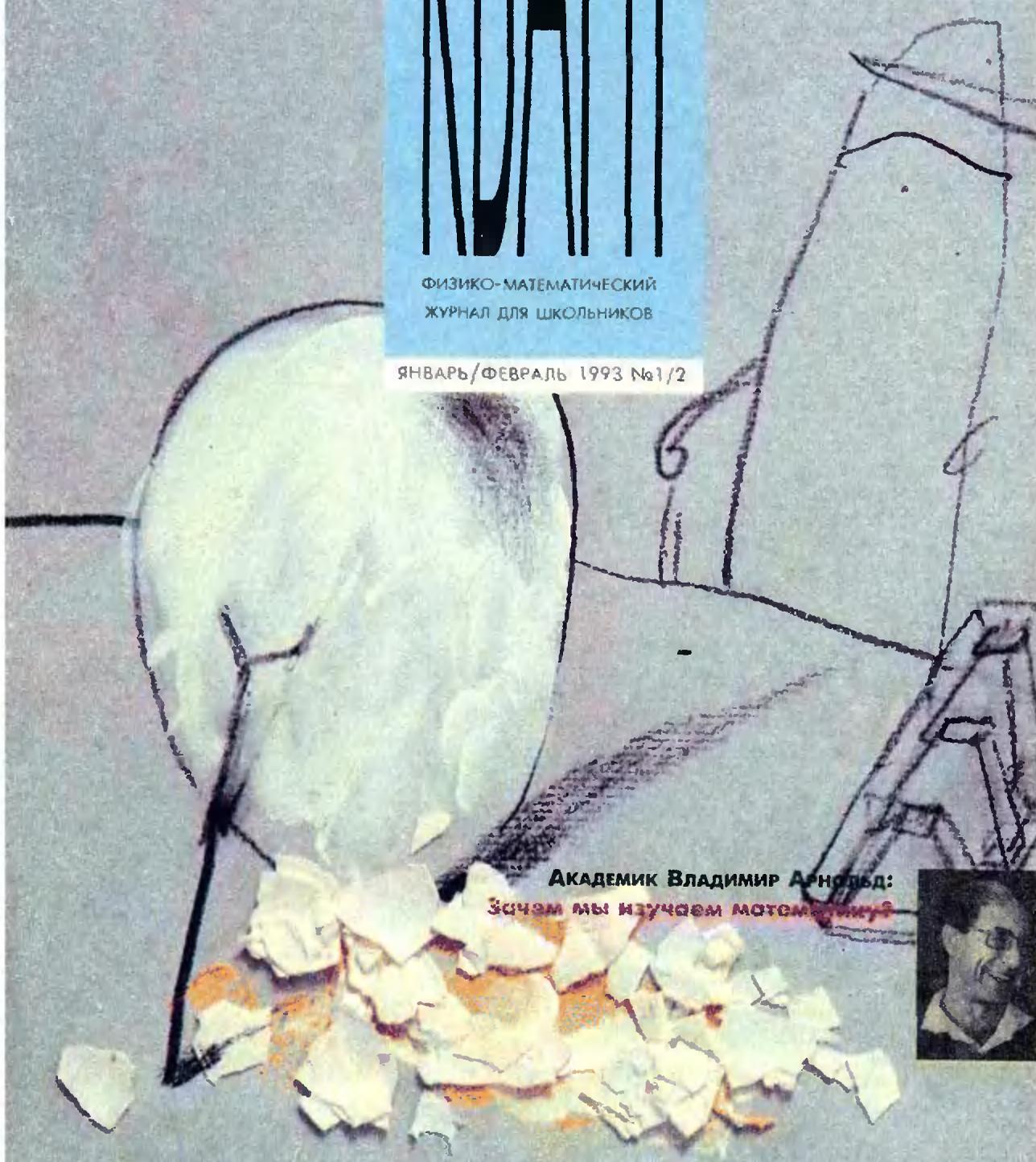


КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

январь/февраль 1993 №1/2



Академик Владимир Арнольд:
Зачем мы изучаем математику?



ПРОСТО, КАК КОЛУМБОВО ЯЙЦО!

98 - 1/2



Искусство и реальность... некоторые их путают, предполагая, что искусство — это копия, слепок с реальности. Отсюда всевозможные недоразумения: так Наполеон III высек хлыстом непонравившуюся ему картину Гюстава Курбе «Купальщицы», как провинившуюся лошадь, а через 50 лет, в начале XX века обезумевшие обыватели будут бросаться с ножом то на «Венеру перед зеркалом» Тициана, то на картину Ильи Репина «Иван Грозный и его сын Ивон». Да и в наше время в конце 80-х г.г. то разобьют молотком в Риме скульптурную группу «Пьета» Микеланджело, то обольют кислотой в Эрмитаже рембрандтовскую «Донаю».

У тех, кто отождествляет жизнь и ее изображение художником, существует четкая концепция истории искусства, которая с точки зрения пространственных решений вкратце сводится к следующему: долгое время художники не умели правильно изображать жизнь, поскольку не знали прямой перспективы. Поэтому, например, все средневековое искусство — это характерное проявление такого неумения, которое художники исправят лишь с появлением в эпоху Возрождения прямой перспективы. Да сих пор почти все учебники по истории искусства полны подобными теориями. Другие точки зрения были известны лишь узкому кругу.

Рассмотрим новгородскую икону XV века «Иоанн Богослов и Прохор на о. Патмос» (одна из композиций большой четырехчастной иконы), здесь все неправильно с точки зрения прямой перспективы. Но что важно — в этих, на первый взгляд, уродствах прослеживается определенная закономерность. Так например, фигуры с одинаковыми горбами непомерно велики по сравнению с пейзажем, а сам пейзаж, представленный горками, подчеркнуто вогнутую форму, их верхние площадки, называемые «лещадками», повернуты к зрителю, что достигается цветом.

В иконографии скалиптические откровения на острове Патмос Иоанн находится в одном пространстве, а Пророк Прохор — в другом. В самих фигурах, складках их одежд совмещается сразу же несколько точек зрения, поворотов, что придает особую динамику. Кроме того, огромный масштаб фигур по сравнению с пейзажем подчеркивает значительность пророчеств Иоанна о конце света. И быть может, если бы масштаб пейзажа во многом исчезла бы и выразительность самой иконы.

Итак и перспективу, которую позже назовут обратной, так, как если бы зритель, находясь в движении, постоянно двигая головой. И в то же время зритель бы обнимает малящегося, вводя его в духовное пространство. И эта перспектива не будет смешиваться с пространством реальности. Эти особенности характерны для иконографии высокого искусства и в другие периоды.



БИБЛИОТЕКА ИМУ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КОЛЛЕДЖ



Научно-популярный

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Выходит с января 1970 года

Учредители - Президиум РАН, «Бюро Квантум».

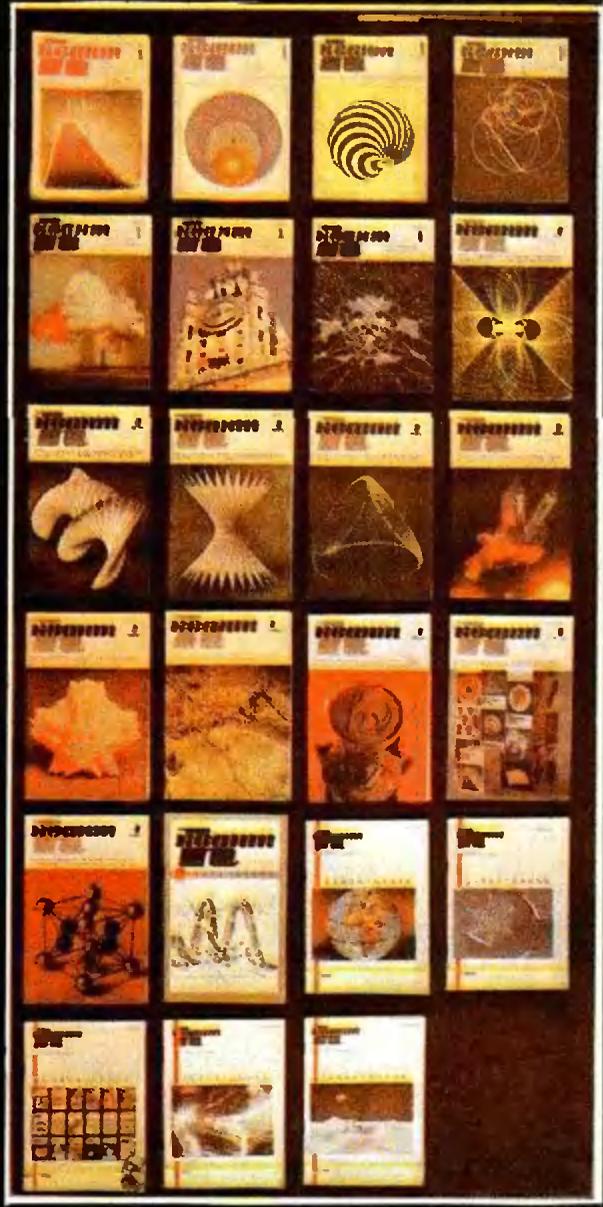
Издатель — НПП «Бюро Квантум» РАН

©1993 «Бюро Квантум» «Квант»

СОДЕРЖАНИЕ

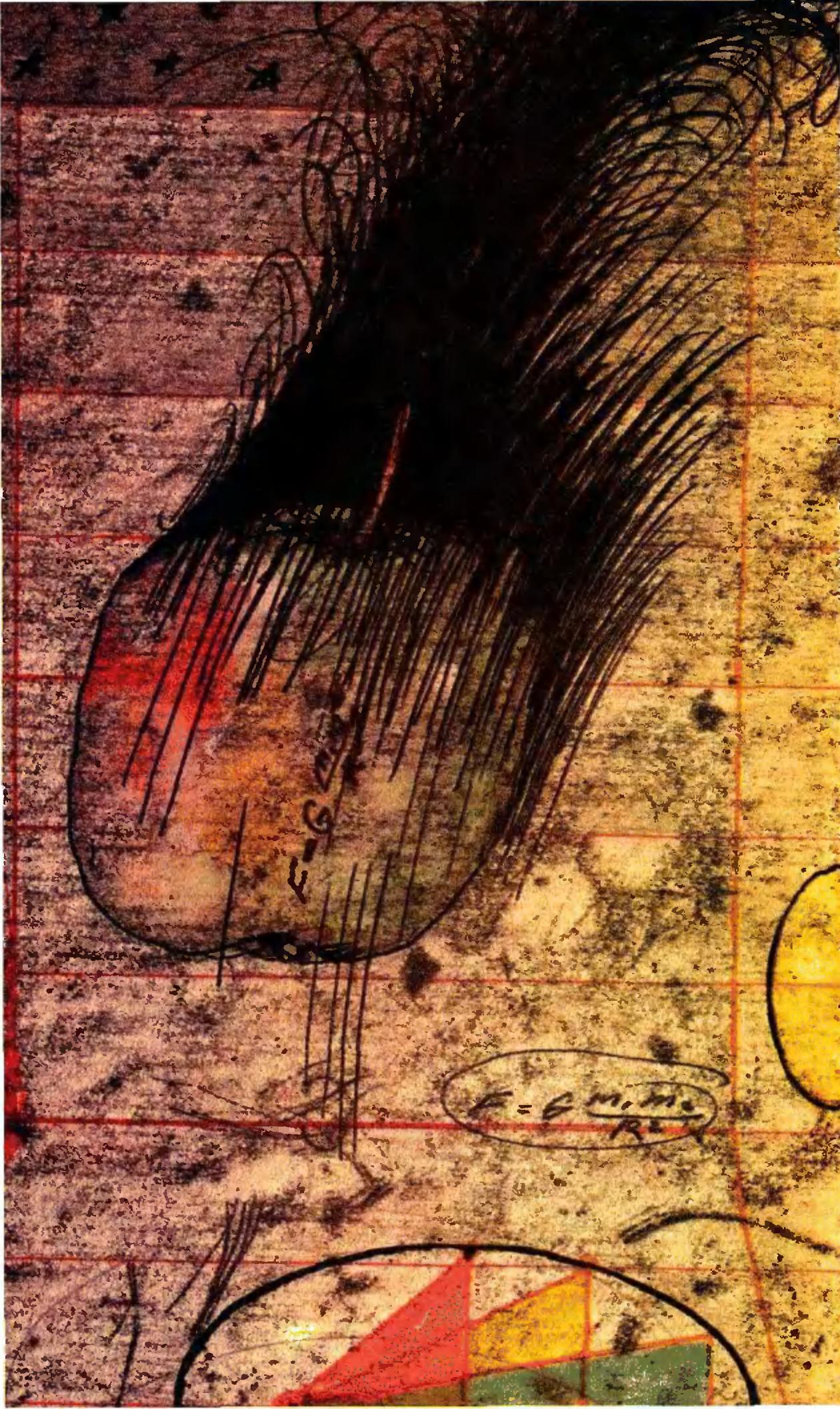
5	Э Р Е А Т О Р И И И
	ДЛЯ ЧЕГО МЫ ИЗУЧАЕМ МАТЕМАТИКУ / ВЛАДИМИР АРНОЛЬД
17	К О Н С Т Р У К Ц И И З У Г Л Е Р О Д А / СЕРГЕЙ ТИХОДЕЕВ
27	М А Т Е М А Т И К А + К О М П Ь Ю Т Е Р
	ПРОСТО, КАК КОЛУМБОВО ЯЙЦО / АНАТОЛИЙ САВИН
32	З А Д А Ч И И К К В А Н Т
	ЗАДАЧИ М1381 — М1385, Ф1388 — Ф1392 РЕШЕНИЯ М1355 — М1360, Ф1363 — Ф1372
40	К А Л Е Р Е Й С Т Е О С К О П
	ОБЪЕМ
46	К В А Н Т О В А М А Д Ш И Х Ш Е Л Ь И М К О
	ЗАДАЧИ КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6 — 8»
49	И З Н Е П Р О Ч И Т А Н О Г
	МИСТЕР ТОМПКИНС В СТРАНЕ ЧУДЕС / ДЖОРДЖ ГАМОВ
54	Ш К О Л А В К В А Н Т
	ФИЗИКА 9 — 11: 1. СКОЛЬКО ВЕРЕВОЧКЕ НИ ВИТЬСЯ / ИЛЬЯ ГЕЛЬФАТ 2. ОБМАНЧИВАЯ ПРОСТОТА / СЕРГЕЙ ФИЛОНОВИЧ 3. НЕМНОГО О ЛИНЗАХ / АЛЕКСАНДР ЗИЛЬБЕРМАН 4. ИЗБРАННЫЕ ШКОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ
64	М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й К Р У Ж О
	ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СТЕРЕОСКОП / ВЛАДИМИР ДУБРОВСКИЙ, ИГОРЬ ШАРЫГИН
70	М Н О Ф О Р М А Ц И
	ВСЕРОССИЙСКАЯ ЗАОЧНАЯ МНОГОПРЕДМЕТЬ-ШКОЛА / МАЛЫЙ МЕХМАТ
74	В А Р И А Н Т У
	ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ 1992 Г.
83	О У В Е Т Ы У К А З А Н И Я Р Е Ш Е Н И
III	Ш А Х М А Т Н А В С Т Р А И М И Ч
	ЛАБИРИНТЫ ОБРАТНОГО МАТА / ЕВГЕНИЙ ГИК
IV	К О Н К У Б У Р
	ПЕНТАКУБИКИ

ДОРОГОЙ ЧИТАТЕЛЬ



Вы являетесь свидетелем знаменательного события в жизни журнала «Квант». В январе 1993 года наш журнал переживает, можно сказать, второе рождение. Прежде всего, как вы уже, наверное, заметили, взяв в руки этот номер, существенно меняется его облик — организация материалов, их оформление, общий художественный стиль — то, что называют дизайном. Взгляд на предыдущую страницу, где собраны обложки январских номеров всех прежних лет, начиная с рождения — 1970 года, позволяет всем, кто так или иначе связан с нашим журналом, вспомнить прошлое. Говоря об истории создания журнала, я бы хотел напомнить, что первый и единственный в нашей стране физико-математический журнал для школьников «Квант» появился благодаря уникальному объединению усилий, с одной стороны, группы выдающихся ученых — академиков *И.К. Кикоина, А.Н. Колмогорова, П.Л. Капицы* и других — и, с другой стороны, увлеченных наукой талантливых представителей молодого поколения — аспирантов, преподавателей, ученых. Опыт, знания и авторитет одних был удачно дополнен энтузиазмом, энергией и инициативой других. С тех пор «Квант» занял прочное положение среди регулярных научно-популярных изданий. Для многих школьников он сыграл роль первого в жизни путеводителя в науку. Среди наших читателей — не одно поколение победителей олимпиад всех уровней, пришедших затем в науку, будущих ярких ученых. Все эти годы стараниями членов редакционной коллегии, сотрудников редакции, наших авторов журнал выполнял миссию приобщения к занятиям наукой многих и многих сотен тысяч учащихся. От одного поколения читателей к другому, от родителей к детям «Квант» передавался как безусловный символ уже на школьной скамье серьезного разговора о физике и математике, начиная с изучения классических задач и опусов древних и до осознания достижений науки последних лет. Следуя замыслам его создателей, мы старались сохранять у журнала черты, столь характерные для истинного научного поиска, — неординарность, нестандартность, а в чем-то и непредсказуемость. С 1990 года в США начал выходить англоязычный партнер «Кванта» — совместный российско-американский журнал «Quantum», материалы которого ориентированы на молодого американского читателя. В их число входят и лучшие статьи из журнала «Квант». Исключительно высокую оценку у иностранных коллег получили и сами материалы, и предложенная нами художественная концепция журнала «Quantum», когда иллюстрации к статьям делаются нашими лучшими художниками-графиками, так что оформительский ряд журнала выполняет самостоятельную познавательную-эстетическую функцию. Такого американская научно-популярная литература для детей не знает. Мы можем с гордостью сообщить, что художественно-оформительская работа в журнале «Quantum» уже отмечена несколькими престижными американскими наградами. Все сказанное выше укрепило нас в стремлении добиться того, сохранив лучшие традиции в содержательном плане, журнал «Квант» и с полиграфической стороны отвечал лучшим мировым стандартам. Каким путем мы хотим этого достичь, вы увидите, просмотрев этот номер журнала. Я надеюсь, что вглядываясь в иллюстрации, вы сумеете ощутить то, что всегда сопровождает занятие настоящей наукой, — образность мышления, уважение и лояльность к мысли коллег, чувство юмора, доброту и интеллигентность. Я хочу вас заверить в том, что «Квант» и впредь будет оставаться серьезным журналом в том смысле, что он потребует от читателей вдумчивости, усилий, настойчивости и основательной базовой подготовки. Работа с ним может принести наслаждение тем, кто терпелив в достижении цели и получит пусть для начала скромные, но самостоятельные результаты. «Квант» предлагает сотрудничество всем, кто готов себя посвятить науке. А о том, что у нас получится, судить вам, читатели. Мы бы хотели надеяться, что наши усилия были потрачены не зря. Итак, «Квант» открывает новую страницу своей биографии. Пожелаем друг другу успешного будущего.

Главный редактор журнала «Квант»
академик Юрий Андреевич Осипьян



ДЛЯ ЧЕГО МЫ ИЗУЧАЕМ МАТЕМАТИКУ? ЧТО ОБ ЭТОМ ДУМАЮТ САМИ МАТЕМАТИКИ

ВЛАДИМИР АРНОЛЬД



С ЛЕКЦИЕЙ НА ЭТУ ТЕМУ АКАДЕМИК ВЛАДИМИР ИГОРЕВИЧ АРНОЛЬД
ВЫСТУПИЛ 16 АПРЕЛЯ 1992 ГОДА В РЕСПУБЛИКАНСКОМ ИНСТИТУТЕ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ
РАБОТНИКОВ ОБРАЗОВАНИЯ (МОСКВА)¹

Для чего надо изучать математику? В 1267 году на этот вопрос уже ответил английский философ Роджер Бэкон: «Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества». Собственно, на этом можно было бы и закончить лекцию, но люди думают, что, может быть, что-то изменилось за семь веков...

Послушаем более современное свидетельство — один из создателей квантовой механики, Поль Дирак, утверждает, что при построении физической теории «следует не доверять всем физическим концепциям». А чему же доверять? «Доверять математической схеме, даже если она, на первый взгляд, не связана с физикой». Действительно, все чисто физические концепции начала века физикой отброшены, а математические модели, взятые физиками на вооружение, постепенно обретают физическое содержание.

И в этом проявилась устойчивость математики.

Итак, математическое моделирование — продуктивный метод познания в естествознании. Мы подойдем к математическим моделям с другой стороны, рассматривая проблемы математического образования.

В нашем математическом образовании (и среднем, и высшем) мы идем в фарватере европейской системы, основанной на «бурбакизации» математики. Группа молодых французских математиков, выступавшая под псевдонимом Никола Бурбаки, начиная с 1939 года опубликовала несколько книг, в которых формально (т.е. с помощью аксиоматического метода) излагались основные разделы современной математики на основе теории множеств.

Формализация математики приводит к определенной формализации ее преподавания. В этом и проявляются издержки «бурбакизации» математического образования. Характерный пример. Ученикам второго класса во французской школе задают во-

¹Запись лекции нам предоставил доцент

Ю. Фоминых (Пермь).

прос:

— Сколько будет два плюс три?

Ответ:

— Так как сложение коммутативно, то будет три плюс два.

Замечательный ответ! Он совершенно правильный, но ученику и в голову не приходит сложить эти два числа, потому что при обучении упор делается на свойства операций.

В Европе уже осознали недостатки такого подхода к образованию, и начался откат от «бурбакизации».

В нашей стране в последние годы происходит американизация математического образования. В ее основе лежит принцип: учить тому, что нужно для практики. А если кто-то считает, что ему математика не нужна, то он может не изучать ее совсем. В старших классах американских колледжей курс математики факультативен: третья часть старшеклассников, например, не изучает алгебру. К чему это приводит, показывает следующий пример. В тесте для 14-летних американских школьников предлагалось оценить (не вычислить, а лишь оценить), что произойдет с числом 120, если от него взять 80%. И предлагалось три варианта ответа: увеличилось; осталось прежним; уменьшилось. Крестики напротив правильного ответа поставили примерно 30% опрошенных. Иными словами, школьники ставили крестики на удачу. Вывод: никто ничего не знает.

Вторая особенность американского подхода к преподаванию математики — его компьютеризация. Само по себе увлечение компьютерами не способствует развитию мышления. Вот еще пример из американского теста: в классе 26 учеников. С ними нужно провести экскурсию на автомобилях. В одной машине могут ехать один родитель и 4 школьника. Сколько родителей нужно попросить помочь? Типичный ответ: 65 родителей. Компьютер выдает: $26:4 = 6,5$. Ну а школьник уже знает, что если в решении должны быть

целые числа, то с десятичной запятой надо что-то сделать, например отбросить.

А вот пример из официального американского экзамена 1992 года для студентов:

Что из нижеследующего больше всего подходит на соотношение между углом и градусом:

- а) время и час,
- б) молоко и кварта,
- в) площадь и квадратный дюйм (и т.д.).

Ответ: площадь и квадратный дюйм, так как градус — минимальная единица угла, а квадратный дюйм — площади, в то время как час делится еще и на минуты.

Составители этой задачи явно обучены по американской системе. Боюсь, что и мы придем к этому уровню.¹

Можно только удивляться, что в США так много замечательных математиков и физиков (правда, многие из них иммигранты; лучшие студенты в американских университетах сегодня — китайцы).

Сейчас наше математическое образование медленно поворачивается от европейской системы к американской. Как всегда, мы опаздываем, отстали от Европы лет на 30, и надо быть готовыми к тому, чтобы через 30 лет спасти ситуацию и выходить из этого тупика, в который нас приведет американизация образования с ее прагматичностью, факультативностью, повальной компьютеризацией.

Наше традиционное отечественное преподавание математики имело более высокий уровень и базировалось на культуре арифметических задач. Еще два десятка лет назад в семьях сохранялись старинные «купческие» задачи. Теперь это утрачено. Алгебраизация

¹ Нью-Йоркский профессор Джо Бирман объяснил мне, что для него как американца «правильное» решение этой задачи совершенно очевидно. «Дело в том, — сказал он, — что я точно представляю себе степень идиотизма составителей этих задач».

последней реформы преподавания математики превращает школьников в автоматы. А именно арифметический подход демонстрирует содержательность математики, которой мы учим.

Рассмотрим, например, задачи:

1. Имеется 3 яблока, 1 взяли. Сколько осталось?

2. Сколько нужно сделать распилов, чтобы бревно распалось на 3 части?

3. У меня сестер на 3 больше, чем братьев. На сколько в нашей семье сестер больше, чем братьев?

С точки зрения арифметики это все разные задачи — у них разное содержание. Интеллектуальные усилия, нужные для решения этих задач, совершенно разные, хотя алгебраическая модель одна: $3 - 1 = 2$.

В математике прежде всего поражает удивительная универсальность ее моделей и их непостижимая эффективность в приложениях.

Вспомним В.В.Маяковского: «Человек, впервые сформулировавший, что «два и два четыре» — великий математик, если даже он получил эту истину из складывания двух окурков с двумя окурками. Все дальнейшие люди, хотя бы они складывали неизмеримо большие вещи, например паровоз с паровозом, — не математики».

Считать паровозы — это и есть американский путь математического образования. Это гибель. Пример с развитием физики показывает, что «паровозная» математика в начале нашего века оказалась хуже «окурочной»: прикладная математика не успевала за физикой, а в теоретической нашлось все, что необходи-

мо было для дальнейшего развития физики. «Паровозная» математика не может успеть за практикой: пока мы учим считать на счетах, появляются компьютеры. Надо учить думать, а не тому, как нажимать на кнопки.

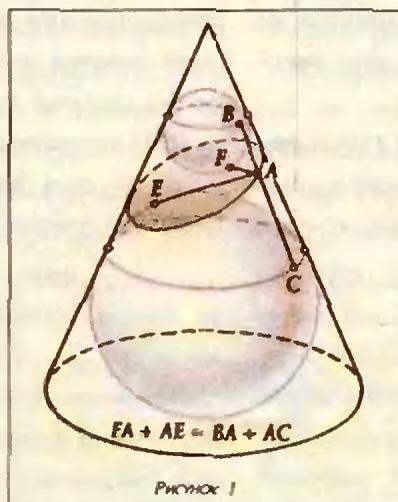
Правда, математическая модель не всегда дает немедленную практическую отдачу. Бывает, что она окажется полезной только через две тысячи лет.

Примером тому — конические сечения, они были открыты в Древней Греции и описаны Аполлонием Пергским (ок. 260 — ок. 170 гг. до н.э.) в 8-томном трактате. А понадобилась эта теория Иоганну Кеплеру в XVI веке, когда он выводил законы движения планет. Его учитель Тихо Браге в обсерватории «Ураниборг» в течение 20 лет скрупулезно измерял положения планет Солнечной системы. После смерти учителя Кеплер взялся за математическую обработку результатов этих наблюдений и обнаружил, что, например, траектория движения Марса — эллипс.

Эллипс — это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна. Тот факт, что сечение конуса плоскостью, достаточно сильно наклоненной к его оси, является эллипсом, — замечатель-

ная геометрическая теорема, к сожалению, не доказываемая в школе. Доказательство ее очень просто (см. рисунок 1). Вписанные в конус и касающиеся плоскости (в фокусах E и F эллипса) сферы, на рассмотрении которых основано доказательство, называются сферами Данделена.

Чтобы понять рассуждения Кеплера, нам потребуются некоторые простые факты из геометрии эл-



Эллипс с фокусами F и E и сферы

Данделена.

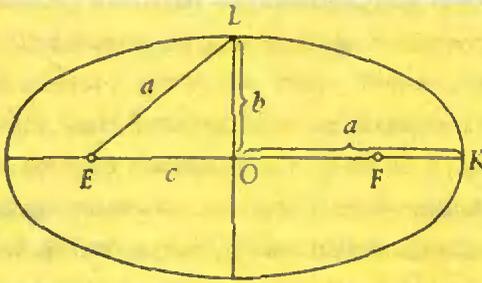


Рисунок 2

Фокусы, полуоси и эксцентриситет эллипса.

лиса. Длина большой полуоси эллипса OK (рис.2), обычно обозначаемая через a , равна длине гипотенузы EL треугольника с катетами $b = |OL|$ (малая полуось) и $c = |EO|$. Отношение c/a характеризует форму эллипса и называется эксцентриситетом, так как пропорционально смещению фокусов от центра эллипса. Эксцентриситет обычно обозначается буквой e .

По теореме Пифагора отношение длин полуосей эллипса есть $b/a = \sqrt{1 - e^2} \approx 1 - e^2/2$ при малых e .

Отсюда видно, что эллипс с малым эксцентриситетом практически неотличим от окружности. Например, если $e = 0,1$, то малая ось короче большой всего на $1/200$. Для эллипса с длиной большой оси 1 метр малая ось короче большой всего на полсантиметра, так что на глаз отличие такого эллипса от окружности вообще не заметно. Фокусы же смещены от центра на 5см, что очень заметно.

Формула $b/a = \sqrt{1 - e^2} \approx 1 - e^2/2$ (означающая, что больший катет вытянутого прямоугольного треугольника практически столь же длинен, как и гипотенуза, и дающая с очень хорошим приближением разность их длин) — один из самых замечательных общематематических фактов (к сожалению, в школе этому не учат).

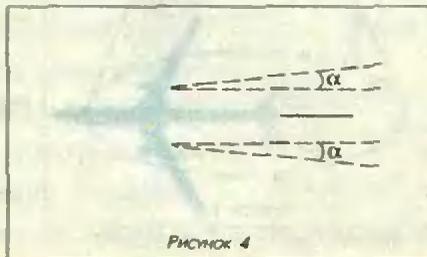


Рисунок 4

Как спасти хвостовое оперение.



Рисунок 3

Насколько синусоида длиннее прямой?

Например, предположим, что вы возвращаетесь домой по синусоиде. Насколько ваш путь длиннее, чем если бы вы шли прямо (рис.3)? Первое впечатление (что вдвое), конечно, преувеличивает длину. Все же кажется, что путь по синусоиде длиннее раза в полтора. На самом деле всего примерно на 20%. Причина в том, что большая часть синусоиды слабо наклонена к оси, поэтому соответствующие гипотенузы практически не длиннее катетов.

Вот еще одно применение той же формулы. Реактивные струи первых реактивных двигателей, установленные на крыльях самолета вблизи фюзеляжа, представляли опасность для хвостового оперения. Конструкторы, знавшие и чувствовавшие обсуждаемую формулу, повернули двигатели на небольшой угол α (рис.4).

Хвостовое оперение было спасено (отклонение струи пропорционально α), а результирующая сила тяги практически не изменилась (потеря $\approx \alpha^2/2$, где α — угол в радианах; для угла в 3° теряется всего порядка $1/800$ мощности).

Вернемся к Кеплеру. Сначала Кеплер думал, что орбита Марса — окружность. Однако Солнце оказалось не в центре, а сдвинутым примерно на $1/10$ часть радиуса. Но Кеплер не остановился на этом (уже замечательном) результате — потому что он знал теорию конических сече-

ний. Кеплер знал, что эллипс с малым эксцентриситетом очень похож на окружность, и проверил, как ведет себя то небольшое отклонение орбиты от окружности, которое еще оставалось. Интересно, что сделать это можно было только благодаря исключительной точности наблюдений Тихо Браге, сделанных невооруженным глазом. В те времена астрономы не очень доверяли телескопам, и еще в конце XVII века приходилось доказывать, что телескопические наблюдения могут достигать столь же большой точности, как наблюдения невооруженным глазом.

Новая физика часто начинается с уточнения последней значащей цифры предыдущей теории — если бы Кеплер удовлетворился своей эксцентрической круговой орбитой или если бы наблюдения Тихо Браге были бы менее точны, развитие небесной механики (а возможно, и всей теоретической физики) могло бы задержаться — может быть даже на века.

Орбита Марса оказалась слегка сплюснутой в направлении, перпендикулярном диаметру, на котором лежит Солнце — примерно на полпроцента, т.е. на $e^2/2$. Так Кеплер пришел к мысли об эллиптических орбитах планет.

Если бы теория конических сечений не была заранее разработана математиками, то фундаментальные законы природы не были бы своевременно открыты, не возникла бы современная наука и технология, а наша цивилизация оставалась бы на средневековом уровне — или, по меньшей мере, пути истории были бы совсем иными.

Кеплер открыл закон движения планет, но тот факт, что они движутся по эллипсам, доказал Исаак Ньютон в своей книге «Математические начала натуральной философии» (1687 г.), которая послужила основой всей современной теоретической физики. Он получил эллиптичность планетных траекторий как следствие закона всемирного тяготения.

Заметим, что до Ньютона этой проблемой занимался его современник Роберт Гук. Он изучал закон движения тела в поле тяготения, считая, что притяжение обратно пропорционально квадрату расстояния. Приблизительно проинтегрировав уравнение движения, Гук нарисовал орбиты и увидел, что они похожи на эллипсы. Назвать их эллипсами ему не позволила научная честность, а доказать эллиптичность он не мог. Поэтому Гук назвал траекторию эллиптоидом и предложил Ньютону доказать, что первый закон Кеплера (планеты движутся по эллипсам) следует из закона обратных квадратов. Ньютон, хорошо знавший древнюю теорию конических сечений, справился с этой задачей при помощи хитроумных элементарно-геометрических построений.

Впоследствии кривые второго порядка стали все чаще появляться в естественно-научных исследованиях. Почему эта модель оказалась столь плодотворной для приложений? Почему, в частности, модель сечения конуса описывает движения планет? Мистика. Загадка. Ответа на этот вопрос нет. Мы верим в силу рациональной науки. Ньютон видел в этом доказательство существования Бога: «Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и по власти могущественного и премудрого существа... Сей управляет всем не как душа мира, а как властитель Вселенной, и по господству своему должен именоваться Господь Бог Вседержитель».

Современные исследователи космоса, проектируя запуск искусственных спутников, тоже используют свойства конических сечений. Таким образом база современной физики и научно-технической революции закладывалась и классическим произведением Аполлония. Тогда как он, исследуя конические сечения, думал лишь о красоте данной математической модели.

Другой пример — история создания



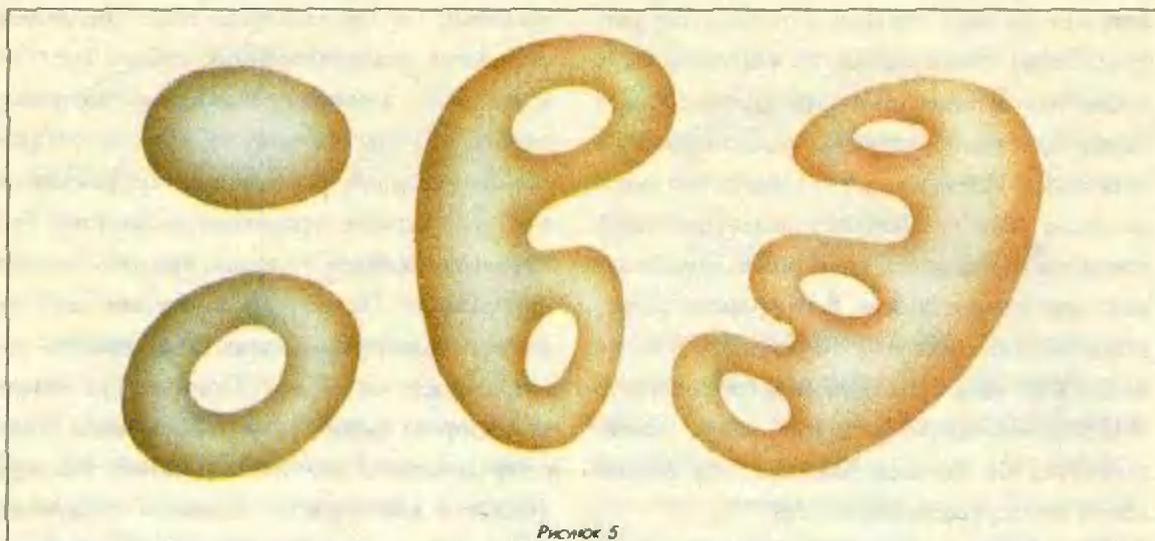


Рис. 5

РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ.

ЭВМ. Задолго до появления первых ЭВМ в математике были заготовлены два их основных математических компонента: математическая логика (алгебру логики разработал Джорж Буль, 1815—1864) и принципиальная схема устройства вычислительной машины. Первую суммирующую машину сконструировал в 1641 году французский математик Блез Паскаль.

Третий пример — разработка волновой механики Э.Шредингером. К моменту, когда Шредингер обратился к колебательной задаче, уже был известен матричный вариант квантовой механики В.Гейзенберга. Встал вопрос, как получить из теории волн во всем пространстве дискретный, а не непрерывный спектр? Шредингеру помог известный немецкий математик Герман Вейль. Без его результатов по спектральной теории на неограниченном интервале мы бы никогда не узнали о знаменитом уравнении Шредингера. Опять та же ис-

тория: нашелся математик, у которого уже была готова теория — граничные условия на бесконечности, — оставалось ее использовать.

Следующий пример — римановы поверхности. Их ввел в рассмотрение немецкий математик Бернхард Риман в середине прошлого века. Это поверхности, которые получаются в результате соответствующего разрезания и склеивания нескольких (или даже бесконечного числа) плоскостей комплексного переменного. Топологически такая поверхность может быть сферой, сферой с несколькими ручками и т.д. (рис. 5). Учение о римановых поверхностях разработано в теории функций комплексного переменного. Затем они неожиданно оказались полезными совершенно в других задачах. На-

пример, на римановых поверхностях получили простую геометрическую трактовку эллиптические интегралы.

Рассмотрим, например, движение частицы по прямой в поле с потенциальной энергией U , определяемое уравнением Ньютона

$$x'' = -dU/dx.$$

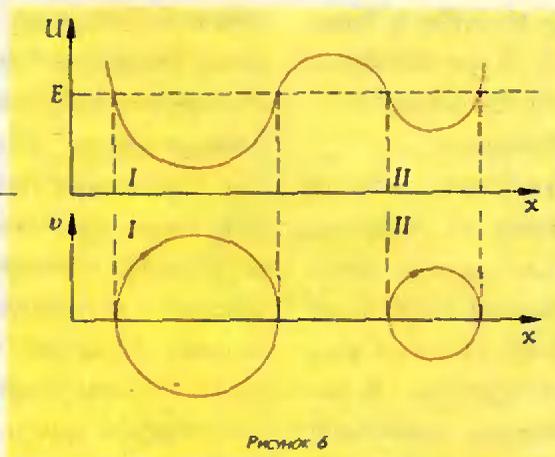
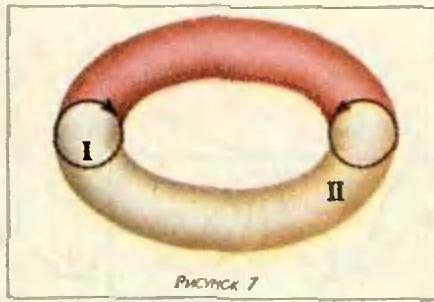


Рис. 6

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЯМЫ И ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ.

Предположим, что U — многочлен четвертой степени с двумя несимметричными потенциальными ямами (рис.6). Движение частицы в каждой из ям периодично. В какой из ям период колебаний (при данном значении полной энергии E) больше: в более глубокой или более мелкой? Из теории римановых поверхностей следует, что оба этих периода точно равны.



РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ.

Закон сохранения энергии

$$v^2/2 + U(x) = E \quad (v = dx / dt)$$

определяет на «фазовой плоскости» (x, y) кривую, состоящую из двух компонент. Период дается формулой

$$T = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}$$

(ибо $dt = dx / v = dx / \sqrt{2(E - U)}$).

Если U — многочлен 4-й степени, то этот интеграл эллиптический, он не берется в элементарных функциях. Причина — топологическая. Уравнение закона сохранения энергии определяет «кривую» на «плоскости» двух комплексных переменных (x, y) (эта плоскость имеет вещественную размерность 4). Эта «кривая» (пополненная парой бесконечно удаленных точек) и есть риманова поверхность нашей задачи. Топологически эта поверхность представляет собой тор (рис.7). Этим и объясняется несводимость эллиптических интегралов к элементарным (чтобы интегралы брались, риманова поверхность должна иметь топологию сферы).

Вещественные точки нашей римановой поверхности — это в точности две замкнутые траектории на вещественной фазовой плоскости (x, y) , соответствующие периодическим движениям частицы с фиксированной полной энергией E в обеих ямах и изобра-

женные на рисунке 6 внизу. На поверхности тора они расположены как два меридиана (рис.7).

Равенство периодов колебаний в обеих ямах следует из того, что суммарный поток несжимаемой жидкости, текущей по поверхности тора, через оба края цилиндра, ограниченного на торе парой его меридианов, равен нулю.

Карл Густав Якоби доказал, что римановы поверхности «управляют» еще двумя задачами:

1) определение числа способов, которыми заданное число можно представить в виде суммы четырех квадратов

$$N = x^2 + y^2 + z^2 + u^2;$$

2) исследование колебаний маятника, которое приводит к решению дифференциального уравнения $x'' = -\sin x$.

В качестве пятого примера рассмотрим так называемый треугольник Бернулли — Эйлера:

	1							
	1	0						
	0	1	1					
	2	2	1	0				
	0	2	4	5	5			
	16	16	14	10	5	0		
	0	16	32	46	56	61	61	
	272	272	256	224	178	122	61	0

Он заполняется так. В нулевой строке пишется «1». Каждая нечетная строка (1-я, 3-я, ...) заполняется справа: в каждой позиции стоит сумма всех чисел предыдущей строки, стоящих правее данной позиции. Каждая четная строка заполняется аналогично, но слева.

Чудо, заключенное в этом треугольнике, открыто 100 лет назад. Ключ к нему дает



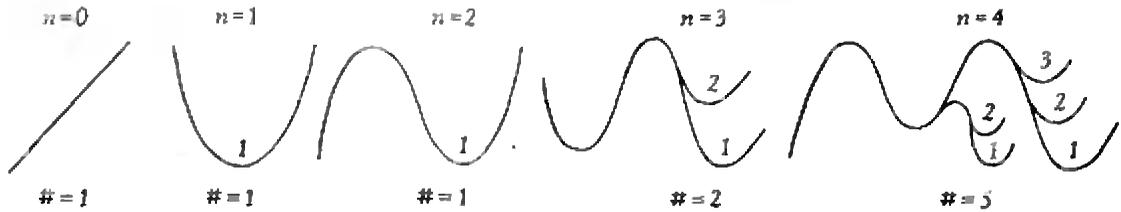


Рисунок 8
Классификация змей.

«простая» (математики часто скрывают, что все обстоит очень просто) теорема:

$$\sec t + \operatorname{tg} t = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!}.$$

Коэффициенты k_n в этом равенстве стоят на «склонах» (боковых сторонах) треугольника Бернулли—Эйлера.

Отсюда по левому «склону» легко получить разложение в степенной ряд функции $\operatorname{tg} x$ (вспомните, что она нечетная, и в разложении будут только нечетные члены):

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{k_1}{1!} = 1, \\ a_3 &= \frac{k_3}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \\ a_5 &= \frac{k_5}{5!} = \frac{16}{5!} = \frac{2}{15}, \\ &\dots\dots\dots \\ \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \end{aligned}$$

Аналогично по правому «склону» получается разложение в ряд секанса.

Треугольник Бернулли—Эйлера доставляет топологическую классификацию вещественных многочленов

$$x^{n+1} + a_1 x^n + \dots + a_{n+1},$$

все n критических значений которых вещественны и различны.

График такого многочлена имеет вид змеи, и я буду называть его змеей.

Все возможные типы змей с $n \leq 4$ указаны на рисунке 8.

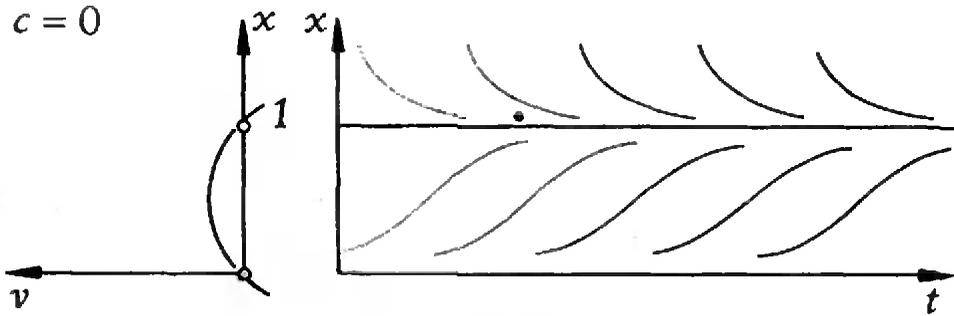
Мы относим две змеи к одному типу, если они переводятся друг в друга гладкими заменами независимых и зависимых переменных, сохраняющими ориентации (т.е. имеющими положительные производные).

Рассмотрим, например, змеи многочленов степени 4 ($n = 3$). Три критические точки обязательно идут в порядке минимум—максимум—минимум. Топологический тип змеи определяется тем, будет ли последний минимум выше или ниже первого. Поэтому число типов змей с $n = 3$ равно 2.

Для змей с $n = 4$ второй максимум может быть ниже или выше первого. В первом случае второй минимум может занимать два положения (выше или ниже первого минимума, но всегда ниже обоих максимумов), а во втором — три. Итого пять типов.

Если у вас хватит терпения нарисовать все змеи с $n = 5$, то Вы убедитесь, что их 16, а при $n = 6$ — 61 (это тоже еще поддается рисованию). Появление в какой-нибудь классификации числа Эйлера 61 — обычно признак того, что рядом и остальные.

Будем теперь классифицировать змей по хвостам, т.е. по самым правым критическим точкам. Занумеруем все n критических значений (значения многочленов в точках локальных максимумов и минимумов) в порядке возрастания (т.е. снизу вверх) числами от 1 до n . Этот номер критической точки будем



Риснок 9

СТАБИЛИЗАЦИЯ НАСЕЛЕНИЯ.

называть ее высотой.

Высоты хвостов змей указаны на рисунке 8. Например, пять змей с $n=4$ распределяются по высотам хвостов так:

высота хвоста	1	2	3	4
число змей	2	2	1	0

Сумма $2 + 2 + 1 + 0 = 5$, естественно, равна полному числу змей. Сравнивая эти числа змей с разными высотами хвостов с числами треугольника Бернулли—Эйлера, видим, что они (с точностью до порядка) совпадают.

После того как этот — достаточно неожиданный — факт замечен (для чего обязательно нужна экспериментальная работа с рисованием змей), уже нелегко доказать, что распределение змей по высотам хвостов удовлетворяет рекуррентному соотношению, определяющему треугольник Бернулли—Эйлера. Сама формула

$$K(t) = \sec t + \operatorname{tg} t,$$

$$\text{где } K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!}$$

доказывается так.

Рассмотрим змею с $n+1$ критической точкой. Выберем самый высокий локальный максимум и потянем его вверх до бесконечности.

В результате змея распадется на две более короткие змеи, причем суммарное число критических точек уменьшится на 1. Аналогично можно потянуть до $-\infty$ самый низкий локальный минимум. Отсюда получается ре-

куррентное соотношение

$$2K_{n+1} = \sum_{i=0}^n c_n^i k_i k_{n-i}.$$

Здесь произведение $k_i k_{n-i}$ пересчитывает всевозможные пары обрывков, множитель C_n^i учитывает различие взаимных расположений критических значений на обоих обрывках, а коэффициент 2 учитывает использование и максимума, и минимума.

В терминах функций K наше соотношение записывается в виде дифференциального уравнения

$$2dK/dt = 1 + K^2,$$

откуда $K = \sec t + \operatorname{tg} t$, поскольку

$$K(0) = k_0 = 1.$$

Последний пример. Рассмотрим модель изменения численности некоторой популяции животных (например, количество рыбы в пруду или океане). В простейшем случае ситуация описывается моделью $x' = kx$ (x — численность популяции, k — коэффициент пропорциональности). Решением этого дифференциального уравнения является экспонента.

Однако на практике с ростом x ухудшаются условия жизни популяции, и коэффициент k уменьшается. Например, при $k = a - bx$ получаем так называемое логистическое уравнение. В случае $a = b = 1$ его решения (рис.9) ведут к стабильному уровню «населения» $x = 1$.

Если вдобавок ввести некоторую

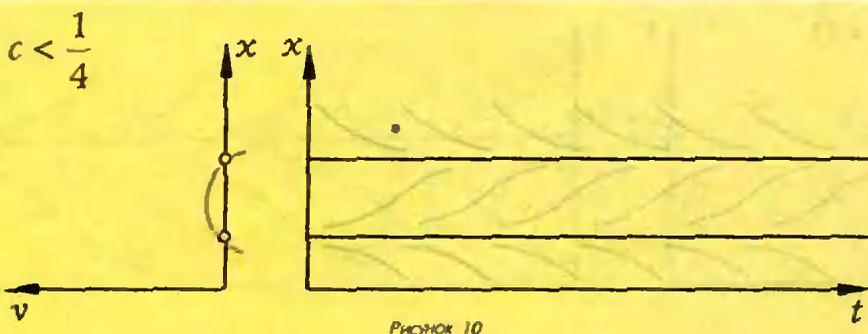


Рис. 10

МОДЕЛЬ РЫБОЛОВСТВА.

квоту c на отлов части популяции, то уравнение усложнится незначительно: $x' = x - x^2 - cx$.

Это простейшая модель рыболовства. При уровне квоты $c < 1/4$ снова устанавливается устойчивое решение (рис.10), при $c > 1/4$ получим быстрый процесс вымирания (рис.11).

При $c = 1/4$ решения уравнения приводят к установившемуся режиму на уровне $1/2$ от исходной популяции (рис.12). Однако этот режим неустойчив: малые случайные колебания ведут к катастрофе — уничтожению популяции.

Как достичь оптимального вылова при сохранении популяции на некотором устойчивом уровне? Ответ: не назначать жесткого плана вылова, а вести его с учетом обратной связи, т.е. ввести квоту, пропорциональную фактически имеющимся ресур-

сам. В модели с обратной связью $x' = x - x^2 - kx$ оптимальное значение коэффициента $k = 1/2$. При таком выборе k устанавливается средний многолетний вылов $kx_0 = 1/4$ (рис.13). Это такой же вылов, как при максимально жестком плане отлова.

Большая производительность в этом случае невозможна. Но при жестком плане система теряет устойчивость и гарантированно самоуничтожается, а обратная связь стабилизирует ее, и небольшие изменения коэффициента k не ведут к катастрофе.

Было бы совсем неплохо, если бы лица, принимающие ответственные решения, были ознакомлены с подобными моделями и другими правилами выбора стратегических социальных решений.

Более простые математические соображения — тот факт, что законы природы опи-

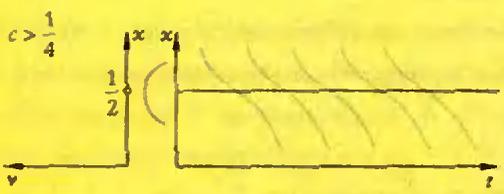


Рис. 11
Перелов.

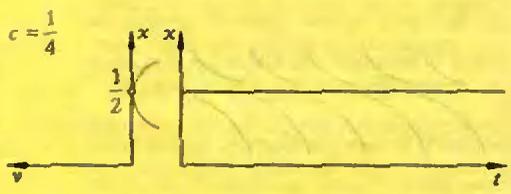
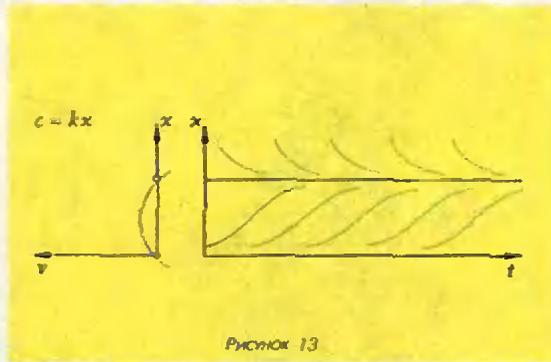


Рис. 12
Оптимальный план уничтожает популяцию.

связываются дифференциальными уравнениями, — позволяют понять некоторые кажущиеся парадоксальными явления в нашей жизни.

В течение нескольких десятилетий состояние нашей экономики вызывало тревогу специалистов: милитаризация, монополия и общая некомпетентность руководства привели к тому, что сделались устойчиво отрицательной вторая производная (стали систематически замедляться темпы развития).

Не понимающего математику это не слишком пугало, так как первая производная все же была положительна (благополучие росло). Но математики знают, что постоянно отрицательная производная (даже высокого порядка) в конце концов приведет к отрицательности первой производной, т.е. к падению производства и благосостояния общества, причем этот процесс ухудшения, когда он сделается заметным, будет ускоряться. Вследствие инерционности системы мгновенно изменить положение в такое время нельзя уже никакими средствами, так как всякого рода изменения влияют лишь на знак старшей производной (для нашей перестройки — третьей или даже четвертой). Таким образом, наблюдаемая экономическая деградация вызвана не столько неправильными новыми решениями, сколько давними ошибками, сделанными еще во время роста производства. К сожалению, эти элементарные математические факты очень трудно объяснить ограбленному народу, склонному приписывать все ухудшение реформам. Любые реформы, конечно, должны приводить к ухудшению, даже если они самые правильные.



Обратная связь стабилизирует систему.

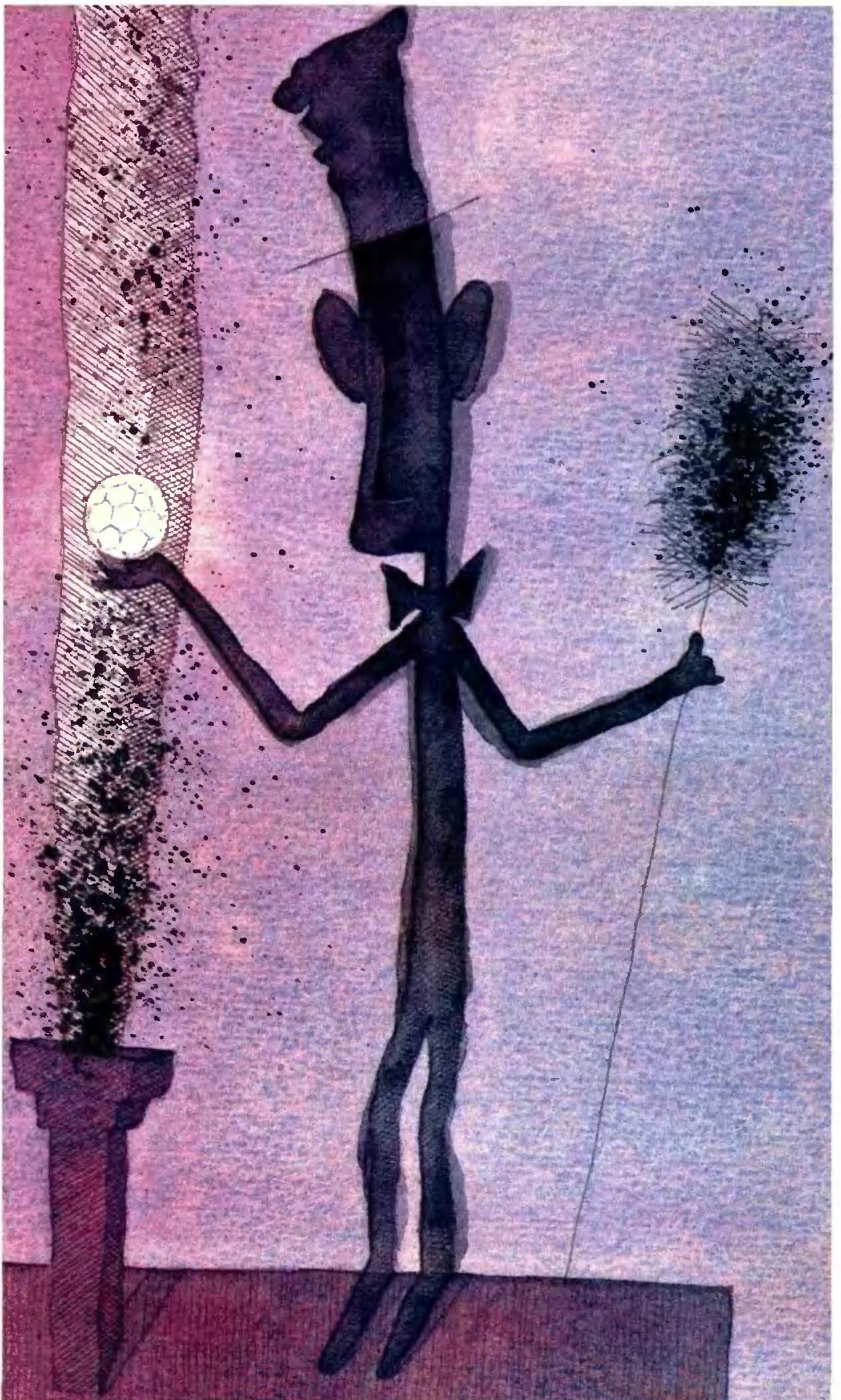
Планы обычно составлялись так, чтобы оптимизировать продукцию на 20 лет вперед («на наш век хватит»). Математику ясно, что оптимальное планирование этого рода должно привести к полному уничтоже-

нию всех ресурсов к концу срока (иначе оставшиеся ресурсы можно было бы использовать и, значит, план не был бы оптимальным). К счастью, планы эти «корректировались» и не исполнялись. Но все же основные тенденции выдерживались, и мы к началу перестройки, грубо говоря, съели все, что у нас было.

Попытки составить детальные «программы» экономической реформы по дням подобны попыткам планирования всей экономики и аналогичны попытке составить программу для водителя автомобиля, который должен доехать от Москвы до Санкт-Петербурга (на такой-то минуте поверни направо, на такой-то налево). Успех может быть достигнут только за счет обратной связи. Т.е. нужна не программа (траектория), а, говоря математическими терминами, векторное поле в пространстве состояний системы — механизм принятия решений в зависимости от реально достигнутого состояния, а не от календарной даты.

Кое-что из сказанного следует иметь в виду и при реформировании системы образования.

Наши примеры показывают, что «нет ничего практичнее хорошей теории». Нужно, чтобы работники образования не гнались за сиюминутной практической потребностью, а всегда видели перспективные цели общества.



молекулярная архитектура

КОНСТРУКЦИИ ИЗ УГЛЕРОДА

- ФУТБОЛИНО ИЗ СЕМЕЙСТВА ФУЛЛЕРЕНОВ,
- ФУЛЛЕРИТАХ И НЕМНОГО —
- ШВАРЦИТАХ

СЕРГЕЙ ТИХОДЕЕВ

Все знают, что углерод — один из самых распространенных в природе элементов. А знаете ли вы, что атомы углерода — замечательный строительный материал для самых разнообразных кристаллов и молекул? Алмазу, одной из кристаллических модификаций углерода, принадлежит рекорд твердости. Сложные органические молекулы белков, у которых атомы углерода (и азота) составляют своего рода атомный скелет, образуют основу живых организмов.

Большое разнообразие атомных конструкций с участием атомов углерода объясняется тем, что углерод, элемент IV группы таблицы Менделеева, имеет четыре электрона во

внешней валентной оболочке и может образовывать химические связи с четырьмя, тремя или двумя ближайшими соседями. Если у углерода четыре ближайших соседа, атомная конструкция получается трехмерной. Пример такой конструкции — кристалл алмаза, в котором каждый атом углерода находится в середине правильного тетраэдра, вершины которого — ближайшие атомы углерода. Если ближайших соседей два, возникают линейные (т.е. одномерные) конструкции, например длинные полимерные молекулы. В случае же трех ближайших соседей атомные конструкции содержат плоские участки. Например, в плоской молекуле бензола C_6H_6 каждый атом углерода связывается с одним водородом и двумя углеродами.

Еще один пример атомной конструкции, в которой каждый углерод имеет три ближайших соседа, — кристалл графита, вторая природная форма углерода. Графит — кристалл слоистый, основой его конструкции являются плоскости, в которых атомы лежат в вершинах правильных шестиугольников, образуя подобие пчелиных сот. Легко понять, что если каждый атом углерода связывается только с тремя ближайшими атомами и все атомы расположены совершенно одинаково, ничего другого и не построить. К счастью, между соседними углеродными плоскостями имеется притяжение, которое и связывает углеродные слои в кристалл графита. Эти силы притяжения (они называются силами

Ван-дер-Ваальса и убывают с расстоянием как r^{-7}) гораздо слабее сил взаимодействия между соседними атомами углерода в одном слое. Поэтому графит механически непрочен, и из него можно делать грифели для карандашей. Однако сами углеродные плоскости столь же прочны, как и алмаз.

Зададимся теперь следующим вопросом: нельзя ли построить из углерода что-нибудь более интересное, чем плоскость в кристалле графита, например многогранник? Так как у каждого атома углерода должно быть ровно три соседа, то возникает следующая геометрическая задача: как сконструировать многогранник, в каждой вершине которого сходится ровно три ребра?

Воспользуемся теоремой Эйлера: Для всякого выпуклого многогранника справедливо равенство

$$V + \Gamma - P = 2, \quad (1)$$

где V — число вершин многогранника, Γ — число граней и P — ребер. Для более сложных многогранников теорему (1) надо изменить, введя такое понятие, как число ручек многогранника g . (Что такое число ручек у замкнутой поверхности, можно понять из рисунка 5 к статье В. Арнольда, помещенной в этом же номере журнала. — Прим. ред.). Например, для тора $g = 1$, т.е. он имеет одну ручку, а для выпуклого многогранника g , конечно, равно нулю.

Обобщенная теорема Эйлера выглядит так:

$$V + \Gamma - P = 2 - 2g. \quad (2)$$

Доказать равенство (2) удивительно просто. Достаточно заметить, что каждая ручка многогранника и сам многогранник с отрезанными ручками удовлетворяют соотношению (1), а в результате приклеивания каждой ручки четыре склеивающиеся грани исчезают, в то время как разность $V - P$ не изменяется.

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы вывести архитектурные правила построения

многогранников из атомов углерода. Предположим, мы собираемся построить замкнутый многогранник с одними шестиугольными гранями, число которых равно n_6 . Так как в каждой вершине должно сходиться три грани, а каждое ребро принадлежит двум граням, получаем

$$V = 6n_6/3, \Gamma = n_6, P = 6n_6/2. \quad (3)$$

В результате подстановки в равенство (2) получаем $g = 1$. Так что из одних шестиугольников можно построить только многогранник, топологически эквивалентный тору.

Если мы хотим конструировать более разнообразные фигуры, шестиугольных «графитообразных» граней недостаточно. Пусть кроме n_6 шестиугольников имеется n_5 пятиугольников и n_7 семиугольников. Повторяя рассуждения, получим

$$n_5 - n_7 = 6(2 - 2g). \quad (4)$$

Так что если нас интересуют выпуклые многогранники ($g = 0$), то можно обойтись без семиугольников, но в этом случае придется добавить ровно двенадцать пятиугольников. (Кстати, этот факт заметил и доказал сам Эйлер.) При создании более сложных фигур придется использовать и семиугольники.

Итак, мы вывели основные правила построения сложных объемных конструкций из атомов углерода. Аналогичные конструкции больших размеров встречаются в природе. Например, так устроены скелеты радиолярий — простейших организмов в морском планктоне — и многие вирусы (см. рисунок к заметке Д. Джоунса «Полые молекулы». — Прим. ред.). Известны такие конструкции и в архитектуре. Достаточно упомянуть ячеистые купола знаменитого американского архитектора и инженера Р. Бакминстера Фуллера (р. 1895). Впрочем, чтобы понять, что такие конструкции не редкость, достаточно взять в руки стандартный футбольный мяч, сшитый из 20 шестиугольников и 12 пятиугольников. Но вот вопрос: можно ли построить такие конструкции из настоящих атомов углерода?

ФУЛЛЕРЕНЫ И ФУЛЛЕРИТЫ. В 1985 году Х.Крото (Великобритания) и Дж.Хит, С.О'Брайен, Р.Карл, Р.Смэлли (США) обнаружили, что при лазерном испарении графита в струе гелия образуются весьма устойчивые молекулы, состоящие из большого (32—90), причем всегда четного, числа атомов углерода. Наибольшей устойчивостью обладала молекула C_{60} , и авторы предположили,

что она имеет форму пустотелого футбольного мяча (рис 1). В честь Бакминстера Фуллера авторы назвали свою молекулу бакминстерфуллереном (сокращенное название этой молекулы — бакибол (buckyball) или футболино), о весь класс молекул C_{2k} — фуллереноми. Оказалось, что фуллерены отнюдь не дико-

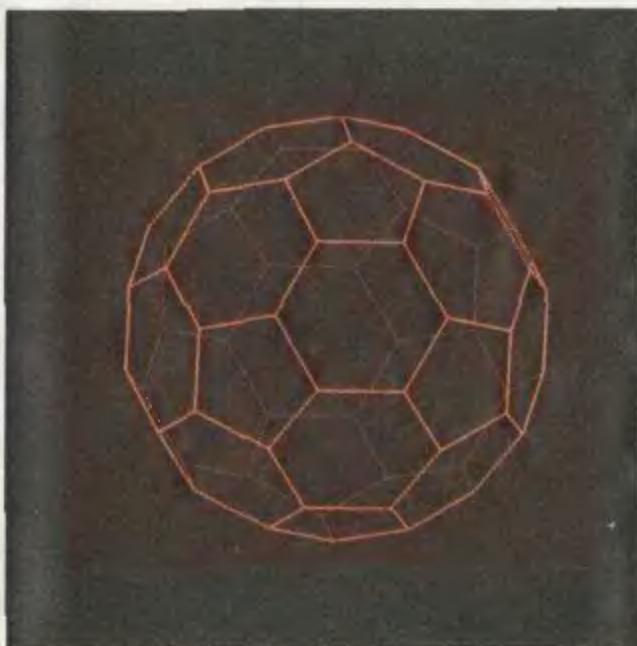
винка: такие молекулы в изобилии встречаются в свечном нагаре, газовой саже и прочих веществах, сопровождающих неполное сгорание. Вся проблема в том, чтобы выделить чистую фракцию таких молекул (т.е. получить вещество, не содержащее почти ничего иного).

В молекуле бакминстерфуллерена C_{60} вершинами являются атомы углерода, а ребрами — их валентные связи. Свободных связей у C_{60} нет, и этим объясняется его большая химическая и физическая устойчивость. Молекула C_{60} является наиболее симметричным и наиболее устойчивым фуллереном. Следующая (в порядке возрастания числа атомов углерода) устойчивая молекула C_{70} состоит из 25 ше-

стиугольников и тех же 12 пятиугольников, она образуется несколько реже, чем C_{60} . Высокосимметричные молекулы C_{240} , C_{540} и C_{960} , которые, как предполагается, тоже должны быть устойчивыми, пока не обнаружены. Любопытно, что ничто не препятствует тому, чтобы молекула C_{960} содержала внутри себя молекулу C_{540} и т.д. Таких составных

молекул тоже пока не обнаружили, но название для них «матрешка» (Russian egg) — уже придумали.

Любопытно, что идея полых молекул почти за 20 лет до их открытия была высказана Дэвидом Джоунсам, который на протяжении многих лет был автором знаменитой «коланки Дедала» в журнале *New Scientist* (см. номер от 3 ноября 1966



ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА БАКМИНСТЕРФУЛЛЕРЕНА C_{60} (ФУТБОЛИНО). В ВЕРШИНАХ МНОГОГРАННИКА НАХОДЯТСЯ АТОМЫ УГЛЕРОДА.

г.). В 1982 году Д.Джоунс собрал 129 своих заметок в отдельную книжку «Изобретения Дедала», русский перевод которой вышел в издательстве «Мир» в 1985 году, т.е. в год открытия фуллеренов.¹

В настоящее время размеры футболино хороша известны: его радиус равен $3,512 \text{ \AA}$, длина короткой связи (разделяющей шестиугольники) равна $1,388 \text{ \AA}$, а длинной (общей для шестиугольников и пятиугольни-

¹ Наш журнал не раз знакомил читателей с изысканными научными фантазиями Дедала. Заметку «Полые молекулы» (отрывок из которой вы найдете сразу после этой статьи) можно уже считать не фантазией, а сбывшимся научным предсказанием. (Прим. ред.)

кав) — $1,433\text{\AA}$. Это очень близко к данным для графита. Квантовомеханические расчеты показывают, что валентные электроны должны быть распределены более или менее равномерно по сферической оболочке толщиной примерно 8 а.е. ($1\text{ а.е.} = 0,529\text{\AA}$). Причем в центре футболино должна оставаться практически свободная от электронов полость радиусом около 2 а.е. . Так что молекула C_{60} является как бы маленькой пустой клеткой. Кстати, наличие полости внутри футболино уже, похоже, подтверждено экспериментально, при помощи так называемого мюонного анализа. (Роль чувствительного элемента в этом методе играет мюоний — что-то вроде атома водорода, только вместо протона он содержит мюон, элементарную частицу с зарядом $+e$ и массой $200m_e$. Свойства мюония сильно зависят от того, какова электронная плотность в той точке пространства, где он находится. Ученым удалось посадить мюоний внутрь «фуллереновой клетки» и показать, что свойства плененного и свободного мюония почти не различаются.)

Свободные футболино слабо притягиваются друг к другу ван-дер-ваальсовыми силами (той же природы, что и между углеродными слоями в кристалле графита). Благодаря этому притяжению, при комнатных температурах футболино кристаллизуются в механически непрочный кристалл желтовато-красного цвета с кубической гранецентрированной решеткой. Назвали новый кристалл фуллеритом. Расстояние между ближайшими футболино в этом кристалле при комнатной температуре — $10,0\text{\AA}$. Чистый, т.е. состоящий из одних футболино, фуллерит является диэлектриком. На рисунке 2 показана элементарная ячейка фуллерита. Футболино в кристалле фуллерита играют такую же роль, как и атомы в обычном кристалле. Многие физические свойства фуллерита (электронный спектр, например) можно рассчитать с большой точностью, считая футболино «эффек-

тивными» атомами и используя обычные методы расчета кристаллов.

Новые углеродные молекулы — фуллерены — и образованные из них кристаллы — фуллериты — являются третьей формой существования углерода в природе, или, используя научную терминологию, третьим аллотропом углерода. Причем первые два аллотропа — алмаз и графит — имеют на своей поверхности свободные связи, которые, стремясь насытиться, захватывают посторонние атомы, например атомы водорода. С фуллеренами и фуллеритами такого не происходит (у них нет свободных связей), так что среди аллотропов углерода они — самые чистые.

Как построить фуллерен. К середине 80-х годов, времени открытия фуллеренов, были великолепно разработаны методы экспериментального получения так называемых кластерных молекул — т.е. молекул, состоящих из небольшого числа одинаковых атомов. Обычно число атомов в таких кластерах достаточно произвольно. Однако уже первые эксперименты с углеродом преподнесли неожиданный сюрприз: большие кластеры с нечетным числом углеродов не образовывались! Сначала этот факт пытались объяснить образованием полимерных цепей из $[-C\equiv C-]$. Х.Крото и др. первыми дали правильную интерпретацию, но не смогли провести достоверного структурного анализа — у них было слишком мало фуллеренов. Их объяснение оставалось гипотезой, о фуллерены — экзотической игрушкой для теоретиков, пока примерно два года назад (летом 1990 года) не произошло революционное событие: был предложен способ производства фуллеренов в промышленных масштабах. Решение было найдено совершенно нетривиально американскими астрофизиками, специалистами по космической пыли В.Крэчмером, Д.Хуффманом и их студентами Л.Лэмбом, К.Фостиропулосом. Крэчмер и Хуффман уже достаточ-

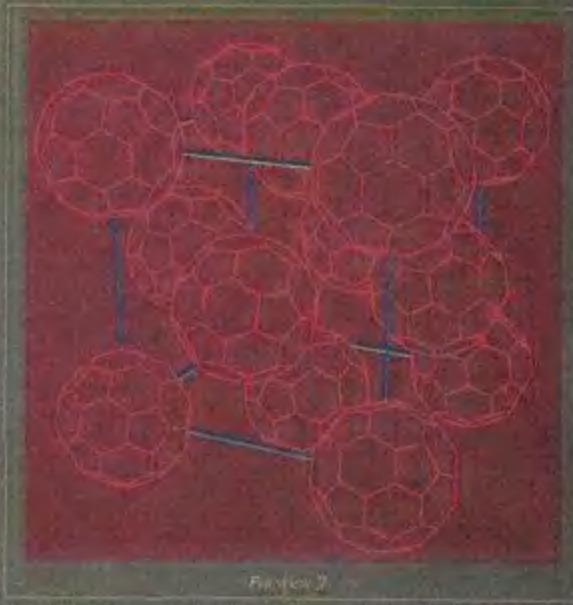


Рисунок 2

Устройство чистого графита — кристалла, образованного из шаровидных углеродных. Показаны одна элементарная ячейка кристалла, а также положение в вершинах куба и центрах сторон.

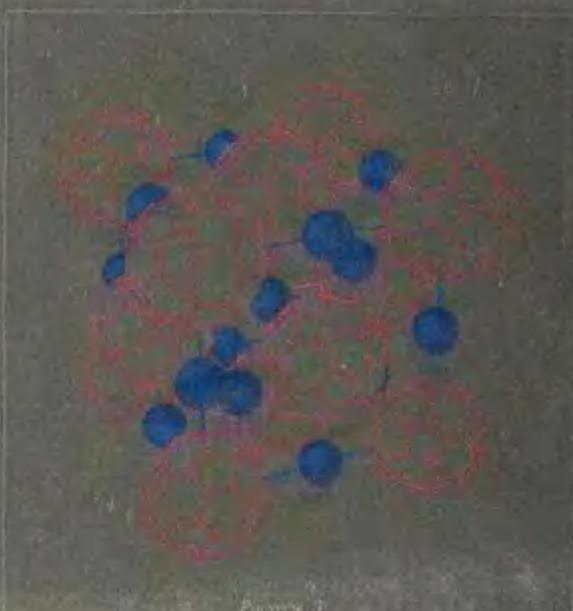


Рисунок 3

Кристаллическая структура сверхпроводящего графита К_{0.3}C₈. Маленькие шарик соответствующим атомам кальция примеси (кальций).

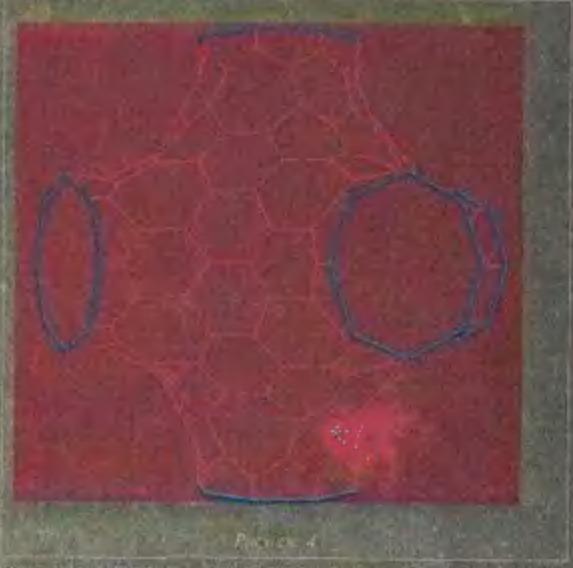


Рисунок 4

Элементарная ячейка графита из шестигранов — это октетной полярности, образованной из атомов углерода (структура выделена на сером фоне).

но давно, в 1983 году, попытались воспроизвести в своих экспериментах условия образования углеродной космической пыли. С этой целью они испаряли нагретый электрическим током графит в гелиевой атмосфере. После открытия бакминстерфуллерепа авторы решили повторить свои старые эксперименты. И для выделения предполагаемых молекул сферической формы воспользовались старым химическим правилом: растворяй подобное подобным. Они растворили образующийся при испарении угольный нагар в бензоле (также состоящем из замкнутых молекул). Образовалась жидкость желто-красная, зависящего от концентрации, цвета. Как ско-

евои атмосфере и дальнейшее растворение сажи в органическом растворителе — остались. Так что при отлаженном производстве цена конечного продукта должна определяться просто стоимостью затраченной электроэнергии: примерно 5 центов на грамм фуллеренов!

Как образуются фуллерены при сжигании графита и почему гелиевая атмосфера столь существенна? Как уже говорилось, кристалл графита состоит из плоских слоев, составленных из углеродных шестиугольников. При испарении графита в электрической дуге сначала, по всей видимости, образуются достаточно мелкие углеродные кластеры, имеющие линейную структуру и большое число свободных связей. В охлаждающей атмосфере гелия эти



Риснок 5

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ЭТАПЫ ОБРАЗОВАНИЯ БАКМИНСТЕРФУЛЛЕРЕПА C_{60} ПРИ ИСПАРЕНИИ ГРАФИТА В ГЕЛИЕВОЙ АТМОСФЕРЕ.

ро выяснилась, растворившаяся фракция сажи на 75% состояла из молекул C_{60} , на 23% — из C_{70} , а остальное приходилось на еще большие фуллерены. После выпаривания бензола на дне кюветы остались маленькие кристаллики фуллерита! Собственно анализ этих кристаллов и дал первую достоверную информацию о свойствах и форме фуллеренов.

В дальнейшем этот метод был усовершенствован. Оказалось, что для получения насыщенной фуллеренами угальной сажи удобно использовать электрическую дугу между графитовыми электродами. При выделении мономолекулярных фракций из фуллеренового раствора добиваются 99,99-процентной чистоты молекулярного состава. Но основные фазы производства — сжигание графитовых электродов в гели-

кластеры образуют графитовые «чешуйки», как бы обрывки графитовых плоскостей (рис.3). Этим чешуйкам энергетически выгодно пере-строиться (ведь у них по краям разамкнутые связи, иметь которые невыгодно): образовать вместо некоторых шестиугольников пятиуголь-ники и вследствие этого выгнуться (при этом концы свободных связей сблизятся и их энергия уменьшится). Если учесть, что соседство пятиугольников друг с другом энергетически невыгодно, в результате этой эволюции разом-кнутые концы должны сойтись и автоматически получится структура футбольного мяча! (Футбо-лино — это минимальный фуллерен, в котором пятиугольники не имеют общих ребер.) Таким образом, если фуллерен растет достаточно медленно, он с необходимостью должен быть бакминстерфуллереном. В реальных условиях, конечно, оболочка может замкнуться раньше,

чем образовалась идеальная структура футболино, и тогда возникнут другие структуры.

То, что охлаждающей баней (это — не образ, а научный термин) при росте фуллеренов служит инертный гелий, тоже не случайно. Объяснение в том, что гелий не насыщает свободные углеродные связи, давая углеродной чешуйке замкнуться самой на себя. Если в атмосфере сгорания были бы, например, атомы водорода, они могли бы насытить какие-то из свободных связей, симметрия сворачивающейся чешуйки нарушилась бы, и ее противоположные стороны не смогли бы сойтись. В результате вместо сферических замкнутых молекул начали бы расти структуры, подобные раковине улитки. Кстати, именно этот процесс и приводит к образованию угольной сажи при неполном сгорании в обычной атмосфере.

Самый-самый... — фуллерен. Предполагаемых применений фуллеренов очень много. Например, как основы для производства уникальных смазочных материалов. Как уже говорилось раньше, молекула C_{60} очень прочна химически и механически. Механическая прочность проверялась так: поток футболино разогнался до скорости 30000 км/ч (по порядку величины это первая космическая скорость) и направлялся на стальную стенку. После отражения фуллерены не разрушались! Такие свойства как раз и нужны для основы смазочного материала. Так что фуллерен C_{60} — это не только самый маленький в мире футбольный мяч, это еще и самый маленький и самый прочный шарикоподшипник.

С химической устойчивостью и пустотелостью фуллеренов связаны возможности их применения в химии, микробиологии и медицине. Вот один пример. Похоже, что фуллерены не имеют себе равных в качестве «упаковочных материалов» для отдельных атомов. В настоящее время ученые научились упаковывать в фуллерены даже такие тяжелые атомы,

как лантан или уран. Такие запечатанные атомы открывают неожиданные возможности для химиков. Например, использование фуллеренов для упаковки и доставки в требуемое место не только атомов, но и целых молекул, в том числе органических. Чем не находка для фармацевтов и микробиологов? Так что наш самый маленький в мире футбольный мяч оказывается к тому же и самым маленьким упаковочным ящиком, своего рода атомной авоськой.

Сейчас в молекулярной биологии для целей геной инженерии применяют вирусы (многие из которых, кстати, имеют форму футболино). Если удастся использовать фуллерены для переноски требуемой органической молекулы в требуемое место белка, будет создан искусственный специализированный вирус, и опять же — рекордно маленький! (Надеюсь, конечно, что во благо жизни на Земле.)

Теперь о микроэлектронике. Как известно, в последнее время процесс миниатюризации электронных приборов дошел в некотором смысле до своего естественного предела: молекулярных и атомных размеров. Собственно, уже и термин для новой технологии используется другой: не микро-, а наноэлектроника (поскольку характерные размеры элементов — нанометры, 10^{-9} м). Так вот, в области наноэлектроники наибольший интерес с точки зрения возможных приложений вызывают так называемые квантовые точки (quantum dots), т.е. включенные в наноэлектронную схему микрокристаллы или другие образования, которые могут удерживать вблизи себя (локализовать) электроны. Оказывается, такие точки обладают рядом уникальных оптических свойств, которые позволяют использовать их, например, для управления волоконной оптической связью либо в качестве элементов процессора в проектируемом в настоящее время оптическом суперкомпьютере. Так вот, фуллерены являются во многих отношениях идеальными

квантовыми точками. Продолжая наш список рекордов, можно сказать, что фуллерены имеют шанс стать самой маленькой микросхемой в компьютерном нанопроцессоре.

И наконец, высокотемпературная сверхпроводимость. После открытия в 1986 году Беднорцем и Мюллером высокотемпературных оксидных сверхпроводников все новые вещества стали проверять «на предмет возможности сверхпроводимости». Конечно, чистый фуллерит, о котором говорилось выше, будучи диэлектриком давал мало шансов для сверхпроводимости. Однако рецепт превращения диэлектрика в проводник хорошо известен: легирование. Атомы подходящей примеси могут, например, служить донорами необходимых для передачи электрического тока электронов. Именно путем легирования был получен первый высокотемпературный сверхпроводник $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ (здесь $x = 0,1-0,2$ — концентрация примеси, в данном случае стронция). И вот в начале 1991 года произошла новая сенсация: А. Хебард и др. открыли, что легированный калием фуллерит K_3C_{60} становится сверхпроводником при температуре 18 К (-255°C). Конечно, не рекордно высокая температура. Но после замены калия на рубидий температурно сверхпроводящего перехода возросла до 28–29 К. Как раз с таких температур и началась в 1986 году сверхпроводящая гонка — ведь до этого десятилетиями не удавалось поднять температуру сверхпроводящего перехода выше 24 К. Началась она и сейчас, и уже есть сообщения о повышении критической температуры до 43 К. Причем, благодаря прочности молекулы C_{60} , сверхпроводники на их основе обладают, по-видимому, большой стабильностью. И этим выгодно отличаются от высокотемпературных оксидных сверхпроводников. Кристаллическая структура такого сверхпроводящего фуллерита показана на рисунке 4. Легирующая примесь занимает места в кристалле между фуллеренами.

Еще одна форма углерода: шварцит.

Итак, ячеистые конструкции из углеродных шестиугольников и пятиугольников открыты и весьма интенсивно исследуются. А как обстоят дело с семиугольниками?

Экспериментально такие структуры еще не получены, но теоретики уже моделируют на компьютерах их свойства. Причем здесь возникает даже больше возможностей, чем в случае фуллеренов. В качестве примера приведем углеродную «губку», в которой сложная выложенная из шестиугольников и семиугольников поверхность разделяет трехмерное пространство на два подпространства.

Назвали такие структуры шварцитами — в честь немецкого математика Шварца, который первым исследовал такие поверхности в конце прошлого века.

На рисунке 5 показана лишь одна элементарная ячейка шварцита. Весь кристалл получается бесконечным повторением таких ячеек. Шварцит имеет кристаллическую решетку такого же типа, как и фуллерит на рисунке 2 — кубическую гранцентрированную. В элементарной ячейке 216 вершин, 24 семиугольника, 80 шестиугольников и 3 ручки. Обратите внимание, что в данной периодической структуре ручки соединяют между собой соседние ячейки кристалла; на рисунке 5 каждая ручка рассечена пополам и показана только ее половина.

Как уже говорилось, экспериментально такие структуры пока не наблюдались. Однако если ученые найдут способ синтезировать этот новый аллотроп углерода, они получат материал с интереснейшими механическими, физическими и химическими свойствами.

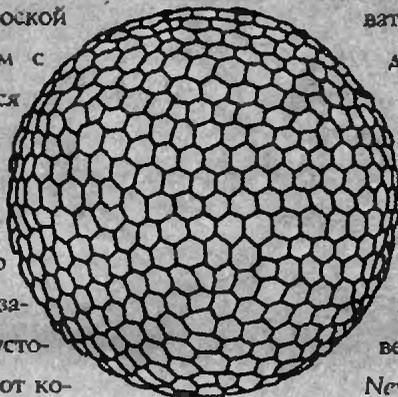
Автор благодарен Григорию Копелевичу, сделавшему компьютерные иллюстрации

к статье

ПОЛЫЕ МОЛЕКУЛЫ (Из книги Дэвида Джоунса «Изобретения Дедала»)

Существует любопытный разрыв между значениями плотности газов (порядка $0,001 \text{ г/см}^3$), с одной стороны, и жидкостей и твердых тел (от $0,5$ до 25 г/см^3) — с другой. Размышляя над тем, как заполнить этот разрыв, Дедал пришел к идее полой молекулы. Такая молекула могла бы представлять собой замкнутую сферическую оболочку плоской полимерной молекулы, подобной «молекуле» графита, имеющей плоскую гексагональную структуру — нечто вроде сетки с шестиугольными ячейками. Дедал предлагает модифицировать процесс высокотемпературного синтеза графита путем введения соответствующих примесных атомов или молекул, что вызвало бы изгиб плоской структуры (подобным образом с помощью примесей добиваются нужной структуры полупроводникового кристалла). Искривление плоского листа в конечном счете приведет к смыканию растущих краев и образованию замкнутой поверхности. Радиус пустотелой молекулы будет зависеть от количества введенной примеси. По расчетам

Дедала, вещество, состоящее из полых молекул радиусом $0,05 \text{ мкм}$, будет иметь плотность около $0,04 \text{ г/см}^3$, т.е. что-то среднее между плотностью жидкости и плотностью газа; такое вещество можно рассматривать как некое «пятое состояние» вещества. Эти гигантские молекулы (с относительной молекулярной массой до 100 млн. единиц) едва ли способны «испаряться», а взаимодействовать между собой они будут так слабо, что подобное «состояние» вещества нельзя будет отнести ни к газообразному, ни к жидкому. Скорее всего, его можно рассматривать как «разреженную» жидкость, не улетучивающуюся из открытого сосуда, но и не принимающего его форму; при нагревании это вещество будет расширяться и переходить (не закипая) в газообразное состояние.



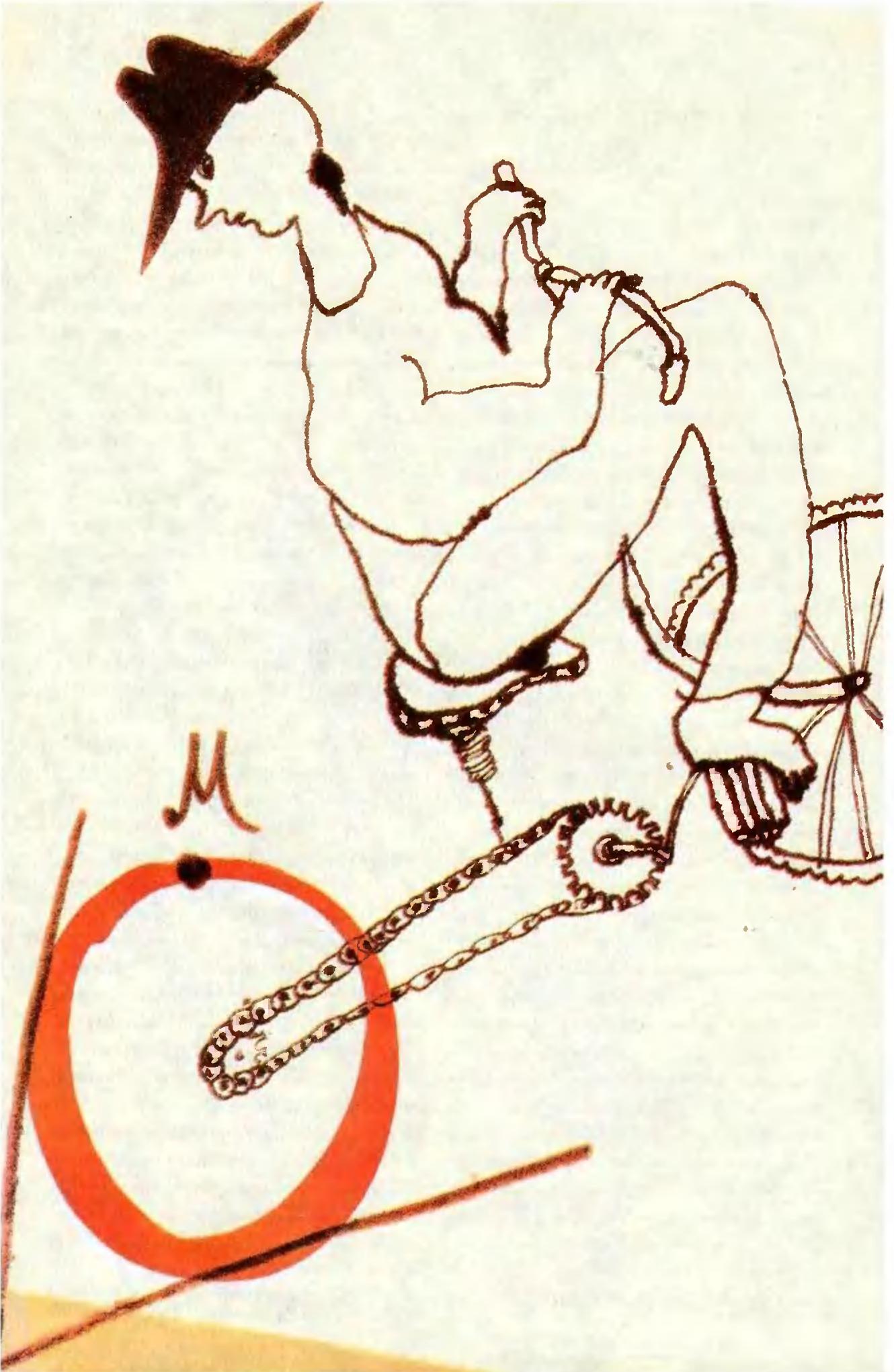
Столь замечательные вещества, безусловно, найдут множество применений — они открывают путь к созданию новых конструкций барометров и автомобильных амортизаторов, к новым принципам ожигения; вероятно, они окажутся идеальными смазочными материалами, обладающими, помимо ничтожно малой вязкости, еще и «эффектом шарикоподшипника». Вначале Дедал беспокоился, что внешние нагрузки приведут к деформации этих молекул, но затем понял, что, если их синтезировать в нормальной атмосфере, они будут упругими, как крошечные мячики. Теперь Дедал ищет способ оставлять в оболочках этих молекул небольшие «окошки», благодаря чему они могли бы поглощать молекулы внешней среды или обмениваться своим содержимым со средой, действуя как исключительно

эффективные молекулярные сита. Таким образом, они могли бы накапливать внутри себя молекулы внешней сферы в количестве, в сотни раз превышающем их собственный вес.

New Scientist, November 3, 1966

Из записной книжки Дедала

...В силу теоремы Эйлера невозможно построить многогранник с шестиугольными гранями, поскольку в этом случае было бы $V + G - P = 0$. В своей замечательной книге «Рост и форма» (*Growth and Form, Cambridge University Press, p.708,738*) Д'Арси Толмсон рассматривает эту задачу в применении к радиоляриям — микроскопическим морским обитателям, чьи известковые скелеты нередко имеют вид гексагональной сетки. Даже восклицательная в своей симметричности *Aulonia hexagona* (которую можно было бы рассмотреть как увеличенное в 10^3 раз изображение полой графитовой молекулы, состоящей из 1200 атомов) имеет несколько нешестиугольных граней...



ПРОСТО, КАК КОЛУМБОВО ЯЙЦО

АНАТОЛИЙ САВИН

Появление задачи

Началась эта история в 1948 году, когда я, долговязый восьмиклассник одной из московских школ, начал посещать занятия математического кружка при Московском университете. Занятия вели студенты (руководителем моей секции был В. Болтянский, ныне известный математик), а по воскресеньям нам читали лекции профессора университета. Одну из лекций прочел академик А. Колмогоров. Я уже не помню, чему была посвящена лекция, но один ее момент врезался в мою память. Андрей Николаевич рассказал о том, как на шарикоподшипниковом заводе проверяют роликовые подшипники «на круглость». Ролик укладывают в угловой лоток (рис. 1), приставляют к нему щуп и начинают вращать ролик. Если щуп при этом остается неподвижным, то считается, что ролик круглый, и по положению щупа определяется его диаметр; если щуп движется или диаметр ролика не соответствует стандарту — ролик бракуется. Но насколько эффективна такая проверка? Может ли «проскочить» некруглая деталь?

Если поставить задачу математически, то она будет выглядеть следующим образом. *Дан угол и точка M внутри него. Существует ли фигура, которая при вращении, касаясь сторон угла, будет содержать точку M на своей границе?*

А. Колмогоров отметил, что решение этой задачи, имеющей большое практическое значение, еще не получено, и предложил своим слушателям решить ее. Мне задача понравилась, я много размышлял над ней. Позже, будучи уже студен-

том мехмата и одним из руководителей школьного кружка при МГУ, я усиленно пропагандировал эту задачу среди своих учеников. Но продвижений не было.

В 1970 году начал выходить журнал «Квант», и в одном из его номеров (№3 за 1971 г.) я поместил небольшую заметку об этой задаче.

Решение

Прошло почти десять лет. И вот в «Квант» пришло письмо от ленинградского школьника Андрея Бабичева, известного своими успехами на математических олимпиадах, в котором он сообщал о своем решении задачи Колмогорова.

Решение было удивительно простым. Возьмем правильный многоугольник, продолжим две его стороны до пересечения (можно взять просто две соседних стороны) — это будет наш угол, а за точку M примем одну из вершин, не лежащих на этих сторонах. Начнем поворачивать многоугольник так, чтобы он все время касался сторон угла, и будем отмечать на нем положение точки M (рис. 2). Получим «звездочку». Если ее вырезать из многоугольника, то это и будет искомой фигурой.

В письме Андрей не сообщал, что за кривая образуется на многоугольнике. Я довольно бы-

стро определил, что «звездочка» составлена из дуг «улитки Паскаля» (конхоиды окружности). Эта кривая получается так. На заданной окружности выбирается точка, через нее проводятся всевозможные прямые, на этих прямых откладываются отрезки заданной величины a так, чтобы один из концов каждого отрезка лежал на заданной окруж-

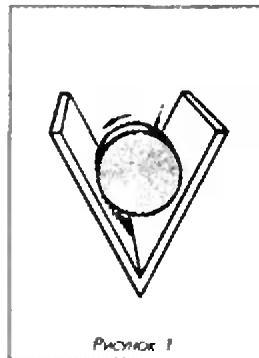
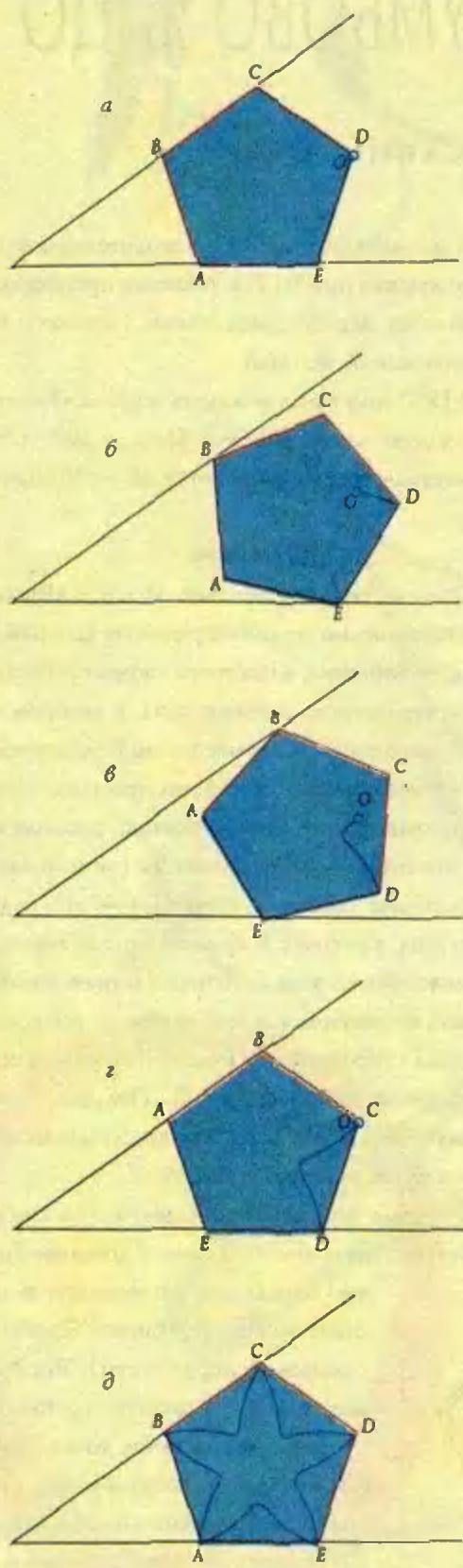


Рис. 1

Проверка ролика на «круглость».



Риснок 2

ВРАЩЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКА ПОРОЖДАЕТ РЕШЕНИЕ.

ности. Вторые концы этих отрезков и определяют кривую, называемую улиткой Паскаля. В случае, когда a меньше диаметра, получается кривая с петлей (рис.3,а). Если a равняется диаметру, то такая кривая называется кардиоидой (рис.3,б). Если же a больше диаметра, то вид кривой таков, как на рисунке 3,в.

Убедиться в том, что кривая на многоугольнике является улиткой Паскаля, несложно. Для этого поменяем ролями угол и многоугольник — будем вращать угол (с точкой M) вокруг многоугольника. Ясно, что на протяжении всего поворота на угол $\alpha = 360^\circ/n$ (n — число сторон многоугольника) многоугольник будет касаться сторон угла двумя вершинами. На рисунке 4 это вершины A и C , если вращение угла происходит против часовой стрелки, что соответствует вращению многоугольника по часовой стрелке. При таком вращении точка S будет двигаться по дуге окружности, поскольку множество вершин углов заданного размера, опирающихся на заданный отрезок, есть дуга окружности. Нарисуем всю эту окружность и отметим точку N , в которой она пересекается с отрезком SM . Отношение длин дуг AN и NC , очевидно, равно отношению величин углов ASM и MSC . Поэтому, если мы будем поворачивать плоскость с нарисованными на ней углом и точкой M , оставляя многоугольник неподвижным, точка S будет скользить по дуге окружности, а отрезок SM будет проходить через точку N этой окружности. Поскольку величина отрезка SM равна a — постоянной величине, — точка M будет скользить по дуге улитки Паскаля.

НОВАЯ ПОСТАНОВКА

На этом можно было бы поставить точку, хотя оставалось несколько вопросов. Например, любую ли вершину многоугольника можно брать в качестве точки M ? (Ясно, что не любую, но интересно определить, какие нельзя.) Андрей Николаевич Колмогоров, ознакомившись с результатами А.Бабичева, задал сле-

дующий вопрос: существует ли выпуклая кривая, удовлетворяющая условиям задачи?

Эта проблема, опубликованная вместе со статьей А.Бабичева («Квант» №5 за 1981г.), стала популярной среди студентов-математиков МГУ, ЛГУ и ряда других университетов. Но результата долго не было. И вот в середине этого года недавний выпускник МГУ Валерий Цыгикало принес в редакцию толстую пачку аккуратно исписанных страниц, содержащую удивительное решение этой проблемы.

РЕШЕНИЕ!

Идея В.Цыгикало явилась продолжением идеи А.Бабичева. Заменяем правильный многоугольник произвольной кривой, касающейся сторон угла. Точку M возьмем в одном из концов этой дуги. Начнем вращать дугу так, чтобы она продолжала касаться сторон угла; тогда точка M будет вычерчивать продолжение взятой кривой. Такую процедуру нетрудно осуществить с помощью кальки. Действительно, нарисуем на листе бумаги угол и точку M внутри него, положим на бумагу лист кальки и нарисуем на ней произвольную кривую, касающуюся сторон угла. Один из концов дуги этой кривой должен находиться в точке M (рис. 5,а). Повернем лист кальки на небольшой угол так, чтобы кривая вновь коснулась обеих сторон угла. При этом конец кривой переедет из точки M в другую точку. Траекторию конца постараемся изобразить на кальке, тем самым продолжив имеющуюся кривую (рис. 5,б). Еще повернем (рис. 5,в) и вновь продолжим кривую и т.д. Получим некоторую спиралеобразную кривую (рис. 5,г), вид которой зависит, конечно, от величины угла, выбранной точки и выбранной кривой.

Валерий Цыгикало запрограммировал этот процесс, что дало ему возможность наблюдать такие кривые на дисплее компьютера. Его наблюдения показали, что при достаточно долгом вращении получаемая кривая стабилизируется

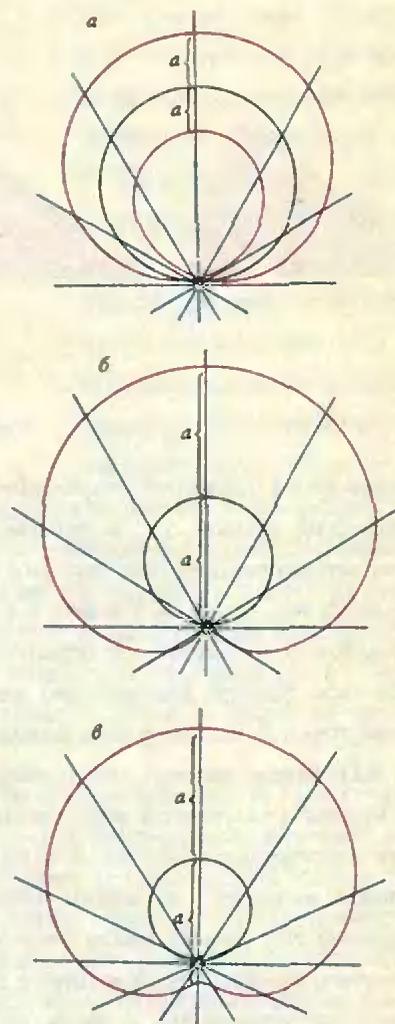


Рис. 3
Улитка Паскаля.

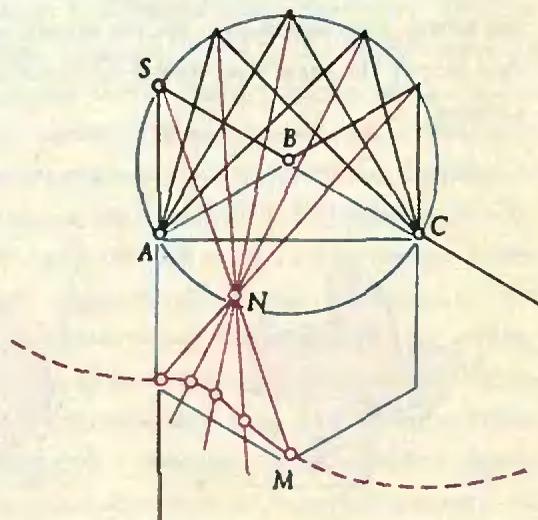
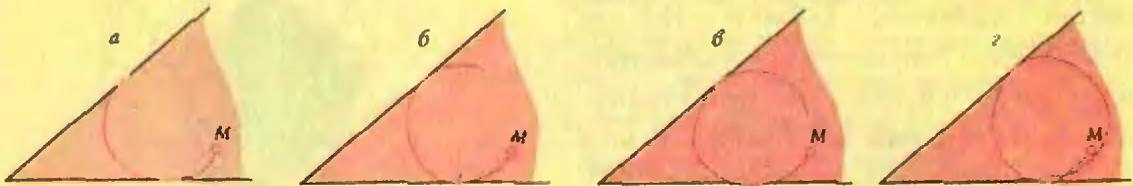


Рис. 4
Кривая Бабичева — улитка Паскаля.



Риснок 5

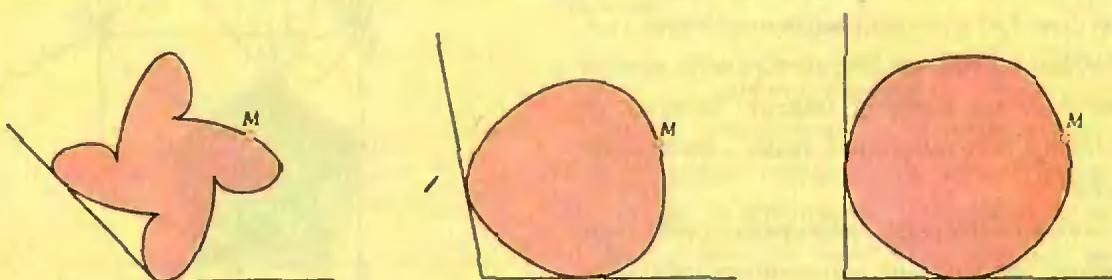
ВРАЩЕНИЕ КРИВОЙ ПОРОЖДАЕТ ЕЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ.

— стремится к некоторой спиралеобразной периодической кривой, т.е. к кривой, которая повторяется через определенный угол поворота T . Однако, как правило, $T \neq 2\pi$, т.е. кривая получается незамкнутой, не ограничивающей какой-либо фигуры. Непрерывно меняя положение точки M , величину угла, начальную кривую. В.Цыгикало получал, что и результирующая кривая (получаемая при стабилизации) также непрерывно меняется, в частности, непрерывно меняется и ее период. Путем таких изменений ему удалось найти большой набор замкнутых кривых, среди которых были как невыпуклые кривые, так и выпуклые (рис.6). Кстати, если в качестве начальной кривой взять правильный многоугольник, две его стороны — в качестве сторон угла, одну из вершин в качестве точки M , то компьютер рисует великолепную улитку Паскаля. Ура! Задача Колмогорова решена!

РЕШЕНИЕ?

Однажды, как гласит легенда, Христофору Колумбу, открывшему 500 лет назад Америку, была предложена задача — поставить яйцо на его острый конец. Решение Колумба было простым и неожиданным: он ударил яйцом о стол — скорлупа на остром конце смялась и яйцо устойчиво встало на столе. «Колумбово яйцо» вошло в наш лексикон, как символ неожиданно простого решения задачи, хотя решение Колумба оставляет чувство неудовлетворенности: яйцо-то испорчено.

Увы, это же чувство возникает и при внимательном изучении решения В.Цыгикало. Он может продемонстрировать на дисплее выпуклые кривые, удовлетворяющие условиям задачи Колмогорова. Но что это за кривые? Действительно ли они выпуклы? На глаз — вроде бы да. А на самом деле? Компьютер выдает нам ответ, который мы не можем пока проверить. Подобная ситуация уже встречалась в матема-



Риснок 6

ПРИМЕРЫ КРИВЫХ ЦЫГИКАЛО.

тике — я имею в виду нашу-мевшее решение «задачи о четырех красках», когда машина выполнила огромный объем проверок, недоступный человеку. Правда, в случае задачи Колмогорова решение В.Цыгикало указывает четкий путь для строгого доказательства существования выпуклых фигур, удовлетворяющих условию этой задачи.

ЗАДАЧА ЛЮСТЕРНИКА

Одно время я занимался исследованием задачи Аполлония: построить окружность, касающуюся трех данных окружностей. Обсуждая с разными людьми методы ее решения, я узнал, что в 1946 году московский математик Лазарь Аронович Люстерник в журнале «Успехи математических наук» поставил следующую проблему: *существует ли выпуклая фигура, отличная от круга, которая может, вращаясь, все время касаться трех заданных окружностей?*

Заметим, что математики причисляют прямые и точки к окружностям (прямая — окружность бесконечного радиуса, точка — окружность нулевого радиуса). Поэтому задача Колмогорова является частным случаем задачи Люстерника: две из окружностей — прямые, а третья — точка. Видимо, исходя из постановки задачи Люстерника, А.Колмогоров переформулировал свою задачу.

В течение долгого времени были известны решения задачи Люстерника лишь в двух случаях: 1) окружности — прямые, образующие правильный треугольник; 2) окружности — точки, являющиеся вершинами правильного треугольника. В обоих случаях решение давала одна и та же фигура — пересечение двух кругов, центр каждого из которых лежит на границе другого круга (рис. 7). Заметим, что во втором случае существует бесконечно много невыпуклых фигур, удовлетворяющих остальным условиям задачи. В дальнейшем было показано су-

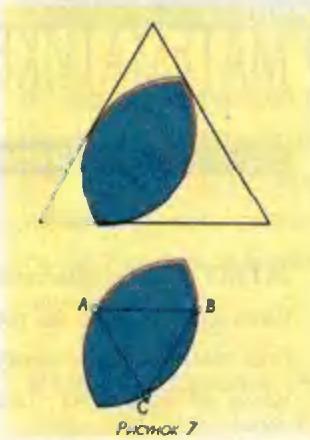


Рис. 7
Луночка — решение двух задач Люстерника.

ществование решения задачи в том случае, если окружности — это прямые, образующие треугольник, углы которого рационально выражаются через π . Совсем недавно молодой выпускник МФТИ М.Ковалев доказал, что не существует выпуклой фигуры, отличной от круга, которая, вращаясь, касается одновременно и заданной прямой в определенной точке, и заданного круга (при условии,

что выбранная на прямой точка касания не совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного на эту прямую из центра круга). Таким образом, он решил задачу Люстерника для случая, когда одна из окружностей — прямая, а другая — точка, лежащая на этой прямой.

Чуть было не забыл еще об одном частном случае задачи Люстерника, который можно рассматривать и как частный случай задачи Колмогорова. Пусть две из окружностей — параллельные прямые, а третья — точка, лежащая между ними. Тогда решением задачи будет любая фигура постоянной ширины. Простейшей из таких фигур является треугольник Рело — общая часть трех кругов, центры которых лежат в вершинах равностороннего треугольника, а радиусы равны стороне треугольника. В данном случае сторону треугольника следует взять равной ширине полосы между параллельными прямыми. Ясно, что совсем нетрудно модифицировать программу В.Цыгикало для задачи Люстерника в случае, когда одна из заданных окружностей — точка. Чуть сложнее это будет сделать для общего случая (все три окружности невырождены). Настойчивые экспериментаторы получают и здесь компьютерные решения, а наличие таких решений является мощным стимулом для полного выяснения условий существования решения задачи Люстерника.

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают приглашение участвовать в заключительных турах Российской олимпиады по математике и физике.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 апреля 1993 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1/2 — 93» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1381» или «Ф1388». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письме вложите конверт с написанным на нем вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

ЗАДАЧИ М1381 — М1385

М1381 / В.Произволов (Москва). Окружность разбита $2n$ точками на равные дуги. Докажите, что у любой замкнутой ломаной линии из $2n$ звеньев с вершинами во всех этих точках есть два параллельных звена.

М1382 / А.Сойфер (Колорадо-Спрингс, США). Все точки плоскости раскрашены в два цвета — черный и белый — произвольным образом. Докажите, что найдется треугольник с вершинами одного цвета и меньшей стороной длины 1, отношение углов которого равно а) 1:2:3; б) 1:2:4.

М1383 / А. Туцеску (Крайова Румыния). Пусть сумма n чисел равна 0, причем m — наименьшее из них, а M — наибольшее. Докажите, что а) сумма квадратов этих чисел не превосходит $-mMn$;

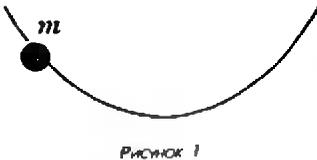
б) сумма четвертых степеней этих чисел не превосходит $-mMn(m^2 + M^2 + mM)$.

М1384* / В.Сендеров (Москва). ABC — неравнобедренный остроугольный треугольник; O и I — центры описанного и вписанного кругов, H — ортоцентр треугольника. Докажите, что четырехугольники $AOIH$, $BOIH$ и $COIH$ невырождены и среди них ровно два выпуклых.

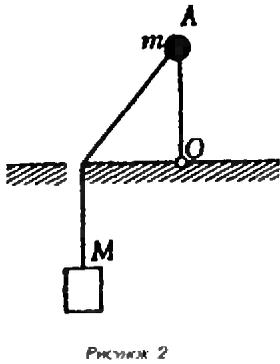
М1385* / В.Быковский (Хабаровск). Пусть ABC — произвольный треугольник. Докажите, что а) для любого правильного треугольника $A_1B_1C_1$ выполнено неравенство $A_1A^2 + B_1B^2 + C_1C^2 \leq (AB^2 + BC^2 + CA^2)/6 - (2/\sqrt{3})S_{ABC}$;

б) Существует правильный треугольник $A_1B_1C_1$, для которого это неравенство превращается в равенство.

ЗАДАЧИ Ф1388 – Ф1392

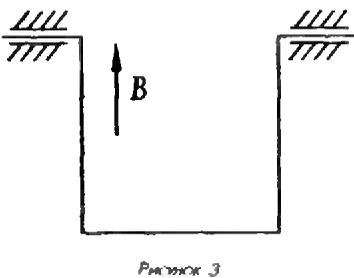


Ф1388 / З.Рафаилов (Москва). Гладкая проволока изогнута в горизонтальной плоскости в форме параболы $y = ax^2$ (рис.1). По проволоке с постоянной по величине скоростью v_0 скользит бусинка массой m . С какой силой бусинка действует на проволоку в вершине параболы?

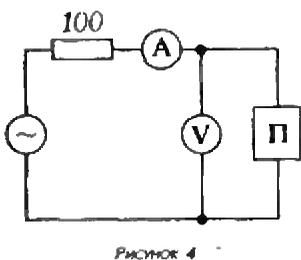


Ф1389 / Г.Коткин (Новосибирск). Невесомый стержень OA длиной L с грузиком массой m на конце может вращаться без трения вокруг точки O , расположенной на поверхности стола (рис.2). Другой грузик — массой M — прикреплен к первому при помощи нерастяжимой нити, пропущенной через отверстие в столе на расстоянии $L/2$ от точки O . В начальный момент стержень приводят в вертикальное положение и отпускают без начальной скорости. Найдите скорость грузика массой m перед ударом его о стол.

Ф1390 / И.Воробьев (Новосибирск). В объеме V_0 при температуре T_0 и давлении p находился воздух, содержащий некоторое количество озона O_3 . После долгого выдерживания в тени озон полностью превратился в молекулярный кислород. При том же давлении температура воздуха стала T , объем — V . Найдите начальное число молекул озона.



Ф1391 / А.Киприянов (Новосибирск). П-образная рамка с равными сторонами, сделанная из тонкой проволоки, свободно висит на шарнирном соединении в вертикальном магнитном поле \vec{B} (рис.3). На какой максимальный угол отбросит рамку, если по ней пропустить постоянный ток силой I_0 ? Масса единицы длины проволоки ρ .



Ф1392 / А.Зильберман (Москва). Электрический прибор подключен к сети напряжением 220 В последовательно с резистором сопротивлением 100 Ом (рис.4). Амперметр показывает ток 0,5 А вольтметр — напряжение 200 В. Какую среднюю мощность потребляет прибор от сети? Чему равно «пиковое» значение потребляемой всей схемой мощности?

M1355. Докажите, что если число $a = 2^{2k} + 2^k + 1$ не является делителем числа $2^{2^{k+1}} - 1$, то a — составное.

Первое решение.

Лемма 1. Многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$ тогда и только тогда, когда $n \neq 3l$. (При этом частное будет многочленом с целыми коэффициентами.)

Доказательство проведем по индукции. Случаи $n=0$ и $n=1$ очевидны.

При $n=2$ имеем:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

(При $x=2$, — а это и нужно для решения задачи, — последнее соображение излишне).

Из рассмотрения разности многочленов $x^{2(n+3)} + x^{n+3} + 1$ и $x^{2n} + x^n + 1$ видно, что они делятся либо не делятся на $x^2 + x + 1$ одновременно. Значит, если утверждение верно для n , то оно верно и для $n+3$. Лемма доказана.

Лемма 2. При $t \geq 0$ число $2^{3^t} + 1$ делится на 3^{t+1} .

Доказательство снова проведем по индукции. При $t=0$ утверждение справедливо. Пусть $t \geq 1$. Тогда

$$2^{3^t} + 1 = (2^{3^{t-1}} + 1)((2^{3^{t-1}})^2 - 2^{3^{t-1}} + 1).$$

По предположению индукции, первый сомножитель делится на 3^t . Так как $2^{3^{t-1}} \equiv -1 \pmod{3}$, то второй сомножитель делится на 3.

Лемма доказана.

Решение задачи. Пусть $2^{2k} + 2^k + 1$ — простое число. Из леммы 1 следует, что $k = 3^t$. Достаточно доказать, что число $(2^{3^t})^3 - 1 = 2^{3^{t+1}} - 1$ является делителем числа $2^{2^{3^t+1}} - 1$. Для этого достаточно доказать, что $2^{3^t} + 1$ делится на 3^{t+1} . Последнее утверждение следует из леммы 2.

Получили: $2^{2k} + 2^k + 1$ — составное число.

Второе решение. Наметим план другого решения, использующего малую теорему Ферма: если p простое, a не делится на p , то $a^{p-1} - 1$ делится на p .

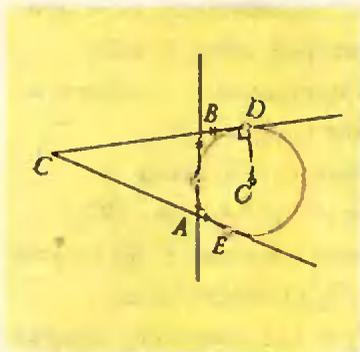
Пусть $p = 2^{2k} + 2^k + 1$ простое. Выясним, для какого наименьшего показателя m число $2^m - 1$ делится на p , т.е. $2^m \equiv 1 \pmod{p}$: при этом n , для которых $2^n \equiv 1 \pmod{p}$, будут числами, кратными m . Ясно, что $2^{3k} - 1 = (2^k - 1)(2^{2k} + 2^k + 1)$ делится на p , так что $3k$ делится на m . С другой стороны, $2^{3k/2} < p$, поэтому m не может быть меньше $3k$, $m = 3k$.

Согласно малой теореме Ферма, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; следовательно, $p-1 = 2^k(2^k + 1)$ делится на $3k$.

Если $k > 1$ четно, то $2^{2k} + 2^k + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, p не простое. Поэтому k нечетно, значит, $2^k + 1$ делится на $3k$ и тем самым $2^{2^{k+1}} - 1$ делится на $2^{3k} - 1$.

Н. Васильев, В. Сендеров

M1356. Докажите, что если $abc = 4Rr_c$, где a, b, c — стороны треугольника, R, r, r_c — радиусы описанной, вписанной и одной из вневписанных окружностей, то треугольник прямоугольный. (Вневписанная окружность касается стороны c и продолжений двух других сторон.)



M1357. Докажите, что оба числа $91! \cdot 1900! - 1$ и $92! \cdot 1900! + 1$ делятся на 1993.

Воспользуемся формулами $S = \frac{abc}{4R}$, $S = rp$, где S — площадь треугольника, p — его периметр.

Получаем: $p = r_c$.

Отсюда, пользуясь равенством касательных, проведенных к окружности из одной точки, получаем (см. рисунок):

$CD = OD$. Значит, $\angle DCO = \frac{\pi}{4}$, $\angle DCE = 2\angle DCO = \frac{\pi}{2}$.

Б.Турешбаев

Сумма данных чисел, т.е. число $(91! \cdot 1900! - 1) + (92! \cdot 1900! + 1) = 1993 \cdot 91! \cdot 1900!$, делится на 1993. Поэтому достаточно доказать, что $n = 92! \cdot 1900! + 1$ делится на 1993. Ясно, что n делится либо не делится на 1993 одновременно с числом $(1993 - 1)(1993 - 2) \dots (1993 - 92)1900! + 1 = 1992! + 1$.

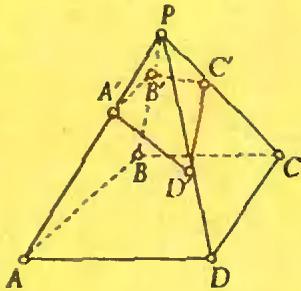
По известной теореме Вильсона¹ $(p - 1)! + 1$ делится на p при любом простом p . Воспользовавшись простотой числа 1993, получаем утверждение задачи.

Замечание. Подобным же образом доказывается и более общий факт: при любом простом p число $(p - k)! k! + (-1)^k$ делится на p .

Ю.Калиниченко

¹ Теорема Вильсона утверждает, что число $A = (p - 1)! + 1$ делится на p тогда и только тогда, когда p — простое число. В одну сторону она почти очевидна: если p — составное и $1 < d < p$ — его делитель, то среди чисел $1, 2, \dots, p - 1$ встретится число d , такое что A не делится на d и, тем более, на p . Если число p простое, то для всякого числа $2 \leq q \leq p - 2$ среди чисел $2, 3, \dots, p - 2$ найдется такое число q' , что $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ (докажите это!). Поэтому $(p - 1)! \equiv 1(p - 1) \pmod{p}$, но это и значит, что $(p - 1)! + 1$ делится на p .

M1358. Назовем кубоидом шестигранник, все грани которого — четырехугольники. Докажите, что если три из четырех его диагоналей (не лежащих на его гранях) пересекаются в одной точке, то и четвертая проходит через эту точку.



Покажем, что грани кубоида расположены так же, как у куба (сходятся по три в каждой из всех его восьми вершин).

Пусть $ABCD$ — одна из граней («основание»). К ее сторонам примыкают еще четыре грани. Остается только одна грань, с необходимостью примыкающая к «верхним» сторонам боковых граней (которые противоположны сторонам основания). Следовательно, верхние стороны образуют четырехугольник, и многогранник выглядит как на рисунке.

Пусть, в обозначениях этого рисунка, все диагонали кубоида, кроме, может быть, AC_1 , пересекаются в одной точке. Поскольку BD_1 и B_1D пересекаются, ребра BB_1 и DD_1 лежат в одной плоскости и, следовательно, либо при продолжении пересекутся в некоторой точке P , либо параллельны. В первом случае P принадлежит плоскостям граней VAA_1B_1 и DAA_1D_1 , а значит и линии их пересечения AA_1 . Аналогично, прямая CC_1 также проходит через P , т.е. все четыре ребра AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 при продолжении пересекаются в точке P . Во втором случае плоскости VAA_1B_1 и DAA_1D_1 проходят через параллельные прямые BB_1 и DD_1 и, следовательно, прямая AA_1 их пересечения тоже параллельна этим прямым. Точно также, CC_1 параллельна BB_1 , т.е. все четыре ребра AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 параллельны между собой. В любом случае ребра AA_1 и CC_1 лежат в одной плоскости, т.е. «четвертая диагональ» AC_1 пересекает A_1C . Аналогично доказывается, что четыре ребра AB , DC , A_1B_1 , D_1C_1 либо параллельны, либо при продолжении пересекаются в одной точке (и то же верно для третьей четверки AD , BC , A_1D_1 , B_1C_1). Следовательно, AC_1 пересекается с BD_1 . А так как диагональ AC_1 не лежит в одной плоскости с диагоналями A_1C и BD_1 , она должна пройти через точку их пересечения, что и требовалось доказать.

Для читателей, немного знакомых с проективной геометрией, укажем, что рассматриваемый здесь кубоид проективно эквивалентен параллелепипеду (и тем самым, если угодно, просто кубу).

В.Дубровский

M1359. Пусть $0 < a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$. Докажите, что уравнение

Приведем сразу решение пункта б).

Докажем, что уравнение имеет не менее n корней.

Обозначим $\psi(x) = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx$. На

$a_0 + a_1 \cos x + \dots$
 $\dots + a_n \cos nx = 0$ имеет на
 отрезке $[0, \pi]$
 а) хотя бы один корень;
 б) *ровно n корней.

интервале $(0, \pi)$ рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \sin \frac{x}{2} (a_n \cos nx + \dots + a_1 \cos x + a_0) = \\ &= a_n \sin(n + \frac{1}{2})x + (-a_n \sin(n - \frac{1}{2})x + a_{n-1} \sin(n - \frac{1}{2})x - \dots \\ &\dots - a_2 \sin \frac{3}{2}x + a_1 \sin \frac{3}{2}x - a_1 \sin \frac{x}{2} + a_0 \sin \frac{x}{2}) = \\ &= a_n \sin(n + \frac{1}{2})x + \varphi(x). \end{aligned}$$

Имеем:

$$|\varphi(x)| \leq (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0) = a_n - a_0 < a_n.$$

Значит, при $|\sin(n + \frac{1}{2})x| = 1$ знак функции $f(x)$ совпадает со знаком $\sin(n + \frac{1}{2})x$. Следовательно, $f(x)$ имеет нуль между любыми двумя подряд идущими точками экстремума функции $\sin(n + \frac{1}{2})x$. Это дает $n - 1$ корень уравнения. При нечетном n имеем:

$$\begin{aligned} \sin((n + \frac{1}{2}) \frac{\pi(2n-1)}{2n+1}) &= 1, \\ f(\frac{\pi(2n-1)}{2n+1}) &> 0, \quad \psi(\pi) \leq 0. \end{aligned}$$

Аналогично при четном n имеем:

$$f(\frac{\pi(2n-1)}{2n+1}) < 0, \quad \psi(\pi) > 0.$$

Таким образом, получаем еще один корень.

Докажем теперь, что уравнение имеет не более n корней.

Индукцией по n , используя равенство

$$\cos nx = \cos(n-1)x \cos x + \frac{1}{2}(\cos nx - \cos(n-2)x),$$

легко доказать, что $\cos nx$ — многочлен от $y = \cos x$ степени n (со старшим коэффициентом 2^{n-1}).

Значит, $\psi(x)$ — также многочлен от $y = \cos x$ степени n .

Он имеет на прямой $-\infty < y < +\infty$ не более n корней. Тем более это верно при $y \in [-1, 1]$. Но $y = \cos x$ при $x \in [0, \pi]$ принимает любое значение из отрезка $[-1, 1]$ ровно один раз.

В. Сендеров

М1360. Обозначим через p_{mn} число различных покрытий шахматной доски размерами $m \times n$

а) Будем считать, что $(n+1)$ — горизонтальное основание, 2 — высота прямоугольника $2 \times (n+1)$ клеток. Рассмотрим домино, примыкающие к правой стороне прямоугольника (рис. 1, а, б): к любому покрытию

клеток $m/2$ костями домино (прямоугольниками 1×2 клетки; разумеется, мы считаем одно из чисел m и n четным).

а) Докажите, что $p_{2,n} = f_n$ — последовательность, задаваемая соотношением

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1};$$

$$f_1 = 1, f_2 = 2$$

(последовательность Фибоначчи).

б)* Докажите, что (для четных n) верны оценки $(3/2)^{n/2} < p_{n,n} < 2^{n/2}$.

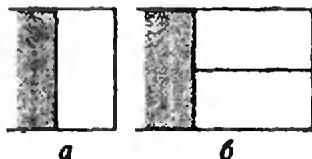


Рисунок 1

n	f_n
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
...	...

Рисунок 2

прямоугольника $2 \times n$ можно добавить справа вертикальные домино, к любому покрытию прямоугольника $2 \times (n-1)$ — два горизонтальных домино, и этим способом получаются по разу все покрытия прямоугольника $2 \times (n+1)$. Отсюда $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Равенства $f_1 = 1, f_2 = 2$ очевидны. Несколько следующих значений f_n приведены в таблице на полях (рис.2).

Числа этой последовательности — числа Фибоначчи — встречаются в самых разнообразных задачах комбинаторики, геометрии, анализа. Для них можно написать явные формулы, выразив f_n в виде суммы двух геометрических прогрессий:

$$f_n = b_1 q_1^n + b_2 q_2^n,$$

где q_1, q_2 — корни уравнения $q^2 = q + 1$ (т.е. $q_i = (1 \pm \sqrt{5})/2$, а b_i определяются начальными условиями $f_0 = f_1 = 1$; в результате получаем формулу Бинэ:

$$f_n = (q_1^{n+1} - q_2^{n+1})/\sqrt{5}.$$

Поскольку $|q_2| < 1$, при больших n получаем $f_n \approx B q_1^n$, где $q_1 = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,61803\dots$; B — константа,

$$B = (1 + \sqrt{5})/(2\sqrt{5}).$$

Для решения задачи б) удобно использовать оценку $f_n > (3/2)^n$, верную при $n \geq 5$. Ее легко доказать по индукции: $f_5 = 8 > (3/2)^5 = 243/32$,

$$f_6 = 13 > (3/2)^6 = 729/64; \text{ если } f_n > (3/2)^n \text{ и}$$

$$f_{n-1} > (3/2)^{n-1}, \text{ то } f_{n+1} = f_n + f_{n-1} >$$

$$> (3/2)^{n-1}(3/2 + 1) > (3/2)^{n+1},$$

поскольку $3/2 + 1 = 5/2 > 9/4$.

В задаче б) левое неравенство (оценку снизу) для $n = 4$ можно проверить непосредственно: $p_{4,4} = 36$ (это — $25 = 5 \cdot 5$ покрытий, возникающих из всевозможных покрытий двух горизонтальных прямоугольников 2×4 , и еще 11 покрытий (см. рисунок 3), а $(3/2)^8 < 32 < 36$, поскольку $3^5 < 2^8, 3^3 < 2^5$.

Для $n \geq 6$ оценку снизу можно получить, рассмотрев лишь покрытия $n/2$ горизонтальных полосок $2 \times n$ клеток: поскольку $f_n > (3/2)^n$, то

$$p_{n,n} > (f_n)^{n/2} > (3/2)^{n^2/2}.$$

О БЪЕМ

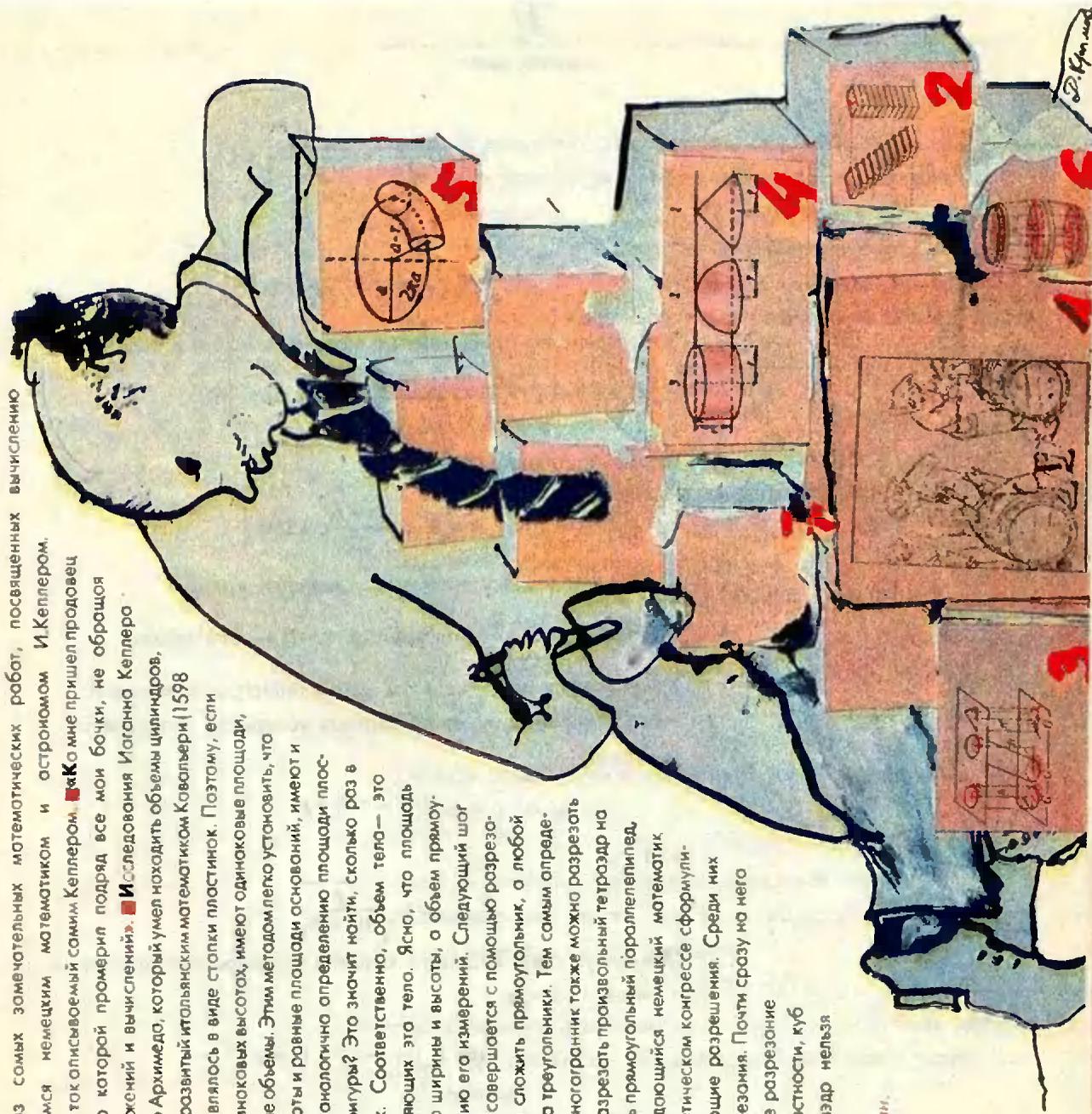
Измерение объемов с незапамятных времен вошло в человеческую практику. Уже в древнеегипетских папирусах содержится правило определения вместимости жилищ египетских фараонов. С тех пор прошло три с половиной тысячелетия, но протаянии которых способы вычисления объемов непрерывно совершенствовались. Правда, математические и практические приемы измерения объемов зачастую расходились. Причиной такого расхождения явились разные подходы к понятию объема. Математики ставили своей задачей выразить объем тела через его линейные размеры, а торговцы удовлетворялись мерами, полученными из веса продукта. Любопытно, что в основу меры веса (а следовательно, и объема) у многих народов: индусов, египтян, итальянцев, англичан и других, — был положен вес ячменного или пшеничного зерна. Следующей единицей веса был фунт. Наиболее показательными являются английские меры. В 1266 году английский король Генрих III своим указом определил, что «с согласия всего английского государства, английский пенни, называемый стерлингом (самая малая монета), круглый и без обрезки, должен весить столько же, сколько 32 пшеничных зерна, взятых в середине колоса, 20 пенни должны составлять унцию, 12 унций — фунт. Нетрудно подсчитать, что здесь фунту соответствовало 7680 зерен. Так мы познакомились и с происхождением загадочной денежной единицы Великобритании — фунтом стерлингов. Стерлингом (вначале истерлингом — easteling — восточной монетой) называлось серебряная монета, которая чеканилась в восточных областях Германии. Мастера, изготавливавшие эту монету, были приглашены работать в Англию. Они и стали называть свои монеты стерлингами. В Англии долго не существовало никакого соотношения между мерами длины и емкости. Лишь в 1701 году Вильгельм III Оранский издал указ, по которому бушель должен быть круглым, с плоским дном, шириной его должна быть равна $18 \frac{1}{2}$ дюймов, а глубина — 8 дюймов. В России применялись свои меры объема: ведро — 12 литров, носадка — 30 литров, бочка — 480 литров. Конечно же, изготавливались бочки

разного объема и формы. Одно из самых замечательных математических работ, посвященных вычислению объемов, было написано выдающимся немецким математиком и астрономом И.Кеплером. Поводом для ее написания явился случай, так описываемый самим Кеплером. ■ Как мне пришел в голову с измерительной линейкой, с помощью которой промерил подряд все мои бочки, не обращая внимания на форму, без всяких соображений и вычислений. ■ Исследования Иоганна Кеплера явились продолжением работ знаменитого Архимеда, который умел находить объемы цилиндров, конусов и шаров. Его метод, в дальнейшем развитый итальянским математиком Кавальери (1598

— 1647), состоял в том, что тело представлялось в виде стопки пластинок. Поэтому, если двух тел все сечения, проведенные на одинаковых высотах, имеют одинаковые площади, то заключалось, что они имеют и одинаковые объемы. Этим методом легко установить, что все пирамиды, имеющие одинаковые высоты и равные площади оснований, имеют и равные объемы. ■ Определение объема аналитично определению площади плоской фигуры. Что значит найти площадь фигуры? Это значит найти, сколько раз в ней укладывается единичный квадратик. Соответственно, объем тела — это количество единичных кубиков, составляющих это тело. Ясно, что площадь

прямоугольника равна произведению его ширины и высоты, а объем прямоугольного параллелепипеда — произведению его измерений. Следующий шаг — определение площади треугольника — совершается с помощью разрезания его на три части, из которых можно сложить прямоугольник, а любой многоугольник всегда можно разрезать на треугольники. Тем самым определяется площадь многоугольника. Любой многогранник также можно разрезать на простейшие фигуры — тетраэдры, но разрезать произвольный тетраэдр на части, из которых можно было бы сложить прямоугольный параллелепипед, никак не получалось. В 1900 году выдающийся немецкий математик Д.Гильберт на II Международном математическом конгрессе сформулировал 23 важнейшие проблемы, требующие разрешения. Среди них был и вопрос о возможности такого разрезания. Почти сразу на него был получен ответ. Оказалось, что такое разрезание возможно лишь в некоторых случаях. В частности, куб и равновеликий ему правильный тетраэдр нельзя разрезать на попарно равные части.

Материал подготовил Анатолий Савин.



Примечание. Эллипс получается при равномерном растяжении (сжатии) окружности вдоль одной из координат. При этом уравнение окружности

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \text{ переходит в уравнение эллипса}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$h^2 \left(\frac{\cos^2 \omega t}{a^2} + \frac{\sin^2 \omega t}{b^2} \right) = 1,$$

или

$$\frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \cos 2\omega t \right) = 1.$$

Это равенство приближенно можно записать в виде

$$\frac{h^2}{2} \left(\frac{2}{R^2} + \frac{2R(b-a)}{R^4} \cos 2\omega t \right) = 1,$$

откуда окончательно

$$h = R \left(1 + \frac{a-b}{2R} \cos 2\omega t \right).$$

Теперь найдем вертикальное ускорение колеса:

$$h'' = R \frac{a-b}{2R} (-4\omega^2) \cos 2\omega t = -2(a-b)\omega^2 \cos 2\omega t.$$

Колесо будет подпрыгивать, если амплитудное значение этого ускорения будет превышать ускорение свободного падения:

$$2\omega^2 |a-b| > g,$$

или

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{2|a-b|}}.$$

Используя связь скорости качения со скоростью вращения:

$v = \omega R$, получим

$$v > R \sqrt{\frac{g}{2|a-b|}} \approx 11 \text{ м/с}.$$

М.Цыпин

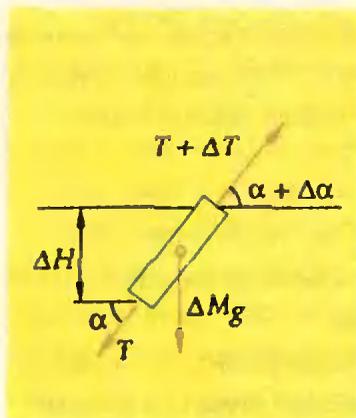
Ф1369. Тонкая гибкая веревка длиной $l = 1 \text{ м}$ и массой $M = 1 \text{ кг}$ подвешена концами к потолку. Расстояние между точками подвеса $d = 0,5 \text{ м}$.

Найдите натяжение веревки в нижней точке и на половине высоты «провиса».

Мы вынуждены извиниться перед читателями за неточность в условии задачи — в таком виде задача оказывается слишком сложной. Мы разберем решение в том случае, когда заданы длина и масса веревки, а также высота H «провиса» веревки (вместо расстояния между точками подвеса): $H = 0,1 \text{ м}$.

Решение задачи и в таком виде довольно сложное.

Для нахождения силы натяжения в нижней точке нам придется рассмотреть условия равновесия маленького кусочка веревки, который находится на некоторой высоте h над нижней точкой (см. рисунок). Поскольку длину кусочка мы выбираем очень малой, приращение угла наклона веревки получается также малым и мы можем



всюду заменять $\sin \Delta\alpha$ на $\Delta\alpha$, а $\cos \Delta\alpha$ на 1.

Запишем условие равновесия выбранного кусочка веревки по горизонтали:

$$(T + \Delta T)\cos(\alpha + \Delta\alpha) - T\cos\alpha = 0,$$

или

$$T\cos\alpha\cos\Delta\alpha - T\sin\alpha\sin\Delta\alpha + \Delta T\cos\alpha\cos\Delta\alpha - \\ - \Delta T\sin\alpha\sin\Delta\alpha - T\cos\alpha = 0.$$

Учитывая описанную замену и пренебрегая величиной $\Delta T\sin\alpha \cdot \Delta\alpha$, получим

$$\Delta T\cos\alpha = T\sin\alpha \cdot \Delta\alpha.$$

Теперь — условие равновесия по вертикали:

$$(T + \Delta T)\sin(\alpha + \Delta\alpha) - T\sin\alpha = \Delta Mg,$$

или, после простых преобразований,

$$T\cos\alpha \cdot \Delta\alpha + \Delta T\sin\alpha = \Delta Mg,$$

где $\Delta M = M\Delta H / (l\sin\alpha)$.

Таким образом, для приращения натяжения веревки получаем

$$\Delta T = Mg \Delta H / l.$$

Отсюда следует, что натяжение веревки меняется с высотой h по закону:

$$T = T_0 + Mgh/l,$$

где T_0 — искомое натяжение в нижней точке.

Остальное уже просто. Для точки подвеса, т.е. для верхней точки веревки, можно записать

$$T_b = T_0 + MgH/l.$$

Но горизонтальная проекция силы T_b должна быть равна T_0 , а вертикальная — половине веса веревки. Окончательно получим

$$T_b^2 = T_0^2 + (Mg)^2/4 = (T_0 + MgH/l)^2,$$

или

$$T_0 = Mg(1 - 4H^2/l^2)/(8H/l) = 12H.$$

Аналогично, на половине высоты «провиса»

$$T_n = T_0 + MgH/(2l) = 12,5H.$$

А как же все-таки решать задачу в том виде, в каком она была сформулирована в «Кванте» №9—92? Проще всего исключить из «горизонтального» уравнения не $\Delta\alpha$, а ΔT , и получить уравнение относительно угла α — зависимость этого угла от горизонтальной координаты точки.

Уравнение получается не слишком сложным:

$$T_0 \cdot d\alpha / \cos\alpha = Mg \cdot dx / l.$$

Проинтегрировав это соотношение, можно найти зависимость между расстоянием по горизонтали от нижней точки веревки до данной точки и углом, который в этой

точке веревка составляет с горизонтом. А из этого соотношения можно найти краевой угол. К сожалению, уравнение получается таким, что его можно решить только численными методами.

А. Зильберман

Ф1370. Кубический сосуд объемом $V \approx 1$ л заполнен воздухом. Одна из стенок (1) поддерживается при температуре T_1 , противоположная ей (2) — при температуре T_2 , остальные стенки теплоизолированы.

Найдите отношение средних частот соударений молекул со стенками 1 и 2.

Рассмотрите два случая: а) давление в сосуде равно атмосферному $p_0 = 1$ атм; б) сосуд откачан до давления $p = 10^{-9}$ атм.

Будем исходить из того, что давления на стенки 1 и 2 всегда должны быть одинаковы.

В случае а) частота ударов о стенку пропорциональна концентрации и скорости движения молекул в области, прилегающей к стенке:

$$f_{1,2} \sim n_{1,2} v_{1,2} \sim n_{1,2} \sqrt{T_{1,2}}.$$

При этом, из-за равенства давлений,

$$n_1 T_1 = n_2 T_2.$$

Отсюда

$$f_1 / f_2 = \sqrt{T_2 / T_1}.$$

В случае б) длина свободного пробега молекул больше размеров сосуда (убедитесь в этом самостоятельно, здесь-то вам и пригодятся заданные в условии числа). Поэтому количество молекул, ударяющих в обе стенки за некоторое время, одно и то же, т.е.

$$f_1 = f_2.$$

А. Семаков

Ф1371. На нижнюю поверхность горизонтальной диэлектрической пластины толщиной d и диэлектрической проницаемостью ϵ нанесено проводящее покрытие. На верхнюю поверхность помещена маленькая капля ртути, которая не смачивает пластину. Капля и проводящее покрытие образуют конденсатор (см. рисунок на след. стр.). При каком напряжении батареи капля начнет растекаться по поверхности пластины? Коэффициент поверхностного натяжения ртути σ .

Пусть капля ртути начинает растекаться по поверхности пластины и за некоторое малое время образуется слой жидкости площадью ΔS . При этом поверхностная энергия жидкости увеличивается на

$$\Delta W_1 = 2\sigma \Delta S,$$

электростатическая энергия конденсатора увеличивается на

$$\Delta W_2 = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon \Delta S U^2}{2d},$$

а батарея производит работу по перенесению заряда, равную

$$A = qU = CU^2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon \Delta S U^2}{d}.$$

Из баланса энергий

$$\Delta W_1 + \Delta W_2 = A$$

получаем

$$U = 2 \sqrt{\frac{\sigma d}{\epsilon_0 \epsilon}}.$$

Д. Куцков

С прискорбием сообщаем, что Дима Куцков, наш постоянный автор и организатор многих Московских олимпиад, трагически погиб 6 декабря 1992 г.

Ф1372. К батареек U_0 подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L . В некоторый момент параллельно катушке подключают еще один конденсатор емкостью C . Каким может быть максимальный заряд этого конденсатора? Сопротивление проводов и внутреннее сопротивление батареек считайте малыми.

Сумма напряжений на конденсаторах всегда равна напряжению батареек U_0 . В тот момент, когда напряжение на одном из них становится максимальным, напряжение на другом минимально, причем токи через каждый из конденсаторов равны нулю. Но это значит, что ток через катушку в этот момент также нулевой и, следовательно, полная энергия системы равна сумме энергий конденсаторов. Заметим, что при подключении второго конденсатора в системе могло выделиться некоторое количество теплоты (а могло и не выделиться — если в момент подключения напряжение на первом конденсаторе было равно напряжению батареи и поэтому второй конденсатор подключался к нулевому начальному напряжению). Полную работу батареек можно выразить через заряд первого конденсатора.

Итак, запишем

$$\frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C} = U_0,$$

$$q_1 U_0 = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C} + Q.$$

После простых преобразований для второго конденсатора получим

$$\frac{q_2^2}{C} = \frac{CU_0^2}{2} - Q.$$

Ясно, что максимальное значение будет в том случае, когда тепла в системе не выделится. Поэтому окончательно

$$q_2 = \frac{CU_0}{\sqrt{2}}.$$

Обратите внимание, значение индуктивности в ответ не вошло — от катушки тут зависят только временные масштабы, а не максимальные значения энергий конденсаторов.

А. Зильберман

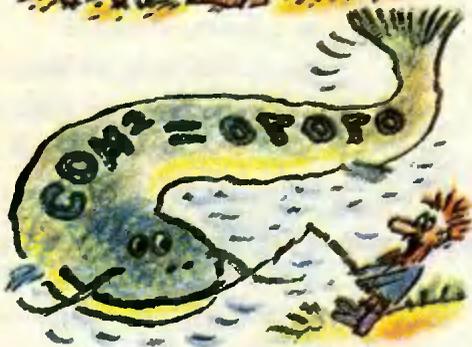


ЗАДАЧИ



1/А.Шевкин. У Саши на дне рождения было 5 друзей. Первому он отрезал $\frac{1}{6}$ часть пирога, второму $\frac{1}{5}$ остатка, третьему $\frac{1}{4}$ того, что осталось, четвертому $\frac{1}{3}$ нового остатка. Последний кусок Саша разделил пополам с пятым другом. Кому достался самый большой кусок?

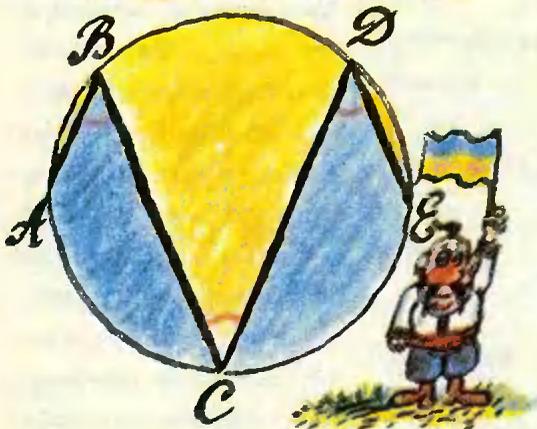
2/П.Филевич. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.



3/И.Акулич. Миша пронумеровал грани правильного многогранника последовательными числами: 1, 2, 3 и т.д. Когда он прибавил к числу, написанному на одной из граней, количество ребер этого многогранника, то получил куб целого числа. Что это был за многогранник и какое число было написано на грани?



4/А.Пидора. Вася изобрел прибор паскалемер, измеряющий давление. Желая продемонстрировать свой прибор, он зашел на строительство новой гостиницы, которое вели турки. Турецкий кирпич, положенный плашмя, оказывал давление 1368 Па, положенный на ребро — 2581 Па, а поставленный на торец — 5404 Па. Четырехметровая стенка из таких кирпичей оказывала давление 88 200 Па. Чему равна масса турецкого кирпича?

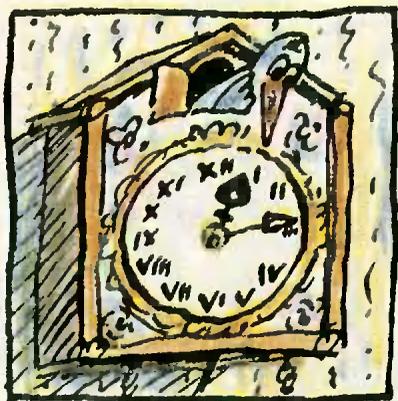


5/В.Произволов. У ломаной ABCDE все вершины лежат на окружности (см.рисунок). Углы в вершинах B, C и D равны по 45° . Докажите, что площадь желтой части круга равна площади его голубой части.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6 – 8»

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6 – 8 классов. Конкурс состоит из 24 задач и заканчивается в апреле. Победители будут награждены премиями журнала «Квант» и Российского благотворительного фонда «Интеллект». Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 апреля 1993 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6 – 8»). Не забудьте указать фамилию, имя, класс.

13/К.Кохась. Двое играют в следующую игру. На столе лежит кучка из 12 спичек; играющие по очереди берут из нее одну или две спички, или кладут одну или две спички из ранее взятых, после чего записывают каждый на своем листке количество спичек в кучке, оказавшееся там после его хода. Нельзя делать ход, после которого на листке окажутся написанными два одинаковых числа. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто выиграет в этой игре при правильной стратегии? А если в кучке 13 спичек?



делится на 10.

14/С.Дворянинов. Квадраты натуральных чисел выписаны подряд: 149162536... Какая цифра стоит на 1993 месте?

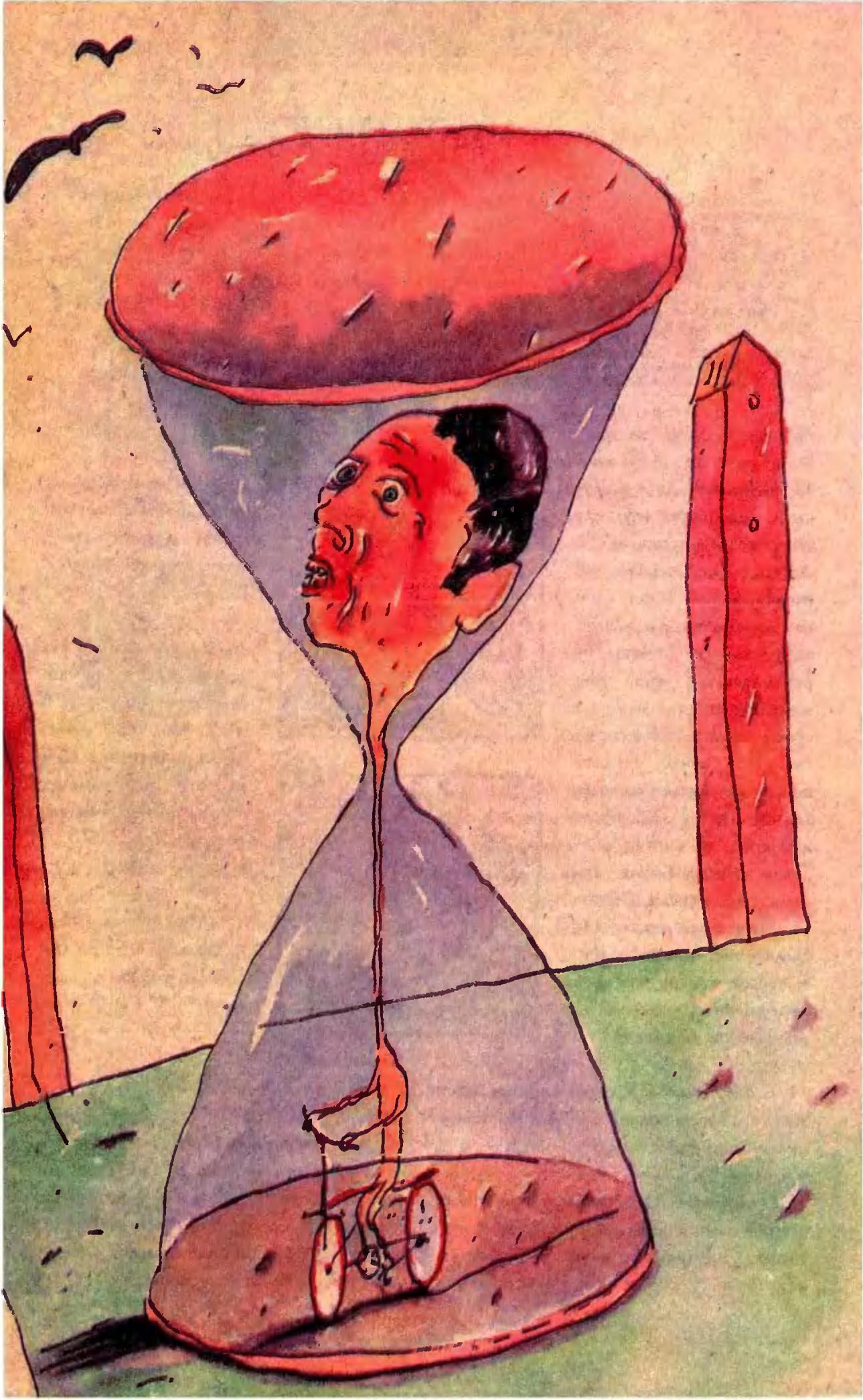
15./И.Акулич. Относительная скорость концов часовой и минутной стрелок некоторых правильно идущих часов в некоторый момент оказалась равной

10мм/с. Может ли эта скорость в какой-то другой момент оказаться равной 8мм/с? 12мм/с?

16/В.Произволов. На клетчатой бумаге отмечены три узла А, В и С. Угол АВС равен 45° , а на отрезках АВ и ВС нет узлов, кроме их концов. Докажите, что треугольник АВС - прямоугольный.

17/С.Дворянинов. Докажите, что при любом натуральном n число $(n+1)^{1993} + n^{1993} + (n-1)^{1993} - 9$

18/Л.Курляндчик. Написали пятизначное число, затем написали пятизначное число, состоящее из тех же цифр, но идущих в обратном порядке. Из большего числа вычли меньшее и получили число А. Можно ли восстановить число А, зная лишь три его последние цифры?



МИСТЕР ТОМПКИНС В СТРАНЕ ЧУДЕС

ДЖОРДЖ ГАМОВ РАССКАЗЫВАЕТ
О ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Перед вами отрывок из книги, герой которой — distinguished мистер Томпкинс — внешне не очень похож на кэрролловскую Алису. (Сказать по правде, мистер Томпкинс совсем не похож на Алису: ну скажите, пожалуйста, может ли клерк солидного банка походить на милую девочку?) Но при более внимательном знакомстве выясняется, что различие между ними не так уж велико: они оба любят поспать и, заснув, переживают удивительные приключения, которыми потом зачитываются многие дети и взрослые. И хотя все читают один и тот же текст, воспринимает прочитанное каждый по-своему.

Написал эту книгу (и множество других не менее интересных) Георгий Антонович Гамов (1904—1968), более известный за рубежом как Джордж Гамов, физик-теоретик, автор многих важных работ по квантовой механике, атомной и ядерной физике, астрофизике, космологии и биофизике. Мы еще не раз будем обращаться к научному и литературному творчеству Гамова и расскажем читателям «Кванта» о судьбе создателя замечательных книг. А пока рады сообщить, что в этом году в «Библиотечке «Квант» выйдет его книга «Приключения мистера Томпкинса».

В тот день все банки были закрыты — выходной, и мистер Томпкинс, скромный служащий солидного городского банка, встал позже обычного и не спеша позавтракал. Пора было позаботиться о досуге, и мистер Томпкинс решил, что было бы неплохо сходить на дневной сеанс в кино. Развернув утреннюю газету на той полосе, где публиковалась информация о развлечениях, он углубился в изучение репертуара кинотеатров. Ни один из рекламируемых фильмов не показался мистеру Томпкинсу достаточно привлекательным. Он терпеть не мог всю эту

голливудскую дребедень с нескончаемыми любовными историями, разыгрываемыми популярными киноактерами. Вот если бы нашелся хотя бы один фильм с сюжетом, заимствованным из реальной жизни, быть может, с примесью чего-нибудь необычного или даже фантастического! Но таких фильмов — увы! — не было. Неожиданно внимание мистера Томпкинса привлекло небольшое объявление в самом углу газетной полосы. Местный университет доводил до сведения всех желающих, что в его помещении будет прочитан цикл лекций по проблемам современной фи-

зики. Ближайшая лекция состоится сегодня вечером и будет посвящена теории относительности Эйнштейна. Вот это стоящее дело! Мистеру Томпкинсу частенько приходилось слышать, что во всем мире едва ли дюжина людей по-настоящему понимают теорию Эйнштейна! А что если он, мистер Томпкинс, станет тринадцатым? Ясное дело: он непременно отправится на лекцию. Это как раз то, что ему нужно!

Когда мистер Томпкинс вошел в большую университетскую аудиторию, лекция уже началась. Все помещение было битком набито студентами (в основном это были молодые люди), с неподдельным интересом внимавшими высокому седобородому человеку у доски, который пытался объяснить аудитории основные идеи теории относительности. Из слов лектора мистер Томпкинс понял только, что основной пункт теории Эйнштейна — существование максимальной скорости — скорости света, которую не может превзойти ни одно движущееся материальное тело, и что это обстоятельство приводит к весьма странным и необычным следствиям. Правда, профессор заметил, что поскольку скорость света составляет 300 000 километров в секунду, релятивистские (т.е. связанные с теорией относительности) эффекты едва ли могут наблюдаться в явлениях повседневной жизни. Что же касается природы этих необычных эффектов, то понять ее было несравненно труднее, и мистеру Томпкинсу показалось, что все, о чем говорит лектор, противоречит здравому смыслу. Он попытался мысленно представить себе сокращение измерительных стержней и странное поведение часов — эффекты, которых следовало бы ожидать при движении со скоростью, близкой к скорости

света, но тут голова его медленно склонилась на плечо.

Когда мистер Томпкинс снова открыл глаза, он обнаружил, что сидит не на скамье в университетской аудитории, а на скамейке, установленной городскими властями для удобства пассажиров, ожидающих автобус. Кругом простирался красивый старинный городок со средневековыми зданиями колледжей, выстроившимися вдоль улицы. Мистер Томпкинс заподозрил было, что видит все это во сне, но к его удивлению ничего необычного вокруг не происходило, даже полисмен, стоявший на противоположном углу, выглядел так, как обычно выглядят полисмены. Стрелки больших часов на башне в конце улицы показывали пять часов, и улицы были почти пустынными. Одинокий велосипедист показался вдали и стал медленно приближаться. Когда он подъехал поближе, мистер Томпкинс вытаращил глаза от изумления: и велосипед, и восседавший на нем молодой человек были невероятно сокращены в направлении движения, как будто их рассматривали через цилиндрическую линзу. Часы на башне пробили пять, и велосипедист, по-видимому, куда-то спешивший, приналег на педали. Мистер Томпкинс не заметил, чтобы скорость от этого прибавилась, но усилия велосипедиста не прошли бесследно: он сократился еще сильнее и отправился дальше, в точности напоминая картинку, вырезанную из картона. Тут мистер Томпкинс ощутил необычный прилив гордости, ибо ему было совершенно ясно, что происходило с велосипедистом — это было не что иное, как сокращение движущихся тел в направлении движения, о котором только что рассказывал лектор.

— Должно быть, естественная предельная скорость здесь поменьше, чем у нас, — подумал мистер Томпкинс, — поэтому полицейский на углу выглядит таким ленивым: ему не нужно следить, чтобы никто не нарушал ограничений на скорость.

Действительно, появившееся на улице так-

си производило грохот и скрежет, способные разбудить и мертвого, но продвигалось не намного быстрее, чем велосипедист, и, если сказать честно, ползло еле-еле. Мистер Томкинс решил догнать велосипедиста, который на вид был симпатичным малым, и расспросить его обо всем. Убедившись, что полисмен отвернулся и смотрит в другую сторону, мистер Томкинс воспользовался чьим-то велосипедом, стоявшим у края тротуара, и помчался по улице. Он ожидал, что сразу же сократится в направлении движения, и даже был очень рад этому, так как начавшая расплзаться за последнее время фигура причиняла ему некоторые неприятности. Но, к величайшему удивлению мистера Томкинса, ни с ним самим, ни с велосипедом ничего не произошло. Сократились улицы, витрины лавок и магазинов превратились в узкие щели, а полисмен на углу стал самым толстым человеком, которого приходилось когда-нибудь видеть мистеру Томкинсу.

— Клянусь Юпитером, — радостно воскликнул мистер Томкинс, — я, кажется, понял, в чем дело! Вот где появляется словечко «относительность». Все, что движется относительно меня, кажется мне сокращенным, кто бы ни крутил педали!

Мистер Томкинс был неплохим велосипедистом и изо всех сил старался догнать молодого человека. Однако он обнаружил, что развить приличную скорость на угнанном им велосипеде совсем не легко. Хотя мистер Томкинс крутил педали что было сил, скорость от этого прибавлялась едва заметно. Ноги у него уже начало сводить от напряжения, а ему никак не удавалось миновать фонарный столб на углу хоть сколько-нибудь быстрее, чем в начале движения. Казалось, все его усилия ехать быстрее тщетны. Теперь он отлично понял, почему велосипедист и встретившееся ему только что такси ползли с такой черепашной скоростью. Вспомнились ему и слова профессора о том, что ни одно движущееся тело не может превзойти предельную

скорость — скорость света. Правда, мистер Томкинс заметил, что городские кварталы сокращались все больше и до ехавшего впереди велосипедиста теперь казалось не так далеко. У второго поворота мистеру Томкинсу удалось догнать велосипедиста, и в тот самый момент, когда они поравнялись, мистер Томкинс, взглянув на того, к своему удивлению увидел, что перед ним обычный молодой человек спортивного вида.

— Должно быть, это от того, что мы не движемся друг относительно друга, — подумал мистер Томкинс и обратился к молодому человеку:

— Прошу прощения, сэр! — сказал он. — Не находите ли вы, что жизнь в городе со столь низкой предельной скоростью сопряжена с некоторыми неудобствами?

— О какой предельной скорости вы говорите? — с недоумением спросил молодой человек. — У нас в городе нет никаких ограничений на скорость. Я могу ехать где угодно и куда угодно с любой скоростью, какая мне только заблагорассудится или, по крайней мере, с какой мог бы двигаться, будь у меня мотоцикл, а не эта допотопная развалина, из которой, как ни старайся, приличной скорости не выжмешь!

— Но когда вы недавно проезжали мимо меня, — продолжал мистер Томкинс, — то тащились еле-еле. Я обратил на это внимание.

— В самом деле? — молодой человек был явно задет подобным замечанием. — В таком случае вы, вероятно, заметили, что впервые обратились ко мне, когда мы были отсюда в пяти кварталах. Для вас это недостаточно быстро?

— Но с тех пор улицы значительно

сократились. — продолжал настаивать мистер Томкинс.

— А какая разница, движемся ли мы быстрее или улица становится короче? Мне нужно проехать десять кварталов, чтобы попасть на почту, и если я буду прилежнее крутить педали, то кварталы станут короче, и я быстрее попаду на почту. Впрочем, вот мы и доехали.

С этими словами молодой человек соскочил с велосипеда.

Мистер Томкинс взглянул на часы на здании почты: они показывали полшестого.

— Вот видите, — заметил он торжествующе, — чтобы проехать каких-нибудь десять кварталов, вам понадобилось полчаса. Ведь когда я впервые увидел вас, было ровно пять!

— И вы почувствовали, что прошло полчаса? — спросил его собеседник. Мистеру Томкинсу пришлось признать, что по его ощущениям прошло всего несколько минут. Кроме того, взглянув на свои ручные часы, он увидел, что они показывают только пять минут шестого.

— О! — только и смог вымолвить он. — Часы на здании почты спешат?

— Разумеется, спешат или ваши часы отстают потому, что вы двигаетесь слишком быстро. Да что с вами в самом деле? Вы что, с Луны свалились? — и молодой человек вошел в здание почты.

После этого разговора мистер Томкинс пожалел, что рядом нет старого профессора, который бы объяснил ему эти странные события. Молодой человек, по-видимому, был местным жителем и привык к такому состоянию вещей прежде, чем научился ходить. Мистеру

Томкинсу не оставалось ничего другого, как самому прийтись за исследование окружающего его странного мира. Он поставил свои часы по часам на здании почты и, чтобы убедиться в том, что его часы идут правильно, выждал минут десять. Его ручные часы не отставали. Продолжив свое путешествие по улице, мистер Томкинс, наконец, добрался до вокзала и решил снова сверить свои часы. К его удивлению, часы снова немного отстали.

— Должно быть, это также какой-то релятивистский эффект, — решил мистер Томкинс и подумал, что было бы недурно расспросить об этом кого-нибудь поумнее юного велосипедиста.

Удобный случай представился очень скоро. Дженгельмен, на вид лет сорока, сошел с поезда и направился к выходу. Его встречала леди весьма преклонного возраста, которая, к удивлению мистера Томкинса, называла его не иначе, как «мой дорогой дедушка». Для мистера Томкинса это было уже чересчур. Под предлогом помочь поднести вещи, он вмешался в разговор.

— Прошу извинить меня за то, что вмешиваюсь в ваши семейные дела, — начал он, — но действительно ли вы приходите к дедушкой этой милой пожилой леди? Видите ли, я в этих местах человек новый и не знаю местных обычаев, но мне никогда не доводилось...

— Понимаю ваше затруднение, — улыбнулся в усы дженгельмен. — Должно быть, вы принимаете меня за Вечного Жида или кого-нибудь в том же духе. Но в действительности все обстоит очень просто. Моя профессия вынуждает меня много ездить, большую часть своей жизни я провожу в поезде и поэтому, естественно, старею гораздо медленнее, чем мои родственники, проживающие в городе. Я так рад, что сумел вернуться вовремя и застал еще в живых мою любимую внучку! Но прошу меня извинить, мне нужно проводить ее до такси, — и дженгельмен поспешил прочь, оставив мистера Томкинса один на один с его проблемами. Пара бутербродов из

вокзального буфета несколько подкрепили его умственные способности, и он зашел в своих рассуждениях так далеко, что заявил, будто ему удалось обнаружить противоречие в знаменитом принципе относительности.

— Если бы все было относительно, — размышляла он, отхлебывая кофе, — то путешественник казался бы своим оседлым родственникам очень старым, а они в свою очередь казались бы очень старыми ему, хотя в действительности обе стороны были бы достаточно молодыми. Но то, что я утверждаю теперь, кажется совершеннейшей чепухой: ни у кого не может быть относительно седых волос!

Тут мистер Томпкинс решил предпринять последнюю попытку разобраться в том, как обстоит дело в действительности, и обратился к человеку в железнодорожной форме, одиноко сидевшему в буфете.

— Не будете ли вы так любезны, — начал он, — не будете ли вы так добры сказать, кто виноват в том, что пассажиры в поезде стареют гораздо медленнее тех людей, которые остаются дома?

— Во всем виноват я, сэр, — очень спокойно ответил незнакомцу.

— О! — воскликнул мистер Томпкинс. — Так вам удалось разрешить проблему философского камня, над которой в старину столько билась алхимия. Должно быть, вы очень знамениты в медицинском мире. Вы возглавляете где-нибудь кафедру?

— Нет, — ответил незнакомцу, необычайно удивленный тем, что сказал мистер Томпкинс.

— Я кондуктор, и в мои обязанности входит вовремя тормозить.

— Тормозной кондуктор! — воскликнул мистер Томпкинс, чувствуя, что почва уходит у него из-под ног. — Так вы думаете, что вы ... Вы действительно только нажимаете на тормоз, когда поезд подходит к станции?

— Совершенно верно! Именно это я и делаю, и всякий раз, когда поезд замедляет свой

ход, пассажиры становятся чуть моложе других людей.

— Разумеется, — скромно добавил кондуктор, — машинист, который разгоняет поезд, также выполняет свою часть работы.

— А какое отношение торможение и разгон поезда имеют к тому, что одни остаются молодыми, а другие стареют? — в изумлении спросил мистер Томпкинс.

— Какая тут связь, мне доподлинно неизвестно, — сказал кондуктор, — знаю только, что она есть. Однажды среди пассажиров мне встретился профессор из университета, и я спросил у него, как это получается. Он пустился в длинные и маловразумительные объяснения, а под конец упомянул о каком-то «гравитационном красном смещении (кажется, он выразился именно так) на Солнце». Приходилось ли вам слышать о чем-нибудь подобном? Что это за зверь такой — красное смещение?

— Не-ет, — задумчиво протянул мистер Томпкинс, и кондуктор пошел своей дорогой, качая головой.

Вдруг чья-то тяжелая рука опустилась на плечо мистера Томпкинса, и, очнувшись, он обнаружил, что сидит не в вокзальном буфете, а на скамье в той самой университетской аудитории, где он слушал лекцию профессора. Свет уже был потушен, и аудитория опустела. Разбудивший его университетский служащий мягко заметил:

— Мы закрываемся, сэр! Если хотите спать, ступайте лучше к себе домой.

Мистер Томпкинс встал и направился к выходу.

Перевод и вступление Ю. Данилова ■



I. Krasov



ФИЗИКА 9=11

ПУБЛИКУЕМАЯ НИЖЕ ЗАМЕТКА «СКОЛЬКО ВЕРЕВОЧКЕ НИ ВИТЬСЯ» ПРЕДНАЗНАЧЕНА ДЕВЯТИКЛАССНИКАМ, ЗАМЕТКА «ОБМАНЧИВАЯ ПРОСТОТА» — ДЕСЯТИКЛАССНИКАМ, «НЕМНОГО О ЛИНЗАХ» — ОДИННАДЦАТИКЛАССНИКАМ. МЫ ПУБЛИКУЕМ ТАКЖЕ «ИЗБРАННЫЕ ШКОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ».

СКОЛЬКО ВЕРЕВОЧКЕ НИ ВИТЬСЯ / ИЛЬЯ ГЕЛЬФГАТ

Рассмотрим обычную, на первый взгляд, задачу. С небольшими вариациями она не раз предлагалась на экзаменах и физических олимпиадах. Вот ее условие:

Шнур длиной L лежит на гладком горизонтальном столе, причем его небольшая часть свешивается с края стола. Лежащий на столе конец шнура сначала удерживают, а затем отпускают. Определите скорость шнура v и его ускорение a к тому моменту, когда длина свешивающейся части будет равна x .

Приведем обычно встречающееся решение этой задачи. Если масса шнура m , то масса его свешивающейся части равна mx/L . Центр тяжести этой части шнура находится на $x/2$ ниже поверхности стола, значит, при соскальзывании потенциальная энергия шнура уменьшилась на $(mx/L)gx/2$. Согласно закону сохранения энергии, эту величину можно приравнять к кинетической энергии шнура $mv^2/2$. Тогда для скорости шнура получаем

$$v = x\sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Ускорение всему шнуру придает сила тяжести его свешивающейся части, поэтому из второго закона Ньютона $ma = mgx/L$ следует

$$a = g\frac{x}{L}.$$

Итак, задача решена? Полученные выражения имеют правильную размерность и приводят к вполне разумным результатам в предельных случаях $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow L$. Значит, говорить больше не о чем?

Не судите опрометчиво. Попробуем ответить

на один провокационный вопрос: как меняется при движении шнура горизонтальная проекция p_x его импульса¹? Поскольку горизонтальную скорость имеет только находящаяся на столе часть шнура массой $m(L-x)/L$, получаем

$$p_x = \frac{m}{L}\sqrt{\frac{g}{L}}x(L-x).$$

Значит, при увеличении x импульс p_x растет только пока $x < L/2$. Дальше импульс убывает и при $x = L$ обращается в ноль (шнур падает теперь вертикально).

Но ведь для уменьшения импульса необходима внешняя сила, тормозящая соскальзывание. Где же она? Не ищите — в отсутствие трения такой силы не найти. И потому неясно, за счет чего гасится горизонтальная проекция скорости шнура.

Правильный ответ такой: никакого уменьшения импульса не происходит. Мы предполагали, что каждый элемент шнура, проходя край стола, резко меняет горизонтальное движение на вертикальное, именно при этом и теряется горизонтальный импульс. Но может быть, реальное движение сложнее? Возможно, набрав достаточно большую скорость, элементы шнура сохраняют ее (но крайней мере, частично) и после соскальзывания со стола и тогда никакого противоречия не возникает?

Простой опыт подтверждает справедливость нашего предположения. Мы проделали его с

¹Если кто-то еще не знаком с понятием импульса тела или не умеет вычислять кинетическую энергию (о ней говорилось чуть раньше), не расстраивайтесь — все это вы узнаете очень скоро. (Прим. ред.)

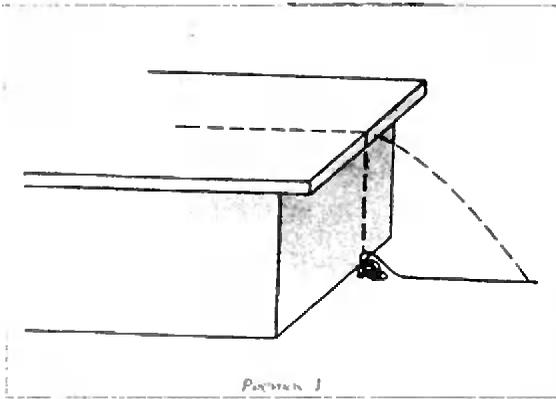


Рисунок 1

металлической цепочкой, которая соскальзывала с лежащего на столе листа стекла (трение в этом случае достаточно мало). Следить за падением цепочки трудно, да в этом и нет необходимости. Достаточно присмотреться к упавшей цепочке (рис. 1). Она образует на полу довольно плотный «комок» под краем стола, но от комка отходит длинный и почти прямой «хвост» перпендикулярно краю стола. Этот хвост — звенья цепочки, упавшие последними. Значит, они действительно падали не вертикально.

Какие же элементы шнура (или цепочки), покинув край стола, движутся все же вертикально? Рассмотрим малый участок шнура длиной Δl и массой $\Delta m = m \Delta l / L$, огибающий в данный момент край стола (рис. 2). Край стола будем считать цилиндрической поверхностью радиусом $R \ll L$. На выделенный участок действуют силы упругости T_1 и T_2 и реакция опоры края стола ΔN (силой тяжести выбранного элемента мы пренебрегаем). Полагая $T_1 = T_2 = T$, запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на радиальное направление:

$$\Delta m a_p = 2T \sin \frac{\alpha}{2} - \Delta N.$$

Учитывая, что $a_p = v^2 / R$,

$$\sin(\alpha/2) = \alpha/2 = \Delta l / (2R),$$

$$T = m(L-x)a / L,$$

получим $\Delta N = \frac{mgx\Delta l}{RL^2} (L-2x)$.

Отсюда следует, что сила ΔN при $x = L/2$ обращается в ноль, а при больших x становится от-

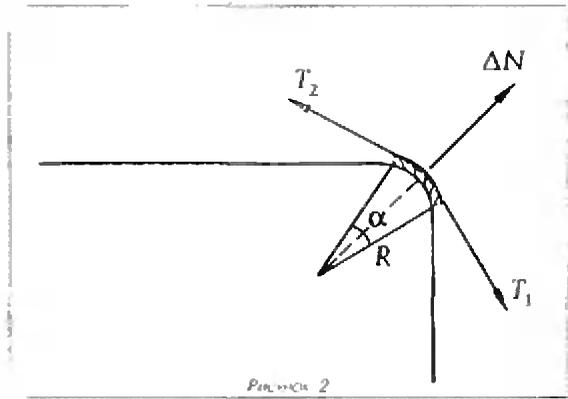


Рисунок 2

рицательной. Реально это означает, что при $x = L/2$ шнур перестает давить на угол стола, а дальше покидающие стол элементы шнура «вылетают» в сторону.

Таким образом, полученные в самом начале формулы для скорости и ускорения шнура справедливы лишь при $x \leq L/2$. А как же движется шнур дальше? Вопрос этот очень непростой, и вряд ли на него можно ответить без эксперимента (например, стробоскопической съемки падающей цепочки). Можно лишь предположить, что с увеличением высоты падения все большая часть цепочки будет переходить из комка в хвост за счет взаимодействия между частями цепочки в полете.

ОБМАНЧИВАЯ ПРОСТОТА / СЕРГЕЙ ФИЛОНОВИЧ

Среди физиков распространено убеждение, что законы природы должны быть просты. Эйнштейн, например, считал простоту физической теории одним из критериев ее правильности. Однако история науки знает немало примеров, когда кажущаяся простота результатов опытов вводила ученых в заблуждение. Один из таких поучительных примеров относится к истории открытия основного закона электростатики, получившего впоследствии имя Кулона.

Первые опыты по определению зависимости силы от расстояния для электрического взаимодействия $F(R)$ относятся к середине XVIII века. При этом в поисках «закона электрической силы» большую роль играла аналогия между действием одного заряженного тела на дру-

тое и гравитационным взаимодействием. Триумфальный успех закона всемирного тяготения позволял ученым надеяться, что и электрические явления можно будет описать столь же простым, изящным соотношением. Правильная догадка, однако, не смогла предотвратить ошибок. «Жертвой» электромеханической аналогии стал известный швейцарский ученый Даниил Бернулли.

Бернулли провел опыты по измерению сил, действующих между заряженными телами, около 1750 года (его результаты были опубликованы А. Соссеном). Ученый воспользовался устройством, которое было предложено французскими физиками Д'Арси и Ле-Руа и получило название гидростатического электрометра.

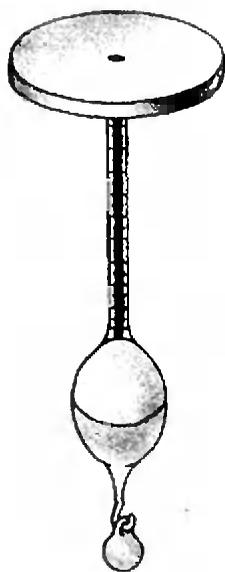
В сосуде с водой плавало чечевицеобразное тело (см. рисунок), которое в верхней части заканчивалось калиброванной стеклянной трубкой. На этой трубке крепился диск из проводящего материала (металла). На крючке в нижней части тела можно было подвешивать грузы разной массы. Измерения проводились следующим образом. На некотором расстоянии x под диском на трубке закреплялся другой проводящий диск того же диаметра, соединявшийся проводником с электростатической машиной на все время проведения опыта. Верхней пластине (диску) сообщался заряд. Вследствие электростатической индукции, на нижней пластине наводился заряд противоположного знака. После этого экспериментатор определял, перегрузок какой массы следует подвесить на крючок в нижней части тела для того, чтобы расстояние между пластинами осталось равным x : ведь вследствие притяжения, возникавшего между пластинами, плавающая чечевица слегка поднималась вверх. Затем опыт проводился при другом значении x . На основе полученных результатов Бернулли пришел к выводу, что сила электростатического взаимодействия

убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

Так что же, закон Кулона открыл Д. Бернулли? Оказывается, нет. При ближайшем рассмотрении легко увидеть, что эксперименты Бернулли не имеют непосредственного отношения к закону Кулона: здесь в ходе опыта при изменении x сохранялась постоянная разность потенциалов между пластинами, при этом заряд на них, естественно, менялся. Если приблизительно рассматривать устройство Бернулли как плоский конденсатор, то для силы, действующей между пластинами (ее называют пондеромоторной), можно записать: $F \sim q^2$, где q — заряд на конденсаторе. В свою очередь, при постоянном напряжении на пластинах $q \sim x^{-1}$ и, следовательно, $F \sim x^{-2}$. Таким образом, полученный Бернулли результат лишь внешне схож с законом Кулона; при изменении формы взаимодействующих тел зависимость силы от расстояния между ними может быть иной.

Много лет спустя (в 1787 г.) подобные опыты проводил выдающийся итальянский исследователь электричества А. Вольта, который получил сходные результаты. Он, однако, не рассматривал их как универсальные и фундаментальные, поскольку знал о зависимости силы взаимодействия от формы тел. Вольта обратил внимание и на различия в результатах измерений сил притяжения и отталкивания, полученных с помощью гидростатического электрометра.

В чем же главная причина ошибки Бернулли? Она весьма поучительна. У ученого отсутствовало ясное понимание различия между пондеромоторными силами, характеризующими взаимодействие макроскопических заряженных тел, и силами, действующими между элементарными (точечными) зарядами. Забывая об этом различии, многие школьники повторяют историческую ошибку исследователя XVIII столетия.



НЕМНОГО О ЛИНЗАХ / АЛЕКСАНДР ЗИЛЬБЕРМАН

Явление преломления световых лучей на границе раздела прозрачных сред (например, воздух—стекло) можно использовать для самых разных целей в различных оптических приборах. К ним относятся, прежде всего, плоскопараллельные пластины, призмы и линзы.

Чаще всего линзы применяют для получения изображений светящихся (или освещенных) предметов. При помощи линзы можно получить изображение в нужном месте (на пленке фотоаппарата, на экране кинотеатра) или на удобном для рассматривания глазом расстоянии (в лупе, очках, контактных линзах). Можно получить увеличенное во много раз изображение предмета (в микроскопе, в том же кинопроекторе) или уменьшенное (в зрительной трубе или бинокле — да да, именно уменьшенное в несколько десятков или сотен раз, зато приближенное в сотни или тысячи раз, что и позволяет рассмотреть предмет во всех подробностях). А можно получить изображение светящейся точки и в бесконечности — имеется в виду почти параллельный пучок лучей (как, например, в прожекторе).

Во многих практически важных случаях оптическая система содержит несколько линз (так, в объективе фотоаппарата может оказаться более десятка различных линз — собирающих и рассеивающих, совсем тонких и не очень, из разных — специально выбранных — сортов стекла, могут среди них быть линзы с более сложной формой поверхностей, чем привычная сферическая). Нужно сказать сразу, что простейшие расчеты оптических систем, которые можно провести в рамках курса физики для средней школы, довольно плохо подходят для практических расчетов — даже линзы для хороших очков, не говоря уже о контактных линзах, часто рассчитывают на ЭВМ (и вовсе не от избытка этих самых ЭВМ).

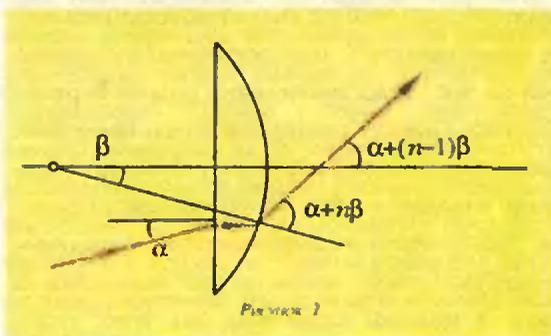
Но все же и простая теория может пригодиться — приближенный расчет во многих случаях вполне достаточен.

Рассмотрим ход лучей, падающих на совсем простую линзу — плосковыпуклую, у которой выпуклая поверхность имеет сферическую фор-

му. Такую линзу мы выбрали потому, что расчет хода лучей в ней будет наименее сложным. Пусть линза изготовлена из стекла и находится в воздушной среде.

Представим, что на плоскую поверхность нашей линзы падает параллельный пучок лучей. Известно, что после преломления в собирающей линзе он должен сойтись в точку, лежащую в фокальной плоскости. Покажем это. Для начала сформулируем задачу аккуратнее. Линзу мы будем считать тонкой (по ходу расчетов мы скажем точнее — что такое «тонкая линза» и чем именно приходится пренебрегать), а угол падения лучей — малым (чтобы можно было заменять значения функций $\sin \alpha$ и $\tan \alpha$ значением самого угла α в радианах, для углов в несколько градусов это дает совсем небольшую ошибку, а расчеты упрощает очень сильно). Условия эти вполне разумны и в общем соответствуют реальному положению для обычных простых оптических экспериментов.

Изобразим линзу и построим ход одного из падающих лучей (рис. 1; здесь линза выглядит толстой, а углы большими — это нужно только для наглядности, иначе ничего нельзя было бы разобрать). Выбранный нами луч падает на линзу под углом α к главной оптической оси, после преломления на плоской поверхности угол уменьшится в n раз, где n — показатель преломления стекла. На сферическую границу



стекло—воздух луч падает под углом $\alpha/n + \beta$, где β — угол между главной оптической осью линзы и радиусом, проведенном в точку падения луча, а выходит под углом

$$(\alpha/n + \beta)n - \beta = \alpha + (n - 1)\beta.$$

Дальше нам понадобится условие тонкости линзы — будем считать, что точки входа луча в

линзу и выхода из нее находятся на одинаковых расстояниях от главной оптической оси, равных $R\beta$. Если теперь отойти от линзы вправо на расстояние L , то в этом месте луч будет сдвинут по вертикали относительно точки выхода из линзы на $L((n-1)\beta + \alpha)$, и расстояние до главной оптической оси составит

$$H = L((n-1)\beta + \alpha) - R\beta.$$

Два различных луча из падающего пучка пересекаются справа от линзы в некоторой точке (рис. 2). Приравняем расстояния H для двух лучей и найдем расстояние L до точки пересечения:

$$\begin{aligned} L((n-1)\beta_1 + \alpha) - R\beta_1 &= \\ = L((n-1)\beta_2 + \alpha) - R\beta_2, \end{aligned}$$

откуда

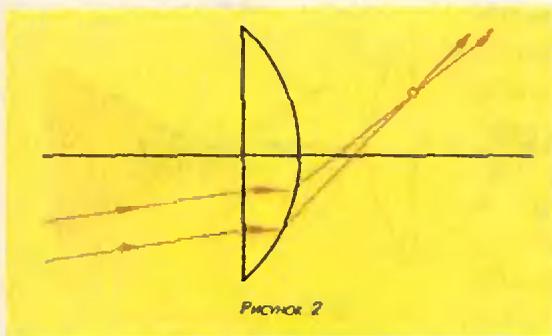


Рис. 2

$$L = R/(n-1).$$

Мы видим, что полученное расстояние не зависит от угла β , т.е. одинаково для всех лучей из нашего пучка. Значит, мы доказали, что пучок после преломления сойдется в точку, и нашли расстояние от линзы до этой точки. Заметим, что при различных углах падения пучка на линзу все точки пересечения лежат в плоскости, которая перпендикулярна главной оптической оси линзы и находится на расстоянии $R/(n-1)$ от линзы. Иными словами, мы вычислили фокусное расстояние для нашей линзы:

$$F = R/(n-1).$$

Совершенно таким же образом (только после более длинных вычислений) можно получить аналогичную формулу для фокусного расстояния линзы, которая ограничена двумя сферическими поверхностями радиусов R_1 и R_2 . Его удобно записать в несколько ином виде:

$$1/F = (n-1)(1/R_1 + 1/R_2).$$

Радиусы могут быть оба положительными — для двояковыпуклой линзы, оба отрицательными — для линзы, вогнутой с двух сторон, разных знаков — для выпукло-вогнутой линзы (а в нашем случае плосковыпуклой линзы один из радиусов оказывается бесконечно большим). При этом, если фокусное расстояние линзы оказывается положительным (фокус линзы — действительный), т.е. параллельные лучи после преломления действительно сходятся в точке, такую линзу называют собирающей (или положительной). Если же фокусное расстояние отрицательное (фокус мнимый), т.е. параллельные лучи после преломления расходятся, линзу называют рассеивающей (или отрицательной).

Существует простое соотношение, называемое формулой линзы (его можно получить геометрически), которое связывает между собой расстояние d от предмета до линзы, расстояние f от линзы до изображения предмета и фокусное расстояние линзы F :

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Итак, параллельный пучок лучей после преломления в собирающей линзе сходится в точке, находящейся в фокальной плоскости. Это позволяет легко построить ход произвольного луча после преломления. Для этого достаточно нарисовать параллельно ему вспомогательный луч, проходящий через оптический центр линзы (этот луч не преломляется), и найти точку пересечения этого луча с фокальной плоскостью — через эту же точку должен пройти и основной луч после преломления (рис. 3). Возможность построения хода произвольного луча очень помогает, когда нужно строить изображение в сложной оптической системе, содержащей несколько линз, — при этом нет необходимости получать промежуточные изображения после каждой линзы.

Важно отметить, что при таком способе построения хода лучей можно выбирать любые лучи, даже идущие под большими углами к главной оптической оси линзы, — причем при необходимости можно увеличить диаметр линзы, чтобы лучи на нее попали. Дело в том, что

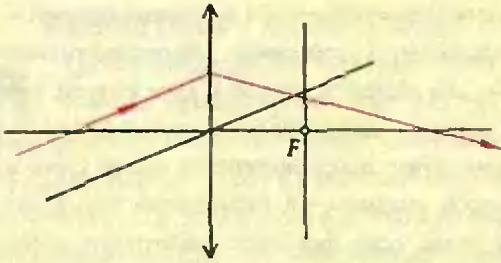


Рисунок 3

метод построения соответствует «бумажной» линзе — не линзе, а формуле линзы. Для настоящей линзы такой результат получится лишь для «правильных» лучей, идущих под малыми углами к главной оптической оси — а именно это нам и нужно.

Воспользуемся этим методом для решения несложной задачи. На рисунке 4 изображены собирающая линза и ее главная оптическая ось и задан ход одного луча до и после преломления в линзе. Нужно найти положение фокальной плоскости. Проведем вспомогательный луч параллельно падающему так, чтобы он проходил через центр линзы, — этот луч не преломляется, а точка его пересечения с преломленным лучом как раз лежит в фокальной плоскости линзы. Кстати, можно «обратить» лучи — считать преломленный луч падающим, а бывший падающий — преломленным и, как и в первом случае, построить фокальную плоскость с другой стороны линзы. Впрочем, обе фокальные плоскости должны быть на одинаковом расстоянии от центра линзы.

Вернемся к «настоящим» линзам. Обычно считается, что точечный источник света испускает лучи равномерно во все стороны. Где бы ни был расположен глаз, в него попадет расхо-

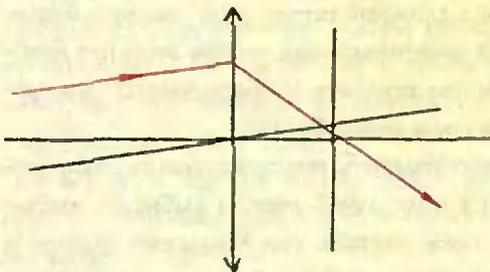


Рисунок 4

дящийся пучок лучей и мы увидим светящуюся точку. Совсем другое дело, когда мы хотим увидеть изображение этой точки в линзе. Будем считать, что на рисунке 5 изображена «настоящая» линза и задан ее размер. В этом случае изображение точечного источника в линзе образовано пучком лучей, крайние лучи которого ограничены диаметром линзы. Соответственно, этими крайними лучами ограничен и пучок на выходе линзы. Изображение можно увидеть, только находясь в телесном угле, образованном лучами, прошедшими точку пересечения после линзы. Любопытно, что есть такие точки, откуда не виден ни источник, ни его изображение в линзе. Например, точка В — источник закрыт

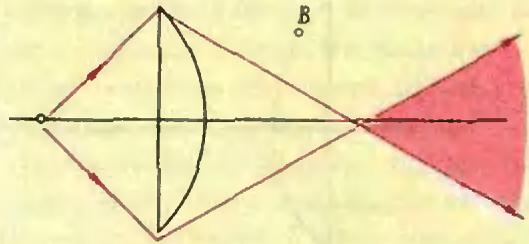


Рисунок 5

линзой, а в телесный угол, из которого видно изображение, мы не попали. Для того чтобы расширить область, из которой можно видеть действительное изображение, можно использовать экран. Если поместить экран в место пересечения лучей после преломления их в линзе, то от изображения на экране лучи будут распространяться во все стороны (диффузное отражение). Так и делают в кинотеатре. Если же попробовать смотреть фильм, сидя лицом к объективу киноаппарата или поместив на место экрана зеркало, то мы в лучшем случае увидим маленький фрагмент общей картинки, причем из разных мест будут видны разные фрагменты.

ИЗБРАННЫЕ ШКОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

9 КЛАСС

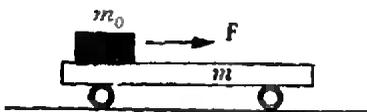


Рисунок 1

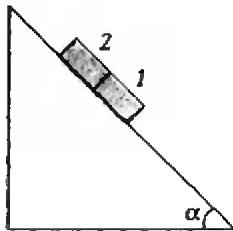


Рисунок 2

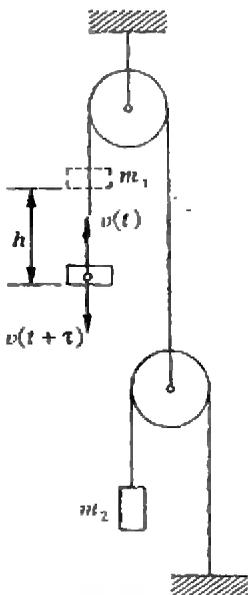


Рисунок 3

1. Ледяная горка составляет с горизонтом угол $\alpha = 10^\circ$. По ней пускают вверх камень, который, поднявшись на некоторую высоту, соскальзывает по тому же пути вниз. Каков коэффициент трения, если время спуска в $n = 2$ раза больше времени подъема?

2. Шар массой m падает в жидкости плотностью ρ с постоянной скоростью v . С какой силой нужно тянуть этот шар для того, чтобы он поднимался в той же жидкости со скоростью $2v$? Объем шара V , сила сопротивления при движении шара в жидкости пропорциональна скорости шара.

3. Тележка массой $m = 20$ кг может катиться без трения по горизонтальной поверхности. На тележке лежит брусок массой $m_0 = 2$ кг (рис.1). Коэффициент трения между бруском и тележкой $\mu = 0,25$. К бруску приложена сила $F = 1,96$ Н. Найдите силу трения между бруском и тележкой и ускорения бруска и тележки.

4. Два бруска массой $m = 0,2$ кг каждый поставили на наклонную плоскость с углом $\alpha = 45^\circ$ (рис.2). Коэффициент трения нижнего бруска о плоскость $\mu_1 = 1$, верхнего — $\mu_2 = 0,1$. Определите силу взаимодействия брусков при их совместном соскальзывании с наклонной плоскости.

5. Через закрепленный и подвижный блоки перекинута нить, к свободным концам которых привязаны грузы массами m_1 и m_2 (рис.3). В результате начального толчка, сообщенного системе, груз массой m_1 начал двигаться вверх и на расстоянии $h = 0,49$ м от наивысшей точки подъема побывал дважды через интервал времени $\tau = 2$ с. Определите отношение m_1/m_2 , пренебрегая массами блоков и считая нити нерастяжимыми и не проскальзывающими по блокам.

10 КЛАСС

6. Имеется положительно заряженный шар. Как с помощью этого шара, не уменьшая его заряда, наэлектризовать два других шара — один положительно, другой отрицательно?

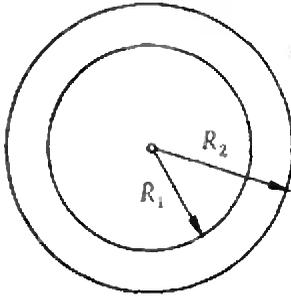
7. Маленький металлический шарик подвешен на нити между горизонтальными пластинами плоского конденсатора и совершает колебания. Как изменится период

колебаний шарика, если ему сообщить положительный заряд, а верхнюю пластину конденсатора зарядить тоже положительно?

8. Заряд q равномерно распределен по объему шара радиусом R из непроводящего материала. Постройте график зависимости напряженности поля от расстояния r от центра шара. Диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1$.

9. Определите емкость сферического конденсатора, образованного двумя тонкими проводящими концентрическими сферами радиусов R_1 и R_2 (рис. 4).

10. Два одноименных точечных заряда q_1 и q_2 , массы которых m_1 и m_2 , движутся навстречу друг другу. В момент, когда расстояние между зарядами равно r_1 , они имеют скорости v_1 и v_2 . До какого минимального расстояния сблизятся заряды?



Риснок 4

11 КЛАСС

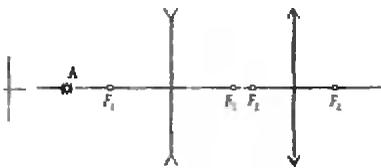
11. На стеклянную плоскопараллельную пластину падает луч света под углом α . Луч частично отражается от верхней поверхности, частично проходит внутрь пластины, снова отражается — теперь от нижней поверхности и затем выходит через верхнюю. Найдите угол выхода луча и длину пути, пройденного лучом в пластине. Толщина пластины d , показатель преломления стекла n .

12. Расстояние от предмета до экрана $L = 105$ см. Тонкая линза, помещенная между ними, дает на экране увеличенное изображение предмета. Если линзу переместить на $l = 32$ см, то на экране получится уменьшенное изображение. Каково фокусное расстояние линзы?

13. Постройте график зависимости расстояния изображения до собирающей линзы от расстояния предмета от линзы.

14. Найдите построением изображение точки в системе двух тонких линз — рассеивающей и собирающей (рис. 5). Фокусы обеих линз заданы.

15. Близорукий человек, пределы аккомодации глаза которого лежат между $d_1 = 12$ см и $d_2 = 60$ см, носит очки. С помощью очков он может хорошо видеть удаленные предметы. На каком наименьшем расстоянии может этот человек читать книгу в очках?



Риснок 5

Публикацию подготовила В.Тихомирова



Уважаемые подписчики!

С 1993 года журнал "Квант" начинает новую жизнь. Во-первых, изменен процесс изготовления номера — набор и создание оригинал-макета журнала осуществляется теперь с применением самой современной компьютерной техники, что позволяет сделать более живыми и разнообразными его дизайн, так чтобы и в эстетическом плане журнал мог отвечать современным стандартам. Определенные изменения претерпит и содержательная сторона журнала. Сохраняя все основные рубрики, мы собираемся более гибко учитывать реальные интересы читателей. В частности, наиболее популярные рубрики журнала будут подкрепляться специальными книжными выпусками-приложениями. Так нам всегда хотелось, но не удавалось из-за дефицита места, максимально полно знакомить читателей-абитуриентов с материалами вступительных экзаменов. По той же причине мы практически оставляли в стороне подборки задач школьных, районных и областных олимпиад, интерес к которым и у учащихся, и у учителей достаточно высок. Давно назрела необходимость собрать лучшие материалы рубрик "Школа в Кванте" и "Практикум абитуриента" в отдельные приложения. Как бы в противовес нашим творческим планам из-за стремительно растущих цен на бумагу и постоянно увеличивающихся полиграфических расходов стоимость журнала с момента объявления его подписной цены возросла более чем в 30 раз. Стремясь, тем не менее, сократить возможные убытки и одновременно не разочаровать наших подписчиков, мы вынуждены были пойти на изменение характера и регламента выпуска журнала "Квант". Теперь вместо ежемесячно выходящих журналов мы будем выпускать поочередно журнальную и книжную продукцию. В частности, 1993 год придется вам рассматривать как вынужденный переходный период, в течение которого будут крайне нежелательные всем нам, но неизбежные задержки с выходом очередных номеров. К сожалению, это уже коснулось первого полугодия, однако у нас есть полная уверенность, что к концу 1993 года мы ликвидируем все накопившиеся моральные издержки и не потерявшие к нам доверия читатели будут должным образом вознаграждены. Кстати, решения задач конкурсов и вступительных заданий, опубликованных в первом номере, необходимо в новых условиях выслать до 15 сентября. Что же получат наши подписчики в 1993 году? Подписавшиеся на первое полугодие получат два номера журнала, а также первый выпуск книжного приложения к журналу "Квант" — "Задачи по математике и физике" (пособие для поступающих в вузы). В июле в серии "Библиотечка "Квант" впервые на русском языке будет опубликована книга замечательного ученого 20 века создателя теории Большого Взрыва и расширяющейся Вселенной Г.Гамова "Приключения мистера Томпкинса". Это одно из лучших в мире научно-популярных изложений теории относительности. Подписавшиеся на наш журнал на второе полугодие 1993 года получат эту книгу в качестве летнего выпуска нашей продукции. Два следующих номера журнала подписчики получат в сентябре и ноябре. Впоследствии начиная с 1994 года журнал "Квант" будет выходить один раз в два месяца. Те, кто не успел подписаться на журнал "Квант" на второе полугодие 1993 года, еще могут наверстать упущенное, прислав в почтовым переводом в редакцию журнала "Квант" (по адресу: 103006 Москва, К-5, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, "Квант") 600 рублей (за три книжно-журнальных выпуска) плюс стоимость почтовых расходов за доставку соответствующих выпусков, которую вы должны узнать на почте по месту жительства. Все желающие могут также заказать в редакции дополнительные и отдельные выпуски (наш телефон для заказов 250-33-54). Ждем ваших писем и звонков. **Издатель, Редакция**

пространственное воображение в планиметрии

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СТЕРЕОСКОП

Владимир Дубровский Игорь Шарыгин

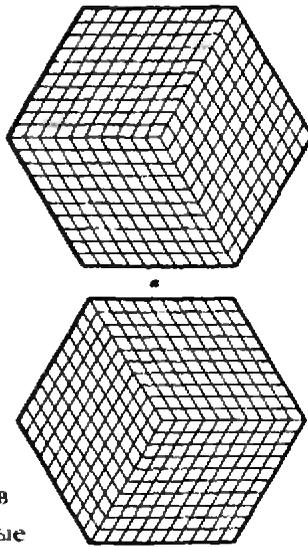


Рисунок 1

Знаете ли вы, как из шести спичек составить четыре правильных треугольника со стороной в одну спичку? Если вы впервые встречаетесь с этим вопросом, он наверняка покажется далеко не простым, более того, неразрешимым, по крайней мере, пока вы будете пытаться найти «плоский» ответ. И действительно, в плоскости эту задачу решить невозможно (докажите!). Разгадка в том, чтобы покинуть плоскость и рассмотреть задачу как трехмерную. Теперь вы должны решить ее быстро: надо просто составить из спичек треугольную пирамиду.

В этом примере мы просто вынуждены «выйти в пространство», чтобы справиться с задачей. Но есть немало планиметрических задач, в которых «дополнительная размерность»

облегчает решение или открывает новый красивый и неожиданный подход, хотя в принципе их и можно решить сугубо планиметрически. Иногда достаточно лишь как следует всмотреться в чертеж к такой задаче: в ка-

кой-то момент он как бы становится рельефным и решение буквально встает перед вами во всей ясности. Мы начнем с одного из наиболее впечатляющих примеров такого рода.

Ромбическое разбиение.¹ Правильный шестиугольник со стороной 10 разбит на ромбы со стороной 1, как показано на рисунке 1, а. Разрешается переставлять ромбы тройками, как на рисунке 2. Докажите, что с помощью таких операций можно получить разбиение, показанное на рисунке 1, б, и что число операций, необходимое для этого, не меньше 1000.

Идею решения иллюстрирует рисунок 3 (на котором для простоты изображен шестиугольник со стороной 4). Произвольное разбиение шестиугольника на ромбы можно представить себе

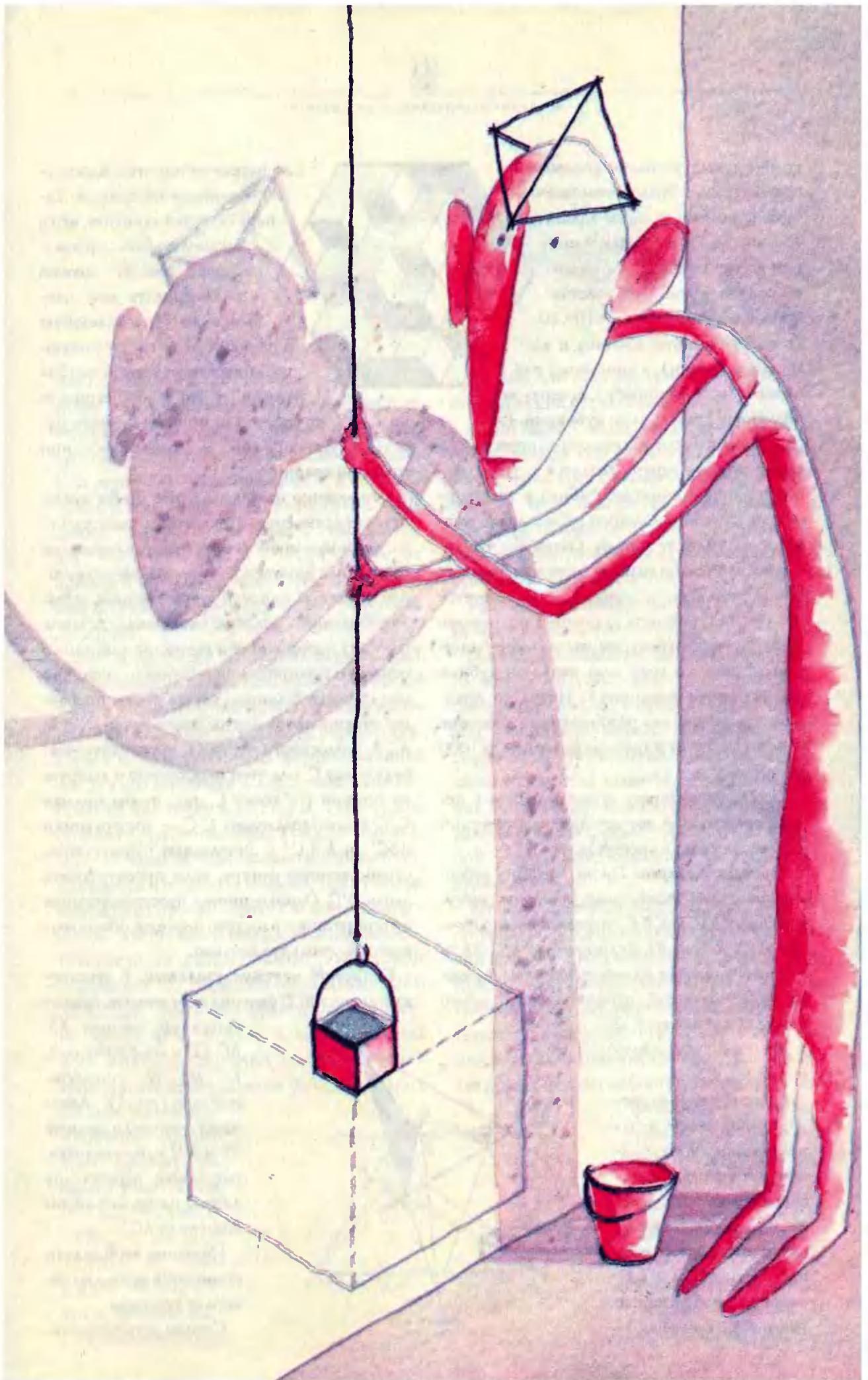
как частичное заполнение большого куба равными между собой маленькими кубиками; это особенно легко увидеть, если закрасить

¹ Это задача M709 из «Задачника «Кванта» (автор

А. Смирнов).



Рисунок 2



ромбы тремя разными способами в соответствии с тремя возможными ориентациями граней кубиков (см. рис. 3). С этой точки зрения исходному разбиению отвечает совсем пустая кубическая коробка размером $10 \times 10 \times 10$ (с которой сняты крышка и две соседние стенки), а конечному разбиению — та же коробка, доверху заполненная единичными кубиками. Разрешенные по условию операции перестановки ромбов теперь сводятся к укладыванию одного единичного кубика в трехгранную нишу или к удалению кубика, три грани которого выходят наружу. Очевидно, что добавляя кубики по одному, можно заполнить всю коробку, причем потребуется $10^3 = 1000$ кубиков, а значит, не меньше 1000 операций (большее число может получиться, если по ходу дела какие-то кубики вам захочется вынимать). Нетрудно доказать, что любые два ромбических разбиения переводятся друг в друга не более чем за 1000 операций.

Разобранную задачу можно отнести к нетрадиционным. А вот истинно классический пример «выхода в пространство».

Теорема Дезарга. Пусть прямые, содержащие соответственные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пересекаются в точках P, Q, R (рис. 4). Если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 , соединяющие соответственные вершины треугольников, пересекаются в одной точке O , то точки P, Q и R лежат на одной прямой.

Если считать, что треугольники лежат в одной плоскости, то доказать эту теорему, оставаясь в плоскости, далеко не просто. Но она почти очевидна, если плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ различны: в этом случае точки P, Q, R принадле-

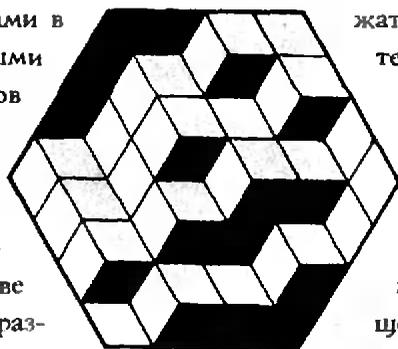


Рис. 3

жат пересечению этих плоскостей, т.е. лежат на прямой. Теперь остается заметить, что в «плоском случае» чертеж к задаче (рис. 4) можно рассматривать как изображение (параллельную проекцию) соответствующей пространственной конфигурации, и что коллинеарность точек — т.е. принадлежность одной прямой — сохраняется при проектировании.

Откровенно говоря, для того чтобы лучше оттенить основную идею этого доказательства, мы в нем кое-что опустим. А именно, на самом деле полагается доказать, что для любой заданной плоской конфигурации, удовлетворяющей условию теоремы Дезарга, имеется набор линий и точек, не лежащих в одной плоскости, изображением которого она служил. В данном случае это не проблема: можно, например, оставить точки O, A, B, A_1, B_1 в плоскости чертежа, взять какую-нибудь точку C' над этой плоскостью и выбрать на прямой OC' точку C_1 так, чтобы прямая C_1C' была параллельна $C'C$ — треугольники ABC' и $A_1B_1C_1'$ и определяют нужную пространственную фигуру, если проектировать вдоль $C'C$. Однако иногда пространственная интерпретация плоского чертежа обосновывается не столь тривиально.

Складной четырехугольник. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, касающаяся его сторон AB, BC, CD и DA в точках K, L, M, N соответственно (рис. 5). Докажите, что если прямые KL и MN пересекаются, то точка пересечения лежит на продолжении диагонали AC .

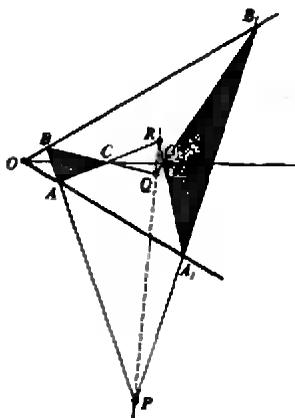


Рис. 4

Название этой задачи становится ясным из такого ее решения.

Согнем четырехуголь-

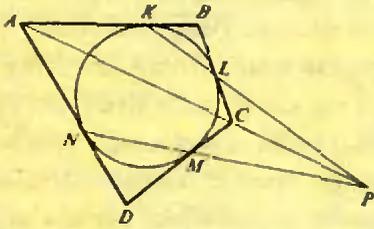


Рисунок 5

ник в вершинах и растянем его стороны так, чтобы он превратился в пространственный четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, стороны которого проходят через те же точки касания K, L, M, N , а вершины проектируются в A, B, C, D (рис. 5). Если общая точка P прямых KL и MN лежит на пересечении плоскостей $B_1KL = B_1A_1C_1$ и $D_1NM = D_1A_1C_1$, т.е. на прямой A_1C_1 , а значит, и на ее проекции, прямой AC (так как проекция точки P — это она сама). Все.

Все? А зачем же тогда дана окружность? Это становится ясным, как только мы попытаемся аккуратно построить четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Можно провести перпендикуляры к плоскости данного четырехугольника $ABCD$ в его вершинах и последовательно выбрать на них точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, чтобы сторона A_1B_1 прошла через K ; B_1C_1 — через L ; C_1D_1 — через M . Тем самым однозначно определяется и четвертая сторона, D_1A_1 . Но ведь она должна пройти через N — и это надо доказать! Вот тут нам и понадобится окружность. Покажем, что $\angle ANA_1 \approx \angle DND_1$; этого будет достаточно. Из равенства касательных AN и AK следует равенство прямоугольных треугольников ANA_1 и AKA_1 , а значит, и углов $\angle ANA_1$ и $\angle AKA_1$. Далее, $\angle AKA_1 = \angle KBV_1$ (по построению это вертикальные углы). Пользуясь такими же соображениями, продолжим цепочку равенств углов: $\angle KBV_1 = \angle BLB_1 = \angle CLC_1 = \angle CMC_1 = \angle DMD_1 = \angle DND_1$; в итоге $\angle ANA_1 = \angle DND_1$, что и требовалось.

Проверьте самос-

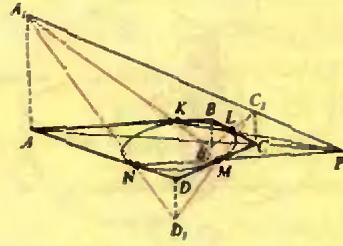


Рисунок 6

стоятельно, что если прямые KL и NM параллельны, то они параллельны AC .

В этой задаче с помощью добавления третьего измерения нам удалось свести вопрос о пересечении трех прямых к вопросу о пересечении трех плоскостей ($ABC, A_1B_1C_1$ и $A_1D_1C_1$). В следующей задаче три пересекающиеся сферы помогут доказать общеизвестную теорему о треугольнике.

Теорема о высотах. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Мы дадим доказательство только для остроугольного треугольника — именно здесь срабатывает «выход в пространство» (впрочем, отсюда легко вывести и теорему для тупоугольного треугольника, заметив, что вершина тупого угла является точкой пересечения высот остроугольного треугольника, образованного противоположной к ней стороной и высотами, опущенными из концов этой стороны).

Итак, рассмотрим сферы, построенные на сторонах AC и AB как на диаметрах. Ясно, что они пройдут через основание A_1 высот треугольника, опущенной из вершины A (рис. 7). Поэтому отрезок AA_1 является ортогональной проекцией окружности пересечения сфер на плоскость треугольника (рис. 8). Аналогично, две другие высоты являются проекциями ок-

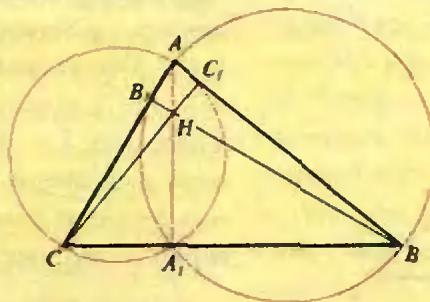


Рисунок 7

ружностей, по которым эти две сферы пересекаются с третьей сферой, построенной на диаметре BC . Теперь достаточно доказать, что три сферы имеют общую точку, ибо ее проекция H принадлежит проск-

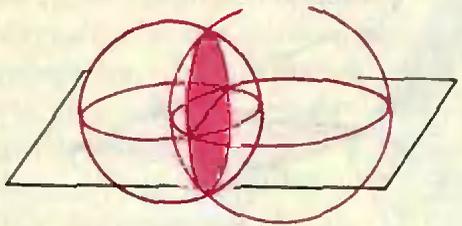


Рисунок 8

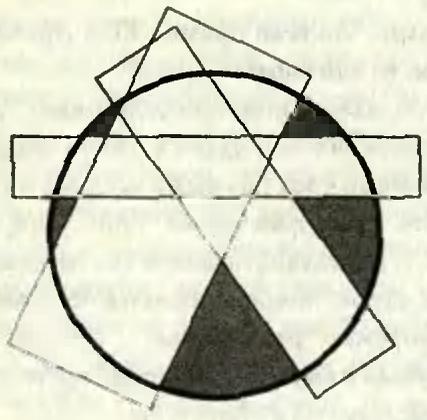


Рисунок 9

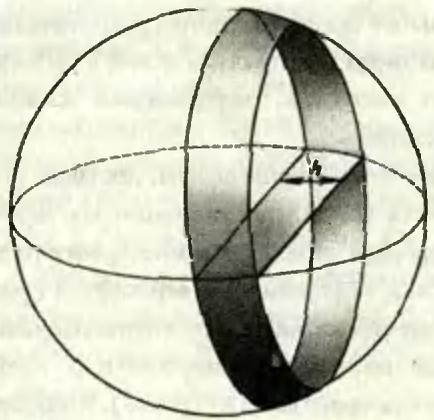


Рисунок 10

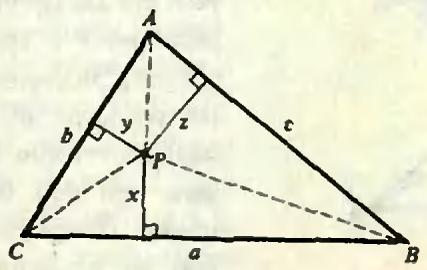


Рисунок 11

циям всех трех попарных пересечений сфер, т.е. всем трем высотам. Поскольку угол при вершине A острый, точка A лежит *вне* третьей сферы, а так как углы B и C острые, проекция A_1 точки A на BC лежит между точками B и C , т.е. *внутри* третьей сферы. Следовательно, окружность пересечения первых двух сфер, проходящая и через A , и через A_1 , пересекает третью сферу. Точки пересечения (их две) принадлежат всем трем сферам.

До сих пор мы рассматривали задачи, стереометрические решения которых не требовали по существу ничего, кроме пространственного воображения (если не гнаться за формальной строгостью). Такие решения всегда особенно красивы и создают — порой обманчиво — ощущение простоты. В следующем примере такой легкости, пожалуй, нет — в нем используется формула, всплывающая в самом конце курса стереометрии и не всеми запоминаемая. Замечательно, что ее приходится применять в, казалось бы, совершенно «плоской» ситуации.

Полоски на круге.² Докажите, что круг невозможно покрыть набором полос, общая ширина которых меньше его диаметра (рис.9).

Рассмотрим сферу с тем же центром и радиусом, что и у круга. Каждая полоска — точнее, ее пересечение с кругом — это проекция на круг так называемого «сферического пояса» (части сферы между двумя секущими параллельными плоскостями, в данном случае, перпендикулярными кругу; рис.10). Согласно упомянутой формуле, площадь сферического пояса равна $\pi D h$, где D — диаметр сферы, а h — толщина пояса, т.е. ширина соответствующей полосы (см., например, «Геометрию 7—11» А.В.Погорелова). Общая площадь S всех поясов равна $\pi D H$, где H — общая ширина всех полос, следовательно, $S < \pi D^2$. Но πD^2 — это площадь всей сферы. Это значит, что на сфере есть точки, не покрытые поясами. А их проекции — это точки круга, не покрытые пол-

²Эта задача также появлялась в «Заданиях «Кванта» под номером M735.

осками.

В заключение мы продемонстрируем применение трехмерных координат в двумерной задаче.

Точка Лемуана. Обозначим через x , y и z расстояния от точки P внутри треугольника ABC до его сторон a , b , c соответственно (рис. 11). Докажите, что сумма их квадратов $x^2 + y^2 + z^2$ достигает наименьшего значения в точке, для которой эти расстояния пропорциональны длинам соответствующих сторон: $x:y:z = a:b:c$.

Рассмотрим расстояния x , y , z как координаты некоторой точки Q в пространстве (в прямоугольной системе координат). Заметим, что Q лежит в первом октанте

$$(x > 0, y > 0, z > 0)$$

и ее координаты удовлетворяют уравнению $ax + by + cz = 2S_{ABC}$, где S_{ABC} — площадь треугольника ABC , поскольку в левой части этого уравнения, очевидно, стоит сумма удвоенных площадей треугольников PBC , PCA и PAB .

Теперь заметим, что $x^2 + y^2 + z^2$ — это квадрат расстояния от точки $Q(x, y, z)$ до начала координат, и что уравнение $ax + by + cz = \text{const}$ задает в пространстве плоскость, перпендикулярную вектору (a, b, c) (см. «Геометрию 7—11» А.В. Погорелова). Отсюда следует, что множество точек Q пространства, отвечающих всевозможным точкам P данного треугольника, — тоже треугольник (рис. 12) — сечение первого октанта плоскостью, задаваемой указанным выше уравнением. (Кстати, отрезки, отсекаемые этой плоскостью от положительных координатных полуосей, равны высотам треугольника ABC — докажите это!) Точке треугольника ABC с наименьшей суммой $x^2 + y^2 + z^2$ (эта точка называется *точкой Лемуана*) отвечает ближайшая к началу координат точка нашей плоскости, т.е. осно-

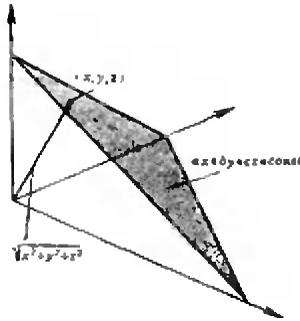


Рис. 12

вание перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат. Поскольку перпендикуляр параллелен вектору (a, b, c) , искомые координаты (x, y, z) пропорциональны числам (a, b, c) , что и требовалось доказать.

Предлагаем читателю вывести из этой задачи, что точка Лемуана лежит на пересечении так называемых *симедиан* треугольника, т.е.

прямых, симметричных медианам относительно соответствующих биссектрис.

А теперь — несколько упражнений, которые помогут вам определить, насколько хорошо вы умеете «смотреть вглубь».

1. Три луча с общим началом делят плоскость на три угла, в каждом из которых задано по точке. Постройте треугольник с вершинами на данных лучах, стороны которого проходят через данные точки.

2. На сторонах AB , BC , CD , и DA четырехугольника $ABCD$ даны, соответственно, точки K , L , M , N . Докажите, что если прямые KL , NM и AC пересекаются в одной точке или параллельны, то это же верно и для прямых KN , LM и BD .

3. Докажите теорему Брианшона: *прямые, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, описанного около окружности, пересекаются в одной точке.*

4. Три круга расположены так, что их пересечение непусто. Докажите, что их общие хорды имеют общую точку.

5. Через точку, заданную внутри круга, проводятся всевозможные хорды. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к кругу в концах этих хорд.

6. Четыре пешехода A , B , C и D идут с постоянными скоростями по четырем прямым попарно пересекающимся дорогам. Известно, что каждые два пешехода, кроме, может быть, C и D , встречаются друг с другом. Докажите, что C и D тоже встречаются.

ление — соответственно на одно- и двухгодичный поток. Для зачисления в группы достаточно заявления учителя, руководящего кружком, с приложением списка учащихся и указанием класса (курса), в котором они будут учиться в 1993/94 учебном году. Заявление должно быть подписано директором школы (СПТУ) и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплочиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ (см. ниже).

Для поступающих на отделение «Математика»

Вступительную работу высылайте по адресу: 119823, Москва, ГСП, МГУ, В-234, ВЗМШ (на прием, математика) или по адресу соответствующего филиала. Принимаются учащиеся (с сентября 1993г.) 9 классов.

Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Бишкек, Воронеж, Гомель, Донецк, Екатеринбург, Иваново, Ижевск, Краснодар, Красноярск, Махачкала, Нальчик, Ростов-на-Дону, Самара, Ташкент, Ульяновск (филиал МГУ), Худжанд, Челябинск, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Брянск, Витебск, Вятка, Луцк, Магадан, Павлодар, Петрозаводск, Тернополь, Уральск, Целиноград; работает также филиал в Могилеве при областном Дворце пионеров.

Учащиеся, проживающие на Северо-Зпаде России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), в Беларуси (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей) и в Прибалтике, присылают работы по адресу:

198097, Санкт-Петербург, ул. Третьякова, д. 32, С.-З. ЗМШ (на прием).

Для учащихся 10-11 классов на отделение «Математика»

1. Какое число больше: 500^{600} или 600^{500} ?

2. В треугольнике $A = 65^\circ$, $B = 42^\circ$. Найдите угол между: а) биссектрисами; б) высотами треугольника, проведенными из углов A и B .

3. Семь мальчиков и семь девочек решили разделить на 2 команды. Они встали в круг и начали считать (по часовой стрелке). Каждый шестой из ребят выходил из круга и шел во вторую команду. Когда все семь членов второй команды определились, оказалось, что она состоит из одних мальчиков. Как стояли ребята по кругу вначале и с кого начали считать?

4. Студент за 5 лет учения сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал больше экзаменов, чем в предыдущем, а на 5 курсе сдал втрое больше экзаменов, чем на первом курсе. Сколько экзаменов он сдал: а) на 4 курсе; б) на 3 курсе?

5. Найдите все четырехзначные числа, которые после отбрасывания первой цифры уменьшаются в 19 раз.

6. Существуют ли два таких выпуклых четырехугольника, что один расположен внутри другого и при этом сумма диагоналей внутреннего четырехугольника больше суммы диагоналей внешнего?

7. Найдите все такие пары чисел $(a; b)$, что $a^4 + b^4 = (a + b)^4$.

8. Докажите, что числа $111...1$ (всего 55 единиц) — составные, т.е. имеет делители, большие единицы, но меньшие самого числа.

9. Несколько камней весят вместе 10т, при этом каждый из них весит не более 1т.

а) Докажите, что этот груз можно за один раз увезти на пяти трехтонках (машинах грузоподъемностью 3т).

б) Приведите пример набора камней, удовлетворяющих условию, для которых четырех трехто-

нок может не хватить, чтобы увезти груз за один раз.

10. Плоскость раскрашена в красный и желтый цвета (каждая ее точка покрашена в один из этих цветов).

а) Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расположенные на расстоянии 1см друг от друга.

б) Докажите, что найдутся две точки одного цвета, являющиеся вершинами равностороннего треугольника.

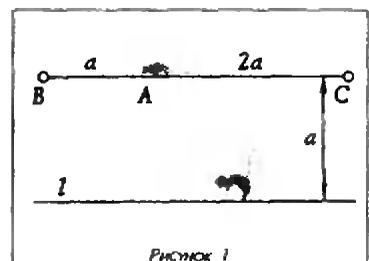
11. В ящик вставили 3 ящико, затем в некоторые из этих четырех ящиков вставили по 3 ящико, затем в некоторые из незаполненных ящиков вставили по 3 ящико и т.д. несколько раз. В результате оказалось, что заполнены 17 ящиков (ящик считается заполненным, если в него вставили хотя бы один ящик). Сколько при этом оказалось пустых ящиков?

12. Существует ли такой выпуклый четырехугольник, в котором любая из сторон длиннее каждой из диагоналей?

Для поступающих на отделение «Физика»

Вступительную работу высылайте по адресу: 119823, Москва, ГСП, МГУ, В-234, ВЗМШ (на прием, физика).

Принимаются учащиеся (с сентября 1993г.) 10 и 11 классов. Курс рассчитан на 2 года, однако одиннадцатиклассники могут обучаться одновременно в 10 и 11 классах. Поступающие в 10 класс решают задачи 1 — 4, а в 11 класс — задачи 3 — 6.



Риснок 1

ВСЕМИРНАЯ РАБОТА
НА ТЕМУ «ЯЗЫКИ И ЛИТЕРАТУРА»

1. На плоскости (рис. 1) на прямой BC в точке A сидит мышка, а в точках B и C расположены норки ($AB = 1/2BC = a$). На прямой l , параллельной BC и отстоящей от нее на a , сидит кошка. Кошка и мышка могут двигаться с постоянными скоростями u и v соответственно, мгновенно меняя направление движения. Мышка бежит к норке по прямой, а кошка действует так, чтобы догнать мышку за кратчайшее время.

а) При каком соотношении между скоростями u и v на прямой l будет существовать отрезок, стартуя с которого кошка обязательно поймает мышку?

б) Из какой точки прямой l кошке лучше начать двигаться в соответствии с ее тактикой?

в) Пусть теперь мышка может бегать по всей плоскости, а соотношение скоростей u и v таково, что отрезок из п. а) существует и кошка стартует именно с него. Появятся ли у мышки шансы спастись?

2. Воздушный шарик, наполненный водой почти до разрыва, сбрасывают без начальной скорости с высоты 5 м на асфальт. Оцените максимальный размер пятна, образующегося на асфальте в результате разрыва шарика.

3. К жестко закрепленной на высоте h попке штатива привязана веревка длиной l с закрепленным на другом ее конце бруском массой m (рис. 2). Штатив вращают с постоянной скоростью так, что брусок скользит по столу,

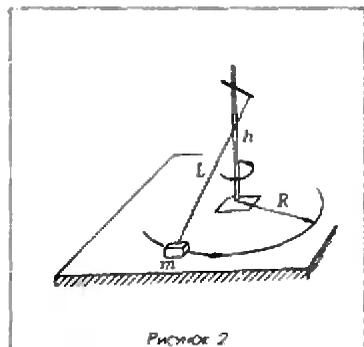


Рис. 2

описывая окружность радиусом R . Коэффициент трения бруска о стол μ . Найдите установившуюся скорость бруска, если известно, что длина попки штатива равно

$$\sqrt{R^2 + h^2} - l^2.$$

4. Тонкое колечко подлетает к шероховатой стенке первоначально не вращаясь (рис. 3). Коэффициент трения скольжения между колечком и стенкой μ . При

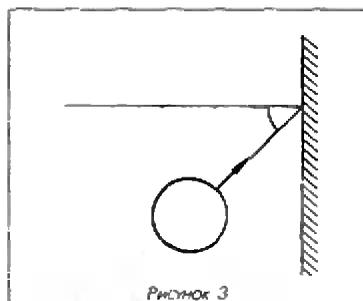


Рис. 3

каких углах подлета колечко будет отражаться от стенки под прямым углом? Удар вдоль нормали считайте абсолютно упругим.

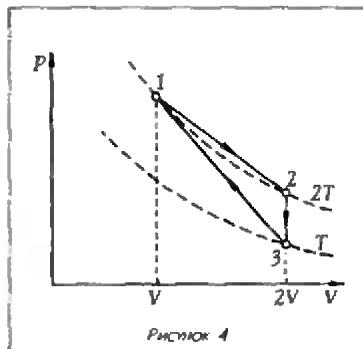


Рис. 4

5. Найдите количество теплоты, подведенное к 1 молью идеального одноатомного газа в процессе $1-2-3-1$ (рис. 4). Известны T и V .

6. В фарфоровую сферическую чашку радиусом R поместили 3 маленьких металлических шарика массой m каждый. Все шарики заряжены одинаково. Найдите заряд шариков, если известно, что в равновесии шарики находятся на расстоянии h от дно чашки.

Для поступающих на отделение
«Языки и литература»

Вступительную работу высылайте по адресу: 119823, Москва, ГСП,

МГУ, В-234, ВЗМШ (на прием, языки и литература).

Принимаются учащиеся (с сентября 1993г.) 9 и 10 классов.

ВСЕМИРНАЯ РАБОТА
НА ТЕМУ «ЯЗЫКИ И ЛИТЕРАТУРА»

1. Дано предложение: «Раскапывают погребенных в земле следы испинов».

Задание. Сколько может быть у этого предложения вариантов смысла? От чего это зависит? Перечислите все найденные вами варианты.

2. Дан ряд слов: золото, горох, голод, холод, молоко.

Задание. Найдите пищевое слово в ряду. Аргументируйте свой выбор.

3. Даны следующие слово на языке коми:

ворны, ворзыны, ворзынды, вордышты, вородны, подмыны, подмодны, лэбзыны, лэбны, гаждышты, гажадны, сейны, сейышты.

Вот переводы некоторых из них на русский язык (в другом порядке): шевелиться, зодержать, поест, шевелить, зодержаться, пошевелить, веселиться, зошевелиться, полететь.

Задание. Установите, какой перевод какому слову соответствует, и дайте переводы остальных слов языка коми.

4. Даны фразы на шугнанском языке и их переводы на русский язык.

1. Пир джооду шортък пишеен кихт, ата куд дорбоорайи джооду фикри кихт.

Старый волшебник делает глиняных кошек, а собака думает о волшебнике.

2. Джооду фикрийеен пиш хоодж кинееен.

Мысли волшебника пугают кошку.

3. Куд оллозеен пиир пишеен хоодж кинееен.

Прыжки собаки пугают старых кошек.

4. Джоодуйеен кудеен дууст кинееен, ата кудеи ос хоодж бруувьаон кинееен.

Волшебники знакомят собак, а собаки воют от страха.

Задание. Переведите на шугнанский язык:

1. Старая кошка думает о вое собак.

2. Старые друзья думают о глиняной кошке, о глиняная кошка прыгает.

5. Доно слово «штиль».

Задание 1. Какое отношение это слово может иметь к филологии?

Задание 2. Какие и сколько «штилей» выделил создатель со-

ответствующей теории и кто это был?

Задание 3. Сочините свои примеры каждого из «штилей».

Задание 4. Что получится, если «штиль» смешать? Придумайте свой пример.

6. Прочитайте драму А.С.Пушкина «Моцарт и Сальери». Почему «гений и злодейство — две вещи несовместные»? Следует ли это из самой драмы?

7. Какая разница между определением и описанием? «Ладко» —

дайте самостоятельно определение этого предмета. Объясните, почему это именно определение, а не описание.

8. У Одина — верховного бога древних скандинавов — были две вороны: Хугин (в переводе — «мысль») и Мунир («память»). Что связывает и что различает эти два понятия?

Главное требование к работе — подробное обоснование ответов на вопросы 2, 3, 4. Работы без объяснений рассматриваться не будут.

НОВЫЙ ПРИЕМ НА ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАЛОГО МЕХМАТА

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием учащихся, оканчивающих восьмие классы одиннадцатилетних общеобразовательных школ, на заочное отделение. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в октябре. Обучение на Малом мехмате платное. Срок обучения — три года. Учащиеся заочного отделения, успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета МГУ. Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 1 мая

1993 года выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом обязательно должны быть решены все задачи). Учащиеся, успешно закончившие 9 или 10 классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат при МГУ.

Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

- 1) республика, край, область;
 - 2) фамилия, имя учащегося;
 - 3) школа и класс;
 - 4) полный домашний адрес (с указанием почтового индекса);
 - 5) фамилия, имя, отчество родителей, места их работы и должность.
- В работу вложите листок бумаги 4х6см, на котором напишите полный домашний адрес и индекс, и вышлите ее по адресу: 119899, Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечание. Для школьников 7—11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 939-39-43.

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1. Решите уравнение $4xy + 1 = 2(x + y)$.
2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y^2 + 1 = 2xy. \end{cases}$$

3. Можно ли указать семь различных натуральных чисел, обратные к которым в сумме дают единицу?

4. Среди жителей города 85% знает русский язык, 80% — украинский, а 10% — не знает ни того, ни другого языка. Сколько процентов жителей знает оба языка?

5. Расколотый арбуз содержал 99% воды. После того, как он высух, содержание воды уменьшилось до 98%. Во сколько раз арбуз уменьшил свой вес?

6. Существует ли равнобедренный треугольник, который можно разрезать прямой линией на два равных треугольника?

7. Три хорды окружности пересекаются в одной точке, причем две из них делятся этой точкой пополам. В каком отношении делится третья хорда и почему?

8. В строку выписаны 50 целых чисел, причем сумма любых трех соседних чисел положительна. Обязательно ли при этом сумма всех 50 чисел положительна?

9. Грузный автомобиль из села в город ехал со скоростью 40км/ч, а обратно — порожняком — со скоростью 60км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.

10. Найдите первые 43 знака после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{0,99\dots9}$ (93 девятки).

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\log_{27}(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x) = \frac{1}{3} + \log_3(-\cos x).$$

2. В ромбе $ABCD$ из вершины D на сторону BC опущен перпендикуляр DK . Найдите длину стороны ромба, если

$$AC = 2\sqrt{6}, \quad AK = \sqrt{14}.$$

3. Рассматриваются всевозможные параболы, ветви которых направлены вверх, касающиеся оси Ox и прямой $y = \frac{4}{3}x + 8$. Найдите уравнение той из них, для которой сумма расстояний от начала координат до точек пересечения параболы с осями координат минимальна.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $AB = 5$, $SA = 4$. Через вершину A проведена плоскость α , пересекающая ребро SD и удаленная от точек B и D на одинаковое расстояние $5/4$. Найдите длины отрезков, на которые плоскость α делит ребро SD , если известно, что α не параллельна прямой BD .

5. Автомобили «Рено» и «Крайслер» движутся по кольцевой дороге, $1/4$ часть которой проходит по городу. Скорость «Рено» в городе равна $2v$, а за пределами города равна $9v/4$. Скорость «Крайслера» в городе равна v , а за пределами города равна $3v$. Автомобили одновременно въезжают в город. Через какое время один из них совершит обгон другого, если длина городского участка кольцевой дороги равна S ?

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$2\arcsin 2x = \arccos 7x.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\log_{4x^2-x} 5} \log_5 \left(\frac{25}{4x^2-x} \right) = 1,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x > \ctg 2x$.

3. Числа x и y являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} -x + ay = 2a, \\ ax - y = 3a - 5, \end{cases}$$

где a — параметр. Какое наименьшее значение принимает выражение $x^2 + y^2$? При каком a это происходит?

4. В параллелограмме $ABCD$ угол A тупой, $AD > AB$, $AD = 7$. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BD , а точка A'' симметрична точке A' относительно прямой AC и лежит на диагонали BD . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $BA'' = 0,8BD$.

5. Сфера вписана в правильную треугольную пирамиду $SABC$ (S — вершина), а также вписана в прямую треугольную призму $KLMK'L'M'$, у которой $KL = KM = \sqrt{6}$, а боковое ребро KK' лежит на прямой AB . Найдите радиус сферы, если известно, что прямая SC параллельна плоскости $L'L'M'$.

Вариант 3

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O . Найдите периметр трапеции, если $BO = 7/8$, $OD = 25/8$, $\angle ABD = 90^\circ$.

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{x} \log_5 \left(\frac{10}{3} - 5^{-x} \right) > 1.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 17 \cos 2x - 7 = 21 \sin x \cos 2y, \\ \cos x = \sqrt{3} \sin x \cos y. \end{cases}$$

4. Основание прямой призмы $ABCA'B'C'$ — равнобедренный треугольник ABC , в котором $AC = CB = 2$, $\angle ACB = 2 \arcsin(4/5)$. Плоскость, перпендикулярная прямой $A'B$, пересекает ребра AB и $A'B'$ в точках K и L соответственно, причем $AK = (7/16)AB$, $LB' = (7/16)A'B'$. Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью.

5. На берегу реки шириной bl вниз по течению на расстоянии l друг от друга расположены пункты $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{100}$. От Π_0 до Π_{100} со скоростью $5v$ и с остановками только в пунктах Π_0, \dots, Π_{100} идут электрички, которые отправляются из Π_0 одна за другой с интервалом времени $2l/11v$. Студент, находящийся на противоположном берегу реки напротив Π_0 , отплывает в лодке одновременно с отправлением из Π_0 очередной электрички. Отплыв по прямой до одного из пунктов, студент добирается до Π_{100} в электричке. Скорость течения реки и скорость лодки в стоячей воде равны v . В какой пункт должен плыть студент, чтобы затратить на весь путь до Π_{100} наименьшее время? Найдите все решения. (Временем стоянки электричек можно пренебречь.)



Вариант 1

1. Шайба, брошенная вдоль наклонной плоскости, скользит по ней, двигаясь вверх, а за-

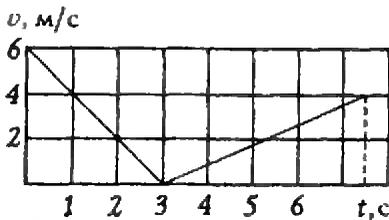


Рисунок 1

тем возвращается к месту броска. График зависимости модуля скорости шайбы от времени приведен на рисунке 1. Найдите угол наклона плоскости к горизонту.

2. Цилиндрический колокол для подводных работ высотой $h = 2$ м опускается вверх дном с борта катера на дно водоема глубиной $H = 3$ м. Найдите толщину воздушной подушки, образовавшейся у «потолка» колокола к моменту его касания дна водоема. Температуру считайте постоянной.

3. Заряженная частица движется в однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях.

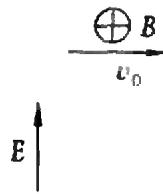


Рисунок 2

В некоторый момент времени ее скорость \vec{v}_0 перпендикулярна \vec{E} и \vec{B} (рис.2), при этом выполняется соотношение $E/(v_0 B) \ll 1$. В те моменты времени, когда скорость частицы направлена противоположно \vec{v}_0 , отношение изменения кинетической энергии частицы к ее начальной кинетической энергии равно β . Определите отношение $E/(v_0 B)$.

4. Трапеция $ABCD$ расположена так, что ее параллельные стороны перпендикулярны главной оптической оси тонкой линзы (рис.3). Линза создает действительное изображение трапеции в виде прямоугольника. Если повернуть трапецию на 180° вокруг стороны AB , то линза создаст ее изображение в виде трапеции с теми же самыми углами. С каким увеличением изображается сторона AB ?

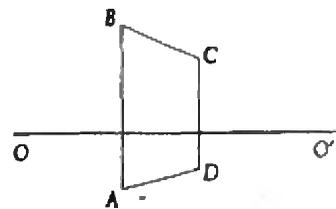


Рисунок 3

Вариант 2

1. Доска с лежащим на ней бруском находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.4). Система совершает колебания под действием упругой пружины вдоль прямой с периодом $T = 1$ с и максимальным значением скорости $v_m = 0,5$ м/с. При этом доска и брусок неподвижны друг относительно друга. При каких значениях коэффициента трения скольжения между доской и бруском такие колебания возможны?

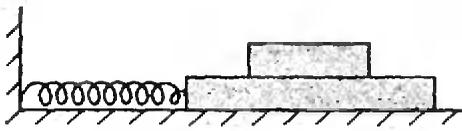


Рисунок 4

2. Гелий (He) и водород (H_2) находятся в теплоизолированном цилиндре под поршнем. Объем, занимаемый смесью газов, $V_0 = 1$ л, давление $p_0 = 37$ атм. При адиабатическом расширении смеси относительное уменьшение температуры составило 75%. Найдите работу, совершенную при этом смесью газов, если масса водорода в 1,5 раза больше массы гелия.

Внутренняя энергия моля гелия равна $U_1 = 3/2RT$, водорода — $U_2 = 5/2RT$, где T — абсолютная температура, R — газовая постоянная. Молярные массы гелия и водорода равны соответственно $M_1 = 4$ г/моль и $M_2 = 2$ г/моль.

3. Неподвижная проволочная квадратная рамка находится в однородном магнитном

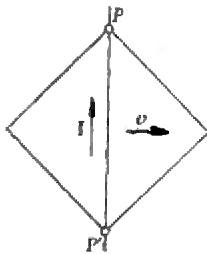


Рисунок 5

поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости рамки (рис.5). По рамке скользит без нарушения электрического контакта проволочная перемычка PP' со скоростью \vec{v} ($\vec{v} \perp PP'$). В тот момент, когда перемычка пересекает центр квадрата, по ней течет ток силой I . Определите величину и направление индукции магнитного поля. Рамка и перемычка выполнены из

одного куска проволоки с удельным электрическим сопротивлением ρ и площадью поперечного сечения S .

одного куска проволоки с удельным электрическим сопротивлением ρ и площадью поперечного сечения S .

4. На плоскую поверхность тонкой плосковыпуклой положительной линзы нанесено абсолютно отражающее покрытие. На выпуклую поверхность этой линзы падает узкий пучок импульсного лазерного излучения с энергией $W = 4$ Дж и длительностью импульса $\tau = 10^{-8}$ с. Падающий пучок распространяется параллельно главной оптической оси линзы на расстоянии $F/2\sqrt{3}$ от оси (F — фокусное расстояние линзы). Найдите величину средней силы, действующей на линзу со стороны света, если половина энергии лазерного излучения поглощается в линзе. Отражением от поверхности линзы (без покрытия) можно пренебречь.

Вариант 3

1. Два груза массой m каждый связаны нитью (рис.6). Между грузами вставлена легкая упругая пружина, сжатая на величину x . Система движется со скоростью v вдоль прямой, перпендикулярной ее оси. В некоторый момент нить пережигают, и грузы разлетаются под углом 90° . Найдите коэффициент упругости пружины.

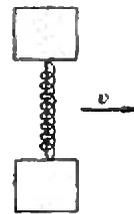


Рисунок 6

2. Легкая подвижная перегородка делит герметичный теплопроводящий сосуд на две неравные части, в которых находится воздух при атмосферном давлении и комнатной температуре. В меньшую часть сосуда впрыснули легко испаряющуюся жидкость, давление насыщенного пара которой при комнатной температуре равно $p_n = 3,5$ атм. Спустя некоторое время перегородка перестала двигаться, а жидкость почти вся испарилась. Объем части сосуда, в которой находятся воздух и пары, увеличился при этом вдвое по сравнению с первоначальным. Какую часть объема сосуда составляла вначале его меньшая часть? Обь-

ем части сосуда, в которой находятся воздух и пары, увеличился при этом вдвое по сравнению с первоначальным. Какую часть объема сосуда составляла вначале его меньшая часть? Обь-

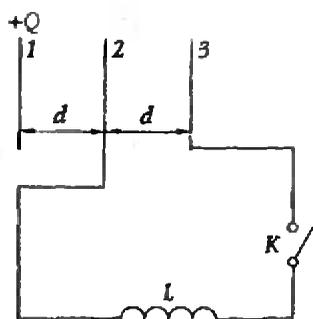
смом, занимаемым жидкостью в начале и в конце опыта, можно пренебречь.

3. Три одинаковые неподвижные металлические пластины расположены в воздухе на равных расстояниях d друг от друга (рис. 7).

Площадь каждой из пластин равна S . На пластине 1 находится положительный заряд Q .

Пластины 2 и 3 не заряжены и подключены через ключ K к катушке индуктивностью L .

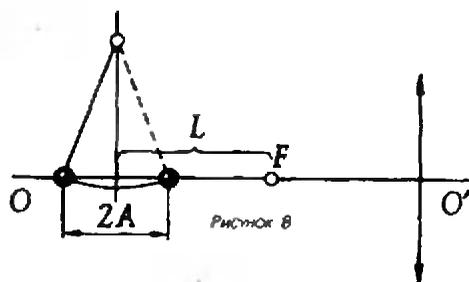
Определите максимальное значение тока через катушку после замыкания ключа. Рассто-



Риснок 7

яние между пластинами мало по сравнению с их размерами. Омическим сопротивлением катушки можно пренебречь.

4. Математический маятник раскачивается с амплитудой $A = 1$ см в плоскости рисунка 8. Равновесное положение нити маятника находится на расстоянии $L = \sqrt{5}$ см от переднего фокуса тонкой положительной линзы. Расстояние между изображениями маятника, лежащими на главной оптической оси линзы, равно $l = 2$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.



Риснок 8

Публикацию подготовили С. Самарова, А. Шеронов

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ

Вариант 1

(досрочный экзамен

факультета прикладной математики)

1. Решите уравнение

$$\frac{4x+a}{2x-a} - \frac{3x-a}{x+a} = \frac{10a-2x}{2x+a-a^2}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_4(x^2 - 4x + 2) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -\frac{1}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{4 \cos x + 3 \sin 2x} - 2 \cos x = 1.$$

4. Ребро куба $ABCD A' B' C' D'$ равно a . Найдите радиус сферы, проходящей через середины ребер AA' , BB' и через вершины A и C' .

5. Пусть числа x и y удовлетворяют соотношению

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0.$$

Найдите все значения, которые может принимать а) x ; б) сумма $4x + 3y$.

Вариант 2

(основной экзамен факультета прикладной математики)

1. Решите уравнение

$$3 + \frac{2a-3}{(x-2)(x+a)} = \frac{2x+5a}{x+a}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3^x - 25}{x+1} \leq \frac{3^x - 25}{x-3}.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\cos x - \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

4. Правильная четырехугольная пирамида со

стороной основания, равной a , и двугранным углом при основании, равным 2α , пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найдите площадь сечения.

5. Установите, при каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos^2 y = (a^2 - 4)^2 + 1, \\ \cos x \sin x 2y = a + 2 \end{cases}$$

имеет решение. Найдите все решения.

Вариант 3

(досрочные экзамены на инженерные специальности)

1. Решите уравнение

$$\frac{2a - x}{x + a - 3} + \frac{3x - 2a}{x - a + 1} = 4.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x - 1) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x - 2) = -1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{7 \sin x - \cos 2x} + 2 \cos x = 0.$$

4. Сфера проходит через вершину A куба $ABCA'B'C'D'$, середины ребер AB и AD , касается грани $A'B'C'D'$. Найдите отношение площади поверхности сферы к площади полной поверхности куба.

5. Пусть числа x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y - x \leq 5, \\ y + 4x \leq -5, \\ 3y + 2x \geq -5. \end{cases}$$

Покажите, что при этом $-4 \leq x \leq -1$ и найдите все значения, которые могут принимать а) $x^2 + y^2$; б) отношение y/x .

Вариант 4

(основной экзамен инженерных факультетов)

1. Решите уравнение

$$\frac{x^2 + 1}{n^2 x - 2n} - \frac{1}{2 - nx} = \frac{x}{n}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_6 \left(6^{\frac{1-2x}{3x-2}} + \frac{23}{6} \right) = \log_6 4 + \frac{1-x}{3x-2}.$$

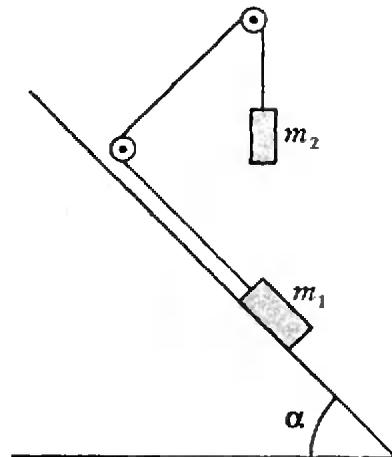
3. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - 2 \sin x} + \sqrt{6} \cos x = 0.$$

4. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом α . Ребро AA_1 равно b и образует с ребрами AB и AD угол φ . Определите объем параллелепипеда.

5. Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 - 6x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

1. Тело массой $m_1 = 1$ кг лежит на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 45^\circ$ (рис. 1). Какой груз m_2 следует подвесить через систему неподвижных блоков, чтобы первое тело находилось в покое? Коэффициент трения о плоскость $\mu = 0,2$.

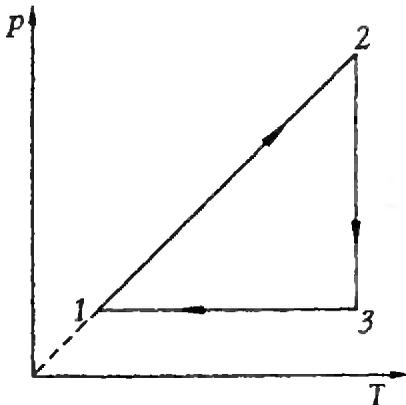


Риснок 1

2. Однородный цилиндр длиной l плавает в вертикальном положении на границе двух не смешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 и делится этой границей пополам. Пренебрегая трением, найдите период малых вертикальных колебаний цилиндра.

3. В открытой пробирке, вращающейся в горизонтальной плоскости с частотой $\omega = 10$ рад/с вокруг вертикальной оси,

проходящей через открытый край пробирки, находится столбик ртути длиной $h = 1$ см. Передний край столбика отстоит от края на $a = 20$ см. До какой температуры надо нагреть пробирку, чтобы при вдвое выросшей частоте вращения столбик не сместился? Плотность ртути $\rho = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м³, $p_{\text{внешн}} = 10^5$ Па, $t_{\text{нач}} = 0^\circ\text{C}$.



Риснок 2

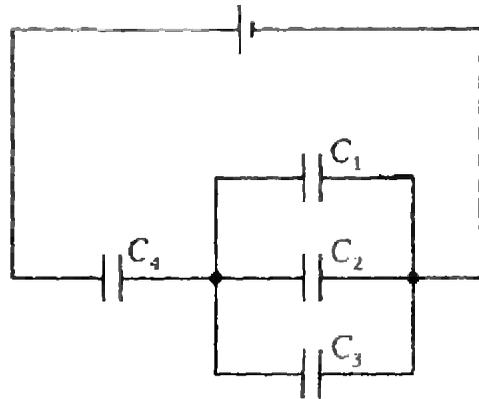
4. Найдите работу, совершенную 1 молем идеального газа при изотермическом расширении в цикле 1—2—3, если КПД цикла $\eta = 20\%$, $T_2 = 2T_1$ (рис. 2).

5. Давление воздуха в запертой комнате при температуре $t = 27^\circ\text{C}$ равно $p = 10^5$ Па. Влажность воздуха при этом составляет $f = 60\%$. Каким будет давление сухого воздуха и давление пара при понижении температуры на $\Delta t = 5^\circ\text{C}$? Давление насыщенного пара при $t = 27^\circ\text{C}$ равно $p = 3,56$ кПа.

6. Во сколько раз изменится заряд на конденсаторе емкостью C_4 при пробое конденсатора емкостью C_1 (рис. 3)? Емкости конденсаторов равны: $C_1 = C_2 = 2$ пкФ, $C_3 = C_4 = 4$ пкФ.

7. Два элемента с ЭДС $E_1 = 5$ В и $E_2 = 10$ В и внутренними сопротивлениями

$r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 2$ Ом соединены последовательно и замкнуты на резистор сопротивлением R . При этом внутри второго элемента те-



Риснок 3

ряется мощность $P = 4,5$ Вт. Что покажет вольтметр, подключенный к его клеммам? Чему равно R ?

8. Частица массой $m = 1,05 \cdot 10^{-25}$ кг и зарядом $q = 3,2 \cdot 10^{-19}$ Кл влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-5}$ Т л перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $v = 5 \cdot 10^6$ м/с. Найдите изменение импульса частицы за время $t = 0,125$ с.

9. Луч света от бесконечно удаленного источника падает на рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F_1 = 30$ см. На расстоянии $a = 40$ см от рассеивающей линзы расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F_2 = 45$ см. Главные оптические оси линз совпадают. На каком расстоянии от собирающей линзы находится изображение источника?

10. Мощность излучения лазера $P = 100$ Вт, длина волны излучения $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-6}$ м. Определите число фотонов, испускаемых лазером в единицу времени. Постоянная Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

**МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. В.И.ЛЕНИНА**

Математика / Математический факультет

Вариант 1*(математический факультет)*

1. Из пунктов A и B навстречу другу одновременно выезжают автобус и автомобиль. Если ко времени, затрачиваемому автомобилем на проезд из A в B , прибавить время, которое тратит автобус на проезд из B в A , то получится 12 часов. Определите, какое время автомобиль затрачивает на проезд из A в B , а автобус на проезд из B в A , если известно, что их разность составляет $9/20$ времени, прошедшего от начала движения автомобиля и автобуса до момента их встречи.

2. Решите неравенство

$$1 + \lg x^6 \cdot \log_3 x > \log_5 x^2 + \lg x^3.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3} + \cos x}{2 \sin^3 x - \cos x \sin 2x} > \frac{3}{2 \sin 4x}.$$

4. Решите уравнение

$$2x^2 + \log_2(7 + 2x - x^2) = 4 + x^4.$$

5. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B и углом A , равным α . Каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите угол между плоскостями SAC и SBC .

Вариант 2*(математический факультет)*

1. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1.$$

3. Решите уравнение

$$|1 + \sin 3x| \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1 - \cos x}{\cos \frac{3\pi + 2x}{2}}.$$

4. а) На координатной плоскости изобразите множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$|y - x| + |y - 1| = 1.$$

б) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|x - a| + |a - 1| = 1$ имеет два решения. Найдите эти решения для каждого значения параметра a .

5. Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, $AB = a$, $AD = b$. Грани MAD и MAB перпендикулярны плоскости основания, а грань MDC составляет с ней угол в 45° . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Вариант 3*(физический факультет)*

1. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор радиусом 5 с центральным углом $\frac{6\pi}{5}$. Найдите объем конуса.

2. Упростите выражение

$$\left(\frac{a^{1/4} - b^{1/4}}{a^{1/2} + a^{1/4}b^{1/4}} + \frac{a^{1/4} + b^{1/4}}{a^{1/2} - a^{1/4}b^{1/4}} - \frac{2b^{1/2}}{a^{3/4} - a^{1/4}b^{1/2}} \right) (b^{1/2} - a^{1/2}).$$

3. Решите уравнение

$$2\sin^2 3x + \cos^2 3x + \sin 3x = 1.$$

4. Напишите уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 2x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

5. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 7x - 8}{x^2 - 7x + 20} > 0.$$

Вариант 4

(индустриально-педагогический факультет)

1. Решите уравнение

$$0,4^{6^{2x+1}} = 6,25^{2-8x^3}.$$

2. Решите уравнение

$$\cos^2 x + 1 = 3 \sin x \cos x.$$

3. Найдите объем и площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, у которой высота равна $\sqrt{3}$, а плоский угол при вершине равен 30° .

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-4y} + \sqrt{x+4y} = 6, \\ \sqrt{x^2-16y^2} = 8. \end{cases}$$

5. Найдите промежутки убывания функции

$$y = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 2x^3.$$

Вариант 5

(химический факультет)

1. В конус вписан шар. Найдите объем шара, если образующая конуса равна l и наклонена к основанию конуса под углом α .

2. Решите неравенство

$$0,5^{x^2-3x-6} < 4.$$

3. Найдите двузначное число, если число его единиц на 2 больше числа десятков и произведение данного числа на сумму его цифр равно 144.

4. Решите уравнение

$$\cos 4x = -2 \cos^2 x.$$

5. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x-4}{x^2-4}}.$$

(математический факультет)

1. К двузначному числу слева и справа приписали по 1. В результате получилось число в 23 раза больше первоначального. Определите это число.

2. Определите, при каких значениях параметра a прямая $y = (2a + 6)x + 1$ касается параболы $y = (a - 3)x^2 - 2$.

3. Постройте график функции

$$y = \frac{|x| + 2}{|x| - 1}.$$

4. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{(1 - 3|x|)(3 - |x|)}{|x|}.$$

6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = 2 \sin x + \cos x,$

б) $y = \frac{1 + \sin x \cos x}{3 + \sin 2x},$

в) $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

7. Докажите неравенство:

а) $\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{1}{4},$

б) $\cos 2x \geq 6 \cos x - 5.$

8. Определите, при каких значениях p сумма кубов корней уравнения $x^2 + x + p = 0$ равна -16 .

9. Докажите тождество

$$4 \sin^3 x \cos 3x + 4 \cos^3 x \sin 3x = 3 \sin 4x.$$

10. Докажите, что для любого натурального числа n

$$\sin^{2n} \alpha + \cos^{2n} \alpha \leq 1.$$

11. В полуокружность с радиусом $\sqrt{5}$ вписан квадрат так, что две его вершины лежат на диаметре полуокружности. Найдите длину стороны квадрата.

12. Около окружности с радиусом 2 описана равнобокая трапеция, площадь которой рав-

на 20. Найдите боковую сторону трапеции.

13. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2:3. Найдите длину гипотенузы.

14. Точка, лежащая внутри угла в 60° , удалена от его сторон на расстояния a и b . Найдите расстояние от этой точки до вершины угла.

15. Из вершины B треугольника ABC опущены перпендикуляры BK и BL на биссектрисы внешних углов треугольника, не смежных с углом B . Докажите, что длина отрезка BK равна полупериметру треугольника ABC .

1. Аэростат поднимается вертикально вверх с ускорением $a = 2 \text{ м/с}^2$. Через $\tau = 5 \text{ с}$ от начала движения из него выпал предмет. Через какое время этот предмет упадет на землю? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

2. Спутник движется вокруг некоторой планеты по круговой орбите радиусом $r = 4,7 \cdot 10^9 \text{ м}$ со скоростью $v = 10^4 \text{ м/с}$. Какова средняя плотность планеты, если ее радиус $R = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м}$? Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$.

3. С какой скоростью должен двигаться велосипедист по выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны $R = 120 \text{ м}$, чтобы в верхней точке траектории давление на дорогу было в 3 раза меньше, чем при движении на горизонтальном участке?

4. Бревно, имеющее длину $l = 3,5 \text{ м}$ и диаметр $d = 0,3 \text{ м}$, плавает в воде. Какова масса человека, который может стоять на бревне, не замочив ног? Плотность дерева $\rho = 0,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

5. В закрытом сосуде емкостью $V = 1 \text{ м}^3$ находится $m_1 = 0,9 \text{ кг}$ воды и $m_2 = 1,6 \text{ кг}$ кислорода. Каким будет давление в сосуде при температуре $t = 500^\circ \text{C}$, если известно, что при этой температуре вся вода превращается в пар?

6. Как изменится ускорение падающего тела массой $m = 4 \text{ г}$, если ему сообщить заряд $q = 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$? Напряженность электрического поля Земли равна $E = 100 \text{ В/м}$ и направлена нормально ее поверхности.

7. Емкости двух металлических шаров равны $C_1 = 10 \text{ нФ}$ и $C_2 = 20 \text{ нФ}$, а заряды на них — $q_1 = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ и $q_2 = 3 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ соответственно. Как перераспределятся заряды, если шары соединить проволокой? Емкостью проволоки можно пренебречь.

8. К источнику тока с ЭДС $E = 2 \text{ В}$ при соединении проводник с сопротивлением $R = 0,2 \text{ Ом}$. При этом амперметр показал силу тока $I_1 = 0,5 \text{ А}$. Когда к этому источнику последовательно с ним присоединили еще один с такой же ЭДС, то амперметр показал $I_2 = 0,2 \text{ А}$. Определите внутренние сопротивления источников.

9. Нагревательная спираль электроаппарата для кипячения воды имеет при температуре $t = 100^\circ \text{C}$ сопротивление $R = 10 \text{ Ом}$. Какой ток надо пропустить через эту спираль, чтобы аппарат испарил $m = 100 \text{ г}$ воды за время $\tau = 1 \text{ мин}$? Удельная теплота парообразования воды $L = 2,3 \text{ МДж/кг}$.

10. Луч света падает под углом $\alpha = 30^\circ$ на плоскопараллельную пластину и выходит из нее параллельно первоначальному лучу. Какова толщина пластинки, если расстояние между лучами $d = 1,94 \text{ см}$? Показатель преломления стекла $n = 1,5$.

ИЗБРАННЫЕ ШКОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

1. Запишем уравнение второго закона

Ньютона для движения камня вверх и вниз в проекциях на направление вдоль горки:

$$ma_1 = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha,$$

$$ma_2 = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha.$$

Из кинематики найдем $t_1 = \sqrt{2l/a_1}$,

$$t_2 = nt_1 = \sqrt{2l/a_2},$$

где l — расстояние до верхней точки подъема камня. Окончательно для коэффициента трения получим

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 0,1.$$

2. Во время падения на шар действуют три силы: сила тяжести, выталкивающая сила и сила сопротивления. Причем $mg = \rho gV + \alpha v$, где α — постоянный коэффициент. Для движения шара вверх можно записать $mg + \alpha \cdot 2v = \rho gV + F$.

Отсюда находим искомую силу:

$$F = 3g(m - \rho V).$$

3. Прежде всего найдем максимальную силу трения покоя: $F_{\text{тр max}} = \mu m_0 g = 4,9$ Н.

Она больше приложенной силы F , следовательно, брусок будет покоиться относительно тележки, а вся система будет двигаться с ускорением

$$a = \frac{F}{m + m_0} = 0,09 \text{ м/с}^2.$$

При этом сила трения составит

$$F_{\text{тр}} = ma \approx 1,8 \text{ Н.}$$

4. Запишем уравнение движения каждого бруска в проекциях на направление вдоль наклонной плоскости:

$$ma = mg \sin \alpha + F - \mu_1 mg \cos \alpha,$$

$$ma = mg \sin \alpha - F - \mu_2 mg \cos \alpha.$$

Отсюда, исключив ускорение брусков, находим искомую силу взаимодействия брусков:

$$F = \frac{1}{2} mg (\mu_1 - \mu_2) \cos \alpha = 0,063 \text{ Н.}$$

5. Опускаясь на расстояние h за время $\tau/2$,

первый груз (массой m_1) движется с ускорением (рис.1)

$$a_1 = \frac{2h}{(\tau/2)^2} = \frac{8h}{\tau^2}.$$

Ускорение второго груза вдвое больше ускорения первого: $a_2 = 2a_1$,

а сила натяжения второй нити вдвое меньше силы натяжения первой:

$$T_2 = T_1/2.$$

Теперь запишем уравнения движения обоих грузов:

$$-m_1 a_1 = -m_1 g + T_1,$$

$$m_2 a_2 = T_2 - m_2 g.$$

Окончательно получаем

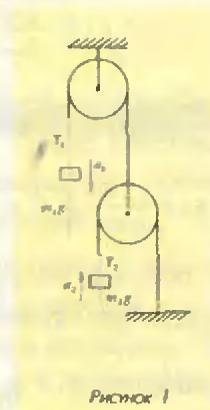
$$\frac{m_1}{m_2} = 2 \frac{1 + 16h / (g\tau^2)}{1 - 8h / (g\tau^2)} = 2,7.$$

6. Положите рядом два незаряженных шара (2 и 3) так, чтобы они касались друг друга. Поднесите к одному из них заряженный шар (1) — на шарах 2 и 3 наведутся противоположные по знаку заряды. Теперь достаточно лишь разъединить шары.

7. Если на шарик помещен положительный заряд и верхняя пластина конденсатора заряжена положительно, то в вертикальном направлении на шарик помимо силы тяжести действует еще и электрическая сила. Можно сказать, что в результате действия этой силы как бы возрастает ускорение свободного падения шарика. Следовательно, период колебаний маятника уменьшается.

8. См. рис.2. Указание. При $r < R$ электрическое поле создается только зарядами, находящимися внутри сферы радиусом r , поэтому $E(r) = qr / (4\pi\epsilon_0 R^2)$. При $r > R$ электрическое поле создается всем зарядом шара и $E(r) = q / (4\pi\epsilon_0 r^2)$.

9. Потенциал внешней сферы равен сумме потенциалов, создаваемых зарядом $+q$, находящимся на внутренней сфере, и



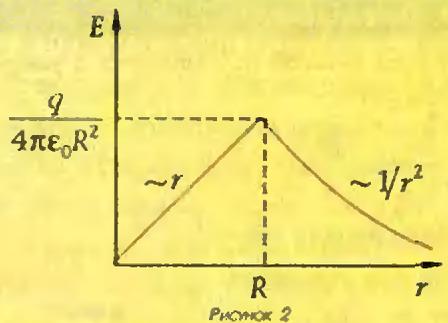


РИСУНОК 2

зарядом $-q$, расположенным на самой внешней сфере:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{+q}{R_2} + \frac{-q}{R_2} \right) = 0.$$

Потенциал внутренней сферы тоже равен сумме потенциалов, создаваемых обоими

$$\text{зарядами: } \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{+q}{R_1} + \frac{-q}{R_2} \right).$$

Согласно определению емкости конденсатора,

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

10. Расстояние между зарядами минимально в тот момент, когда их скорости одинаковы.

Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

и закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} &= \\ &= \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда получаем } r_2 = \frac{r_1}{1 + \frac{2\pi\epsilon_0 m_1 m_2 \eta (v_1 + v_2)^2}{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}}.$$

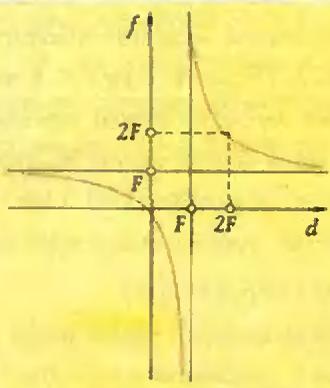


РИСУНОК 4

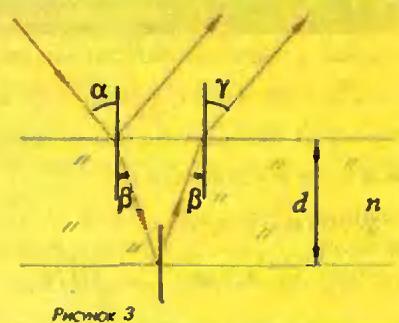


РИСУНОК 3

11. Из рисунка 3 очевидно, что угол выхода луча из пластины равен углу падения луча: $\gamma = \alpha$.

Длину пути, пройденного лучом в пластине, найдем из закона преломления $\sin \alpha / \sin \beta = n$ и из несложных геометрических построений:

$$l = \frac{2d}{\cos \beta} = \frac{2d}{\sqrt{1 - (\sin^2 \alpha) / n^2}} = \frac{2dn}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

12. Пусть d — расстояние от предмета до линзы в первом положении. Тогда по формуле линзы имеем

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{L - d} = \frac{1}{F},$$

где F — искомое фокусное расстояние. Уменьшенное изображение получается в том случае, если линзу отодвигают от предмета.

Поэтому для второго случая —

$$\frac{1}{d + l} + \frac{1}{L - d - l} = \frac{1}{F}.$$

Из этих уравнений находим

$$F = \frac{l^2 - l^2}{4L} = 24 \text{ см.}$$

13. См. рис.4. Указание. Воспользуйтесь формулой линзы.

14. См. рис.5. Указание. Для построения изображения точки в оптической системе нужно построить ход двух произвольных

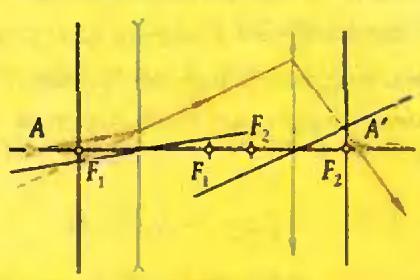


РИСУНОК 5

лучей. Очевидно, что один луч разумно пустить вдоль оптической оси.

15. Пусть при аккомодации глаза на расстояние d_1 фокусное расстояние глаза равно F_1 , а изображение предмета получается на расстоянии f_1 (так называемая глубина глаза). Тогда для человека без очков

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1},$$

а для человека в очках

$$\frac{1}{d_{\min}} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F},$$

где $1/F$ — оптическая сила очков. Аналогично, при аккомодации на расстояние d_2

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2}, \quad \frac{1}{\infty} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F}.$$

Отсюда получаем $d_{\min} = \frac{d_1 d_2}{d_2 - d_1} = 15$ см.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СТЕРЕОСКОП

1. Чертеж к задаче можно рассматривать как изображение трехгранного угла с тремя точками на его гранях. Тогда задача сводится к построению на изображении сечения этого угла, проходящего через данные точки. Вот как это делается: построим любой треугольник с вершинами на лучах, две стороны которого проходят через две из данных точек, скажем, A и B ; пусть продолжение третьей стороны этого треугольника пересекается с прямой AB в точке P ; тогда прямая, соединяющая P с третьей данной точкой C , содержит сторону искомого треугольника, проходящую через C .

2. Рассмотрим чертеж к задаче как изображение неплоского четырехугольника $ABCD$ с точками K, L, M, N , заданными на его сторонах. Тогда как условие, так и утверждение задачи эквивалентны тому, что эти точки лежат в одной плоскости.

3. Решение этой задачи вполне аналогично решению задачи о «складном четырехугольнике» в статье; данный шестиугольник можно представить как проекцию неплоского шестиугольника, стороны которого касаются окружности в тех же точках. Тогда диагонали пространственного шестиугольника будут попарными пересечениями трех различных плоскостей, имеющих единственную общую точку.

4. Доказательство почти буквально воспроизводит приведенное в статье доказательство теоремы о высотах треугольника.

5. Построим сферу на данном круге как на

«экваторе». Пусть перпендикуляр к плоскости круга, проведенный из данной в нем точки A , пересекает сферу в точках B и C . Обозначим через M точку пересечения касательных к кругу в концах некоторой хорды XU , проходящей через A . Касательные к сфере, проведенные из M , образуют конус, основанием которого является окружность пересечения сферы и плоскости XVU . Поэтому одна из образующих этого конуса, MB , касается сферы, а значит, лежит на плоскости, касающейся сферы в точке B . Следовательно, искомое геометрическое место есть прямая пересечения этой плоскости с плоскостью круга.

6. Обозначим через a, b, c, d графики движения пешеходов в трехмерном пространстве (x, y, t) , где (x, y) — координаты на плоскости, по которой они идут, а t — время; конечно, эти графики — прямые линии. Два пешехода встречаются в том и только том случае, если их графики движения пересекаются. По условию каждые две из четырех прямых, кроме, быть может, c и d , пересекаются. Отсюда нетрудно вывести, что либо все они проходят через одну точку — а тогда все четыре пешехода, в том числе c и d , в некоторый момент оказываются в одном месте, либо все эти прямые лежат в одной плоскости — и тогда c и d тоже должны пересечься (они не могут быть параллельны, т.к. их проекции на плоскость (x, y) непараллельны).

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\arcsin \frac{2}{3} + \pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$

2. $2\sqrt{2}.$

3. $(x+9)^2/9.$ *Указание.* Общий вид парабол, описанных в условии задачи,

$$y = a(x+6 + \frac{1}{3a})^2, \quad a > 0.$$

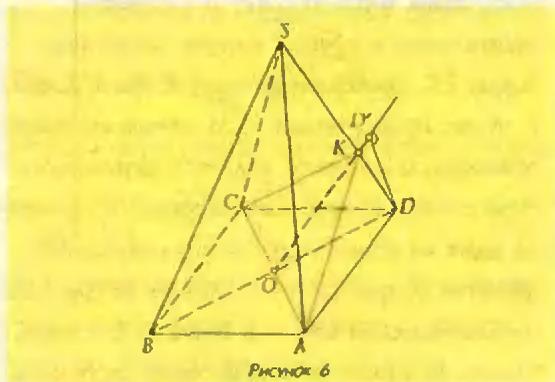
4. $5/3, 7/3.$ *Решение.* Пусть плоскость α пересекает ребро SD в точке K (рис. 6). Так как α не параллельна прямой BD , то она

Рисунок 6

пересекает отрезок BD в его середине — точке O .Плоскости α и BCD взаимно перпендикулярны. Проведем DD' перпендикулярно α , тогда

$$\sin \angle KOD = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$
 А из прямоугольного

треугольника SOD получаем

$$\cos \angle SOD = \frac{5}{4\sqrt{2}}; \text{ из треугольника } OKD \text{ по}$$

теореме синусов

$$KD = \frac{OD \sin \angle KOD}{\sin(\angle KOD + \angle SDO)} = \frac{5}{3}.$$

5. $\frac{56}{3} \cdot \frac{S}{v}.$ *Решение.* Поскольку время про-

ложения одного круга дороги автомобилем

$$\text{«Рено» равно } \frac{11}{6} \cdot \frac{S}{v}, \text{ а «Крайслером» — } 2 \cdot \frac{S}{v},$$

то после одновременного въезда в город «Крайслер», отстав от «Рено», не сможет догнать его. Таким образом, впервые обгон

совершит «Рено», причем на городском участке дороги.

Пусть к моменту обгона «Рено» прошел n полных кругов и еще путь x , $0 < x < S$ (неравенства строгие!), тогда «Крайслер» за это время прошел $n-1$ круг и путь x .

Поэтому

$$t = n \cdot \frac{11}{6} \cdot \frac{S}{v} + \frac{x}{2v} = (n-1) \cdot \frac{2S}{v} + \frac{x}{v},$$

откуда

$$\frac{x}{S} = \frac{12-n}{3}.$$

Учитывая неравенство $0 < x < S$, получаем

$$n = 10, \quad x = \frac{2}{3}S.$$

Вариант 2

1. $x = 1/8.$

2. $x = 5/4.$

3. 2; $a = 1.$ *Указание.* Необходимо рассмотреть как случай единственного решения системы уравнений

$$x = \frac{3a}{a+1}, \quad y = \frac{2a+5}{a+1}, \quad a \neq \pm 1,$$

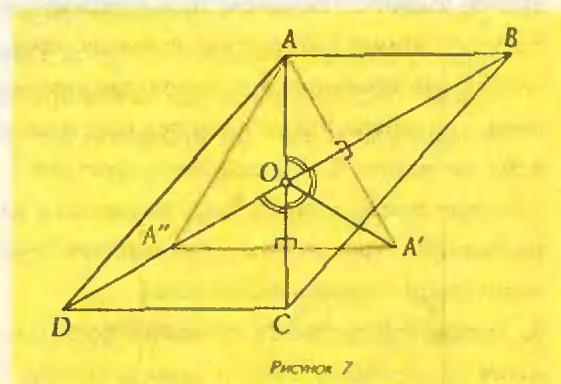
так и случай бесконечного множества решений $y - x = 2, \quad a = 1.$ 4. $15\sqrt{3}.$ *Решение.* Пусть O — точка пересечения диагоналей AB и CD (рис. 7). Ввиду симметрии $\angle A'OB = \angle AOB, \angle A''OC = \angle COA''.$ Так как углы BOA и COD — вертикальные, то

Рисунок 7

 $\angle AOB = \pi/3.$ Кроме того, $AO = OA' = OA''.$

Поскольку

$$BO = BA'' - OA'' = \frac{4}{5}BD - AO = \frac{1}{2}BD, \text{ то}$$

$$OD = BO = \frac{5}{3}AO. \text{ Наконец, по теореме}$$

синусов для треугольника AOD получаем $AO=3$, после чего площади находятся без труда.

5. $\sqrt{3} - 1$. *Решение.* Поскольку через прямую AB можно провести только две плоскости, касающиеся данной сферы, то плоскости граней ABC и $KMM'K'$ совпадают и плоскости граней ASB и $KL'L'K'$ совпадают (рис.8). Проведем сечение пирамиды (и призмы) плоскостью, проходящей через ребро SC и перпендикулярной ребру AB . Заметим, что

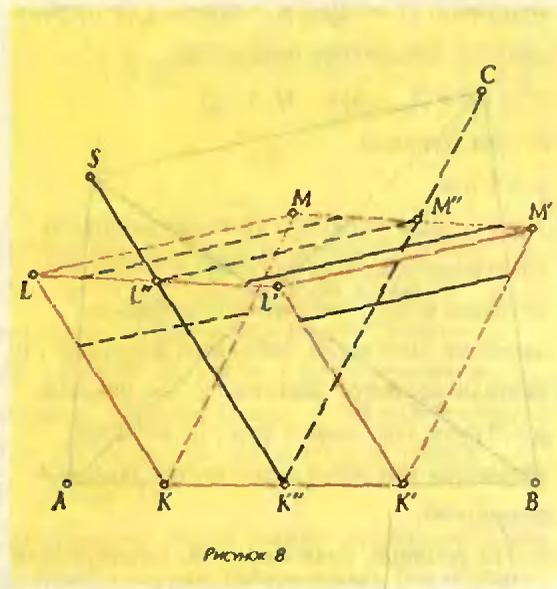


Рис. 8

центр сферы находится именно в этой плоскости.

Поскольку ребро SC параллельно плоскости грани $LL'M'M$, то SC параллельно $L''M''$, и пирамида $SABC$ — правильный тетраэдр. Вычисляя величину двугранного угла между гранями правильного тетраэдра (рис.9),

$$\text{получаем } L''K''M'' = 2\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$L''M'' = 2\sqrt{2}$. Осталось вычислить радиус окружности, вписанной в треугольник $K''L''M''$.

Вариант 3

$$1. 62/5. \quad 2. \log_5 \frac{3}{10} < x < \log_5 \frac{1}{3},$$

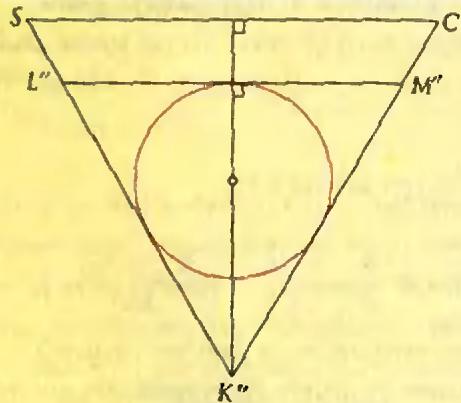


Рис. 9

$$0 < x < \log_5 3.$$

$$3. \left(\arcsin \frac{4}{5} + 2\pi k; \pm \arccos \frac{\sqrt{15}}{10} + 2\pi m \right),$$

$$\left(-\arcsin \frac{4}{5} + \pi(2k+1); \right.$$

$$\left. \pm \arccos \frac{\sqrt{15}}{10} + \pi(2m+1) \right), \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

Указание. Исключите из системы переменную y .

4. $27/20$. *Указание.* Искомым сечением призмы является пятиугольник $KL'L'OK'$ такой, что $L'L' = KK'$, $K'O = OL'$, LL' перпендикулярно $A'B$, KK' перпендикулярно AB , KL перпендикулярно $A'B$ (рис.10). Условие перпендикулярности прямых KL и $A'B$ дает возможность найти высоту призмы.

5. Π_7, Π_8, Π_9 . *Решение.* Пусть студент плывет в лодке к пункту $\Pi_1 (0 \leq k \leq 100)$, и вектор собственной скорости лодки составляет угол

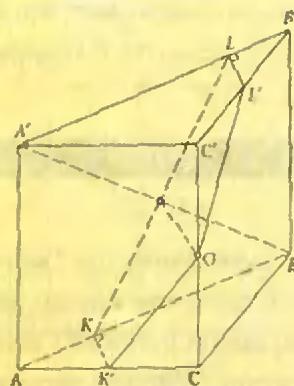


Рис. 10

α с направлением, перпендикулярным течению реки (рис.11). Тогда время движения студента до Π_4 равно $t = 6l/v\cos \alpha$.

Но

$$\frac{6l}{v\cos \alpha}(v + v\sin \alpha) = kl,$$

$$\text{откуда } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{k-6}{k+6}, \quad t = \frac{l(k^2+36)}{2kv}.$$

Будем считать, что в момент отплытия студента из пункта Π_0 отправилась электричка с номером 0, через время $2l/(11v)$ — электричка с номером 1 и т.д. Очевидно, что

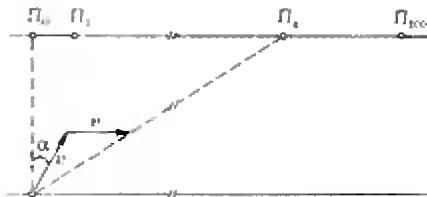


Рисунок 11

время, затраченное студентом на весь путь до Π_{100} , будет тем меньше, чем меньше номер электрички, в которую он успеет сесть. Обозначим этот номер через m , $m = m(k)$. Тогда m — это наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{kl}{5v} + \frac{m \cdot 2l}{11v} \geq \frac{l(k^2+36)}{2kv},$$

или

$$m \geq \frac{11}{2} \left(\frac{3k}{10} + \frac{18}{k} \right).$$

Несложный анализ целочисленных решений этого неравенства показывает, что наименьшее значение m равно 26 и достигается при $k=7, 8, 9$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. В обоих случаях движения (вверх и вниз) по наклонной плоскости с углом наклона α сила трения, равная $\mu mg \cos \alpha$, направлена против движения. Поэтому, согласно второму закону Ньютона, имеем

$$ma_1 = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha,$$

$$ma_2 = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha,$$

откуда

$$\sin \alpha = (a_1 + a_2)/(2g).$$

Из графика, приведенного в условии, находим

$$a_1 = 2 \text{ м/с}^2, \quad a_2 = 8/9 \text{ м/с}^2,$$

поэтому

$$\alpha = \arcsin 0,15 = 9^\circ.$$

2. Пусть x — толщина воздушной прослойки, когда колокол коснулся дна. Тогда, согласно закону Бойля—Мариотта,

$$p_0 h = (p_0 + (H - (h - x))\rho g)x.$$

Учитывая, что начальное атмосферное давление p_0 равно давлению слоя воды толщиной $H_0 = 10,5$ м, имеем для определения x квадратное уравнение

$$x^2 + (H + H_0 - h)x - H_0 h = 0,$$

откуда находим

$$x \approx 1,6 \text{ м}.$$

Характерная ошибка, сделанная многими абитуриентами при решении этой задачи, состояла в том, что они не учитывали давление слоя воды, зашедшей в колокол, и считали конечное давление в нем равным $p_0 + \rho g H$. При малой глубине водоема указанная поправка оказывается заметной величиной.

3. По условию, сила Лоренца, действующая на заряженную частицу, много больше силы, действующей на нее со стороны электрического поля. Поэтому в первом приближении можно считать, что частица движется по окружности радиусом $R = mv_0/(qB)$. Когда скорость частицы оказывается противоположной по направлению начальной скорости, частица смещается вдоль электрического поля на величину $2R$, приобретая при этом энергию $qE \cdot 2R$. По закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} + 2qER = \frac{mv^2}{2}.$$

По условию,

$$\beta = (mv^2 - mv_0^2)/(mv_0^2) = 4E/(v_0B).$$

Таким образом,

$$E/(v_0B) = \beta/4.$$

4. Так как изображение трапеции в первом случае — прямоугольник, лучи, проходящие через точки B, C и A, D , преломившись в линзе, должны идти параллельно оптической оси. Иными словами, продолжения сторон трапеции BC и AD пересекают оптическую ось в фокусе линзы (рис.12). Аналогичные рассуждения показывают, что после поворота трапеции на 180° в плоскости рисунка ее стороны BC' и AD' должны пересекать

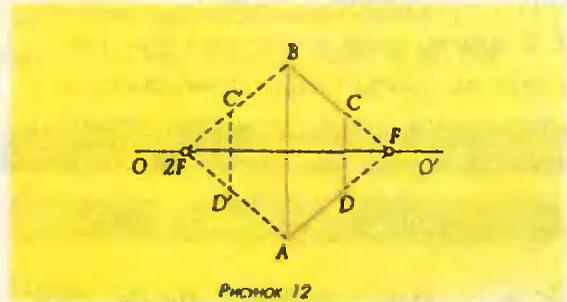


Рисунок 12

оптическую ось в точке двойного фокуса.

Следовательно, неподвижная сторона трапеции AB находится на расстоянии $d = (3/2)F$ от линзы, а ее изображение, согласно формуле линзы, — на расстоянии $f = 3F$. При этом линейное увеличение $\Gamma = f/d = 2$.

Заметим, что задачу можно решить достаточно просто чистым построением, без использования формулы линзы.

Вариант 2

1. Для бруска движущей силой является сила трения покоя, максимальное значение которой равно μmg . Максимальная скорость бруска и доски, пока они движутся как единое целое, связана с амплитудой колебаний x_m соотношением $v_m = 2\pi x_m/T$, а максимальное ускорение — $a_m = 4\pi^2 x_m/T^2$. Таким образом, в соответствии со вторым законом Ньютона, должно выполняться неравенство

$$m \frac{4\pi^2}{T^2} x_m = m \frac{2\pi}{T} v_m \leq \mu mg,$$

откуда

$$\mu \geq \frac{2\pi v_m}{Tg} \approx 0,3.$$

2. Молярная масса водорода вдвое меньше молярной массы гелия, поэтому число молей водорода втрое больше числа молей гелия: $v_2 = 3v_1$. Так как процесс расширения смеси адиабатический, согласно закону сохранения энергии, работа, совершенная в этом процессе, равна уменьшению внутренней энергии смеси:

$$A = -\left(\frac{3}{2}Rv_1 + \frac{5}{2}Rv_2\right)(T - T_0),$$

где T_0 и T — начальная и конечная температуры смеси. Для начального состояния можно записать

$$p_0 V_0 = (v_1 + v_2)RT_0.$$

Таким образом,

$$A = -p_0 V_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{v_2}{v_1 + v_2}\right) \frac{T - T_0}{T_0} = 6250 \text{ Дж.}$$

3. Так как в магнитном поле движется только переключатель, то, в соответствии с законом электромагнитной индукции, между точками P и P' возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = Bva\sqrt{2}$, где a — сторона квадрата. Эквивалентная электрическая цепь приведена на рисунке 13, где $r = \rho \cdot \sqrt{2} a/S$, а $R = \rho \cdot 2a/S$. В соответствии с законом Ома,

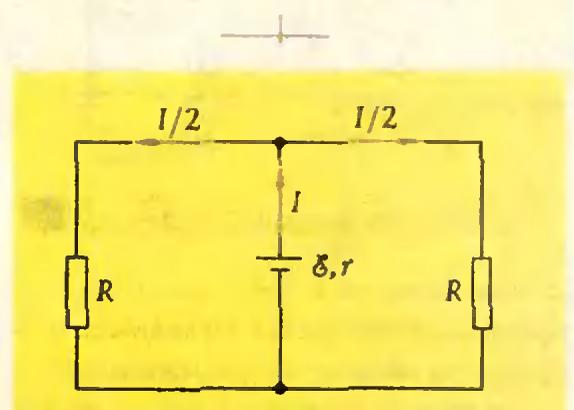


Рисунок 13

$$I = \frac{\epsilon}{R/2 + r} = \frac{\sqrt{2} B v S}{\rho(1 + \sqrt{2})}$$

$$\text{Отсюда получаем } B = \frac{(1 + \sqrt{2}) I \rho}{\sqrt{2} v S}$$

4. Для фотонов импульс P связан с энергией W соотношением $W = Pc$. Будем следить за изменением импульса фотонов, прошедших линзу. Узкий пучок, упавший на линзу параллельно ее оптической оси, частично поглощается в материале линзы, а частично выходит из нее после отражения от задней поверхности. Так как через линзу пучок проходит дважды, оптическую ось он пересекает в точке, находящейся от линзы на расстоянии $F/2$ (рис. 14; здесь $\alpha = 30^\circ$). На рисунке 15 изображена связь импульса P_0 фотонов, упавших на линзу, с импульсом $P_0/2$

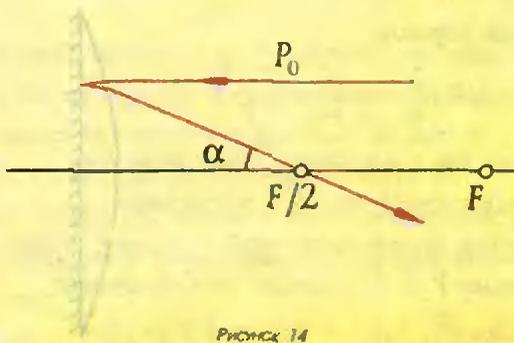


Рисунок 14

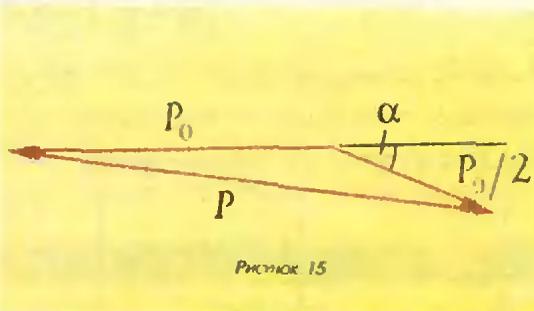


Рисунок 15

фотонов, вышедших из нее, и импульсом P , переданным линзе. Отсюда для импульса, переданного линзе, по теореме косинусов

$$\text{получаем } P = \frac{W}{c} \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}{2}$$

Тогда средняя сила, действующая в течение времени τ на линзу, будет равна

$$F = \frac{P}{\tau} = \frac{W}{c\tau} \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}{2} = 1,9 \text{ Н.}$$

Вариант 3

1. Из закона сохранения импульса следует, что грузы разлетятся симметрично с одинаковыми скоростями, равными $v_1 = \sqrt{2}v$.

Согласно закону сохранения энергии,

$$2 \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = 2 \frac{mv_1^2}{2}$$

Отсюда находим искомый коэффициент упругости пружины: $k = 2mv^2/x^2$.

2. В момент, когда перегородка перестала двигаться, давление паров равно давлению насыщенного пара p_n . Из условия механического равновесия перегородки в этот момент

$$\text{имеем } p_0 \frac{V_1}{V_1'} + p_n = p_0 \frac{V_2}{V_2'}$$

где $p_0 = 1 \text{ атм}$ — начальное атмосферное давление, V_1 и V_1' — начальный и конечный объемы меньшей части сосуда, а V_2 и V_2' — большей его части. Обозначим

$$V_1 = \alpha(V_1 + V_2), \quad V_1' = 2\alpha(V_1 + V_2)$$

Окончательно получим $\alpha = 3/7$.

3. Когда $I = I_m$, напряжение между пластинами 2 и 3, равно LI' , равно нулю. Следовательно, и электрическое поле между ними тоже равно нулю. Это поле есть суперпозиция поля E_0 , создаваемого зарядом Q на первой пластине, и поля E_1 , создаваемого наведенными зарядами $-q$ и $+q$ на пластинах 2 и 3 (рис. 16). Таким образом, $E_0 = -E_1$. Согласно закону сохранения энергии, начальная энергия электрического поля между пластинами 1 и 3 превращается в энергию электрического поля между пластинами 1 и 2 (поле между пластинами 2 и 3 отсутствует) и энергию магнитного поля катушки:

$$\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \cdot 2dS = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} dS + \frac{LI_m^2}{2}$$

Отсюда находим

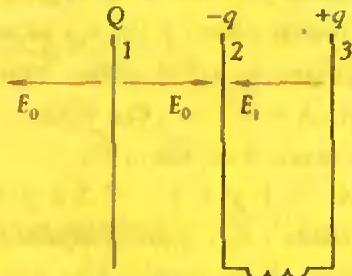


РИСУНОК 16

$$I_m = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0 dS}{L}} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{\epsilon_0 dS}{L}} = \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{d}{\epsilon_0 SL}}$$

4. Решим задачу построением (рис. 17). Пусть предмет высотой x находится в положении неотклоненного маятника, расстояние его от линзы равно d , высота

изображения предмета y , а его расстояние от линзы f . Из подобия треугольников следует

$$\frac{y}{x} = \frac{f}{d} = \frac{f-F}{F},$$

при этом $d_{1,2} = F + L \pm A$, $f_2 - f_1 = l$.

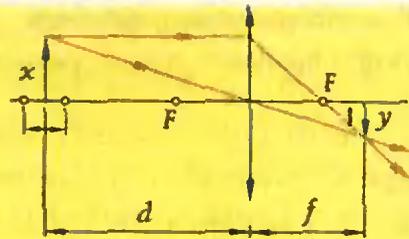


РИСУНОК 17

Отсюда для искомого фокусного расстояния линзы получаем $F = 2$ см.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $x_1 = 1$, $x_2 = 5a$ при $a \neq -1; 0; 1/5; 2$;
11; $x = -5$ при $a = -1$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ при
 $a = 0$; $x = 1$ при $a = 1/5$; $x = 10$ при $a =$
2; $x = 1$ при $a = 11$.

Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a^2(5a - x)(x - 1) = 0, \\ a \neq 2x, \\ x \neq -a, \\ 2x + a + a^2 \neq 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы при $a \neq 0$ следует, что $x_1 = 5a$, $x_2 = 1$. Заметив это, рассмотрите значения параметра a , при которых какой-нибудь из знаменателей обращается в ноль, а также $a = 0$.

2. $1 - \sqrt{2}$.

3. $\pi(8k + 1)/4$, $\arctg 5 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Указание. Возведите в квадрат, решите полученное уравнение и отберите корни, удовлетворяющие условию $2\cos x + 1 \geq 0$.

4. $a\sqrt{14}/4$. Указание. Введите прямоугольную систему координат, как показано на

рисунке 18. Уравнение сферы с центром в точке (x_0, y_0, z_0) и радиусом R имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$. Подставьте в это уравнение координаты точек A, L, M, C' и исключите из полученной системы x_0, y_0 и z_0 . При этом воспользуйтесь тем, что центр сферы лежит на прямой $x = a/2, z = a/4$ (почему?).

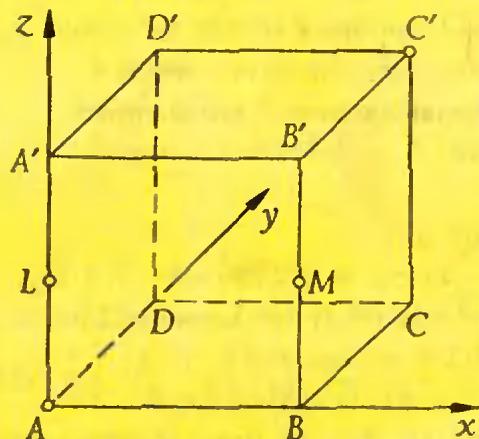


РИСУНОК 18

5. а) $[2; 6]$; б) $[15; 35]$. Указание.

а) Рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно y , вычислите его дискриминант $D(x)$ (он зависит от x) и

решите неравенство $D(x) \geq 0$. б) Пусть $t = 4x + 3y$. Тогда $y = (t - 4x)/3$. Подставьте это выражение в исходное уравнение и дальше действуйте, как в пункте а). Здесь возможны и другие решения. Перенесем данное уравнение в виде $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$ — это уравнение окружности. Осталось найти проекцию этой окружности на ось Ox .

Вариант 2

1. $x_1 = 2a - 1$, $x_2 = 3$ при $a \neq -3$; $1/3$; $3/2$; 2; $x = -7$ при $a = -3$; $x = 3$ при $a = 1/3$; $3/2$; 2.

2. $(-1; 2\log_3 5] \cup (3; +\infty)$. Указание.

Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (3^x - 25)(x + 1)(x - 3) \geq 0, \\ x \neq -1; x \neq 3. \end{cases}$$

3. πl , $l \in \mathbb{Z}$.

4. $a^4 \cos^3 \alpha / (1 + 2 \cos 2\alpha)^2$. Указание. Сечением является равнобочная трапеция, одно из оснований которой равно a , а длину другого основания следует вычислить, пользуясь теоремой об отношении отрезков, на которые биссектриса угла делит противоположную сторону треугольника.

5. $a = -2$, $\{\frac{\pi}{2} + \pi(k + l), \frac{\pi}{2}(k - l)\}$.

Указание. Сложите и вычтите уравнения системы, а затем исследуйте вопрос о разрешении полученной эквивалентной системы.

Вариант 3

1. $x_1 = 2a - 3$, $x_2 = 2$ при $a \neq 1$; 2; $5/2$; 3; $x = -1$ при $a = 1$; $x = 2$ при $a = 2$ и $a = 5/2$; $x = 3$ при $a = 3$.

2. -1. 3. $\pi(12n + 5)/6$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. $27\pi/128$. Указание. Центр O сферы лежит на линии пересечения серединных перпендикулярных плоскостей к отрезкам AP и AQ , где P — середина AB , Q — середина AD . Обе эти плоскости перпендикулярны грани $A'B'C'D'$. Расстояние от O до плоскости

$A'B'C'D'$, равное расстоянию от O до A — это и есть радиус сферы R . Теперь легко составить уравнение для R , решив которое получим, что $R = 9a/16$. (См. также указание к задаче 4 варианта 1.)

5. $25/17 \leq x^2 + y^2 \leq 17$; $-1,5 \leq y/x \leq 1$.

Указание. Точки $(x; y)$, удовлетворяющие данному неравенству, образуют на плоскости xOy треугольник с вершинами $A(-4; 1)$,

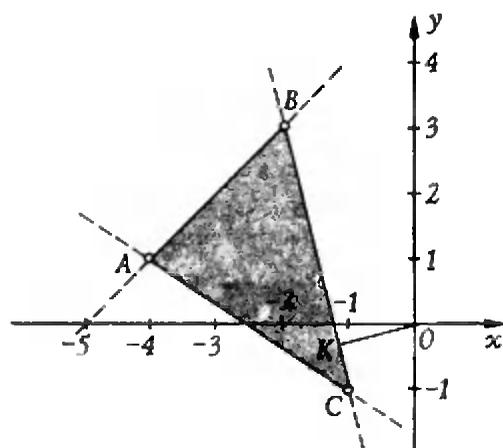


Рис. 19

$B(-2; 3)$, $C(-1; -1)$ (рис. 19). Величина $x^2 + y^2$ — квадрат расстояния от точки O до точки $(x; y)$. Наиболее далекой от точки O вершиной является вершина A , а квадрат расстояния OK от O до стороны BC равен $25/17$ и является наименьшим значением $x^2 + y^2$ для точек данного треугольника. Отношение $k = y/x$ — это угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и точку $(x; y)$. Нетрудно понять, что наибольшее и наименьшее значения k достигаются в вершинах C и B соответственно.

Вариант 4

1. $x_1 = \frac{n+1}{n-1}$, $x_2 = -1$ при $n \neq 2$; 0; 1; $x = 1/3$ при $n = -2$; $x = -1$ при $n = 1$.

2. 1. Указание. После потенцирования уравнение превращается в такое:

$$6^{\frac{1-2x}{3x-2}} + \frac{23}{6} = 4 \cdot 6^{\frac{1-2x}{3x-2}},$$

которое можно свести к квадратному,

заметив, что

$$\frac{1-2x}{3x-2} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3(3x-2)},$$

$$\frac{1-x}{3x-2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3(x-2)},$$

и выполнив замену $y = \frac{1}{6^{3(3x-2)}}$.

$$3. \pi + \arcsin \frac{\sqrt{31}-1}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \frac{a^2 b \sin \alpha \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad 5. 2.$$

ФИЗИКА

$$1. 0,56 \text{ кг} = m_1(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \leq m_2 \leq m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \approx 0,85 \text{ кг}.$$

$$2. T = 2\pi \sqrt{\frac{l(\rho_1 + \rho_2)}{2g|\rho_1 - \rho_2|}}.$$

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ЛЕНИНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

$$1. 5\frac{1}{3} \text{ часа}, 6\frac{2}{3} \text{ часа}.$$

$$2. 0 < x < \sqrt[3]{10} \text{ или } x > \sqrt{5}. \text{ Указание.}$$

Преобразуйте неравенство к виду $(2\log_3 x - 1)(3\lg x - 1) > 0$ и учтите, что $\sqrt{5} > \sqrt[3]{10}$, так как $\sqrt{5} = \sqrt[6]{125}$, $\sqrt[3]{10} = \sqrt[6]{100}$.

Можно также привести неравенство к квадратному относительно $\lg x$.

$$3. -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi n}{2},$$

$$x \neq \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Указание. Пользуясь тем, что $\cos x = 0$ (так как $\sin 4x = 0$), приведите неравенство к общему знаменателю $2\sin 4x$.

$$4. x = 1. \text{ Указание. Преобразовав уравнение к виду } \log_2(8 - (x-1)^2) = 3 + (x^2 - 1)^2, \text{ заметьте, что } \log_2(8 - (x-1)^2) < \log_2 8 = 3 \text{ при } x \neq 1, \text{ в то время как } 3 + (x^2 - 1)^2 \geq 3. \text{ Остается рассмотреть } x = 1.$$

$$3. T = 1,64 T_{\text{изм}} = 448 \text{ К}.$$

$$4. A_{23} = 13/8 RT_1.$$

$$5. p_a = (p - p_n f / 100\%)(1 - \Delta T / T) = 96,2 \text{ кПа}, \quad p_n = (p_n f / 100\%)(1 - \Delta T / T) = 2,1 \text{ кПа}.$$

$$6. \alpha = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) / (C_1 + C_2 + C_3) = 1,5.$$

$$7. U = \varepsilon_2 - \sqrt{Pr_2} = 7 \text{ В},$$

$$R = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sqrt{r_2 / P} - r_1 - r_2 = 7 \text{ Ом}.$$

$$8. \Delta P = \sqrt{2} \pi v = 7,4 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}.$$

Указание. Период обращения частицы равен $T = 2\pi m / (qB) = 0,1 \text{ с}.$

$$9. f_2 = F_2(F_1 + a) / (F_1 + a - F_2) = 126 \text{ см}.$$

$$10. n/t = P\lambda / (hc) = 6 \cdot 10^{20} \text{ с}^{-1}.$$

5. $\arctg(\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha)$. Указание. Пусть SO — высота пирамиды (рис.20). Тогда O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , т.е. O — середина AC . Проведите $BK \perp AC$, $KM \perp SC$ и убедитесь в том, что $BM \perp SC$, откуда следует, что $\angle KMB$ —

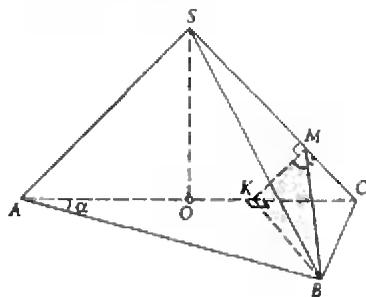


Рисунок 20

искомый. Теперь $\operatorname{tg} \angle KMB = BK:KM = BK: \frac{KC}{\sqrt{2}} = \frac{AB \cdot BC}{AC} : \frac{BC^2}{AC \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha$.

Вариант 2

1. 27. Замечание. Уравнение дает еще решение 3, но по смыслу задачи неизвестное число не равно 3.

2. $x = 1/9$.

Указание. Перейдите к логарифмам по основанию 3, обозначьте $\log_3 x = y$ и учтите, что $y < 0$.

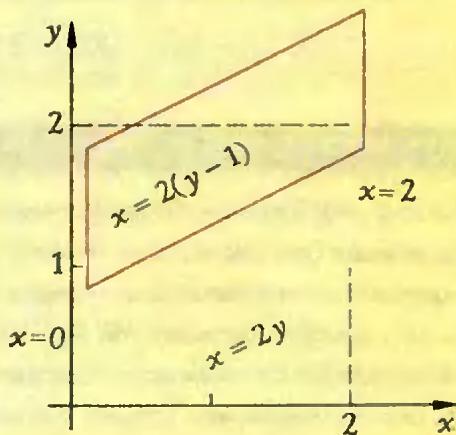
3. $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Указание. При $x \neq \pi n$ преобразуйте правую часть к виду $\operatorname{tg}(x/2)$. После сокращения на $\operatorname{tg}(x/2)$ полученное уравнение

$$|1 + \sin 3x| = 1 \text{ приводится к виду } \sin 3x = 0.$$

4. а) См. рис. 21. Указание. Рассмотрите уравнение в областях

$$\begin{cases} y \geq x, \\ y \geq 1, \end{cases} \begin{cases} y \geq x, \\ y < 1, \end{cases} \begin{cases} y < x, \\ y \geq 1, \end{cases} \begin{cases} y < x, \\ y < 1. \end{cases}$$



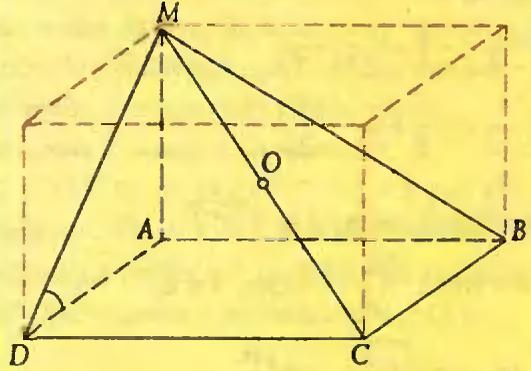
Риснок 21

6) $(0; 2)$. Если $0 < a \leq 1$, то $x_1 = 0$, $x_2 = 2a$; если $1 < a < 2$, то $x_1 = 2(a - 1)$, $x_2 = 2$.

Указание. Воспользуйтесь результатом пункта а). При каких значениях a прямая $y = a$ пересекает изображенное на рисунке 2 множество ровно в двух точках?

5. $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2b^2}$.

Указание. Докажите, что $\angle MDA = 45^\circ$, откуда $AM = b$, и что центр O сферы совпадает с серединой ребра MC (рис. 22). (Можно также достроить пирамиду до прямоугольного параллелепипеда, вписанного в ту же сферу. Диагональ MC параллелепипеда



Риснок 22

да будет диаметром сферы.)

Вариант 3

1. 12π .

2. $-2a^{1/4}$.

3. $x = \pi n/3, x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, n, k \in \mathbb{Z}$.

4. $y = 2x + 1$.

5. $x < -1$ или $x > 8$.

Вариант 4

1. $x = 10^5, x = 10$.

2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

3. $v = 2(2 - \sqrt{3}), S = 2\sqrt{3}$. Указание. Применив к боковой грани теорему косинусов, выразите сторону основания через боковое ребро.

4. $x = 10, y = 3/2; x = 10, y = -3/2$.

5. $[-3/2; 2]$.

Вариант 5

1. $\frac{4}{3} \pi l^3 \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^3(\alpha/2)$.

2. $x < -1$ или $x > 4$.

3. 24. Замечание. Если отбросить первое условие, то задачу можно решить перебором. Ответ будет тем же.

4. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, k, n \in \mathbb{Z}$.

5. $(-2; 2) \cup [4; +\infty)$.

ЗАДАЧИ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА

МАТЕМАТИКА

1. 77. 2. -9 ; 0. 5. -4 . 6. а) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$.
 б) $1/4$; $3/8$. Указание. Представьте y в виде
 $y = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3 + \sin 2x}\right)$. в) $1/2$; 1. Указание.
 $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x =$
 $= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$ или $y = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$. 8.
 $p = -5$. (Корни при $p = -5$ существуют.)
 11. 2. 12. 5. 13. 15. 14. $2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$.

Указание. Пусть O — вершина угла, A , B — основания перпендикуляров, опущенных на стороны угла из данной точки. Найдите AB и примените теорему синусов к треугольнику OAB .

ФИЗИКА

1. $t = \frac{a\tau}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{a}}\right) = 3,45$ с.
 2. $\rho = 3rv^2 / (4\pi GR^3) = 5 \cdot 10^4$ кг/м³.
 3. $v = \sqrt{2gR/3} = 28,3$ м/с.
 4. $m = (\rho_s - \rho) \pi d^2 l / 4 = 74,2$ кг
 (здесь $\rho_s = 10^3$ кг/м³ — плотность воды).
 5. $p = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) \frac{RT}{V} = 6,4 \cdot 10^5$ Па.
 6. $\Delta g = qE/m = 8,3 \cdot 10^{-4}$ м/с².
 7. $q'_1 = (q_1 + q_2) C_1 / (C_1 + C_2) =$
 $= 1,6 \cdot 10^{-8}$ Кл;
 $q'_2 = q_1 + q_2 - q'_1 = 3,1 \cdot 10^{-8}$ Кл.
 8. $r_1 = \varepsilon / I_1 - R = 3,8$ Ом;
 $r_2 = 2 \varepsilon / I_2 - R - r_1 = 16$ Ом.
 9. $I = \sqrt{mL / (R\tau)} = 19,6$ А. 10. $h = 10$ см.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6 – 8»

(см. «Квант» №9 за 1992 г.)

1. Пусть на каждом дереве вырастает N монет, тогда во вторник Буратино будет иметь, как максимум, $5N$ монет, в среду $5N^2$ монет, в четверг не более $5N^3$, а в пятницу не более $5N^4$ монет, следовательно,
 $5N \leq 1992 \leq 5N^4$, откуда $5 \leq N \leq 398$. В результате взращивания одного дерева число монет у Буратино увеличивается на $k = 5N^4 - 5N^3 = 5N^3(N - 1)$, так как одну монету приходится закапывать. Имеем, что $4 \leq k \leq 397$.
 Если Буратино закопал M монет (и получил при этом M деревьев), то у него стало $5 + kM$ монет. Приравняв это число к 1992, получим, что $kM = 1987$. Но 1987 — простое число, и его делители 1 и 1987 не удовлетворяют неравенству $4 \leq k \leq 97$. Итак, Буратино не сможет получить ровно 1992 монеты.
 2. Пусть сначала числа a , b , c взаимно просты; покажем, что в этом случае число abc является полным квадратом. Пусть p —

простое число и c делится на p^n , тогда из равенства $ab = c(a + b)$ следует, что одно из чисел a и b делится на p^n , а второе не делится на p , значит, abc делится на p^{2n} . Аналогично рассуждая про делители чисел a и b , получаем, что любое простое число входит в произведение abc в четной степени. Если у чисел a , b и c есть общий множитель, то он входит в произведение в кубе.
 3. Рассмотрим правильные треугольники, стороны которых параллельны сторонам исходного треугольника. Нетрудно найти, что число таких треугольников со стороной длины k равно $(n - k + 1)(n - k + 2) / 2$. Каждый из этих треугольников определяет k троек точек на своем периметре, образующих равносторонний треугольник. Таким образом, общее число треугольников равно
 $T = 1n + 3(n - 1) + \dots$
 $\dots + (n - k + 1)(n - k + 2)k / 2 + \dots$
 $\dots + n(n + 1)1 / 2 =$
 $= n(n + 1)(n + 2)(n + 3) / 24$.

Выходит с января 1970 года



Главный редактор	академик Юрий Осипьян
Первый заместитель главного редактора	академик Сергей Новиков
Редакционная коллегия	<i>Юлий Брук, Андрей Варламов, Николай Васильев, Александр Виленкин, Сергей Гордюнин, Николай Долбиллин, Владимир Дубровский, Андрей Егоров, Александр Зильберман, Сергей Кротов (директор «Бюро Квантум»), Александр Леонович, Юрий Лысов, Виктор Можаяев, Николай Розов, Анатолий Савин, Юрий Соловьев (заместитель главного редактора), Алексей Сосинский, Альберт Стасенко, Владимир Сурдин, Владимир Тихомиров, Валерия Тихомирова, Владимир Уроев, Алексей Черноуцан (заместитель главного редактора), Игорь Шарыгин</i>
Редакционный совет	<i>Агнис Анджанс, Владимир Арнольд, Марк Башмаков, Василий Берник, Владимир Болтянский, Александр Боровой, Юлий Данилов, Моисей Каганов, Николай Константинов, Глеб Коткин, Евгений Сурков, Сергей Табачников, Людвиг Фаддеев, Дмитрий Фукс, Анатолий Шапиро</i>
Главный художник	<i>Кирилл Ильющенко</i>
Номер подготовили	<i>Светлана Давыдова, Андрей Егоров, Анатолий Калинин, Людмила Кардасевич, Сергей Коновалов, Анна Котова, Елена Поталенкова, Анатолий Савин, Валерия Тихомирова, Алексей Черноуцан</i>
Номер оформили	<i>Надежда Кузьмина, Станислав Лухин, Александра Хоменко, Вадим Юдин (фото)</i>
Компьютерная группа	<i>Вадим Виниченко, Илья Богданов, Алексей Крылов</i>
Заведующая редакцией	<i>Людмила Винюкова</i>
Адрес редакции	<i>103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, факс 251-55-57</i>
Типография	Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат Министерства печати и информации Российской Федерации 142300, г. Чехов Московской области

ЛАБИРИНТЫ ОБРАТНОГО МАТА / ЕВГЕНИЙ ГИК

В восьмом номере «Кванта» за прошлый год мы уже рассказывали о задачах на обратный мат: белые начинают и заставляют черных постыдиться мот в заданное число ходов (черные к этому не стремятся, но в конце концов вынуждены пленить белого короля). Задачи на обратный мат имеют весьма отдаленное отношение к настоящим шахматам — они принадлежат к жанру сказочных шахмат и скорее напоминают игру Сэма Лойда «Пятнадцать» или головоломки-лабиринты, в которых требуется выпутаться из какой-нибудь хитрой ситуации.

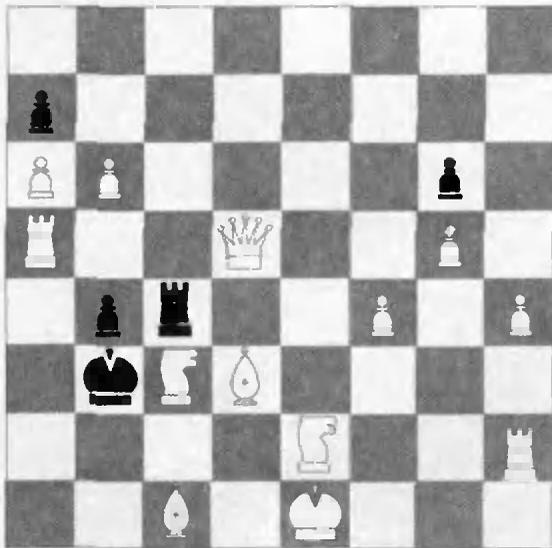
Первая из предлагаемых задач привлекает заключительной позицией: в процессе решения все белые фигуры возвращаются на свои исходные места.

Т.САБО, 1983

Обратный мат в 7 ходов

1. Kb1! ab 2. Ла1 b5 3. f5 gf 4. Kg1 f4 5. Cf1 f3 6. Фd1+ Лс2 7. Лh1 f2X.

Взглянув на заключительную позицию, вы убедитесь, насколько нешаблонны пути развития этого сторинного жанра шахматной композиции.

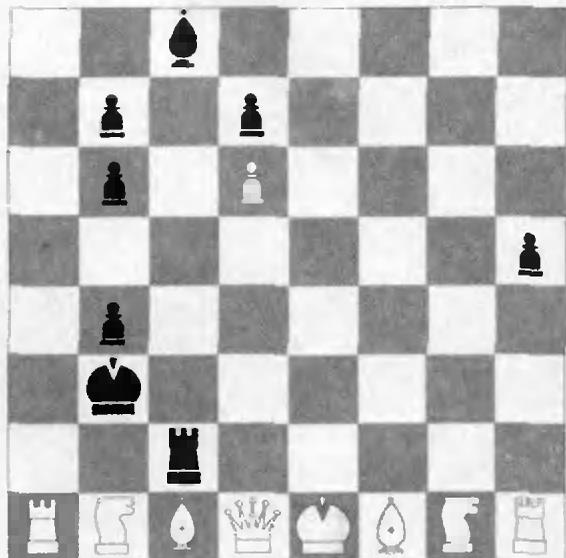


Т.САБО, 1984

Обратный мат в 11 ходов

В этой удивительной задаче того же автора, наоборот, в начальной позиции восемь белых фигур стоят на исходных местах. К цели ведет

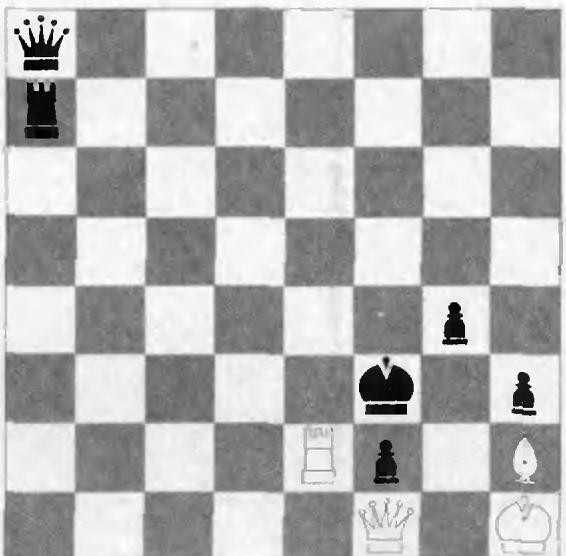
такая перегруппировка сил: **1. Сb5 h4 2. Фd5+ Лс4 3. Kh3 Kpc2 4. Фd2+ Kpb3 5. Фd1+ Лс2 6. Фd5+ Лс4 7. 0-0! Kpc2 8. Фd2+ Kpb3 9. Фd1+ Лс2 10. Kf2 h3 11. Kh1 h2X.** Уникальная зодоча: здесь и двукратно представленный маневр Фd5-d2-d1, и неожиданная рокировка, и тонкий маневр конем к полю h1 через h3 и f2 (но не через e2 и g3).



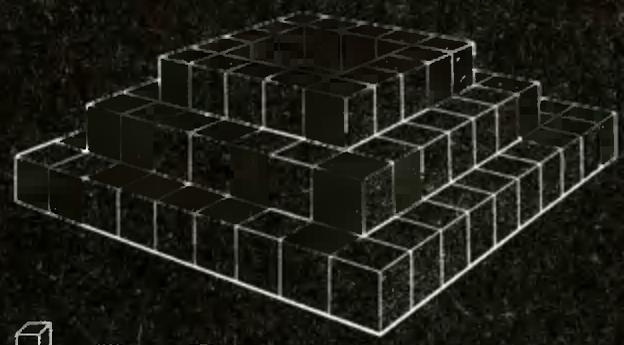
Е.ИВАНОВ, 1965

Обратный мат в 2 хода

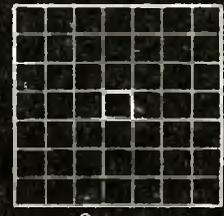
После **1. Ле4!** грозит **2. Фg2+ hgX**. Черные могут отказаться ставить мат пешкой, но тогда им придется объявить мат ферзем: **1...Kp:e4 2. Фd3+! Kp:d3X**; **1...Ф:e4 2. Ф:f2+! Kp:f2X**; **1...Ла1 2. Ле3+! Kp:e3X**



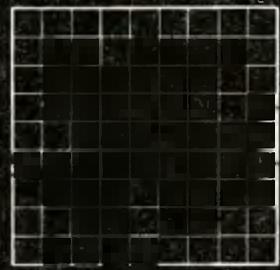
КОНКУРС «ПЕНТАКУБИКИ»



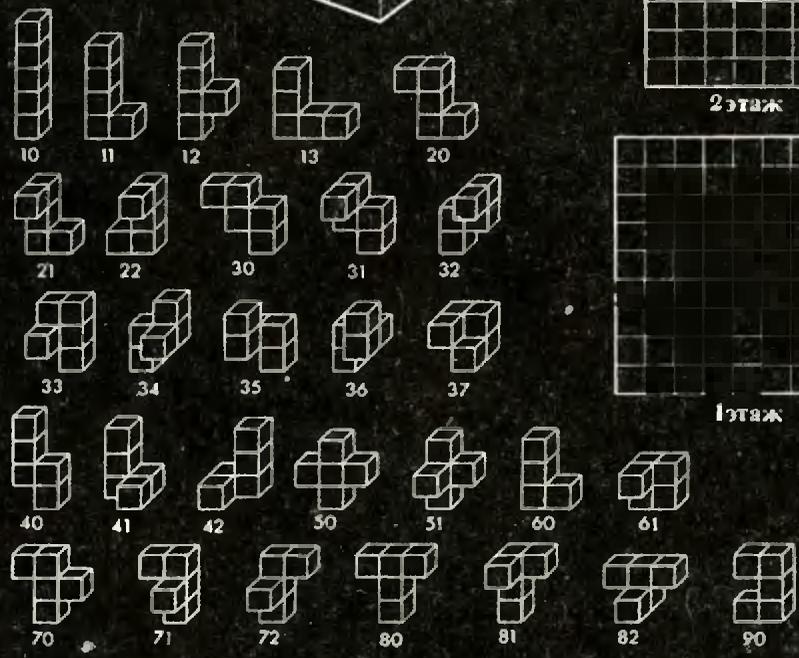
3 этаж



2 этаж



1 этаж



Сегодня мы предлагаем вам принять участие в международном конкурсе, объявленном немецкой фирмой «Пентакубеншпиле».

Фирма учредила три премии: одну в 200 марок и две по 100 марок за складывание из пентакубиков башни, показанной на нашем рисунке. Но сначала несколько слов о том, что такое пентакубики.

Пентакубики — это набор фигурок, каждая из которых состоит из 5 кубиков. Существует только 29 способов соединить 5 кубиков между собой «грань к грани», и поэтому полный набор пентакубиков содержит ровно 29 фигур. Все они показаны в нижней части обложки. Из них и нужно сложить башню.

Призы конкурса будут разыграны по жребию среди всех участников, приславших правильное решение, но шонсы тех, кто найдет несколько вариантов сборки, будут увеличиваться пропорционально количеству найденных решений. Ответы нужно отправить до 30 апреля 1993 года, хотя из России, учитывая плохую работу нашей почты, лучше послать их раньше.

Планы этажей башни показаны справа. Их используют для описания решения: на планах следует нарисовать контуры частей фигурок, поподоющих на соответствующие этажи. Внутри контуров напишите номера фигурок. Если фигурка целиком лежит в одном этаже, ее номер пишут один раз. Если она «пронизывает» все три этажа, то ее номер будет на планах всех трех этажей. Желаем вам успеха. Времени мало, поэтому беритесь скорее за дело: клеите пентакубики из детских кубиков и решайте задачу или пишете программу для компьютера.

Адрес фирмы: PENTAKUBENSPIELE, SCHOENRATHSTR.79, D-5100, AACHEN, GERMANY.