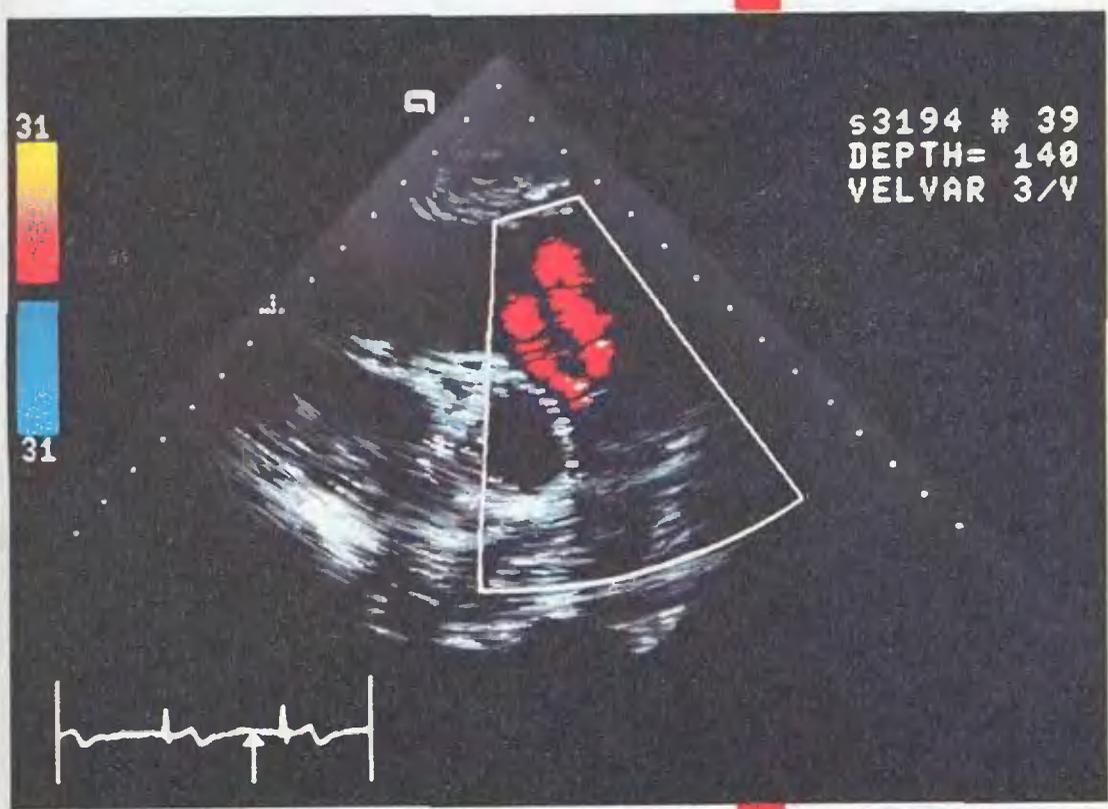


Квант

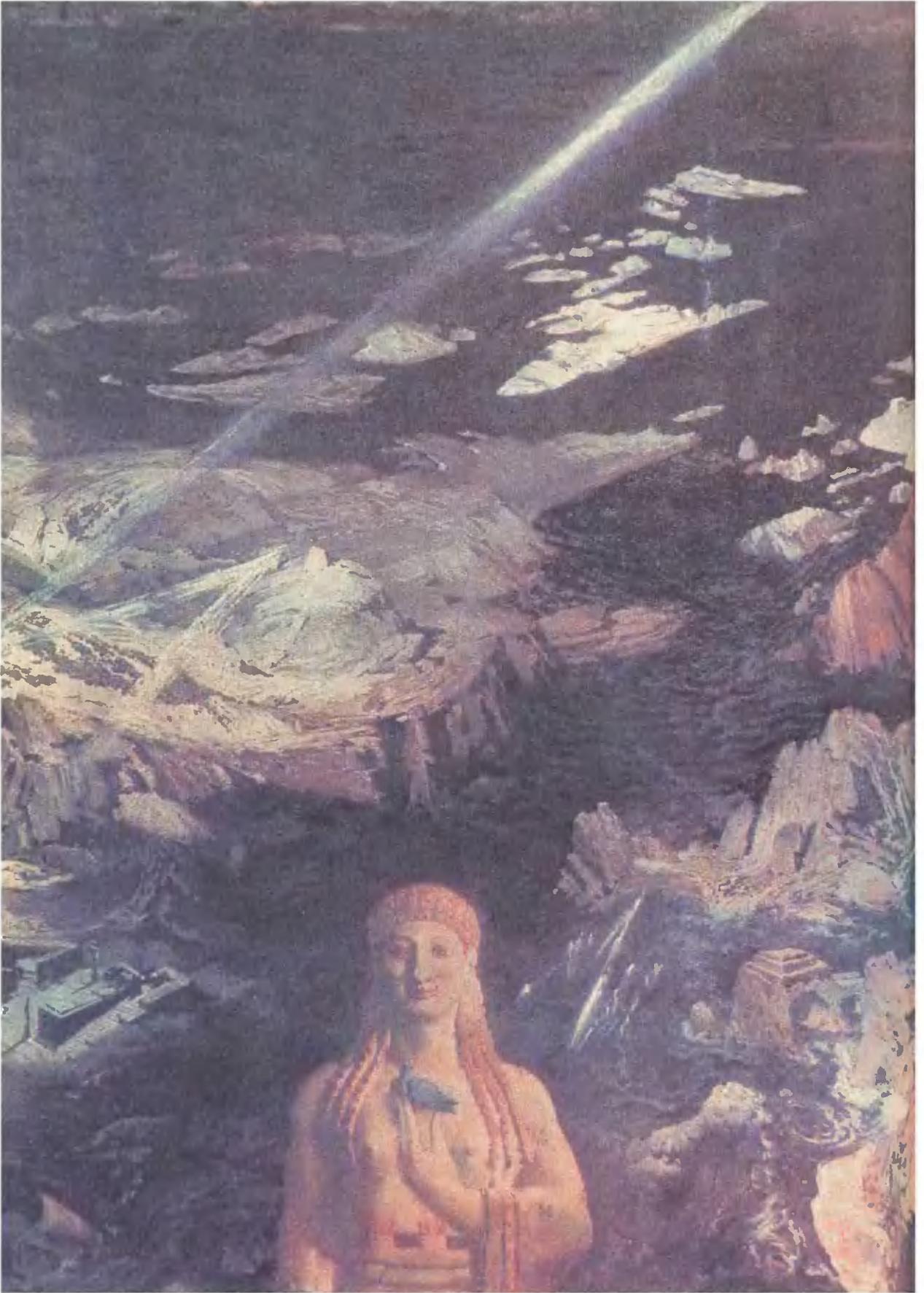
Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Ультразвук в медицине

1990



В номере:

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

- 2 П. Блюх. Со стороны виднее
8 А. Барг, С. Лицын. Что есть Фортуна,
17 Р. Морин, Р. Хобби. Ультразвук в медицине
- Задачник «Кванта»**
23 Задачи М1241 — М1245, Ф1248 — Ф1252
24 Решения задач М1216 — М1220, Ф1228 — Ф1232
- «Квант» для младших школьников**
35 Задачи
36 В. Бронштэн. Кто придумал «ночеврительную трубу»?
- 40 **Калейдоскоп «Кванта»**
- Школа в «Кванте»**
Физика 9, 10, 11:
42 Кинематика плоскопараллельного движения
44 Генератор незатухающих колебаний
47 Избранные школьные задачи по физике
48 Конкурс «Математика 6—8»
- Р — значит ракета**
50 К. Феоктистов. Полет к звездам
- Математический кружок**
58 С. Генкин, Л. Курляндчик. Числовые конструкции
- Практикум абитуриента**
62 А. Гольдман, Л. Завич. Числовые средние и геометрия
65 В. Шуликовская. Неравенство Коши и объемы
- Информация**
66 Памяти академика Колмогорова
- Игры и головоломки**
67 Движущиеся игрушки из картона и бумаги
69 Головоломка «цветной треугольник»
- Олимпиады**
70 Задачи LIII Московской математической олимпиады
71 Избранные задачи Московской олимпиады по физике
73 Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МГУ им. Н. Э. Баумана
- 74 **Ответы, указания, решения**
79 Анкета 9—90
«Квант» улыбается (20)
Нам пишут (22)
Смесь (16, 39)
Реклама (21, 49)
- Наша обложка**
1 «Изображение» сердца человека, полученное с помощью...
ультразвука (см. с. 17).
2 Репродукция картины русского живописца Л. Бакста
(1866—1924) «Древний ужас» (1908 г.). Что изобразил
художник — стихию, рушащийся мир? А может, в год
падения Тунгусского метеорита Бакст «увидел» путь
освоения Вселенной, который сегодня предлагает
К. Феоктистов (см. с. 50)?
3 Шахматная страничка.
4 Головоломка «ходом ладьи».

СО СТОРОНЫ ВИДНЕЕ

(Рассказ об РВО)

Доктор физико-математических наук
П. БЛИОХ

Взгляните на рисунок 1. Как четко видны на снимке береговая линия, река и детали рельефа местности. На вопрос: каковы были условия освещения во время фотографирования? — почти наверняка последует ответ: был ясный солнечный день, солнце находилось со стороны верхней части снимка, так как склоны гор, обращенные в ту сторону, освещены, а противоположные склоны погружены в тень.

Однако не будем торопиться. Обратите внимание: тени гор в верхней части снимка короче, чем в нижней. Значит, для объектов, запечатленных на верхней части снимка, солнце было ближе к зениту, чем для нижних. Но на участке местности в несколько де-

сятков километров (а судя по снимку масштаб примерно такой) земля освещается солнцем практически под одним и тем же углом. Следовательно, ответ по поводу условий освещения содержит какое-то противоречие.

Этого не произошло бы, если бы мы заранее предупредили, что на рисунке 1 приведена не фотография, а «радиофотография» — снимок, сделанный не в световых, а в радиолучах (с помощью радиоволн). Солнце, разумеется, тут вообще не при чем, а источником «освещения» является радиолокатор, установленный на самолете. Самолет пролетал где-то за верхней границей снимка, и углы падения радиоволн были тем круче (больше), чем выше (на снимке) на-

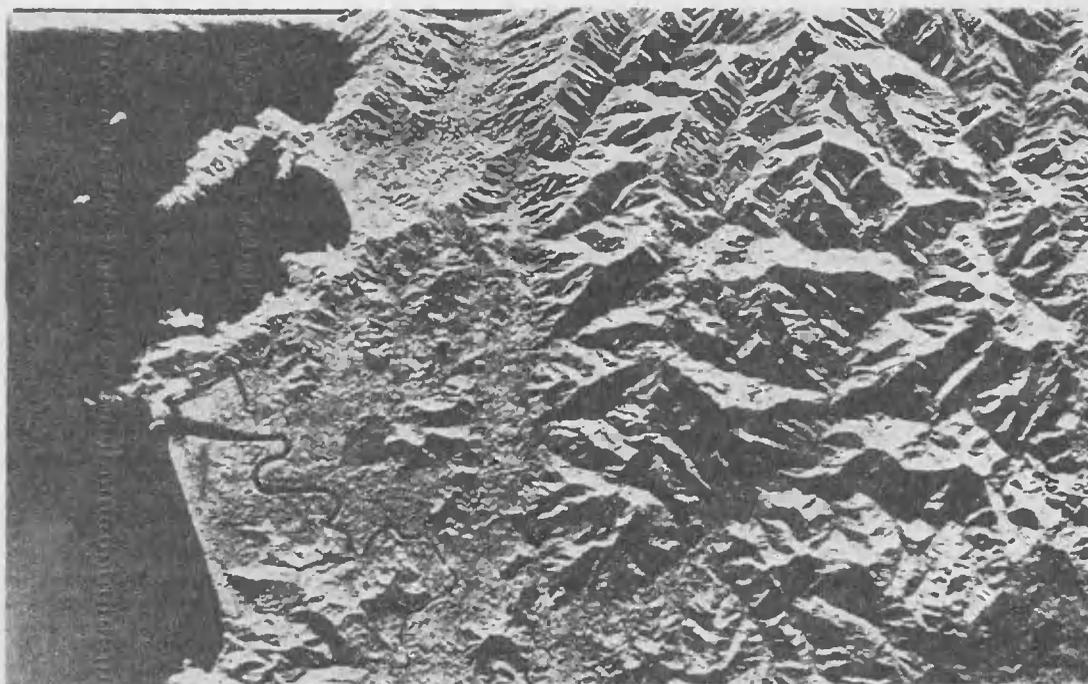


Рис. 1. Карта местности, снятая с самолета.

ходится участок местности. Поэтому «радиотени» горных склонов внизу длиннее, чем сверху. Каковы были погодные условия, когда делался «радиоснимок», совершенно не имеет значения. Могли быть ночь, туман, сплошная облачность. На качестве снимка это не отражается. А вот одно обстоятельство, казалось бы, совершенно не имеющее отношения к четкости изображения, на самом деле является чрезвычайно важным. Взгляните на рисунок 2 и обратите внимание, куда «смотрит» радиолокатор: антенна посылает радиоволны под углом 90° к линии пути. Именно это, как мы убедимся дальше, играет решающую роль. Настолько решающую, что таким радиолокаторам (они были изобретены сравнительно недавно, в 60-х годах) даже дано специальное название — радиолокаторы бокового обзора (РБО).

Почему хорошая «радиофотография» получается только «сбоку»? Для того чтобы ответить на этот вопрос, надо сначала разобраться, от чего зависит четкость изображения на экране обычного неподвижного радиолокатора.

Итак, пусть радиолокатор стоит на земле. Четкость изображения местности зависит от того, с какой точностью определяются координаты «целей» — отдельных деталей рельефа, от которых отражаются радиоволны. Координаты отражателей определяются следующим образом. Передатчик радиолокатора генерирует радиоволны короткими импульсами и антенна излучает их в определенном направлении. Радиопulses отражаются от какой-либо неровности на местности и возвращаются обратно к радиолокатору, в приемник. Зная время запаздывания — так называют время от испускания импульса передатчиком до приема отраженного импульса, т. е. время прохождения импульса до «цели» и обратно, — легко рассчитать расстояние до места отражения:

$$R = ct_{\text{зан}}/2, \quad (1)$$

где c — скорость распространения радиоволн ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с). Кроме рас-

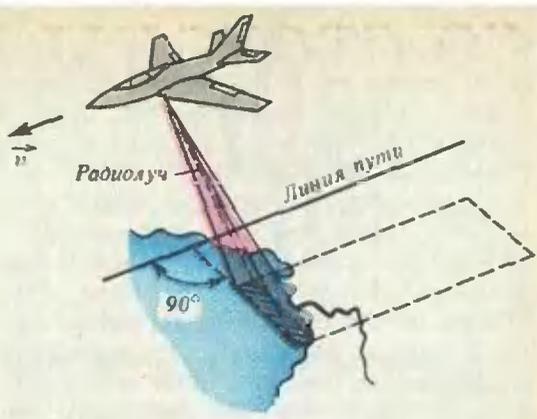


Рис. 2. Схема получения «радиокарты». Пунктиром выделен участок местности, изображенный на рисунке 1.

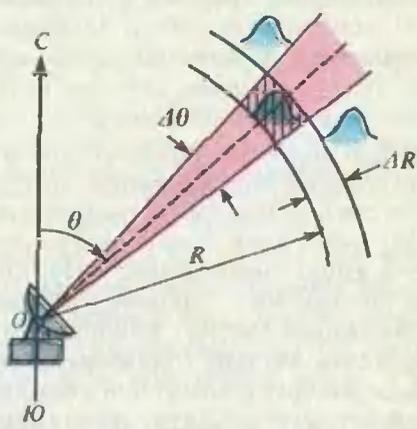


Рис. 3. Координаты «цели» (расстояние R и угол θ).

стояния R , надо знать еще и направление, откуда пришел отраженный сигнал. Оно определяется непосредственно по положению антенны: куда направлена антенна, там и находится объект, отразивший радиоволны (рис. 3).

Казалось бы, определив очень точно угол θ и расстояние R до каждого из отражателей, мы сможем построить четкую карту местности. Так оно и есть, но вся беда в том, что определить абсолютно точно R и θ не удается. Действительно, импульсы имеют определенную продолжительность, поэтому момент прихода отраженного сигнала фиксируется с некоторой погрешностью, которую будем обозначать Δt . Эта погрешность примерно равна длительности импульса. (Аналогич-

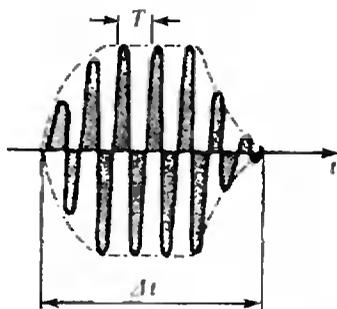


Рис. 4. Импульс радиоволн, излучаемых радиолокатором.

ная неточность возникает и в обычных часах за счет того, что их стрелки всегда имеют некоторую ширину.) Ошибка в определении времени запаздывания на Δt повлечет за собой, согласно (1), погрешность в расстоянии до «цели»

$$\Delta R = c \cdot \Delta t / 2. \quad (2)$$

Нечто подобное происходит и при определении направления. Когда говорят, что антенна излучает радиоволны под углом θ , то допускают существенную неточность. На самом деле излучение происходит всегда в некотором угле, который будем обозначать $\Delta\theta$. Это «размытие» радиолуча приводит к тому, что координата отражающего объекта, находящегося на расстоянии R от излучателя, «размывается» на $R \cdot \Delta\theta$. Заштрихованная на рисунке 3 площадка в виде криволинейного четырехугольника со сторонами ΔR и $R \cdot \Delta\theta$ как раз и определяет четкость «радиоснимка». Дело обстоит так, как будто бы мы взялись нарисовать карту местности с помощью толстой кисти. Ясно, что нам не удастся изобразить детали более тонкие, чем толщина кисти.

Теперь, когда установлены причины «размытия» радиоизображения, путь к повышению четкости становится вполне понятным: надо, насколько это возможно, сокращать длительность импульса Δt и ширину радиолуча $\Delta\theta$. Однако на этом пути мы встречаемся с очень серьезными физическими ограничениями.

Начнем с радиоимпульса (рис. 4). Он не сразу при включении передатчика достигает своей максимальной амплитуды и не мгновенно спадает

до нуля после выключения. Если попытаться сделать импульс очень коротким, он просто не успеет «дорасти» до максимума. Длительность импульса должна быть такой, чтобы за время его существования успело произойти достаточно много колебаний. Обозначим число их через N . Тогда можно записать $\Delta t = NT$, где T — период колебаний, и $\Delta R = NcT/2 = N\lambda/2$, где $\lambda = cT$ — это длина волны. Видно, что чем короче волна, тем меньше погрешность ΔR . Численную оценку можно сделать только зная, чему равно N . Обычно оно не бывает меньше нескольких десятков или даже сотен. Положим для определенности $N = 200$. Тогда $\Delta R \approx 100\lambda$. Если радиолокатор работает на волне $\lambda = 10$ см, точность определения расстояния составит 10 м, что в большинстве случаев вполне достаточно.

Значительно более сложной оказывается проблема сужения радиолуча. Чтобы понять, от чего зависит $\Delta\theta$, рассмотрим схематически работу антенны при излучении радиоволн. На рисунке 5, а показано, как распространяются радиоволны от отдельных элементов 1, 2, 3, ... антенного раскрыва в направлении оси антенны (ось x на рисунке). Видно, что волны от всех точек антенного раскрыва имеют одну и ту же фазу. Поэтому они все складываются, создавая результирующую волну вдоль оси x .

Попробуем повторить те же рассуждения, но рассматривая излучение не вдоль оси x , а в направлении x' под углом $\Delta\theta$ к оси антенны (рис. 5, б). На самой антенне колебания по-прежнему остаются синфазными, но на некотором расстоянии от нее для волн от разных точек возникает разность фаз за счет отличия в длинах путей. Видно, что в точках 1' и 5 фазы отличаются друг от друга на λ , т. е. волны, идущие от нижней и верхней частей антенны в направлении x' , будут гасить друг друга. Нетрудно определить, как связан угол $\Delta\theta$, под которым произойдет полное взаимное гашение, с размером антенны и длиной излучаемых волн: $\sin \Delta\theta = \lambda/2a$ (a — диаметр антенны), или, поскольку при малых углах $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$,

$$\Delta\theta \approx \frac{1}{2} \frac{\lambda}{a}. \quad (3)$$

Конечно, наши рассуждения не являются вполне строгими — ведь мы рассмотрели разность хода только для краевых волн в одном сечении антенны. Однако зависимость $\Delta\theta$ от λ и a получилась совершенно правильной, и в ней проявляется очень важное свойство любого волнового процесса (не только радиоволн): концентрация излучения в определенном направлении происходит тем эффективнее, чем больше размеры излучающей системы и меньше длина волны.

Попробуем оценить, какая потребуется антенна, чтобы на длине волны $\lambda = 10$ см получить радиоизображение объекта, находящегося на расстоянии $R = 100$ км, с разрешением $\rho = 10$ м. Иными словами, мы хотим получить такое изображение, на котором координаты объекта определены с точностью до 10 м, т. е. $\Delta R = R \cdot \Delta\theta = \rho$. Из формулы (3) находим: $a \approx \lambda / (2\Delta\theta)$, следовательно,

$$a \approx \frac{\lambda R}{2\rho} = 0,5 \text{ км.}$$

(Отметим еще, что заданное разрешение определяет и максимальную длительность импульса (см. (2)): $\Delta t = 2\Delta R / c \approx 0,66 \cdot 10^{-7}$ с.)

Итак, для получения радиокарты с разрешением ~ 10 м на волне $\lambda = 10$ см требуется антенна диаметром 0,5 км! Если даже мы снизим требования к четкости и будем считать допустимым размытие ~ 100 м, все равно размеры антенны ($a \approx 50$ м) оказы-

ваются столь большими, что об установке ее на самолете не может быть и речи. Но четкие радиокарты с самолета и спутника все же получаются (см. рис. 1)! Как же удалось преодолеть такие серьезные трудности?

Тут самое время вспомнить, что мы рассмотрели пока работу неподвижного радиолокатора, а ведь самолет все время движется, или, что то же, предметы, отражающие радиоволны, движутся относительно радиолокатора. Оказывается, при отражении от движущегося препятствия с радиоволной происходят очень важные изменения, которые и удалось использовать для получения четких «радиоснимков».

Итак, нам надлежит рассмотреть, как отражаются радиоволны от движущегося предмета. Прежде всего вспомним математическое выражение для синусоидальных колебаний:

$$E = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (4)$$

Поскольку речь идет об излучении радиолокатора, здесь буквой E обозначена напряженность электрического поля, A — амплитуда, ω — круговая частота, φ — начальная фаза колебаний.

Сигнал, отраженный от какого-либо препятствия на расстоянии R от радиолокатора, проходит путь туда и обратно за время $t = 2R/c$. Поэтому для математического описания отраженного сигнала надо заменить в формуле (4) время t на $t - 2R/c$ (таким образом мы учтем запаздывание отраженного сигнала относительно исходного излучения). Амплитуда сигнала

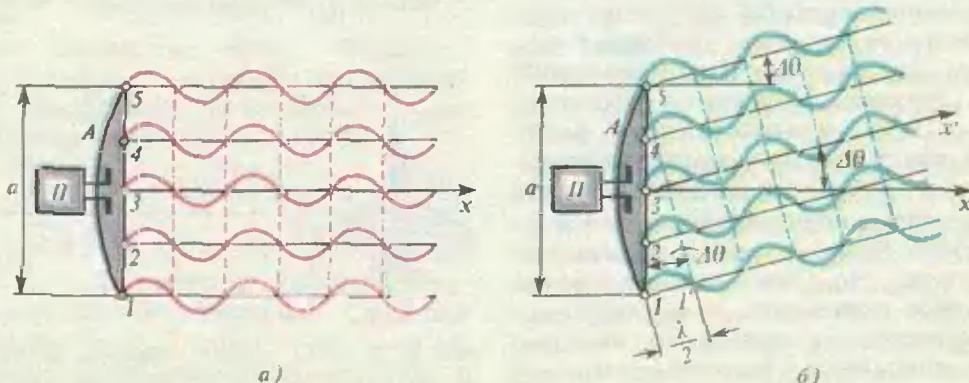


Рис. 5. Излучение радиоволн антенной радиолокатора.

при отражении, естественно, уменьшается (степень этого изменения зависит от свойств отражателя). Поэтому для отраженной волны мы можем записать

$$E_{\text{отр}} = A_{\text{отр}} \sin(\omega(t - 2R/c) + \varphi) = A_{\text{отр}} \sin(\omega t + (\varphi - 2R\omega/c)).$$

Видно, что в отраженном сигнале строго определенным образом изменилась и фаза (φ заменяется на $\varphi - 2\omega R/c$). Однако этот вывод не годится для самолетного радиолокатора, так как расстояния от летящего самолета до объектов на местности все время меняются. При равномерном движении вдоль радиолуча $R_t = R_0 \pm vt$, где R_0 — начальное расстояние (при $t=0$), а v — скорость самолета (знак $\leftarrow \rightarrow$ соответствует приближению к объекту, а $\leftarrow + \rightarrow$ — удалению от него). Теперь отраженный сигнал записывается так:

$$E_{\text{отр}} = A_{\text{отр}} \sin\left(\omega\left(t - 2\frac{R_0 \pm vt}{c}\right) + \varphi\right).$$

Упростим эту формулу, введя следующие обозначения:

$$\omega' = \omega(1 \mp 2v/c), \quad \varphi' = \varphi - 2R_0/c.$$

Тогда

$$E_{\text{отр}} = A_{\text{отр}} \sin(\omega' t + \varphi').$$

Сравнив это выражение с (4), замечаем, что по сравнению с исходным сигналом у отраженного сигнала изменились амплитуда, частота и фаза. Чрезвычайно важным является изменение частоты, которое можно очень точно зарегистрировать с помощью специальных устройств — частотомеров.

Изменение частоты излучения при движении отражателя называют эффектом Доплера (по имени австрийского физика Христиана Доплера (1803—1853), исследовавшего влияние движения на волновые процессы). Заметим, что если вместо радиолокационных отражений рассмотреть распространение волны в одном направлении, то при относительном движении приемника и передатчика со скоростью v , изменения частоты будут описываться выражением $\omega' = \omega(1 \mp v/c)$, которое обычно при-

водится в учебниках ($\leftarrow \rightarrow$ — удаление, $\leftarrow + \rightarrow$ — приближение). Замена v на $2v$ в нашей формуле объясняется тем, что мы рассматриваем отражение сигнала, а длина пути туда — обратно изменяется вдвое быстрее.

Сформулируем в качестве итога наших рассуждений ту главную особенность, которая отличает движущийся самолетный радиолокатор от наземного. За счет эффекта Доплера частоты сигналов, отраженных от местных предметов, будут разные: отражения, приходящие спереди по курсу самолета, имеют повышенную частоту ($\omega' > \omega$, знак $\leftarrow + \rightarrow$ в формуле для ω'), а приходящие сзади — пониженную ($\omega' < \omega$, знак $\leftarrow \rightarrow$ в формуле для ω'). Что же касается отражений, приходящих точно сбоку (под углом 90° к курсу самолета), их частота не меняется и совпадает с исходной частотой ($\omega' = \omega$). Поэтому, измеряя частоту отраженного сигнала ω' , можно узнать, в каком направлении находится отражающий объект. Несложный математический расчет покажет, что за счет эффекта Доплера направление определяется с очень высокой точностью. Эти возможности реализуются в радиолокаторе бокового обзора.

Взгляните на рисунок 6, на котором изображены самолет и отражающий объект в какой-то момент времени. Отражатель в точке P расположен под углом $\Delta\theta$ к оси x , которая совпадает с осью антенны и перпендикулярна курсу самолета. Если самолет движется со скоростью v вверх на рисунке, то скорость отражателя P относительно самолета равна $-v$ и на-

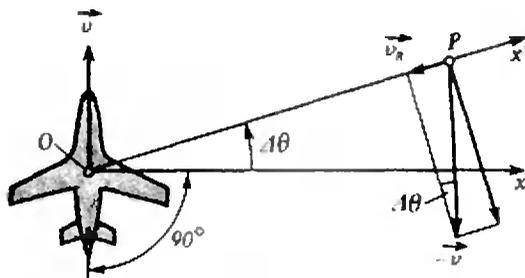


Рис. 6. Во время пролета самолета расстояние от антенны (точка O) до отражающего предмета (точка P) изменяется со скоростью v_R .

правлена вниз. Изменения расстояния между точками O и P определяются проекцией скорости $-\vec{v}$ на линию OP . Эта проекция (мы будем обозначать ее v_R) равна $v_R \approx -v \sin \Delta\theta$, а при малых углах $\Delta\theta$, для которых $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$, $v_R \approx -v \cdot \Delta\theta$. За счет этой скорости частота отраженного сигнала возрастет: соответствующее изменение частоты будет равно

$$\Delta\omega = \omega' - \omega \approx \frac{2\omega v \cdot \Delta\theta}{c}.$$

Измерив $\Delta\omega$ с помощью частотомера, сразу же определим $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta \approx c \cdot \Delta\omega / (2\omega v). \quad (5)$$

Направленные свойства самой антенны здесь совсем не играют роли, следовательно, антенны больших размеров, о чем говорилось ранее, нам не понадобятся. Казалось бы, вообще нет ограничений на точность определения угла. Надо только очень точно измерить ω' и соответствующую разность частот $\Delta\omega$. Однако тут-то и спрятались «подводные камни». Дело в том, что для измерения частоты колебаний требуется определенное время. Действительно, по значению сигнала в какой-нибудь один момент времени судить о его частоте вообще нельзя. Надо проследить за изменениями сигнала по крайней мере за один период, а еще лучше — в течение нескольких периодов. Существует универсальный закон: погрешность в определении частоты $\Delta\omega$ обратно пропорциональна времени измерения Δt и равна $\Delta\omega \approx 2\pi / \Delta t$. Подставив это соотношение в формулу (5), получим

$$\Delta\theta \approx 2\pi c / (2\omega v \cdot \Delta t).$$

Далее вспомним, что $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$ (f — частота, T — период колебаний), а $cT = \lambda$. Поэтому выражение (5) для $\Delta\theta$ можно переписать так:

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{2v \cdot \Delta t} = \frac{\lambda}{2L}, \quad (6)$$

где $L = v \cdot \Delta t$ — путь, пройденный самолетом за время измерения частоты отраженного сигнала. Сравните формулы (3) и (6): они очень похожи, только вместо размеров антенны a стоит отрезок пути самолета L . Можно

сказать, что в РБО создается эффективная антенна, совпадающая с траекторией самолета. Отсюда еще одно название РБО, которое часто используется в литературе, — радиолокатор с синтезированной антенной.

Вернемся к нашему исходному примеру. Ранее мы пришли к выводу, что для получения радиокарты на волне $\lambda = 10$ см с погрешностью, не превышающей 10 м, требуется неподвижная антенна размером $a \approx 500$ м. Однако для самолета, летящего со скоростью $v \approx 300$ м/с, соответствующая точность будет достигнута, если на обработку сигнала затратить время $\Delta t \approx 1,7$ с ($L = v \cdot \Delta t \approx 500$ м). Это не очень большое время, и «радиоснимок» можно получить практически сразу при пролете самолета. Именно таким образом и сделана та четкая «радиофотография» которую мы привели на рисунке 1.

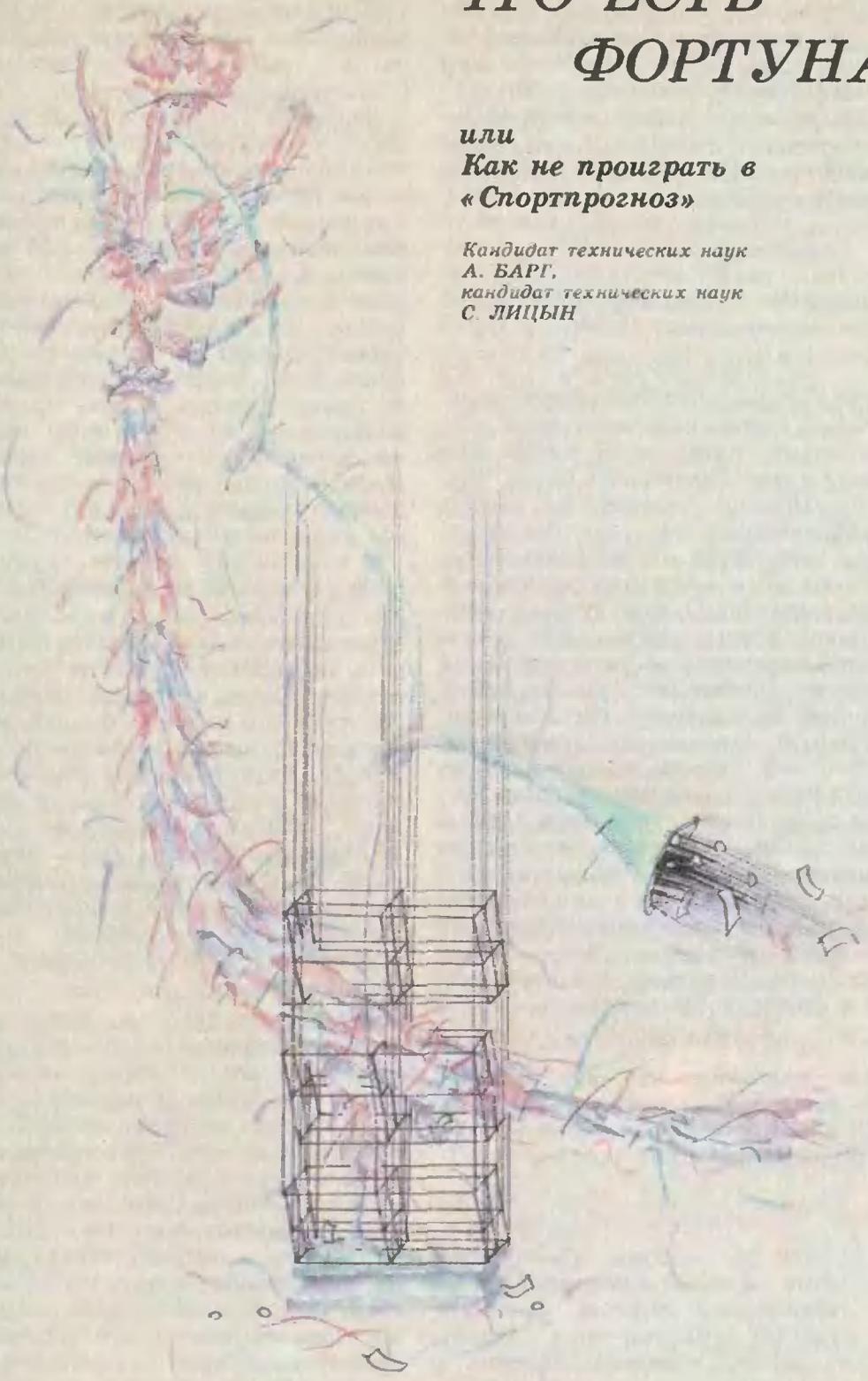
В заключение немного пофантазируем о возможностях применения РБО для радиолокации космических тел. В этом случае нет необходимости ставить радиолокатор на самолет или на спутник. Ведь наземный радиолокатор движется вместе с Землей, участвуя и во вращении Земли вокруг своей оси (для этого движения характерные скорости в средних широтах составляют ~ 300 м/с), и во вращении Земли вокруг Солнца (здесь скорость ~ 30 км/с). Более того, для очень удаленных объектов надо учитывать движение самого Солнца, которое происходит с еще большими скоростями.

Все эти сложные движения позволяют синтезировать антенны огромных размеров и определять очень точно углы прихода радиоволн. Быть может, самое интересное в описанных «фантазиях» то, что они уже реализованы, и эффект Доплера используется в космической радиолокации и радиоастрономии в полной мере. Более того, фактически первый РБО заработал во время радиолокации Луны в 1960 году. Самолетные же РБО появились несколько позже, а для радиокартографирования местности стали применяться только в 70-х годах.

ЧТО ЕСТЬ ФОРТУНА,

или
**Как не проиграть в
«Спортпрогноз»**

Кандидат технических наук
А. БАРИ,
кандидат технических наук
С. ЛИЦЫН



*Учитель таин заповедных!
Что есть Фортуна, счастье всех племен
Держащая в когтях своих победных?*
Данте. Божественная комедия.
Ад. VII. 67—69

Школьный фольклор содержит историю о человеке, который с помощью ЭВМ разработал систему для игры «Спортлото» и выиграл целое состояние. Этого человека никто не видел, да и вряд ли он существует, так как заведомо выигрышной стратегии для этой игры нет. Иными словами, нельзя указать такой способ игры, при котором выигранная сумма будет всегда больше потраченных на покупку карточек денег. Не являются исключением и предлагаемые нами стратегии. Тем не менее, со «Спортлото» и другими сходными играми связано множество интересных математических задач. О некоторых из них мы и расскажем.

Как правило, со «Спортлото» и «Спортпрогнозом» связывают задачи подсчета вероятности угадывания некоторого количества верных номеров (результатов). Мы не будем возвращаться к этим хорошо известным вопросам, а лишь скажем, что вероятность угадывания шести номеров из сорока девяти*) $p(49,6) \approx 7 \cdot 10^{-8}$; в тех же обозначениях $p(49,5) \approx 2 \cdot 10^{-5}$, $p(49,4) \approx 10^{-3}$, $p(36,5) \approx 3 \cdot 10^{-6}$ (вы можете доказать это самостоятельно).

Правила игры

В «Спортпрогноз» играют следующим образом. Из календаря спортивных соревнований выбираются 13 матчей, исход которых, по мнению организаторов лотереи, трудно предсказуем. Игрок должен сделать прогноз результатов этих матчей, ставя в каждой из 13 клеточек таблицы знак «1», если он считает, что победит команда хозяев, «2» — команда гостей и «0» в случае ничьей. После того как результаты матчей станут известны, определяют выигравшие

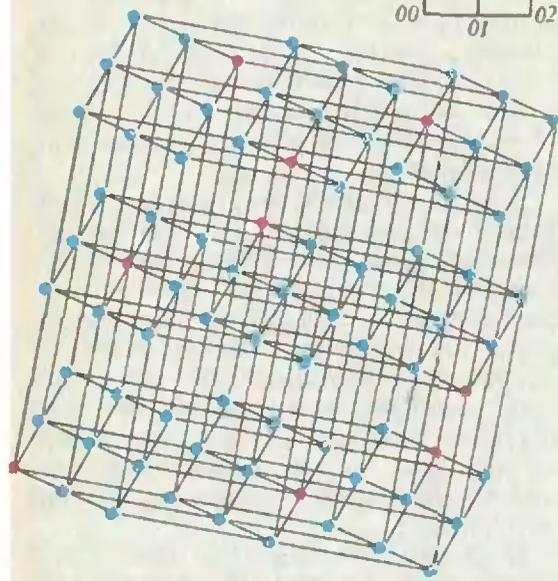
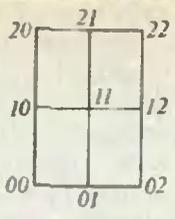
карточки. Премии делятся между угадавшими не меньше 11 результатов и растут с увеличением числа верных предсказаний в карточке. Каждый прогноз будем представлять 13-мерным вектором (т. е. строкой из 13 цифр) с компонентами 0, 1 и 2. Например, вектор $x = (1, 1, 0, 2, 2, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 2)$ отвечает выигрышу гостей в 4, 5, 7 и 13 матчах, хозяев — в 1, 2, 6, 11 и 12 матчах и ничьим — в остальных встречах.

В игре «Спортлото» требуется угадать 6 из 49 или 5 из 36 номеров. Выигравшими считаются карточки, в которых указано не менее 3 из выпавших в результате случайного розыгрыша номеров. Прогноз в этом случае можно описать 49- (36-) мерным вектором, содержащим «0» в 43 (31) позициях и «1» в 6 (5) оставшихся позициях. Номера единичных позиций соответствуют предсказываемым номерам.

В каждом из тиражей один игрок может предложить несколько вариантов прогноза. Назовем набор этих вариантов l -системой, если независимо от исхода тиража среди них найдется хотя бы один, в котором верно угаданы не менее l результатов. Для нас интерес представляют только l -системы с $11 \leq l \leq 13$ для «Спортпрогноза» и с $3 \leq l \leq 6$ (5) для «Спортлото». Очевидные примеры l -систем с максимальным l получаются при заполнении всех возможных вариантов прогноза. Эти системы не очень интересны хотя бы потому, что количество заполняемых при этом карточек «Спортпрогноза» равно 1 594 323, т. е. нужно затратить около полутора миллиона рублей и около двух лет непрерывной (по полминуты на карточку) работы. Для «Спортлото» соответствующие числа еще больше. Плохо и то, что, даже справившись с заполнением, нельзя быть уверенным в том, что сумма выигрыша превзойдет сделанные затраты. Для меньших l мы будем стараться придумать такие системы, в которых общее число вариантов было бы как можно меньше.

Итак, если вы играете по системе, то хотя бы один из ваших прогнозов

*) Сейчас в карточке «Спортлото» 45 номеров. Когда авторы были моложе и увлекались «Спортлото», карточка содержала 49 номеров.



Структура пространства E_3^2 . На верхнем рисунке показаны 9 точек пространства E_3^2 , пронумерованные числами от 0 до 8 в троичной системе счисления. Ребра соединены точки, «троичные» номера которых отличаются друг от друга ровно в одном символе (точки находятся на расстоянии 1). E_3^1 получается из E_3^2 заменой каждой точки на 9 точек пространства E_3^1 ; различные пространства также нумеруются «троичными» числами от 0 до 8. Пронумеруем точки в каждом из этих пространств так же, как на верхнем рисунке. Тогда «троичный» номер каждой точки из E_3^1 получается приписыванием номера точки к номеру того пространства E_3^2 , в котором она лежит. На рисунке отмечены девять точек, принадлежащих линейной системе C_0^- .

обязательно окажется достаточно верным. При этом количество купленных карточек будет не очень велико.

«Спортпрогноз» на 4 матча

Нам будет проще объяснить идею построения l -систем на примере игры в «Спортпрогноз-4», в которой предлагается угадать результаты лишь четырех матчей. Обозначим множество всех 4-мерных векторов из трех символов — нулей, единиц и двоек — через E_3^4 . Размер 4-системы при этом

равен числу элементов множества E_3^4 (=81). Случай 3-системы уже заставляет задуматься. Наша задача сводится к выбору из E_3^4 такого подмножества C из минимального количества векторов, что для любого вектора $e \in E_3^4$ в C можно указать хотя бы один вектор c , отличающийся от e не более, чем в одной позиции.

О п р е д е л е н и е. Расстоянием Хэмминга между векторами a и b называется количество различающихся компонент этих векторов.

Например, расстояние между векторами $a=(0,1,2,0)$ и $b=(0,2,0,0)$ равно $d(a, b)=2$.

У п р а ж н е н и е 1. Проверьте, что расстояние Хэмминга удовлетворяет неравенству треугольника

$$d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c).$$

Рассмотрим следующую систему C_0 : $(0,0,0,0)$; $(1,0,1,1)$; $(2,0,2,2)$; $(0,1,1,2)$; $(0,2,2,1)$; $(1,1,2,0)$; $(2,1,0,1)$; $(1,2,0,2)$; $(2,2,1,0)$.

Докажем, что C_0 является 3-системой. Прямая проверка показывает, что расстояние между любой парой векторов из C_0 равно 3. В силу неравенства треугольника для расстояния Хэмминга не существует вектора $e \in E_3^4$, находящегося на расстоянии 1 одновременно от двух векторов a и b из C_0 (иначе $d(a, b)=2$). Множество векторов из E_3^4 , находящихся на расстоянии ≤ 1 от любого вектора из C_0 , содержит 9 элементов (докажите!). Поскольку эти множества не пересекаются, их объединение содержит $9 \cdot 9=81$ вектор. Но в E_3^4 всего 81 вектор! Значит, любой вектор из E_3^4 принадлежит одному из таких множеств, что и требовалось доказать.

П р и м е р 1. Вектор $(2,1,2,1)$ принадлежит множеству векторов, находящихся на расстоянии ≤ 1 от вектора $(2,1,0,1) \in C_0$.

Итак, построена 3-система игры в мини-«Спортпрогноз». Эта система замечательна тем, что любой вектор из E_3^4 находится на расстоянии ≤ 1 только от одного вектора из C_0 (в общем случае это может и не выполняться, а в большинстве случаев и не может выполняться). Системы с таким свойством называются совершенными. Мы к ним еще вернемся.

Операции по модулю 3 и l -системы

Построенная в предыдущем параграфе 3-система обладает еще рядом красивых свойств (открытых в 40-х годах американским ученым Ричардом Хэммингом), для объяснения которых потребуется небольшое отступление.

Мы имеем дело с векторами, компоненты которых могут принимать значения из множества $Z_3 = \{0, 1, 2\}$. Элементы Z_3 можно складывать и умножать так, что в результате будет снова получаться элемент из этого же множества. Для этого достаточно, выполнив обычное сложение или умножение, найти остаток от деления полученного результата на 3 (как говорят, привести его по модулю 3). Например, $5 \equiv 2 \pmod{3}$, $-2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Используя эти операции, можно определить сложение троичных векторов. Назовем суммой векторов a и b вектор c , каждая координата которого является суммой по модулю 3 соответствующих координат векторов a и b . Например, $(0, 1, 1, 2) + (1, 2, 1, 1) = (1, 0, 2, 0)$. Определим произведение вектора на троичное число $v \in Z_3$ как вектор, координаты которого получены умножением координат вектора на v по модулю 3. Например, $2 \cdot (1, 0, 2, 2) = (2, 0, 1, 1)$. В математике такие совокупности векторов с определенными на них операциями сложения и умножения на число называются *векторными пространствами*.

Упражнение 2. Проверьте, что введенная в предыдущем параграфе 3-система C_0 обладает следующими свойствами: для любых вектора $a \in C_0$ и константы $v \in Z_3$ произведение va также принадлежит C_0 ; для любых двух векторов $a, b \in C_0$ их сумма — тоже вектор из C_0 . Такие системы называются *линейными*.

Операции по модулю 3 позволяют дать краткое описание 3-системы C_0 . Во-первых, заметим, что первые две координаты (x_1, x_2) векторов из C_0 могут быть любой парой троичных чисел. Назовем эту пару троичным номером вектора. Значения двух оставшихся координат x_3 и x_4 можно вычислить по следующему правилу (действия по модулю 3):

$$x_3 = x_1 + x_2, \quad x_4 = x_1 + 2x_2 \quad (1)$$

(проверьте!).

Упражнения

3. Можно ли в качестве номера выбрать другие координаты вектора? Какой вид будет тогда иметь правило (1)?

4. Покажите, что если к всем векторам системы C_0 добавить произвольный (один и тот же) вектор, то ее свойства как l -системы не изменятся.

5. Воспользовавшись результатом упражнения 4, покажите, что в систему C_0 можно включить любой наперед заданный вектор (прогноз, кажущийся вам наиболее правдоподобным).

Предположим, что вы заполнили карточки в соответствии с системой C_0 . В утренней газете опубликованы результаты матчей, включенных в тираж (вектор y). Как быстрее найти выигравшую карточку (то, что она есть, следует из свойств системы)? Очевидный, но иногда далеко не лучший способ — сравнить результаты тиража со всеми заполненными карточками и найти наименее отличающуюся.

Для описания более быстрого способа перепишем уравнения (1) в эквивалентном виде:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \quad x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0. \quad (2)$$

Наш способ будет основан на том, что координаты каждого вектора системы C_0 удовлетворяют уравнениям (2). Если y удовлетворяет (2), он принадлежит системе C_0 , и соответствующая ему карточка может быть найдена по ее троичному номеру. В противном случае y отличается от какого-нибудь вектора $c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in C_0$ в одной координате. Пусть ее номер равен j . Найдем $S_1 = y_1 + y_2 + 2y_3$ и $S_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_4$.

Упражнение 6. Покажите, что выигравшую карточку c можно найти следующим образом:

а) если $S_1 = 0$ и $S_2 \neq 0$, то $j = 4$; если $S_2 = 0$ и $S_1 \neq 0$, то $j = 3$ (в обоих случаях $c_j = y_j + S_i$, где $i = 1$ или 2 — индекс отличного от нуля S_i);

б) если $S_1 \neq 0$ и $S_2 \neq 0$, то при $S_1 S_2 = 1$ $j = 1$, а $c_1 = y_1 + 2S_i$ (i — любое). При $S_1 S_2 = 2$ $j = 2$, а $c_2 = y_2 + 2S_i = y_2 + S_2$.

Продолжение примера 1. Воспользуемся предыдущим упражнением для определения ближайшей карточки, если результаты матчей представлены вектором $y = (2, 1, 2, 1)$. Тогда $S_1 = 1$, $S_2 = 0$. Обращаясь к случаю а), получаем $j = 3$, а $c_3 = y_3 +$

$+S_1=0$. Вновь найден вектор $c=(2,1,0,1) \in C_0$, находящийся от y на расстоянии 1.

Для «Спортпрогноза» на 4 матча этот способ определения выигравшей карточки выглядит (и является) чересчур громоздким, особенно в сравнении с простым перебором всех девяти карточек системы. Его преимущества выяснятся ниже.

Отметим еще одно применение описанной системы. Пусть, заполняя карточку большого «Спортпрогноза», вы полагаете, что точно знаете результаты 9 из 13 матчей. Вам хотелось бы знать наверняка, что в прогнозе исходов остальных четырех матчей вы ошибетесь не более, чем однажды. Тогда следует заполнить 9 карточек с фиксированной комбинацией на известных 9 позициях и всеми векторами 3-системы C_3 на оставшихся четырех позициях.

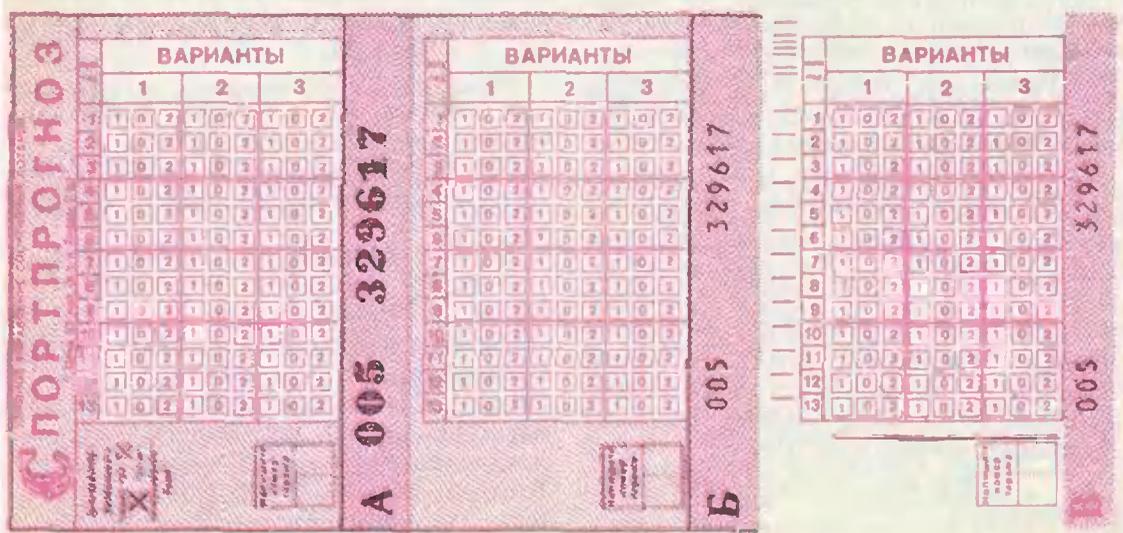
Коды, исправляющие ошибки

Не следует думать, что t -системы изобретены и изучались для получения крупных выигрышей в лотерею — у математиков есть и более интересные занятия. Оказывается, очень похожие конструкции появляются, например, в теории передачи сообщений. Представим себе, что по линии связи

с помехами требуется передать вектор из k букв, каждая буква которого может принимать одно из q значений (для сообщений на русском языке $q=34$ — буквы алфавита и пробелы между словами). Будем считать, что непосредственная передача с большой вероятностью исказит хотя бы одну букву сообщения, поэтому хотелось бы иметь способ исправления ошибок после приема.

Поступим следующим образом. Добавим к передаваемому вектору несколько букв, зависящих от букв исходного сообщения. Такой набор расширенных сообщений назовем кодом, а число букв в расширенном сообщении (кодированном векторе) обозначим через n и назовем длиной кода. Если при передаче кодированного вектора в канале связи произошло искажение t букв, то принятый вектор находится на расстоянии Хэмминга t от переданного вектора. По принятому вектору требуется однозначно восстановить переданный вектор. Для этого код должен удовлетворять определенным свойствам.

Утверждение. Код C исправляет любые t или менее ошибок, если множества векторов из E_n^t , находящихся на расстоянии $\leq t$ от кодовых векторов, попарно не пересекаются.



Упражнения
 7. Докажите, что каждое такое множество из утверждения содержит $V(n, t) = \sum_{i=0}^t C_n^i \times (q-1)^i$ векторов (C_n^i — биномиальный коэффициент, равный $\frac{n!}{(n-i)!i!}$).

8 (граница Хэмминга). Докажите, что для любого кода

$$k \leq \log_q [q^n / V(n, t)]$$

($\{x\}$ — целая часть x). (3)

Если для параметров кода в (3) имеет место равенство, то код называется совершенным.

Возникшая около сорока лет назад математическая теория кодирования ныне является развитой и весьма глубокой наукой. У ее истоков стояли Клод Шеннон, уже упоминавшийся Ричард Хэмминг, Марсель Голей и другие ученые. Более подробно о кодах, исправляющих ошибки, вы можете прочитать в книгах Аршинова М. Н., Садовского Л. Е. «Коды и математика» (М., «Наука», 1983, Библиотечка «Квант», вып. 30), Яглома А. М., Яглома И. М. «Вероятность и информация» (М., «Наука», 1973).

Несложно видеть, что совершенные l -системы совпадают с совершенными кодами. В частности, 3-система для игры в мини-«Спортпрогноз» — это код с $q=3$, $k=2$ и $n=4$, исправляющий одну ошибку. Из сказанного выше следует, что этот код является линейным (в смысле упражнения 2) и совершенным и содержит, как ему и положено, $q^k=9$ векторов.

«Спортпрогноз-13»

Предложенная выше 3-система для тиража из четырех матчей допускает обобщение на «реальный» случай 13 матчей; при этом получается 12-система C_1 , состоящая из $3^{10}=59\,049$ карточек. Будем считать, что вектор $x \in E_3^{13}$ принадлежит системе C_1 , если его координаты удовлетворяют следующим уравнениям (вновь операции по модулю 3):

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + \\ &\quad + x_8 + x_9 + x_{10}, \\ x_{12} &= x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 + 2x_8 + \\ &\quad + 2x_9 + 2x_{10}, \\ x_{13} &= x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 + \\ &\quad + 2x_7 + x_9 + 2x_{10}. \end{aligned} \quad (4)$$

Как и выше, номером вектора будем

называть набор из его первых девяти координат.

Упражнение 9. Пусть номер вектора $x=(x_1, \dots, x_{13}) \in C_1$ равен $(x_1, \dots, x_{10})=(0, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 1, 2, 1)$. Найдите x .

Утверждение. Построенная 12-система является линейной и совершенной.

Действительно, пусть векторы x и y удовлетворяют (4), тогда и $x+y$ и $2x$ удовлетворяют этой системе уравнений. Несколько сложнее доказывалось то, что расстояние между любыми двумя векторами системы C_1 не меньше трех. Рассмотрим 2 вектора $x, y \in C_1$. Если их номера совпадают, то $x=y$. Если номера различаются в трех или более позициях, то все доказано. Пусть номера различаются в одной позиции, скажем, i -й. Тогда заметим, что любое x_i ($1 \leq i \leq 10$) входит с ненулевыми коэффициентами в правые части по меньшей мере двух уравнений системы (4), т. е. по меньшей мере две из трех последних координат векторов x и y будут различными. Если же номера векторов x и y различаются в двух позициях, скажем, i -й и j -й, то для доказательства достаточно показать, что они различаются еще по крайней мере в одной позиции. Этого может не быть только в случае, когда i -я и j -я переменные в правые части всех уравнений (4) входят с одинаковыми коэффициентами. Проверка показывает, что таких переменных не существует. Итак, доказано, что расстояние между двумя любыми векторами $x, y \in C_1$ не меньше трех. Тогда множества векторов из E_3^{13} , находящихся от x и y на расстоянии ≤ 1 , не пересекаются. В соответствии с упражнением 7 каждое такое множество содержит $27=3^3$ векторов. Общее же количество векторов в системе равно числу различных номеров, т. е. 3^{10} , а общий объем соответствующих им непересекающихся множеств равен $3^{10} \cdot 3^3 = 3^{13}$, что совпадает с числом всех возможных карточек. Что и требовалось доказать.

Упражнение 10 (трудное). Придумайте быстрый способ нахождения выигравшей карточки для системы C_1 по результату тиража (сравните с упражнением 6). Этот способ позволит найти выигравшую карточку значительно быстрее, чем при полном переборе.

Построенная 12-система является кодом с $q=3$, $n=13$, $k=10$, исправляющим одну ошибку. Этот код — представитель семейства совершенных кодов Хэмминга с $q=3$, $n=(3^m-1)/2$, $k=n-m$.

Нелинейные системы

Вернемся на время к системе S_0 для мини-«Спортпрогноза». Выпишем все ее девять векторов в строки таблицы. Вычеркивая из этой таблицы любой столбец, получим линейную систему из девяти векторов для «Спортпрогноза-3». Можно показать, что эта система является наилучшей среди линейных, т. е. содержит наименьшее возможное число карточек. Оказывается, отказ от условия линейности позволяет улучшить эту систему. Наилучшая нелинейная 2-система длины 3 состоит всего из пяти векторов. Вот она:

$(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(2,2,2)$.

В таблице приведены рекорды построения l -систем для $l=n-3$, $n-2$ и $n-1$ при $n \leq 13$. Для игры «Спортпрогноз» понадобятся только первые два столбца, но для математиков интерес представляет и более общий случай. Заметим, что любое улучшение таблицы достойно статьи в солидных международных математических журналах. Разумеется, системы из этой таблицы строились их авторами

Таблица

n	$l=n-1$	$l=n-2$	$l=n-3$
1	1*	1*	1*
2	3*	1*	1*
3	5*	3*	1*
4	9*	3*	3*
5	27	8	3*
6	73	17	6*
7	186	34	12
8	486	81	27
9	1458	219	54
10	3645	558	108
11	10935	729*	243
12	29889	2187	729
13	59049*	6561	1215

* — известно, что улучшить нельзя.

не простым перебором на ЭВМ (кстати, как это сделать? Ответ в общем случае неизвестен), а применением общих конструкций, приводящих к семействам систем различных длин. Так что если кому-то из читателей повезет улучшить таблицу, авторы готовы оказать помощь по подготовке статьи. Поиск лучше начать с длин $n \geq 6$, т. е. улучшение при меньших длинах маловероятно.

Замечательная 9-система длины 11

При внимательном наблюдении за таблицей бросается в глаза звездочка, одиноко мерцающая в ее середине. Здесь находится замечательная 9-система S_2 длины 11. Ее история и применения могли бы послужить сюжетом для увлекательного математического романа. Но прежде несколько слов о самой героине. Это линейная совершенная система. Совершенство доказать несложно, если знать, что любые два вектора системы находятся на расстоянии не менее пяти. Тогда, как и раньше, множества (их $729=3^6$) векторов из E_3^{11} , находящихся на расстоянии ≤ 2 от некоторой точки системы, не пересекаются. Поскольку в каждом из этих множеств $243=3^5$ векторов, суммарный объем этих множеств совпадает с общим числом векторов в E_3^{11} .

Приведем уравнения, связывающие троичный номер (x_1, x_2, \dots, x_6) любого вектора x , принадлежащего системе S_2 , с остальными пятью его координатами:

$$\begin{aligned} x_7 &= x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6, \\ x_8 &= x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 + 2x_6, \\ x_9 &= x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6, \\ x_{10} &= x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6, \\ x_{11} &= x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5. \end{aligned} \quad (5)$$

Эта система совпадает с совершенным кодом с параметрами $q=3$, $n=11$, $k=6$, исправляющим две ошибки. Он называется кодом Голея в честь открывшего и опубликовавшего его в 1949 году математика. Для задания кода с помощью системы уравнений (5) Голею пришлось использовать теорию так называемых квадратичных вычетов. Однако летом

1989 года выяснилось, что этот код (как хорошая система для игры «Спортпрогноз») открыт и опубликован в 1947 г. в финской спортивной газете «Вейкаайя»^{*}). Автор этого открытия Юхани Виртакаллио — математик и, наверное, не знал, что для построения кода необходимо использовать квадратичные вычеты. Он писал: «Эта система из 729 столбцов пришла мне в голову в дни небывало низких выигрышей в «Спортпрогноз». Видимо, мы имеем дело с примером истинно рамануджановского озарения (см. статью С. Г. Гиндикина в «Кванте» № 10 за 1987 год).

Помимо этой трюичной системы, М. Голей в своей работе 1949 года описал еще одну линейную совершенную систему — 20-систему C_3 длины 23 с векторами из нулей и единиц — код с параметрами $q=2$, $n=23$, $k=12$, исправляющий 3 ошибки. Эта система содержит $2^{12}=4096$ векторов и могла бы оказаться полезной для «Спортпрогноза» на 23 поединка в игре без ничьих.

Упражнение 11. Используя результаты упражнений 7 и 8, покажите, что система C_3 совершенна (и следовательно, содержит наименьшее возможное число карточек среди систем с такими параметрами).

Открытие, сделанное Виртакаллио, тем более удивительно, что при $q=3$ других нетривиальных совершенных l -систем с $l \leq n-2$ ни для каких значений n не существует. При $l=n-1$ существуют еще системы с параметрами, приведенными в конце предыдущего параграфа. При $q=2$ список нетривиальных совершенных систем с $l \leq n-1$ исчерпывается 20-системой C_3 и семейством $(n-1)$ -систем с $n=2^m-1$ и $k=n-t$. Эти два утверждения следуют из глубокой теоремы о совершенных кодах, доказанной только в начале 70-х гг.

Возникающие в связи с кодами Голея C_2 и C_3 математические задачи,

^{*} В Финляндии при заполнении карточки «Спортпрогноза» в 1947 году требовалось предсказать результаты 12 матчей (теперь — 13). Карточка считалась выигравшей, если в ней было верно угадано не менее 10 результатов. Поэтому систему C_2 можно было использовать, если результаты одного матча игрок знал наперед.

как правило, довольно трудны. Даже задача быстрого (непереборного) нахождения выигравшей карточки системы C_2 по известному результату тиража весьма непроста. Желая попробовать свои силы в этой трудной (хотя и решенной) проблеме должны воспользоваться системой уравнений (5) и действовать в духе упражнений 6 и 9. Может быть, вам удастся открыть какой-нибудь новый способ решения этой задачи?

Последняя задача, которой мы хотим здесь коснуться в связи со «Спортпрогнозом», возникает в случае, когда игрок предполагает, что в t из n матчей возможен любой из трех исходов — ничья, выигрыш и проигрыш одной из команд, а в $b = n-t$ матчах ее выигрыш практически невероятен. (Например, в футбольном матче «Барселона» (Мадрид) — «Звезда» (Пермь) одна из команд может в лучшем случае рассчитывать на ничью.) Обозначим через $E_{2,3}(b, t)$ множество векторов длины $b+t$, у которых первые b координат принимают значения 0 или 1, а последние t — значения 0, 1 или 2. l -система C для смешанного «Спортпрогноза» должна состоять из таких векторов из $E_{2,3}(b, t)$, что для любого вектора $a \in E_{2,3}(b, t)$ найдется вектор $c \in C$, находящийся от a на расстоянии Хэмминга не более l .

Упражнения

12. Покажите, что на расстоянии $\leq l$ от фиксированного вектора $a \in E_{2,3}(b, t)$ находится

$\sum_{i=0}^l 2^{l-i} C_b^i C_t^{l-i}$ векторов.

13. Постройте 3-систему при $t, b=2$, состоящую из шести карточек.

«Спортлото»

Уже понятно, что построение систем для игры «Спортлото» связано с рассмотрением множества всех векторов из множества $E_{2,0}^{n,0}$ двоичных векторов длины n , содержащих ровно w единиц. Нам неизвестны хорошие системы для «Спортлото», однако можно получить простое неравенство, показывающее, что любая такая система должна содержать довольно много карточек. Их количество, разумеется,

зависит от того, насколько высоки наши требования к ожидаемому выигрышу. Как и выше, назовем множество карточек m -системой D , если при любом результате тиража y хотя бы одна из этих карточек выиграет не менее m номеров. Рассмотрим «Спортлото — 6 из 49». 6-система D_0 содержит $C_{49}^6 = 13\,983\,816$ карточек — все векторы из множества $E_2^{49,6}$ двоичных векторов длины 49 с шестью единицами. В любой 5-системе D_1 найдутся 2 вектора c_1 и c_2 с $d(c_1, c_2) = 2$. В самом деле, любые два вектора, содержащие одинаковое число единиц, находятся один от другого на четном расстоянии. Поэтому если не существует векторов c_1 и c_2 таких, что $d(c_1, c_2) = 2$, то $\min_{c_1, c_2} d(c_1, c_2) = 4$, и найдется такой вектор $y \in E_2^{49,6}$, что ближайший к нему вектор системы находится от y на расстоянии 2. Тогда, если y будет результатом тиража, в D_1 не найдется карточки с пятью выигравшими номерами.

Упражнение 14 (граница Хэмминга для векторов с одинаковым числом единиц).

а) Докажите, что число векторов из $E_2^{49,6}$, находящихся на расстоянии $\leq 2s$ от данного

вектора $c \in E_2^{49,6}$, равно $M(s) = \sum_{i=0}^s C_6^i C_{43}^{6-i} = \sum_{i=6-s}^6 C_6^i C_{43}^{6-i}$.

б) Докажите, что $|D_1|$ — количество карточек в 5-системе D_1 — не меньше, чем

$|C_{49}^6/M(1)| = 53\,992$ ($|x|$ — наименьшее целое, большее или равное x).

Аналогично показывается, что любая 4-система D_2 не может содержать меньше, чем 1014 карточек, любая 3-система D_3 — меньше, чем 54 карточки. Для «Спортлото — 5 из 36» $|D_1| \geq 2417$, $|D_2| \geq 79$, $|D_3| \geq 8$.

В заключение приведем пример 2-системы D для мини-«Спортлото», в котором требуется угадать 6 из 8 номеров:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку любой результат тиража y содержит два нуля, найдется такой вектор $c \in D$, что в некоторой координате векторы y и c оба содержат нуль. Тогда расстояние между y и c не больше двух, т. е. D — действительно 2-система. Покажем, что 2-системы с меньшим числом векторов не существует. Действительно, три вектора вместе содержат всего шесть нулей, и даже если все они находятся на разных позициях, все же остаются две позиции, не содержащие нулей. Помещая на эти позиции нули вектора y , мы видим, что он находится на расстоянии 4 от каждого из трех векторов системы. Значит, 2-система D длины 8 оптимальна.

Дорогие читатели!

В будущем, 1991 году журнал «Квант», как и прежде, будет распространяться только по подписке. К сожалению, на момент подписания этого номера в печать мы не знаем окончательно, как отразится на подписной цене удорожание бумаги и повышение типографских расходов и расходов, связанных с доставкой журнала. Однако в любом случае мы будем стараться,

чтобы «Квант» остался доступным для тех, кому он действительно необходим, — для школьников, увлекающихся математикой, физикой, астрономией, космонавтикой, информатикой, для преподавателей, работа в школе для которых — призвание, для студентов, избравших свой профессиональный путь в науке или технике...

Журнал «Квант» не стоит на месте, и в будущем году на его страницах появятся новые рубрики и материалы, предложенные вами. Мы на-

деемся, что он будет разнообразнее и занимательнее. К тому же мы планируем увеличить количество материалов, доступных более широкому кругу читателей.

Оформить годовую подписку можно до 31 октября 1990 года. Подписка принимается без ограничений в агентствах «Союзпечать», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала

«Квант» в каталогах «Союзпечать» 70465.

Редакция журнала «Квант»

УЛЬТРАЗВУК В МЕДИЦИНЕ

Р. МОРРИ. Р. ХОВБИ (США)

Ультразвуковая диагностика — сравнительно недорогой метод исследования структуры и работы органов.

Как и слышимый звук, ультразвук представляет собой волны, распространяющиеся в среде. В медицине используются ультразвуковые волны с частотами от 1 до 10 МГц (для сравнения: слышимый звук имеет частоты от 30 Гц до 20 кГц). Скорость распространения звуковых волн в материале зависит от модуля объемной упругости B и от плотности материала ρ : $v = \sqrt{B/\rho}$. Для мягких тканей ее значение варьируется от 1400 до 1600 м/с. Соответствующие длины волн лежат в интервале 0,14—1,6 мм. (В таких твердых материалах, как кости, скорость звука достигает 4000 м/с.) При переходе волны из одной среды в другую происходит ее частичное отражение от границы, причем отношение амплитуд прошедшей и отраженной волн определяется отношением так называемых акустических импедансов этих сред (это чем-то напоминает частичное отражение све-

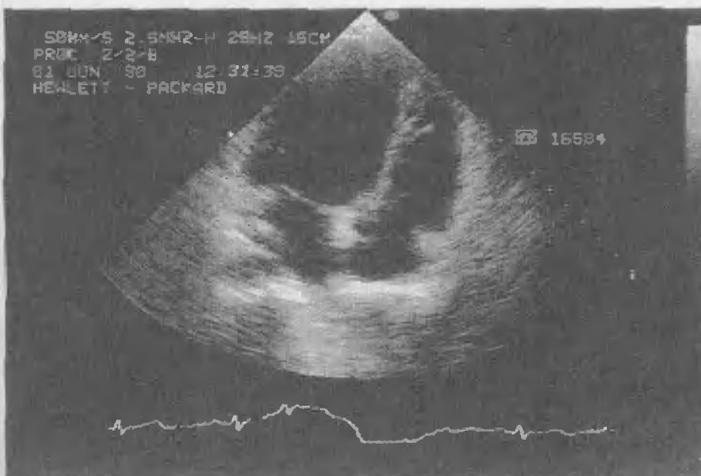
та на границе двух сред с различными показателями преломления). Акустический импеданс среды с модулем объемной упругости B и плотностью ρ равен $Z = \rho v = \sqrt{B\rho}$. Чем сильнее отличаются импедансы двух сред, тем больше энергии отражается обратно на их границе раздела. Анализ отраженных от границ органов ультразвуковых сигналов позволяет строить достаточно четкие изображения.

Ультразвуковой сигнал получают с помощью прибора, преобразующего колебания электрического напряжения в механические колебания. Тот же самый прибор в некоторых электронных схемах, работающих в импульсном режиме, может использоваться и для обратного преобразования ультразвуковых колебаний в слабый электрический сигнал. В установках, действующих в непрерывном режиме, для излучения и детектирования волн используются различные приборы.

Измерения довольно сложны, так как волна при распространении в тканях теряет много энергии. Например, для волн с частотой 1 МГц ослабление составляет примерно 100 дБ/м. А это значит, что эхо (отраженный сигнал), приходящее от отдаленной поверхности, очень слабое. Разницу

Из книги: D. Halliday, R. Resnick «Fundamentals of Physics», Third edition extended, 1988. (John Wiley & Sons, N. Y.)

Ультразвуковые эхограммы любезно предоставлены Д. М. Атауллахановой (Институт клинической кардиологии им. А. Л. Мясникова АМН СССР).



Ультразвуковая эхограмма, полученная методом В-скап. Это как бы мгновенный снимок продольного сечения сердца. Серия таких снимков позволяет судить о состоянии сердца. Маленькое светлое пятно вверху снимка — это датчик. Он был установлен на теле пациента ниже сердца, и поэтому изображение сердца перевернутое.

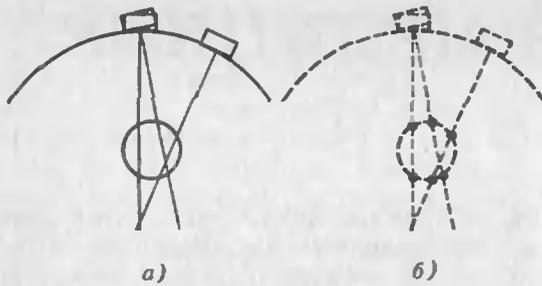


Рис. 1. Схема исследования методом В-scan. Излучатель может быть установлен на одном месте или перемещаться по поверхности тела (а). Информация об отраженных лучах вдоль многих направлений позволяет строить изображение (б).

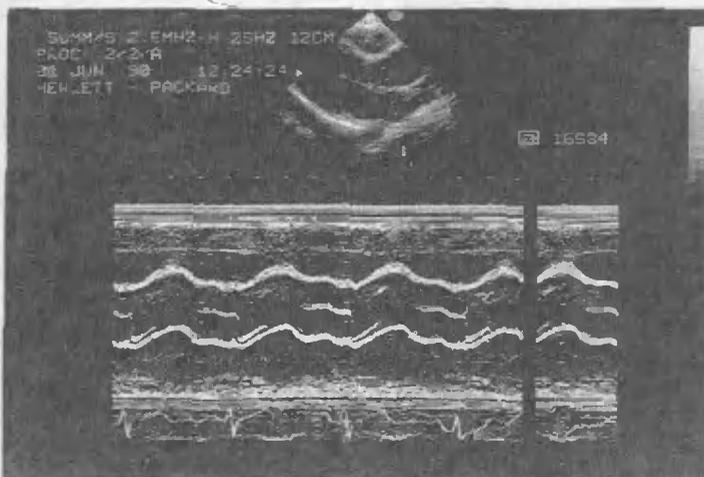
между сильными и слабыми сигналами удается несколько сгладить использованием усилителей. В импульсных устройствах усилитель настраивают так, чтобы сигналы с большим запаздыванием и, соответственно, с большим ослаблением и усиливались больше.

Наиболее распространенным методом построения изображений является метод В-scan. Для излучения и для приема отраженных волн используется один прибор, который можно перемещать над телом пациента. Во избежание больших потерь энергии на границе тело — воздух, между прибором и кожей наносится гель. Прибор излучает короткие ультразвуковые импульсы. Измеряются время запаздывания и амплитуда отраженной волны. По времени запаздывания определяется расстояние до отражаю-

щей границы и потери энергии волны в среде. В результате на дисплее высвечивается точка, яркость которой пропорциональна амплитуде отраженной волны (с учетом поправки на затухание), которая, в свою очередь, зависит от отношения импедансов на отражающей поверхности. (Метод построения эхограммы отражен в названии: В-scan — от англ. Brightness — яркость, scan — поле зрения.)

Для получения полного изображения органа необходимо провести серию измерений в нескольких местах и в разных направлениях (рис. 1). В общей сложности это занимает несколько минут.

Для исследования тех органов, которые не остаются неподвижными, используется метод М-scan (М — от английского Moving — движущийся). Этим методом исследуют, например, движения клапанов сердца. Через небольшие промежутки времени испускаются короткие импульсы ультразвука. Положение клапана со временем меняется, меняется и время запаздывания. Как получают эхограмму, показано на рисунке 2. Для построения обычно используют самописец, который вырисовывает как бы график зависимости запаздывания эха во времени. Точнее, получается множество графиков, каждый из которых соответствует колебаниям небольшого участка клапана, стенки сердца или еще чего-нибудь, находящегося за и перед сердцем.



Эхограмма, полученная методом М-scan. Две яркие волнистые линии — это «график» изменения поперечного сечения аорты (верхняя кривая — движение передней стенки аорты, нижняя — задней); «пунктир» в сечении аорты — аортальный клапан в моменты закрытия створок. (В верхней части снимка — В-scan изображение поперечного сечения сердца.)

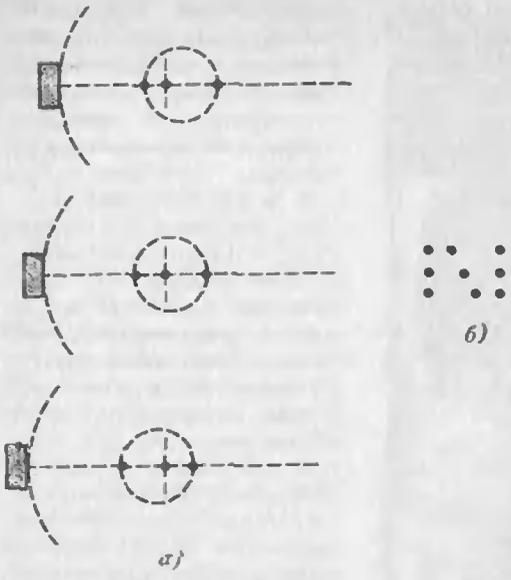


Рис. 2. Схема исследования методом М-всп. Отражающая площадка движется в неподвижной цилиндрической оболочке (а). Запоздывания эха от «сердечного клапана» меняются со временем, и соответствующие точки на экране (б) создают «изображение» движения.

С помощью ультразвука можно измерять скорость течения крови в сосудах. Метод измерения основан на так называемом вторичном эффекте Доплера — зависимости частоты отраженного сигнала от скорости движения отражателя. Если отражающие частицы (например, красные кровяные тельца) движутся со скоростью u под углом θ к направлению распространения волны, то частота отраженной в обратном направлении волны

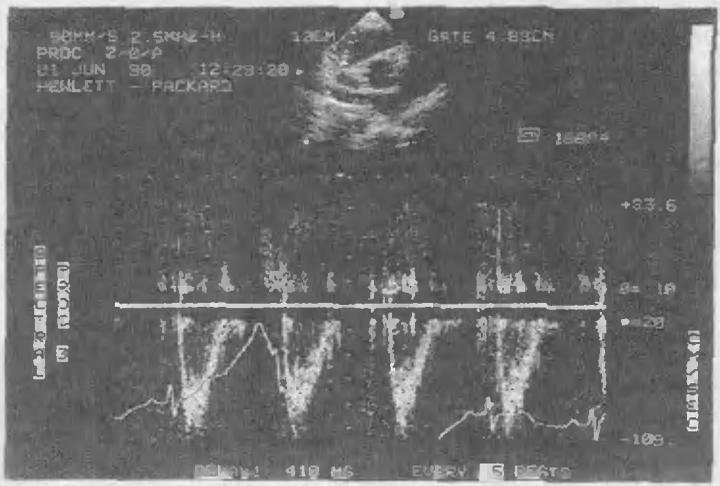
будет сдвинута относительно исходной части ν на величину $\Delta\nu = 2\nu u \cos \theta / v$. Для $u = 0,1$ м/с и $\nu = 2$ МГц при $\theta = 0$ этот сдвиг составит 260 Гц. Если составить биения из отраженной и исходной волн, то частота биений будет лежать в слышимом диапазоне (130 Гц). По сдвигу частоты можно судить о состоянии кровеносных сосудов (так, при сужении сосудов скорость кровотока уменьшается). При измерении скорости излучатель настраивают так, чтобы биения были громкими и частыми. Сигнал при этом звучит как серия «паф-паф» в такт с ударами сердца. Затем аппарат определяет значение Δ .

Интенсивность ультразвука, используемого для диагностики, обычно не превышает 10^3 Вт/м². Насколько известно, при таких интенсивностях вредные побочные эффекты отсутствуют.

При более высоких интенсивностях ткани довольно сильно нагреваются. Иногда это используют для снятия острых болевых ощущений в спине, в плечевом поясе, а также при повреждениях мышц.

При интенсивностях свыше 7×10^6 Вт/м² повышение температуры может привести к повреждению тканей. При 10^7 Вт/м² и более перепады давления в ультразвуковой волне могут приводить к образованию и схлопыванию микрополостей. Эти эффекты используются в хирургии.

Перевод с английского И. Маргина



На этой эхограмме изображен спектр потока крови в устье легочной артерии — изменение скорости тока крови во времени (в зависимости от фазы сердечного цикла). По спектру можно определить максимальную, среднюю, интегральную скорости потока, а эти данные позволяют судить о наличии или отсутствии патологии.



„Квант” улыбается

Кто во что горазд

По давней традиции семестр начинался в полной неразберихе. Курсовые журналы где-то затерялись; студенты бесцельно бродили по лекционному залу. Время от времени мою лекцию прерывало аханье, и к выходу, краснея, неуверенно пробирался очередной студент, наконец-то сообразив, что здесь читают курс дифференциальных уравнений, а не введение в философию.

Я рассказал, какие нужны учебники и какие бу-

Рассказ перепечатывается по изданию «Библиотека современной фантастики» в 15-ти томах. Том 10. (М., Молодая гвардия, 1967).

дут самостоятельные работы, а потом произнес обычную фразу: «У кого есть вопросы?» Если бы вопросов не оказалось, я успел бы на автобус 11.20, идущий в Уивертаун; тогда можно было бы поиграть в гольф.

Поднялся какой-то студент; обе руки он держал в карманах.

— Профессор, а зачем нам этот курс вообще?

Аудитория тревожно загудела, нервно зашаркала ногами.

— Кто вы такой, молодой человек? — осведомился я.

— Бэроун, сэр. Фрэнк Бэроун.

— Так вот, мистер Бэроун, по требованию уни-

верситетской программы все студенты, специализирующиеся в математике, обязаны пройти минимум...

— Это-то я знаю! — прервал он меня, но тут же поспешно добавил: — Сэр.

Я с улыбкой кивнул.

— Вот что меня интересует, — продолжал он. — Есть ли хоть какая-то практическая польза от изучения абстрактных понятий? Мне нужно совсем другое: руководство в том, как стать полезным членом общества.

Я сделал вывод, что студент сбежал с философского факультета, но тем временем его низкий грудной голос и уверенные манеры уже покорили аудиторию. Прочие студенты ждали, что я отвечу. Я прокашлялся.

— Мистер Бэроун, — начал я, — что вы хотите вынести из университета?

— Еще не знаю, сэр. Я думал, два года учебы в колледже помогут мне выбрать профессию, но они не помогли. Понимаете, мне не приходится зарабатывать себе на жизнь.

Он заявил это так же просто, как мы с вами могли бы сказать: «У меня разболелись зубы».

— Откуда же вы берете средства к существованию, мистер Бэроун?

— Да вот, сэр, такой у меня... дар.

— Ах, так, — съехидничал я. — Очевидно, прикосновение Мидаса?

Тотчас же я раскаялся в своем ехидстве. Лицо Бэроуна побагровело. Он поделился со мной величайшей тайной, а я сделал из него посмешище.

— Гораздо лучше, профессор! — воскликнул он. — Смотрите!

Бэроун повел рукой в мою сторону. Лекторская кафедра бесшумно взмыла вверх и воспарила над моей макушкой. Кто-то

вскрикнул. Я обернулся к аудитории и увидел, как Бэроун делает знак хорошенькой сокурснице. В тот же миг она попыталась прикрыть наготу общей тетрадью.

— Мистер Бэроун! — повысил я голос. — Достаточно!

— Нет еще, профессор! Он замахал руками и стиснул пальцы, словно ловил бабочку. Когда он разжал кулаки, оттуда вылетел рой летучих мышей, которые беспорядочно закружились по залу. Студентки с визгом нырнули под стулья.

Надо было остановить Бэроуна. Я набрал побольше воздуха в легкие и загремел:

— Прекратить!

Неожиданно зал стих: все замерли. В напряженной тишине слышался

лишь шорох мышиных крыльев да всхлипывание обнаженной девушки. Все глаза были устремлены на меня, даже глаза Бэроуна. Что ж, не ударю лицом в грязь.

Я повел бровью в сторону кафедры, и она мягко опустилась. Быстрый взмах руки вернул девушке одежду.

Я сцепил пальцы и сосредоточился. Потом, разжав кулаки, выпустил соколов. Они очистили воздух от летучих мышей и, вернувшись ко мне в ладони, послушно исчезли.

Аудитория превратилась в сплошной разинутый рот. Надо было разрядить обстановку.

— Есть еще вопросы?

Студенты молча покачали головами. Только Бэроун не шевельнулся.

— Прекрасно. К следую-

щему разу прочтите страницы учебника с третьей по семнадцатую включительно. Решите все задачи на семнадцатой странице. Вы свободны.

Аудитория расходилась медленно. Бэроун, который покидал зал последним, замешкался у двери. Он оглянулся через плечо. На несколько секунд наши взгляды скрестились. Затем, словно приняв какое-то решение, он мрачно кивнул. Зубы его сверкнули в мимолетной улыбке, и он вышел, напевая песенку.

Я перевел дыхание и обратил свои конспекты. Выходя, я посмотрел на часы. 11.30.

Может, успею на следующий автобус — в 1.15.

Б. Куроаса (США)
Перевод с английского
Н. Евдокимовой

● МАТЕМАТИКА ● ФИЗИКА ● ХИМИЯ ● БИОЛОГИЯ ● ЛИТЕРАТУРА ● МАТЕМАТИКА

АБИТУРИЕНТ — 91

Заочные курсы с оригинальными методиками обучения помогут Вам стать студентом одного из ведущих вузов страны.

Приглашаются учащиеся и выпускники школ, техникумов, ПТУ, медицинских училищ и волеупенные в запас воины.

Квалифицированные преподаватели, применяя индивидуальный подход и учитывая специфику выбранного Вами вуза, сделают все возможное для того, чтобы Ваше поступление в вуз стало реальностью.

В течение учебного года Вы получите 5 методических разработок по каждому предмету, в которых содержится теоретический материал, разбор вопросов и задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах, и контрольные работы.

Для поступающих в московские вузы во время вступительных экзаменов проводятся очные консультации.

Стоимость курса обучения по одному предмету — 50 руб. Для инвалидов и воинов-интернационалистов предоставляется скидка 50%. Оплата производится после получения уведомления о зачислении.

Для поступления на курсы Вы должны прислать заявление, где будет указан предмет, выбранный вуз, Ваши фамилия, имя и отчество, учебное заведение, в котором Вы учитесь или которое закончили, и 2 конверта с написанным на них Вашим почтовым адресом.

Наш адрес:
121467, Москва, а/я М 30,
Советский фонд
милосердия и здоровья,
ВМЦ ТПО «АГАФФ»,
Учебно-методический сектор

АГАФФ

По поводу задачи «С ветром и без него»

Издательство «Наука» выпустило в 1989 году книгу И. Н. Сергеева, С. Н. Олехника и С. В. Гашкова «Примени математику». На странице 126 этой книги имеется задача 13.11 следующего содержания: «Велосипедист проезжает 1 км при попутном ветре за 3 минуты, а при движении против того же ветра — за 5 минут. За сколько минут он проезжает 1 км в безветренную погоду?». Авторы книги считают описанную ситуацию аналогичной движению катера по реке (вверх и вниз по течению) и как следствие дают решение, смысл которого сводится к следующему. Пусть скорость велосипедиста в безветренную погоду равна v , скорость же ветра — u . Тогда скорость велосипедиста при попутном ветре равна $(v+u)$, а при встречном — $(v-u)$. Следовательно, $v+u=1/3$ км/мин, $v-u=1/5$ км/мин, откуда $v=4/15=1/3^{3/4}$ км/мин, т. е. велосипедист без ветра проедет 1 км за $3 \frac{3}{4}$ мин = 3 мин 45 с.

Такое решение действительно пригодно для плывущего катера и даже в какой-то степени для летящего самолета, но для велосипедиста — нет. Почему? Потому что для катера и самолета вода и воздух соответственно являются единственной средой, в которой они движутся и с которой взаимодействуют в направлении движения. А велосипедист хотя и движется в потоке воздуха, но едет-то он по шоссе, имеет с ним сцепление, да и в движении приводится именно вследствие взаимодействия с шоссе. (Иначе легко было бы

получить парадоксальную ситуацию: если $v=u$, то при встречном ветре велосипедист, крутя педали, оставался бы на месте!)

Не хочется, однако, сводить содержание этого письма лишь к критике авторов за неудачно подобранную задачу. Разумнее будет попытаться правильно ее решить. Прежде всего заметим, что велосипедист расходует энергию на преодоление сопротивления воздуха, трение велосипеда о дорогу и внутреннее трение цепной передачи. Если шоссе твердое и ровное (проскальзывание практически отсутствует) и велосипед хорошо подготовлен к велопробегу (почищен, смазан и т. п.), то в сумме трех упомянутых величин подавляющую часть будет составлять именно сопротивление воздуха. Опыт подтверждает это. Вспомним, каких скоростей достигают велосипедисты в «гонках за лидером» — мотоциклом, сильно уменьшающим это самое сопротивление. Поэтому будем считать, что движению велосипедиста препятствует лишь сопротивление воздуха, которое, как известно, пропорционально квадрату относительной скорости движения велосипедиста и воздуха: $F = \alpha v_{\text{отн}}^2$. Тогда для случая попутного ветра:

$$F_1 = \alpha \left(\frac{1}{3} - u \right)^2; \text{ при встречном ветре: } F_2 = \alpha \left(\frac{1}{5} + u \right)^2;$$

и, наконец, при езде со скоростью v в безветренную погоду: $F_3 = \alpha v^2$ (здесь все скорости измеряются в км/мин).

Естественно считать, что во всех трех случаях велосипедист развивает одинаковую мощность N . Так как мощность есть произведение силы на скорость, то для первых двух случаев соответственно получаем:

$$N = \alpha \left(\frac{1}{3} - u \right)^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$N = \alpha \left(\frac{1}{5} + u \right)^2 \cdot \frac{1}{5}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{N}{\alpha} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - u \right)^2 = \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} + u \right)^2, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} - u \right) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{5} + u \right). \end{aligned}$$

т. е.

$$u = \frac{1}{15} (17 - 4\sqrt{15}) \text{ км/мин}$$

и

$$\frac{N}{\alpha} = \frac{32}{225} (4 - \sqrt{15}) \text{ км/мин.}$$

При движении в безветренную погоду $N = (\alpha v^2) \cdot v = \alpha v^3$,

$$\text{т. е. } v = \sqrt[3]{\frac{N}{\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{32}{225} (4 - \sqrt{15})}$$

→ $\sqrt{15}$ км/мин,

следовательно, 1 км велосипедист проедет за время, равное

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{32}{225} (4 - \sqrt{15})}} \approx 3,81 \text{ мин} =$$

$$= 3 \text{ мин } 48,6 \text{ с.}$$

Расхождение с авторским ответом вроде бы невелико, но дело-то не столько в ответе, сколько в подходе. Но согласится ли читатель?

И. Акулинич

Задачник „Кванта“

Задачи

М1241 — М1245, Ф1248 — Ф1252

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 ноября 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Кванта». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1241» или «Ф1248». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1241 — М1245, Ф1248 и Ф1250 предлагались на заключительном этапе XXIV Всесоюзной олимпиады по математике и физике.

М1241. Имеется 1990 кучек, состоящих соответственно из 1, 2, 3, ..., 1990 камней. За один шаг разрешается выбросить из любого множества кучек по одинаковому числу камней. За какое наименьшее число шагов можно выбросить все камни?

Н. Агаханов

М1242. На двух сторонах AB и BC правильного $2n$ -угольника взяты по точке K и N так, что угол KEN , где E — вершина, противоположная B , равен $180^\circ/2n$. Докажите, что NE — биссектриса угла KNC .

Н. Агаханов, Н. Нейцгаев, Д. Терешин, Д. Фомин

М1243. а) На доске записано уравнение $*x^2 + *x + * = 0$. Первый из двух играющих называет любые три числа, второй расставляет их по своему выбору вместо звездочек. Может ли первый добиться, чтобы полученное уравнение имело различные рациональные корни, или второй всегда сможет ему помешать?

б) На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Первый из двух играющих называет любое число, второй ставит его на место любой из звездочек; затем первый называет еще одно число, второй ставит его на место одной из двух оставшихся звездочек; наконец, первый ставит любое число на место последней оставшейся звездочки. Может ли первый добиться того, чтобы полученное уравнение имело три различных целых корня?

А. Берзиньш

М1244. В сенате, состоящем из 30 сенаторов, каждые двое дружат или враждуют, причем каждый враждует ровно с 6 другими. Найдите общее количество троек сенаторов, в которых либо все три попарно дружат, либо все три враждуют друг с другом.

Д. Фомин

М1245. На плоскости задана точка O и n векторов, сумма которых равна \vec{b} . Докажите, что можно отложить эти векторы, начав в точке O , друг за другом в таком порядке, что полученная замкнутая (быть может, самопересекающаяся) ломаная будет целиком расположена внутри или на границе некоторого угла в 60° с вершиной в точке O .

С. Августович, С. Севастьянов

Ф1248. На горизонтальной доске лежит кусок мела. Доске мгновенно придают горизонтальную скорость V_0 и останавливают доску тоже мгновенно через время t после первого толчка. Коэффициент трения между мелом и доской равен μ . Найти длину следа мела на доске и полное смещение мела относительно доски.

А. Зильберман

Ф1249. Круглую пластинку диаметром $d=40$ мм и толщиной $a=0,5$ мм осторожно положили на поверхность воды. Благодаря поверхностному натяжению она оста-



Вода

Рис. 1.

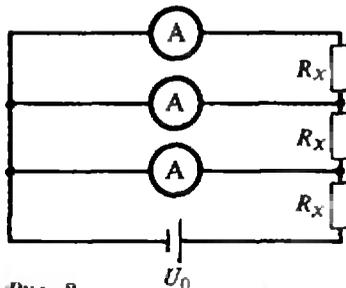


Рис. 2.

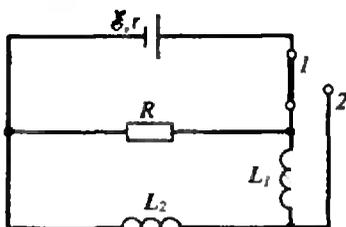


Рис. 3.

Задачи «Кванта»

лась на плаву, причем в месте соприкосновения верхней плоскости пластинки с поверхностью воды угол между ними оказался равным 90° (рис. 1). Определить плотность материала пластинки. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 0,073 \text{ Н/м}$.

М. Гаврилов

Ф1250. В схеме на рисунке 2 все амперметры одинаковые и все резисторы R_x одинаковые. Верхний амперметр показывает ток $I_u = 1 \text{ мА}$, средний — ток $I_c = 4 \text{ мА}$. Напряжение батарейки $U_0 = 4,5 \text{ В}$. Что показывает нижний амперметр? Чему равно R_x ?

А. Зильберман

Ф1251. В схеме, приведенной на рисунке 3, после установления токов мгновенно перебрасывают ключ из положения 1 в положение 2. Считая катушки идеальными, определить количество тепла, которое выделится на резисторе R после переключения. ЭДС источника \mathcal{E} , внутреннее сопротивление r .

В. Можжев

Ф1252. Вертикальную спицу двигают перед дисплеем слева направо со скоростью $v = 1 \text{ м/с}$, при этом на светящемся экране отчетливо видна наклонная «тень» спицы. Почему это происходит? Чему равен угол наклона «тени» к вертикали? Электронный луч рисует полный кадр за время $t = 0,02 \text{ с}$, число строк в кадре примите равным $n = 512$. Будет ли угол таким же, если двигать спицу перед телеэкраном?

А. Кожевников

Решения задач

М1216—М1220, Ф1228—Ф1232

М1216. Найдите углы остроугольного треугольника ABC , если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC .

Ответ: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 75^\circ$.

Вспользуемся тем, что в любом треугольнике (в обозначениях задачи) $\angle CAH = \angle BAO$ (а значит, и $\angle HAD = \angle OAD$; рис. 1). Действительно, $\angle CAH = 90^\circ - \angle ACB$, $\angle BAO = 90^\circ - \angle AEB$, где E — второй конец диаметра, проведенного из A , а углы ACB и AEB опираются на общую дугу AB .

Теперь из равенства $AC = AD$ получаем, что $\angle CAH = \angle HAD$ (AH — высота в треугольнике ACD). Следовательно, AH , AD и AO разбивают угол A треугольника ABC на равные части, и если $\angle CAH = \alpha$, то

$$\angle A = 4\alpha, \quad \angle B = 90^\circ - 3\alpha, \quad \angle C = 90^\circ - \alpha.$$

Второе замечание, касающееся произвольного треугольника: если F — точка, симметричная ортоцентру H относительно, скажем, стороны AB (рис. 2), то $\angle AFB = \angle AHB = 180^\circ - \angle C$, а значит, F лежит на описанной окружности.

Задачник „Квант“

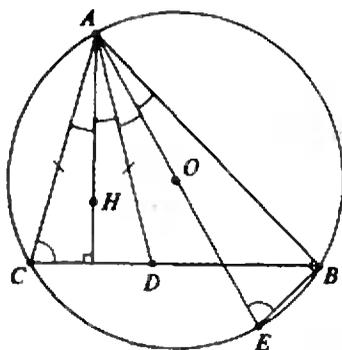


Рис. 1.

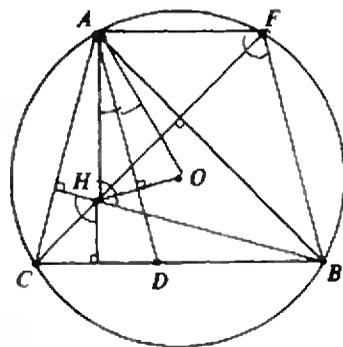


Рис. 2.

Поскольку $AF = AH$, а $AH = AO$ (т. к. биссектриса угла A треугольника HAO по условию задачи совпадает с его высотой), угол ACF опирается на хорду AF , равную радиусу окружности. Следовательно, $\angle ACF = 30^\circ$; в то же время $\angle ACF = 90^\circ - 4\alpha$. Таким образом, $\alpha = (90^\circ - 30^\circ)/4 = 15^\circ$, откуда и получается приведенный выше ответ.

К. Нистореску, В. Дубровский

M1217. Докажите для любого натурального n равенство $\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1\right)^2 = 2n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.

Заметим, что дробь $1/k$ встречается в k последних скобках левой части. Поэтому после раскрытия скобок (по формуле, приведенной на полях) дробь $1/k^2$ встретится k раз, а дробь $1/(kl)$ для каждого $l > k$ — тоже k раз, причем каждому l отвечают $l-1$ значений k ($k=1, 2, \dots, \dots, l-1$). Следовательно, сумма слева равна

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^n \frac{k(l-1)}{kl} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \\ &+ 2 \left(1 - \frac{1}{1} + 1 - \frac{1}{2} + \dots + 1 - \frac{1}{n}\right) = \\ &= 2n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Можно решить задачу и более прямолинейно — по индукции.

Легко проверить, что доказываемое равенство выполнено при $n=1$ ($1=2-1$) и $n=2$ ($1/2^2 + (1/2 + 1/1)^2 = 4 - 1 - 1/2$). Теперь докажем его для любого $n > 2$, предполагая, что верно аналогичное равенство для $n-1$:

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_n)^2 &= \\ &= x_1^2 + \dots + x_n^2 + \\ &+ 2x_1x_2 + \dots + 2x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

или, пользуясь знаком \sum для суммы,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 &= \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} x_k x_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1\right)^2 &= \\ &= \frac{n}{n^2} + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n-1} + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right) + \dots \right. \\ &+ \left.\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + 1\right) + \left(\frac{1}{n-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right)^2 + \dots \right. \\ &+ \left.\left(\frac{1}{n-1} + \dots + 1\right)^2 = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{n-2}{n-2} + \dots\right) \end{aligned}$$

Задачи «Кванта»

$$\begin{aligned} & \dots + \frac{2}{2} + 1) + 2(n-1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) = \\ & = \frac{1}{n} + 2 + 2n - 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\ & = 2n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Н. Васильев

М1218. На отрезке AC взята точка B и построены дуги: $AC = \alpha$ и $BC = \beta$, сумма градусных величин которых равна $\alpha + \beta = 360^\circ$, лежащие в одной полуплоскости от прямой AC . Произвольная дуга AB пересекает их в точках K и L (рис. 1). Докажите, что всевозможные прямые KL пересекают прямую AC в одной и той же точке.

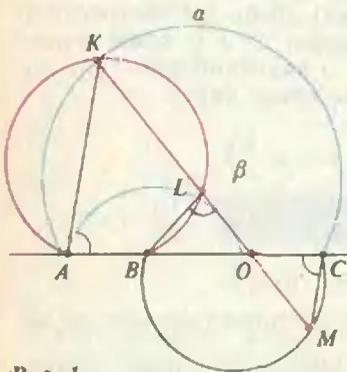


Рис. 1

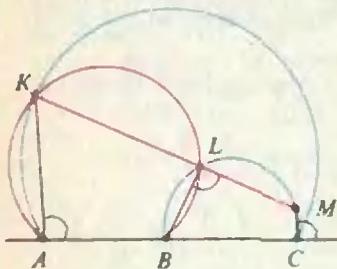


Рис. 2.

Достроим дугу β до окружности (рис. 1) и продолжим KL до пересечения с новой дугой в точке M . Тогда прямые AK и CM будут параллельны, поскольку $\angle KAB = 180^\circ - \angle KLB = \angle BLM = \angle BCM$. Пусть O — точка пересечения KM и BC ; достаточно доказать, что отношение $OA:OC$ не зависит от выбора точки K . В силу подобия треугольников OAK и OCM это отношение равно $AK:CM$. Угловые величины дуг AK и CM равны, так как дуги AKC и CMB по угловой величине равны $(360^\circ - \beta - \alpha)$, а дуги KC и MB стягивают равные вписанные углы KAC и MCB и тоже равны по величине. Следовательно, отношение хорд AK и CM равно отношению радиусов дуг α и β , а значит, не зависит от K .

В этом решении мы неявно пользовались тем, что точка M лежит на «достроенной» дуге. Однако иначе и быть не может. В самом деле, легко видеть, что хорды AK и CM параллельны при любом расположении секущих ABC и KLM (рис. 2). И если бы K и M оказались по одну сторону от BC , то сумма дуг KC и BM , равная $2(\angle KAB + \angle BCM) = 2 \cdot 180^\circ$, оказалась бы равна сумме дуг AKC и BMC , что неверно.

Из решения видно, что точка O — это центр гомотетии дуг AKB и CMB ; по сути дела, на этой идее и построено решение. Но можно было применить и более хитрое преобразование — инверсию (о нем рассказывалось в статье В. Уроева «Инверсия» в «Кванте» № 5 за 1984 г.). Для читателей, знакомых с инверсией и ее свойствами, укажем два различных способа ее использования в нашей задаче. Первый основан на том, что при инверсии с центром O и коэффициентом k (определяемой равенством $OA \cdot OB = OC^2 = k$) окружности α и β переходят друг в друга, а переменная (красная на рисунке 1) окружность переходит сама в себя. Поэтому точки K и L меняются местами, и, значит, $O \in KL$. Второй способ использует инверсию с центром C и коэффициентом, скажем, $CA \cdot CB$. После инверсии условие задачи превратится в следующее громоздкое, но совершенно очевидное утверждение (рис. 3):

из точек A и B по одну сторону от AB проведены лучи α и β так, что $\angle \alpha AB = \angle \beta BA$, а также произвольная дуга AB , пересекающая лучи в точках K и L ; тогда окружность SKL , где S — фиксированная точка прямой AB , пересекает AB вторично в одной и той же точке O .

Задачами „Кванта“

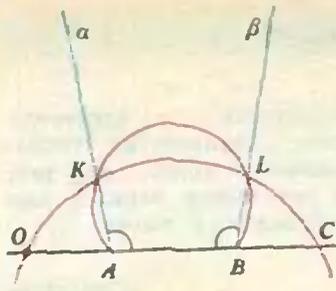


Рис. 3.

M1219*. Докажите, что для любых n положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n ($n > 1$) справедливо неравенство

$$(x_2 + \dots + x_n)^{x_1} + \dots + (x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n)^{x_i} + \dots + (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})^{x_n} > n - 1.$$

Например, для любых положительных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$(x + y)^z + (y + z)^x + (z + x)^y > 2.$$

Обозначим сумму, стоящую в левой части неравенства, через S . Если для некоторого индекса i имеем $x_i \geq 1$, то каждое слагаемое суммы S , кроме, быть может, i -го слагаемого, не меньше 1; кроме того, i -е слагаемое положительно; отсюда сразу же следует требуемое неравенство.

Пусть теперь для каждого индекса i имеем $0 < x_i < 1$. Ниже в предположении, что $x > 0$ и $0 < y < 1$, будет доказано неравенство

$$x^y > \frac{x}{x+y} \tag{1}$$

Считая это неравенство справедливым, получим

$$S > \frac{x_2 + \dots + x_n}{x_1 + \dots + x_n} + \dots + \frac{x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n}{x_1 + \dots + x_n} + \dots + \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{x_1 + \dots + x_n} = n - 1,$$

что и требовалось доказать.

Вернемся к неравенству (1). Пусть $x > 0$ и $0 < y < 1$; положим $a = 1/y$. Используя известное неравенство Бернулли, получим

$$(1 + y/x)^a > 1 + ay/x = 1 + 1/x > 1/x.$$

Отсюда $\frac{y+x}{x} > \frac{1}{x^y}$ и $x^y > \frac{x}{x+y}$. Итак, неравенство (1), а вместе с ним и неравенство нашей задачи, доказано.

Докажем теперь использованное нами неравенство, носящее имя Якоба Бернулли: при $h > 0, a > 1$

$$(1+h)^a > 1+ah. \tag{2}$$

Если $h=0$, то обе части (2) равны 1. Поэтому достаточно убедиться, что производная левой части больше, чем правой: отсюда будет следовать, что левая часть с ростом h растет быстрее. Имеем:

$$a(1+h)^{a-1} > a,$$

поскольку $a-1 > 0$ и $1+h > 1$. (Можно доказать, что неравенство Бернулли (2) справедливо для произвольных значений a и h таких, что $0 \neq h > -1$ и $a > 1$. Кстати, при $a > 1$ и $h = -1$ неравенство (2) сохраняется, а при $a=1$ или $h=0$ — обращается в равенство.)

В заключение отметим, что если выбрать $x_1=1$ и $x_2=\dots=x_n=\varepsilon$, то $S=(n-1)\varepsilon+(n-1) \cdot (1+(n-2)\varepsilon)^\varepsilon$, т. е. S сколь угодно близко к $n-1$ при достаточно малом

Задачник "Кванта"

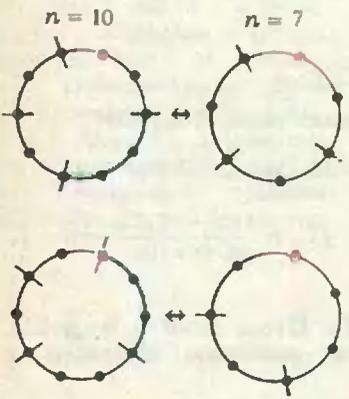
в. Следовательно, для каждого значения $n > 1$ константа $n-1$ в правой части нашего неравенства точна, т. е. ее нельзя заменить большей константой так, чтобы неравенство при этом оставалось верным для произвольных наборов положительных чисел x_1, \dots, x_n .

А. Михайлов

M1220*. Определим последовательность b_n условиями: $b_1=0, b_2=2, b_3=3, b_{n+1}=b_{n-1}+b_{n-2}$ при $n \geq 3$. Докажите, что при простом p число b_p делится на p .

Приведем два решения. Первое основано на комбинаторной интерпретации чисел b_n .

Возьмем окружность, поделенную точками A_0, A_1, \dots, A_{n-1} на n равных частей, и рассмотрим ее разбиения на дуги, составленные из двух или трех частей; назовем их «подходящими n -разбиениями». Пусть a_n — число таких разбиений. Тогда, очевидно, $a_1=0, a_2=2, a_3=3$. Докажем, что $a_{n+1}=a_{n-1}+a_{n-2}$ при $n \geq 3$, а значит, $a_n=b_n$ при всех n . Для этого поставим в соответствие каждому подходящему $(n+1)$ -разбиению либо $(n-1)$ -разбиение, либо $(n-2)$ -разбиение, и покажем, что полученное соответствие взаимно однозначно.



Стянем в точку ту дугу произвольного подходящего $(n+1)$ -разбиения, которая следует за дугой, содержащей A_0 , при обходе по часовой стрелке. (Если точка A_0 оказалась между двумя дугами, то стягивается дуга, начинающаяся в этой точке при указанном направлении обхода; см. рисунок.) Чтобы восстановить по $(n-1)$ - или $(n-2)$ -разбиению исходное $(n+1)$ -разбиение, достаточно вставить дугу соответственно из двух или трех частей вслед за дугой, содержащей A_0 (а если A_0 — граница двух дуг, то между этими дугами). В силу обратимости нашего соответствия оно взаимно однозначно.

Рассмотрим теперь все подходящие p -разбиения при простом p . Объединим в одну группу те из них, которые получаются друг из друга поворотами на углы $2\pi k/p, k=0, 1, \dots, p-1$. Заметим, что повороты на $2\pi k_1/p$ и $2\pi k_2/p$ при $k_1 \neq k_2$ переводят данное разбиение в разные. (В противном случае мы имели бы разбиение, которое переходит в себя при повороте на $2\pi k/p$, где $k=k_1-k_2$, а значит, и при всех поворотах на $(2\pi k/p) \cdot n, n=0, 1, \dots, p-1$. Но при простом p один из этих поворотов совпадает с поворотом на $2\pi/p$, а такой поворот не может переводить в себя никакое подходящее разбиение.) Итак, в каждой группе ровно p разбиений, следовательно, $b_p=a_p$ делится на p .

Второе решение — чисто алгебраическое, однако использует некоторые факты, выходящие за пределы школьной программы.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — три корня уравнения $t^3-t-1=0$ (два из них — комплексные числа). Тогда каждая из последовательностей $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n$, а значит, и их сумма $a_n=\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_3^n$ удовлетворяет соотношению $a_{n+1}=a_{n-1}+a_{n-2}$. При этом, по теореме Виета (получающейся раскрытием скобок в равенстве $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)=t^3-t-1$)

Задачник „Кванта“

$$a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1^3 \lambda_2 + \lambda_2^3 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 = -1, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1,$$

откуда

$$a_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) = 2;$$

$$a_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 - 3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) + 3\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 3.$$

Следовательно, $a_n = b_n$ при всех n .

Теперь заметим, что

$$a_p = \lambda_1^p + \lambda_2^p + \lambda_3^p = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^p - \sum_p C_p^{(k, l, m)} \lambda_1^k \lambda_2^l \lambda_3^m,$$

где суммирование ведется по всем наборам (k, l, m) целых неотрицательных чисел с суммой $k+l+m=p$, отличным от $(p, 0, 0)$, $(0, p, 0)$ и $(0, 0, p)$, а

$$C_p^{(k, l, m)} = \frac{p!}{k!l!m!},$$

и докажем, что при простом p число a_p делится на p .

Ясно, что для указанных наборов (k, l, m) коэффициент $C_p^{(k, l, m)}$ делится на простое p . Далее, выделим в сумме группы слагаемых, отличающихся только перестановкой показателей k, l, m . Коэффициенты $C_p^{(k, l, m)}$ у всех таких слагаемых одинаковы, а сумма соответствующих одночленов $\lambda_1^k \lambda_2^l \lambda_3^m$ — это так называемый *симметрический многочлен* от $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (т. е. не меняющийся при перестановках аргументов). Известно, что такой многочлен всегда можно представить как некий многочлен с целыми коэффициентами от основных симметрических функций $\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\sigma_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1$, $\sigma_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ — это частный случай основной теоремы о симметрических многочленах (см., например, книгу В. Г. Болтянского, Н. Я. Виленкина «Симметрия в алгебре», М.: Наука, 1987). У нас числа $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = 1$ — целые, поэтому сумма слагаемых каждой группы, а значит, и вся сумма делится на p . Тем самым, поскольку $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, и a_p делится на p .

Д. Фомин, Н. Васильев

Ф1228. Из стальной упругой тонкой ленты сделаны два обруча разных радиусов. При скольжении по горизонтальному столу обручи испытывают торможение силами вязкого трения, причем силы пропорциональны скоростям обручей и их поперечным размерам. Если толкнуть

При таком трении длина пройденного обручем пути пропорциональна его начальной скорости. Очень существенно, что обручи сделаны из ленты одинаковой ширины — при этом масса каждого обруча оказывается пропорциональной его диаметру, и ускорения обоих обручей при одинаковых скоростях будут одинаковыми ($a = F_{\text{тр}}/m$, $F_{\text{тр}} \sim d$, $m \sim d$). Это означает, что относительное ускорение обручей определяется лишь их относительной скоростью.

Запишем законы сохранения импульса и энергии для абсолютно упругого удара обручей:

меньший обруч со скоростью v_0 , он пройдет до полной остановки путь L_0 . Толкнем малый обруч так, чтобы он налетел на большой, имея перед ударом скорость v . На каком расстоянии друг от друга остановятся обручи?

Задача «Кванта»

$$m\bar{v} = m\bar{v}_1 + M\bar{v}_2,$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m\bar{v}_1^2}{2} + \frac{M\bar{v}_2^2}{2}.$$

Сделаем некоторые преобразования:

$$m(\bar{v} - \bar{v}_1) = M\bar{v}_2, \quad (1)$$

$$m(v^2 - \bar{v}_1^2) = M\bar{v}_2^2 \quad (2)$$

Заметим, что

$$(\bar{v} - \bar{v}_1)(\bar{v} + \bar{v}_1) = v^2 - \bar{v}_1^2$$

и

$$\bar{v}_2\bar{v}_2 = v_2^2.$$

Тогда соотношение (2) можно записать иначе:

$$m(\bar{v} - \bar{v}_1)(\bar{v} + \bar{v}_1) = M\bar{v}_2\bar{v}_2.$$

Теперь совершим замену из уравнения (1) и получим

$$\bar{v} + \bar{v}_1 = \bar{v}_2, \text{ или } \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \bar{v},$$

т. е. относительная скорость обручей после абсолютно упругого удара (даже нецентрального!) не меняется.

Таким образом, очевидно, что расстояние, на котором остановятся друг от друга обручи (а оно в данном случае зависит только от их относительной скорости), будет равно

$$L = L_0 \frac{v}{v_0}.$$

А. Коршков

Ф1229. В стакан с водой опустили кипятильник, и вода начала понемногу нагреваться. График зависимости температуры воды от времени приведен на рисунке 1. По истечении трех минут кипятильник отключают от сети. Через какое время вода остынет до 50 градусов? до 30?

Начальный участок графика (см. рис. 1) — почти прямолинейный; значит, потери тепла тут малы. Будем считать, что их нет вовсе. Это нам даст возможность оценить теряемую тепловую мощность при разных температурах воды в долях по отношению к мощности нагревателя. Для этого нам нужно сравнить наклоны касательных в разных точках графика.

В области температуры 60 °С тангенс угла наклона касательной в 8 раз меньше тангенса угла наклона начального прямолинейного участка. Это означает, что здесь 7/8 потребляемой энергии уходит наружу. Аналогично получаем, что при температурах, близких к 50 °С, теряется 3/4 энергии. При меньших температурах точность получается совсем плохой, поэтому на второй вопрос (об остывании до 30 °С) ответ можно дать лишь приближительный.

Примерный «график остывания», т. е. график зависимости температуры воды при остывании от времени, приведен на рисунке 2. Из этого графика видно, что время остывания от 60 до 50 °С составляет примерно 0,3 мин, а до 30 °С — 2,5—3 мин.

Эксперимент „Квант“

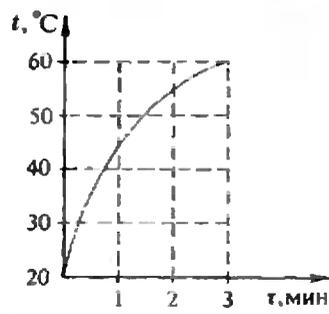


Рис. 1.

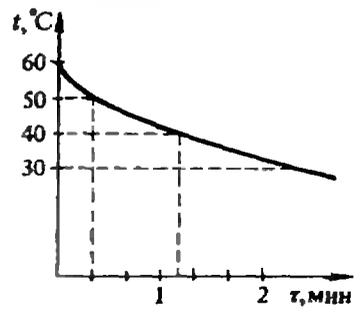


Рис. 2.

Примечание. Полученные ответы, конечно же, очень сильно зависят от вида исходного графика (см. рис. 1). Поэтому не стоит серьезно полагаться на приведенные цифры, лучше постарайтесь аккуратно получить их из своих данных.

В. Рафаилов

Ф1230. Две удаленные друг от друга проводящие сферы, внешние радиусы которых R и $3R$, имеют толщину стенок $R/20$. В центры сфер помещены заряды Q и $2Q$. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы поменять местами эти заряды (в стенках для этой цели предусмотрены маленькие отверстия)?

Удаленность сфер друг от друга означает, что можно пренебречь их взаимным влиянием. Очевидно, что минимальная работа при «перестановке» зарядов не зависит от способа этой перестановки. Важно, чтобы в центре сферы 1 (ее внешний радиус $R_1=R$) оказался заряд $2Q$, а в центре сферы 2 ($R_2=3R$) — заряд Q . Поэтому нам достаточно перенести из второй сферы в первую заряд Q . Минимальность же совершенной работы означает отсутствие возможного рассеяния (диссипации) энергии при движении наведенных зарядов по сферам.

Перенос заряда Q из сферы 2 в сферу 1 будем производить последовательно бесконечно малыми порциями dq . Пусть в некоторый произвольный момент времени мы уже перенесли в первую сферу заряд q . Тогда в центре сферы 1 будет находиться заряд $Q+q$, а в центре сферы 2 — заряд $2Q-q$. Найдем работу dA , которую необходимо совершить, чтобы перенести очередную порцию заряда dq . Электрическое поле каждого из зарядов ($Q+q$ или $2Q-q$), находящихся в центре сфер, будем рассматривать как суперпозицию полей: поля точечного заряда для всех имеющих смысл расстояний r от центра сферы и поля этого же заряда с противоположным знаком в области $R_1-\delta \leq r \leq R_1$ ($\delta=R/20$ — толщина сферы) для сферы 1 и в области $R_2-\delta \leq r \leq R_2$ для сферы 2. Тогда работа dA будет складываться из двух частей: работы по перемещению заряда dq в поле точечных зарядов $Q+q$ и $2Q-q$ и работы по перемещению этого заряда в областях $R_1-\delta \leq r \leq R_1$ и $R_2-\delta \leq r \leq R_2$, где поле создается точечными зарядами $-(Q+q)$ и $-(2Q-q)$.

Задача „Кванта“

Обозначим первую часть работы через dA_1 , а вторую — через dA_2 . Легко сообразить (это вытекает из симметрии пространства), что

$$dA_1 = 0.$$

Работу dA_2 можно записать в виде

$$dA_2 = \frac{2Q - q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2 - \delta} - \frac{1}{R_2} \right) dq + \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1 - \delta} \right) dq.$$

Здесь использовано выражение для потенциала $\varphi(r)$ поля точечного заряда q :

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Проведя суммирование по всем зарядам (проинтегрировав по dq от 0 до q), мы и найдем необходимую работу A . При вычислении работы используем, что

$$\int_0^Q dq = Q \quad \text{и} \quad \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2}.$$

Окончательно получим

$$A = A_2 = \frac{3Q^2\delta}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2(R_2 - \delta)} - \frac{1}{R_1(R_1 - \delta)} \right).$$

Всегда полезно находить ответ в общем виде, поскольку это позволяет провести анализ полученного результата. Например, в данном случае очевидно, что при $\delta \rightarrow 0$ работа также должна стремиться к нулю, что и следует из нашего выражения. При $R_1 = R_2$ работа также должна быть равна нулю, и это тоже следует из нашего решения.

По условию задачи, δ много меньше R_1 и R_2 , поэтому можно записать полученное решение в виде

$$A = \frac{3Q^2\delta}{8\pi\epsilon_0} \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 R_2^2}.$$

При подстановке заданных значений R_1 , R_2 и δ получим

$$A = -\frac{79}{4484} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R} \approx -\frac{1}{60} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R}.$$

Возможен еще один способ решения этой задачи — энергетический. Рассмотрим его для приближенного случая ($\delta \ll R$). Запишем энергию нашей системы в начальном состоянии:

$$W_{\text{н}} = W_1 - \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} 4\pi R_1^2 \delta + W_2 - \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} 4\pi R_2^2 \delta.$$

Здесь W_1 и W_2 — энергии электрических полей точечных зарядов Q и $2Q$, $E_1 \approx Q/(4\pi\epsilon_0 R_1^2)$ — напряженность электрического поля заряда Q на расстояниях $R_1 - \delta \leq r \leq R_1$, $E_2 \approx 2Q/(4\pi\epsilon_0 R_2^2)$ — напряженность поля заряда $2Q$ на расстояниях $R_2 - \delta \leq r \leq R_2$. После подстановки получим

$$W_{\text{н}} \approx W_1 - \frac{Q_2 \delta}{8\pi\epsilon_0 R_1^2} + W_2 - \frac{Q^2 \delta}{2\pi\epsilon_0 R_2^2}.$$

Задача „Кванта“

Для конечного состояния:

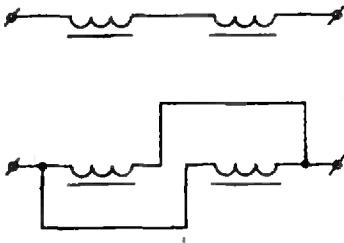
$$W_k \approx W_2 - \frac{Q^2 \delta}{2\pi \epsilon_0 R_1^2} + W_1 - \frac{Q^2 \delta}{8\pi \epsilon_0 R_2^2}.$$

Искомая работа будет равна разности конечной и начальной энергий:

$$A = W_k - W_n \approx \frac{3Q^2 \delta}{8\pi \epsilon_0} \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 R_2^2}.$$

В. Можжев

Ф1231. *Две цилиндрические катушки с ферритовыми сердечниками помещены недалеко друг от друга и соединены последовательно. Индуктивность одной из них равна 1 мГн, другой — 2 мГн, а измеренная индуктивность катушек, соединенных последовательно, составила 3,6 мГн. Не меняя взаимного положения катушек, их переключают в параллель (см. рисунок). Какую индуктивность мы измерим теперь?*



Если бы катушки находились далеко друг от друга, их взаимным влиянием можно было бы пренебречь. Тогда магнитный поток определялся бы величиной

$$\Phi = L_1 I + L_2 I = (L_1 + L_2) I,$$

т. е. результирующая индуктивность была бы равна сумме индуктивностей катушек. В нашем случае это не так:

$$L_{\text{общ}} = 3,6 \text{ мГн} > L_1 + L_2,$$

значит, существенную часть полного магнитного потока составляет «взаимный» поток, создаваемый током одной катушки через витки другой. Другими словами,

$$\Phi_{\text{общ}} = L_1 I + L_2 I + MI + MI = (L_1 + L_2 + 2M) I.$$

Здесь буквой M мы обозначили «взаимную индуктивность» (точнее — коэффициент взаимной индукции) — коэффициент пропорциональности между током в одной катушке и магнитным потоком, пронизывающим витки другой катушки (индуктивность катушки, кстати, раньше называли «коэффициентом самоиндукции»). Собственно, коэффициентов взаимной индукции два: между током первой катушки и потоком во второй и между током второй катушки и потоком в первой. Эти коэффициенты всегда одинаковы. Для катушек, имеющих разное количество одинаковых витков, это равенство легко доказать (попробуйте), в общем случае сделать это довольно трудно — однако сам факт известен хорошо.

Найдем теперь коэффициент взаимной индукции:

$$M = (L_{\text{общ}} - L_1 - L_2) / 2 = 0,3 \text{ мГн}.$$

При переключении концов катушек их взаимное положение не меняется, а значит, и «взаимная индуктивность» остается прежней, хотя вклад взаимных потоков может быть как положительным, так и отрицательным (в зависимости от порядка подключения проводов). При получении ответа мы будем учитывать оба возможных варианта, считая $M = \pm 0,3$ мГн.

Итак, обозначим токи катушек после параллельного включения через I_1 и I_2 . ЭДС индукции ветвей одинаковы; значит, одинаковы и магнитные потоки:

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + MI_2, \quad \Phi_2 = L_2 I_2 + MI_1, \quad \Phi_1 = \Phi_2, \quad I_1 + I_2 = I_{\text{общ}}.$$

Задания "Кванта"

Теперь можно выразить любой из потоков через общий ток и коэффициент пропорциональности между ними — это и будет измеренное значение индуктивности:

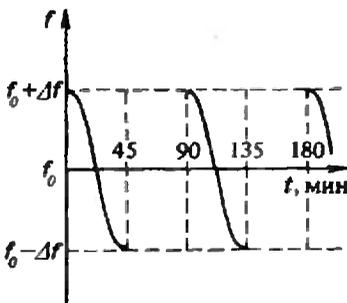
$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2 = I_{\text{общ}} (L_1 L_2 - M^2) / (L_1 + L_2 - 2M).$$

Выражение во внешних скобках и есть искомая индуктивность. Подставляя $M = 0,3$ мГн, получим $L_{\text{общ}1} = 0,8$ мГн; при $M = -0,3$ мГн $L_{\text{общ}2} = 0,53$ мГн.

Интересное применение обнаруженного эффекта: для подбора индуктивности катушки можно составить ее из двух и плавно регулировать общую индуктивность, меняя в некоторых пределах взаимное расположение катушек (для этого их выводы должны быть достаточно длинными).

А. Зильберман

Ф1232. На большом расстоянии от Земли находится планета ДВК-1, вокруг которой по круговой орбите вращается спутник БК-0010Ш. На спутнике установлена радиостанция, излучающая сигнал постоянной частоты. На Земле принимают этот сигнал, однако при этом возникают перерывы — 45 минут сигнал есть, потом 45 минут он отсутствует, потом опять 45 минут есть и т. д. Этим дело не ограничивается — частота принимаемого сигнала изменяется относительно среднего значения $f_0 = 1,5 \cdot 10^9$ Гц по закону, показанному на рисунке ($\Delta f = 3 \cdot 10^4$ Гц). Считая, что отрезок Земля — планета лежит в плоскости орбиты спутника, найдите массу ДВК-1.



Период обращения спутника планеты равен, очевидно,

$$T = 2 \cdot 45 \text{ мин} = 90 \text{ мин}.$$

Половину этого времени спутник закрыт планетой; значит, он летает совсем близко к ее поверхности. Изменение частоты принимаемого сигнала связано с эффектом Доплера:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{v}{c}.$$

Здесь v — скорость спутника, c — скорость распространения сигнала (скорость света).

С другой стороны, из соотношений механики

$$T = \frac{2\pi R}{v} \text{ и } \frac{mv^2}{R} = G \frac{mM}{R^2},$$

где R — радиус, M — масса планеты, G — гравитационная постоянная.

После простых преобразований находим искомую массу планеты:

$$M = \left(c \frac{\Delta f}{f_0} \right)^3 \frac{T}{2\pi G} \approx 2,8 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

М. Гаврилов

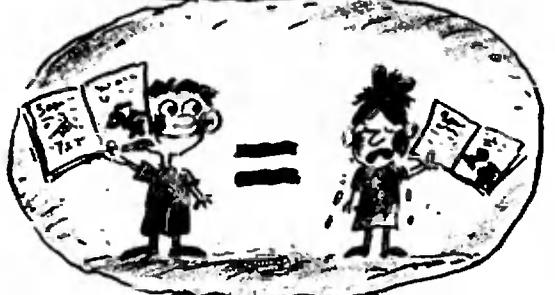
"Клант" для младших школьников

Задачи

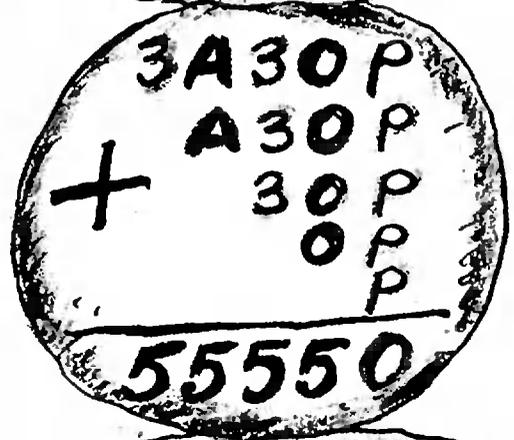
1. Цену на яблоки подняли на 20 %. Однако продавцу для того, чтобы изменить ценник, оказалось достаточно поменять местами цифры стоимости килограмма яблок. Сколько стоили яблоки до их подорожания, если эта цена была меньше рубля?



2. Учитель задал на уроке замысловатую задачу. В результате количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным количеству девочек, ее не решивших. Кого в классе больше — решивших задачу или девочек?



3. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.



4. Два разных цилиндра имеют одинаковую боковую поверхность, равную 100 см^2 . Покажите, что можно вырезать из бумаги параллелограмм площадью 100 см^2 , которым можно оклеить боковую поверхность как первого, так и второго цилиндра.



5. Школа находится на одной улице с моим домом. Однажды, идя в школу, я стал считать на моей стороне улицы сумму номеров домов, мимо которых я проходил. Когда сумма номеров стала равна 99, перешел через поперечную улицу. После этого я начал считать снова и насчитал сумму 117. Затем перешел через еще одну поперечную улицу. И в следующем квартале считал сумму номеров домов. Там она оказалась равной 235, включая и номер дома школы, которая стоит последней в этом квартале. В доме с каким номером живу я? Какой номер дома имеет школа?



Эти задачи нам предложили Г. Щеголихин, ученик 11 класса школы № 149 г. Харькова Сергей Ляшенко, ученик 10 класса ФМШ № 1 г. Еревана Ваган Абрамян, В. Произволов, В. Кот.

Кто придумал «ночезрительную трубу»?

Кандидат физико-математических наук
В. БРОНШТЭН

Года три назад я получил письмо от юного любителя астрономии Яна Харитоновича из Харькова. Вот что он писал:

«Недавно вышла замечательная книга П. Г. Куликовского «М. В. Ломоносов — астроном и астрофизик», а также новое издание известной книги Ф. Ю. Зигеля «Астрономическая мозаика». В первой книге рассказывается о творческой деятельности М. В. Ломоносова. В том числе на с. 82 приведен рисунок «ночезрительной трубы» Ломоносова. В книге Ф. Ю. Зигеля... имеется рассказ о телескопе Леонардо да Винчи, причем на с. 22 приведен рисунок этой трубы (в реконструкции В. А. Гурикова). Если убрать 5 перечеркивающих рисунок линий, то получим... рисунок «ночезрительной трубы» Ломоносова».

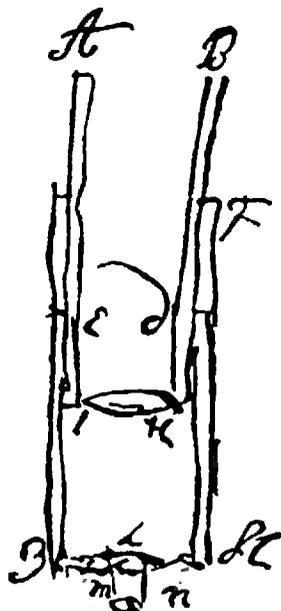


Рисунок из книги П. Г. Куликовского.

Сняв с полки названные книги, я убедился, что Я. Харитонович прав. Рисунки совершенно идентичны. Позвонил обоим авторам, задал им один и тот же вопрос: откуда вы взяли этот рисунок? П. Г. Куликовский ответил: из статьи С. И. Вавилова «Ночезрительная труба Ломоносова» в томе II сборника «Ломоносов», изданного в 1946 году. Ф. Ю. Зигель: из статьи В. А. Гурикова в журнале «Земля и Вселенная», вот только год и номер не помню.*)

Беру сборник со статьей С. И. Вавилова. Статья большая, интересная, вот только рисунка этого в ней нет. Беру том IV «Полного собрания сочинений М. В. Ломоносова», где помещена статья о «ночезрительной трубе», и там нахожу этот рисунок, воспроизведенный даже дважды: в латинском тексте (Ломоносов писал на латыни) и в русском переводе. Вот что пишет Ломоносов в пояснении к рисунку:

«С этой целью я приладил две трубы таким способом, какой мы применяли для устройства телескопов и микроскопов. В просвете трубы *ABCD* я поместил двояковыпуклую линзу, диаметр которой составлял около 4 лондонских дюймов [около 10 см — *В. Б.*]... В крышке трубы *EFGH*, внутри которой передвигалась первая труба, было круглое отверстие, в которое были вставлены собирательные линзы *mn*, двояковыпуклые и обладающие различными диаметрами и фокусами».

Обратите внимание на то, что в тексте Ломоносова упоминаются и объясняются буквенные обозначения, имеющиеся на рисунке.

Однако в окончательный текст статьи Ломоносов этот кусок и рисунок не включил, перечеркнул текст и рисунок и заменил их более коротким текстом (без рисунка). Поэтому в томе IV «Полного собрания сочинений» ученого старый текст и перечеркнутый рисунок приводятся в подстрочном примечании.

Итак, ясно: рисунок «ночезрительной трубы» несомненно принадлежит

*) Этот разговор происходил незадолго до безвременной кончины Ф. Ю. Зигеля, последовавшей 15 ноября 1988 г.

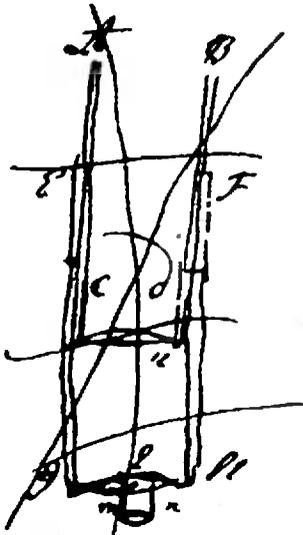


Рисунок из книги Ф. Ю. Зигеля.

Ломоносову. Откуда же взялась версия, что это — чертеж Леонардо да Винчи?

После длительных поисков я нашел статью В. А. Гурикова «Зрительная труба Леонардо да Винчи» в журнале «Земля и Вселенная» № 4 за 1977 год (с. 70—73). На с. 73 нахожу уже знакомый мне рисунок с подписью «Схема зрительной трубы (рисунок Леонардо да Винчи)». Звоню автору статьи и задаю ему тот же вопрос: откуда вы взяли рисунок? Откуда следует, что он принадлежит Леонардо? В. А. Гуриков сообщает, что позаимствовал его из книги Я. Г. Дорфмана «Всемирная история физики (с древнейших времен до конца XVIII в.)» (М.: Наука, 1974). Нахожу эту книгу и на с. 125 вижу... тот же рисунок и с той же подписью, что и у В. А. Гурикова. Увы, спросить Я. Г. Дорфмана уже нельзя: он скончался в 1974 году. Нужно искать дальше.

Прежде всего: у кого позаимствовал Я. Г. Дорфман описание трубы Леонардо? Вижу — даны ссылки на работу С. И. Вавилова, только, конечно, на другую, не ту, где он описывал «ночезрительную трубу» Ломоносова. Прекрасно! Уж такой специалист, как С. И. Вавилов, знавший сочинения обоих корифеев науки, не мог ошибиться и приписать Леонардо схему трубы Ломоносова. Нахожу в третьем томе

«Собрания сочинений» С. И. Вавилова (М.: АН СССР, 1956) нужную работу и читаю ее внимательно, заодно сверяя текст с текстом Я. Г. Дорфмана. Вот что написано в обеих работах:

Вавилов, с. 247—248: Несомненно, что Леонардо не только мечтал о телескопических устройствах, но действительно их осуществлял. В кодексе А (л. 12) находятся следующие строки, поясненные рисунком (ср. фиг. 6):

Дорфман, с. 124—125: Несомненно, — говорит С. И. Вавилов, — что Леонардо не только мечтал о телескопических устройствах, но действительно их осуществлял. В записях Леонардо имеется следующее указание, поясненное рис. 16:

И дальше оба автора приводят одни и те же слова Леонардо: «Чем дальше отодвигаешь ты стекло от глаза, тем большими покажет оно предметы для глаза 50 лет; если глаза для сравнения глядят один через очковое стекло, другой вне его, то для одного предмет покажется большим, а для другого малым, но для этого видимые вещи должны быть удалены от глаза на 200 локтей». Только у Дорфмана слово «локтей» заменено на «футов» (хотя флорентийский локоть был равен двум футам (60 см)).

«Рис. 16» у Дорфмана — это уже хорошо знакомый нам рисунок Ломоносова. Но «фиг. 6» у Вавилова выглядит совсем иначе. На нем лучи от одного объекта проходят через линзу, а от другого не проходят. Те и другие сходятся в глазу наблюдателя. Нет никакой трубы!

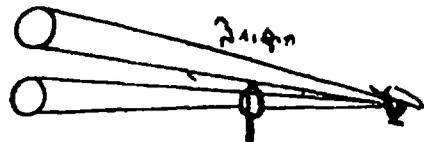


Рисунок из книги С. И. Вавилова.

Итак, ошибку допустил Я. Г. Дорфман, а его ошибку повторили В. А. Гуриков и Ф. Ю. Зигель. Как такой опытный историк науки, каким был Я. Г. Дорфман, мог допустить подобную ошибку, остается загадкой.

В связи с этим стоит сказать два слова о судьбе сочинений Леонардо и заодно предупредить могущий возникнуть у кого-нибудь из читателей «каверзный» вопрос: а не мог ли

Ломоносов познакомиться с сочинениями Леонардо и в них позаимствовать идею своей трубы?

Нет, не мог. Леонардо при жизни ничего не опубликовал из своих сочинений, и они оставались в рукописях, хранившихся в тех городах, где жил и работал Леонардо — во Флоренции, в Милане, в Риме. Лишь в 1796—1797 годах во время завоевания Италии Наполеон Бонапарт вывез из Милана 13 рукописей Леонардо, и в 1797 году профессор Вентури сделал их анализ, о чем доложил в Национальном институте в Париже. Но публикация трудов Леонардо началась столетием позже, в конце XIX века. Сейчас эти труды изданы многими изданиями, в основном на итальянском и французском языках. Издан и кодекс А, о котором пишет С. И. Вавилов. В него сведены рукописи смешанного содержания, написанные около 1492 года и попавшие в Париж. Там, в хранилище Национального института, и находится рукопись кодекса А.

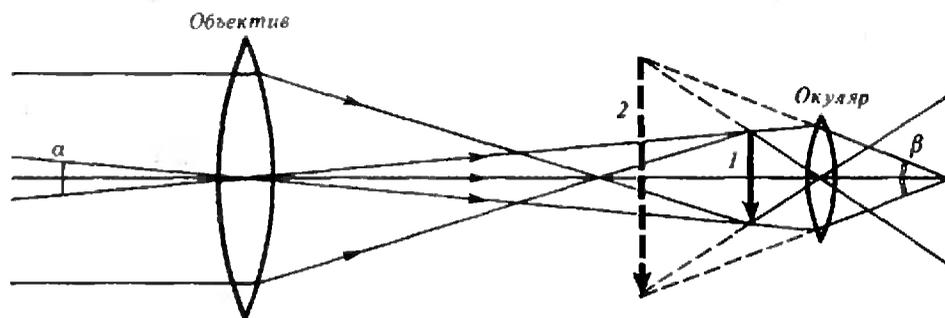
Что касается рукописи Ломоносова, то она хранится в Архиве Академии наук СССР в Москве. Его статья была представлена в Академию наук 19 января 1758 года, за 40 лет до вывоза рукописей Леонардо во Францию. А в Италии Ломоносов, как известно, не бывал. Так что никакого заимствования здесь произойти не могло.

Этот случай показывает, насколько бережно и внимательно надо подхо-

дить к творческому наследию наших великих предшественников.

Ну, а теперь посмотрим на этот вопрос с другой точки зрения. Какие цели преследовал Ломоносов, создавая «ночезрительную трубу»? Сам Ломоносов отвечает на этот вопрос так: «чтобы различать в ночное время скалы и корабли». И в самом деле, объектив трубы Ломоносова имел диаметр (10 см) в 2—3 раза больше, чем у большинства подзорных труб, применявшихся тогда, например, во флоте. Следовательно, он собирал в 4—9 раз больше света, чем эти трубы. (Первоначально Ломоносов называл свое изобретение «машина для сгущения света».) Выражаясь современным языком, труба Ломоносова была более светосильной. Академики, рассматривавшие предметы в эту трубу при слабом освещении, отметили, что «предмет, поставленный в темную комнату, различается через эту трубу яснее, чем без нее». Эта первая демонстрация «ночезрительной трубы» состоялась, как следует из протокольной записи, 13 мая 1756 года.

И все же многие академики (А. Н. Гришов, Н. И. Попов) не приняли идею Ломоносова, полагая, что он наделяет свою трубу «чудесными качествами, не имеющими смысла с научной точки зрения». Хотя Ломоносов не согласился со своими оппонентами, он был вынужден убрать из текста статьи схему и подробное описание трубы. Вот почему его рисунок перечеркнут крест-накрест.



Ход лучей в «ночезрительной трубе» Ломоносова. 1 — действительное изображение предмета, даваемого объективом; 2 — мнимое изображение, видимое в окуляре; α — угловой раз-

мер наблюдаемого (невооруженным глазом) объекта; β — угловой размер изображения объекта, даваемого трубой; отношение β/α называется увеличением телескопа ($\beta/\alpha \gg 1$).

В течение 1757 года Ломоносов несколько раз сам откладывал публичное выступление с описанием своего проекта. К этому времени у него объявился новый противник, академик Ф. Эпинус, написавший против идеи Ломоносова даже специальную статью, которая, однако, до нас не дошла.

Наконец, 19 января 1758 года конференция-секретарь Академии наук Г. Ф. Миллер принял работу Ломоносова, в тот же день был прочитан его доклад, а вскоре была опубликована и статья.

Но споры вокруг «ночезрительной трубы» продолжались. Одно дело — наблюдения слабо освещенных предметов на близком расстоянии, говорили оппоненты великого ученого, а

другое дело — на море. И тогда Ломоносов заказал академическим мастерам шесть труб: три обычных подзорных трубы и три «ночезрительных». Все шесть были переданы адмиралу В. Я. Чичагову, эскадра которого готовилась к отплытию в дальнее полярное плавание. Но вскоре после ее отплытия М. В. Ломоносов скончался. Это произошло 15 апреля 1765 года. Чем закончились испытания «ночезрительных труб» — нам неизвестно.

Дальнейшие разработки подтвердили правоту Ломоносова. Светосильные трубы и бинокли получили широкое распространение не только в астрономии (хотя бы для поисков комет), но и на флоте, в авиации и артиллерии, во многих областях науки и техники.

Заказы принимаются

(по страницам темплана Главной редакции физико-математической литературы ИПКО «Наука» на 1991 г.; начало см. в № 8)

Физика

58. Добролюбов А. И. *Скольжение — качество — волна*. 70 к.

61. Абрагам А. *Время вспять, или Физик, физик, где ты был: Автобиография*. 2 р. 50 к.

74. Марков М. А. *О трех интерпретациях квантовой механики*. 1 р. 40 к.

84. Гинзбург В. Л. *О физике и астрофизике*. 2 р. 50 к.

93. Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. *Физика для поступающих в вузы*. 1 р. 20 к.

Астрономия

96. Докучаева О. Д. *Астрономическая фотография*. 7 р.

99. *На рубежах познания Вселенной*. 2 р.

100. Климишин И. А. *Элементарная астрономия*. 1 р. 20 к.

101. Куликов С. *Нить времени*. 50 к.

102. Степанян Н. Н. *Наблюдаем Солнце*. 30 к.

103. Ходж П. *Галактики*. 60 к.

104. *Астрономический календарь на 1992 год*. 1 р. 20 к.

105. Куликовский П. Г. *Справочник любителя астрономии*. 2 р. 70 к.

106. Бакулин П. И., Кононович Э. В., Мороз В. И. *Курс общей астрономии*. 1 р. 50 к.

Информатика

76. *ПЭВМ Корвет в физической лаборатории*. 2 р.

81. Шмид Е. В., Шпиц Г., Леш В. *Компьютеры в теоретической физике*. 1 р. 70 к.

108. Вольский В. И., Лезина Э. М. *Голосование в малых группах*. 1 р. 10 к.

110. Дейт К. *Введение в системы баз данных*. Т. 1. 3 р.

111. Дейт К. *Введение в системы баз данных*. Т. 2. 3 р.

112. Калашников В. В., Носовский Г. В., Фоменко А. Т. *Компьютерные методы распознавания звездных конфигураций. Датировка звездного каталога Альмагеста*. 4 р.

113. Калининченко Л. А., Рывкин В. М. *Процессоры баз данных*. 4 р.

115. Котов В. Е., Сабельфельд В. К. *Теория схем программ*. 4 р.

117. Льюнг Л. *Идентификация систем. Теория для пользователей*. 5 р.

122. Шварц М. *Сети связей: протоколы, моделирование и анализ*. 8 р.

123. Смирнов А. Д. *Архитектура вычислительных систем*. 90 к.

Библиотечка «Кванто

125. Богданов К. Ю. *Физик в гостях у биолога*. 70 к.

126. Гамов Дж. *Приключения мистера Томпкинса*. 60 к.

127. Канер В. В., Руденко О. В. *В мире мощного звука*. 50 к.

128. Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. *Введение в теорию вероятностей*. 70 к.

129. Носов Ю. Р. *Дебют оптоэлектроники*. 60 к.

130. *Опыты в домашней лаборатории*. 50 к.

131. Хонсбергер Р. *Математические изюминки*. 60 к.

Кассейдоскоп "Кванта"

Парабола

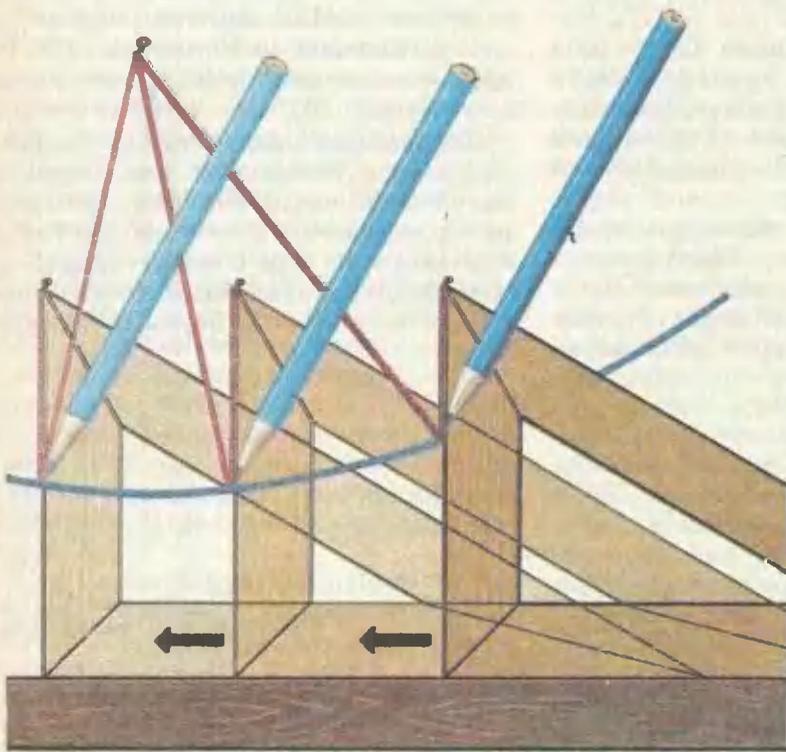
стоянии и прижимается к первому катету (скользя вдоль него). При движении угольника вдоль линейки карандаш вычерчивает параболу.

динаты фокуса параболы во втором случае будут $(p/2; 0)$. Вершина параболы — точка ее пересечения с осью симметрии — в обоих случаях будет находиться в начале координат. Параболой будет и график любого квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$.

Парабола относится к семейству кривых, называемых коническими сечениями. Она получается при сечении конуса плоскостью, параллельной образующей конуса. Шарик, касающийся конуса по окружности и одновременно касающийся этой плоскости, будет иметь точку касания с плоскостью в фокусе параболы.

Знание свойств параболы помогает при решении квадратного уравнения, поскольку точки пересечения параболы, являющейся графиком квадратного трехчлена, с осью абсцисс и есть корни этого трехчлена.

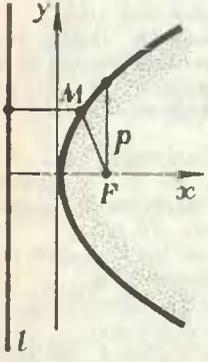
На первый взгляд, параболы имеют разную форму. Например, параболу, заданная уравнением $y=10x^2$ кажется узкой, а параболу $y=0,1x^2$ — широкой. В действительности, все параболы подобны друг другу и, стало быть, имеют оди-



Параболу можно определить как кривую, состоящую из всех точек M плоскости, одинаково удаленных от заданной точки — фокуса параболы — и от заданной прямой — директрисы.

Такое определение параболы наводит на идею создания чертежного прибора, способного вычерчивать параболу. Прибор состоит из линейки и угольника, к одному из острых углов которого прикреплена нитка, по длине равная прилегающему к этому углу катету (будем считать этот катет первым). Другой конец нитки закрепляется в точке плоскости — фокусе параболы, линейка прикладывается к директрисе, угольник скользит вторым катетом по линейке, а карандаш удерживает нить в натянутом со-

В математике принято записывать уравнение параболы либо в виде $y=ax^2$, либо в виде $y^2=2px$. В первом случае ось симметрии параболы направлена по оси y , а во втором — по оси x . Коор-





наковую форму. Так, парабола $y=0,1x^2$ подобна параболе $y=10x^2$ с коэффициентом подобия, равным 100.

Американский физик Роберт Вуд получил параболическое зеркало, вращая сосуд с налитой в него ртутью. Зеркало получилось

отличным. Поверхность такого зеркала называется параболоидом вращения.

Если параболоид вращения пересекать плоскостями, то будут получаться в сечении либо эллипсы, либо параболы. Это свойство поверхности сохранится, если ее сжать к одной из плоскостей, проходящих через ось вращения. В силу этого свойства такая поверхность называется эллиптическим параболоидом.

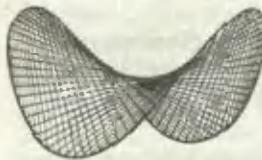
Уравнение эллиптического параболоида имеет вид

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Существует еще один тип параболоидов — гиперболический параболоид. Его сечения плоскостью дают либо гиперболу, либо параболу. Внешне он по-

хорошо известно, что траектория камня, брошенного под углом к горизонту, при отсутствии сопротивления воздуха будет параболой, однако мало кому известно, что зона достижимости для пущенных нами камней или снарядов, вылетающих из пушки, также будет ограничена параболой.

Здесь мы говорим об огибающей кривой траекторий камней, выпущенных из данной точки под разными углами, но с одной и той же начальной скоростью. Если рассматривать такую огибающую в пространстве (см. рисунок), то возникнет поверхность, образованная вращением этой параболы вокруг ее оси — параболоид вращения.

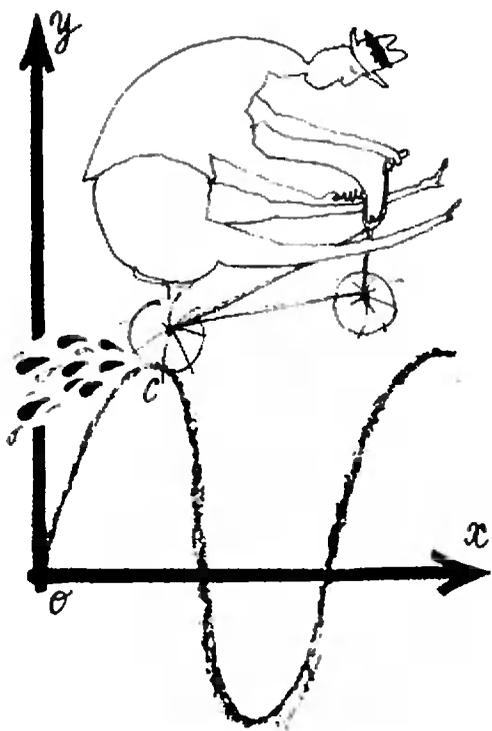


хож на седло. Любопытно, что его можно «соткать» из прямых.



Парабола обладает очень важным оптическим свойством: лучи, исходящие из источника света, находящегося в фокусе параболы, после отражения от параболы оказываются направленными параллельно ее оси. Это свойство используется при изготовлении зеркал для прожекторов, автомобильных фар, телескопов.





Школа "Квант"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Кинематика плоскопараллельного движения» предназначена девятиклассникам, заметка «Генератор незатухающих колебаний» — одиннадцатиклассникам.

Кроме того, с этого учебного года мы начинаем регулярные публикации «Избранных школьных задач по физике».

Кинематика плоскопараллельного движения

Что общего между вращением Земли вокруг своей оси, движением стрелок часов, колес автомобиля на прямолинейном участке пути и т. п.? С точки зрения кинематики, все это примеры так называемого плоскопараллельного движения твердого тела, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях.

Разумеется, в самом общем случае различные точки тела могут двигаться по-разному. Однако принято выделять два частных случая и говорить о двух простейших типах движения — о поступательном движении и о вращении вокруг неподвижной оси. В первом случае все точки тела совершают одинаковые перемещения. Это движение самое простое, и здесь мы его обсуждать не будем. Во втором случае все точки описывают одинаковые траектории — окружности с центрами на оси вращения. Основной характеристикой такого движения является угловая скорость вращения ω .

Давайте вычислим, например, угловые скорости стрелок часов. Так как стрелки вращаются равномерно, то угол поворота φ со временем изменяется по закону $\varphi = \omega t$ (уравнение равномерного вращения). Секундная стрелка делает один оборот за 60 секунд; следовательно, ее угловая скорость равна $\omega_c = 2\pi/60 \text{ с} = 0,1047 \text{ с}^{-1}$. Аналогично, скорость часовой стрелки равна $\omega_{\text{ч}} = 2\pi/(12 \cdot 60 \cdot 60) \text{ с} = 0,0001455 \text{ с}^{-1}$.

А как добиться того, чтобы секундная и часовая стрелки двигались с различными угловыми скоростями, но синхронно? Оказывается, для этого используется *зубчатая передача*: два зубчатых колеса могут вращаться вокруг разных осей, но при этом они входят в зацепление друг с другом (рис. 1). Поскольку линейные скорости точки A одинаковы —

$$v_a = \omega_1 R = \omega_2 r,$$

получаем

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r}{R} = \frac{z_1}{z_2},$$

где z_1 и z_2 — число зубцов шестеренок.

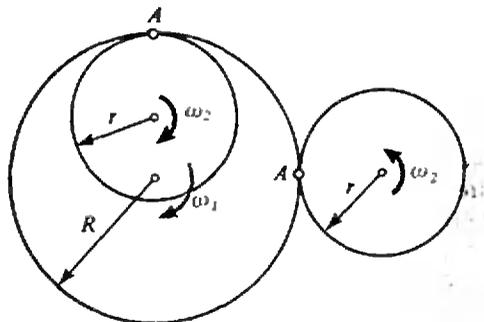


Рис. 1.

Кроме того, можно заметить, что при внутреннем зацеплении вращение шестеренок происходит в одном направлении, а при внешнем — в противоположных направлениях. С помощью таких (и более сложных) зубчатых передач осуществляется соединение стрелок в часах, передача усилий в домкрате, изменение величины скорости и «задний ход» у автомобиля.

Теперь рассмотрим более сложное плоскопараллельное движение твердого тела, когда тело вращается, но ось вращения сама поступательно перемещается в пространстве. Скорости такого движения проще всего найти, используя понятие *мгновенного центра вращения* — так называют точку, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Скорости всех остальных точек тела при этом будут такими, как будто тело вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через мгновенный центр вращения.

В качестве примера разберем движение колеса на прямолинейном участке пути без проскальзывания. Так как колесо не проскальзывает, точка C (рис. 2), в которой колесо касается дороги, имеет скорость равную нулю. Значит, точка C и есть мгновенный центр вращения. Найдем, какой будет угловая скорость вращения колеса, если скорость его центра O (скорость поступательного движения колеса) равна v_0 :

$$v_0 = \omega r, \text{ и } \omega = v_0 / r.$$

Легко находится и скорость произвольной точки A . Она направлена по линии AB и равна

$$v_a = \omega \cdot CA = 2\omega r \cos \alpha = 2v_0 \cos \alpha.$$

На рисунке 2 изображена также траектория, которую описывает каждая точка обода катящегося колеса. Эта удивительная кривая — циклоида — встретится вам во многих случаях: по такой траектории движутся частицы в «скрещенных» (взаимно перпендикулярных) электрическом и магнитном полях, по циклоиде шарик скатывается за минимальное время и т. д.

Теперь легко ответить на вопрос, который обычно вызывает затрудне-

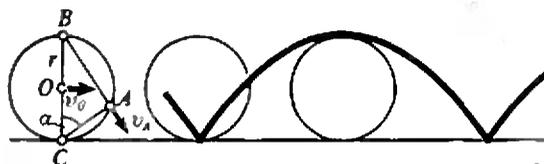


Рис. 2.

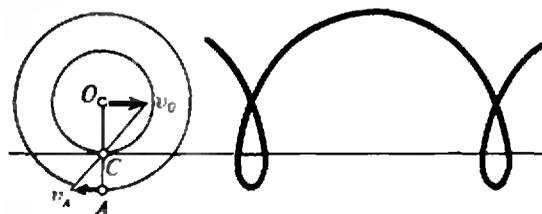


Рис. 3.

ния: почему, если смотреть на движущегося велосипедиста, то верхние спицы колес сливаются в одно целое, а нижние видны отдельно. Очевидно, это связано с тем, что скорости нижней половины колеса меньше, чем верхней (подумайте, почему, если смотреть на велосипедиста из окна движущегося в ту же сторону автобуса, этот эффект пропадает?).

А что если мы захотим определить скорость колес вагона движущегося поезда? Мы обнаружим, что на ободе колеса имеются точки, которые движутся назад, в противоположную движению поезда сторону. Это — точки выступающей части колеса, например точка A на рисунке 3. Мгновенный центр вращения (точка C) находится на неподвижном рельсе, по которому колесо катится без проскальзывания. Траектория точки обода колеса еще более любопытна, чем в предыдущем случае, — на траектории имеются возвратные участки движения (петли). Интересно отметить, что аналогичные петлеобразные траектории описывают в своем движении планеты. Их наблюдали еще древнегреческие астрономы, однако объяснить увиденное они не смогли. Сейчас мы знаем, что эти траектории связаны с наложением двух вращений — Земли и наблюдаемой планеты вокруг Солнца.

Всегда ли при плоскопараллельном движении траектории оказываются такими сложными? Попробуйте определить, например, какую траекторию описывают точки обода колеса радиу-

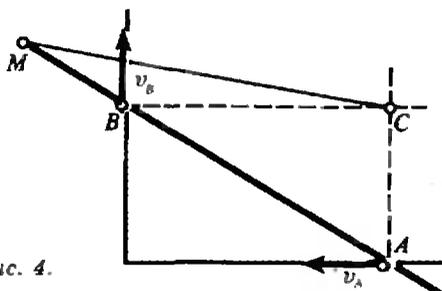


Рис. 4.

сом r , которое катится по внутренней поверхности неподвижного колеса радиусом $2r$.

В заключение мы хотим познакомить вас с простым по конструкции, но важным для практики прибором — линейкой-эллипсографом (рис. 4), который служит для вычерчивания эллипсов. Точки A и B такого прибора двигаются по взаимно перпендикулярным направляющим OA и OB , а точка M при этом описывает эллипс (подумайте, почему). Где находится мгновенный центр вращения в этом случае? Как найти скорость точки M , зная скорости точек A и B ?

Рассмотрим жесткий треугольник CBA (точка C лежит на пересечении перпендикуляров к направляющим). Проекции скоростей двух точек твердого тела на линию их соединения всегда равны. Для точек C , A и C , B это возможно, если $v_C = 0$, т. е. если точка C — мгновенный центр вращения. Скорость точки M можно определить, зная скорость точки A , например:

$$v_A = \omega \cdot CA, \text{ и } v_M = v_A \cdot CM/CA.$$

Аналогичным образом, используя понятие мгновенного центра вращения, можно легко находить скорости любых точек механизмов, совершающих плоскопараллельное движение.

М. Фистуль

Генератор незатухающих колебаний

Такие генераторы применяются во многих устройствах — радиоприемниках, телевизорах, магнитофонах, компьютерах, электроорганах и т. п. — и бывают самыми разными. Так, частоты генераторов могут лежать в диапазоне от нескольких десятков герц (низкие ноты в электрооргане) до сотен мегагерц (телевидение) и даже до нескольких гигагерц (спутниковое телевидение, радиолокаторы, используемые сотрудниками ГАИ для определения скорости автомобиля). Мощность, которую может отдать генератор потребителю, составляет от нескольких микроватт (генератор в наручных часах) до десятков ватт (генератор телевизионной развертки), а в некоторых специальных случаях мощность может быть такой, что и писать нет смысла — все равно вы не поверите. Форма колебаний возможна как самая простая — синусоидальная (гетеродин радиоприемника) или прямоугольная (таймер компьютера), так и весьма сложная — «имитирующая» звучание музыкальных инструментов (музыкальные синтезаторы).

Конечно, мы не будем рассматривать все это разнообразие, а ограничимся совсем простым примером — маломощным генератором синусоидального напряжения умеренной частоты (сотни килогерц).

Как известно, в простейшем колебательном контуре, состоящем из идеального конденсатора и идеальной катушки, могут происходить незатухающие гармонические колебания. Уравнение процесса легко получить, приравняв (с учетом знаков) напряжения на конденсаторе и на катушке — ведь они включены параллельно (рис. 1):

$$\frac{q}{C} = -LI'.$$

Ток, протекающий через катушку, изменяет заряд конденсатора; эти величины связаны соотношением

$$I = q'.$$

Теперь можно записать уравнение

$$q'' + \frac{q}{LC} = 0.$$

Решение этого уравнения хорошо известно — это гармонические колебания. Их частота определяется параметрами колебательного контура: $\omega = 1/\sqrt{LC}$, а амплитуда зависит только от энергии, которую вначале сообщили контуру (и которая для идеального контура остается постоянной).

Что изменится, если элементы контура не идеальные, как и бывает реально на практике (за много лет автор так и не увидел ни одной идеальной катушки, хотя очень интересовался этим вопросом)? Пусть, для определенности, вся неидеальность контура связана с тем, что у катушки, точнее — у провода, из которого она намотана, есть активное (омическое) сопротивление r (рис. 2). На самом деле, конечно, потери энергии есть и у конденсатора (хотя на не очень высоких частотах сделать очень хороший конденсатор можно без особого труда). Да и потребитель отнимает у контура энергию, что также способствует затуханию колебаний. Одним словом, будем считать, что r — это эквивалентная величина, отвечающая за все потери энергии в контуре. Тогда уравнение процесса приобретает вид

$$LI' + rI + \frac{q}{C} = 0.$$

Ясно, что именно второе слагаемое не дает получить желанное уравнение незатухающих колебаний. Поэтому наша задача — это слагаемое

скомпенсировать. Физически это означает, что в контур надо подкачать дополнительную энергию, т. е. ввести еще одну ЭДС. Как же это сделать, не разрывая цепь? Проще всего воспользоваться магнитным полем — создать дополнительный магнитный поток, пронизывающий витки катушки контура. Для этого неподалеку от этой катушки нужно разместить еще одну катушку (рис. 3) и пропускать через нее ток, величина которого должна изменяться по нужному закону, т. е. так, чтобы этот ток создал как раз такое магнитное поле, которое, пронизывая катушку контура, создаст в ней такой магнитный поток, который, изменяясь, наведет такую ЭДС индукции, которая в точности скомпенсирует неуютное нам слагаемое в уравнении процесса. Вся эта длинная фраза, напоминающая «дом, который построил Джек», — просто пересказ известного вам закона Фарадея для явления электромагнитной индукции.

Разберемся теперь с током, который должен течь по дополнительной катушке. Понятно, что для него необходим источник энергии (для пополнения потерь энергии в контуре) и регулирующее устройство, обеспечивающее нужный закон изменения тока со временем. В качестве источника можно использовать обычную батарейку, а в качестве регулирующего устройства — электронную лампу или транзистор.

Транзисторы бывают различных типов — обычные (их называют биполярными) и полевые, которые до-

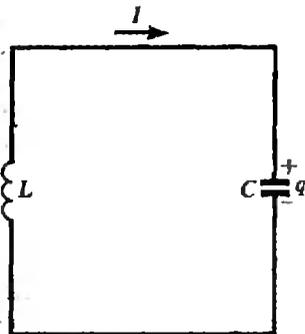


Рис. 1.

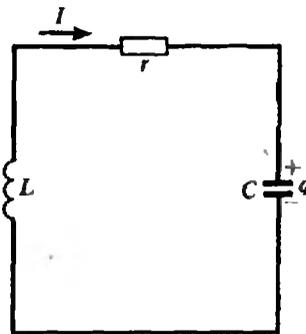


Рис. 2.

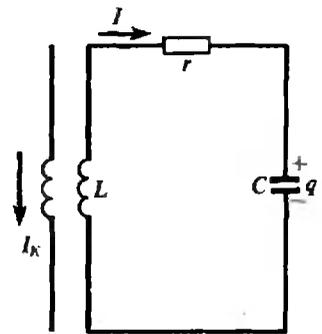


Рис. 3.

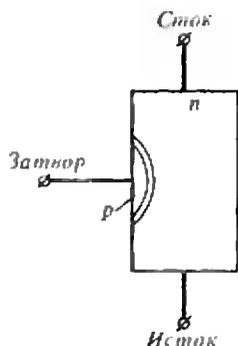


Рис. 4.

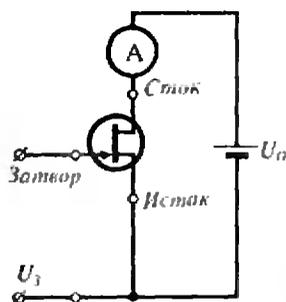


Рис. 5.

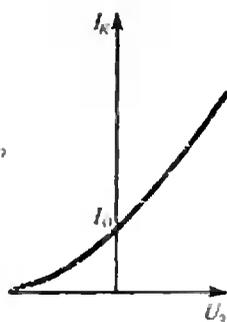


Рис. 6.

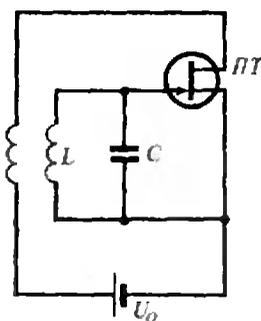


Рис. 7.

полнительно подразделяются на полевые с изолированным затвором (их обычно используют в цифровых устройствах) и с управляющим $p-n$ -переходом. Любой полевой транзистор содержит «канал» с двумя выводами — их изобретательно называют истоком и стоком, а его проводимость регулируется подачей на третий вывод — затвор — управляющего напряжения (рис. 4). В полевом транзисторе с управляющим $p-n$ -переходом — а мы дальше будем говорить именно о нем — затвор отделен от канала именно таким переходом, для чего область затвора делается противоположного по отношению к каналу типа проводимости. Например, если канал имеет примесную проводимость типа p , то затвор — типа n , и наоборот.

Когда на переход подают запирающее напряжение U_3 (рис. 5), сечение проводящего канала уменьшается, а при определенном напряжении — его называют напряжением отсечки — канал перекрывается полностью и ток прекращается. Зависимость тока канала I_k от напряжения на затворе U_3 показана на рисунке 6. Зависимость эта почти такая же, как и у электронной лампы (триода). Важно отметить, что управляющее напряжение — запирающее, а значит, ток в цепи управления чрезвычайно мал (обычно он составляет несколько наноампер), соответственно мала и мощность управления, что очень хорошо. При небольших значениях управляющего напряжения зависимость тока от напряжения можно

считать линейной и записать в виде

$$I_k = I_0 + SU_3,$$

где S — постоянная величина. Для генератора существенны и отклонения от линейности, но об этом позже.

На рисунке 7 изображена принципиальная схема генератора незатухающих колебаний. Здесь управляющим для полевого транзистора напряжением является напряжение на конденсаторе колебательного контура:

$$U_3 = U_C = \frac{q}{C},$$

и ток через дополнительную катушку равен

$$I_k = I_0 + \frac{Sq}{C}.$$

Дополнительный магнитный поток пропорционален этому току, а добавочная ЭДС контура равна производной этого потока, взятой с противоположным знаком:

$$\mathcal{E}_n = -\Phi' = -(MI_k)' = -\frac{MS}{C}q'.$$

Знак «минус» тут довольно условен — катушку можно подключить к полевому транзистору либо одним концом, либо другим, при этом знак дополнительной ЭДС изменится на противоположный. Одним словом, дополнительная ЭДС должна быть такой, чтобы скомпенсировать потери энергии в контуре. Запишем еще раз уравнение процесса:

$$LI' + rI + \frac{q}{C} - \frac{MS}{C}q' = 0.$$

Если выбрать величину M такой, чтобы четвертое слагаемое компенсировало второе, то мы получим уравнение

$$LI' + \frac{q}{c} = 0,$$

которое соответствует гармоническим незатухающим колебаниям.

А как можно повлиять на величину M ? Оказывается, она увеличится, если намотать побольше витков в дополнительной катушке или если эту катушку расположить поближе к катушке контура. Нужно сказать, что достаточный для генерации коэффициент M на практике получить довольно просто. Лучше выбрать эту величину с некоторым запасом — при этом получится контур не только без потерь, но даже с подкачкой энергии от внешнего источника (с «отрицательными» потерями). При включении генератора амплитуда колебаний сначала будет возрастать, но через некоторое время установится — энергия, поступающая в контур за один период, станет равной потерям энергии за то же время. И действительно, при увеличении амплитуды напряжения на конденсаторе (управляющее напряжение полевого транзистора) транзистор начинает усиливать хуже, поскольку при большом отрицательном напряжении ток в цепи канала прекращается, а при положительных напряжениях переход начинает открываться, что тоже увеличивает потери в контуре. В результате колебания получаются не совсем синусоидальными, но, если потери в контуре невелики, искажения незначительны.

Для того чтобы использовать полученные колебания — а ведь именно для этого и делается генератор, — нужно либо подключить непосредственно к контуру, либо намотать еще одну катушку. Но в обоих случаях необходимо учесть «уход» энергии из контура и скомпенсировать его в числе прочих потерь.

А. Зальберман

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Поезд первую половину пути шел со скоростью в 1,5 раза большей, чем вторую половину. Средняя скорость движения на всем пути равна v . Каковы скорости поезда на каждой половине пути?

3. С крыши здания высотой $h=27$ м через одинаковые промежутки времени падают капли воды, причем первая ударяется о землю в тот момент, когда четвертая капля отделяется от крыши. Каковы расстояния между каплями в момент удара первой капли о землю?

3. На рисунке 1 приведен график ускорения тела, движущегося прямолинейно. Постройте графики скорости, перемещения и пути в зависимости от времени. Начальная скорость тела равна нулю.

4. Ракета запущена вертикально вверх. Найдите время от момента запуска до того момента, когда ракета достигнет максимальной высоты $H=74$ км (при минимальном расходе горючего), если ускорение ракеты при работающем двигателе постоянно и равно $a=2g$. Сопротивлением воздуха и изменением величины ускорения свободного падения g пренебречь.

5. На движущуюся вертикально вверх со скоростью v ровную горизонтальную плиту свободно падает шарик. Расстояние от точки начала падения до места встречи шарика с плитой равно h . На какую высоту от этого места подскочет шарик после соударения с плитой? Удар абсолютно упругий, т. е. скорость после удара такая же, как и до него.

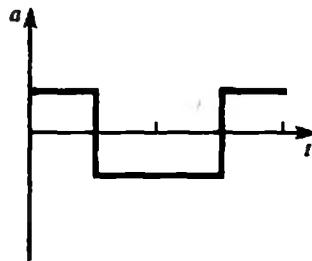


Рис. 1.

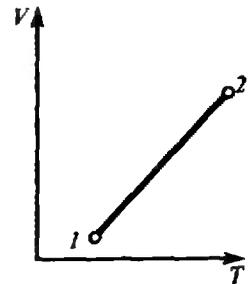


Рис. 2.

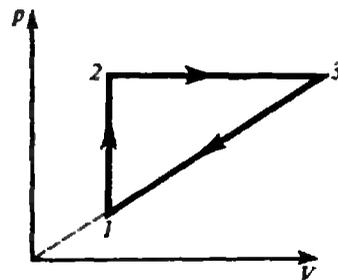


Рис. 3.



Рис. 4.

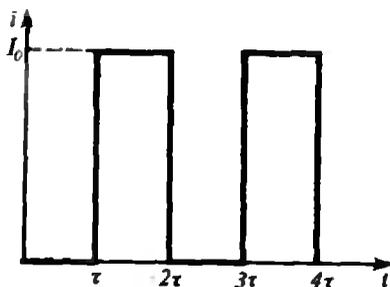


Рис. 5.

10 класс

6. Определите по графику зависимости объема от температуры (рис. 2) характер изменения давления газа во время нагревания.

7. Газ последовательно переводится из состояния 1 с температурой T_1 в состояние 2 с температурой T_2 , а затем в состояние 3 с температурой T_3 и возвращается в состояние 1. Определите температуру T_3 , если процессы изменения состояния происходили так, как это показано на рисунке 3, а температуры T_1 и T_2 известны.

8. Определите подъемную силу воздушного шара объемом $V=100 \text{ м}^3$, наполненного горячим воздухом при температуре $t_1=147^\circ\text{C}$. Шар сообщается с атмосферой. Температура наружного воздуха $t_2=27^\circ\text{C}$, его давление $p=700 \text{ мм рт. ст.}$

9. В сосуде находится смесь $m_1=10 \text{ г}$ углекислого газа и $m_2=15 \text{ г}$ азота. Найдите плотность этой смеси при температуре $t=27^\circ\text{C}$ и давлении $p=1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

10. В закрытом откачанном цилиндре подвешен на пружине скользящий без трения поршень, положение равновесия которого находится у дна цилиндра. Под поршень вводится некоторое количество воздуха так, что поршень поднимается на высоту $h=10 \text{ см}$ при температуре $t_1=27^\circ\text{C}$. На какую высоту поднимется поршень, если количество воздуха под ним увеличить в 5 раз, а температуру повысить до $t_2=37^\circ\text{C}$?

11 класс

11. Точка совершает гармонические колебания между положениями C и D (рис. 4). Зная, что ее максимальная скорость равна $v_m=10 \text{ м/с}$, найдите ее среднюю скорость на пути от C к D.

12. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса маятника на расстоянии $l/2$ от нее вбит гвоздь. Найдите период колебаний маятника.

13. В колебательный контур с индуктивностью L , емкостью C и активным сопротивлением R включили последовательно источник синусоидальной ЭДС с амплитудой \mathcal{E}_m . Затем, меняя частоту источника, добились того, что амплитуда тока стала максимальной. Какова? При какой частоте это произошло?

14. Ток в цепи изменяется по закону, представленному на рисунке 5. Определите действующее значение такого тока.

15. Длина воздушной линии электропередачи $l=300 \text{ км}$. Частота напряжения $\nu=50 \text{ Гц}$. На какую долю периода отличаются фазы напряжения в начале и в конце этой линии?

Публикацию подготовила В. Тихомирова

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» начинает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае будущего года. Победители будут награждены призами журналов «Квант» и «Математика».

Решение задач из этого номера высылайте не позднее 15 ноября 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задача

1. Найдите такое десятизначное число, что число из двух его первых цифр делится на 2, из трех первых цифр — на три, и так далее до того, что само число делится на 10.

А. Швецов

2. Докажите, что число $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1987 \cdot 1989 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 1990$ делится на 1991.

В. Произволов

3. В три магазина привезли 1990 книг. В первые три дня первый магазин продал соответственно $1/37$, $1/11$ и $1/2$ часть полученных книг, второй магазин — $1/57$, $1/9$ и $1/3$ полученных книг, третий магазин — $1/25$, $1/30$ и $1/10$ полученных книг. Сколько книг получил каждый магазин?

Л. Курляндчик

ОРЧО — высокоинтеллектуальная
система для компьютеров типа IBM PC/XT/AT



ОРЧО осуществляет автоматизированную
грамматическую проверку и коррекцию русскоязычных
текстов

ОРЧО поможет вам выучить русский язык

ОРЧО избавит ваши тексты от опечаток и от
ошибок в орфографии, в согласовании слов и т. д.

ОРЧО снабжена словарем русского языка
(120 000 слов) и способна расширять свой словарь

ОРЧО совместима с любым текстовым ре-
дактором

ОРЧО проста в обращении

Обращаться по адресу: 103104, Москва,
ул. Остужева, д. 7, стр. 2, МРНТО «Информатик». Наши
телефоны: 299-99-04, 290-35-24



Р-знагим ракета

Полет к звездам

Доктор технических наук К. ФЕОКТИСТОВ

Почти с самого начала космических работ стало ясно, что пространство Солнечной системы, ее планеты находятся в пределах досягаемости космических аппаратов и кораблей, которые мы можем создать, и, следовательно, люди смогут если не высадиться, то во всяком случае добраться до любой планеты. Но одновременно стало проясняться в сознании, что здесь, «дома», скорее всего ничего необычного мы не найдем. Маловероятно, что по данным, полученным в путешествиях по нашей системе, мы существенно продвинемся вперед в понимании мира, в котором живем.

Естественно, возникала мысль о полетах к звездам. Да это и раньше подразумевалось, что полеты около Земли, полеты к другим планетам Солнечной системы не являются конечной целью. Проложить дорогу к звездам — вот что казалось главной задачей космической техники. Это представлялось очевидным.

Значит, нужно было начинать думать о звездных кораблях.

Каким должен быть этот корабль? Как его построить? Какие проблемы нужно решить, чтобы звездные полеты оказались возможны? Размышления, самые простые оценочные расчеты показали, что здесь возникают принципиальные трудности.

Первая — время. Даже если построить звездный корабль, который сможет летать со скоростью, близкой к скорости света (скажем, со скоростью около 0,7 с), время путешест-

вий будет исчисляться тысячелетиями и десятками тысячелетий, так как диаметр Галактики порядка 100 000 световых лет (за год свет «проходит» расстояние $365,25 \cdot 86\,400 \cdot 3 \cdot 10^8 \approx 10^{16}$ м, т. е. десять тысяч миллиардов километров).

Что останется даже от замороженных космонавтов к концу путешествия? Или от их зародышей? Да и вправе ли мы решать судьбу еще не родившихся людей? (Это едва ли лучше, чем, не мучаясь сомнениями, облагодетельствовать потомков жизнью при социализме, не представляя, что это такое, каким он будет, можно ли при нем будет жить, и определить для них на вечные времена некую руководящую и направляющую силу.) А если решить эти проблемы — то ведь после путешествия они вернутся в совершенно другой мир. Посмотрите на изменения в течение последних 200 лет, и станет понятным, что вернувшийся из дальнего путешествия космонавт окажется в совершенно чужом мире: путешествие к звездам всегда будет «односторонним». Для окружающих, родных, друзей это будет чем-то вроде самоубийства.

Вторая трудность — опасный поток газа и пыли. Пространство между звездами не пустое. Везде есть остатки газа, пыли, потоки частиц. При движении звездного корабля со скоростью, близкой к скорости света, они создадут поток высокой энергии, который будет воздействовать на корабль.

Мощность потока энергии от частиц, с которыми сталкивается тело, движущееся со скоростью v (без учета релятивистских эффектов) можно оценить по формуле

$$W = nvm_{\text{ч}} \frac{v^2}{2} = nm_{\text{ч}} \frac{v^3}{2}.$$

Здесь n — концентрация частиц в межзвездном пространстве ($[n] = 1/\text{м}^3$), nv — число частиц, налетающих на 1 м^2 поверхности тела за время 1 с ($1/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$), $m_{\text{ч}}$ — масса частицы (кг), $m_{\text{ч}}v^2/2$ — энергия каждой частицы (Дж) относительно корабля.

Галактический газ состоит в основном из водорода. Масса атома водоро-

да $\sim 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг. Концентрация частиц в среднем в Галактике $\sim 0,5 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3}$, в рукавах Галактики $\sim 10^6 \text{ м}^{-3}$, в облаках водорода $\sim 2 \cdot 10^7 \text{ м}^{-3}$. Масса пыли в межзвездном пространстве примерно в 100 раз меньше массы газа.

Этот поток можно оценить следующими величинами: мощность потока частиц и газа $10^4 - 10^5 \text{ Вт/м}^2$, потока пыли $10^2 - 10^3 \text{ Вт/м}^2$, поток частиц — это $3 \cdot 10^{14}$ частиц/(с·м²) с энергией каждой частицы порядка 500 МэВ. Воздействие этих потоков приведет к испарению любого защитного экрана и к недопустимо высоким для длительного полета мощностям дозы радиации.

Третья трудность — энергетика. Если в двигателе корабля использовать наиболее эффективную термоядерную реакцию, то для путешествия в оба конца со скоростью порядка скорости света даже при идеальной конструкции корабля отношение начальной и конечной масс его окажется больше 10^{30} , что представляется нереализуемым.

Оценку минимального потребного соотношения масс (начальной и конечной) звездного корабля с термоядерным двигателем, летящего со скоростью, близкой к скорости света (но позволяющей не учитывать в первом приближении релятивистские поправки), можно провести следующим образом.

Наиболее эффективная термоядерная реакция —



причем 14,1 МэВ из этих 17,6 уносятся нейтронами. Таким образом, для ускорения гелия в двигателе можно будет использовать энергию $E \sim 3,5$ МэВ на один атом гелия. Максимальную скорость истечения гелия в идеальном двигателе можно вычислить из соотношения $E_{\text{ч}} = m_{\text{ч}}v_{\text{ч}}^2/2$:

$$v_{\text{ч}} = \sqrt{2E_{\text{ч}}/m_{\text{ч}}}.$$

Подставляя массу атома гелия $m_{\text{ч}} \sim 4 \cdot 1,67 \times 10^{-27}$ кг и $E_{\text{ч}} = 3,5 \cdot 10^6 \text{ эВ} \approx 3,5 \cdot 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 5,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$, получаем $v_{\text{ч}} \approx 1,3 \cdot 10^7 \text{ м/с}$.

Соотношение начальной и конечной масс звездного корабля (без учета релятивистских поправок) определяется формулой Циолковского:

$$\frac{M_0}{M_{\text{к}}} = e^{4v_{\text{ч}}/v_{\text{к}}},$$

где $v_{\text{к}}$ — максимальная скорость полета корабля. Приняв $v_{\text{к}} \sim 0,7 \text{ с}$, получим:

$$\frac{M_0}{M_k} \sim e^{4 \cdot 0.7 \cdot 3 \cdot 10^6 / (1.3 \cdot 10^7)} \sim$$

$$\sim e^{70} \sim 2.5 \cdot 10^{30}$$

Если же думать о фотонном двигателе, использующем аннигиляцию материи, то здесь пока одни проблемы (хранение гигантских запасов антивещества, защита зеркала отражателя фотонов от выделяемой энергии и от остатков несреагировавшего антивещества, времена разгона, размеры и т. п.) и не видно решений.

Искушенный читатель, возможно, скажет: но ведь эти оценки сделаны без релятивистских поправок. А что до фотонного двигателя — поживем, разберемся и как-нибудь сделаем.

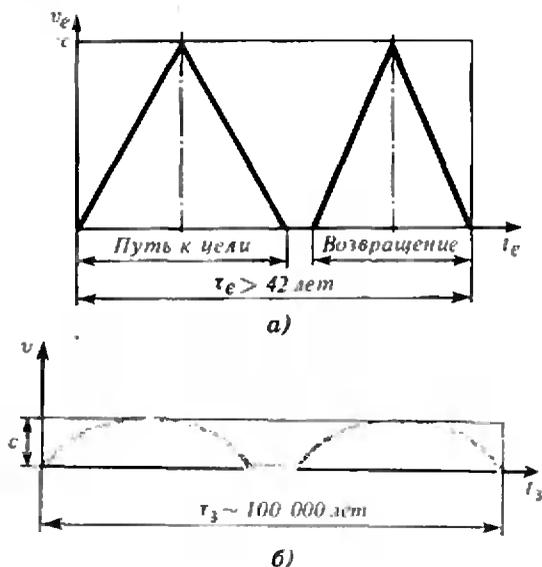


График космического полета с точек зрения космонавта (а) и земного наблюдателя (б).

а) Собственное время полета космонавта τ_e можно рассчитать по формуле

$$\tau_e = 4c/a \cdot \text{arch}(1 + a \cdot S/2c^2).$$

(Здесь arch — одна из обратных так называемых гиперболических функций — гиперболический арккосинус: $\text{arch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.)

Подставляя скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, ускорение $a = 9.8$ м/с² (привычная нагрузка для космонавта-землянина), дальность полета $S \approx 4.7 \times 10^{20}$ м, получаем $\tau_e \approx 42$ года. Скорость в ко-

релябельной системе — $v_e \approx \int a dt$.

б) На Земле при этом пройдет время $\tau_3 = \tau_e \cdot \text{sh}(\text{arch}(1 + aS/2c^2)) / \text{arch}(1 + aS/2c^2) \approx 100\,000$ лет

($\text{sh } x = (e^x - e^{-x})/2$ — так называемый гиперболический синус).

Попробуем показать, что с учетом релятивистских поправок картина получается не лучше. Представим себе Галактический фотонный корабль, способный летать со скоростью, достаточно близкой к скорости света. Собственное время полета космонавта туда и обратно на расстояние порядка половины диаметра Галактики при оптимальном графике полета (непрерывный разгон, а затем — непрерывное торможение) составит 42 года. На Земле при этом пройдет 100 000 лет (см. рисунок).

Предположим, что нам удалось получить идеальный процесс в фотонном двигателе, сделать идеальную конструкцию с нулевой массой баков, экранов, отражающего зеркала, насосов и других элементов, и попробуем оценить некоторые параметры такого идеального корабля.

Отношение начальной массы корабля к конечной составит $\sim 7 \cdot 10^{18}$. Это означает, что при массе жилых и служебных помещений и аппаратуры (т. е. того, что везет корабль) всего 100 тонн стартовая масса составит $\sim 7 \cdot 10^{20}$ тонн — больше массы Луны! Причем половина этой массы — антивещество.

Чтобы обеспечить ускорение 9,8 м/с², двигатель должен развить тягу $P \sim 10^{24}$ Н. Чтобы получить такую тягу, нужно в фокусе зеркала разместить источник излучения с мощностью порядка 10^{33} Вт (эту оценку мы получили по формуле $W = Pc/2$). Напомним, что мощность излучения нашего Солнца менее $4 \cdot 10^{26}$ Вт, т. е. в фокусе фотонного двигателя корабля нужно зажечь миллионы Солнц (и поддерживать это «горение»)! Есть теоретическое предложение везти с собой только антивещество. Тогда эти цифры сокращаются, но все равно остаются совершенно фантастическими — в фокусе зеркала фотонного двигателя оказывается необходимым зажечь сотни, тысячи Солнц.

Из наших сегодняшних представлений о мире складывается впечатление: нельзя решить проблему транспортировки материальных тел на галактические расстояния со скоростью

ми, близкими к скорости света. Похоже, бессмысленно «ломиться» через пространство и время с помощью механической конструкции. Нужно найти способ межзвездных путешествий, не связанный с необходимостью транспортировки материального тела. И тут мы приходим к идее, давно обкатываемой в фантастической литературе, — о путешествиях разумных существ в виде пакета информации.

Электромагнитные волны распространяются практически без потерь во всей наблюдаемой Вселенной. Возможно, здесь и есть ключ к межзвездным полетам.

Если не впадать в мистику, то следует признать, что личность современного органического человека нельзя отделить от тела. Но можно представить специально сконструированного человека, у которого личность и тело разделимы. Аналогично тому, как математическое обеспечение может быть отделено от конструкции современных ЭВМ.

Личность — это индивидуальный комплекс особенностей данного человека в его восприятии внешнего мира, в его реакциях на принимаемую информацию, в его воображении, симпатиях и антипатиях, в его знаниях и т. п.

Личность существует на полях операций и в запоминающих устройствах. Эти поля и устройства — наш мозг, тот материальный носитель, на котором живет и действует интеллект человека, на котором записаны (и непрерывно пополняются, совершенствуются, устаревают и портятся) алгоритмы восприятия и анализа информации, синтеза картины внешнего мира, алгоритмы оценок и пристрастий, промежуточные результаты «вычислений», выводов. Это поле, на котором располагается наше Я. Оно живет как Я тогда, когда человек думает, принимает решения, испытывает эстетическое наслаждение или отвращение, т. е. когда идут операции интеллекта на этом поле операций. Эти операции и есть жизнь личности или, если угодно, жизнь души.

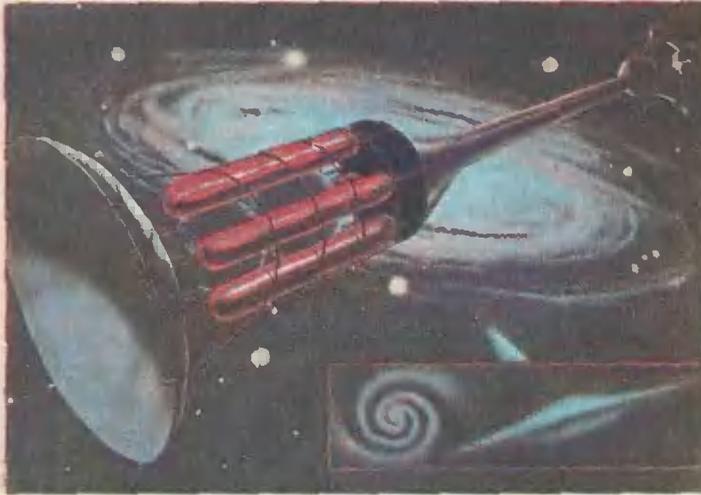
Если пакет информации, являющийся полным содержанием лич-

ности, может быть переписан с полей операций и запоминающих устройств, то этот пакет информации может быть и передан по радиолинии на приемную станцию назначения и там переписан в стандартный материальный носитель (или выбираемый по прежнему, или...), в котором он сможет жить, действовать и удовлетворять свое любопытство. Во время передачи его пакета информации человек не живет. Для того чтобы он мог жить, необходим материальный носитель.

Такой способ решения задачи полета к звездам стал бы реализацией не только сюжетов современной фантастики, но и сюжетов древних мифов о вознесениях на небо или мгновенных свержений в ад. Это было бы «экспериментальным решением» философских споров о сути человека, о бренности телесной оболочки, о сути бытия. Что есть человек? И что есть истина? Интересно, что выдающиеся философы в разные эпохи, от античности до нашего времени, путем логического анализа (основанного не на знании) приходили к вполне современным представлениям о соотношении между сутью и телом человека. Жизнь человека — это жизнь его души, это бьющаяся мысль о себе («что я?»), о мире вне себя и в себе, это восприятие красоты и отторжение примитива и неправды, это свобода мысли и анализа. Мы здесь, мы живем, пока способны размышлять, оценивать, перерабатывать информацию и генерировать ее. Остальное во мне, тело мое — для обслуживания.

Головной мозг — поле математических операций над символами, числами, понятиями. Но сами операции, мысли, наши переживания — это нечто такое, чего нельзя взять в руки. Человек во все времена пытался материализовать это нечто в виде звуков, слов, рассказов, рукописей, книг... Но всегда это оказывалось лишь тенью, слабым отражением этого нечто.

Тело — обслуживающие системы поля математических операций (питание, очистка, перемещение, связь



Фотонная ракета — мечта, к которой будут стремиться многие поколения наших потомков? Или идея фикс, устаревшая едва родившись? (На рисунке — одна из воображаемых конструкций. Длина ракеты более 9,5 км, численность экипажа 300—500 человек.)

с внешним миром). Но подавляющее большинство людей, почти все и почти всегда, никогда не различали свое Я и свое тело. И всегда стремились получить его, тело, устройство (в общем-то не зря — без питания умирает головной мозг, распадается поле операций, исчезает личность). Это стремление из поколения в поколение оставалось главной движущей силой человеческого рода. Оно определяло и грабительские походы, и создание новых технологий, и стремление к лучшей организации жизни и общества (в том числе и методом «грабь награбленное», замаскированным лозунгом «дойлой эксплуататоров»). Дома, автомобили, самолеты, газ и электричество, вычислительная техника родились из этого стремления. Устроить получше свое тело было и остается пока главным двигателем в жизни людей. А ведь на самом деле — это все вторичное. Впрочем, говорится это не к тому, что не надо заботиться о теле, о мыле, о хлебе насущном. В здоровом теле компьютер работает с меньшим количеством сбоев, с большей скоростью, с более разнообразными и эффективными алгоритмами, обеспечивает большую внутреннюю устойчивость к внешним угрозам и неприятностям. И, главное, — ясность мышления. Но если говорить о главном в отношениях нашего Я с внешним миром, то это — свобода.

Все это говорилось здесь к тому, чтобы напомнить: наше Я, наша инди-

видуальность, наша суть — это не материальная оболочка. Нет ничего криминального, противоречащего нашему восприятию мира в мысли о возможности разделения индивидуальности и ее материального носителя.

Поэтому с инженерной точки зрения можно сконструировать такой мир, где душу человека можно отделить от тела. В таком мире человек может перемещаться из одного места в другое — скажем, в пределах Солнечной системы — практически мгновенно. Например, для выбранного «резидента» можно было бы в достаточно большом количестве центров иметь его базовый пакет информации и передавать только изменения, отражающие его состояние в данный момент времени, и сигнал о его включении в этом месте. В этом же мире можно представить и вселение души (духа?) данного человека в чужое тело. (Какую путаницу можно представить! Даже нам до них будет далеко.)

Возможно ли создать такое существо? Какие стимулы жизни мы должны заложить в него? Мне кажется, именно здесь будет главная проблема. Мы — дело другое. Мы продукт органической эволюции. В нас глубоко заложен инстинкт жизни, инстинкт продолжения рода. Вид, у которого этого инстинкта не было или он был недостаточно развит, не выживал в условиях естественного отбора. Да что там естественный отбор. Когда за возрастом, здоровьем, условиями жизни

умирает этот инстинкт — у людей пропадает желание жить. А какой же стимул жизни мы сможем предложить нашему творению? Любопытство? Желание быть полезным людям, создавшим его тело (бренное и сменяемое) и воспитавшим его личность, душу? Желание выжить в исследованиях мира, в сверхдальних путешествиях, в создании приемно-передающих станций для путешествий, в строительстве космических околозвездных баз?

Убедительны ли эти стимулы? Откуда ему взять привязанность и любовь к ближним? Как воспитать его, чтобы он не оказался монстром с нелепыми и бессмысленными устремлениями к власти, к возможности давать указания, воспитывать и слыть благодетелем? или, наоборот, чтобы он не оказался инфантильным, безынициативным существом, равнодушным к миру, к ближним и к самому себе?

И, конечно, громадные технические проблемы.

Как мы мыслим? Как создаются стереотипы наших реакций, поведения, оценок, как создается наша индивидуальность? Есть подозрение, что наши алгоритмы видения окружающего мира, анализа, мышления создаются каждый раз заново и почти всегда по-иному, и их характер определяется семьей, приятелями и недругами, школой, структурой общества, радостями, огорчениями и удачами нашего детства. В обществе рабов вырастают рабы, в обществе свободных — люди независимые и т. д.

С этой точки зрения очень опасно стандартизировать приемы воспитания, ясли, детские сады, школы... Это самое страшное, что можно сделать для своего будущего. Человечество сильно различностью, разнообразием, индивидуальностью. Конечно, некоторые основы должны быть общими: не убий, не укради, не пожелай... Но готовить человека по стандарту (пусть даже самому высокому) — это готовить собственную гибель.

Как, не понимая всех этих вещей, приступать к созданию искусственного интеллекта? А главное — траги-

ческие ошибки и неудачи, которые нас ждут на этой дороге.

Даже здоровое разумное существо нуждается в поддержке и защите, в признании, в ощущении осмысленности своей жизни, своей полноценности и полноправности. Ошибки в идеях разработки, при изготовлении, в воспитании, недостаточная порядочность создателей могут привести к сотворению существ-инвалидов, психически ненормальных и, главное, несчастных. Ведь это все есть у нас, людей: уроды и инвалиды, выращенные, а потом брошенные в равнодушный мир домашние кошки и собаки, брошенные дети и старики...

Но мысль уже вошла в сознание самых любопытных, сообразительных и предприимчивых. Пожалуй, задача создания искусственного интеллекта стала самой популярной задачей нашего времени. Надо думать, это дело пойдет.

Появятся и более понятные трудности.

Чтобы отправить личность в виде пакета информации в галактическое путешествие, надо создать приемные и передающие станции (например, в радиодиапазоне), развезти (например, с помощью автоматических космических аппаратов) эти станции к возможным пунктам назначения (невдалеке от какой-либо звезды для обеспечения станций энергией). Если личность передавать по радиоканалу на галактические расстояния, то придется создавать антенны размером порядка километров, передатчики мощностью порядка 10^6 кВт. Скорости автоматических космических аппаратов, которые летают сейчас, составляют десятки километров в секунду. Представляются достижимыми скорости порядка сотен и даже тысяч километров в секунду. Но это означает, что время развозки по Галактике составит для Земли миллионы и даже сотни миллионов лет. Доставка станций даже к ближайшим звездам, находящимся от нас в десятках световых лет, потребует десятков тысячелетий. За это время может быть утерян интерес к предприятию. Тем не менее этот путь — в рамках возможного.

Можно развозить не приемно-передающие станции, а технологию, инструменты, роботов для создания таких станций на месте.

Можно предложить и другой путь осуществления звездных путешествий, а именно — выйти на связь с другими цивилизациями, передать им информацию о строительстве приемно-передающей станции, пригодной для приема и возвращения «наших людей», информацию, необходимую для создания стандартного материального носителя, и таким способом наладить галактические путешествия (тоже идея из фантастики — вспомните, например, «Черное облако»). Тут появляется в рассуждениях старая задача: как выйти на связь с другими цивилизациями?

Естественный путь — создать «маяк», получить обратный запрос и вступить в связь. Если исходить из идеи создания импульсного маяка, получающего энергию от звезды, с солнечными батареями мощностью порядка 10^{11} кВт (здесь данные применительно к радиомаяку с полосой частот передачи всего 100 Гц), то можно рассчитывать на абонентов, находящихся на расстояниях до пятидесяти тысяч световых лет и имеющих около своей звезды приемные антенны с размерами до 10—20 км. Величины 10^9 кВт не следует пугаться. Солнечные батареи такой мощности должны иметь размеры 100×100 км — гигантские, но вообще реальные размеры. Подобную конструкцию можно представить в виде легкой плоской фермы, на которой натянуты пленочные фотоэлементы.

Сроки реализации такой связи составят тысячи и десятки тысяч лет. Уже, правда, не миллионы, но все равно долго.

Может ли быть более короткий путь?

Если другие цивилизации избрали ранее этот путь освоения Галактики, то они могли уже создать и свои «маяки». Значит — искать эти маяки. Создать приемные антенны, способные принять сигналы галактических маяков.

Радиотелескопы с антеннами порядка километров и более можно создать в окосолнечном пространстве. А где искать? Может быть, в центре Галактики? или вдоль средних линий спиральных рукавов? в шаровых звездных скоплениях?

Так или иначе, но это уже десятилетия, а не тысячи и не миллионы лет.

А нет ли еще более простого способа выхода на связь с другими цивилизациями?

Предположим, что представители других цивилизаций уже были (или есть?) на Земле или в Солнечной системе. Какими могут быть следы их деятельности? Где могут располагаться приемно-передающие станции (в том числе промежуточные)?

Тут два направления поиска. Одно — космические люди. Какими их следует ожидать: размеры, особенности их жизни (может быть, например, им не нужны атмосфера и органика для энергоснабжения, вакуум — их естественная среда обитания...)? Почему они сами не вступили в контакт или почему они не хотят вступать с нами в контакт? Другое направление — поиски их средств связи, приема и передачи путешественников и информации.

Цель таких размышлений на грани фантастики — заглянуть вперед, чтобы понять свои дальние цели, чтобы определить перспективные направления сверхдальнего поиска, сверить эти направления с актуальными проблемами экологии и экономики, обустройства жизни людей на Земле, с интересными на сегодня научными задачами исследования Вселенной и Земли. И из этого анализа выявить направления работ, на которые стоит тратить общие средства, энергию и интеллект людей. Это нужно для того, чтобы взвешенно и разумно сделать выбор, чтобы не тратить зря усилия и средства.

Примеров нелепых решений XX век видел достаточно много. Можно, например, вспомнить о работах в нашей стране над созданием суперракеты Н1. Эти работы проводились в шестидесятые годы и были прекращены в 1973 году. Для чего она была нужна? Высаживать экспедицию на Луну? Но параметры ракеты не

были увязаны с массой кораблей. Потрясти мир? Шокировать американцев? Или, может быть, для того, чтобы выводить на орбиту какие-то громадные космические аппараты с массой около 100 тонн? Но таких проектов ни тогда, ни сейчас, спустя двадцать лет, не было и нет.

А работы по созданию ракеты «Энергия»? Зачем? Для вывода на орбиты космических аппаратов с массой порядка 100 тонн. Но ведь их нет! И проектов нет!

Или наше последнее «эпохальное» достижение — система «Энергия — Буран». Работы проводились с большим напряжением. Закрывались и отодвигались другие космические и некосмические работы. Истрачены громадные средства. Для чего? Чтобы получить свою «игрушку» и показать, что мы не хуже американцев умеем зря тратить деньги? «Буран» может возвращать с орбиты космические аппараты. Но таких аппаратов, которые требовали бы возвращения с орбиты и стоимость которых была бы больше стоимости запусков «Бурана», нет. Доставка же аппаратов на орбиту с помощью «Бурана» в десятки раз дороже, чем с помощью давно существующих носителей. Так зачем же?

Надо сказать, что упрек в крайние неудачных выборах крупных целей относится не только к нашим чиновникам, но и к американским (Лунная программа, «Шаттл»). В принципе, чиновники везде одинаковы — они ведь распоряжаются не своими деньгами.

Размышления о полете к звездам позволяют выделить несколько интересных направлений работ:

- исследования возможности создания и разработка искусственного интеллекта;

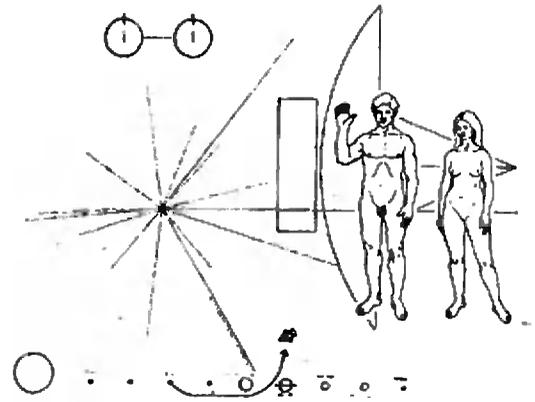
- конструирование космических роботов с последующим переходом к созданию человека космоса, личность которого может отделяться от материального носителя и передаваться в виде пакета информации со скоростью света;

- разработка идеологии и конструкции «маяков», методов их поиска;

- разработка и создание все более крупных радио- и оптических телескопов, с размерами радиантенны порядка сотен и тысяч метров;

- поиск «чужих» выходных каналов связи с Земли, более тонкое (с большим разрешением) фотографирование и изучение поверхности Луны (особенно обратной стороны) и других планет Солнечной системы в поисках средств связи других цивилизаций.

Эти направления работ хорошо коррелируют с современными нуждами человечества.

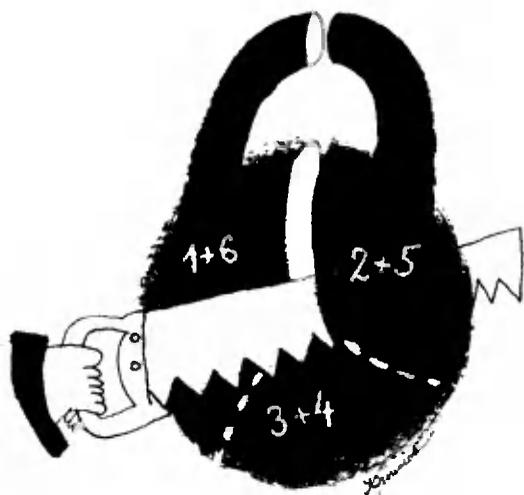


Первое послание человечества к далеким мирам, установленное на КА «Пионер-10» (1972). Через несколько миллионов лет оно окажется там, где сейчас находится звезда Альдебаран. Не станут ли его получателями наши потомки?

Работы по искусственному интеллекту связаны с решением задачи создания достаточно эффективных роботов, которые могли бы заменить людей на опасных производствах, избавить их от тяжелого физического труда, от рутинной нетворческой работы, помогли бы нам в освоении акваторий и подводного мира. Создание космических роботов — назревшая задача. При работах в открытом космосе они будут более эффективны, чем человек в скафандре. А работы в открытом космосе скорее всего будут развиваться в ближайшие десятилетия: строительство на орбитах экономически эффективных заводов, где в производственных процессах будет использоваться отсутствие силы тяжести, заводов, которые нельзя оставить на Земле из-за их экологической вредности.

Создание больших радиотелескопов позволит вести эффективные исследования и на границах Вселенной, и в центре Галактики...

Этот анализ можно и нужно продолжить. Только совместное рассмотрение ближних и дальних задач позволяет правильно выбирать цели и принимать разумные решения.



Математический кружок

Числовые конструкции

С. ГЕНКИН,
Л. КУРЛЯНДИК

В этой статье речь пойдет о конструкциях, материалом для которых служат натуральные числа. На вопрос о существовании требуемой конструкции возможны два ответа: да или нет.

Найди сумму

Задача 1. *Можно ли натуральные числа от 1 до 21 разбить на несколько групп, в каждой из которых наибольшее число равно сумме всех остальных чисел?*

Решение. Допустим, что такое разбиение возможно. Ясно, что сумма чисел в каждой группе четна (она в два раза больше наибольшего числа группы). Поэтому сумма всех чисел четна. Однако $1+2+\dots+21=21 \cdot 11$ — нечетное число. Значит, такое разбиение невозможно.

Задача 2. *Можно ли подобрать пять целых чисел так, чтобы все их попарные суммы составляли десять последовательных целых чисел?*

Решение. Предположим, что нам удалось найти пять таких чисел. Пусть s — сумма всех этих чисел, а n — наименьшая из их попарных сумм. Тогда десять попарных сумм — это числа $n, n+1, \dots, n+9$. А теперь посчитаем сумму всех попарных сумм двумя разными способами. С одной стороны, она равна $n+(n+1)+\dots+(n+9)=5(2n+9)$. С другой стороны, она равна $4s$, так как в нее каждое исходное число входит ровно четыре раза. Поэтому $4s=5(2n+9)$, что невозможно. Значит, такие пять чисел подобрать нельзя.

Проанализируем решения этих двух задач. Основным моментом каждого из них является подсчет некоторой суммы двумя разными способами. Но при помощи этого приема можно лишь доказать, что данное множество чисел указанным свойством не обладает. Однако часто встречаются задачи, в которых требуется найти не только необходимое, но и достаточное условие выполнения указанного свойства.

Задача 3. *Из чисел $1, 2, 3, \dots, n+1$ одно вычеркнули, а оставшиеся расположили в последовательность a_1, a_2, \dots, a_n таким образом, что все n чисел $|a_1-a_2|, |a_2-a_3|, \dots, |a_n-a_1|$ различны. При каких $n \geq 3$ это можно сделать?*

Решение. Во-первых, числа a и $|a|$ имеют одинаковую четность. Поэтому сумма $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\dots+|a_n-a_1|$ имеет такую же четность, как и число $(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\dots+(a_n-a_1)=0$. Значит, эта сумма четна. С другой стороны, $|a_1-a_2|, |a_2-a_3|, \dots, |a_n-a_1|$ — это n различных натуральных чисел, не превосходящих n , т. е. это числа $1, 2, 3, \dots, n$. Следовательно, их сумма $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, и это — четное число.

Поэтому $n=4k$ или $n=4k-1$. Итак, необходимое условие найдено. Для доказательства его достаточности остается показать, что при таких n требу-

мые расположения существуют. Они приведены на рисунке.

Задача 4. Какое наибольшее количество троек чисел, не имеющих попарно общих элементов, можно выбрать из множества натуральных чисел от 1 до n таким образом, чтобы суммы чисел каждой тройки были различны и не превосходили n ?

Решение. Пусть выбрано k троек чисел. Сложим все выбранные $3k$ чисел и полученную сумму обозначим через s . Ясно, что $1+2+\dots+3k \leq s \leq n+(n-1)+\dots+(n-k+1)$. Значит, $\frac{3k(3k+1)}{2} \leq \frac{(2n-k+1)k}{2}$. Отсюда получа-

ем необходимое условие $k \leq \frac{n-1}{5}$.

Осталось привести набор из $\left[\frac{n-1}{5} \right]$ троек чисел, удовлетворяющий условиям задачи. Обозначим число $\left[\frac{n-1}{5} \right]$ через a и расположим числа от 1 до $3a$ следующим образом:

1	2	3	...	$a-1$	a
$2a$	$2a-1$	$2a-2$...	$a+2$	$a+1$
$2a+1$	$2a+2$	$2a+3$...	$3a-1$	$3a$

Числа, стоящие в первом столбце, образуют первую тройку чисел, стоящие во втором столбце — вторую тройку, и так далее.

Двоичная система счисления

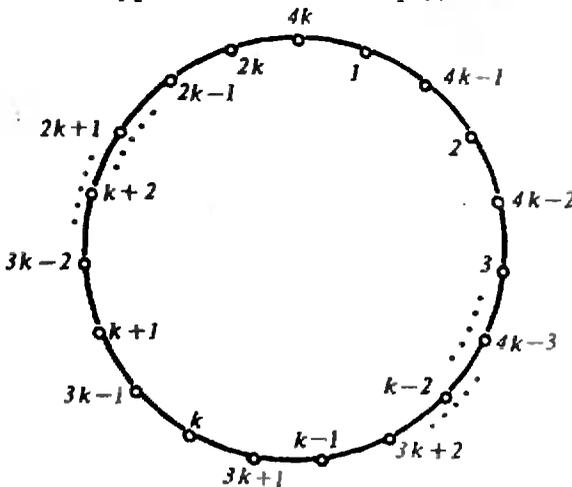
Как вам, скорее всего, известно, всякое натуральное число n представля-

ется в виде $n = a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0$, где числа a_i равны 0 или 1, причем такое представление единственно. На этом факте основана двоичная система счисления, в которой всякое натуральное число записывается с помощью единиц и нулей: $n_2 = a_k a_{k-1} \dots a_0$. Например, $1_2 = 1$, $2_2 = 10$, $3_2 = 11$, $4_2 = 100$, $5_2 = 101$, $6_2 = 110$, $7_2 = 111$, и так далее.

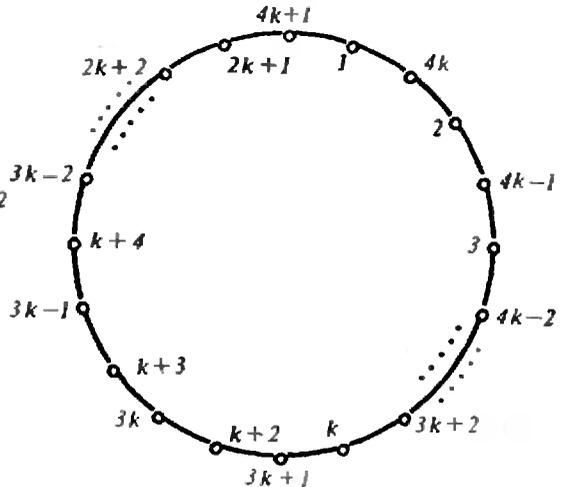
Прежде чем формулировать следующую задачу, введем обозначение: N_0 — множество натуральных чисел, дополненное нулем.

Задача 5. Постройте два бесконечных подмножества A и B множества N_0 таких, что каждое число n из N_0 единственным образом представляется в виде суммы $n = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

Решение. Здесь удобно воспользоваться двоичной записью натуральных чисел. Рассмотрим два множества A и B , устроенные так. Множество A состоит из нуля и всех натуральных чисел, в двоичной записи которых единица находится в нечетных (считая справа) разрядах ($A = \{0, 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21, \dots\}$). Множество B состоит из нуля и всех натуральных чисел, в двоичной записи которых единица находится в четных (считая справа) разрядах ($B = \{0, 2, 8, 10, 32, 34, 40, 42, \dots\}$). Очевидно, что любое целое неотрицательное число n единственным образом представляется в виде суммы $n = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.



Вычеркнуто число $3k$



Вычеркнуто число $k+1$

Эта конструкция является ключевой и при решении двух следующих задач. Для их формулировки дадим определение: два подмножества множества N_0 назовем *конгруэнтными*, если одно получается из другого сдвигом на целое число.

Задача 6. Докажите, что множество N_0 можно разбить на бесконечное число непересекающихся бесконечных конгруэнтных подмножеств.

Решение. Пусть A и B — множества, построенные при решении задачи 5. Для каждого числа $b \in B$ обозначим через A_b результат сдвига множества A на это число b , т. е. A_b — это множество чисел вида $a+b$, где $a \in A$. Покажем, что набор множеств A_b и образует искомое разбиение множества N_0 на конгруэнтные множества. Так как каждое число n из множества N_0 представимо в виде суммы $n = a+b$ ($a \in A, b \in B$), то множества A_b покрывают все множество N_0 , а из того, что такое представление единственно, следует, что эти множества попарно не пересекаются.

Следующая задача — это задача М685 из Задачника «Кванта». В первом номере «Кванта» за 1982 год опубликовано неверное решение этой задачи. Мы перескажем это решение, а потом покажем, в чем состоит ошибка, и как ее устранить.

Задача 7. Можно ли разбить множество натуральных чисел на бесконечное число бесконечных конгруэнтных множеств?

Решение. В решении, приведенном в «Кванте», выписаны два множества A и B . Множество $A = \{1, 4, 5, 16, 17, 20, \dots\}$ — это множество натуральных чисел, в двоичной записи которых единица стоит на нечетных местах. Множество $B = \{0, 2, 8, 10, 32, 34, \dots\}$ — это множество, состоящее из нуля и чисел, в двоичной записи которых единица находится на четных местах. В решении утверждается, что каждое натуральное число n представляется в виде $n = a+b$, где $a \in A, b \in B$. Между тем сразу видно, что ни одно из чисел, входящих в множество B , в таком виде не представимо!

Исправим это решение. Для этого рассмотрим множества A и B , построенные при решении задачи 5. В решении задачи 6 мы уже доказали, что соответствующие множества A_b образуют требуемое разбиение множества N_0 . Рассмотрим теперь вместо множества A множество $A_1 = \{1, 2, 5, 6, 17, 18, 21, 22, \dots\}$. Понятно, что для любого числа $b \in B$ множество $(A_1)_b$ — это сдвинутое на единицу множество A_b . Поэтому множества $(A_1)_b$ и образуют искомое разбиение множества натуральных чисел.

Конструирование по индукции

В этом разделе мы разберем четыре примера алгоритмов *распространения* от более простых конструкций к более сложным.

Задача 8. Дано n гирь, массы которых равны соответственно $1, 2, \dots, n$ грамм. Для каких n эти гири можно разложить на три равные по массам кучки?

Решение. Ясно, что подобная конструкция (разложение на три кучки) существует не при всех n . Для этого необходимо, чтобы суммарная масса всех гирь $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ делилась на три. Поэтому либо n , либо $n+1$ должно делиться на три. Докажем теперь, что при всех таких $n \geq 5$ искомая конструкция существует. Сначала укажем алгоритм распространения конструкции от набора из k гирь к набору из $k+6$ гирь. Для этого разложим шесть гирь с массами $k+1, k+2, k+3, k+4, k+5, k+6$ на три кучки равных масс: $(k+1, k+6)$; $(k+2, k+5)$; $(k+3, k+4)$. Остается показать, как можно разложить пять, восемь и девять гирь (как разложить шесть гирь, ясно из предыдущего). Это видно из следующей таблицы:

$n=5$	(1, 4); (2, 3); 5
$n=8$	(1, 2, 3, 6); (4, 8); (5, 7)
$n=9$	(1, 2, 3, 4, 5); (6, 9); (7, 8)

Для завершения решения отметим, что две или три гири разложить требуемым образом нельзя.

В данном случае алгоритм распространения очень прост. Столь же прост он и в следующем примере.

Задача 9. Дано 555 гирь, массы которых равны соответственно 1, 2, 3, ..., 555 грамм. Можно ли их распределить в пять групп так, чтобы в каждой группе было одно и то же число гирь и суммарная масса гирь во всех группах была одной и той же?

Решение. Опишем сначала алгоритм распространения. Пусть n гирь разложены требуемым образом на пять групп. Покажем, как разложить набор из $n+10$ гирь. Для этого разложим десять гирь с массами $n+1, n+2, n+3, \dots, n+10$ на пять равных по массе групп по две гири в каждой: $(n+1, n+10); (n+2, n+9); (n+3, n+8); (n+4, n+7); (n+5, n+6)$. Остается научиться раскладывать пятнадцать гирь (пяти гирь, разумеется, не достаточно). Это сделать нетрудно: $(1, 9, 14); (2, 10, 12); (3, 8, 13); (4, 5, 15); (6, 7, 11)$.

В следующей задаче придумать алгоритм распространения труднее.

Задача 10. Можно ли расставить числа 1, 2, ..., n в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними?

Решение. Основным этапом решения является переход от конструкции для $n=k$ к конструкции для $n=2k$. Нужную расстановку чисел 1, 2, ..., $2k$ мы получим из расстановки чисел 1, 2, ..., k . Выпишем сначала нечетные числа: 1, 3, 5, ..., $2k-1$, а затем четные числа: 2, 4, 6, ..., $2k$. В группе, состоящей из нечетных чисел, числа расставим следующим образом: число $2t-1$ поставим на то место, на котором стоит число t в расстановке чисел 1, 2, ..., k . Аналогичным образом поступим с группой четных чисел: число $2t$ поставим на то место, которое в исходной расстановке чисел от 1 до k занимает число t . Нетрудно сообразить, что мы получим нужную расстановку чисел 1, 2, ..., $2k$. Теперь из расстановки для $n=1$ мы последовательно получим требуемые

расстановки для $n=2, 4, 8, 16$ и так далее. Для завершения решения остается заметить, что из расстановки для k чисел можно получить расстановку для любого меньшего количества чисел — достаточно просто вычеркнуть лишние числа.

В последнем четвертом примере переход совершается наиболее нетривиальным образом.

Задача 11. Докажите, что для любого $n \geq 2$ найдутся такие n различных натуральных чисел, что для любых двух чисел a и b из них сумма $a+b$ делится на разность $a-b$.

Решение. Прежде всего заметим, что если число $a+b$ делится на $a-b$, то и число $2a$ делится на $a-b$. Поэтому если набор натуральных чисел x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяет условию задачи, то число $2x_1x_2\dots x_n$ делится на разность любых двух из них. Это замечание позволяет совершить переход от набора из n чисел к набору из $n+1$ чисел. Для удобства обозначим через p число $x_1x_2\dots x_n$. Искомый набор из $n+1$ чисел таков: $p+x_1, p+x_2, \dots, p+x_n, p$. Для завершения доказательства остается заметить, что набор из чисел 1 и 2 удовлетворяет условию.

Упражнения

1. Можно ли подобрать девять целых чисел так, чтобы все их попарные суммы составляли 36 последовательных целых чисел?

2. При каких натуральных n числа от 1 до n можно разбить на несколько групп, в каждой из которых одно из чисел,

а) умноженное на 2,

б) умноженное на 3,

равно сумме остальных?

3. Постройте три бесконечных подмножества A, B и C множества N_0 такие, что каждое натуральное число n единственным образом представимо в виде $n=a+b+c$, где $a \in A, b \in B, c \in C$.

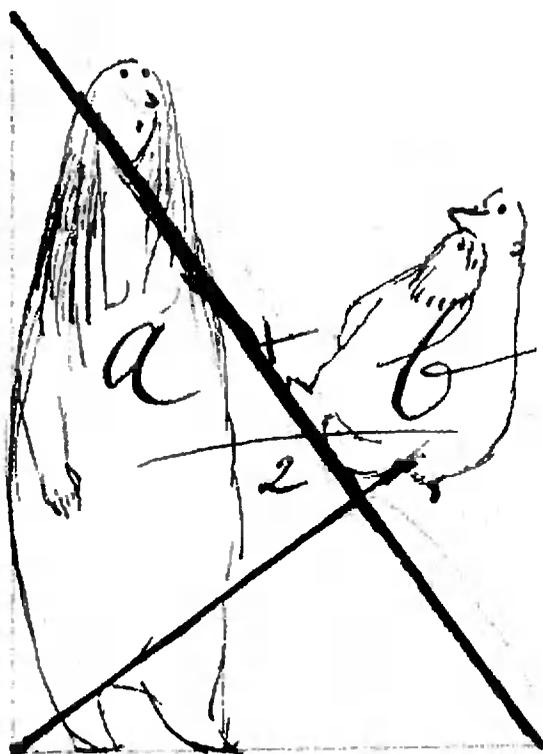
4. Дано n гирь, массы которых равны соответственно 1, 2, 3, ..., n грамм. Для каких n эти гири можно разделить на две кучки:

а) равные по массам?

б) равные по массам и по количеству гирь?

5. Даны 1000 гирь, массы которых равны соответственно $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 1000^2$ грамм. Можно ли их распределить в две группы так, чтобы в каждой группе было по 500 гирь и суммарная масса гирь в этих группах была одинаковой?

6. Дана 81 гиря; массы этих гирь равны соответственно $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, 81^2$ грамм. Можно ли их распределить в три группы так, чтобы в каждой группе было по 27 гирь и суммарная масса гирь во всех группах была одной и той же?



Уракикики абигуриента

Числовые средние и геометрия

А. ГОЛЬДМАН, Л. ЗВАВИЧ

По-видимому, вам не раз приходилось встречаться с такими понятиями, как среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$ и среднее геометрическое \sqrt{ab} двух положительных чисел. Возможно, вы сталкивались и с другими средними величинами: средним гармоническим $\frac{2ab}{a+b}$ и средним квадратичным

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ двух положительных чисел.

Так, средняя скорость туриста, прошедшего некоторое расстояние со скоростью V_1 , а обратный путь со ско-

ростью V_2 , оказывается равной среднему гармоническому скоростей V_1 и V_2 , т. е. $\frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$ (убедитесь в этом).

Широко известно и часто используется при решении задач неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Оказывается, что для любых положительных a и b выполняются неравенства:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad (*)$$

причем все неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $a=b$. Каждое из неравенств можно доказать, используя свойства числовых неравенств (прделайте это самостоятельно!).

Определения средних величин естественным образом распространяются и на случай n положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n :

$$H(a_1, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

— среднее гармоническое,

$$G(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

— среднее геометрическое,

$$A(a_1, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

— среднее арифметическое,

$$Q(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

— среднее квадратичное.

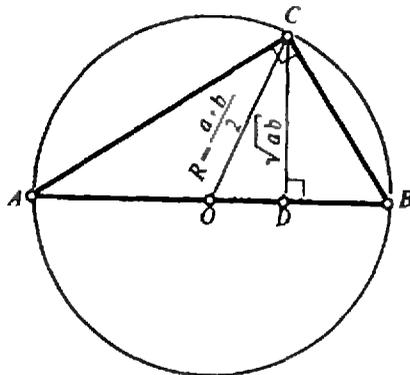


Рис. 1.

В общем случае справедливы неравенства $H \leq G \leq A \leq Q$, однако доказываются они значительно сложнее. Неравенства же, относящиеся к средним величинам двух положительных чисел, мы докажем геометрически. Одно из доказательств неравенства $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ основано на том, что высота прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу (рис. 1).

Однако с помощью конфигурации рисунка 1 не ясно, как сравнить среднее геометрическое со средним гармоническим, а среднее арифметическое со средним квадратическим. В то же время существует фигура, в которой все средние двух чисел a и b можно увидеть «живьем» — это трапеция $ABCD$ с основаниями $BC=a$, $AD=b$ (для определенности будем считать, что $b > a$). Среднее арифметическое — это длина средней линии трапеции. Остальные средние вы увидите, решив следующие упражнения; первое из них — полезная лемма, помогающая справиться с остальными.

Упражнения. Пусть EF — отрезок длиной x с концами соответственно на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, параллельный ее основаниям (рис. 2).

1. Найдите x , если известно, что $BE/EA = \lambda$. (Ответ: $x = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$). Указание. См. на рисунке 2: $GH \parallel AB$, а треугольники PCG и FDH подобны.

2. Найдите x , если отрезок EF проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

(Ответ: $x = \frac{2ab}{a+b}$). Указание. Воспользуйтесь упражнением 1 и тем, что $BE/ED = a/b$.

3. Найдите x , если трапеции $AEFD$ и $EBCF$ подобны. (Ответ: $x = \sqrt{ab}$).

4. Найдите x , если трапеции $AEFD$ и $EBCF$ равновелики. (Ответ: $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$). Указание.

Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P (рис. 3). Тогда $\frac{S_2}{S_1 + S_2} = \frac{a^2}{x^2}$; $\frac{S_2 + 2S_1}{S_2 + S_1} = \frac{b^2}{x^2}$. Сложив эти равенства, получим ответ.

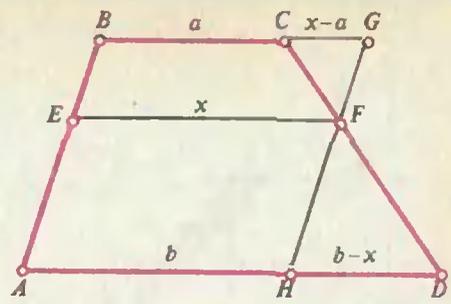


Рис. 2.

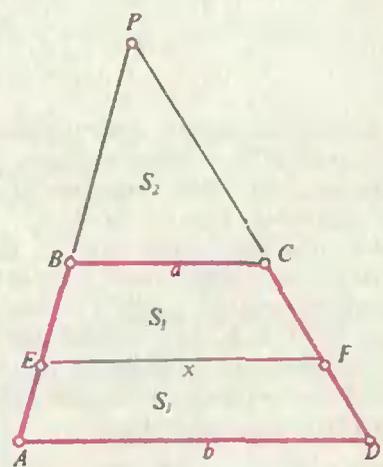


Рис. 3.

Итак, в трапеции $ABCD$ появились все упомянутые нами средние чисел a и b . Осталось доказать неравенства (*).

Упражнения. 5. Докажите, что

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Указание. Пусть EF , MN и KL соответствующие отрезки (постройте чертеж).

Тогда $\frac{BE}{EA} = \frac{a}{b}$; $\frac{BM}{MA} = \sqrt{\frac{a}{b}}$; $\frac{BK}{KA} = 1$,

но $\frac{a}{b} < \sqrt{\frac{a}{b}} < 1$.

6. Докажите, что

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Указание: Если KL — средняя линия трапеции, то $S_{BCLK} < S_{AKLD}$.

Итак, мы доказали неравенства (*) и убедились в том, что при $a < b$ все неравенства — строгие. Нетрудно видеть, что если какие-либо два из отрез-

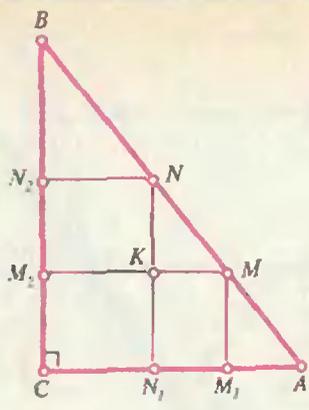


Рис. 4.

ков, длины которых мы сравнивали, равны, то $ABCD$ — параллелограмм и, следовательно, все неравенства (*) превращаются в равенства.

Приведем еще один способ сравнения средних. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC=a$ и $AC=b$, причем $a > b$. Пусть σ_M — сумма расстояний от некоторой точки M , лежащей на гипотенузе AB , до катетов треугольника.

Упражнение 7. Докажите, что $\sigma_N > \sigma_M$ если и только если точка N лежит «выше» точки M (рис. 4).

Указание. $\sigma_M = KN_1 + KM_2 + KM$. $\sigma_N = N_2N + NK + KN_1 = KN_1 + KM_2 + KN$, но $KN > KM$.

Пусть биссектриса угла C пересекает гипотенузу в точке H (рис. 5). Тогда четырехугольник CH_2HH_1 — квадрат со стороной $\frac{ab}{a+b}$, так что $\sigma_H = \frac{2ab}{a+b}$ — среднее гармоническое

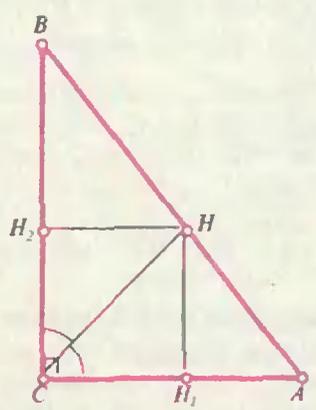


Рис. 5.

чисел a и b , причем $BH/AN = b/a$. Если O — середина гипотенузы, то $\sigma_O = \frac{a+b}{2}$, а точка O лежит выше точки H ($\frac{b}{a} < 1$). Поэтому $\sigma_O > \sigma_H$,

т. е. $\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$.

Упражнения.

8. Рассмотрим на гипотенузе AB точку G , для которой $\sigma_G = \sqrt{ab}$. Докажите, что точка G лежит между точками O и H , т. е. что $\sigma_O > \sigma_G > \sigma_H$.

9. Пусть P — точка на биссектрисе угла C (рис. 6), для которой $CP = \frac{1}{2} AB = CO = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$. Пусть также точка Q на AB такова, что прямая QP перпендикулярна CP . Дока-

жите, что $\sigma_Q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. после чего убедитесь

в справедливости неравенства $\sigma_Q > \sigma_O$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $PP_2 = PP_1$, а $\angle QPP_2 = 45^\circ$ — (см. рис. 6).

Существует и третье доказательство неравенств о средних, провести которое мы предлагаем вам в качестве очень полезных упражнений.

Упражнения.

10. Окружности диаметрами a и b касаются внешне. Докажите, что отрезок их общей внешней касательной, заключенный между точками касания, равен среднему геометрическому диаметров.

11. Окружности диаметрами a и b не имеют общих точек, а отрезок их общей внешней касательной, заключенный между точками касания, равен среднему арифметическому диаметров. Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно среднему квадратическому диаметров.

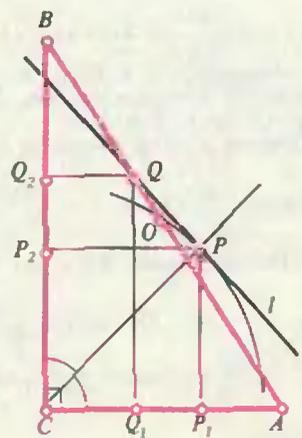


Рис. 6.

Эти пирамиды покрывают данный параллелепипед и (если среди чисел a, b, c есть различные) даже «вылезают» за пределы параллелепипеда, так что сумма объемов этих пирамид, т. е. $\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} + \frac{c^3}{3}$, не меньше объема параллелепипеда. Итак, $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc$.

Общее неравенство Коши

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}, \quad (2)$$

где $x_i \geq 0$, может быть доказано с по-

мощью аналогичной конструкции в n -мерном пространстве.

Рекомендуем читателям, знакомым с понятием n -мерного пространства, провести соответствующие рассуждения. Для этого следует рассмотреть прямоугольный параллелепипед с ребрами $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и построить n -мерные пирамиды с объемами

$$\frac{a_1^n}{n}, \frac{a_2^n}{n}, \dots, \frac{a_n^n}{n},$$

покрывающие параллелепипед. В результате придем к неравенству

$$\frac{a_1^n + \dots + a_n^n}{n} \geq a_1 a_2 \dots a_n,$$

из которого без труда получится неравенство (2).

Информация

Памяти академика Колмогорова

Андрей Николаевич Колмогоров уделял большое внимание не только аудиторным занятиям, но и неформальному общению Учителя с учениками. Вместе с ребятами ходил в походы, где обсуждал и решал с ними интересные математические задачи, проводил музыкальные вечера, читал лекции по истории искусств. Его любимым детищем был открытый в 1963 году физико-математический интернат № 18, собирающий детей, увлекающихся физикой и математикой. И не случайно, именно на базе этой школы (а ныне Специализированного учебно-научного центра) начинается свою работу Всесоюзная научно-методическая конференция учителей и учащихся, посвященная памяти А. Н. Колмогорова.

Как показывает опыт конференции ученых различных

направлений, живое общение, обсуждение докладов, обмен опытом играет колоссальную роль в дальнейшем развитии научной мысли. Учащимся школ такие праздники Юных математиков помогают определиться в выборе будущей профессии, а также начать как можно раньше самостоятельную исследовательскую работу. Учителям математики подобные встречи дают возможность более творчески и профессионально подойти к развитию математических способностей учащихся.

В апреле 1991 года на первую Всесоюзную конференцию, посвященную памяти А. Н. Колмогорова, приглашаются преподаватели и ученики спецшкол и спецклассов, руководители и члены научных обществ учащихся, различных кружков, специализирующихся в углубленном изучении математики, информатики, физики, химии и биологии. Для преподавателей и учащихся организуются две независимые секции, которые в свою очередь разделяются по научному профилю и уровню сложности обсуждаемых тем.

Цель секции преподавателей — обмен методическим опытом и результатами работы по развитию творческих способностей юношества в области математики и естественных наук, по раннему привлечению учащихся к самостоятельным научным исследованиям.

На секции учащихся будут заслушиваться доклады школьников, содержащие результаты их самостоятельной научной работы.

В Специализированном учебно-научном центре создан постоянно действующий оргкомитет, в задачу которого входит установление контактов с учебными заведениями, распространение приглашений, организация и проведение конференций, публикация наиболее интересных материалов в журналах «Квант» и «Математика в школе», публикация тезисов конференций.

Все желающие принять участие в конференции должны направить до 31 декабря 1990 года заявки по адресу: 121357, Москва, ул. Кременчугская, 11, СУНЦ, оргкомитет конференции. О. М.

Игры и головоломки

Движущиеся игрушки из картона и бумаги

Кандидат физико-математических наук
А. ПАНОВ

О таких игрушках я уже рассказывал в статье «Флексагоны, флексоры, флексманы», опубликованной в «Кванте» № 7 за 1988 год (далее цитируется как ФФФ). Здесь будет добавлено еще несколько. Все эти игрушки просты в изготовлении и все они на самом деле подвижны.

Три выворачивающихся кольца

Одна из самых привлекательных конструкций в ФФФ — это кольцо из десяти тетраэдров. Кольцо обладает поразительной гибкостью и способностью выворачиваться и выворачиваться до бесконечности («Квант», 1988, № 7, четвертая страница обложки). Аналогичное кольцо можно склеить из восьми треугольных призм. Вот как делается эта игрушка. Из листа ватмана или тонкого картона вырежьте четыре полосы размером 3×42 см. Каждую разделите на семь прямоугольников 3×6 см и сделайте сгибы по линиям раздела (рис. 1). Крайние прямоугольники полосы склейте между собой (рис. 2). В местах, указанных стрелками, сделайте небольшие надрезы. Пропустите через них нитку и завяжите ее (рис. 3). Получится гибкий элемент, состоящий из двух призм, имеющих общее ребро. Кроме четырех таких элементов, нужны еще четыре соединительных полосы 5×5 см. Каждую из них сложите вдвое. Процесс сборки кольца изображен на рисунке 4. Каждую



Рис. 1.

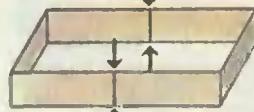


Рис. 2.



Рис. 3.

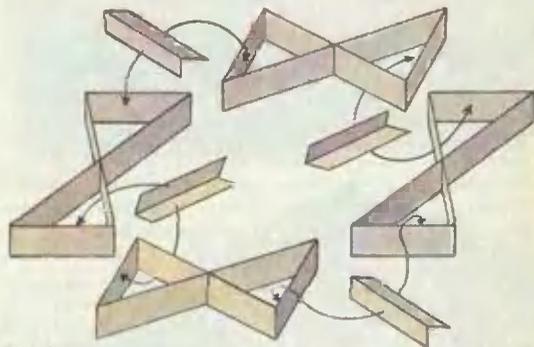


Рис. 4.

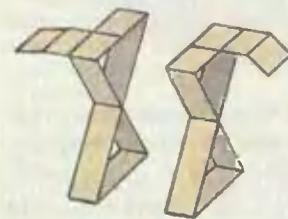


Рис. 5.

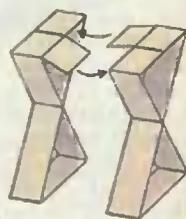


Рис. 6.

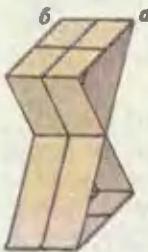


Рис. 7.

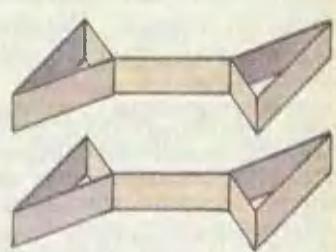


Рис. 8.

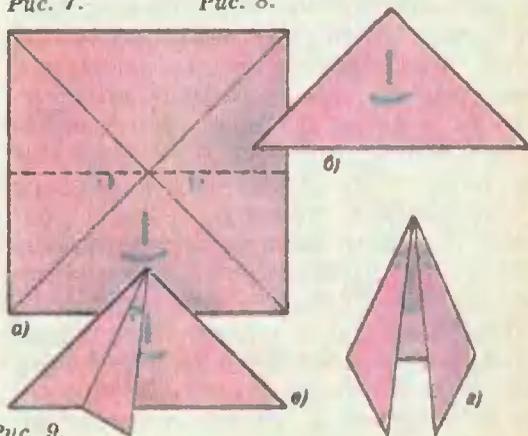


Рис. 9.

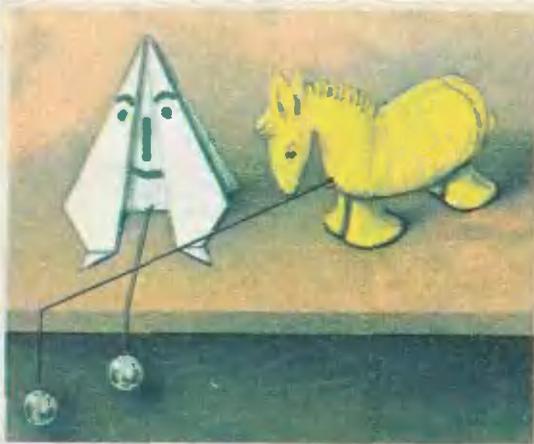


Рис. 10.

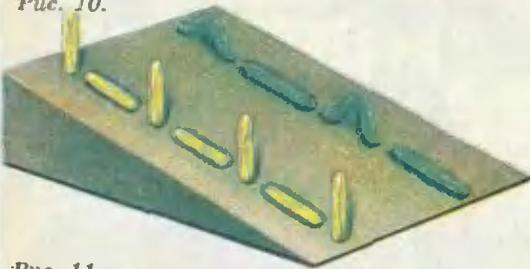


Рис. 11.

из соединительных полосок изнутри, намажьте клеем, введите внутрь соседних элементов (обратите внимание, где полоски вводятся сверху, где снизу) и приклейте. Вот и все — игрушка готова и вы можете попробовать ее в деле. Обратите внимание на то, как изящно изгибается это кольцо.

А вот еще более компактная конструкция — она состоит всего из трех таких элементов, как на рисунке 3. На этот раз для соединения двух соседних элементов понадобятся две полоски размером 1×9 см. Каждую из них нужно согнуть втрое, разделив на прямоугольники размером 1×3 см. Возьмите два элемента и к каждому из них подклейте полоску, как на рисунке 5. Теперь расположите элементы друг против друга, как на рисунке 6. Верхние поверхности выступающих прямоугольников намажьте клеем, одновременно введите внутрь противоположных элементов и приклейте. Теперь эти элементы связаны двойным шарнирным соединением (подробности о нем в ФФФ). Действие этого соединения изображено на рисунке 7. Теперь остается та-

ким же образом присоединить третий свободный элемент к первым двум — и кольцо готово.

Наконец, самая экономная выворачивающаяся конструкция. Она склеивается всего из двух элементов. Каждый из них состоит из двух призм, соединенных прямоугольником (рис. 8). И верхние и нижние концы элементов соединяются при помощи двойного шарнирного соединения.

Флексман и ослик

Флексман — это еще один из героев ФФФ. Этот забавный человечек может ходить по наклонным плоскостям. Процесс его создания изображен на рисунке 9. Из тонкой бумаги вырезается квадрат со стороной $15-20$ см. По диагоналям делается сгиб вверх, по штриховой линии сгиб вниз (рис. 9, а). Затем квадрат складывается в треугольник (рисунок 9, б). После этого делаются четыре одинаковые операции. Результат первой из них — на рисунке 9, в. Окончательный результат — на 9, г. Так у флексмана появляются ножки. И еще четыре завершающие операции — на концах каждой ножки следует отогнуть по маленькому треугольничку. Флексман готов, и если вы поставите его на наклонную плоскость, отрегулируете ее наклон, то флексман, покачиваясь и переваливаясь, начнет мелкими шажками спускаться по ней.

А вернулся я к флексману вот по какой причине. Недавно мне повезло: я купил отличную игрушку — шагающего ослика (рис. 10). Этот ослик тоже ходит по наклонной плоскости, но он может ходить и по горизонтальным поверхностям. К ослику на нитке прикреплен грузик. Если этот грузик перекинуть через край стола, то ослик зашагает и по столу. Такой же грузик можно приделать к флексману, и он тоже будет ходить по столу. Флексман и ослик на первый взгляд кажутся существами совершенно разной породы. Тем поразительней полное совпадение механики их поведения.

(Думаю, что, когда мы, наконец, встретимся с инопланетянами, точно

так же при всем внешнем различии внутреннее сходство будет несомненным. Интересно, правда, кто из нас больше будет похож на ослика.)

Шагающая палочка

Это еще один объект, способный ходить по наклонным плоскостям. Найдите стальной шарик диаметром в один сантиметр или около этого. Из плотной бумаги сверните трубочку диаметром чуть побольше шарика,

чтобы он мог свободно кататься внутри. Вложите шарик в трубочку и заклейте ее концы кусочками марли, но не туго, а так, чтобы шарик все-таки мог наполовину выкатываться из трубочки. Теперь положите игрушку на наклонную плоскость вдоль линии наклона, и она тут же зашагает. Мне эта игрушка напоминает забавную гусеницу-землемерку. Конечно, сходство здесь не такое полное как между осликом и флексманом, но тем не менее...

Головоломка «цветной треугольник» (задача для исследования)

На 4-й с. обложки предыдущего номера «Кванта» мы предложили следующую головоломку: на узлах правильной треугольной сетки в треугольнике (с n узлами на стороне) расставить фишки n цветов так, чтобы на линиях сетки, параллельных сторонам, не было одноцветных фишек.

На рисунках 1 и 2 приведены два решения этой головоломки для $n=5$. Интересно, что разбиения 15 узлов сетки на множества одноцветных узлов в обоих случаях симметричны относительно вертикальной высоты треугольника, а на рисунке 2 — еще и относительно двух других высот, а также относительно поворота на 120° вокруг центра треугольника.

Расцветку на рисунке 1 можно получить так. Рассмотрим (косоугольную) систему координат с началом в зеленой вершине треугольника и осями, идущими по боковым сторонам, в которой красная вершина имеет координаты $(4; 0)$, а фиолетовая — $(0; 4)$. Тогда окажется, что зеленый цвет имеют узлы $(x; y)$, для которых $x=y$, красный — точки, для которых $y-x$ при делении на 5 дает остаток 1, голубой — точки с остатком 2 и т. д. Можно проверить, что такой же способ раскраски годится при любом нечетном n . Однако при четном n он не работает: на одну горизонталь попадают одинаковые цвета.

Задача 1. Возьмем какую-нибудь целочисленную функцию $f(x)$ и разобьем узлы сетки на множества, в каждом из которых разность $y-f(x)$ будет давать одинаковый остаток при делении на n . На каждом из полученных n множеств будем расставлять фишки своего цвета. Покажите, что при четном n «условие разноцветности» не будет выполняться ни при какой функции $f(x)$.

Более того, при $n=4$ (как и при $n=2$) наша головоломка вообще неразрешима. Действительно, если узлы на основании треугольника окрашены как на рисунке 3, то центральный узел может быть только красным или голубым. В первом случае, двигаясь по стрелкам, мы однозначно определим цвета еще трех узлов и в итоге будем вынуждены нарушить правила: две вершины треугольника оказываются красными. Аналогично рассматривается случай голубого центрального узла.

Задача 2. Решите головоломку для $n=6$ и $n=8$.

Задача 3*. При каких четных $n \geq 10$ головоломка «цветной треугольник» имеет решение?

Еще один, по-видимому, очень трудный вопрос: сколько решений имеет головоломка в зависимости от n ? Аналогичный вопрос для расстановок фишек на прямоугольной сетке с условием разноцветности по горизонталям и вертикалям обсуждался в статье В. Шевелева «Латинские прямоугольники» («Квант» № 5 за этот год). Впрочем, и прямоугольная задача, несмотря на свою долгую историю, весьма далека от полного решения.

В. Дубровский

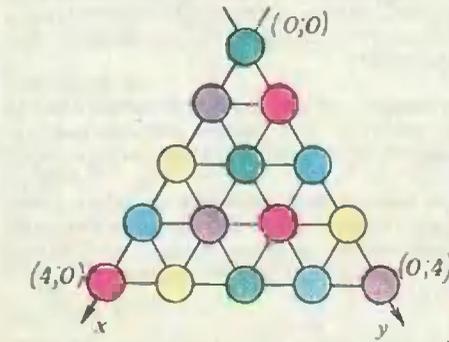


Рис. 1.

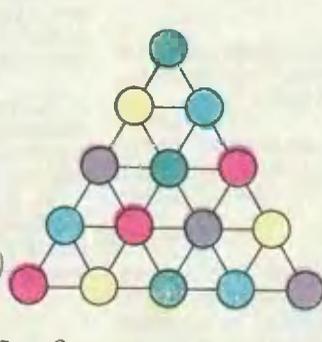


Рис. 2.

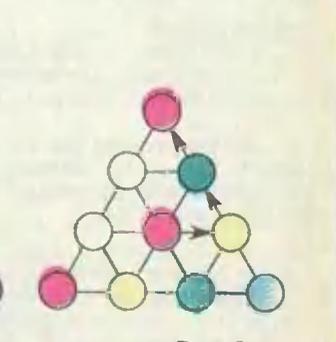


Рис. 3.

Олимпиады

Задачи LIII Московской математической олимпиады

Заключительный тур LIII Московской математической олимпиады состоялся 4 марта 1990 года в Московском университете. В нем участвовало более 1000 школьников 8—11 классов. Ниже приводятся задания этого тура (на их решение отводилось 4 часа).

8 класс

1. Докажите, что если $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1}$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_3 + a_6 + a_9} < 3.$$

А. Галочкин

2. Какое наименьшее количество различных простых делителей может иметь число $m(n+9)(m+2n^2+3)$, где m, n — натуральные числа?

А. Спивак

3. На отборочный тур олимпиады были приглашены победители из 8, 9, 10 и 11 классов — всего 11 человек. Можно ли их рассадить за круглым столом так, чтобы среди любых пяти сидящих подряд школьников нашлись представители всех четырех классов?

С. Конягин

4. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, через вершины A, B и точку пересечения диагоналей проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E . Докажите, что если $AB = AD$, то $CE = CD$.

В. Протасов

5. Табло, состоящее из 64 лампочек, управляется 64 кнопками; каждая лампочка — своей кнопкой. За одно включение можно одновременно нажать любой набор кнопок и записать, какие лампочки при этом зажглись. За какое наименьшее количество включений можно узнать о всех лампочках табло, какая лампочка какой кнопкой включается?

С. Гашков

9 класс

1. В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трех братьев. Докажите, что все семеро — братья.

С. Конягин

2. Докажите, что из 53 различных натуральных чисел, не превосходящих в сумме 1990, всегда можно выбрать 2 числа, составляющих в сумме 53.

С. Конягин

3. В данном круге радиусом 1 отмечена точка. Через нее проводятся различные хорды, а через оба конца каждой хорды проводятся окружности радиусом 2. Докажите, что все

проводимые окружности касаются некоторого фиксированного круга.

В. Протасов

4. Имеется 8 монет, из которых 2 — фальшивые: одна легче настоящей, а другая тяжелее. Можно ли за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь установить, что тяжелее: 2 фальшивые монеты или 2 настоящие, или же они весят одинаково?

И. Сергеев

5. Десятичная запись рационального числа имеет период длины n . Какая наибольшая длина периода может при этом оказаться у десятичной записи квадрата этого числа?

С. Гашков

10 класс

1. Можно ли разрезать квадрат на 3 попарно различных и попарно подобных треугольника?

С. Конягин

2. Найдите все простые числа p, q, r , удовлетворяющие равенству

$$p^q + q^r = r.$$

Б. Кукушкин

3. Докажите, что для всех значений параметров a, b, c найдется число x , удовлетворяющее неравенству

$$a \cos x + b \cos 3x + c \cos 9x \geq \frac{|a| + |b| + |c|}{2}.$$

С. Гашков

4. При каком взаимном расположении четырех точек в круге произведение всех попарных расстояний между этими точками максимально?

А. Спивак

5. Точки A, B, C, D расположены в пространстве так, что отрезок BD виден из точек A и C под углом α , а отрезок AC из точек B и D под углом β . Найдите отношение $AC:BD$, если $AB \neq CD$.

И. Шарыгин

11 класс

1. Найдите наибольшее значение выражения

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

И. Сергеев

2. Докажите, что если функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0; 1]$, непрерывна и удовлетворяет тождеству $f(f(x)) = x^2$, то справедливы оценки $x^2 < f(x) < x$, $x \in (0; 1)$. Приведите пример такой функции.

И. Сергеев

3. В треугольнике ABC проведены медиана BD и биссектриса BE . Может ли случиться так, что при этом одновременно BD — биссектриса в треугольнике BCE , а BE — медиана в треугольнике ABD ?

Б. Кукушкин

4. Докажите, что для любого нечетного числа найдется кратное ему число, десятичная запись которого состоит только из нечетных цифр.

И. Сергеев

5. При каком расположении четырех точек в пространстве они могут служить проекциями какой-либо точки соответственно на четыре плоскости граней некоторого тетраэдра?

В. Протасов

Публикацию подготовил *И. Сергеев*

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

8 класс

1. Имеется сосуд с небольшим отверстием у дна (рис. 1). В сосуд помещен большой кусок кристаллического льда при температуре $t_0=0^\circ\text{C}$. Сверху на лед падает струя воды, ее температура $t_1=20^\circ\text{C}$, а расход $q=1\text{ г/с}$. Найдите расход вытекающей воды, если ее температура $t_2=3^\circ\text{C}$. Поток тепла от окружающего воздуха можно пренебречь. Теплоемкость воды $c=4,2\text{ Дж/(г}\cdot\text{град)}$. Удельная теплота плавления льда $\lambda=330\text{ Дж/г}$.

2. У «черного ящика» есть три клеммы. Если на клеммы A и B подать напряжение 20 В , то с клемм B и C снимают напряжение 8 В . Если на клеммы B и C подают напряжение 20 В , то с клемм A и C снимают напряжение 15 В . Изобразите схему «черного ящика».

9 класс

1. Колобок, имеющий форму шара, застигнут дождем в точке B (рис. 2). Капли дождя имеют вертикальную скорость, равную V , а горизонтальную — равную v и направленную под углом φ к направлению AB (в точке A находится дом Колобка). С какой скоростью Колобок должен бежать по линии BA , чтобы как можно меньше промокнуть?

2. Мяч падает на твердый пол с высоты $H=1\text{ м}$. При каждом ударе об пол половина его энергии переходит в тепло. Масса мяча $m=0,2\text{ кг}$, избыточное давление в нем $\Delta p=0,2\text{ атм}$, радиус $r=10\text{ см}$. Сколько раз он ударится об пол?

3. Орбитальная станция имеет форму тора, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega=1\text{ рад/с}$. Из клетки вылетели два попуайчика и полетели по коридору в разные стороны. Оказалось, что одному ле-

теть гораздо легче, чем другому. Объясните, какому и почему. Считая, что попуай летает со скоростью 5 м/с , оцените радиус станции.

4. В U-образной трубке находятся вода, ртуть и масло. Уровень ртути в левом и правом коленах одинаков, а высота столба воды равна H (рис. 3). В некоторый момент открывается вентиль в тонкой горизонтальной трубке, соединяющей колена на высоте $H/2$ над уровнем ртути. Как изменится уровень масла в правом колене? Плотности ртути, воды и масла равны ρ_r, ρ_w и ρ_m , причем $\rho_w > \rho_m$.

5. На рисунке 4 изображена вольт-амперная характеристика некоторой лампочки накаливания. Из таких лампочек набирают бесконечную цепь (рис. 5). Какое максимальное напряжение можно приложить к клеммам, чтобы ни одна лампочка не перегорела?

10 класс

1. Через два небольших блока перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены одинаковые грузы массой M каждый (рис. 6). В начальный момент грузы уравновешены и покоятся. На нить с высоты h строго посередине между блоками падает небольшое тело массой m так, что при падении оно цепляется за нить. Какова будет максимальная скорость грузов в процессе движения, если $m/M \ll h/l \ll 1$?

2. Цилиндр радиусом R и массой m плотно вставлен в жестко закрепленное кольцо. Чтобы его продвинуть, надо приложить силу, не меньшую F ($F > mg$). Ось цилиндра вертикальна. Цилиндр начинают вращать с постоянной угловой скоростью ω , не прикладывая при этом вертикальной силы. Найдите требуемый для этого момент силы и скорость вертикального перемещения цилиндра. Трение цилиндра о кольцо является сухим.

3. В высокой U-образной трубке с внутренним диаметром $d=1\text{ см}$ и радиусом закругления нижней части $R=3\text{ см}$ находится $V_0=50\text{ см}^3$ ртути плотностью $\rho=13\text{ г/см}^3$. В левое колено трубки наливают $V_1=2\text{ л}$ воды. На какое расстояние ртуть переместится вдоль трубки?

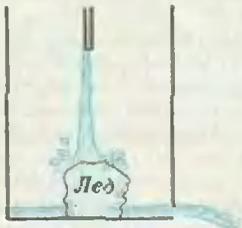


Рис. 1.

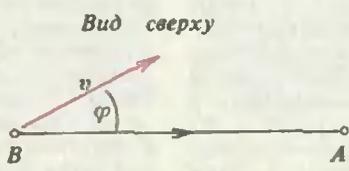


Рис. 2.

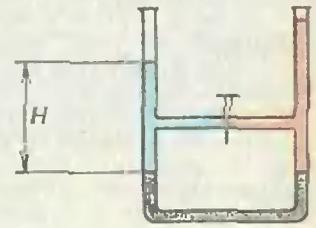


Рис. 3.

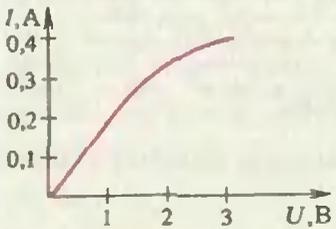


Рис. 4.

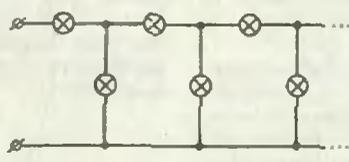


Рис. 5.

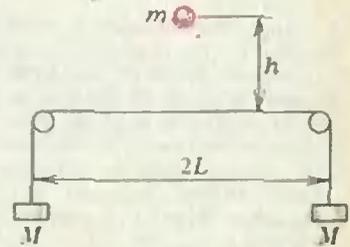


Рис. 6.

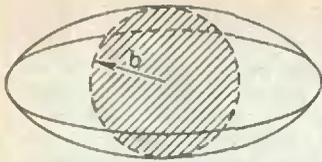


Рис. 7.

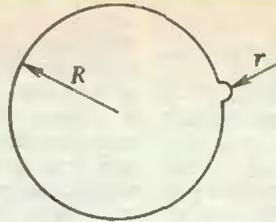


Рис. 8.

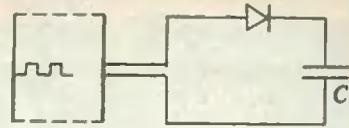


Рис. 9.

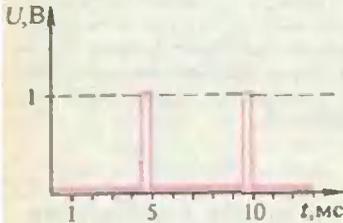


Рис. 10.

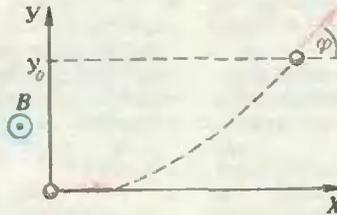


Рис. 11.

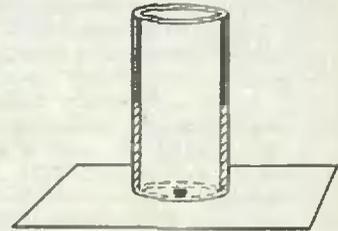


Рис. 12.

4. На поверхности воды, налитой в сосуд высотой $h=1$ м, удерживают тело массой $m=1$ кг и объемом $V=0,5$ л. Затем его отпускают без начальной скорости. Какое количество теплоты выделится при падении тела? Чему будет равно выделившееся количество теплоты, если тело той же массы, но объема $V'=1,5$ л будет всплывать без начальной скорости на поверхность со дна сосуда? Размѣрами тел по сравнению с высотой сосуда можно пренебречь.

5. Сосуд сложной формы (рис. 7) наполнен газом под давлением p . Одно из сечений этого сосуда имеет форму круга радиусом b . Рассмотрим часть сосуда, ограниченную этим сечением. Чему равна и куда направлена сила, действующая со стороны газа на эту часть сосуда?

6. Проводящая сфера радиусом R имеет дефект поверхности в виде полусферического бугорка радиусом $r \ll R$ (рис. 8). Оцените изменение электрической емкости сферы, обусловленное этим бугорком.

7. Ток через диод в диапазоне напряжений от -5 В до $+0,1$ В хорошо описывается формулой $I(U)=I_0(2^{U/W}-1)$, где $I_0=10$ мкА и $W=0,01$ В. Этот диод последовательно с конденсатором емкостью $C=100$ мкФ подключают к генератору прямоугольных импульсов (рис. 9). Зависимость напряжения на клеммах генератора от времени показана на рисунке 10. Найдите зависимость напряжения на конденсаторе от времени в установившемся режиме.

11 класс

1. При перетягивании каната два человека тянут его в противоположные стороны за концы с большой силой F . Найдите прогиб каната от горизонтальной линии под действием силы тяжести. Масса каната m , длина L , $mg \ll F$.

2. Капля жидкости диаметром D с коэффициентом поверхностного натяжения σ находится между двумя гладкими параллельными пластинками. Жидкость смачивает пластинки таким образом, что капля представляет собой цилиндр с прямыми углами при основании.

Определите силу взаимодействия между пластинками.

3. На длинную непроводящую струну, продетую по диаметру металлического шара через два небольших отверстия в нем, надета маленькая заряженная бусинка. Шар и бусинка имеют заряды одного знака (по величине заряд бусинки много меньше). Бусинке сообщили скорость, достаточную для того, чтобы «пролететь» через шар. Нарисуйте график зависимости ускорения бусинки от расстояния до центра шара.

4. Электрон движется в плоскости OXY в магнитном поле, индукция \vec{B} которого в точках этой плоскости направлена вдоль OZ и зависит только от y . В начальный момент электрон находился в точке O (рис. 11) и имел скорость v , направленную вдоль OX . Когда же его координата y была равна y_0 , скорость была направлена под углом φ к OX . Чему была бы равна сила, действующая со стороны этого магнитного поля на отрезок проводника с током I , координаты концов которого равны $(0, 0, 0)$ и $(0, y_0, 0)$?

5. Сильно близорукий человек, носящий очки с оптической силой $D=-10$ дптр, четко видит удаленные предметы, если очки надеты нормально. До какого расстояния он сможет видеть четко, если очки у него сползут на нос и окажутся от глаз на $l=1$ см дальше, чем обычно?

6. Внутренняя поверхность трубы, длина которой много больше диаметра, на половину длины зеркальна, а оставшаяся половина зачернена (рис. 12). Трубу ставят на черный стол зеркальной половиной вниз так, что расположенный на столе фотоэлемент находится на оси трубы. При этом освещенность фотоэлемента равна E_0 . Каким будет показание фотоэлемента, если трубу перевернуть? Стол с трубой освещается равномерно рассеянным (изотропным) светом.

Публикацию подготовил Д. Курцов

Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана проводит в 1990/91 учебном году третью Всесоюзную заочную физико-математическую олимпиаду (с техническим приложением) для учащихся средних школ, ПТУ и техникумов. Олимпиада проводится в два тура. Условия задач пер-

вого тура публикуются ниже. Задачи второго тура будут рассылаться участникам олимпиады, допущенным ко второму туру по результатам первого.

Решения задач первого тура необходимо выслать до 15 декабря 1990 г.

Все решения оформите в одной школьной тетради. На

внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги с указанием подробного домашнего адреса (с почтовым индексом), фамилии, имени, отчества и места учебы. На внутреннюю сторону обложки наклейте справку с места учебы с указанием класса (курса).

Тетрадь с решениями вложите в большой конверт и отправьте простой бандеролью по адресу: 107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н. Э. Баумана, «Олимпиада—90/91».

Задачи первого тура

1. В трапеции с основаниями 19 и 90 проведены две параллельные основаниям прямые, делящие эту трапецию на три части. Площадь первой части в 1917 раз больше площади второй, примыкающей к ней, которая, в свою очередь, в 1990 раз больше третьей. Найдите длины этих прямых.

2. Найдите решения уравнения в целых числах

$$2x^2 + 1990 + x^2 - y^2 = 2y^2 + y + y - 1990,$$

удовлетворяющие условию $x + y > 1990$.

3. Определите число нулей, расположенных в конце десятичной записи числа 1990!

4. Объясните, почему для замедления нейтронов используются водородосодержащие вещества (вода, парафин, и др.).

5. Вы хотите построить установку, использующую среднесуточный перепад давлений $\Delta p = 100$ Па для получения механической энергии. Считая, что температура в комнате постоянна, оцените максимальный выход механической энергии за месяц от установки с рабочим объемом $V = 1$ м³.

6. Камера объемом $V_1 = 22,4$ л заполнена воздухом. Давление в камере $p_1 = 3$ атм, температура стенок T . На дне камеры раздито немного воды, объемом которой можно пренебречь. Объем камеры медленно увеличили вдвое, оставив температуру стенок неизменной. При этом вода на дне почти исчезла, а давление в камере стало $p_2 = 2$ атм. Каким

станет давление (p_3) в камере, если ее объем еще раз удвоить (т. е. $V_3 = 2V_2$), сохраняя температуру стенок прежней? Определите массу воды (в жидком и парообразном состоянии) и массу воздуха в камере.

7. Точно над воздушным зазором незаряженного плоского конденсатора емкостью $C = 1,4$ мкФ в непосредственной близости подвешена на пружине пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 5$. Толщина пластины равна расстоянию между обкладками конденсатора, а ширина равна ширине обкладки. Конденсатор мгновенно заряжают до напряжения $U = 10$ кВ, и источник отключают. Диэлектрик при этом опускается внутрь конденсатора на максимальную глубину $h = 1$ см без трения о его пластины. Определите по этим данным жесткость пружины (k), если при поляризации диэлектрика тепло не выделяется. Высота пластин конденсатора $H = 10$ см.

8. Тонкая невесомая проводящая эластичная лента, длина которой $l_0 = 20$ см и коэффициент упругости $k = 20$ Н/м, закреплена в расправленном недеформированном состоянии во внешнем магнитном поле с индукцией $B = 0,8$ Тл, перпендикулярном к ней. При пропускании через ленту тока она приобретает форму дуги окружности радиусом $R = 30$ см. Найдите силу тока (I) и докажите, что форма ленты действительно дуга окружности (т. е. радиус кривизны в любой ее точке один и тот же).

**Ответы,
указания,
решения**

Избранные школьные задачи по физике

1 Согласно определению средней скорости,

$$v = \frac{l}{t_1 + t_2} = \frac{l}{l/(2v_1) + l/(2v_2)} = \frac{1}{1/(3v_1) + 1/(2v_2)} = \frac{6}{5} v_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = 5,6v = 36 \text{ км/ч и } v_1 = 1,5v_2 = 54 \text{ км/ч.}$$

2. При равноускоренном движении без начальной скорости пути, проходимые телом за последовательные равные промежутки времени, относятся как ряд нечетных чисел. В нашем случае (см. рис. 1) $l_{34}:l_{23}:l_{12} = 1:3:5$. С учетом того, что $l_{12} + l_{23} + l_{34} = 27 \text{ м}$, получаем

$$l_{12} = 15 \text{ м, } l_{23} = 9 \text{ м, } l_{34} = 3 \text{ м.}$$

3. См. рис. 2 (разумеется, под a , v и s здесь понимаются соответствующие проекции ускорения, скорости и перемещения на выбранное направление оси X , т. е. a_x , v_x и s_x).

4. Максимальная высота подъема набирается на двух этапах: при равноускоренном движении без начальной скорости с ускорением $a = 2g$ и при «свободном падении» с начальной скоростью, направленной вертикально вверх:

$$H = \frac{at_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{2gt_1^2}{2} + \frac{(2gt_1)^2}{2g} = 3gt_1^2.$$

Отсюда

$$t_1 = \sqrt{\frac{H}{3g}}, \quad t_2 = \frac{v_1}{g} = \frac{2gt_1}{g} = 2t_1.$$

$$t = t_1 + t_2 = 3t_1 = \sqrt{\frac{3H}{g}} \approx 150 \text{ с} = 2,5 \text{ мин.}$$

5. После абсолютно упругого удара о движущуюся плиту шарик получит скорость, равную $u = \sqrt{2gh} + 2v$ и направленную вертикально вверх, и поднимется на высоту

$$H = u^2/(2g) = (\sqrt{2gh} + 2v)^2/(2g).$$

6. Поскольку $V_2 > V_1$ (см. рис. 3), $p_2 < p_1$, т. е. давление газа уменьшается.

7. Запишем уравнения, описывающие газовые процессы на участках 1—2 и 3—1:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{p_3}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{T_1}.$$

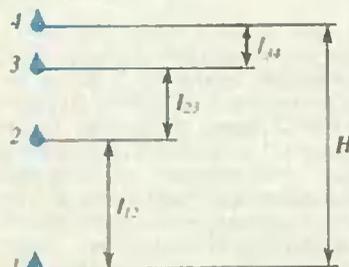


Рис. 1.

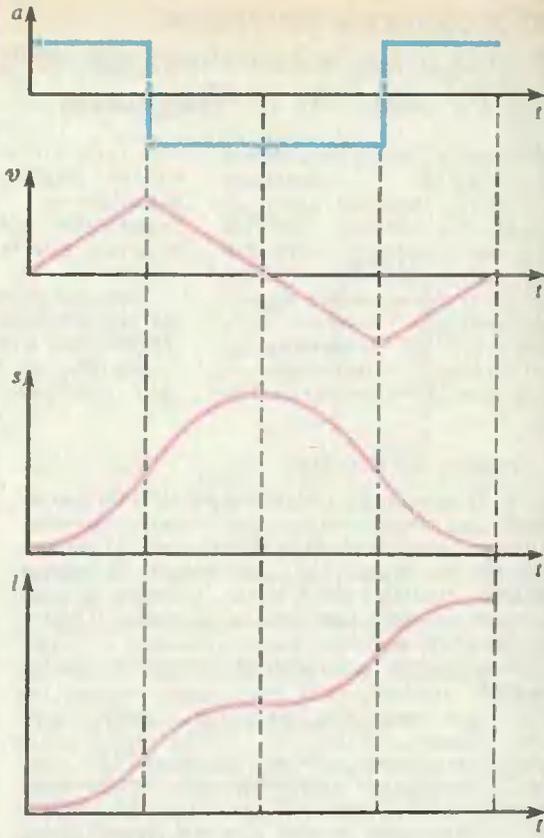


Рис. 2.

Отсюда получаем

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}, \text{ и } T_3 = \frac{T_1^2}{T_2}.$$

8. Подъемная сила равна разности выталкивающей силы и силы тяжести:

$$F_n = F_n - F_T = \rho_2 Vg - \rho_1 Vg.$$

Плотности ρ_1 и ρ_2 воздуха найдем из уравнения газового состояния:

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{pM}{RT_1}, \quad \rho_2 = \frac{m_2}{V} = \frac{pM}{RT_2}.$$

Окончательно

$$F_n = \frac{pMVg}{R} \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} \approx 300 \text{ Н.}$$

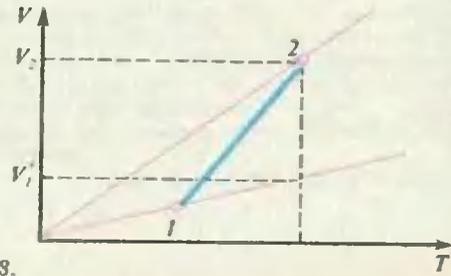


Рис. 3.

9. Плотность смеси газов равна

$$\rho = (m_1 + m_2)/V.$$

Согласно закону Дальтона,

$$p = p_1 + p_2 = \frac{m_1 RT}{M_1 V} + \frac{m_2 RT}{M_2 V}.$$

откуда

$$V = \frac{RT}{p} \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right).$$

Тогда

$$\rho = \frac{(m_1 + m_2)p}{RT(m_1/M_1 + m_2/M_2)} \approx 2 \text{ кг/м}^3.$$

10. Из условия равновесия поршня в первом, втором и третьем случаях —

$$mg = k\Delta l, \quad mg = k(\Delta l - h) + p_1 S, \\ mg = k(\Delta l - x) + p_2 S.$$

используя уравнения состояния идеального газа —

$$p_1 h S = \nu RT_1, \quad p_2 x S = 5\nu RT_2,$$

найдем искомую высоту:

$$x = 5hT_2/T_1 \approx 52 \text{ см.}$$

11. Согласно определению, средняя скорость тела за полпериода колебаний равна

$$v_{cp} = \frac{2x_m}{T/2}.$$

Амплитуда колебаний x_m связана с амплитудой скорости v_m соотношением

$$v_m = \omega x_m = (2\pi/T)x_m.$$

Таким образом,

$$v_{cp} = 2v_m/\pi \approx 6 \text{ м/с.}$$

12. Период колебаний нашего маятника складывается из полпериода колебаний маятника длиной l и полпериода колебаний маятника длиной $l/2$:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \pi\sqrt{\frac{l/2}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}(\sqrt{2} + 1).$$

13. При резонансе контур представляет собой чисто активное сопротивление, поэтому амплитуда тока

$$I_m = \mathcal{E}_m/R.$$

Резонансная частота

$$\omega = 1/\sqrt{LC}.$$

14. Согласно определению действующего значения переменного тока,

$$I^2 R \cdot 2\tau = \frac{q^2 R}{2\tau} = \frac{(I_0 \tau)^2 R}{2\tau},$$

откуда

$$I = I_0/\sqrt{2}.$$

15. Отставание по фазе связано со временем распространения волны:

$$\frac{t}{T} = \frac{l/c}{1/\nu} = \frac{l\nu}{c} = 0,05,$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света.

Часть III Московской математической олимпиады

8 класс

1. Указание. Сложите очевидные неравенства:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3, \quad a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6,$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9.$$

2. Ответ: 2. При $m > 1$ произведение чисел m и $m + 2n^2 + 3$ (разной четности) имеет не менее двух различных простых делителей: 2 и некоторое нечетное число. Если же $m = 1$, то число

$$(n + 9)(2n^2 + 4) = 2(n + 9)(n^2 + 2)$$

имеет не менее двух различных простых делителей. Ровно два простых делителя получается, например, при $m = 5, n = 1$.

3. Ответ: нельзя. Хотя бы один класс представлен не более чем двумя участниками (иначе всего было бы не менее чем $3 \cdot 4 = 12$ человек). Именно этот класс и не будет представлен в некоторой пятерке сидящих подряд школьников.

4. Из равенства вписанных углов $\angle ACB = \angle ACD$ и $\angle CAD = \angle CBD = \angle EAC$ (рис. 4) следует равенство треугольников ACD, ACE и сторон CD, CE .

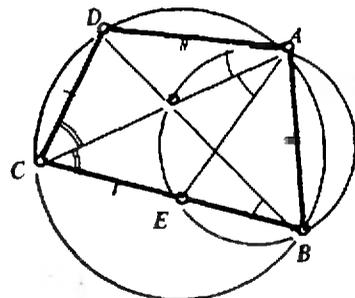


Рис. 4.

5. Ответ: 6. Будем изображать m включений табло в виде таблицы $m \times 64$, заполненной плюсами и минусами так, что каждый столбец таблицы изображает свою кнопку, строка — включение, а плюс — нажатие данной кнопки в данном включении. Для того чтобы по зажигания каждой лампочки можно было распознать кнопку, которая ее зажигала, необходимо и достаточно, чтобы все столбцы были различны. Это возможно в точности, когда $2^m \geq 64$, поскольку число различных столбцов высоты m равно 2^m . Наименьшее значение m , удовлетворяющее этому условию, равно 6.

9 класс

1. Любые два мальчика — братья, ибо у них есть общий брат: в противном случае в компании кроме указанных двоих мальчиков было бы еще по меньшей мере $3 + 3 = 6$ мальчиков, тогда как их всего 7.

2. Если из данных 53 чисел нельзя выбрать два числа, составляющие к сумме 53, то в каждой паре вида $(k, 53 - k)$, где $k = 1, \dots, 26$, содержится не более одного данного числа. Но тогда сумма всех 53 чисел не меньше чем

$$(1 + \dots + 26) + (53 + \dots + 79) = \frac{1+26}{2} \cdot 26 + \frac{53+79}{2} \cdot 27 = 2133,$$

т. е. больше чем 1990. Противоречие.
 3. Любая окружность касается, например, круга с центром в отмеченной точке *A* и радиусом *r*, удовлетворяющим условию

$$r(4-r) = a, \quad (*)$$

где число *a* равно произведению отрезков хорды, на которые ее разбивает точка *A* (это произведение не зависит от выбора хорды). Так как $a < 4$, то уравнение (*) имеет положительное решение.

4. Ответ: да. Разобьем монеты на 4 группы *A, B, C, D* по 2 монеты и произведем 3 взвешивания:

$$\begin{aligned} A + B & \vee C + D, \\ A + C & \vee B + D, \\ A + D & \vee B + C, \end{aligned}$$

результаты которых запишем знаками $<, >$ или $=$ вместо знаков \vee . Если не будет ни одного равенства (возможного лишь в случае равенства весов двух фальшивых и двух настоящих монет), то отбросим два одинаковых из трех полученных знаков. Оставшийся знак укажет, что произойдет, если положить фальшивые монеты слева, а настоящие справа. Действительно, если фальшивые монеты находятся в одной группе, то они нечетное число раз окажутся слева. Если тяжелая монета находится в *A*, а легкая — в *B, C* или *D*, то однажды обе они окажутся слева, а дважды получится знак $>$. Аналогичный вывод можно сделать, если фальшивые монеты поменяются местами. Наконец, если обе фальшивые монеты находятся в двух из трех групп *B, C* или *D*, то они дважды окажутся по разные стороны, дав оба знака $<$ и $>$ по одному разу, а однажды окажутся справа. Однако соответствующий знак будет отброшен как парный и останется противоположный.

5. Ответ: $n(10^n - 1)$. Заметим, что если $(p, q) = 1$, то период дроби p/q равен наименьшему числу $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющему условию

$$(10^{n+k} - 10^k) : q$$

при некотором *k*. Это следует из представления

дроби
$$\frac{s(10^n - 1) + r}{10^{n+k} - 10^k} = \frac{s}{10^k} + \frac{r}{10^k(10^n - 1)} \quad (r < 10^n - 1)$$

в виде смешанной периодической дроби с периодом *l*. Квадрат дроби $\frac{1}{10^n - 1} = 0,$

$0 \dots 01 \overline{0 \dots 01} \dots$ имеет период $n(10^n - 1)$, так как $(10^l - 1)!(10^n - 1)^n$ тогда и только тогда, когда $l : n(10^n - 1)$ (последнее вытекает из того, что число

$$10^{ln+m} - 1 = 10^{ln}(10^m - 1) + (10^{ln} - 1) = 10^{ln}(10^m - 1) + (10^n - 1)(1 + 10^n + \dots + 10^{(l-1)n}) \quad (m < n)$$

кратно $(10^n - 1)^2$ тогда и только тогда, когда $m = 0$ и $l : (10^n - 1)$).

Квадрат любой другой дроби периода *l* имеет период, не превосходящий $l(10^n - 1)$, так как если $10^k(10^n - 1) : q$, то $10^{2k}(10^{n(10^n - 1)} - 1) : 10^{2k} \times (10^n - 1)^2 : q^2$.

10 класс

1. Ответ: можно. На рисунке 5 изображено разбиение квадрата на 3 прямоугольника и указаны их размеры. Для подобия прямоугольников достаточно справедливости равенства

$$1 - x = x(1 - x(1 - x)),$$

которое выполняется при некотором значении $x \in (0; 1)$, ибо при $x = 0$ левая часть равенства больше правой, а при $x = 1$ — наоборот.

2. Ответ: (2, 3, 17), (3, 2, 17). Хотя бы одно из чисел *p, q, r* четно, а значит, равно 2. Поскольку $r \neq 2$, будем для определенности считать, что $q = 2$. Тогда

$$p^2 + 2^p = r.$$

Одно из чисел *p* или *r* кратно 3, иначе остаток от деления на 3 левой части равен $(\pm 1)^2 + (-1)^3 = 0$ (ибо *p* — нечетно), а правой — не 0. Но $r \neq 3$, так что $p = 3, r = 17$.

3. Положим $x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{3} \pm \frac{p}{9} \pm \frac{p}{27}$, где

знаки плюс или минус выберем совпадающими со знаками коэффициентов *a, b, c* соответственно (знак числа 0 считаем для определенности положительным). Проверка показывает, что тогда

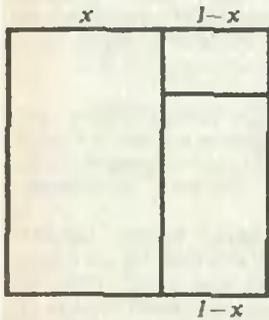


Рис. 5.

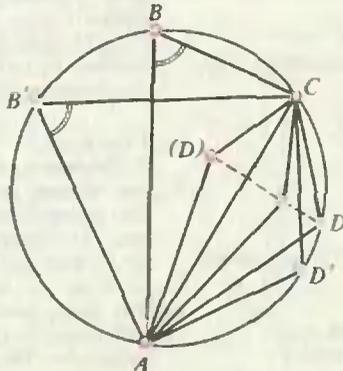


Рис. 6.

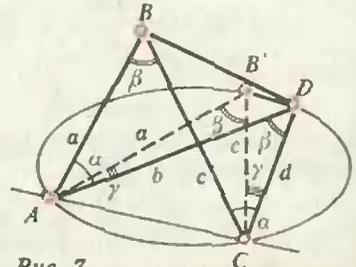


Рис. 7.

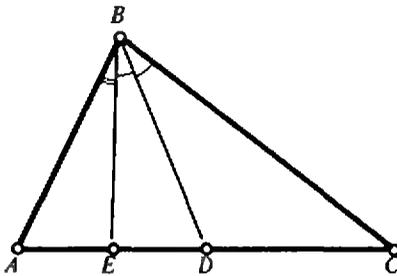


Рис. 8.

$$\pm \cos x > \frac{1}{2}, \quad \pm \cos 3x > \frac{1}{2}, \quad \pm \cos 9x > \frac{1}{2}.$$

4. Ответ: в вершинах вписанного квадрата*). Любое расположение четырех точек A, B, C, D в круге можно постепенно преобразовать в вершины квадрата так, что произведение расстояний увеличится. Действительно, сначала преобразованием подобия выведем три точки, скажем A, B, C на окружность (рис. 6). Если точка D при этом лежит внутри треугольника ABC , то отразим ее симметрично относительно одной из сторон, не выпуская из круга (это возможно, иначе $\angle ADB + \angle ACB < \pi$, $\angle BDC + \angle BAC < \pi$, $\angle CDA + \angle CBA < \pi$, откуда $2\pi + \pi < 3\pi$).

Далее, выведем точку D на окружность, а затем заменим точку D и противоположную ей вершину, скажем, B , диаметрально противоположными серединами двух дуг $AC: D'$ и B' . Тогда

$$\begin{aligned} B'D' &\geq BD, \quad AB' \cdot CB' = \frac{2S_{AB'C}}{\sin \angle B'} \geq \\ &\geq \frac{2S_{ABC}}{\sin \angle B} = AB \cdot CB. \end{aligned}$$

Аналогично, $AD' \cdot CD' \geq AD \cdot CD$, т. е. произведение расстояний не уменьшится. Точно также заменим точки A и C точками A' и C' , которые вместе с B и D будут вершинами квадрата.

5. Ответ: $\sin \beta / \sin \alpha$. Рассмотрим точку B' , образующую треугольник $AB'C$, равный треугольнику ABC , и лежащую в той же полуплоскости относительно прямой AC , что и точка D (рис. 7). Пусть

$$a = AB = AB', \quad b = AD, \quad d = CD, \quad c = CB = CB'.$$

По теореме косинусов

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha,$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab - cd)} \\ &\left(\frac{a}{c} \neq \frac{d}{b}, \text{ так как } AB \neq CD \right). \end{aligned}$$

Так как $\angle B' = \angle D = \beta$, то точки A, B, C, D лежат на одной окружности и $\angle B'AD = \angle B'CD = \gamma$, откуда аналогично получаем

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab - cd)} = \cos \alpha$$

$$\text{и } \gamma = \alpha, \quad BD = B'D.$$

Таким образом, все ребра тетраэдра $ABCD$ совпадают с соответствующими ребрами тетраэдра $AB'CD$, следовательно, $B = B'$.

Наконец, по теореме синусов имеем

$$\frac{AC}{\sin \beta} = 2R = \frac{B'D}{\sin \alpha}.$$

11 класс

1. Ответ: 1. Положив $\varphi = \arcsin x$, $\psi = \arcsin y$, имеем

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} =$$

$$= \sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi = \sin(\varphi + \psi) \leq 1,$$

причем равенство достигается, например, если $x = 1, y = 0$.

2. Пример: $f(x) = x^{1/2}$. Заметим, что если $x \in (0; 1)$, то имеют место неравенства

$$f(x) \neq x \text{ и } f(x) \neq x^2$$

(иначе $x^2 = f(f(x)) = f(x) = x \neq x^2$ или $x^2 = f(f(x)) = f(x^2) \neq x^2$). Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что разности $f(x) - x$ и $f(x) - x^2$ имеют на интервале $(0; 1)$ постоянный знак. Но неравенства $f(x) > x$ и $f(x) < x^2$ невозможны, ибо в противном случае получились бы одно из противоречивых неравенств

$$x^2 = f(f(x)) > f(x) > x > x^2$$

или

$$x^2 = f(f(x)) < (f(x))^2 < (x^2)^2 < x^2.$$

3. Ответ: не может. В самом деле, из свойств биссектрисы имеем $AB:BC:BE = 1:3:1,5$ (рис. 8); обозначив $AB = a$, $\angle ABE = \alpha$, запишем равенство площадей

$$\frac{a \cdot 3a}{2} \sin 2\alpha = \frac{a \cdot 1,5a}{2} \sin \alpha + \frac{1,5a \cdot 3a}{2} \sin \alpha,$$

откуда $\cos \alpha = 1$, что невозможно.

4. Докажем сначала утверждение для числа $n = 5^p$. Выберем из всех p -значных чисел, кратных 5^p , число l с наибольшим количеством k идущих подряд справа нечетных цифр. Тогда если $k < p$, то число $l + 5^p \cdot 10^k$, а с ним и p -значное число с теми же p цифрами, идущими справа, также кратное 5^p , будет иметь более k нечетных цифр подряд, что противоречит выбору l . Поэтому все p цифр числа l нечетны. Теперь если нечетное число n представить в виде $5^p \cdot q$, где q не кратно 5, то запишем подряд m раз число l , найденное выше. При разных значениях m не могут получаться все время разные остатки от деления на g . Следовательно, разность двух таких чисел, соответствующих некоторым значениям $m = m_1$ и $m = m_2$, делится на q . Отбросив в этой разности все последние нули, получим число, кратное как q (ибо q взаимно просто с 10), так и 5^p (ибо $l:5^p$). Все цифры этого числа, как и цифры числа l , нечетны.

5. Ответ: никакие три из данных точек не лежат на одной прямой, а все четыре точки не

*Это утверждение известно как теорема И. Шура.

лежат на одной окружности. Если точки A, B, C, D являются проекциями точки M на грани тетраэдра, то никакие три из них не лежат в одной плоскости с точкой M (соответствующие плоскости граней тетраэдра не пересекаются в одной точке).

Кроме того, точки A, B, C, D и M не лежат на одной сфере (в противном случае все четыре плоскости, на которые проектируется точка M , проходят через одну точку M' , диаметрально противоположную точке M на этой сфере).

Итак, если точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, то следует взять точку M , не лежащую ни в одной из плоскостей ABC, ACD, ABD и BCD и не принадлежащую описанной около тетраэдра $ABCD$ сфере, и провести четыре плоскости, перпендикулярные MA, MB, MC и MD соответственно — эти четыре плоскости и образуют некоторый тетраэдр.

Если точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, то аналогичное построение проходит лишь тогда, когда точки A, B, C, D не лежат на одной окружности (иначе точки M, A, B, C и D лежат на некоторой сфере) и никакие три из них не лежат на одной прямой.

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

8 класс

1. Расход вытекающей воды больше расхода втекающей за счет частичного расплавления льда:

$$q' = q + \Delta q_{\text{распл}} = q \left(\frac{t_1 - t_2}{t_2 - t_0 + \lambda/c} + 1 \right) \approx 1,2 \text{ г/с}$$

2. См. рис. 9.

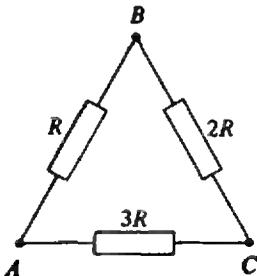


Рис. 9.

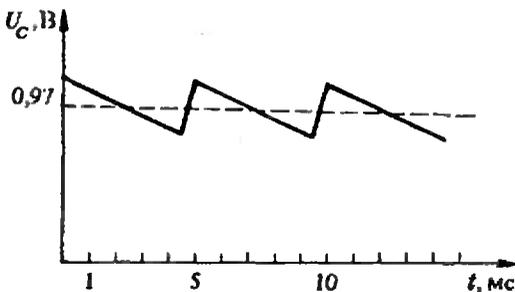


Рис. 10.

9 класс

1. При $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ колобок должен бежать со скоростью $u = \frac{V^2 + v^2}{v \cos \varphi}$, при $|\varphi| > \frac{\pi}{2}$ — как можно быстрее.

2. Мяч подпрыгнет 12 раз.

3. Лететь легче в направлении, противоположном направлению вращения станции, — вращение станции создает эффект искусственной силы тяжести. Радиус станции $R \sim 5$ м.

4. Уровень масла в правом колесе опустится на $x = \frac{\rho_p - \rho_m}{2\rho_p - (\rho_p + \rho_m)} \frac{\rho_p - \rho_m}{\rho_m} \frac{H}{2} \approx \left(\frac{\rho_p}{\rho_m} - 1 \right) \frac{H}{4}$.

5. $U_{\text{макс}} = 4$ В (вольт-амперную характеристику лампочки на начальном участке — до тока 0,25 А и напряжения 1 В — можно считать линейной).

10 класс

1. $v_{\text{макс}} \approx \sqrt{mgh^2 / (2MI)}$ (считается, что ускорение мало по сравнению с g).

2. $M = FR \sqrt{1 - (mg/F)^2}$; $v = \omega R / \sqrt{(F/(mg))^2 - 1}$.

3. В процессе наливания воды поверхность раздела воды с ртутью практически дойдет до нижней точки (объемом оставшейся в левой половине ртути можно пренебречь), и вода начнет «пробулькивать» в правую половину трубки. Смещение ртути вдоль трубки составит $x = 2V_0 / (\pi d^2) = 31$ см.

4. $Q_1 = mgh - qVgh = 4,9$ Дж; $Q_2 = qV'gh - mgh = 4,9$ Дж.

5. Искомая сила равна $\rho b^2 r$ и перпендикулярна круговому сечению.

6. $\Delta C \sim \epsilon_0 r^3 / R^2$ (плотности зарядов бугорка и сферы — одного порядка).

7. Напряжение на конденсаторе изменяется пилообразно с амплитудой $\Delta U \approx 4,5 \cdot 10^{-4}$ В около значения $U = 0,97$ В (см. рис. 10).

11 класс

1. $h = mgL / (8F)$ (при условии $mg \ll F$ канат принимает форму дуги окружности).

2. $F = \sigma l D / 2$ (характерна ошибка в 2 раза).

3. См. рис. 11 (решение основано на методе изображений).

4. $F = Imv(1 - \cos \varphi) e$ (здесь m — масса электрона, e — его заряд).

5. $d \leq (1 + Dl) / (lD^2) = 0,9$ м.

6. $E = 2E_0 / 3$ (можно воспользоваться принципом обращения хода световых лучей и считать фотоэлемент источником света, равномерно излучающим вверх).

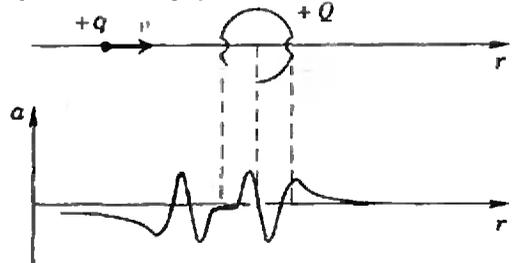


Рис. 11.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. См. рис. 12.
2. Да, может.
Например, так будет для водоемов, имеющих форму, изображенную на рисунке 13, при соответствующем подборе радиусов и высот составляющих цилиндрических частей.
3. $8947 + 8947 = 17894$.
4. Если повернуть треугольник ABH вокруг точки B на 90° (рис. 14), то четырехугольник $DHBN$ окажется квадратом со стороной 1. Следовательно, он, как и четырехугольник $ABCD$, имеет площадь 1.
5. См. таблицу.

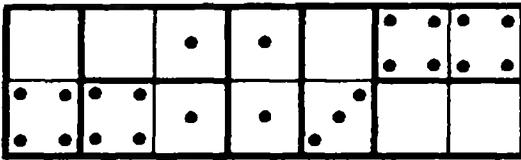


Рис. 12.

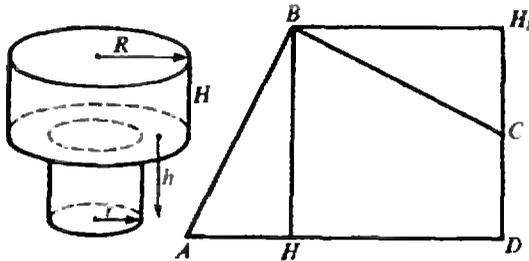


Рис. 13.

Рис. 14.

СССР	×	1:1	6:0	2:0
ФРАНЦИЯ	1:1	×	3:0	1:0
ВЕНГРИЯ	0:6	0:3	×	2:0
КАНАДА	0:2	0:1	0:2	×

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 8)

1. Все размеры копии должны быть увеличены в 2 раза, поэтому ее объем будет в 8 раз больше объема оригинала, и масса — 400 грамм.
2. $AO:OB=1:3$. Натяжения нитей одинаковы, если центр вращения совпадает с центром масс системы.
3. При приседании центр масс человека смещается вниз, при выпрямлении — вверх. Поэтому в первом случае прогиб доски уменьшится, во втором — увеличится.
4. Сила тяжести гири приводит в движение и тележку, и гирию, а рука — только тележку.
5. Можно, соединив сосуды отверстиями и сместив их в сторону заполненного сосуда.
6. По периодам свободных колебаний каждого из тел на пружине.

7. При ковке предпочтительнее неупругий удар, когда молоток теряет тем большую часть своей энергии, чем меньше его масса.
8. Увеличение массы автомобиля уменьшает ускорения, сообщаемые ему камнями мостовой.
9. При резком рывке стебли обрываются раньше, чем успевают прийти в движение корни.
10. Сила тяжести, сообщающая телу ускорение, пропорциональна массе тела.

(Окончание см. на с. 80)

АНКЕТА 9—90

Редакция получает много писем с просьбами ответить на те или иные вопросы, касающиеся проблем развития науки и образования. Мы решили собрать «пакет» таких вопросов и передать его главному редактору академику Ю. А. Осипьяну с

(см. оборот)

Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 9—90».

Дорогой читатель!

1. Класс, в котором Вы учитесь:

Ваша профессия (если Вы работаете):

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны?

11. Вторая.
12. Да, так как в условиях невесомости инертность тел сохраняется.

Микроопыт

Стакан останется на столе. Сила трения, действующая на него со стороны бумаги, недостаточна, чтобы сообщить ему заметное ускорение.

Анкета 9—90

тем, чтобы он ответил на них на страницах журнала. Поэтому в нашу анкету мы включили специальный пункт:

Ваш вопрос главному редактору _____

3. Какие статьи и задачи из номеров 7—9 (номер укажите) Вам понравились?

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?

Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»?

5. Какая обложка из номеров 7—9 Вам больше всего понравилась?

6. Ваши общие замечания и пожелания:

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместителя главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:

А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнии, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонидович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:

А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гимзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал,
В. Можаяев, И. Новиков, В. Разумовский,
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
В. Фабрикант, Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:

А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардашев, И. Клумова, Т. Петрова,
С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:

Е. Барк, С. Иванов, Д. Крымов,
С. Лухин, Т. Макарова, Э. Назаров,
П. Чермуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор Н. Дорохова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-64

Сдано в набор 21.06.90. Подписано к печати 6.08.90.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школь-
ная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт.
27,09. Уч.-изд. л. 7,57. Тираж 164804 экз. Заказ 1174
Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ЛЮДИ И МАШИНЫ

Небывалый матч состоялся во время чемпионата Голландии 1989 года (среди людей!). В один из свободных дней все 12 участников турнира сразились с 12 шахматными компьютерами. Поскольку за «белковых» шахматистов не играл сильнейший голландский гроссмейстер Я. Тимман, можно считать справедливым и отсутствие «Дип Сот» в команде их соперников.

Перед матчем были собраны прогнозы. Организатор соревнований Ван ден Херик (профессор Лимбургского университета и один из крупнейших специалистов в области компьютерных шахмат), а также гроссмейстер Г. Рей предсказали счет 11:1 в пользу мастеров. Таким же был прогноз Д. Леви. Машинам отдал предпочтение М. Ботвинник — 6,5:5,5.

Авторы программ, участвующих в матче, сильно разошлись во мнениях: Шеффер («Феникс») назвал 10,5:1,5 в пользу компьютеров, Шернер («Бебе») — 9,5:2,5. Ближе всех к истине оказался К. Томпсон, создатель программы «Белл». Он проявил умеренный пессимизм, считая, что компьютеры возьмут 4 очка.

Шахматисты победили со счетом 8,5:3,5. Единственная ничья случилась в партии «новорожденного» гроссмейстера И. Пикета с программой «Хайтек». Программа «Крэй блиттц» выиграла у Ван дер Стеррена, а «Фиделити Мах IV» — у другого международного мастера А. Блейса. Вот эти две победы компьютеров.

Блейс — «Фиделити» Новояндийская защита

1. d4 Kf6 2. c4 e6 3. Kf3 b6 4. a3 d5 5. cd ed 6. Kc3 Cd6 7. Cg5 c6 8. e3 0—0 9. Cd3 Le8 10. Фc2 h6 11. Ch4 Cg4. Машина нестандартно разыграла дебют, но использовать минусы построения черных нелегко.

12. h3 Cd7. Теперь у черных появляется угроза g7 —

g5. 13. Ke2 c5 14. g4 c4 15. Cf5 b5 16. g5 Фa5+ 17. Kpf1 hg 18. K:g5 C:f5 19. Ф:f5 Kbd7 20. Jg1 Фd2! 11. Kf3 Фd3. Пройдя по тылу противника, черный ферзь вовремя приходит на помощь «осажденному» королю.

22. Ф:d3 cd 23. Kc1 d2 24. K:d2 Лас8. Нарушив взаимодействие белых фигур, компьютер получил определенную компенсацию за пешку. 25. Кре2 Лс2 26. Kd3 Следовало упростить позицию путем 26. C:f6! K:f6 и лишь после этого сыграть 27. Kd3 Ke4 28. Jgd1!, намечая Ла1 — с1 с надеждой постепенно реализовать лишнюю пешку.

26...Ke4 27. Лад1 Kb6. 28. f3? K:d2 29. Л:d2 Л:e3+! Теперь позиция белых рушится. 30. Kpd1 Л:d2+ 31. Кр:d2 Kc4+ 32. Кре2 Л:f3 33. Cf2 K:b2! Изящный удар, такой возможности компьютер никогда не упускает.

34. K:b2 Л:f2+ 35. Кре3 Лf3+ 36. Kd3 C:a3 и через несколько ходов белые сдались.

«Крэй блиттц» — П. Ван дер Стеррен
Испанская партия

1. e4 e5 2. Kf3 Ke6 3. Cb5 a6 4. C:c6 dc 5. 0—0 f6 6. d4 ed. «Крэй блиттц» ожидала ответа 6...Cg4. Теперь программа выходит за пределы своего дебютного багажа, но и ее самостоятельная игра вполне убедительна...

7. K:d4 e5 8. Kb3 Ф:d1 9. Л:d1 Cg4 10. f3 Ce6 11. Ce3 b6 12. a4 a5. Существенное ослабление. Правильно 12...Ke7 13. Cf4 c4 14. Kd4 0—0—0 15. Kc3 с равными шансами (Тимман — Матанович, Югославия, 1978).

13. Kc3 Cd6 14. Kb5 0—0—0 15. K:d6+ cd. Черные раздвоили свои пешки, но лишились «преимущества двух слонов». Инициатива по-прежнему у белых.

16. Kd2 d5 17. ed C:d5 18. Le1. Энергичнее c2 — c3 и далее b2 — b4, не тратя время на перемещение ладьи.

18...Лd7 19. c3 Ke7 20. b4 ab. Черные стремятся создать

белым слабую пешку «a», а себе проходную «b». Для этого надо заблокировать белую пешку и одновременно обезопасить свою. Но все происходит наоборот: пешка «a» становится угрожающей, а пешка «b», скорее, уязвимой.

21. cb cb 22. C:b6 Kc6 23. Лас1 Kpb7. «Крэй блиттц» полагала, что черный король пойдет на b8, избегая шаха при движении пешки «a» до шестой горизонтали.

24. a5 Ke5 25. Le3 Лс8? Заранее рассматривая при переборе вариантов этот ответ, «Крэй блиттц» здесь собиралась играть 26. Ла1. Но когда ход ладьей был сделан, она мгновенно обнаружила a5 — a6+, хотя и не сразу поняла, что это ведет к выигрышу материала. После 26. a6+ белые ожидали 26...Kpb8 и далее 27. Лb1 Ca2 28. Лb2 Лс1+ 29. Kpf2 Ла1 30. a7+ Кра8 31. Kpg3...

26. a6+. Теперь же, продвинувшись на виток дальше, машина вычислила вариант 26...Kpb8 27. a7+ Kpb7 28. Л:c8 Кр:c8 29. Kc4! Л:a7 (29...C:e4 30. a8Ф+; 29...K:c4 30. Le8+ Лd8 31. Л:d8X) 30. C:a7 C:c4, и у белых качество за пешку. Ван дер Стеррен предпочитает отдать материал другим способом.

26...Кр:a6 27. Л:c8 Кр:b6 28. Лb8+ Кре5 29. Le1 Kd3 30. Ke4+ Kpd4? Решающая ошибка, после 30...Кре4 31. Лd1 C:e4 32. fe b3 33. g4 Лd4 34. Ла1 Лd7 35. Ла4+ Кре3 черные держались, этот вариант ожидала и «Крэй блиттц». Экс-чемпионка мира в этой партии была гораздо дальновиднее человека.

31. Лd1 C:e4 32. Л:b4+ Кре5 33. Л:e4+Kpf5 34. Le3 Kc5 35. Л:d7 K:d7 36. Le7 Kf8 37. Л:g7 h6 38. g4+ Кре6 39. Kpf2 f5 40. gf+ Kpf6 41. Ла7. Черные сдались.

Е. Гук

45 коп.

Индекс 70465

Проведите шахматную ладью из правого нижнего угла в левый верхний угол так, чтобы на ее пути кружочки и квадратики чередовались.

Л. Мочалов

