ISSN 0130-2221

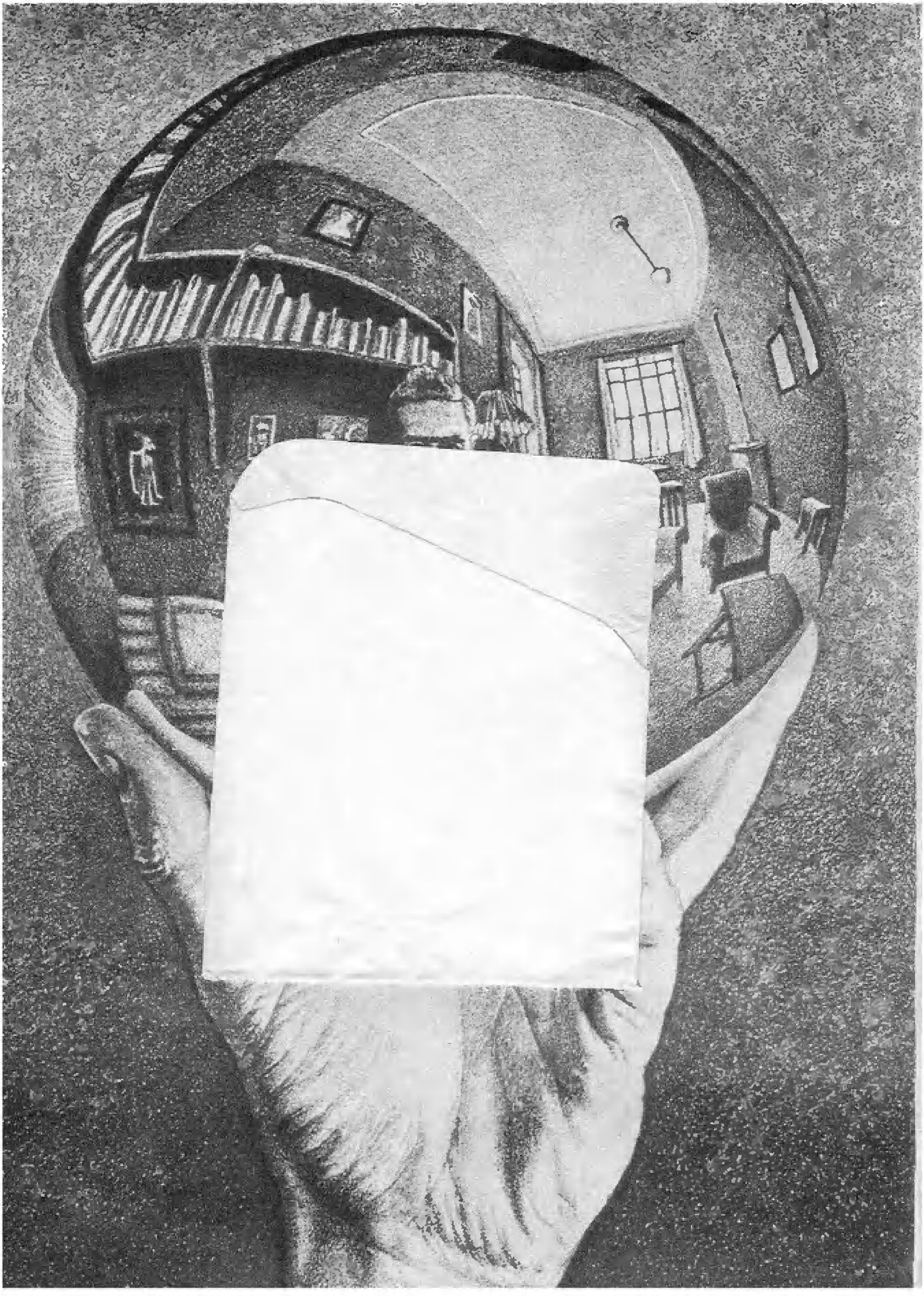
квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Полеты в струе и наяву

1991



Квант

9 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Академии наук СССР, Президиум Академии педагогических наук СССР и трудовой коллектив редакции журнала «Квант»

Москва. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

ПОЛЕТЫ В СТРУЕ И НАЯВУ

(О движении тел в жидкостях и газах)

Кандидат физико-математических наук
А. МИТРОФАНОВ

Какое действие оказывает среда на двигающееся в ней тело? Скажем, если вы играете во дворе или идете по улице, вы почти не замечаете, что среда (воздух) оказывает вам какое-либо сопротивление. И опоздавший на урок ученик вряд ли станет утверждать, что основной причиной опоздания является сила сопротивления среды. Но стоит только чуть высунуть руку в открытое окно мчащегося поезда или попасть в поток сильного ветра, как вопрос о сопротивлении среды перестанет казаться бессмысленным. Воздух, обычно такой невесомый, неосязаемый, при больших скоростях начинает вдруг напоминать упругую стенку или непреодолимую преграду. Именно такие ощущения ждут пилота скоростного самолета, если ему придется катапультироваться в полете. Со свойством среды оказывать сопротивление движущемуся в ней телу хорошо знакомы не только авиаторы или космонавты, но и люди многих других, в том числе самых «земных» профессий.

Одно из первых научных исследований сопротивления среды принадлежит Ньютону.*) Так как в то время было накоплено слишком мало данных о взаимодействии движущихся тел со средой, Ньютон вынужден был сам экспериментировать с бросанием тел. В 1710 и 1719 годах в соборе св. Павла в Лондоне он ставил опыты с движущимися в воде шарами. Из экспериментов ученый определил коэффициент в выведенной им же формуле для силы сопротивления, действующей на двигающееся в среде тело.

В наш век скоростного транспорта, сверхзвуковой авиации и спускаемых космических аппаратов многие старые задачи и экспериментальные методики аэро- и гидродинамики не утратили своего значения.

Поэтому интересно вспомнить кое-что из идей ученых прошлого и проделать опыты, которые познакомят вас с некоторыми физическими явлениями, возникающими при движении тел в среде.

Что же такое сопротивление среды? Двигающееся в жидкости или

*) Кроме Ньютона, этими вопросами занимались Леонард Эйлер, Жан Лерон, д'Аламбер, Даниил Бернулли, Шарль Кулон и многие другие ученые. Читателям, интересующимся историей гидро- и аэродинамики, можно рекомендовать книгу из серии «Жизнь замечательных идей»: Г. Смирнов «Рожденные вихрем» (М.: Знание, 1982).

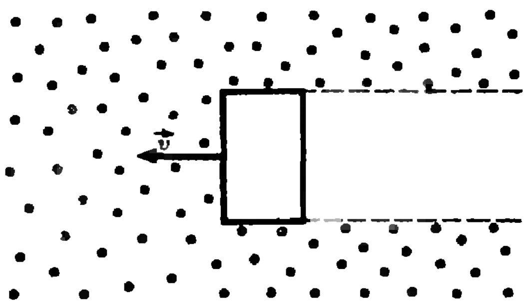


Рис. 1. *Движение тела со скоростью v в разреженной среде.*

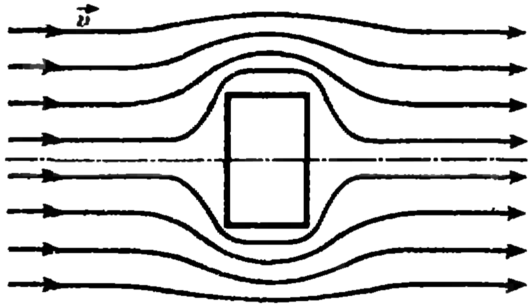


Рис. 2. *Движение тела в сплошной среде (в системе отсчета движущейся среды).*

газе тело оказывает воздействие на частицы среды, изменяя их скорость. По третьему закону Ньютона, на тело со стороны среды действует противоположно направленная сила, которую называют силой сопротивления. *Рассмотрим составляющую силы* сопротивления, которая направлена вдоль линии движения (скажем, оси X) и которую авиаторы называют лобовым сопротивлением. Из принципа относительности Галилея следует, что для определения этой силы при равномерном движении безразлично, двигается ли тело в неподвижной среде, или с такой же скоростью двигается ему навстречу среда, а тело неподвижно. Начнем с простого примера.

Пример 1. Пусть диск, шар или цилиндр радиусом R двигается со скоростью v вдоль своей оси в пространстве, заполненном множеством не взаимодействующих друг с другом неподвижных частиц (рис. 1; масса каждой частицы m, их концентрация n). Что это за частицы? Можно представить себе, например, разреженный холодный газ, в котором не учитывается движение молекул. Прав будет также и тот, кто представит себе, что частицы — это снежинки, а задача описывает движение снежного кома (попросту снежка), летящего в воздухе и сталкивающегося со снежинками, которые прилипают к нему при столкновениях, и т. д.

В единицу времени тело встречает на своем пути $N=nvS$ частиц, где $S=\pi R^2$ — площадь поперечного сечения тела. Если столкновения частиц с телом неупругие, то сила сопротивления равна

$$F_x=\frac{\Delta p}{\Delta t}=mvN=2S\frac{\rho v^2}{2}, \qquad (1)$$

где $\rho=mn$ — плотность среды.

Подобным образом можно рассчитать силу сопротивления F_x, действующую на тело с произвольным профилем. Надо только знать скорость, плотность и площадь столба частиц, с которыми сталкивается тело при движении в разреженной среде.

Несколько сложнее обстоит дело, когда удар упругий, т. е. когда частицы при ударе о произвольную поверхность отскакивают от нее. Но и в этом случае $F_x \sim v^2$, только коэффициент пропорциональности в формуле (1), вообще говоря, зависит от формы тела.

Пример 2. До сих пор мы рассматривали движение в разреженной среде. А как быть, если тело двигается с постоянной скоростью в жидкости, например в воде или в плотном газе (воздухе), т. е. в сплошной среде? Чем сплошная среда отличается от системы невзаимодействующих частиц? Ведь сплошная среда, будь то жидкость или плотный газ, тоже состоит из молекул или атомов. Но если в разреженной среде частицы двигаются независимо друг от друга, испытывая лишь редкие столкновения, то в сплошной среде частицы выступают уже как «коллектив». Действительно, расстояние между частицами (точнее, средняя длина свободного пробега молекул) во много раз меньше, чем характерный размер тела. Из-за взаимных столкновений частиц и влияния их друг на друга возмущения среды вблизи границы тела, возникающие при его движении, передаются соседним элементам среды. Следовательно, с движущимся телом взаимодействуют не только те объемы жидкости или газа, которые находятся точно на пути тела, но и соседние с его траекторией объемы среды, которые тело расталкивает или увлекает за собой (рис. 2).

Как зависит F_x от v и от параметров среды? Ясно, что если скорость изменится, то при установившемся движении приблизительно пропорционально v изменится масса жидкости M, с которой в единицу времени встретится и провзаимодействует тело, т. е. $M \sim \rho v S$, где S — площадь поперечного сечения тела, ρ — плотность среды. А каждый элемент этой массы передаст телу импульс, также примерно пропорциональный v. Поэтому зависимость силы сопротивления от скорости тела, рассмотренная впервые Ньютоном, имеет вид (сравните с формулой (1))

$$F_x \sim \rho v^2 S,$$

или в другой записи

$$F_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S, \qquad (2)$$

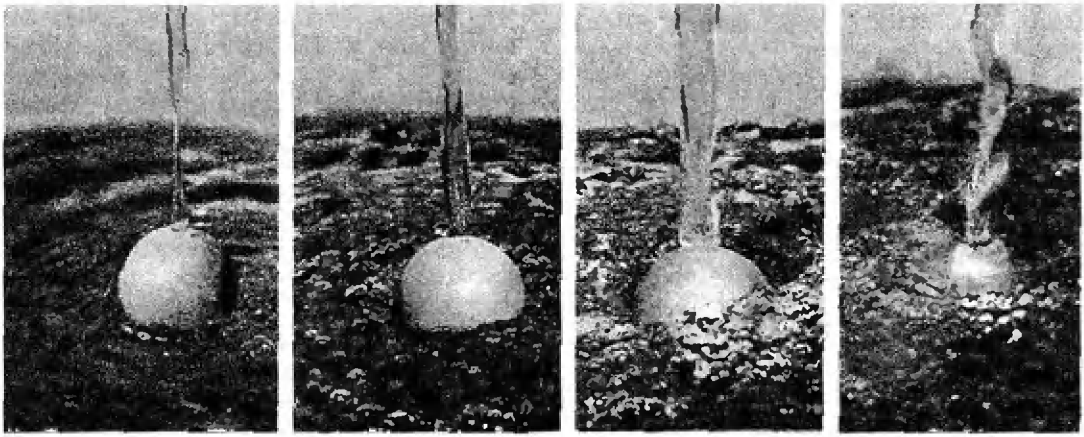
где величина $\rho v^2/2$ называется динамическим давлением. (Она имеет размерность давления и есть ни что иное, как кинетическая энергия единицы объема движущейся среды, в которой находится неподвижное тело.) Коэффициент пропорциональности C_x в формуле (2) зависит в первую очередь от формы тела и, вообще говоря, от режима течения и скорости, если та изменяется в достаточно широких пределах. В аэродинамике эта величина называется коэффициентом лобового сопротивления, в гидродинамике — коэффициентом увлечения или коэффициентом гидродинамического сопротивления.

Сравнивая рисунки 1 и 2, отметим существенную разницу этих двух примеров. Жидкость обтекает тело, а не оставляет за ним «тень» пустого пространства, как при движении в разреженной холодной среде. Следовательно, сплошная среда оказывает давление на тело не только спереди (т. е. на носовую часть, если речь идет о корабле), но и с других сторон. С тыльной стороны тела (т. е. с кормы) направление действующей на тело силы совпадает с направлением движения. Таким образом, обтекание тела жидкостью или плотным газом приводит к уменьшению результирующей силы сопротивления F_x. Обтекая тело, жидкость сохраняет часть своего импульса, не передавая его телу. Это очень важное обстоятельство. С уменьшением коэффициента гидродинамического сопротивления вследствие обтекания тела потоком мы познакомимся, проведя следующий эксперимент.

Пример 3. Определим гидродинамическое сопротивление, которое испытывает шарик, плавающий под струей жидкости, и найдем коэффициент C_x для шарика в потоке. Этот простой эксперимент не потребует сложного оборудования. Нам нужны будут только ведро или ванна, мерный стакан или банка известного объема, линейка, часы с секундной стрелкой и легкий шарик, например пластмассовый шарик для настольного тенниса или небольшой резиновый мячик.

Откроем водопроводный кран. И вот в емкости уже достаточно много воды. Если положить шарик на воду, то он, как и следовало ожидать, поплывет прочь от струи. Но стоит только поместить шарик в струю или же подтолкнуть его к ней вплотную, как шарик сразу же захватится струей и... останется в ней на том месте, где струя встречается с поверхностью воды.

Посмотрим, что будет с шариком, если изменить напор воды в струе. Когда скорость струи небольшая, шарик плавает на поверхности (рис. 3, *а*) и может оставаться около струи сколь



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 3. Фотографии шарика под струей жидкости при разных расходах воды в струе.

угодно долго. Иногда центр шарика смещается в строну от осевой линии струи, а шарик при этом вращается вокруг некоторой горизонтальной оси, как маленькая турбинка.

С увеличением напора воды шарик глубже погружается в воду, перестает вращаться и его центр устанавливается на осевой линии струи, совершая еле заметные колебания (рис. 3, *б, в*). И наконец, если открыть кран еще больше, шарик совсем скроется под водой (рис. 3, *г*).

Погружение легкого пустотелого шарика происходит главным образом благодаря гидродинамическому сопротивлению — *силе, действующей* на него со стороны потока. Эту силу легко измерить, если контролировать глубину погружения шарика.

Подберем напор воды таким, чтобы шарик погрузился в воду на определенную глубину, скажем на величину радиуса шарика, и находился в равновесии. Такое погружение удобно фиксировать на глаз. В равновесном положении сила Архимеда $F_А$ уравновешивает силу тяжести шарика mg и силу сопротивления $F_с$:

$$mg + F_с = F_А.$$

В этом уравнении $m = \rho_ш 4/3\pi R^3$, где R — радиус шарика, а $\rho_ш$ — его средняя плотность. Радиус шарика для пинг-понга равен $R \approx 1{,}9$ см, его масса $m \approx 2{,}5$ г, т. е. $\rho_ш \approx 0{,}09$ г/см^3, что примерно в 11 раз меньше плотности воды $\rho_в = 1$ г/см^3 (поэтому шарик плавает, почти не погружаясь). Сила Архимеда, действующая на шарик, погруженный *наполовину*, равна $F_А = 4/3\pi R^3 \rho_в/2$. Для $F_с$ используем формулу Ньютона (2), подставив туда $S = \pi r^2$, где r — радиус струи. Получим

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_ш g + C_x \pi r^2 \frac{\rho_в v^2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_в g,$$

откуда выразим коэффициент гидродинамического давления C_x:

$$C_x = \frac{4}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{gR}{v^2}\left(1 - 2\frac{\rho_ш}{\rho_в}\right). \qquad (3)$$

Чтобы найти отсюда значение C_x, надо знать еще величины r и v, которые измерить непосредственно не так-то просто. Но их можно определить косвенно (рис. 4), если измерить объемный расход воды в струе Q ($Q = \pi r^2 v$ — объем воды, проходящий через сечение в единицу времени), ее длину L, начальный радиус r_0 (у горловины крана) и воспользоваться тем, что расход воды в любом сечении струи — один и тот же (так называемое уравнение непрерывности струи):

$$r_0^2 v_0 = r^2 v, \qquad (4)$$

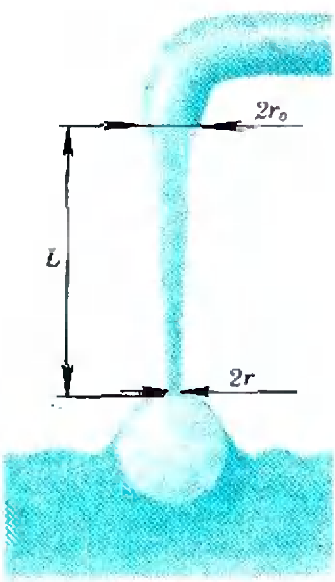


Рис. 4. К расчету величины коэффициента гидродинамического сопротивления для шарика под струей воды.

где v_0 — скорость потока у горловины крана. (Расход воды можно измерить, наливая ее в мерный сосуд и засекая время. Зная Q и r_0, найдем $v_0 = Q/\pi r_0^2$. Зная v_0 и L, вычислим $v = \sqrt{v_0^2 + 2gL}$, а потом и r из уравнения (4)). Прежде чем проводить измерения, подумайте, каков смысл уравнения (4), почему струя утоньшается книзу и по какому закону уменьшается ее радиус (см. пример. 4).

Проведем измерения. И вот результат. Для того чтобы шарик от пинг-понга затонул под струей наполовину, для струи длиной $L = 60$ см с начальным радиусом $r_0 = 0{,}8$ см расход воды Q должен быть примерно равен 130 см^3/с. Отсюда для C_x получается значение, близкое к 0,5. Если в опыте изменить длину струи L, то надо будет изменить и расход воды в струе, чтобы шарик оставался затопленным на ту же глубину. Однако, независимо от того, каков расход воды, величина C_x остается практически той же самой. Результаты наших измерений C_x при разных расходах воды в струе показаны на рисунке 5; пунктирная кривая — расчетные значения диаметра струи $D = 2r$, который она имеет вблизи точки ее контакта с шариком. Проверьте самостоятельно, что для струй разной длины, независимо от величин r и v, получается приблизительно одно и то же значение коэффициента гидродинамического сопротивления, а именно $C_x = 0{,}5 \pm 0{,}1$.

Попробуем теперь осмыслить полученный результат. При расчете силы сопротивления F_x мы использовали формулу Ньютона (2). Во-первых, так как эта формула хорошо описывает эксперимент (C_x почти не меняется), то можно сказать, что мы проверили ее справедливость (в диапазоне скоростей $v \approx 1-10$ м/с). Во-вторых, измеряя значение C_x, мы получили, что, как ни странно, шарик «отбирает» только около 1/4 импульса струи, остальное «уходит» в воду, в которой плавает шарик: коэффициент гидродинамического сопротивления оказался равным около 1/2, а не 2, как это было бы в случае абсолютно неупругого «удара» струи о шарик! (см. формулу (1)).

Последний экспериментальный факт не является таким очевидным. На первый взгляд кажется, что узкая струя, падая на почти плоскую вершину шарика ($r \ll R$), должна передавать ему бо́льшую часть своего импульса. В действительности, как мы видим, струя огибает шарик почти без потери скорости и уходит под ним в воду, сохранив значительную часть

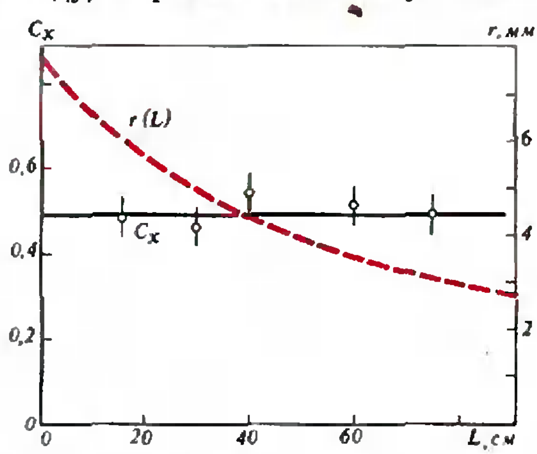


Рис. 5. Результаты измерений коэффициента гидродинамического сопротивления C_x для шарика в струе жидкости при разных длинах струи L. Пунктирная линия соответствует рассчитанной зависимости радиуса r струи, утапливающей теннисный шарик наполовину, при разных длинах струи L.

(три четверти!) своего импульса. Обтекание тела потоком уменьшает гидродинамическое сопротивление!

Кое-кто из любителей физики скажет, что числа 1/4 или 1 — это по порядку величины один и тот же множитель. Верно. Но не все задачи можно решать с точностью до порядка. Ведь никто не станет отрицать, что есть ощутимая разница в том, наливать ли в топливные баки, скажем, 400 т горючего или же загружать их только на 100 т. Как раз на преодоление сопротивления среды расходуется львиная доля энергии двигателей подводной лодки, скоростного автомобиля или электровоза. Поэтому уменьшение величины C_x даже на несколько процентов надо расценивать как достижение.

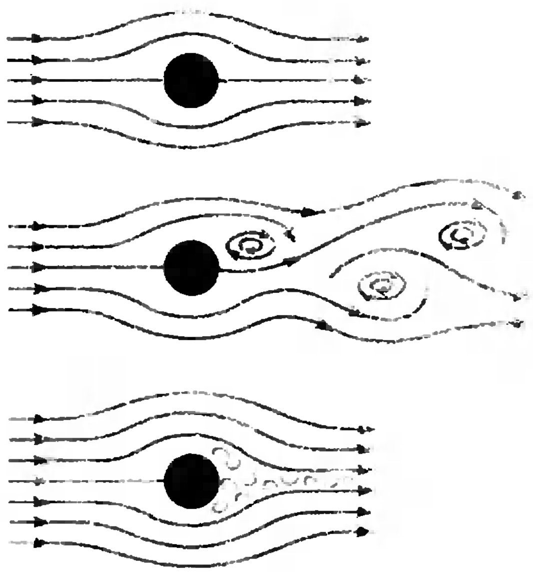


Рис. 6. Линии тока течения жидкости около цилиндра при разных скоростях потока — медленной, умеренной и сравнительно большой.

Пример 4. Формулой (2) с успехом пользуются на практике, скажем, когда оценивают силу давления ветра на парус или здание, силу сопротивления, действующую на движущийся объект, будь то самолет, птица, автомобиль или подводная лодка. В аэродинамике формула (2) — одна из основных. Однако надо иметь в виду следующее. Поскольку давление в потоке зависит от скорости течения, то результирующая сила гидро- или аэродинамического сопротивления зависит от того, как жидкость или газ обтекает тело: какова скорость среды вблизи поверхности, плавное ли течение или оно с завихрениями, где на границе тела происходит так называемый срыв потока при обтекании и т. д. Именно многообразие видов течений сплошной среды вблизи тела (см., например, рис. 6) часто приводит к трудностям при определении величин F_x и C_x. Для таких тел, как шар, диск (поперек потока), не очень длинный цилиндр и т. д., величина C_x в широком диапазоне скоростей обычно порядка 0,1—1. Для хорошо обтекаемого удлиненного каплеобразного тела с закругленной головной частью коэффициент сопротивления может достигать значений 0,04—0,06.

Еще в несколько раз меньшее значение коэффициента гидродинамического сопротивления, вплоть до величин около 0,01, может быть у рыб и некоторых водных животных при плавании их в воде. Классический пример тому — дельфины. Правда, такие животные и рыбы не только имеют обтекаемую форму, но «применяют» еще и целый комплекс хитростей: специальные кожные покрытия, жировую смазку или слизь на чешуе, уменьшающие сопротивление при движении, и, кроме того, с помощью движений мышц активно управляют потоком, предотвращая возникновение завихрений, в которые могла бы «перекачиваться» энергия дельфина или рыбы. В этом направлении животные «обогнали» инженеров и ученых-гидромехаников — не все еще «технические решения» живой природы реализованы в конструкциях, созданных человеком. Здесь есть над чем поработать инженерам...

Пример 5. Еще на заре развития поршневой авиации в опытах по измерению лобового сопротивления в аэродинамических трубах было обнаружено неожиданное явление. При сравнительно больших скоростях воздушного потока с увеличением его скорости лобовое сопротивление шара (и некоторых других тел) в какой-то момент времени резко уменьшалось в несколько раз. Исследователям удалось определить условия, при которых наблюдается такой скачок, измерить его и объяснить эффект. Он оказался связан с перемещением точки срыва потока при увеличении его скорости и уменьшением ширины вихревой зоны позади тела. Улучшение условия обтекания тыльной части тела приводило как раз к уменьшению коэффициента C_x. Хотите познакомиться с одним интересным следствием этого явления?

Оказывается, что если бы на Земле шел очень крупный град и диаметр градин при их падении возрос до $D_{кр}=13$ см, то скорость града увеличилась бы скачком в 2,5 раза от 160 до 400 км/ч! (По другим оценкам получается, что $D_{кр}$ чуть меньше 10 см.) Есть сведения, что в наши дни выпадает град величиной с куриное яйцо или даже с апельсин. Но кто знает, быть может, когда-то падал и более крупный град (вплоть до размеров $D_{кр}$)? Ведь раньше атмосферная «машина» на планете работала активнее, грозы, дожди и град были более сильными! Возможно, здесь кроется объяснение загадочного исчезновения динозавров. Их просто побил крупный, быстрый град! Мелким животным по понятным причинам удалось избежать столь печальной участи...

Пример 6. Формула Ньютона для расчета силы сопротивления справедлива далеко не всегда. Эта формула не позволяет, например, правильно вычислить силу, действующую на ложку, которая погружается в банке с медом. Она не описывает, как тонет маленький стальной шарик в высоком сосуде с растительным маслом, и уж совсем не может объяснить, почему так долго опускается молочный туман, который любят грибники и который доставляет столько неприятностей водителям, речникам и авиаторам.

Во всех перечисленных случаях для определения силы сопротивления надо знать не только форму и размеры тела, скорость относительного движения в среде и ее плотность, но и еще одну характеристику среды, которая называется коэффициентом вязкости и обычно обозначается буквой η. Этот коэффициент показывает, сколь велико или мало в жидкости или газе внутреннее, или, как говорят, вязкое трение.

Если силы вязкости являются при движении шарика в среде определяющими, то шарик испытывает тормозящее сопротивление, которое можно вычислить по формуле Стокса

$$F_x = 6\pi\eta R v,$$

а не по формуле Ньютона (2).

Но как узнать, является ли среда вязкой и какую формулу надо использовать при определении силы сопротивления в каждом конкретном случае?

Рассмотрим сферическую капельку воды, свободно падающую в воздухе (или шарик-градину, пренебрегая разницей в плотностях воды и льда). Будем интересоваться установившейся скоростью падения капли, которую можно измерить и из условия динамического равновесия найти, как зависит лобовое сопротивление от скорости, размера капли и параметров среды (ее плотности и коэффициента вязкости). Массу капли будем считать постоянной, т. е. пренебрежем конденсацией паров и испарением влаги с капли.

На рисунке 7 показан график зависимости скорости падения дождевых капель от их диаметра. Данные взяты из пособия по метеорологии. Рядом с кривой указано, при каких атмосферных осадках, как правило, наблюдаются капли данного диаметра.

Из рисунка видно, что самые мелкие капельки (диаметром 0,01—0,1 мм) падают со скоростью $v_0 \sim D^2$. Это возможно, только если сила сопротивления описывается формулой Стокса, из которой следует выражение для скорости осаждения частиц тумана:

$$v_0^{(C)} = \frac{1}{18} D^2 \frac{\rho}{\eta} g,$$

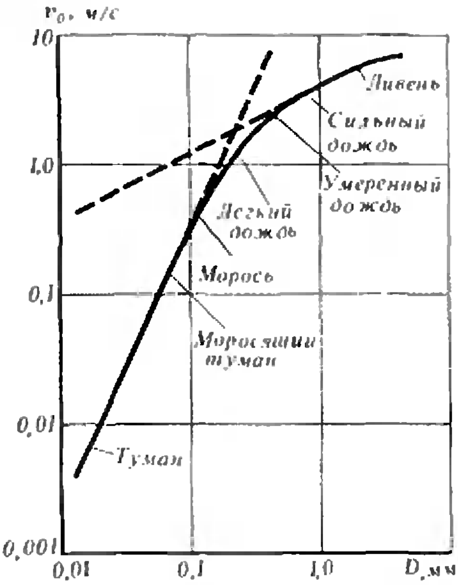


Рис. 7. Зависимость (в логарифмическом масштабе) скорости падения дождевых капель от их диаметра.

где $\eta \approx 1{,}8 \cdot 10^5$ кг/м·с при $T = 300$ К. Для воздуха и других газов величина $\eta \sim \sqrt{T}$ и почти не меняется с изменением плотности газа.

С увеличением размеров капли и скорости движения относительный вклад сил вязкого трения, пропорциональный $\eta v R$, уменьшается по сравнению с силами, пропорциональными величине $R^2 (\rho v^2/2)$, для которых записана формула Ньютона (их иногда называют инерциальным откликом среды, чтобы не путать с силами вязкого трения).

Крупные капли дождя (диаметром $D \gtrsim 1$ мм) почти «не чувствуют» вязкое трение воздуха. Для них скорость установившегося падения в атмосферном воздухе пропорциональна $\sqrt{D}$ и равна

$$v_0^{(\text{Н})} = \sqrt{\frac{4}{3C_x} \frac{\rho}{\rho_{\text{возд}}} Dg}\,, \qquad (5)$$

где $C_x \approx 0{,}5$. Это выражение получается из формулы (2).

Надо иметь в виду, что формула (5) носит приближенный характер, так как, в отличие от капелек тумана и града, крупные капли дождя имеют форму, заметно отличную от сферической. Силы поверхностного натяжения воды не в состоянии «справиться» с динамическим давлением набегающего потока воздуха, деформирующего каплю. Самые крупные капли ($D \gtrsim 5$ мм), достигая скорости около 8 м/с, сплющиваются столь сильно, что разбрызгиваются на более мелкие.

Для капелек диаметром 0,1 мм $\lesssim D \lesssim 1$ мм не работает ни формула Стокса, ни формула Ньютона. Для таких капелек силы вязкого трения и инерциальный отклик среды соизмеримы.

Пример 7. Есть еще один — третий — механизм торможения тел, который тоже часто встречается на практике и который при некоторых условиях может стать определяющим.

Налейте в ведро или ванну воды и погрузите в нее карандаш вертикально на некоторую глубину. Начните перемещать карандаш параллельно поверхности воды. Если скорость карандаша небольшая, то ничего интересного вы не заметите. Но если карандаш перемещать быстро, то за ним образуется расходящаяся группа волн, которая будет нести определенную энергию. На образование волн расходуется мощность двигателя (в данном случае руки), преодолевающего сопротивление среды.

По нашему опыту мы знаем, что за движущимся телом часто возникают волны, и они могут быть весьма разнообразными. Картина волн от корабля или моторки в глубокой воде отличается от мелких капиллярных волн, которые можно наблюдать в ведре, стакане или блюдце. Волны от моторной лодки на мелководье имеют иной вид, чем в глубокой воде. Сверхзвуковой самолет создает ударную волну в трехмерной среде (воздухе), а не на поверхности раздела (воды и воздуха), как корабль. К тому же, в отличие от обычных волн на воде, ударная волна в газе сопровождается сильным сжатием среды и ее разогревом.

Волновое сопротивление зависит от того, как возбуждаются волны, т. е. от свойств среды, в которой происходит движение, от скорости и характера движения, формы, прежде всего носовой части, и размеров тела. Обычно волновое сопротивление резко растет с ростом v, если, конечно, тело с увеличением v не выскакивает из воды, как скуттер или судно на подводных крыльях.

В каждом конкретном случае расчет величины волнового сопротивления представляет сложную задачу, которую обычно удается решить, только прибегая к услугам эксперимента, используя эмпирические данные. Но сравнительно просто оценить, сколь велико может быть волновое сопротивление.

Рассмотрим, например, прямолинейное и равномерное движение моторной лодки по глубокому озеру. От корпуса моторки расходятся симметрично по курсу две косые волны — носовая и кормовая, которые, складываясь, дают характерную картину волн, хорошо знакомую всем рыбакам и любителям плавания. Угол α, который образуют гребни волн с направлением движения лодки, не зависит от ее скорости и равен около 20°. С каждой стороны от линии курса лодки выделяются 2—3 небольших гребня. Амплитуды остальных волн значительно меньше, так что при оценках можно совсем не обращать на *них внимания — они вносят* малый вклад в общий результат. Волны от лодки распространяются на сотни метров, слабо затухая со временем.

Гребень волны будем приближенно считать треугольником высотой H, отмеряя эту величину от равновесного уровня озера. Длина основания треугольника равна $\lambda/2$, где λ — длина распространяющейся от лодки волны. Протяженность фронта волн, которые рождаются в единицу времени, численно равна $v\cos\alpha$. Работа, затрачиваемая на создание гребня, переходит в потенциальную энергию волны. Поэтому с учетом кинетической энергии волн, которая в периодических процессах равна потенциальной, для мощности, необходимой для создания группы волн за лодкой, получим оценку

$$W=\frac{1}{2}H\frac{\lambda}{2}v\cos\alpha\cdot\rho g\frac{H}{3}2\cdot 2n=\frac{1}{3}\rho g H^2 v\lambda n\cos\alpha, \quad (6)$$

где $2n$ — полное число гребней волн за лодкой. Множитель $H/3$ — это средняя (с учетом распределения массы в гребне) высота подъема воды.

Вот типичный пример. При скорости моторки 18 км/ч за ней бегут волны высотой 0,3 м и длиной около 0,6 м, $n=3$. По формуле (6) получаем, что $W\approx 3\cdot 10^3$ Вт$\approx$4 л. с. С точностью до множителя 2 этому же равна минимальная мощность мотора, с помощью которого на небольшой лодке удается достигнуть указанной скорости.

Таким образом видно, что существенная доля мощности двигателя моторной лодки расходуется на создание волн.

Задачи и вопросы

1. Изучая падение тел, Галилей бросал с башни одновременно пушечное ядро массой 80 кг и мушкетную пулю массой около 200 г. Существенным ли было в этом опыте влияние воздуха на время падения тел? Высота башни равнялась около 60 м.

2. Новая модель локомотива отличается от старой только двигателем, мощность которого в 1,5 раза больше прежней. Во сколько раз максимальная скорость нового локомотива больше, чем старого?

3. Чем вызван разброс экспериментальных точек на графике на рисунке 4? Определите значение коэффициента C_x в опыте при полном погружении шарика под струей воды, аналогично примеру 3, рассмотренному в статье. Какие выводы можно сделать на основании вашего результата? Что можно сказать о точности эксперимента?

4. Покажите, что в точке, находящейся на расстоянии L от горловины крана, радиус струи r определяется выражением $r(L)=r_0(1+2gL/v_0^2)^{-1/4}$, где v_0 — скорость воды, вытекающей из крана, g — ускорение свободного падения, r_0 — начальный радиус струи. Струя не разбрызгивается на капли, эффектами трения и поверхностного натяжения можно пренебречь.

5. Каким образом можно сделать видимым течение жидкости в воде под шариком? Проведите соответствующий опыт с водопроводной струей. Каков характер течения жидкости под шариком?

6. Если взять за ручку столовую ложку и подставить ее под струю воды, то реакция струи на ложку будет заметно разная, в зависимости от того, выпуклой или вогнутой поверхностью повернута ложка к струе. Почему?

7. Чему равняется равновесная скорость v_0, с которой падает в воздухе шарик от настольного тенниса?

„Квант" улыбается

«Гениальные» изречения учащихся

1.— Каким прибором измеряют атмосферное давление?
— Термометром.
— А температуру?
— Градусником.

2. Опыт — это когда человек делает, но не смотрит, а наблюдение — это когда человек смотрит, но не делает.

3. Причина опускания ртути в термометре при встряхивании простая. Когда его встряхивают, получают ветер, а при ветре температура уменьшается и ртуть опускается.

4. Старое ватное одеяло греет лучше нового, т. к. оно забирает энергию у человека, а потом ее отдает.

5. Тело движется по инерции, если оно остановилось.

6. Поток электронов, заряженных разноименно — такова природа дугового разряда.

7. Если ударить молоточком по камердинеру, то мы услышим звук.

8. В наполненном публикой зале звуки менее громкие, чем в пустом, т. к. они запутываются в публике.

9. Чтобы увидеть предмет в плоском зеркале, нужно, чтобы глаз наблюдателя попал в поле зрения этого предмета.

10. Астероиды — это недоразвитые планеты.

11. Первым электромагнитную волну получил Герцен.

12. Если толкнуть колебательный контур, то мы получим электромагнитные колебания.

13. Звезды — это твердые тела, состоящие из раскаленных газов.

14. Земля по учению Коперника встала на третье место после Солнца.

15. Венера видна утром при заходе Солнца.

Собрала Н. Разыкова

1. В атоме кремния один электрон пустой и называется «дырка», и по этим дыркам в полупроводнике течет электрический ток.

2. Работа впервые появилась в XVIII веке, а энергия почти на сто лет позже.

3.— Что служит топливом на АЭС?
— Как что? Атомы, конечно!

4. Электрон вращается в замкнутом кругу под действием буравчика...

5. Действие третьего закона Ньютона можно пояснить на примере Луны. Ее Земля к себе притягивает, а Луна с такой же силой от нее отталкивается и потому не падает.

6.— Что пришло на смену старым электронным лампам в новых телевизорах?
...Галогеновые?

7. Дельфин при помощи ультразвука не только находит добычу, но и определяет ее вкус, потому что у него хорошо развито обоняние ушей.

8. Телефон сильно искажает голос человека потому, что через него с трудом проходят высокие гармошки.

Собрал В. Плюхин

1. Для того чтобы уменьшить силу трения, надо смазать коэффициент трения.

2. Высокочастотные электромагнитные колебания высоко распространяются над поверхностью Земли, благодаря чему не зацепляются за преграды, что позволяет использовать их для осуществления радиосвязи на больших расстояниях.

3. Непроводники электричества предназначены для того, чтобы тащить от проводов человека, которого ударило током.

Собрал А. Давиден

1. Броуновское движение открыто Эйнштейном.

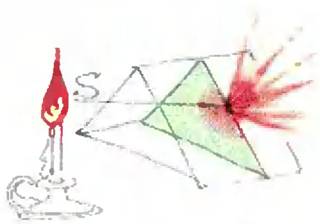
2. Два приемника и телефон — радиотелефонная связь.

3. Гальванометр — источник тока.

4. Электрический ток в металле — хаотическое движение электронов.

5. Скорость света $c = 3 \cdot 10^{-8}$ м/с!

6. Дисперсия света:



7. $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$, где γ — гравитационная постоянная!

8. $F_{упругости} = -kx$, где x — неизвестное!

9.— Что такое диод?
— Колебательный контур.

10. Весом тела называется масса тела.

11. Конденсатор в цепи создает переменный ток.

Собрала Н. Патрикеева

СКАЗКА О РОЖДЕСТВЕНСКОЙ ТЕОРЕМЕ ФЕРМА

Я. СТЮАРТ

В этой статье*), перепечатываемой нами с некоторыми сокращениями из журнала «В мире науки», увлекательно рассказывается о некоторых интересных наблюдениях над миром целых чисел. В следующем номере мы намерены опубликовать статью известного советского математика В. М. Тихомирова, содержащую несколько доказательств теоремы, упомянутой в заголовке данной статьи.

Был канун рождества. В холодной, загроможденной столами комнате стрелки старинных часов неумолимо приближались к вертикали, пока не послышался мерный звон, возвестивший об окончании работы. Боб Скрэтчит**) промакнул страничку амбарной книги промокашкой Мебиуса, у которой была только одна сторона, и поэтому чернила никогда не пропитывали ее насквозь. Он захлопнул книгу и положил ее на полку. Завтра — праздник. Следующие 4! (факториал) часов — нерабочие. Он надел пальто и шарф, который был уже настолько потертым, что его фрактальная размерность была меньше 2. По пути на выход он прошел мимо конторы хозяина лавки.

---

*) © Перевод на русский язык «Мир», 1991 г.

**) В этой сказке все имена действующих лиц придуманы автором по аналогии с именами героев одной из «Рождественских повестей» Ч. Диккенса, и поэтому приводятся нами только в транслитерации. (Примеч. ред. изд-ва «Мир»)

— Счастливого рождества, мистер Студж,— приветливо сказал он.

— Да брось ты!— проворчал старик.— Лавка закрывается на рождество, Скрэтчит. Ты знаешь, что это значит?

— Это значит, что у нас выходной день, мистер Студж.

— Это значит, Скрэтчит, что у нас завтра не будет покупателей. День без всякого дохода. День, когда наш старый добрый магазинчик «Математические редкости» не выручит ни копейки.

Едва ли это был подходящий момент, но Скрэтчит обещал жене спросить...

— Э-э..., сэр?

— Ну что еще?

— Вы обещали мне небольшую рождественскую премию, сэр. Это для Джима, сэр, моего младшего, он у меня вечно капризничает, сэр. Ну, совсем небольшую...

— Премию? Премию! Еще одно слово, Скрэтчит, и ты уволен!

Скрэтчит ушел расстроенный. Однако к тому времени, когда он дошел до дома, рождественское веселое настроение взяло верх, и жизнь сразу представилась ему более радостной.

— Как, никаких подарков?— воскликнул Джим.

— Придется обойтись без подарков, сынок,— сказал Скрэтчит, чувствуя, как его хорошее настроение затухает по экспоненте.

— Я хочу подарок! Новую теорему! Или в крайнем случае какую-нибудь подержанную лемму. У Чарли Пикенса есть прекрасная лемма. Да что там, даже гипотеза лучше, чем ничего!

— Мне очень жаль, Джим, но мистер Студж не хочет расставаться со своими гипотезами. Боюсь, что мне не выбить из него даже прямого противоречия. У меня совершенно ничего нет.

— Твой недостаток, папа, в том, что у тебя нет честолюбия. Ты должен попроситься в Пифагоровский комиссионный магазин.

— Я не гордый человек, Джим, но я никогда не унижусь до того, чтобы продавать поношенные прямоугольные треугольники с перевернутой гипотенузой!— Скрэтчит заставил себя успокоиться.— Нам придется довольствоваться традиционным пудингом, оставшимся еще с Пасхи, и ты будешь рад и этому, как все другие. Ну, а если повезет, то, может быть, я откопаю старый парадокс, подаренный мне твоей матерью. Свежая подкладка из логики — и он будет как новенький.

— Интуитивная логика?— с надеждой в голосе спросил Джим.— Не просто обычная ерунда, типа ложь — истина?

— Блестящая идея, мой мальчик,— согласился Скрэтчит.

Джим удалился, на время умиротворенный, оставив Скрэтчита в лихорадочных попытках найти утверждение, истинность или ложность которого было бы невозможно установить. Он решил позвонить мистеру Студжу, чтобы попросить у него истинное логическое утверждение, но коммутатор ответил ему, что телефон отключен, поскольку им слишком редко пользуются.

В неприбранной квартире на другом конце города мистер Студж устроился поуютнее; в голове его мелькали мысли о доходах и налогах.

Он проснулся, когда холодный ветер зашевелил шторы и задребезжал по оконным стеклам. Он вскочил с кровати, чтобы закрыть окно, но с удивлением увидел, что оно уже было закрыто. Откуда же ветер?

— Стуууджжж, — послышался зловещий голос. Студж бросился обратно в постель и закрылся с головой одеялом.

— Кто... кто ты?

— Я,— промычал голос,— дух теорем прошлого. Я пришел, чтобы взять тебя с собой, Студж!— дух протянул свою лишенную плоти руку, и Студж нехотя коснулся ее.

Внезапно они очутились в комнате, отделанной красным деревом. Человек в черном платье писал что-то гусиным пером.

— Где мы?— спросил Студж.

— Франция. Рождество, ровно 350 лет тому назад.

Простое число	Сумма квадратов?	4k+1 или 4k+3
2	1^2+1^2	Исключение
3	нет	$(4\times 0)+3$
5	1^2+2^2	$(4\times 1)+1$
7	нет	$(4\times 1)+3$
11	нет	$(4\times 2)+3$
13	2^2+3^2	$(4\times 3)+1$
17	1^2+4^2	$(4\times 4)+1$
19	нет	$(4\times 4)+3$
23	нет	$(4\times 5)+3$
29	2^2+5^2	$(4\times 7)+1$
31	нет	$(4\times 7)+3$
37	1^2+6^2	$(4\times 9)+1$
41	4^2+5^2	$(4\times 10)+1$
43	нет	$(4\times 10)+3$
47	нет	$(4\times 11)+3$
53	2^2+7^2	$(4\times 13)+1$
59	нет	$(4\times 14)+3$
61	5^2+6^2	$(4\times 15)+1$
67	нет	$(4\times 16)+3$
71	нет	$(4\times 17)+3$
73	3^2+8^2	$(4\times 18)+1$
79	нет	$(4\times 19)+3$
83	нет	$(4\times 20)+3$
89	5^2+8^2	$(4\times 22)+1$
97	4^2+9^2	$(4\times 24)+1$

Какие простые числа являются суммами квадратов?

— Кто этот тип в черном?

— Джентльмен в парике, Студж,— великий математик Пьер Ферма, больше всего известный своей недоказанной «последней» теоремой, и один из основоположников теории чисел. Он пишет письмо своему приятелю Марину Мерсенну. Если бы мы вернулись в настоящее, то могли бы прочитать письмо в подлиннике, оно датировано 25 декабря 1640 года. В письме сообщается об удивительном открытии.

— И что же это было за открытие?

— Оно известно как рождественская теорема Ферма. Некоторые простые числа могут быть представлены в виде суммы квадратов двух чисел: например,

$$5=1+4=1^2+2^2$$

или

$$13=4+9=2^2+3^2.$$

Другие же простые числа невозможно представить в этой форме: например, 3 или 11. Ферма нашел способ различать эти простые числа.

Студж достал из кармана затрепанную записную книжку и начал считать. Вскоре он решил задачу для всех чисел, меньших 100 (см. таблицу вверху слева).

— Ты подметил закономерность?— спросил дух теорем прошлого. Студж покачал головой.— Ну ладно, раз сегодня рождество, я дам тебе две подсказки. Во-первых, нужно не обращать внимания на простое число 2, которое является исключением. (Это ведь единственное четное среди всех простых чисел!). Во-вторых, нужно рассматривать остаток от деления на 4. Каждое нечетное простое число больше какого-нибудь числа, кратного 4, либо на 1, либо на 3; т. е. его можно представить либо в виде $4k+1$, либо $4k+3$. Например, $5=4\times 1+1$ представляется в форме $4k+1$.

Студж добавил новый столбец к своей таблице, показывающей, к какой форме представления относится каждое простое число, $4k+1$ или $4k+3$; теперь среди простых чисел уже просматривалась закономерность.

— Простые числа, представимые в виде суммы квадратов, как будто выражаются в форме $4k+1$,— сказал Студж с удивлением.— Кроме 2, числа, которое, по вашим словам, представляет исключение.

— Отлично. Дело в том, что Ферма не просто догадался об этом; он это доказал. По крайней мере, он наметил путь доказательства.

Уже после того, как дух теорем прошлого растворился в воздухе, Студж услышал, как он пробормотал:

— Леонард Эйлер доказал это, где-то в 1754 году или около того...

Студж очнулся опять в своей холодной спальне. Он попытался уснуть, но странная теорема Ферма продолжала крутиться у него в голове. Простые числа. Суммы двух квадратов. Остатки от деления на 4. Можно сойти с ума! Он поворочался с боку на бок, сходил на кухню подкрепиться, но так и не смог уснуть.

Так же не мог заснуть в своей менее удобной кровати Боб Скрэтчит. Он все думал, где бы ему успеть отыскать истинное логическое заключение, чтобы успеть сделать Джиму рождественский подарок.

Студж наконец заснул, но уже через $29=4+25$ секунд услышал страшное завывание и последовавший за этим громкий взрыв. Может быть, это пастор Сноуз опять швырнул свой ночной горшок в кошку вдовы Клини? Да нет, похоже, что шум был в его собственной спальне. Студж почувствовал, как трясется от страха. Перед ним возникло светящееся тело.

— Я,— прогремело видение,— дух прозрений грядущего.

— Делай со мной что хочешь, подлый негодяй, я слишком устал, чтобы сопротивляться.

Дух прозрений грядущего, положив на стол коробочку, скомандовал:

— Открой ее.

Внутри Студж обнаружил нечто похожее на телевизионный экран и вертушку, наподобие телефонной. Он взял устройство в руки:

— Что это?

— Модулоскоп. Он позволяет игнорировать то, что тебя не интересует, чего ты не хочешь видеть.

— Как бедных людей, например? Я это и так делаю все время.

— Зато с помощью модулоскопа ты сможешь взглянуть на вещи в необычном свете, в отрыве от привычной логики. В частности, если с помощью вертушки настроить устройство на какое-то число, то не увидишь ни одного числа, кратного ему. Настрой прибор на «канал 4» и посмотри на пальцы моих рук. Сколько пальцев ты видишь?

— Два. А куда девались остальные восемь?

— Модулоскоп первым делом вычитает восемь пальцев, поскольку 8 — это наибольшее кратное 4, которое меньше 10; затем он показывает оставшиеся два пальца. Математики описывают работу устройства лаконичнее: «10 по модулю 4 равно 2».

Студж посмотрел через модулоскоп на 147 монет, лежащие на его столике. Увидев лишь три, он вскрикнул. Убрав модулоскоп, он с облегчением обнаружил, что все его монеты были на месте.

— Перестань играться,— строго приказал дух.— Оставь устройство настроенным на канал 4, достань свою записную книжку и взгляни на таблицу простых чисел. Что ты видишь?

— Ничего, кроме единиц и троек, и еще двойку, которая представляет исключение. Каждое простое число, являющееся суммой квадратов, выглядит как 1; все простые числа, не являющиеся суммами квадратов, выглядят как 3! Но, конечно же, здесь срабатывает условие $4k+1$ или $4k+3$ — либо 1, либо 3, если брать по модулю 4.

На мгновение он задумался.

— Но я все же не пойму, почему значение простого числа, взятое по модулю 4, оказывается важным.

— Вместо простых чисел, посмотри-ка на квадраты.

Студж пристально рассмотрел таблицу через модулоскоп. Последовало долгое молчание.

— Все, что я вижу,— сказал он наконец,— это что уравнение $1=1+0$ повторяется снова и снова.

— Да. А почему, ты понял?

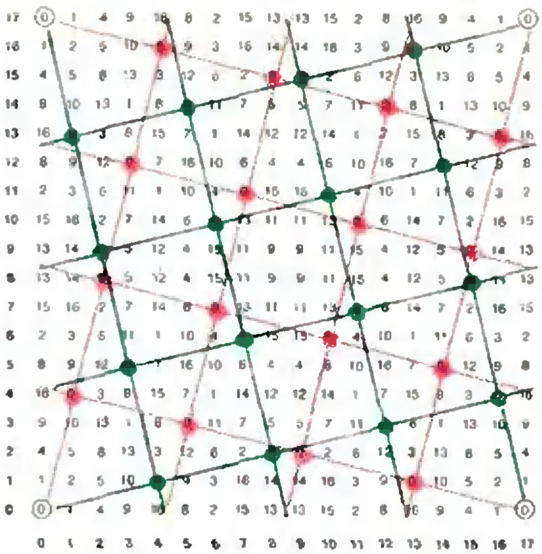
— Потому что квадраты по модулю 4 могут быть лишь нулями и единицами?

— Вот именно. Если возвести в квадрат четное число, то получишь кратное четырем, которое через модулоскоп будет выглядеть как 0. Если же возвести в квадрат нечетное число, то любой результат — 1, 9, 25, 49 — будет на 1 больше кратного 4. Поэтому суммы квадратов по модулю 4 будут выглядеть как $0+0=0$, $0+1=1$, либо $1+1=2$. Чего не хватает?

— Трех,— сказал Студж.

— Правильно. Сумма двух квадратов, взятая по модулю 4, может быть равна 0, 1 или 2, но никогда 3. Поэтому простые числа (на самом деле вообще любые числа) вида $4k+3$ никак не могут быть суммой двух квадратов. Теперь ты видишь, почему модуль 4 играет важную роль? — с этими словами дух начал испаряться.

17	289	290	293	298	305	314	325	338	353	370	389	410	433	458	485	514	545	578
16	256	257	260	265	272	281	292	305	320	337	356	377	400	425	452	481	512	545
15	225	226	229	234	241	250	261	274	289	306	325	346	369	394	421	450	481	514
14	196	197	200	205	212	221	232	245	260	277	296	317	340	365	392	421	452	485
13	169	170	173	178	185	194	205	218	233	250	269	290	313	338	365	394	425	458
12	144	145	148	153	160	169	180	193	208	225	244	265	288	313	340	369	400	433
11	121	122	125	130	137	146	157	170	185	202	221	242	265	290	317	346	377	410
10	100	101	104	109	116	125	136	149	164	181	200	221	244	269	296	325	356	389
9	81	82	85	90	97	106	117	130	145	162	181	202	225	250	277	306	337	370
8	64	65	68	73	80	89	100	113	128	145	164	185	208	233	260	289	320	353
7	49	50	53	58	65	74	85	98	113	130	149	170	193	218	245	274	305	338
6	36	37	40	45	52	61	72	85	100	117	136	157	180	205	232	261	292	325
5	25	26	29	34	41	50	61	74	89	106	125	146	169	194	221	250	281	314
4	16	17	20	25	32	41	52	65	80	97	116	137	160	185	212	241	272	305
3	9	10	13	18	25	34	45	58	73	90	109	130	153	178	205	234	265	298
2	4	5	8	13	20	29	40	53	68	85	104	125	148	173	200	229	260	293
1	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101	122	145	170	197	226	257	290
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17



Суммы квадратов (слева) и та же таблица при наблюдении через канал 17 модулоскопа (справа).

— Не уходи! — в отчаянии вскрикнул Студж. — Все это очень хорошо, но это еще не доказывает, что все простые числа вида $4k+1$ представимы в виде суммы двух квадратов, не правда ли? Мы доказали только, что другие не представимы.

Послышался едва слышимый ответ:

— Ты прав, но спасение близко. Не оставляй модулоскоп и жди-и-и...

Черт возьми, подумал Студж, сейчас, наверное, явится еще один дух. Беда не приходит одна, бог любит троицу. Он закричал, глядя в потолок:

— Ну, давай, материализуйся, я не хочу ждать всю ночь!

— Я духхх — апчхи!

— Что?

— Я дух доказательств настоящего. Здесь как в морозилке! Ты что, никогда не топишь камин? — Дух громко высморкался в завиток эктоплазмы.

— Ты пришел ко мне, чтобы показать, как доказывается, что каждое простое число вида $4k+1$ является суммой двух квадратов?

— Ну да, братец! У нас, у духов, иногда очень странная работа. Однако время уходит, Студж. Настройся на канал 17, и все будет замечательно! — величественным жестом дух доказательств настоящего достал пластмассовую дощечку, поделенную на квадраты, и положил ее на столик. — Я продемонстрирую тебе доказательство для числа 17, но тот же метод применим и в общем случае. Идея в том, чтобы отвлечься от простых чисел и начать с сумм квадратов. Эта специальная пластинка содержит в себе всевозможные суммы двух квадратов; в ячейке на пересечении столбца x и строки y записана сумма x^2+y^2. Посмотри на пластинку через модулоскоп. Что ты видишь?

— Множество чисел от 0 до 16, они заполняют все пространство.

— Ах да, я забыл. Возьми-ка этот фломастер и обведи кружком каждый 0, который увидишь, договорились?

Получив любопытную периодическую картинку из кружков (см. рисунок вверху), Студж уставился на нее и с недоумением покачал головой.

— Тут есть скрытая закономерность, — сказал дух. — Сейчас мы раскрасим часть кружков красным, остальные зеленым... Теперь видишь что-нибудь?

— Ну и ну! Да это же две правильные решетки, наложенные одна на другую.

— Правильно. Они так и называются решетками. Отмеченные нами цветные точки все являются точками (x, y) в столбце x и строке y, такие что x^2+y^2 являются кратными 17. Теперь посмотри на красную решетку и скажи мне, какая точка ближе всего к началу координат (столбец 0, строка 0)?

— Это легко. Столбец 1, строка 4.

— И соответствующая сумма квадратов, кратная 17?

— $1^2+4^2=17$ — это же и есть 17! Теперь я вижу! Ты показал мне, что точка на красной решетке, ближайшая к началу координат, решает задачу представления числа 17 в виде суммы двух квадратов!

— Совершенно верно. Зеленая решетка тоже работает, но она дает решение 4^2+1^2, в обратном порядке. Попробуем еще: настрой свой прибор на этот раз на канал 41. Получается ли все так же?

— Да. Смотри-ка, здесь опять две решетки, наложенные одна на другую! — сказал Студж.— И ближайшая к центру точка красной решетки расположена в столбце 4, строке 5, а 4^2+5^2 как раз равно 41!

— Великолепно! Тебе будет очень интересно попробовать другие каналы модулоскопа. Выбери какое-нибудь простое число p и отметь все позиции (x, y), в которых x^2+y^2 является числом, кратным p. В каждом случае будут получаться две решетки, хотя, наверное, ты бы этого не заметил, если бы я не сказал тебе об этом. Но я — дух доказательств настоящего, а не просто дух примеров! Я должен объяснить, почему возникают две решетки и почему точка решетки, ближайшая к началу координат, всегда решает задачу. Сначала — о существовании двух решеток. Это зависит от квадратного корня из -1.

— Я думал, что -1 не имеет квадратного корня,— прервал Студж.

— А-а. В самом деле, ни одно действительное число не может при возведении в квадрат дать -1, поэтому было изобретено специальное новое число i, такое что $i^2=-1$, и родилась система комплексных чисел. Но, если ты располагаешь модулоскопом, тебе не нужны комплексные числа.— Он написал что-то на пластмассовой пластинке.— Взгляни-ка на это через свой модулоскоп, настроенный на канал 17.

Студж посмотрел. На пластинке было написано:

$$x^2+y^2=(x+4y)(x-4y).$$

— Удивительно? Однако многое выглядит удивительно при наблюдении через модулоскоп до тех пор, пока не интерпретировать результат правильно, с учетом устройства модулоскопа. Из обычной алгебры нам известно, что $(x+4y)(x-4y)=x^2-16y^2$. Но через модулоскоп — 16 тождественно 17—16 (поскольку числа, кратные 17, остаются невидимыми), а это просто 1. Поэтому при наблюдении через модулоскоп $x^2-16y^2=x^2+y^2$.

— Точки, которые ты отметил,— продолжал дух,— это те, которые при наблюдении через модулоскоп удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=0$, но это уравнение по модулю 17 раскладывается на множители $(x+4y)$ $(x-4y)=0$, а следовательно, $x=-4y$ или $x=4y$. Каждый множитель соответствует одной решетке. Красная решетка задается уравнением $x=-4y$, а зеленая — уравнением $x=4y$. Все это по модулю 17, разумеется. Теперь посмотри на решетки и проверь. Например, на зеленой решетке ты обнаружишь все точки — (4,1), (8,2), (12,3), (16,4) и так далее,— удовлетворяющие уравнению $x=4y$.

— Это первая важная идея. При наблюдении через модулоскоп, настроенный на канал 17, число -1 имеет квадратный корень, а именно 4! В самом деле, $4^2+1=17=0$. А это непосредственно приводит к существованию двух решеток. В точности то же самое справедливо по отношению к любому простому числу вида $4k+1$. А это в свою очередь точно те простые числа, по модулю которых -1 имеет квадратный корень. Ты готов ко второй важной идее?

— Всегда готов,— ответил Студж.

— Каждая решетка состоит из одинаковых параллелограммов. (В данном случае параллелограммы представляют собой покосившиеся квадраты, однако для многих других решеток это не так, поэтому мы будем называть эти фигуры параллелограммами.) Какова площадь такого параллелограмма? Попробуй несколько примеров.

Студж почеркал в своей записной книжке.

— При $p=17$ параллелограмм имеет площадь 17 квадратных единиц. А при $p=41$ площадь составляет 41 квадратную единицу. Я думаю, что в общем случае для простого числа p площадь параллелограмма должна составлять p квадратных единиц.

— Это действительно так, хотя я не стану этого сейчас доказывать. Но, возможно, тебе интересно, почему я обратил внимание на площадь параллелограмма.

— Да, я подумал об этом.

— Это связано с теоремой, доказанной Германом Минковским, русским математиком, преподававшим в Германии. Он изобрел пространство (пространство Минковского), которым воспользовался Эйнштейн в своей теории относительности. Минковскому пришла в голову блестящая идея, касающаяся решеток. На первый взгляд она тривиальна: если площадь параллелограмма относительно мала, то узловые точки решетки должны быть недалеко друг от друга. Поэтому некоторые из них должны оказаться совсем поблизости от начала координат. Он доказал теорему, сформулировав строго свою идею. Предположим, у нас есть решетка, образованная параллелограммами, и предположим также, что мы нарисовали окружность с центром в начале координат. Теорема Минковского гласит, что если площадь круга по меньшей мере в четыре раза превосходит площадь параллелограмма, то найдется по крайней мере одна узловая точка решетки, кроме начала координат, которая лежит внутри круга. Мы можем воспользоваться теоремой Минковского для доказательства того, что ближайшая к началу координат точка решетки решает задачу представления простого числа p в форме суммы двух квадратов. Возьмем, например, $p=17$. Площадь параллелограмма также равна 17. Возьмем окружность немного большего радиуса, чем квадратный корень из 17, скажем, радиуса 5. Тогда площадь круга составит $5^2\pi=25\pi=78{,}54$, что больше $4\times17=$ $=68$, так что условия теоремы Минковского соблюдены. Пока все правильно?

— Слежу за каждым словом.

— Согласно теореме Минковского, точка решетки, не лежащая в начале координат, находится внутри круга. Назовем ее $(x,\ y)$. Тогда сумма x^2+y^2 меньше или равна квадрату радиуса окружности. Другими словами, $x^2+y^2\leqslant25$. Однако для точек решетки x^2+y^2 кратно 17. Это кратное не является нулем, поскольку данная точка решетки не совпадает с началом координат. Какие ненулевые кратные 17 меньше или равны 25?

— Само число 17,— сказал Студж.— Больше никаких.

— Вот именно! Поэтому x^2+y^2 должно быть равно в точности 17, и это есть решение задачи. Тот же метод работает и в общем случае,— похвастался дух. Дальновидная идея Минковского породила новую ветвь математики, названную геометрией чисел, по названию его книги, написанной в 1896 г. Здесь применяется геометрия для изучения теории чисел. Казалось бы, эти области слабо связаны друг с другом! Другое приложение геометрии чисел — теорема о четырех квадратах: каждое целое положительное число (простое или нет) является суммой четырех квадратов. Однако пусть эта задача не даст тебе покоя до следующего рождества, Студж.

Наконец Студж смог немножко расслабиться, буря в его утомленном мозгу утихла.

Уже засыпая, он вспомнил Боба Скрэтчита. Придя в необычно добродушное расположение духа, он решил в будущем быть добрее к своему служащему.

Но когда именно в будущем, он не решил.

В рождественское утро Джим проснулся в хорошем настроении.

— Папа, папа! Ты достал мне старый мамин парадокс с новой подкладкой из интуитивной логики, а, пап? Ну, такой, с промежуточным логическим значением?

— Понимаешь ли,— сказал Скрэтчит.— Это не так просто, сынок.— Он протянул Джиму потрепанную картонную коробку, подыскивая слова, которые могли бы остановить пронзительные вопли Джима.

— *Я не уверен, смог ли я это сделать.*

Это был миг удачи. Или, может быть, сам дух прозрений грядущего сел ему на плечо и прошептал подсказку на ухо. Потому что лицо Джима внезапно озарилось, как рождественская елка.

— Папочка, ты смог это сделать!

Ну, действительно, едва ли придумаешь более промежуточное значение истины, чем то, что выбрал Скрэтчит в своем ответе.

Задачи

М1301—М1305, Ф1308—Ф1312

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 ноября 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1301» или «Ф1308». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1305 и Ф1308—Ф1311 предлагались на заключительном этапе XXV Всесоюзной олимпиады по математике и физике.

М1301. Обязательно ли тетраэдр правильный, если
а) пять двугранных углов равны друг другу;
б) восемь плоских углов равны друг другу?
Обязательно ли пирамида $ABCD$ правильная, если ее основание ABC — правильный треугольник и три плоских угла при вершине D равны друг другу?

В. Сендеров

М1302. Докажите, что произведение многочлена $(x+1)^{n-1}$ на любой многочлен (отличный от нуля) имеет не менее n отличных от 0 коэффициентов.

Г. Карнаух, А. Савин

М1303. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $q_1, q_2, ..., q_n, ...$ такие, что (при всех $n>3$)

$$q_n=(q_{n-3}+q_{n-1})/q_{n-2}.$$

О. Алиев

М1304. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, R — радиус описанной около него окружности. Докажите, что

$$R^3\geqslant IA\cdot IB\cdot IC.$$

А. Соловьев

М1305. Даны $2n$ различных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$. Таблица $n\times n$ заполнена по следующему правилу: в клетке, расположенной на пересечении i-й строки и j-го столбца, записано число a_i+b_j. Докажите, что если во всех столбцах произведения чисел одинаковы, то во всех строках — тоже.

Д. Фомин

Ф1308. У левого края тележки длиной $L=0{,}2$ м и массой $M=1$ кг лежит кубик массой $m=0{,}3$ кг (рис. 1).

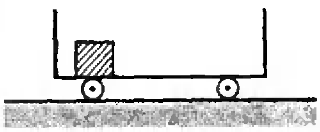


Рис. 1.

Кубику толчком придают горизонтальную скорость $v_0=1$ м/с вправо. Считая, что тележка в начальный момент неподвижна, определите, на каком расстоянии от левого края тележки будет находиться кубик после того, как проскальзывание его относительно тележки прекратится. Коэффициент трения кубика о дно тележки $\mu=0{,}1$. Удары кубика о стенки считать абсолютно упругими. Тележка едет по столу без трения.

А. Зильберман

Задачник „Кванта"

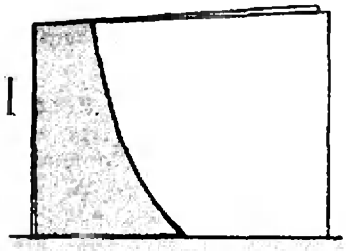


Рис. 2.

Ф1309. На рисунке 2 — фотография двух плоскопараллельных пластинок, составляющих между собой некоторый угол α, частично погруженных в воду. Горизонтальный размер пластинок равен 12 см. По форме границы раздела между жидкостью и воздухом определите угол α. Смачивание считать полным.

В. Можаев

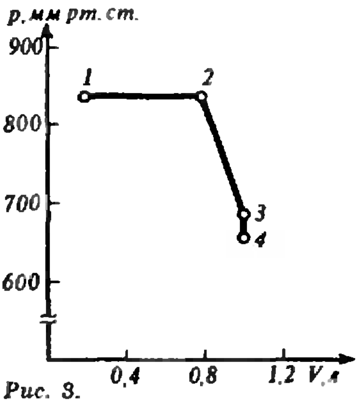


Рис. 3.

Ф1310. В сосуде под поршнем находится некоторое количество жидкого азота и его пары при температуре $T_1=78$ К (точка *1* на рисунке 3). Поршень медленно отодвигают, увеличивая объем сосуда при постоянной температуре (участок *1—2—3*). В точке *3* давление в сосуде становится равным 686 мм рт. ст. Поршень закрепляют и охлаждают сосуд до $T_2=76$ К, давление при этом уменьшается до 657 мм рт. ст. (точка *4*). Каким будет давление в сосуде, если при этой температуре медленно передвинуть поршень в начальное положение? Какая масса жидкости первоначально была в сосуде? Молярная масса азота $M=28$ г/моль. Плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см^3.

А. Зильберман

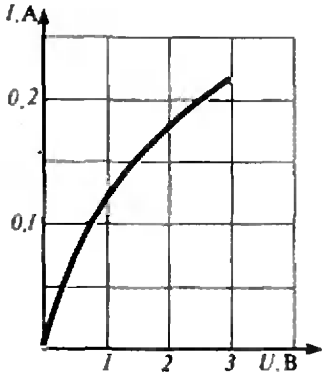


Рис. 4.

Ф1311. Лампочку для карманного фонаря подключают к источнику напряжения длинными проводами. При длине проводов 10 м ток через лампочку оказался равным 0,17 А, при 20 м — 0,13 А. Каким будет ток через лампочку при длине проводов 40 м? Каким станет этот ток, если лампочку подключить прямо к источнику? Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. Зависимость тока через лампочку от напряжения на ней приведена на рисунке 4.

А. Зильберман

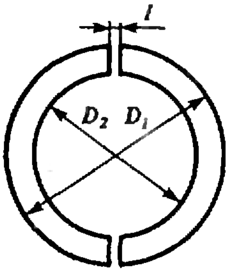


Рис. 5.

Ф1312. Катушка равномерно намотана на кольце из феррита с магнитной проницаемостью $\mu=3000$. Внешний диаметр кольца $D_1=2$ см, внутренний — $D_2=1{,}6$ см. Индуктивность катушки $L=0{,}1$ Гн. Какой была бы индуктивность катушки, если бы ее сердечник состоял из двух полуколец, прижатых друг к другу неплотно — с зазором шириной $l=0{,}1$ мм (рис. 5)? Во сколько раз изменилась бы эта индуктивность при замене материала полуколец на феррит с $\mu_1=2000$?

Р. Александров

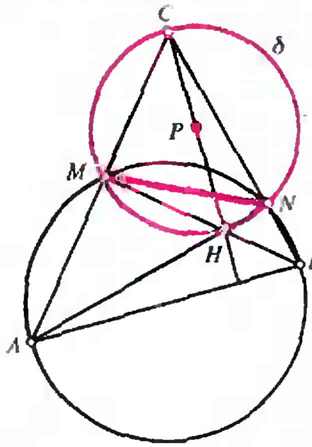
Задачник „Кванта"

Решения задач

М1276—М1280, Ф1288—Ф1292

М1276. *Для данной хорды MN окружности рассматриваются треугольники ABC, основаниями которых являются диаметры AB этой окружности, не пересекающие MN, а стороны AC и BC проходят через концы M и N хорды MN. Докажите, что высоты всех таких треугольников ABC, опущенные из вершины C на сторону AB, пересекаются в одной точке.*

Точки M и N — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A и B, поэтому третья высота проходит через точку H их пересечения, причем точки C, M, N и H лежат на одной окружности δ с диаметром CH. Пусть P — центр этой окружности. Заметим, что при движении диаметра AB величина угла C треугольника остается неизменной,— она измеряется полуразностью постоянных по величине дуг AB и MN (см. рисунок). Поскольку хорда MN неподвижна, остается



неизменной и окружность δ (по которой движутся точка C и диаметрально противоположная ей точка H), а тем самым и ее центр P: диаметр CH — участок интересующей нас высоты — просто вращается вокруг точки P.

Е. Куланин

М1277. *Докажите (для положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$) неравенство*

$$\sqrt{\frac{a_1+a_2}{a_3}}+\sqrt{\frac{a_2+a_3}{a_4}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_{n-1}+a_n}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_n+a_1}{a_2}}\geqslant n\sqrt{2}.$$

Как следует из неравенства $x^2+y^2\geqslant 2xy$ (неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел x^2 и y^2), левая часть доказываемого неравенства не меньше

$$\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{\frac{a_1a_2}{a_3^2}}+\sqrt[4]{\frac{a_2a_3}{a_4^2}}+\ldots+\sqrt[4]{\frac{a_{n-1}a_n}{a_1^2}}+\sqrt[4]{\frac{a_na_1}{a_2^2}}\right).$$

Поскольку произведение n корней, стоящих в скобках, равно 1, по теореме Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом для n чисел (эта теорема подробно обсуждалась в третьем номере журнала за этот год) их сумма не меньше n. Отсюда и следует нужное неравенство.

В. Сендеров, Л. Курляндчик

Задачник „Кванта"

M1278. *Имеется n вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условиям $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$ и $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$. Докажите, что $x_ix_j \leqslant -1/n$ для некоторых i и j.*

Рассмотрим сначала «крайний» случай, когда числа принимают всего два различных значения: k из них равны $a<0$, а остальные $(n-k)$ равны $b>0$. Тогда $ka+(n-k)b=0$, то есть $ka=-(n-k)b$ и $ka^2+(n-k)b^2=$ $=-(n-k)ab-kab=1$, откуда $ab=-1/n$. Общий случай попробуем свести к этому, «раздвигая» переменные. Заметим, что если заменить пару чисел u, v $(u<v)$ на $u-t$, $v+t$ $(t>0)$, то сумма не изменится, а сумма квадратов увеличится:

$$(u-t)^2+(v+t)^2=u^2+v^2+2t(v-u)+\ t^2.$$

Пусть $a<0$ — наименьшее, $b>0$ — наибольшее из данных n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если в этом наборе есть два числа, отличных от a и b, раздвинем их, не меняя суммы так, чтобы одно из них сравнялось с одним из крайних чисел a или b. После нескольких операций получим набор из n чисел, в котором все, кроме одного — обозначим его c,— равны a (пусть их k) или b (их $m=n-k-1$), сумма которых равна 0, а сумма квадратов — не меньше 1:

$$ka+c+mb=0,$$
$$ka^2+c^2+mb^2=-(c+mb)a+c^2-(ka+c)b\geqslant 1.$$

Поскольку $a\leqslant c<b$, $ca-c+cb-ab=(c-a)(b-c)>0$. Сложив это неравенство с предыдущим, получим требуемое:

$$-(m+k+1)ab=-nab>1, \text{ или } ab<-1/n.$$

(Из этого доказательства ясно, что равенство достигается лишь в «крайних» случаях, рассмотренных вначале.)

Задача имеет и прямое алгебраическое решение. Для любого i, $1\leqslant i\leqslant n$

$$(x_i-a)(x_i-b)\leqslant 0.$$

Просуммировав эти неравенства, получим

$$\sum_{i\leqslant 1}^{n} x_i^2-(a+b)\sum_{i=1}^{n} x_i+nab\leqslant 0 \qquad (*)$$

Но $\sum\limits_{i\leqslant 1}^{n} x_i^2=1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=0$, поэтому $(*)$ превращается в $nab\leqslant -1$.

Н. Васильев, Е. Столов

M1279. *На плоскости Oxy расположено n непересекающихся квадратов со стороной 1, стороны которых параллельны осям. Известно, что любые два из них можно пересечь прямой, параллельной одной из осей. Докажите, что*

Можно считать, что число квадратов $n>4$, поскольку при $n\leqslant 4$ утверждение очевидно. Рассмотрим наименьший прямоугольник Π со сторонами, параллельными осям, содержащий все квадраты. По крайней мере одна его сторона — ее можно считать горизонтальной (параллельной оси Ox) — больше 3. В самом деле, предположим, что вертикальная сторона не больше 3. Тогда каждый из n данных квадратов можно двигать вверх или вниз не задевая остальных (поскольку либо под *можно одной прямой, параллельной оси, пересечь некоторые $n-2$ квадрата.*

ним, либо над ним нет квадрата). Передвинув каждый квадрат вплотную к одной из горизонтальных сторон $П$, мы получим, что (при $n>4$) к одной из этих сторон прилегает не менее 3 квадратов, и, значит, длина горизонтальной стороны больше 3.

Пусть M и N — два квадрата из данных n. Будем говорить, что они расположены горизонтально (вертикально) и писать $M-N$ (соответственно, $M|N$), если их пересекает некоторая горизонтальная (вертикальная) прямая; по условию, для любой пары M и N квадратов всегда выполнено ровно одно из этих отношений.

Пусть далее X и Y — самый левый и самый правый квадраты (прилежащие к сторонам $П$). Разумеется, $X-Y$. Для определенности считаем, что Y лежит не ниже X.

Существует не более одного квадрата Z такого, что $Z|X$. (Он по горизонтали должен отстоять от X не более чем на 1, поэтому $Z-Y$; так что центр Z должен лежать в прямоугольнике, закрашенном на рисунке 1.)

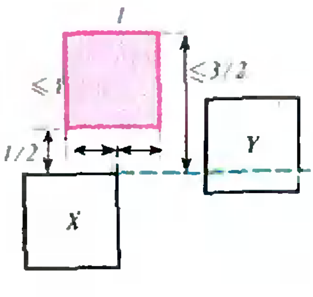


Рис. 1.

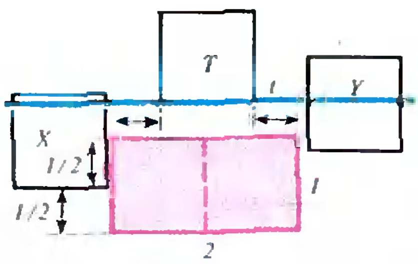


Рис. 2.

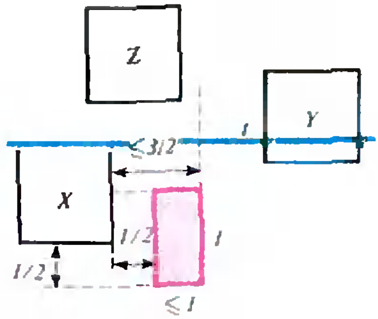


Рис. 3.

Рассмотрим два случая.

1) Такого Z нет, т. е. $Z-X$ для любого Z. Рассмотрим самый верхний квадрат T; пусть t — прямая, идущая по его нижней стороне. Для всех квадратов V, лежащих ниже t, должны быть выполнены условия $V|T$ и $X-T$, поэтому их центры лежат в прямоугольнике с горизонтальной стороной 2, закрашенном на рисунке 2. Ясно, что таких квадратов не более 2 (в левой и в правой половине прямоугольника лежит центр не более чем одного квадрата). Таким образом, прямая t — искомая.

2) Имеется такой (единственный) квадрат Z, что $Z|X$. Он лежит выше X (поскольку $Z-Y$). Пусть теперь прямая t проходит по верхней стороне X. Выше t расположен только Z. Если некоторый квадрат N расположен ниже t, то $Z|N$ (поскольку $Z-N$ неверно) и $X-N$, так что центр N находится в прямоугольнике, закрашенном на рисунке 3. Таких квадратов N не больше чем 1, и прямая t — искомая.

А. Анджанс

Задачник „Кванта"

M1280*. *Докажите, что в периоде десятичной дроби $1/3^{100}$ встретится:*
а) не менее 20 одинаковых цифр подряд;
б) последовательность цифр 123456789.

Мы докажем значительно более сильное утверждение: любая последовательность из 46 цифр встретится в периоде десятичной дроби $1/3^{100}$.

Заметим, что $3\cdot 9^9>10^9$ (можно проверить это непосредственно, а можно вспомнить более общее неравенство $(1+1/k)^k<3$), поэтому $3^{100}=3^{95}\cdot 3^5=3^{5\cdot 19}\times\times 243>10^{45+2}=10^{47}$; зная логарифм 3, легко проверить, что эта оценка довольно точная: наша дробь $1/3^{100}$ начинается как раз с 47 нулей (что делает формально ответ на вопрос а) тривиальным; впрочем, сравнительно нетрудно показать, что в периоде по 20 и даже по 45 раз подряд встретятся и все другие цифры, отличные от 0).

Докажем сначала индукцией по n, что длина периода десятичной дроби $1/3^n$ равна 3^{n-2} (при $n\geqslant 2$). Для $n=2$ это верно: $1/9=0{,}11111...$ Пусть $1/3^n=A_n/(10^{3^{n-2}}-1)$, где A_n — натуральное число, не делящееся на 3 (это и означает, что длина периода десятичной дроби $1/3^n$ равна 3^{n-2}). Тогда $10^{3^{n-2}}-1=3^nA_n$ и $10^{3^{n-1}}-1=10^{(3^{n-2})3}-1=(10^{3^{n-2}}-1)(10^{2\cdot 3^{n-2}}+10^{3^{n-2}}+1)$. Вторая скобка дает, очевидно, остаток 3 при делении на 9; пусть она равна $9B_n+3$, тогда

$$10^{3^{n-1}}-1=(10^{3^{n-2}}-1)(9B_n+3)=3^{n+1}A_n(3B_n+1)=3^{n+1}A_{n+1},$$

где A_{n+1} не делится на 3, так что $1/3^{n+1}$ имеет период длины 3^{n-1}. (Заметим, что по индукции легко убедиться также, что A_n дает остаток 1 при делении на 3.) В качестве небольшого отступления покажем, пользуясь этим, почему в нашей дроби $1/3^{100}$ встретятся группы одинаковых цифр подряд. Дело в том, что период A_n при достаточно большом n начинается с серии нулей. При переходе к A_{n+2} — его можно получить, деля столбиком группу из девяти A_n на 9 — в начале $(k+1)$-го по счету A_n мы будем получать серию цифр k (где $k=0, 1, ..., 8$). Любопытно, что если n настолько велико, что серия имеет длину более 9, мы можем, разделив серию ...11111... на 9, в явном виде указать место, где в числе A_{n+4} возникают подряд цифры 012345679 (это — период 1/81), но из-за отсутствия восьмерки этих соображений чуть-чуть не хватает для решения задачи б).

Вернемся теперь к обещанному общему утверждению. Положим $M=3^{98}$ и будем мысленно делить столбиком 1 на $9M=3^{100}$. В процессе деления мы должны получить периодическую десятичную дробь с периодом длины M, так что всего нам встретится M различных остатков — до тех пор, пока очередной остаток вновь не окажется равным 1. Остатки — натуральные числа, меньшие $9M$, причем каждый из них дает при делении на 9 остаток 1, т. е. имеет вид $9q+1$ (q — целое); первый остаток 1, а каждый следующий получается из предыдущего умножением на $10=9+1$ — приписыванием нуля — и, быть может, вычитанием числа, кратного $9M$; все эти процедуры не меняют число «по модулю 9». Но количество таких чисел

$(1, 10, 19, \ldots, 9q+1, \ldots, 9M-8)$ как раз равно M, поэтому все они встретятся в качестве остатков.

Остальное просто. Пусть $b=0,b_1b_2\ldots b_{46}$ — любая 46-значная десятичная дробь, $b^*=b+10^{-46}$. Разность между числами $9Mb^*$ и $9Mb$ больше 10, поскольку $9M>10^{47}$. Значит, между ними найдется число a вида $9q+1$. И в процессе деления на $9M$, начиная с этого остатка $a=9q+1$, будут получены 46 нужных цифр $b_1b_2\ldots b_{46}$: ведь $a/9M$ заключено между b и b^*.

Г. Рыбников

Ф1288. *Посредине большой круглой комнаты диаметром 20 м с высотой потолка 3,2 м стоит большой сейф в виде куба с ребром 3 м. При помощи игрушечной катапульты, расположенной на полу, мы хотим забросить камешек на середину «крыши» сейфа так, чтобы камешек не коснулся потолка. Какая минимальная скорость для этого необходима? При какой высоте потолка в комнате это вообще возможно?*

Удобнее рассмотреть обратную ситуацию — бросать камешек из точки, в которую мы хотим попасть, и смотреть, чтобы он не коснулся потолка и попал на пол (а не в стену). Бросать, конечно, нужно параллельно ребру куба, а не вдоль диагонали.

Рассмотрим траекторию, которая касается ребра куба и почти задевает потолок, т. е. верхняя ее точка находится как раз посредине. Для этой траектории можно вычислить проекции скорости камешка в момент броска:

$$v_в=\sqrt{2g(H-a)}\approx 2\ \text{м/с},\quad v_г=\frac{a}{4}\sqrt{\frac{g}{2(H-a)}}\approx 1{,}87\ \text{м/с},$$

где $H=3{,}2$ м, $a=3$ м.

Теперь легко находится минимальная скорость камешка при падении на пол:

$$v^2_{\min}=v_г^2+v_в^2+2ga=\frac{ga^2}{32(H-a)}+2gH,\ v_{\min}\approx 8{,}2\ \text{м/с}.$$

Если уменьшить высоту потолка, то скорость эта увеличивается и при некоторой высоте камешек попадет в край пола. Это произойдет при высоте потолка

$$H^*=a+\frac{a}{(2d/a)^2-1}\approx a+\frac{a}{151{,}1}\approx 3\ \text{м}+2{,}0\ \text{см}.$$

З. Рафаилов

Ф1289. *В теплоизолированный цилиндрический сосуд поместили кусок льда массой M при температуре $t_0=0$ °C и прочно прикрепили его ко дну. Затем залили этот лед водой такой же массы M. Вода полностью покрыла лед и достигла уровня $H=20$ см. Определите, какова была температура этой воды, если после установления теплового равновесия уровень ее опустился на $b=$*

Уменьшение общего объема, занимаемого водой и льдом, связано с тем, что при установлении теплового равновесия часть льда тает, а образовавшаяся вода занимает меньший объем. Из анализа числовых данных видно, что растаял не весь лед — при таянии всего льда уровень воды опустился бы на $b^*=H(\rho_в-\rho_л)/(\rho_в+\rho_л)\approx 0{,}87$ см. Следовательно, установившаяся температура системы $t_{кон}=0$ °C.

Обозначим массу растаявшего льда через m и запишем уравнение теплового баланса:

$$cM(t_в-t_{кон})=\lambda m.$$

Отсюда получаем

$$t_в=\lambda m/(cM).$$

$=0{,}4$ см. Плотности воды и льда равны соответственно $\varrho_в=1000$ кг/м³ и $\varrho_л=920$ кг/м³, удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

Запишем выражения для изменения объема системы «вода — лед» и для ее начального объема (S — площадь сосуда):

$$\frac{m}{\rho_л}-\frac{m}{\rho_в}=bS, \qquad \frac{M}{\rho_л}+\frac{M}{\rho_в}=HS,$$

откуда

$$\frac{m}{M}=\frac{b}{H}\frac{\rho_в-\rho_л}{\rho_в+\rho_л}.$$

Окончательно получаем

$$t_в=\frac{\lambda b}{cH}\frac{\rho_в-\rho_л}{\rho_в+\rho_л}\approx 37{,}7\ ^\circ\mathrm{C}.$$

М. Гаврилов

Ф1290. *Между двумя параллельными шинами включены конденсаторы C_1 и C_2 (рис. 1). Проводящая перемычка длиной L с конденсатором C_3 касается шин. Перпендикулярно плоскости шин направлено однородное магнитное поле индукцией B. Перемычка движется с постоянной скоростью v. Найдите заряд на конденсаторе C_3.*

В движущемся проводнике возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}=BLv$, полярность которой легко определить с помощью правила Ленца. Это приводит к перераспределению зарядов на конденсаторах.

Воспользуемся эквивалентной схемой, изображенной на рисунке 2 (знаки зарядов выберем произвольно), и получим систему уравнений

$$\begin{cases} U_{AB}=\dfrac{q_1}{C_1}=\dfrac{q_2}{C_2}=\mathscr{E}-\dfrac{q_3}{C_3},\\ q_1+q_2-q_3=0. \end{cases}$$

Решая систему относительно искомого заряда q_3, найдем

$$q_3=\frac{\mathscr{E}}{\dfrac{1}{C_1+C_2}+\dfrac{1}{C_3}}=\frac{BLv}{\dfrac{1}{C_1+C_2}+\dfrac{1}{C_3}}.$$

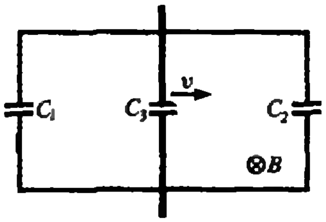


Рис. 1.

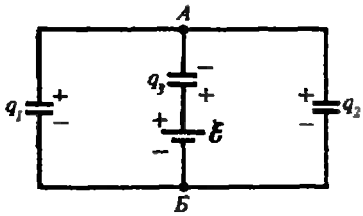


Рис. 2.

Ф1291. *Схема из двух одинаковых резисторов и конденсатора подключена к сети переменного напряжения 36 В, 50 Гц (рис. 1 на с. 28). Показания первого амперметра 0,3 А, второго — 0,2 А. Считая приборы*

Так как амперметры идеальные, напряжение на каждом резисторе и на конденсаторе одно и то же, причем равное напряжению сети U. Нарисуем векторную диаграмму токов и напряжений (рис. 2 на с. 28), из которой получим

$$I_2^2=I_R^2+I_C^2,$$
$$I_1^2=(2I_R)^2+I_C^2,$$

идеальными, найдите сопротивления резисторов и емкость конденсатора.

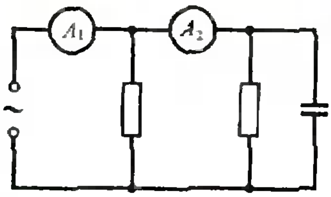


Рис. 1.

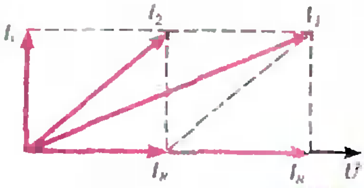


Рис. 2.

Ф1292. *На расстоянии 20 см от точечного источника света помещена собирающая линза диаметром 1 см с фокусным расстоянием 10 см, а на расстоянии 50 см от источника — собирающая линза диаметром 10 см с фокусным расстоянием 20 см. Главные оптические оси линз совпадают, источник находится на оси. На каком расстоянии за большой линзой нужно поместить экран, чтобы световое пятно на нем имело минимальный внешний диаметр? Найдите диаметр этого пятна. Изменится ли освещенность пятна, если убрать маленькую линзу?*

или

$$I_1^2-I_2^2=3I_R^2 .$$

Поскольку $I_R=U/R$, найдем искомое сопротивление каждого резистора:

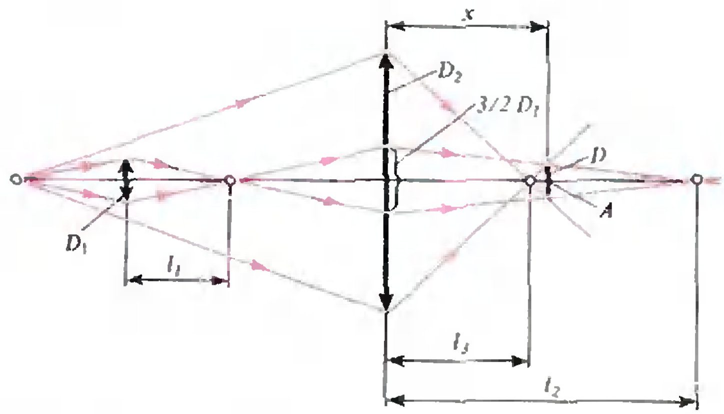
$$R=\sqrt{\frac{3U^2}{I_1^2-I_2^2}}\approx 279 \text{ Ом}.$$

Теперь из равенства $I_2^2=I_R^2+I_C^2$, учитывая, что $I_C=2\pi\nu CU$, найдем емкость конденсатора:

$$C=\frac{1}{2\pi\nu U}\sqrt{\frac{5I_2^2-I_1^2}{3}}\approx 16{,}9 \text{ мкФ}.$$

А. Зильберман

Изображение источника после преломления лучей в маленькой линзе (см. рисунок) оказывается между линзами на расстоянии $l_1=20$ см от первой линзы. Изображение после преломления этих же лучей в большой линзе окажется на расстоянии $l_2=60$ см справа от второй линзы.



Из рисунка видно, что маленькая линза не полностью заслоняет большую, значит, часть лучей от источника сразу преломляется в большой линзе. Изображение после такого однократного преломления получается справа от большой линзы на расстоянии $l_3=28$ см.

Очевидно, что минимальный внешний радиус пятна получается при положении экрана в точке A. Расстояние x до этой точки и диаметр D пятна легко найти из равенств $D/D_2=(x-l_3)/l_3$ и $D/(^3/_2D_1)=(l_2-x)/l_2$:

$$x\approx 30 \text{ см}, \quad D\approx 0{,}7 \text{ см}.$$

Поскольку большая линза не засвечивает центральную часть пятна, в центре освещенность меньше, а на краях больше. Если убрать маленькую линзу, полный поток, попадающий на экран, не изменится, значит, освещенность центральной части пятна при этом увеличится, а освещенность краев уменьшится.

А. Сашин

Задачи

1. Иван Степанович долгое время прожил в однокомнатной квартире. Ему почему-то нравилось, что его комната была квадратной и длины ее сторон выражались целым числом метров. Недавно он обменял ее на двухкомнатную квартиру той же площади. Одна из комнат имеет площадь 7 м^2, а другая — вновь квадратная со сторонами, выражающимися целым числом метров. Какая площадь у квартиры Ивана Степановича?

2. Решите уравнение (см. рисунок) в целых числах.

$$Д - В - А = Д : В : А = 2$$

3. — С днем рождения, бабушка!

— Спасибо, Андрей. И тебя с днем рождения!

— Сколько лет тебе исполнилось?

— А вот посчитай. Если две последние цифры нынешнего года поменять местами, то получится год моего рождения.

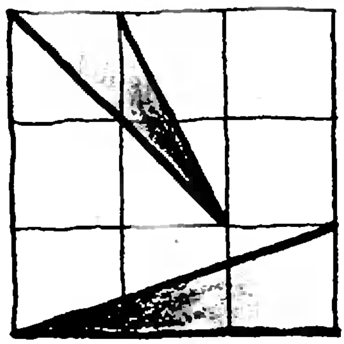
— Значит, ты в восемь раз старше меня. А дедушка еще старше?

— Конечно. Он родился до революции, а я — после.

В каком году происходил этот разговор?

4. Дима сидел за столом. Перед ним на стене висело зеркало, а на противоположной стене — электронные часы. Взглянув в зеркало, он увидел, что на отражении минутного табло указан его возраст. Взглянув на это табло через минуту, он обнаружил, что число увеличилось на 40. Сколько лет могло быть Диме?

5. Докажите, что углы, отмеченные на рисунке, равны.



Эти задачи нам предложили В. Вьюн, Ю. Аленков, М. Роллова, ученик 11 класса из г. Чебоксары Андрей Шаринёнок и В. Произволов.

ФИЗИКА, НЕЗНАЙКА И ДРУГИЕ

А. КОРЖУЕВ

Вы, наверное, не раз встречались с описаниями различных физических явлений в художественных произведениях. В этой статье мы хотим предложить вам несколько таких описаний из детских книг и попросить вас разобраться, о каких физических явлениях идет речь. Чтобы решить предложенные «задачи», придется, очевидно, взглянуть на описываемые явления природы с точки зрения того, что вы уже знаете из физики.

1. Вот, например, такая «задача» из повести М. Пришвина «Золотой луч»:

«...Тишина в лесу была такая, что за день ни одна струйка воздуха не переместилась. Поняв сразу, что по следам найти Антипыча невозможно, сделав круг с высоко поднятой головой, Травка попала на табачную струю воздуха и по табаку мало-помалу, то теряя воздушный след, то опять встречаясь с ним, добралась-таки до хозяина».

О каком физическом явлении идет речь?

2. А вот «задача» из книги А. Серафимовича «Лесная жизнь»:

«Торопливо и обрадованно мальчик послюнил палец и, подняв, стал медленно поворачивать. С той стороны, откуда неумолимо тянул ветерок, в пальце почувствовалось ощущение холода».

Объясните, почему.

3. А теперь приведем отрывок из хорошо известной повести В. Катаева «Белеет парус одинокий»:

«Сначала можно подумать, что звезды неподвижны. Но нет. Присмотришься — и видно, что весь небесный свод медленно поворачивается. Одни звезды опускаются за дачи. Другие, новые, выходят из моря».

Почему так «странно» ведут себя звезды?

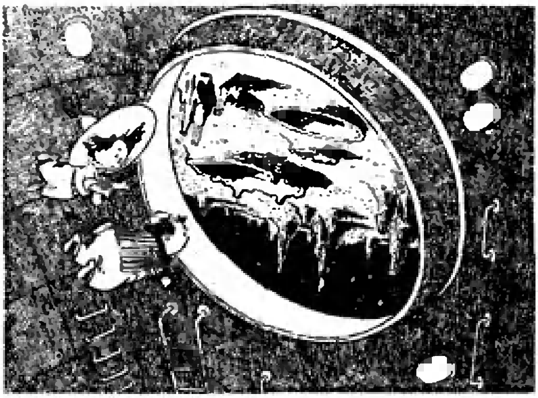
4. Еще один отрывок из той же повести:

«...Гаврик встал, сладко растянул руки, закатал штаны и, зевая, вошел по щиколотку в воду. С ума он сошел, что ли? Ноги и так озябли до синевы, а тут еще лезть в море, один вид которого вызывает озноб.

Однако мальчик хорошо знал, что он делает. Вода только на вид казалась холодной. На самом деле она была очень теплой, гораздо теплее воздуха. Мальчик просто-напросто грел в ней ноги».

Чем обусловлены такие интересные свойства воды? Почему она оказалась теплее воздуха? Как вы думаете, в какое время — вечером или утром — происходило то, о чем написано в отрывке?

5. В этой же повести есть следующие строки:



«Ладони у Гаврика приятно горели. Весло, опущенное в прозрачную зеленую воду, казалось сломанным».

Попытайтесь объяснить и это явление.

6. А вот полет на Луну, описанный детским писателем Н. Носовым в книге «Незнайка на Луне»:

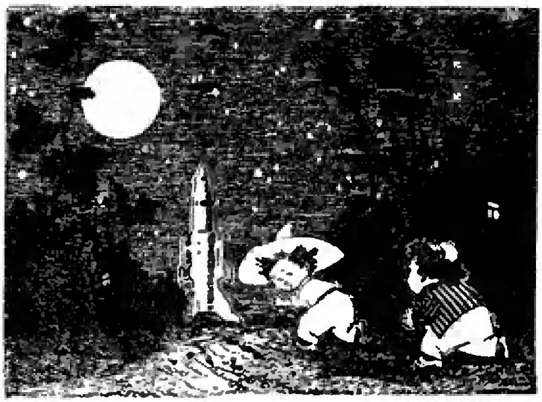
«В иллюминаторах по-прежнему чернело небо со звездами, с ярко сверкающим диском Солнца и серебристой, святящейся Луной сверху. Солнце было такого же размера, каким оно обычно видно с Земли, но Луна сделалась уже вдвое больше...»

Почему же так получилось, ведь на Земле видимые размеры Луны и Солнца почти одинаковы?

7. Интересно описание еще одного явления в этой же книге:

«Казалось, был день, но в то же время была и ночь. Так на Земле никогда не бывает. Когда на Земле видно Солнце, то не видно звезд, и, наоборот, когда есть звезды, нет Солнца».

Подумайте и попытайтесь узнать, что это — фантастика и вымысел или так может быть на самом деле?



8. И третий отрывок из книги Н. Носова «Незнайка на Луне». В нем описываются загадочные явления, происходящие в условиях невесомости:

«Шпунтик поскорей заткнул носик чайника пальцем, но вода тут же начала вылезать пузырем из-под крышки. Этот пузырь становился все больше, наконец, оторвался от крышки и, трясясь, словно был сделан из жидкого студня, поплыл по воздуху...

...— Тут у нас чудо какое-то! — растерянно сказал Шпунтик.— Пузырь лезет из чайника.

— Пузырь лезет — это еще не чудо,— ответил Знайка.

Он приблизился к чайнику и строго посмотрел на пузырь, выдувавшийся из носика чайника...

...— Никакого чуда здесь нет, а есть вполне объяснимое научное явление. Все вы знаете, что вода нагревается благодаря перемешиванию. Нижние слои воды в чайнике, нагреваясь на огне или на электроплитке, становятся легче и всплывают вверх, а на их место отпускается холодная вода из верхних слоев. В чайнике получается, как бы это сказать, круговорот воды. Но такой круговорот происходит при наличии у воды веса. Если веса не будет — вот как сейчас...»

Предлагаем вам подумать, что же произойдет при отсутствии веса,и продолжить объяснение Знайки. И предлагаем подумать над тем, будет ли гореть огонь в условиях невесомости.

А если вы захотите себя проверить — загляните в конец номера (на с. 73).

Конкурс «Математика 6—8»

В пятом номере мы завершили наш первый конкурс по решению математических задач для школьников 6—8 классов. Его результаты будут опубликованы через месяц. А сейчас мы открываем новый конкурс «Математика 6—8», который продлится до апреля будущего года. Вам будут предложены 24 задачи, по 3 в каждом номере журнала.
Решения задач этого номера высылайте до 1 декабря 1991 г. по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», с пометкой: «Конкурс «Математика 6—8». Не забудьте указать фамилию, имя, школу, класс и домашний адрес.

ЗАДАЧИ

1. У лифта на 1-м этаже 18-этажного дома собрались 17 школьников, которым нужно подняться вверх, причем на разные этажи. Лифтер же согласен сделать лишь один рейс на любой этаж, а дальше пусть они идут пешком. Лифт способен вместить всех школьников. Известно, что все школьники с одинаковым неудовольствием спускаются вниз на один этаж и с двойным неудовольствием поднимаются пешком вверх на один этаж. Какой этаж нужно выбрать, чтобы суммарное неудовольствие было наименьшим?

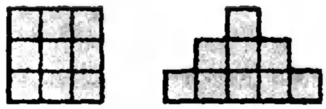
И. Акулич

2. Восемь команд провели по четыре игры каждая в футбольном турнире. На рисунке изображена частично заполненная таблица результатов этих игр. Закончите ее заполнение по результатам сыгранных матчей.

В. Перетятько

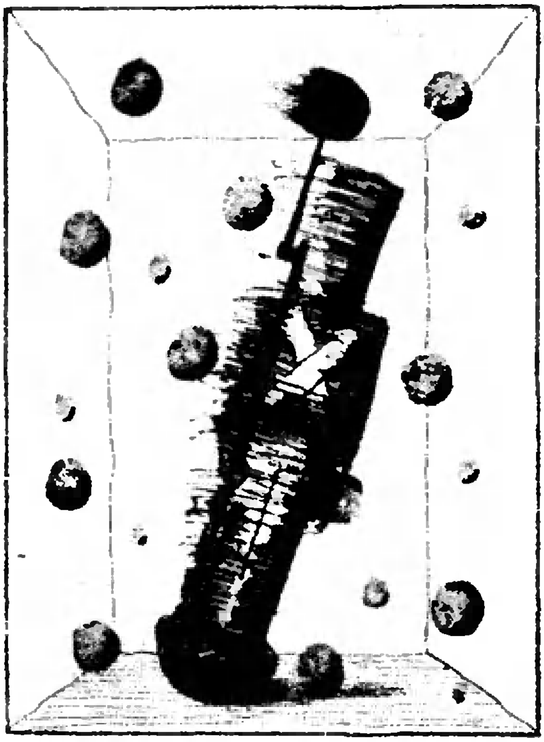
	1	2	3	4	5	6	7	8	В	Н	П	М
1			0:0									3 :
2												4 :
3						1:1			0			: 1
4												4 :
5									1	1	2	2 : 2
6									0	1	3	1 : 4
7											3	0 : 3
8									0	0	4	: 5

3. Из девяти одинаковых квадратных карточек сначала сложили квадрат, а потом пирамиду. Оказалось, что при этом всякие две карточки, которые имели две общие вершины в первом расположении,



сохранили одну из них общей (ту же самую) и во втором расположении. Покажите, как это было сделано.

В. Произволов



Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Идеальный газ — универсальная физическая модель» предназначена десятиклассникам, заметка «Гармонические колебания — обычные и удивительные» — одиннадцатиклассникам. Впрочем, последняя заметка будет полезной и интересной и девятиклассникам, но — в конце учебного года.
Мы публикуем также «Избранные школьные задачи по физике».

Идеальный газ — универсальная физическая модель

За огромным многообразием явлений, которые изучает физика, часто довольно трудно усмотреть какие-то общие подходы и универсальные модели, с поразительной устойчивостью возникающие в самых разных областях знания. А вместе с утратой универсальности пропадает ощущение красоты и единства физической картины мира. Все затягивается серой пеленой скуки и происходящего от нее непонимания.

Может быть, одним из самых типичных примеров сказанного является идеальный газ, при упоминании о котором представляют себе,как правило, просто сильно разреженный газ. А между тем это не совсем так. Идеальный газ — это универсальная физическая модель, применимая для описания самых разнообразных природных объектов. Чтобы увидеть эту универсальность, попытаемся основные результаты теории обычного идеального газа перевести на более общий язык.

Главным признаком идеального газа является отсутствие взаимодействия между молекулами. Или, лучше сказать, малость энергии взаимодействия молекулы со своим окружением по сравнению с ее собственной энергией.

Из чего же складывается собственная энергия молекулы? Прежде всего это кинетическая энергия ее поступательного движения. Для того чтобы задать кинетическую энергию любого тела, и в частности молекулы, достаточно задать три компоненты его скорости (или импульса). Три — потому что пространство наше трехмерное. Можно сказать иначе — в трехмерном пространстве молекула всегда обладает тремя степенями свободы, связанными с движением ее центра масс. Эти степени свободы называются поступательными. Как мы увидим чуть ниже, именно на языке степеней свободы наиболее явно проявляется универсальность модели идеального газа.

Кроме поступательного движения, молекула, если она имеет какую-то пространственную структуру, может принимать участие во вращении вокруг любой из трех координатных осей. Это означает, что, наряду с тремя поступательными, у молекулы есть еще и три вращательные степени свободы. (Исключение составляют молекулы, атомы которых вытянуты в жесткую цепочку: они могут вращаться лишь вокруг двух осей, перпендикулярных этой цепочке. Поэтому такие молекулы имеют лишь две вращательные степени свободы.)

Но и это еще не все. Реальная молекула отнюдь не представляет собой абсолютно жесткое, монолитное образование: атомы, составляющие молекулу, могут колебаться друг относительно друга. А это значит, что, кроме поступательных и вращательных, есть еще и колебательные степени свободы. Перебирая таким образом все движения, в которых может участвовать молекула или составляющие ее элементы, мы можем точно указать, сколько у нее степеней свободы.

Зачем это нужно? А затем, что существует чрезвычайно важная и очень общая теорема, которая утверждает, что на каждую степень свободы любой равновесной системы приходится в среднем энергия, равная $1/2kT$, где T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана, указывающая, скольким джоулям энергии соответствует один градус температуры (градус — это тоже единица измерения энергии, только внесистемная). Так, например, суммарная энергия трех поступательных степеней свободы равна $3/2kT$. Но энергия поступательного движения молекулы — это ее кинетическая энергия. Отсюда и получается, что

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{3}{2}kT.$$

Иногда говорят, что температура есть мера кинетической энергии молекулы. Точнее было бы сказать, что температура есть мера энергии, приходящейся на одну степень свободы. Таким образом, если мы знаем число степеней свободы одной молекулы (обозначим это число буквой i), что нетрудно найти полную энергию этой молекулы ($W_{мол}$) и, соответственно, внутреннюю энергию всего газа, содержащего N молекул ($W_{газа}$):

$$W_{мол}=\frac{i}{2}kT, \quad W_{газа}=N\frac{i}{2}kT.$$

Приведенные формулы выглядят предельно просто. Но простота эта обманчива! Дело в том, что между поступательными и всеми остальными степенями свободы существует одно чрезвычайно глубокое различие, открытое на заре XX века великим немецким физиком Максом Планком. Суть его сводится к тому, что, в то время как энергия поступательного движения может меняться непрерывно, энергия колебательного и вращательного движения меняется только порциями — квантами.

В применении к молекулам дискретность энергии означает, в частности, что для возбуждения колебаний атомов, составляющих молекулу, или приведения молекулы как целого во вращение необходима некоторая вполне конечная энергия. Существование такой пороговой энергии возбуждения $W_{пор}$ для какой-нибудь степени свободы (колебательной или вращательной) приводит к тому, что на эту степень свободы приходится уже не $1/2kT$, а меньшая энергия. Дело тут вот в чем. Распределение энергии по степеням свободы происходит при соударениях молекул газа. По порядку величины передаваемая при соударениях энергия равна kT (средней кинетической энергии поступательного движения молекул). Если температура газа настолько высока, что $kT \gg W_{пор}$, то наличие квантового порога возбуждения не чувствуется, возбуждение данной степени свободы происходит без помех и на нее приходится обычная доля энергии $1/2\,kT$. В противоположном случае ($kT \ll W_{пор}$) данная степень свободы при соударениях практически никогда не возбуждается и на ее долю приходится очень малая доля обычной энергетической нормы. Иначе говоря, при высокой температуре данная степень свободы должна учитываться наравне с поступательными, а при низкой она «вымораживается». Можно сказать, что число задействованных степеней свободы зависит от температуры.

Выше уже отмечалось, что единственное движение, энергия которого может меняться непрерывно, это поступательное движение. А это означает, что «вымораживания» поступательного движения не происходит никогда. Именно поэтому уравнение Менделеева — Клапейрона $pV=NkT$ остается справедливым при любых темературах, лишь бы газ был настолько разрежен, чтобы взаимодействием его молекул можно было бы пренебречь (давление связано исключительно с поступательным движением молекул). А вот в выражение для энергии газа $W_{газа}=Ni/2\ kT$ при высоких температурах надо подставлять одно значение i (задействованы все степени свободы), а при низких — другое (часть степеней свободы «заморожены»).

И наконец, прежде чем перейти к другим системам, совершенно не похожим на газ, приведем еще одно соотношение — между давлением газа и его энергией. Сравнивая уравнение Менделеева — Клапейрона ($pV=NkT$) и выражение для энергии поступательного движения ($W_{пост}=3/2NkT$, здесь число поступательных степеней свободы $i_{пост}=3$), легко найти

$$pV=\frac{2}{3}\ W_{пост}.$$

Тот факт, что энергия газа связана исключительно с полным числом его степеней свободы, а давление, в свою очередь, выражается через энергию, т. е. снова через число степеней свободы (только поступальных), наводит на очень важную мысль. А может и необязательно вовсе, чтобы система представляла собой большое число невзаимодействующих молекул? Может быть, все определяется лишь степенями свободы, а уж связаны эти степени свободы с молекулами (и тогда мы имеем идеальный газ) или с чем-то другим — это, так сказать, вопрос второй?

Чтобы пояснить эту мысль, давайте рассмотрим систему, очень далекую по своим внешним признакам от обычного газа. Представьте себе замкнутую полость, стенки которой поддерживаются при постоянной температуре T. Как и всякое нагретое тело, стенки излучают внутрь полости электромагнитные волны. Полость оказывается как бы заполненной электромагнитным излучением. Идея о том, что находящееся в равновесии со стенками тепловое излучение можно рассматривать как идеальный газ, где различным степеням свободы соответствуют колебания различных частот, возникла сразу же, как начали заниматься этим объектом. Это казалось тем более правдоподобным, что давление, обусловленное излучением, связано с его энергией почти таким же соотношением, как для обычного идеального газа:

$$pV=\frac{1}{3}\ W.$$

Однако первые попытки сосчитать энергию такого «газа» привели к обескураживающим результатам. Дело в том, что в полости могут существовать волны любой, сколь угодно большой частоты. И если каждой такой «степени свободы» выделить энергию $1/2\ kT$, то полная энергия всех волн окажется бесконечно большой. Именно эта парадоксальная ситуация с тепловым излучением в полости (ее назвали «ультрафиолетовой катастрофой») и заставила Планка выдвинуть обсуждавшуюся выше квантовую гипотезу. Он предположил, что энергия колебания с частотой ν может меняться только порциями, равными $h\nu$ (h — постоянная Планка). Это значит, что все колебания с частотами, для которых $h\nu \gg kT$, оказываются «замороженными» и не дают вклада в энергию. Опираясь на свою гипотезу, Планк вывел формулу для распределения энергии электромагнитных колебаний в полости по частотам и получил прекрасное согласие с экспериментальными данными. Сходство между обычным идеальным газом и газом электромагнитных волн оказалось столь велико, что отдельным элементарным волнам с энергией $h\nu$ стали сопоставлять специальные частицы — фотоны.

Совершенно аналогичная ситуация возникает при описании свойств кристалла (казалось бы, совсем уж прямом антиподе идеального газа). Кристалл, так же как и замкнутая полость, оказывается заполнен волнами, только не электромагнитными, а звуковыми. При распространении таких волн согласованные колебания совершают атомы кристалла. Элементарную волну-частицу в случае звука называют фононом. И вновь удается найти внутреннюю энергию кристалла, вычислив число степеней свободы, соответствующих звуковым волнам разных частот. А зная энергию, можно рассчитать и многие другие свойства кристалла.

Вообще сведе́ние различных явлений к совокупности некоторых волн, каждой из которых сопоставляется совершенно определенное число степеней свободы, чрезвычайно распространено в физике. А это есть не что иное, как сведе́ние различных систем к идеальному газу. И в этом смысле сама модель идеального газа является одной из очень немногих фундаментальных физических моделей, сыгравших и продолжающих играть выдающуюся роль в создании физической картины окружающего нас мира.

Е. Городецкий

Гармонические колебания — обычные и удивительные

Когда и как лучше изучать колебания? Все колебательные процессы — и механические, и электрические — вместе, как это было в школьном курсе раньше? Или механические колебания обсуждать вместе с другими механическими явлениями, а электрические — с электрическими, как это делается сейчас?

Наверное, каждый метод имеет и свои резоны, и свои минусы. Дело в том, что все виды колебаний похожи друг на друга, как близнецы в разных одеждах,— все они описываются совершенно одинаковыми математическими уравнениями. Только там, где в механике присутствует смещение точки, в электричестве должен быть заряд конденсатора, а где скорость точки — сила тока в цепи и т. д. Вот почему, с нашей точки зрения, электрические колебания очень удобно изучать по аналогии, сопоставляя электрическим понятиям механические.

Итак, приступая к изучению электрических колебаний, полезно вспомнить о колебаниях механических. Не претендуя на полное повторение (проще взять в руки учебник), обсудим несколько вопросов, которые часто возникают у дотошных учеников.

Вы, наверное, обратили внимание, что речь шла исключительно о гармонических колебаниях, т. е. колебаниях, происходящих по закону косинуса (или синуса)

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (1)$$

где x — смещение точки, A — амплитуда, ω — циклическая частота, φ_0 — начальная фаза колебаний. В чем же дело? Может быть, в том, что косинус — самая простая по виду периодическая функция? Нет, главная причина в другом. Оказывается, нет необходимости специально придумывать механическую систему, которая совершала бы гармонические колебания. Такие колебания характерны почти для всех систем. (Почему «почти» — об этом чуть позже.) Надо только установить любую систему в состояние устойчивого равновесия, а потом слегка «подтолкнуть».

Вопрос первый: что такое устойчивое равновесие и у всех ли систем оно есть? Понятно, что раз речь идет о равновесии, то результирующая сила в этом состоянии обязательно должна быть равна нулю. Устойчивость же означает, что при отклонении от равновесия возникает возвращающая сила, т. е. сила, направленная назад, в сторону равновесия. Но еще лучше сформулировать то же самое на языке энергии. Дело в том, что энергия — понятие для физики более общее и важное, чем сила, и сказанное на этом языке в одной области легко переносится в другие. Так вот, устойчивое равновесие соответствует минимуму потенциальной энергии. Понятно, что такой минимум есть у любой системы, где есть потенциальная энергия. В противном случае, уменьшая до бесконечности потенциальную энергию, можно заставить систему совершить сколь угодно большую работу, т. е. получить вечный двигатель.

Простейшей системой, совершающей гармонические колебания, является грузик на пружинке, подчиняющейся закону Гука $F_{упр} = -kx$. Написав второй закон Ньютона для этого груза, получим уравнение

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0, \qquad (2)$$

где x'' — вторая производная смещения по времени, т. е. ускорение. А решением такого уравнения как раз является функция (1), т. е. гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$ или с периодом $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$. Как в этом убедиться? Да просто подставить эту функцию в уравнение (2). И тут у школьников (особенно въедливых) часто возникает следующий вопрос.

Вопрос второй: откуда мы знаем, что у уравнения (2) нет какого-нибудь другого решения? Другими словами, нельзя ли не угадывать решение, а получить его прямо из уравнения? Конечно же, это можно сделать, но только если вы уже умеете интегрировать и решать простые уравнения с производными (их называют дифференциальными уравнениями). Однако в данном случае в этом нет никакой необходимости. Достаточно использовать следующее утверждение: если известны силы, действующие на точку, и ее положение и скорость в начальный момент (начальные условия), то движение точки полностью определено. Иными словами, существует только одно решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям. А теперь — несколько подробнее.

Зададим начальную координату x_0 и начальную скорость v_0 и покажем, что существует решение (1) уравнения (2), удовлетворяющее этим условиям. Иначе говоря, найдем параметры A и φ_0, которые это обеспечивают. Подставляя $t = 0$ в равенство (1) и в выражение для скорости $v = x' = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$, получаем систему уравнений

$$x_0 = A\cos\varphi_0,$$
$$v_0 = -\omega A \sin\varphi_0.$$

Решая ее, находим

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -v_0/(\omega x_0), \quad A^2 = x_0^2 + v_0^2/\omega^2.$$

Функция (1) с такими A и φ_0 и $\omega = \sqrt{k/m}$ удовлетворяет как уравнению (2), так и начальным условиям. Значит, она описывает единственное решение.

Ну хорошо, с грузиком на пружинке разобрались. Но ведь не все системы описываются силой $F = -kx$ и потенциальной энергией $E_p = kx^2/2$. А было сказано, что любая система (почти!) будет совершать гармонические колебания. Нет, не совсем так. Мы сказали, что тело надо *слегка* «подтолкнуть». Не любые, а *малые* колебания около положения равновесия должны быть гармоническими. Это легко понять, посмотрев на график произвольной зависимости силы от смещения (рис. 1). При $x = 0$ $F = 0$, а достаточно малый участок кривой около этой точки можно приближенно считать прямолинейным (чем меньше участок, тем меньше мы ошибемся). Значит, в малой окрестности точки $x = 0$ силу можно записать в виде $F = -k_{эфф}x$, а потенциальную энергию, соответственно, в виде $E_p = k_{эфф}x^2/2$, где «эффективная жесткость» $k_{эфф}$ есть

Рис. 1.

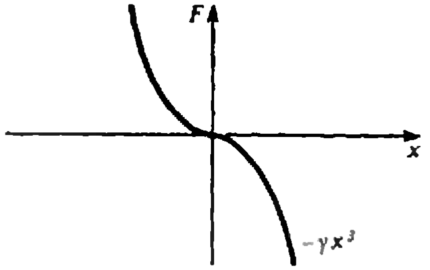


Рис. 2.

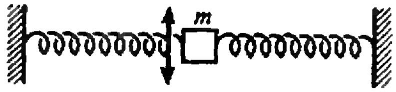


Рис. 3.

не что иное, как тангенс угла α наклона графика к оси X при $x=0$. При любой зависимости $F=F(x)$ малые колебания точки неотличимы от колебаний на пружинке с жесткостью $k_{эфф}$, т. е. происходят по гармоническому закону с периодом $T=2\pi\sqrt{m/k_{эфф}}$. (Проверьте сами, например, что для математического маятника $k_{эфф}=mg/l$.)

Внимательный и «настырный» школьник немедленно сформулирует еще один вопрос.

Вопрос третий: а что если потенциальная энергия имеет иной вид, например $E_p=\gamma x^4/4$? В этом случае сила $F=-\gamma x^3$*), и в точке $x=0$ угол α наклона графика $F=F(x)$ равен нулю (рис. 2). Какими будут колебания такой системы? Гармоническими или нет? Оказывается, в этом случае колебания, даже малые, будут происходить совсем по другому закону. (Имея в виду именно такие случаи, мы и говорили: «почти всегда» гармонические.)

Какие же системы удовлетворяют заданной зависимости потенциальной энергии от смещения? Приведем два примера. Первый — можно тщательно выдолбить ямку, сечение которой имеет вид $y=\beta x^4/4$. Тогда потенциальная энергия для движения в такой ямке $E_p=mgy=(mg\beta)x^4/4$. Другой пример: если к середине *недеформированной* пружины с закрепленными концами прикрепить грузик (рис. 3), то при малых поперечных колебаниях сила будет пропорциональна третьей, а энергия — четвертой степени смещения. Заметим, что если пружина растянута, то колебания будут гармоническими!

Что же мы увидим в этих случаях? Разве можно на глаз отличить гармонические колебания от негармонических? Оказывается, есть очень важное отличие гармонических колебаний от любых других: их частота зависит от параметров системы, но не зависит от амплитуды колебаний. Мы настолько к этому привыкли, что совершенно не удивляемся, когда нас просят узнать период малых колебаний, ничего не говоря об их амплитуде. А ведь это — совсем не очевидное свойство, и выполняется оно только для силы $F=-kx$. Поясним это, воспользовавшись соображениями размерностей. Размерность жесткости k не содержит длины: $[k]=\text{Н/м}=\text{кг/с}^2$, поэтому период колебаний, который может зависеть только от k, ω и A, должен выражаться через комбинацию $\sqrt{m/k}$, имеющую размерность времени, и не может зависеть от амплитуды A. Совсем иное дело в случае, когда $F=-\gamma x^3$. Размерность γ содержит длину: $[\gamma]=\text{кг}/(\text{м}^2\cdot\text{с}^2)$, и чтобы получить размерность времени для периода колебаний, надо составить комбинацию $(m/\gamma A^2)^{1/2}=(1/A)\sqrt{m/\gamma}$. Именно так (с точностью до безразмерного множителя) должен выглядеть ответ для периода колебаний — чем больше амплитуда, тем меньше период. Если, например, грузик на недеформированной пружине отклонить в сторону один раз на 1 см, а другой раз на 2 мм, то во втором случае период будет в 5 раз больше, что, конечно, легко заметить невооруженным глазом.

А. Черноуцан

*) По определению, работа равна изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком. Для малых Δx имеем

$$F\Delta x=-\Delta E_p,\ \text{т. е.}\ F=-\Delta E_p/\Delta x=E_p'(x).$$

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. При горизонтальном ветре, имеющем скорость $v_1=10$ м/с, капли дождя падают под углом $\alpha_1=30^\circ$ к вертикали. При какой горизонтальной скорости ветра капли будут падать под углом $\alpha_2=60^\circ$ к вертикали?

2. За пятую секунду прямолинейного движения с постоянным ускорением тело проходит путь $l_5=5$ м и останавливается. Какой путь проходит тело за вторую секунду этого движения?

3. Два тела начинают одновременно двигаться по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями, равными $v_{01}=10$ м/с и $v_{02}=20$ м/с, и с постоянными ускорениями, равными $a_1=2$ м/с^2 и $a_2=1$ м/с^2 и направленными противоположно соответствующим начальным скоростям. Определите, при каком максимальном начальном расстоянии между телами они встретятся в процессе движения.

4. Футбольный мяч посылается с начальной скоростью, равной $v_0=20$ м/с, под углом $\alpha=15^\circ$ к горизонту. На расстоянии $L=15$ м от точки удара находится вертикальная стена, о которую мяч упруго ударяется. Найдите расстояние от точки удара по мячу до места его приземления. Сопротивлением воздуха и размерами мяча пренебречь.

5. Через блок радиусом $R=0{,}2$ м переброшена нерастяжимая нить с одинаковыми грузиками на концах. Ось блока поднимается со скоростью $v_1=1$ м/с, а один из грузиков опускается со скоростью $v_2=2$ м/с (относительно земли). Чему равна угловая скорость вращения блока, если нить движется по нему без проскальзывания?

10 класс

6. Газ находится в цилиндре под поршнем и занимает объем $V_1=240$ см^3 при давлении $p_1=100$ кПа. Какую силу надо приложить перпендикулярно поршню, чтобы сдвинуть его на $\Delta h=2$ см, уменьшив при этом объем газа? Площадь поршня $S=24$ см^2. Температура газа постоянна.

7. Теплоизолирующий поршень делит горизонтальный сосуд на две равные части, содержащие газ при температуре $t=7$ °С. Длина каждой части $L=30$ см. Когда одну часть сосуда нагрели, поршень сместился на $l=2$ см. До какой температуры нагрели газ?

8. По газопроводу течет углекислый газ при давлении $p=0{,}83$ МПа и температуре $t=27$ °С. Какова скорость течения газа в трубе, если за $\tau=2{,}5$ мин через поперечное сечение трубы площадью $S=5$ см^2 протекает $m=2{,}2$ кг газа? Молярная масса углекислого газа $M=44$ кг/кмоль.

9. В закрытом сосуде находится водород. Как изменится давление в сосуде, если 50 % молекул водорода продиссоциируют на атомы при неизменной температуре?

10. Три одинаковых сосуда, соединенных трубками, заполнены газообразным гелием при температуре $T=40$ К. Затем один из сосудов нагрели до $T_1=100$ К, другой до $T_2=400$ К, а температура третьего сосуда осталась неизменной. Во сколько раз увеличилось давление в системе? Объемом соединительных трубок можно пренебречь.

11 класс

11. Шарик, подвешенный на пружине, отвели из положения равновесия вниз на $x_0=3$ см и сообщили ему начальную скорость, равную $v_0=1$ м/с. После этого шарик стал совершать вертикальные гармонические колебания с циклической частотой $\omega=25$ с$^{-1}$. Найдите амплитуду этих колебаний.

12. Шарик массой $m=0{,}1$ кг, подвешенный на нити, совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости. Во сколько раз изменится частота колебаний, если шарику сообщить заряд $q=200$ мкКл и поместить в однородное электрическое поле с напряженностью $E=40$ кВ/м, направленной вертикально вниз?

13. Колебательный контур состоит из катушки и конденсатора. Во сколько раз увеличится частота собственных колебаний контура, если последовательно с первым соединить второй конденсатор, емкость которого в 3 раза меньше емкости первого?

14. Заряженный конденсатор емкостью $C=0{,}2$ мкФ подключили к катушке индуктивностью $L=8$ мГн. Через какое время от момента подключения энергия электрического поля конденсатора станет равной энергии магнитного поля катушки?

15. Два когерентных источника звука колеблются в одинаковых фазах. В точке, отстоящей от первого источника на $L_1=2{,}1$ м, а от второго на $L_2=2{,}27$ м, звук не слышен. Считая скорость звука равной $v=340$ м/с, найдите минимальную частоту колебаний, при которой это возможно.

Публикацию подготовил А. Черноуцан

Сфера и шар

Сферу обычно определяют как совокупность точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой центром сферы. На палубе судна «Академик Королев» антенна локатора космической свя-

зи закрыта сферической оболочкой, так как точки антенны, наиболее удаленные от центра вращения, движутся при работе по некоторой сфере.

Другая отличительная особенность сферы — одинаковая «кривизна» этой поверхности во всех ее точках и по всем направлениям. Именно поэтому круглые мячи для игры в футбол, волейбол, теннис с равным успехом могут катиться в любую сторону, и траектория их полета зависит лишь от направления и силы удара. А вот мяч для регби — продолговатой формы: его не столько катают, сколько носят подмышкой, и не столько отбивают, сколько отнимают.

Из физики известно, что трение качения существенно меньше трения скольжения. Постоянная кривизна поверхности шариков, которые перекатываются между двумя кольцами в шарикоподшипнике, позволяет уменьшить износ вращающихся частей машин — локомотива, станка, вашего велосипеда.

Еще одна причина интереса к шару — его экстремальное свойство: из всех тел данного объема именно у шара минимальная площадь поверхности. Потому-то и появились воздушные шары, а не воздушные кубы или тетраэдры — у них наименьший вес оболочки. Может быть, этим объясняется также сферическая форма многих плодов — ведь чем меньше площадь поверхности, тем меньше испарение влаги. Неспроста имеют шарообразную форму

мыльные пузыри и водяные капли: поверхностное натяжение стремится уменьшить площадь мыльной и водяной пленки. А приходило ли вам в голову, что экстремальное свойство шара вместе с явлением поверхностного натяжения ответственно за форму планет? Предполагают, что все планеты вначале были жидкими (а некоторые из них, например Юпитер, жидкие и по сю пору).

Шаровидность нашей Земли космонавты могут наблюдать воочию, мы же поглядим на глобус. Геометрия (измерение земли) должна бы учитывать форму земной поверхности! Подобные размышления у глобуса привели в свое время к созданию сферической геометрии — родственницы привычной для нас планиметрии. Роль прямых на сфере играют дуги «больших кругов» — окружностей, которые получаются при сечении сферы плоскостью, проходящей через ее центр. Действительно, кратчайшая линия на сфере между двумя ее точками — дуга большого круга, причем единственная (за исключением случая, когда точки диаметрально противоположны). Правда, любые «прямые» на сфере обязательно пересекаются, притом в двух точках, так что в этой геометрии параллельных прямых

не бывает вовсе (в отличие от геометрии *Лобачевского*, где через точку можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной).

Существует и сферическая тригонометрия, причем она возникла раньше, чем тригонометрия на плоскости. Ее создали древние астрономы, считавшие, что планеты и звезды находятся на «небесной сфере», которую также изготавливали в виде глобуса. Вот как выглядит на сфере теорема косинусов для треугольника со сторонами a, b, c и углом A:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Если угол A равен 90°, то получаем теорему Пифагора на сфере: $\cos a = \cos b \cos c$, где a — *гипотенуза*, а b и c — *катеты*. Длины сторон треугольника выражаются в углах, под которыми эти стороны видны из центра сферы. Интересно, что у сферических треугольников сумма углов всегда больше 180° (кстати, в геометрии Лобачевского эта сумма всегда меньше 180°). Желающие ближе познакомиться со сферическими геометрией и тригонометрией могут сделать это по учебникам, которые издаются для студентов-астрономов, горных инженеров и геодезистов.

Сферой и шаром математики интересовались с давних пор. Архимед обнаружил, что площадь части поверхности сферы радиуса R, расположенная между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми h, равняется $2\pi Rh$, как и у цилиндра при сечении его перпендикулярно оси. Из этого следует, что полная поверхность сферы равна боковой поверхности цилиндра, описанного вокруг нее. Отсюда легко получить, что поверхность сферы равняется 2/3 полной поверхности этого цилиндра. Более того, оказалось, что и объем шара составляет 2/3 объема *этого цилиндра*. Этот факт так поразил Архимеда, что он завещал изобразить соответствующий чертеж на своем надгробии.

Существует еще немало красивых соотношений, связанных с шаром. Так, если взять точку внутри шара на расстоянии d от его центра и провести через нее три взаимно перпендикулярные плоскости, то сумма площадей полученных сечений шара этими плоскостями оказывается равной $\pi(3R^2 - d^2)$.

Математический кружок

ОТКУДА БЕРУТСЯ ЗАДАЧИ

*Кандидат физико-математических наук**
И. ШАРЫГИН

Варьирование условий

Простейший пример, достаточно точно иллюстрирующий этот прием, дает такая серия задач: построить треугольник по а) трем сторонам; б) трем медианам; в) трем высотам; г) трем биссектрисам. На этом примере видно, сколь сильно может меняться уровень сложности при подобном варьировании условия. В нашей четверке за совершенно элементарной первой задачей следует вполне содержательная, не очень, правда, сложная задача. Третья задача уже существенно сложнее, а четвертая — и вовсе не решается при помощи циркуля и линейки.

Любопытную идею, с помощью которой можно создавать серии задач, предложил киевский учитель математики В. Куценок. Возьмем какое-нибудь геометрическое соотношение, допустим, равенство $ah_a=bh_b$, и зададимся вопросом: каковы свойства треугольника, для которого выполняется соотношение, получающееся из рассматриваемого заменой высот на медианы или биссектрисы? В результате, можно получить такую задачу:

З а д а ч а 13. *На плоскости даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек плоскости C таких,*

* Окончание. Начало см. № 8.

что для треугольника ABC имеет место равенство:

а) $am_a = bm_b$ (m_a и m_b — медианы треугольника ABC);

б) $a\beta_a = b\beta_b$ (β_a, β_b — биссектрисы треугольника ABC).

Решение в обоих пунктах весьма сходно. Рассмотрим пункт а).

Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника, AA_0 и BB_0 — медианы. Из условия следует подобие треугольников AA_0A_1 и BB_0B_1. Возможны два случая расположения точек A_1, A_0, B_1, B_0 на сторонах треугольника ABC, изображенные на рис. 1, *а* и 1, *б*. В первом случае точки A, B, A_0 и B_0 расположены на одной окружности. Из этого ввиду параллельности A_0B_0 и AB следует равнобокость трапеции AB_0A_0B, а значит, равенство $AC=BC$. Во втором случае на одной окружности оказываются точки C, M, A_0 и B_0. Во вписанном четырехугольнике CA_0MB_0 диагональ A_0B_0 есть половина AB и делится диагональю CM пополам. Диагональ CM есть $\frac{2}{3}m_c$ и делится диагональю A_0B_0 в отношении 3:1. Из равенства произведений отрезков диагоналей найдем $m_c^2 = 3AB^2$. Таким образом, искомое геометрическое место точек состоит из серединного перпендикуляра к отрезку AB и окружности с центром в середине AB и радиусом $AB\sqrt{3}$.

В пункте б) точка расположена также или на серединном перпендикуляре к AB, или на дуге окружности, из точек которой AB виден под углом 60°.

Вообще, при варьировании условий задачи могут возникать любопытные серии. Приведу пример двух таких серий (не стремясь к их полноте).

Известна классическая теорема, утверждающая, что из равенства двух внутренних биссектрис треугольника следует его равнобедренность (теорема Штейнера-Лемуса). Само по себе утверждение этой теоремы вполне естественно и ожидаемо, если бы не трудности, с которыми приходится сталкиваться при ее доказательстве, в отличие от родственных тривиальных теорем, касающихся медиан или

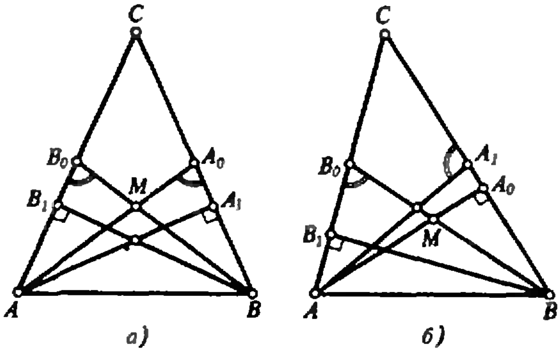


Рис. 1.

высот. Уже здесь виден скверный нрав биссектрис. Но в полной мере он проявляется в следующей задаче.

З а д а ч а 1 4. *Будет ли равнобедренным треугольник ABC, если у него:*

а) равны биссектрисы внешних углов A и B?

б) равны отрезки KA_1 и KB_1, где AA_1 и BB_1 — биссектрисы внутренних углов треугольника, а K — их точка пересечения?

в) равны расстояния от точки C_1 (CC_1 — биссектриса угла C) до середин сторон CA и CB?

г) имеет место равенство $C_1A_1 = C_1B_1$?

д) окружность, проходящая через точки A_1, B_1 и C_1 касается стороны AB данного треугольника?

Во всех пяти пунктах ответ отрицательный. Наиболее нетривиально это получается в пунктах г) и д).

Ограничусь рассмотрением последнего пункта, о котором я узнал лишь недавно из фольклорных источников. При этом я покажу только, как можно построить пример неравнобедренного треугольника, удовлетворяющего условию, не объясняя, как до этого можно додуматься.

Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC (рис. 2). Возьмем на продолжениях сторон AC и BC точки A_2 и B_2 так, что $CA_2 = CA_1$, $CB_2 = CB_1$. Понятно, что точки A_1, A_2, B_1 и B_2 расположены на одной окружности. Если при этом окажется, что AC_1 и BC_1 равны касательным, проведенным из A и B к этой окружности, то она касается AB

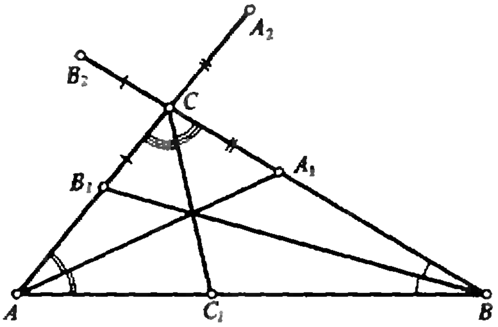


Рис. 2.

в точке C_1. (Если длина отрезка равна сумме касательных, проведенных из его концов к окружности, то этот отрезок касается окружности. Докажите это самостоятельно.) Следовательно, должны выполняться равенства:

$$AC_1^2 = AB_1 \cdot AA_2,$$
$$BC_1^2 = BA_1 \cdot BB_2.$$

Выражая отрезки сторон треугольника ABC через стороны ($AB_1 = \frac{bc}{c+a}$, и т. д.), убедимся, что каждое из этих двух равенств эквивалентно соотношению

$$(a+b+c)(a+b)^2 = c(c+a)(c+b).$$

Остается убедиться, что существует неравнобедренный треугольник, стороны которого удовлетворяют этому соотношению. Нетрудно найти конкретный числовой пример. Пусть $c=1$, $a+b=1+\lambda$. Тогда $ab=\lambda(2+\lambda)^2$. Если λ достаточно мало, можно найти a и b, при этом $a \neq b$.

Еще одна интересная серия задач связана с условием равногранности тетраэдра. Напомним, что тетраэдр (произвольная треугольная пирамида) называется равногранным, если все его грани — равные между собой треугольники. Известен целый ряд условий, необходимых и достаточных для того, чтобы тетраэдр был равногранным. Не стремясь к полноте, а тем более к рекорду, сформулирую следующую многопунктовую задачу.

Задача 15. *Какие из следующих условий являются необходимыми и достаточными для того, чтобы тетраэдр ABCD был равногранным:*

а) Противоположные ребра попарно равны.

б) Периметры всех граней равны между собой.

в) Суммы плоских углов при трех вершинах равны 180°.

г) Выполняются равенства $\angle BAD = \angle BCD = \angle ABC = \angle ADC$.

д) Выполняются равенства

$$\angle BAC = \angle BDC,$$
$$\angle ABD = \angle ACD,$$
$$\angle BAD = \angle BCD.$$

е) Все грани имеют равные радиусы описанной окружности.

ж) Все грани имеют равные радиусы вписанной окружности.

з) Все грани имеют равные площади.

и) Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, попарно перпендикулярны.

к) Центр описанной сферы совпадает с центром масс тетраэдра.

л) Центр вписанной сферы совпадает с центром масс тетраэдра.

м) Центры вписанной и описанной сфер совпадают.

н) Сумма косинусов двугранных углов равна —2.

о) На описанной около тетраэдра сфере расположены центры четырех шаров, каждый из которых касается одной грани во внутренней точке и плоскостей трех других граней.

Уф!... Пожалуй, достаточно. В принципе, подобных условий можно выписать несколько десятков, особенно если учесть, что некоторые из них можно смешивать. Так, например, первые 8 условий записываются в виде трех равенств, и мы имеем возможность выписывать новые условия, беря, скажем, одно равенство из пункта а) (равны два противоположных угла) и два равенства из пункта в) (суммы плоских углов при двух вершинах равны 180°).

В данной задаче почти все условия являются необходимыми и достаточными, чтобы тетраэдр был равногранным. Вы уже, наверное, догадались, что исключением скорее всего является пункт ж) — опять биссектрисы безобразничают. Так оно и есть. Попробуйте сами построить пример тетраэдра с неравными гранями, но с равными радиусами вписанных в них окружностей. В качестве граней можно взять две пары неравных равнобедренных треугольников, имеющих нужное свойство.

Весьма нетривиально доказывается пункт о). Во всяком случае, достаточно элементарного доказательства я не знаю.

Кстати, пункт д) возник уже в процессе работы над статьей. Здесь интересно, что существенной является «пространственность» тетраэдра. Если A, B, C и D в одной плоскости, этого недостаточно для равенства треугольников.

Обобщение

Все развитие математики представляет собой путь постоянных обобщений. Конечно, при использовании этого приема для получения новых элементарных задач мы, как правило, на многое не претендуем, но тем не менее помнить и понимать его значение необходимо.

Обобщение может идти по различным направлениям. Иногда оказывается возможным в рассматриваемой задаче снять некоторые ограничения и распространить соответствующее утверждение на более широкое множество объектов. Так, однажды в старом математическом журнале я встретил следующую задачу:

Задача 16. *Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ сторона AD является диаметром окружности, а биссектрисы углов B и C пересекаются на AD. Докажите, что имеет место равенство $AB+CD=AD$.*

Решение этой задачи, приведенное в журнале, мне не понравилось. После некоторого размышления удалось найти другое решение, в котором никак не использовалось то, что AD — диаметр окружности. Это условие оказалось лишним. В результате возникла вполне новая

Задача 16′. *Докажите, что если биссектрисы углов B и C вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD, то $AD=AB+CD$.*

Суть упомянутого мною решения (есть много других) состоит в следующем. Возьмем точку P на AD, в которой пересекаются биссектрисы углов B и C. Опишем около BCP окружность и обозначим через M вторую точку пересечения этой окружности с AD. Тогда, учитывая равенства соответствующих углов вписанных четырехугольников $ABCD$ и $BCPM$, докажем равнобедренность треугольников ABM ($AB=AM$) и CDM ($CD=DM$). Проделайте эти рассуждения самостоятельно.

Из этого примера также видно, сколь полезно при решении задачи не ограничиваться одним методом, рассматривать различные пути решения, уделяя особое внимание более геометричным, поскольку они глубже вскрывают внутренние свойства фигур, позволяют отделить главное от второстепенного. В связи с этим еще один, более свежий пример. На Всероссийской олимпиаде в 1990 году (см. «Квант», № 11, 1990 г.) была предложена

Задача 17. *Точки D и E лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC. Точки K и M делят отрезок DE на три равные части. Прямые BK и BM пересекают сторону AC в точках T и P. Докажите, что*

$$TP \leqslant \frac{1}{3} AC.$$

Уже сама формулировка вызвала у меня легкое чувство протеста. Слишком громоздко, много буквенных обозначений, без которых вполне можно было обойтись. Также не удовлетворило меня и решение этой задачи, приведенное в журнале. Оно в некоторой мере противоречило выработанным мною принципам, выглядело неестественным (для меня). Найдя устраивающее меня решение, я сумел также и несколько переформулировать эту задачу, сделать ее более общей.

Задача 17'. *Из вершины угла выходят два луча, расположенные внутри угла. Некоторая прямая пересекает стороны угла в точках D и E, а лучи в точках K и M. Докажите, что отношение $\frac{KM}{DE}$ будет наибольшим, если $DK=ME$.*

Для доказательства рассмотрим какую-то другую прямую, причем можно считать, что она проходит через E и пересекает другую сторону и лучи в точках D_1, K_1 и M_1 (рис. 3). Положим $DK=ME=a$, $KM=b$, $OD_1=\lambda OD$. Проведя через D_1 прямую параллельно DE, будем иметь:

$$D_1K_2=\lambda a,\ K_2M_2=\lambda b,$$

$$\frac{D_1M_1}{M_1E}=\frac{\lambda(a+b)}{a},$$

$$D_1M_1=\frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a}\cdot D_1E,$$

$$D_1K_1=\frac{\lambda a}{\lambda a+b+a}\cdot D_1E,$$

$$K_1M_1=\left(\frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a}-\frac{\lambda a}{\lambda a+b+a}\right)D_1E.$$

Окончательно задача сводится к доказательству несложного алгебраического неравенства

$$\frac{\lambda(b^2+2ab)}{(\lambda(a+b)+a)(\lambda a+a+b)}\leqslant\frac{b}{2a+b},$$

которое преобразуется к виду

$$(\lambda-1)^2a(a+b)\geqslant 0.$$

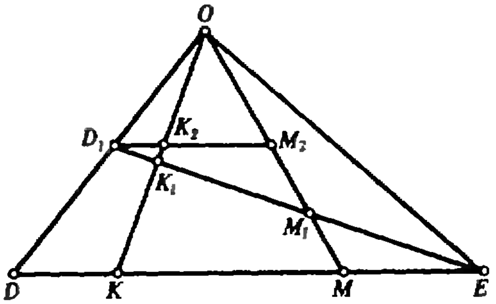


Рис. 3.

Другим возможным направлением обобщения является перенос некоего геометрического факта с одних объектов на другие, в частности, выход из плоскости в пространство. Так возникла

Задача 18. *К двум сферам проведены две касательные AB и CD, A и C — на поверхности одной сферы, B и D — на другой. Докажите, что проекции AC и BD на прямую, проходящую через центры сфер, равны.*

В плоском варианте эта задача вполне проста. (В этом случае AB и CD — общая внешняя и общая внутренняя касательные двух окружностей.) Да и в пространстве она не слишком сложна. (Все следует из того, что середины общих касательных к двум сферам лежат в одной плоскости, перпендикулярной линии центров. Докажите это утверждение.) Здесь, на мой взгляд, интереснее то обстоятельство, что пространственный аналог планиметрического утверждения остается верным. Такое случается не слишком часто. Нередко смысл пространственного обобщения в построении опровергающего примера. Так, простейшее в планиметрии утверждение: основание хотя бы одной высоты треугольника лежит на соответствующей стороне, а не на ее продолжении,— в пространственном исполнении трансформируется в вопрос:

Задача 19. *Верно ли, что для любого тетраэдра основание хотя бы одной высоты принадлежит соответствующей грани этого тетраэдра?*

Ответ на этот вопрос отрицательный. Контрпримером является тетраэдр, у которого два двугранных угла, соответствующие двум скрещивающимся ребрам, являются тупыми.

Нередко одна и та же задача может обобщаться в различных направлениях, порождать целые обобщающие серии. Возьмем широкоизвестную теорему:

сумма расстояний от произвольной точки внутри правильного треугольника до его сторон постоянна. (Для тех, кто не знаком с этой задачей, обозначим доказательство. Площадь рассматриваемого правиль-

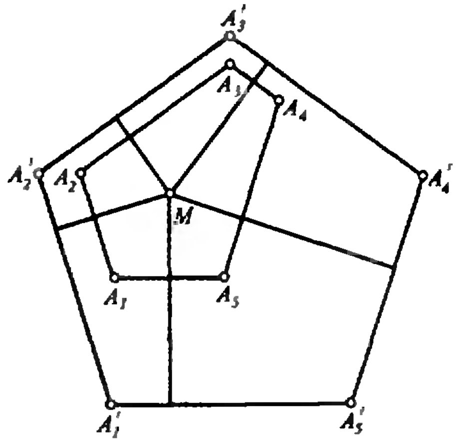


Рис. 4.

ного треугольника равна сумме площадей трех треугольников, основания которых — стороны правильного треугольника, и общая вершина — какая-то точка внутри этого треугольника. И т. д.)

Утверждение этой теоремы очевидно обобщается на произвольный выпуклый равносторонний многоугольник. Менее очевидно, что она обобщается и на равноугольный многоугольник. В самом деле, пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — равноугольный многоугольник (рис. 4, $n=5$). Рассмотрим правильный n-угольник $A_1'A_2' \dots A_n'$ со сторонами, параллельными сторонам исходного n-угольника, и содержащий его. Для любой точки M внутри $A_1A_2 \dots A_n$ сумма расстояний до сторон $A_1'A_2' \dots A_n'$ постоянна. Но расстояние до какой-то стороны исходного n-угольника меньше, чем расстояние до параллельной ей стороны второго правильного n-угольника на постоянную величину. Значит, и вся сумма расстояний от M до сторон $A_1A_2 \dots$ $\dots A_n$ отличается от сумм расстояний от M до сторон $A_1'A_2' \dots A_n'$ на постоянную величину, то есть и сама является постоянной.

Можно сделать и еще один шаг обобщения, объединяющий два предыдущих (равносторонность и равноугольность). В итоге можно сформулировать следующую теорему:

Задача 20. *На плоскости даны n различных единичных векторов, сумма которых равна нулю. Рассмотрим выпуклый n-угольник, стороны которого перпендикулярны соответствующим векторам. Тогда для всех внутренних точек этого n-угольника сумма расстояний до его сторон одна и та же.*

Возможны и другие пути обобщения исходной теоремы про правильный треугольник. Например, выйти в пространство. Кстати, возникает вопрос, верна ли в пространстве теорема-задача 20, вернее, ее аналог?

Открытия и проблемы

Предыдущие примеры иллюстрировали те или иные технические приемы. И все же главный источник новых задач — это любознательность, стремление всякий раз докопаться до существа дела, умение увидеть привычное с неожиданной точки зрения. Вот тогда-то и появляются самые интересные геометрические задачи, задачи-открытия. К этой категории задач, на мой взгляд, относится одна из наиболее симпатичных олимпиадных задач последних лет.

Задача 21. *Можно ли из деревянного, единичного куба выпилить три правильных тетраэдра с единичным ребром?*

Задача эта предлагалась на Всероссийской олимпиаде в 1989 году. Здесь интересно то, что во многих олимпиадных сборниках обсуждалась задача о выпиливании из единичного куба двух тетраэдров. А оказывается, можно выпилить целых три! (Возьмем три попарно скрещивающиеся ребра куба. Каждое из них будет ребром одного тетраэдра. Середины противоположных ребер каждого тетраэдра совпадают с центром куба. Докажите теперь, что эти тетраэдры более не имеют общих точек.)

Конечно, вовсе не обязательно красивый факт, обнаруженный лично вами, окажется открытием и для всего человечества. Это не так уж и страшно, тем более что многие старые геометрические теоремы являются откровением для признанных геометрических экспертов. Многое, слишком многое, из тысячелетней геометрической культуры утеряно.

Одним из своих любимых геометрических открытий я считаю следующую задачу:

Задача 22. *Какое наибольшее число прямых можно провести через какую-то точку в пространстве так, чтобы все попарные углы между ними были бы равны?*

Ответ: 6. При этом я прекрасно понимаю, что наверняка этот факт был известен в глубокой древности, например, Архимеду.

То, что таких прямых не может быть более шести, несложно доказать. В самом деле, пусть l_1 и l_2 — две прямые нашего семейства, проходящие через точку O. Тогда все оставшиеся прямые должны принадлежать пересечению двух конических поверхностей: осью одной из них является прямая l_1, а прямая l_2 является одной из образующих; для второй — наоборот, l_2 — ось, l_1 — образующая. Такие две конические поверхности пересекаются не более чем по четырем прямым.

Примером шестерки прямых, обладающих нужным свойством, могут служить диагонали икосаэдра — правильного двадцатигранника (двенадцативершинника). Если вы плохо представляете себе икосаэдр, то можете построить нужный пример следующим образом. Возьмем шесть векторов: $(a, \pm b, 0)$; $(\pm b, 0, a)$; $(0, a, \pm b)$ в качестве направляющих векторов наших прямых. Поскольку все вектора имеют одну и ту же длину, то должны быть равными абсолютные величины всех попарных скалярных произведений. Считая, что $a \geqslant b > 0$, приходим к равенству $a^2 - ab - b^2 = 0$. Можно взять $b = 1$, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

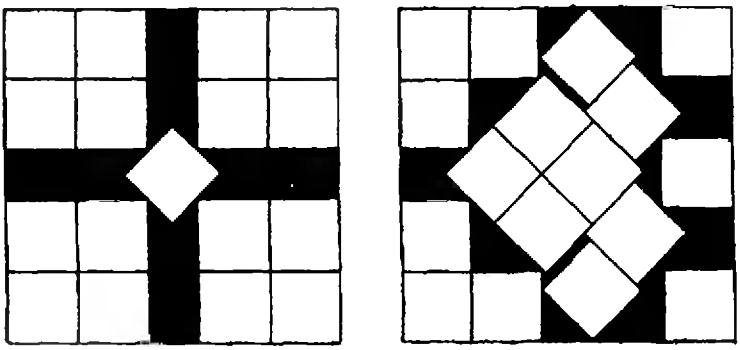
В геометрии, как наверное ни в одном предмете, короток путь от учебной задачи к нерешенной проблеме. В конце концов, не так уж сильно разнятся по постановке вопросы: «найти наименьшее значение площади треугольника, содержащего единичную окружность» и «найти фигуру наименьшей площади, которой можно покрыть любую плоскую фигуру диаметра 1». Но если первая — простая школьная задача, то вторая — до сих пор не решенная проблема Лебега о минимальной «покрышке». Но для того, чтобы сформулировать подобную содержательную проблему, надо обладать хорошей математической культурой и вкусом. Не следует забывать пословицу, утверждающую, что один дурак может задать столько вопросов, что и сотня мудрецов не ответит.

В отличие от других математических дисциплин в геометрии возможен эксперимент в прямом, физическом смысле этого слова. Многие геометрические открытия древности явились следствием наблюдений и эксперимента. Очень возможно, что известный современный геометр Коннели, построивший деформирующийся многогранник (многогранник, который может деформироваться так, что каждая из его граней остается неизменной), в процессе своей работы много экспериментировал — склеивал или как-то иначе создавал пространственные модели. Многогранник Коннели разрешил одну из старейших математических проблем, а то обстоятельство, что решение этой проблемы оказалось вполне элементарным, и полностью было опубликовано в журнале «Квант» (в 9 номере за 1978 год), учитывая уровень развития современной математики, кажется фантастическим. Такое возможно только в геометрии и то крайне редко.

Здесь я хочу привести пример другого «маленького» открытия, сделанного экспериментальным путем. В элементарной геометрии есть следующая проблема: какое наибольшее число единичных квадратов можно вырезать из квадрата со стороной $4+\alpha$, где $0 < \alpha < 1$? Этой проблемой занимались многие крупные геометры, в частности, известный венгерский геометр Эрдеш. Она послужила поводом дать в журнале «Математика в школе» ради эксперимента, хотя и в ином смысле, следующую задачу.

Известно, что из квадрата со стороной $4+\alpha$ можно вырезать 17 единичных квадратов. Указать как можно

Рис. 5.



а) б)

меньшее α, при котором это можно сделать.

Возможно, эта задача выглядит не очень красиво, но все же некоторый смысл в ней есть. Понятно, что никто не рассчитывал на то, что читатели найдут наименьшее такое α. Большинство читателей прислали расположение, изображенное на рисунке 5, *а*, для которого $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Неожиданностью оказалось письмо от участников математической секции «Горизонт» при школе № 51 города Киева (руководитель Б. Н. Школьник). В письме было сказано, что, проделав соответствующий эксперимент (!), члены секции пришли к заключению, что наименьшее α достигается для расположения, указанного на рисунке 5, *б*. (Проверьте самостоятельно, что для такого расположения α на несколько сотых меньше, чем для рисунка 5, *а*). Не зная описания эксперимента, трудно судить о справедливости этого утверждения. Кроме того, математическое воспитание не позволяет с полным удовлетворением воспринять подобное «доказательство». (А собственно, почему?) Очень возможно, что указанное расположение и в самом деле является оптимальным для нашего частного случая. Но самое главное, эта задача показывает, что геометрические открытия доступны буквально любому школьнику, а не только начинающим математическим гениям. Дерзайте! Да сопутствует вам успех!

Алгоритмика простоты

Компьютерная считалочка

Б. ТАРАСЕНКО

Нелегкий вопрос-то,
Но верь одному:
Все сложно и просто,
Считай, по уму!

Кто не помнит милые забавы раннего детства, считалочки? «Вышел месяц из тумана...», «Эники-беники ели вареники...». Кроме способности вызывать приятные воспоминания они обладают еще одним свойством: результат, или «жребий, кому водить», в каждом конкретном случае однозначен, его легко подсчитать. Но по негласному уговору миф о непредсказуемости и справедливости ответа в конце считалки тщательно сохраняется и поддерживается. Это непременное условие любой ребячьей игры. Иногда для усиления впечатления псевдослучайности предусматривается специальный алгоритм.

На златом крыльце сидели:
Царь, царевич, король, королевич,
Сапожник, портной. Кто ты такой?
Говори поскорей, не задумывайся!

Тот, на кого выпадает последний ударный слог, действительно не задумываясь, выпаливает, например, «портной». Тогда счет «по стишку» обязательно повторяется, начиная с «портного», а заканчивается на водящем при слове «портной». Чтобы все было «честно», порой договариваются заранее, считать ли «по часовой» или «против».

С простыми числами все наоборот. Считают всегда «по часовой», т. е. в направлении возрастания. И всегда «от печки», от первого простого числа два. Используют только одну «считалочку» — возвратный алгоритм Эратосфена, иногда лишь немного его видоизменяя.

Простые числа распределены среди натуральных очень неравномерно. Рассмотрим нечто очень всем хорошо известное под названием «Таблица простых чисел, не превосходящих 6000». Классика. А сколько в ней простых? В книге А. А. Бухштаба «Теория чисел» (М., «Просвещение», 1966) таблица расположена рядами и колонками по схеме $11\times38+10\times36+5\times1$, что дает 783, т. е. примерно по три простых на каждые 23 числа. Тогда 25-е простое число должно находиться где-то около 200, но на самом деле оно равно 97. А быстро сказать, каким будет, хотя бы примерно, 25001-е простое, не сможет, пожалуй, никто, не обратившись к помощи компьютера, хотя математики и нашли формулы для приблизительной оценки количества простых чисел, не превышающих заданного натурального.

Попробуем немного «высветить» ситуацию, ибо всегда лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать. Поставим проблему и исследуем ее, применяя только карманную вычислительную технику. Каково количество простых в каждой первой сотне чисел после очередной степени десяти?

Вот экспериментальные данные. В начале каждой серии приводится степень десяти, затем в скобках количество простых в этой серии, затем сами простые числа этой серии, а в конце после точки с запятой — следующее простое (для экономии места приводятся лишь последние две или три цифры каждого числа). Для такого «обзора по сотням» нам вполне хватило программного инструмента № 1 из нашей первой публикации (см. «Квант» № 6), лишь для 10^8 и больших чисел вычисления проводились на МК-85 и HP-32S.

Программа 4. Счетный генератор простых чисел
Текст программы с пошаговыми комментариями

53	Х→П	6	46	/+	Ввод нечетного стартового числа
54	0		00	/+	Константа 0
55	С/П		50	/+	Стоп-индикация для набора номера числа
56	F X≠0		57	/+	РгХ≠0?
57	5 5		55	/+	НЕТ (т. е. РгХ=0), переход на шаг 55
58	Х→П	4	44	/+	ДА, запись порядкового номера в Рг4
59	1		01	/+	Константа 1
60	Х→П	45	45	/+	Засылка 1 в Рг5
61	К П→Х	5	Г5	/+	Добавление 1 в счетчик Рг5
62	К П→Х	5	Г5	/+	Добавление еще 1 в счетчик Рг5
63	П→Х	6	66	/+	Вызов в РгХ текущего испытуемого числа И
64	П→Х	5	65	/+	Вызов в РгХ текущего делителя Д из Рг5
65	÷		13	/+	ЧАСТН=И/Д
66	Х→П	9	49	/+	Засылка ЧАСТН в Рг9
67	К П→Х	9	Г9	/+	К=целая часть от ЧАСТН
68	П→Х	6	66	/+	Вызов И в РгХ
69	П→Х	9	69	/+	Вызов К в РгХ; И перемещается в РгY
70	П→Х	5	65	/+	Вызов Д в РгХ; РгY=К; РгZ=И
71	×		12	/+	Д×К
72	—		11	/+	ОСТ=И—К×Д, остаток от деления
73	F X≠0		57	/+	ОСТ≠0?
74	8 4		84	/+	НЕТ (т. е. ОСТ=0), переход на шаг 84
75	П→Х	9	69	/+	ДА (т. е. ОСТ≠0), вызов целого ЧАСТН
76	П→Х	5	65	/+	Вызов Д из Рг5 в РгХ
77	—		11	/+	РгХ=ЧАСТН — Д
78	F X<0		5С	/+	ЧАСТН — Д<0?
79	6 1		61	/+	НЕТ, переход на шаг 61 к новому значению Д
80	П→Х	4	64	/+	ДА (множество Д исчерпано), вызов номера
81	П→Х	6	66	/+	Вызов простого числа
82	С/П		50	/+	Стоп-индикация простого числа
83	К П→Х	4	Г4	/+	Добавление 1 в счетчик Рг4 номера числа
84	К П→Х	6	Г6	/+	Добавление 1 к испытуемому числу в Рг6
85	К П→Х	6	Г6	/+	Добавление еще 1 к испытуемому числу
86	ВП		51	/+	Безусловный переход
87	5 9		59	/+	на шаг 59

10^0 (25): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97; 101.

10^1 (25): 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109; 113.

10^2 (21): 1, 3, 7, 9, 13, 27, 31, 37, 39, 49, 51, 57, 63, 67, 73, 79, 81, 91, 93, 97, 99; 211.

10^3 (16): 9, 13, 19, 21, 31, 33, 39, 49, 51, 61, 63, 69, 87, 91, 93, 97; 103.

10^4 (11): 7, 9, 37, 39, 61, 67, 69, 79, 91, 93, 99; 103.

10^5 (6): 3, 19, 43, 49, 57, 69; 103.

10^6 (6): 3, 33, 37, 39, 81, 99; 117.

10^7 (2): 19, 79; 103.

10^8 (6): 7, 37, 39, 49, 73, 81; 123.

10^9 (7): 7, 9, 21, 33, 87, 93, 97; 103.

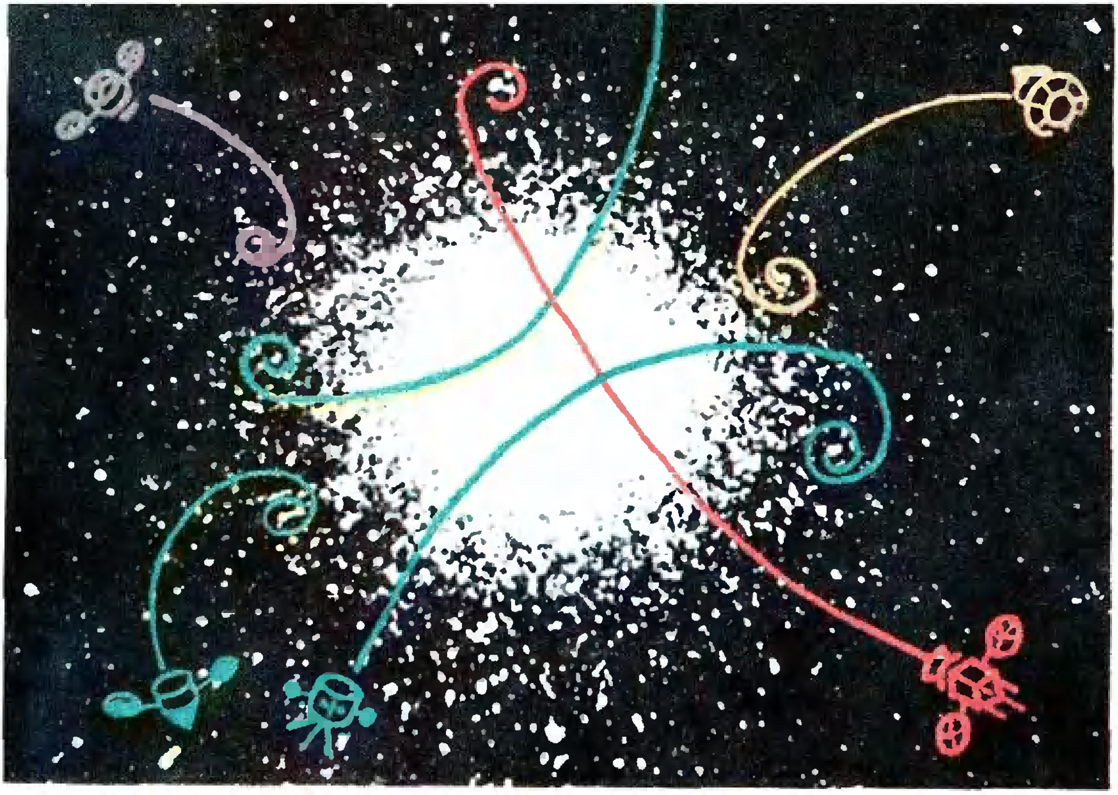
10^{10} (4): 19, 33, 61, 97; 103.

10^{11} (7): 3, 19, 57, 63, 69, 73, 91; 103.

Итак, количество простых в каждой последующей сотне падает, но отнюдь не равномерно: 25, 25, 21, 16, 11, 6, 6, 2, 6, 7, 4, 7, ... А это, в свою очередь, может быть поводом для постановки новых вопросов и новых исследований. Например: сколько простых в каждой тысяче натуральных, начиная от первой? Обратите внимание и на то, что из 12 исследованных «сечений» семь «заканчиваются» на 103 и лишь одно начинается на единицу.

На новом поприще нужны новые инструменты и удобства. Даем желающим программный нарастающий счетный генератор для МК-61. Он похож на самый первый, но дополнен нумератором простых чисел.

(Окончание см. на с. 58)



Ф-значит ракета

Межзвездным перелетам помогают... звезды

Кандидат физико-математических наук
В. СУРДИН

Введение

Осуществление межзвездных перелетов является чрезвычайно увлекательной задачей. Ее решение позволило бы детально изучить поверхность звезд разного типа, обнаружить планетные системы и, возможно, установить контакт с представителями внеземного разума. Мы не будем обсуждать здесь все возможные пути решения этой проблемы: за последние десятилетия было сделано на этот счет множество предложений — от фотонных и ядерных звездолетов (например, английский проект «Дедал») до использования солнечного паруса. В этой статье мы расскажем только об одной сравнительно новой идее, которая, в принципе, дает возможность посылать большое количество маленьких автоматических зондов к различным звездам нашей Галактики.

Пертурбационный маневр

Траектории межпланетных перелетов часто прокладывают вблизи планет не только для их исследования, но и чтобы использовать притяжение планеты для дополнительного разгона космического аппарата. Изменение траектории полета под действием гравитационного поля планеты называют обычно пертурбационным маневром. Именно он неоднократно применялся во время путешествия

«Вояджеров» по маршруту Земля — Юпитер — Сатурн — Уран — Нептун. Чтобы осмотреть полярные области Солнца, аппарат «Улисс» летит сейчас по маршруту Земля — Юпитер — Солнце. А чтобы достигнуть Юпитера без лишних затрат горючего, аппарат «Галилей» запущен по маршруту Земля — Венера — Земля — Юпитер. Пролет мимо каждой промежуточной планеты планируется таким образом, чтобы ее притяжение ускорило космический аппарат и сообщило ему нужное направление движения.

Механику этого эффекта легко понять на простом примере. Если по столу катится массивный шар, а навстречу ему — легкий, то при столкновении массивный почти не изменит свою скорость, а легкий отскочит с увеличенной скоростью (рис. 1; попробуйте самостоятельно решить эту задачу, используя законы сохранения кинетической энергии и импульса). То же самое происходит при «гравитационном столкновении» планеты с летящим навстречу ей космическим аппаратом. Отличие лишь в том, что столкновение твердых тел происходит почти мгновенно в момент касания, а гравитационное столкновение растянуто надолго. Но законы механики действуют одни и те же. Поэтому и результат тот же: совершив облет планеты, космический аппарат увеличивает свою скорость. А на сколько?

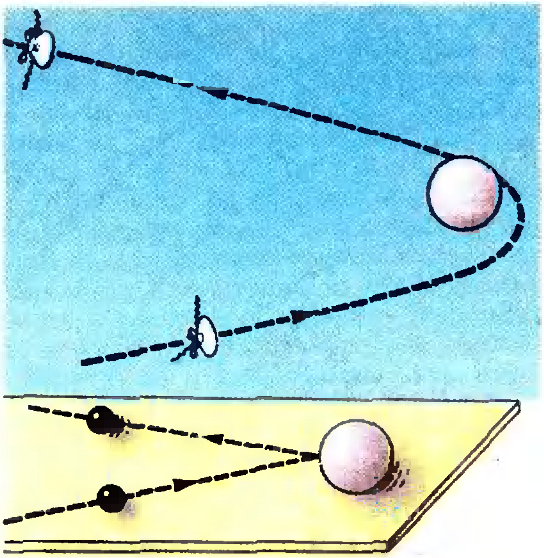


Рис. 1.

Рисунок 2 поможет нам это определить. Воспользуемся простым правилом сложения скоростей, но будем использовать при этом две инерциальные системы отсчета. С точки зрения

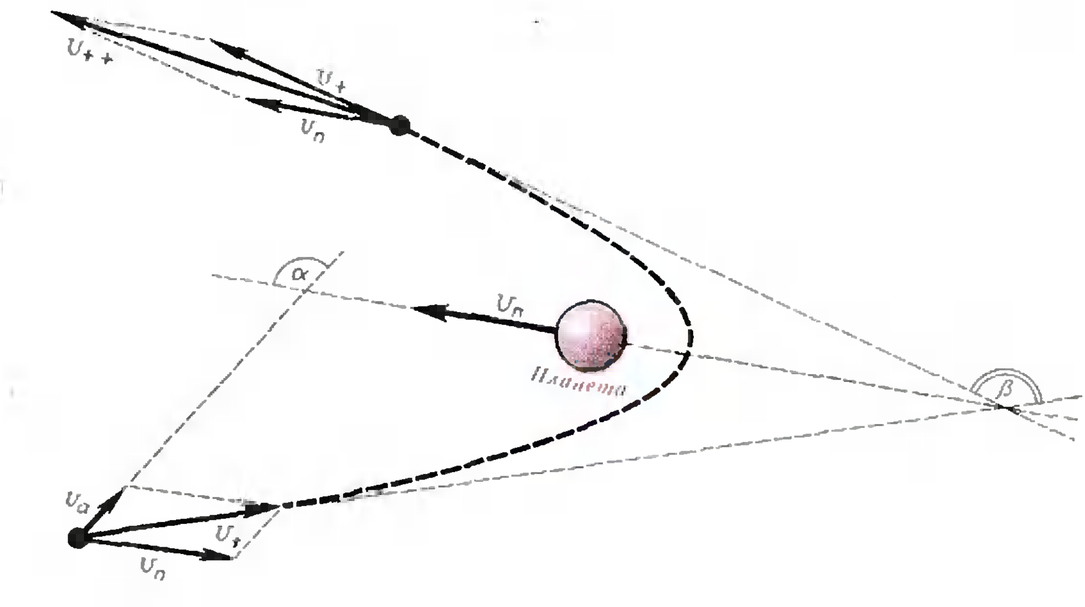


Рис. 2.

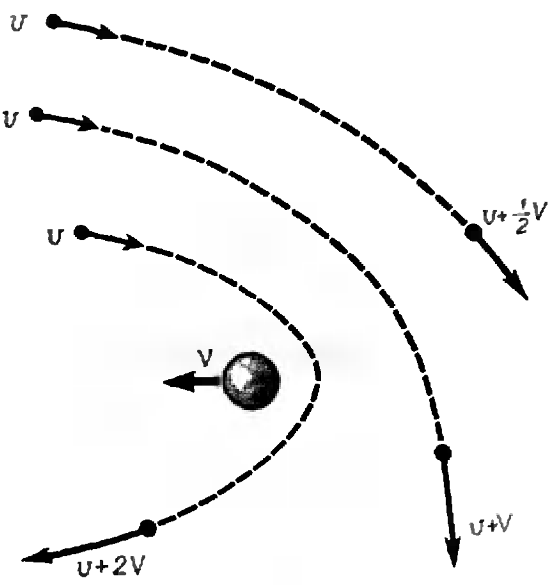


Рис. 3.

далекого наблюдателя (например, сидящего на Солнце), планета движется со скоростью $v_п$, а аппарат — со скоростью $v_а$; α — угол между направлениями этих скоростей. С точки зрения наблюдателя на планете, аппарат приближается к ней со скоростью v_+ и, очевидно, с такой же скоростью будет удаляться, изменив лишь ее направление на угол β. В этих рассуждениях мы подразумеваем, что связанная с планетой система координат практически инерциальна: ведь пролет аппарата влияет на движение планеты фантастически слабо. С точки же зрения далекого наблюдателя, удаляющийся от планеты аппарат имеет скорость v_{++}. Используя правило параллелограмма, получим

$$v_+^2 = v_а^2 + v_п^2 - 2v_а v_п \cos\alpha$$

и

$$v_{++}^2 = v_+^2 + v_п^2 - 2v_+ v_п \sin(\beta/2).$$

Сразу видно, что если аппарат и планета двигались навстречу друг другу ($\alpha \approx 180°$), а в результате маневра вектор скорости аппарата изменил свое направление на противоположное ($\beta \approx 180°$), то к скорости аппарата порибавилась удвоенная скорость планеты. Это наиболее выгодный случай (рис. 3). Но чтобы маневр был достаточно эффективным в смысле приращения скорости, желательно иметь β и $\alpha \gtrsim 90°$. Разумеется, аппарат должен при этом пройти над поверхностью планеты и не врезаться в нее, т. е. минимальное расстояние сближения должно превышать радиус планеты. Законы небесной механики указывают, что при этом максимальная скорость удаления аппарата относительно планеты после их сближения будет равна $v_{макс} = 0{,}46 v_{II}$, где v_{II} — скорость отрыва (вторая космическая скорость) у поверхности планеты. Если планета обращается вокруг звезды, то соответственно $v_{макс} \approx v_{орб} + 0{,}5 v_{II}$, где $v_{орб}$ — орбитальная скорость планеты.

Кстати, чтобы после сближения с планетой аппарат мог покинуть пределы Солнечной системы, необходимо выполнение условия $v_{макс} \geqslant \sqrt{2} v_{орб}$, т. е. скорость аппарата должна быть больше скорости отрыва с орбиты планеты. Как видно из таблицы 1, не все планеты Солнечной системы могут играть роль эффективных ускорителей: лишь планеты-гиганты при однократном пертурбационном маневре аппарата способы выбросить его из Солнечной системы. В четвертой колонке таблицы показано, какую скорость будет иметь аппарат, покинувший таким образом нашу планетную систему.

Таблица 1. Характеристики планет, связанные с пертурбационным маневром вблизи них.

Планета	Орбитальная скорость, $v_{орб}$ (км/с)	Критическая скорость у поверхности, v_{II} (км/с)	Скорость вылета из Солнечной системы Δv (км/с)
Меркурий	48	4,2	—
Венера	35	10	—
Земля	30	11	—
Марс	24	5	—
Юпитер	13	60	36
Сатурн	10	36	22
Уран	6,8	21	13
Нептун	5,4	24	14
Плутон	4,7	1?	—

Звезда-катапульта

Итак, мы выяснили, что специальный выбор траектории, проходящей в окрестности планет, дает возможность космическому аппарату без затраты топлива увеличить свою скорость и покинуть Солнечную систему. Очевидно, что необходимая для этого энергия черпается из механической энергии планет. А нельзя ли использовать этот же принцип разгона во время полета аппарата «на просторах Галактики»? Ведь звезды тоже движутся в пространстве, и, значит, пертурбационный маневр вблизи них может сообщить нашему межзвездному зонду дополнительную скорость.

Астрономам известно, что характерные скорости движения звезд лежат в пределах от 10—20 км/с у молодых объектов до 250—300 км/с у наиболее старых из них. Значит, каждая встреча со звездой при соответствующем подборе траектории сближения добавит аппарату несколько десятков, а то и сотен километров в секунду. Пределом для эффективного пертурбационного маневра, как и в случае с планетами, служит величина $v_{макс}$, но для звезд она значительно выше, чем для планет (см. таблицу 2). Правда, для нормальных звезд в широком диапазоне их масс и размеров значение $v_{макс}$ остается приблизительно таким же, как для Солнца. Оно относительно невелико (≈ 300 км/с), и поэтому такие звезды для нас большого интереса не представляют. Особенно же привлекательны для пертурбационных маневров старые компактные звезды — белые карлики, нейтронные звезды и, вообще говоря, черные дыры, хотя о последних мы в дальнейшем говорить не будем по причине их крайне малой изученности.

Светимость большинства компактных звезд невелика, и в этом смысле они не представляют большой опасности для пролетающего мимо космического аппарата. Но есть один физический эффект, который может существенно ограничить возможности пертурбационного маневра, особенно вблизи нейтронной звезды. Речь идет о приливном влиянии гравитационного поля звезды, которое стремится сообщить различным частям аппарата взаимное ускорение $a = 2GM_*\Delta r/R^3$, где G — постоянная тяготения, M_* — масса, звезды, R — расстояние от аппарата до центра звезды, Δr — расстояние между частями аппарата. Как видно из таблицы 2, приливное ускорение довольно велико у поверхности нейтронной звезды и может представлять опасность для конструкции аппарата. Сейчас промышленность изготавливает некоторые электронно-механические приборы, выдерживающие ускорения до 10^6 м/с^2. Поэтому выбранный нами в таблице 2 интервал для минимального расстояния межзвездного зонда от поверхности нейтронной звезды кажется вполне разумным.

Нужно заметить, что в отличие от нормальных звезд, у которых масса приблизительно пропорциональна их радиусу и поэтому между ними нет большого различия в величине $v_{макс}$, у нейтронных звезд и белых кар-

Таблица 2. Максимальная скорость зонда ($v_{макс}$) и приливное ускорение (a) при пролете вблизи звезд различного типа.

Характеристика	Нормальная звезда (Солнце)	Белый карлик	Нейтронная звезда $R_{мин} = R_*$	Нейтронная звезда $R_{мин} = 50R_*$
Масса звезды, M_* ($M_\odot$)	1	0,7	2	2
Радиус звезды, R_* ($R_\odot$)	1	0,01	20 км	20 км
Критическая скорость у поверхности, v_{II} (км/с)	617	5165	$16 \cdot 10^4$	$23 \cdot 10^3$
Максимальная скорость зонда, $v_{макс}$ (км/с)	309	2583	$8 \cdot 10^4$	$12 \cdot 10^3$
Приливное ускорение, a (м/с^2) для $\Delta r = 1$ м	10^{-6}	0,5	$7 \cdot 10^7$	530

ликов радиус уменьшается с увеличением массы, что существенно сказывается на величине $v_{макс}$. В таблице 2 для этих звезд приведены лишь средние значения, которые для индивидуальных звезд могут различаться в 3—4 раза.

Долго ли разгоняться?

Стратегия ускорения межзвездного зонда достаточно очевидна: на дальних подступах к очередной звезде-ускорителю автопилот зонда должен наметить из числа ближайших звезд следующую, движущуюся ему навстречу, и так скорректировать траекторию сближения аппарата с первой звездой, чтобы пертурбационный маневр направил его в сторону второй звезды. Если коррекция траектории происходит достаточно далеко от точки сближения, то для этого потребуется мизерное количество топлива, а может быть, вообще будет достаточно и безрасходных методов управления, использующих межзвездное магнитное поле или давление излучения.

Оценим время, необходимое зонду для достижения скорости $v_{макс}$, если он стартовал из Солнечной системы со скоростью v_0. Пусть, для простоты, все звезды равномерно распределены в пространстве на среднем расстоянии l друг от друга и имеют одинаковые скорости хаотического движения σ. Если при каждом сближении со звездой зонд получает приращение скорости $\Delta v=\sigma$, то ему необходимо совершить $N=(v_{макс}-v_0)/\sigma$ пертурбационных маневров, на которые будет затрачено время

$$t=\sum_{k=0}^{N-1} l/(v_0+k\sigma).$$

Для быстрых оценок значения t эту сумму при $v_0\ll\sigma$ можно заменить величиной $t\approx l/v_0$, а при $v_0\gtrsim\sigma$ заменить интегралом и получить $t\approx(l/\sigma)\ \ln(v_{макс}/v_0)$. Как видим, зависимость времени разгона от величины начальной и конечной скорости зонда слабая: для $v_0=100$ км/с и 300 км/с$\leqslant v_{макс}\leqslant 10^5$ км/с имеем $1\leqslant \ln(v_{макс}/v_0)\leqslant 7$. Поэтому для всех случаев довольно точное значение дает формула $t\approx 2l\left(\frac{1}{v_0}+\frac{1}{\sigma}\right)$. В ней фигурируют три величины. Каковы же они?

Как покинуть Солнечную систему?

С какой скоростью наш зонд может покинуть Солнечную систему? До сих пор для этой цели использовался лишь пертурбационный маневр вблизи планет-гигантов, который позволил выйти в межзвездное пространство аппаратам серий «Пионер» и «Вояджер». Они имеют скорости относительно Солнца около 20 км/с. В принципе же сложный маневр в поле Юпитера и Сатурна позволяет аппарату разогнаться до скорости почти 100 км/с. Правда, для этого требуется определенная конфигурация планет.

Второй способ, который кажется сейчас вполне осуществимым,— это ускорение небольших зондов с помощью электромагнитных ускорителей массы, разрабатываемых в рамках американской программы стратегической оборонной инициативы (СОИ). Уже сейчас лабораторные образцы этого устройства ускоряют массу в 10 г до скорости около 10 км/с. Ожидается, что полномасштабные ускорители будут разгонять аппараты массой порядка 1 кг до скорости 20—40 км/с. Дальнейшее увеличение скорости связано со значительным увеличением размеров ускорителя ($\gtrsim 1$ км) и поэтому считается нецелесообразным в рамках СОИ. Но для уникального проекта запуска межзвездных зондов это не может быть препятствием. Поэтому можно надеяться на создание космического электромагнитного ускорителя, разгоняющего небольшие зонды до скорости не менее 100 км/с, причем он будет способен делать это в любой момент и в любом направлении, независимо от конфигурации планет.

Лучшее место для космического ускорителя

Итак, будем считать, что межзвездный зонд покинул Солнечную систему со скоростью $v_0 = 100$ км/с. В зависимости от того, какой тип звезд будет использован для пертурбационного маневра, в таблице 3 рассчитаны значения времени разгона до максимальной скорости. Напомним, что пространственная плотность звезд n связана со средним расстоянием между ними простым соотношением: $l = n^{-1/3}$.

Как видим, в окрестности Солнца время разгона измеряется сотнями тысяч лет при использовании любого звездного населения. Но если бы мы находились в ядре шарового скопления, то это время сократилось бы до нескольких тысячелетий, а в ядре Галактики — всего до нескольких столетий. Кстати, в ядре Галактики есть смысл запускать зонд из планетной системы со скоростью $v_0 = 300$—400 км/с. Тогда он разгонится с помощью белых карликов до скорости около 5000 км/с всего за 100 лет, а с помощью нейтронных звезд за три столетия может ускориться почти до 100 тыс. км/с (конечно, если конструкция зонда позволяет приближаться к нейтронным звездам).

В принципе, возможны и более изощренные варианты гравитационного ускорения межзвездных зондов. Например, астрофизикам известны двойные звездные системы, состоящие из нейтронной звезды и белого карлика. Эти компактные звезды обращаются по орбите со скоростью более 1000 км/с. Сближение с одним из компонентов такой системы сразу может добавить к скорости зонда около 2000 км/с! Особенно часто такие системы должны встречаться в ядрах шаровых скоплений. Вообще, хотим заметить, что центральные части шаровых звездных скоплений — чрезвычайно привлекательные места для цивилизаций, делающих первые шаги на пути колонизации космоса.

Невидимые разведчики космоса

Современная электроника и микромеханика делают информационные приборы чрезвычайно компактными и энергосберегающими. Сейчас микродатчики и микропроцессоры можно обнаружить в самых неожиданных местах: в телефонной трубке и записной книжке, в авторучке и поздравительной открытке. Микрохирургия близка к тому, чтобы изготавливать диагностические и лечебные аппараты, свободно плавающие

Таблица 3. Характерное время разгона зонда (t) при старте из различных мест и при использовании различных звездных населений Галактики. Принята начальная скорость $v_0 = 100$ км/с. В скобках указаны теоретические оценки исходных величин, без скобок — наблюдательные.

Локализация	Население	n, пк$^{-3}$	σ, км/с	t, лет	$v_{макс}$, км/с
Окрестности Солнца	Звезды диска	0,1	45	10^5	400
	Звезды гало	0,005	250	$2 \cdot 10^5$	400
	Белые карлики	0,05	50	$2 \cdot 10^5$	5000
	Нейтронные звезды	(10^{-3})	(100)	$4 \cdot 10^5$	10^5
Шаровые скопления	Нормальные звезды	$4 \cdot 10^4$	20	$4 \cdot 10^3$	400
	Белые карлики	$(5 \cdot 10^4)$	20	$3 \cdot 10^3$	5000
	Нейтронные звезды	(10^3)	20	10^4	10^5
Ядро Галактики ($R \approx 1$ пк)	Белые карлики	(10^6)	250	300	5000
	Нейтронные звезды	(10^4)	250	10^3	10^5

в сосудах человеческого организма.

Исследовательская космонавтика, вероятно, пойдет этим же путем. Сейчас трудно представить, что будут когда-нибудь реализованы проекты межзвездных кораблей типа английского «Дедала», для которого требуется построить ракету почти километровой длины с ядерным двигателем. Собрать такую махину можно только на орбите Земли, монтажные работы займут не менее пятнадцати лет. Для полета небольшого экипажа потребуются почти все запасы ядерного топлива, имеющиеся на планете. Лишь тогда эта ракета сможет разогнаться до скорости в несколько тысяч километров в секунду и примерно за сотню лет достичь ближайшей звезды. На один-единственный летательный аппарат уйдет масса ресурсов и сил, стоимость его будет исчисляться триллионами долларов. Вряд ли все это реально.

Более перспективным методом исследования дальнего космоса нам кажется создание множества однотипных, относительно дешевых микрозондов размером не более 1 м и массой порядка 10—100 кг (но не исключено, что и существенно меньше, ибо технология в этой области развивается стремительно). Только при таком подходе энергетических и материальных ресурсов науки будет достаточно для детального исследования Галактики. Имея небольшой размер, микрозонды смогут вторгаться в области относительно плотной межзвездной и межпланетной материи, сближаться с компактными и массивными объектами.

Стратегия исследования Галактики с помощью микрозондов должна составить предмет отдельного разговора. При этом необходимо рассмотреть возможность оптической связи как наиболее предпочтительной на дальних расстояниях, а также возможность возвращения зондов в район старта. Кстати, если подобные зонды, запущенные из других планетных систем, время от времени проходят через Солнечную систему, то обнаружить их у нас нет сейчас никакой возможности. Вероятно, в таком же положении окажется большинство предполагаемых «братьев по разуму» в отношении наших зондов. Поэтому подобный способ «микрозондажа» Галактики представляется наиболее безопасным и ответственным по отношению к человечеству.

Алгоритмика простоты

(Начало см. на с. 50)

Инструкция

После включения ПМК набрать БП 53, затем F ПРГ, затем набрать программу (она начинается с шага 53), после чего выполнить F АВТ БП 53. После этого набрать начальное нечетное число в диапазоне от 5 до 99 999 989 и нажать клавишу С/П; после останова ПМК (прекращения мигания) на индикаторе появится ноль. Теперь ПМК ждет набора номера начального простого числа. Если вы ввели простое число с известным номером, то наберите этот номер, в противном случае наберите единицу. Тем самым первому найденному простому числу будет присвоен номер 1, следующему — 2 и т. д.

Остается нажимать С/П и считывать простые числа и их номера. Числа ПМК будет показывать на индикаторе после каждой остановки, а номера — после нажатия клавиши ↔ в момент остановки (после этого можно снова нажимать С/П).

„Квант" улыбается

«Гениальные» изречения учащихся

1. Если масса пули будет больше массы ружья, то оно не выстрелит.

2. После замерзания белье трудно разогнуть, потому что там молекулы замерзли.

3. Сила упорности.

4. Сила тягости.

5. Лужи быстрее высыхают в теплую погоду, потому что тогда увеличивается их скорость.

6. Зимой после работы лошадь накрывают попоной для того, чтобы она не простудилась. Если лошадь простудится, то ее очень трудно лечить, т. к. она не умеет глотать таблетки.

7. Чтобы увеличить изображение предмета, даваемого линзой, надо отодвинуть линзу от фокусного расстояния.

8. Соединение проводников бывает последовательное и поперечное.

9. Из лампы выкачивают воздух и впускают туда вакуум.

10. Южный полюс магнита по правилу левой руки будет расположен к нам лицом.

11. В операционных включают ультрафиолетовые лампы, чтобы не падать в обморок.

12. На борту космического корабля находились собаки Пчелка, Мушка и другие мелкие насекомые.

Собрал А. Хоменко

1. Тлеющий разряд применяется в лампах накаливания.

2. Человек вытесняет из ванны воду объемом, равным весу.

3. Конденсаторы применяются в трансформаторах.

4. Уравнение писать в сантиметрах?

5. Изображение в фотоаппарате прямое, мнимое и увеличенное.

6. ФАРАД — емкость конденсатора, у которого площадь обкладки квадратный метр и расстояние между обкладками 1 метр.

Собрала Н. Патрикеева

Дорогой читатель!

Подписка на годовой комплект журнала «Квант» за 1992 год завершается.
«Квант» в розницу не поступает, поэтому советуем вам подписку не откладывать.
Стоимость одного номера журнала — 1 р. 10 к., периодичность — 12 номеров в год.
Если вы не успеете или не захотите оформить подписку на весь год, вы сможете выписать журнал на любой другой срок и с любого месяца.
Но напоминаем: журнал «Квант» — это не только занимательно.
Регулярная работа с ним — основа ваших будущих успехов на любом поприще, связанном с точными науками!
Подписка на «Квант» принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи.

Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» — 70465.

Информатика

Новое в электронике

Самым «горячим» компьютером начала 1991 года стал персональный «блокнот», который понимает и воспроизводит в напечатанном виде рукописный текст. О его создании сообщила на пресс-конференции в Сан-Франциско калифорнийская фирма «Гоу» из г. Фостер-сити. Новый персональный компьютер явился плодом секретнейших тридцатилетних работ фирмы по изучению почерка. Средства массовой информации оценили это достижение как революцию в сфере производства «персоналок».

Напомним, что первый настольный компьютер был введен в повседневную рабочую практику офисов в теперь уже далеком 1977 году. Через шесть лет появились первые портативные персоналки, которые можно было брать с собой в самолет, машину, поезд и т. д., продолжая работу и в пути. Пару лет назад появились первые карманные компьютеры с достаточными для повседневной практики возможностями. Но все же прогресс в деле создания персоналок был скорее эволюционным, нежели революционным. На пути постиндустриальной компьютерной революции стояла, как это ни странно, клавиатура. Оказывается, десятки миллионов людей в такой стране как США по своим психо-физиологическим параметрам не могут научиться быстро работать на клавиатуре. Довольно трудно дается это обучение и детям, и пожилым людям. (В подавляющем большинстве своем и мужчины гораздо хуже овладевают клавиатурой, чем женщины, которые доминируют в машинописи.)

Таким образом, на рынке компьютеров вот уже три десятилетия сохранялась обширная «ниша» в десятки миллионов потенциальных потребителей. Электронная промышленность в последние годы пыталась как-то заполнить этот пробел. До «Гоу» на рынок были выброшены «гриды» (что в переводе означает «сетки»), производимые дочерней компанией большой корпорации Tandy. Их было продано около 10 тыс. штук по цене примерно 2,4 тыс. долл. Основными покупателями «грид» были люди, которым приходится часто писать однотипные рецепты, квитанции и заполнять массу другой документации — фармацевты, продавцы, складские менеджеры. Компьютер получил свое название по тончайшей сетке проводников, реагирующих на прикосновение электронного карандаша. Нечто похожее производят в Японии компании «Сони» и «Кэнон».

Однако новый компьютер компании «Гоу» представляет собой, как выразился редактор ведущего журнала американской электронной промышленности «Текнолоджик компьютер леттер» Р. Шаффер, «новый волнующий шанс в развитии компьютерной индустрии». Это действительно совершенно новый по своей концепции 2-килограммовый персональный компьютер размером с большой блокнот или альбом для рисования. Верхняя поверхность «блокнота» — большой дисплей на жидких кристаллах с сеткой проводников, реагирующих на прикосновение электронного «стила» (карандаша). Последний может быть соединен с компьютером проводами или даже быть абсолютно автономным.

Главным преимуществом персоналки «Гоу» является то, что компьютер не требует клавиатуры и «мышки». Если вам необходимо занести какой-то текст в компьютер, то вы просто пишете его от руки на экране карандашом — «стилом». Компьютер сохранит этот текст в памяти и в любой момент выведет его на экран. Если в составленном документе (проекте контракта, заявлении) вам не понравилось какое-то слово или выражение, то вы можете выбросить его из текста, очертив кружком. А ненужное предложение просто вычеркивается.

Новый компьютер очень удобен в редакторской работе, поскольку позволяет пользоваться обычными редакторскими значками. Более того: если вы хотите вставить в отпечатанный на бумаге документ какую-то фразу, то вам необходимо умещать ее в промежутке между строками. С «Гоу» же все проще: вы рисуете на полях маленькую тележку, на которой и «ввозите» то, что вам нужно. Компьютер сам раздвинет строки, чтобы новая фраза встала на место.

«Гоу» разбирается не только в почерках, но и в рисунках. Достаточно изобразить на экране любой рисунок, и он тут же воспроизведет его в чертежно-точном виде. Останется только внести нужные вам исправления и уточнения, и чертеж, причем в стандартном виде, готов.

Пока «Гоу» лишь проходил испытания среди продавцов и других представителей сферы обслуживания, но через два года фирма обещает выбросить на рынок карманные модели. Одновременно для учебных заведений, пресс- и конгресс-центров будут выпускаться компьютеры размером с обычную классную доску. Ожидается, что уже в 1992 году будет продано до четверти миллиона компьютеров типа «Гоу» на общую сумму порядка трех миллиардов долларов.

Новый компьютер представляет собой сочетание всего самого лучшего, что накоплено электронной промышленностью в производстве портативных миникомпьютеров, лазерных проигрывателей для компакт-дисков и программного обеспечения, необходимого для распознавания рисунков и почерков.

Работа с компьютером начинается с его «обучения», которое длится примерно полчаса. За это время компьютер привыкает к вашему почерку. Пока писать приходится «печатными» буквами, но в англоязычных школах уже довольно давно детей обучают именно такому письму.

Помимо букв и линий компьютер распознает также постукивания по экрану и отметки типа «галочек». Например, если документ не умещается на одной странице, то «галочка» в ее конце автоматически «переворачивает страницу». Все это обеспечивается «очень умным» микропроцессором и памятью объемом 4 Мбайта, что примерно в 4 раза больше памяти обычного персонального компьютера.

Под экраном смонтирован дисковод для компактов, а также дополнительные чипы памяти для постоянного хранения данных. В прототипах модели пытались использовать дисководы для гибких носителей информации, но они оказались слишком тяжелыми и шумными. Это вынуждает пользователя «Гоу» подключаться к стандартному компьютеру в офисе или к дисководу для гибких дисков для пересылки программ и документов. Впрочем, подсоединение «Гоу» может быть осуществлено и с помощью обычной телефонной линии.

Со временем новые компьютеры будут иметь встроенные модемы, а более дорогие модели смогут даже принимать и передавать факсы. К середине 90-х годов «Гоу» планирует ввести в свой компьютер контур целлюлярной телефонной связи, что даст возможность пользователю получать и передавать электронные данные в любом месте и любое время, связываясь к кем угодно посредством факсов и телефона.

«Гоу» был создан тремя молодыми учеными, главный из которых — 38-летний С. Каплан, сын манхеттенского адвоката. Он окончил Пенсильванский университет, в котором занимался проблемами искусственного интеллекта, и одно время заведовал отделом программирования в известной компании «Лотус», где разработал популярную программу 1—2—3 для PC. Двум его заместителям — сооснователям компании «Гоу» соответственно 36 и 34 года. Они не побоялись бросить вызов таким гигантам электронного мира как IBM и Microsoft знаменитого на весь мир Билла Гейтса. Microsoft (штаб-квартира которого находится в г. Редмонде, штат Вашингтон) уже десять лет эксплуатирует хорошо зарекомендовавшую себя операционную систему ДОС. «Гоу» использует принципиально новую операционную систему, которую Каплан назвал «Пенпойнт», т. е. «кончик пера».

Новая система особенно легка для понимания и удобна для новичков. При включении компьютера пользователь видит на дисплее набор «досье» или «папок» с набором тех или иных «документов». Достаточно ткнуть стилом в то или иное досье, и перед вами тут же развернется изображение «бумаг». Это можно сравнить с анкетой, в которую необходимо только заглавными буквами внести данные о себе, и после чего документ готов, его остается отправить по электронной почте в соответствующее место.

Microsoft на этот раз отстал от конкурента. Его система подобного рода, которую Б. Гейтс назвал «Пенуиндоуз» — «Окна для пера» — может появиться на рынке только к середине 1992 года. Гейтс считает, что в ходе развития рыночных отношений между двумя конкурентами его фирма обязательно нагонит «возмутителей спокойствия» из Калифорнии. Молодой мультимиллиардер настроен очень агрессивно, однако эксперты полагают, что места на рынке — необъятном и ненасытном — хватит не только им, но еще и другим производителям подобных компьютеров. Компании Каплана решила дать шанс могущественнейшая IBM, так что гегемонии фирмы Microsoft на рынке программ может действительно прийти конец. Среди клиентов «Гоу», помимо IBM, есть и такие известные компании, как Tandy и NCR.

Журнал «PC Letter» в лице своего редактора С. Элсопа назвал разворачивающуюся «лихорадку» одним из тех «магических моментов, которые показывают, что американская электронная индустрия показывает себя с самой лучшей стороны». Большой интерес к сообщению проявили японцы, считающие переход к компьютерам типа «Гоу» вполне естественным шагом, который должны будут обязательно сделать и они. Таким образом, ожидается новый виток мощной конкуренции, без которой просто невозможен прогресс в такой области как компьютеры. И эта конкурентная борьба всем на пользу.

Американцы потеснили японцев и в области чипов. Речь идет о новом успехе компании Texas Instruments, которая сообщила, что первой стала оснащать свои компьютеры чипами «динамической памяти с рандомизированным доступом» (ДПР) объемом 16 Мбит, что позволяет уместить на одном чипе более полутора тысяч страниц машинописного текста.

Японские чипы, которые абсолютно доминируют на рынке, имеют стандартный объем всего 4 Мбита. Четыре японские фирмы заявили вслед за американцами, что они тоже выбросят на рынок чипы 16 Мбит в первой четверти 1991 года, однако крупномасштабное производство смогут развернуть лишь в 1992 году. Таким образом, темп развития и в этой области ускорился: ранее 4-кратное увеличение объема памяти достигалось за три года, теперь же — всего за два. Эксперты оценивают емкость рынка подобных чипов памяти к 1993 году в 30 миллиардов штук.

И. Лалаянц
(По материалам Fortune 91, 11, II)

СВЕТ БЫЛОГО

(фантастический рассказ)

БОБ ШОУ

Рассказ перепечатывается из сборника научно-фантастических рассказов «Практика изобретения» (М.: Мир, 1974).

Деревня осталась позади, и вскоре крутые петли шоссе привели нас в край медленного стекла.

Мне ни разу не приходилось бывать на таких фермах, и вначале они показались мне жутковатыми, а воображение и обстоятельства еще усиливали это впечатление. Турбодвигатель нашей машины работал ровно и бесшумно, не нарушая безмолвия сыроватого воздуха, и мы неслись по серпантину шоссе, среди сверхъестественной тишины. Справа, по горным склонам, обрамлявшим немыслимо красивую долину, в темной зелени могучих сосен, вбирая свет, стояли огромные рамы с листами медленного стекла. Лучи вечернего солнца порою вспыхивали на растяжках, и казалось, будто там кто-то ходит. Но на самом деле вокруг было полное безлюдье. Ряды этих окон годами стояли на склонах над долиной, и люди приходили протирать их только изредка в глухие часы ночи, когда ненасытное стекло не могло запечатлеть их присутствия.

Зрелище было завораживающее, но и я, ни Селина ничего о нем не сказали. Мне кажется, мы ненавидели друг друга с таким неистовством, что не хотелось портить новые впечатления, бросая их в водоворот наших эмоций. Я все острее ощущал, что мы напрасно затеяли эту поездку. Прежде я полагал, что нам достаточно будет немного отдохнуть, и все встанет на свое место. И вот мы отправились путешествовать. Но ведь в положении Селины это ничего не меняло, и (что было еще хуже) беременность продолжала нервировать ее.

Пытаясь найти оправдание тому, что ее беременность так вывела нас из равновесия, мы говорили все, что обычно говорят в таких случаях: нам, конечно, очень хочется иметь детей, но только позже, в более подходящее время. Ведь Селина из-за этого должна была оставить хорошо оплачиваемую работу, а вместе с ее заработком мы лишались и нового дома, который совсем было собрались купить,— приобрести его на то, что я получал за свои стихи, было, разумеется, невозможно. Однако в действительности наше раздражение объяснялось тем, что нам против воли пришлось осознать следующую неприятную истину: тот, кто говорит, что хочет иметь детей, но только позже, на самом деле совсем не хочет ими обзаводиться — ни теперь, ни после. И нас бесило сознание, что мы попали в извечную биологическую ловушку, хотя всегда считали себя особенными и неповторимыми.

Шоссе продолжало петлять по южным склонам Бенкрейчена, и время от времени впереди на мгновение открывались далекие серые просторы Атлантического океана. Я притормозил, чтобы спокойно полюбоваться этой картиной, и тут увидел прибитую к столбу доску. Надпись на ней гласила: «Медленное стекло. Качество высокое, цены низкие. Дж. Р. Хейген». Подчинившись внезапному побуждению, я остановил машину у обочины. Жесткие стебли травы царапнули по дверце, и я сердито поморщился.

— Почему ты остановился? — спросила Селина, удивленно повернув ко мне лицо, обрамленное платиновыми волосами.

— Погляди на это объявление. Давай сходим туда и посмотрим. Вряд ли в такой глуши за стекло просят особенно дорого.

Селина возразила насмешливо и зло, но меня так захватила эта мысль, что я не стал слушать. У меня было нелепое ощущение, что нам нужно сделать что-то безрассудное и неожиданное. И тогда все утрясется само собой.

— Пошли,— сказал я.— Нам полезно размять ноги. Мы слишком долго сидели в машине.

Селина так пожала плечами, что у меня на душе сразу стало скверно, и вышла из машины. Мы начали подниматься по крутой тропе, по вырезанным в склоне ступенькам, которые были укреплены колышками. Некоторое время тропа вилась между деревьями, а потом мы увидели одноэтажный каменный домик. Позади него стояли высокие рамы с медленным стеклом, повернутые к великолепному отрогу, отражающемуся в водах Лох-

Линна. Почти все стекла были абсолютно прозрачны, но некоторые казались панелями отполированного черного дерева.

Когда мы вошли в аккуратно вымощенный двор, нам помахал рукой высокий пожилой мужчина в сером комбинезоне. Он сидел на низкой изгороди, курил трубку и смотрел на дом. Там у окна стояла молодая женщина в оранжевом платье, держа на руках маленького мальчика. Но она тут же равнодушно повернулась и скрылась в глубине комнаты.

— Мистер Хейген? — спросил я, когда мужчина слез с изгороди.

— Он самый. Интересуетесь стеклом? Тогда лучше места вам не найти.— Хейген говорил деловито, с интонациями и легким акцентом шотландского горца. У него было невозмутимо унылое лицо, какие часто встречаются у пожилых землекопов и философов.

— Да,— сказал я.— Мы путешествуем и прочли ваше объявление.

Селина, хотя обычно она легко заговаривает с незнакомыми людьми, ничего не сказала. Она смотрела на окно, теперь пустое, с легким недоумением — во всяком случае, так мне показалось.

— Вы ведь из Лондона? Ну, как я сказал, лучшего места вы выбрать не могли, да и времени тоже. Сезон еще не начался, и нас с женой в это время года мало кто навещает.

Я рассмеялся.

— То есть мы сможем купить небольшое стекло, не заложив последнюю рубашку?

— Ну вот! — сказал Хейген с виноватой улыбкой.— Опять я сам все испортил! Роза, то есть моя жена, говорит, что я никогда не научусь торговать. Но все-таки садитесь и потолкуем,— он указал на изгородь, а потом с сомнением поглядел на отглаженную голубую юбку Селины и добавил: — Погодите, я сейчас принесу коврик.

Хейген, прихрамывая, вошел в дом и закрыл за собой дверь.

— Может быть, нам и незачем было забираться сюда,— шепнул я Селине,— но ты все-таки могла бы держаться с ним полюбезнее. По-моему, мы можем рассчитывать на выгодную покупку.

— Держи карман шире,— ответила она с нарочитой вульгарностью.— Даже ты мог бы заметить, в каком доисторическом платье расхаживает его жена. Он не станет благодетельствовать незнакомых людей.

— А это была его жена?

— Конечно, это была его жена.

— Ну-ну,— сказал я с удивлением.— Только ты все равно постарайся быть вежливой. Не ставь меня в глупое положение.

Селина презрительно фыркнула. Когда Хейген вышел из дома, она очаровательно улыбнулась, и меня немного отпустило. Странная вещь — мужчина может любить женщину и в то же время от души желать, чтобы она попала под поезд.

Хейген расстелил плед на изгороди, и мы сели, чувствуя себя несколько неловко в этой классической сельской позе.

Далеко внизу, за рамами с бессонным медленным стеклом, неторопливый пароходик чертил белую полосу по зеркалу озера.

Буйный горный воздух словно сам рвался в наши легкие, перенасыщая их кислородом.

— Кое-кто из тех, кто растил здесь стекло,— начал Хейген,— расписывает приезжим вроде вас, до чего красива осень в этой части Аргайла. Или там весна, или зима. А я обхожусь без этого — ведь любой дурак знает, что место, которое летом некрасиво, никогда не бывает красивым. Как, по-вашему?

Я послушно кивнул.

— Вы просто хорошенько поглядите на озеро, мистер...

— Гарленд.

— ...Гарленд. Вот что вы купите, если вы купите мое стекло. И красивее, чем сейчас, оно не бывает. Стекло в полной фазе, толщина не меньше десяти лет, и полуметровое окно обойдется вам в двести фунтов.

— Двести фунтов! — Селина была возмущена.— Даже в магазине пейзажных окон на Бонд-стрит стекла не стоят так дорого.

Хейген улыбнулся терпеливой

улыбкой, а затем внимательно посмотрел на меня, проверяя, достаточно ли я разбираюсь в медленном стекле, чтобы в полной мере оценить его слова. Сумма, которую он назвал, была гораздо больше, чем я ожидал, но ведь речь шла о десятилетнем стекле! Дешевое стекло в магазинчиках вроде «Панорамплекса» или «Стекландшафта» — это самое обычное полуторасантиметровое стекло с накладной пластинкой медленного стекла, которой хватает на год, а то и всего на десять месяцев.

— Ты не поняла, дорогая,— сказал я, уже твердо решив купить.— Это стекло сохранится десять лет, и оно в полной фазе.

— Но ведь «в фазе» значит только, что оно соответствует данному времени?

Хейген снова улыбнулся ей, понимая, что меня ему убеждать незачем.

— Только! Простите, миссис Гарленд, но вы, по-видимому, не отдаете себе отчета, какая чудесная, в буквальном смысле слова чудесная, точность нужна для создания стекла в полной фазе. Когда я говорю, что стекло имеет толщину в десять лет, это означает, что свету требуется десять лет, чтобы пройти сквозь него. Другими словами, каждое из этих стекол имеет толщину в десять световых лет, а это вдвое больше расстояния до ближайшей звезды. Вот почему уклонение в реальной толщине на одну миллионную долю сантиметра приводит...— он вдруг замолчал, глядя в сторону дома. Я отвернулся от озера и снова увидел в окне молодую женщину. В глазах Хейгена я заметил жадную тоску, которая смутила меня и одновременно убедила, что Селина ошиблась. Насколько мне известно, мужья никогда так не смотрят на жен — во всяком случае, на своих собственных.

Молодая женщина оставалась у окна лишь несколько секунд, а затем теплое оранжевое пятно снова исчезло в глубине комнаты. Внезапно у меня, не знаю почему, возникло совершенно четкое ощущение, что она слепа. Повидимому, мы с Селиной случайно стали свидетелями эмоциональной ситуации, столь же напряженной, как наша собственная.

— Извините,— сказал Хейген,— мне показалось, что Роза меня зовет. Так на чем я остановился, миссис Гарленд? Десять световых лет, сжатые в половину сантиметра, неминуемо...

Я перестал слушать, отчасти потому, что твердо решил купить стекло, а отчасти потому, что уже много раз слышал объяснения свойств медленного стекла — и все равно никак не мог понять его принципа. Один мой знакомый физик как-то посоветовал мне для наглядности представить себе лист медленного стекла как голограмму, которой для воссоздания визуальной информации не требуется лазерного луча и в которой каждый фотон обычного света проходил сквозь спиральную трубку, лежащую вне радиуса захвата любого из атомов стекла. Эта, на мой взгляд, жемчужина неудобопонимаемости не только ничего мне не объяснила, но и еще сильнее убедила меня в том, что человеку, столь мало склонному к технике, как я, следует интересоваться не причинами, а лишь результатами.

Наиболее же важный результат, на взгляд среднего человека, заключался в том, что свету, чтобы пройти сквозь лист медленного стекла, требовался большой срок. Новые листы были всегда угольно-черными, потому что ни единый луч света еще не прошел сквозь них. Но когда такое стекло ставили, например, возле лесного озера, это озеро в нем появлялось. И если затем стекло вставлялось в окно городской квартиры где-нибудь в промышленном районе, то в течение года из этого окна словно открывался вид на лесное озеро. И это была не просто реалистичная, но неподвижная картина — нет, по воде, блестя на солнце, бежала рябь, животные бесшумно приходили на водопой, по небу пролетали птицы, ночь сменяла день, одно время года сменяло другое. А через год красота, задержанная в субатомных каналах, исчерпывалась, и в раме возникала знакомая серая улица.

Коммерческий успех медленного стекла объясняется не только его новизной, но и тем, что оно создавало полную эмоциональную иллюзию, будто все это принадлежит тебе. Ведь владелец ухоженных садов и вековых парков не занимается тем, что ползает по своей земле, щупая и нюхая ее. Он воспринимает ее как определенное сочетание световых лучей; с изобретением стекла появилась возможность переносить эти сочетания в угольные шахты, подводные лодки, тюремные камеры.

Несколько раз я пытался выразить в стихах свое восприятие этого волшебного кристалла, но для меня эта тема исполнена такой глубочайшей поэзии, что, как ни парадоксально, воплотить ее в стихи невозможно. Во всяком случае, мне это не по силам. К тому же все лучшие песни и стихотворения об этом уже написаны людьми, которые умерли задолго до изобретения медленного стекла. Например, ведь не мог же я превзойти Мура с его

Когда, не зная сна, лежу
В плену безмолвия ночного,
Я счастье давнее бужу,
И мне сияет свет былого.

Потребовалось всего несколько лет, чтобы медленное стекло из технической диковинки превратилось в товар широкого потребления. И к большому удивлению поэтов — то есть тех из нас, кто верит, что красота живет, хоть розы увядают,— став товаром, медленное стекло приобрело все свойства товара. Появились хорошие стекландшафты, которые стоили очень дорого, и стекландшафты похуже, которые стоили много дешевле. Цена в первую очередь определялась толщиной, измеряемой годами, но значительную роль при ее установлении играла и реальная толщина, или фаза.

Даже самое сложное и новейшее оборудование не могло обеспечить постоянного достижения точно заданной толщины. Грубое расхождение означало, что лист стекла, рассчитанный на пятилетнюю толщину, на самом деле получал толщину в пять лет с половиной, так что свет, попадавший в стекло летом, покидал его зимой. Не столь грубая ошибка могла привести к тому, что полуденное солнечное сияние загоралось в стекле в полночь. В таких несоответствиях была своя прелесть — многим из тех, кто работаем по ночам, например, нравилось существовать в своем собственном времени — но, как правило, стекландшафты, которые точнее соответствовали реальному времени, стоили дороже.

Хейген замолчал, так и не убедив Селину. Она чуть заметно покачала головой, и я понял, что он не нашел к ней правильного подхода. Внезапно платиновый шлем ее волос всколыхнулся от удара холодного ветра, и с почти безоблачного неба на нас обрушились крупные прозрачные капли дождя.

— Я оставлю вам чек,— сказал я резко, и зеленые глаза Селины сердито сфокусировались на моем лице.— Вы сможете переслать стекло мне?

— Переслать-то нетрудно,— сказал Хейген, соскользнув с изгороди.— Но может, вам будет приятнее взять его с собой?

— Да, конечно, если это не доставит вам хлопот,— я был пристыжен его безоговорочной готовностью принять мой чек.

— Я пойду выну для вас лист. Подождите здесь. Я сейчас, вот только вставлю его в раму для перевозки.

Хейген зашагал вниз по склону к цепочке окон — в некоторых из них виднелось озеро, залитое солнцем, в других над озером клубился туман, а два-три были совершенно черными.

Селина стянула у горла воротник блузки.

— Он мог хотя бы пригласить нас в дом! Уж если к нему завернул идиот, он мог бы быть полюбезнее.

Я пропустил эту шпильку мимо ушей и начал заполнять чек. Огромная капля упала мне на палец, и брызги разлетелись по бумаге.

— Ну, ладно,— сказал я.— Постоим на крыльце, пока он не вернется.

«Крыса,— думал я, чувствуя, что все получилось совсем не так.— Да, конечно, я был идиотом, раз женился на тебе... Призовым идиотом, идиотом из идиотов... А теперь, когда ты носишь в себе частицу меня, мне уже никогда, никогда не вырваться».

Чувствуя, как внутри меня все сжимается, я бежал рядом с Селиной к домику. Чистенькая комнатка за окном, где топился камин, была пуста, но на полу валялись в беспорядке детские игрушки. Кубики с буквами и маленькая тачка цвета очищенной моркови. Пока я смотрел, в комнату вбежал мальчик и принялся ногами расшвыривать кубики. Нас он не заметил. Несколько секунд спустя в комнату вошла молодая женщина и подхватила мальчика на руки, весело смеясь. Она, как и раньше, подошла к окну. Я смущенно улыбнулся, но ни она, ни мальчик не ответили на мою улыбку.

У меня по коже пробежали мурашки. Неужели они оба слепы? Я тихонько попятился.

Селина вскрикнула. Я обернулся к ней.

— Коврик! — сказала она.— Он намокнет.

Перебежав двор под дождем, она сдернула с изгороди рыжеватый плед и побежала назад, прямо к двери дома. Что-то конвульсивно всколыхнулось у меня в подсознании.

— Селина! — закричал я.— Не входи туда!

Но я опоздал. Она распахнула деревянную дверь, заглянула внутрь и остановилась, прижав ладонь ко рту. Я подошел к ней и взял плед из ее безвольно разжавшихся пальцев.

Закрывая дверь, я обвел взглядом внутренность домика. Чистенькая комната, в которой я только что видел женщину с ребенком, была заставлена колченогой мебелью, завалена старыми газетами, рваной одеждой, грязной посудой. В комнате стояла сырая вонь, и в ней никого не было. Единственный предмет, который я узнал, была маленькая тачка — сломанная, с облупившейся краской.

Я закрыл дверь на щеколду и приказал себе забыть то, что я видел. Некоторые мужчины содержат дом в порядке и когда живут одни. Другие этого не умеют.

Лицо Селины было белым как полотно.

— Я не понимаю... не понимаю...

— Медленное стекло, но двухстороннее,— сказал я мягко.— Свет проходит через него и в дом и из дома.

— Ты думаешь?..

— Не знаю. Нас это не касается. А теперь возьми себя в руки. Вон идет Хейген со стеклом.— Судорога ненависти, сжимавшая мои внутренности, вдруг исчезла.

Хейген вошел во двор, держа под мышкой прямоугольную раму, запакованную в клеенку. Я протянул ему чек, но он глядел на Селину. Он, по-видимому, сразу понял, что наши бесчувственные пальцы рылись в его душе. Селина отвела взгляд. Она вдруг стала старой и некрасивой и упрямо всматривалась в горизонт.

— Позвольте взять у вас коврик, мистер Гарленд,— сказал, наконец, Хейген.— Вы напрасно затруднялись.

— Ничего. Вот чек.

— Благодарю вас.— Он все еще смотрел на Селину со странным выражением мольбы.— Спасибо за покупку.

— Спасибо вам,— ответил я такой же стереотипной фразой, с той же бессмысленной вежливостью.

Я взял тяжелую раму и повел Селину к тропе, по которой нам предстояло спуститься на шоссе. Когда мы добрались до первой смоченной дождем и скользкой ступеньки, Хейген окликнул меня:

— Мистер Гарленд!

Я неохотно оглянулся.

— Я ни в чем не виноват,— сказал он ровным голосом.— Их обоих сшиб грузовик на шоссе шесть лет назад. Шофер был пьян. Моему сыну только исполнилось семь. Я имею право сохранить хоть что-то.

Я молча кивнул и начал спускаться по лестнице, крепко обнимая жену, радуясь ощущению ее руки у меня на плече. Перед поворотом я оглянулся и за струями дождя заметил, что Хейген, ссутулившись, сидит на изгороди там, где мы увидели его, когда вошли во двор.

Он смотрел в сторону дома, но я не мог различить, виднеется ли что-нибудь в окне.

Перевод с английского И. Гуровой

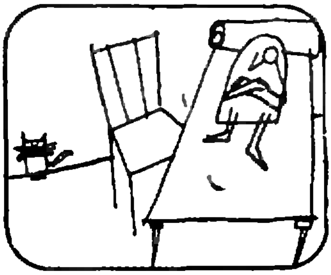
Игры и головоломки

Перед вами — небольшой отрывок из книги замечательного американского популяризатора Мартина Гарднера «Aha!» («Есть идея!», М., Мир, 1982). В ней собраны занимательные задачи, заставляющие читателя искать нестандартные решения.

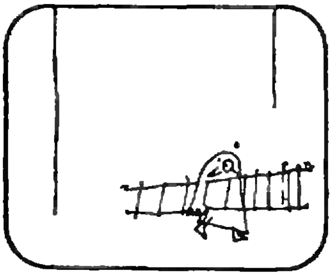
Аховы тесты

М. Гарднер

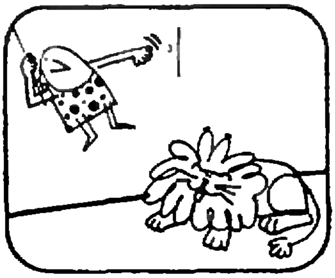
Полиция обратилась за помощью к известному специалисту по решению головоломок, профессору психологии Аху. Свои необычайно остроумные решения он назвал «феноменами Ах» и предложил множество тестов, позволяющих выявлять «феномены Ах» у испытуемых.



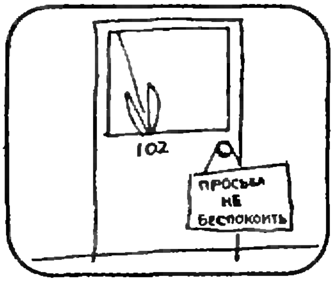
Один из его тестов осуществляется с помощью двух веревок, свисающих с потолка в пустой комнате.



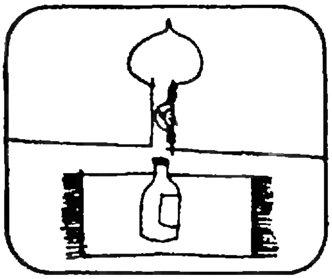
Проф. Ах. Расстояние между этими веревками достаточно велико, поэтому, держась за одну веревку, невозможно дотянуться до другой.



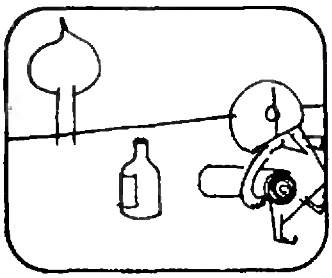
Проф. Ах. Задача состоит в том, чтобы связать свободные концы веревок, не пользуясь ничем, кроме ножниц.
Справитесь ли вы с этим тестом?



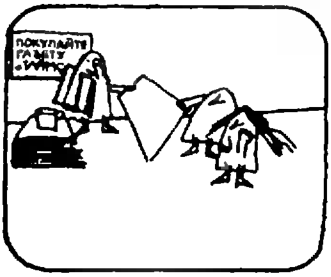
Проф. Ах. А вот еще один тест, который я также очень люблю. В центре небольшого восточного ковра я ставлю открытую бутылку пива. Требуется достать ее, сняв с ковра.



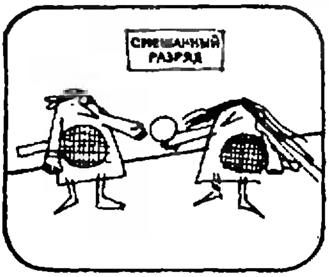
Проф. Ах. К бутылке нельзя прикасаться ни рукой, ни ногой, ни любой другой частью тела или каким-нибудь предметом. Разумеется, проливать пиво на ковер также не разрешается. Если вы не справитесь с этим тестом, может быть, следующий тест покажется вам более простым.



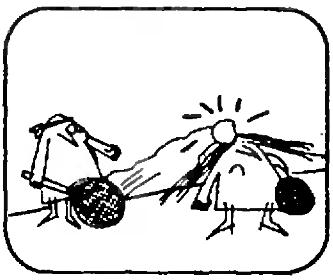
Проф. Ах. Для этого теста нам понадобится газета. Вы с приятелем должны встать на газетный лист так, чтобы ни один из вас не мог прикоснуться к другому. Сходить с газеты не разрешается.
Покажите, на что вы способны. Это ваш последний шанс успешно справиться с одним из тестов проф. Аха.



Когда проф. Ах предложил последний тест одной из студенток, она не только справилась с заданием, но и предложила профессору свой тест.
Студентка. Уважаемый профессор! Не могли бы вы бросить теннисный мяч так, чтобы он, пролетев короткое расстояние, остановился и начал двигаться в обратном направлении?

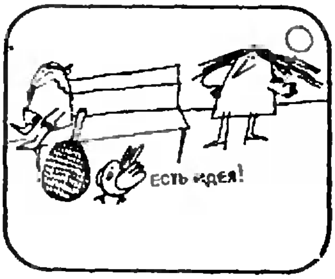


Проф. Ах. Может ли мяч стукнуться о препятствие?
Студентка. Ни в коем случае! Не разрешается также ударять мяч чем-нибудь или привязывать его к чему-нибудь.



После того как проф. Ах признал свое поражение, студентка показала ему, как решается задача. Решение оказалось удивительно простым.

Проф. Ах. И как я только об этом не подумал! О чем не подумал проф. Ах?



Еще несколько тестов. Чтобы помочь вам в развитии «феномена Ах», приведем еще пять задач-тестов:

1. Можете ли вы бросить на пол с высоты 1 м картонную спичку так, чтобы она упала на ребро?

2. Рабочие смешивают известь с песком и цементом для заделки швов между бетонными блоками в фундаменте здания. В одном из блоков узкий прямоугольный канал глубиной 2 м. В этот канал случайно падает вывалившийся из гнезда птенец. Отверстие слишком узко, чтобы в него можно было просунуть руку, впрочем, достать до дна канала все равно было бы невозможно. Не могли бы вы предложить простой и надежный способ, позволяющий в целости и сохранности извлечь птенца из канала в бетонном блоке?

3. К крюку в потолке на нити длиной около 2 м подвешена кофейная чашка. Можете ли вы перерезать нить ножницами посредине так, чтобы чашка не упала на пол? Держать нить, пока вы ее перерезаете, или чашку запрещается.

4. В плотине недостает одного кирпича. Через образовавшуюся брешь размером 5 см $\times$ $\times$ 20 см льется вода. Обнаруживший течь голландец имеет при себе пилу и цилиндрический деревянный шест диаметром 50 мм. Как ему лучше всего распилить шест, чтобы заткнуть брешь?

5. Нижняя часть винной бутылки имеет форму цилиндра. Высота ее составляет 3/4 высоты бутылки. Верхняя четверть бутылки, состоящая из горлышка и плавного перехода к нижней части, имеет неправильную форму. В бутылку до середины ее налита жидкость. Открывать бутылку запрещается. Можете ли вы, пользуясь только линейкой, точно определить, какая часть объема бутылки заполнена жидкостью?

Перевод с английского Ю. Данилова

Иллюстрации канадского графика Дж. Глена

Олимпиады

Задачи заключительного тура LIV Московской математической олимпиады

8 класс

1. Докажите, что если $a>b>c$, то

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)>0.$$

И. Сергеев

2. По данным точкам A и B на плоскости требуется построить точку C, симметричную точке A относительно B. Можно ли это сделать, пользуясь одним лишь циркулем неизменного раствора r, если а) $AB<2r$, б) $AB\geqslant 2r$?

И. Сергеев

3. Для круглосуточной охраны объекта нужно установить дежурство на посту в две смены: дневную и ночную. Дежурный может отработать дневную или ночную смену, или же сутки подряд. В первом случае ему предоставляется отдых не менее 1 суток, во втором — не менее 1,5 суток, в третьем — не менее 2,5 суток. Какое наименьшее количество дежурных необходимо при этих условиях?

И. Сергеев

4. Имеется шесть одинаковых с виду гирек массой 1, 2, 3, 4, 5 и 6 г соответственно. На гирьках сделали надписи «1 г», «2 г», «3 г», «4 г», «5 г» и «6 г». Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без других гирек проверить правильность всех шести надписей?

С. Токарев

5. Между двумя странами установлено авиационное сообщение так, что любые два города из разных стран соединены ровно одним авиарейсом и только в одну сторону, причем из каждого города можно куда-нибудь вылететь. Докажите, что найдутся четыре города A, B, C, D, которые можно посетить, перелетая непосредственно из A в B, из B в C, из C в D, из D в A.

М. Гринчук

9 класс

1. Решите уравнение

$$(1+x+x^2)(1+x+\ldots+x^{10})=(1+x+\ldots+x^6)^2.$$

А. Галочкин

2. Колоду из а) 36, б) 54 карт фокусник разложил на несколько кучек и на всех картах каждой кучки написал число, равное количеству карт в этой кучке. Затем он специальным образом перемешал карты, опять разложил их на кучки и написал на каждой карте справа от первого числа — второе, равное количеству карт в новой кучке. Мог ли фокусник добиться того, чтобы среди пар чисел, записанных на картах, не было одинаковых пар, но для каждой пары (m, n) можно было найти пару (n, m)?

А. Скопенков

3. Докажите, что в правильном 12-угольнике $A_1A_2\ldots A_{12}$ диагонали A_1A_5, A_2A_6, A_3A_8 и A_4A_{11} пересекаются в одной точке.

С. Токарев

4. Дан график функции $y=\frac{1}{x}$ при $x>0$, а оси координат — стерты. Как с помощью циркуля и линейки восстановить стертые оси, если даже их направления заранее не известны?

И. Сергеев

5. В клетках таблицы 15×15 расставлены ненулевые числа так, что каждое из них равно произведению всех чисел, стоящих в соседних клетках (соседними называем клетки, имеющие общую сторону). Докажите, что все числа в таблице положительны.

С. Токарев

10 класс

1. Функция $f(x)$ при каждом значении $x\in(-\infty, \infty)$ удовлетворяет равенству

$$f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot f(1-x)=1.$$

а) Найдите $f(0)$ и $f(1)$.

б) Найдите все такие функции $f(x)$.

Б. Кукушкин

2. Какое количество n из 16 одинаковых биллиардных шаров можно расположить в пространстве так, чтобы каждый шар касался ровно трех других? Перечислите все возможные значения n.

А. Спивак

3. В данный угол вписаны два непересекающихся круга. Треугольник ABC расположен между кругами так, что его вершины лежат на сторонах угла, а равные стороны AB и AC касаются соответствующих кругов. Докажите, что сумма радиусов кругов равна высоте треугольника, опущенной из вершины A.

И. Шарыгин

4. Куб размером $10\times10\times10$ сложен из 500 черных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие друг к другу гранями, имеют различные цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков так, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1\times1\times10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, не хватало ровно одного кубика. Докажите, что число вынутых черных кубиков делится на 4.

А. Спивак

5. Колоду из 54 карт фокусник разложил на несколько кучек, а зритель на всех картах каждой кучки написал число, равное количеству карт в этой кучке. Затем фокусник специальным образом перемешал карты и еще

раз разложил их на кучки, а зритель написал на каждой карте еще одно число, равное количеству карт в новой кучке, и т. д. При каком наименьшем количестве раскладок фокусник мог добиться того, чтобы на разных картах оказались разные множества чисел (как бы ни располагал их зритель на карте)?

А. Скопенков

11 класс

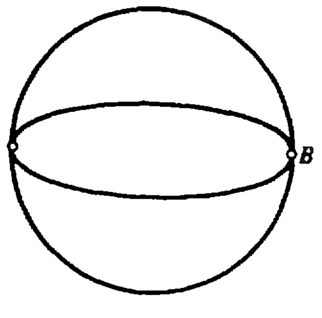
4. Между какими двумя девятками в записи $\underbrace{199...991}_{1991\ \text{девятка}}$ нужно поставить знак:

а) «+», чтобы полученная сумма была наименьшей;

б) «×», чтобы полученное произведение было наибольшим?

А. Галочкин, С. Конягин

2. На рисунке дана ортогональная проекция земного шара с экватором (A и B — общие



точки проекции экватора с окружностью). Как с помощью циркуля и линейки найти проекцию северного полюса?

А. Макаров

3. Докажите, что в правильном 54-угольнике найдутся четыре диагонали, не проходящие через его центр и пересекающиеся в одной точке (отличной от вершины).

С. Токарев

4. Совет из 2000 депутатов решил утвердить государственный бюджет, содержащий 200 статей расходов. Каждый депутат подготовил свой проект бюджета, в котором указал по каждой статье максимально допустимую, по его мнению, величину расходов, проследив за тем, чтобы общая сумма расходов не превысила заданную величину S. По каждой статье совет утверждает наибольшую величину расходов, которую согласны выделить не менее k депутатов. При каком наименьшем k можно гарантировать, что общая сумма утвержденных расходов не превысит S?

И. Сергеев

5. На прямоугольном экране размером $m \times n$, разбитом на единичные клетки, светятся более $(m-1)(n-1)$ клеток. Если в каком-либо квадрате 2×2 не светятся три клетки, то через некоторое время погаснет и четвертая. Докажите, что тем не менее на экране всегда будет светиться хотя бы одна клетка.

А. Чӑсовских

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике 1991 года

Много лет на базе физического факультета МГУ им. М. В Ломоносова проводится Московская городская олимпиада по физике для школьников 8—11 классов. Из ее победителей формируется команда г. Москвы на Всесоюзную олимпиаду.

Московская городская олимпиада по физике проводится в четыре этапа:

1. Районный тур. В нем участвует ежегодно до 4 тысяч школьников.

2. I городской тур. На этот тур приглашаются около четверти участников районных туров, показавших наиболее высокие результаты.

3. II городской тур. Это наиболее сложный этап. Задачи, которые предлагаются на этом туре, требуют умения находить решения сложных нестандартных физических ситуаций.

4. И наконец, последний этап — экспериментальный тур. На него приглашаются претенденты на дипломы I и II степени (около 40 человек).

Все задачи для олимпиады составляются научными сотрудниками, преподавателями, аспирантами и студентами физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, входящими в состав жюри олимпиады. В работе жюри участвуют также научные сотрудники из других вузов и академических институтов Москвы (МИРЭА, ФИАНа и др.).

Награждение победителей олимпиады происходит на «Дне открытых дверей» на физическом факультете МГУ. В последние два года победители награждаются также специальными призами Физического общества СССР. Недавно по инициативе Физического общества СССР и жюри Московской олимпиады решено проводить соревнования по физике между победителями Московских олимпиад и иностранными школьниками. В отличие от традиционных Международных олимпиад, в которых принимают участие одновременно школьники из многих стран мира, такие соревнования будут парными: советско-финские, советско-венгерские и т. д. Это позволит значительно большему числу московских школьников принять участие в международных соревнованиях. Первый такой турнир (советско-финский) состоится в октябре-ноябре 1991 года в Москве, а ответный — в апреле 1992 года в Финляндии.

Ниже мы предлагаем вам попробовать свои силы в решении некоторых задач, предлагавшихся на олимпиаде в этом году.

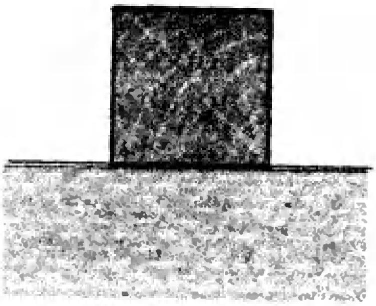


Рис. 1.

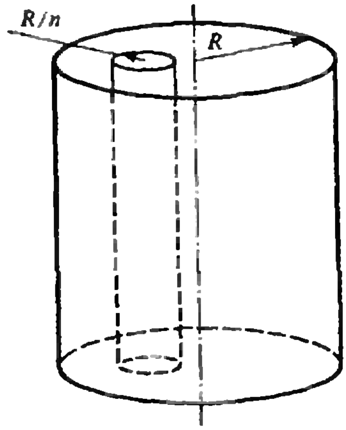


Рис. 3.

9 класс

1. Тело массой m находится на дне сосуда, заполненного очень вязкой жидкостью. Ему сообщили скорость v_0, направленную вертикально вверх. Найдите время, через которое тело опустится на дно, если сила сопротивления, действующая на него со стороны жидкости, равна $\vec{F}=-\alpha\vec{v}$, где $\vec{v}$ — скорость тела, $\alpha \gg mg/v_0$. Тело при движении все время находится в жидкости. Архимедовой силой пренебречь. (I тур)

2. Во время сильного снегопада лыжник, бегущий по полю со скоростью $v=20$ км/ч, заметил, что в рот ему попадает $N_1=50$ снежинок в минуту. Повернув обратно, он обнаружил, что в рот попало $N_2=30$ снежинок. Оцените дальность прямой видимости в снегопад, если площадь рта спортсмена $S=24$ см^2, а размер снежинки $l=1$ см. (I тур)

3. Однородное бревно квадратного сечения размером $a\times a$ и длиной $L\gg a$ в исходном состоянии держат параллельно поверхности воды так, что оно касается воды своей гранью (рис. 1). Плотность бревна равна половине плотности воды. Бревно отпускают. Найдите количество теплоты, которое выделится, пока система не придет в равновесие. (II тур)

10 класс

4. Заряженная частица совершает одномерное движение в постоянном электрическом поле. Свое движение частица начинает из точки x_0 с начальной скоростью v_0. Может ли зависимость ее координаты от времени иметь вид

$$x(x_0, v_0, t)=x_0+v_0t+a(x_0)t^3,$$

где $a(x_0)$ — функция, зависящая только от x_0 и не обращающаяся тождественно в нуль? (I тур)

5. Какое количество теплоты выделится в схеме, изображенной на рисунке 2, при переключении ключа из левого положения в правое? Суммарный заряд на обкладках *1, 2, 3* вначале равнялся нулю. Емкости всех конденсаторов равны C. (II тур)

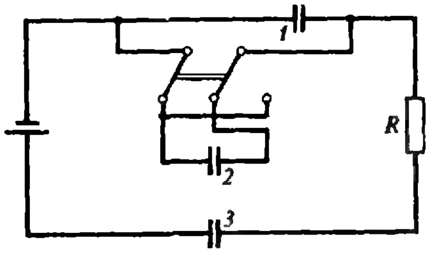


Рис. 2.

11 класс

6. Длинная сверхпроводящая цилиндрическая катушка индуктивностью L и радиусом R, по которой течет ток I, замкнута накоротко (рис. 3). Витки катушки намотаны густо, так что можно считать, что поле внутри катушки однородно, а вне ее равно нулю. Какую работу нужно совершить, чтобы внести в катушку из бесконечности сверхпроводящий цилиндрический образец, радиус которого равен R/n, а длина равна длине катушки? Оси катушки и образца параллельны. (I тур)

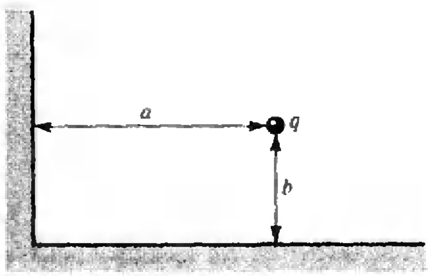


Рис. 4.

7. Две проводящие полуплоскости образуют прямой угол. Точечный заряд q находится на расстояниях a и b от каждой из сторон угла (рис. 4). Найдите энергию взаимодействия заряда с проводниками. (II тур)

Публикацию подготовил В. Степанюк

Испанская математическая олимпиада 1990 года

Первый день

1. Пусть a, b и c — стороны прямоугольного треугольника. Докажите, что если эти числа — целые, то их произведение abc делится на 30.

2. Полусфера лежит на столе плоской частью вниз, ее радиус равен 1. Шесть сфер радиуса r расположены так, что каждая из них касается полусферы, стола и двух соседних сфер. Найдите r.

3. Уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$, $c\neq0$, имеет три различных корня, составляющих арифметическую прогрессию. Найдите b и c как функции от a.

4. Последовательность $\{a_n\}$, $n\geq1$, комплексных чисел определяется соотношением

$$a_n=(1+i)\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\dots\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right).$$

Существует ли натуральное число m такое, что

$$\sum_{n=1}^{m}|a_n-a_{n+1}|=1990?$$

Второй день

5. В окружность вписаны правильные пятиугольник, шестиугольник и десятиугольник. Покажите, что треугольник, который имеет своими сторонами стороны этих многоугольников, является прямоугольным.

6. Определим числа A_n, как произведение всех натуральных чисел, кратных n и не больших 1000. (Например, $A_3=3\cdot6\cdot9\dots999$). Найдите наибольший общий делитель чисел $A_2, A_3, \dots, A_{31}, A_{32}$.

7. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\cos a_1x+\cos a_2x,$$

где a_1 и a_2 — вещественные числа, отличные от нуля. Покажите, что существует по крайней мере одно число x_0 такое, что $f(x_0)<0$.

8. Пусть BM — медиана, BD — биссектриса треугольника ABC, и BN — прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы (точки M, D и N лежат на отрезке AC). Покажите, что

$$\frac{AN}{NC}=\frac{c^2}{a^2},$$

где $a=BC$, $c=AB$ — длины сторон треугольника ABC.

Публикацию подготовил А. Савин

Ответы, указания, решения

[redacted]еты в струе и наяву

1. В опыте Галилея мушкетная пуля и ядро достигали земли практически одновременно. Скорость тел вблизи земли около 30 м/с, время падения около 3,5 с. Однако, если бы Галилей фиксировал интервалы времени более короткие, скажем порядка 10^{-2} с, он заметил бы, что мушкетная пуля чуть-чуть отстает от ядра: относительный вклад сопротивления воздуха для падающей пули больше, чем для ядра.

2. В $\sqrt[3]{1,5}\approx1,15$ раза.

5. Если, не изменяя течение струи, добавить в нее небольшое количество красителя, например чернила или марганцовку, то видно, что под шариком течение носит хаотический, турбулентный характер.

6. Коэффициент C_x сильно зависит от ориентации ложки относительно направления струи.

7. Если в воздухе с большой высоты уронить шарик для настольного тенниса, то за время $\tau\approx2-3$ с устанавливается равновесное падение со скоростью около 8 м/с.

[redacted]ика, Незнайка и другие

1. Описано явление диффузии газов.

2. Происходит испарение. А при испарении поверхность жидкости покидают молекулы, обладающие самыми большими скоростями. Они уносят с собой энергию. Температура жидкости понижается.

3. Находящийся на Земле наблюдатель не может указать на ее вращение, ведь он вращается вместе с ней. И подобно тому, как пассажир в поезде видит из окна движущиеся деревья, столбы, дома и т. п., так и находящийся на вращающейся Земле наблюдатель видит вращение небесных тел.

4. У воды теплоемкость гораздо больше, чем у воздуха; чтобы ее нагреть даже на 1 градус, требуется большое количество тепла. Поэтому вода медленно нагревается, но и так же медленно остывает. К утру воздух сильно остывает, и оказывается обычно гораздо холоднее воды. Так что дело происходило, скорее всего, утром.

5. Происходит преломление световых лучей при переходе из воды в воздух.

6. Расстояние от Земли до Солнца почти в 400 (!!) раз больше, чем до Луны. Поэтому значительно приблизившись к Луне (а видимые размеры ее при этом, как при приближении к любому далекому предмету, увеличиваются), мы лишь на ничтожно малое расстояние (в относительных единицах) приближаемся к Солнцу и продолжаем видеть его таким же, как и на Земле.

7. Солнце — обычная звезда, как и миллионы других на небе. Однако это самая близкая к нам звезда. Ее свет, рассеянный атмосферой Земли, не позволяет нам видеть звезды днем. На Луне атмосферы нет, и Солнце —

лишь более яркий круг по сравнению с точками-звездами на темном фоне.

8. Предоставим слово Знайке: «...Если веса не будет, вот как сейчас, то нижние слои воды, нагревшись, не станут легче и не поднимутся вверх, а останутся внизу и будут нагреваться до тех пор, пока не превратятся в пар. Этот пар, расширяясь от нагревания, начнет поднимать находящуюся над ним холодную воду, в результате чего она пузырем вылезет из чайника...

Из этого следует, что кипятить воду в условиях невесомости надо... в таком сосуде, крышка которого закрывается плотно и не пропускает ни воды, ни пара».

Теперь легко понять, что огонь в невесомости гореть не будет, ибо горячий воздух не поднимется вверх и не будет притока кислорода.

анные школьные задачи по физике

1. Перейдем в систему отсчета, которая движется горизонтально со скоростью, равной скорости ветра. В этой системе отсчета воздух неподвижен и капли падают вертикально. Скорость падения капель $v_к$ зависит только от их размера, и ее можно считать во всех случаях одинаковой. Получаем (см. рис. 1): $\operatorname{tg}\alpha_1=$

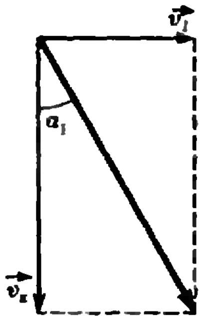


Рис. 1.

$=v_1/v_к$, $\operatorname{tg}\alpha_2=v_2/v_к$, откуда

$$v_2=v_1\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1}=3v_1=30\ \text{м/с}.$$

2. Для упрощения расчетов применим следующий прием. Заснимем движение тела на кинопленку, а затем прокрутим пленку наоборот. Получим равноускоренное движение из состояния покоя, за первую секунду которого ($\tau=1$ с) тело проходит путь $l_5=5$ м. Нам надо найти путь l за четвертую секунду этого «обращенного» движения:

$$l=\frac{a(4\tau)^2}{2}-\frac{a(3\tau)^2}{2}=7\frac{a\tau^2}{2}=7l_5=35\ \text{м}.$$

3. В системе отсчета, связанной со вторым телом, первое тело движется с постоянным ускорением $a=a_1-(-a_2)=a_1+a_2$, направленным противоположно начальной скорости $v_0=v_{01}-(-v_{02})=$ $=v_{01}+v_{02}$. До разворота это тело пройдет расстояние $L=v_0^2/2a$. Тела встретятся в том случае, если начальное расстояние между телами S меньше или равно L:

$$S\leqslant\frac{(v_{01}+v_{02})^2}{2(a_1+a_2)}=150\ \text{м}.$$

4. Траектория мяча после удара о стенку (линия BC на рис. 2) симметрична его траектории

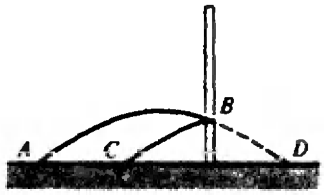


Рис. 2.

в отсутствие стенки (линия BD). Расстояние AD равняется дальности свободного полета мяча

$$S_0=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\approx 20{,}4\ \text{м}.$$

Для расстояния AC получаем

$$S=L-(S_0-L)=2L-S_0\approx 9{,}6\ \text{м}.$$

5. В системе отсчета, связанной с блоком, скорость груза равна $v_{21}=v_2-(-v_1)=v_2+v_1$. Получаем

$$\omega=\frac{v_1+v_2}{R}=25\ 1/\text{с}.$$

6. Запишем условие равновесия поршня в начальном и конечном состояниях:

$$p_1S-mg-p_0S=0,$$
$$p_2S-mg-p_0S-F=0,$$

где m — масса поршня, p_0 — атмосферное давление, F — приложенная к поршню сила. Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$F=p_2S-p_1S$$

(сила давления возрастает настолько, чтобы скомпенсировать силу F). Давление p_2 найдем из уравнения изотермического процесса

$$p_1V_1=p_2(V_1-S\Delta h).$$

Получаем

$$F=\frac{S\Delta h}{V_1-S\Delta h}p_1S=6\text{Н}.$$

7. Условие равновесия свободного вертикального поршня заключается в равенстве давлений в обеих частях сосуда. Обозначая начальное давление в системе p, а конечное p', запишем газовые законы для каждого из газов:

$$pSL=p'S(L-l),$$
$$\frac{pSL}{T}=\frac{p'S(L+l)}{T'},$$

где T и T' — начальная и конечная температуры, S — площадь поршня. Поделив уравнения почленно, найдем T':

$$T' = T\frac{L+l}{L-l} = 320\ \text{К},\ t' = 47\ ^\circ\text{C}.$$

8. За время τ через сечение трубы пройдет объем газа $V = Sv\tau$. Подставляя V в уравнение состояния газа

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

найдем скорость течения:

$$v = \frac{mRT}{MpS\tau} = 2\ \text{м/с}.$$

9. Конечное давление p' равно сумме парциальных давлений p_1 и p_2, создаваемых в объеме сосуда одноатомным и двухатомным газами. Найдем эти давления, а также начальное давление p_0, из уравнений состояния

$$p_0V = \frac{m}{M_2}RT,\ p_1V = \frac{m_1}{M_1}RT,\ p_2V = \frac{m_2}{M_2}RT,$$

где $m_1 = m_2 = m/2$, $M_1 = M_2/2$. Из этих уравнений получаем

$$p' = p_1 + p_2 = 1{,}5\,p_0.$$

10. При неравномерном нагревании сосудов газ по соединительным трубкам перетекает из одного сосуда в другой, благодаря чему выравнивается давление. Запишем уравнения состояния для газов в сосудах до и после нагревания:

$$pV = \frac{m}{M}RT,\ p'V = \frac{m_1}{M}RT_1,$$

$$p'V = \frac{m_2}{M}RT_2,\ p'V = \frac{m_3}{M}RT,$$

где p' — конечное давление в системе. Выразив массы газов и подставив их в уравнение сохранения полной массы

$$m_1 + m_2 + m_3 = 3m,$$

получим

$$\frac{p'}{p} = \frac{3}{T}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T}\right)^{-1} = 2.$$

11. Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2},$$

где в правой части равенства стоит полная энергия колебаний, равная потенциальной энергии в крайнем положении (при $x = A$). Учитывая, что $k/m = \omega^2$, получим

$$A = \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right)^{1/2} = 5\ \text{см}.$$

12. Вместо внешней силы mg на маятник действует результирующая сила $F = mg + qE$. Записав эту силу в виде $F = mg'$, где $g' = g + qE/m$, видим, что g' играет роль эффективного ускорения свободного падения, через которое будет выражаться частота колебаний математического маятника: $\omega = \sqrt{g'/l}$. Отношение ω к $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ равно

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{1 + \frac{qE}{mg}} = 3.$$

13. Новую емкость C_2 конденсатора в контуре найдем из уравнения $1/C_2 = 1/C_1 + 1/(C_1/3)$. По сравнению с начальной величиной C_1 емкость уменьшится в 4 раза, т. е. частота $\nu = 1/2\pi\sqrt{LC}$ возрастет в 2 раза.

14. По условию $q^2(t)/2C = Li^2(t)/2$, где $q(t) = q_0\cos\omega t$, $i(t) = q'(t) = -q_0\omega\sin\omega t$. Учитывая, что $\omega = 1/\sqrt{LC}$, получаем $\operatorname{tg}\omega t = 1$, т. е. $t = \pi/4\omega = \pi\sqrt{LC}/4 \approx 31{,}4$ мкс.

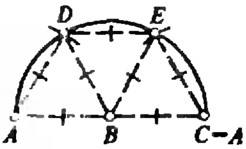
15. Условие минимума имеет вид $L_2 - L_1 = \lambda/2 + k\lambda$, где $k = 0, 1, \ldots$ Это условие выполняется при частотах колебаний, равных $\nu = v/\lambda = v(k+1/2)/(L_2 - L_1)$. Минимальная возможная частота равна $\nu_{min} = v/2(L_2 - L_1) = 1$ кГц.

[redacted]чи заключительного тура LIV Московской математической олимпиады

8 класс

1. Левая часть неравенства равна $(a-b)(b-c)\times$ $\times(a-c)$.

2. Ответ: а), б) можно. Указание. а) При $AB = r$ построение показано на рисунке 3, *а*. При $AB \neq r$ см. рисунок 3, *б*. (На этом рисунке видно, как последовательно находятся точки D, E, E', D' и $A' = C$.)



а)

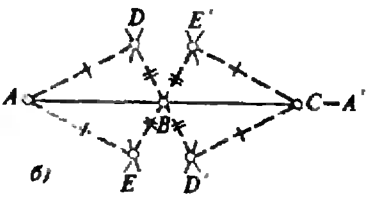


Рис. 3.

б) при $AB \geqslant 2r$ строим сеть вершин правильных треугольников (рис. 4), пока две из них — точки D и E — не попадут в круг с центром B и радиусом r.

3. Ответ: 4. Указание. Четверо дежурных обеспечат охрану, если каждый из них будет дежурить сутки, а затем трое суток отдыхать. Троих дежурных не хватит. Для доказательства достаточно отметить три обстоятельства: 1) два или больше суточных дежурств не могут идти подряд; 2) если есть хотя бы одно суточное дежурство, то среди следующих пяти смен (дневных и ночных) обязательно должны быть два суточ-

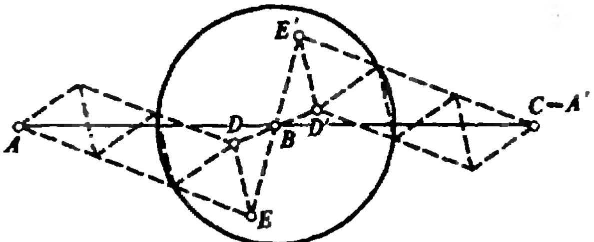


Рис. 4.

ных дежурства; 3) если вообще нет суточных дежурств, то трех дежурных хватит не больше, чем на 4 смены.

4. Достаточно проверить два соотношения:

$$x_1+x_2+x_3=x_6,\quad x_1+x_6<x_3+x_5,$$

где через x_k обозначена масса гирьки с надписью «kг».

5. Указание. Пусть $A_1, A_2, \ldots A_n$ — города первой страны, а M_i — множество тех городов второй страны, в которые есть рейс из A_i. Из условия следует, что не существует города второй страны, который принадлежал бы всем M_i. Поэтому существуют такие k и l и города B_k и B_l, что $B_k\in M_k$, $B_l\in M_l$, $B_k\notin M_l$, $B_l\notin M_k$. Но тогда условию задачи удовлетворяют города A_k, B_k, A_l и B_l.

9 класс

1. Ответ: -1; 0. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(x^3-1)(x^{11}-1)=(x^7-1)^2,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

2. Ответ: да. Указание. а) Напишем на всех 36 картах все пары чисел (m, n), показывающие номера строк и столбцов 36 клеточек, отмеченных крестиками в таблице на рисунке 5, *а*. При первой раскладке будем объединять в одну кучку карты с одинаковыми номерами строк — всего получим 8 кучек по 1, 2, 3, ..., 8 карт в каждой. При второй раскладке будем, аналогично, объединять в кучки карты с одинаковыми номерами столбцов.

б) Поступим так же, как в пункте а) в соответствии с таблицей на рис. 5, *б*; получим

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								×
2							×	×
3						×	×	×
4					×	×	×	×
5				×	×	×	×	×
6			×	×	×	×	×	×
7		×	×	×	×	×	×	×
8	×	×	×	×	×	×	×	×

а)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	×	×	×	×	×	×	×	×
2	×	×		×		×	×	×
3	×			×	×	×	×	×
4	×	×	×	×	×	×	×	×
5	×		×	×			×	×
6	×	×	×	×			×	×
7	×	×	×	×	×	×		×
8	×	×	×	×	×	×	×	×

б)

Рис. 5.

при первой раскладке — 8 кучек по 1-й карте, 3 кучки по 2 карты, 2 кучки по 3 карты, 2 кучки по 4 карты и по одной кучке из 5, 6, 7 и 8 карт соответственно.

3. Решение этой задачи (см. задачу М1291) будет опубликовано позже.

4. Ответ: Проведите прямую l через середины двух параллельных хорд. Биссектрисы углов между этой прямой и хордами параллельны осям координат. Возьмите другую пару параллельных хорд и проведите через их середины прямую l_1. Прямые l и l_1 пересекаются в начале координат.

Указание. Докажите утверждения, высказанные в ответе, с помощью теоремы Виета.

5. Если заменить все числа в указанной таблице числами ± 1 в соответствии со знаками исходных чисел, то таблица по-прежнему будет удовлетворять условию задачи. Таблицу $m\times n$, в которой расставлены числа ± 1 и каждое число равно произведению соседей, назовем пригодной. Докажем, что любая пригодная таблица $m\times 15$, где $m=1$, 3, 7, 15, заполнена одними лишь единицами, т. е. тривиальна.

Действительно, непосредственно проверяется, что пригодная таблица 1×15 тривиальна: она полностью задается каким-нибудь из крайних чисел, одно из которых обязательно равно 1. Допустим, что существует пригодная нетривиальная таблица 15×15. Если она симметрична относительно средней строки, то в этой строке каждое число совпадает с произведением соседей по горизонтали и, значит, как было отмечено выше, равно 1. Тогда над этой строкой располагается пригодная таблица 7×15, причем нетривиальная (иначе вся таблица тривиальна). Если же таблица 15×15 не симметрична относительно средней строки, то каждое число в верхней ее части размером 7×15 умножим на число, симметричное относительно средней строки. Полученная таблица 7×15 будет пригодной и опять нетривиальной (иначе вся таблица симметрична). Итак, из существования пригодной нетривиальной таблицы 15×15 мы вывели существование такой таблицы 7×15. Найдем, аналогично, пригодную нетривиальную таблицу 3×15, а затем и 1×15. Противоречие.

10 класс

1. Ответ: а) $f(0)=2$; $f(1)=-2$.

б) $f(x)=\begin{cases}1/(\frac{1}{2}-x) & \text{при } x\neq\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2} & \text{при } x=\frac{1}{2}.\end{cases}$

Указание. Подставьте в данное соотношение $(1-x)$ вместо x, после чего найдите $f(x)$ из полученной системы.

2. Ответ: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16. Указание. Если n шаров удовлетворяют условию задачи, то удвоенное число точек касания равно $3n$. Поэтому n — четно. При $n=4$ шары располагаются так, чтобы их центры оказались в вершинах правильного тетраэдра. При $n=2k$ можно расположить центры k шаров в вершинах правильного k-угольника, а затем приложить

точно такую же цепочку шаров так, чтобы каждый шар одной цепочки касался одного шара другой цепочки.

3. Решение этой задачи (см. задачу М1293) будет опубликовано позже.

4. Решение этой задачи (см. задачу М1294) будет опубликовано позже.

5. Ответ: 3. Указание. При решении 2-й задачи для 9 класса была построена таблица (рис. 3, *б*). Третью раскладку можно осуществить так: берем все 30 карт, которым соответствуют крестики, лежащие на диагонали таблицы и выше нее, и остальные 24 карты. Теперь на каждой карте (m, n) первой группы написаны числа $\{m, n, 30\}$, а на парах второй группы числа $\{m, n, 24\}$. Двух раскладок недостаточно. Для доказательства можно связать с двумя раскладками таблицу $k\times k$, где k — число карт в наибольшей из кучек. Тогда в k-й строке окажется k крестиков, один из которых будет стоять на диагонали. Тогда k-й столбец тоже будет содержать k крестиков, расположенных симметрично крестикам k-й строки.

11 класс

1. Ответ: а) между 996-й и 997-й; б) между 995-й и 996-й.

Указание. Число, содержащее m первых девяток, равно $2\cdot10^m-1$, а оставшаяся часть записи — это число $10^{1992-m}-9$.

а) Сумма $S(m)=2\cdot10^m+10^{1992-m}-9$ удовлетворяет неравенствам $S(996)\leqslant3\cdot10^{996}$, $S(m)\geqslant10\cdot10^{996}$ при $m\geqslant997$ и при $m\leqslant995$.

б) Произведение будет наибольшим при наименьшем значении величины

$$R(m)=18\cdot10^m+10^{1992-m}$$

2. Ответ: Через точку O — середину отрезка AB — проведем перпендикуляр, на котором отложим точку C (проекцию северного полюса) так, чтобы отрезок OC был равен половине хорды, проходящей через точку D и параллельной AB (рис. 6).

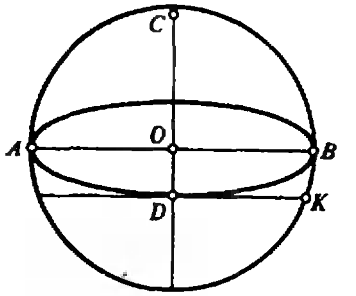


Рис. 6.

3. Решение этой задачи (см. задачу М1291) будет опубликовано позже.

4. Решение этой задачи (см. задачу М1292) будет опубликовано позже.

5. Решение этой задачи (см. задачу М1295) будет опубликовано позже.

[redacted]анные задачи Московской городской олим[redacted]ы по физике 1991 года

1. Решение этой задачи — см. задачу Ф1298 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.

2. $L=\dfrac{2vS}{(N_1+N_2)l^2}=200$ м.

3. $Q=\dfrac{1}{4}\varrho La^3g\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, где ϱ — плотность воды.

4. Не может.

5. $Q=4C\mathscr{E}^2/27$, где $\mathscr{E}$ — ЭДС источника.

6. $A=\dfrac{LI^2}{2(n^2-1)}$.

7. $W=-q^2\dfrac{k}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$,

где $k=1/(4\pi\varepsilon_0)$.

Аховы решения

Тест с веревками. Думаете, можно выполнить задачу, если повиснуть на одной веревке и раскачаться на ней, как Тарзан на лиане? Вы ошибаетесь по двум причинам: во-первых, веревка недостаточно прочна, чтобы выдержать взрослого человека, и, во-вторых, даже если бы веревка не оборвалась под вашим весом, вы все равно не смогли бы дотянуться до другой веревки. Тем не менее картинка дает ключ к правильному решению.

Привязав ножницы к одной веревке, вы можете раскачать их, как маятник. Подтянув другую веревку к маятнику и дождавшись, когда ножницы качнутся навстречу, вы сможете поймать их и связать обе веревки.

Решение этой задачи требует двух необычных идей. Необходимо догадаться, во-первых, что веревки следует раскачать и что, во-вторых, ножницы можно использовать в качестве груза маятника, то есть «не по назначению». Трудности, возникающие у людей при использовании различных устройств и предметов не по назначению, психологи называют специальным термином «функциональная ограниченность». Услыхав о ножницах, мы думаем лишь о том, как разрезать ими веревку, что, разумеется, не может помочь в решении теста.

Тест с ковром. Поскольку к бутылке нельзя прикасаться ничем, то решить тест сумеет тот, кто догадается, что ковер уже касается бутылки и его можно каким-то образом использовать для того, чтобы сдвинуть ее, например на пол.

Догадка оказывается верной. Действительно, начните скатывать ковер и, когда рулон дойдет до бутылки, аккуратно придерживая его за концы, столкните им бутылку с ковра, не прикасаясь к ней ничем, кроме свернутого в рулон ковра.

Как и в предыдущей задаче, функциональная ограниченность блокирует путь к решению. Мы так убеждены, что ковром можно только покрыть пол, и упускаем из виду, что ковром можно столкнуть бутылку.

Тест с газетой. Вы сумеете решить тест, если догадаетесь, что два человека, стоящие на газетном листе и разделенные дверью, не могут прикоснуться друг к другу. Просуньте под дверь лист газеты, встаньте на него по одну сторону от двери, а ваш приятель пусть встанет на него по другую сторону от двери. Дверь не позволит вам коснуться друг друга, пока вы не сойдете с газетного листа.

Тест с теннисным мячом. Решению теста препятствует неявно принимаемое допущение о том, что мяч нужно бросить горизонтально. В действительности ничто не мешает бросить мяч вертикально. Тогда, поднявшись на определенную высоту, он остановится, после чего начнет двигаться обратно.

Другое решение — бросить мяч так, чтобы он катился вверх по склону холма. Такое решение можно было бы заранее исключить, потребовав, чтобы мяч находился в воздухе, но поскольку в условии задачи это не оговорено, второе решение вполне законно.

1. Чтобы картонная спичка упала на ребро, ее нужно согнуть посредине.
2. Нужно осторожно подсыпать песок в канал до тех пор, пока он не наполнится доверху.
3. Сделайте на нити небольшую петлю, завязав ее у основания, после чего перережьте петлю сбоку.
4. Отрезок шеста длиной в 20 см имеет продольное сечение в форме прямоугольника 20 см $\times$ 5 см, и, следовательно, им можно плотно заделать брешь в плотине.
5. Измерьте линейкой внутренний диаметр бутылки и уровень жидкости в ней. Столб жидкости имеет форму цилиндра, поэтому объем его вычисляется без труда. Переверните затем бутылку. Находящийся в ней воздух образует другой цилиндр, объем которого вы также легко измерите. Сумма объемов даст вам полный объем бутылки, после чего не составит никакого труда вычислить, какую часть объема занимает жидкость.

[redacted]ческий кроссворд
(см. 4-ю с. обложки)

1. Менелай. 2. Видеман. 3. Кратное. 4. Дальтон. 5. Гиперон. 6. Материя. 7. Подобие. 8. Рубидий. 9. Вороной. 10. Архимед. 11. Стрелец. 12. Токамак. 13. Радикал. 14. Леверье. 15. Тихонов. 16. Годунов. 17. Полином. 18. Позитив. 19. Калория. 20. Маховик. 21. Новиков. 22. Семьсот. 23. Деление. 24. Отрезок. 25. Мегафон. 26. Минимум. 27. Ермаков.

[redacted]ант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. Заметим, что число 101 — простое, поэтому, если $101=a+b$, числа a и b взаимно просты, так как при наличии общего делителя d, он являлся бы и делителем суммы. Поэтому всегда выигрывает Малыш, независимо от хода игры.
2. 958 214 134.
3. Сумма чисел в первом ромбе равна $1=1^3$, во втором — $8=2^3$, в третьем — $27=3^3$, в четвертом — $64=4^3$. Гипотеза: в n-м ромбе сумма

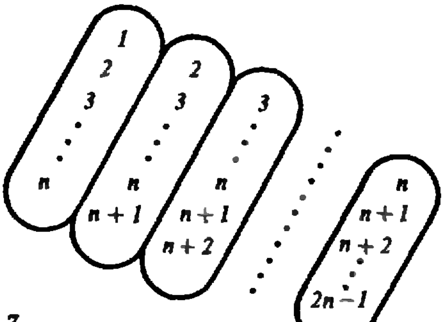


Рис. 7.

равна n^3. Докажем ее. Сумма чисел в верхней левой строчке (рис. 7) равна $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, в следующей строчке — на n больше, в следующей — на $2n$ больше и так далее, в последней — на $n(n-1)$ больше. Поэтому сумма всех чисел равна $(1+2+...+n)n+n+2n+...+(n-1)n=2(1+2+...+n)n-n^2=n^2(n+1)-n^2=n^3$.

4. Проведем среднюю линию PM треугольника ABC, пересекающую прямую BK в точке Q (рис. 8). Треугольники ANK и MNQ равны по

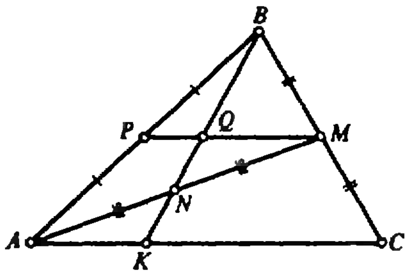


Рис. 8.

трем углам и стороне, поэтому $AK=QM$, а $2PQ=AK$, т. к. PQ — средняя линия треугольника ABK. Итак, $QM=AK=2PM$, поэтому точка Q делит отрезок PM в отношении 1:2. Очевидно в том же отношении делится точкой K отрезок AC.

5. Ерема в день выпивает 1/10 бочки, а Емеля — 1/14. Вместе они выпивают в день $1/10+1/14=6/35$ бочки. Следовательно, бочку они выпьют за $35/6=6-1/6$ дня. Таким образом, шести дней им хватит.

[redacted]йдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 8)

Вопросы и задачи

1. Сообщая им вращательное движение. Круто сваренное яйцо вращается как сплошное целое — заметно быстрее и дольше сырого, в котором жидкое содержимое задерживает вследствие своей инерции движение твердой оболочки.
2. Момент сил трения, вращающий кирпич по часовой стрелке, должен быть равен мо-

менту сил реакции плоскости на кирпич. Отсюда следует, что сила реакции плоскости на правую часть кирпича должна быть больше, чем на левую. Значит, и сила давления правой половины кирпича на плоскость должна быть больше силы давления левой.

3. Рассматривая вращение колеса вокруг точки его соприкосновения с землей, можно увидеть, что к верхней точке обода колеса следует приложить меньшую силу, чем к корпусу телеги, соединенному с осью колеса.

4. Это — пример, иллюстрирующий закон сохранения момента импульса. Прижимая руки к телу, фигуристка уменьшает свой момент инерции и тем самым увеличивает свою угловую скорость.

5. При таком расположении витка момент действующих на него магнитных сил равен нулю и его равновесие будет устойчивым.

6. Во-первых, улучшаются условия захвата, во-вторых, слой материи, намотанной на пробку, увеличивает плечо сил, отвертывающих пробку, в то время как момент сил сцепления пробки со стенками сосуда не изменяется.

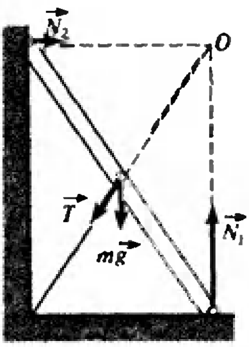


Рис. 9.

7. Если стержень удерживать за середину, необходимо приложить силу, равную силе тяжести стержня. Если же удерживать его за конец, надо создать момент, уравновешивающий момент силы тяжести стержня. Так как плечо удерживающей силы меньше половины длины стержня, то эта сила будет больше силы тяжести.

8. Половинку.

9. Двигатель, установленный посередине машины, обладает меньшим моментом инерции относительно центра масс автомобиля, поэтому для поворота будет нужен меньший момент сил.

10. При правильной стрелковой стойке линия выстрела лежит в одной вертикальной плоскости с центром тяжести стрелка. В этом случае сила отдачи не создает вращательного момента относительно вертикальной оси.

11. Если угол α наклонной плоскости к горизонту таков, что $\operatorname{tg}\alpha < k$, где k — коэффициент трения между плоскостью и мячом, то точка соприкосновения мяча с плоскостью не скользит по ней. Сила тяжести мяча создает момент, который заставляет мяч поворачиваться вокруг этой точки. При $\operatorname{tg}\alpha > k$ мяч катится по наклонной плоскости с проскальзыванием. По абсолютно гладкой поверхности мяч скользил бы не вращаясь.

12. Резкие движения ног конькобежца вызывают появление моментов сил, стремящихся повернуть его корпус вокруг вертикальной оси. Поэтому конькобежец в такт движению ног размахивает руками так, чтобы движением рук создать компенсирующие моменты сил.

13. Моменты сил реакции пола и стены, а также момент силы натяжения веревки относительно точки O равны нулю при любой силе натяжения. Момент силы тяжести относительно той же точки отличен от нуля. Лестница упадет (см. рис. 9).

14. При протекании тока на рамку со стороны

Анкета 9—91

Благодарим всех читателей, приславших свои ответы на вопросы анкеты и пожелания. Нам очень важно знать Ваше мнение о журнале — его содержании и оформлении. Мы продолжаем публикацию нашей анкеты (для новых читателей: она появляется в журнале раз в три месяца).

А теперь, дорогой читатель, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 9—91».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____________

Ваша профессия (если Вы работаете): ____________

Круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____________

магнитного поля действует сила, создающая момент относительно горизонтальной оси. Рамка отклоняется до тех пор, пока этот момент не уравновесится моментом силы тяжести.

Микроопыт

Вращение вокруг осей, соответствующих максимальному и минимальному моментам инерции тела, как показывают и опыт, и расчеты, устойчиво. Вращение же вокруг оси, соответствующей промежуточному значению момента инерции, неустойчиво, и всякое малое возмущение в этом случае приводит к беспорядочному движению.

Анкета 9—91

3. Какие статьи и задачи из номеров 7—9 (номер укажите) Вам понравились? ______

Вы использовали при подготовке к уроку? ______

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ______

5. Какая обложка из номеров 7—9 Вам больше всего понравилась? ______

6. Ваши вопросы и пожелания: ______

Квант

Главный редактор — академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, А. Котова, А. Савин,
В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили.
Е. Барк, Д. Крымов, С. Лухин,
Э. Назаров, Л. Тишков,
П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав редакцией С Давыдова

Корректор М. Дронова

103006, Москва К 6, ул Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

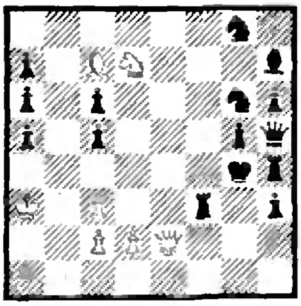
Сдано в набор 24.06.91. Подписано к печати 19.08.91.
Формат 70×100/16 Бумага офс. № 1 ,
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр. отт. 27,09 Уч.-изд. л. 6,87.
Тираж 87 100 экз. Заказ 1084. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Производственного объединения «Периодика»
Министерства информации и печати СССР
142300, г Чехов, Московской обл

Шахматная страничка

ЭВОЛЮЦИЯ ОДНОГО РЕКОРДА

Каждая новая ультрамногоходовая задача берется специалистами под пристальный контроль и время от времени кто-нибудь бьет рекорд. Вот один интересный пример эволюции макси-рекорда.



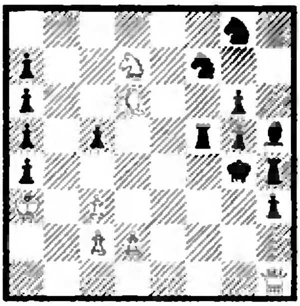
В. Иоргенсен, 1976 г.
Мат в 200 ходов

1. Фе6+Лf5 2. Сh2 Крf3 3. Фе3+ Крg2 4. Фg1+ (если ходы черных единственные, то для экономии места мы их опускаем) **5. Фf1+ Крg4! 6. Фе2+ 7. Фе6+ 8. Крb2! Крf3**, и далее всякий раз темп выигрывается маневром ферзя.

14. Крс1 20. Крd1 а4! 21. Крс1 27. Крd1 а5 28. Крс1 34. Крd1 а6 41. Крd1 а3 48. Крb1! 54. Кра2 60. Кр:а3 66. Крb2 72. Крс1 78. Крd1 а4 85. Крd1 а5 92. Крd1 а3 111. Кр:а3 129. Крd1 а4 136. Крd1 с4! 137. Крс1! 140. Фf1+ Kре4! 141. Ф:с4+ 142. Фf1+ Крg4! 144. Фе6+ 145. Крd1 с5 146. Крс1! 152. Крd1 с4 153. Крс1 156. Фf1+Крg4! 159. Крd1! а3 160. Крс1 166. Крb1 169. Фf1+ Kре4 174. Кра2 Крf3 180. Кр:а3 198. Крd1 Кg (любой ход) **199. Кf6+.**

Известный швейцарский мастер и теоретик эндшпиля А. Шерон заметил, что если в этой позиции белого ферзя переставить на h1, а черную ладью с f3 на f5, то можно «бесплатно» прибавить три хода: **1. Фg1+ Крf3 2. Фf1+ Крg4** (2...Крe4 3. Фd3×) **3. Фе2+Лf3**, и мы приходим к исходной позиции.

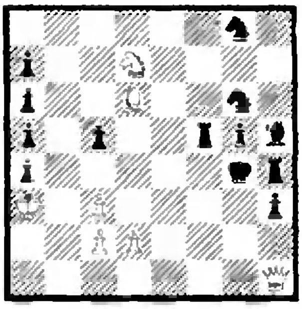
В свою очередь Иоргенсен в позиции Шенона заменил черного ферзя слоном, а пешку h6 передвинул на h7. В результате число ходов было доведено до 210 (за счет лишнего движения пешки h7—h6). Тогда Шерон снова взялся за дело и уже существенно переработал позицию.



А. Шерон, 1979 г.
Мат в 215 ходов

Пешка с6 перескочила на а4, и решение удлинилось, поскольку теперь каждое движение пешки по линии «а» требует от белых более продолжительного маневра, чем при с5 — с4. Белый король последовательно уничтожает все пешки вертикали «а», и игра завершается так: **213. Крd1 с4 214. Кре2** и **215. Ке5 (f6)×.**

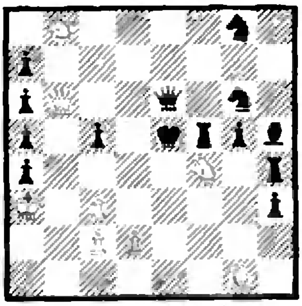
Но на этом история не закончилась. Позицией заинтересовались англичане, и вот что из этого вышло.



К. Морс, Д. Хетерингтон, 1981 г.
Мат в 224 хода

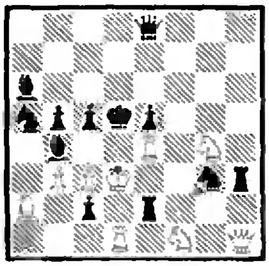
Перестановка черного коня f7 на место пешки g6 препятствует ходу 214. Кре2, и белым приходится совершать еще один маневр: **213... с4 214. Крс1 215. Фе3+ 216. Фg1+ 217. Фf1+ Крe4! 218. Ф:с4+ 219. Фf1+ Крg4! 220. Фе2+ Лf3 221. Фе6+ Лf5 222. Крd1 Кg** (любой ход) **223. Кf6+ Крf3 224. Фе2×.**

Как мы видим, по сравнению с первоисточником, здесь на пешку меньше, а игра удлинилась на 24 хода! Неслабое достижение, но англичане на этом не успокоились. Переставив белого ферзя на b6, слона на g1, коня на b8, черного короля на е5 и добавив белого коня f4 и черного ферзя е6, они в очередной раз побили рекорд.



Решение «подросло» на три хода: **1. Ф:е6+ 2. Сh2** и т. д.

Интересную позицию, претендующую на рекорд, придумал П. Сотников из Бугульмы.



Похоже, здесь белые и черные объявляют друг другу максимальное число беспрерывных шахов. **1. е4+ bc+ 2. bc+ С:с4+ 3. Л:с4+ е4+ 4. Л:е4+ с4+ 5. Л:с4+ Ке4+ 6. Кfе3+ Лh:е3+ 7. К:е3+ Л:е3+ 8. Кр:е3+ cdК+ 9. Ф:d1+ Сd2+ 10. Ф:d2+ К:d2+ 11. Ле4+ Кас4+ 12. С:с4+ К:с4+.** Итак, по 12 шахов с каждой стороны. Можно ли побить этот рекорд?

Е. Гик

70 коп.
Индекс 70465

КУБИЧЕСКИЙ КРОССВОРД

Буквы отгаданного слова размещаются в кубических ячейках кроссворда, начиная с той, на грани которой написан соответствующий номер (в направлении, перпендикулярном к этой грани).

1. *Древнегреческий математик и астроном I—II вв.* 2. *Немецкий физик XIX в.* 3. *Число, делящееся на данное целое без остатка.* 4. *Английский химик и физик XVIII—XIX вв.* 5. *Элементарная частица.* 6. *Основа всех реально существующих в мире свойств, связей и форм движения.* 7. *Геометрическое понятие, характеризующее наличие одинаковой формы у геометрических фигур.* 8. *Химический элемент I группы.* 9. *Русский математик XIX—XX вв.* 10. *Древнегреческий ученый III в. до н. э.* 11. *Зодиакальное созвездие.* 12. *Тип тороидальной магнитной ловушки.* 13. *Математический знак.* 14. *Французский астроном, вычисливший орбиту и положение Нептуна.* 15. *Советский математик.* 16. *Советский математик.* 17. *Многочлен.* 18. *Фотографическое изображение.* 19. *Внесистемная единица количества теплоты.* 20. *Колесо, используемое в качестве инерциального аккумулятора механической энергии.* 21. *Советский математик.* 22. *700.* 23. *Арифметическое действие.* 24. *Множество точек на прямой.* 25. *Приспособление для усиления звучания голоса.* 26. *Наименьшее количество.* 27. *Русский математик XIX—XX вв.*

А. Жуков