заглянуть в столь давнее прошлое нашей Вселенной, когда в ней еще не было ни галактик, ни квазаров, а существовал только раскаленный сгусток плазмы и излучения.



«Вскоре» после того как произошел Большой взрыв, примерно через 300 000 лет после начала отсчета времени, этот огромный горячий сгусток остыл настолько, что энергия фотонов упала ниже порога рождения частиц (электронов и позитронов в частности), и излучение, или, иными словами, фотонный газ, стало адиабатически охлаждаться равномерно по всей расширяющейся Вселенной. Характерная длина волны фотонов росла вместе с ра-

диусом Вселенной, частота, а следовательно и энергия, падала. Значит, уменьшалась и температура. Показатель экспоненты $\epsilon_v/kT = h\nu/kT$ при этом оставался неизменным. Поэтому не изменялась и форма распределения Планка.

Наверное, ни в одной лаборатории мира не получали такую точную кривую Планка. И тем не менее радость и изумление физиков несколько омрачаются вопросом: а с чего ей быть такой точной? Рождались галактики, взрывались звезды, происходили огромные пертурбации во

Вселенной. Почему-то никакие катаклизмы не оставили следа на «челе» кривой. В этом еще надо разобратся. Мы постараемся вернуться к разговору о реликтовом излучении...

Я. С.

СЕГМЕНТЫ ПОСТОЯННОЙ ПЛОЩАДИ

Доктор физико-математических наук
Д. ФУКС,
кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

В этом номере «Кванта» опубликована статья «Семейство прямых, делящих площадь пополам». Нам захотелось написать к ней небольшой комментарий. Вот что из этого получилось...

Семейство хорд и его огибающая. Предположим, что на плоскости нарисована гладкая выпуклая кривая — рис. 1. Зафиксируем число S , большее нуля, но меньшее площади фигуры, ограниченной данной кривой, и проведем всевозможные хорды, отсекающие от этой фигуры сегменты площадью S (рис. 2).

Это семейство хорд имеет огибающую. Если достаточно густо изобразить семейство на рисунке, то огибающая будет видна как линия наибольшего сгущения прямых семейства. Отступление первое: что такое огибающая. «Квант» писал об этом не раз (например, № 9 и № 10 за 1988 г.). Напомним в нескольких



словах суть дела. Изобразим на чертеже несколько идущих друг за другом прямых нашего семейства (рис. 3, а). Отметим точки пересечения первой прямой со второй, второй и третьей и т. д. Отмеченные точки — вершины ломаной, составленной из отрезков прямых. Добавим еще несколько прямых из нашего семейства (они изображены красным цветом на рисунке 3, б) — и ломаная получит новые звенья. В пределе ломаная превратится в кривую; это и есть огибающая. Кстати, видно, как построить точки огибающей: нужно взять прямую l семейства и отметить на ней точку пересечения с другой прямой l' . Когда l' стремится к l , отмеченная точка стремится к точке касания прямой l и огибающей (рис. 4).

Огибающая нашего семейства хорд — геометрическое место середин этих хорд. Заголовок этого раздела — одновременно формулировка теоремы. Ее доказательство извлекается из рисунка 5.

Пусть AB и $A'B'$ — хорды нашего семейства, α — угол между ними. Поскольку AB и $A'B'$ отсекают сегменты равной площади, разовые секторы тоже имеют равные площади. Площади же этих секторов приближенно равны $\frac{1}{2} AE^2 \sin \alpha$ и $\frac{1}{2} BE^2 \sin \alpha$, причем относительная погрешность с уменьшением α делается сколь угодно малой. Значит, $AE \approx BE$, и предельное (при $\alpha \rightarrow 0$) положение точки E есть середина хорды AB .

Отступление второе: задача о двух овалах. Предположим, что на плоскости нарисованы две выпуклые кривые — одна внутри другой (рис. 6). Требуется доказать, что найдется хорда большей из них, которая касается меньшей и делится точкой касания пополам. Эта задача не так безобидна, как кажется; попробуйте решить ее сами, прежде чем читать дальше.

А теперь — решение. Проведем всевозможные касательные к внутренней красной кривой и будем следить за площадью сегментов, отсекаемых от синей кривой. Для некоторой прямой l эта площадь достигает наимень-

шего значения S . Проведем две близкие прямые l' и l'' , также отсекающие от синей кривой сегмент площадью S . Пусть A — точка касания прямой l с красной кривой, B и C — точки пересечения прямой l с l' и l'' (рис. 7). Поскольку S — наименьшее значение площади, прямые l' и l'' не содержат внутренних точек фигуры, ограниченной красной кривой. Поэтому точка A лежит между точками B и C . Устремляя l' и l'' к l , мы заставляем точки B и C стремиться друг к другу, а следовательно, к точке A . Значит, A — точка касания прямой l с огибающей семейства пря-

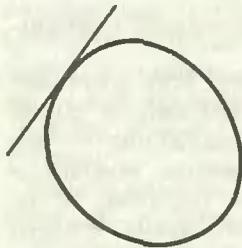


Рис. 1.

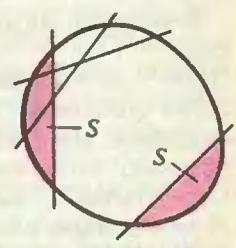


Рис. 2.

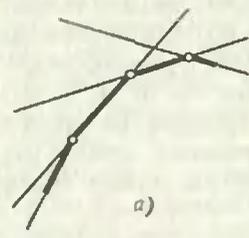


Рис. 3.

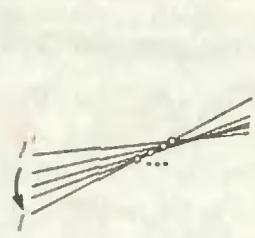
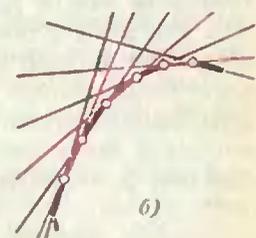


Рис. 4.

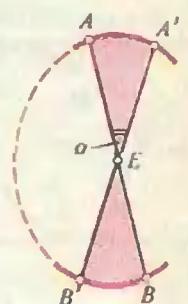


Рис. 5.

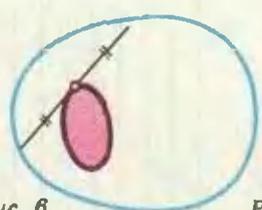


Рис. 6.

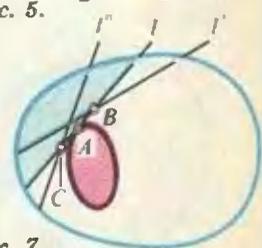


Рис. 7.

мых, отсекающих от синей кривой сегменты площадью S . Остается только воспользоваться теоремой из предыдущего пункта, согласно которой точка A делит хорду l пополам.

Это рассуждение можно повторить, заменяя минимум площади максимумом. В результате обнаружится еще одна хорда, удовлетворяющая условию задачи.

Заметим еще, что доказанный нами факт имеет пространственное обобщение: если одно выпуклое тело лежит внутри другого выпуклого тела, то существует плоскость, касающаяся границы внутреннего тела и такая, что точка касания служит центром тяжести сечения внешнего тела. Читатель может при желании попытаться это доказать.

Вернемся, однако, к нашей огибающей.

Чего у огибающей нет. Нет двух вещей: двойных касательных и точек перегиба. Двойная касательная — это прямая, которая касается кривой в двух точках, как на рисунке 8, *a*. А точка перегиба — это точка, в которой кривая пересекает касательную, как на рисунке 9, *a*. В произвольной близости как от двойной касательной, так и от касательной в точке перегиба, к кривой можно провести параллельные касательные (рис. 8, *б* и 9, *б*). Эти параллельные прямые не могут отсекал сегменты равной площади; значит, у огибающей не может быть

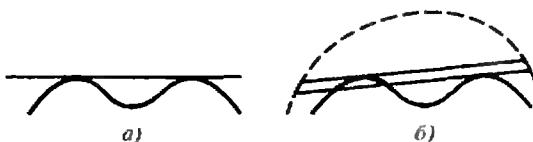


Рис. 8.

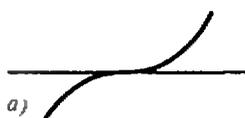


Рис. 9.

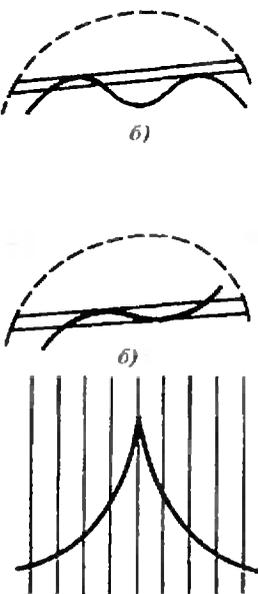


Рис. 10.

ни двойных касательных, ни точек перегиба.

Что у огибающей есть. Об этом достаточно ясно сказано в статье «Семейство прямых, делящих площадь пополам» — есть точки возврата (или острия, или клювы — словом, то, что изображено на рисунке 10). Мы уже говорили, что об огибающих «Квант» писал не раз; и всякий раз — не поленитесь, посмотрите! — речь шла о точках возврата. Так что удивляться тут нечему. Но зададимся тем не менее вопросом:

в каких местах на огибающей появляются точки возврата?

Теорема. Если середина хорды AB является точкой возврата огибающей, то касательные к нашей кривой в ее концах параллельны.

Доказательство. Пусть эти касательные не параллельны. Тогда кривую вблизи точек A и B можно приблизить ее касательными, образующими угол. В статье «Семейство прямых, делящих площадь пополам» доказано, что огибающая семейства хорд, отсекающих от угла треугольник фиксированной площади, — это гипербола. То есть, гладкая кривая, не имеющая клювов. Поэтому наша огибающая тоже не будет иметь клюва в середине хорды AB (поведение огибающей около этой точки ясно из рисунка 11).

Теперь предположим, что касательные в точках A и B параллельны. Тогда нам необходимы дополнительные данные: в какой из этих двух точек больше кривизна кривой. О кривизне «Квант» тоже писал не раз. Но мы не верим в то, что вы и так не знаете, что такое кривизна. Например, на более крутом повороте (кривизна больше!) при равной скорости автомобиль больше заносит.

Так вот, предположим, что кривизна в точке A меньше, чем в точке B (как на рисунке 12). Из этого рисунка видно, что середины E' и E'' хорд $A'B'$ и $A''B''$ расположены по разные стороны от хорды AB и сдвинуты относительно ее середины E в сторону точки A . Значит, в точке E имеется острие, обращенное к точке B .

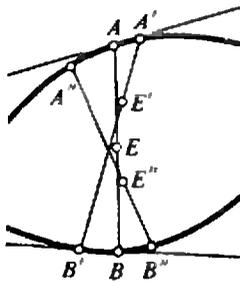


Рис. 11.

Итак: точки возврата на огибающей отвечают хордам, в концах которых касательные параллельны; острия обращены в сторону концов хорд, в которых кривизна меньше.

Правда, остался вопрос: а что будет, если в концах хорды с параллельными касательными кривизны одинаковы? Этот вопрос настолько сложен, что мы дадим на него два противоположных ответа; и оба будут правильными. Ответ первый: этого, фактически, никогда не бывает. Ведь в нашем семействе встречаются лишь отдельные хорды, касательные в концах которых параллельны. И совсем невероятно, чтобы кривизны в их концах совпали. Ответ второй: этот случай сейчас нас не касается, но в последующем мы с ним столкнемся. Пока же условимся о названии; назовем его «случаем максимального вырождения».

Сколько клювов? Неожиданным образом ответ зависит от того, равна ли площадь сегмента половине площади всей фигуры или не равна.

Случай I: S есть половина площади фигуры. В этом случае в каждом направлении проходит ровно одна хорда, отсекающая сегмент площадью S . Это значит, что касательная к огибающей при полном обходе вокруг нее повернется на 180° и совместится с собой с изменением направления (рис. 13). Итак — странное дело! — когда мы обходим огибающую, касательная меняет направление на противоположное. Как вообще это может быть? Но посмотрите, что происходит в точке возврата (рис. 14). Поставим на касательной к огибающей стрелку, так чтобы ее направление соответст-

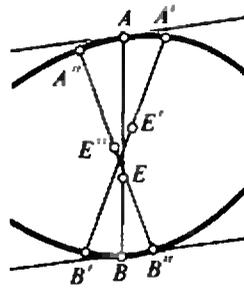


Рис. 12.

вовало направлению нашего движения. Вы сами видите, что после прохождения точки возврата направление касательной делается противоположным. И так в каждой точке возврата. Но после полного обхода направление касательной сменилось противоположным. Это значит..? Правильно!

Число точек возврата на огибающей нечетно.

Сколько же их? Не одна! Почему? Посмотрите на рисунок 10: пусть касательная в точке возврата вертикальна. У огибающей больше нет вертикальных касательных. Поэтому, если больше нет и точек возврата, то левее точки возврата кривая движется влево, а правее — вправо. Замкнуться такая кривая не может. Поэтому *число точек возврата не меньше трех.*

Случай II: S не равно половине площади фигуры.

Теперь в каждом направлении проходят две хорды из нашего семейства (рис. 15), а при полном обходе огибающей касательная поворачивается на 360° (рис. 16). Повторяя предыдущие рассуждения, мы приходим к выводу: *число точек возврата на огибающей четно.*

Отступление третье: теорема Мёбиуса. Разбирая первый случай, мы почти доказали известную теорему Мёбиуса. Она утверждает, что

кривая без двойных касательных и точек перегиба, касательная к кото-

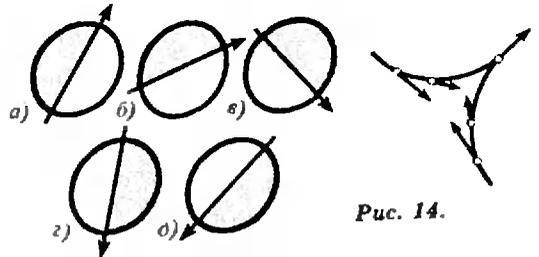


Рис. 13.

Рис. 14.

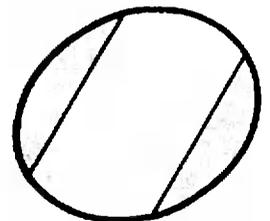


Рис. 15.

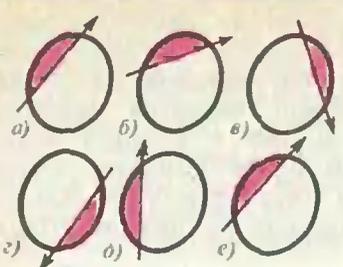


Рис. 16.



Рис. 17.

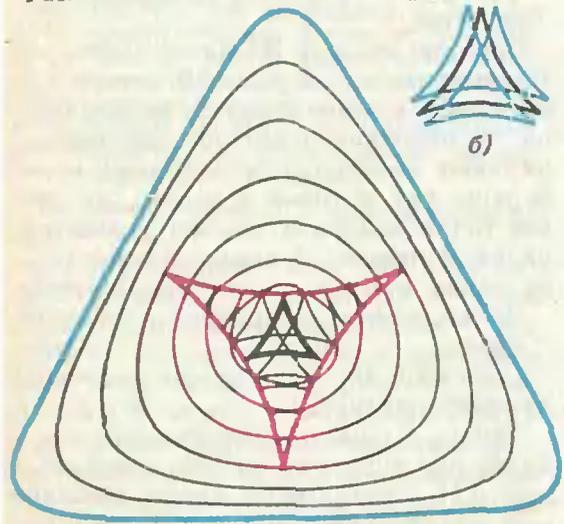


Рис. 18. а)

рой после полного обхода поворачивается на 180° , имеет нечетное число точек возврата, не меньше 3.

Например, кривые на рисунке 17 условием теоремы исключаются. А доказать ее вы без труда сможете сами, глядя на рисунок 10.

На одном чертеже. Попробуем теперь нарисовать на одном чертеже огибающие семейства хорд, отсекающих от данной фигуры сегменты площадью S , при разных S — от 0 до половины площади фигуры. То, что у нас получилось, вы видите на рисунке 18, а.

Огибающие — черные линии. Самая внутренняя черная кривая — огибающая семейства хорд, делящих площадь пополам. Эта же кривая «под микроскопом» изображена на рисунке 18, б. Прилегающая к ней синяя кривая — огибающая хорд, отсекающих сегменты площадью чуть меньше половины. Эта синяя кривая дважды обходит вокруг внутренней черной кривой. Когда площадь S уменьшается, огибающая увеличивается и при-

ближается к исходной зеленой кривой. При малых S огибающая становится гладкой, а при $S=0$ она сольется с исходной кривой. И при этом (новое наблюдение!) точки возврата огибающих сами скользят по некоторой (красной) кривой.

Эта красная кривая составлена из середин хорд, соединяющих точки, в которых касательные к исходной кривой параллельны. И сама она имеет точки возврата! Именно в этих точках попарно сливаются и исчезают (или попарно рождаются) точки возврата черных огибающих. Что же это за загадочные точки? Это наши знакомые «точки максимального вырождения», т. е. середины хорд, в концах которых касательные параллельны и кривизны одинаковы.

Сколько точек максимального вырождения? Их не меньше, чем точек возврата огибающей семейства хорд, делящих площадь пополам (а значит, не меньше 3). Ведь у огибающей семейства хорд, отсекающих площадь, чуть меньшую половины (у синей кривой на рисунке 18, б), точек возврата вдвое больше. И все они при эволюции огибающих должны попарно исчезнуть в точках максимального вырождения. Значит, этих точек не меньше, чем клювов у огибающей семейства хорд, делящих площадь пополам.

Кроме того, число точек максимального вырождения нечетно. Потому, что число точек возврата синей кривой — а это удвоенное нечетное число — в точках максимального вырождения меняется на 2 и в конце эволюции огибающих становится равным нулю. Это возможно, только если число таких изменений нечетно.

Случай многоугольника. Нам остается обратиться к предмету статьи, которую мы старались прокомментировать, — к многоугольникам. Чтобы применить к этому случаю нашу теорию, мы должны приблизить многоугольник гладкой кривой: почти прямые стороны и резкие повороты в углах.

Начнем с треугольника. Точки, в которых касательные параллельны, — это вершина треугольника и любая

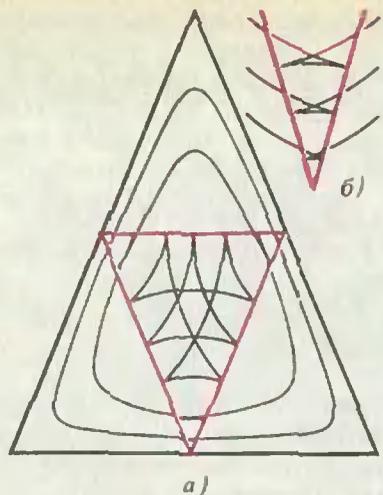


Рис. 19.

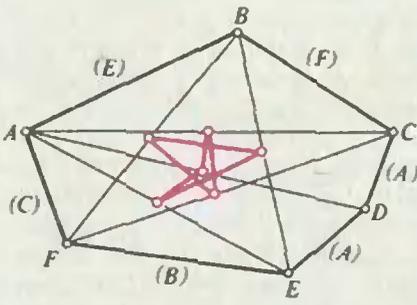


Рис. 20.

точка противоположной стороны. Значит, красная линия рисунка 18, а здесь становится треугольником, сделанным из средних линий. Огибающие семейства хорд, отсекающих от треугольника части данной площади, показаны на рисунке 19,а. Они все (рис. 19, б) имеют точки возврата (ведь красная линия «дотягивается» до сторон треугольника) и составлены из кусочков гипербол.

Из кусочков гипербол состоят эти линии и для всякого многоугольника. Назовем вершину А противоположной

стороне а, если прямая, параллельная а и проходящая через А, лежит вне многоугольника. Всякая сторона противоположна одной вершине (во всяком случае, если у многоугольника нет параллельных сторон), но вершина может быть противоположной нескольким сторонам, а может быть не противоположной ни одной. На рисунке 20 около каждой стороны указано «имя» вершины, которой она противоположна. Красная линия составлена из средних линий треугольников, у которых основание — сторона многоугольника, а вершина — противоположная ей вершина многоугольника. На сторонах этой замкнутой ломаной лежат все точки возврата огибающих, а ее вершины — точки максимального вырождения. То, что получается в случае правильного пятиугольника, мы постарались изобразить на рисунке 21 (справа — увеличенная центральная часть левой картинки).

В заключение укажем на удивительное отличие «четноугольников» от «нечетноугольников». У «нечетноугольника», близкого к правильному (или просто правильного), огибающая семейства хорд, делящих площадь пополам, имеет столько же точек возврата, сколько вершин у многоугольника, и напоминает правильную звезду. Правильный «четноугольник» центрально-симметричен, и огибающая нашего семейства сжимается в точку (центр). Если же вы возьмете «четноугольник», близкий к правильному, то для него огибающая имеет точек возврата меньше, чем число вершин (помните — число точек возврата нечетно!). Случай четырехугольника исследован в статье «Семейство прямых, делящих площадь пополам» — огибающая будет криволинейным треугольником; в случае же большего числа вершин многоугольника эта огибающая ведет себя довольно замысловатым образом.

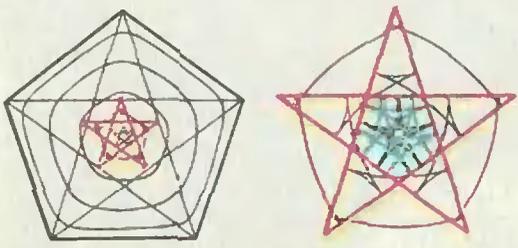


Рис. 21.

О ДИНАМИКЕ МЯЧА ДЛЯ ИГРЫ В ГОЛЬФ

(Сообщение, сделанное членом Королевского Общества сэром Дж. Дж. Томсоном в Королевском Институте в пятницу 18 марта 1910 г.)

С игрой в гольф связано так много проблем динамики, что обсуждение их всех заняло бы гораздо больше времени, чем имеется сегодня в моем распоряжении. Поэтому я даже не сделаю попытки затронуть множество важных вопросов, возникающих при рассмотрении взаимодействия клюшки с мячом, а ограничусь лишь обсуждением полета мяча после того, как он оторвался от клюшки. Как бы то ни было, эта проблема очень интересна; она была бы еще интереснее, если бы мы могли принять те объяснения поведения мяча, которые давались многочисленными авторами в обширнейшей литературе, посвященной игре в гольф. Если бы эти объяснения были верны, то мне пришлось бы представить вам сегодня новую динамику и объявить, что материя, когда она принимает форму мяча для гольфа, подчиняется законам, совершенно отличным от тех, которые определяют ее движение при любых других условиях.

Если бы мы могли послать мяч клюшкой без вращения, как из катапульты, то его поведение было бы педантично правильным, но неинтересным: при отсутствии ветра его траектория лежала бы в вертикальной плоскости, не отклоняясь ни вправо, ни влево, и он упал бы на землю после относительно короткого полета.

К счастью, мяч для гольфа, отрываясь от клюшки, лишь в редких случаях не имеет вращения, и именно вращение придает интерес, разнообразие и живость полету мяча. Именно вращением объясняется отклонение мяча вправо или влево, именно вращение заставляет мяч взмывать над полем, или нырять, или делать неистовые зигзаги, порождая легенду о его артистическом темпераменте; он совершает эти чудачества, как акробат, забавы ради крутящий одно-два сальто. В действительности, однако, мяч является самым прозаическим предметом, знающим в воздухе только одно правило поведения, которому он подчиняется с глупой добросовестностью: он всегда следует за своим «носом» (передней частью). Это правило — ключ к пониманию поведения всех мячей, находящихся в воздухе, безразлично, являются ли они мячами для гольфа, бейсбола, крикета или тенниса. Теперь же, до того, как перейти к рассмотрению сути этого правила, проследим некоторые из его следствий...

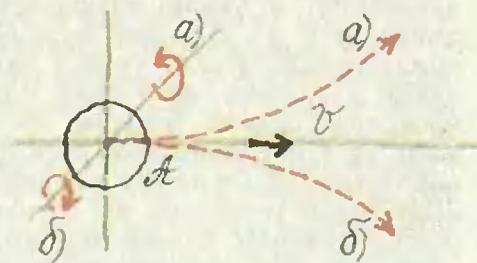


Рис. 1.

Представим, что мяч вращается вокруг горизонтальной оси, и предположим, что его скорость направлена горизонтально, как на рисунке 1, а. Тогда «нос» мяча А движется вверх, и так как по нашему правилу мяч

пытается следовать за своим «носом», он будет подниматься, траектория полета будет изогнута, как показано пунктиром. Если бы мяч вращался в противоположном направлении (рис. 1, б), его «нос» А двигался бы вниз, и мяч, следуя за точкой А, «нырнул» бы вниз.

Предположим теперь, что мяч вращается вокруг вертикальной оси, как показано на рисунке 2, б. Тогда, если мы посмотрим вдоль направления его полета, то увидим, что «нос» А движется вправо, и, следовательно, согласно нашему правилу, мяч тоже

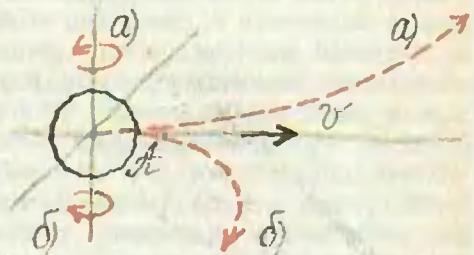


Рис. 2.

будет двигаться вправо по траектории, показанной пунктиром; фактически мяч будет себя вести как при закрученном вправо ударе. В действительности мяч, закрученный вправо, именно так вращается вокруг вертикальной оси. Если же мяч вращается в противоположном направлении (рис. 2, а), то он полетит влево. Это будет «левая закрутка».

В случае, когда ось вращения совпадает с направлением полета и проходит через «нос» мяча, он, следуя нашему правилу, будет двигаться без отклонения...

Яркие примеры влияния вращения на полет мяча дает игра в бейсбол; опытный подающий может, придавая нужное вращение, заставить траекторию мяча изогнуться вправо или влево, вверх или вниз. Для того чтобы мяч отклонился в стороны, вращение должно быть вокруг вертикальной оси, для отклонения же вверх или вниз — вокруг горизонтальной.

Игрок в теннис использует этот эффект, когда закручивает мяч сверху, т. е. ударяет по верхней части мяча

так, чтобы заставить его вращаться вокруг горизонтальной оси. «Нос» мяча движется вниз, как на рисунке 1, б, и мяч гораздо быстрее падает на площадку, не вылетая за ее пределы.

Перед тем как перейти к обсуждению эффектов, возникающих вследствие подобного вращения, я покажу несколько опытов. Так как силы, действующие на мяч, зависят от движения мяча и воздуха друг относительно друга, они не изменятся, если мы будем рассматривать неподвижный мяч в движущемся потоке воздуха. Так, предположим, что мяч стремительно летит через неподвижный воздух со скоростью v ; силы при этом будут такими же, как и в случае, когда центр мяча находится в состоянии покоя, а ветер обдувает мяч со скоростью — v ... В лекционных экспериментах пускать мяч по комнате неудобно, гораздо удобнее иметь неподвижный мяч и приводить в движение воздух.

Для начала я попытаюсь воспроизвести опыт, поставленный Магнусом *) в 1852 году. Его цель — показать, что на вращающееся тело, движущееся относительно неподвижного воздуха, действует сила в направлении движения «носа» мяча относительно его центра; следовательно, сила направлена под прямым углом

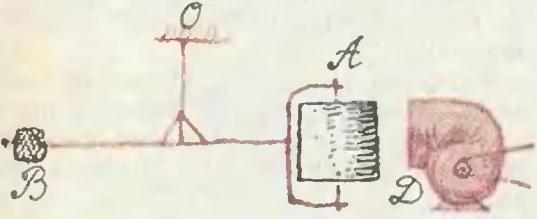


Рис. 3.

как к направлению, в котором движется центр тела, так и к оси вращения. С этой целью цилиндр А (рис. 3) укреплен на опорах так, что он может быстро вращаться вокруг вертикальной оси; цилиндр прикреплен к од-

*) Генрих Густав Магнус (1802—1870) — немецкий физик и химик. Занимался исследованиями в области механики, гидродинамики, оптики... Открыл явление возникновения поперечной силы, действующей на тело, вращающееся в набегающем на него потоке жидкости или газа (эффект Магнуса). (Примеч. ред.)

ному концу стержня, на другом конце которого находится груз В, выбранный так, что, когда стержень подвешивают на проволоке, он принимает горизонтальное положение. Стержень чутко реагирует на любую горизонтально направленную силу, так что, когда на цилиндр будет действовать такая сила, она будет легко обнаружена по движению стержня.

Перед цилиндром расположена труба D, по которой вентилятор гонит поток воздуха. Я устанавливаю стержень и ось цилиндра так, чтобы поток воздуха попадал на цилиндр симметрично. В этом случае, если цилиндр не вращается, действие на него потока воздуха не вызывает никакого движения стержня. Теперь я привожу цилиндр во вращение; вы видите, что при попадании на него потока воздуха стержень отклоняется. Он отклоняется в одну сторону при одном направлении вращения и в противополож-

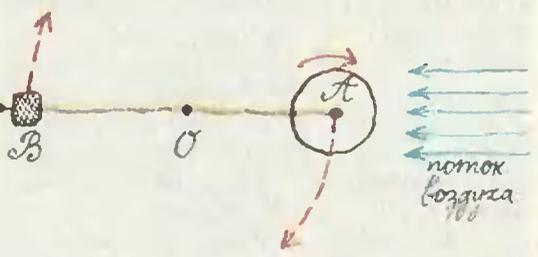


Рис. 4.

ную — при обратном. Как видите, стержень отклоняется в том же направлении, в каком вращается цилиндр (рис. 4), т. е. как если бы на цилиндр действовала сила в направлении движения его «носа». Если я прекращу подачу воздуха, то стержень не будет двигаться, хотя я вращаю цилиндр. Он также не движется, если подавать воздух на невращающийся цилиндр. Таким образом, для появления силы, действующей на цилиндр, требуется как его вращение, так и поступательное движение (или, что то же, обдувание его потоком воздуха)...

Рассмотрим теперь, как появляется эта сила. Она возникает потому, что при движении вращающегося тела давление воздуха с одной стороны

тела не равно давлению с другой стороны, и, следовательно, на тело действует сила с той стороны, где давление больше.

Так, когда мяч движется в воздухе так, как показано на рисунке 1, а, давление снизу, где линейная скорость вращения совпадает по направлению со скоростью поступательного движения, больше давления сверху,

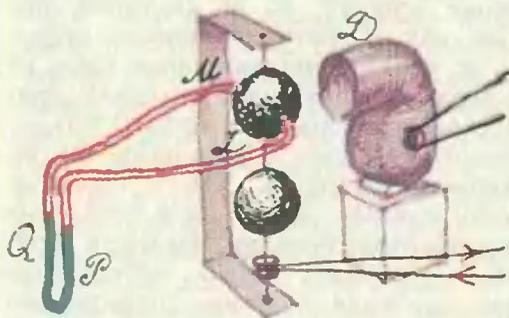


Рис. 5.

где скорость вращения противоположна по направлению скорости поступательного движения мяча в воздухе.

В приборе, показанном на рисунке 5, два мяча для гольфа — гладкий и с рифленой поверхностью — закреплены на оси и могут быть приведены в быстрое вращение электромотором. Поток воздуха, подаваемый от вентилятора по трубе D , может быть направлен на один из мячей; ось, несущую мячи, можно поднять или опустить, соответственно помещая в поток воздуха то гладкий, то рифленый мяч. Давление при этом измеряется с помощью манометра PQ , к которому присоединены специальные трубки L и M , прилегающие к противоположным сторонам мяча для гольфа; если давление воздуха со стороны M больше, чем со стороны L , уровень жидкости в трубке Q манометра понизится; если, наоборот, давление воздуха со стороны L больше, чем со стороны M , понизится уровень жидкости в трубке P манометра.

Сначала я покажу, что, когда поток воздуха направлен на мячи, но они не вращаются, давления с разных сторон одинаковы; вы видите, что жидкость в приборе не движется. Затем я выключаю вентилятор и привожу

мячи во вращение. Результат тот же — в приборе вновь нет движения жидкости. Но когда мячи вращаются в направлении, показанном на рисунке 5, и я подаю на них поток воздуха, уровень жидкости в трубке Q опускается и поднимается уровень в трубке P . Давление в этом случае выше со стороны M , где скорость точек на поверхности вращающегося мяча противоположна скорости воздуха, чем со стороны L , где вращение стремится вынести мяч из потока воздуха. (Если изменить направление вращения мяча на обратное, то вы увидите, что разница давлений тоже изменилась.)

Случай, когда мяч неподвижен, а воздух движется справа налево, с точки зрения динамики ничем не отличается от случая, когда мяч летит в неподвижном воздухе слева направо. Итак, мы видим, что давление больше с той стороны, где вращение делает скорость движения поверхности относительно воздуха больше, чем она была бы без вращения...

Чтобы показать разницу между гладким и рифленным мячами, поместим гладкий мяч в поток воздуха и отметим разницу уровней жидкости в левом и правом коленах прибора. Если теперь заменить гладкий мяч на рифленный, то разница уровней увеличится более чем в два раза; это говорит о том, что при той же скорости вращения и скорости потока воздуха разница давлений по разные стороны рифленого мяча более чем в два раза выше, чем у гладкого.

Вернемся все же к обсуждению причин, по которым давление с противоположных сторон вращающегося мяча различно. Объяснение этому было дано Ньютоном почти 250 лет назад. В письме Ольденбургу о дисперсии света в 1671 году он пишет: «Я часто видел, как теннисный мяч при ударе наклонной ракеткой описывает кривую. Когда такой удар вызывает и поступательное, и вращательное движение, части мяча с той стороны, где движения совпадают, должны давить на прилегающий воздух сильнее и возбуждать пропорционально большее

сопротивление и противодействие воздуха».

Это письмо имеет не только научную ценность — оно показывает, что Ньютон, интересуясь спортивными играми, создал прекрасный прецедент для последующих поколений физиков и математиков.

Такое же объяснение было дано Магнусом, а математическая теория эффекта представлена лордом Рэлеем в статье «О неправильном полете теннисного мяча», опубликованной в «Messenger of Mathematics» (1877 год, том VI, с. 14). Лорд Рэлей показывает, что сила, действующая на мяч и являющаяся результатом разницы давлений, направлена под прямым углом к направлению движения мяча и к оси его собственного вращения, а величина этой силы пропорциональна скорости мяча, умноженной на угловую скорость вращения и на синус угла между направлением движения мяча и осью вращения...

Поскольку я боюсь, что не все мои слушатели — хорошие математики, попытаюсь дать общее представление о том, как устанавливается эта разница давлений, не используя формул.

Рассмотрим мяч для гольфа, вращающийся в движущемся потоке воздуха (рис. 6). Движение воздуха с



Рис. 6.

нижней стороны мяча будет задерживаться его вращением, и, следовательно, оно будет вблизи мяча медленнее, чем если бы мяча не было или если бы мяч не вращался. Иными словами, в потоке воздуха, движущемся по каналу PQ, скорость около мяча в точке Q должна быть меньше, чем в точке P; следовательно, должно возникнуть давление, действующее против движения воздуха, т. е. давление воздуха в точке Q должно быть

больше, чем в точке, находящейся, подобно P, на некотором расстоянии от мяча. Посмотрим теперь, что происходит с другой стороны мяча. Здесь вращение стремится переместить мяч в направлении движения потока воздуха; если скорость поверхности мяча здесь больше скорости потока, то мяч увлекает за собой воздух, увеличивая скорость потока; в противном случае мяч, хотя и уменьшит скорость потока воздуха, но не до такой степени, как с противоположной стороны, и увеличение давления воздуха на верхнюю часть мяча (по сравнению с давлением воздуха в точке P) будет меньше, чем увеличение давления на нижнюю его часть. Таким образом, возле нижней части мяча давление воздуха будет больше, чем возле верхней, и на мяч будет действовать сила, заставляющая его подниматься вверх.

Здесь мы предполагали, что мяч для гольфа покоится, а воздух стремительно движется вдоль него справа налево; силы при этом будут те же самые, как если бы воздух покоился, а мяч для гольфа летел бы слева направо. Летящий мяч, вращающийся в направлении, показанном на рисунке 6, будет подниматься вверх, следуя за своим «носом»...

Разница давлений с двух сторон мяча для гольфа пропорциональна скорости мяча, помноженной на угловую скорость его вращения. Так как вращение, приданное мячу клюшкой при ударе вертикально вверх («свечкой»), пропорционально скорости, с которой мяч отрывается от клюшки, разность давлений в момент отрыва пропорциональна квадрату его начальной скорости. Чтобы создать подъемную силу, большую, чем сила тяжести, разность средних давлений с противоположных сторон мяча должна быть только около 0,2 % от атмо-

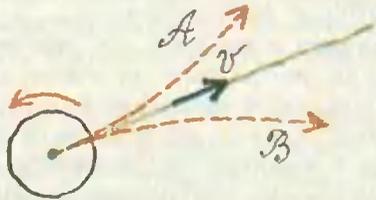


Рис. 7.

сферного давления. Мяч же при хорошем ударе отрывается от клюшки со скоростью, достаточной для создания гораздо большей разности давлений. Как следствие, когда мяч вылетает из лунки, вращаясь в направлении, показанном на рисунке 7 (это часто называют закручиванием снизу), сила, вызванная вращением и направленная вверх, больше силы тяжести, равнодействующая сила направлена вверх — и мяч взмывает над полем, вместо того, чтобы притягиваться к земле. Траектория мяча выгибается вверх, по кривой *A*, а не вниз, по кривой *B*, как если бы мяч не вращался. Фактически вращающийся мяч для гольфа является очень эффективным летательным аппаратом тяжелее воздуха; подъемная сила может превосходить вес мяча во много раз.

При изменении скорости вращения траектория мяча может принимать множество очень интересных форм. Мы можем проследить за всеми этими изменениями на установке, которую можно назвать «электрический игровой трек». Посредством этого



Рис. 8.

устройства (см. рис. 8) я могу подвергнуть небольшие частицы действию сил точно того же типа, что и силы, действующие на вращающийся мяч для гольфа. Частицы вылетают из катода — раскаленного докрасна куска платины с нанесенным на него пятном оксида бария *A* — это можно назвать лункой; платина соединена с электрической батареей, которая заставляет отрицательно заряженные частицы вылетать из катода и лететь по стеклянной трубке, из которой удален почти весь воздух. Эти частицы светятся, и их траекторию очень легко видеть невооруженным глазом. Итак, наши мячи вылетают из лунки-катода, и мы должны теперь ввести

вертикальную силу, действующую на частицы-мячи подобно силе тяжести. Это легко сделать при помощи горизонтальных пластин *B* и *C*, которые заряжены от электрической батареи; верхняя пластина при этом заряжена отрицательно, и, следовательно, когда отрицательно заряженная частица пролетает между пластинами, на нее действует сила, направленная, подобно силе тяжести, вниз. Вы видите, что, когда частицы пролетают между пластинами, их траектория имеет форму, показанную на рисунке 9, *a*; это — траектория мяча,

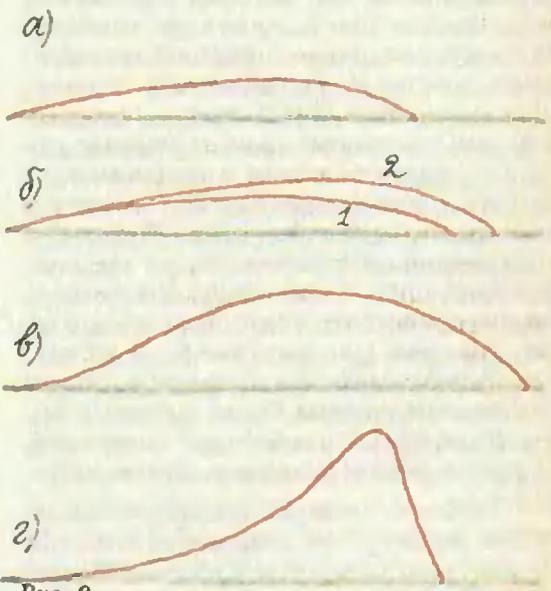


Рис. 9.

летающего без вращения. Я могу имитировать эффект вращения, подвергнув частицы-мячи действию магнитных сил. Когда заряженные частицы находятся в магнитном поле, на них действует сила, направленная под прямым углом к направлению движения частиц и к направлению магнитного поля и пропорциональная произведению скорости частиц на величину магнитного поля и на синус угла между скоростью и полем. А сила, действующая на обыкновенный мяч для гольфа, направлена под прямым углом к направлению его полета и к оси вращения и пропорциональна произведению скорости мяча на угловую скорость мяча и на синус угла

между осью вращения и вектором скорости. Сравнивая две эти зависимости, вы видите, что сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле, подобна силе, действующей на мяч для гольфа. Если считать, что направление магнитного поля соответствует направлению оси вращения, а его величина пропорциональна угловой скорости, то, наблюдая за поведением заряженных частиц в магнитном поле, мы получим представление о поведении вращающегося мяча для гольфа.

Давайте вначале рассмотрим воздействие «нижней закрутки» на полет мяча; в этом случае мяч вращается, как на рисунке 1, а, вокруг горизонтальной оси, расположенной под прямым углом к направлению полета. Для имитации этого вращения приложим горизонтальное магнитное поле под прямым углом к направлению полета частиц. Сделать это я могу с помощью электромагнита. Начнем с небольшой величины поля, моделирующей слабое вращение. Вы видите, как отличается траектория в этом случае (кривая 1 на рисунке 9, б) от траектории без магнитного поля; в начале полета траектория более плоская, хотя и остается несколько выпуклой, и длина пролета больше, чем раньше.

Теперь я увеличу магнитное поле, и вы видите, что длина пролета еще более увеличивается (рис. 9, б, кривая 2). Если я еще более «закручу» наши частицы-мячи, увеличив магнитное поле, то начало траектории становится вогнутым, а не выпуклым, а длина пролета еще более возрастает (рис. 9, в). Увеличим поле еще больше, и мы видим, что частица взмывает на большую высоту, а потом резко падает (рис. 9, г); длина пролета при этом меньше, чем в предыдущем случае. Это — тоже знакомый тип траектории мяча для гольфа. Но увеличивая еще больше магнитное поле, мы получаем тип полета, который, насколько мне известно, еще не наблюдался на игровых площадках для гольфа и который можно было бы получить, если бы мячу придали большее вращение, чем способны игроки

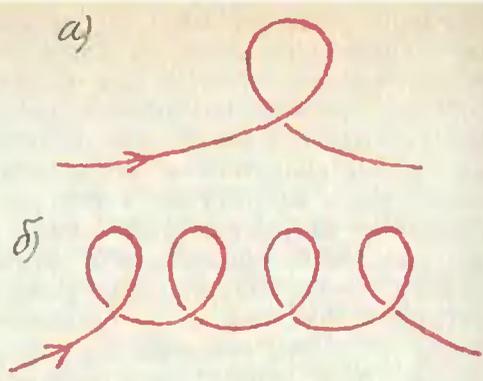


Рис. 10.

в настоящее время. Вы видите, что на кривой на рисунке 10, а есть загиб, т. е. в части траектории частица фактически движется назад. Увеличивая дальше поле, я получаю больше подобных завитушек на траектории (рис. 10, б). Мы смоделировали тип удара, который приходится предоставить осуществить будущим поколениям игроков в гольф...

До сих пор нами рассматривалась лишь закрутка мяча сверху или снизу. Давайте теперь проиллюстрируем боковую закрутку; в этих случаях мяч вращается вокруг вертикальной оси. Следовательно, я должен расположить электромагнит так, чтобы он давал вертикально направленное магнитное поле (рис. 11). Я направлю

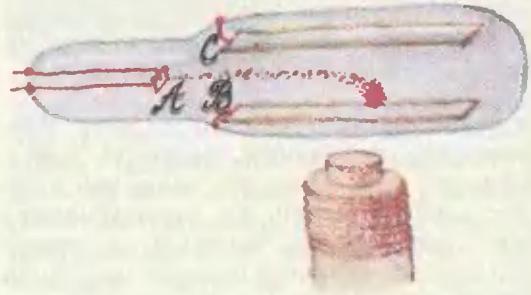


Рис. 11.

поле вниз, и вы видите, что частицы отклоняются вправо — ведут себя, как мяч, закрученный справа налево (как на рисунке 2, б). Меняя направление поля на противоположное, мы увидим, что, подобно мячу с левой закруткой, частицы отклоняются влево.

Увеличивая магнитное поле, мы можем получить значительно более

сильную закрутку мяча, чем самые сильные из тех, что мы творим на игровых полях.

Хотя петли, изображенные на рисунке 10, а, насколько мне известно, не наблюдались, их можно получить, используя очень легкие мячи. Здесь у меня есть мяч, сделанный из очень тонкой резины, типа той, которая используется для детских воздушных шаров, и заполненный воздухом. Весит такой мяч чуть больше того воздуха, который он вытесняет. Если ударить по нему рукой так, чтобы подкрутить его вверх, вы увидите, что он опишет петлю, как на рисунке 12.

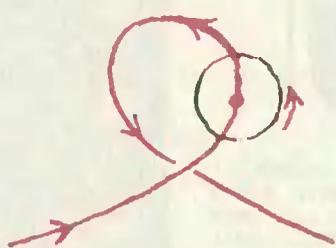


Рис. 12.

Если ударить по мячу так, чтобы придать ему вращение вокруг вертикальной оси, вы увидите, что он движется со страшно увеличенной закруткой вправо, если «нос» мяча движется вправо, и со столь же увеличенной левой закруткой, если «нос» мяча движется влево.

Хорошо известным свойством ударов с боковой закруткой является то, что вызванный таким вращением изгиб траектории становится значительно более выраженным при уменьшении скорости мяча по сравнению с начальной. Это можно легко понять, если рассмотреть, как сказывается на движении в сторону уменьшение скорости в два раза. Предположим, что закрученный мяч вылетает из



Рис. 13.

точки А в направлении на точку В. Закрутка вызовет смещение мяча, и он попадет не в точку В, а в точку С (рис. 13). Как мы уже знаем, действующая в направлении ВС сила пропорциональна произведению скорости мяча на угловую скорость вращения. Пусть при разных начальных скоростях угловая скорость вращения одна и та же. Тогда, уменьшая в два раза скорость, мы уменьшаем в два раза действующую в сторону силу; следовательно, за то же время, что и раньше, мяч пролетит в два раза меньшее расстояние, и время, необходимое мячу для прохождения пути от А до В, удваивается. Перемещение, происходящее под действием постоянной силы, пропорционально квадрату времени; следовательно, если бы сила оставалась неизменной, отклонение в сторону (ВС) возросло бы в четыре раза, но так как уменьшение скорости наполовину в два раза уменьшает силу, то смещение в сторону возрастет лишь вдвое.

Если бы угловая скорость уменьшалась столь же быстро, как и скорость перемещения, изгиб траектории при уменьшении скорости не увеличился бы. Но так как сопротивление воздуха оказывает на скорость мяча большее воздействие, чем на его вращение, быстрее уменьшается именно линейная скорость.

Влияние ветра на движение вращающегося мяча можно легко понять из общих принципов, которые мы обсудили в предыдущей части лекции. Рассмотрим сначала случай со встречным ветром, при котором увеличивается скорость мяча относительно воздуха. Так как сила, вызванная вращением, пропорциональна скорости, встречный ветер увеличивает эту силу, и эффекты вращения более выражены при встречном ветре, чем в спокойный день. Несомненно, игроки в гольф имели возможность это заметить...

Рассмотрим теперь влияние поперечного ветра. Для определенности

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта“



Врожденная сила материи... всегда пропорциональна массе и если отличается от инерции массы, то разве только воззрением на нее.

И. Ньютон

А так ли хорошо знакома вам

Масса ?



В приведенном определении Ньютона, введшего в механику понятие массы, речь идет, по существу, о свойстве инертности. И самый общий способ измерения массы тел — по их инертности. Однако в физических экспериментах и на практике массу чаще измеряют с помощью весов.

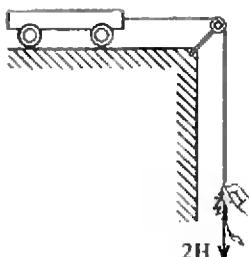
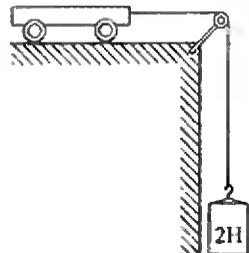
Инертность и весомость в классической физике — разные понятия, тем не менее со времен Галилея и Ньютона установлено, что отвечает за них одна и та же характеристика — масса. Этот замечательный факт — равенство инертной и гравитационной масс — позднее лег в основу общей теории относительности — современной теории структуры «пространства — времени».

В этом выпуске «Калейдоскопа» мы постараемся, пусть на простых примерах, выяснить, как проявляет себя «двулика» масса.



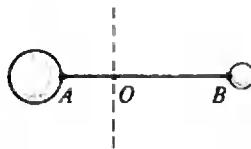
или уменьшится прогиб доски в первый момент, если человек внезапно присядет? выпрямится?

4. Почему первая из изображенных на ри-



Вопросы и задачи

1. Из одного куска пластилина вылепили фигурку и ее копию, только в два раза большей высоты. Какова масса копии, если масса оригинала 50 грамм?
2. Два шарика массой 9 грамм и 3 грамма соединены нитью и вращаются в горизонтальной плоскости с постоянной угловой



скоростью. При каком соотношении длин нитей AO и OB их натяжение будет одинаковым?

3. На доске стоит человек. Увеличится

сунке тележек набирает скорость медленнее, чем вторая, хотя массы тележек одинаковы?

5. Открытый сосуд частично заполнен водой, не смачивающей его стенки. Можно ли в условиях невесомости перелить воду из этого сосуда в другой такой же сосуд?

6. Как сравнить массы двух тел в условиях невесомости?

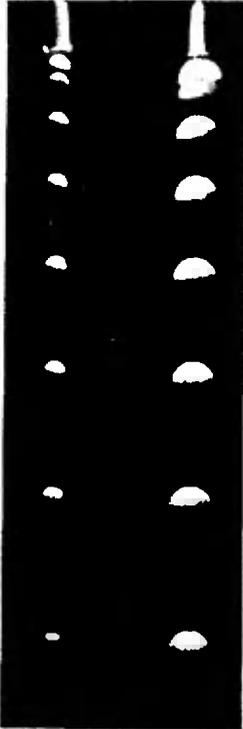
7. Каким молотком — легким или тяжелым — лучше пользоваться при ковке металла?

8. Почему нагруженный автомобиль движется по булыжной мостовой более плавно, чем незагруженный?

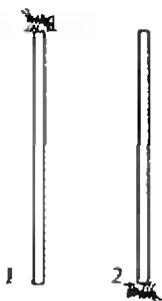


9. Почему не стоит при пропалке сорняков выдергивать их из земли рывком?

10. Почему Земля сообщает всем телам одно и то же ускорение независимо от их масс?



11. Две одинаковые соломинки с одинаковыми муравьями падают с одной высоты, все время оставаясь вертикальными. За



время падения оба муравья успевают переползти с одного конца соломинки на другой. Какая соломинка упадет быстрее?



12. Могут ли работать центробежные механизмы — сепараторы, насосы — на Искусственном спутнике Земли?



Микроопыт

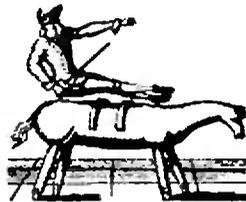
На лист бумаги поставьте у края стола стакан с водой. Резко выдерните лист в горизонтальном направлении. Что произойдет? Почему?



Любопытно, что...

...физическая природа массы до сих пор

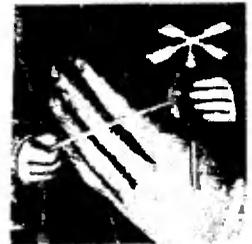
не выяснена и количественной теории массы еще не создано. ...долгое время считалось, что нейтрино — безмассовая частица. Однако тончайшие эксперименты последних лет дают основания полагать, что масса нейтрино отлична от нуля.



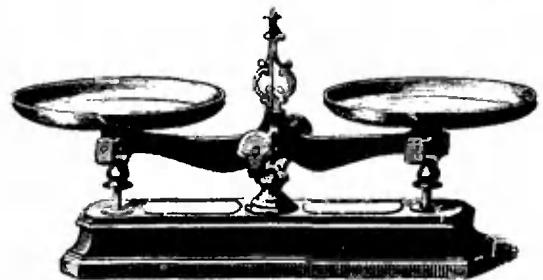
...полковник Краус фон Циллергут, у которого brave солдат Швейк украл пинчера, имел весьма смутное представление об инерции. «Когда весь бензин вышел, — гово-

рил полковник, — автомобиль принужден был остановиться... И после этого еще болтают об инерции, господа!.. Ну, не смешно ли?»

...в опытах советских физиков эквивалентность инертной и гравитационной масс доказана с точностью до 10^{-12} , что в миллиард раз превышает точность проведенного еще Ньютоном опыта. ...современные масс-спектрометры измеряют массы атомных ядер с погрешностью порядка одной десятиллионной атомной единицы.



...для накопления, хранения и последующего выделения энергии все чаще используются так называемые инерционные аккумуляторы, или, попросту, маховики.



Что читать о массе в «Кванте» (публикации последних лет)

1. «Как вводятся физические величины» — 1984, № 10, с. 7;
2. «Инерция и инертность» — 1985, № 11, с. 20;
3. «Закон всемирного тяготения» — 1987, № 11, с. 36;
4. «Что такое центр масс» — 1988, № 3, с. 39;
5. «Гармонические колебания» — 1988, № 11 — 12, с. 64;
6. «Размышления о массе» — 1990, № 2, с. 27.

О динамике мяча для игры в гольф

(Начало см. на с. 32)

предположим, что ветер дует слева направо. Тогда, если мяч закручен влево, давление на переднюю сторону мяча будет больше, чем на заднюю, и, таким образом, мяч будет тормозиться. Однако, если бы вращение было как при правой закрутке, давление на заднюю половину мяча было бы больше, чем на переднюю, и разность давлений подталкивала бы мяч и заставляла его пролететь дальше, чем в первом случае. Мораль заключается в следующем: если ветер дует слева, то, чтобы послать мяч дальше, мы должны использовать правую закрутку; если же ветер дует справа, мы должны закрутить мяч слева.

Времени, которое у меня осталось, хватит лишь на несколько слов о том, как мяч получает вращение от клюшки. Если вы усвоили, что взаимодействие биты и мяча зависит только от их относительного движения и что оно остается тем же независимо от того, закреплен ли мяч, а движется клюшка, или клюшка неподвижна, а мяч летит на нее, основные моменты очень легко понять.

Представим, что наклоненная плоскость на рисунке 14 — это часть головки поднятой для удара клюшки,

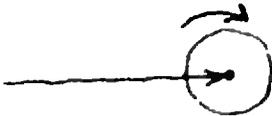


Рис. 14.

двигающейся горизонтально справа налево. Удар будет таким же, как если бы клюшка покоилась, а мяч летел на нее горизонтально слева направо. Очевидно, что в этом случае мяч будет вкатываться вверх по поверхности, получая при этом вращение вокруг горизонтальной оси в направ-

лении, показанном на рисунке; это — верхняя закрутка, увеличивающая дальность полета мяча.

Предположим теперь, что поверхность клюшки движется при ударе вдоль направления PQ (рис. 15).

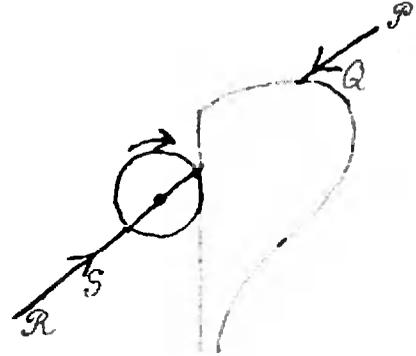


Рис. 15.

Удар будет таким же, как если бы клюшка покоилась, а мяч летел вдоль RS : мяч приобретает вращение вокруг вертикальной оси в направлении, показанном на рисунке. Это — правая закрутка...

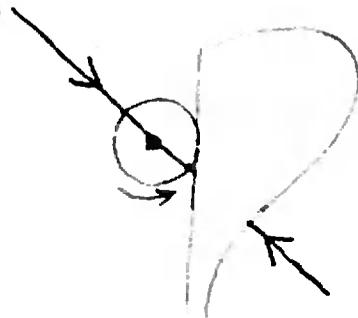


Рис. 16.

Если бы движение и положение клюшки были такими, как на рисунке 16, мяч был бы закручен влево.

Перевод с английского О. Симоновой

Задачник „Кванта“

Задачи

M1236—M1240, Ф1243—Ф1247

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 октября 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1236» или «Ф1243». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи Ф1244, Ф1245 и Ф1247 предлагались на заключительном этапе XXIV Всесоюзной олимпиады по физике (Вологда, 1990).

M1236. Найти множество точек O внутри данного квадрата на плоскости, для которых существует окружность с центром O , пересекающая стороны квадрата в 8 точках.

А. Толыго

M1237. Пусть точка O внутри треугольника ABC такова, что $\vec{OK} + \vec{OM} + \vec{ON} = \vec{0}$, где K, M, N — основания перпендикуляров, опущенных из O на стороны AB, BC, CA треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{OK + OM + ON}{AB + BC + CA} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

А. Магадеев

M1238. Множество натуральных чисел разбито на две части. В одной из них нет трехчленных арифметических прогрессий. Обязательно ли в другой есть бесконечная арифметическая прогрессия?

А. Скопенков

M1239. Даны две пересекающиеся окружности и точка P (рис. 1). Проведите через точку пересечения окружностей их общую секущую AB так, чтобы угол APB имел заданную величину.

В. Дубровский

M1240*. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 выделен квадрат $ABCD$ $n \times n$ клеток. Из вершины A в C по линиям сетки проводится случайная ломаная длины $2n$. В n клетках квадрата, случайно расположенных в разных строках и разных столбцах, расставляются n звездочек. С какой вероятностью все звездочки окажутся по одну сторону от ломаной? (Другими словами, какую долю среди всевозможных расположений ломаных и звездочек составляют такие, что звездочки лежат по одну сторону от ломаной?)

Д. Фомин

Ф1243. Таракан и два жука могут ползать по большому горизонтальному столу. Каждый из жуков может развивать скорость до 1 см/с. В первый момент насекомые находятся в вершинах равностороннего треугольника. Какую скорость должен уметь развивать таракан, чтобы при любых перемещениях жуков треугольник оставался равносторонним?

А. Коршков

Ф1244. Бытовой холодильник поддерживает в камере постоянную температуру -12°C . При температуре в комнате $+25^\circ\text{C}$ его мотор включается каждые 8 минут и, проработав 5 минут, выключается. Считая холодильник идеальной тепловой машиной, работающей по обратному циклу, предскажите — как часто и на какое время он станет включаться, если в комнате температура понизится до $+15^\circ\text{C}$. При какой максимальной

Задачник „Квант“

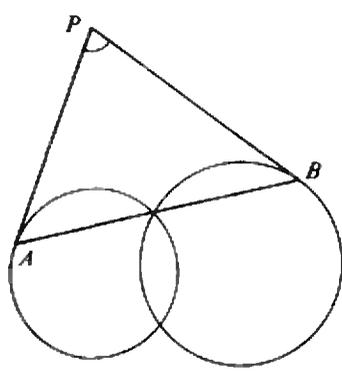


Рис. 1.

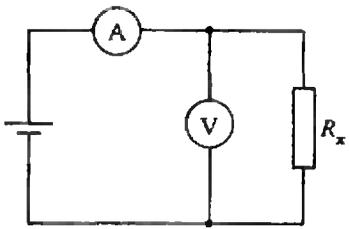


Рис. 2.

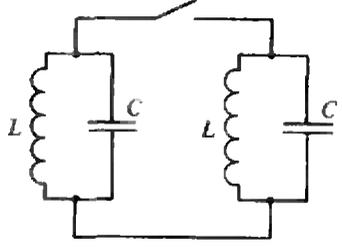


Рис. 3.

температуре в комнате он сможет поддерживать в камере заданную температуру?

Р. Александров

Ф1245. В схеме на рисунке 2 амперметр показывает ток 10 мА, вольтметр — напряжение 2 В. После того как резистор отключили от вольтметра и подключили параллельно амперметру, показания амперметра уменьшились до 2,5 мА. Определите по этим данным сопротивление резистора. Чему равно сопротивление вольтметра? Можно ли определить по этим данным сопротивление амперметра и напряжение батареи? Батарейку считать идеальной.

А. Зильберман

Ф1246. Два одинаковых LC-контура находятся далеко друг от друга. В первом возбуждены колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе U_0 . В тот момент, когда напряжение на конденсаторе оказалось нулевым, подключают проводами второй контур (рис. 3). Опишите процессы в цепи после подключения. Что изменится, если подключение произвести в тот момент, когда напряжение на конденсаторе максимально?

А. Алексеев

Ф1247. На противоположных стенах комнаты висят друг против друга два одинаковых круглых зеркала диаметром 1 м. Наблюдатель находится на оси симметрии оптической системы и смотрит на одно из зеркал. Сколько «вложенных» отражений он сможет насчитать, если угловое разрешение его глаза 1 минута? Зеркала находятся на расстоянии 5 м друг от друга. Размеры головы наблюдателя пренебречь.

К. Зуев

Решения задач

M1211—M1215, Ф1223—Ф1227

M1211. Можно ли расположить в пространстве тетраэдр, шар и плоскость таким образом, чтобы площади сечений тетраэдра и шара любой плоскостью, параллельной выбранной, были равны?

Будем считать выбранную плоскость горизонтальной. Проведем две горизонтальные плоскости, касающиеся шара, и построим тетраэдр, у которого два противоположных ребра лежат в этих плоскостях, взаимно перпендикулярны и равны a (рис. 1); соотношение между a и радиусом R шара выберем ниже.

Сечение шара горизонтальной плоскостью, находящейся на расстоянии $R-h$ от центра шара, т. е. на расстоянии h от одной из касательных плоскостей и $2R-h$ от другой, — круг площади $\pi(R^2-(R-h)^2)=\pi h(2R-h)$ (рис. 2).

Сечение тетраэдра той же плоскостью — прямоугольник со сторонами $ah/2R$ и $a(2R-h)/2R$ (ясно, что длина каждой из сторон прямоугольника выражается

Задачник "Квант"

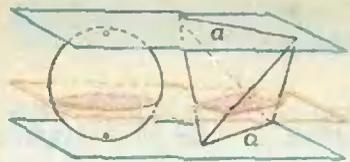


Рис. 1.

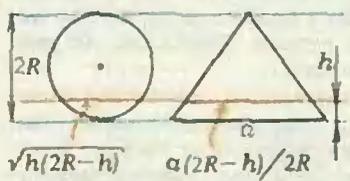


Рис. 2.

линейной функцией от h , которая в концах отрезка $0 \leq h \leq 2R$ принимает значения 0 и a). Площадь этого сечения равна $a^2 h(2R-h)/4R^2$. Итак, достаточно взять $a = 2\sqrt{\pi}R$, чтобы площади соответствующих сечений были равны.

Н. Васильев

М1212. Множество всех целых чисел разбито на попарно непересекающиеся бесконечные арифметические прогрессии с положительными разностями d_1, d_2, d_3, \dots . Может ли случиться, что

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \dots < 0,9? (*)$$

Рассмотрите два случая:
 а) число прогрессий конечно;
 б) число прогрессий бесконечно (при этом условие $(*)$ означает, что сумма любого конечного числа слагаемых в левой части $(*)$ меньше 0,9).

а) **О т в е т:** не может.
 Пусть число прогрессий конечно и равно k . Докажем, что сумма $1/d_1 + 1/d_2 + \dots + 1/d_k$ равна 1. Пусть M — некоторое (например, наименьшее) общее кратное чисел d_1, d_2, \dots, d_k . Рассмотрим любой отрезок из M последовательных целых чисел; в нем будет M/d_i членов i -й прогрессии с разностью d_i ($i=1, 2, \dots, k$). Поэтому $M/d_1 + M/d_2 + \dots + M/d_k = M$.

б) **О т в е т:** может.
 Приведем пример бесконечного числа прогрессий, для которых сумма $1/d_1 + 1/d_2 + 1/d_3 + \dots$ меньше 0,9. Возьмем в качестве d_1, d_2, d_3, \dots числа 4, 8, 16, ..., $d_k = 2^{k+1}, \dots$; тогда $1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots \leq 1/2$. Будем строить прогрессии последовательно, по индукции. Первая прогрессия — числа, кратные 4. Для каждого $k > 1$, считая, что первые $k-1$ уже построены, мы выберем в качестве одного из членов k -й прогрессии с разностью $d_k = 2^{k+1}$ наименьшее по модулю целое число, не входящее в уже построенные. Поскольку d_k делится на каждое d_i ($i < k$), k -я прогрессия не пересекается с предыдущими. С другой стороны, прогрессии содержат в себе без исключения целые числа: не более чем за $2k$ шагов мы включим в прогрессии каждое целое число, не превосходящее по модулю $k-1$.

Аналогично для любого $\epsilon > 0$ можно построить пример, в котором $1/d_1 + 1/d_2 + 1/d_3 + \dots < \epsilon$.
 А. Толпыго, Н. Константинов

М1213. а) Докажите, что если выпуклый шестиугольник можно разрезать на параллелограммы, то он имеет центр симметрии.
 б) Докажите, что если выпуклый шестиугольник, в котором каждая диагональ, соединяющая противоположные вершины, параллельна двум сторонам, можно разрезать на N па-

а) Рассмотрим все параллелограммы разбиения, у которых одна из сторон параллельна некоторой стороне a шестиугольника. Они образуют «поток», сечение которого любой прямой, параллельной a , имеет одну и ту же суммарную ширину (рис. 1). В самом деле, к каждому параллельному a отрезку, состоящему из одной или нескольких сторон параллелограммов, сверху и снизу примыкает «поток» одной и той же ширины. Поэтому вторая сторона шестиугольника, на которую выходит этот поток, будет параллельна и равна a .
 (Попутно мы видим, что каждая сторона любого параллелограмма, входящего в разбиение, параллельна од-

параллелограммов равной площади, то N делится на 3.

Задачник "Квант"

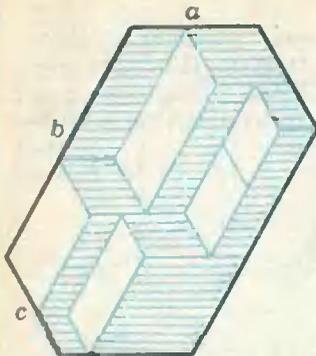


Рис. 1.

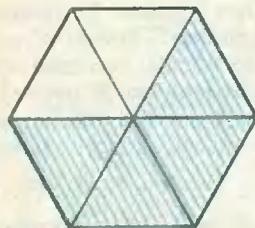


Рис. 2.

ной из сторон шестиугольника: он также включается в некоторый «поток», выходящий на границу шестиугольника.)

Аналогичное рассуждение показывает, что и четыре другие стороны шестиугольника разбиваются на две пары параллельных и равных сторон. Очевидно, параллельные стороны противоположны.

Остается заметить, что у выпуклого шестиугольника с параллельными и равными противоположными сторонами обязательно есть центр симметрии: три его большие диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке — общей середине этих диагоналей.

б) Пусть теперь шестиугольник таков, что его большие диагонали параллельны сторонам. Согласно решению задачи а), они пересекаются в центре симметрии шестиугольника, поэтому они разбивают его на шесть равных по площади треугольников (рис. 2). Пусть S — площадь каждого из этих треугольников и s — площадь каждого из N параллелограммов, на которые разбит шестиугольник, тогда $Ns=6S$. Суммарная площадь параллелограммов каждого потока, соединяющего две противоположные стороны шестиугольника, равна $4S$: она равна площади двух параллелограммов, заштрихованных на рисунке 2. Поэтому в поток должно входить $4S/s=2N/3$ параллелограммов. Отсюда следует, что N делится на 3.

В. Произволов

M1214*. В некоторых клетках прямоугольной таблицы из n строк и $m > n$ столбцов расставлены звездочки так, что в каждом столбце стоит хотя бы одна звездочка. Докажите, что найдется звездочка такая, что в ее строке звездочек больше, чем в ее столбце.

Из исходной таблицы A со звездочками построим две новые таблицы — «красную» и «голубую», в которых звездочки заменены числами: в красной таблице эти числа равны $1/k$, где k — количество звездочек в соответствующем столбце, а в голубой эти числа равны $1/l$, где l — количество звездочек в соответствующей строке. Тогда сумма всех красных чисел равна m — числу столбцов (в каждом столбце сумма равна 1), а сумма всех голубых чисел не больше n — числа строк (в каждой строке сумма равна 0 или 1). Поскольку $m > n$, то найдется звездочка такая, что соответствующее красное число $1/k$ больше голубого числа $1/l$: $1/k > 1/l$, откуда $k < l$, т. е. для этой звездочки выполнено требуемое условие.

Точно так же можно доказать и более сильное утверждение: в условиях задачи найдется звездочка, для ко-

	*	*		
*		*	*	
*	*		*	
*			*	*

	1/2	1/2		
1/3		1/2	1/3	
1/3	1/2		1/3	
1/3			1/3	1

	1/2	1/2		
1/3		1/3	1/3	
1/3	1/3		1/3	
1/3			1/3	1/3

Задачник „Кванта“

торой отношение числа звездочек в ее строке и в ее столбце не меньше t/n .

Задача имеет и совершенно другие решения (в частности, по индукции), но приведенное — одно из самых простых.

Н. Васильев.

M1215*. Число 15 можно тремя способами разложить в сумму трех натуральных чисел так, что все 9 чисел различны:

$$15 = 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 3 + 5 + 7.$$

Для каждого натурального n обозначим через $k(n)$ наибольшее число троек натуральных чисел, дающих в сумме n и состоящих из $3k(n)$ различных чисел.

Докажите, что

- а) $k(n) > n/6 - 1$;
- б) $k(n) < 2n/9$;
- в) $k(100) = 21$;
- г) $k(500) = 110$.

- (1, $3p-1$, $n-3p$)
- (2, $3p-3$, $n-3p+1$)
- (3, $3p-5$, $n-3p+2$)

($p, p+1, n-2p-1$)

- (1, 47, 52)
- (2, 45, 53)
- (3, 43, 54)

(16, 17, 67)

- (18, 38, 44)
- (20, 34, 46)
- (22, 30, 48)
- (24, 26, 50)
- (28, 32, 40)

а) Пусть $p = p(n)$ — наибольшее целое число, меньшее $(n+1)/6$. Тогда $p > n/6 - 1$ (поскольку между $n/6 - 1$ и $n/6 + 1/6$ обязательно есть целое число), и p троек, указанные на полях, удовлетворяют условию задачи. Таким образом, $k(n) \geq p(n) > n/6 - 1$.

б) Пусть имеется k троек различных натуральных чисел, в сумме дающих n . Обозначим через s сумму всех $3k$ чисел, входящих в эти тройки. Тогда, с одной стороны, $s = nk$, а с другой стороны, $s \geq 1 + 2 + \dots + 3k = 3k(3k+1)/2$. Поэтому $nk \geq 3k(3k+1)/2$, откуда $k \leq (2n-3)/9$. Таким образом, $k(n) \leq (2n-3)/9 < 2n/9$.

в) По доказанному в пункте б) $k(100) \leq ((2 \cdot 100 - 3)/9) = 21$. Далее, $p(100) = 16$, так что согласно а) мы можем указать 16 троек: (1, 47, 52), (2, 45, 53), ..., (16, 17, 67).

При этом остались неиспользованными числа 18, 20, 22, ..., 48, 50. Из этих чисел нам надо выбрать еще пять троек, в сумме дающих 100. Для этого из каждого из этих чисел вычтем 16 и полученные числа разделим пополам. Мы приходим к набору чисел 1, 2, ..., 17; из них надо выбрать пять троек с суммой $(100 - 3 \cdot 16)/2 = 26$. Так как $p(26) = 4$, четыре тройки мы получаем сразу: (1, 11, 14), (2, 9, 15), (3, 7, 16), (4, 5, 17). Остались числа 6, 8, 10, 12, и из них надо выбрать три с суммой 26. Это сделать легко: $6 + 8 + 12 = 26$.

Теперь, удвоив числа и добавив к ним по 16, мы получим последние 5 троек с суммой 100; они приведены на полях.

г) По неравенству б) $k(500) \leq 110$. Немного видоизменив тройки, указанные в пункте а), получим первые $p(500) = 83$ тройки: (1, 249, 250), (2, 247, 251), ..., (83, 85, 832). Остались неиспользованными числа 84, 86, ..., 248. От этого набора чисел линейным преобразованием $x \rightarrow x/2 - 41$ переходим к набору 1, 2, ..., 83, из которого надо выбрать 27 троек с суммой 127. Сразу же выбираем $p(127) = 21$ тройку: (1, 62, 64), (2, 60, 65), ..., (21, 22, 84). Остались числа 23, 25, ..., 63. От них преобразованием $x \rightarrow (x-21)/2$ переходим к набору 1, 2, ..., 21, из которого надо выбрать 6 троек с суммой 32. А это сделать легко: (1, 15, 16), (2, 13, 16), (3, 11, 18), (4, 9, 19), (5, 7, 20), (6, 12, 14).

В общем случае подобное рассуждение приводит к результату: $\frac{2}{9}n - \frac{11}{8} \log_3 \frac{n}{3} \leq k(n) \leq \frac{2n-3}{9}$ (при $n \geq 6$).

Л. Кураляндчик

Экцентрик „Кванта“

Ф1223. Горизонтальная поверхность вибротранспортера приводится в движение эксцентриками, синхронно вращающимися вокруг неподвижных горизонтальных осей O и O' (рис. 1). При какой угловой скорости вращения эксцентриков лежащие на поверхности детали начнут перемещаться? В каком направлении они будут перемещаться при вращении эксцентриков по часовой стрелке? Коэффициент трения деталей с поверхностью μ , радиус эксцентриков r .



Рис. 1.

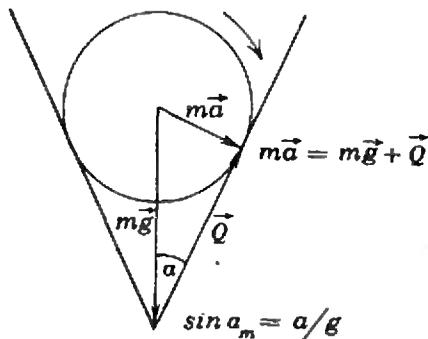


Рис. 2.

Все точки поверхности вибротранспортера движутся по одинаковым окружностям радиуса r . Предположим сначала, что деталь движется вместе с поверхностью (не скользит по ней). Тогда ее ускорение \vec{a} в каждый момент направлено к центру окружности, по которой она движется, и равно

$$a = \omega^2 r,$$

где ω — угловая скорость вращения эксцентриков.

По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{Q},$$

где \vec{Q} — сила реакции поверхности, которую можно представить в виде суммы силы \vec{N} нормальной реакции и силы \vec{F} трения покоя (рис. 2). Так как максимальное значение силы трения равно μN , сила \vec{Q} может отклоняться от вертикали на максимальный угол α_m , тангенс которого равен μ :

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \mu.$$

Другими словами, проскальзывания не будет, если касательные к окружности, описываемой вектором $m\vec{a}$, проведенные из конца вектора $m\vec{g}$, образуют с вертикалью угол, не превышающий α_m (см. рис. 2), откуда

$$\sin \alpha_m = a/g = \omega^2 r/g.$$

Из условия $\operatorname{tg} \alpha_m = \mu$ имеем

$$\sin \alpha_m = \operatorname{tg} \alpha_m / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_m} = \mu / \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Поэтому максимальная угловая скорость эксцентриков,

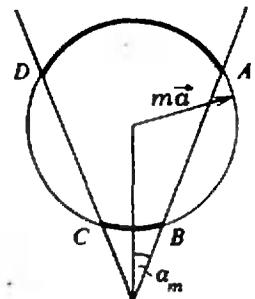
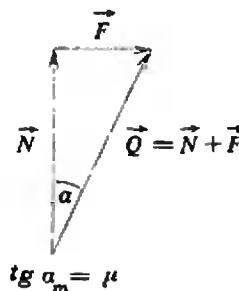


Рис. 3.

при которой еще нет проскальзывания детали по поверхности транспортера, равна

$$\omega_m = \sqrt{\frac{g}{r} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}}.$$

При большей угловой скорости возникает проскальзывание, причем когда конец вектора $m\vec{a}$ проходит участок AB (рис. 3), ускорение детали относительно поверхности направлено влево, а когда участок CD — вправо. Возникшее на этих участках проскальзывание

Задача № "Кванта"

тормозится трением на участках BC и DA . Поскольку на участке DA трение оказывает большее действие, деталь перемещается относительно поверхности в среднем влево.

Е. Бутиков

Ф1224. В горизонтальном дне цилиндрического сосуда сделано круглое отверстие диаметром $d=10$ см для слива воды. Если отверстие открыть, то не вся вода выльется, часть ее останется на дне. Оцените массу этой оставшейся воды, если дно сосуда плохо смачивается водой. Диаметр сосуда $D=50$ см. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0,07$ Н/м.

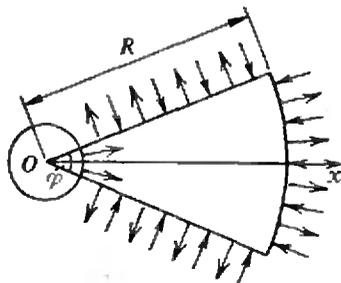


Рис. 1.

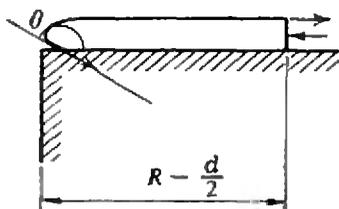


Рис. 2.

Ограничимся случаем, когда толщина H слоя оставшейся воды много меньше диаметра отверстия d .

Проведем две вертикальные плоскости, проходящие через ось симметрии отверстия и образующие между собой некоторый угол φ , и рассмотрим часть воды, которая заключена между этими плоскостями и произвольно проведенной вертикальной цилиндрической поверхностью (рис. 1; вид сверху). Радиус R этой поверхности выберем таким, чтобы расстояние $R-d/2$ было много больше H (но, разумеется, меньше $D/2$); тогда на этих расстояниях поверхность воды с хорошей точностью можно считать горизонтальной.

Условие равновесия этой части воды означает равенство нулю суммы всех действующих на воду сил, а значит, и суммы проекций этих сил на ось X . Что же это за силы?

На боковую цилиндрическую поверхность действуют силы поверхностного натяжения (красные стрелки на рисунке 1) и силы гидростатического давления (черные стрелки). Их проекции равны соответственно

$$2\sigma R \sin(\varphi/2) \text{ и } -\rho g H^2 R \sin(\varphi/2).$$

Аналогичные силы действуют и на радиальные боковые поверхности. Вклад от них есть

$$-2\sigma(R-d/2) \sin(\varphi/2) \text{ и } \rho g H^2(R-d/2) \sin(\varphi/2).$$

Здесь мы пренебрегли изменением толщины слоя воды вблизи отверстия в дне сосуда (этот участок имеет длину порядка H , а в нашем случае $H \ll R-d/2$). Нам осталось рассмотреть силы поверхностного натяжения, действующие на нашу воду в месте касания воды и дна сосуда (около отверстия). На рисунке 2 показан случай плохого смачивания жидкостью дна сосуда, когда угол θ между касательной к поверхности жидкости и горизонтальной поверхностью дна (краевой угол) больше $\pi/2$. Результирующая проекция сил поверхностного натяжения, действующих в месте касания (красная наклонная стрелка на рисунке 2), равна

$$-\sigma d \sin(\varphi/2) \cos \theta.$$

Итак, условие равновесия имеет вид

$$\begin{aligned} 2\sigma R \sin(\varphi/2) - \rho g H^2 R \sin(\varphi/2) - \\ - 2\sigma(R-d/2) \sin(\varphi/2) + \rho g H^2(R-d/2) \sin(\varphi/2) - \\ - \sigma d \sin(\varphi/2) \cos \theta = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем высоту оставшегося слоя воды:

$$H = \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos \theta)}{\rho g}}.$$

Задача „Кванта“

Проведем верхнюю оценку массы оставшейся воды. Максимальная глубина H_{\max} будет при полном несмачивании ($\theta = 180^\circ$): $H_{\max} = 2\sqrt{\sigma/(\rho g)} \approx 5,3$ мм. В этом случае максимальная масса воды будет равна

$$m_{\max} = \rho \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} H_{\max} \approx 1 \text{ кг.}$$

При полном несмачивании оценку толщины слоя оставшейся жидкости можно получить и другим способом — из условия равенства избыточного давления под выпуклой поверхностью (обусловленного поверхностным натяжением) гидростатическому давлению на глубине $H_{\max}/2$:

$$\frac{2\sigma}{H_{\max}} = \rho g \frac{H_{\max}}{2}.$$

Найденное отсюда значение $H_{\max} = 2\sqrt{\sigma/(\rho g)}$ полностью совпадает с расчетным значением, полученным первым способом. (Это означает, кстати сказать, что приближения, положенные в основу обоих способов расчета, равнозначны.)

В. Можалов

Ф1225. Свинцовая проволока диаметром $d_1 = 0,3$ мм плавится при пропускании через нее тока $I_1 = 1,8$ А, а проволока диаметром $d_2 = 0,6$ мм — при токе $I_2 = 5$ А. При каком токе разорвет цепь предохранитель, составленный из двух этих проволок, соединенных параллельно? А из двадцати тонких и одной толстой? Длины проволок считать одинаковыми.

На первый взгляд, задача тривиальна. Действительно, тонкая проволока способна пропускать ток до $I_1 = 1,8$ А, толстая — до $I_2 = 5$ А; при параллельном соединении токи складываются, следовательно, ток плавления составного предохранителя будет равен $I_1 + I_2 = 6,8$ А. Однако это рассуждение неверно! Оно основано на допущении, что при пропускании по цепи тока 6,8 А через тонкую проволоку потечет ток 1,8 А, а через толстую — 5 А. На самом же деле распределение токов будет другим (оно определяется сопротивлением проволок) — если через одну проволоку течет максимальный для нее ток, то ток через другую не будет максимальным, и суммарный ток окажется меньше, чем мы только что вычислили.

Первое, что предстоит сделать, это найти «слабое звено», т. е. выяснить, какая проволока расплавится раньше (если постепенно увеличивать ток в цепи). При параллельном соединении напряжение на обеих проволоках одинаково; следовательно, первой расплавится та проволока, у которой напряжение плавления меньше. Найдем отношение этих напряжений.

Обозначим длину проволок через l , удельное сопротивление материала проволок — через ρ . Тогда сопротивление первой проволоки и ее напряжение плавления равны соответственно

$$r_1 = \frac{\rho l}{\pi d_1^2/4} \text{ и } U_1 = r_1 I_1 = \frac{\rho l I_1}{\pi d_1^2/4}.$$

Аналогично, для второй проволоки

$$r_2 = \frac{\rho l}{\pi d_2^2/4} \text{ и } U_2 = \frac{\rho l I_2}{\pi d_2^2/4}.$$

Задача № "Кванта"

Отношение напряжений

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

Подставив числовые значения, найдем, что $U_1/U_2 > 1$; следовательно, $U_2 < U_1$, и сначала расплавится вторая, более толстая, проволочка. В этот момент ток через нее будет, естественно, максимальный: $I_2 = 5 \text{ А}$, а через первую проволочку потечет ток $I_1 = I_2 r_2 / r_1 = I_2 d_2^2 / d_1^2 = 1,25 \text{ А}$. Суммарный ток через предохранитель, таким образом, составит

$$I_1 + I_2 = 6,25 \text{ А.}$$

При пропускании по цепи такого тока первой расплавится более толстая проволочка, а сразу же вслед за этим, когда весь ток потечет через тонкую проволочку, расплавится и она.

Во втором случае в момент плавления толстой проволочки ток через каждую из тонких будет равен I_1 , а суммарный ток через предохранитель составит

$$I'_{\text{общ}} = 20I_1 + I_2 = 30 \text{ А.}$$

Но это еще не ответ! В отличие от первого случая, после плавления толстой проволочки ток $I'_{\text{общ}}$, распределившись поровну между двадцатью тонкими проволочками, окажется меньше предельного для них и не вызовет их плавления. Предохранитель будет продолжать проводить ток до тех пор, пока суммарный ток не достигнет значения

$$I''_{\text{общ}} = 20I_1 = 36 \text{ А.}$$

А. Ходулев

Ф1226. На ленте магнитофона записан синусоидальный сигнал частотой 5 кГц при скорости ленты 19,05 см/с. При воспроизведении на этой скорости амплитуда сигнала воспроизводящей головки составила 1 мВ. Какой станет частота и амплитуда этого сигнала, если увеличить скорость ленты при воспроизведении до 38,1 см/с? А если уменьшить при записи и воспроизведении до 4,76 см/с? Ширину переднего зазора воспроизводящей головки принять равной 5 мкм. Максимальную намагниченность ленты после записи в обоих случаях считать одинаковой.

При записи на пленке остаются области ориентированных магнитных частиц (находящихся в тонком слое на рабочей поверхности пленки), создающих магнитное поле. Будем считать, что головка усредняет поле, попадающее в ее зазор (его делают как раз для того, чтобы внешнее поле могло «войти» в сердечник из материала с большой магнитной проницаемостью).

Длина волны λ записанного сигнала определяется частотой f этого сигнала и скоростью v ленты:

$$\lambda = v/f \approx 40 \text{ мкм.}$$

Максимальный магнитный поток получится при симметричном положении зазора у максимума поля, минимальный по модулю поток равен нулю. Ширина зазора существенно меньше длины волны (рис. 1), поэтому можно считать, что усредненное значение потока в максимуме равно максимальному значению. Выходной сигнал — ЭДС индукции — равен производной по времени от магнитного потока. Ясно, что при увеличении скорости воспроизведения в 2 раза возрастут в 2 раза и частота, и амплитуда воспроизводимого сигнала.

При уменьшении скорости в 4 раза все будет сложнее: длина волны станет в 4 раза меньше (10 мкм), а ампли-

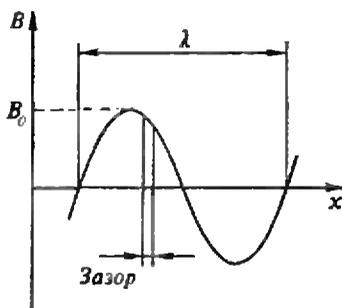


Рис. 1.

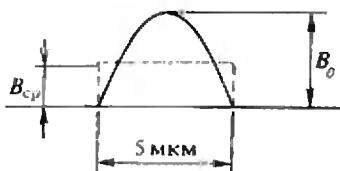


Рис. 2.

Ф1227. *Нелинейность вольт-амперной характеристики лампы накаливания связана с тем, что сопротивление нити увеличивается с ее нагревом. Получите зависимость тока через лампу от приложенного к ней напряжения при следующих упрощающих предположениях: теплоотдачу считать связанной с излучением ($P_{\text{изл}} \sim T^4$, где T — температура нити); сопротивление нити $R \sim T$. Лампа 60 Вт, 220 В.*

Снизим напряжение до 200 В. Какой будет мощность лампы? Сильно ли упадет световой поток?

Задачник „Кванта“

туда уменьшится более чем в 4 раза за счет усреднения потока (при длине волны 10 мкм этим уже нельзя пренебрегать). Проще всего получить результат, посмотрев на рисунок 2: максимальный поток определяется средним значением «половины» синусоиды и уменьшается в $\pi/2$ раз. Следовательно, амплитуда уменьшится в 2π раз и составит 0,16 мВ.

Интересно отметить, что при частоте исходного сигнала 10 кГц воспроизвести его на скорости 4,76 см/с уже не удастся — зазор перекроет участок ленты, на котором суммарный поток окажется равным нулю.

Р. Александров

Зависимость между напряжением и током легко получить, комбинируя выражения для мощности лампы и для сопротивления ее нити:

$$P = UI = AT^4, \\ R = U/I = BT,$$

где A и B — некоторые постоянные величины. Исключая из уравнений T , получим

$$I = (A/B^4)^{0,2} U^{0,6}.$$

Представим это выражение в более удобном виде, учитывая заданные в условии величины — при напряжении $U_0 = 220$ В мощность лампы равна $P_0 = 60$ Вт:

$$I_0 = P_0/U_0 = 0,27 \text{ А},$$

и

$$I = I_0(U/U_0)^{0,6} = 0,27(U/220)^{0,6}.$$

Если снизить напряжение до $U_1 = 200$ В, то по этой формуле можно найти ток: $I_1 = 0,94 I_0$. Напряжение U_1 составляет примерно $0,9 U_0$, значит, мощность упадет до

$$P_1 = U_1 I_1 \approx 0,85 P_0 \approx 50 \text{ Вт}.$$

Однако световой поток упадет при этом существенно больше, чем на 15 %, поскольку при уменьшении температуры нити максимум излучения смещается в область длин волн, для которых чувствительность глаза меньше.

Насколько разумна модель, предложенная для расчета? При небольших температурах излучение уже не составляет большей части отдаваемой нитью мощности — более существенной становится теплопроводность. Поэтому полученную формулу следует применять только в области высоких температур, т. е. при напряжениях, не очень отличающихся от $U_0 = 220$ В.

А. Зильберман

„Квант“ для младших школьников

Задачи

1. В коробке лежит домино (см. рисунок). Как расположены кости в его верхнем ряду?

2. Недавно сообщалось, что из-за понижения уровня Аральского моря его акватория (площадь) уменьшилась на 40%, а объем воды уменьшился на 60%. Может ли быть справедливым такое утверждение? А может ли получиться так, что уровень воды в водоеме упадет и его акватория уменьшится на 60%, а объем воды уменьшится на 40%?

3. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

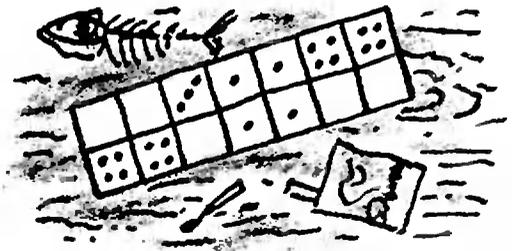
4. В четырехугольнике $ABCD$ (см. рисунок) углы при вершинах B и D — прямые, $AB=BC$, а высота BH равна 1. Найдите его площадь.

5. Таблица розыгрыша предыдущего первенства мира по футболу в той подгруппе, где участвовала советская команда, выглядит так:

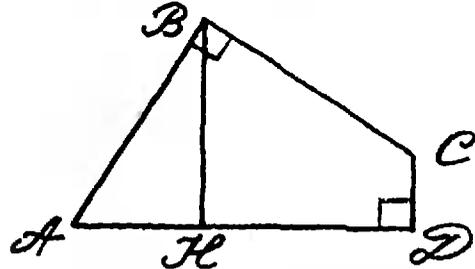
	В	Н	П	МЯЧИ	ОЧКИ
СССР	2	1	0	9—1	5
ФРАНЦИЯ	2	1	0	5—1	5
ВЕНГРИЯ	1	0	2	2—9	2
КАНАДА	0	0	3	0—5	0

С каким счетом сыграли команды между собой, если известно, что только два матча закончились одинаково?

Эти задачи нам предложили А. Кордюк, Э. Парилис, ученица 10 кл. школы № 556 г. Москвы Марина Москаленко, В. Произолов, Д. Троценко.



А ЭТО + А ЭТО = ПОЛЕТЕ



Вычислять или угадывать — выбирайте сами!

И. АКУЛИЧ



Задача 1. *Отцу 26 лет, сыну 6 лет. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?*

Эту (и подобные ей) задачу принято решать одним из двух способов:

Арифметический способ. Если отец стал втрое старше сына, то разность их возрастов вдвое превышает возраст сына. Но эта разность постоянная и равна $26 - 6 = 20$ лет, поэтому возраст сына в искомый момент будет равен $20 : 2 = 10$ лет, что произойдет через $10 - 6 = 4$ года.

Алгебраический способ. Пусть отец станет втрое старше сына через x лет. Тогда $26 + x = 3(6 + x)$, откуда $x = 4$.

Добавим к двух этим способам еще один — «гадательно-подбирательный»: попробуем ответ угадать, точнее — подобрать. Используем весь наш опыт решения такого рода задач и вспомним, что в них, как правило, применяются только целые числа. Стало быть, область поиска резко ограничивается. Далее, когда отец

станет втрое старше сына, его возраст, естественно, должен делиться на 3. Сначала такое наступит через год, т. е. отцу — 27 лет, сыну — 7 лет (не подходит!); затем — через 4 года, т. е. отцу — 30, сыну — 10 (теперь подходит!). Всё.

Если кто-то из читателей собирается с негодованием отвергнуть этот третий способ в пользу двух первых, убедительно прошу не спешить. Действительно, математику (пусть даже любителю) гадание вроде бы не к лицу. Но представьте себе такую ситуацию. Происходит математический бой (или КВН). Вызвали по одному участнику от каждой команды и предложили им упомянутую задачу. Победителем считается тот, кто первым назовет правильный ответ. Итак, время пошло! Согласитесь, что здесь третий способ выглядит, пожалуй, предпочтительней первых двух. Конечно, есть риск и вовсе не найти ответа, но быстрота и значительно меньший объем вычислений (а следовательно — гораздо меньшие возможности наделать арифметических ошибок, что весьма вероятно в горячке состязания); конечно, перевешивают.



Задача 2. *По преданию, на могильном камне имелась такая надпись: «Путник! Под этим камнем покоится прах Диофанта, умершего в глубокой старости. Шестую часть своей долгой жизни он был ребенком, двенадцатую — юношей, седьмую —*

провел неженатым. Через пять лет после женитьбы у него родился сын, который прожил вдвое меньше отца. Через четыре года после смерти сына уснул вечным сном и сам Диофант, оплакиваемый своими близкими. Скажи, если умеешь считать, сколько лет прожил Диофант?»

Алгебраический способ сводится к решению громоздкого уравнения, арифметический способ тоже не прост. А «гадальный»? Рассуждаем так: поскольку, скорее всего, все используемые числа должны быть целыми, то прожитое Диофантом число лет должно делиться на 6, на 12 и на 7, т. е. на НОК (6, 12, 7)=84. Значит, Диофант прожил кратное 84 число лет, а именно — 84 (большие значения нереальны). Всё! В данном случае преимущества «гадального» метода прямо-таки бросаются в глаза.



Задача 3. Однажды Черт предложил Бездельнику заработать.

— Как только ты перейдешь через этот мост, — сказал он, — твои деньги удвоятся. Можешь переходить по нему сколько хочешь раз, но после каждого перехода отдавай мне за это по 24 копейки.

Бездельник согласился и... после третьего перехода остался без гроша. Сколько было у него денег сначала?

Попробуем угадать ответ, применяя самые общие рассуждения. Ясно, что

у Бездельника было меньше 24 копеек — иначе бы он не обанкротился; другими словами, уже с самого начала имел место «дефицит бюджета». С удвоением денег, видимо, удваивался и дефицит, и после третьего удвоения он составил как раз 24 копейки. Значит, дефицит вначале был равен $24:8=3$ копейки, т. е. у бездельника было $24-3=21$ коп. Разумеется, ручаться за такой ответ нельзя, но он весьма правдоподобен.



Задача (4 принадлежит Сэму Лойду).

— Вот эти два индюка вместе весят 20 фунтов, — сказал мясник. — Однако фунт мяса индюшонка стоит на 2 цента дороже, чем фунт мяса крупного индюка.

Миссис Смит купила индюшонка за 82 цента, а миссис Браун заплатила 2 доллара 96 центов за большого индюка. Сколько весил каждый индюк?

Идем на риск: полагаем, что каждый индюк весил целое число фунтов и цена за фунт составляла целое число центов. Всего было уплачено 378 центов. Если отсюда вычесть наценку за мясо индюшонка, то остаток должен делиться на 20 — общий вес индюков. Ближайшее меньшее число, делящееся на 20 — это 360, т. е. наценка составляет 18 центов, и индюшонек весил $18:2=9$ фунтов, а большой индюк соответственно 11 фунтов.

Ответ получен, но не тяжеловат ли получился индюшонек? При такой не-

большой разнице в весе он стоит почти вчетверо меньше, и это при более высокой цене за фунт! Что-то неладно...

Да, это как раз тот случай, когда метод «гадания» дает осечку. Мы сделали неверное предположение и тем самым обрекли себя на неудачу. На самом деле хотя веса индюков и выражаются целым числом фунтов, но цена фунта индюшатины выражается не только целыми центами, но и их половинками. (А теперь, используя эту дополнительную информацию попробуйте угадать ответ.)



Задача 5 (тоже С. Лойда). Некая леди, протянув почтовому служащему один доллар, сказала:

— Дайте мне двухцентовых марок, в десять раз больше — одноцентовых, а на остальное — пятицентовых марок.

Как служащий сумел выполнить это довольно головоломное задание?

Можно поступить так: обозначим через x количество двухцентовых марок, через y — количество пятицентовых марок и из условия получим, что

$$2x + 10x + 5y = 100, \text{ или} \\ 12x + 5y = 100.$$

Диофант, древнегреческий математик, уже упоминавшийся ранее, проделал огромную работу по нахождению целочисленных решений уравнений такого вида. В его честь они стали

называться диофантовыми уравнениями. Итак, остается решить диофантово уравнение

$$12x + 5y = 100.$$

Но мы обойдемся без этого. Заметим, что общая стоимость двухцентовых марок, и, следовательно, их количество — должны делиться на 5 (почему?). Одноцентовых марок в 10 раз больше, следовательно, их количество делится на 50, что как раз составляет 50 штук на сумму 50 центов. Тогда двухцентовых марок — 5 штук на сумму 10 центов; остальные марки на сумму 40 центов — пятицентовые (их окажется 8 штук). Здесь наше решение оказалось абсолютно верным, хотя мы пытались его лишь угадать, без гарантии правильности, как в предыдущей задаче. (Кстати, задача имеет еще одно — «вырожденное» — решение: по нулю одно- и двухцентовых марок и 20 пятицентовых.)

А вот пример посложнее.



Задача 6. Три брата получили 24 яблока, причем младшему досталось меньше всех, а старшему — больше всех. Видя это, младший брат предложил такой обмен яблоками:

— Я оставляю себе половину имеющихся у меня яблок, а остальное разделю между вами поровну.

После этого пусть средний брат тоже оставит себе половину, а остальное даст мне и старшему брату поровну. А затем и старший брат пусть оставит себе половину имеющихся яблок, а остальные разделит между мной и средним братом поровну.

Братья, не подозревая коварство младшего, согласились. В результате у всех оказалось яблок поровну. Сколько яблок было у братьев в самом начале?

Обычно такие задачи принято решать «с конца». Мы же двинемся «напролом», последовательно определяя число яблок у младшего, среднего и старшего. Ясно, что младшему брату дали меньше 8 яблок. С другой стороны, число яблок у него делится на 4 (так как ему удалось половину из них разделить пополам). Значит, младшему дали 4 яблока. Тогда среднему дали меньше половины остальных яблок, т. е. меньше 10, следовательно — от 5 до 9 штук. Добавив одно яблоко, полученное им от младшего брата, мы должны получить число, также делящееся на 4. Это число должно лежать в пределах от 6 до 10, поэтому оно равно 8. Итак, среднему дали $8 - 1 = 7$ яблок, а старшему — все остальное, т. е. 13 яблок. (Кстати, отметим, что в убытке от такого перераспределения остался лишь старший брат. Поэтому, возможно, средний и подозревал коварство в предложении младшего, но в своих же интересах промолчал.)

Как видите, гадание — вещь иной раз полезная и уж во всяком случае не заслуживающая полного презрения. При этом эффективность его тем выше, чем сложнее и запутаннее условие задачи, поскольку при гадании нам нет нужды вдаваться в тонкости. Ну а для лучшего усвоения и необходимой практики попробуйте угадать ответ в приводимых задачах.

Задачи

7. Веселый турист пешком отправился на слет. В первый день он прошел $\frac{1}{3}$ пути, во второй — $\frac{1}{3}$ остатка, в третий — $\frac{1}{3}$ нового остатка. В результате туристу осталось пройти 32 км. Сколько километров от дома туриста до места слета?

8. Некто, будучи вопрошен, насколько он стар, ответил: «Когда я проживу еще половину, да треть, да четверть моих лет, тогда мне будет 100 лет». Сколько лет этому человеку?

9. — Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу?

— Вот сколько, — ответил философ. — Половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть еще три женщины.

Сколько учеников было у Пифагора?

10. Пятая часть пчелиного роя сидит на цветке кадамба, одна треть на цветках цилиндка. Утроенная разность двух последних чисел направилась к цветам кутая. И осталась еще одна пчела, летающая взад и вперед, привлеченная ароматом жасмина и пандануса. Сколько всего пчел?

11. Из четырех жертвователей второй дал вдвое больше монет, чем первый, третий — втрое больше, чем второй, четвертый — вчетверо больше, чем третий, а все вместе они дали 132 монеты. Сколько монет дал первый жертвователь?

12. Капитан на вопрос, сколько людей в его команде, ответил: « $\frac{2}{5}$ моей команды в карауле, $\frac{2}{7}$ в работе, $\frac{1}{4}$ в лазарете да 27 налицо». Сколько людей в команде?

13. (Должно быть, самая сложная.) Сейчас мне и Вам вместе 86 лет. Число моих лет составляет $\frac{15}{16}$ от возраста, который Вы будете иметь тогда, когда мой возраст составит $\frac{9}{16}$ от того числа лет, которое Вы имели бы, если бы дожили до такого возраста, который вдвое больше числа моих лет в тот момент, когда я могу быть старше Вас вдвое. Сколько мне лет?

Конечно же, мы советуем решить все приведенные здесь задачи и «нормальным» способом. Кстати, этим вы проверите правильность и единственность полученных ответов. Все рассмотренные (и нерассмотренные) задачи не выдуманы специально для этой статьи, а взяты из уважаемых книг:

1. Сэм Лойд. Математическая мозаика. М., Мир, 1980.

2. Щепан Еленьский. По следам Пифагора. М., Детгиз, 1961.

3. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. М., ГИТТЛ, 1956.

4. Чистяков В. Д. Старинные задачи по элементарной математике. Минск, Высшая школа, 1966.

5. Это странное привычное. Минск, Университетское, 1989.



Р-звонит ракета

Перспективы поиска обитаемых планет

Доктор физико-математических наук
Л. КСАНФОМАЛИТИ

Венера и Марс

Пожалуй, более или менее обоснованными были надежды встретить какие-то формы жизни на Венере и Марсе — наиболее близких к Земле планетах.

Венера выделяется сходством с Землей своей массой, средней плотностью, радиусом и величиной ускорения свободного падения у поверхности. Более того, количества энергии, получаемые обеими планетами от Солнца, также близки. Все это позволяло в недалеком прошлом рассматривать Венеру в качестве возможного «двойника» Земли.

Начало этой статьи опубликовано в предыдущем номере журнала.

Однако сведения, которыми мы располагаем ныне, говорят, что это весьма непохожие планеты. Масса атмосферы Венеры примерно в 100 раз больше массы атмосферы Земли, состав — не менее 95 % углекислого газа. Облачный слой, находящийся в интервале высот 49—70 км, состоит из мелких капель концентрированной серной кислоты, относительное содержание которой в атмосфере составляет несколько миллионных долей. Давление у поверхности планеты 93 атм, температура 730 К.

Еще недавно предполагалось, что вся планета может быть покрыта сплошным океаном, но при таких высоких температурах вода не может существовать в жидкой фазе — она вся должна перейти в атмосферу. Однако измеренное содержание водяных паров в облачном слое оказалось ничтожно малым. Напрашивается вывод — либо Венера всегда была бедна водой, либо ее запасы растеряны. Не исключено, что Венера была сформирована из материала, почти не содержащего воды, — вывод чрезвычайно интересный в космогоническом отношении, хотя и не окончательный.

Нынешний состав атмосферы нашей планеты полностью определяется существованием на Земле биосферы. Уже на ранней стадии ее эволюции происходило значительное обогащение атмосферы кислородом в результате гликолиза — процесса расщепления углеводов с помощью ферментов, используемого примитивными формами жизни. Постепенное накопление кислорода создало озоновый экран и условия для выхода жизни из океана на сушу. Атмосфера в нынешнем ее составе существует у Земли примерно $1,5 \cdot 10^9$ лет. Один из выводов — у планеты с развитой биосферой, по-видимому, не может быть такой атмосферы, как у Венеры. Не отсутствие ли жизни на Венере стало причиной того, что пути эволюции Венеры и Земли оказались столь различными и что углекислого газа так много в ее атмосфере?

По существующим оценкам, угле-

кислого газа, связанного в осадочных породах Земли, примерно столько же, сколько содержится ныне в атмосфере Венеры. В результате вулканической деятельности в атмосферу Земли выбрасывается большое количество паров воды и углекислого газа. Если предположить, что начальная температура Венеры была не очень высока, значительное количество углекислого газа должно было бы связываться в присутствии небольшого количества паров воды и образовывать карбонаты. В то же время часть углекислого газа накапливалась в атмосфере, содержащей небольшое количество паров воды. Это создавало сильный парниковый эффект, приводивший к разогреву атмосферы и поверхности. Сущность парникового эффекта заключается в том, что солнечное излучение довольно легко проникает в глубокие слои атмосферы и поглощается ими и поверхностью планеты. Но поскольку планета находится в тепловом равновесии (в среднем имеет постоянную температуру), такое же количество энергии должно излучаться в космос. Однако излучение происходит в длинноволновом, инфракрасном диапазоне, где углекислотная атмосфера с примесью водяного пара непрозрачна. Чтобы при таких условиях достаточное количество энергии вышло из атмосферы, источник должен быть очень ярким. Вот почему так высока температура поверхности Венеры. Благодаря близости планеты к Солнцу, парниковый эффект мог становиться самоусиливающимся: с увеличением температуры образование карбонатов замедляется, больше угле-

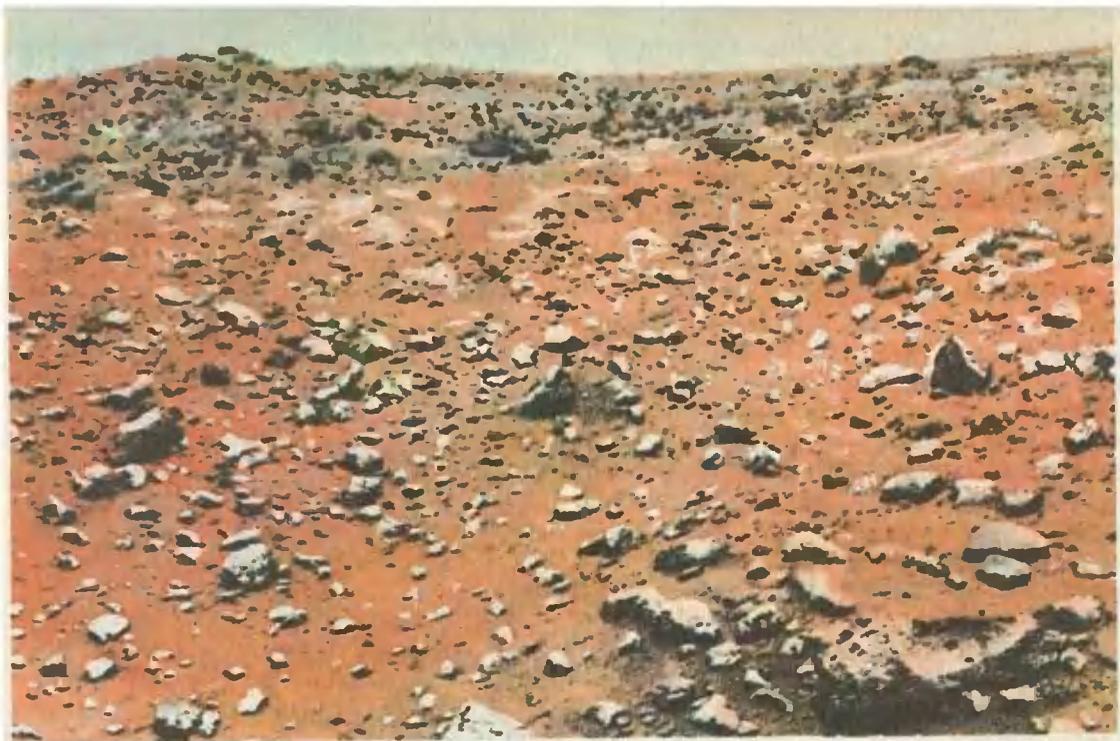
кислого газа остается в атмосфере, что приводит к дальнейшему усилению парникового эффекта. Затем достигается предел, когда карбонаты в осадочных породах разрушаются и весь углекислый газ переходит в атмосферу.

Наряду с гипотезой об извечной сухости Венеры, есть один (пока неподтвержденный) факт, который может представить проблему совсем в другом свете. Речь идет о значительно повышенной концентрации дейтерия в водородосодержащих соединениях на Венере. Это могло бы быть следствием катастрофических потерь воды планетой в прошлом, причем вначале на Венере даже могли бы существовать океаны. Однако нужно помнить, что пока это всего лишь одна из самых последних гипотез о таинственной истории столь непохожей «сестры» нашей Земли. Если гипотеза подтвердится, то одно из объяснений потери Венерой океанов может заключаться в том, что на Венере не возникла жизнь. Тогда для оценки вероятности возникновения жизни мы будем иметь не одну, а две планеты. Что же касается современных физических условий на Венере, то никакая известная нам форма жизни не могла бы им противостоять.

Заметим, что физика высокотемпературных органических полимеров, кажется, не объявляет абсолютного запрета на создание материалов, пригодных для построения некоторых органов живых существ. Но нужны какие-то особые источники энергии, которыми могли бы пользоваться живые организмы в бескислородной атмосфере Венеры.



Таинственная Венера. «страна багровых туч», оказалась безжизненной раскаленной пустыней.



Промерзшим и безжизненным оказался и Марс.

Планета Марс долго оставалась на первом месте в списке небесных тел, где существование жизни в виде простейших ее форм считалось возможным.

Во всяком случае, физические условия на Марсе, достаточно хорошо известные по результатам космических исследований последних лет, не противоречат этому. Более того, предполагается, что ряд земных микроорганизмов мог бы существовать в марсианских условиях. В действительности проблема, конечно, гораздо сложнее. Гипотетическая марсианская жизнь должна была зародиться и эволюционировать в марсианских условиях.

Необходимым условием для существования форм жизни, подобных земным, является наличие воды. Сведения о воде на Марсе за последние годы значительно расширились. Было доказано, например, что огромные массы водяного льда на марсианских полярных шапках, растаяв,

могли бы образовать слой воды толщиной 5—10 м, равномерно распределенный по всей планете. Большое количество воды сконцентрировано, по-видимому, и в подпочвенной вечной мерзлоте.

На поверхности Марса имеется большое число водноэрозионных образований, которые связывают с ледниками, селями, местными подпочвенными таяниями больших масс вечной мерзлоты и обильными ливнями в далеком прошлом (2—3 млрд. лет назад).

В последнем случае подразумевается, что климат Марса в прошлом был гораздо мягче, чем теперь. Анализ изотопного состава некоторых малых составляющих атмосферы Марса как будто подтверждает такую возможность. Ныне углекислотная атмосфера Марса очень разрежена — давление у поверхности примерно в 150 раз ниже, чем у поверхности Земли. Парниковый эффект в такой атмосфере незначителен. Более того, в период

пылевых бурь развивается значительный «антипарниковый» эффект, связанный с более высокой прозрачностью такой атмосферы для теплового, инфракрасного излучения, чем для солнечной радиации. При средних температурах поверхности около 210 К падение температуры во время пылевой бури может достигать 30 К и более.

По имеющимся оценкам, в далекие геологические эпохи Марса (2—3 млрд. лет назад) условия возникновения жизни на Марсе были наиболее благоприятными. Вопрос лишь в том, как долго они оставались благоприятными.

Современный анализ состава поверхности указывает на высокое содержание железа и некоторых других элементов, в частности кремния. Необычно много, по сравнению с Землей, имеется серы. Возможно, это является следствием затянувшейся эволюции Марса. Из-за малой средней плотности, малой массы и малого ускорения свободного падения гравитационная дифференциация планеты очень затянулась, степень сосредоточения тяжелых элементов в ядре невелика. По некоторым данным ядро Марса составляет не более 5 % его массы. Ускорение свободного падения на Марсе почти такое же, как на Меркурии (около 0,4 земного).

В марсианских условиях химические реакции, протекающие на поверхности планеты, которые, несомненно, должны были оказать влияние на зарождающуюся жизнь, могли носить специфический характер. Следует учесть также, что ультрафиолетовое излучение Солнца с длинами волн более 280—300 нм, по-видимому, стимулирует на поверхности планеты ряд своеобразных фотохимических взаимодействий. Анализ марсианского грунта в автоматической биохимической лаборатории «Викинга» указал на высокую химическую активность этого вещества, которая даже поначалу была истолкована как обнаружение жизнедеятельности микроорганизмов. Однако более тщательный анализ не показал наличия

органических веществ, по крайней мере, в количестве более десяти миллиардных долей. По существу, этот результат нанес наиболее тяжелый удар надеждам встретить жизнь на Марсе. Вместе с тем, вопрос нельзя считать решенным окончательно — отсутствие микроорганизмов в местах посадки «Викингов» еще не является основанием для отрицательного ответа о планете в целом, хотя надежды отыскать жизнь на Марсе, по-видимому, очень малы.

Почему же не возникла жизнь на Марсе? Согласно одной из гипотез, причина в разреженности его атмосферы и мощном потоке ультрафиолетовой радиации, достигающей поверхности планеты, стерилизующей ее и исключающей возможность зарождения жизни.

Планеты-гиганты

Следующие четыре планеты — Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун — относятся к группе Юпитера. Их строение резко отличается от строения планет земной группы. Эти планеты находятся очень далеко от Солнца; Юпитер, например, — в среднем в 5,2 раза дальше, чем Земля, а Нептун — дальше в 30 раз. Массы и протяженности их атмосфер огромны. На 89 % по объему планеты-гиганты состоят из водорода, на 11 % — из гелия. Поскольку Солнце и Юпитер возникли из одного и того же протопланетного облака, по отношению водород — гелий можно определить, к звездам какого поколения относится Солнце. (Высокое содержание тяжелых элементов в протопланетной туманности и звездах поздних поколений, как предполагается, способствует возникновению жизни на планетах.)

Среди малых составляющих в атмосфере Юпитера присутствуют аммиак, метан, ацетилен, этан, фосфин, гидрид германия, водяной пар. В тропосфере располагаются слои облаков из замерзшего аммиака, водяного льда и других веществ, а также водного раствора аммиака



Большое Красное пятно — одно из наиболее загадочных образований Юпитера. На фоне планеты два из ее многочисленных спутников — Ио и Европа.

и жидких капель воды. Еще ниже, как предполагается, находится безоблачная атмосфера высокой плотности и температуры. Вероятная ее протяженность составляет не менее 1000 км. Согласно расчетам, солнечная радиация проникает максимум на несколько сотен километров в глубину такой атмосферы.

На всех планетах этой группы ускорение свободного падения на уровне видимой поверхности облаков близко к земному.

По крайней мере Юпитер и Сатурн не имеют поверхности в земном смысле. Из-за высоких температур водородная атмосфера Юпитера и других гигантов находится в сверхкритическом состоянии. Как известно, водород может оставаться жидким лишь при температуре ниже 33 К. Если же температура более высокая, он остается газом при любых давлениях, вплоть до миллиона атмосфер. Однако при более высоких давлениях может начаться переход водорода в жидкометаллическое состояние. Что же касается условной поверхности, то это поверхность газожидкого океана. Давление над нею около 200 тыс. атм, а температура близка к 2000 К (для Юпитера). В атмосферах Юпитера и Сатурна наблюдаются огромные устойчивые вихри, время

жизни которых может достигать многих тысяч лет. Самое известное образование такого рода — Большое Красное пятно, по диаметру втрое превышающее земной шар.

Юпитер обладает сильным магнитным полем. Более слабые поля — того же порядка, что и земное — имеют Сатурн, Уран и Нептун.

Иногда можно встретить высказывания о возможном существовании каких-то организмов на уровне облачного слоя Юпитера. Конечно, это фантазии, которые к научным данным никакого отношения не имеют. Не говоря уже об очень низких температурах внешней части облачного слоя (130 К, или -140°C), это предположение встречается с теми же трудностями, что и в случае Венеры. Сказанное относится и к другим планетам-гигантам, так как их атмосферы очень похожи. Однако температура внешней части облачного слоя еще ниже — у Сатурна приблизительно 95 К, а у Урана и Нептуна около 56 К.

Сатурн окружен широко известными кольцами, образованными грязными ледяными глыбами разных размеров — от сотен метров до мельчайших обломков. Более слабое, почти прозрачное кольцо есть и у Юпитера,



Сатурн, окруженный многочисленными кольцами. Внешний радиус планеты — 60 тыс., а радиус наружного кольца — 138 тыс. км.

а у Урана и Нептуна обнаружены системы узких, иногда незамкнутых колец. Спутники планет-гигантов — это также ледяные и силикатно-ледяные тела, иногда очень больших размеров, с низкой температурой поверхности.

В интересующем нас смысле (т. е. пригодности для жизни) все спутники Юпитера и Сатурна лишены атмосферы; точнее — все, кроме Титана, спутника Сатурна (размерами почти с планету Меркурий), и спутника Нептуна Тритона. С Титаном были связаны, может быть, последние надежды встретить жизнь в Солнечной системе. Уже по наземным наблюдениям было известно, что Титан обладает плотной атмосферой. Предполагалось, что в ней возможен сильный парниковый эффект, благодаря чему условия у поверхности могли бы даже быть приемлемыми для существования жизни. После марсианских разочарований было много разговоров о возможной жизни на Титане. Но Титан не оправдал этих надежд — это один из самых холодных миров в Солнечной системе. Телевизионная съемка с «Вояджера» показала, что поверхность спутника неразличима сквозь его плотную оранжевую атмосферу, состоящую, в основном, из азота. Парникового эффекта в атмосфере нет, поверхность холоднее атмосферы, ее температура 93 К. Титан — мир глубокого холода.

Два самых далеких гиганта — Уран и Нептун — еще более холодные тела, чем Титан. Не исключено, однако, что на дне их толстой водородно-гелиевой атмосферы имеется поверхность, находящаяся в условиях чрезвычайно высоких давлений и температур.

После получения новых данных о спутниках планет-гигантов внимание ученых привлекла возможность существования огромного, вероятно глобального, океана под толстой ледяной корой спутника Юпитера Европы. Европа по размерам близка к нашей Луне и имеет некоторые источники внутренней энергии (связанные с приливными явлениями). Поэтому

даже высказано предположение о возможном существовании жизни в этом океане. Критики, однако, указывают, что такой океан плотно «запечатан» ледяной оболочкой и что одной только тепловой энергии недр для зарождения жизни недостаточно.

Последняя планета Солнечной системы — Плутон. Это ледяное тело, аналогичное крупным спутникам Юпитера и Сатурна, с очень тонкой метановой атмосферой. Недавно было установлено, что Плутон — не одна, а две маленькие планеты, обращающиеся вокруг общего центра с периодом 6,4 суток. Температура поверхности Плутона 40—50 К.

Таким образом, очень краткий обзор физических условий на планетах Солнечной системы показывает, что кроме Земли лишь планету Марс с некоторой натяжкой предположительно можно считать пригодной для жизни. Климат Марса близок к зимней Антарктиде, но ведь в антарктических условиях существуют микроорганизмы...

Ограничения для жизни

Понятие «планета, пригодная для жизни» включает много ограничений, которые можно было видеть на примере Солнечной системы. Это, например, состав поверхности планеты, наличие атмосферы, воды и температурного режима, благоприятного для возникновения единственной известной нам формы жизни — белково-нуклеинокислотной.

Еще один важный фактор — подходящий период вращения планеты. Так, слишком долгая ночь, вероятно, помешала бы развитию растений, использующих фотосинтез. Такова Венера, где длительность солнечных суток составляет 117 земных. С другой стороны, планета может иметь подходящий период вращения, но слишком большой угол между плоскостями экватора и орбиты, как, скажем, у Урана. Длительность полярной ночи, попеременно охватывающей на Уране целое полушарие (северное или южное), составляет

половину орбитального периода — 42 года. Можно предположить, что столь долгая полярная ночь не способствует развитию жизни на планете.

Интересна роль гравитации в эволюции форм жизни. Если в комфортной зоне окажется планета с большой массой, как получалось, например, в одном из модельных экспериментов, проводимы с помощью компьютера, физические условия на ней были бы непохожими на земные. Большая масса обусловит удержание легких газов в атмосфере; следовательно, состав последней будет отличаться от земной. Повышенное давление сместит точку кипения жидкостей в область более высоких температур. Функционирование живых организмов в условиях повышенной тяжести потребовало бы больших энергетических затрат на передвижение, более сильных мышц и т. д. Хорошая иллюстрация сказанному — изменение характера ходьбы человека в условиях малой тяжести. Напомним, что на Луне космонавты перешли на «порхающий» шаг, который там оказался более удобным.

Дать какие-либо количественные оценки оптимальной массы планеты трудно, но то что Земля с ее массой пригодна для жизни — всем хорошо известно.

Дорогие читатели!

Апрельские номера принято делать либо смешными, либо с какими-нибудь розыгрышами. Когда мы получили от вас письма с замеченными ошибками в № 4 за 1990 год, нам очень хотелось свалить все на традицию — такими невероятными оказались наши промахи.

Первый промах отно-

При обсуждении программы поиска несколько лет назад было высказано мнение, что обитаемые планетные системы можно было бы встретить у карликовых звезд с малой массой, если планеты находятся достаточно близко к ним. (Интерес к звездам малой массы объясняется тем, что их много и они сравнительно близки к нам.) Анализ показал, однако, что это предположение не имеет достаточных оснований. Короче говоря, звезды поздних классов — неподходящее место для поиска обитаемых планет. Лучшие кандидаты для этого — звезды, подобные нашему Солнцу.

Заключение

Земля — родительский дом человечества. Но в своем стремлении увидеть, узнать, открыть уже теперь Земля становится тесной для человека. Большим домом человечества, по-видимому, станет Солнечная система, самые далекие миры которой, возможно, будут известны нашим близким потомкам лучше, чем удаленные уголки Земли. Но Земля всегда останется для человека местом, где когда-то зародились два величайших чуда природы — жизнь и разум.

сится к статье В. Николаева «Космический полет — это так просто!?!». На странице 54 в качестве примера самого длительного полета приведен полет Ю. Романенко. Не умаляя заслуг этого космонавта, следует согласиться, что на сегодняшний день рекорд принадлежит В. Титову и М. Макарову, экспедиция которых продолжалась целый год (с 21.12.87 по 21.12.88).

Вторая ошибка еще более невероятна. Из-за не-

внимательности редактора несложный ребус для младших школьников КВАНТ + КВАНТ + КВАНТ + КВАНТ = ЗАДАЧА «превратился» в неразрешимую задачу КВАНТ + КВАНТ + КВАНТ = = ЖУРНАЛ.

Редакция приносит свои извинения читателям и автору задачи.

Мы благодарим всех, кто так внимательно читает наш журнал и не побоялся указать нам на ошибки.

„Квант“ улыбнется

Комбинация из двух пальцев

На второй странице обложки юбилейного номера (Квант, 1990, № 1), посвященного двадцатилетию журнала, воспроизведена картина Макса Эрнста «*Au premier mot limpide*». Короткий сопроводительный текст, помещенный там, к сожалению, неправильно ориентирует читателя. Здесь я хочу дать другое толкование картины и показать, что ее основной мотив — это парадокс Банаха — Тарского. Прежде чем перейти к обоснованию этого тезиса, несколько слов о самом парадоксе.

В 1924 году польские математики Стефан Банах и Альфред Тарский доказали следующее утверждение:

любой шар можно разбить на конечное число частей, из которых без наложений и пустот можно составить два шара того же радиуса.

Это конечно, удивительный парадокс. Это утверждение является парадоксом и на математическом, и на физическом, и на чисто житейском уровне. И тем не менее еще раз повторю — это строго доказанная теорема. К настоящему моменту число частей, на которые разбивается шар, доведено до пяти. Из двух частей складывается один шар, а из оставшихся трех еще один — оба, равные исходному. Стало доступнее и само доказательство. Думаю, что достаточно

настойчивый старшеклассник сможет разобраться в нем. Вы, конечно, понимаете, что части, на которые разбивается шар в парадоксе Банаха — Тарского, устроены и перепутаны чудовищно сложным образом. Они относятся к



Фрагмент картины Макса Эрнста «*Au premier mot limpide*».

так называемым неизмеримым множествам — к множествам, объем которых нельзя определить никаким разумным образом. Что касается невозможности физической реализации парадокса Банаха — Тарского, то тут и говорить не о чем. Впрочем, вы можете познакомиться с нехитрой фантазией на эту тему, прочитав статью А. К. Дьюдени «Об одном математическом парадоксе и золотом слитке,

полученном из ничего» (В мире науки, 1989, № 6).

А сейчас, опровергая только что сказанное, приступим к практическому удвоению реального шарика. Лучше, если это будет твердый шарик диаметром в один или два сантиметра. Сойдет и шарик, скатанный из пластилина. Вернемся к картине Макса Эрнста, а именно к ее фрагменту.

Положите шарик на горизонтальную поверхность. Лучше всего на такую, чтобы шарик катался по ней, но не скользил. Перекрестите между собой указательный и средний пальцы, как на картине, и наложите перекрещенные пальцы подушечками на шарик. Закройте глаза и слегка покатайте шарик —

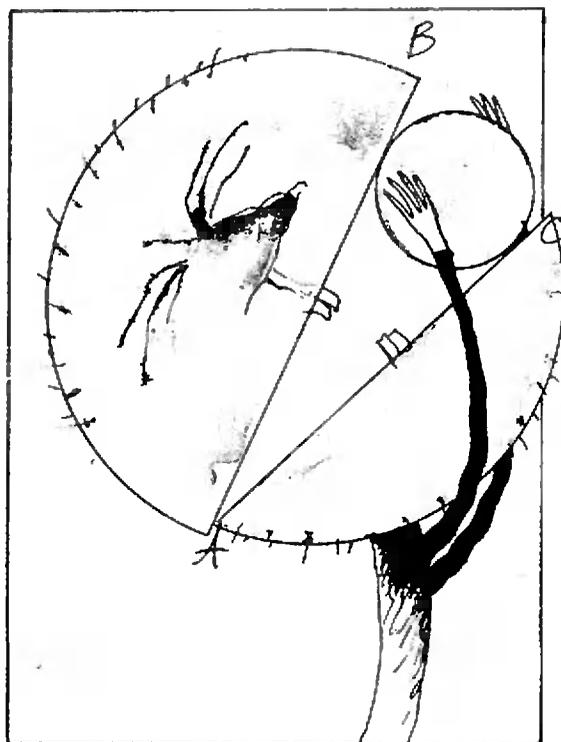
вы отчетливо ощутите, что шарик удвоился.

К сожалению, когда вы откроете глаза и уберете пальцы —

два шарика превратятся в один.

И все-таки присутствие духа парадокса Банаха — Тарского тут неоспоримо. Конечно, наш анализ не исчерпывает всего содержания картины Макса Эрнста, но думается, что основное схвачено. Кстати, картина датируется 1923 годом, парадокс Банаха — Тарского опубликован в 1924 году — знаменательное совпадение!

А. Панов



Школа В. Кванте

Несколько эпизодов из жизни вписанных и описанных окружностей

Кандидат физико-математических наук
И. ШАРЫГИН

Вписанные и описанные окружности обладают целым рядом похожих свойств. Такие свойства и будут нас интересовать в первую очередь. Суть сходства хорошо иллюстрируют следующие две задачи.

Задача 1. В треугольнике ABC известны стороны $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Найдите отрезки сторон, на которые они делятся точками касания с вписанной окружностью.

Задача 2. В треугольнике ABC известны углы A , B и C . Найдите углы, образованные радиусами описанной окружности, идущими в вершины треугольника, со сторонами, сходящимися в этих вершинах.

Решим 1-ю задачу. Отрезки двух сторон, имеющие общую точку — вершину треугольника, попарно равны (рис. 1); обозначая их соответственно через x , y и z , получаем систему уравнений $x+y=c$, $y+z=a$, $z+x=b$, из которой найдем $x=\frac{1}{2}(b+c-a)=p-a$, $y=\frac{1}{2}(a+c-b)=p-b$, $z=\frac{1}{2}(a+b-c)=p-c$, где p — полупериметр треугольника.

Полученные формулы следует отнести к категории «рабочих»: во многих конкурсных и олимпиадных задачах они оказываются полезными, и потому их стоит запомнить.

Аналогичным образом можно решить и 2-ю задачу (рис. 2). Углы, прилежащие к одной стороне треугольника, попарно равны, обозначая их через x , y , z , приходим к системе $x+y=C$, $y+z=A$, $z+x=B$, из которой

$$x = \frac{1}{2}(B+C-A) = \frac{\pi}{2} - A,$$

$$y = \frac{1}{2}(A+C-B) = \frac{\pi}{2} - B,$$

$$z = \frac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\pi}{2} - C.$$

Правда, в отличие от предыдущего случая, возможны отрицательные значения углов (углы следует считать ориентированными). Такими будут углы, прилежащие к большей стороне тупоугольного треугольника. Соотношения задачи 2 могут быть без труда получены из свойства центральных и вписанных углов ($\angle BOC=2\angle BAC$). Читатель же не только внимательный, но и вдумчивый, возможно, обратит внимание на полную эквивалентность формул задач 1 и 2 (особенно, если во второй серии вместо $\frac{\pi}{2}$ взять d — полусумму углов данного треугольника) и задумается о глубине аналогий между вписанной и описанной окружностью. В обоих случаях

мы пользовались, по существу, лишь свойством равнобедренного треугольника, справедливым не только в нашей Евклидовой геометрии. Полученные соотношения верны и для сферических треугольников, для которых двойственность сторон и углов является важнейшим теоретическим фактом. Эта двойственность влечет и двойственность между вписанными и описанными окружностями, в частности для сферического треугольника существуют «внеописанные» окружности, соответствующие вневписанным окружностям. Мы не будем дальше развивать эту тему. Перейдем к рассмотрению вписанных и описанных четырехугольников. Их главные свойства мы сформулируем в виде следующих задач.

Задача 3. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник. Тогда $AB + CD = BC + AD$.

Задача 4. Если $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$. ($\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$).

При этом указанные соотношения являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для того, чтобы данный четырехугольник являлся описанным (вписанным).

Отметим еще два соотношения, дающие каждое необходимое и достаточное условие существования окружности, вписанной в данный четырехугольник, не являющийся трапецией.

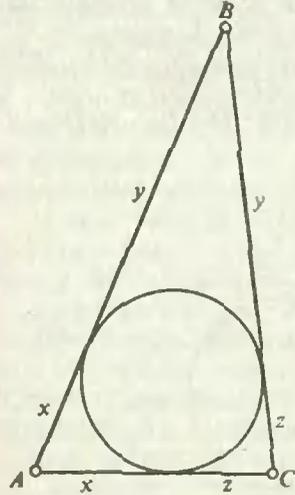


Рис. 1.

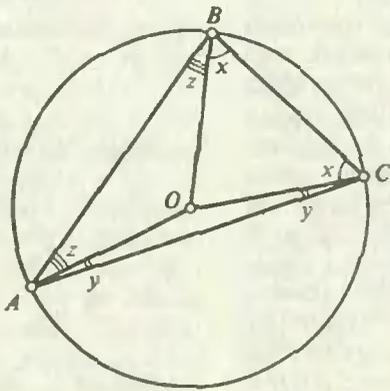


Рис. 2.

Задача 3'. Пусть противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ пересекаются при продолжении так, как показано на рисунке 3. Тогда если $ABCD$ — описанный четырехугольник, то $KA + AM = KC + CM$, $KD + BM = MD + KB$. И обратно, если выполняется одно из этих соотношений, то четырехугольник $ABCD$ является описанным.

Можно указать соответствующие два соотношения и для вписанного четырехугольника (какие?). Но мы этого делать не будем, так как для рассматриваемого нами плоского случая они малоинтересны.

Доказательство. Докажем сначала необходимость соотношения из задачи 3. Используя то, что соответствующие касательные попарно равны, будем иметь $KA + AM = KQ - AQ + AP + PM = KT + ML = KC - CT + CL + MC = KC + MC$.

Обычно достаточность условий теорем из задач 3, (3') и 4 доказывают методом от противного. Мы же предложим несколько иной путь, еще больше подчеркивающий родство вписанной и описанной окружностей.

Докажем достаточность условия задачи 3. Отложим на KC отрезок $KE = KA$, а на MB возьмем $MF = MA$ (рис. 4). Из равенства $KA + AM = KC + CM$ следует, что $CF = MF - MC = MA - MC = KC - KA = EC$.

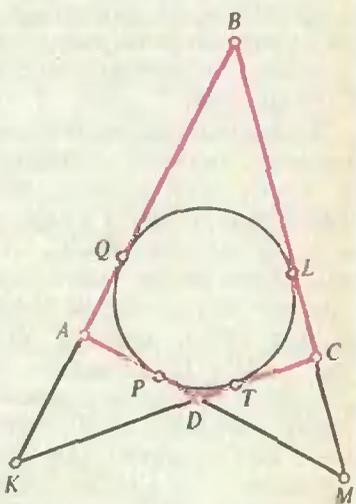


Рис. 3.

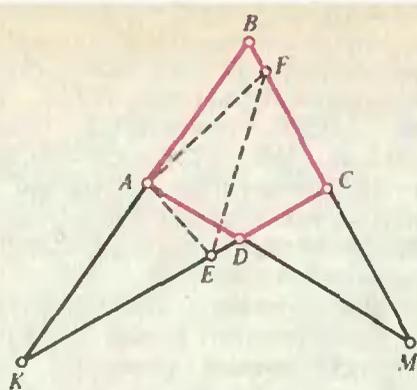


Рис. 4.

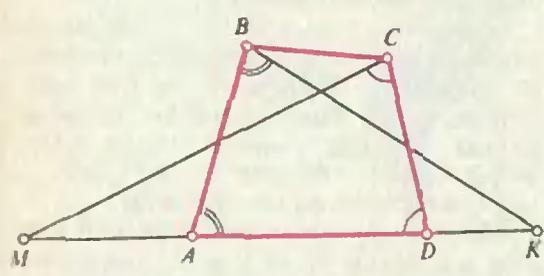


Рис. 5.

Таким образом, поскольку KA и KE , MA и MF , CE и CF соответственно попарно равны, биссектрисы углов AKD . AMB и BKD являются серединными перпендикулярами к AE , AF и FE . Значит, эти биссектрисы пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника AEF . Эта точка равноудалена от KB и KC , KC и BC , BC и AM . Следовательно, эта точка равноудалена от сторон четырехугольника $ABCD$ и является центром вписанной в него окружности.

Для доказательства достаточности условия задачи 4 предположим, что в четырехугольнике $ABCD$ суммы противоположных углов равны и для определенности $D < C$, $A < B$. Проведем через точки C и B соответственно прямые, образующие со сторонами DC и AB углы, равные углам D и C (рис. 5). Получились два равнобедренных треугольника CMD ($CM = MD$) и ABK ($AK = BK$). Треугольник BEC также является равнобедренным ($\angle CBE = \angle ABC - \angle BAD = \angle BCD - \angle CDA = \angle BCE$). Серединные перпендикуляры к сторонам AB ,

BC и CD являются биссектрисами внутренних углов треугольника MEK , а значит, пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от всех вершин четырехугольника и является для него центром описанной окружности, а для треугольника MEK она — центр вписанной окружности.

Как видим, в этих двух доказательствах вписанная и описанная окружности любезно раскланялись друг с другом.

В случае, когда $ABCD$ — трапеция, имеются специальные признаки.

Задача 5. Для того чтобы в трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC можно было вписать окружность, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих равенств:

а) $TB + BP = DP$, $TC + AP = AD + CP$, где P — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, T — проекция D на прямую BC ;

$$б) \frac{AD}{BC} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.$$

Докажите эти утверждения самостоятельно.

И в заключение решим две задачи.

Задача 6. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABC и CDA , касаются друг друга.

Доказательство. Пусть окружности вписанные в треугольники ABC и CDA касаются AC в точках K и M соответственно (рис. 6). Нам надо доказать, что точки K и M совпадают. По формулам задачи 1 имеем $MK = |AM - AK| = |1/2(AB + AC - BC) - 1/2(AC + AD - CD)| = 1/2|AB + CD - BC - AD| = 0$.

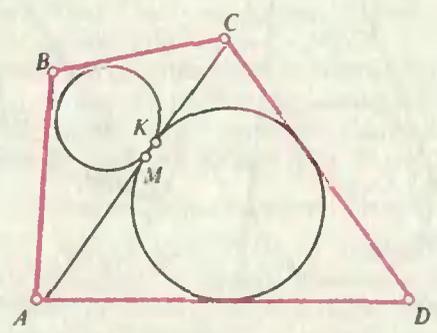


Рис. 6.

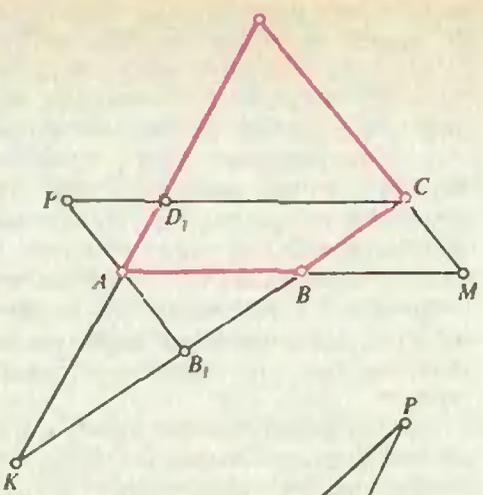


Рис. 7.

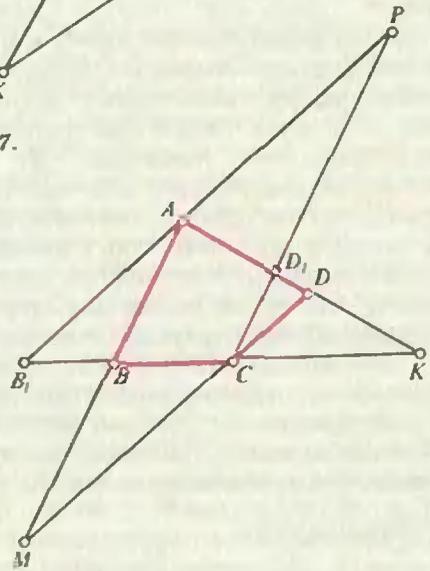


Рис. 8.

Задача 7. Через вершину A четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная DC , пересекающая прямую BC в точке B_1 , а через вершину C проведена прямая, параллельная AB и пересекающая прямую AD в точке D_1 . Докажите, что

- а) если $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то и AB_1CD_1 — также вписанный четырехугольник;
- б) если $ABCD$ — описанный четырехугольник, то и AB_1CD_1 — также описанный четырехугольник.

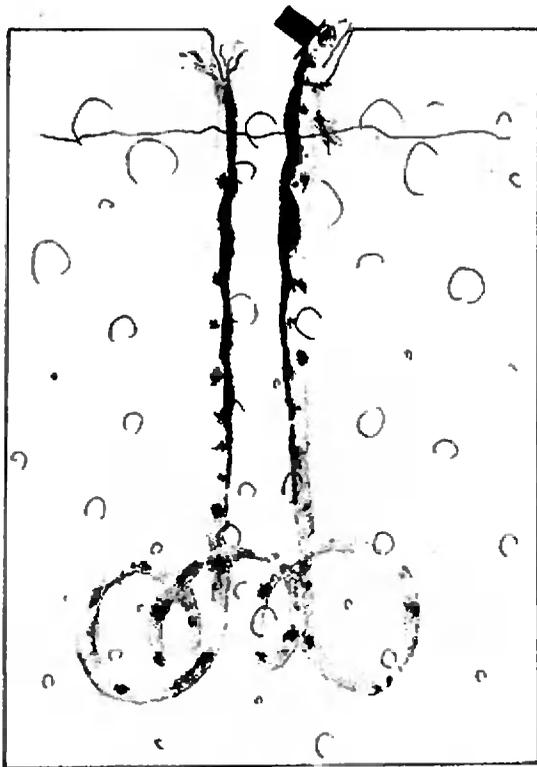
Доказательство. Докажем пункт б), поскольку пункт а) доказывается совсем просто (по существу, пункт а) включен в условие из чисто эстетических соображений). Ограничимся также случаем, когда $ABCD$ не является трапецией. Обозначим через K и M точки пересечения пря-

мых AD и BC , AB и CD соответственно. Возможны два случая (рис. 7 и 8). Пусть P — точка пересечения прямых AB_1 и CD_1 . В случае, соответствующем рисунку 7, имеем $PA = CM$, $PC = AM$. Поскольку $ABCD$ — описанный четырехугольник, то (см. первое равенство задачи 3) $KA + AM = KC + CM$. Заменяя AM и CM на PC и PA , будем иметь $KA + PC = KC + PA$ и в соответствии с задачей 3', четырехугольник AB_1CD_1 является описанным. В случае, соответствующем рисунку 8, наоборот, исходя из утверждения задачи 3 для четырехугольника $ABCD$, получим, что для четырехугольника AB_1CD_1 выполняется утверждение задачи 3'.

В заключение предлагаем вам несколько задач для самостоятельного решения.

Задачи

1. ABC — равнобедренный треугольник, на основании AC которого взята точка M . Найдите расстояние между точками касания окружностей, вписанных в треугольники ABM и CBM , со стороной BM , если $AM = a$, $MC = b$.
2. Последовательные стороны описанного пятиугольника равны a, b, c, d, e . Найдите отрезки, на которые разделена точкой касания сторона a .
3. Докажите, что у описанного многоугольника с четным числом сторон суммы длин сторон, взятых через одну, равны.
4. Параллелограмм $ABCD$ прямыми, пересекающими стороны AB и CD , разделен на несколько трапеций, в каждую из которых можно вписать окружность. Докажите, что произведение отрезков, на которые оказалась разделена сторона AB , равно произведению отрезков, образовавшихся на стороне CD .
5. На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M внутри треугольника. Рассмотрим три четырехугольника AB_1MC_1, BC_1MA_1 и CA_1MB_1 . Докажите, что если два из этих четырехугольников являются описанными, то и третий также является описанным.
6. Докажите, что если боковые ребра четырехугольной пирамиды равны, то сумма двух двугранных углов при противоположных боковых ребрах пирамиды равна сумме двух других двугранных углов.
7. В пространстве даны два луча OA и OB . Найдите геометрическое место лучей OC , если величина $\alpha + \beta - \gamma$ является постоянной, где α, β и γ соответственно двугранные углы при ребрах OA, OB и OC получившегося трехгранного угла.



Лаборатория „Кванта“

«Электрический злодей и волшебное колечко»

Предлагаемые вашему вниманию задачи-вопросы взяты из книги американского ученого Дж. Уокера «Физический фейерверк». (В прошлом году издательство «Мир» выпустило второе издание этой книги, а первое издание увидело свет еще на десять лет раньше.) Почти все задачи так или иначе связаны с окружающим нас миром. Поэтому на многие вопросы вы сумеете ответить, лишь проведя соответствующие наблюдения или опыты. Ответы, приведенные в конце журнала, как правило, только уточняют задачу или подсказывают путь к ее решению. Итак, наблюдайте и экспериментируйте.

Биоэлектричество

1. «Прилипание» к электрическому проводу. Если вы случайно схватитесь за электрический провод, так что

через вашу руку пройдет ток порядка 25 мА, то не исключено, что вы будете не в силах оторвать руку от провода. Почему? Только не пытайтесь проверить это на себе нарочно — это опасно.

2. Электрический угорь. Как может поразить током электрический угорь? Крупный угорь вырабатывает напряжение до 600 В при токе до 1 А. Откуда он черпает такую невероятную мощность? Происходит ли непрерывный разряд угря через морскую воду? Почему угорь не поражает током сам себя?

Способность различных морских животных ориентироваться под водой долгое время оставалась загадкой. Однако исследования последних лет показали, что некоторые из этих животных реагируют на электрические поля, которые возникают вследствие движения океанских течений в магнитном поле Земли. Полагают, что именно эти поля помогают морским существам ориентироваться под водой. Во-первых, постарайтесь объяснить, как движение воды приводит к возникновению электрического поля. Во-вторых, каким образом животное может обнаружить столь слабое поле?

Электростатика

3. По ковру ходить опасно!

Иногда вас может «ударить током», если вы просто пройдетесь по ковру или поерзаете на сиденьи автомобиля. Очевидно, при этом каким-то образом накапливается заряд. Можете ли вы более подробно объяснить, что именно происходит? Почему, например, вас «бьет током», когда вы идете по ковру, но ничего не случается, если вы стоите на нем? Почему эти эффекты зависят от времени года?

На занятиях по физике обычно демонстрируют другой опыт: чтобы наэлектризовать стеклянные палочки, их яростно натирают кошачьим мехом или чем-то подобным. Почему их так натирают? Будут ли они электризоваться медленнее, если тереть их спокойнее? Действительно ли трение играет какую-то роль в электризации? Почему знак заряда па-

лочки зависит от того, чем ее натирают? Почему, наконец, заряд палочки уменьшается, если ее подержать над зажженной спичкой?

4. Капельница Кельвина. Часто демонстрируется и другой опыт — капельница Кельвина (рис. 1). Вкратце суть его такова: вода капает сквозь две жестяные банки, которые соединены проводами, как показано на рисунке. Через некоторое время одна пара жестянок заряжается положительно, а другая — отрицательно. Почему? Прибор как будто симметричен. Почему же банки заряжаются по-разному? Можете ли вы, в частности, объяснить, почему начинается накопление зарядов?

5. Электризация проволочных изгородей при снегопаде. Поражения электрическим током часто связаны с песчаными и снежными бурями. Например, когда в Скалистых горах в Колорадо разыгрывается метель, проволочные изгороди в долине накапливают заряд такой величины, что, прикоснувшись к ним, человек или животное могут буквально быть сбиты с ног; иногда из изгородей в ближайшие заземленные предметы летят искры. Жители долин порой наблюдают искры, отскакивающие на целый метр от изгороди. (Трехсантиметровая искра может свалить вас с ног так, что вам придется отлежаться несколько часов.) Каким обра-

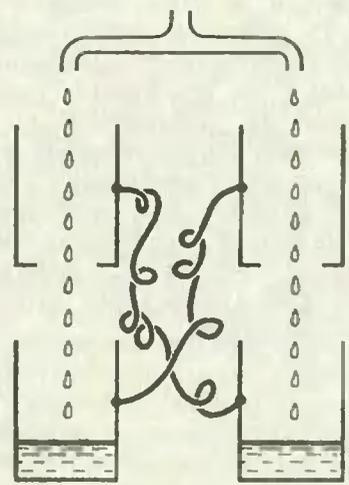


Рис. 1.

Падающий сахар

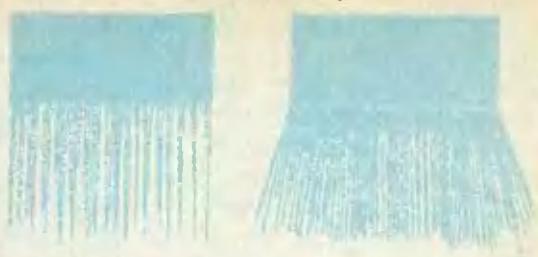


Рис. 2.

зом падающий снег электризует изгороди?

6. Свечение клейкой ленты. Если вы станете отматывать клейкую ленту с катушки в темной комнате, то увидите, что линия, по которой лента отрывается от рулона, слабо светится. Чем вызвано это свечение? Имеет ли оно какой-то определенный цвет? Если да, то почему?

7. Просеивание сахара. Однажды я просеивал сахарную пудру, чтобы посыпать ею пирог. Вдруг с пудрой произошло нечто странное: сначала она сыпалась прямо вниз, но постепенно все большая ее часть стала отлетать в сторону (рис. 2). Почему это произошло?

8. Отрицательный заряд дарит блаженство. Бытует мнение, что, попав в область отрицательного заряда, например под душ, человек испытывает невероятное блаженство. Итак, отрицательный заряд делает вас счастливыми, а положительный вызывает неприятные эмоции. Не исключено, что то удовольствие, которое мы получаем от душа, в равной мере обусловлено как ощущением собственной чистоты, так и отрицательным зарядом, возникающим в ванной. Как объяснить такое «эмоциональное воздействие» положительных и отрицательных зарядов?

Магнетизм

9. Электромагнитное «парение». Металлическое кольцо, надетое на катушку электромагнита, через которую пропускают переменный ток неизменной амплитуды, спокойно висит в воздухе (рис. 3). Однако если ток резко включить, то кольцо весьма

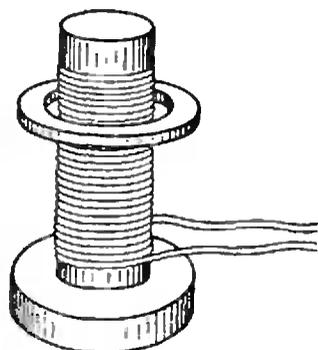


Рис. 3.

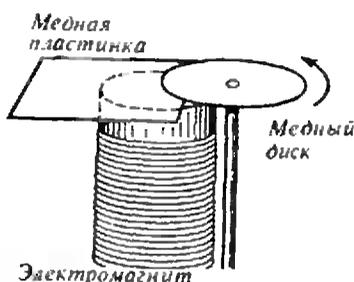


Рис. 4.

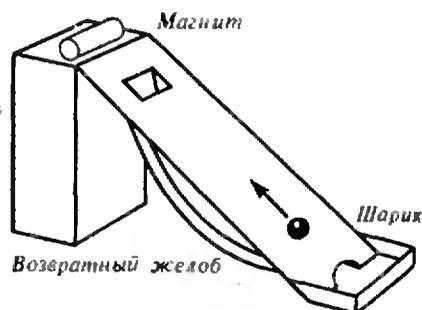


Рис. 5.

эффектно подпрыгнет. Почему кольцо ведет себя по-разному в этих двух случаях? Что удерживает кольцо во взвешенном состоянии и чем определяется высота, на которой оно висит? Насколько устойчиво положение кольца? (Возвращается ли кольцо в прежнее положение, если его сдвинуть с места или наклонить?) Если вы возьметесь предсказывать поведение различных колец в магнитном поле, интуиция может вас подвести. Попробуйте ради забавы угадать, что произойдет с кольцом в следующих случаях (а затем проверьте свои догадки на опыте).

На одной ли высоте «повиснут» тонкое и толстое кольца, если их диаметры и плотности одинаковы? Что случится, если медленно увеличивать ток в катушке, на которую надеты кольца? Как будут вести себя кольца, если диаметр одного из них окажется больше, чем другого?

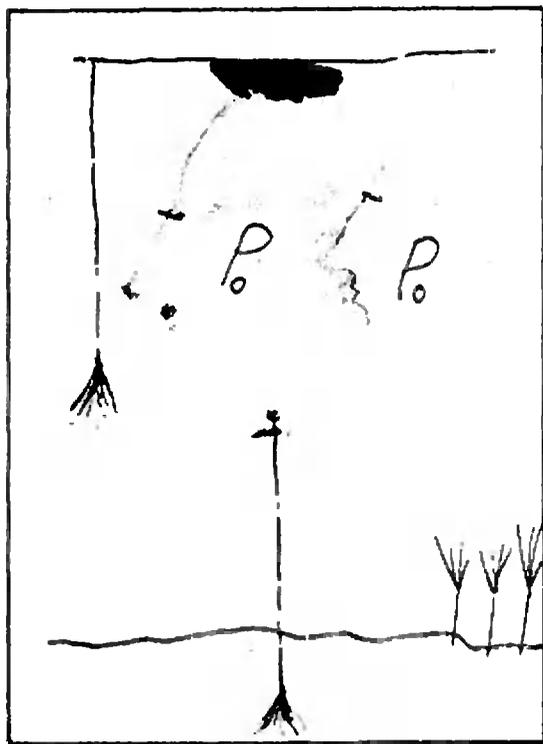
10. Вращение диска в «тени» магнитного поля. Над одним из полюсов переменного электромагнита поместите свободно вращающийся на оси медный диск (рис. 4). Диск будет отталкиваться от магнита, но не придет во вращение. Теперь вставьте между диском и магнитом медный лист, тем самым частично экранируя диск от магнитного поля. Диск тут же начнет вращаться. Почему?

11. Автомобильный спидометр. Притягивает ли подковообразный магнит алюминиевые предметы? Как правило, нет. (Почему?) Однако можно сделать устройство, в котором алюминий будет двигаться под дей-

ствием магнита. Подвесьте подковообразный магнит на нитке над алюминиевым диском. Диск следует укрепить так, чтобы он мог вращаться вокруг оси, проходящей через его центр. Если теперь раскрутить магнит, то диск начнет вращаться. Будет ли диск вращаться в ту же сторону, что и магнит?

Примерно так же работает спидометр автомобиля, с той лишь разницей, что в автомобильном спидометре вращающийся магнит находится внутри круглой алюминиевой коробочки, к которой прикреплены стрелка и пружинка; коробочка не вращается, так как ее удерживает пружина.

12. «Вечное» магнитное движение. Из множества забавных вечных двигателей, когда-либо придуманных людьми, одним из простейших является двигатель, сделанный епископом Честерским в 70-х годах XVII в. (рис. 5). Магнит, укрепленный на стойке, должен тянуть железный шарик вверх по наклонной плоскости, пока тот не поднимется до отверстия вверху. Провалившись в отверстие, шарик скатывается вниз по желобу и снова под действием магнита начинает двигаться вверх по наклонной плоскости. Забавно, не правда ли? Почему же этот двигатель не работает?



Трагедия физики

Газовые законы и механическое равновесие

Д. АЛЕКСАНДРОВ

Школьный курс физики принято разбивать на отдельные темы, например — «Основы динамики», «Газовые законы», «Электростатика» и т. п. Соответственно и задачи по физике обычно подвергаются такой же классификации. Хорошо это или нет?

При известном опыте подобное «распределение» может помочь абитуриенту уже при беглом ознакомлении с условием задачи прикинуть, какие физические законы пригодятся для ее решения. Однако нередко на вступительных экзаменах встречаются задачи, которые трудно отнести к каким-то конкретным темам. Это может вызвать определенные затруд-

нения, в результате чего в общем несложная задача решена не будет.

В этой статье мы рассмотрим круг задач, которые с первого взгляда можно было бы назвать «газовыми». На самом же деле для их решения, помимо газовых законов, вам понадобятся также и другие законы, прежде всего — законы механического равновесия.

Задача 1. *Воздушный шарик, вынесенный из теплой комнаты ($t_1 = +27^\circ\text{C}$) на мороз ($t_2 = -23^\circ\text{C}$), некоторое время свободно плавает в воздухе. Определите массу резиновой оболочки шарика. Его диаметр $d = 40$ см, молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Упругостью оболочки можно пренебречь.*

С виду это обычная задача на газовые законы. Такое впечатление усиливают и заданные в условии величины — кроме как в уравнение Менделеева—Клапейрона (уравнение состояния идеального газа) их больше некуда подставить. С другой стороны, очевидно, что массу оболочки из этого уравнения найти нельзя. Как же быть?

Прочитаем условие задачи еще раз, более внимательно; порой наиболее ценная информация содержится не в числовых данных, а в словах. Обратим внимание на две фразы: «Воздушный шарик... свободно плавает в воздухе» и «Упругостью оболочки можно пренебречь». В первом предложении зашифровано условие механического равновесия шарика: сила тяжести резиновой оболочки и теплового воздуха внутри шарика уравновешивается выталкивающей силой (силой Архимеда). По закону Архимеда эта сила равна весу жидкости или газа в объеме погруженного в них тела. Вторая фраза означает равенство давлений воздуха внутри шарика и снаружи.

Итак, запишем прежде всего условие равновесия шарика (рис. 1):

$$m_0g + m_1g = m_2g,$$

где m_0 — искомая масса резиновой оболочки, m_1 и m_2 — массы теплого

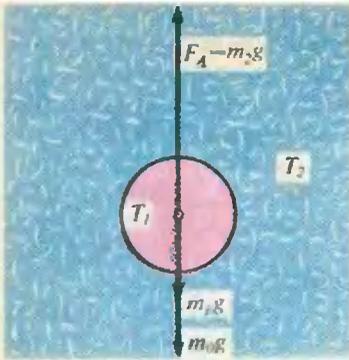


Рис. 1.

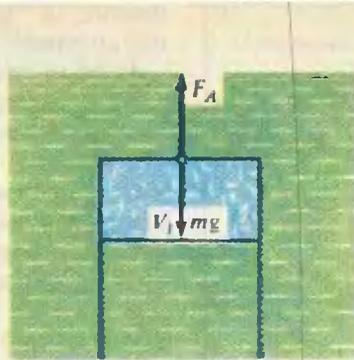


Рис. 2.

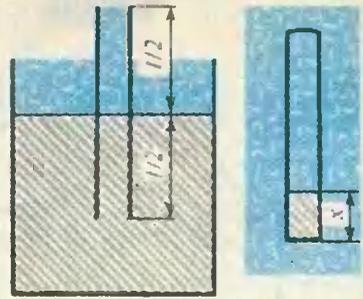


Рис. 3.

и холодного воздуха в объеме шарика. Из уравнений Менделеева — Клапейрона найдем m_1 и m_2 :

$$m_1 = \frac{Mp_0V}{RT_1}, \quad m_2 = \frac{Mp_0V}{RT_2},$$

где $V = \pi d^3/6$

(здесь мы и воспользовались отсутствием упругости оболочки). Окончательно получаем

$$m_0 = \frac{Mp_0\pi d^3}{6R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) =$$

$$7,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 7,8 \text{ г.}$$

Задача 2. На какую глубину нужно погрузить в воду тонкостенный стакан, перевернутый вверх дном, чтобы он утонул? Масса стакана $m = 100 \text{ г}$, его объем $V = 200 \text{ мл}$, атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$.

Будем считать, что стакан погружается очень медленно. В таком случае и стакан, и заполняющая его вода в каждый момент времени будут находиться в равновесии. Очевидно, для этого к стакану придется прикладывать силу, уравновешивающую сумму архимедовой силы и силы тяжести. Вблизи поверхности воды эта сила должна быть направлена вниз, так как из данных в условии задачи следует, что масса воды в объеме стакана больше массы самого стакана, и, следовательно, сила Архимеда в начальный момент больше силы тяжести. По мере погружения выталкивающая сила будет уменьшаться — она пропорциональна объему запертого в стакане воздуха, а он уменьшается, поскольку воздух сжимает

все возрастающая сила давления со стороны воды. Нам нужно найти такую глубину, на которой архимедова сила сравняется по величине с силой тяжести. При погружении стакана на чуть большую глубину он утонет без посторонней помощи.

Теперь проведем соответствующие расчеты. Условие равновесия стакана в воде имеет вид (рис. 2)

$$mg = F_A, \text{ где } F_A = \rho g V_1.$$

Объем V_1 запертого воздуха найдем из закона Бойля — Мариотта (уравнения изотермического процесса), так как температуру можно считать постоянной (это подразумевалось в условии задачи, хотя и не оговаривалось явно):

$$p_0 V = (p_0 + \rho gh) V_1,$$

где h — искомая глубина, на которую погружен стакан, ρ — плотность воды.

Собрав вместе все уравнения, получим

$$mg = \frac{p_0 \rho g V}{p_0 + \rho gh},$$

откуда

$$h = \frac{p_0}{\rho g} \left(\frac{\rho V}{m} - 1 \right) = 10 \text{ м.}$$

Заметим, кстати, что давление водяного столба высотой 10 м как раз соответствует нормальному атмосферному давлению, равному приблизительно 10^5 Па .

Задача 3. Открытую стеклянную трубку длиной $l = 1 \text{ м}$ наполовину

погружают в ртуть. Затем трубку сверху закрывают и вынимают (рис. 3). Какой длины столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление $p_0 = 750$ мм рт. ст.

Пренебрежем капиллярными явлениями и будем считать, что ртуть из трубки вытекает очень медленно. Тогда очевидно, что ртуть будет вытекать до тех пор, пока разность сил давления воздуха снаружи и внутри трубки не уравновесит силу тяжести оставшегося столбика ртути. Отсюда найдем давление внутри трубки: $p = p_0 - \rho g x$, где x — искомая длина оставшегося столбика ртути. С другой стороны, это же давление можно найти из закона Бойля — Мариотта (температуру считаем постоянной)

$$p_0 \frac{1}{2} S = p (l - x) S.$$

Исключив p из обоих уравнений, получим

$$p_0 \frac{1}{2} = (p_0 - \rho g x) (l - x).$$

Это уравнение можно упростить, учитывая, что атмосферное давление задано в миллиметрах ртутного столба (в задачах такого рода это действительно удобнее). Подставив $p_0 = \rho g H$, где $H = 750$ мм, получим квадратное уравнение

$$x^2 - (H + l)x + \frac{Hl}{2} = 0.$$

Большой корень этого уравнения превышает длину трубки и нам не подходит. Остается второй корень:

$$x = \frac{H + l - \sqrt{(H + l)^2 - 2Hl}}{2} = 0,25 \text{ м} = 25 \text{ см}.$$

Задача 4. В сообщающиеся цилиндрические сосуды одинаковых раз-

меров, один из которых запаян, а второй открыт, налита ртуть. Уровни ртути в сосудах одинаковы, длина части запаянного сосуда, заполненной воздухом, равна l_0 , атмосферное давление p_0 , измеренное в миллиметрах ртутного столба, равно H . Какой станет разность уровней ртути в сосудах, если абсолютную температуру воздуха в запаянном сосуде увеличить в 2 раза?

Решение этой задачи аналогично решению предыдущей, с той лишь разницей, что закон Бойля — Мариотта надо заменить объединенным газовым законом, поскольку температура газа изменяется:

$$\frac{p_0 l_0}{T} = \frac{p(l_0 + x)}{2T}.$$

Здесь x — расстояние, на которое опустится уровень ртути в запаянном сосуде (рис. 4). На такую же величину поднимется уровень ртути в открытом сосуде (диаметры сосудов одинаковы), поэтому уравнение гидростатики примет вид

$$p = p_0 + 2\rho g x.$$

Отсюда, подставив $p_0 = \rho g H$, получаем квадратное уравнение

$$2x^2 + (H + 2l_0)x - Hl_0 = 0.$$

Один корень этого уравнения отрицательный и не может быть ответом к задаче. Поэтому получаем

$$x = (\sqrt{(H + 2l_0)^2 + 8Hl_0} - (H + 2l_0)) / 4.$$

Таким образом, искомая разность уровней ртути в сосудах равна

$$h = 2x.$$

Задача 5. Запаянный с одного конца капилляр, длина которого l ,

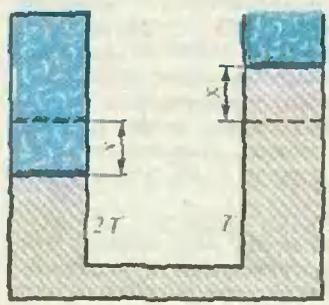


Рис. 4.

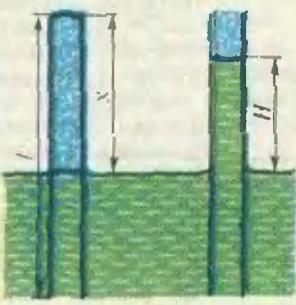


Рис. 5.

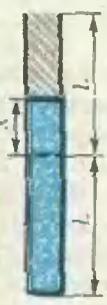


Рис. 6.

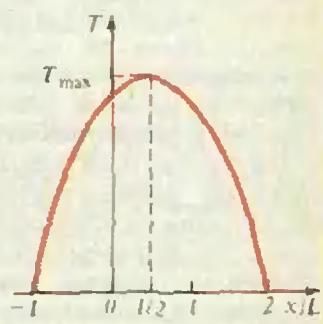


Рис. 7.

опускают открытым концом в сосуд с водой так, что уровни воды в сосуде и капилляре совпадают (рис. 5). Определите длину непогруженной части капилляра, если в таком же открытом капилляре вода поднимается на высоту H . Атмосферное давление p_0 .

Решая третью задачу, мы пренебрегли поверхностными явлениями в жидкости. Это действительно можно делать, но только в том случае, если радиус трубки достаточно велик, а значит, силы поверхностного натяжения малы. В данной задаче с капилляром это условие уже не выполняется.

При погружении запаянного капилляра в воду запертый в нем воздух сжимается, и его давление p становится больше атмосферного. В состоянии равновесия разность давлений воздуха уравновешивается дополнительным давлением, обусловленным силами поверхностного натяжения. В открытом капилляре это давление компенсировало давление столба воды плотностью ρ и высотой H . Так как силы поверхностного натяжения зависят лишь от самой жидкости и от степени ее смачивания стенок сосуда, а и то и другое одинаково для запаянного и открытого капилляров, можно записать:

$$p - p_0 = \rho g H.$$

Согласно закону Бойля — Мариотта,

$$p x = p_0 l,$$

где x — искомая длина «воздушной» части запаянного капилляра. Решая эти уравнения, получим

$$x = \frac{p_0 l}{p_0 + \rho g H}.$$

В заключение — более сложная задача, в которой обыгрывается интересный механический эффект.

Задача 6. *Нижний конец вертикальной узкой трубки длиной $2L$ (в мм) запаян, а верхний открыт в атмосферу. В нижней половине трубки находится газ при температуре T_0 , а верхняя половина трубки заполнена ртутью. Трубку начинают медленно*

нагревать. До какой минимальной температуры нужно нагреть газ в трубке, чтобы он вытеснил всю ртуть? Внешнее давление p_0 , измеренное в миллиметрах ртутного столба, равно L .

Найдем сначала, при какой температуре T газ в трубке вытеснит столбик ртути длиной x (рис. 6). Для этого запишем объединенный газовый закон и уравнение гидростатики:

$$\frac{(p_0 + \rho g L)L}{T_0} = \frac{p(L+x)}{T},$$

$$p = p_0 + \rho g(L-x).$$

Учитывая, что $p_0 = \rho g L$, получим

$$T = T_0 \left(1 - \frac{x}{2L}\right) \left(1 + \frac{x}{L}\right).$$

Если попытаться найти из этой формулы ответ к задаче, подставив $x=L$, то получится, что $T=T_0$. Другими словами, газ и не надо было нагревать вовсе. Но это не так. Дело в том, что функция $T(x)$ — не монотонная (рис. 7) и при $x=L/2$ имеет максимум, равный $T_{\max} = 9/8 T_0$ (чтобы это получить, вспомним, что вершина параболы лежит посередине между корнями, а они, очевидно, равны $x_1 = 2L$ и $x_2 = -L$). Так вот, для вытеснения всей ртути из трубки ее достаточно нагреть до температуры T_{\max} , при которой равновесие ртути становится неустойчивым, а дальше все произойдет само собой.

У п р а ж н е н и я

1. Воздушный шарик объемом $V=1 \text{ м}^3$ висит на высоте $h=1,5 \text{ км}$, где плотность воздуха (его молярная масса $M_a=29 \text{ г/моль}$) на 20% меньше, чем у поверхности земли. Оболочка шарика, не растяжимая и герметичная, имеет массу $m=770 \text{ г}$. Температура воздуха у поверхности $T=300 \text{ К}$, давление $p=10^5 \text{ Па}$. Каким газом заполнен шарик?

2. На какую глубину в жидкость плотности ρ надо погрузить открытую трубку длиной L , чтобы, закрыв верхнее отверстие, вынуть столбик жидкости длиной $L/2$? Атмосферное давление p_0 .

3. На поверхности жидкости плотности ρ плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погруженный в жидкость. На сколько погрузится стакан, если его поставить на поверхность жидкости вверх дном? Высота стакана H , давление воздуха p_0 .

Информация

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 9, 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в вечернее время в форме лекций,

читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых ознакомиться с основными направлениями современной физики. Для желающих организованы факультативные занятия по математике и основам информатики.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 26

сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (и приложить две фотокарточки размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 6 по 22 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов. Работаящая молодежь зачисляется вне конкурса.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Адрес: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 939-26-56.

Школа будущих инженеров

Дорогие ребята! Если вы любите изобретать и конструировать, то есть не равнодушны к инженерному творчеству, если вы хотите научиться логически мыслить, глубже узнать, понять и полюбить физику, математику, овладеть электронно-вычислительной техникой, приглашаем вас в Заочную инженерную физико-математическую школу. Ходить на уроки в этой школе не придется — мы будем посылать вам по почте и объяснения нового материала, и контрольные задания, а вы будете присылать нам ответы. Не будет обычных дневников и оценок, главное в нашей школе — Знания и Творчество!

Вы будете изучать не какой-то один предмет сам по себе, а комплекс наук, которые должен знать и уметь использовать современный инженер. Не зря Козьма Прутков писал:

«Однобокого специалиста уподоблю флюсу!» Специалисты математиков, физиков — сотни, а инженеров — миллионы! И еще: современный инженер должен не просто знать и уметь, он должен Творить каждый день, каждую минуту своей работы. Этому и будет учить наша школа в течение трех лет.

Конечно, мы будем общаться не только по почте. Будут слеты, олимпиады учащихся, экскурсии в вычислительные центры, музеи и многое другое. Такие школы, как наша, существуют во многих странах, и мы предполагаем обмен группами с ними.

Итак, Заочная инженерная физико-математическая школа объявляет набор! Для того чтобы быть зачисленным в 9-й класс, нужно выполнить конкурсное задание, аккуратно переписать его в тонкую тетрадь и до 15 октября 1990 года отправить по адресу: 190031, Ленинград, Московский проспект, д. 9,

ЛИИЖТ, ЗИФМШ, на конкурс. Результаты конкурса мы сообщим вам письменно.

Желаем успеха!

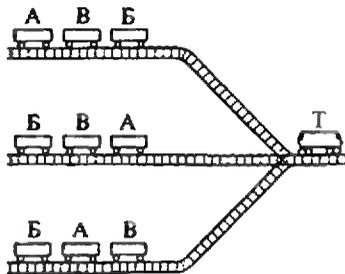
Конкурсное задание ЗИФМШ

1. Два поезда идут навстречу друг другу, один со скоростью 36 км/ч, другой со скоростью 54 км/ч. Пассажир в 1-м поезде замечает, что 2-й поезд проходит мимо него в течение 6 секунд. Какова длина второго поезда?

2. В металлических деталях при отливке часто образуются раковины — участки, заполненные воздухом. Снаружи они не видны, но могут существенно влиять на прочность детали. Как проверить, имеются ли такие раковины в детали, если у вас есть деталь из того же металла другой формы и объема, заведомо без раковин, мензурка с водой, в которую может поместиться любая из деталей, и весы?

3. Два электровоза проходят путь от станции А до станции В, причем один из них первую половину пути прошел со скоростью 80 км/ч, а вторую половину пути со скоростью 40 км/ч. Второй электровоз первую половину времени шел со скоростью 80 км/ч, а вторую половину времени — 40 км/ч. Какой из них затратил на путь больше времени и чему равны их средние скорости?

4. Лампа установлена в середине длинного вагона. Для того, чтобы включить или выключить ее, приходится пройти через весь вагон. Можно ли установить два выключателя (или переключателя) в начале и в конце вагона, чтобы свет можно было включить или выключить любым из них? Нарисуйте схему соедине-



ний лампы и выключателей.

5. Как в солнечный день определить высоту телеграфного столба с помощью одной линейки? На столб, конечно, влезать нельзя.

6. На каждом из трех путей стоят вперемешку вагоны с арбузами (А), бананами (Б) и виноградом (В) так, как это изображено на рисунке.

Опишите последовательность действий машиниста, необходимых для того,

чтобы сформировать на каждом из путей составы с одинаковыми плодами, если маневровый тепловоз (Т) может передвигать любое количество вагонов одновременно в любую сторону по любому пути. Попробуйте составить общую «инструкцию» действий машиниста, если число вагонов произвольное, используя любую краткую форму записи, которую сможете придумать.

Дополнительная задача. Если вы сами придумали полезное устройство, то опишите, для чего оно предназначено, как устроено и как его использовать. Ваше изобретение может заменить решение одной из предложенных задач. Его можно также послать в патентное бюро журнала «Юный техник».

Отвечая, указывая, решая!

Электрический злодей и волшебное колечко

1. Руку удерживают на проводе отнюдь не электрические силы. Проходя по мышцам руки, ток заставляет их сокращаться, и рука крепко «схватывает» провод. Электрики, работая с проводами, которые находятся (или могут оказаться) под напряжением, старются прикасаться к ним тыльной стороной руки. В этом случае сокращение мышц под действием тока, напротив, отбрасывает руку от провода.

2. Под воздействием нервного импульса некоторые особые клетки начинают пропускать через мембраны поток ионов (электрический ток). У электрической рыбы эти клетки соединены последовательно от головы до хвоста, и между головой и хвостом рыбы создается большая разность потенциалов (разность потенциалов в каждой клетке равна примерно 0,15 В). Множество таких последовательных цепочек электрических клеток соединяются параллельно. В результате возникает ток, достаточный для того, чтобы оглушить или убить жертву или врага. Например, у гигантского морского ската *Torpedo nobiliana* параллельно соединены 2000 таких цепочек, каждая из которых содержит около 1000 соединенных последовательно электрических клеток. При подобном последовательно-параллельном соединении через каж-

дую клетку течет слабый ток, а суммарный ток достаточно велик. У пресноводных электрических рыб последовательно соединяется большее число клеток, так как проводимость пресной воды значительно меньше, и чтобы рыба могла создать ток такой же величины, разность потенциалов между ее головой и хвостом должна быть значительно больше.

3. Когда два материала (скажем, подошвы туфель и ковер или кошачий мех и стеклянная палочка) соприкасаются, электроны из одного из них туннелируют через поверхностный энергетический барьер в другой. Если, например, стекло соприкасается с кошачьим мехом, электроны туннелируют с поверхности стекла на поверхность меха. Поскольку ни тот, ни другой из этих материалов не является хорошим проводником, электроны могут переходить с одной поверхности на другую лишь в тех точках, где материалы плотно соприкасаются. При трении одной поверхности о другую площадь контакта значительно возрастает, благодаря чему достигается переход большого числа электронов. Материал, который теряет электроны, заряжается положительно, материал, который принимает их, заряжается отрицательно.

4. Прибор необходимо отрегулировать так, чтобы вытекающие из трубок струйки разбивались на капли примерно на уровне верхних банок. Вначале, когда включают воду, одна банка имеет чуть больший отрицательный заряд, чем другая. Какая именно из банок имеет больший заряд, определяется чистой случайностью, так

как изначальный заряд банок обусловлен космическим излучением или естественной радиоактивностью. Допустим для определенности, что больший отрицательный заряд имеет нижняя левая банка. Тогда, поскольку банки крестнакрест соединены между проводниками, верхняя правая банка будет также иметь больший отрицательный заряд, чем верхняя левая. Правая струйка, проходя через верхнюю правую банку, поляризуется. Если капли образуются именно на уровне этой банки, то они заряжаются положительно, так как отрицательный заряд отталкивается отрицательно заряженной банкой вверх по струйке. Далее эти положительно заряженные капли падают в нижнюю правую банку, и ее положительный заряд возрастает. Несмотря на то что начальная разность потенциалов между банками ничтожна, в некоторых самодельных капельницах Кельвина удается получить разность потенциалов до 15 кВ.

5. Электризация проводочных изгородей, самолетов и других металлических объектов под действием быстро летящего снега также объясняется переносом электронов (см. задачу 3). Частицы снега отдают электроны металлическим предметам, и те приобретают отрицательный заряд.

6. По-видимому, происходит разделение зарядов при сматывании ленты с рулона. Липкий слой приобретает заряд, знак которого противоположен знаку заряда на чистой стороне ленты. Свечение — это электрический разряд между разделяемыми поверхностями клейкой ленты.

7. При просеивании сахарная пудра заряжается в результате процессов, аналогичных описанным в задачах 5 и 6. Поскольку падающие крупинки сахара имеют заряд одного знака, они отталкиваются друг от друга, и часть сахара отлетает вбок.

8. Влияние электрических зарядов на организм человека пока не получило достаточного объяснения.

9. Изменяющийся ток в катушке создает изменяющееся магнитное поле. Это поле возбуждает в кольце ток, магнитное поле которого направлено противоположно магнитному полю катушки. Магнитное поле катушки заставляет кольцо «парить» на катушке. Когда ток включают, резкий скачок тока в катушке возбуждает в кольце большой ток и соответственно большое магнитное поле. Из-за взаимодействия полей кольцо подпрыгивает.

10. Переменное магнитное поле возбуждает ток как в неподвижной медной пластинке, так и в диске. В отсутствие пластинки ток существовал бы только в диске и был бы направлен так, что его магнитное поле вызывало бы отталкивание всего диска от магнита. Однако, когда диск частично экранирован от магнита пластинкой, токи, индуцированные в диске и пластинке, вызывают их взаимное притяжение (магнитное поле одного проводника втягивает другой проводник с током), и диск приходит во вращение.

11. Переменное магнитное поле, создаваемое вращающимся магнитом, возбуждает в алюминиевом диске токи, которые в свою очередь

создают собственное магнитное поле. При взаимодействии этих магнитных полей возникает момент сил, действующих на диск, который заставляет диск вращаться в том же направлении, что и магнит.

12. Почему бы вам самим не построить этот простой прибор и не посмотреть, будет ли он работать? Если магнитное поле достаточно велико, чтобы втащить шарик на наклонную плоскость, то не окажется ли оно достаточно сильным и для того, чтобы не дать шарiku скатиться вниз по желобу?

Газовые законы и механическое равновесие

1. Шарик заполнен гелием.

$$2. x = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{\rho g L}{2\rho_0} \right).$$

$$3. x = H \frac{2\rho_0 + 3\rho g H}{4\rho_0 + 2\rho g H}.$$

«Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 7)

1. У торговца было 1480 фунтов.
2. Очевидно, что $P=2$, так как в противном случае число слева не будет трехзначным. Так как число TUH — полный квадрат, то H может принимать лишь значения 1, 4, 5, 6, 9. Но если двузначное число начинается с 4 или большей цифры, то его квадрат уже четырехзначное число. Итак, $H=1$. Осталось заметить, что квадрат числа оканчивается на 1 лишь в том случае, если само число оканчивается на 1 или 9, следовательно, $HE=19$, а $TUH=19^2=361$.

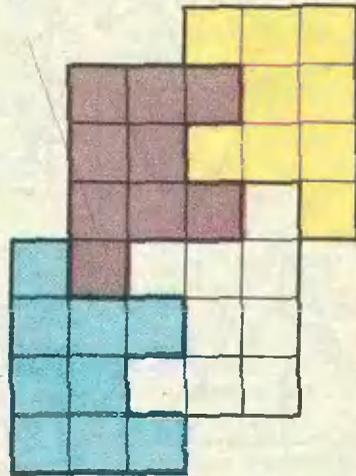


Рис. 1.

3. См. рис. 1.
4. Пусть $(10a+b)^2=100n^2+m^2$. Заметим, что $(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$, поэтому $n^2 \geq a^2$, но $(10a+b)^2 < (10a+10)^2=100(a+1)^2$, поэтому $n^2 < (a+1)^2$, следовательно, $n^2=a^2$. Далее, $a > 3$, но меньше, чем 5, так как $20ab$ меньше 100. Следовательно, $a=4$. Поскольку $20 \cdot 4 \cdot b < 100$, получаем, что $b=1$. Ответ: это число $41^2=1681$.
5. Рассмотрим рисунок 2. Треугольник AOB — равнобедренный прямоугольный, поэтому радиус двухлаптовой монеты равен радиусу одно-

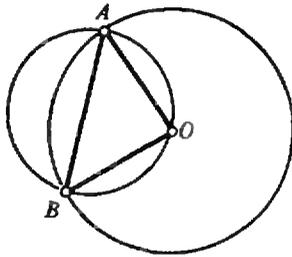


Рис. 2.

лаптевой монеты, умноженному на $\sqrt{2}$, а площадь большей монеты вдвое больше площади меньшей монеты. Чтобы веса этих монет были в отношении 1:2, толщина каждой монеты (в 1 и 2 лапты) должна быть одинаковой, т. е. равной 1 мм. То же рассуждение примените к паре монет в 2 и 4 лапты.

с. обложки
(см. «Квант» № 6)

1. См. рис. 3.
2. См. рис. 4.
3. См. рис. 5, 6.
4. См. рис. 7.

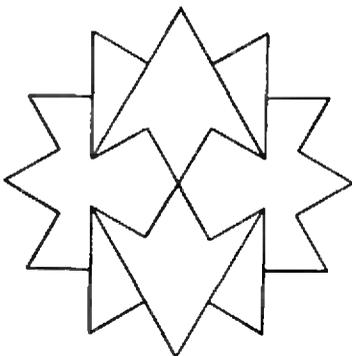


Рис. 3.

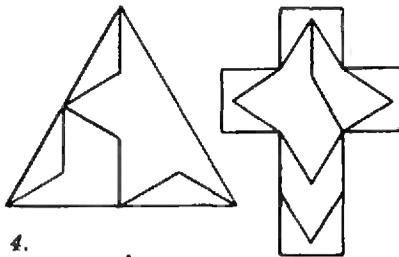


Рис. 4.

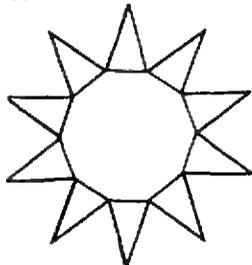


Рис. 5.

Рис. 7.

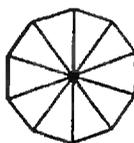


Рис. 6.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, Л. Стасенко,
С. Табачников, В. Уроев, А. Черноуцан,
А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал,
В. Можаяев, И. Новиков, В. Разумовский,
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев,
А. Серебров, Я. Смородицкий, И. Сурни,
Е. Сурков, В. Фабрикант, Л. Фаддеев,
В. Фирсов, Д. Фукс, И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, М. Делигова, А. Егоров, Л. Кардасьян,
И. Клумова, Т. Петрова, С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
Е. Барк, С. Иванов, Д. Крымов, С. Лукин, Э. Назаров,
И. Смирнова, П. Чернуцкий, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова
Корректор Н. Румянцева

108006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-88-54

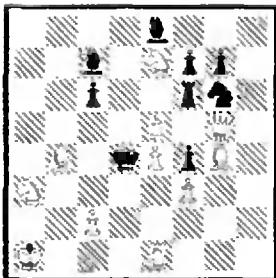
Сдано в набор 24.05.80. Подписано к печати 29.06.80.
Т-08812. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,92.
Тираж 184 350 экз. Заказ 947. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

•ОПРОВЕРЖЕНИЕ• ШУТКИ

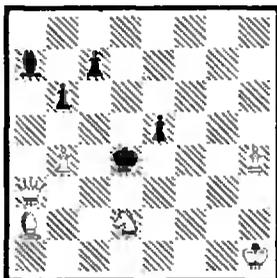
В «Кванте» № 6 за 1988 год мы рассказывали о том, как компьютеры опровергают шахматные задачи, находят в них побочные решения и другие дефекты. Вот еще два интересных примера на эту тему.



Л. Лошницкий, 1964 г.
Мат в 3 хода.

Перед нами задача гроссмейстера по композиции, завоевавшая первый раз на одном из конкурсов. После 1. Le2 создана угроза 2. Jld2+ Kpe3 3. Kc4X. Защита состоит во взятии слоном или конем на e5: 1...C:e5 2. Cd7 и грозит 3. Fg1X; если уходит слон с e5, то либо 3. Fe5X, либо (при 2...Cd6) 3. K:c6X. После 1...K:e5 2. Ce6 вновь грозит 3. Fg1X; если уходит конь с e5, то либо 3. Fe5X, либо (при 2...Kd7) 3. K:c6X (2...Jlg6 3. Kf5X, 2...Kd3 3. e3X).

Увы, компьютер нашел другое решение с прямолинейным вступлением 1. ef, но зато с эффектным вторым ходом — 1...Cd6 2. Fe5+!! C(K):e5 3. Kf5X; 2...Kp:e5 3. Cc3X. На 1...Cb6 следует 2. Kpb2l и 3. Cc3X (2...Ke5 3. Kf5X).

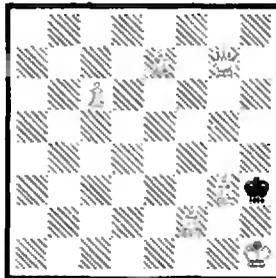


Л. Куббель, 1926 г.
Мат в 4 хода.

Эта задача принадлежит классике шахматной композиции. Авторское решение 1. b5 с угрозой 2. Ce6. 3. Kc4 и 4. Fe3X. Основной вариант: 1...e4 (1...c6 2. Kf1 e4 3. Fd6+ Krc3 4. Fd2X) 2. Cg8!! e3 3. Fb2+ Krc5 4. Ke4X, 3...Kpd3 4. Cc4X, 2...Kpe5 3. Fg3+ Kpd4 4. Kb3X.

Компьютер обнаружил совсем другое решение: 1. Fb3 c6 2. Kf1 (грозит 3. Fe3X) 2...e4 3. Fb2+ Kpd3 4. Fd2X, 2...Kpe4 3. Cb1+ Kpd4 (3...Kpf4 4. Fg3X) 4. Fd3X; 1...e4 2. Kb1! (грозит 3. Fe3X) 2...Kpe5 (2...e3 3. Fd5X) 3. Fg3+ Kpf6 4. Fg5X.

Опровержение этой серьезной задачи Куббеля напомнило мне одну интересную историю с «опровержением» его же шуточной задачи, правда, дело на сей раз обошлось без участия компьютера.



Л. Куббель.
Мат в 2 хода.

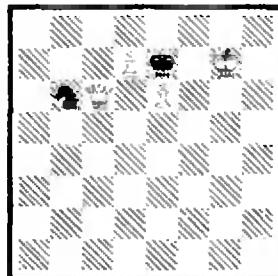
Одного черного короля заматовать в два хода невозможно, гораздо легче... двух! 1. e8Kp (черный!) Kpd8 2. Fd7X. Эффектный мат сразу двум королям.

Но раз шутки не запрещены, был придуман другой забавный способ выполнения задания: доска поворачивается на 90° против часовой стрелки и следует мат в один ход: 1. g7X. Последовало предложение исправить популярную шутку Куббеля, переставив пешку с f2 на h2. Теперь поворот доски на 90° не помогает. Однако, повернув доску еще на 90° (а всего на 180°), я обнаружил побочное решение и при пешке на h2: 1. Krb8! Кра5 2. a8Ф(Л)X.

Несколько лет назад я решил опубликовать эту задачу

а журнале «64 — Шахматное обозрение» и предложить читателям исправить ее. На призыв откликнулось множество шахматистов. Вот лучшее исправление, предложенное сразу 15-ю читателями: белый король ставится на место пешки f2, а пешка g3 заменяется слоном. Повороты теперь не опасны, и решение Куббеля строго единственное. К тому же в задаче сэкономлена целая фигура.

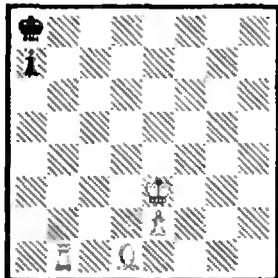
Автор следующей позиции вообще убрал все фигуры из этого угла.



Б. Полушкин.
Мат в 2 хода.

1. d8Kp(черный)!, и на любое отступление коня — 2. Fd7X.

А вот позиция, в которой используются обе шуточные темы.



А. Дыкусаров.
Мат в 2 хода.

Слон не может попасть на большую диагональ, поэтому одного короля в два хода не заматуешь. А двух? Сначала доска поворачивается на 180°, после чего решает 1. d8Kp (черный)! Krc8 2. Cc6X! Мат обоим королям, причем для реализации замысла вновь хватило шести фигур.

Может, кто-нибудь из читателей «Кванта» в часы досуга тоже придумает какие-нибудь забавные манипуляции с доской и фигурами!?

Е. Гук

45 коп.

Индекс 70485

Головоломка, которую вы здесь видите, вряд ли окажется для вас крепким орешком: требуется расставить 15 фишек пяти цветов в узлах треугольного поля так, чтобы ни на одной линии, параллельной его стороне, цвета не повторялись. Однако исследование этой головоломки для полей произвольного размера (n полей вдоль каждой стороны и, конечно, n цветов, $n=2, 3, \dots$) — уже вполне серьез-

ная задача. Очевидно, что головоломка неразрешима для $n=2$. Имеется по крайней мере еще одно «нехорошее» значение n . Найдите его. А вот задача посложнее: придумайте общий способ решения головоломки при нечетных n . Быть может, ваш способ окажется пригодным и для четных n ; нам общее решение для четного случая неизвестно.

Д. К.

