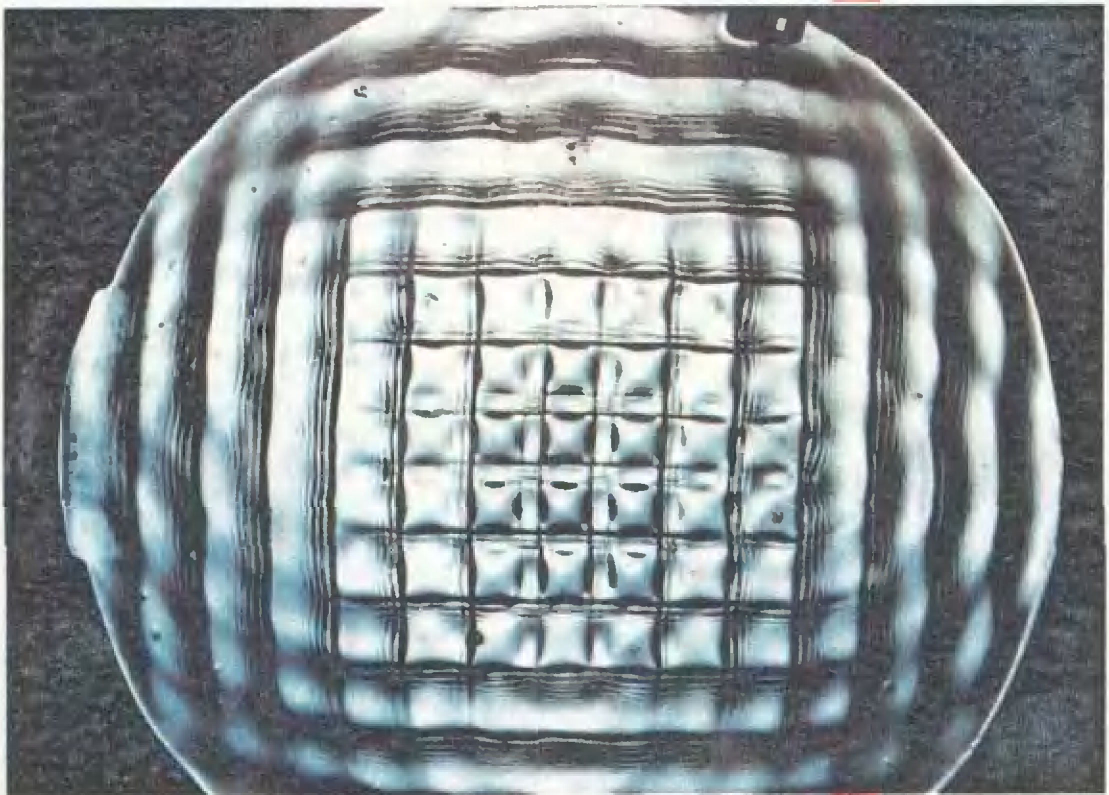
КВАНТ

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Моретрясение

1990

Квант

10 1990

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

МОРЕТРЯСЕНИЕ

Кандидат технических наук Б. ЛЕВИН

В мире есть такое диво:
Море вспенится бурливо,
Закипит, поднимет вой...

А. С. Пушкин

Скорее всего, читатель, вы никогда не слыхали о моретрясениях. И это не удивительно. Даже в Большой Советской Энциклопедии нет такого слова. А этот природный феномен, хотя и более редкий, чем, скажем, цунами, которое зарегистрировано уже около тысячи раз, или шаровая молния, собравшая более 1500 описаний, заслуживает внимания.

Что же такое моретрясение?

Так называют сильное и кратковременное возмущение морской поверхности в зоне действия подводного землетрясения. Давние португальские и испанские мореплаватели пользовались термином maremoto, что дословно можно перевести «море ходуном», а голландские капитаны называли это устрашающее явление zeebeben — «ужасное море». В русских лоциях для описания необычных событий на море используется слово моретрясение.

В Мировом океане ежедневно происходит не менее пяти так называемых ощутимых землетрясений, т. е. землетрясений такой силы, которые на суше вызывают разрушения построек, а на море приводят к моретрясениям.

Описания очевидцев моретрясения полны драматизма и изобилуют красноречивыми подробностями. В Каталогах цунами С. Л. Соловьева и Ч. Н. Го, а также в «Каталоге извержений вулканов мира» И. И. Гущенко представлены материалы примерно двух тысяч описаний геофизических катаклизмов в Мировом океане.*) Из этого количества нами было отобрано около двухсот описаний моретрясений, в которых обнаружена интересная и важная информация. Эти материалы были положены в основу реконструкции условного «среднего» моретрясения.

Итак, предлагаем читателю синтезированные впечатления обобщенного очевидца моретрясения.

...Зеркально-гладкая поверхность моря при полном безветрии внезапно покрылась буграми. Эти бугры никуда не бежали, но и не стояли на месте. Они стремительно вырастали до уровня палубы и так же внезапно опадали, образуя глубокую воронку на месте недавнего бугра.

Колебания происходили быстро, в глазах рябило от этих необыкновенных вскипающих волн, заполнивших все видимое пространство моря. Поверхность воды бурлила и подскакивала, подобно кипящему слою в раскаленной солеварне. (Таковы впечатления наблюдателя на рейде Джакарты, 1722 г.)

...Судно подбрасывало и раскачивало на этих подпрыгивающих волнах. Крутизна их достигала крутизны жесточайших штормовых волн, а длина не превышала 20 м. Килевая качка была такой силы, что несколько раз осушался винт и слетела с острия картушка компаса. (Описание 1917 г., о-в Сулавеси.)

...Все пассажиры и команда мгновенно оказались на палубе. Яркое солнце и полный штиль лишь усиливали напряжение этого ужасающего зрелища взбесившегося моря. Прошло меньше минуты, а уже не было сил сопротивляться чудовищной скачке, которая то ослабевала, то вновь усиливалась.

*) Соловьев С. Л., Го Ч. Н. Каталог цунами на западном побережье Тихого океана. М.: Наука, 1974.
Гущенко И. И. Извержение вулканов мира. М.: Наука, 1979.

Размеры водяных бугров начали уменьшаться, а частота мелькания увеличивалась. При этом откуда-то из глубины возник низкий рёвоподобный гул, подавляющий волю и разум. Люди стали метаться по судну, охваченные паническим страхом. Многие пассажиры и даже матросы, не выдержав этой пытки и, видимо, потеряв рассудок, стали выпрыгивать за борт. На фоне мелькающих волн появлялись высоко вздымающиеся струи воды, которые обрушивались, порождая странный шелестящий звук. (1969, Чили, пароход «Ле-Пайла».)

...Внезапно судно потряс сильнейший удар. Несколько человек с палубы выкинуло за борт. Удары со стороны днища посыпались один за другим. Казалось, что судно колотило о скальное дно, хотя глубина под килем превышала 100 м. (1939, Соломоновы о-ва.)

...Создавалось впечатление, что в трюме подпрыгивают огромные бочки с водой и обшивка вот-вот лопнет. Ванты дрожали, обломились поручни трапа, осыпались стекла в рубке, палубные надстройки начали сдвигаться и разваливаться на глазах. Судно готовилось к неотвратимой гибели. (1854, Японское море, фрегаты «Паллада», «Диана»; 1858, Чили, бриг «Гималайя»; 1863, Манила, исчезновение парохода «Эсперансо»; 1965, Аляска, судно «Огайя».)

В дополнение к описаниям очевидцев можно предложить вниманию читателя и первый плод научной классификации моретрясений — таблицу, разработанную немецким геофизиком А. Зибергом в 1923 году и недавно уточненную автором и членом-корреспондентом АН СССР С. Л. Соловьевым.

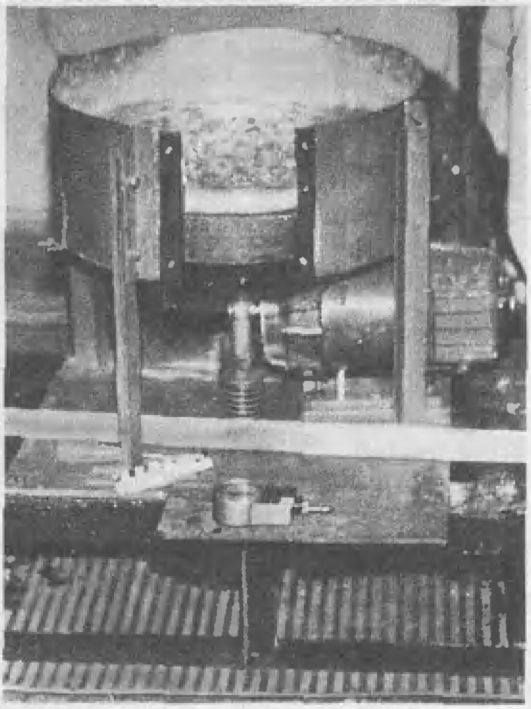
Первая попытка анализа моретрясения показала, что это глобальное событие имеет прямое отношение к географии, геофизике, океанологии, гидродинамике, синергетике (молодой науке о самоорганизующихся структурах).

И уж, конечно, оно заслуживает внимательного экспериментального изучения хотя бы на моделях.

Интенсивность колебаний водной поверхности		Интенсивность колебаний скального дна		Описание степени воздействия моретрясения на судах (по А. Зибергу)
балл моретрясения	амплитуда скорости колебаний, см/с	балл по шкале Ин-та физики Земли	амплитуда скорости колебаний, см/с	
I	0,2—0,5	—	—	Дрожание, легкий треск палубы.
II	0,5—1,0	—	0—0,1	Отчетливый треск, сотрясение, как при легком царапании.
III	1—3	I	0,1—0,3	Сильный толчок, как при налете на мель, скалистое дно или риф. Громкий треск корпуса, колебание предметов.
IV	3—6	II	0,3—0,6	Судно трещит и раскачивается, неустойчивые предметы опрокидываются.
V	6—12	III—IV	0,6—1,2	Люди не держатся на ногах, крупные предметы опрокидываются и выскакивают из подставок, судно теряет ход, постройки тяжело скрипят.
VI	более 12	IV—V	более 1,2	Судно может быть выброшено из воды, ломаются мачты и палубные постройки, аварийная ситуация.

Буря в стакане

Опыты по созданию и изучению искусственных микромасштабных моретрясений выполнялись на лабораторной виброустановке (см. фото на с. 4), сконструированной и изготовленной в Институте горного дела им. А. А. Скочинского. «Морем» был



Установка для создания и изучения «лабораторных» моретрясений.

резервуар диаметром полметра, а «землетрясение» создавалось вибратором, расположенным в центральной части дна. Естественно, в эксперименте учитывались характерные параметры моделируемого реального явления.

Колебания дна при подводном землетрясении совершаются преимущественно с инфразвуковыми частотами порядка 1—20 Гц, размер колеблющейся области дна (порядка 10—100 км) всегда значительно превышает среднюю глубину Мирового океана, равную 4 км, а ускорения колебаний дна могут достигать и даже превышать ускорение силы тяжести.

Опытная установка обеспечивала требуемый диапазон частот и ускорений, а наличие подвижного диска диаметром 20 см в резервуаре диаметром 50 см при соответствующей глубине воды позволяло выполнить условие геометрического подобия модели и реального события.

Эффекты, наблюдавшиеся в эксперименте, были весьма необычны.

Во-первых, это образование на поверхности воды правильной структуры из необычных стоячих волн, организованных в крупные ячейки квадратной формы. Такая структура наблюдалась в диапазоне частот колебаний дна 8—23 Гц при ускорениях дна порядка g (ускорения силы тяжести), и размеры ячеек, т. е. длины *волн, составляли* 2—13 *см.*

Во-вторых, опыты показали возможность гигантского усиления колебаний на этих частотах: при амплитуде колебаний донного диска 0,5—1,5 мм амплитуда стоячих волн достигала 20—45 мм, т. е. коэффициент усиления колебаний был не менее 30.

В-третьих, была обнаружена закономерность уменьшения размеров ячейки (длины волн) b с уменьшением периода колебаний дна T.

В-четвертых, для полученных волновых структур было установлено постоянство соотношения между длиной волны b и ее высотой H.

Итак, результаты налицо. Но что они означают?

Эксперимент ⇄ теория

Тщательная проверка и анализ полученных материалов позволили нам сформулировать два простых «экспериментальных закона» для волновых структур:

$$b = gT^2, \quad (1)$$
$$H = b/3. \quad (2)$$

Из этих законов следует, что волновые структуры образуются в результате параметрической раскачки водной поверхности и являются сильно нелинейными образованиями, поскольку крутизна образующихся стоячих волн (отношение высоты к длине) достигает теоретически возможного ($H/b \approx 0{,}33$) предела.

К этим выводам мы еще вернемся, а сейчас — еще о некоторых экспериментальных результатах. Кроме квадратных ячеек, были зафиксированы также ячейки в виде одномерных валиков и уж совсем экзотическое образование — ячейки шестиугольной формы! (см. фото на с. 6)

Шестиугольные ячейки на воде — точный аналог изображения пчелиных сот — очень напоминают структуру, образующуюся при определенных условиях в жидкостях в результате тепловой конвекции,— так называемые ячейки Бенара. Мы имеем новый пример самоорганизующихся структур*). Колебательное движение поверхности воды вверх — вниз приводит к самопроизвольной кооперации и организации движущихся частиц поверхностного слоя в отдельные ячейки. Формирование таких ячеек в плоскости, перпендикулярной направлению движения, связано, по-видимому, с тем, что динамическая система должна выбирать наиболее выгодное энергетическое состояние.

О необходимости именно такого поведения сплошной среды при некоторых режимах движения говорится в классическом труде Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Механика сплошных сред»: «...вертикальное конвекционное движение в жидкости должно обладать периодичностью в горизонтальной плоскости». Там же предсказана и гексагональная симметрия ячеек.

Теоретическое описание симметрии динамических структур весьма затруднительно. Однако качественную теорию, удовлетворительно описывающую результаты экспериментов по моделированию моретрясений, все же удалось построить. Суть ее заключается в следующем.

Гравитационные волны на воде подчиняются закону дисперсии, согласно которому квадрат частоты волны обратно пропорционален длине волны (проще говоря, с уменьшением периода волны уменьшается ее длина). Коэффициентом пропорциональности служит постоянная величина g — ускорение силы тяжести. В случае гравитационно-капиллярных волн в закон дисперсии добавляется член, учитывающий поверхностное натяжение и плотность жидкости.*)

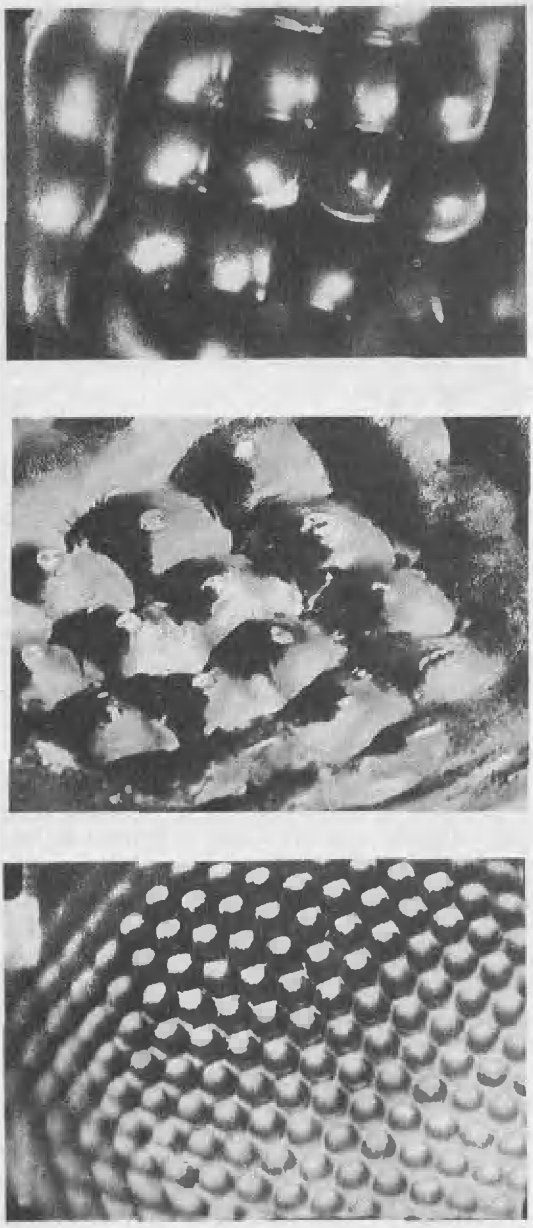
Оказалось, что при описании колебательных процессов в жидкости коэффициент пропорциональности g уже нельзя считать постоянным, помимо g надо учитывать добавочное ускорение, создаваемое колебаниями дна. Поскольку это добавочное ускорение периодически меняется во времени, возникают условия периодической раскачки поверхности под действием периодической возмущающей силы. Подобные процессы называются параметрическим резонансом.**)

То же самое происходит и с частицами водного слоя в резервуаре виброустановки. Параметрически возбуждаемые волны на воде должны иметь частоту колебаний, ровно вдвое меньшую частоты колебаний дна. Оказалось, что экспериментальный

*) Если читатель хочет поближе познакомиться с самоорганизующимися системами, с ячейками Бенара и со структурами, появляющимися в жидкостях при термоконвекции, советуем посмотреть опубликованные в «Кванте» статьи В. Шефера «Наблюдения над утренней чашкой кофе» (1977, № 4), Е. Городецкого и В. Есипова «Конвекция и самоорганизующиеся системы» (1985, № 9), Б. Бубнова «Вихри... на патефоне» (1987, № 8). (*Примеч. ред.*)

*) И здесь желающие могут обратиться к публикациям «Кванта»: о гравитационных и капиллярных волнах на воде можно прочитать, например, в статьях Е. Кузнецова и А. Рубенчикова «О волнах на море и ряби на лужах» (1980, № 9), А. Стасенко «Волны на воде» и «Заморские гости» Н. Рериха» (1990, № 1). (*Примеч. ред.*)

**) Параметрическому резонансу была посвящена статья А. Варламова и А. Черноуцана в «Кванте» № 9 за 1986 год (с. 29). (*Примеч. ред.*)



Правильные структуры, наблюдавшиеся в «лабораторных» моретрясениях.

закон (1) практически точно совпадает с законом дисперсии параметрических волн. Экспериментатор снимает шляпу перед Теорией!

Из предложенной качественной теории ячеистых волновых структур следует, что при изменении условий эксперимента должны получаться последовательно одномерные, квадратные и шестиугольные ячейки. Опыты в точности подтвердили этот теоретический вывод.

И еще об одном совпадении (?) хотелось бы сказать. Посмотрим внимательно на некоторые факты из описаний сильных землетрясений.*)

«Деревянные срубы из колодцев вылетели, как пробки, кверху, вода за ними следом — до трех саженей в высоту...; вода выбрасывалась из прорубей...; лед на озерах весь растрескался, из трещин вылетала кверху вода с илом и галькой.» (1862 г., Цаганское землетрясение.)

«Из колодца вода брызнула фонтаном...; служащие парохода, бывшего в 30 верстах от берега, видели водяной столб в море.» (1895 г., Красноводское землетрясение.)

Многие землетрясения сопровождались появлением высоко бьющих фонтанов (до 5—8 м) из воды с песком и илом, выплескиванием воды из бассейнов и бочек, чернил из чернильниц, масла из лампад и даже покойников из могил. Кроме последнего, будоражащего воображение факта (1868 г., Перу), остальные события явно демонстрируют параметрическое усиление колебаний жидкости при определенных сейсмических колебаниях дна.

Если обратить внимание на описания моретрясений, где упоминаются «необычные подскакивающие волны», «странные движения многих волн», «толчея волн», «рябь», «колонны воды» или возникновение вокруг корабля именно трех (!) больших волн (1868 г., Калифорния; 1878 г., Чили), то можно усмотреть довольно явную аналогию с ячейками волновых структур в эксперименте и даже при желании увидеть признаки гексагональной симметрии.

Академик М. А. Лаврентьев, с которым мне посчастливилось работать в 1979—80 годах, рассказывал о наблюдавшихся в океане очень крутых «вытянутых вверх» волнах непонятного происхождения. Высота их достигала примерно 6 м, а расстояние

*) *Новый каталог сильных землетрясений на территории СССР с древнейших времен до 1975 г.* Под ред. Н. В. Кондорской и Н. В. Шебалина. М.: Наука, 1977.

между вершинами составляло 15—20 м.

Оказывается, именно такие параметры стоячих волн можно получить, если в выражения, описывающие установленные «экспериментальные законы», подставить значение периода $T=1{,}5$ с. А ведь волны с таким периодом в спектре землетрясений совсем не редкость. Не правда ли, интригующее совпадение?

Однако вопросы, которые задал эксперимент, не исчерпались. Откуда возникает такая четкая геометрия ячеек? Каковы законы образования ячеистой решетки? Почему стоячие волны достигают столь большой крутизны? Какую роль играет глубина воды? На эти вопросы теория пока не дает окончательных ответов, хотя исследования параметрических волн заметно расширили наши представления об этом необычном явлении.

Моретрясение и... «Летучий Голландец»

Есть и еще одна, пожалуй наиболее таинственная, особенность моретрясения — это тот атавистический необъяснимый страх, который охватывает терпящих бедствие. И не под влиянием ли такого всеобщего психоза впечатлительные мореплаватели средних веков оставляли свой сотрясающийся в судорогах моретрясения корабль? И потом он скитался по океану, покинутый людьми и наводящий ужас на экипажи встречных судов. Не правда ли, неплохая версия «Летучего Голландца»?

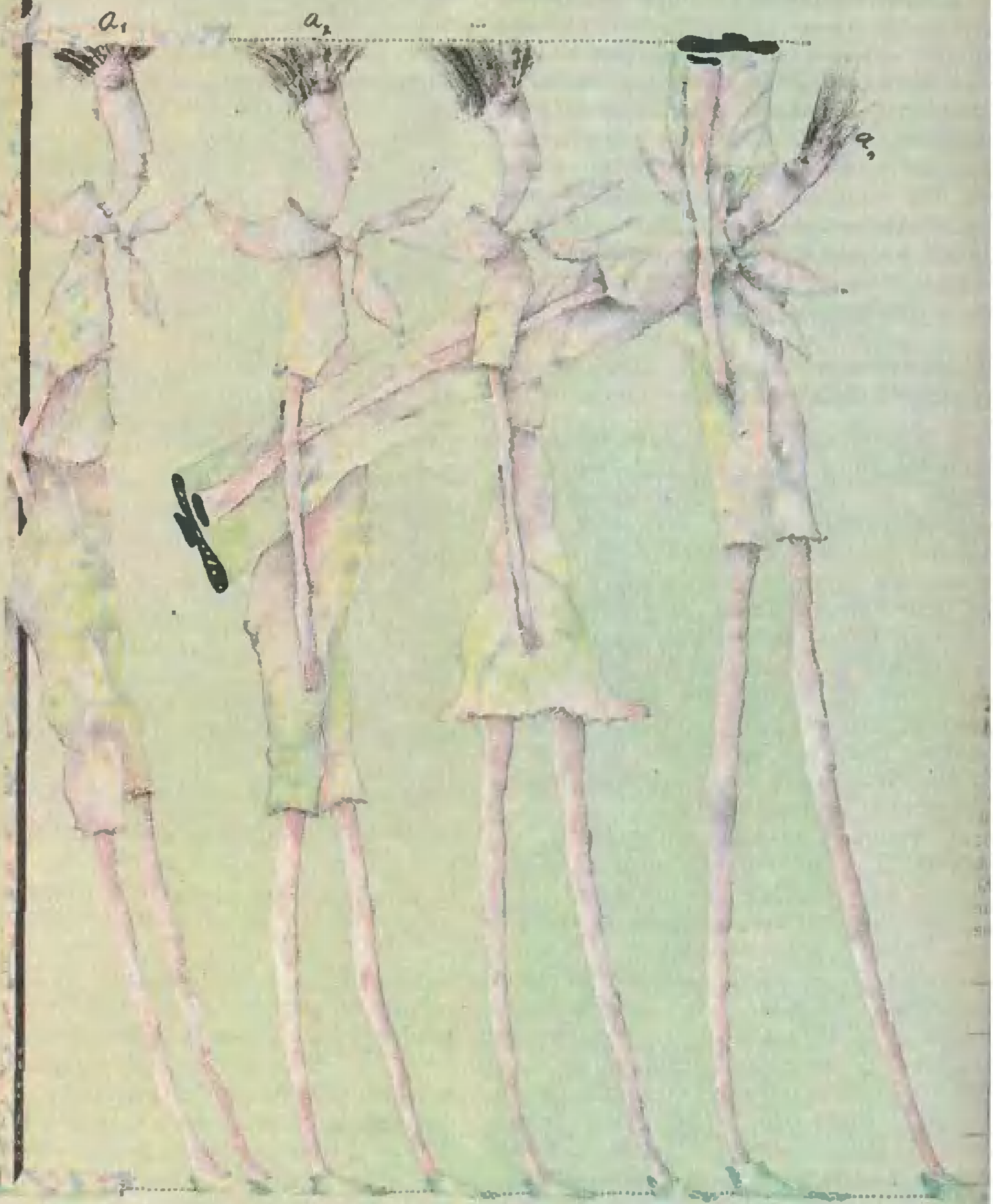
А теперь давайте вспомним результаты одного известного эксперимента из области физической акустики. Популярный американский физик Роберт Вуд выполнял опыты с гигантской трубой, напоминающей органные трубы, но излучающей инфразвук. Оказалось, что колебания воздуха с частотой, примерно равной 7 Гц, вызывают сильное беспокойство, приступы непонятного страха и даже панику у людей, находящихся в зоне излучения. Этот эффект обнаруживался не только в помещении лаборатории, но даже за пределами здания у отдельных весьма ошарашенных собственными эмоциями уличных прохожих. Эффект депрессивного действия на человеческий организм колебаний воздуха с инфразвуковыми частотами неоднократно подтверждался.

Вернемся к моретрясению. Характерные сейсмические частоты колебаний почвы в эпицентре землетрясения заключены в интервале от 1 до 20 Гц. Как показывают теория и эксперименты, волновая структура на воде, возбуждаемая колебаниями дна, характеризуется частотой, вдвое меньшей частоты накачки, т. е. частоты вынуждающей силы. Значит, часто́ты колебаний волн при моретрясении должны лежать в диапазоне от 0,5 до 10 Гц. Но именно этот диапазон содержит частоты, отличающиеся депрессивным действием на человеческий организм.

Корабль, попавший в зону моретрясения, можно представить находящимся внутри гигантской вертикальной трубы диаметром порядка 20 км, которая излучает мощный инфразвук на самых опасных депрессивных частотах. И такая кошмарная «музыка» продолжается в течение десятков и даже сотен секунд. Понятно, что подобное «звучание» моря вполне может вызвать коллективный психоз у команды, особенно если причины этого явления ей не известны. Чего, надеется автор, теперь не скажешь о читателе «Кванта».

МЕДИАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Кандидат физико-математических наук
М. КЕЛЬБЕРТ,
доктор физико-математических наук
Л. ПИТЕРБАРГ



Грубые ошибки данных (выбросы)

Предположим, мы хотим узнать средний рост второклассников Москвы. Опросим наугад 1000 школьников и запишем их рост. Потом сложим полученные числа и разделим на 1000. Конечно, ребята называют свой рост не совсем точно, но можно надеяться, что эти случайные ошибки при усреднении компенсируют друг друга. Но вот один из школьников пошутил и сказал, что его рост равен километру. Разумеется, это значение должно быть отброшено, иначе средний рост второклассника может превысить 2 метра.

Аналогично дело обстоит и в том случае, если «пошутила» ЭВМ и аномально большое число оказалось в памяти в результате машинного сбоя или ошибки при вводе данных. Например, оператор вводит в память ЭВМ десятичные числа; скажем, температуру воды в океане, измеряемую с борта исследовательского судна. Жарко, корабль качает, вдобавок оператор ведет захватывающую беседу с приятелем... И время от времени забывает нажать на клавишу с десятичной запятой. В результате ЭВМ «запоминает» примерно следующий ряд чисел:

...25,627; 26,234; 25,824; 25003;
25,226; 24,988; 24923; 25,231;...

Ясно, что при дальнейшей обработке данных выбросы будут иметь весьма нежелательные последствия. Их необходимо заменить на истинные или близкие к истинным значения. К тому же процедура устранения выбросов должна быть автоматической, так как обычно речь идет об огромных массивах чисел.

Для борьбы с выбросами замечательным американским специалистом по статистике Дж. Тьюки была предложена процедура, которая называется *медианной фильтрацией.* Идея любой подобной процедуры очень проста: каждое из чисел в последовательности измерений надо рассмотреть вместе с несколькими соседними с ним числами и заменить его средним значением этих чисел. Фокус в том, как выбрать это среднее.

Среднее значение и медиана

Обычно в статистике средним значением n чисел называют их среднее арифметическое:

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Например, для семи чисел 1, 2, 5, 1, 1, 2, 30 среднее значение равно 6. Оно получилось таким большим из-за единственного «выброса», равного 30. В тех видах спорта, где результат оценивают в баллах несколько судей, перед вычислением среднего балла иногда отбрасывают две крайние оценки — наибольшую и наименьшую. Поступим так и мы; наш ряд чисел сократится до 2, 5, 1, 1, 2, а среднее значение уменьшится до 2,2. Можно пойти дальше и отбросить по два крайних значения, а можно — еще дальше, отбросив по три крайних значения, а оставшееся число — это будет 2 — принять за «среднее». Такое «среднее» число называется *медианой* данного набора чисел. Как видите, медианы есть не только в геометрии, но и в статистике.

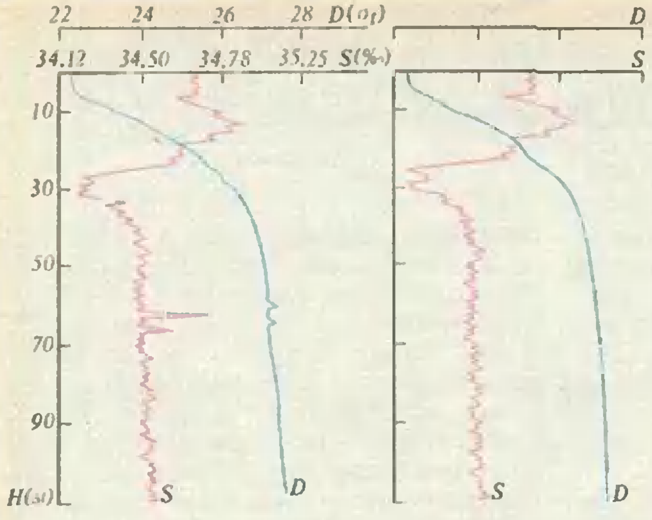
Строгое определение медианы таково. Пусть a_1, a_2, ..., a_{2k+1} — набор из нечетного количества чисел. Переставим эти числа в порядке возрастания (неубывания). Медианой набора называется число, которое окажется на среднем, $(k+1)$-м месте. Мы будем обозначать это число через $m(a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1})$.

Два понятия «средних», о которых мы говорили выше,— среднее арифметическое и медиана — естественно возникают при решении следующих задач. Пусть дан набор чисел; определим его «среднее» как число, сумма отклонений от которого до данных чисел минимальна. Вопрос в том, как определить отклонение.

Упражнения

1. Докажите, что для любых чисел a_1, a_2, ..., a_n минимум функции $f(x)=(x-a_1)^2+\ldots+(x-a_n)^2$ достигается при $x=a=(a_1+\ldots+a_n)/n$.

2. а) Докажите, что для любых чисел a_1, a_2, ..., a_{2k+1} минимум функции $g(x)=|x-a_1|+\ldots+|x-a_{2k+1}|$ достигается при $x=m(a_1, \ldots, a_{2k+1})$.



Вертикальные профили солености (S) и плотности (D) морской воды, полученные в 27-ом рейсе научно-исследовательского судна «Дмитрий Менделеев», до обработки с помощью медианного фильтра (слева) и после такой обработки (справа). Два хорошо заметных выброса в средней части профилей после фильтрации исчезли. То, что это действительно выбросы, следует из физических соображений: более плотная жидкость не может находиться над менее плотной.

б) При каких x достигается минимум аналогичной функции с четным числом чисел $a_1, a_2, ..., a_{2k}$?

Обработка дискретного сигнала

Рассмотрим бесконечную в обе стороны *последовательность* чисел

$$...x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2,...$$

Зафиксируем натуральное число k. Будем говорить, что новая последовательность $...y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2,...$ получена из старой *медианной фильтрацией*, если

$$y_n = m(x_{n-k}, x_{n-k+1}, ..., x_n, ..., x_{n+k}).$$

Число $2k+1$ называется *шириной окна фильтра*.

Термины «фильтрация», «полезный сигнал», «шум» пришли в статистику из радиотехники, где одной из самых важных задач в предвоенные годы было создание фильтров, очищающих звуковые сигналы от посторонних шумов.

В рассмотренном нами примере измерений температуры в океане «шумом» будут аномально большие значения. Применение медианного фильтра с минимальной шириной окна, равной 3, приводит к такому ряду чисел:

...25,824; 26,234; 25,824;
25,226; 25,226; 25,231;...

(первый и последний члены не указаны, так как неизвестно, какие числа стояли рядом с ними в исходной последовательности). Итак, мы добились цели — новый набор не содержит выбросов, на месте которых появились вполне разумные значения. Этот пример хорошо иллюстрирует способность медианной фильтрации срезать «пики». Познакомьтесь с простыми свойствами медианной фильтрации.

Упражнения

3. Докажите, что медианная фильтрация с любой шириной окна не меняет монотонные последовательности чисел.

4. Пусть $f(x)$ — монотонная функция, x_n — произвольная последовательность чисел, y_n — ее медианная фильтрация. Докажите, что при медианной фильтрации из последовательности $f(x_n)$ получится последовательность $f(y_n)$.

5. Пусть x_n равно 100 при n, кратном $l (l \geq 3)$, и равно 0 в остальных случаях. Что получится из этой последовательности при медианной фильтрации?

Отсюда видно, что медианная фильтрация легко справляется с редкими выбросами. Однако, если выбросы встречаются слишком часто, она оказывается бессильной.

Упражнение 6. Что получится при медианной фильтрации из последовательности $x_n = (-1)^n$ при ширине окна, равной k?

Для обработки последовательностей с частым чередованием выбросов, которые малы по сравнению с полезным сигналом, более приемлемы осреднения, в которых вместо медианы используется среднее арифметическое нескольких соседних чисел (*скользящее осреднение*), преобразующее исходную последователь-

ность по формуле
$y_n = (x_{n-k} + x_{n-k+1} + \ldots + x_{n+k})/(2k+1)$.
Однако при больших выбросах скользящее осреднение вредно, так как оно «размазывает» ошибку по всей последовательности (убедитесь в этом на примере последовательности упражнения 5). Если же выбросы велики и часты, то задача восстановления полезного сигнала вообще теряет смысл.

Инвариантные последовательности

Пусть на вход медианного фильтра поступает некоторая последовательность чисел. На выходе появится новая последовательность, вообще говоря, отличающаяся от исходной. Дж. Тьюки предложил повторять медианную фильтрацию до тех пор, пока последовательность чисел не перестанет меняться, т. е. не станет *инвариантной*. Чтобы описать инвариантные последовательности, условимся работать не только с бесконечными, но и с конечными последовательностями чисел. Для этого, конечно, нужно договориться, как определять значения новой последовательности вблизи от ее начала и конца. Будем просто добавлять слева несколько членов, равных x_1, а справа — несколько членов, равных x_n. Тогда значение отфильтрованной последовательности будет однозначно определено.

Пример 1. На вход медианного фильтра с $k=1$ поступает последовательность 4, 4, 2, 3, 1, 1, 4, 4, 3, 3. Тогда на выходе появится инвариантная последовательность 4, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 4, 3, 3. Если же $k=2$, то после первой фильтрации мы получим последовательность 4, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, а после второй — уже инвариантную (и даже монотонную) последовательность 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3.

Отметим, что любые три числа в инвариантной последовательности при $k=1$ в этом примере идут в монотонно неубывающем или невозрастающем порядке. Это наблюдение подсказывает следующее определение: последовательность называется *k-монотонной*, если любой ее отрезок длиной k монотонен.

Ясно, что если в k-монотонной последовательности возрастающий отрезок сменяется убывающим (или наоборот), то между ними последовательность постоянна на протяжении $k-1$ значения.

Связь k-монотонности и инвариантности относительно медианного фильтра, которую мы наблюдали в предыдущем примере, конечно, не случайна.

Упражнения

7. Любая k-монотонная последовательность инвариантна для медианного фильтра с окном шириной, не большей чем $2k-3$.

8. Любая инвариантная последовательность медианного фильтра с $k=1$ является 3-монотонной.

9*. Пусть инвариантная последовательность медианного фильтра с окном шириной $2k+1$ содержит монотонный отрезок длиной $k+1$. Тогда она является $(k+2)$-монотонной.

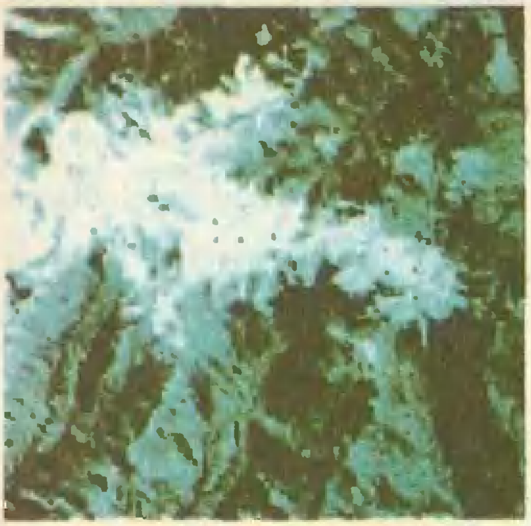
План решения: пусть последовательность $x_{n-k}, \ldots, x_n$ возрастает. Докажем, что если $x_{n+1} < x_n$, то $x_{n-k} = \ldots = x_n$. В силу инвариантности последовательности x_n среди $2k$ чисел $x_{n-k}, \ldots, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n+k+1}$ должно быть ровно k значений, не меньших x_n, и k значений, не больших x_{n+1}. Если $x_{n-k} \leqslant x_{n+1}$, то среди $2k-1$ чисел $(x_{n-k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k+1})$ должно быть k значений, не меньших x_n, и k значений, не больших x_n, что невозможно. Следовательно, $x_{n-k} \geqslant x_n$, т. е. $x_{n-k} = x_n$.

Упражнение 10. Если последовательность инвариантна относительно всех медианных фильтров с окнами шириной $2p+1$, где $p \leqslant k$, то она $(k+2)$-монотонна.

Однако при $k > 1$ неверно, что всякая инвариантная последовательность медианной фильтрации с окном фильтра шириной $2k+1$ является $(k+2)$-монотонной. Это видно из следующего примера.

Пример 2. Пусть каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ равно $+1$ или -1. Рассмотрим последовательность $\ldots a_0, a_1, \ldots, a_k, -a_0, -a_1, \ldots, -a_k, \ldots$ и продолжим ее в обе стороны периодически. Тогда эта последовательность инвариантна относительно медианной фильтрации с окном шириной $2k+1$.

Упражнение 11*. Если инвариантная последовательность x_n медианного фильтра с ок-



ном шириной $2k+1$ не содержит ни одного монотонного отрезка длиной $k+1$, то числа x_n могут принимать только два значения (бинарный сигнал).

Таким образом, «парадоксальная» ситуация примера 2 возможна лишь для бинарных сигналов.

Обработка изображений

Интерес к медианной фильтрации в наши дни вызван, в первую очередь, проблемой обработки полученных из космоса фотографий поверхности Земли и небесных тел. Получению четких фотографий часто мешает облачность, которую в данном случае нужно рассматривать как шум. Конечно, если облаками закрыта значительная часть объекта, никакая математическая процедура не поможет восстановить его истинные контуры. А вот если облачность редкая, то на помощь приходит медианная фильтрация.

Разобьем черно-белую фотографию на маленькие квадратики и сопоставим ей прямоугольную таблицу чисел x_{ij} уровней яркости в каждом квадратике. Теперь вместо изображения мы имеем дело с таблицей чисел. А к ним можно применить процедуру медианной фильтрации. Делается это так. Выберем некоторую фигуру (круг, квадрат, крест, кольцо и т. д.) — она называется *окном фильтра* — и наложим ее на изображение. Значение яркости в центре окна заменяется медианой чисел x_{ij} для всех попавших в это окно точек.

Пусть, например, x_{ij} равно 100, если i и j оба делятся на 10, и равно 0 в противном случае. Проверьте, что после медианной фильтрации такое изображение будет состоять из одних нулей. Значит, при обработке реальных изображений очень темные и очень светлые пятнышки должны исчезнуть. Это видно на фотографии одного из участков *Памира*, *получен-*

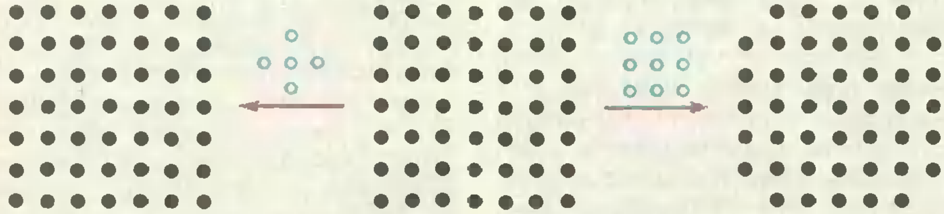


Рис. 1.

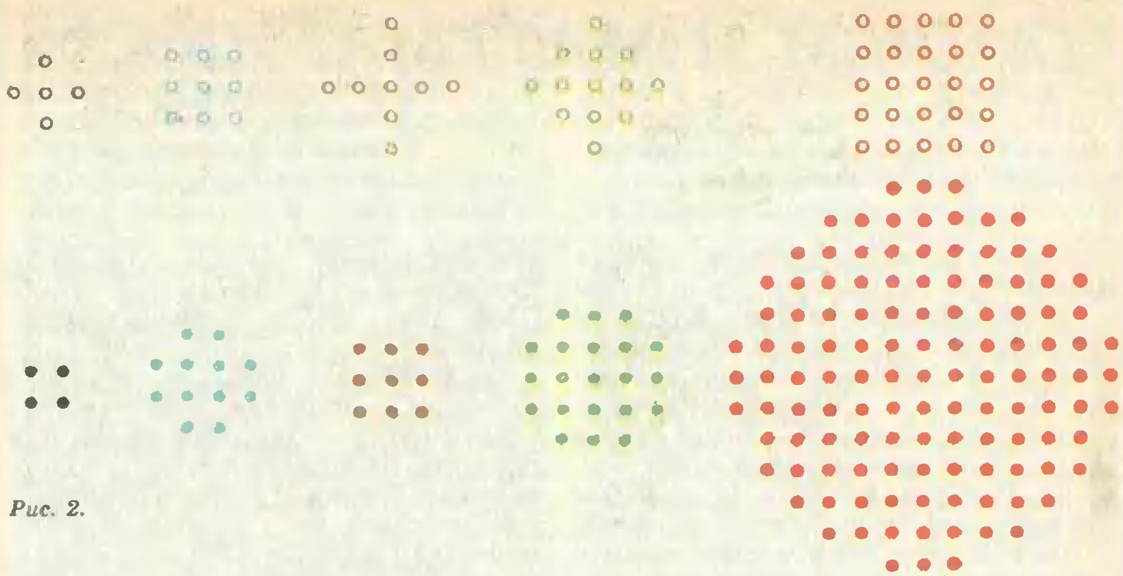


Рис. 2.

ной с борта космического корабля «Союз». На первом, необработанном снимке отчетливо видны темные пятнышки на снежном покрове. А на втором изображении, полученном после медианной фильтрации, эти пятнышки исчезли.

Медианная фильтрация изображений обладает важным с точки зрения практика свойством сохранять резкие границы черно-белых объектов. Возьмем, например, самое простое изображение: черный квадрат на бе*лом фоне. Значения яркости* в точках квадрата равно 1, а вне его — 0 (рис. 1). При медианной фильтрации с окном в виде квадрата 3×3 получится квадрат с выкинутыми угловыми точками, а если окно имеет вид креста из пяти точек, то черный квадрат будет инвариантным.

Упражнение 12. На рисунке 2 изображены пять окон, а под ними — пять изображений. Проверьте, что все изображения инвариантны относительно медианных фильтраций с соответствующими окнами.

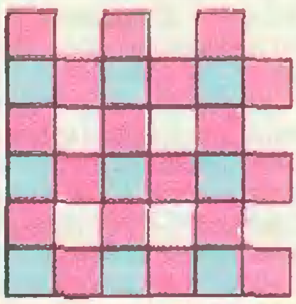


Рис. 3.

Как и в одномерном случае, медианная фильтрация успешно устраняет редкие большие выбросы, а скользящее усреднение — малые знакочередующиеся ошибки. Если же встречаются *большие ошибки*, то скользящее усреднение вредно, т. к., «размазывая» ошибку, оно создает на фотографии серые пятна.

Упражнение 13. Подвергните картинку на рисунке 3 медианной фильтрации с окнами в виде квадрата 3×3 и креста из 5 клеток, а также скользящему усреднению с теми же окнами. Синему цвету отвечает сигнал величиной -2, красному — 0, а белому — $+2$.

Подсказка: при первой фильтрации изображение исчезнет.

В заключение отметим, что понятие медианной фильтрации существует не только для дискретных сигналов (т. е. последовательностей чисел), но и для непрерывного сигнала (т. е. функции, определенной на числовой прямой или на некотором *ее отрезке*). Мы не будем давать точного определения — при желании вы можете придумать его сами; скажем только, что такая фильтрация обладает основным свойством дискретной фильтрации: она уничтожает «выбросы», сохраняя общий вид сигнала.

НАЦИЗМ И МАТЕМАТИКА

Кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

Национал-социалистическая партия Германии находилась у власти 12 лет — с 1933 по 1945 год. Я покажу на нескольких примерах, как проводилась нацистская доктрина в математике и к каким печальным последствиям это привело. По словам одного из ведущих математиков этого времени Рихарда Куранта, *«...научная жизнь — это очень нежное растение, более уязвимое, чем большинство прочих составляющих человеческой истории. Упадок и процветание науки, так же как музыки и изобразительного искусства, в большой степени зависят от непостоянных и неустойчивых человеческих факторов»*.

Арийский миф и расовые законы

Основой идеологии «Третьего рейха» служила «арийская теория», а средством ее проведения в жизнь — расовые законы.

В начале 19 века в лингвистике было сделано важное открытие: большая группа языков (санскрит, иранский, греческий, германские, романские, славянские и некоторые другие) образует так называемую индоевропейскую семью и имеет общее происхождение. Они восходят к праязыку, на котором говорили племена, называвшие себя «арья» (название «Иран», по-видимому, происходит от этого корня). Место первоначального расселения этих племен и пути их миграции до сих пор точно не установлены.

«Арийская теория», отождествляющая лингвистическую общность с расовой и культурной, оформилась во второй половине 19 века. Два наиболее фундаментальных источника — это выпущенное в 1853 году четырехтомное «Эссе о неравенстве человеческих рас» французского графа Жозефа-Артура Гобино и книга англо-немецкого автора Хьюстона Чемберлена «Устои 19 столетия» (1898 год). Вот ее основные положения:

Единственная раса — носитель культуры — арийская, а ее наиболее ценная часть — северный ариец, или германец. Залог успеха расы — чистота крови. Наследие древних цивилизаций досталось двум чистым расам — германцам и евреям. Они — смертельные враги по крови. Семиты лишены настоящей творческой силы и неспособны к высшей науке и искусству.

Приведу теперь выдержки из расовых законов «Третьего рейха».

Закон о чиновниках от 7 апреля 1933 года.

П. 3(1) «Чиновники неарийского происхождения подлежат увольнению».

В исполнительном постановлении к этому закону разъясняется, что *«неарийцем считается лицо, происходящее от неарийских, особенно еврейских, родителей или бабушек и дедушек. Достаточно того, чтобы хотя бы один из них был неарийцем»*.

Из «Закона о чиновниках» было сделано исключение для ветеранов первой мировой войны и лиц, принятых на службу до ее начала. На этом настоял президент фельдмаршал фон Гинденбург. Позднее это исключение было отменено, а закон распространен также на лиц, состоявших с неарийцами в браке. Математики, работающие в университетах, а также учителя государственных школ подпадали под его действие.

Закон о гражданстве от 15 сентября 1935 года.

П. 2(1) «Гражданином Рейха может быть только лицо германской или родственной ей крови...»

Это — один из «Нюрнбергских законов» (второй — «О защите немецкой крови и немецкой чести» — запрещал браки и интимные отношения между арийцами и неарийцами). Был также издан закон, устанавливавший полуторапроцентную норму для неарийцев — учащихся средних и высших учебных заведений.

Позволю себе кратко прокомментировать сказанное. Расовая теория утверждает, что важнейшие духовные особенности людей определяются их расой. Это противоречит данным антропологии, которые, скорее, отвечают словам Конфуция: «*Природа людей одинакова, разделяют же их обычаи*». Арийская общность — языковая, а не расовая; население Германии очень неоднородно по происхождению. (Перед первой мировой войной по приказу кайзера Вильгельма была составлена расовая карта Германии. Эту карту не решились опубликовать, так как она слишком явно противоречила арийскому мифу.) «Арийская теория» часто противоречила и нацистской практике. Например, арийцы-цыгане подвергались в Германии и на оккупированной территории тотальному уничтожению. Наконец, термин «неариец» служил в Германии синонимом слова «еврей» — других неарийцев в стране практически не было.

Математический расизм

Выдающийся немецкий математик Людвиг Бибербах выступил в 1934 году с лекцией «Структура личности и математическое творчество». Цель лекции — показать «*... на примере моей науки, математики, влияние народного духа, происхождения и расовой принадлежности на стиль творчества. Для национал-социалистов это утверждение, правда, вовсе не нуждается в каком-либо доказательстве...*»

Бибербах делит математиков на два типа — формалистов и интуитивистов. Пользуясь психологическим термином, он говорит о S- и J-типах мышления: «*Виртуозное владение техническим аппаратом и жонглирование понятиями... присуще нежизненному и неорганичному S-типу*». Этот тип, согласно Бибербаху, характерен для французских и еврейских математиков: «*... мыслители-абстракционисты еврейского происхождения, носители S-типа, так сумели перекроить аксиоматику, что превратили ее в своего рода интеллектуальное кабаре*».

В качестве иллюстрации Бибербах сравнивает определения комплексного числа у Коши и Гаусса. Коши определяет его как упорядоченную пару действительных чисел и вводит на множестве таких пар арифметические операции. Определение Гаусса более геометрично (проблемы обоснования его в тот момент не волновали). Это различие Бибербах трактует как конфликт стилей математического творчества, отражающий противостояние германской и романской

Л. Бибербах (1886—?)

Ф. Клейн (1849—1925)

расы: «... *спор относительно оснований математики также имеет расовую подоплеку...*»

Бибербах приводит и другой пример: «*Тот факт, что выдающийся математик Эдмунд Ландау встретил у студентов Геттингенского университета активное неприятие, объясняется... тем, что ненемецкий стиль этого ученого... неприемлем для людей с немецким мировосприятием. Народ, осознавший, что чуждые ему и жаждущие господства силы подрывают самые его основания... не может принять в качестве наставников носителей этого чужеродного стиля*».

Заключительный вывод состоит в том, что «... *ученые неарийского происхождения пытаются оказать свое пагубное влияние на немецкий народ и лишить его источника, из которого он черпает свою силу*».

Бибербах претендует на развитие идей Ф. Клейна (который, в действительности, не был расистом), высказанных в 1893 году на Математическом конгрессе, посвященном 400-летию открытия Америки Колумбом: «... *степень развития пространственного воображения различается у разных людей и, быть может, у разных рас. Кажется, что сильное врожденное пространственное воображение свойственно германцам, в то время как критическое, чисто логическое мышление более присуще романской и еврейской расе*». По словам Бибербаха, «*мы живем в эпоху, когда эта мысль Клейна может рассчитывать на большее понимание, чем 40 лет назад, когда он ее высказал*».

Лекция Бибербаха вызвала возмущение многих математиков. С протестами выступили датчанин Харальд Бор (брат знаменитого физика) и американский тополог Освальд Веблен. Приведу отклик выдающегося английского математика Г. Харди, опубликованный в журнале «Nature»: «*Вероятно, не следует слишком строго критиковать заявления, сделанные, пусть даже и учеными, во время сильного политического или национального возбуждения... Страх потерять работу, ужас перед повсеместно распространяющейся глупостью, стремление любыми средствами не дать себя обойти — все это естественные, хотя и не слишком благородные мотивы. Репутация профессора Бибербаха исключает такие объяснения. И я вынужден прийти к значительно менее лестному для него выводу, что он действительно верит в то, что говорит*».

Бибербах, по-видимому, верил в то, что говорил. В 1936 году он основал журнал «Немецкая математика», призванный отражать достижения «чисто арийской науки».

Лекция Бибербаха нуждается в комментарии. Не подлежит сомнению, что существуют разные стили математического мышления. Их связь с расовой или национальной принадлежностью более чем сомнительна, зато очевидна роль традиции той или иной математической школы. Кстати, великих математиков француза Анри Пуанкаре и немецкого еврея Германа Минковского следовало бы отнести к J- типу.

Любопытно, что в расовом анализе творческой деятельности Бибербах следует за великим композитором Рихардом Вагнером, который в книге «Евреи в музыке» (1869 год) утверждает, что еврейские композиторы ниже христианских, так как их музыка имеет особый семитский характер. (В Геттингенском университете шутили, что кроме обычного наследования способностей от отца к сыну есть еще особый тип наследования: от тестя к зятю.

Шутка основывалась на том, что молодые математики часто женились на дочерях профессоров. Упомянутый выше Х. Чемберлен был женат на дочери Р. Вагнера.)

Впрочем, лучшим комментарием служит фрагмент выступления великого немецкого математика Д. Гильберта на Международном математическом конгрессе в Болонье в 1928 году: *«... любые рамки, в особенности национального характера, противоречат духу математики. Только абсолютно не понимая нашей науки, можно создавать различия между людьми и расами, а причины, по которым это делалось, являются крайне ничтожными. Математика не знает рас... Для математики весь культурный мир представляет собой единую страну»*.

Упадок Геттингенского университета

Главную роль в развитии математики играют немногочисленные крупные научные центры. В первой трети нашего века в Германии таким центром был университет города Геттинген. Его традиции восходят к К.-Ф. Гауссу, который поступил в университет в 1795 году и провел там большую часть жизни в должности директора обсерватории. Гаусс — Риман — Клейн — Гильберт — таким созвездием отмечена математическая история Геттингена.

Д. Гильберт (1862—1943)

Расцвет университета на пороге 20 века связан с деятельностью Клейна и Гильберта (кстати, Гильберт прибыл в Геттинген ровно через 100 лет после Гаусса — в 1895 году). Клейн во второй половине жизни очень активно занимался организацией науки. Его усилиями в университете был создан ряд научных институтов, первоклассная математическая библиотека, коллекция математических моделей, в помещении которой собирался своеобразный студенческий клуб.

На стене винного погребка при городской ратуше начертан девиз: *«Вне Геттингена жизни нет»*. Эти безапелляционные слова, в известной мере, отвечали положению дел в математической жизни. В университете постоянно бывали многочисленные математики из Америки, Венгрии, датчанин Х. Бор, англичанин Г. Харди, голландцы Л. Брауэр и Б. Ван-Дер-Варден, советские математики П. Александров, А. Колмогоров и П. Урысон. Порой казалось, что в Геттингене работает международный математический конгресс.

Геттингенская математическая школа — это, в первую очередь, школа Гильберта. Его научные интересы охватывали практически всю математику: теорию чисел, алгебру, функциональный анализ, геометрию, логику. И в каждой из этих областей он получил выдающиеся результаты. Вместе с Г. Минковским он руководил семинаром по физике, в которой происходили в это время бурные изменения: создавалась теория относительности и квантовая механика (ассистентом Гильберта по физике одно время был М. Борн). И именно школа Гильберта понесла при нацизме наибольшие потери.

В 1933 году атмосфера в Геттингене начала стремительно меняться. Приведу два характерных примера. Умерший в 1925 году Клейн был включен в Еврейскую энциклопедию. В связи с этим его происхождение было тщательно проанализировано, после чего было решено, что он «великий немецкий математик». Имя Гильберта — Давид — тоже вызывало подозрения. Ему пришлось представить автобиографию своего предка Христиана Давида Гильберта, указывавшую на принадлежность семьи к пиетистам (протестантское религиозное направление).

К кому же в Геттингене относились расовые законы? К Э. Ландау, занявшему кафедру Г. Минковского после его неожиданной смерти в 1909 году. При выборе его кандидатуры не последнюю роль сыграло то обстоятельство, что Ландау был независимым и бескомпромиссным человеком — именно в таких сотрудниках был заинтересован университет в это время! Ландау был выдающимся специалистом в аналитической теории чисел, возродившим в Геттингене «эру арифметики, сравнимую с эрой, открытой Гауссом в 1801 году». Коллеги и студенты побаивались Ландау из-за его остроумия и безжалостной прямоты, однако уважали его фантастическое трудолюбие и преданность математике.

Математический стиль Ландау был очень абстрактным, и он с пренебрежением относился к каким бы то ни было приложениям. По словам Куранта, «лет через 20 он украсил бы собой группу Бурбаки» — коллектив французских математиков, создавших многотомный и чрезвычайно абстрактный курс современной математики. Ландау стоял на крайних позициях и в преподавании: его учебник анализа не содержит ни единого чертежа и представляет собой здание, построенное — этаж за этажом — на фундаменте, образованном аксиомами натуральных чисел, реализуя афоризм Л. Кронеккера: «*Натуральные числа даны от Бога; все остальное — дело рук человеческих*».

Ландау оставил университет после следующего инцидента, произошедшего весной 1933 года. Группа старших студентов помешала ему войти в аудиторию, где он должен был читать курс анализа для первокурсников: «*Мы не возражаем, чтобы вы читали спецкурсы, но это — новички, и мы не хотим, чтобы они учились у еврея*» (именно об этом эпизоде упоминает в своей лекции Бибербах). Эту группу студентов возглавлял очень одаренный математик О. Тейхмюллер, погибший в 1943 году на восточном фронте (кстати, еще в 1926 году нацисты составили большинство в студенческом конгрессе Геттингена). Ландау вышел в отставку и умер в 1938 году.

Э. Ландау (1877—1938)

Расовые законы относились к Эмми Нетер. Математические способности она унаследовала от отца, известного математика. Нетер приехала в Геттинген во время первой мировой войны. По рекомендации Клейна и Гильберта ее оставили в университете, несмотря на предубеждение многих членов факультета против того, чтобы женщина носила звание приват-доцента (Гильберт реагировал на это так: «*...университетский сенат — не бани!*»).

Нетер была выдающимся алгебраистом. В учебнике современной алгебры вы обнаружите «теоремы Нетер», «нетеровы кольца» и т. д. После замечательных работ Гильберта по так называемой теории инвариантов — решение было получено не на пути построения все более сложных формул, а с помощью новых общих понятий — алгебра переживала период расцвета. Нетер была центром алгебраического кружка в Геттингене. Однако в 1933 году она была уволена из университета и покинула Германию. После ее смерти в США в 1935 году А. Эйнштейн писал: *«По мнению самых компетентных из ныне здравствующих математиков, г-жа Нетер была самым значительным творческим гением (женского пола) из родившихся до сих пор»*.

Расовые законы относились к Р. Куранту, хотя он и был ветераном войны. Курант начинал как ассистент Гильберта, а вернувшись в университет с фронта после ранения, он стал преемником кафедры Клейна. Курант был ярким математиком с широким кругом интересов. Может быть, вы знакомы с его книгой «Что такое математика» — это одна из лучших популярных книг по нашей науке. Курант обладал и даром организатора. Его сотрудничество с издателем Фердинандом Шпрингером позволило в значительной степени решить проблему публикации математических результатов (сейчас Springer Verlag — крупнейшее издательство научной литературы).

В начале 20-х годов Куранту удалось осуществить старую мечту Клейна о создании в Геттингене Математического института. Время было не самым подходящим для подобных начинаний: в Германии свирепствовала инфляция (назначенная в 1906 году огромная премия в 100 тысяч марок за доказательство Великой теоремы Ферма превратилась в простой клочок бумаги). Но Куранту на посту директора Института удавалось успешно преодолевать многочисленные финансовые и административные затруд-

Э. Нетер (1882—1935)

Р. Курант (1888—1972)

нения. В 1933 году условия работы Куранта стали нетерпимыми. Он вышел в отставку и эмигрировал в США. В Нью-Йорке Курант создал математический институт, который сейчас носит его имя.

Новым директором Института был назначен «чистый ариец» О. Нейгебауэр. Он занимал этот почетный пост ровно один день, так как отказался подписать подтверждение в лояльности режиму. Пост перешел к другому выдающемуся геттингенскому математику, преемнику кафедры Гильберта Герману Вейлю. Вейль еще надеялся, что математические традиции Геттингена можно спасти и при «новом порядке». Однако летом 1933 года он тоже покинул страну. В конце концов директором Института стал Гельмут Хассе, первоклассный математик и убежденный нацист.

В 1930 году в Геттингене было 5 полных профессоров математики: Ф. Бернштейн, Г. Вейль, Д. Гильберт, Р. Курант, Э. Ландау. Четверо покинули университет. Гильберт, которому в 1933 году исполнился 71 год, лишился многих коллег и учеников (своего ассистента П. Вернайса он содержал за свой счет еще год после увольнения). На одном банкете с участием рейхс-министра образования Гильберта спросили: *«Ну и как же теперь математика в Геттингене, после того, как она освободилась от еврейского влияния?»* *«Математика в Гет-*

тингене? Да она просто не существует больше»,— ответил Гильберт.

Накануне войны

То, что произошло в Гсттингене, повторялось во многих научных центрах Германии. Например, во Франкфурте, где в 1935 году прекратил существование семинар, на котором (на языке оригинала!) изучались математические работы разных эпох — от Евклида и Архимеда до Ферма и Барроу. Душой семинара был Макс Ден (прославившийся решением третьей проблемы Гильберта: правильный тетраэдр нельзя разрезать на части, из которых можно сложить куб). Ден был арестован в 1938 году, однако вскоре его выпустили из-за переполнения тюрем. Ему удалось бежать в Норвегию, где в 1940 году его застала немецкая оккупация. В 1941 году Ден оказался в Америке после долгого опасного путешествия через Финляндию, СССР и Японию.

В 1938 году нацисты перешли к «окончательному решению еврейского вопроса», т. е. к массовому физическому уничтожению евреев. Большинство математиков, которым угрожала опасность, уже покинули Германию, но были и такие, которые не захотели или не смогли уехать. Участник франкфуртского семинара П. Эпштейн в 1939 году покончил с собой, получив повестку из гестапо. Покончил с собой, чтобы избежать депортации в концлагерь, и Ф. Хаусдорф. Его судьбу разделили его жена и ее сестра. Один из четверых математиков, возглавлявших до 1933 года «Немецкий математический союз», О. Блюменталь был арестован в оккупированной Голландии и погиб в концлагере Терезин.

Германия потеряла многих выдающихся математиков. Среди беженцев были не только те, кто опасался преследований по расовому признаку,— многие просто не считали возможным жить при нацизме (например, знаменитый логик К. Гедель или участник франкфуртского семинара К. Зигель прошли бы любой тест на арийское происхождение). Вот несколько имен

AN DIESER UNIVERSITÄT WIRKTE, 1921 - 1935
DER MATHEMATIKER FELIX HAUSDORFF
8.11.1868 - 26.1.1942
ER WURDE VON DEN NATIONALSOZIALISTEN
IN DEN TOD GETRIEBEN, WEIL ER JUDE WAR.
MIT IHM EHREN WIR ALLE OPFER DER TYRANNEI.
NIE WIEDER GEWALTHERRSCHAFT UND KRIEG!

Мемориальная доска у входа в Математический институт Боннского университета: «В этом университете с 1921 по 1935 год работал математик Феликс Хаусдорф (8.11.1868—26.1.1942). Он умер по вине национал-социалистов из-за того, что был евреем. В его лице мы чтим память всех жертв тирании. Пусть никогда не повторится диктатура и война!»

математиков, покинувших Германию:

Э. Артин, Г. Вейль, К. Гедель, М. Ден, К. Зигель, Р. Курант, Г. Леви, Р. фон Мизес, О. Нейгебауэр, Э. Нетер, Г. Радемайстер, И. Шур. К этому списку можно добавить венгерских математиков, подолгу работавших в Германии: Дж. фон Нейман, Дж. Пойя, Г. Сеге.

Немецкие математические традиции оказались подорванными. Конечно, математика может развиваться и без участия евреев (как и любой достаточно немногочисленной группы: например, рыжеволосых или, скажем, тех, чье имя начинается на одну из букв алфавита). Однако такое несправедливое ограничение неизбежно разрушит структуру науки, сложившуюся при нормальных условиях. И создаст обстановку, неприемлемую для многих из тех, кого эти ограничения непосредственно не затрагивают. В то же время и среди выдающихся математиков достаточно много людей с сильными национальными предрассудками. Это, увы, лишний раз подтверждает тезис о совместимости «гения и злодейства».

Закончу я словами К. Зигеля: *«Будем надеяться, то, что сделали тогда достойным и честным людям введенные в заблуждение фанатики, не повторится никогда»*.

Задачи

M1246—M1250, Ф1253—Ф1257

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 декабря 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10—90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1246» или «Ф1253». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1246—M1249 предлагались в этом году на Ленинградской городской олимпиаде по математике, задачи Ф1253, Ф1254 и Ф1257 — на заключительном этапе XXIV Всесоюзной олимпиады по физике.

M1246. Докажите, что в любой бесконечной арифметической прогрессии члены которой — натуральные числа, найдутся два числа с одинаковой суммой цифр.

С. Генкин

M1247. Можно ли плоскость покрыть без наложений квадратами с длинами сторон 1, 2, 4, 8, 16, ..., используя квадрат каждого размера не более а) десяти раз, б) одного раза?

Д. Фомин

M1248. В отрезке находится несколько отрезков меньшего размера, покрывающих его целиком.
а) Докажите, что левые половины этих отрезков покрывают не менее половины исходного отрезка.
б) Докажите, что если у каждого из этих отрезков отбросить какую-либо половину — левую или правую,— то оставшиеся половины покрывают не менее трети длины исходного отрезка.

Д. Фомин

M1249. В королевстве Олимпия $n>6$ городов, каждые два из которых соединены одной дорогой с односторонним движением. При этом не из каждого города можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.
а)* Докажите, что король может выбрать один из городов и, изменив направление движения на всех дорогах, входящих и выходящих из него, добиться того, чтобы можно было проехать из любого города в любой другой.
в) Верно ли это утверждение для $n=6$?

И. Итенберг

M1250*. Пусть x_1, x_2, x_3, ..., x_n — положительные числа. Докажите, что

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}$$

а) больше $(\sqrt{2}-1)n$;
б) больше $5n/12$;
в) не меньше $n/2$, если последовательность x_1, x_2, ..., x_n монотонна.

Л. Курляндчик, А. Файбусович

Ф1253. Прямоугольный сосуд с водой стоит на двух опорах, разнесенных на расстояние L друг от друга. Над сосудом на перекладине подвешен на нити кусок свинца массой M на расстоянии l от центра сосуда (рис. 1). Силы реакции опор при этом равны N_1 и N_2. Нить удлиняют так, что свинец погружается в воду. Какими станут после этого силы реакции опор? Плотность свинца в n раз больше плотности воды.

А. Зильберман

Ф1254. В морозную осеннюю ночь на спокойной поверхности озера начинает нарастать лед и за 10 часов достигает толщины 10 см. Какой толщины достигнет лед, если такая температура продержится без изменений в течение 1000 часов? Считайте теплопроводность льда намного большей, чем теплопроводность воды. Озеро очень глубокое.

В. Скороваров

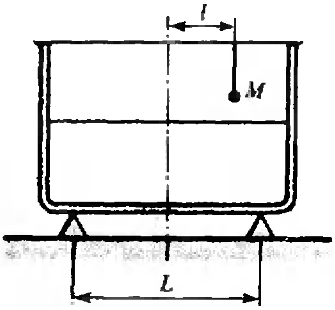


Рис. 1.

Ф1255. Поверхность безжизненной планеты покрыта толстым слоем замерзшей углекислоты. Предлагается создать на ней атмосферу из чистого кислорода, разлагая углекислоту на углерод и кислород. За какое время это удастся сделать, если за 1 секунду разлагать 10^6 молей? Необходимо получить давление $p=0{,}2$ атм. Считайте, что у поверхности установится температура $T=200$ К, при которой испарением углекислоты можно пренебречь. Масса планеты $M=7{,}5\cdot10^{22}$ кг (примерно равна массе Луны), радиус $R=1750$ км.

Д. Могилевцев

Ф1256. На кольцевой сердечник с большой магнитной проницаемостью намотана катушка, содержащая $N=2000$ витков и имеющая индуктивность $L=5$ Гн. К концам катушки подключен резистор сопротивлением $R=200$ Ом. Батарейку напряжением $U_0=1{,}5$ В подключают между одним из концов катушки и витком номер 300, считая от этого конца. Какие токи будут течь по обеим частям катушки через время $t=0{,}1$ с после подключения? Батарейку считать идеальной, рассеянием магнитного потока пренебречь.

З. Рафаилов

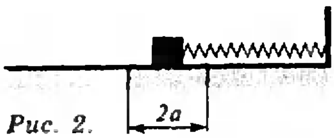


Рис. 2.

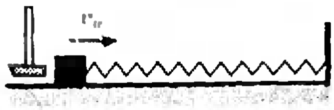


Рис. 3.

Ф1257. Период свободных колебаний груза, висящего на пружине, оказался равным T_0. Груз с пружиной расположили на шероховатой горизонтальной поверхности (рис. 2) и, смещая груз влево и вправо, измерили ширину области, внутри которой груз может находиться в равновесии под действием силы трения и силы упругости пружины (так называемой зоны застоя),— она оказалась равной $2a$. В следующем опыте груз сместили из зоны застоя на расстояние, существенно превышающее a, и наблюдали колебания груза. Каким окажется период колебаний?

Теперь поставим опыт иначе. Всякий раз, когда груз при колебаниях оказывается в крайнем левом положении, по грузу стукают молоточком (рис. 3), и скорость груза становится равной v_0. Какова будет амплитуда установившихся колебаний груза?

Предполагая, что амплитуда установившихся колебаний значительно больше ширины зоны застоя, определить, на сколько период установившихся колебаний отличается от периода свободных колебаний T_0.

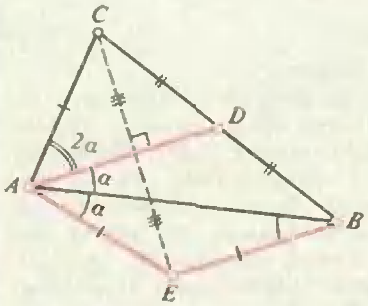
С. Козел

Задачник «Кванта»

Решения задач

М1221 — М1225, Ф1233 — 1237

М1221. *Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медиана, проведенная к третьей стороне, делила угол треугольника в отношении 1:2.*



Если медиана AD делит угол A треугольника ABC на части $\angle BAD=\alpha$, $\angle CAD=2\alpha$ (см. рисунок), то, приравнивая выражения для площадей треугольников BAD и CAD

$$\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot \sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot \sin 2\alpha,$$

мы получаем, что $\cos\alpha=AB/2AC$. Эта формула позволяет по данным сторонам AB и AC построить угол α, а с ним и треугольник ABC. Из очевидного условия $0<\alpha<\pi/3$ следует, что задача имеет решение (и притом единственное) при $1<AB/AC<2$.

Приведем и чисто геометрическое решение. Если E — это точка, симметричная C относительно медианы AD, то, как легко видеть, $BE\|AD$ (см. рисунок), следовательно, $\angle EBA=\angle DAB=\angle EAB$, т. е. треугольник ABE равнобедренный, причем $BE=EA=AC$. Таким образом, мы можем построить треугольник ABE по сторонам, провести $AD\|BE$, а затем найти и точку C, симметричную E.

В. Прасолов, В. Чичин

М1222. *Пусть $m>1$ — натуральное число, s — наибольшее целое число, для которого $2^s\leqslant m$. Докажите, что*

а) для любых $s+1$ целых чисел можно выбрать несколько чисел и расставить знаки плюс и минус между ними так, что полученная сумма будет делиться на m;

б) оценка в пункте а) неулучшаема: существуют такие s целых чисел, что никакая сумма нескольких из них при любой расстановке знаков не делится на m.

а) Рассмотрим все возможные «не алгебраические» (т. е. без минусов) суммы, которые можно составить из $s+1$ чисел. Их количество равно $2^{s+1}-1>m-1$. (Каждую сумму можно задать последовательностью длины $s+1$ из нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит 1, если в сумму входит i-е число; количество последовательностей равно 2^{s+1}, последовательность из одних нулей надо исключить.) Если какие-то две суммы дают одинаковые остатки при делении на m, то их разность — искомая «алгебраическая» сумма. Если все остатки различны, то они принимают все возможные m значений 0, 1, ..., $m-1$, и сумма, дающая остаток 0,— искомая.

б) Вот пример s целых чисел таких, что никакая алгебраическая сумма некоторых из них не кратна m: 1, 2, 4, ..., 2^{s-1}. Действительно, любая такая сумма по модулю не превосходит $1+2+4+...+2^{s-1}\leqslant m-1$. С другой стороны, эти суммы не могут быть равны 0: если 2^i — наименьшее слагаемое такой суммы, то вся сумма будет делиться на 2^i, но не будет делиться на 2^{i+1}.

В. Лев

М1223. *На квадратный лист бумаги со стороной а посадили несколько клякс.*

Пусть S, c, b — площадь произвольной кляксы и длины ее проекций на горизонтальную и вертикальную стороны листа. Тогда $S\leqslant cb$; кроме того, $S\leqslant 1$ по условию.

площадь каждой из которых не больше 1. Докажите, что если каждая прямая, параллельная сторонам листа, пересекает не более одной кляксы, то суммарная площадь клякс не больше a.

Следовательно, $S\leqslant\sqrt{S}\leqslant\sqrt{cb}\leqslant(c+b)/2$ согласно неравенству Коши. Суммируя эти неравенства по всем кляксам, получим, что общая их площадь не превосходит половины суммарной длины их проекций на горизонтальную и вертикальную стороны листа. Осталось заметить, что проекции клякс на данную сторону не пересекаются, поэтому сумма их длин не больше длины a стороны, а сумма площадей не больше $(a+a)/2=a$.

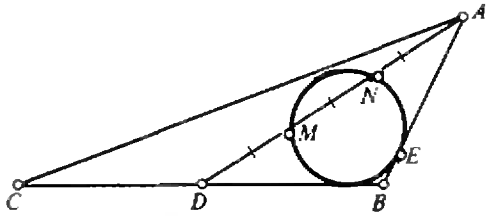
А. Разборов

М1224. *Из вершины треугольника проведен отрезок в точку на противоположной стороне, делящийся вписанной окружностью на три равные части. Может ли этот отрезок оказаться а) высотой; б) медианой; в) биссектрисой треугольника?*

Ответ: а), в) не может, б) может.

Введем обозначения, как на рисунке. Заметим, что если длины двух крайних частей проведенного отрезка AD равны ($AN=DM$), то треугольник ABD, очевидно, равнобедренный ($AB=BD$). Следовательно, AD не может быть ни высотой ($\angle ADB<90°$), ни биссектрисой ($\angle CAD<\angle ADB=\angle BAD$), а медианой он может являться лишь тогда, когда $a=2c$, где $a=BC$, $c=AB$.

Пусть теперь условие $a=2c$ выполнено. Покажем, что при некотором $b=AC$ вписанная окружность



поделит медиану $AD=m$ на равные части. Нам понадобятся следующие три хорошо известные и очень полезные утверждения:

1) $m^2=(2b^2+2c^2-a^2)/4$;

2) $AE=(b+c-a)/2$,

где E — точка касания вписанной окружности со стороной AB;

3) $AE^2=AN\cdot AM$

(это верно для любой секущей ANM).

Подставляя в равенства 1) и 2) $a=2c$, в 3) — значение AE из 2), $AN=m/3$, $AM=2m/3$ и m^2 из 1), получим условие

$$AE^2=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2=\frac{2}{9}\,m^2=\frac{2}{9}\,\frac{b^2-c^2}{2},$$

или $9(b-c)=4(b+c)$ (сокращение на $b-c$ возможно, так как $a=2c<b+c$, т. е. $b-c>0$). Отсюда $b=13c/5$. Поскольку $2c-c<13c/5<2c+c$, треугольник со сторонами $2c$, $13c/5$, c существует. Части AN и DM медианы в таком треугольнике равны, так как $BD=c=BA$. Отрезок $x=AN$ удовлетворяет уравнению $x(m-x)=$ $=AN\cdot AM=AE^2=2m^2/9$, имеющему корни $m/3$ и $2m/3$, и неравенству $x<m-x$ ($AN<AM$). Следовательно, $x=m/3$, что нам и требовалось.

В. Сендеров

M1225*. *Докажите, что*
а) если для натуральных чисел a и b число $(a^2+b^2)/(ab-1)$ натуральное, то оно равно 5;
б) уравнение $x^2-5xy+y^2+5=0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

В доказательстве обоих утверждений можно использовать следующую основную идею. Уравнение

$$x^2-qxy+y^2+q=0 \qquad (1)$$

при фиксированных q и y — квадратное относительно x. Если при целых q и y оно имеет один целый корень x, то должно иметь и еще один целый корень (согласно теореме Виета, равный $qy-x$). Подобная идея не раз встречалась в задачах про уравнения в целых числах.

а) Мы должны доказать, что если уравнение (1) имеет решение (x, y) в целых положительных числах, то $q=5$. Отметим сразу, что при $q=1$ и $q=2$ таких решений очевидно нет:

$$x^2-xy+y^2+1=(x-y)^2+xy+1>1,$$
$$x^2-2xy+y^2+2=(x-y)^2+2>1.$$

Далее, при $q>2$ нет целых решений таких, что $x=y$ (если $x^2(2-q)+q=0$, то $x^2=q/(q-2)=1+2/(q-2)$, а это число не превосходит 3 и больше 1). Наконец, заметим еще, что уравнение (1) рассматриваемое как квадратное относительно x при целых $q>2$ и $y>0$ не может иметь кратных корней. В самом деле, если его дискриминант равен 0, т. е. если $y^2q^2-4(y^2+q)=0$, то $y^2=4q/(q^2-4)$, а это число при $q>2$ не превосходит 12/5 и не равно 1, поскольку уравнение $q^2-4q-4=0$ не имеет целых корней.

Теперь вспомним основную идею: из каждого решения (x, y) можно получить еще одно решение с тем же y. Среди всех решений (x, y) уравнения (1) с данным q, для которых $x>y$, рассмотрим решения с наименьшим y. Пусть это будут решения (v, y) и (w, y). Тогда $y<v<w$, так что $v\geqslant y+1$, $w\geqslant y+2$.

По теореме Виета, поскольку $x=v$ и $x=w$ — корни уравнения (1), $vw=y^2$, $v+w=qy$. Поэтому

$$y^2+q-qy=vw-v-w=(v-1)(w-1)-1\geqslant$$
$$\geqslant y(y+1)-1=y^2+y-1,$$

откуда $1-y+q-qy\geqslant 0$, или $(1-y)(1+q)\geqslant 0$. Но это возможно лишь если $y=1$ и все неравенства обращаются в равенства, т. е. $v=2$, $w=3$, $q=5$.

Последнее рассуждение можно заменить более наглядным, если воспользоваться геометрической интерпретацией уравнений (1). Каждое из них (при $q=3, 4, 5, 6, \ldots$) на плоскости Oxy задает гиперболу, симметричную относительно прямой $x=y$, вершина которой лежит на отрезке $1\leqslant x\leqslant 2$ этой прямой. Если прямая, параллельная одной из осей, пересекает гиперболу в «целой» точке, то и вторая ее точка пересечения с гиперболой — целая. Пользуясь этим, легко показать, что если гипербола содержит хоть одну целую точку, то такая точка есть и вблизи вершины — на участке, расположенном ниже нее (еще ближе к оси Ox). Так дело сводится лишь к решениям с $y=1$, с которыми уже легко разобраться.

б) Итак, осталось рассмотреть уравнение с $q=5$:

$$x^2-5xy+y^2+5=0. \qquad (2)$$

Два его решения — (1, 2) и (1, 3) — очевидны. Из каждого решения (x, y), кроме симметричного (y, x), можно получить еще одно решение с тем же y: $(5y-x, y)$; действительно,

$$(5y-x)^2-5(5y-x)y+y^2=x^2-5xy+y^2=-5.$$

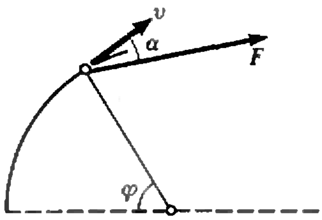
Заметим, что если $y>x$, то $5y-x>4y>y$. Таким образом, любые два соседних члена последовательностей

$$1,\ 2,\ 9,\ 43,\ 206,\ 987,\ \ldots,$$
$$1,\ 3,\ 14,\ 67,\ 321,\ 1538,\ \ldots,$$

где каждый член получается из двух предыдущих x, y по формуле $5y-x$, дают новое решение уравнения (2).

С. Мамиконян, Г. Оганесян

Ф1233. *Гонки мотоциклистов происходят по узкой круговой трассе. Трогаясь с места, мотоциклист стремится побыстрее набрать скорость. Какую часть круга он пройдет к моменту достижения максимальной скорости?*



Сразу скажем, что для быстрого разгона нужно как можно лучше использовать силу трения.

Пусть α — угол между скоростью мотоцикла $\vec{v}$ и силой трения о землю $\vec{F}$ в некоторый момент времени (см. рисунок). Запишем уравнения движения мотоцикла в проекциях на направления касательной и нормали к траектории:

$$mv'=F\cos\alpha,\quad mv^2/R=F\sin\alpha.$$

Дифференцируя по времени второе уравнение, с учетом первого получим

$$2v/R=\alpha',$$

или (поскольку $v/R=\omega=\varphi'$)

$$2\varphi'=\alpha'.$$

Отсюда

$$2\varphi=\alpha+\mathrm{const}.$$

При $\varphi=0$ (начальная точка) $\alpha=0$, поэтому $\mathrm{const}=0$ и

$$2\varphi=\alpha.$$

В момент достижения максимальной скорости

$$\alpha=\pi/2 \text{ и } \varphi=\pi/4,$$

что соответствует 1/8 части окружности.

А. Черноуцан

Ф1234. *Для охлаждения потока воздуха в цилиндрической трубе при нормальных условиях, в неко-*

Так как через стенки трубы вещество нигде не втекает и не вытекает, в любом поперечном сечении трубы (в том числе на входе и на выходе) масса вещества, пересекающего это сечение в единицу времени (поток *тором ее сечении впрыскивают одинаковые капли жидкого азота, которые испаряются вниз по течению. Скорости газа и капель всюду равны между собой (их начальные значения $u_0=10$ м/с), стенки трубы не проводят тепла. Найти значения скорости, плотности и температуры потока после испарения всех капель, если их начальный секундный расход такой же, как и воздуха. Температура кипения жидкого азота при атмосферном давлении 77 К, удельная теплота парообразования $L=2\cdot10^5$ Дж/кг. Свойства газообразных воздуха и азота считать одинаковыми.*

массы), должна быть одинаковой:

$$(\rho+\rho')uS=(\rho_0+\rho_0')u_0S=\text{const}.$$

Здесь мы уже учли, что газ плотностью ρ и капли жидкости плотностью ρ' движутся с одинаковой общей скоростью; по условию задачи, $\rho_0'=\rho_0$.

По закону Бернулли (или второму закону Ньютона)

$$(\rho+\rho')uS\Delta u=-\Delta pS.$$

Оценим изменение давления Δp по трубе. По мере испарения капель плотность газообразной среды будет расти, температура потока падать, скорость уменьшаться (все это будет видно и в конце решения). Поэтому наибольшее изменение скорости составляет $|\Delta u|_{\max}=u_0$ (при условии полной остановки потока). Из полученных уравнений найдем

$$(\rho_0+\rho_0')u_0\cdot\Delta u=-\Delta p,$$

откуда

$$|\Delta p|_{\max}=(\rho_0+\rho_0')u_0^2\approx200\text{ Па}.$$

Таким образом, наибольшее возможное изменение давления на три порядка меньше атмосферного давления. Следовательно, можно считать давление постоянным вдоль потока. Тогда и температуру испаряющихся капель тоже можно считать постоянной (точно так же, как постоянна температура кипящего чайника при атмосферном давлении; только для жидкого азота эта температура равна 77 К). Далее, из закона Менделеева — Клапейрона и условия постоянства давления следует, что плотность и температура несущего газа обратно пропорциональны друг другу:

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{T_0}{T}.$$

Каждая единица массы вещества несет и энергию, состоящую из кинетической энергии хаотически движущихся молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. Если считать газ, несущий капли, идеальным, то его удельная энергия (энергия единичной массы) равна c_pT (для идеального газа энергия взаимодействия его молекул равна нулю; индекс p у теплоемкости указывает на постоянство давления). Эта же энергия для газообразной массы, только что испарившейся с капли температуры T', равна c_pT'; в конденсированном состоянии (в жидкой капле) она равна $c_pT'-L$, где L — удельная теплота испарения, в которую входит удельная потенциальная энергия взаимодействия молекул. Полная энергия вещества, пересекающего любое сечение трубы в единицу времени (поток полной энергии), одинакова:

$$c_pT\rho uS+(c_pT'-L)\rho'uS=\text{const}.$$

Здесь мы пренебрегли кинетической энергией макроскопического движения смеси $(\rho+\rho')(u^2/2)uS$, так как она существенно меньше тепловой ($u^2\ll c_pT$, $10^2\ll10^3\times\times300=3\cdot10^5$, где $c_p\approx10^3$ Дж/(кг·К)).

Можно еще связать плотность облака капель с их радиусом: $\rho'/\rho_0'=(r/r_0)^3$. Это позволит выразить все газодинамические параметры как функции от r/r_0:

$$\frac{u}{u_0}=\frac{1-\varepsilon_0 l}{1-\varepsilon_0 l(r/r_0)^3},\quad \frac{\rho}{\rho_0}=\frac{T_0}{T}=\frac{1+\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0(r/r_0)^3}\,\frac{u_0}{u},$$

где

$$l=\frac{L}{c_pT_0}-\frac{T_0'}{T_0},\quad \varepsilon_0=\frac{\rho_0'}{\rho_0}.$$

Согласно условию, $\varepsilon_0=1$, $l\approx 0{,}4$. После испарения капель $r/r_0=0$. Отсюда получим окончательно

$$\frac{u}{u_0}=1-l\approx 0{,}6\Rightarrow u\approx 6\ \text{м/с},$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{T_0}{T}=\frac{2}{1-l}\approx 3\Rightarrow \rho\approx 3\ \text{кг/м}^3,\ T\approx 100\ \text{К}.$$

А. Стасенко

Ф1235. *Длинная гирлянда составлена из одинаковых лампочек, подключенных к паре проводов на расстоянии 1 м друг от друга (рис. 1). Сопротивление 1 м провода составляет 0,2 Ом, лампочек в гирлянде 100. Какой ток потребляет гирлянда от источника напряжением 2,5 В?*
Увеличим напряжение источника на 0,1 В. На сколько увеличится мощность, переходящая в тепло в отрезках проводов, которые соединяют источник с первой лампочкой гирлянды?
Вольт-амперная характеристика лампочки приведена на рисунке 2.

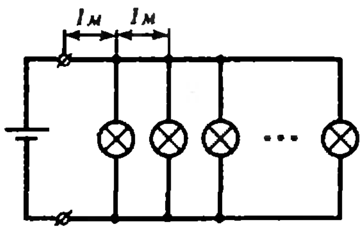


Рис. 1.

Широко известны задачи с бесконечными цепями из резисторов, однако в нашем случае все сложнее — ведь чем дальше лампочка от источника, тем меньше она накалена, а значит, и сопротивление ее меньше. Тем не менее при разумных упрощениях эту задачу можно решить не выходя за рамки школьной программы.

Во-первых, цепь эту все же можно считать бесконечной (сделайте оценку сами — только учтите уменьшение сопротивления «холодных» ламп). Во-вторых, ясно, что ток гирлянды во много раз больше тока одной лампы при том же напряжении; учтем это и в нужном месте воспользуемся для упрощения уравнений.

Найдем зависимость тока гирлянды I от приложенного к ней напряжения U. Для этого добавим еще одно звено между источником и гирляндой, а напряжение источника увеличим на ΔU, чтобы напряжение на гирлянде осталось прежним (рис. 3). Тогда

$$I(U+\Delta U)=I(U)+i(U),$$

где $i(U)$ — ток одной лампы при напряжении U. Сопротивление куска провода намного меньше, чем у нагретой лампы, поэтому величина ΔU мала, и изменение тока можно выразить через производную функции $I(U)$:

$$\Delta I=\frac{dI}{dU}\,\Delta U.$$

Но

$$\Delta U=r(I(U)+i(U))\approx rI(U),$$

поэтому можно записать

$$rI(U)\frac{dI}{dU}=i(U).$$

Левая часть этого равенства выражается через производную от квадрата величины $I(U)$:

$$rI(U)\frac{dI}{dU}=\frac{d(rI^2(U)/2)}{dU}.$$

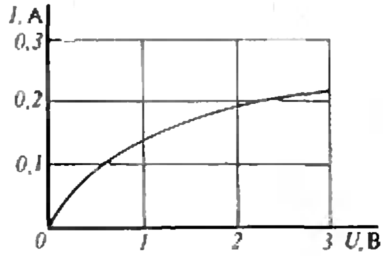


Рис. 2.

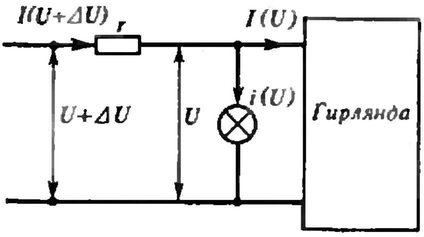


Рис. 3.

Итак, в левой части записана производная от некоторой функции, а справа — известная функция, график которой нам задан. Значит, эту «некоторую» функцию можно найти как интеграл от $i(U)$. Если график удастся заменить на подходящую функцию, заданную аналитически, то интеграл можно будет посчитать (см., например, решение задачи Ф1227, опубликованное в восьмом номере журнала). Но можно обойтись и без этого, тогда придется посчитать площадь под графиком $i(U)$ (см. рис. 2) от 0 до интересующего нас значения U. Обозначив эту площадь через $S(U)$, можно записать

$$I(U)=\sqrt{2S(U)/r}.$$

Для $U=2{,}5$ В и $r=0{,}2$ Ом получим $I=1{,}9$ А.

На второй вопрос задачи ответить легче — достаточно заметить, что та «некоторая» функция, которую мы искали (без множителя 1/2), это как раз мощность, выделяющаяся на проводах от источника до гирлянды. Ее производная — это $i(U)$, а значит, ее изменение при небольшом U выражается так:

$$P=2i(U)\Delta U=0{,}04 \text{ Вт}.$$

А. Зильберман,
И. Потеряйко

Ф1236. *Электромагнитное реле имеет обмотку индуктивностью 1 Гн с сопротивлением 10 Ом. Обмотка реле подключена к источнику напряжением 20 В последовательно с парой нормально замкнутых контактов, которые размыкаются при срабатывании реле. Параллельно обмотке реле включен диод, как показано на рисунке (см. с. 30). Ток срабатывания реле составляет 0,1 А, ток отпускания 0,09 А. Зачем может понадобиться такое устройство и для чего в нем используется диод? Рассчитайте параметры устройства. При каком минимальном напряжении источника оно может работать?*

После включения ток в катушке нарастает до величины $I_0=0{,}1$ А. Сопротивление цепи мало — даже при максимальном токе падение напряжения составит 1 В, поэтому для простоты можно считать нарастание тока линейным:

$$I=U_0t/L.$$

Когда ток достигнет 0,1 А, реле сработает, и контакт разомкнется. При этом ток потечет через открывшийся диод. Если бы сопротивление цепи было равно нулю, этот ток не уменьшался бы. Однако наличие напряжения на сопротивлении $r=10$ Ом (напряжение на катушке — это ЭДС индукции) приводит к постепенному падению тока — до величины $I_1=0{,}09$ А (тока отпускания реле), при котором контакт снова замкнется, и ток станет нарастать. ЭДС индукции при нарастании тока меняется от $U_0=I_0r=1$ В до $U_1=I_1r=0{,}9$ В. Видно, что изменение этого напряжения невелико, и для простоты можно считать его постоянным:

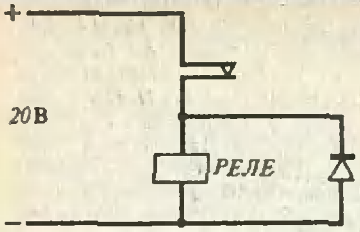
$$U_{ср}=0{,}95 \text{ В}.$$

При этом ток меняется по приблизительно линейному закону, и время падения его от I_0 до I_1 равно

$$t_1=L(I_0-I_1)/(rI_{ср})=0{,}01 \text{ с}.$$

Время нарастания тока от I_1 до I_0 определяется напряжением источника и составляет

$$t_2=L(I_0-I_1)/U\approx0{,}0005 \text{ с}.$$



Задачник „Кванта"

Полный период колебаний

$$T = t_1 + t_2 \approx 0{,}011 \text{ с.}$$

Минимальное напряжение, при котором схема будет работать в режиме колебаний, составляет 10 Ом · 0,1 А= =1 В (правда, при уменьшении напряжения сильно возрастает период колебаний).

Устройства такого рода применяются там, где нужен источник звука попроще (его называют «зуммер»). Например — в телефонных аппаратах.

Если бы в схеме не использовался диод, при размыкании цепи возникали бы довольно большие «выбросы напряжения». Наличие диода дает возможность катушке рассеивать энергию постепенно, не причиняя вреда другим элементам схемы.

З. Рафаилов

Ф1237. *Плосковыпуклая линза сделана из стекла с коэффициентом преломления $n=1{,}6$. Радиус сферической поверхности $R=10$ см, толщина линзы $d=0{,}2$ см. На плоскую поверхность параллельно главной оптической оси линзы направляют параллельный пучок и фокусируют его на экране, открыв только небольшую часть линзы около оси («задиафрагмировав» линзу). После этого диафрагму убрали. Найти диаметр пятна на экране.*

Пустим на плоскую грань линзы параллельный пучок вдоль главной оптической оси. Рассмотрим преломление произвольного луча из этого пучка и найдем расстояние от центра сферической поверхности до точки, где после преломления этот луч пересечет главную оптическую ось линзы (рис. 1):

$$x = R\sin\alpha/\operatorname{tg}(\beta-\alpha) = R\sin\alpha\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)/(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha),$$

$$\sin\beta = n\sin\alpha,$$

$$L(\alpha) = R\cos\alpha + x = R/(\cos\alpha - \sqrt{1/n^2-\sin^2\alpha}).$$

Из полученного выражения видно, что $L(\alpha)$ — монотонная функция угла α — при его возрастании расстояние убывает. Случай с диафрагмой соответствует совсем малому углу: $L(0)=F=R/(1-1/n)=26{,}7$ см. Максимальный угол α_{max} соответствует падению луча на край линзы. Из простых геометрических соображений

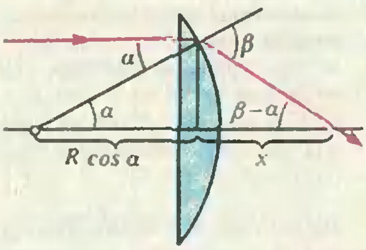


Рис. 1.

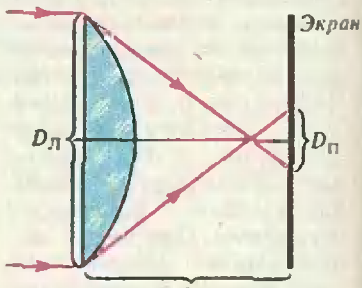


Рис. 2.

$\cos\alpha_{max} = 1-d/R = 0{,}98$, и $L(\alpha_{max}) = 25{,}8$ см.

Теперь из подобия (рис. 2) получим

$$D_п = D_л(L(0)-L(\alpha_{max}))/L(\alpha_{max}) = 2R\sin\alpha_{max}\cdot(L(0)-L(\alpha_{max}))/L(\alpha_{max}) = 0{,}13 \text{ см.}$$

Р. Александров

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1201—М1215, Ф1208—Ф1222, справились с задачами М1202, М1206, М1208, Ф1208—Ф1212, Ф1214, Ф1215. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Е. Агеев (Донецк) 01; *П. Андреева* (п. Черноголовка Московской обл.) 07, 13; *Д. Андриенко* (Киев) 04, 07, 11, 13, 15; *А. Ахмедов* (Баку) 05, 07, 15; *П. Байдаков* (Москва) 01; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) 07, 12, 14; *Е. Беркович* (Киев) 11; *Е. Бессонов* (Харьков) 07, 11; *А. Бобков* (Балаково) 11; *А. Богданов* (Старый Оскол) 01, 03, 07, 09, 10; *Д. Болдырев* (Черкесск) 01; *А. Бородин* (Донецк) 01, 03, 07, 11—13, 15; *В. Бринюк* (Донецк) 01, 07, 11; *К. Бродский* (Челябинск) 04, 05; *В. Бур* (Подгайцы) 07; *Ю. Бурдэ* (Пермь) 01, 07; *О. Валощук* (Гайворон) 03; *В. Ванак* (Дедовск) 07, 11; *Л. Василева* (Враца, НРБ) 07; *Н. Васильев* (Москва) 01; *С. Василькевич* (Киев) 01, 07; *Р. Велиев* (Баку) 07; *В. Видрашко* (Кушаны) 07; *В. Виташвили* (Тбилиси) 07; *М. Волошина* (Москва) 01; *К. Волченко* (Донецк) 01, 03, 04, 11—13, 15; *И. Выхристенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 01, 11; *О. Гайдай* (Львов) 07, 13; *М. Гельбанд* (Одесса) 07, 12, 14; *С. Гетун* (Киев) 03—05, 07, 11, 12, 14, 15; *С. Гнедков* (пгт Палатка Магаданской обл.) 07; *С. Голубчик* (Харьков) 11; *М. Гумбатов* (Мингечаур) 07; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 07; *А. Даниленко* (Волгоград) 15; *С. Дориченко* (Берегово Закарпатской обл.) 04; *В. Дубровнер* (Киев) 01, 07; *И. Егорова* (Ленинград) 03, 07, 11, 15; *Р. Елчуев* (Баку) 07; *Д. Жалковский* (Донецк) 11, 12; *С. Жарков* (Киев) 04; *А. Жеглов* (Москва) 07, 15; *О. Жеребцов* (Усинск) 07; *А. Задворный* (Киев) 07; *Е. Заморина* (Пермь) 01, 05; *Э. Заморина* (Пермь) 07; *А. Зимин* (Иваново) 07; *А. Зингер* (Москва) 01, 04; *Н. Ивченко* (Киев) 01, 03; *И. Изместьев* (пгт Суна Кировской обл.) 03, 04; *Р. Исмаилов* (Ленинград) 04, 12, 15; *Т. Калита* (Киев) 11, 13; *Г. Каминский* (Киев) 01; *С. Карачик* (Ташкент) 07; *И. Кацман* (Киев) 11; *И. Кириллов* (Усть-Каменогорск) 01, 07; *С. Ковациенко* (Виниица) 03, 05, 07, 11—15; *О. Ковылин* (Волгоград) 01; *А. Козачко* (Виниица) 03, 05, 07, 11—15; *А. Копылов* (п. Черноголовка Московской обл.) 01; *А. Корниенко* (Днепропетровск) 03, 07, 11, 15; *Ю. Креавич* (Киев) 07; *А. Криволуцкий* (Новосибирск) 12, 13; *А. Кудрявцева* (Киев) 07; *П. Купчик* (Козова) 07; *А. Лебедев* (Краснодар) 07; *М. Лейчкис* (Киев) 01, 07; *М. Ли* (Одесса) 11; *Ю. Литвинова* (Киев) 07; *М. Лоенко* (Павлодар) 04; *А. Львов* (Москва) 03, 05, 07; *М. Майлыбаев* (п. Черноголовка Московской обл.) 07; *А. Медведев* (Владимир) 01, 03, 04; *Б. Медник* (Днепропетровск) 01, 07; *К. Мильштейн* (Киев) 07, 11, 13—15; *К. Мишачев* (Липецк) 01, 03, 05, 07, 11—15; *И. Младенова* (София, НРБ) 07; *А. Мухаметшина* (Мамадыш) 04, 11; *Р. Мучник* (Винница) 03, 05, 07, 11, 13, 14; *И. Найденов* (София, НРБ) 07; *А. Насыров* (Обнинск) 01, 03, 05, 07, 11—13; *В. Некрашевич* (с. Крутые Горы Киевской обл.) 07; *Н. Немировская* (Киев) 11—13; *Д. Номировский* (Черкассы) 01, 03, 04, 07, 12, 13, 15; *М. Оруджев* (Махачкала) 07; *А. Осипов* (Свердловск) 07; *С. Павличков* (Евпатория) 07; *Т. Панов* (Киев) 01, 03—05, 07, 11, 12, 14, 15; *В. Пасхавер* (Киев) 01, 03—05, 07; *Е. Перельман* (Ленинград) 05, 07, 12, 14; *Т. Петренко* (Киев) 01; *В. Пиковский* (Киев) 07, 11, 13; *Э. Пикялите* (Вильнюс) 01; *М. Плотников* (Вологда) 04, 07, 11, 15; *А. Погребняк* (Киев) 01, 11—13; *Ю. Полонский* (Витебск) 01; *О. Полунина* (Омск) 01; *А. Разин* (Одесса) 01, 03, 07, 11—15; *М. Реачев* (Винница) 01; *Д. Рекалов* (Киев) 01, 07, 10, 11, 15; *А. Руденко* (Киев) 01, 03—05, 07; *Д. Русайтите* (Вильнюс) 01; *В. Рычков* (Куйбышев) 11, 15; *Л. Рябова* (Клин) 07; *А. Сафронов* (Томск) 07; *В. Севриновский* (Москва) 14; *Г. Сироткин* (Харьков) 07, 11, 13, 14; *А. Скороход* (Киев) 03, 07; *А. Солодов* (Воронеж) 01, 07, 12, 14; *А. Солодушкин* (Томск) 07; *И. Сперанский* (Донецк) 11—13, 15; *Р. Сульжик* (Киев) 07; *Т. Таран* (Фрунзе) 07; *С. Трегубенко* (Красногорск Московской обл.) 01, 07; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 01, 07, 11, 12; *М. Хасин* (Донецк) 01, 03—05, 07, 11—13, 15; *Ю. Хорошилов* (Челябинск) 01; *В. Швец* (пгт Новоднестровск Черновицкой обл.) 01; *А. Шилов* (Гусь-Хрустальный) 01, 07; *А. Шиндлер* (Феодосия) 01, 04; *Я. Шихов* (пгт Суна Кировской обл.) 07; *А. Шнайдман* (Киев) 01, 11, 13; *Д. Щукин* (Саратов) 01, 07, 09, 15; *О. Яцун* (Киев) 07.

Физика

А. Абдираимов (с. Момбеково Ошской обл.) 20; *А. Абдримов* (Шават) 13; *В. Ажаев* (Москва) 13, 16; *Т. Али-заде* (Баку) 16, 17; *Д. Андриенко* (Киев) 13, 21, 22; *О. Андрухов* (Ровно) 16; *С. Атанасян* (Ленинград) 18; *Я. Бабкин* (Киев) 13; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 13, 21, 22; *М. Барашков* (д. Осиновка Могилевской обл.) 13, 20; *Б. Барышников* (Новгород) 17; *Р. Богачкин* (Москва) 18, 21; *А. Богданов* (Старый Оскол) 16; *В. Болховитин* (Караганда) 20; *В. Бондаренко* (Кузнецовск) 16, 21; *А. Борковский* (пгт Богородчаны Ивано-Франковской обл.) 18, 20, 21; *В. Ванчурин* (Москва) 16; *Л. Васильев* (Салават) 16, 18, 21; *Г. Вейтас* (Вильнюс) 13, 22; *И. Воскобойников* (Киев) 13, 16—18, 21, 22; *Г. Выгон* (Москва) 13, 16; *К. Галичский* (Северодвинск) 13, 16—18, 20—22; *М. Гатаулин* (Тюмень) 16; *А. Гвозденко* (Нежин) 16; *А. Гледзер* (Одинцово) 21; *С. Головко* (Горловка) 17; *П. Гребнев* (Кузнецовск) 16, 21; *Н. Гуляев* (Горький) 13, 16—19, 21; *Ю. Гуц* (Ровно) 16; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 13, 17, 20; *А. Деев* (Тула) 21; *А. Дементьев* (Чебоксары) 13, 16, 18, 20, 21; *А. Демяненко* (Горловка) 21; *И. Денисов* (д. Осиновка Могилевской обл.) 13, 20, 21; *С. Джосюк* (Винница) 13, 16, 17; *С. Диброва* (Киев) 13, 16—18, 21, 22; *Р. Димитров* (Варна, НРБ) 13, 17; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 13, 16, 21; *А. Дубовик* (Брест) 13, 21; *М. Дьяк* (Владимир) 16—18, 21, 22; *М. Егоров* (Старый Оскол)

16; *И. Егорова* (Ленинград) 13, 16, 17, 21, 22; *Н. Ефремов* (Свердловск) 22; *А. Жуков* (Воронеж) 21; *Д. Жуковский* (Брест) 13; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 16, 21; *А. Задворнов* (Киев) 13; *А. Затворнов* (Киев) 13; *Д. Ибрагимов* (Черновцы) 16; *Н. Ивченко* (Киев) 20, 21; *И. Ильина* (Алма-Ата) 13; *Т. Калита* (Киев) 13, 16, 21; *К. Калюжный* (Одесса) 13, 21, 22; *Л. Катин* (Москва) 16; *И. Кацман* (Киев) 13, 17, 18, 21, 22; *А. Каширин* (Старый Оскол) 16; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 13, 16, 17, 21, 22; *С. Коваль* (Гомель) 13, 16, 17, 21, 22; *Б. Ковтуненко* (Запорожье) 13, 16, 18, 20—22; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 13, 16, 18, 21; *В. Кордюк* (Киев) 18, 22; *Д. Коротков* (Астрахань) 13; *С. Котковский* (Черновцы) 13, 16; *Ю. Крвавич* (с. Княжполь Львовской обл.) 13; *Э. Криворотько* (Чехов Московской обл.) 21; *А. Кротов* (Новомосковск Тульской обл.) 13; *А. Кузнецов* (Жуковский) 13; *Ю. Кузьма* (Протва) 13, 16, 20—22; *С. Кузьменко* (Киев) 18, 21; *П. Куприн* (Северодвинск) 18; *П. Купчик* (Козова) 13; *А. Куранов* (Москва) 13, 16; *М. Лазарев* (пгт Никель Мурманской обл.) 13, 16; *В. Легостаев* (Кустанай) 13, 20; *С. Лемешко* (Харьков) 21; *Д. Логинов* (Тула) 16, 21; *А. Лозовой* (Вольск) 13, 16, 21; *А. Ляпин* (Нальчик) 13, 18, 20—22; *В. Макаров* (Кировское Донецкой обл.) 13, 16; *Ю. Маравин* (Евпатория) 16, 18; *М. Махмудов* (Исфара) 13; *Н. Мацко* (Киев) 13, 16, 17, 21; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 13, 16, 21; *В. Мирошниченко* (Пенза) 13, 16, 21; *О. Михайлова* (Москва) 21; *С. Музыка* (Канев) 21; *С. Мурин* (Брест) 13; *Ю. Мусатенко* (Киев) 13; *А. Нежуренко* (Киев) 13, 16—18, 21, 22; *М. Немировский* (Одесса) 21; *И. Нестеренко* (Старый Оскол) 16; *И. Николаенко* (Армавир) 21; *Б. Овсицер* (Северодвинск) 13, 18, 21; *Н. Овчинников* (Одесса) 21; *В. Оганесян* (Ростов-на-Дону) 16, 21; *Ю. Пайвин* (Харьков) 21; *Д. Пастухов* (Витебск) 18, 19; *Д. Пастырнов* (Витебск) 17; *В. Писляков* (Тверь) 21; *А. Пищальченко* (Старый Оскол) 13, 16, 17; *А. Погребняк* (Киев) 13; *И. Полищук* (Москва) 16, 21, 22; *С. Польгуль* (Винница) 13, 16; *С. Польшин* (Харьков) 13, 17; *В. Попов* (Ростов-на-Дону) 19, 21; *А. Потапов* (Саратов) 13, 16—18, 21, 22; *Д. Потишко* (Харьков) 13, 21; *И. Рассказов* (Брест) 13; *Г. Рубаненко* (Артемовск Донецкой обл.) 13, 17, 19, 21; *А. Рыбалочка* (Киев) 16; *Н. Савельев* (Кузнецовск) 22; *А. Сафронов* (Томск) 13; *Р. Сеннов* (Москва) 13, 21; *Т. Силантьев* (Волгоград) 21, 22; *Д. Скотников* (Владимир) 16, 17, 21, 22; *А. Смирнов* (Москва) 13, 21; *О. Смирнов* (Тихвин) 13, 16, 20; *А. Снежко* (Киев) 13, 16—18, 21, 22; *А. Солодушкин* (Томск) 13; *Ю. Спектор* (Киев) 21; *А. Столповская* (Днепрорудный Запорожской обл.) 13; *Д. Субботин* (Москва) 16, 22; *Д. Супрун* (Минск) 16; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 13, 16, 20—22; *М. Тищенко* (Старый Оскол) 16; *Э. Токтогулов* (Фрунзе) 16; *М. Томилко* (Брест) 13; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 13, 16, 20—22; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 13, 16, 20—22; *Е. Трубач* (Москва) 13; *В. Тыртычко* (Кустанай) 13, 20; *К. Фотев* (София, НРБ) 17, 21; *Р. Храбров* (Северодвинск) 13, 16, 18, 20, 21; *Д. Чернов* (Киев) 13; *В. Чернявский* (Павлодар) 20; *А. Чирихин* (Жуковский) 13; *А. Чистый* (Брест) 13; *С. Чунахин* (Ростов) 19, 21; *Е. Шагаров* (Москва) 13, 16; *Е. Шагаров* (Грозный) 21; *Г. Шаповалов* (Киев) 13, 16, 18, 21, 22; *С. Шаракин* (Солнгорск) 13, 16, 21, 22; *И. Шашков* (Киев) 13, 16; *С. Шинкевич* (Березники) 13, 16—18, 21; *А. Шпагин* (Мариуполь) 17, 21; *Д. Шуваев* (Колтуши) 13; *И. Шуляк* (Киев) 16, 20, 21; *К. Шурупов* (Куйбышев) 16, 17, 21; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 13, 17; *А. Юдин* (Москва) 18; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 16, 21; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 16; *А. Яремчук* (Артемовский) 16.

Информатика и программирование

Всесоюзный конкурс «Юный программист»

Ассоциация учителей информатики, Главное управление народного образования Красноярского крайисполкома, Центр НТТМ «Спец» проводят конкурс «Юный программист» на лучшую программу, созданную школьниками для детей младшего возраста.

На конкурс принимаются клавиатурные тренажеры, демонстрационные, обучающие, контролирующие программы по предметам, исполнители, игровые программы и т. д., пригодные для использования в 1—6 классах.

При разработке программ следует ориентироваться на школьные персональные ЭВМ.

Победителей ждут призы: радиоприемники, фотоаппараты, часы, библиотечки литературы по информатике, персональные приглашения в летние школы по программированию.

Для участия в конкурсе необходимо до 1 февраля 1991 года прислать следующие материалы: заявку (по приведенному образцу) и подробный сценарий программы. Сценарий должен содержать основные идеи и покадровое описание программы.

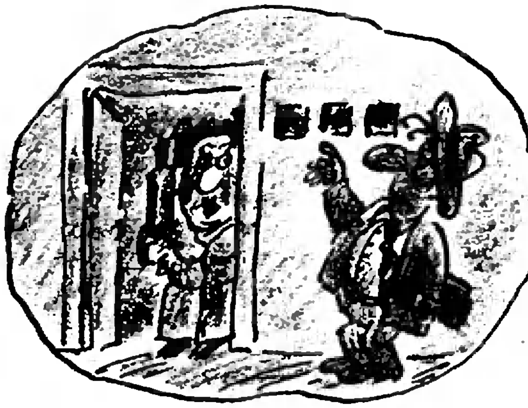
Заявка

Ф. И. О.
Домашний адрес
Номер и адрес школы (СПТУ)
Класс
Тип машины
Язык программирования
Название программы (кому и для чего предназначена)
Объем программы
Среднее время работы программы
Ф. И. О. учителя информатики (руководителя кружка, преподавателя УПК), оказавшего помощь в работе над программой, обучении программированию

Авторы отобранных по итогам конкурса сценариев работ будут приглашены в г. Красноярск в конце марта 1991 г. для участия в заключительном туре конкурса.

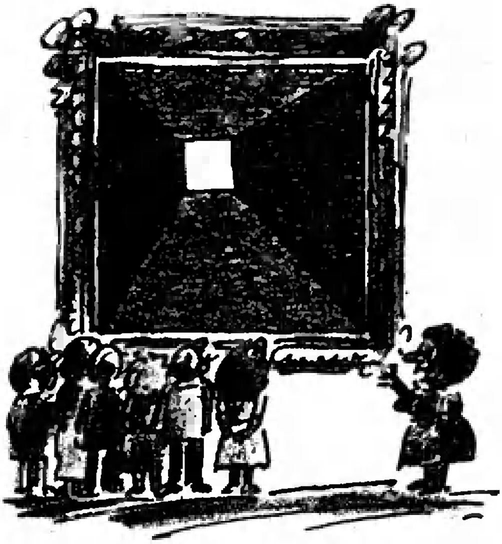
Материалы на конкурс направляйте по адресу: 660051, г. Красноярск, а/я 11553,
Оргкомитет конкурса «Юный программист».

Задачи



1. Найдите все такие простые числа p, что числа $p+2$ и $p+4$ — тоже простые.

2. В одной комнате находятся три выключателя, а в другой — три лампочки. Каждый выключатель обслуживает одну из лампочек. Как узнать, какой выключатель связан с какой лампочкой, если в комнату с лампочками можно войти лишь один раз?



3. Одно четырехзначное число составлено из последовательных цифр, расположенных в порядке возрастания, второе число составлено из тех же цифр, но в порядке убывания, третье четырехзначное число также составлено из этих четырех цифр. Что это за числа, если их сумма равна 12 300?

4. Внутри квадрата расположен меньший квадрат. Вершины квадратов соединены так, как показано на рисунке. Докажите, что сумма площадей синих четырехугольников равна сумме площадей красных четырехугольников.

5. Кооперативом была куплена партия товара и продана с прибылью в m рублей. На вырученные деньги была куплена другая партия того же товара и продана по прежним ценам; при этом прибыль составила n рублей. Сколько было уплачено за первую партию товара?

Эти задачи нам предложили И. Клумова, А. Зильберман, А. Абдурахманов, В. Произволов, последняя задача взята из книги Н. А. Шапошникова и Н. К. Вальцева «Сборник задач по математике» (М., Учпедгиз, 1931 г.)

ЧЕГО БОЛЬШЕ?

Кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

Моей дочке Маше семь с половиной лет, и она учится во втором классе. Маша любит разговаривать о математике. Обычно мы с ней решаем задачи вроде тех, что публикуются в «Кванте» для младших школьников». А несколько дней назад у нас с ней произошел довольно серьезный разговор. Мы шли в спортивную школу (Маша занимается теннисом), и она рассказывала, что они проходят по русскому языку.

— Угадай, чего больше: слов или окончаний? — спросила Маша.

— Конечно, слов, ведь у разных слов бывают одинаковые окончания,— ответил я (напомню, что у слов бывают и «пустые» окончания). И тут мне показалось, что самое время поговорить о математике.

— Теперь ты скажи, чего больше: четных чисел или нечетных?

— Нечетных,— сразу ответила Маша (она всегда отвечает сразу, хотя не всегда верно).— Потому что первое число, единица,— нечетное (для Маши числа — это 1, 2, 3, 4,... Она уже давно знает, что самого большого числа нет — ведь всегда можно увеличить число на 1).

— А на сколько больше нечетных чисел? — спросил я.

— Конечно, на одно.

— Значит, если убрать эту единичку, то станет поровну? — не отставал я. Тут Маша задумалась.

— Нет, если убрать единицу, первым числом будет два, а оно — четное. Теперь четных стало больше. Странно...

— Ничего странного,— сказал я,— потому что четных и нечетных чисел — поровну. Построим их парами — как вы ходили в детском саду. Нечетные — это мальчики, а четные — девочки. Вот так: 1—2, 3—4, 5—6, 7—8,... Теперь видишь, что их поровну?

— Теперь вижу,— сказала Маша.

— Тогда скажи, чего больше: всех чисел или четных?

Тут уж никаких сомнений быть не могло:

— Конечно, всех чисел больше.

— А вот и нет, их тоже поровну. Только пары будут другие: 1—2, 2—4, 3—6, 4—8, 5—10,... Понятно?

— Понятно,— сказала она. Для проверки я спросил, какое число стоит в паре с 98. Эта задача была не очень простой: умножать и делить на 2 «в уме» Маша умеет не очень хорошо.

— Вот так: и четных чисел, и всех чисел — бесконечно много, но их поровну,— подвел я итог разговору. Но оказывается, наш разговор только начинался.

— И так всегда будет? — спросила Маша.

— Нет,— ответил я,— например, точек на отрезке больше, чем (натуральных) чисел.

— А почему?

— Ну, это — очень сложно, и ты вряд ли поймешь...

— А вдруг пойму?

И я решил попробовать.

— Рассуждение состоит из двух частей,— начал я,— сначала нужно всем точкам отрезка дать имена.

— А будет точка, которую зовут Маша?

— Нет, в каждом имени будут использованы только две буквы.

— Пусть это будут буквы «И» и «Л»,— попросила Маша.— Это мои любимые буквы.

— Хорошо,— согласился я. У каждой точки будет бесконечно длинное имя, составленное из букв «И» и «Л». Например,

ИИИИИИИИИИ... или
ИЛИЛИЛИЛИ...

А у некоторых точек будет даже не одно, а два имени.

— Как Кристофер Робин в «Винни-Пухе»?

— Да, примерно так.

— А как узнать, как зовут каждую точку?

— Очень просто,— ответил я.— Вот у тебя есть точка. Раздели отрезок пополам. Точка попадет или в левую, или в правую половину. Если точка — в левом отрезке, то первая буква ее имени «Л», а если — в правом, то «И». Потом тот из двух отрезков, в котором лежит точка, снова разделим пополам. И опять посмотрим, в какой половине лежит точка: в левой или правой. Если в левой, то вторая буква ее имени — «Л», а если в правой, то — «И». И так далее...

— Что значит «и так далее»?

— Значит следующий отрезок снова делим пополам и узнаем третью букву имени нашей точки, потом — четвертую, потом — пятую... Понятно?

— Не очень,— ответила Маша.— А что делать, если точка попала ровно в середину какого-то отрезка?

— Вот у таких точек и будет по два имени. Середина отрезка — она лежит и в его левой половине, и — в правой. Если считать, что середина лежит в левой половине, то очередная буква ее имени будет «Л». Зато потом эта точка все время оказывается справа, так что ее имя кончается на одни буквы «И»:

... ЛИИИИИИИИИИИИ...

А если считать, что середина отрезка лежит в его правой половине, то очередная буква имени точки будет «И». Зато потом будут уже одни буквы «Л». Вот так:

... ИЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛ...

Понятно?

— Теперь, кажется, понятно — сказала Маша.

— А если понятно, скажи: какую точку зовут

ЛЛЛЛЛЛЛЛЛ...?

Как обычно, Маша ответила быстро (и на этот раз правильно):

— Это левый конец отрезка.

— Верно: а какую точку зовут

ЛИИИИИИИИИ...?

На этот вопрос Маша тоже ответила, хотя и с трудом. Ответьте и вы, а также подумайте, какие точки зовут

ИЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛ...
и ИЛИЛИЛИЛИЛИ...

— А зачем точкам имена? — спросила Маша.

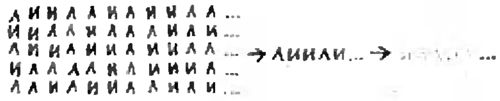
— Об этом поговорим на обратном пути,— мы уже подходили к спортивной школе.— А пока подведем итог: у каждой точки есть одно или два имени, составленные из букв И и Л, и наоборот — каждому такому имени отвечает какая-нибудь точка отрезка.

...— Так зачем же точкам имена? — оказывается, Маша не забыла наш разговор.

— Чтобы объяснить, почему точек больше, чем (натуральных) чисел. Представь себе, что точки отрезка можно перенумеровать. Какая-то точка будет первой, какая-то — второй, ..., какая-то — сотой и так далее.

— Понятно,— сказала Маша. Она уже знала, что значит «и так далее».

— Возьмем большой-большой лист бумаги и станем записывать имена всех точек — по одному имени в строке. Сначала — имя первой точки. Затем — второе имя первой точки, если оно у нее есть, или имя второй точки. Потом — третьей,



четвертой и так далее. А теперь внимание! Сейчас я составлю имя точки, которого в этой таблице нет. Возьмем первую букву первого имени, вторую букву второго имени, третью букву — третьего и так далее, и составим из них новое имя (на рисунке эти буквы — красные). Теперь поменяем все буквы: «И» — на «Л», а «Л» — на «И». Получится новое имя (на рисунке оно синее). Как ты думаешь, это имя есть в нашей таблице?

— Не знаю, ведь таблица такая большая...

— Может быть, оно стоит в первой строчке?

Маша задумалась:

— Нет, ведь у него другая первая буква.

— А во второй?

— Тоже нет, ведь у него другая вторая буква. Все понятно! И в третьей — не может, и в четвертой... Его вообще нет в нашей таблице имен.

— Вот именно,— подтвердил я,— этого имени в таблице нет. Значит, точка, которая носит это имя, должна была остаться без номера. Поэтому точек на отрезке больше, чем (натуральных) чисел!

Мы проговорили еще несколько минут. Я рассказал Маше о немецком математике Георге Канторе, который придумал все это примерно 100 лет назад. И о том, что обычно об этом рассказывают не ученикам второго класса, а студентам математических факультетов университетов. Я сказал, что, по-моему, это очень красивое рассуждение. С этим Маша не согласилась:

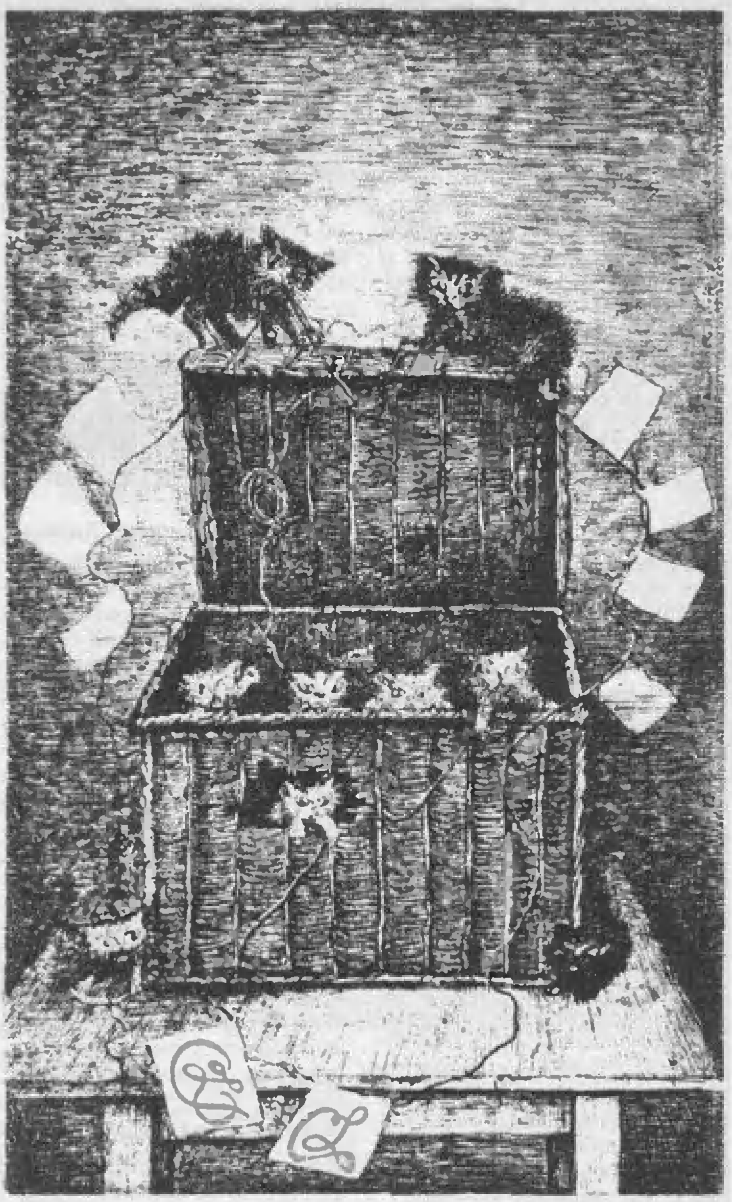
— Красивой может быть прическа или платье, а не математическое рассуждение.

Но я думаю, что в этом она ошибается.

Льюис Кэрролл и его задачи

Друг мой! Знаешь ты уже
Вычитанье и сложе-,
Умноженье и деленье
Просто всем на удивленье.
Так дерзай! Пусть славы эхо
О твоих гремит успехах.
Станешь ты, хоть скромен вид,
Знаменитей, чем Евклид!

Эпиграф к «Истории с узелками» Льюиса Кэрролла



Некоторые читатели «Алисы в Стране Чудес» и «Зазеркалья» ошибочно полагают, будто знают все, решительно все, что только можно знать о Стране Чудес, Зазеркалье и их создателе Льюисе Кэрролле. Тот, кто так думает, глубоко заблуждается. Множество интереснейших и весьма глубоких вещей остается скрытым от торопливого и поверхностного взгляда.

Взять хотя бы задачи. Их *Льюис Кэрролл за свою жизнь* придумал великое множество: арифметических, геометрических, логических, физических, лингвистических и т. п. Даже к выбору своего псевдонима он подошел как к задаче, которую решил с присущим ему блеском и выдумкой: взял свои подлинные имена (Charles Lutwidge), «перевел» на латынь (получилось Carolus Ludovicus), переставил (получилось Ludovicus Carolus) и, наконец, «перевел» снова на родной английский (получился Lewis Carroll).

Кэрролл любит разыгрывать читателя, задавая, казалось бы простые, но каверзные вопросы. До сих пор не утихают споры о том, куда будет двигаться груз в «обезьяньей задаче» (обезьяна начинает взбираться по свободному концу перекинутого через блок каната, к другому концу которого прикреплен груз, в точности равный весу обезьяны; будет ли груз подниматься, опускаться или останется на месте?), или верен ли закон Архимеда для ведерка, плавающего внутри другого ведерка, если воды в том едва на донышке.

Множество самых различных задач искусно вплетены в ткань повествования «Алисы» и «Зазеркалья». Лишь некоторые из них расшифрованы в комментариях Мартина Гарднера. Большинство же ожидает своего открывателя. Только с возникновением структурной лингвистики, семантики, семиотики и других новых наук были по достоинству оценены некоторые из «причуд» (как казалось некогда) Кэрролла, например, его лингвистические опыты. Вспомним хотя бы знаменитого «Бармаглота»: «Варкалось. Хливкие шорьки»...

Ю. Данилов

Иллюстрации Ю. Ващенко взяты из книги Л. Кэрролла «История с узелками».

Редакция отобрала некоторые из наиболее интересных, с ее точки зрения, задач Кэрролла и предлагает их вашему вниманию.

Задачи

1. Два путешественника выходят из гостиницы в 3 часа дня и возвращаются в нее в 9 часов вечера. Маршрут их проходит то по ровному месту, то в гору, то под гору. По ровному месту путешественники идут со скоростью 4 мили в час, в гору — со скоростью 3 мили в час и под гору — со скоростью 6 миль в час. Найти расстояние, пройденное путешественниками с момента выхода из гостиницы до момента возвращения, а также (с точностью до получаса) момент восхождения на вершину горы.

2. Два путешественника садятся на поезда, идущие в противоположных направлениях по одному и тому же замкнутому маршруту и отправляющихся в одно и то же время. Поезда отходят от станции отправления каждые 15 минут в обоих направлениях. Поезд, идущий на восток, возвращается через 3 часа, поезд, идущий на запад,— через 2. Сколько поездов встретит каждый из путешественников в пути (поезда, которые отбывают со станции отправления и прибывают на нее одновременно с поездом, которым следует путешественник, встречными не считаются)?

3. Путешественники следуют по тому же маршруту, что и раньше, но начинают считать встречные поезда лишь с момента встречи их поездов. Сколько поездов встретится каждому путешественнику?

4. Имеются 5 мешков. Первый и пятый мешки вместе весят 12 фунтов, второй и третий — $13^1/_2$ фунтов, третий и четвертый — $11^1/_2$ фунтов, четвертый и пятый — 8 фунтов, первый, третий и пятый — 16 фунтов. Требуется узнать, сколько весит каждый мешок.

5. В начале года у каждого из братьев *А* и *В* было по 1000 фунтов стерлингов. Через год братья в своем письме губернатору Кговджни уведомляют его, что в день отправления письма они, как никогда, близки к 60 000 фунтов стерлингов. Каким образом им это удалось?

6. Стакан лимонада, 3 бутерброда и 7 бисквитов стоят 1 шиллинг 2 пенса. Стакан лимонада, 4 бутерброда и 10 бисквитов стоят 1 шиллинг 5 пенсов. Найти, сколько стоят: 1) стакан лимонада, бутерброд и бисквит; 2) 2 стакана лимонада, 3 бутерброда и 5 бисквитов.

7. 70 процентов инвалидов потеряли глаз, 75 процентов — ухо, 80 процентов — руку и 85 процентов — ногу. Каков наименьший процент ветеранов, лишившихся одновременно глаза, уха, руки и ноги?

8. Некогда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего сына. Через несколько лет сумма возрастов стала равна удвоенному возрасту третьего сына. Когда число лет, прошедших с тех пор,

когда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего, составит $^2/_3$ от суммы возрастов всех трех сыновей, третьему сыну исполнится 21 год. Сколько лет будет двум другим сыновьям?

9. Найти общую формулу для двух рациональных чисел, сумма квадратов которых равна 2.

10. В данный остроугольный треугольник вписать треугольник, стороны которого (при каждой из его вершин) образуют равные углы со сторонами данного треугольника.

11. Несколько человек сидят по кругу так, что у каждого из них имеется по одному соседу справа и слева. Каждый из сидящих располагает определенным количеством шиллингов. У первого на 1 шиллинг больше, чем у второго, у второго на 1 шиллинг больше, чем у третьего, и т. д. Первый из сидящих отдает 1 шиллинг второму, второй — 2 шиллинга третьему и т. д. Каждый отдает следующему на 1 шиллинг больше, чем получил сам, до тех пор, пока это возможно. В результате у одного из сидящих шиллингов оказывается в 4 раза больше, чем у его соседа. Сколько всего было людей и сколько шиллингов было сначала у самого бедного из них?

12. Доказать, что утроенную сумму трех квадратов можно представить в виде суммы четырех квадратов.

13. Пусть ε, α и λ — правильные дроби, и пусть в некотором госпитале ε-я доля всех пациентов потеряла глаз, α-я — руку и λ-я— ногу. Чему равна наименьшая доля пациентов, лишившихся одновременно глаза, руки и ноги?

14. Доказать, что сумму квадратов двух различных чисел, умноженную на сумму квадратов двух различных чисел, можно представить в виде суммы квадратов двух чисел двумя различными способами?

15. 1 июля, когда на моих карманных часах было 8 ч утра, стенные часы показывали 8 ч 4 мин. Взяв с собой карманные часы, я отправился в Гринвич и обнаружил, что, когда они показывали полдень, точное время в действительности было равно 12 ч 5 мин. Вечером того же дня, когда на моих карманных часах было ровно 6 ч, стенные часы показывали 5 ч 59 мин.

30 июля в 9 ч утра по моим карманным часам стенные часы показывали 8 ч 57 мин. В Гринвиче, когда мои карманные часы показывали 12 ч 10 мин, точное время было 12 ч 5 мин. Вечером того же дня карманные часы уже показывали 7 ч, когда на стенных еще было 6 ч 58 мин.

Карманные часы я завожу лишь при поездке в Гринвич. В течение суток они идут равномерно. Настенные часы идут всегда, причем идут равномерно.

Каким образом мне узнать, когда наступает полдень (по *точному* времени) 31 июля?

66. Два пешехода A и B пускаются в путь ровно в 6 ч утра в один и тот же день. Оба идут по одной дороге и в одном направлении. Пешеход B сначала опережает пешехода A на 14 миль. Оба идут с 6 утра до 6 вечера. В первый день пешеход A, двигаясь с постоянной в течение дня скоростью, проходит 10 миль, во второй — 9, в третий — 8 миль и т. д. Пешеход B, двигаясь также с постоянной в течение дня скоростью, проходит в первый день 2 мили, во второй — 4, в третий — 6 и т. д. Где и когда пешеход A нагонит пешехода B?

Подобно живым цветам, задачи Кэрролла утрачивают естественную окраску и аромат, если срывать их небрежной рукой. Их красота выигрывает от естественного обрамления — кэрролловского текста. Поэтому тем, кто захочет самостоятельно оценить творчество Кэрролла-проблемиста, советуем обратиться к его замечательным книгам.

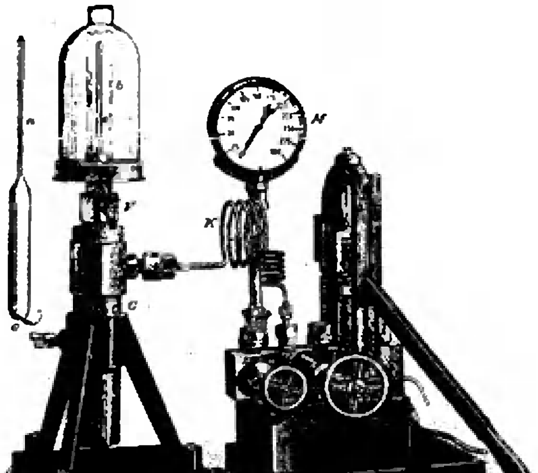
Калейдоскоп „Кванта"

Если бы на поверхности земного шара царствовала очень высокая температура, какая, без сомнения, существует внутри него, то все воды океанов были бы в виде пара в атмосфере и не имелось бы ни одной капли в жидком состоянии.

С. Карно

А так ли хорошо знакомы вам

пары́ ?

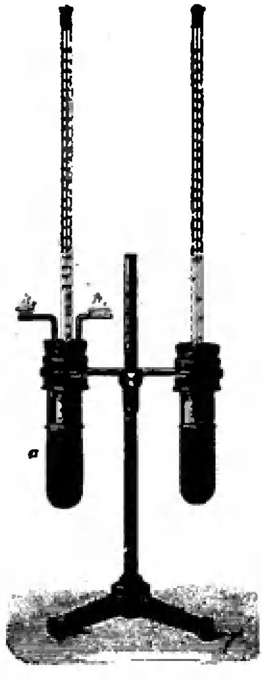


Живительные дожди и бегущие облака, стелящиеся туманы и изящные снежные кристаллы — за все это отвечают водяные пары́. Влагооборот — один из основных погодообразующих факторов, а как мы все зависим от него, нам ежедневно напоминают метеосводки, сообщающие о влажности воздуха.

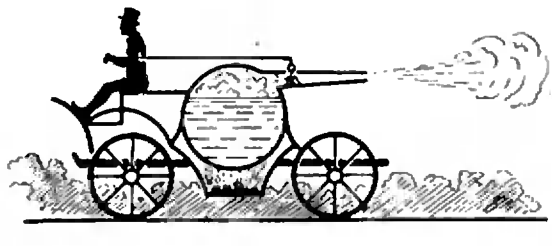
Спортсмены и гляциологи, конструкторы паровых котлов и тепловых машин, летчики и моряки, даже хозяйки, развешивающие белье для просушки,— всем так или иначе нужны точные знания о пара́х или хотя бы результаты измерений и наблюдений над ними. Вот и мы предпримем сейчас несколько попыток разобраться с пара́ми как с объектами физического исследования.

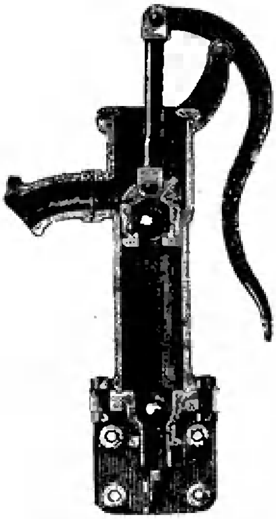
Вопросы и задачи

1. Почему капля воды, попав на раскаленную плиту, начинает на ней прыгать?
2. При каких условиях рост абсолютной влажности воздуха может сопровождаться уменьшением относительной влажности?
3. В какое время суток летом относительная влажность воздуха больше при одной и той же абсолютной влажности?
4. Высокая температура воздуха в пустынных местностях переносится сравнительно легко из-за низкой влажности. Почему жару гораздо труднее переносить при высокой влажности?
5. Отчего вокруг сохраняющихся весной на полях отдельных снежных сугробов запас воды в почве больше, чем вдали от них?
6. На улице целый день моросит холодный осенний дождь. В комнате развешено выстиранное белье. Высохнет ли оно быстрее, если открыть форточку?
7. Можно ли всасывающим водяным насосом поднять кипящую воду?
8. Какими способами ненасыщенный пар можно обратить в насыщенный?
9. Когда возможно повышение плотности вещества с ростом температуры?



10. Жидкость налита в сообщающиеся сосуды разных диаметров. Широкий сосуд закрывают пробкой. Изменится ли распреде-





ление уровней жидкости в коленах сосуда?

11. В цилиндре под поршнем находится насыщенный водяной пар без воздуха. Будет ли этот пар «пружинить» при сжатии?

12. Бутылку из пластмассы на 9/10 ее объема заполнили кипятком и закрыли пробкой. Если воду в бутылке встряхнуть, пробка может вылететь. Почему?

13. Отчего осенью после восхода солнца туман над рекой держится дольше, чем над сушей?

14. Осадки начинаются потому, что в облаках более крупные капельки растут за счет более мелких. Как объяснить это явление?

Микроопыт

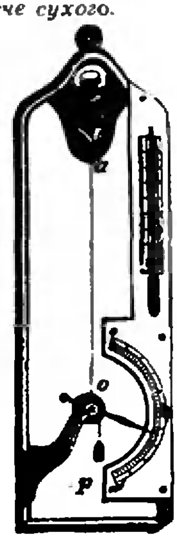
В двух одинаковых чайниках, поставленных на одинаковые горелки, кипит вода. У одного чайника крышка часто подпрыгивает, а у другого неподвижна. Почему?

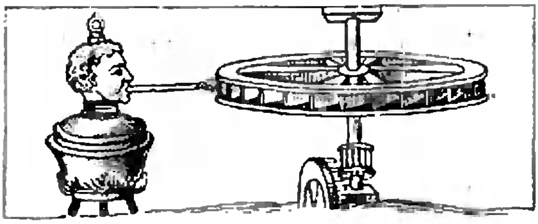
Любопытно, что...

...если бы прекратился круговорот воды в природе, за год с поверхности Мирового океана испарился бы слой воды толщиной около 1,1 метра.

...если очень чистый пар не соприкасается с жидкостью, то удается получить переохлажденный, или пересыщенный, пар — пар, которому давно следовало бы уже стать жидкостью. Именно такой пар используется в камере Вильсона для регистрации заряженных частиц.

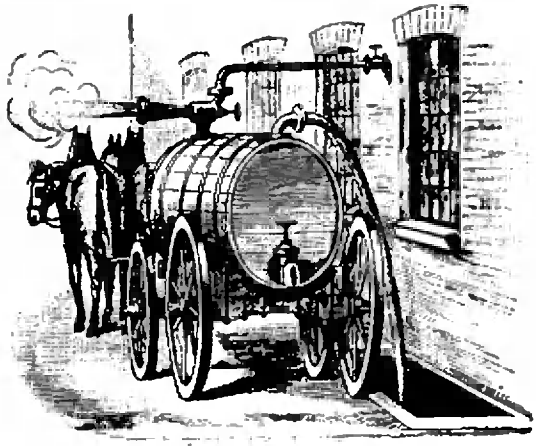
...первый волосяной гигрометр был создан в 1783 году швейцарским геологом Горацием де Соссюром. В том же году Соссюр опубликовал статью, в которой доказал, что при одних и тех же температуре и давлении влажный воздух легче сухого.





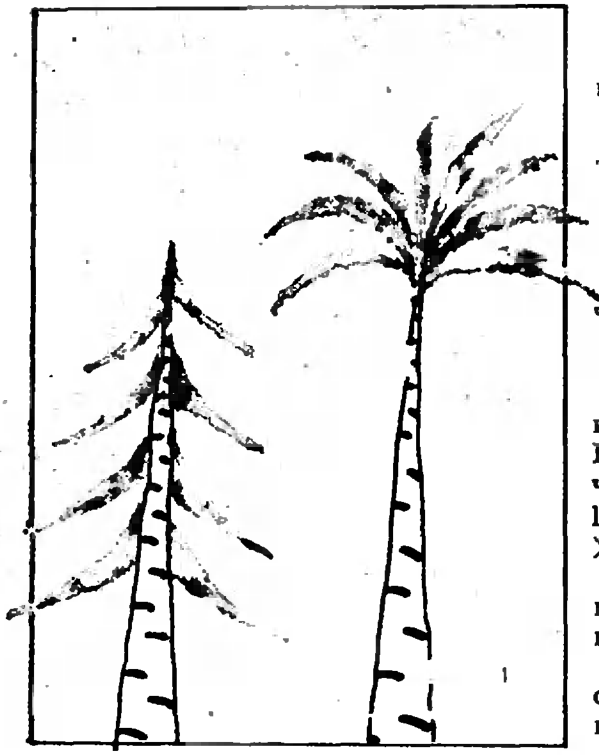
...в 1880 году шотландский морской инженер Джон Айткен открыл, что конденсация водяного пара при образовании тумана, облаков и дождя происходит на определенных микроскопических частицах, таких, как морская соль, мельчайшие пылинки и т. д. На этом открытии основаны некоторые современные работы по искусственному вызыванию дождя.

...современный прибор для определения количества водяного пара в воздухе — инфракрасный гигрометр,— способный работать в условиях, когда все другие приборы практически непригодны, основан на сравнении потоков инфракрасного излучения двух волн разной длины, проходящих через слой воздуха. Одна из волн поглощается водяным паром, другая — нет.



Что читать в «Кванте» о пара́х (публикации последних лет)

1. «Газ превращается в жидкость» — 1984, № 11, с. 25;
2. «Приглашение в парную» — 1985, № 8, с. 18;
3. «Наблюдения над туманом» — 1986, № 12, с. 13;
4. Калейдоскоп «Кванта» — 1987, № 3, с. 40;
5. «Кипение жидкостей» — 1987, № 6, с. 39;
6. «Пока чайник не закипел...» — 1987, № 8, с. 9;
7. «Парообразование. Свойства паров» — 1988, № 6, с. 61;
8. «История росинки» — 1988, № 7, с. 24;
9. «Простые опыты с кипятком» — 1988, № 8, с. 48;
10. «Правило фаз Гиббса» — 1989, № 2, с. 23.



Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Некоторые полезные показательные и логарифмические соотношения

В. ЗАТАКАВАЙ

При решении различных задач, содержащих показательные и логарифмические функции, целесообразно придерживаться следующей рекомендации, почти не имеющей исключений: переходить к одному основанию.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$5^{\log_2 x}+2\cdot x^{\log_2 5}=15.$$

Поскольку $x=5^{\log_5 x}$, получаем

$$x^{\log_2 5}=(5^{\log_5 x})^{\log_2 5}=\left(5^{\frac{\log_2 x}{\log_2 5}}\right)^{\log_2 5}=5^{\log_2 x},$$

и уравнение сводится к виду

$$5^{\log_2 x}+2\cdot 5^{\log_2 x}=15.$$

Отсюда

$$5^{\log_2 x}=5,\ \log_2 x=1,\ x=2.$$

Ответ: 2.

Решая это уравнение, мы фактически вывели формулу

$$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}. \qquad (1)$$

Нетрудно убедиться в справедливости формулы (1) в общем виде. Прологарифмируем правую и левую части (1) по основанию c. Получим $\log_c (a^{\log_c b})=\log_c (b^{\log_c a})$, или $\log_c b\times$ $\times\log_c a=\log_c a\cdot\log_c b$.

Очевидно, что это тождество выполняется при всех допустимых значениях a, b, c.

Вот еще одна полезная формула, оставшаяся за страницами школьного учебника:

$$a^{\sqrt{\log_a b}}=b^{\sqrt{\log_b a}}. \qquad (2)$$

Доказательство этой формулы аналогично доказательству предыдущей: нужно прологарифмировать обе части формулы (2) по основанию a:

$$\log_a(a^{\sqrt{\log_a b}})=\log_a(b^{\sqrt{\log_b a}}),$$

или

$$\sqrt{\log_a b}=\sqrt{\log_b a}\cdot\log_a b.$$

Перейдя к основанию a, получим

$$\sqrt{\log_a b}=\sqrt{\log_a b}.$$

Пример 2.

$$2^{\sqrt{\log_2 x}}+x^{\sqrt{\log_x 2}}=4.$$

По формуле (2)

$$x^{\sqrt{\log_x 2}}=2^{\sqrt{\log_2 x}},$$

так что уравнение примет вид

$$2^{\sqrt{\log_2 x}}+2^{\sqrt{\log_2 x}}=4;\ 2^{\sqrt{\log_2 x}}=2;$$
$$\log_2 x=1;\ x=2.$$

Ответ: 2.

Пример 3.

$$\log_{3x}(42x^2-13x+1)>0.$$

Решение этого неравенства со «школьной точки зрения» весьма трудоемко. Надо рассматривать два случая: когда $3x>1$ и когда $0<3x<1$. Оба случая приводят к громоздким системам неравенств.

Мы же утверждаем, что если $\log_a b>0$, то $(a-1)\cdot(b-1)>0$, т. е. $(a-1)$ и $(b-1)$ — одного знака.

Действительно, если $\log_a b>0$, то $\log_a b>\log_a 1$.

При $a>1$ имеем $b>1$,— утверждение верно.

При $0<a<1$ получаем, что $b<1$, и наше утверждение опять верно, так как $(a-1)<0$ и $(b-1)<0$.

Аналогично можно доказать, что если $\log_a b<0$, то $(a-1)\cdot(b-1)<0$ (сделайте это самостоятельно).

Применим наше утверждение к примеру 3. Итак, имеем:

$$(42x^2-13x)(3x-1)>0.$$

Это неравенство легко решается при помощи метода интервалов. При этом, конечно, надо рассмотреть соотношения, ограничивающие область определения логарифмической функции:

$$3x>0;\quad 3x\neq 1;\quad 42x^2-13x+1>0.$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{7}\right)\cup\left(\frac{1}{6};\ \frac{13}{42}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Рассмотренный прием позволяет решать и более сложные неравенства.

Пример 4.

$$\log_{(2-x)}(x+2)\cdot\log_{(x+3)}(3-x)\leqslant 0.$$

Применяя доказанное утверждение, получаем

$$(x+1)(1-x)(2-x)(x+2)\leqslant 0.$$

Учитывая область определения левой части неравенства: $(-2;\ 1)\cup(1;\ 2)$, получаем

Ответ: $(-2;\ -1]\cup(1;\ 2)$.

В заключение предлагаем несколько примеров для самостоятельного решения.

1. $5^{\lg x}+x^{\lg 5}=50$.
2. $25^{\lg x}=5+4\cdot x^{\lg 5}$.
3. $x^{\log_2 9}=x^2\cdot 3^{\log_2 x}-x^{\log_2 3}$.
4. $10^{\sqrt{\lg x}}+x^{\sqrt{\log_x 10}}=0{,}2$.
5. $3^{-\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}}+x^{\sqrt{\log_x \frac{1}{3}}}=4{,}5^{-1}$.
6. $\log_{x^2}(x^2+x-1)<0$.
7. $\log_{2x}(5x-1)\cdot\log_{3x}(7x-1)>0$.
8. $\log_x(10x+3)\cdot\log_{10x}(3x+10)\geqslant 0$.
9. $\log_{2x}\left(6x+\frac{1}{7}\right)\cdot\log_{5x}\left(3x+\frac{4}{7}\right)\leqslant 0$.

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае будущего года. Победители будут награждены призами журналов «Квант» и «Математика». К сожалению, в условиях задач из предыдущего номера (см. с. 48) были допущены существенные неточности. Редакция приносит читателям свои извинения и повторяет условия этих задач.

Решения всех задач из этого номера высылайте не позднее 15 декабря 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

1. Составьте из всех десяти цифр 0, 1, 2, ..., 9 такое десятизначное число, что число из двух его первых цифр делится на 2, из трех первых цифр — на 3 и так далее до того, что само число делится на 10.

А. Швецов

2. Докажите, что а) число $1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot1987\cdot1989+2\cdot4\times\times6\cdot\ldots\cdot1988\cdot1990$ делится на 1991;

б) число $2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot1990\cdot1992-1\cdot3\cdot5\times\times7\cdot\ldots\cdot1989\cdot1991$ делится на 1993.

В. Произволов

3. В три магазина привезли 1990 книг. В первые три дня магазин продал соответственно 1/37, 1/11 и 1/2 часть полученных книг, второй магазин — 1/57, 1/9 и 1/3 полученных книг, третий магазин — 1/25, 1/30 и 1/10 полученных книг. Сколько книг получил каждый магазин?

Л. Курляндчик

4. Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 56, делится на 56 и имеет сумму цифр, равную 56.

С. Губа

5. На шахматной доске расставлены фигуры так, что на каждой горизонтали и вертикали стоит не меньше двух фигур. Всегда ли можно снять с доски несколько фигур так, чтобы на каждой горизонтали и вертикали осталось ровно по одной фигуре? Исследуйте тот же вопрос в случае, когда на каждой горизонтали и вертикали первоначально стоят ровно две фигуры.

В. Произволов

6. В клетки квадрата 3×3 поставлено 9 чисел. Такой квадрат называется магическим, если сумма чисел на каждой горизонтали, на каждой вертикали и на каждой из двух диагоналей — одна и та же. Докажите, что у магического квадрата сумма квадратов чисел верхней строки равняется сумме квадратов чисел нижней строки.

А. Швецов

Лаборатория „Кванта"

Экспериментируем с ИК лучами

В. МАЙЕР, С. МАЙЕР

Что общего между дистанционным измерителем температуры и лазерным скальпелем, электронно-оптическим преобразователем и газоанализатором? Эти, казалось бы, совершенно разные приборы объединяет использование инфракрасных (ИК) лучей.

Открытое в 1860 году английским астрономом и оптиком В. Гершелем ИК излучение сейчас широко применяется в науке и производстве, медицине и военной технике, криминалистике и быту. Вот — несколько примеров. Фотографирование ландшафта в ИК лучах существенно повышает информативность снимков. Инфракрасные головки самонаведения являются неотъемлемым элементом боевых ракет самых различных типов — от переносных зенитно-ракетных комплексов до противоспутникового оружия. ИК лучи позволяют видеть в полной темноте. По инфракрасным спектрам поглощения можно проводить тонкий анализ состава и строения вещества. ИК излучение мощных лазеров режет и сваривает металл.

Много лет назад «Квант» уже рассказывал об опытах с инфракрасными лучами*). Однако современная элементная база электроники позволяет более простыми средствами и на более глубоком уровне исследовать некоторые свойства ИК излучения. Предлагаемые опыты вы можете провести самостоятельно или на занятиях физического кружка.

В качестве источника ИК лучей лучше всего использовать светодиод, работающий в соответствующем диапазоне электромагнитных волн.

Как вы хорошо знаете, источником ИК излучения может служить любое тело, температура которого превышает температуру окружающих тел. Подойдет, например, лампа накаливания. Но она испускает постоянный по интенсивности поток ИК лучей, а значит, в приемнике придется использовать довольно сложный усилитель постоянного тока и соответствующий измерительный прибор. Дело значительно упростится, если поток ИК излучения тем или иным способом промодулировать по интенсивности. Тогда в приемнике можно будет применить простейший усилитель звуковой частоты, нагруженный на громкоговоритель, а об интенсивности излучения судить по громкости звука. Выпускаемые промышленностью ИК светодиоды специально предназначены для получения модулированного ИК излучения. Их используют, например, для дистанционного управления бытовой техникой,

*) См., например, статью В. Майера «Опыты с инфракрасным излучением» («Квант», 1973, № 5). (*Примеч. ред.*)

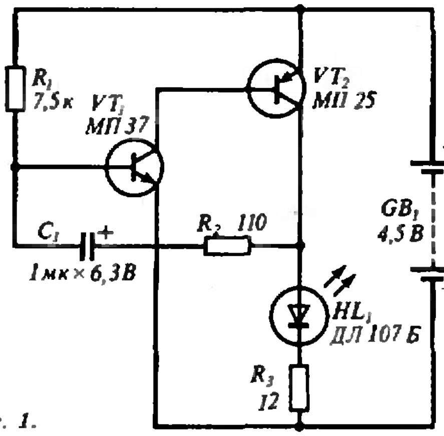


Рис. 1.

для передачи звуковой информации в помещении и т. д. Воспользуемся и мы этим источником.

Передатчик ИК лучей проще всего собрать по типовой схеме мультивибратора на транзисторах разной проводимости (рис. 1). При указанных номиналах деталей (здесь и далее сопротивления резисторов даны в килоомах, а емкости конденсаторов — в микрофарадах) мультивибратор генерирует прямоугольные импульсы напряжения частотой следования 200—250 Гц. Через инфракрасный светодиод HL_1 проходят постоянная и переменная составляющие тока. В результате излучение светодиода оказывается модулированным по интенсивности.

Принципиальная схема приемника ИК излучения приведена на рисунке 2. Датчиком является фотодиод VD_1, сигнал с которого поступает на типовой усилитель звуковой частоты и затем микротелефоном BF_1 (типа ТМ-2) преобразуется в звук.

Необходимые для изготовления приборов радиодетали вполне доступны. Вместо указанных на схемах можно использовать любой инфракрасный светодиод и любой фотодиод (последний легко изготовить из старого транзистора, вскрыв его корпус). Микротелефон можно заменить маломощным динамиком. Нам кажется, нет необходимости говорить о конструкциях передатчика и приемника: каждый из вас в состоянии обдумать и реализовать их самостоятельно. Отметим только, что светодиод с передатчиком, а фотодиод с приемником удобно соединить многожильными гибкими проводниками длиной 30—50 см.

После сборки приборов проверьте правильность монтажа. Теперь расположите фотодиод напротив светодиода на расстоянии 20—30 см и включите питание приборов. Вы услышите довольно громкий однотонный звук, который будет постепенно ослабевать, если расстояние между светодиодом и фотодиодом увеличивать до 1—2 м. Верните светодиод и фотодиод в исходное положение и перекройте пучок ИК лучей, например, ладонью. Звучание должно прекратиться. Если все произошло именно так, значит, приборы работают нормально. В противном случае вам придется проверить исправность радиодеталей.

Для постановки многих опытов вам понадобится узкий пучок ИК лучей.

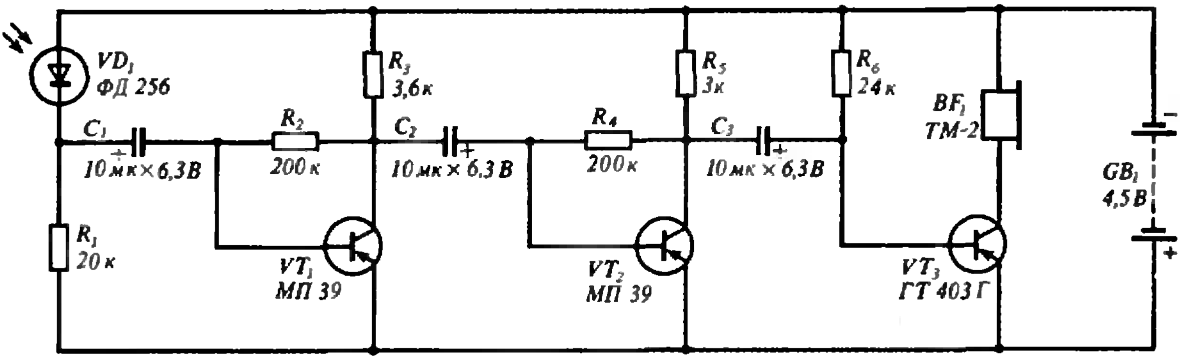


Рис. 2.

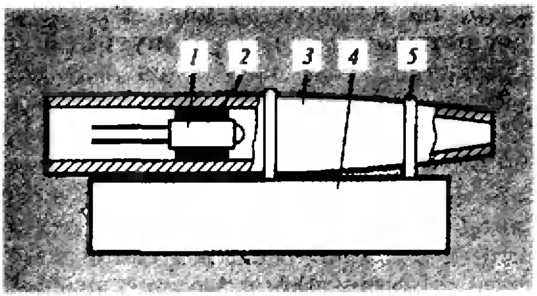


Рис. 3.

Получить его можно с помощью диафрагмы. Например, так, как это показано на рисунке 3. Светодиод *1* отрезком *2* хлорвиниловой трубки или изолентой закрепляют на оси пластмассового колпачка *3* от старой шариковой ручки. Колпачок должен иметь длину примерно 60 мм, внутренний диаметр 5—6 мм и диаметр диафрагмирующего отверстия 1—2 мм. В качестве подставки *4* удобно использовать стирательную резинку (ластик) размером примерно 10×20×50 мм. Колпачок крепится стальными дугами *5*, которые легко сделать из канцелярских скрепок и вдавить в ластик.

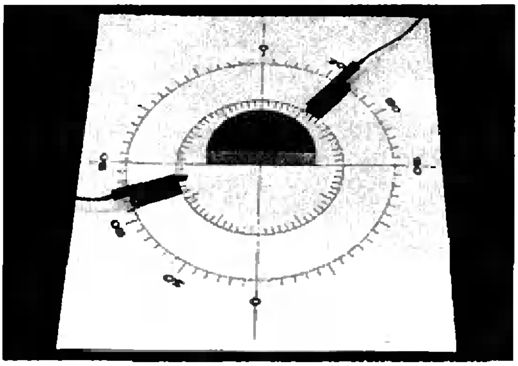


Рис. 4.

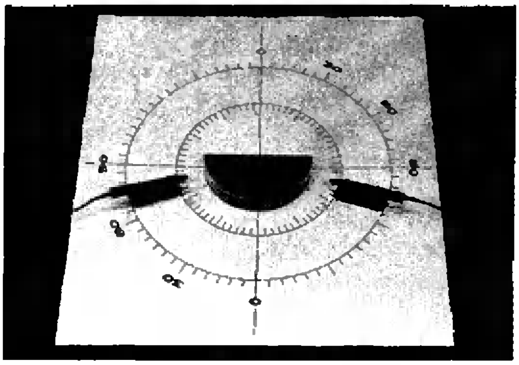


Рис. 5.

Если таким же способом вы закрепите и фотодиод, то сможете экспериментировать со всеми удобствами.

А теперь — задания и вопросы для самостоятельных исследований.

1. Докажите, что в оптически однородной среде ИК лучи распространяются прямолинейно.

2. Возьмите небольшое плоское зеркало и покажите, что ИК лучи отражаются от него. Измерьте углы падения и отражения. Сопоставьте полученные результаты и сделайте выводы.

3. Отполируйте латунную полоску шириной 20 мм и длиной 80 мм. Изогните ее так, чтобы получилось цилиндрическое зеркало радиусом примерно 100 мм — с его помощью сфокусируйте ИК лучи. Попробуйте получить изображение ИК источника, измерьте расстояния от зеркала до источника и его изображения и вычислите фокусное расстояние зеркала. Как оно связано с радиусом кривизны зеркала?

4. Направьте пучок ИК лучей на одну из граней треугольной стеклянной призмы и покажите, что ИК лучи преломляются при переходе из одной среды в другую.

5. Докажите, что собирающая линза фокусирует ИК лучи. Экспериментально определите фокусное расстояние линзы для ИК излучения. Надо ли в этом и в предшествующем опытах использовать диафрагмы?

6. Небольшую пластинку эбонита отшлифуйте шкуркой так, чтобы толщина ее стала не более 0,5 мм. Выясните, пропускает ли эбонит ИК лучи.

7. Возьмите полуцилиндр из стекла или оргстекла. Соберите экспериментальную установку, как показано на рисунке 4. Узкий пучок ИК лучей направьте в центр полуцилиндра на его плоскую грань. Перемещая фотодиод, покажите, что ИК лучи частично отражаются и частично преломляются на границе раздела сред воздух — стекло.

сти, на которую падает ИК пучок, испытывающий полное внутреннее отражение. Как изменится интенсивность отраженного пучка? Почему?

8. В условиях предыдущего опыта измерьте углы падения i_1 и преломления i_2 ИК лучей. По формуле $n=\sin i_1/\sin i_2$ вычислите значение показателя преломления стекла для ИК излучения.

9. Пучок ИК лучей направьте по радиусу полуцилиндра со стороны его выпуклой поверхности. Измерьте соответствующие углы падения и преломления. Какой из них больше?

10. Покажите, что ИК лучи могут испытывать полное внутреннее отражение при переходе из оптически более плотной в оптически менее плотную среду (рис. 5). Измерьте предельный угол полного отражения и сопоставьте получившийся результат с табличным значением.

11. В предыдущем опыте прикоснитесь смоченным водой пальцем к плоской грани полуцилиндра в области, на которую падает ИК пучок, испытывающий полное внутреннее отражение. Как изменится интенсивность отраженного пучка? Почему?

12. Из отполированной палочки из оргстекла диаметром примерно 4 мм и длиной около 500 мм изготовьте световод. Для этого палочку разогрейте над электроплиткой, придайте ей желаемую форму и охладите так, чтобы форма сохранилась. На концах получившегося световода хлорвиниловыми трубками закрепите светодиод и фотодиод. Включите питание приборов и убедитесь, что ИК лучи прекрасно проходят по изогнутому световоду. Чем объясняется это явление? Что произойдет, если отогнутую часть световода погрузить в жидкость?

Желаем вам успехов!

Задачи на исследование по статье «Медианная фильтрация»

(см. с. 8)

1. Докажите, что если последовательность x_n инвариантна относительно медианного фильтра с шириной окна $2k+1$ и ее члены принимают по меньшей мере три различных значения, то она инвариантна относительно любого медианного фильтра с меньшей шириной окна.

Примечание. Второе условие существенно. Например, «пила» $x_n=(-1)^n$ инвариантна относительно фильтров с четными k и неинвариантна относительно фильтров с нечетными k.

2. Конечная последовательность продолжается до бесконечной с помощью повторения крайних элементов влево и вправо соответственно. Докажите, что если длина исходной последовательности равна l, то после $\left[\frac{l-1}{2}\right]$-кратного применения медианного фильтра с шириной окна $2k+1$ получается инвариантная последовательность (здесь [] — целая часть числа).

Проверьте, что способ продолжения последовательности имеет существенное значение (например, при $l=2$).

3. *Рекурсивным медианным фильтром* называется медианный фильтр, у которого первые k чисел скользящего окна берутся из фильтрованной последовательности, т. е. последовательность x_n преобразуется в последовательность $y_n=\mathrm{m}(y_{n-k}, y_{n-k+1}, \ldots, y_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$ (считается, что $x_n\equiv x_0$ при $n<0$).

а) Докажите, что последовательность инварианта относительно рекурсивного медианного фильтра тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно обычного медианного фильтра.

б) Докажите, что любая последовательность после однократного прохождения через рекурсивный медианный фильтр превращается в инвариантную.

4. Будем говорить, что последовательность x_n имеет *середину*, равную a, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое M, что для любых n и $m>M$

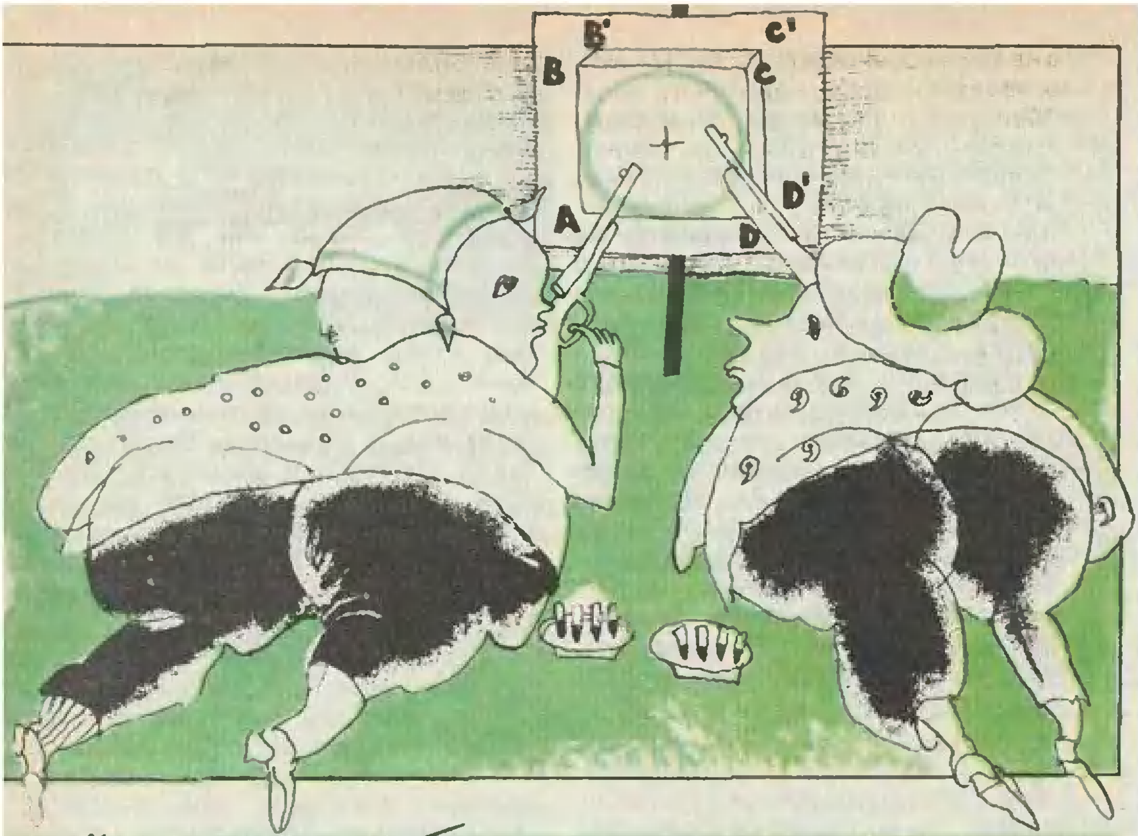
$$|m(x_{n-m}, x_{n-m+1}, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m-1}, x_{m+n})-a|<\varepsilon.$$

Докажите, что медианный фильтр *сохраняет середину*, т. е. последовательность, полученная из x_n на выходе фильтра, имеет ту же середину a.

5. Будем говорить, что последовательнось x_n имеет *уровень* a, если для любого ε найдется такое M, что для любых n и $m>M$

$$\left|\frac{x_{n-m}+x_{n-m+1}+\ldots+x_n+\ldots+x_{n+m-1}+x_{n+m}}{2m+1}-a\right|<\varepsilon.$$

Верно ли, что
а) медианный фильтр,
б) скользящее усреднение
сохраняют уровень последовательности?



Математический кружок

Геометрия или анализ?

Доктор физико-математических наук
В. ТИХОМИРОВ

Всех математиков условно можно разделить на два класса — аналитиков и геометров. Геометры — это люди с пространственной фантазией, способные вызывать в воображении необыкновенные феерические ассоциации. В отличие от геометров аналитики слывут сухарями, склонными к рутинным и однообразным вычислениям. Оказывается, что такое деление математиков на классы имеет научное объяснение. В 1981 году Нобелевская премия по биологии была присуждена Роджеру Сперри за исследования в области асимметрии головного мозга. Из его исследований вытекает, что у геометров более развито правое полушарие, а у аналитиков — левое. Правое полушарие отвечает за картинки, образы, левое — за алгоритмы.

Разумеется, геометры и аналитики — не антагонисты, и потому не следует ожидать гражданской войны между ними. Ведь мозг каждого из нас имеет и левое и правое полушария, так что каждый из нас немножечко аналитик и хоть чуточку да геометр.

К тому же и те, и другие — все мы — можем за себя постоять.

И все-таки — геометрия или анализ — кто кого? Мы обсудим этот вопрос (но, разумеется, не разрешим), в связи с одной очень красивой геометрической задачей.

Автором задачи является Ю. Нестеренко (профессиональный аналитик). А история ее такова. Однажды я затеял спор со школьниками — победителями Всесоюзной олимпиады — на эту самую тему: геометрия или анализ — кто кого? И Ю. Нестеренко оказался свидетелем этого спора. Мои оппоненты были ярыми геометрами, и мне пришлось туго. Но явной победы мои соперники все-таки не одержали. Об этом рассказано в моей книге «Рассказы о максимумах и минимумах» (Библиотечка «Квант», вып. 56, М., Наука, 1986, с. 134—139). И тогда (так мне говорил сам автор) Ю. Нестеренко стал искать задачу, где геометрическая фантазия одерживала бы победу над аналитическим занудством за явным преимуществом. И он-таки придумал ее! Задача предлагалась на XIX Всесоюзной олимпиаде для школьников в 1985 году. Вот ее формулировка.

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной два. Проведем две окружности: одну — описанную около треугольника, образованного несмежными вершинами AB_1C, другую — вписанную в грань $ABCD$. Требуется найти минимальное расстояние между этими окружностями (рис. 1).

И действительно,— сейчас мы убедимся в этом — решается она «в два слова», но найти их довольно трудно (особенно в обстановке олимпиады или экзамена). Этой интересной темы мы еще коснемся в конце статьи, а теперь — переходим к решениям.

Сначала — пресловутые «два слова». Малая окружность лежит на сфере радиусом $\sqrt{2}$ с центром в центре куба, большая — на сфере радиусом $\sqrt{3}$ с тем же центром, значит, кратчайшее расстояние между окружностями не меньше чем $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. Но след на большой сфере конуса с вершиной в центре куба, содержащего малую окружность, пересекает (как легко понять) большую окружность (рис. 2), т. е. существуют две точки на разных окружностях, расстояние между которыми равно $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Значит, минимальное расстояние и равно $\sqrt{3}-\sqrt{2}$! Все доказано. Но, имея в виду дальнейшие сопоставления, распишем эти «два слова» чуть подробнее. Итак, представляем на ваш суд два решения — геометрическое и аналитическое. Чтобы вам было легче сравнивать «достоинства» и «недостатки» этих решений, мы в каждом из них выделяем основные моменты («ходы», «ступеньки» — как вам угодно) цифрой в квадратных скобках. Если ход кажется нам «озарением», мы рядом с цифрой ставим! (или даже!!).

Решение первое (геометрическое). Описанную окружность обозначим O_1, вписанную — O_2, центр куба — O. Тогда:

[1]. Окружность O_1 лежит на сфере с центром в O и радиусом $\sqrt{3}$.

[2]. Окружность O_2 лежит на сфере с центром в O и радиусом $\sqrt{2}$.

[3!]. Из сказанного вытекает, что искомое минимальное расстояние $\rho \geqslant \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

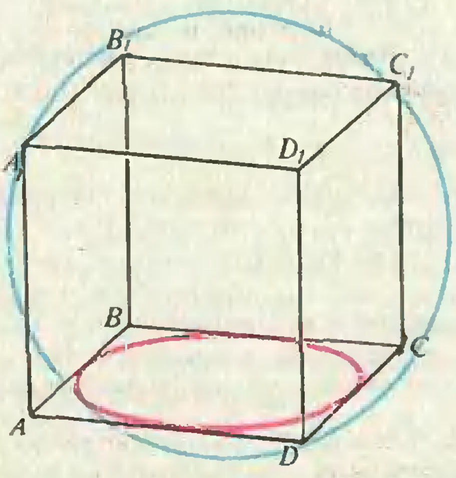


Рис. 1.

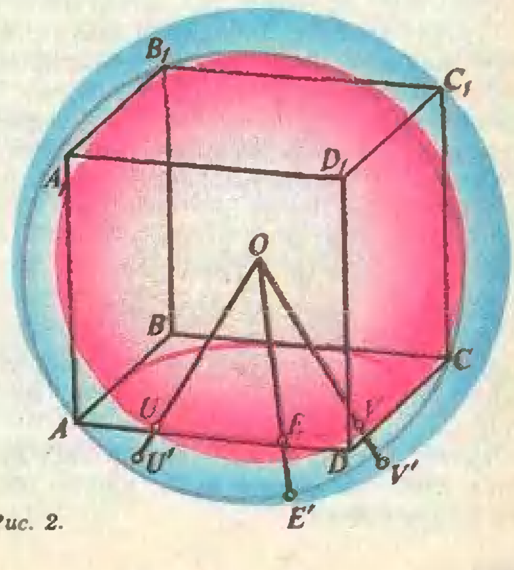


Рис. 2.

[4]. Построим коническую поверхность с вершиной в центре O, соединив ее лучами с точками окружности O_2.

[5]. Тогда образующая конуса — луч OU' (рис. 2) — лежит ниже O_1.

[6]. Образующая конуса OV' (рис. 2) лежит выше O_1 (легий подсчет).

[7!!]. Из последних двух утверждений и соображений непрерывности вытекает, что существующая точка E на O_2 такая, что луч OE «прознает» окружность O_1 в точке E',

[8] и значит, расстояние от E до E' равно $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, т. е. $\rho\leqslant\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

[9]. Таким образом, $\rho=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Замечательно красивое решение, не правда ли? Оно бы вам еще больше понравилось, если бы вы нашли его сами. Число решивших эту задачу на олимпиаде, было не так уж мало — пять-десять человек,— и все решили вот так, геометрически. А нам предстоит другой путь.

Но прежде чем переходить к аналитическому решению, я должен познакомить вас с одним очень важным в анализе приемом исследования задач на экстремум, открытым Лагранжем (этому приему я посвятил значительную часть своей упомянутой выше книги — см. рассказ двенадцатый). Именно с помощью Лагранжа я вступался за честь аналитиков перед заносчивыми геометрами-олимпийцами. И сейчас я тоже хочу прибегнуть к его помощи. Прием Лагранжа состоит в следующем.

Пусть требуется найти минимум (или максимум) функции нескольких переменных (для определенности — функции $f_0(x, y, z, u)$ четырех переменных) при некоторых условиях, которыми связаны переменные x, y, z, u. Например,

$$f_1(x, y, z, u)=0,$$
$$f_2(x, y, z, u)=0,$$

где f_1 и f_2 — данные функции.

Тогда (утверждает Лагранж) решение, если оно существует, можно найти с помощью следующего метода.

Пусть λ_0, λ_1 и λ_2 — какие-нибудь (нам пока не известные) числа, не все равные 0.

Рассмотрим функцию

$$L=\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2.$$

Пусть L_x, L_y, L_z и L_u — производная функции L по переменным x, y, z, u. Тогда точка (x_0, y_0, z_0, u_0), в которой достигается минимум (максимум) функции f_0, задается системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, u)=0, \\ f_2(x, y, z, u)=0, \\ L_x=L_y=L_z=L_u=0. \end{cases}$$

(Заметим, что это система из 6 уравнений с 7 неизвестными, из которой находятся числа x_0, y_0, z_0, u_0 и λ_0, λ_1, λ_2.)

Этот прием универсален, технически очень прост и для своего применения не требует ничего, кроме понятия производной. Воспользуемся им для решения нашей задачи.

Решение второе (аналитическое).

[1]. Окружность O_2 представим в виде $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, $z=-1$, $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

[2]. Окружность O_1 зададим в виде пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=3$ и плоскости $x-y+z=-1$.

[3]. Теперь задача формулируется так. Найти минимум функции

$$f_0(x, y, z, \varphi)=(x-\cos\varphi)^2+(y-\sin\varphi)^2+(z+1)^2$$

при условиях

$$f_1(x, y, z)=x-y+z+1=0,$$
$$f_2(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-3=0.$$

[4]. Нетрудно понять, что достаточно рассмотреть сектор $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

[5]. Построим функцию Лагранжа

$$L=\lambda_0((x-\cos\varphi)^2+(y-\sin\varphi)^2+(z+1)^2)+\lambda_1(x-y+z+1)+\lambda_2(x^2+y^2+z^2-3)$$

и вычислим ее производные:

$$L_\varphi=2\lambda_0\,((x-\cos\varphi)\sin\varphi)-(y-\sin\varphi)\cos\varphi)=0, \quad (1)$$
$$L_x=2\lambda_0\,(x-\cos\varphi)+\lambda_1+2\lambda_2 x=0, \quad (2)$$
$$L_y=2\lambda_0\,(y-\sin\varphi)-\lambda_1+2\lambda_2 y=0, \quad (3)$$
$$L_z=2\lambda_0\,(z+1)+\lambda_1+2\lambda_2 z=0. \quad (4)$$

[6]. Теперь решим полученную систему (1) — (4). Если допустить, что $\lambda_0=0$, то из (2) — (4) и уравнений связи получаем, что $\lambda_1=\lambda_2=0$, а это противоречит допущению о том, что $\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0$.

Ясно, что числа λ_0, λ_1, λ_2 можно определить с точностью до пропорциональности, поэтому полагаем $\lambda_0=$ $=\frac{1}{2}$. Тогда из (1) следует

$$x\sin\varphi=y\cos\varphi. \qquad (5)$$

Обозначив $a=-\frac{\lambda_1}{1+2\lambda_2}$, $b=\frac{\lambda_1}{1+2\lambda_2}$ (допущение $1+2\lambda_2=0$ приводит к очевидно несовместной системе), получаем

$$x=a+b\cos\varphi,\ y=-a+b\sin\varphi,\ z=a-b. \qquad (6)$$

[7]. Из (6) и (5) сразу вытекает, что $a(\cos\varphi-\sin\varphi)=0$, и это ведет к альтернативе

$$(i)\, a=0,\ (ii)\sin^2\varphi+\cos\varphi=0 (\Leftrightarrow \varphi=-\frac{\pi}{4}). \qquad (7)$$

[8]. Если (i), то из (6) (при $a=0$) и $x^2+y^2+z^2=3$ получаем

$$b^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+1)=3\Rightarrow b= =\pm\sqrt{\frac{3}{2}}. \qquad (8)$$

[9]. Если (ii), то (легко считаем)

$$(x_0,\ y_0,\ z_0)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right). \qquad (9)$$

[10]. В случае (i)

$$(x-\cos\varphi)^2+(y-\sin\varphi)^2+(z+1)^2= =(b-1)^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+1)=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2.$$

[11]. В случае (ii) расстояние между точками $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -1\right)$ и $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ больше $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Ответ: $\rho=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Ну а теперь пофилософствуем немного. Мы затронули две темы: 1) кто же все-таки кого? и 2) бывают ли задачи, имеющие простое решение, которое, тем не менее, очень трудно найти?

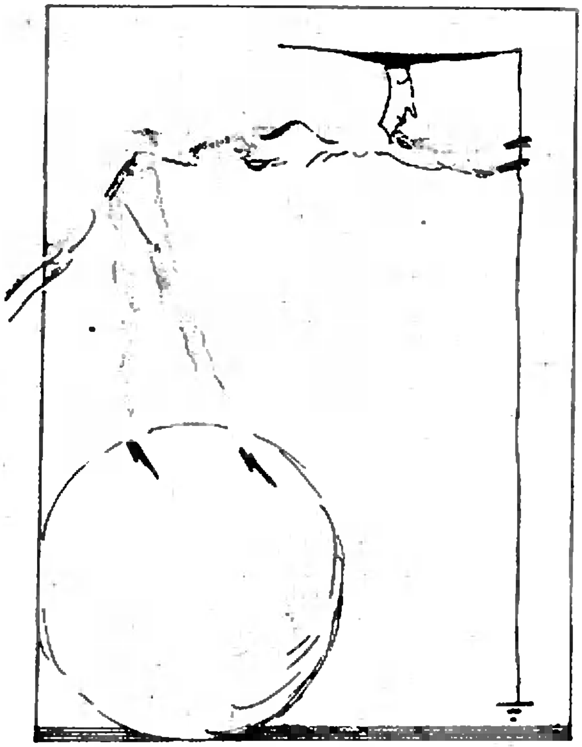
Так чье же решение красивее? Тут не может быть сомнения, и я сразу сдаюсь на милость победителя. Но да будет мне позволено, смиренно признав свое поражение, высказать все-таки несколько слов.

Во-первых, я прошу обратить внимание, мои дорогие друзья (или судьи?), на то, что я не только нашел ответ, но и получил решение. Ведь в случае (i), который привел нас к ответу, из соотношений (2) — (4) при $a=0$ и из выражения для b, получаем, что $\cos\varphi-\sin\varphi=1-\sqrt{\frac{2}{3}}$, откуда сразу находится искомое φ. А вам, дорогие геометры, еще придется немного потрудиться. Но это так, между прочим.

Во-вторых, я хочу поставить в заслугу анализу то, что в аналитическом решении нет восклицательных знаков. «Как это?» — спросите вы. Вспомните: — восклицательными знаками (как в шахматной партии) я обозначал особенно красивые, неожиданные ходы. Так вот, я ставлю в заслугу анализу именно то, что он дал возможность прийти к цели стандартно, рутинно, безо всякого «откровения». Правда, чуть длиннее (одиннадцать ходов вместо восьми, но зато ходов тривиальных, стандартных, совершенно элементарных). И этот путь был, заметьте, универсальным. Ведь если чуть изменить задачу, то, боюсь, что ты, мой дорогой геометр, опять будешь вынужден ждать озарения, а стандартная дорога (может быть, с помощью ЭВМ) обязательно приведет к цели. Впрочем, чур меня: что это я вдруг сам начинаю задираться. Спор не окончен, он и не может быть окончен! Следующий ход за тобой, мой дорогой поклонник геометрии!

Теперь — о второй теме. Да, как это ни странно, *существуют задачи с совсем простым решением, найти которое необычайно трудно.* Обсуждаемая нами — из их числа (если не предполагать возможность аналитического подхода). Характеристический признак таких задач — наличие «восклицательных знаков». Если разложить доказательства большинства

(Окончание см. на с. 62)



Практикум абитуриента

Проводящие сферы в электростатике

Кандидат физико-математических наук
А. ЧЕРНОУЦАН

Электростатика проводников занимает столь незначительное место в школьном курсе физики, что для многих учащихся за несколькими простыми задачами остаются навсегда скрытыми красота и нетривиальность этой темы.

На первый взгляд, поведение проводников в электрическом поле просто и однозначно. И действительно. В любом проводнике всегда есть свободные заряды. Под действием электрического поля свободные заряды приходят в движение — возникает электрический ток. В случае электростатики — а именно она нас и будет интересовать — заряды на проводнике находятся в равновесии. Это означает, что напряженность поля во всех точках проводника равна нулю, а потенциал всех точек проводника одинаков (его называют потенциалом проводника).

Из условия электростатического равновесия следует также, что при равновесии заряженной является только поверхность проводника, а в объеме проводника заряды отсутствуют (имеются в виду нескомпенсированные заряды), что силовые линии электростатического поля перпендикулярны поверхности проводника, и некоторые другие свойства проводников.

Однако простота всех этих утверждений обманчива. Вдумайтесь: в них ничего не говорится о том, *как именно* распределены заряды по поверхности проводника. Известно лишь, что заряды должны быть распределены так, чтобы напряженность поля в проводнике была равна нулю. Определено не само равновесное расположение зарядов, а «конечный результат» такого расположения.

Необходимость анализировать «по конечному результату» (столь эффективная в экономике) создает серьезные трудности в изучении и понимании электростатики проводников. Правда, школьников обычно благополучно избавляют от этих проблем, знакомя их в основном с задачами, где расположение зарядов известно заранее. Но... один шаг в сторону (например, на устном вступительном экзамене) — и абитуриент часто попадает впросак.

Чтобы помочь вам избежать таких, как сейчас говорят, «нештатных» ситуаций, при разборе всех задач — как простых, так и более сложных — особое внимание будет уделяться обоснованию всех утверждений и ответам на возможные вопросы. Для этой цели некоторые задачи, кроме раздела «Решение», содержат дополнительный раздел —

«Обсуждение». Одна из целей этого раздела — обобщить полученные результаты и показать возможности их применения.

Задача 1. *На металлический шар радиусом R нанесен заряд q. Найдите потенциал шара, а также напряженность и потенциал электрического поля во всех точках пространства.*

Решение. В этой задаче не возникает вопроса о том, как именно распределен заряд на поверхности шара — из соображений симметрии ясно, что он распределен равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = q/(4\pi R^2)$.

Начнем с вычисления напряженности поля. Внутри проводящего шара напряженность равна нулю, а во внешнем пространстве она такая же, как у поля точечного заряда, помещенного в центр шара:

$$\text{при } r \leqslant R \quad E=0,$$
$$\text{при } r > R \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \qquad (1)$$

Утверждение (1) используется очень широко. (И не только для электростатического поля, но и для поля тяготения. Вспомните, например: тела притягиваются к Земле так, как будто вся ее масса сосредоточена в ее центре.) Качественное пояснение можно дать на языке силовых линий: поскольку картинки радиально расходящихся силовых линий для полей шара и точечного заряда совпадают, то и сами поля должны быть одинаковыми. Строгое доказательство можно найти в статье «Силовые линии и теорема Гаусса» в третьем номере «Кванта» за этот год.

Поскольку напряженность поля шара во всем внешнем пространстве — от R до бесконечности — такая же, как у поля точечного заряда, а на бесконечности потенциал обоих полей принят равным нулю, то и потенциал поля шара совпадает с потенциалом поля точечного заряда:

$$\text{при } r > R \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \qquad (2)$$

Положив $r=R$, получим потенциал на поверхности шара, т. е. потенциал самого шара (потенциал всех его точек один и тот же):

$$\text{при } r \leqslant R \quad \varphi_ш = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}. \qquad (3)$$

Все, что мы сказали о напряженности и потенциале поля шара, графически изображено на рисунке 1. Отметим, что этот ответ годится и для тонкой проводящей сферической оболочки (подумайте, почему).

Обсуждение. 1) Иногда у школьников возникает такой вопрос: «Если поле внутри шара отсутствует, то почему же не равен нулю потенциал поля в этой области?». Дело в том, что мы уже приняли за ноль потенциал поля на бесконечности. Чтобы найти потенциал некоторой внутренней точки шара, надо вычислить работу поля по переносу единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность; при таком переносе мы должны пройти через всю внешнюю область — от R до бесконечности, а в этой области напряженность поля уже не равна нулю.

2) Рассчитывая потенциал шара, мы воспользовались выражением (2) для потенциала внешней области. Однако можно пойти другим путем и вычислить потенциал в центре шара с помощью принципа суперпозиции. Разобьем поверхность шара на маленькие участки — точечные заряды Δq_i, найдем вклад каждого участка и просуммируем:

$$\varphi_ш = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum_i \Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}.$$

Здесь мы использовали замечательное свойство центра шара: то, что он лежит на одинаковом расстоянии R от всех точек поверхности.

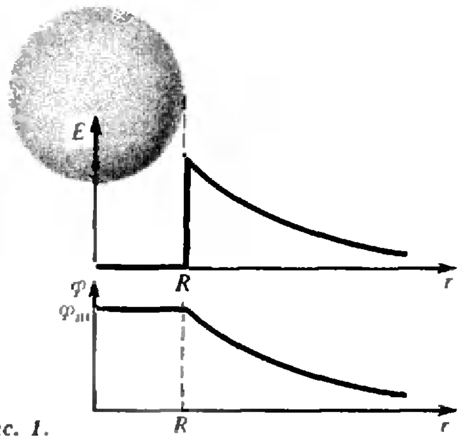


Рис. 1.

3) Напряженность поля достигает максимального значения у поверхности шара. Выразим ее через потенциал шара:

$$E(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R^2}=\frac{\varphi_ш}{R}\,.$$

Видно, что при одинаковом потенциале напряженность поля больше у поверхности маленького шарика. (Это значит, например, что около маленького шарика пробой воздуха наступает при меньшем потенциале.)

Кроме того, напряженность поля у поверхности проводника зависит только от поверхностной плотности заряда σ:

$$E(R)=\frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{q}{4\pi R^2}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,.$$

Это соотношение справедливо для проводника любой формы — число силовых линий, начинающихся на некотором участке поверхности, пропорционально заряду этого участка. (В частности, оно выполняется для поля плоского конденсатора. Так как это поле создается двумя пластинами, то поле одной пластины, т. е. равномерно заряженной плоскости, равно $\sigma/(2\varepsilon_0)$.)

4) Отметим, что потенциал шара оказался пропорциональным его заряду (формула (3)). Такое же утверждение верно для уединенного проводника произвольной формы:

$$\varphi\sim q,\quad \varphi=\frac{1}{C}q,$$

где C — электроемкость (емкость) проводника, которая зависит от формы и размеров проводника. (Емкость шара, например, равна $C=4\pi\varepsilon_0 R$.)

Чтобы доказать пропорциональность φ и q, используем теорему единственности — очень важную теорему, истинно «палочку-выручалочку» электростатики. Она утверждает, что существует только одно равновесное распределение зарядов на проводниках, т. е. распределение, при котором $\vec{E}=0$ внутри всех проводников (при условии, что заданы либо полные заряды всех проводников, либо их потенциалы). (Недаром свободные заряды практически мгновенно отыскивают свое равновесное положение — ведь перед ними не стоит мучительная проблема выбора!)

Пусть уединенный проводник при сообщении ему заряда q приобретает потенциал φ. Нанесем на этот проводник дополнительно такой же заряд q и убедимся в том, что потенциал проводника удвоится. Если вторая порция заряда распределится по поверхности точно так же, как первая, то напряженность внутри проводника останется равной нулю (вклад каждой порции равен нулю). Именно так и случится — ведь существует только одно «хорошее» распределение! Значит, новая порция заряда создаст на проводнике такой же потенциал φ, и результирующий потенциал будет равен 2φ.

Задача 2. *Два удаленных друг от друга проводящих шара, радиусы которых R_1 и R_2, несут заряды q_1 и q_2 соответственно. Чему будут равны потенциалы и заряды шаров после того, как их соединят проволокой?*

Решение. После соединения два шара вместе с проволокой образуют единый проводник. Следовательно, в состоянии равновесия потенциалы шаров должны быть равны друг другу:

$$\varphi_1'=\varphi_2'=\varphi',\ \text{или}\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1'}{R_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_2'}{R_2},$$

т. е. заряды шаров пропорциональны их радиусам (штрихами отмечены заряды и потенциалы шаров после соединения). Так как заряд только перемещается по проволоке с шара на шар, но не поступает в систему извне и не покидает ее, то выполняется закон сохранения заряда:

$$q_1+q_2=q_1'+q_2'$$

(зарядом на проволоке пренебрегаем). Решая полученные уравнения, находим

$$q_1'=(q_1+q_2)\frac{R_1}{R_1+R_2},\ q_2'=(q_1+q_2)\frac{R_2}{R_1+R_2},$$

$$\varphi'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1+q_2}{R_1+R_2}\,.$$

Обсуждение. 1) Точно так же выглядит решение задачи о соединении проволокой двух удаленных друг от друга проводников произвольной формы, имеющих емкости C_1 и C_2:

$$q_1'=(q_1+q_2)\frac{C_1}{C_1+C_2},\quad q_2'=(q_1+q_2)\frac{C_2}{C_1+C_2},$$

$$\varphi'=\frac{q_1+q_2}{C_1+C_2}\,.$$

Видно, что емкость изолированной системы двух удаленных друг от друга проводников, соединенных проволокой, равна C_1+C_2. Если $C_1\ll C_2$, то $q_1'\ll q_2'$, т. е. на проводнике малой емкости (например, на проволоке) оказывается пренебрежимо малый заряд. Наоборот, заряд и потенциал проводника с очень большой емкостью при соединении почти не меняются. Так, когда говорят: «соединили с проводником заданного потенциала», то имеют в виду проводник очень большой емкости. В частности, под словом «заземление» понимают соединение с проводником очень большой емкости (землей) нулевого потенциала; после заземления $\varphi'=0$.

2) Отметим, что хотя на шаре большего радиуса сосредоточен больший заряд ($q_1'/q_2'=R_1/R_2$), поверхностная плотность заряда больше, наоборот, на маленьком шаре ($\sigma_1'/\sigma_2'=R_2/R_1$). Это иллюстрирует тот известный факт, что поверхностная плотность заряда (а значит, и напряженность) больше на тех участках проводника, где кривизна поверхности больше (например, у острия).

Задача 3. *Проводящий шар радиусом R_1 окружили тонкой проводящей оболочкой радиусом R_2. Заряд шара q_1, заряд оболочки q_2. Найдите потенциалы проводников, а также напряженность и потенциал во всех точках пространства. Как изменится потенциал шара, если оболочку заземлить?*

Решение. В соответствии с принципом суперпозиции, напряженность (и потенциал) в каждой точке пространства может быть вычислена как сумма напряженностей (потенциалов), созданных в этой точке шаром и оболочкой. Посмотрите еще раз на рисунок 1: как для напряженности, так и для потенциала ответ зависит от того, находимся мы внутри или вне заряженной сферы. Если, например, точка расположена между шаром и оболочкой (рис. 2), то получаем

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}+0,$$

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2}$$

$$(R_1<r<R_2).$$

В этих равенствах первый член характеризует поле шара, второй — поле

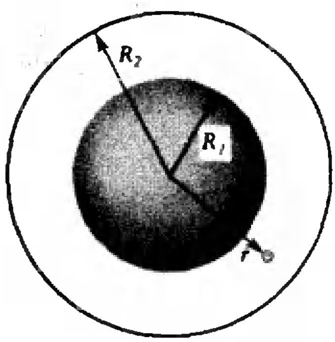


Рис. 2.

оболочки. При $r=R_1$ получаем ответ для потенциала шара, при $r=R_2$ — для потенциала оболочки:

$$\varphi_{ш}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1}+\frac{q_2}{R_2}\right),$$

$$\varphi_{об}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_2}.$$

При $r<R_1$ потенциал постоянен и равен потенциалу шара, а напряженность равна нулю. При $r>R_2$ получаем поле точечного заряда (q_1+q_2):

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{r^2},\quad \varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{r}.$$

После заземления оболочки ее потенциал станет равным нулю, откуда находим новый заряд оболочки:

$$q_2'=-q_1$$

и новый потенциал шара:

$$\varphi_{ш}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

Обсуждение. При заземлении внешней оболочки полный заряд системы оказался равным нулю ($q_1=q$, $q_2=-q$). Такую систему называют сферическим конденсатором. Так как потенциал внешней обкладки равен нулю, то напряжение на конденсаторе равно потенциалу внутренней, положительно заряженной обкладки (шара). Отсюда находим емкость сферического конденсатора:

$$C=4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}.$$

Если неограниченно увеличивать радиус внешней оболочки ($R_2\to\infty$), то емкость сферического конденсатора переходит в емкость уединенного шара, а напряжение на конденсаторе — в потенциал уединенного шара, о которых уже говорилось. Точно так же, любой уединенный проводник емкостью C можно считать обкладкой конденсатора емкостью C, вторая обкладка которого представляет собой бесконечно удаленную замкнутую оболочку. Зачем это нужно? Конечно же, чтобы использовать привычные формулы для конденсаторов в задачах с уединенными проводниками. Например, для энергии уединенного проводника сразу получаем формулы $W=q\varphi/2=C\varphi^2/2=q^2/(2C)$.

Задача 4. *Точечный заряд q находится на расстоянии L от центра тонкой проводящей сферы радиусом R, несущей заряд Q. Найдите потенциал проводящей сферы. Рассмотрите случаи $L>R$ и $L<R$.*

Решение. В этой задаче сферическая симметрия отсутствует, и поэтому распределение зарядов на сфере неизвестно. Полное решение задачи об электрическом поле во всем пространстве выходит за рамки этой статьи (его можно найти, например, методом электростатических изображений — см. «Квант», 1987, № 3, с. 39). Как это ни удивительно, благодаря геометрическим свойствам сферы, ее потенциал все же удается найти без сложных вычислений.

Рассмотрим сначала случай $L>R$ (рис. 3). Хотя внутри оболочки и нет

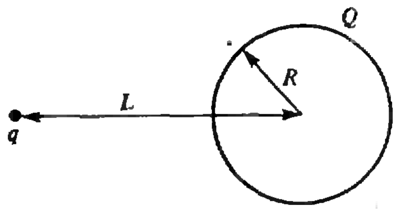


Рис. 3.

проводника, напряженность поля в полости (не содержащей зарядов!) будет равна нулю и потенциал всех внутренних точек будет один и тот же. Будем искать потенциал центра. Он создается точечным зарядом q и зарядом Q, распределенным — неизвестно как! — по поверхности сферы. Однако, благодаря тому, что расстояние от центра до всех точек поверхности одинаково, результат вычисления потенциала не зависит от распределения заряда по сфере:

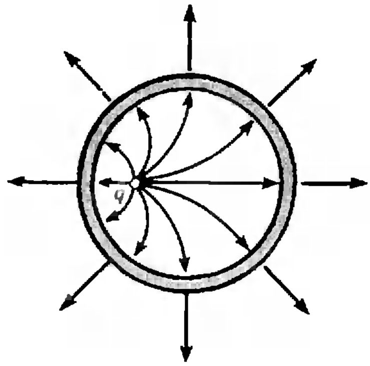


Рис. 4.

$$\varphi_{об}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L}+\sum_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q_i}{R}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}.$$

(Во избежание недоразумений поясним, что существует только одно распределение зарядов, при котором все точки внутри сферы будут иметь такой же потенциал, как центр сферы.)

Рассмотрим теперь случай $L<R$ (рис. 4). При таком расположении заряда q напряженность поля во внутренней полости не равна нулю. Значит, потенциал центра сферы, для которого остается верным найденное выше выражение, не равен теперь потенциалу проводящей оболочки. Но нас выручит другое обстоятельство: оказывается, поле во внешней области ($r>R$) не зависит от положения заряда q и совпадает с полем воображаемого заряда $(q+Q)$, помещенного в центр сферы. Для потенциала оболочки получаем:

$$\varphi_{об}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+Q}{R}.$$

Как доказать, что поле во внешней области не зависит от положения заряда q? Здесь нам на помощь опять приходит теорема единственности. Давайте изобретем такое распределение зарядов по внутренней и внешней поверхностям оболочки, при котором поле в проводнике будет равно нулю. Начнем с внутренней поверхности. Распределим по ней заряд $-q$ так, как он распределился бы в воображаемой сферической полости, созданной в пространстве, целиком заполненном проводником (рис. 5). Понятно, что при таком

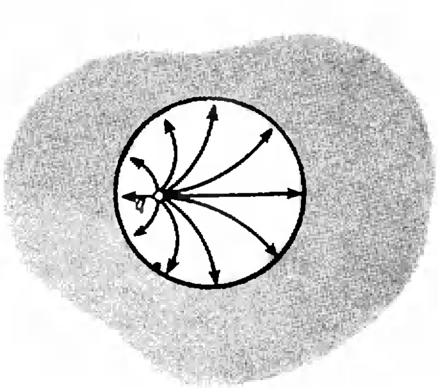


Рис. 5.

распределении зарядов поле вне этой внутренней поверхности равно нулю. А теперь наложим на это распределение зарядов по внутренней поверхности равномерно распределенный по внешней поверхности заряд $q+Q$. Полный заряд оболочки при этом будет равен Q, а напряженность поля внутри проводника будет равна нулю. Значит, мы придумали правильное распределение зарядов, которое и будет существовать в действительности.

Решение последней задачи выглядит необычно коротким, но только благодаря тому, что мы очень подробно обсуждали решения предыдущих задач.

Задача 5. *Шар радиусом R_1 окружен тонкой концентрической проводящей оболочкой радиусом R_2. Заряды шара и оболочки равны нулю. Между шаром и оболочкой на расстоянии R от центра ($R_1<R<R_2$) помещают точечный заряд q, после чего шар с оболочкой соединяют тонкой проволокой. Какой заряд окажется после этого на оболочке?*

Решение. Обозначим наведенный заряд оболочки Q, тогда на шаре будет наведен заряд $-Q$. Вычислим потенциалы шара и оболочки и приравняем их друг к другу. Потенциал центра шара (равный потенциалу шара) вычисляем по принципу суперпозиции:

$$\varphi_ш=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q}{R_1}+\frac{q}{R}+\frac{Q}{R_2}\right).$$

Потенциал оболочки находим из соображений, что во внешнем пространстве (при $r>R_2$) поле системы равно полю точечного заряда q (q — полный заряд системы), помещенного в центр:

$$\varphi_{об}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R_2}.$$

Приравнивая $\varphi_ш$ и $\varphi_{об}$, получаем

$$Q=q(R_2/R_1-1)/(R_2/R-1).$$

Упражнения

1. Проводящий шар радиусом R_1 окружают тонкой концентрической проводящей оболочкой радиусом R_2. На оболочку наносят заряд q, а шар заземляют длинной проволокой, не имеющей электрического контакта с оболочкой. Найдите потенциал оболочки.
2. Проводящий шар радиусом r окружают концентрической толстой оболочкой из проводника, внутренний радиус которой R_1, а внешний R_2. Заряд шара q, оболочки Q. Определите потенциал шара.
3. Точечный заряд q находится на расстоянии L от центра заземленного проводящего шара радиусом R. Определите заряд, находящийся на шаре.
4. Два проводящих заряженных шара, радиусы которых R_1 и R_2, а расстояние между центрами L (L велико по сравнению с радиусами), соединяют проволокой. Найдите отношение зарядов шаров после соединения, учитывая в первом приближении взаимное влияние шаров. Указание: воспользуйтесь результатами задачи 4 из статьи.
5. Проводящий шар радиусом R_1 окружают тонкой проводящей концентрической оболочкой радиусом R_2, а в пространство между ними на расстоянии R от центра помещают точечный заряд q ($R_1<R<R_2$). Какие заряды будут находиться на шаре и оболочке, если оба проводника заземлить?

Рассказ перепечатывается по изданию «Библиотека современной фантастики в 15-ти томах. Том 1 (М., Молодая гвардия, 1967).

МАГАЗИН ИГРУШЕК

(фантастический рассказ)

Г. ГАРРИСОН (США)

Поскольку в толпе почти не было взрослых, а рост полковника Биффа Хаутона превышал шесть футов, он отчетливо видел каждую деталь демонстрируемой игрушки. Ребятишки — и большинство родителей — смотрели на прилавок, широко открыв рты. И только Бифф Хаутон был слишком искушенным человеком, чтобы испытывать благоговейный восторг. Единственно, почему он остался в магазине, было желание узнать, как устроена игрушка и что заставляет ее взлетать.

— Все это подробно разъясняется в инструкции,— сказал продавец, высоко поднимая ярко раскрашенную брошюру, раскрытую на четырехцветной диаграмме.— Вы все знаете, что магнит может притягивать разные предметы, и я уверен, вам известно также, что сама Земля — это огромный-преогромный магнит — именно поэтому стрелка компаса всегда показывает на север. Ну вот... Удивительный Атомный Космический Волнолет опирается на эти космические волны. Магнитные волны Земли для нас совершенно невидимы, и они пронизывают все, даже нас самих. Удивительный Атомный Волнолет плывет по этим волнам, как корабль плывет по волнам океана. А теперь смотрите...

Глаза всех присутствующих были прикованы к продавцу, когда он поставил ярко раскрашенную модель ракетного корабля на прилавок и сделал шаг назад. Модель была сделана из штампованного металла и казалась приспособленной для полета ничуть не больше, чем банка тушенки, которую она очень напоминала с виду. На разноцветной поверхности модели не было ни пропеллеров, ни ракетных сопел. Она покоилась на трех резиновых колесах, и из задней части ракеты выходил двойной изолированный провод. Этот белый провод был протянут через всю черную поверхность прилавка и заканчивался в маленьком пульте управления, который продавец держал в руке. Сигнальная лампочка, регулятор напряжения и кнопка включения — вот и все, что находилось на контрольной панели пульта.

— Я нажимаю кнопку, и ток устремляется к Волновым Приемникам,— сказал продавец.

Раздался легкий щелчок, и сигнальная лампочка начала посылать равномерные вспышки света: вспыхнула — погасла — вспыхнула — погасла. Затем продавец стал медленно поворачивать регулятор напряжения.

— С Волновым Генератором необходимо обращаться очень осторожно, поскольку здесь мы имеем дело с космическими силами...

Дружное «Ах!» вырвалось у зрителей, когда Космический Волнолет начал вибрировать, а затем медленно поднялся в воздух. Продавец отступил назад, в глубь магазина, и игрушка начала подниматься выше и выше, мягко покачиваясь на невидимых волнах магнитных сил, поддерживающих ее. Затем напряжение было снято, и модель медленно опустилась на прилавок.

— Всего семнадцать долларов девяносто пять центов! — объявил молодой человек и поставил ценник с крупными цифрами на прилавок.— Всего 17.95 за полный комплект Атомного Чуда, включая пульт управления Волнолетом, батарею и брошюру с инструкцией и описанием...

Как только указатель цены появился на прилавке, зрители сразу начали расходиться, и ребятишки, толкая друг друга, кинулись к действующим моделям электропоездов. Последние слова продавца были заглушены говором расходящихся зрителей, и он погрузился в угрюмое молчание. Он поставил пульт управления на прилавок, зевнул и сел на край стола. Полковник Хаутон один остался стоять у прилавка, после того как толпа зрителей разошлась.

— Не могли бы вы объяснить мне, как действует эта штука? — спросил полковник, наклонившись вперед.

Продавец просиял и взял одну из игрушек.

— Вот посмотрите сюда, сэр...— Он снял верхнюю часть модели.— Вот видите, на каждом ее конце расположены Космические Волновые Витки.— Он указал карандашом на необычной формы пластиковые стержни диаметром около дюйма, на которые было намотано — очевидно, как попало — несколько витков медной проволоки. Если не считать этих стержней с обмоткой, модель внутри оказалась совершенно пустой. Обмотки были соединены между собой, провода тянулись к пульту управления и исчезали в его днище.

Бифф Хаутон иронически посмотрел на модель и перевел затем взгляд на лицо продавца, который, очевидно, совершенно игнорировал этот знак недоверия.

— Внутри пульта управления находится батарея,— продолжал молодой человек, снимая крышку с пульта и показывая обычную батарейку от карманного фонаря.— Ток идет от батареи через включающее устройство и сигнальную лампочку к Волновому Генератору.

— Вы хотите сказать,— прервал его Бифф,— что ток от этой копеечной батарейки проходит через вот этот дешевый реостат и попадает в бессмысленную обмотку внутри модели и что это не может дать абсолютно никакого эффекта. А теперь честно скажите мне, что на самом деле заставляет ее подниматься в воздух? Если уж я плачу восемнадцать зелененьких за эту жестянку, я хочу точно знать, что покупаю.

Продавец покраснел.

— Извините, сэр,— пробормотал он, заикаясь от смущения.— Я совсем не пытался что-то скрыть от вас, сэр. Как и всякая волшебная игрушка, Волнолет имеет секрет, и этот секрет не может быть раскрыт, пока она не куплена.— Тут он наклонился вперед с заговорщицким видом.— Но я открою вам одну тайну. Цена этой модели непомерно высока, и никто ее не покупает. Директор сказал, что если найдутся желающие, можно продавать модели по три доллара штука. Если вы хотите приобрести модель за эту цену...

— Идет, мой мальчик! — не дал ему закончить полковник и бросил на прилавок три долларовые бумажки.— Эту цену я готов заплатить за игрушку, как бы она ни действовала. Ребята в лаборатории будут от нее в восторге,— прибавил он, постукивая по груди крылатой ракетой.— Ну, а теперь — как же она летает?

Продавец с таинственным видом оглянулся вокруг, придвинулся поближе к полковнику и прошептал:

— Бечевка! Или, вернее сказать, черная нитка. Она идет от носа корабля вверх через маленький блок в потолке и обратно к моей руке — привязана вот к этому кольцу, видите? Когда я отступаю, ракета поднимается. Вот и все.

— Все хорошие иллюзионные трюки очень просты,— проворчал полковник, проводив взглядом уходящую вверх нить.— Особенно когда внимание зрителей отвлекается разными уловками.

— Если у вас нет под рукой черного стола, его отлично заменит черная ткань,— заметил молодой человек.— Кроме того, этот фокус очень хорошо получается на фоне дверного проема, если только в задней комнате выключен свет, конечно.

— Заверни-ка ее, мальчуган. Сам не вчера родился. Умею в таких вещах разбираться.

Бифф Хаутон продемонстрировал свою покупку во время игры в покер в следующий четверг. Все его гости были специалистами по ракетной технике, и хохот во время чтения инструкции не прекращался ни на минуту.

— Эй, Бифф, дай-ка я срисую диаграмму. Пожалуй, можно будет использовать эти самые магнитные волны в моей новой птичке!

— Эти батарейки дешевле воды. Вот источник энергии будущего!

Один только Тедди Кэйпер заподозрил неладное, когда начался полет ракеты. Он сам был фокусником-любителем и сразу разгадал трюк. Однако он молчал из чувства профессиональной солидарности и только иронически улыбался, когда присутствующие замолкали один за другим. Полковник умел показывать фокусы, и он превосходно подавал полет. Ему почти удалось убедить зрителей в действительном существовании Космического Волнолета еще до окончания демонстрации. Когда модель приземлилась и он выключил ток, зрители сгрудились вокруг стола.

— Нитка! — воскликнул один из инженеров с явным чувством облегчения, и все рассмеялись.

— А жаль! — сказал Главный Физик проекта.— Я надеялся, что некоторое количество Космических Волн поможет нам. Ну-ка, дайте мне попробовать!

— Первым — Тедди Кэйпер! — объявил Бифф.— Он понял, в чем дело, еще когда все вы следили за сигнальной лампочкой, только не подал виду.

Кэйпер надел кольцо с черной ниткой на указательный палец и начал медленно отходить назад.

— Сначала нужно включить питание,— напомнил Бифф.

— Я знаю,— улыбнулся Кэйпер.— Но это входит в иллюзионный трюк — все эти уловки и игра. Сначала я попробую этот фокус просто так, посмотрю, как нужно поднимать и опускать модель, а затем проделаю фокус со всеми атрибутами.

Он начал отводить руку назад, мягким и гибким профессиональным движением, почти незаметным для окружающих. Модель поднялась на несколько дюймов от стола, затем рухнула вниз.

— Нитка лопнула,— сказал Кэйпер.

— Ты, наверно, дернул ее, вместо того чтобы тянуть плавно,— сказал Бифф, связывая оборванные концы нитки.— Вот смотри, я покажу тебе, как это делается.

Но когда Бифф попробовал поднять модель, нитка снова не выдержала, что вызвало новый взрыв веселья и заставило полковника покраснеть. Кто-то напомнил об игре в покер.

Это было единственное упоминание о покере в тот вечер, потому что очень скоро они обнаружили, что нитка выдерживает вес модели только в том случае, когда ток включен и два с половиной вольта проходят через шутовскую обмотку. При выключенном питании модель была слишком тяжелой. Нитка неизменно обрывалась.

— Я все-таки думаю, что это сумасшедшая идея,— сказал молодой человек.— За эту неделю мы сбились с ног, демонстрируя игрушечные космические корабли каждому мальчишке в радиусе тысячи миль. Кроме того, продавать их по три доллара штука, когда изготовление каждой модели обошлось по крайней мере в сотню...

— Но ведь ты все-таки сумел продать десяток моделей людям, представляющим для нас интерес? — спросил пожилой мужчина.

— Пожалуй. Мне удалось продать их нескольким офицерам ВВС и одному полковнику ракетных войск. Затем я спихнул одну служащему Бюро Стандартов. К счастью, он не узнал меня. Потом двум профессорам из университета, которых вы мне показали.

— Так что теперь эта проблема находится в их руках, а не в наших. Нам теперь остается только сидеть и ждать результатов.

— Каких результатов? Когда мы стучались в двери научных институтов, настаивая на демонстрации эффекта, ученые не проявили никакого интереса.

Мы запатентовали эти витки и можем доказать кому угодно, что когда обмотка находится под током, вес предмета в непосредственной близости от этих витков становится меньше...

— Но лишь на очень незначительную долю меньше. И мы не знаем, чем это вызвано. Никто не проявляет ни малейшего интереса к этому вопросу — ведь речь идет о небольшом уменьшении в весе неуклюжей модели, явно недостаточном, чтобы поднять в воздух генератор тока. Все эти ученые, погруженные в грандиозные проблемы, плевать хотели на открытие какого-то сумасшедшего, сумевшего найти маленькую ошибку в законе Ньютона.

— Вы думаете, теперь они займутся этим? — спросил молодой человек, нервно ломая пальцы.

— Конечно, займутся. Прочность нити на разрыв подобрана так, что она будет рваться всякий раз при попытках поднять на ней полный вес модели. Но она выдерживает модель при том небольшом уменьшении веса, которое вызывается действием витков. Это озадачит их. Никто не заставляет их заниматься этой проблемой или решать ее. Однако само существование такого несоответствия будет постоянно мучить ученых, ибо они знают, что этот эффект противоречит всем законам и просто не может существовать. Они сразу поймут, что наша магнитная теория — сплошная чепуха. А может, не чепуха? Мы не знаем. Но они будут постоянно думать об этом и ломать себе головы. Кое-кто начнет экспериментировать у себя в подвале — просто увлечение, ничего больше,— чтобы найти объяснение. И когда-нибудь кто-то из них найдет, чем вызвано действие этих витков, а может, сумеет и усовершенствовать их!

— А все патенты в наших руках...

— Точно. Они займутся исследованиями, которые вытеснят из их голов проблемы реактивного движения с его чудовищными затратами энергии и откроют перед ними горизонты настоящих космических полетов.

— И тогда мы станем богачами — как только дело дойдет до промышленного производства,— сказал юноша с циничной улыбкой.

— Мы все разбогатеем, сынок,— похлопал его по плечу пожилой мужчина.— Поверь мне, через десять лет ты не узнаешь этого старого мира.

Перевод с английского И. Почиталина

Геометрия или анализ?

(Начало см. на с. 48)

великих теорем на составные элементы — так, как мы проделали это, решая нашу задачу,— можно убедиться, что число «ходов» там не смертельно велико, но обычно имеется несколько ходов с восклицательными знаками, для нахождения которых тратились годы, а иногда и десятилетия. Для этого нужно озарение. То, что озарение не посетило человека в обстановке состязания при ограниченности времени, ничего особенного не означает, во всяком случае не может служить доказательством того, что данный человек не имеет должных способностей (а я вообще убежден в том, что определить границы одаренности на конкурсной или тестовой основе невозможно). И поэтому задачи с восклицательными знаками, если и могут использоваться на конкурсных экзаменах, то только односторонне: решил — молодец, нет — не считается. (А как выявить людей «с озарениями» — особый вопрос.)

Но надо сказать, что задач с восклицательными знаками и к тому же эстетически красивых не так уж много. Чтобы их придумать, также нужно озарение. Задача, которую мы разбирали — «с озарением», не так ли? Если вы согласны со мною, значит, мы не зря потратили время.

Ракурс

Муравей и ... электронный микроскоп

Перед вами портрет обыкновенного черного муравья «крупным планом». Этот муравей был помещен в камеру одной из самых современных установок для исследования материалов — *растрового электронного микроскопа с полевой эмиссией электронов* (производства фирмы «Hitachi», Япония).

Как устроен прибор, носящий столь сложное имя?

Основное отличие *электронного микроскопа* от оптического состоит в том, что в нем вместо световых лучей используются пучки электронов, управляемые электрическими и магнитными полями. Эта «замена» позволила повысить пределы разрешения прибора примерно с 4000 до нескольких ангстрем. Напомним, что 1 Å — это диаметр атома водорода; таким образом, исследователи сегодня, изучая рельеф и химический состав поверхности материала, работают уже со счетным количеством атомов.

Растровые электронные микроскопы работают по принципу сканирования, т. е. последовательного, от точки к точке, перемещения тонкого электронного пучка по исследуемому объекту. Понятно, что разрешающая способность такого прибора определяется минимальным диаметром электронного пучка. Но чем меньше энергия электронов, а это необходимо для уменьшения разрушения поверхности материала, тем труднее такой пучок сфокусировать, а значит, тем менее детальной будет картина микромира.

Трудности удалось преодолеть благодаря использованию в электронной пушке растрового электронного микроскопа не обычного накаливаемого катода, а так называемого *катода с полевой эмиссией*, выполненного в форме острия, с поверхности которого электроны вытягиваются сверхсильным электрическим полем. Это дает возможность резко, на порядки величины, повысить яркость электронного прожектора, а значит, практически исключить недостатки, присущие работе с низкоэнергетическими электронами.

Растровые электронные микроскопы начали свое победное шествие по лабораториям мира около тридцати лет назад. Сегодня это один из основных рабочих инструментов исследователя в области материаловедения, микроэлектроники, биологии, медицины и др.

Т. Гролова

Внимание!

Журналы «Квант» (СССР) и «Quantum» (США — СССР), а также Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество «Союз» (ВАКО) и International Educational Network (США) проводят

Советско-американский конкурс юных любителей астрономии и космонавтики

Возможно, этот конкурс станет традиционным. К участию в нем приглашаются все учащиеся школ, гимназий, техникумов и т. д., кроме выпускных (1990/91 учебного года) классов. Первый конкурс пройдет в три тура.

I и II туры (соответственно с октября по декабрь 1990 г. и с января по март 1991 г.) являются заочными и включают в себя задачи из области космонавтики, астрономии, физики, математики, логики.

III тур (апрель — май 1991 г.) — очный. Затем победители конкурса примут участие в одной из двух трехнедельных космических школ, которые будут проведены в июле — августе 1991 г. в США и в СССР.

Занятия со школьниками проведут специалисты по физике, математике и космической технике обеих стран.

Ниже мы приводим задачи I тура. Ответы на них должны быть отправлены не позднее 1 декабря 1990 г. по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, журнал «Квант», с пометкой «Конкурс KQ — 91».

Задания I тура

Задача 1. На высоте 10 км от поверхности Марса вертикально вниз с начальной скоростью 1 м/с сброшен зонд. Через 30 с свободного падения раскрывается парашют, после чего вертикальная скорость зонда устанавливается равной 2 м/с. На какое расстояние l по горизонтали от точки сброса удалится зонд, если во время его спуска имеется постоянный снос в сторону со скоростью 3 м/с? (Влиянием марсианской атмосферы на начальном участке спуска пренебречь.)

Задача 2. Лунная база имеет форму куба. На двух противоположных стенах базы (ровно посередине) расположены выходы. На расстоянии 15 м от каждого выхода на высоте человеческого роста находятся световые маяки. Космонавт выходит из базы и идет по прямой вдоль стены. Пройдя 60 м, он начинает видеть одновременно оба маяка. Определите объем лунной базы.

Задача 3. Многим хорошо известен роман А. Кларка «Космическая одиссея 2001 года». Дайте свое предложение одиссеи 2001 года, которая бы увлекла все человечество, и обоснуйте его.

Конкурс проводится в рамках Международного года космоса. Напомним, что ООН объявила 1992 год Международным годом космоса (МГК). В связи с этим событием организуется множество международных конференций, симпозиумов, семинаров и т. д. Возможно, будут заключены важные межправительственные соглашения по освоению Солнечной системы. (Интересно, что Первый искусственный спутник Земли был запущен в рамках проводившегося в 1957 году Международного геофизического года.) Может быть, это будут программы исследования Марса. Может, создание электростанций или гигантских комплексов связи на орбите... Да мало ли интересного можно сделать вместе! Но в любом случае осуществление подобных проектов — за нынешними школьниками — будущими специалистами в области космонавтики.

Именно поэтому большое место в рамках МГК занимает молодежная программа. Планируются и различные соревнования, в том числе космическая (по аналогии с физической, математической и др.) олимпиада.

В номере 7 за этот год мы опубликовали обращение Оргкомитета национального этапа Международного конкурса «Вместе к Марсу». В этом номере мы начинаем публикацию дополнительных материалов, которые могут оказаться полезными для его участников.

56 миллионов километров до Красной планеты

Е. НАРИМАНОВ

Вперед к Марсу! Только к Марсу!
Ф. Цандер

Марс относится к планетам земной группы и занимает по размеру промежуточное положение между Землей и Луной. Несмотря на свои скромные размеры (диаметр в два раза меньше земного, масса меньше земной примерно в десять раз), поверхность Марса является более пересеченной, чем земная.

Один из интригующих вопросов геологии Марса — оценка количества воды в верхнем слое коры планеты. Из-за постоянных отрицательных температур на поверхности планеты ее верхний слой промерз на глубину до полутора километров на экваторе и на пять километров — на полюсах, образовав твердую оболочку — криолитосферу. По оценкам ученых криолитосфера содержит не менее 5×10^{16} т воды в виде льда. Гипотетический океан из воды криолитосферы, равномерно распределенной по поверхности Марса, имел бы глубину в несколько десятков метров.

Марсианский год равен примерно 700 земным суткам; марсианские сутки всего на 40 минут длиннее земных; смена времен года протекает так же, как и на Земле.

Атмосфера Марса весьма разрежена и состоит, в основном, из углекислого газа. Средняя плотность атмосферы на уровне поверхности соответствует плотности земной атмосферы на высоте 35 километров. Толщина атмосферы достигает 250 километров, за ее границей следует внешний слой и водородная корона.

Несмотря на крайне суровые условия, на Марсе возможно существование каких-то форм жизни. Не исключено, что органическая жизнь там могла бы существенно отличаться от известных форм жизни. Следует учитывать, что для построения белковых соединений в земных условиях используются только 20 аминокислот, хотя науке известны более ста природных типов аминокислот.

Цели пилотируемых полетов на Марс

Решение загадок Марса возможно путем проведения разнообразных широких и тщательных научных исследований с орбиты искусственного спутника Марса, на поверхности планеты и в ее недрах. Дальнейшее изучение Марса по трем основным направлениям — геологическая история, внутреннее строение, процессы, формировавшие поверхность; история климата, строение атмосферы, ее эволюция и процессы, протекающие в ней; поиск следов биосферы — возможно автоматическими космическими аппаратами без участия космонавтов. По мнению ученых-планетологов, уже в ближайшее десятилетие с помощью автоматических космических аппаратов должно быть проведено глобальное картографирование Марса, подробно исследованы один-два наиболее интересных района с помощью передвигающегося по поверхности робота-марсохода, доставлены на Землю образцы грунта изучаемых районов для тщательного анализа в лабораториях с использованием могучих средств мировой науки.

На дальнейшем этапе исследований Марса целесообразно включение в проведение работ на поверхности планеты космонавтов-исследователей. Ученый-геолог выполнит предварительный отбор образцов грунта, ученый-климатолог зарегистрирует и проведет экспресс-анализ интересных атмосферных явлений, ученый-биолог осуществит поиск форм жизни в труднодоступных местах исследуемого района. Тем самым резко повысится эффективность работ, существенно интенсифицируются исследования, появится возможность внесения корректив в ход работ на поверхности планеты.

Марс — единственная планета, на которой может быть создана колония землян уже в первой половине XXI века на основе разрабатываемой ракетно-космической техники. В связи с этим первую пилотируемую экспедицию на Марс следует рассматривать и как реализацию первого (рекогносцировочного) этапа колонизации планет Солнечной системы. Даже кратковременное (одна-две недели) пребывание космонавтов на поверхности Марса будет иметь для дальнейшей судьбы людей огромное значение. Изучение окружающего таинственного мира, поддержание искусственной среды обитания, обеспечение безопасности, управление сложными техническими средствами будет способствовать совершенствованию физических, интеллектуальных и духовных качеств личности, будет формировать в среде колонистов более совершенные общественные отношения.

На этапе подготовки к осуществлению первой пилотируемой экспедиции на Марс потребуется объединение усилий передовых государств мира, прежде всего СССР и США. Совместная работа ученых, инженеров, техников над этой сложнейшей задачей, продиктованной требованиями разума и прогресса, неизбежно оттеснит конфронтацию, предубеждение в отношениях между народами, будет способствовать объединению наций в единую семью.

В качестве исходных данных при анализе (в рамках национального этапа конкурса «Вместе к Марсу») различных аспектов осуществления экспедиции могут быть приняты следующие основные положения:

1. Длительность экспедиции — 500—1000 суток.

2. Время пребывания космонавта на поверхности Марса — 10—15 суток.

3. Численность экипажа на межпланетном корабле — 4—10 человек.

4. Число космонавтов, высаживающихся на поверхность Марса,— 3—6 человек.

5. Дата старта марсианского экспедиционного комплекса с орбиты искусственного спутника Земли — оптимистическая оценка — 2005 г.; пессимистическая оценка — 2020—2030 г.

Рекомендуемая литература

Уманский С. П. Реальная фантастика. М.: Московский рабочий, 1985.

Левантовский В. И. Механика космического полета в элементарном изложении. М.: Наука, 1980.

Гришин Ю. И. Искусственные космические экосистемы. М.: Знание, 1989.

Кузьмин Р. О., Галкин И. Н. Как устроен Марс. М.: Знание, 1989.

Чекарин С. В. Транспортные космические системы. М.: Знание, 1990.

Зайцев Ю. И. Покорение Марса: станет ли оно реальностью? Земля и Вселенная, 1989, № 1, с. 19—26.

Хоровиц Н. Поиски жизни в Солнечной системе. М.: Мир, 1988.

(Продолжение следует)

Перечень тем,

рекомендуемых для разработки участникам национального этапа Международного конкурса «Вместе к Марсу» («КВМ—91»)

Направление № 1. Научная программа исследований.

1. Проекты научных экспериментов, проводимых с помощью автоматических и пилотируемых космических аппаратов, с целью получения новых данных в области астрономии, планетологии, физики, химии, космической биологии, медицины и других наук.

2. Аппаратура для проведения научных экспериментов, режимы функционирования аппаратуры и роль космонавта-исследователя при проведении экспериментов.

Направление № 2. Концепции решения задачи о полетах к Марсу, схемы полета.

1. Способы и средства осуществления полета к Марсу автоматических космических аппаратов и пилотируемого комплекса.

2. Методы формирования марсианского экспедиционного комплекса (МЭК) на околоземной орбите.

3. Схемы осуществления полета МЭК.

4. Выбор рациональной двигательной установки МЭК — ключ к решению задачи полета человека на Марс.

5. Программы подготовки и проведения пилотируемой экспедиции на Марс.

6. Луна как полигон для отработки и стартовая площадка для МЭК.

Направление № 3. Конструктивно-компоновочные решения.

1. Марсианский экспедиционный комплекс в целом.

2. Жилой модуль.

3. Посадочный аппарат.

4. Энергетический, научный и другие модули и блоки, входящие в МЭК.

5. Разгонно-тормозные ракетные ступени МЭК.

6. Устройства, обеспечивающие торможение МЭК в атмосферах Земли и Марса.

7. Сборочно-монтажный орбитальный центр.

8. Марсоход и другие средства передвижения по поверхности Марса.

9. Автоматические космические аппараты для исследования Марса и его спутников.

Направление № 4. Бортовые служебные системы.

1. Энергоустановка межпланетного корабля и посадочного аппарата.

2. Система жизнеобеспечения экипажа.

3. Система поддержания температурного режима.

4. Радио- и телевизионные системы, функционирующие на борту МЭК и на поверхности Марса.

5. Средства, обеспечивающие радиационную защиту экипажа.

6. Средства противометеоритной защиты конструкции.

7. Системы защиты космонавтов от химического и другого заражения на поверхности планеты.

8. Методы и средства предупреждения заражения Марса и Земли микроорганизмами иного мира.

Направление № 5. Искусственная тяжесть на борту космического корабля.

1. Конструктивно-компоновочные решения МЭК при создании искусственной тяжести в отсеках жилого модуля.

2. Способы и средства, обеспечивающие предупреждение нежелательных последствий длительного пребывания человека в условиях невесомости.

3. Обеспечение работы маршевой двигательной установки и бортовых систем МЭК при создании искусственной тяжести в жилых отсеках комплекса.

Направление № 6. Эргономика (человек в космосе).

1. Подготовка экипажа к длительному полету.

2. Физиологические, физические и психологические факторы при осуществлении экспедиции на Марс.

3. Роль экипажа при предупреждении аварийных ситуаций и выходе из них.

4. Распределение обязанностей между членами экипажа МЭК при решении разнообразных научных, инженерно-технических и медицинских задач.

Направление № 7. Вопросы безопасности полета.

1. Способы и средства обеспечения безопасности экипажа на всех этапах полета МЭК.

2. Обеспечение спасательных операций, необходимые технические средства.

3. Ремонтно-восстановительные работы на борту МЭК и на поверхности Марса.

Направление № 8. Экономика.

1. Оценка необходимых ресурсов при подготовке и осуществлении экспедиции на Марс.

2. Международная кооперация как способ снижения затрат, ускорения темпа работ и сближения наций.

3. Использование в народном хозяйстве новых технологий, полученных в рамках выполнения работ по марсианской экспедиции.

Направление № 9. Ресурсы Марса.

1. Полезные ископаемые Марса и его спутников, способы их добычи и утилизации.

2. Завод (установки) по переработке ресурсов Марса и его спутников.

3. Использование ресурсов Марса при осуществлении пилотируемой экспедиции на планету.

Направление № 10. Колонизация Марса.

1. Колония на Марсе, проектное решение.

2. Индустрия на Марсе.

3. Производство продуктов питания на Марсе, искусственная пища.

4. Замкнутые экологические системы на поверхности планеты.

5. Организация отдыха колонистов.

6. Возможности создания искусственной природной среды на поверхности планеты.

7. Ракетно-космические средства, используемые на этапе колонизации Марса.

8. Колония на Марсе — начальный этап экспансии человечества во Вселенную.

Информация

V Научно-техническая конференция школьников

Пятая всесоюзная Научно-техническая конференция школьников прошла с 4 по 8 мая 1990 года на международной молодежной базе ЦК ВЛКСМ «Олимпиец». Как и раньше, организатором конференции стал Московский физико-технический институт, в качестве спонсоров выступили Детский фонд им. В. И. Ленина, Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество «Союз» и редакция журнала «Юный техник». На конференцию приехали около 150 школьников со всего Советского Союза. Они выступили на 6 секциях: математики, физики, биофизики и молекулярной физики, аэрокосмической физики, программирования, информатики и вычислительной математики. Седьмая секция — юных изобретателей — была проведена редакцией журнала «Юный техник». Участники конференции совершили интересные экскурсии по Москве, в Центр управления полетом, на базовые кафедры МФТИ. По вечерам школьники встречались с редколлегиями журналов «Квант» и «Юный техник», перед ними выступали творческие коллективы из МФТИ и приглашенные Детским фондом одаренные дети. Все участники конференции были награждены дипломами и различными призами.

Теперь, как обычно, мы ждем ваших работ на VI Научно-техническую конференцию школьников, которая пройдет в апреле — мае 1991 года. Участником конференции может стать любой школьник или группа школьников. Для этого необходимо рассмотреть любой вопрос по физике, математике, информатике, или провести интересный эксперимент, или составить программу для ЭВМ. Оргкомитетом поощряются самостоятельные исследования школьников.

Работа оформляется в виде реферата (7—25, по возможности машинописных, страниц), один экземпляр которого необходимо не позднее 1 февраля 1991 года отправить по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, Оргкомитет VI Научно-технической конференции школьников. На первой странице реферата необходимо указать фамилию, имя, отчество авторов, класс и школу, а также свой полный домашний адрес. Текст реферата не возвращается, так что не забудьте оставить экземпляр себе.

Все поступившие рефераты рецензируются специалистами, авторы лучших работ получают приглашения для выступления на НТКШ.

Дополнительные справки можно получить по телефону ЗФТШ при МФТИ: (095) 408-51-45.

Член оргкомитета НТКШ
А. Сапожников

XVI Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции в дни весенних школьных каникул проходил заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике и физике. В этом году состязания проводились в городах Владимире, Краснодаре, Пензе и Улан-Удэ.

Математика

Соревнования проходили в два дня, каждый день участникам предлагались 4 задачи. После формулировки каждой задачи в скобках указано количество баллов, присуждавшихся за полное ее решение.

9 класс

Первый день

1. Среди двадцати пяти внешне одинаковых монет 3 фальшивые и 22 настоящие. Все настоящие монеты имеют равные веса. Все фальшивые монеты также имеют равные веса, причем фальшивая монета легче настоящей. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти шесть настоящих монет? (6)

2. Числа a, b, c, d, p, q связаны соотношением $ab+cd=2pq$. Докажите, что если $ac\geqslant p^2>0$, то $bd\leqslant q^2$. (7)

3. Дана шахматная доска размером $n\times n$, $n\geqslant 3$. Одним ходом разрешается выбрать в любом месте доски какую-нибудь из фигур, указанных на рисунке 1, и изменить цвет всех ее клеток на противоположный. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы у всех клеток доски цвет изменился на противоположный? (14)

4. В квадрате со стороной 12 расположены 1990 точек. Докажите, что существует равносторонний треугольник со стороной 11, в котором расположены по крайней мере 498 из этих точек. (13)

Второй день

5. Найдите все положительные значения a, для которых оба корня уравнения $a^2x^2+ax+1-7a^2=0$ являются целыми числами. (6)

6. Из квадрата $n\times n$ вырезана одна угловая клетка 1×1. На какое наименьшее число равновеликих треугольников можно разрезать получившуюся фигуру? (7)

7. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B, центр O окружности S_1 лежит на окружности S_2. Хорда AC окружности S_1 пересекает окружность S_2 в точке D так, как показано на рисунке 2. Докажите, что отрезки OD и BC перпендикулярны. (11)

8. Среди сторон и диагоналей выпуклого пятиугольника $ABCDE$ нет параллельных отрезков. На стороне AB рисуется стрелка, направленная в сторону точки пересечения прямых AB и CE. На стороне BC рисуется стрелка, направленная в сторону точки пересечения прямых BC и AD. Аналогичным образом рисуются стрелки на сторонах CD, DE, EA. Докажите, что в сторону одной из вершин пятиугольника направлены две из нарисованных стрелок. (16)

10 класс

Первый день

1. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

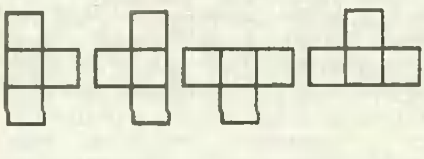


Рис. 1.

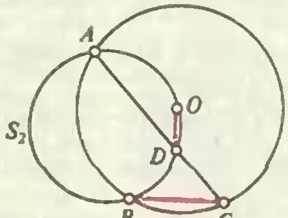


Рис. 2.

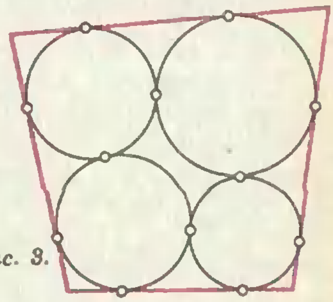


Рис. 3.

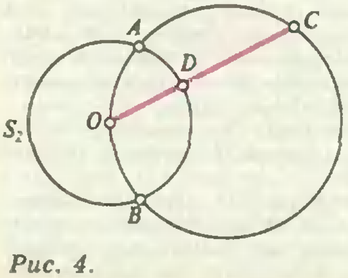


Рис. 4.

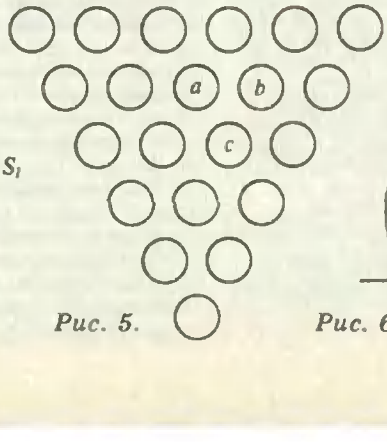


Рис. 5.

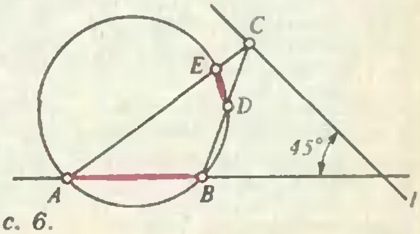


Рис. 6.

$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(a+c)}>$
$>\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}$. (5)

2. Внутри круга расположены 100 точек, ни одна из которых не совпадает с центром круга и никакие две из которых не лежат на одном радиусе.

а) Докажите, что существует круговой сектор с углом $2\pi/11$ радиан, в котором лежат ровно 10 из данных точек. (7)

б) Верно ли, что найдется круговой сектор с углом $2\pi/11$ радиан, в котором лежат ровно 11 точек? (4)

Считается, что радиусы, ограничивающие сектор, принадлежат этому сектору.

3. Внутри выпуклого четырехугольника расположены четыре окружности, каждая из которых касается двух сторон четырехугольника и двух окружностей так, как показано на рисунке 3. Известно, что в четырехугольник можно вписать окружность. Докажите, что по крайней мере две из данных окружностей равны. (10)

4. Тройки чисел (x_n, y_n, z_n), $n=1,2,\ldots$, строятся по следующему правилу:

$$x_1=2,\ y_1=4,\ z_1=\frac{6}{7};$$
$$x_{n+1}=\frac{2x_n}{x_n^2-1},\ y_{n+1}=\frac{2y_n}{y_n^2-1},$$
$$z_{n+1}=\frac{2z_n}{z_n^2-1},\ n\geqslant 1.$$

а) Докажите, что указанный процесс построения троек может быть неограниченно продолжен. (4)

б) Может ли на некотором шаге получиться тройка чисел (x_k, y_k, z_k), для которой выполняется равенство $x_k+y_k+z_k=0$? (10)

Второй день

5. На доске написаны несколько положительных чисел таких, что сумма всех их попарных произведений равна 1. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет меньше $\sqrt{2}$. (7)

6. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B, причем центр O окружности S_2 лежит на окружности S_1. Хорда OC пересекает окружность S_2 в точке D так, как показано на рисунке 4. Докажите, что точка D является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC. (9)

7. Можно ли в кружочках, показанных на рисунке 5, разместить натуральные числа от 1 до 21 так, чтобы в любой строке, кроме первой, каждое число было равно модулю разности двух стоящих над ним чисел (т. е. $c=|a-b|$)? (12)

8. Даны n различных векторов, обладающих следующим свойством: для некоторого натурального p модуль суммы любых p из данных векторов равен модулю суммы остальных $n-p$ векторов.

а) Докажите, что если $p\neq\frac{n}{2}$, то сумма всех данных векторов равна нулю. (8)

б) Верно ли, что сумма всех данных векторов равна нулю, если $p=\frac{n}{2}$? (4)

11 класс

Первый день

1. Задача 1 для девятого класса. (6)

2. Докажите, что для произвольного треугольника справедливо неравенство $a\cdot\cos A+b\cdot\cos B+c\cdot\cos C\leqslant p$, где a, b, c — стороны треугольника, A, B, C — противолежащие им углы, p — полупериметр. (9)

3. Даны 8 кубиков с ребром 1, произвольные 24 грани которых окрашены в белый цвет, а остальные 24 грани — в черный. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб, на поверхности которого будет поровну белых и черных квадратиков со стороной 1. (13)

4. В окружности радиусом 1 дана хорда AB, длина которой меньше $\sqrt{2}$. Прямая l, образующая с хордой угол 45°, не пересекает данную окружность (рис. 6). С помощью циркуля и линейки на прямой l постройте точку C так, чтобы отрезки ED и AB были перпендикулярны. (E и D — точки пересечения отрезков CA и CB с окружностью.) (12)

Второй день

5. Найдите все натуральные числа x, y, удовлетворяющие уравнению $7^x-3\cdot 2^y=1$. (7)

6. Точки D и E лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC, точки K и M делят отрезок DE на три равные части. Прямые BK и BM пересекают сторону AC в точках T и P. Докажите, что $TP\leqslant\frac{1}{3}AC$. (8)

7. В основании пирамиды $SABCDE$ лежит правильный пятиугольник $ABCDE$. Основание M высоты пирамиды SM лежит внутри пятиугольника $ABCDE$. Известно, что радиусы сфер, описанных около тетраэдров $SMAB$, $SMBC$, $SMCD$ равны. Можно ли утверждать, что данная пирамида правильная? (11)

8. В клетках прямоугольной таблицы записаны положительные числа. Для каждой строки находится сумма всех записанных в ней чисел, а затем вычисляется произведение P всех таких сумм. Докажите, что если в каждом столбце переставить числа по неубыванию так, чтобы наименьшее число стояло в первой строке, а наибольшее — в последней, то произведение P для новой таблицы не будет превосходить первоначальное значение. (14)

Физика

На теоретическом туре каждому участнику олимпиады было предложено 4 задачи (на 4 часа). Как показали результаты проверки, для девятиклассников наиболее трудной оказалась третья задача — ее смогли решить лишь двое из девяноста участников. Очень мало одиннадцатиклассников справились со своей четвертой задачей. Остальные задачи правильно решили от 25 до 70 % участников.

Экспериментальный тур олимпиады включал 2 задачи (на решение которых отводилось тоже 4 часа).

Интересно, что в этом году школьники предложили немало весьма оригинальных решений (можно сказать, на любой вкус жюри). Сей отрадный факт был отмечен несколькими

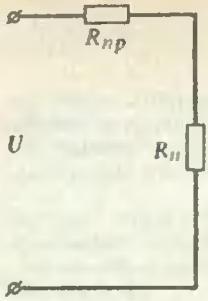


Рис. 1.

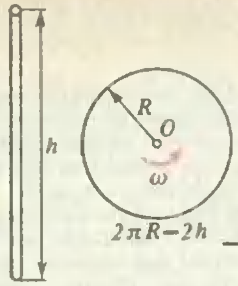


Рис. 2.

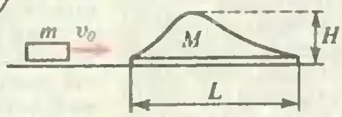


Рис. 3.

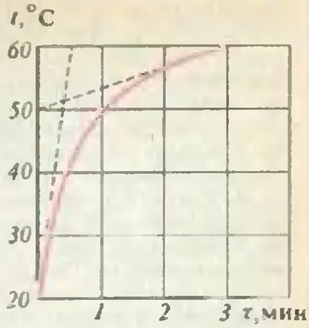


Рис. 4.

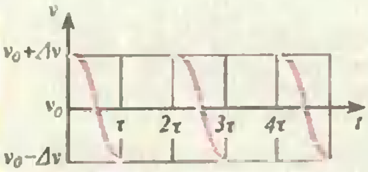


Рис. 5.

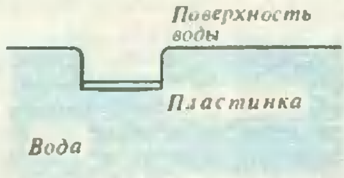


Рис. 6.

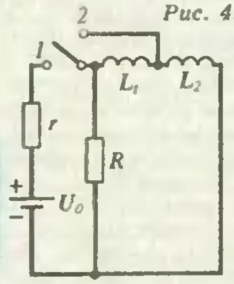


Рис. 7.

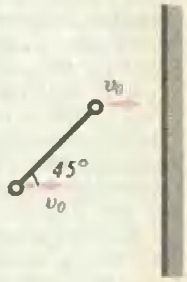


Рис. 8.

специальными призами. Так, М. Кузьменко (г. Ухта) получил приз «За лучшую литературную обработку экспериментального тура», а А. Вакушин (г. Сыктывкар) — «За свободу мысли и человеческий подход к решению задачи».

Теоретический тур

9 класс

1. Стоя на льду и оставаясь неподвижным, человек пытается сдвинуть с места тяжелые сани за привязанную к ним веревку. Масса саней $M=100$ кг, человека $m=60$ кг. Коэффициент трения саней о лед $\mu_1=0{,}2$, человека $\mu_2=0{,}3$. Под каким углом к горизонту нужно тянуть за веревку?

2. Свинцовая проволочка диаметром $d=0{,}3$ мм плавится при пропускании через нее тока $i=1{,}8$ А, а проволочка диаметром $D=0{,}6$ мм — при токе $I=5$ А. При каком токе разорвет цепь (рис. 1) предохранитель, составленный из двух свинцовых проволочек указанных диаметров, соединенных параллельно? А из двадцати тонких и одной толстой, соединенных параллельно? Считать, что сопротивление нагрузки $R_н$ гораздо больше сопротивления предохранителя $R_{пр}$, а длины проволочек одинаковые.

3. Резиновое кольцо повесили на гвоздь (рис. 2). При этом его длина оказалась равной $2h$. После этого кольцо раскрутили в горизонтальной плоскости до угловой скорости ω такой, что его длина также оказалась равной $2h$. Найдите угловую скорость вращения кольца.

4. Локатор излучает очень короткие импульсы в направлении самолета. Частота повторения этих импульсов ν_1. На борту самолета импульсы принимаются с частотой ν_2. Определите скорость самолета по направлению на локатор, если скорость распространения радиоволн c.

10 класс

1. На гладком горизонтальном столе покоится гладкая несимметричная подвижная горка. Масса горки M, ее размеры показаны на рисунке 3. На горку наезжает со скоростью v_0 грузик массой m. Через время t грузик покидает горку. На какое расстояние сместится горка к этому моменту? Грузик не отрывается от горки в процессе движения.

2. В стакан с водой опустили кипятильник, и вода начала понемногу нагреваться. График зависимости температуры воды от времени приведен на рисунке 4. По истечении 3 минут кипятильник выключают, и вода начинает остывать. Через какое время она остынет до 50 градусов?

3. Сосуд разделен жесткой неподвижной перегородкой на два объема. Первоначально в первом из них находится гелий при некотором давлении p_1, во втором — аргон при давлении p_2. Через длительное время из-за просачивания гелия сквозь перегородку в первом объеме давление стало p_2, а во втором — p_1. Найдите отношение p_2/p_1. Процесс изотермический.

4. Лампочка для фонаря рассчитана на напряжение 2,5 В при токе 0,2 А. Для питания ее от аккумулятора напряжением 6 В применяют электронное устройство, которое с высокой частотой то подключает, то отключает лампочку. Какую часть периода лампочка должна быть подключена? Внутреннее сопротивление источника 2 Ом.

11 класс

1. Получены радиосигналы, предположительно от внеземной цивилизации (ВЦ) в созвездии Кита. Интересно, что сигналы принимаются с перерывами: $\tau=45$ мин сигнал есть, потом 45 мин он отсутствует, затем опять 45 мин есть и т. д. Более того, частота сигнала

меняется, как показано на рисунке 5 ($\nu_0 = 1{,}5 \cdot 10^9$ Гц, $\Delta\nu = 3 \cdot 10^4$ Гц). Предполагая, что радиостанция, излучающая сигнал постоянной частоты, находится на искусственном спутнике, обращающемся по круговой орбите вокруг планеты ВЦ, найдите массу этой планеты. Считать, что отрезок Земля — планета ВЦ лежит в плоскости орбиты спутника.

2. Круглую пластинку диаметром $d=40$ мм и толщиной $a=0{,}5$ мм осторожно положили на поверхность воды. Благодаря поверхностному натяжению она осталась на плаву, причем в месте соприкосновения верхней плоскости пластинки с поверхностью воды угол между ними оказался равным 90°. (Вид сбоку схематически изображен на рисунке 6.) Определите плотность пластинки. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}073$ Н/м.

3. В схеме, приведенной на рисунке 7, после установления токов ключ мгновенно перебрасывают из положения *1* в положение *2*. Считая катушки индуктивности идеальными, найдите количество теплоты, которое выделится на резисторе R после перебрасывания ключа.

4. «Гантелька», составленная из двух очень маленьких массивных шариков, соединенных невесомым абсолютно жестким стержнем, движется поступательно со скоростью v_0 по направлению к неподвижной гладкой массивной стенке, причем ось «гантельки» составляет угол 45° с плоскостью стенки (рис. 8). Определите, как будет двигаться «гантелька» после абсолютно упругого соударения со стенкой.

Экспериментальный тур

9 класс

1. Определите плотность вещества X в твердом состоянии. Вещество X не растворяется в воде и не вступает с ней в химические реакции. Плотность воды примите равной 1000 кг/м^3.

Оборудование: стеклянный сосуд с водой, пробирка, линейка измерительная, неизвестное вещество.

2. Исследуйте зависимость между объемом пузырька воздуха и скоростью его движения в трубке с водой.

Оборудование: сосуд с водой, трубка стеклянная, пластилин, пипетка медицинская, часы с секундной стрелкой, линейка.

10 класс

1. Постройте график зависимости силы тока, протекающего через раствор медного купороса, в зависимости от напряжения на электродах. Исследуйте поведение кривых при различных концентрациях раствора.

Оборудование: сосуд с водой, медный и стальной электроды, амперметр, вольтметр, соединительные провода, кристаллический медный купорос ($CuSO_4$), весы с разновесами, источник тока, реостат.

2. Определите коэффициент трения железа по дереву.

Оборудование: две линейки ученические деревянные с миллиметровыми делениями, шарик железный.

11 класс

1. Исследуйте характеристики своего глаза как оптического прибора. Определите спектральные границы его чувствительности, разрешающую способность глаза (угловую), значения его оптической силы.

Оборудование: дифракционная решетка, электрическая лампа с прямой нитью накала (одна на класс), измерительная линейка, рулетка, листы белой и черной бумаги.

Примечание: разрешающей способностью оптической системы называется минимальный угол между направлениями на две точки, при котором получаются два отдельных изображения этих точек. Глубину глазного яблока считайте равной 2 см.

2. Определите, какую часть энергии падающего на него видимого света поглощает фильтр.

Оборудование: две лампы на подставке, две собирающие линзы, источник питания, соединительные провода, экран, черная бумага, ножницы, нейтрально-серый фильтр, миллиметровая бумага.

Публикацию подготовили М. Гаврилов, Л. Купцов, О. Овчинников, С. Резниченко

Несколько задач Бакинской физической олимпиады

1. *Мяч свободно падает с высоты* $H=120$ м на горизонтальную плоскость и многократно отражается от нее. При каждом отскоке скорость мяча уменьшается в $n=2$ раза. Постройте график зависимости скорости от времени и найдите путь, пройденный мячом с начала падения до остановки. (9 кл.)

2. В калориметр, содержащий $m_1=2$ кг воды при температуре $t_1=+5$ °С, положили кусок льда, масса которого $m_2=5$ кг и температура $t_2=-40$ °С. Определите температуру и объем содержимого калориметра после установления теплового равновесия. Теплоемкостью калориметра и теплообменом с внешней средой пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_1=4{,}2$ кДж/(кг·К), льда $c_2=2{,}1$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=0{,}33$ МДж/кг, плотность воды $\rho_1=10^3$ кг/м^3, льда $\rho_2=0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3. (10 кл.)

3. Источник света помещают на расстоянии $a=5$ м от экрана, на котором с помощью собирающей линзы получают увеличенное в $\Gamma=4$ раза изображение источника. Затем экран отодвигают на расстояние $b=4$ м. Восстановить четкость увеличенного изображения можно двумя способами: 1) передвинуть только линзу; 2) передвинуть только источник. Каким будет увеличение изображения в обоих случаях? (11 кл.)

Публикацию подготовил Р. Махмудов

Ответы, указания, решения

[redacted]торые полезные показательные и [redacted]рифмические соотношения

1. 100.
2. 10.
3. 2.
4. Решений нет.
5. $\frac{1}{81}$.
6. $\left(-2;\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
7. $\left(\frac{1}{5};\ \frac{2}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.
8. $(0;\ 0{,}1) \cup (1;\ +\infty)$.
9. $\frac{1}{7}$; $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{2}\right)$.

[redacted]водящие сферы в электростатике

1. $\varphi_{об} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q(R_2-R_1)}{R_2^2}$.
2. $\varphi_ш = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1} + \frac{q+Q}{R_2}\right)$.
3. $q_ш = -qR/L$.
4. $\frac{q_1}{q_2} \approx \frac{R_1}{R_2}\,\frac{L-R_2}{L-R_1} \approx \frac{R_1}{R_2}\left(1 + \frac{R_1-R_2}{L}\right)$.
5. $q_ш = -q\,\frac{(R_2-R)R_1}{(R_2-R_1)R}$; $q_{об} = -q\,\frac{(R-R_1)R_2}{(R_2-R_1)R}$.

[redacted] Всероссийская олимпиада школьников [redacted]тематика

9 класс

1. Отложим какую-нибудь монету, а из оставшихся 24 монет выберем произвольным образом 12 и положим их на одну из чашек весов, остальные 12 монет положим на другую чашку. Если весы уравновесились, то отложенная монета фальшивая, причем на каждой чашке весов лежит ровно по одной фальшивой монете. Снимем монеты с одной из чашек и переложим на нее какие-нибудь 6 монет с другой чашки. Тогда на той чашке, которая перетянет, будут лежать 6 настоящих монет (на другой — 5 настоящих и одна фальшивая). Если весы не уравновесились, то на той чашке, которая перевесила, находится не более одной фальшивой монеты. Снимем монеты с другой чашки весов и переложим на нее какие-нибудь 6 монет с первой чашки. Если теперь весы уравновесились, то на каждой чашке находятся 6 настоящих монет. Если же какая-то чашка весов перетянет, то на ней лежат 6 настоящих монет (а на другой — 5 настоящих и 1 фальшивая).

2. Если $bd > q^2$, то $4abcd = 4(ac)\cdot(bd) > (2pq)^2 = (ab+cd)^2 = (ab)^2 + (cd)^2 + 2abcd$, т. е. $(ab-cd)^2 < 0$.

3. **Ответ:** можно, если n — четно, и нельзя, если n — нечетно.

Указание. При $n = 4k$ доску $n\times n$ можно разбить на квадраты 4×4 и каждый такой квадрат покрыть данными фигурами так, как показано на рисунке 1.

При $n = 4k+2$ доску $n\times n$ можно разбить на доску $4k\times 4k$ и «уголок», который можно разбить на прямоугольники 2×1 (рис. 2). Для перекрашивания каждого прямоугольника 2×1 достаточно выполнить три хода а), б), в) (рис. 3). При этом цвет клеток в заштрихованном прямоугольнике изменится на противоположный, а все остальные «задетые» клетки не изменят свой цвет, так как каждая из них перекрасится дважды.

При нечетном n разность между числом черных и числом белых клеток доски $n\times n$ при каждом ходе изменяется на число, кратное 4. Для исходной раскраски эта разность равна 1 или -1, для противоположной раскраски — соответственно -1 или 1.

4. **Указание.** Покроем квадрат 12×12 четырьмя правильными треугольниками со стороной длины 11 так, как показано на рисунке 4. Для этого через центр O квадрата проведем два взаимно перпендикулярных отрезка EF и KM так, чтобы $\angle KMA = 60°$, а красные правильные треугольники полностью покрыли квадрат.

В один из построенных правильных треугольников попадет не менее 498 из данных точек.

5. **Ответ:** 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

6. У одного из треугольников, имеющих общие точки с ломаной ABC (рис. 5), най-

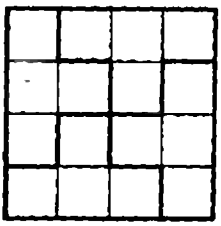


Рис. 1.

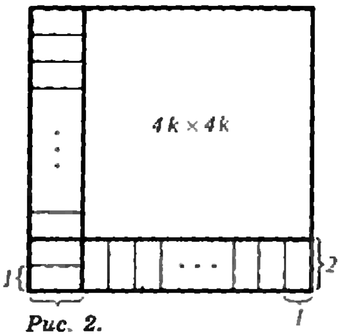


Рис. 2.

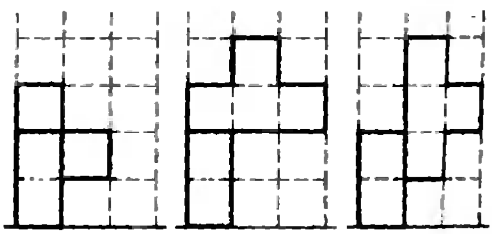


Рис. 3.

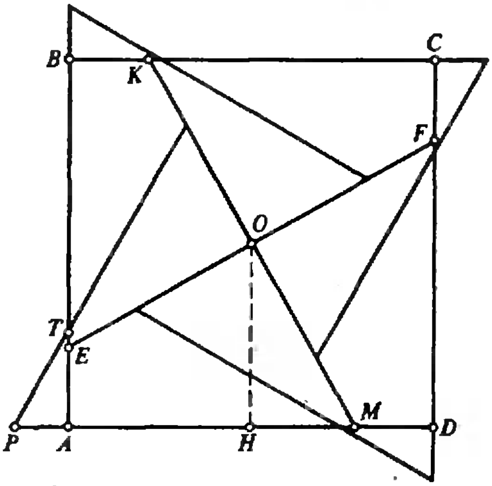


Рис. 4.

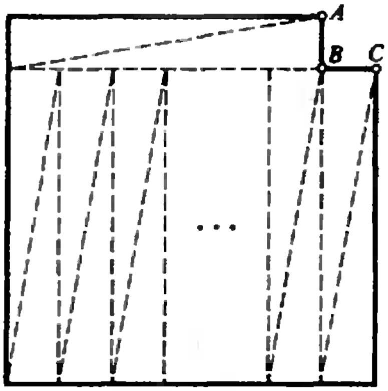


Рис. 5.

дется сторона, длина которой не больше 1, а высота, опущенная на эту сторону, не больше $n-1$. Поэтому площадь такого треугольника не больше $\frac{n-1}{2}$. С другой стороны, она равна $\frac{n^2-1}{N}$, где N — число равновеликих треугольников, на которые разрезан квадрат с вырезом. Следовательно, $\frac{n^2-1}{N}\leqslant\frac{n-1}{2}$, т. е. $N\geqslant 2n+2$. Равенство $N=2n+2$ реализуется (см. рис. 5).

7. Проведем отрезки AB, OB и OC (рис. 6). Углы BAD и BOD равны, так как они вписаны в окружность S_2 и опираются на дугу BaD. С другой стороны, $\angle BAD=\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$, поскольку угол BAC вписан в окружность S_1 и опирается на дугу BbC, а угол BOC является центральным в этой же окружности и опирается на ту же дугу BbC. Отсюда $\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOC$. Так как $\angle BOD+\angle DOC=\angle BOC$, то $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle BOC$, т. е. $\angle BOD=\angle DOC$. Следовательно, OD — биссектриса в равнобедренном треугольнике BOC (в котором $BO=OC$), и поэтому $OD\perp BC$.

8. Среди пяти треугольников, вершинами которых являются тройки последовательных вершин пятиугольника, имеется треугольник наименьшей площади. Пусть, для определенности, это будет треугольник ABC (рис. 7). Покажем, что в сторону вершины B направлены две из нарисованных стрелок.

Опустим из точек C и E перпендикуляры CK и EM на прямую AB. Поскольку $S_{ABC}\leqslant\leqslant S_{ABE}$, то $\frac{1}{2}CK\cdot AB\leqslant\frac{1}{2}EM\cdot AB$, т. е. $CK\leqslant EM$.

Равенство $CK=EM$ невозможно (если $CK=EM$, то $CE\parallel AB$). Итак, $CK<EM$. А это значит, что прямые EC и AB пересекаются в точке P, лежащей на продолжении AB за точку B, т. е. стрелка на AB направлена в сторону точки B. Аналогично доказывается, что стрелка на CB направлена в сторону точки B.

10 класс

1. После возведения обеих частей неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2\sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)}+2\sqrt{abc^2(a+c)(b+c)}+2\sqrt{a^2bc(a+b)(a+c)}>(a+b)(b+c)(c+a)$, или, после упрощений, $b\sqrt{ac(a+b)(b+c)}+c\sqrt{ab(a+c)(b+c)}+a\sqrt{bc+(a+b)(a+c)}>abc$.

Последнее неравенство очевидно.

2. а) Разобьем круг на 11 равных секторов. Если в какой-то сектор попадут ровно 10 точек, то утверждение доказано. Пусть в любом секторе находятся или не менее 11 точек, или не более 9 точек. Тогда существует сектор, содержащий не менее 11 точек, и сектор, содержащий не более 9 точек (докажите это).

Теперь будем вращать вокруг центра круга тот сектор, в котором находятся не более 9 точек, до тех пор, пока он не совместится с сектором, в котором находятся не менее 11 точек. В каждый момент времени число точек, находящихся во вращающемся секторе, может измениться не более чем на 1. Следовательно, наступит такой момент, когда во вращающемся секторе окажутся ровно 10 точек.

б) Ответ: неверно. Разобьем круг на 100 равных секторов и поместим на каждый радиус по одной точке. В этом случае в любом секторе с углом $2\pi/11$ радиан будет находиться не более 10 точек.

3. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 8). Так как в него можно вписать окружность, то

$$AB+CD=BC+AD. \qquad (*)$$

Из равенства отрезков касательных и равенства (*) следует, что $K_1K_2+M_1M_2=L_1L_2+N_1N_2$. Пусть радиусы O_1K_1, O_2K_2, O_3M_1, O_4M_2 равны r_1, r_2, r_3, r_4 соответственно. Тогда $K_1K_2=2\sqrt{r_1r_2}$, аналогично $L_1L_2=2\sqrt{r_2r_3}$, $M_1M_2=2\sqrt{r_3r_4}$, $N_1N_2=2\sqrt{r_1r_4}$. Поэтому $2\sqrt{r_1r_2}+2\sqrt{r_3r_4}=2\sqrt{r_2r_3}+2\sqrt{r_1r_4}$, или $(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3})(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_4})=0$.

4. а) Докажем, что ни на каком шаге в

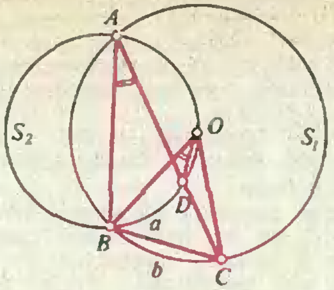


Рис. 6.

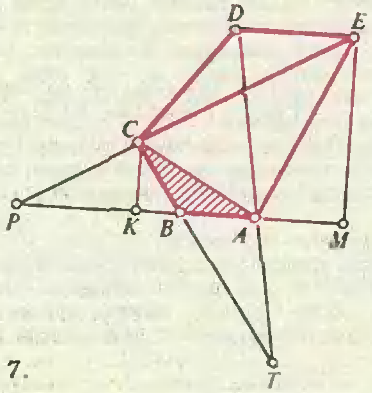


Рис. 7.

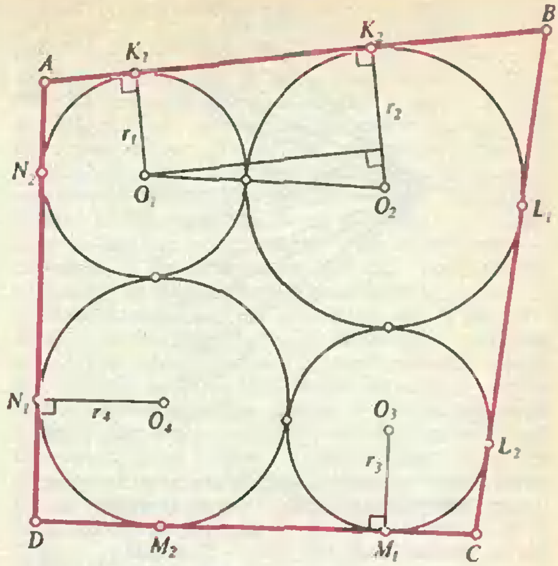


Рис. 8.

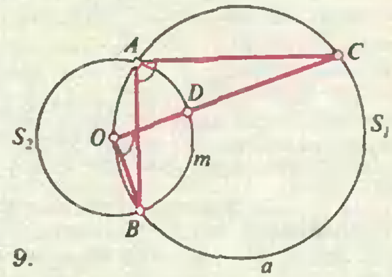


Рис. 9.

тройке не может появиться 1 или -1. Ясно, что все тройки состоят из рациональных чисел. Пусть на некотором шаге из тройки (a, b, c) получена тройка (A, B, C) и, например, $A=1$ (случай $A=-1$ и остальные случаи рассматриваются аналогично), но тогда $\frac{2a}{a^2-1}=1$, т. е. $a^2-2a-1=0$, но это невозможно.

б) Докажите, что если $x_n+y_n+z_n=x_ny_nz_n$, то $x_{n+1}+y_{n+1}+z_{n+1}=x_{n+1}y_{n+1}z_{n+1}$, $n\geqslant 1$. Если $x_n+y_n+z_n=0$ при некотором n, то хотя бы одно из чисел x_n, y_n, z_n, входящих в n-ю тройку, равно нулю, что невозможно.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — написанные числа, $S=a_1+\ldots+a_n$. Из условия задачи следует, что

$$2=a_1(S-a_1)+a_2(S-a_2)+\ldots+a_n(S-a_n).$$

Предположим, что $S-a_k\geqslant\sqrt{2}$ для всех $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда $2\geqslant a_1\cdot\sqrt{2}+a_2\cdot\sqrt{2}+\ldots+a_n\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot S$, т. е. $\sqrt{2}\geqslant S$. С другой стороны, $S>S-a_1\geqslant\sqrt{2}$. Противоречие.

6. Докажем, что AD — биссектриса угла BAC (рис. 9). Действительно, углы BOC и BAC равны. С другой стороны, $\angle BAD=\frac{1}{2}\cdot\angle BOD$. Следовательно, $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BAC=\angle DAC$.

Аналогично доказывается, что BD — биссектриса угла ABC.

7. Ответ: нельзя. Пусть требуемое размещение чисел возможно. Тогда сумма всех записанных чисел четна, так как четна сумма

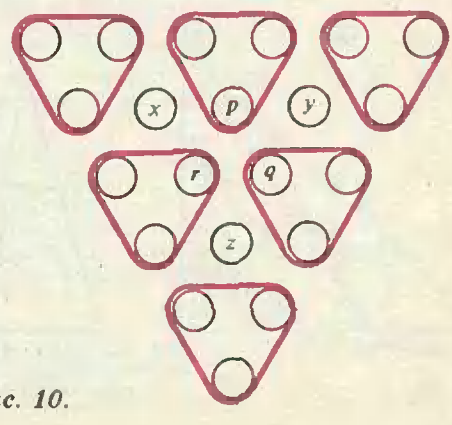


Рис. 10.

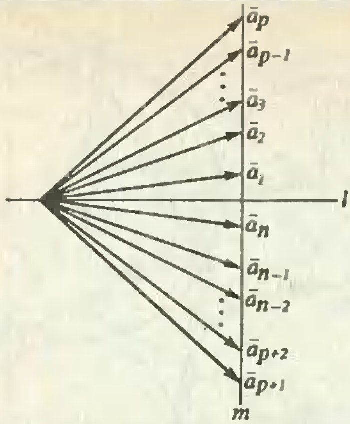


Рис. 11.

восемнадцати чисел, записанных в треугольниках на рисунке 10, а сумма трех чисел x, y, z также четна. С другой стороны, эта сумма равна $1+2+3+\ldots+21=231$.

8. а) Пусть $\vec a_1, \vec a_2, \ldots, \vec a_n$ — данные векторы, $\vec S=\vec a_1+\vec a_2+\ldots+\vec a_n$ — их сумма. Возьмем произвольный набор из p векторов $\vec a_{i_1}, \vec a_{i_2}, \ldots, \vec a_{i_{p-1}}, \vec a_i$. По условию задачи $|\vec a_{i_1}+\vec a_{i_2}+\ldots+\vec a_{i_{p-1}}+\vec a_i|=|\vec S-\vec a_{i_1}-\vec a_{i_2}-\ldots-\vec a_{i_{p-1}}-\vec a_i|$. Отсюда следует, что $|\vec S|^2=2(\vec S, \vec a_{i_1}+\vec a_{i_2}+\ldots+\vec a_{i_{p-1}}+\vec a_i)$. Точно так же для набора $\vec a_{i_1}, \vec a_{i_2}, \ldots, \vec a_{i_{p-1}}, \vec a_j$ имеет место равенство $|\vec S|^2=2(\vec S, \vec a_{i_1}+\vec a_{i_2}+\ldots+\vec a_{i_{p-1}}+\vec a_j)$. Следовательно, $(\vec S, \vec a_i-\vec a_j)=0$ для любых i, j, т. е. скалярное произведение $(\vec S, \vec a_i)=k$ не зависит от i. Поэтому $|\vec S|^2=(\vec S, \vec a_1+\ldots+\vec a_n)=nk$. С другой стороны, $|\vec S|^2=2(\vec S, \vec a_{i_1}+\vec a_{i_2}+\ldots+\vec a_{i_{p-1}}+\vec a_i)=2pk$. Следовательно, $nk=2pk$, $(n-2p)k=0$, $k=0$, ибо $p\neq\frac{n}{2}$. Таким образом, $|\vec S|=0$, $\vec S=\vec 0$.

б) При $p=\frac{n}{2}$ сумма $\vec S$ может быть отлична от нуля (на рис. 11: векторы $\vec a_k$ и $\vec a_{n-k+1}$, $1\leqslant k\leqslant p$, симметричны относительно прямой l, а прямая m перпендикулярна l).

11 класс

1. См. решение задачи 1 для 9 класса.

2. Докажем, что $a\cdot\cos A+b\cdot\cos B\leqslant c$, причем равенство имеет место только тогда, когда $a=b$. Поскольку $c=a\cdot\cos B+b\cdot\cos A$, то неравенство равносильно неравенству $a\cdot\cos A+b\cdot\cos B\leqslant a\cdot\cos B+b\cdot\cos A$, или $(a-b)\times(\cos A-\cos B)\leqslant 0$. Последнее неравенство всегда справедливо, причем равенство возможно только при $a=b$.

Аналогично, $a\cdot\cos A+c\cdot\cos C\leqslant b$ и $b\cdot\cos B+c\cdot\cos C\leqslant a$. Осталось сложить три полученных неравенства.

3. Составим куб $2\times2\times2$ произвольным образом. Пусть на его поверхности оказалось m белых и n черных квадратов 1×1 (будем называть их видимыми). Тогда $m+n=24$, а число $d=m-n$ четно. Если $d=0$, то задача решена. Покажем, что если $d\neq0$, то поворотами кубиков $1\times1\times1$ можно добиться того, что d станет равным нулю. Действительно, нетрудно проверить, что справедливы следующие утверждения:

1) После поворота любого кубика $1\times1\times1$ на $90°$ вокруг прямой, соединяющей центры его противоположных граней, ровно один невидимый квадратик становится видимым и, соответственно, один видимый квадратик становится невидимым. Число d при этом либо вовсе не изменяется, либо изменяется на 2.

2) Для каждого кубика $1\times1\times1$ можно указать три таких последовательных поворота, после выполнения которых все его видимые грани станут невидимыми, а все невидимые — видимыми.

Если с каждым из восьми кубиков $1\times1\times1$ проделать по три поворота, указанных в пункте 2), то число d изменит свой знак. Следовательно, после одного такого поворота d станет равным нулю, что и требовалось доказать.

4. Пусть C — искомая точка, P — точка пересечения прямых AB и l, A_1 и B_1 — точки, симметричные точкам A и B относительно прямой l (рис. 12). Тогда углы CB_1A_1 и CBA равны. Обозначим $\alpha=\angle CB_1A_1$. По условию $DE\perp AB$, по построению $\angle A_1PA=2\angle CPA=90°$, поэтому $A_1B_1\parallel DE$. Покажем, что $\angle CDE=\alpha$. Действительно, $\angle CDE=180°-\angle ADE$. Так как четырехугольник $ABED$ — вписанный, то $\angle ADE+\angle ABE=180°$. Следовательно, $\angle CDE=\angle ABE=\alpha$. Таким образом, $DE\parallel A_1B_1$ и $\angle CDE=\angle CB_1A_1$. Отсюда следует, что точка B_1 лежит на прямой DC. Действительно, если

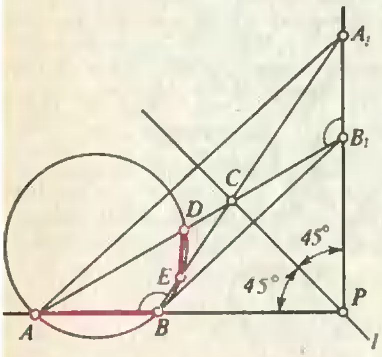


Рис. 12.

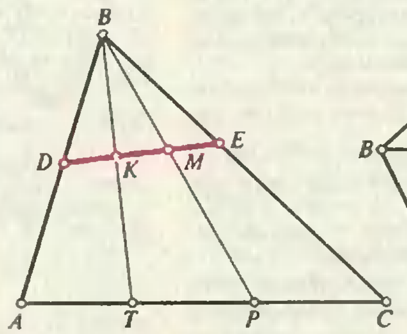


Рис. 13.

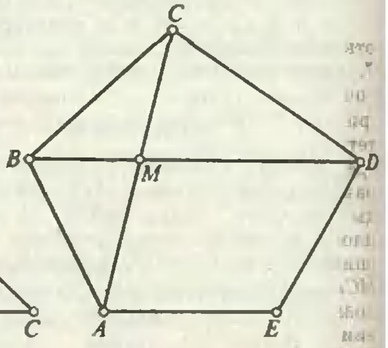


Рис. 14.

прямая DC пересекает прямую A_1P в точке B_2, отличной от B_1, то $\angle CB_2A_1 = \angle CDE = \angle CB_1A_1$, что невозможно по свойству внешнего угла треугольника. Итак, точка B_1 лежит на прямой DC, как и точка A. Следовательно, точка C является точкой пересечения прямых l и AB_1. Прямая AB_1 может быть построена с помощью циркуля и линейки.

5. Ответ: (1; 1), (2; 4). Для $1 \leqslant y \leqslant 4$ имеются только два решения — пары (1; 1) и (2; 4). Пусть $y \geqslant 5$. Тогда

$$7^x - 1 = (7-1)(7^{x-1} + 7^{x-2} + \ldots + 7 + 1) = 3 \cdot 2^y = 6 \cdot 2^{y-1},$$

откуда

$$7^{x-1} + 7^{x-2} + \ldots + 7 + 1 = 2^{y-1},$$

поэтому x — четное число, $x = 2m$, т. е. $7^{2m} - 1 = 3 \cdot 2^y = 48 \cdot 2^{y-4}$.

Аналогично, из равенства

$$7^{2m} - 1 = (7^2 - 1)(7^{2m-2} + 7^{2m-4} + \ldots + 7^2 + 1) = 48 \cdot 2^{y-4}$$

следует, что m — четное число. Следовательно, x кратно 4, $x = 4p$. Но число

$$7^x - 1 = 7^{4p} - 1 = (7^4 - 1)(7^{4p-4} + 7^{4p-8} + \ldots + 7^4 + 1)$$

делится на 5, а число $3 \cdot 2^y$ не делится на 5. Поэтому при $y \geqslant 5$ решений нет.

6. Пусть $S_{DBK} = S_{KBM} = S_{MBE} = S_0$ (рис. 13). Тогда

$$\frac{S_{ABT}}{S_0} = \frac{AB \cdot BT}{DB \cdot BK}, \quad \frac{S_{TBP}}{S_0} = \frac{TB \cdot BP}{KB \cdot BM},$$

$$\frac{S_{PBC}}{S_0} = \frac{PB \cdot BC}{MB \cdot BE}.$$

Поэтому

$$\frac{S_{ABC}}{S_0} = \frac{S_{ABT} + S_{TBP} + S_{PBC}}{S_0} \geqslant$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{AB \cdot BT}{DB \cdot BK} \cdot \frac{TB \cdot BP}{KB \cdot BM} \cdot \frac{PB \cdot BC}{MB \cdot BE}} = 3\left(\frac{BT \cdot BP}{KB \cdot BM}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{AB \cdot BC}{DB \cdot BE}\right)^{1/3} = 3\left(\frac{S_{TBP}}{S_0}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{S_{ABC}}{S_0}\right)^{1/3},$$

откуда $S_{ABC} \geqslant 3 \cdot S_{TBP}$, т. е. $AC \geqslant 3 \cdot TP$.

7. Ответ: вообще говоря, нет. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD (рис. 14). Центры сфер, описанных около тетраэдров $SMAB$, $SMBC$ и $SMCD$, лежат в срединной плоскости к отрезку SM и поэтому равноудалены от плоскости основания пирамиды $SABCDE$. Проекциями центров сфер на эту плоскость являются центры окружностей, описанных около треугольников MAB, MBC и MCD. Радиусы этих окружностей равны. Следовательно, равны радиусы указанных в условии задачи сфер.

8. Число P не изменяется при перестановке строк в таблице. Условимся строки таблицы и элементы столбцов нумеровать сверху вниз, а места в строках — слева направо. Выберем строку с самой маленькой суммой элементов и поставим ее на первое место.

Введем следующую операцию: если в k-й строке ($k > 1$) на i-м месте стоит число x и это число *меньше* числа y, стоящего в первой строке на i-м месте, то числа x и y меняем местами. После применения этой операции сумма элементов первой строки останется, очевидно, наименьшей среди сумм элементов по строкам, а произведение P для полученной таблицы не увеличится (докажите!).

Применив описанную операцию ко всем элементам таблицы, получим таблицу, у которой в каждом столбце наименьший элемент стоит на первом месте. При этом сумма S_1 останется наименьшей, а число P не увеличится. Аналогично поступим с таблицей, составленной из оставшихся строк, и так далее. В итоге придем к требуемой таблице, для которой число P не будет превосходить первоначального значения.

Физика

9 класс

1. $\alpha \geqslant \operatorname{arctg} \dfrac{(\mu_1 M)/(\mu_2 m) - 1}{\mu_1(1 + M/m)} \approx 12°$.

Указание. Угол α нужно выбрать таким, чтобы за счет силы натяжения веревки сила давления саней на лед уменьшилась, а человека — увеличилась.

2. Решение этой задачи — см. задачу Ф1225 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в восьмом номере журнала.

3. Предположим, что на нерастянутом кольце было равномерно нанесено N рисок. После того как кольцо повесили на гвоздь, риски расположились неравномерно. Сила натяжения в n-м сечении кольца пропорциональна массе части кольца ниже n-й риски; следовательно, зависимость силы натяжения T от номера риски n — линейная (рис. 15). Средняя величина силы натяжения равна $T_0/2 = mg/2$, поэтому кольцо удлинится на $\Delta l = 2h - l_0 = T_0/(4k) = mg/(4k)$ (здесь k — жесткость кольца). Рассмотрим теперь вращающееся кольцо. Выделим маленький кусочек (рис. 16) длиной $\Delta x = R\alpha$ (где $R = h/\pi$) и массой $\Delta m = m\alpha/(2\pi)$ и запишем уравнение его движения в проекциях на направление радиуса (учтем, что для малых углов $\sin\alpha = \alpha$):

$$\Delta m \omega^2 R = 2T \sin(\alpha/2) = T\alpha = k(2h - l_0)\alpha.$$

Отсюда находим искомую угловую скорость вращения кольца:

$$\omega = \pi\sqrt{g/(2h)}.$$

4. $v = c(v_2/v_1 - 1)$.

10 класс

1. При малой начальной скорости грузика, когда он не сможет переехать горку, горка сместится на расстояние

$$l_1 = mv_0 t/(M + m).$$

Если же грузик переезжает горку, ее смещение оказывается равным

$$l_2 = mv_0 t/(M + m) - mL/(M + m).$$

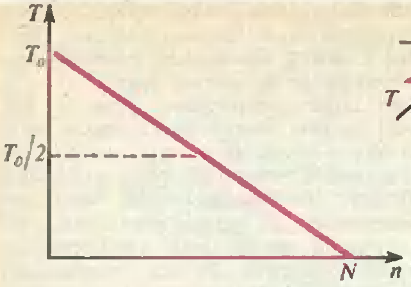


Рис. 15.

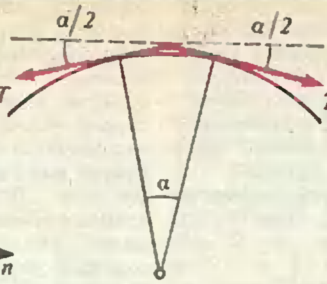


Рис. 16.

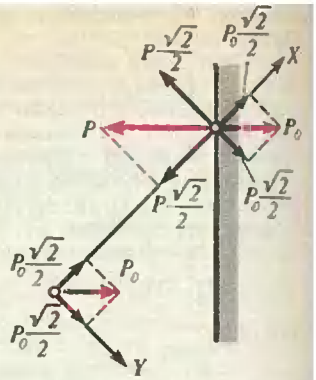


Рис. 17.

2. Решение этой задачи — см. задачу Ф1229 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в девятом номере журнала.
3. $p_2/p_1=1/2$.
4. Если переключение производится с достаточно высокой частотой, температуру нити накала лампочки можно считать постоянной, а саму лампочку можно заменить резистором с сопротивлением 12,5 Ом. При периоде T и времени замыкания t баланс энергии будет таким:

$$(6\cdot 12{,}5/14{,}5)^2 t/12{,}5=2{,}5\cdot 0{,}2T,$$

откуда

$$t/T=0{,}23.$$

11 класс

1. Решение этой задачи — см. задачу Ф1232 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в девятом номере журнала.
2. Решение этой задачи — см. задачу Ф1249 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.
3. Решение этой задачи — см. задачу Ф1251 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.
4. В результате столкновения верхнего шарика со стенкой он (и следовательно, вся «гантелька») получит некоторый импульс $\vec{P}$, перпендикулярный стенке (рис. 17). Величину его найдем из закона сохранения энергии для абсолютно упругого удара:

$$W_0=W_1+W_2,$$

или

$$2\frac{P_0^2}{2m}=\frac{1}{2m}\left((P-P_0)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{2}-P_0\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2}P_0^2+\left(\frac{P}{2}-P_0\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right),$$

откуда

$$P=8/3P_0.$$

Здесь учтено, что составляющая импульса $\vec{P}$ в направлении стержня делится поровну между обоими шариками, а перпендикулярная стержню составляющая целиком передается верхнему шарику.

Таким образом, «гантелька» отразится от стенки с импульсом

$$P'=P-2P_0=2/3P_0.$$

При этом центр масс будет двигаться со скоростью $v'=1/3v_0$, а шарики будут описывать вокруг центра масс окружности, двигаясь по ним со скоростью $v=2\sqrt{2}/3v_0$.

Несколько задач Бакинской физической олимпиады

1. График зависимости скорости (точнее — ее проекции на вертикальную ось) мяча от времени приведен на рисунке 18.

Согласно формуле $v^2=2gH$, высота H_k подъема мяча после k-го отскока пропорциональна квадрату «начальной» скорости v_k, которая в n^k раз меньше скорости перед первым ударом. Между каждыми двумя ударами мяч проходит вверх и вниз путь, равный удвоенной высоте подъема. Поэтому для полного пути получаем

$$l=H+\frac{2H}{n^2}+\frac{2H}{n^4}+\frac{2H}{n^6}+\ldots=$$

$$=H+\frac{2H}{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\ldots\right).$$

Выражение в скобках — это сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем $1/n^2$, равная $n^2/(n^2-1)$. Тогда окончательно

$$l=H\frac{n^2+1}{n^2-1}=\frac{5}{3}H=200\text{ м}.$$

2. В принципе возможны 4 случая: 1) весь лед растает, и температура смеси будет выше 0 °С; 2) вся вода замерзнет, и температура содержимого будет ниже 0 °С; 3) замерзнет часть воды, и установится температура 0 °С; 4) растает часть льда, и температура смеси будет 0 °С. Сделаем оценки. При охлаждении до $t_0=0$ °С вся вода отдает количество теплоты $Q_1=c_1m_1(t_1-t_0)=42$ кДж. Для нагревания до t_0 всего льда требуется количество теплоты $Q_2=c_2m_2(t_0-t_2)=420$ кДж. Значит, возможны лишь случаи 2 и 3. Будем оценивать дальше. Если замерзнет вся вода, она отдаст количество теплоты $Q_3=\lambda m_1=660$ кДж, которое больше Q_2. Следовательно, возможен лишь случай 3: замерзнет часть воды, и в калориметре установится температура 0 °С.

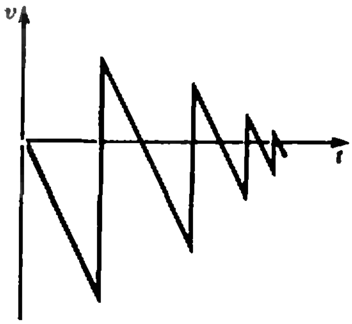


Рис. 18.

Из уравнения теплового баланса $c_1m_1(t_1-t_0)+m_x\lambda=c_2m_2(t_0-t_2)$ найдем массу m_x замерзшей воды.

Таким образом, объем содержимого калориметра будет равен

$$V=\frac{m_1-m_x}{\varrho_1}+\frac{m_2+m_x}{\varrho_2}=7{,}5\cdot10^{-3}\ \text{м}^3.$$

3. Для начального расположения справедливы соотношения

$$1/d+1/f=1/F,\ d+f=a,\ f/d=\Gamma.$$

В первом случае —

$$1/d+1/f=1/F,\ d+f=a,\ f/d=\Gamma.$$

В первом случае —

$$1/d_1+1/f_1=1/F,\ d_1+f_1=a+b,\ f_1/d_1=\Gamma_1;$$

Отсюда находим

$$\Gamma_1\approx9{,}1;\ \Gamma_2=9.$$

[redacted]овые конструкции
[redacted]«Квант» № 9)

1. Пусть S — сумма девяти искомых чисел, n — наименьшая из их попарных сумм. Подсчитав сумму всех попарных сумм двумя способами, получаем $8S=(2n+35)\cdot18$, что невозможно.

2. а) Так как сумма чисел каждой группы кратна трем, то и сумма всех чисел, равная $\frac{n(n+1)}{2}$, кратна трем. Значит, либо n, либо $n+1$ кратно трем. А для таких n построить искомые разбиения нетрудно:

$$n=3a:\ (1,2,3);\ (4,5,6);\ \ldots;\ (3a-2,3a-1,3a);$$
$$n=3a-1:\ (1,2);\ (3,4,5);\ \ldots;$$
$$(3a-3,3a-2,3a-1).$$

б) Так как сумма чисел каждой группы кратна четырем, то либо n, либо $n+1$ кратно восьми. Для этих n укажем искомые разбиения. Восемь подряд идущих натуральных чисел легко разбить требуемым образом на две группы:

$$(a+1,a+3,a+4,a+8);$$
$$(a+2,a+5,a+6,a+7).$$

Если n кратно восьми, то искомое разбиение теперь очевидно. Если же $n+1$ кратно восьми, то для построения искомого примера достаточно заметить, что группа чисел от 1 до 7 обладает требуемым свойством: $3\cdot7=1+2+\ldots+6$.

3. Множество A состоит из нуля и всех натуральных чисел, в двоичной записи которых единица находится в разрядах, дающих остаток 1 при делении на 3 (считая справа). Множество B состоит из нуля и всех натуральных чисел, в двоичной записи которых единица находится в разрядах, дающих остаток 2 при делении на 3. Множество C состоит из нуля и всех натуральных чисел, в двоичной записи которых единица находится в разрядах кратных трем.

4. Ясно, что либо n, либо $n+1$ кратно четырем. Если $n=4a$, то искомое разбиение таково: $(1, 4, 5, 8, \ldots, 4a-3, 4a)$; $(2, 3, 6, 7, \ldots, 4a-2, 4a-1)$. Если $n=4a-1$, то разбить на две равные по количеству гирь кучки невозможно. Разбиение же по массам таково: $(1, 2, 4, 7, \ldots, 4a-4, 4a-1)$; $(3, 5, 6, \ldots, 4a-3, 4a-2)$.

5. Переход осуществляется от набора из n гирь к набору из $(n+8)$ гирь. Дело в том, что имеет место равенство

$$(n+1)^2+(n+4)^2+(n+6)^2+(n+7)^2=$$
$$=(n+2)^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+8)^2.$$

6. Естественно было бы попытаться разбить требуемым образом набор из девяти гирь с весами $(n+1)^2, (n+2)^2, \ldots, (n+9)^2$. Но, к сожалению, это невозможно. Удается получить только «почти» требуемое разбиение:

1 группа	$(n+1)^2$	$(n+6)^2$	$(n+8)^2$
2 группа	$(n+2)^2$	$(n+4)^2$	$(n+9)^2$
3 группа	$(n+3)^2$	$(n+5)^2$	$(n+7)^2$

При этом в первой и второй группах массы одинаковы, а в третьей — на 18 граммов меньше. Теперь становится понятно, как разбить требуемым образом на три группы набор из 27 гирь. Кучку из первых девяти гирь разобьем указанным образом, следующую кучку из девяти гирь разобьем так, чтобы легче была вторая группа, и последнюю кучку разложим так, чтобы легче была первая группа. Объединив затем все первые, все вторые и все третьи группы, получим требуемое разбиение набора из 27 гирь.

[redacted]нт» для младших школьников
[redacted]«Квант» № 9)

1. Яблоки стоили 45 копеек за килограмм.

2. Пусть задачу решило x мальчиков, а девочек было k. Тогда девочек, решивших задачу было $k-x$, а всего решило задачу $x+k-x=k$ человек. Значит, количество решивших задачу равно числу девочек.

3. 47 486+7486+486+86+6=55 550.

4. Вырежем из бумаги параллелограмм, у которого одна сторона равна длине окружности основания первого цилиндра, вторая — окружности основания второго цилиндра, а высоты параллелограмма соответственно равны высотам цилиндров. Площадь такого параллелограмма равна 100 см^2. Нетрудно видеть, что этим параллелограммом можно оклеить боковую поверхность как первого, так и второго цилиндра.

5. Поскольку в сумме получались нечетные числа, человек шел по нечетной стороне улицы и каждый раз складывал нечетное число номе-

ров домов. При этом нетрудно найти номер среднего дома в каждой группе — он равен соответствующей *сумме, деленной* на количество домов в группе. Число 235 раскладывается на множители двумя способами: $235=5\cdot47$ и $235=1\cdot235$. Отсюда следует, что в этом квартале *либо 5 домов и* средний имеет номер 47, либо один дом, имеющий номер 235. Но из условия видно, что ни один из соседних домов не может иметь номер 233 или 237, поэтому в *последнем* квартале 5 домов с номерами 43, 45, 47, 49, 51. Так как $117=3\cdot39$, то в этом квартале находятся дома с номерами 37, 39, 41, а в первом квартале — дома 31, 33, 35. Итак, человек живет в доме № 31, а школа находится в доме № 51.


с. обложки
«Квант» № 9)
См. рис. 19.

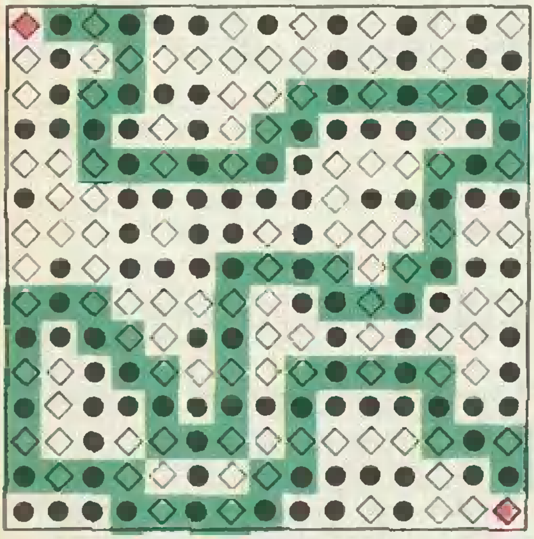


Рис. 19.

Главный редактор — академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук, А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко, С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин, В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников, В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков, В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев, Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев, М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин, Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал, В. Можаев, И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров, Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков, В. Фабрикант, Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс, И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров, Л. Кардасевич, И. Клумова, Т. Петрова, С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
Е. Барк, С. Иванов, С. Лухин, Л. Тишков, Э. Назарова, П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор М. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор *20.07.90. Подписано к печати* 13.09.90.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,87.
Тираж 164555 экз. Заказ 1392. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

САМАЯ ДЛИННАЯ ПАРТИЯ

Время от времени на практике встречаются партии, длящиеся более 100 ходов, а иногда дело доходит почти до 200. Интересен такой чисто теоретический вопрос: какова самая длинная партия, которая может быть разыграна на шахматной доске?

До недавнего времени рекорд равнялся 5898 ходам, причем для создания такой фантастической партии использовалось правило 50 ходов (см. «Квант», 1978, № 12). Белые и черные могут играть как угодно, но каждые 50 ходов одна из сторон должна или взять неприятельскую фигуру, или продвинуть вперед свою пешку. И так до тех пор, пока не кончатся все ресурсы.

Внесенные в последний шахматный кодекс дополнения (см. «Квант», 1990, № 7) разрешают в отдельных случаях продлевать «маневрирование» фигур до 75 ходов. Это обстоятельство москвич И. Верещагин использовал для установления уникального рекорда. Число ходов в построенной им самой длинной партии составляет 6074.

Читатель может не пугаться: мы не собираемся приводить для доказательства всю партию. Достаточно указать узловые моменты, когда одна из сторон должна произвести какие-то действия, чтобы избежать ничьей.

И вот какая получается партия.

Первые 49 с половиной ходов «противники» маневрируют конями, лишь затем следует **50...g6**. При этом стороны всегда должны играть так, чтобы избегать троекратного повторения позиции (пространства доски для этого вполне достаточно).

100...g5 150...f6 200...f5 250...f5:Kg4. При движении пешек придется взять 8 фигур, избежать этого нельзя — иначе белые и черные пешки не смогут разойтись друг с другом. Пешки брать нельзя, они должны дойти до крайней горизонтали.

300...e6 350...e5 400...d6 450...d5 500...e4 550...d4 600...c6 650...c5 700...c5:Kb4 750...b6 800...b5 850. c3. В некоторых случаях теряется полхода (впервые после этого хода белых), таких потерь не избежать, но число их минимизировано.

900. c4 950. c5 1000. c6 1050. c7.

Перед следующим ходом белых у них остается пять фигур, обозначим их Ф1—Ф5 (король и пешки не в счет). Пешки могут превращаться в любые фигуры, но при этом белые непременно ставят на доску нового ферзя и семь произвольных фигур; для определенности мы обозначим их Ф6—Ф12.

1100. c8Ф6 1150. a3 1200. a4 1250. a5 1300. a6 1350. a6:Cb7 1400. b8Ф7 1450. b2:Kc3 1500. c4 1550. c5 1600. c6 1650. c7 1700. c8Ф8 1750. d2:Kc3 1800. c4 1850. c5 1900. c6 1950. c7 2000. c8Ф9 2050. e3 2100. e3:Cf4 2150. f5 2200. f6 2250. f7 2300. f8Ф10 2350. f3 2400. f4 2450. f5 2500. f6 2550. f7 2600. f8Ф11 2650. g2:Лf3 2700. f4 2750. f5 2800. f6 2850. f7 2900. f8Ф12.

2950. :Л. При взятии всякий раз указывается, какая именно фигура или пешка берется, но если место взятия не имеет значения, соответствующее поле не приводится.

3000. :Ф. Одну из белых пешек нельзя сдвигать с места до тех пор, пока не будут взяты все фигуры белых, а у черных не останутся два коня.

3049...g3 3099...g2.

К тому моменту, когда начинают превращаться черные пешки, все фигуры черных, стоявшие в начале партии, уже покинули доску. Всего черные поставят двух коней и шесть любых фигур, которые мы обозначим так: Ф1—Ф6.

3149...g1Ф1 3199...b3 3249...b2 3299...b1Ф2 3349...h7:Ф1g6 3399...d3 3449...d2 3499...d1Ф3 3549...e3 3599...e2 3649...e1Ф4 3699...h4 3749...b3 3799...b2 3849...b1Ф5 3899...a6 3949...a5 3999...a4 4049...a3 4099...a2 4149...a1Ф6 4199...g4 4249...g3 4299...g2 4349...g1K1 4399...g5 4449...g4 4499...g3 4549...g2 4599...g1K2.

4649...:Ф2 4699...:Ф3 4749...:Ф4 4799...:Ф5 4849...:Ф6 4899...:Ф7 4949...:Ф8 4999...:Ф9 5049...:Ф10 5099...:Ф11 5149...:Ф12 5199. Kp:Ф1 5249. Kp:Ф2 5299. Kp:Ф3 5349. Kp:Ф4 5399. Kp:Ф5 5449. Kp:Ф6.

После этого хода белых на доске остается белая пешка h2 и два черных коня, поэтому вступает в силу правило б) статьи 10.9 шахматного кодекса — теперь каждое из шести продвижений пешки «h» отодвигает конец партии не на 50, а на 75 ходов!

5524. h3 5599. h4 5674. h5 5749. h6 5824. h7 5899. h8Ф! А теперь возникает окончание с ферзем против двух коней, и благодаря правилу г) статьи 10.9 фигуры беззаботно маневрируют еще 75 ходов.

5974. :K1 6024. :K2 6074. Ф×. Последним ходом белый ферзь объявляет мат, спектакль кончается, и партия претендует на попадание в книгу рекордов Гиннесса!

Можно ли побить этот рекорд? Все зависит от возможных изменений статьи 10.9 шахматного кодекса, т. е. в конечном счете от того, будут ли учтены достижения компьютеров в анализе окончаний!

Е. Гик

45 коп.
Индекс 70465

Экспресс-лабиринт

На рисунках 1—4 изображены четыре квадрата 10×10, в которых отмечены некоторые клеточки — «запрещенные остановки» (перечеркнутые красным крестиком) и «повороты» (как в таких клеточках осуществляется поворот, показано на рисунке слева вверху).

Для каждого квадрата нарисуйте замкнутую несамопересекающуюся ломаную, следуя вдоль которой, его можно обойти ходом шахматной ладьи, побывав в каждой свободной клеточке, не заходя ни в одну из клеток «запрещенных остановок» и поворачивая, согласно правилам, в каждой клеточке «поворота».

Л. Мочалов

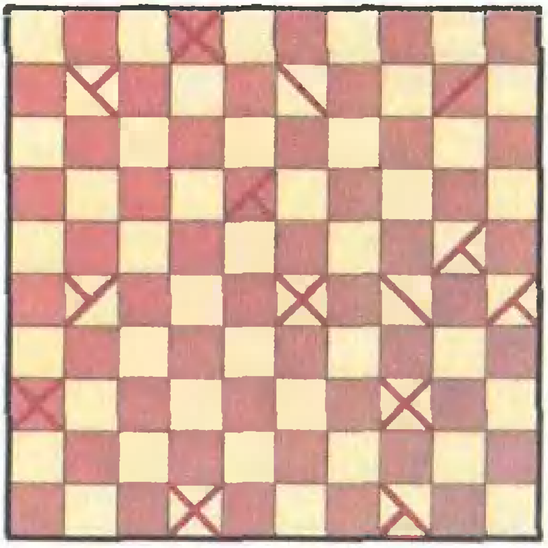


Рис. 1.

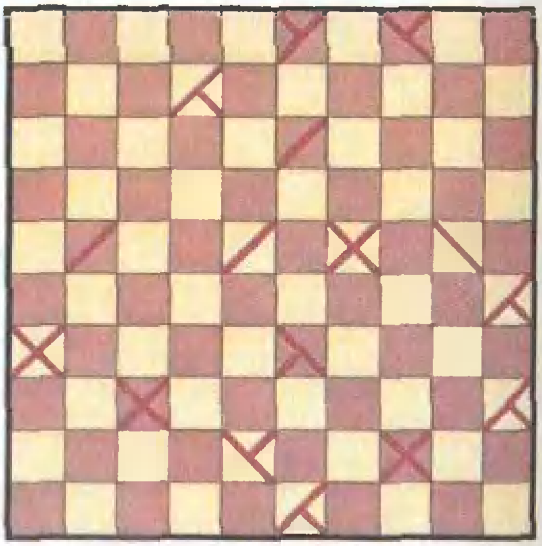


Рис. 3.

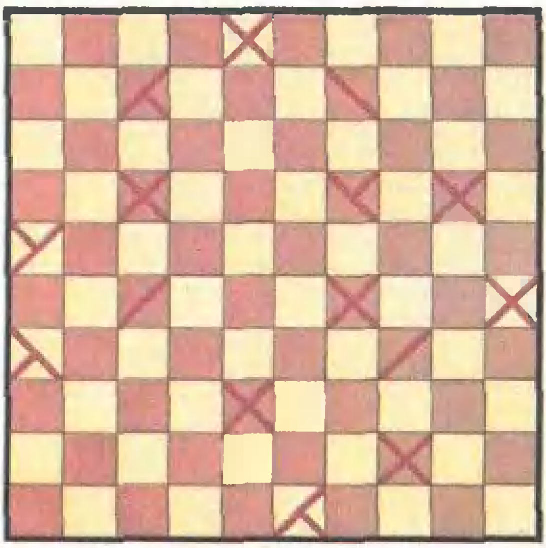


Рис. 2.

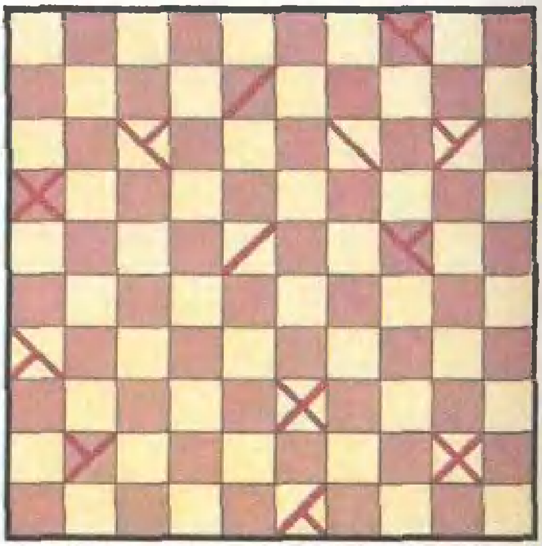


Рис. 4.