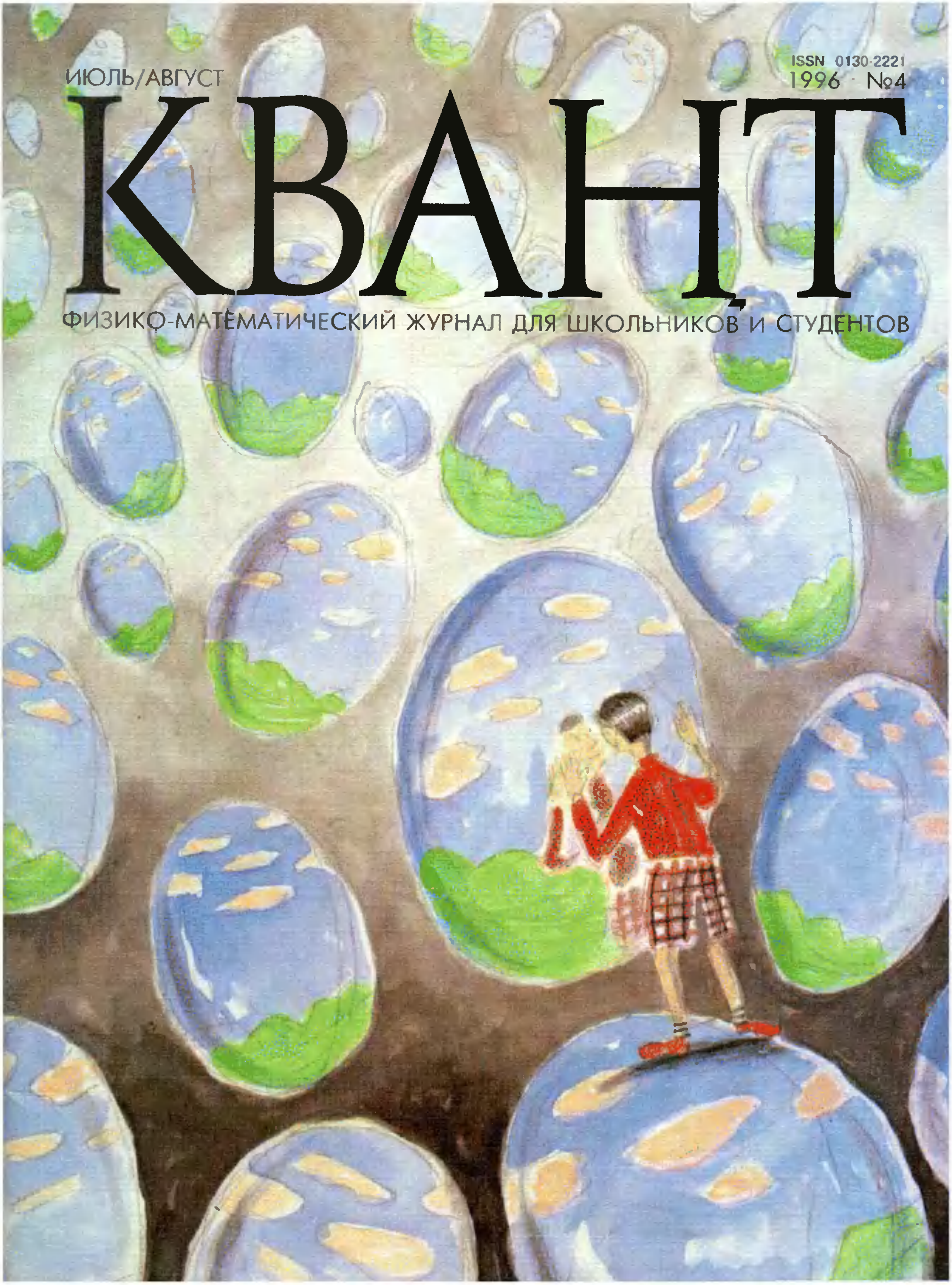
ИЮЛЬ/АВГУСТ

ISSN 0130-2221
1996 · №4

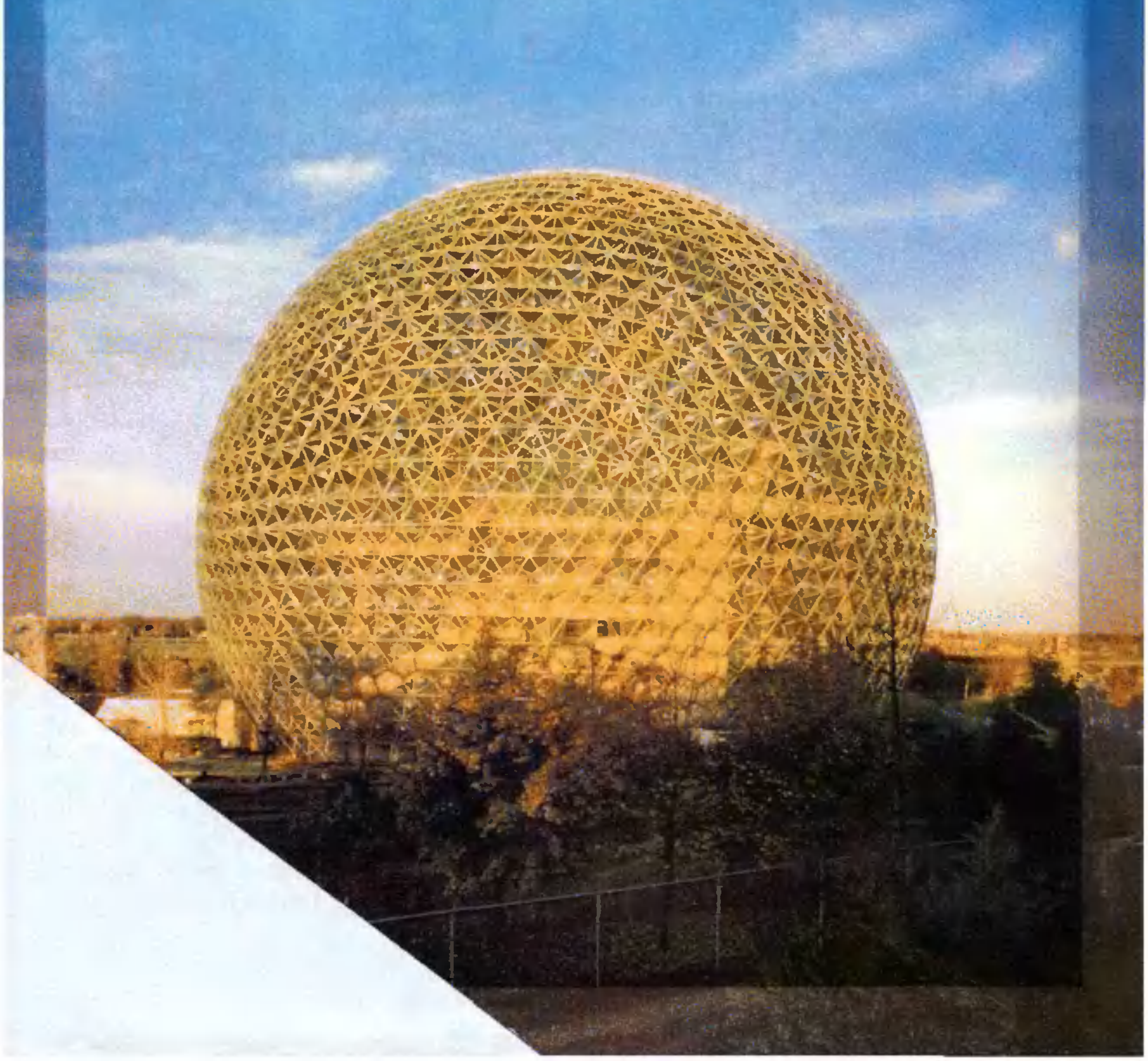
КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



Купол выставочного павильона на «ЭКСПО-67». Автор — Бакминстер Фуллер. Интересно, что известный американский архитектор и инженер при создании своих ячеистых куполов использовал те же принципы, по которым «строятся» и открытые в середине 80-х годов гигантские углеродные молекулы. Самую знаменитую молекулу C_{60} авторы открытия назвали бакминстерфуллереном (сокращенно — футболино), а весь класс гигантских углеродных молекул — фуллеренами.

Сегодня изучением фуллеренов занимаются многие ученые, ежегодно публикуются тысячи посвященных им статей. О фуллеренах однажды рассказывалось и в «Кванте» — статье С.Тиходеева «Конструкции из углерода» («Квант», 1993, №1/2). Надеемся, что аналогичные публикации ждут читателей и в будущем.



КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

ИЮЛЬ/АВГУСТ · 1996 · №4

Бюро Квантум

В номере:

А атомные ядра тоже колеблются!

Ю.БРУК, М.ЗЕЛЬНИКОВ, А.СТАСЕНКО

Но вы, к моей несчастной доле
Хоть каплю жалости храня...

Из письма Т.Лариной к Е.Онегину,
А.С.Пушкин

Начнем с тумана

Когда речь заходит о каплях, прежде всего мы вспоминаем дождь, туман или кран в кухне, из которого капает вода. Но «капельную модель» физики применяют и для описания атомных ядер. Казалось бы — ну что общего у капли тумана и ядра урана? Оказывается, не так уж мало — капельная модель ядра, развитая в работах Н.Бора, Дж.Уилера и Я.И.Френкеля, очень похожа на модель капелек обычной жидкости. На ее основе можно понять, как ядра колеблются, делятся, можно вычислить массу ядер. В этой статье мы поговорим о колебаниях капель и начнем с капелек тумана.

Предположим, что капельки «висят» почти неподвижно в воздухе и имеют форму шариков. Конечно, опыт был бы чище в кабине космического корабля — там капли находятся в невесомости и не возникает вопрос об их ускоренном падении на землю. Для небольших капелек можно и в земной атмосфере считать их почти неподвижными, так как сила тяжести капелек практически уравновешена силами сопротивления (вязкости) воздуха, и они падают с постоянной и очень маленькой скоростью. А к тому же воздушные потоки (конвективные, например) могут замедлять или даже прекращать их падение вовсе (а могут, впрочем, и заставлять капельки двигаться быстрее, и даже не вниз, а вверх).

Но пусть все-таки капелька «висит» и имеет форму шарика. А почему шарика, а не кубика, пирамиды или лепешки? Очевидно, что здесь играет роль поверхностное натяжение: попытка изменить форму капли приводит к появлению восстанавливающих эту форму сил. Вода в нашей задаче может считаться несжимаемой жидкостью. Природа же старается устраивать все экономно, поэтому у капельки в равновесии должна быть минимальной энергия, связанная с поверхностным натяжением. Если изменить форму капельки (а для несжимаемой жидкости объем при этом не меняется), изменится и площадь поверхности ее. Наименьшее значение площади поверхности тела при фиксированном объеме достигается именно для шара. Таким образом, мы приходим к выводу, что, стремясь восстановить свою равновесную шаровую форму, деформированная капелька стремится иметь минимальную поверхностную (потенциальную) энергию.

Поверхностное натяжение

Теперь давайте вспомним, как определяется поверхностное натяжение. Рассмотрим легкую проволочную рамку (рис. 1), одна из сторон которой CD может перемещаться под действием силы $\vec{F}$. Предположим, что площадь $ABCD$ заполнена пленкой жидкости (удобно делать такой опыт с мыльным раствором), а сама рамка лежит на поверхности заполненного жидкостью сосуда. Передвигая проволочку CD в направлении силы, мы совершаем работу, увеличивая площадь пленки. Необходимый для этого мыльный раствор поступает из сосуда под рамкой. Поверхностное натяжение можно определить либо как отношение величины силы F к длине

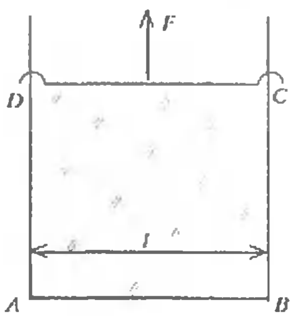


Рис. 1

проволоки l, либо как отношение изменения энергии пленки, натянутой на контур $ABCD$, к изменению площади этого контура (из-за движения CD), другими словами — как потенци-

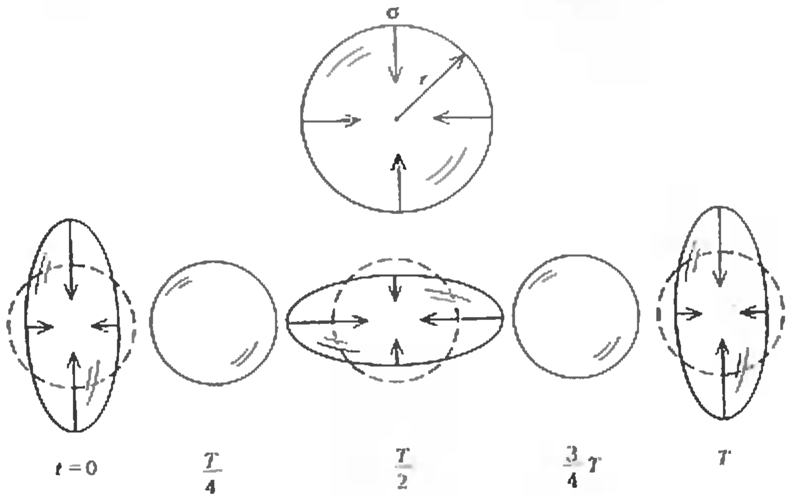


Рис. 2

Иллюстрация Л. Тишкова

альную энергию единицы площади пленки. Об том же говорит и выражение для размерности поверхностного натяжения σ:

$$[\sigma]=\frac{\text{Н}}{\text{м}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^2}=\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}.$$

Представим себе теперь, что в начальный момент наша капелька из тумана оказалась деформированной, например в результате раската грома или прохождения ударной волны от сверхзвукового самолета. Тогда — что? Правильно, она начнет колебаться (рис. 2). А почему она «проскакивает» положение равновесия, т.е. шаровую форму (изображенную пунктиром)? Очевидно, это происходит из-за того, что частички в капельке движутся по инерции: набрав скорость под действием сил поверхностного натяжения, они уже не могут остановиться в тот момент времени, когда капля стала шаром, и продолжают двигаться, превращая каплю из вытянутой в сплющенную. Этот процесс продолжается до тех пор, пока вязкость воды и сопротивление окружающего каплю воздуха не превратят энергию первоначальной деформации в тепловую.

Частота колебаний капли

Попробуем теперь оценить частоту колебаний капли ν или ее период $T=1/\nu$. Воспользуемся простыми соображениями размерностей, выбрав систему единиц СИ. Радиус капли r измеряется в м, масса ее $M=(4/3)\pi r^3\rho_0$ — в кг (здесь ρ_0 — плотность воды, измеряемая в кг/м^3). Размерность поверхностного натяжения есть Дж/м^2 = Н/м = = кг·с$^{-2}$. Отсюда ясно видно, что частота ν, измеряемая в с$^{-1}$, должна выражаться через σ и M формулой

$$\nu\sim\sqrt{\frac{\sigma}{M}}.$$

Эта формула единственно возможная для нашей задачи. Метод размерностей не позволяет определить безразмерный численный множитель в формуле для частоты, поэтому мы пишем не знак равенства, а знак пропорциональности. В принципе можно было бы написать и такую формулу:

$$\nu\sim\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_0 r^3}}.$$

Хотя то, что мы сейчас сделаем, нельзя оправдать только соображениями размерностей, мы все-таки рискнем предположить, что неопределенный численный множитель — величина порядка единицы. Но тогда можно получить и численную оценку частоты колебаний. Типичный размер капельки в тумане $r=0{,}1$ мм = $=10^{-4}$ м, поверхностное натяжение для воды $\sigma=70\cdot10^{-3}$ Н/м = $=0{,}07$ Дж/м^2, плотность воды ρ_0 = $=10^3$ кг/м^3. Отсюда оценка для частоты такая: $\nu\sim10^4$ с$^{-1}$ = 10 кГц.

И еще одно любопытное замечание. Перепишем формулу, с помощью которой мы только что оценили порядок частоты колебаний капельки, для величины $T^2=1/\nu^2$:

$$T^2\sim\frac{\rho_0 r^3}{\sigma},\ \text{или}\ \frac{T^2}{r^3}\sim\frac{\rho_0}{\sigma}.$$

Для жидкости с фиксированными ρ_0 и σ получается закон $T^2=\text{const}\cdot r^3$. Если взять две капельки из одной жидкости, но разных радиусов, то отношение квадратов периодов их колебаний будет равно отношению кубов их радиусов. Как тут не вспомнить закон Кеплера для движения планет вокруг Солнца! Там, правда, нужно говорить не о радиусах шаров-планет, а о радиусах орбит. Подумайте сами — нельзя ли извлечь что-нибудь полезное из этой аналогии?

Ядерные капельки

Ну а теперь давайте поговорим о капельках ядерной жидкости — атомных ядрах. Ядра состоят из нуклонов — нейтронов и протонов. Если обозначить m_p и m_n массы протона и нейтрона соответственно, Z и A — заряд и массовое число (полное число нуклонов в ядре), $M(A,Z)$ — массу атомного ядра с данными Z и A, $c=2{,}998\cdot10^8$ м/с — скорость света в вакууме, то величина

$$\Delta W=\left(Zm_p+(A-Z)m_n-M(A,Z)\right)c^2$$

называется энергией связи ядра относительно составляющих его нуклонов. Нуклоны прочно связаны в ядре сильным взаимодействием (ядерными силами). А вот если бы мы захотели разделить ядро на составляющие его нуклоны, мы должны были бы затратить энергию, как раз равную ΔW. Разделив ΔW на полное число нуклонов A, мы получим удельную энергию связи нуклона в ядре $\varepsilon=\Delta W/A$. Для большинства стабильных и не очень легких ядер величина ε примерно одна и та же. Более точное утверждение такое: $\varepsilon(A)$ быстро возрастает от $\varepsilon=0$ при $A=1$ до $\varepsilon=8$ МэВ при $A=16$, затем проходит через максимум $\varepsilon_{max}=8{,}8$ МэВ при $A\approx60$ (ядра ^{58}Fe и ^{62}Ni) и постепенно уменьшается до $\varepsilon=7{,}6$ МэВ для урана. Интересуясь лишь достаточно тяжелыми ядрами для наших целей, мы примем, что среднее значение удельной энергии связи составляет $\bar\varepsilon=8$ МэВ. (Напомним, что 1 МэВ = 10^6 эВ = $=1{,}6\cdot10^{-13}$ Дж.) В первом приближении можно принять, что

$$\Delta W=\bar\varepsilon A=8\,A\ \text{МэВ}.$$

Для тех оценок, которые мы сделаем дальше, такой точности вполне достаточно.

Можно сказать, что атомное ядро в чем-то похоже на обычную жидкую каплю. Так же, как и многие обычные жидкости, ядерная жидкость почти несжимаема. Это означает, что плотность ядерного вещества во всех ядрах практически постоянна. То, что величина ΔW пропорциональна A, можно сравнить с линейной зависимостью энергии, необходимой для испарения капли обычной жидкости, от массы капли. Приблизительное постоянство удельной энергии связи для всех ядер также напоминает аналогичную ситуацию в обычных жидкостях.

Масса любого ядра, а потому и величина A, пропорциональна его объему. Если R — радиус ядра, то $A\sim R^3$. Экспериментальные данные для разных ядер действительно приводят к зависимости $R\approx r_0A^{1/3}$, где $r_0=1{,}5\cdot10^{-15}$ м. Качественно такую зависимость можно было бы понять, приписав нуклону «радиус» r_0, тогда при плотной упаковке нуклонных «шариков» в сфере радиусом R получилось бы $R^3\approx r_0^3A$. Концентрация нуклонов в ядре $n=A/(4/3\pi R^3)\approx$ $\approx10^{44}$ нуклонов/м^3, масса нуклона $m_p\approx m_n\approx1{,}67\cdot10^{-27}$ кг, а плотность ядерного вещества $\rho\approx nm_n\approx$ $\approx2\cdot10^{17}$ кг/м^3.

Здесь мы должны обратить внимание читателя на то, что говорить о «радиусе» элементарных частиц можно только условно, нельзя придавать этому слишком буквальный смысл. Корректное определение «размеров» нуклонов, электронов и других элементарных частиц вообще не может быть дано в рамках классической физики. Это не мешает нам делать оценки, пользуясь наглядными классическими представлениями. Но произнося некоторые слова, мы не можем забывать, что они должны быть оправданы более корректными неклассическими рассуждениями. Например, размеры атомных ядер находятся из опытов по рассеянию частиц в тонких металлических фольгах (вспомните опыты Резерфорда, которые привели к планетарной модели атома).

Если задуматься над вопросом об определении поверхностного натяжения для капельки ядерного вещества, то прежде всего нужно сказать, что эта капелька — атомное ядро — должна содержать не слишком мало частиц, иначе понятие о поверхностном натяжении потеряет свой смысл. Вот почему наши рассуждения справедливы именно для случая тяжелых ядер ($A \gg 1$, $Z \gg 1$). Часть нуклонов (протонов и нейтронов) находится на поверхности ядра-капельки, поэтому они слабее связаны с другими частицами, нежели частицы в глубине атомного ядра.

Ядерные силы, действующие на нуклоны, похожи на силы, действующие на частицы обычных жидкостей еще в одном отношении. И те, и другие обладают свойством насыщения. Это означает, что каждая частица жидкости взаимодействует только со своими близкими соседями. Именно это свойство и приводит к пропорциональности ΔW и A. Если бы это было не так и каждая частица взаимодействовала бы со всеми остальными, то полная энергия связи была бы пропорциональна $A(A-1) \approx A^2$. Насыщение ядерных (или молекулярных) сил связано с их короткодействием.

Но кроме ядерного есть еще и кулоновское взаимодействие протонов. Эффективное отталкивание их друг от друга уменьшает общую энергию связи ядра. Эти электрические силы — дальнодействующие, они не обладают свойством насыщения. Другими словами, каждый протон взаимодействует со всеми остальными, поэтому кулоновский вклад в полную энергию пропорционален $Z(Z-1) \approx Z^2$. Здесь можно сказать еще, что характер кулоновского взаимодействия протонов в ядре отличается от характера взаимодействия зарядов в плазме или в твердом теле потому, что в ядре есть только положительно заряженные частицы (протоны), в плазме же или в металле есть заряженные частицы обоих знаков (ионы и электроны, положительные и отрицательные ионы). Заряды разных знаков как бы экранируют друг друга, поэтому в плазме и металле взаимодействие эффективно оказывается относительно короткодействующим. Для протонов в ядре никакой экранировки нет, это и есть причина дальнодействия электрических сил там.

Лапласовское давление

Теперь, для того чтобы в явном виде записать выражение для поверхностного натяжения ядерной капельки, нам нужно сделать еще два шага. Сначала поговорим о лапласовском давлении. Так называется избыточное давление, создаваемое силами поверхностного натяжения под изогнутой поверхностью жидкости. Чтобы понять, как такое давление возникает, представим себе, что на сфере радиусом R малый телесный угол с вершиной в центре сферы вырезает кусочек поверхности (рис.3). Силы поверхностного натяжения направлены по касательным к сфере в точках окружности, ограничивающей вырезанный элемент. Если все эти силы сложить, то результирующая будет направлена к центру сферы. Отсюда ясно, что силы поверхностного натяжения на сферической поверхности приводят к дополнительному давлению Δp в жидкости.

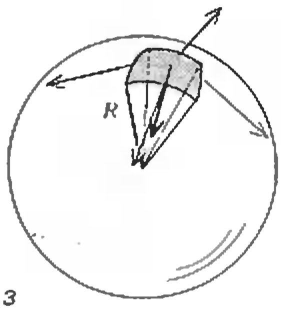


Рис. 3

Вспомним теперь, что поверхностное натяжение σ можно интерпретировать и как плотность поверхностной энергии. Тогда полная поверхностная энергия сферической капли равна $4\pi R^2\sigma$. Предположим теперь, что лапласовское давление привело к очень малой и симметричной деформации капли, и ее радиус стал равен $R - \delta R$. Теперь и поверхностная энергия станет другой: $4\pi\sigma(R-\delta R)^2$. Изменение же поверхностной энергии составит $\left(4\pi R^2 - 4\pi(R-\delta R)^2\right)\sigma \approx 4\pi \cdot 2R \cdot \delta R \cdot \sigma$, так как $\delta R \ll R$. Работа сил давления при изменении радиуса на δR равна, очевидно, $\Delta p \cdot 4\pi R^2 \cdot \delta R$. Приравнивая изменение поверхностной энергии работе сил давления, получим итог нашего первого шага — под изогнутой поверхностью жидкой капли действительно возникает избыточное давление

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}.$$

Это давление должно быть скомпенсировано внутренним давлением в капле, если мы хотим считать, что капля находится в равновесном состоянии (или близком к нему — квазиравновесном).

Квантовое давление в атомных ядрах

Наш второй шаг должен привести к каким-то оценкам давления, «противостоящего» давлению лапласовскому.

Нуклоны в ядре (иногда такую систему называют нуклонной или ядерной жидкостью) все-таки не совсем похожи на частицы обычных жидкостей. Для обычных жидкостей (или газов) давление, как мы знаем, определяется средней кинетической энергией их частиц и энергией межчастичных взаимодействий. Кинетическая энергия частиц в привычных нам ситуациях определяется температурой. Совсем просто обстоит дело в случае идеального классического газа. Его давление равно nkT, где n — концентрация частиц (число частиц в единице объема), T — температура, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Выражения такого типа для давления совершенно не годятся для нуклонной (ядерной) жидкости. Нуклоны подчиняются законам квантовой механики, и их скорость, давление и энергия от температуры практически не зависят. Поэтому, чтобы оценить величину давления в ядерной системе, мы пойдем обходным путем и снова воспользуемся методом размерностей.

Так как речь идет о квантовой системе, вполне вероятно, что в выражение для давления должна входить постоянная Планка $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Предположим, что давление зависит также от концентрации частиц n и от массы частицы m. (Зависимость от n означает, другими словами, зависимость от расстояния между нуклонами, поэтому именно в этом месте может быть «спрятана» зависимость давления от величины сил межчастичного (ядерного) взаимодействия.) Выпишем размерности интересующих нас величин: $[\hbar] = \text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$, $[n] = \text{м}^{-3}$, $[m] = \text{кг}$, $[p] = \text{кг}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}$. Запишем формулу

$$p\sim\hbar^{\alpha}m^{\beta}n^{\gamma}.$$

Сравнивая размерности левой и правой частей, получим три уравнения для определения чисел α, β, γ:

$$1=\alpha+\beta,\quad -1=2\alpha-3\gamma,\quad -2=-\alpha.$$

Отсюда найдем

$$\alpha=2,\ \beta=-1,\ \gamma=5/3\ \text{ и }\ p\sim\frac{\hbar^2}{m}n^{5/3}.$$

Эта формула годится для вычисления давления протонов p_p, давления нейтронов p_n и полного квантового давления нуклонов $p_N = p_p + p_n$. Мы вычислим эти давления, имея в виду, что число протонов в ядре Z, число нейтронов $A-Z$, а разницей масс нейтрона m_n и протона m_p будем пренебрегать: $m_n = m_p = m$. Запишем очевидные формулы:

$$n_p=\frac{Z}{4/3\pi R^3}=\frac{Z}{4/3\pi r_0^3A}=\frac{3}{4\pi}\frac{1}{r_0^3}\frac{Z}{A},$$

$$n_n=\frac{A-Z}{4/3\pi R^3}=\frac{A-Z}{4/3\pi r_0^3A}=\frac{3}{4\pi}\frac{1}{r_0^3}\frac{A-Z}{A},$$

$$p_N=p_p+p_n\sim\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{r_0^5}\left(\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}+\left(\frac{A-Z}{A}\right)^{5/3}\right).$$

Если теперь считать, что $\frac{\sigma}{R}\sim p_N$, т.е. что лапласовское давление компенсируется давлением нуклонов, то мы получим по порядку величины

$$\sigma\sim\frac{\hbar^2}{m}\frac{A^{1/3}}{r_0^4}\left(\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}+\left(\frac{A-Z}{A}\right)^{5/3}\right).$$

Выражение, стоящее в больших скобках, в общем тоже число порядка единицы. Оказывается, что и более точный расчет не приводит к очень большим или очень малым численным коэффициентам в наших формулах. Кроме того, более аккуратные (но и намного более сложные!) вычисления подтверждают разумность написанных нами формул.

Электрическое давление

А только ли давлением p_N компенсируется лапласовское давление Δp? Создатели капельной модели ядра считали, что поверхностное натяжение могло бы компенсироваться также и электрическим давлением на поверхность. Это давление создается расталкивающимися протонами и равно произведению напряженности электрического поля на поверхности капли на поверхностную плотность электрических зарядов. Оценить его можно так. Заряд ядра Ze создает на расстоянии R (на поверхности ядра) напряженность поля порядка $(Ze)/(4\pi\varepsilon_0R^2)$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \text{Кл}^2/(\text{м}^2\cdot\text{Н})$ — электрическая постоянная. Плотность зарядов, если все протоны поместить на поверхности капли, равна $(Ze)/(4\pi R^2)$. Значит, электрическое давление p_e есть величина порядка

$$\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0R^2}\frac{Ze}{4\pi R^2}\sim\frac{(Ze)^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0R^4}.$$

Если бы величина p_e оказалась больше p_N, можно было бы для оценки поверхностного натяжения записать (опять опуская численные множители)

$$\frac{\sigma}{R}\sim\frac{(Ze)^2}{\varepsilon_0R^4},\ \text{или}\ \sigma\sim\frac{(Ze)^2}{\varepsilon_0R^3}=\frac{(Ze)^2}{r_0^3A\varepsilon_0}.$$

Поверхностное натяжение и частоты колебаний ядер

В общем случае в давление внутри капли-ядра дают свой вклад и квантовое давление p_N, и кулоновское (электрическое) давление p_e. Поэтому условие равновесия ядра будет теперь таким:

$$\frac{\sigma}{R}=C_1p_N+C_2p_e,$$

где C_1 и C_2 — некоторые числа, которые можно было бы выписать явно, если бы мы в наших оценках учитывали все численные множители. Ценность такого «точного» вычисления, однако, не очень велика, так как наша модель все равно сравнительно грубая (мы не учитываем, например, возможной неоднородности распределения нуклонов в ядре). Тем не менее, в этой грубой модели нам удается «ухватить» качественные зависимости, да и численные оценки все же вполне разумны.

Окончательно искомая оценка для поверхностного натяжения выглядит так:

$$\sigma=C_1\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{r_0^4}A^{1/3}\left(\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}+\left(\frac{A-Z}{A}\right)^{5/3}\right)+C_2\frac{(Ze)^2}{\varepsilon_0r_0^3}\frac{1}{A}.$$

Так как нас и дальше будут интересовать только оценки по порядку величины, не будем уточнять значения C_1 и C_2, а будем считать и их числами порядка единицы.

Можно было бы по-другому определить поверхностное натяжение, предположив, что атомное ядро удерживается от распада только силами поверхностного натяжения:

$$4\pi R^2\sigma_*\sim A\bar{\varepsilon}=\Delta W,$$

откуда

$$\sigma_*\sim\frac{A\bar{\varepsilon}}{4\pi r_0^2A^{2/3}}\sim\frac{\bar{\varepsilon}A^{1/3}}{4\pi r_0^2}.$$

Такое определение, конечно, связано с тем, какой смысл мы придаем величине $\bar{\varepsilon}$. При $A\sim200$ (например, для изотопов урана с атомной массой 235 или 238) из такой оценки получится $\sigma_* = 2\cdot10^{17}\ \text{Дж/м}^2$. По сравнению с водой это, конечно, чудовищное натяжение.

Допустим теперь, что величина σ_* не очень сильно отличается от значения σ, полученного в предположении, что главный вклад в давление вносит p_N:

$$\sigma\sim\frac{\hbar^2}{m}\frac{A^{1/3}}{r_0^4}\sim\frac{\bar{\varepsilon}A^{1/3}}{4\pi r_0^2}\sim\sigma_*.$$

Отсюда получаем

$$\bar{\varepsilon}\sim\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{r_0^2}.$$

Численное значение $\bar{\varepsilon}$, как и следовало ожидать, порядка 10 МэВ, что с нашей точностью хорошо согласуется со значением $\bar{\varepsilon} = 8$ МэВ, упоминавшимся раньше.

Нам осталось теперь оценить характерные частоты колебаний ядер-капель, воспользовавшись формулой $\nu\sim(\sigma/M)^{1/2}$, где $M = Am$ — масса ядра. Сделаем это формально для двух предельных случаев: когда $p_N > p_e$ и когда $p_N < p_e$. В первом случае получится

$$\nu_1\sim\frac{\hbar}{m}\frac{1}{r_0^2}A^{-1/3}\left(\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}+\left(\frac{A-Z}{A}\right)^{5/3}\right)^{1/2},$$

во втором —

$$\nu_2\sim\left(\frac{Z}{A}\right)\omega_0,\ \text{где}\ \omega_0^2\sim\frac{e^2}{m\,r_0^3\,\varepsilon_0}.$$

Учитывая, что выражение в больших скобках в формуле для ν_1 порядка единицы, можно написать проще:

$$\nu_1\sim\frac{\hbar}{mr_0^2}A^{-1/3}.$$

Для частот колебаний в общем случае получается характерное значение порядка $10^{22}\ \text{с}^{-1}$. Такие частоты

(Окончание см. на с. 20)

Аномальные атмосферные явления

В.НОВОСЕЛЬЦЕВ

Великий французский астроном и естествоиспытатель Камиль Фламмарион (1842 — 1925) в в одной из своих книг — знаменитой «Атмосфере» — впервые описал и объяснил широкой читающей публике весь спектр необычных природных явлений в атмосфере Земли (в России книга издана в 1900 г.). После него описания миражей, солнечных гало, брокенских призраков и других оптических чудес природы стали привычными для каждого образованного человека.

Сейчас, в пору бурного технического развития, мощные техногенные процессы меняют лицо планеты, и старые добрые чудеса Камиля Фламмариона тоже изменяются. В образовании классических атмосферных явлений принимают участие технологические факторы, и часто само явление становится неузнаваемым и превращается в «неопознанный объект».

Фламмариону принадлежит честь первых наблюдений «техногенных» вариантов атмосферных чудес природы. Поднявшись на воздушном шаре, он впервые наблюдал и описал радужное гало вокруг тени, которую отбрасывал на облака этот символ технического прогресса прошлого столетия.

Гало. Остановимся на описании лишь одного явления из области атмосферной оптики — необычных гало. Гало (от греческого hálōs — круг, диск) представляют собой симметричные фигуры — круги, дуги, пятна, расположенные около яркого источника света (обычно Солнца или Луны) и образующиеся в холодную ясную погоду. Они создаются преломлением световых лучей на плавающих в воздухе кристалликах льда, имеющих форму разнообразных продолговатых параллелепипедов. Если кристаллики перемешаны потоками воздуха и распределены в пространстве равномерно, то около источника света возникают световые окружности, как это иллюстрирует рисунок из книги Фламмариона (рис.1). Если же воздух неподвижен, то частицы парят как парашютики, располагаясь горизонтально. Тогда преломление происходит в основном в вертикальной плоскости: возле источника света образуется световой столб (рис.2). Кроме того, от поперечных граней кристалликов иногда возникают горизонтальные полосы света, хотя и более слабые. В итоге могут образовываться крестообразные фигуры.

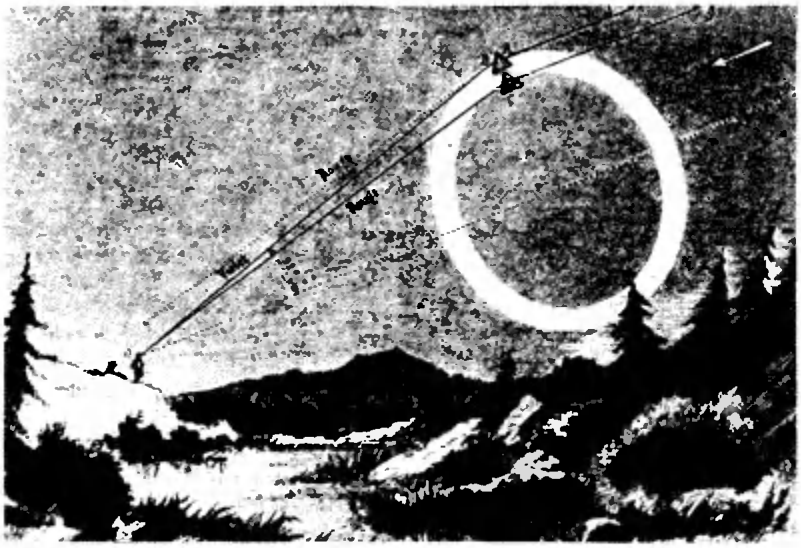


Рис. 1. Возникновение кольца гало. Иллюстрация из книги К.Фламмариона

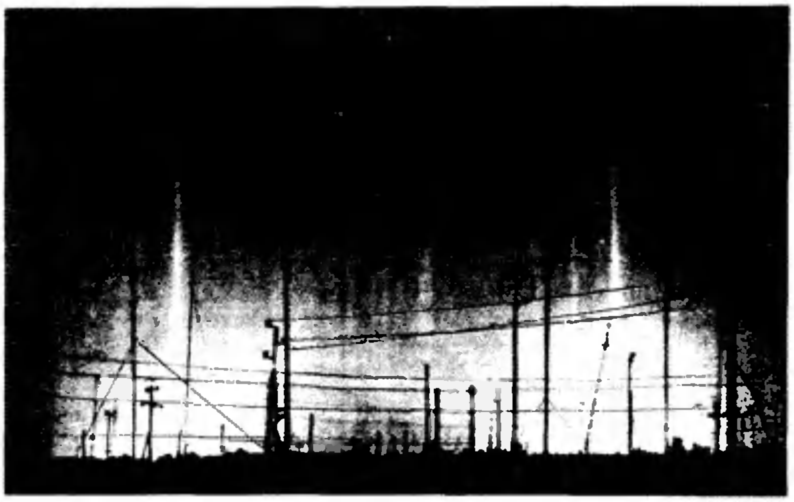


Рис.2. Световые столбы — преломление света от уличных светильников на парящих в воздухе мельчайших кристалликах льда

Если кристалликов в воздухе мало, у Солнца образуются «уши» или же по бокам появляются «ложные солнца». Если кристалликов много, отраженного и преломленного света хватит и на кресты, и на круги, которые к тому же начинают периодически повториться. В этом случае появляется довольно сложная картина с ложными солнцами в горизонтальной плоскости (рис.3).

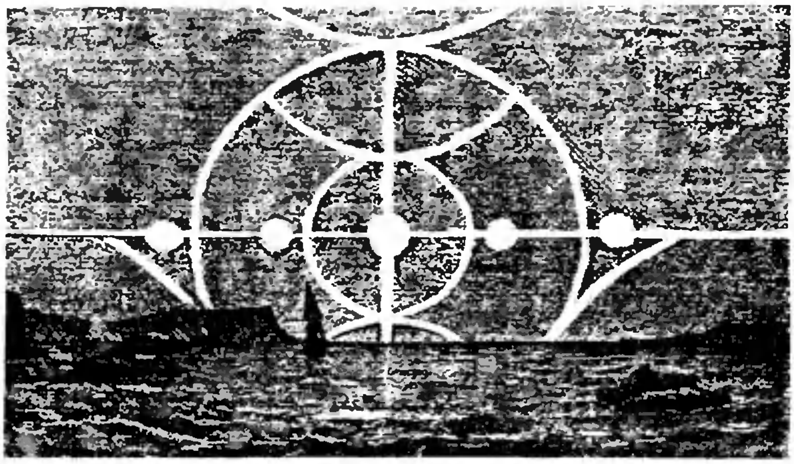


Рис.3. Гало и ложные солнца

Что касается радужных гало, которые наблюдал Фламмарион с воздушного шара, то разноцветные радужные круги образуются при преломлении и дифракции света в капельках воды, плавающих в воздухе. Они бывают только круглыми, поскольку все капельки имеют простую сферическую форму.

Таким образом, существуют многочисленные варианты гало, и внимательный наблюдатель может время от времени (особенно в наши холодные зимы) ими любоваться. А вот то, что он при этом увидит, зависит не только от погоды.

Умение увидеть. Как человек видит? Точнее, как он опознает и узнает то, что находится у него перед глазами?

Когда в поле зрения возникает какой-то объект, его изображение проецируется на сетчатку глаза, откуда возбуждение передается в мозг и там анализируется. Мозг человека устроен так, что он пытается любое изображение, появившееся на сетчатке, уложить в какую-нибудь связную картину из числа для него «приемлемых», т.е. отнести наблюдаемый объект к одному из «привычных» классов объектов. Фрагменты и детали изображения при этом должны получить логичное и внутренне непротиворечивое объяснение. Мало того, трактовка увиденного должна органично вписываться в картину мира, свойственную как мироощущению и знаниям человека-наблюдателя, так и стереотипам эпохи.

Одно и то же явление, увиденное средневековым человеком и нашим современником, будет соотноситься с разными системами представлений и понятий, с совершенно непохожими картинами мира. Вот как комментирует это А.С.Гурвич, специалист по оптическим явлениям: «Миражи в небе часто отождествлялись с воздушными кораблями. Но какими? В средние века — это парусники или галеры с якорями. С появлением локомотивов и дирижаблей в показаниях очевидцев появляются иллюминаторы, прожектора, посадочные устройства».

Ту основу, на которую мозг нанизывает детали для построения окончательной картины, называют по-разному. Иногда это просто «идея» воспринимаемого мира, его модель. Каждому школьнику известна планетарная модель атома, предложенная Резерфордом, — ядро, вокруг которого по разным орбитам вращаются электроны. И едва ли не каждый школьник задумывается — а что, собственно, здесь нового? Это же очевидно. Но когда данные о структуре и свойствах атомов были неясны и отрывочны, «увидеть» такую модель было поистине гениальным прозрением.

В теории зрения существует очень удачный термин: объект-гипотеза. Так называют исходные (априорные) знания и представления человека об увиденном, позволяющие ему в каждом конкретном случае быстро и уверенно судить о том, что именно находится перед его глазами.

Когда для наблюдаемого явления в мозгу имеется готовая объект-гипотеза, все детали появляющегося изображения легко ставятся на свое место. Но если мозг не имеет подходящей формы для картины, то сразу создать ее трудно. Вот характерный пример. Многие знают, как устроена планета Сатурн. Взглянув на нее в телескоп, каждый увидит шар, окруженный кольцом, — правда, в зависимости от положения планеты на орбите кольцо будет по-разному повернуто к наблюдателю и выглядеть соответственно этому. Но вот что интересно: астрономы XVII века не знали, что Сатурн — шар с кольцом. И сколько ни рассматривали его в телескопы, ни шара, ни кольца они не видели. Галилей, открывший в 1610 году кольца Сатурна, называл при этом планету «тройной звездой»: «Средняя звезда кажется мне большой, две же другие, расположенные одна на востоке, другая на западе, по-видимому, касаются ее. Это как будто два служителя, помогающие старому Сатурну совершать его путь». Не было подходящей объект-гипотезы — не было и психологического каркаса, в рамках которого можно было бы синтезировать правильный образ планеты.

Неузнанные или неопознанные? Точно так обстоит дело и с наблюдениями многих аномальных атмосферных явлений. Не имея подходящего объяснения для наблюдаемой картины, мозг поспешно ищет по возможности близкие объект-гипотезы и выдает сознанию трактовку события на основе наиболее подходящего «базового варианта».

Упоминания об аномальных явлениях в небе мы находим в самых древних письменных свидетельствах истории — на страницах Библии и китайских хроник, в египетских папирусах и русских летописях. Да и сейчас время от времени рассказы о таких чудесах попадают на страницы печати. Анализ этих удивительных и красочных сведений — подчас увлекательное дело.

К сожалению, и в истории, и в современных событиях часто не восстановить и не проверить деталей, нужных для их уверенной идентификации — суждения о том, что же это было. Неудивительно, что многие чудеса, простые по своей природе, но возникшие «не там, где надо» или «не так, как надо», остаются неузнанными. А от неузнанного до неопознанного один шаг.

Чудо пророка Иезекииля. Одно из самых древних описаний неопознанных атмосферных явлений содержится в Библии. Это — знаменитые колеса Иезекииля:

«И я видел их: и вот бурный ветер шел от севера, великое облако и клубящийся огонь, и сияние вокруг него;

а из середины его как бы свет пламени из середины огня; и из середины его видно было подобие четырех животных: их облик был как у человека; и у каждого — четыре лица, и у каждого из них — четыре крыла;

а ноги их — ноги прямые, и ступни ног их — как ступня ноги у тельца, и сверкали, как блестящая медь (и крылья их легкие).

И руки человеческие были подкрыльями их, на четырех сторонах их;

и лица у них, и крылья у них — у всех четырех; крылья их соприкасались одно к другому; во время шествия своего они не оборачивались, а шли каждое по направлению лица своего...

И смотрел я на животных — и вот на земле подле этих животных по одному колесу перед четырьмя лицами их.

Вид колес и устроение их — как вид топаза, и подобие у всех четырех — одно, и по виду их и по устроению их казалось, будто колесо находилось в колесе.

Когда они шли, шли на четыре свои стороны; во время шествия не оборачивались.

А ободья их — высоки и страшны были они; ободья их у всех четырех вокруг полны были глаз...

А над сводом, который над головами их, было подобие престола, по виду как бы из камня сапфира; а над подобием престола было как бы подобие человека вверху на нем.

И видел я как бы пылающий металл, как бы вид огня внутри его вокруг; от вида чресл его и выше и от вида чресл его и ниже я увидел как бы некий огонь, и сияние было вокруг него.

В каком виде бывает радуга на облаках во время дождя, такой вид имело это сияние кругом».

Рис.4. Чудо пророка Иезекииля на гравюре знаменитого английского поэта и художника Уильяма Блейка (1757 — 1827)

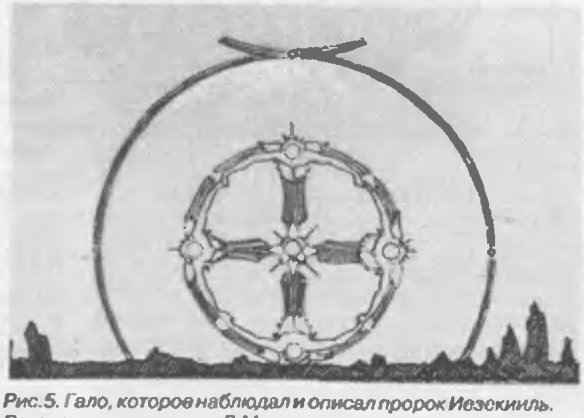


Рис.5. Гало, которое наблюдал и описал пророк Иезекииль. Реконструкция сделана Д.Мензелом

Что же представляло собой чудо? Пророк Иезекииль (VII в. до н.э.) был, судя по всему, нетривиальным человеком, наблюдательным и эмоциональным, так что описанные им события читались и осмысливались многими поколениями читателей в разных странах.

Первую научную трактовку «колес Иезекииля» дал американский астроном Д.Мензел, известный у нас не столько своей научной деятельностью, сколько книгой «О «летающих тарелках» (как теперь принято говорить, неоднозначной). Описанное Иезекиилем явление — чрезвычайно редкое для южных широт солнечное гало, представшее перед его экзальтированным взором в виде небесных чудищ. Чудо пророка вдохновило замечательного английского поэта и художника Уильяма Блейка, современника французских энциклопедистов, и он изобразил его на одной из своих гравюр (рис.4). В центральной фигуре с четырьмя лицами легко угадывается крест гало, а контуры крыльев повторяют структуру колец. На рисунке 5 приведена реконструкция колес Иезекииля, реставрированная по схеме гало самим Мензелом.

Гало на страницах русских летописей. Явление гало было знакомо и русским книжникам. Известный астроном Д.О.Святский еще на рубеже XX века опубликовал рисунок из старой летописи, показывающий, какой образ вызывало это явление в глазах наблюдателя (рис.6). Мир крестов и корон был ему ближе и роднее привычного сегодня мира физических законов.

Автор этих строк и сам однажды с удивлением обнаружил в одной из летописей описание необычного случая возникновения гало. В Вологодской летописи под 7171 годом (летописный 7171 год длился с 1 сентября 1662 г. по 31 августа 1663 г.) можно прочесть: «Ноября в 29 день по захождении солнца от запада бысть знамение страшно и ужаса исполнено в Белозерском уезде в Кириловской волости на Ерге: явися на небе яко звезда пресветлая долга и побеже скоростию, яко ж молния, по небеси. И расступися небо, и стояло яко полчаса, и тамо свет видети неизреченный яко огнь, и в том свете стоя яко человек, глава и очи и руце растяжены, перси и нозе, а весь огнен; воздуху же тогда небесному чисту и мразу великому сущу». А потом «камение великое падало от небеси на землю с великою яростию и шумом, горящее от огня небесного, и в мерзлую землю глубоко входило».

Оказалось, что сам этот случай астрономам хорошо известен (Д.О.Святский классифицировал его как «падение аэролитов», т.е. осколков большого метеорита). В летопись описание попало из подробного письма священника селения Ерги, расположенного близ города Устюга. Из этого и других многочисленных и подтверждающих друг друга свидетельств следует, что метеорит пролетел над вологодской землей более 200 километров с запада на восток. Для части свидетелей, которые наблюдали огненный след метеорита «в лоб», он должен был какое-то время выглядеть неподвижной огненной точкой или огненным диском; в ясный морозный вечер этот диск и стал источником света, давшим картину гало. Любопытно, что описание гало как огромного призрака человека, стоящего во весь рост с распростертыми руками («высприь зрак велик») перекликается и с гравюрой Уильяма Блейка и с зарисовкой русского книжника.

Британский флаг над Внуковым. Кажется, на этом историю превращения гало в призраки можно было бы считать законченной. Но, оказывается, возможен и техногеный вариант гало. И находим мы его уже в списке неопознанных явлений, например — в книге С.Шульмана «Инопланетяне над Россией».

15 мая 1981 года примерно в 1 ч 30 мин ночи над Тулой был замечен ярко светящийся сферический объект, движущийся в сторону Москвы. Приблизившись, объект завис над аэропортом Внуково, где его видели сотни свидетелей. Около минуты объект был неподвижен, потом из его центра «вырвалась ослепительная белая молния», образовавшая вокруг

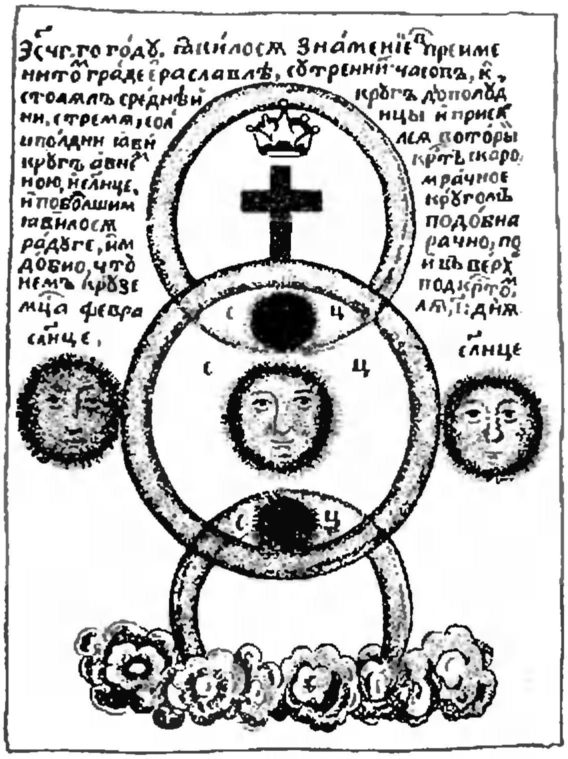


Рис.6. Изображение гало в одной из последних русских летописей

него что-то вроде солнечной короны, которая тут же рассыпалась каскадом искр, «как это бывает при фейерверках».

Когда искры погасли, на этом месте возник «черный квадрат, который потом был пересечен какими-то люминесцирующими полосами. Полосы образовали внутри квадрата что-то вроде огромного креста. Все это вместе напоминало Британский флаг...

Затем основной объект пришел в движение и начал удаляться, но черный квадрат с «флагом» еще какое-то время оставался на месте. А еще через несколько минут... начал бледнеть и растворился в пространстве. По всей видимости этот квадрат был не материален, т.е. он был искусственно созданным оптическим эффектом, ибо, как утверждают очевидцы, сквозь него были видны звезды».

Зарисовки огненного шара над Внуковым и «Британского флага», выполненные очевидцем события, приведены на рисунке 7.

Что же это было? Первая часть наблюдения, кажется, сомнений не вызывает — это картина старта многоступенчатой ракеты, произведенного за сотни километров от Внукова. Объект, неподвижно повисший в небе, — очевидное описание наблюдаемого «с торца» газопылевого шлейфа двигателя, освещенного находящимся под горизонтом Солнцем. Когда по команде с земли включились двигатели следующей ступени, из центра круга «внезапно» вырвалась «ослепительная молния».

Разделение ступеней — сложная технологическая операция, сопровождающаяся взрывом кумулятивных зарядов, пережигающих соединительные элементы между ступенями. Поэтому использованное сравнение с «солнечной короной, которая рассыпалась каскадом искр, как при фейерверках» лучше бы заменить более точным сравнением с вспышками и искрами расплавленного металла при электросварке.

А вот «черный квадрат», пересеченный какими-то люминесцирующими полосами, действительно уникальное явление. Насколько можно судить, это — первое в литературе описание техногенного гало. На втором рисунке очевидца «Британского флага» видны и характерный крест, и круг. Гало наблюдалось несколько минут — столько работают двигатели второй ступени ракеты. В кристалликах облака вместо обычного источника света, Солнца, преломлялись лучи света от огненной точки работающих двигателей.

Остается уточнить, откуда теплой майской ночью в небе могло внезапно возникнуть облако кристалликов льда. Дело в том, что продукты сгорания ракетного топлива включают пары воды; кроме того, кристаллы могут образовываться в результате переохлаждения и кристаллизации содержащихся в продуктах сгорания окислов металлов (например, Al_2O_3).

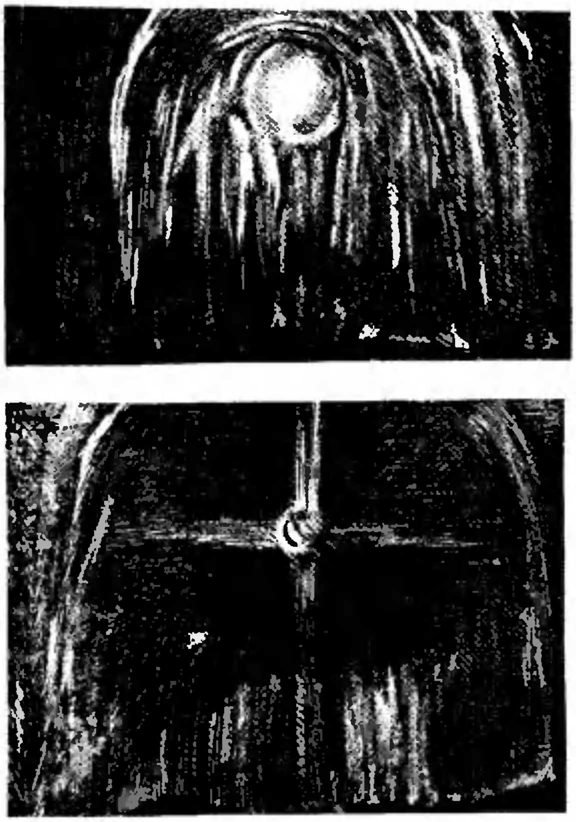


Рис. 7. Техногенные гало над аэропортом Внуково

Отсутствие объект-гипотезы «земного происхождения» явления не позволило распознать наблюдаемую картину, хотя предположение об искусственном характере происходящего и было высказано. Техногенное гало осталось тогда неузнанным.

Не только гало. Мы рассмотрели только один пример трансформации классических атмосферных явлений в неопознанные чудеса природы — гало. Но за пределами рассмотрения осталось много неузнанного и неопознанного.

Некоторые из таких чудес достаточно очевидны — например, необычные облака. Например, хвост кометы — освещенное солнцем разреженное облако газов в космическом пространстве — простирается до бесконечности, но видна обычно только его головная часть, где плотность вещества больше и рассеивается достаточно солнечного света. Точно так же шлейф продуктов сгорания ракетного двигателя виден только тогда, когда по лучу зрения он оказывается «достаточно плотным». Если такой шлейф попадет между солнцем и наблюдателем, он может выглядеть как темная туча. Но ракета имеет абсолютно круглые сопла двигателей, и техногенная туча получается исключительно правильных очертаний.

Мало того, если наблюдатель (например, на самолете) будет перемещаться вдоль или поперек «невидимого» ракетного шлейфа, он увидит удивительные картины — внезапное появление темного или (в зависимости от положения Солнца) огненного шара, превращение шара в эллипс-тарелку и даже «бесследное исчезновение». Это — техногенные иллюзии, которые постепенно становятся понятными. Но есть и абсолютно неясные пока загадки природы, для которых техногенные аналоги загадочны вдвойне. Назову одну из них — мираж. Естественные миражи обычно бывают вертикальными, располагаясь над и под объектом (верхний или нижний мираж). Такие миражи хорошо изучены — они возникают из-за разницы температур соседних слоев воздуха, лежащих параллельно земной поверхности.

Однако тепловые градиенты, возможно, не являются единственной причиной естественных миражей. Действительно, внимательные исследователи неоднократно наблюдали в Арктике сложный тип миража, когда одновременно с верхним возникали и боковые (латеральные) изображения. На рисунке 8 изображен единственный корабль у берегов Гренландии, давший две последовательности отражений — верхнюю и боковую. Поскольку трудно представить себе одновременное существование двух естественно возникших слоев воздуха разной температуры, которые пересеклись бы под углом ровно в 90 градусов, латеральный мираж на рисунке должен иметь в своей основе какие-то нетепловые причины появления оптической неоднородности атмосферы (возможно, электромагнитные?). Однако автор не смог найти в литературе не только обсуждения возможных механизмов феномена, но даже упоминания самой этой загадки.

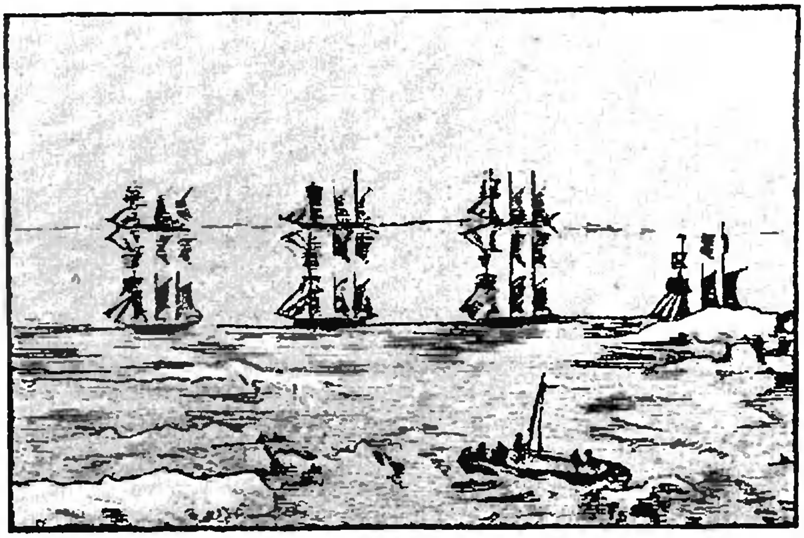
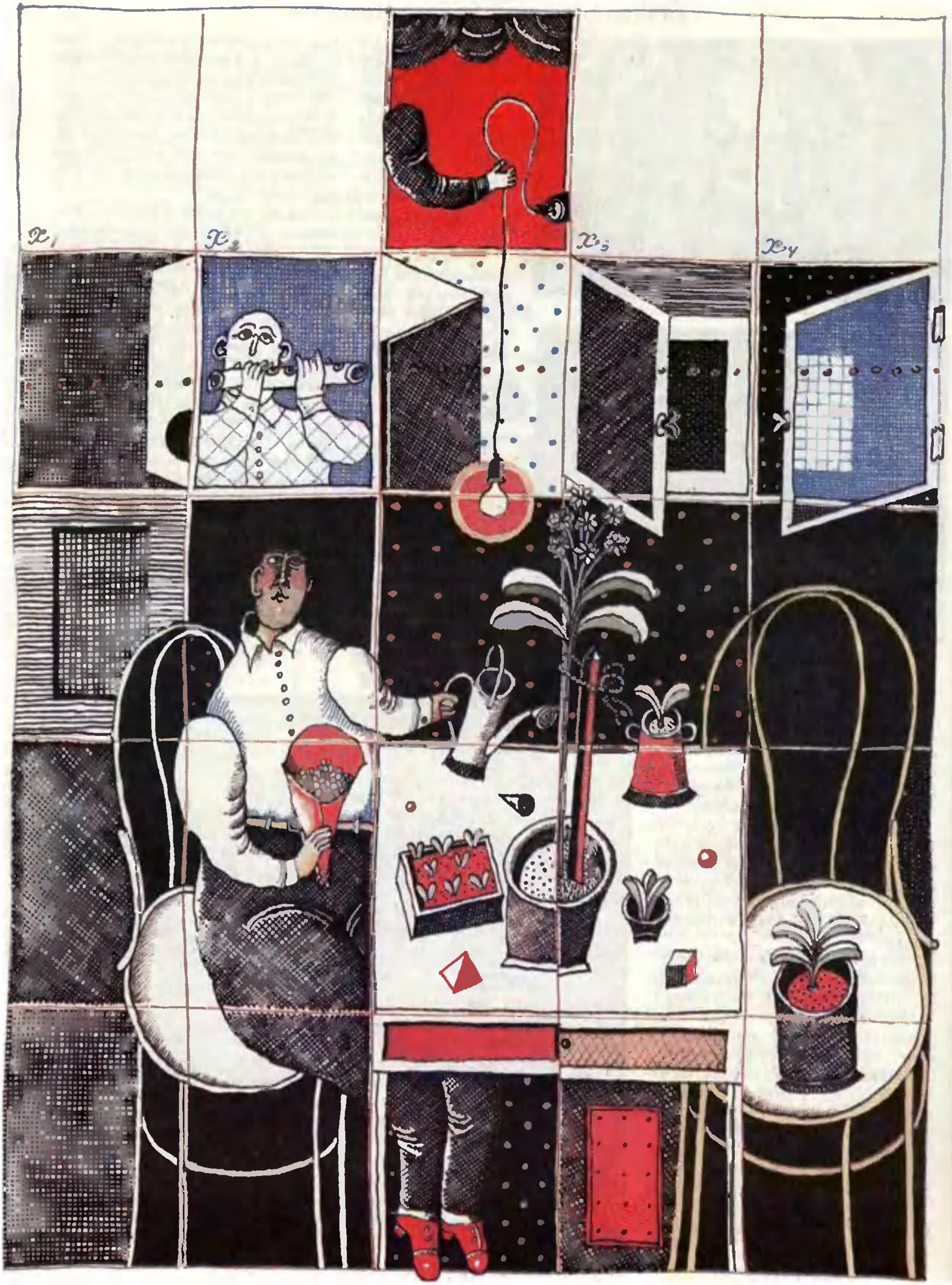


Рис. 8. Знаменитый в свое время латеральный (боковой) мираж, наблюдавшийся в 1869 году капитаном Коллвеем, посетившим берега Гренландии с экспедицией на корабле «Германия»


x_1
x_2
x_3
x_4

Сюрпризы выпуклого мира

Е. БРОНШТЕЙН

> *В этой сказке нет порядка —*
> *что ни слово, то загадка.*
>
> Борис Заходер

Речь пойдет о нескольких задачах, решенных совсем недавно. Можно сказать, что еще не высохли чернила на рукописях статей. Хотя сейчас правильнее говорить, что еще не высохли картриджи принтеров... Я отобрал эти задачи по трем признакам. Во-первых, все они из области математики, которой я занимаюсь профессионально — теории выпуклых множеств. Во-вторых, решения этих задач меня в то или иное время поразили. Наконец, я отобрал те задачи, для понимания которых не нужны никакие очень специальные познания. Однажды я был свидетелем того, как двое математиков с восторгом обсуждали крупное достижение в своей области — что-то вроде того, что всякий забубульный псевдо-ультра-модуль является загугульным. Понятно это от силы двум-трем десяткам особо посвященных, а остальным надо очень долго объяснять смысл всех этих слов.

Итак, задачи и формулировки соответствующих теорем можно легко объяснить, чего не скажешь о доказательствах — чрезвычайно трудных и изысканных.

Для того чтобы понять дальнейшее, нужно знать лишь кое-что о многомерных пространствах и выпуклых множествах.

Сюжет 0. Предварительные сведения

По аналогии с двух- и трехмерным пространствами *n-мерным пространством* называется множество упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вещественных чисел. Такие наборы называются *точками*, а числа из набора — *координатами* точек. Наряду с точками рассматриваются векторы. Любые две точки $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ порождают *вектор* $\vec{AB}$ с *началом* A и *концом* B. Вектор — тоже набор n чисел: $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$. Вектор $\vec{OA}$, где O — точка $(0, 0, \ldots, 0)$, называется *радиусом-вектором* точки A. Два вектора $\vec a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называются *равными*, если все их координаты равны.

В отличие от точек векторы можно складывать и умножать на числа — эти операции выполняются покоординатно.

Параллельным переносом или *сдвигом* на вектор $\vec a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется правило, сопоставляющее каждой точке $c(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ точку $(c_1 + a_1, c_2 + a_2, \ldots, c_n + a_n)$.

Подобно тому, как в трехмерном пространстве определены прямые и плоскости, в n-мерном пространстве можно ввести понятие *плоскостей* разных размерностей от 1 (прямая) до $n - 1$. Можно определить и плоскости размерности 0 — это просто точки.

Прямая, проходящая через любые две различные точки A и B, состоит из таких точек M, для которых $\vec{OM} = \lambda\vec{OM} + (1 - \lambda)\vec{OB}$ при всевозможных вещественных λ. При $\lambda = 0$ точка M совпадает с B, при $\lambda = 1$ — с A. Множество точек прямой при $\lambda \in [0, 1]$ называется *отрезком* с концами A и B — проверьте, что в трехмерном пространстве это понятие совпадает с обычным.

Выпуклым называется такое множество в n-мерном пространстве, которое вместе с любыми двумя точками содержит отрезок с концами в этих точках. Квадрат и круг являются выпуклыми фигурами на плоскости, пирамида, призма, конус, шар в пространстве — выпуклые тела. А кольцо, бублик, сфера выпуклыми не являются. Проверьте, что пересечение любого семейства выпуклых множеств — множество выпуклое. (Будет ли это верно для объединений?) Пересечение всех выпуклых тел, содержащих множество M, называется *выпуклой оболочкой* M.

Проверьте сами, что выпуклой оболочкой трех точек на плоскости является треугольник с вершинами в этих точках, а выпуклой оболочкой окружности — круг. Выпуклая оболочка конечного множества в n-мерном пространстве называется *многогранником*. У n-мерных многогранников есть 0-мерные грани (вершины), 1-мерные грани (ребра), 2-мерные, ..., $(n - 1)$-мерные грани. Выпуклая оболочка $(n + 1)$ точек в n-мерном пространстве, не лежащих ни в какой $(n - 1)$-мерной плоскости, называется *симплексом*. Например, симплексом является множество таких точек, что $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, x_1 + \ldots + x_n \le 1$ (докажите это). На плоскости симплекс — это треугольник, в обычном пространстве — треугольная пирамида. Еще один важный пример выпуклого многогранника — n-мерный куб: множество точек $(x_1, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют условиям $|x_1| \le 1, |x_2| \le 1, \ldots, |x_n| \le 1$. Попробуйте заглянуть в многомерное пространство и сосчитать, сколько вершин, ребер, 2-мерных граней и т.д. существует у 4-, 5-, 6- и т.д. мерных симплексов и кубов. Четырехмерный куб можно даже нарисовать — точнее, не сам куб, а двумерную проекцию его трехмерной проекции.

Если взять проволочный каркас обычного куба и посмотреть на него из точки, расположенной вне куба на прямой, проходящей через центры двух противоположных его граней, то мы увидим два квадрата с четырьмя дополнительными отрезками (рис. 1).

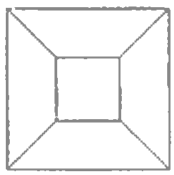


Рис. 1

Иллюстрация В.П.Бухарева

Аналогично проекция четырехмерного куба состоит из двух трехмерных кубов с дополнительными ребрами (рис.2).

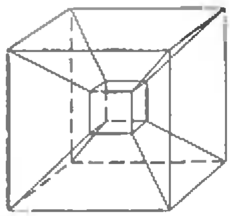


Рис. 2

Нарисуйте сами четырехмерный симплекс.

Еще один пример выпуклого множества — шар. Расстояние между точками $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ определяется так:

$$AB = \left((a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2\right)^{1/2}.$$

Расстояние удовлетворяет неравенству треугольника, причем равенство справедливо лишь тогда, когда точка C лежит на отрезке с концами A и B. Убедитесь в этом сами. Проверьте также, что шар радиусом R с центром в точке A, т.е. множество точек M таких, что $AM \le R$, выпуклый. Проверьте, что при параллельном переносе отрезок переходит в отрезок, расстояние между точками сохраняется и, следовательно, шар переходит в шар того же радиуса.

Зная расстояния, можно определить и угол между отрезкам и AB и AC (по теореме косинусов), объем и многое другое. В k-мерной плоскости n-мерного пространства определен ***k*-мерный объем**: одномерный объем — это длина отрезка, двумерный — это обычная площадь.

О многомерных пространствах и выпуклых множествах можно рассказывать очень долго, но сказанного достаточно для понимания следующих сюжетов. Приводимые в них факты удивительны; еще раз отмечу, что доказательства, как правило, чрезвычайно сложны.

Сюжет 1. Задача Борсука

Диаметром множества в n-мерном пространстве называется максимальное из расстояний между парами точек множества. Проверьте, что диаметр шара равен двум радиусам — странно, если бы это было не так. Диаметр треугольника равен его наибольшей стороне, диаметр четырехугольника — наибольшей стороне или диагонали.

Эта история началась в 30-е годы. Знаменитый польский математик Кароль Борсук в 1932 г. установил, что n-мерный шар диаметром 1 нельзя разбить на n выпуклых частей, диаметр каждой из которых меньше 1, и в то же время его можно разбить на $(n+1)$ выпуклых частей с малыми диаметрами — проверьте при $n = 2$. Эти и некоторые другие наблюдения позволили Борсуку сформулировать в 1933 г. такую гипотезу: выпуклое тело диаметром 1 в n-мерном пространстве можно разбить на $(n+1)$ выпуклых частей, диаметр каждой из которых меньше 1.

На плоскости гипотеза Борсука проверяется очень просто — еще в 1920 г. Пал доказал, что любую плоскую фигуру диаметром 1 можно поместить в правильный шестиугольник, расстояние между параллельными сторонами которого равно 1 (рис.3).

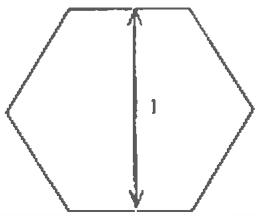


Рис. 3

Таким образом, для доказательства гипотезы Борсука при $n = 2$ достаточно разрезать такой шестиугольник на три выпуклые части с диаметрами, меньшими 1. Догадайтесь, как это сделать.

Понадобилась четверть века, чтобы доказать гипотезу Борсука в трехмерном пространстве. Практически одновременно Х.Эгглстон и Б.Грюнбаум построили многогранники в пространстве, которые обладают описанными свойствами шестиугольника на плоскости. А вот попытки построить такой многогранник в четырехмерном пространстве успехом не увенчались. Но из этого, разумеется, не следует, что гипотеза Борсука неверна. Скажем, швейцарец Г.Хадвигер в конце 40-х годов доказал гипотезу Борсука для так называемых гладких тел, т.е. таких, на границах которых нет углов. Например, шар в отличие от многогранника — тело гладкое.

Полагаю, что у некоторых исследователей возникали сомнения в справедливости гипотезы Борсука — возможно, что число $n + 1$ необходимо заменить на $n + 2$, в крайнем случае на $2n$.

Но в 1993 г. грянул гром. Джеф и Гил построили при $n > 2014$(!!) выпуклое n-мерное тело диаметром 1, для разбиения которого на части с диаметрами, меньшими 1, этих частей потребуется не менее, чем $1{,}2^{\sqrt{n}}$. Функция $1{,}2^{\sqrt{n}}$ растет с ростом n очень стремительно: например, для достаточно больших n оказывается $1{,}2^{\sqrt{n}} > n^{100}$. Так что предположения предыдущего абзаца столь же далеки от истины, как и гипотеза Борсука.

Сюжет 2. Задача Буземана — Петти

Имя средневекового монаха Бонавентуры Кавальери вошло в историю математики благодаря придуманному им «принципу неделимых». На современном языке в простейшем случае он звучит так: если две фигуры пересекаются с каждой из прямых, параллельных данной, по отрезкам равных длин, то эти фигуры имеют равные площади (рис.4).

Тот же принцип справедлив и в пространстве: если два тела пересекаются с каждой из плоскостей (прямых), параллельных данной плоскости (прямой) по фигурам (отрезкам), имеющим равные площади (длины), то эти тела имеют равные объемы. Справедлив и более общий принцип — в нем речь идет о телах в n-мерном пространстве и всех k-мерных плоскостях, параллельных данной (k — любое натуральное число, не превосходящее $n - 1$).

А если рассматривать не параллельные плоскости, а плоскости, проходящие через фиксированную точку? В 1956 г. Г.Буземан и А.Петти сформулировали такую задачу: пусть U_1 и U_2 — центрально симметричные выпуклые тела в n-мерном пространстве

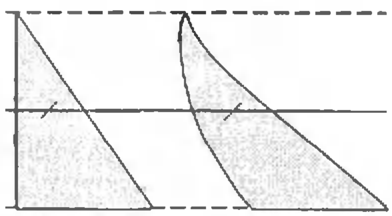


Рис. 4

с общим центром симметрии, причем для любой $(n-1)$-мерной плоскости π, проходящей через общий центр, $V_{n-1}(\pi \cap U_1) \le V_{n-1}(\pi \cap U_2)$, где V_{n-1} — $(n-1)$-мерный объем. Требовалось доказать, что $V_n(U_1) \le V_n(U_2)$. Задача эта оказалась очень трудной. Впрочем, при $n = 2$ все обстоит просто — убедитесь в этом сами. Г.Буземан в 1960 году доказал это предположение в случае, когда тело U_i $(i = 1, 2)$ — эллипсоид, т.е. при некотором выборе системы координат (я здесь не объясняю, что это значит — рассчитываю на обычную трехмерную интуицию) его граница имеет уравнение $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + \ldots + x_n^2/a_n^2 = 1$ при некоторых значениях $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

И это почти все, чего удалось достичь за 20 лет. И вот в 1976 г. английские математики Ларман и Роджерс произвели сенсацию: они доказали, что предположение Буземана — Петти в 12-мерном пространстве неверно!

После этого было доказано, что оно неверно уже в 7-мерном (!) пространстве. Наконец, в 1994 г. в одном номере международного журнала «Анналы математики» появились две статьи — Цанг Гайонга и Р.Гарднера. В одной из них доказано, что предположение Буземана — Петти справедливо в трехмерном пространстве, в другой — что оно неверно в четырехмерном. Я не знаю, случайно ли эти статьи встретились в одном журнале, но эта встреча замечательна: в определенном смысле задача Буземана — Петти оказалась полностью исследованной. Что дальше? Мы еще вернемся к этому вопросу.

Сюжет 3. Теорема Дворецкого

Если трехмерный куб пересечь плоскостью, проходящей через середину большой диагонали перпендикулярно к ней, то в сечении получится правильный шестиугольник (рис.5). А четырехмерный куб можно пересечь двумерной плоскостью так, чтобы получился правильный восьмиугольник. Интуитивно ясно, что восьмиугольник — фигура более «круглая», чем шестиугольник. В математике такие интуитивные соображения обычно приводят к введению числовой характеристики, в данном случае — меры близости тела к кругу или шару.

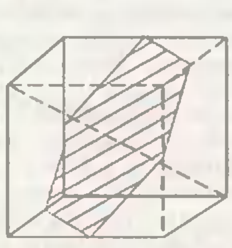


Рис. 5

Пусть U — центрально симметричное выпуклое тело в n-мерном пространстве. Обозначим через r и R радиусы n-мерных шаров — соответственно самого большого, лежащего в U, и самого маленького, содержащего U. При этом рассматриваются только шары, имеющие общий центр с U, хотя это и не принципиально.

За меру близости U к шару (сферичность U) можно принять число $B(U) = 1 - r/R$. Очевидно, что $0 \le B(U) \le 1$, причем $B(U) = 0$ только для шаров. Чем больше $B(U)$, тем ближе тело к какой-нибудь плоскости, наконец при $B(U) = 1$ тело как бы смято в лепешку — лежит в плоскости.

В 1960 г. А.Дворецкий фантастически усилил наблюдения, связанные с сечениями куба. Он доказал, что у центрально симметричных выпуклых тел достаточно высокой размерности обязательно найдется k-мерное сечение, проходящее через центр тела, которое сколь угодно близко к k-мерному шару.

На математическом языке эта теорема (ее называют теоремой Дворецкого о почти сферических сечениях) звучит так: для любых $\varepsilon \in (0,1)$ и натурального k существует такое число N, что у любого n-мерного центрально симметричного выпуклого тела при $n \ge N$ существует k-мерное сечение, проходящее через центр тела, сферичность которого меньше ε.

Как обычно, совсем маломерный случай очевиден — при $k = 1$ можно принять $N = 1$. Уже случай $k = 2$ нетривиален.

Теорема Дворецкого сыграла очень важную роль при изучении бесконечномерных пространств — бывают и такие. Здесь я не буду о них рассказывать.

Сюжет 4. Теорема Вершика

В начале 1994 г. петербургский математик Анатолий Моисеевич Вершик опубликовал удивительную статью. Я сформулирую одну из теорем Вершика. Для этого надо ввести понятие решетки в квадрате.

Рассмотрим на плоскости квадрат $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ и пересечем его прямыми $x = k/n$, $y = k/n$ $(k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n)$, где n любое натуральное число. В результате получим квадрат, разбитый на мелкие квадратики (рис.6).

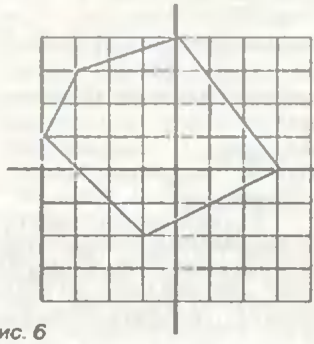


Рис. 6

Построенные прямые образуют решетку, а точки их пересечения называют узлами решетки.

Рассмотрим все выпуклые многоугольники, вершины которых расположены в узлах решетки (см. рис.6). Очевидно, что при любом n их число конечное — обозначим его через $A(n)$. Один из вопросов, на которые ответил А.М.Вершик, звучит примерно так: как ведут себя эти многоугольники с ростом n? Ответ на столь неопределенный вопрос оказался поразительным: оказывается, что при больших n большинство этих многоугольников близко к выпуклой фигуре, ограниченной кривой $\sqrt{1-|x|} + \sqrt{1-|y|} = 1$. Эта кривая склеена из кусков четырех парабол.

Более точно. Пусть ε — произвольное положительное число (иногда, чтобы подчеркнуть то, что интересны малые значения ε, говорят о сколь угодно малом ε). Растянем фигуру, ограниченную кривой $\sqrt{1-|x|} + \sqrt{1-|y|} = 1$ в $(1+\varepsilon)$ раз и сожмем

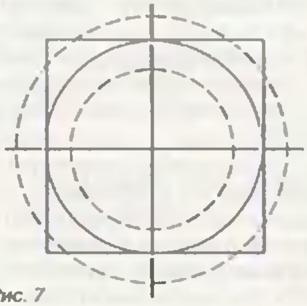


Рис. 7

ее в $(1 - \varepsilon)$ раз. Получаем картину, изображенную на рисунке 7.

Пусть $A'(n,\varepsilon)$ — число выпуклых многоугольников с вершинами в узлах решетки, содержащихся в растянутой фигуре и содержащих фигуру сжатую. Тогда при любом ε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A'(n,\varepsilon)}{A(n)}=1.$$

Достаточно ясно, что двух кривых с таким свойством быть не может — поразительно, что такая кривая существует!

Сюжет 5. Теорема Произволова

Имя Вячеслава Викторовича Произволова хорошо известно читателям «Кванта» — редкий номер журнала обходится без его очень остроумных задач.

Несколько лет назад Произволов решил одну задачу, которая для меня явилась сюрпризом.

Пусть $f(x,y)$ — функция, определенная на всей плоскости; геометрически можно считать, что над плоскостью xOy (для простоты считаем, что $f \ge 0$) разместили пленку, расстояние от каждой точки которой до плоскости xOy совпадает со значением $f(x,y)$.

Возьмем на плоскости произвольный квадрат со стороной 1 и рассмотрим тело, выделенное на рисунке 8.

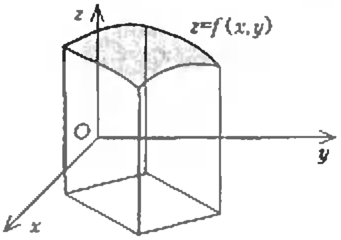


Рис. 8

В.В.Произволов доказал, что если объемы всех таких тел равны, то функция $f(x,y)$ постоянная, т.е. пленка натянута горизонтально. Самое поразительное то, что если квадраты заменить единичными кругами, то этот вывод неверен — Произволов приводит соответствующий контрпример в своей статье.

Сюжет 6. Что дальше?

Математика (как и любая другая наука) дарит удивительные сюрпризы, что я и пытался проиллюстрировать. Наряду с этим математика обладает поразительной способностью к саморазвитию — решение любой задачи приводит к постановке новых. Решение задачи становится как бы семечком, брошенным в землю. Из него может вырасти небольшой кустик, а может и огромное дерево. В этом и состоит процесс познания в математике. Покажу, какие задачи, видимо, имеют смысл в развитие предыдущих сюжетов — разумеется, понятые без каких-либо специальных знаний.

В задаче Борсука, разумеется, интересно, каков ответ при $n = 4$. Далее, многогранники в некотором смысле — антипод гладких тел. Интересно, на сколько частей с диаметрами, меньшими 1, можно разбить любой выпуклый n-мерный многогранник диаметром 1, число вершин которого не превосходит N_0. Или число вершин не превосходит N_0, а число ребер — N_1, и т.д. В частности, разумно попытаться выделить достаточно широкие классы многогранников, которые можно разбить на не более, чем $2n$ (или n^2) частей малого диаметра.

В задаче Буземана — Петти интересно попытаться выделить достаточно широкий класс выпуклых тел, для которых гипотеза верна. Это так для эллипсоидов, но их в некотором смысле очень мало: эллипсоид в n-мерном пространстве можно охарактеризовать $n(n+1)/2$ параметрами, в то время как произвольное выпуклое тело никаким конечным набором параметров охарактеризовать нельзя. Интересно будет, если эти классы множеств станут в некотором смысле сужаться с ростом n, т.е. на них надо будет накладывать все большее число ограничений — при $n = 2, 3$ эти классы совпадают со всеми выпуклыми телами.

В теореме Дворецкого можно вести разговор не об одном k-мерном сечении, а о целом их пакете — в множестве k-мерных плоскостей n-мерного пространства можно ввести расстояние. И тогда разумно спросить, верно ли, что при достаточно больших n для произвольного тела k-мерные плоскости, дающие почти сферические сечения, заметают шар достаточно большого радиуса? От таких вопросов дух захватывает.

В связи с теоремами Вершика, конечно, важно понять, справедлив ли аналог приведенной теоремы в пространстве. Какая поверхность может претендовать на роль притягивающей?

Наконец, видимо, неизвестно, какое именно отличие в свойствах квадрата и круга приводит к описанным Произволовым свойствам. Как обстоит дело для правильных пяти- или шестиугольников со стороной 1? А если взять все прямоугольники с площадью 1, но фиксировать направления сторон?

Сюжет 7. Заключительные замечания

Всем знакомы слова Хаос и Порядок. Между ними четкой грани нет — то, что в одной ситуации можно считать Хаосом, в другой является Порядком. Важно, что при любом понимании этих слов мир устроен так, что часто из Порядка рождается Хаос, а из Хаоса — Порядок. Скажем, течет в трубе жидкость, течет хорошо, вполне порядочно, но при некоторых условиях начинает безобразничать: возникают хаотичные вихри, затрудняющие течение. Это явление называется красивым словом турбулентность. Именно турбулентность в атмосфере не позволяет сколь-нибудь надежно предсказывать погоду. Противоположным примером — возникновения Порядка из Хаоса — может служить центральная предельная теорема теории вероятностей. Грубо говоря, она утверждает, что сумма большого числа воздействий, каждое из которых не очень велико (Хаос), ведет себя в некотором смысле весьма упорядоченно. Более подробно вы узнаете об этом в институте или в университете. Закономерности возникновения Порядка из Хаоса изучает специальная наука — синергетика.

Когда я думал над предыдущими сюжетами, то понял, что многие сюрпризы обязаны своей сюрпризностью как раз тем, что там, где мы ожидаем Хаос, прячется Порядок — таковы теоремы Вершика, и наоборот — как в задаче Буземана — Петти.

В последние годы большой интерес вызывают множества, которые устроены невероятно сложно — так называемые фракталы. Выпуклый мир на этом фоне кажется очень уютным, может даже примитивным. Я попытался продемонстрировать, насколько ошибочно такое мнение — этот мир чрезвычайно богат и разнообразен. Если читатель смог это почувствовать, то я своей цели достиг.

Согревающие формулы

Д.ФОМИН

ЗАДАЧУ, которую мы будем обсуждать, предложил мне одноклассник в 1980 году. Вот она:

Есть 2 одинаковых стакана, наполненных жидкостью, один — горячей, другой — холодной, например, стакан ледяного чая и стакан кипятку. Вы хотите попить горячего чая. Чай можно нагревать, используя имеющийся кипяток. Насколько можно нагреть чай?

Поверите ли вы мне, если я скажу, что весь стакан чая можно нагреть — во всяком случае, теоретически — до температуры, сколь угодно близкой к температуре кипятка? Думаю, что нет. Никто мне не верит — вначале. Ну что ж, тем больше будет ваше удивление к концу моего рассказа.

Удобно предположить, что температура холодной жидкости (чая) — 0 °С, а температура кипятка — 1 °С, ведь масштаб — это вопрос соглашения. Мы не будем смешивать жидкости (не хочется пить разбавленный чай).

Теплопередача будет происходить, если привести в контакт какие-то количества двух жидкостей.

Способ 1. Первые и самый очевидный способ нагреть чай — это привести два стакана в контакт. После установления теплового равновесия оба стакана будут иметь одинаковую температуру: 1/2 °С.

Может показаться, что это максимальная температура, до которой можно нагреть чай с помощью теплопередачи. Однако это не так.

Способ 2. Следующая идея — разделить горячую воду на несколько частей. Для начала разделим воду на две половины, и поочередно приведем их в контакт с чаем. После первой теплопередачи установившаяся температура чая и первой половины воды будет равна

$$\frac{1\cdot 0\,^\circ\mathrm{C}+\frac{1}{2}\cdot 1\,^\circ\mathrm{C}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\,^\circ\mathrm{C}.$$

Fomin D. Superheated by equations. — Quantum. — 1993. — Vol.3, N6. — P.4/Пер. с англ. А.Буфетова

А после теплообмена между этим подогретым чаем и второй половиной воды температура чая будет равна

$$\frac{1\cdot\frac{1}{3}\,^\circ\mathrm{C}+\frac{1}{2}\cdot 1\,^\circ\mathrm{C}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5}{9}\,^\circ\mathrm{C}=0{,}555\ldots\,^\circ\mathrm{C}.$$

Температура чая выше, чем 1/2 °С! Сделаем следующий шаг.

Разделим воду на n равных порций и поочередно приведем каждую в контакт с чаем, т.е. как бы обольем чай струей горячей воды. Чтобы найти окончательную температуру чая, обозначим его температуру после взаимодействия с k-й «капелькой» воды через t_k. Очевидно, $t_0 = 0$. Кроме того,

$$t_{k+1}=\frac{1}{n+1}(nt_k+1\cdot 1)$$

или, что то же самое,

$$1-t_{k+1}=1-\frac{nt_k+1}{n+1}=\frac{n}{n+1}(1-t_k).$$

Отлично! Теперь легко видеть, что

$$1-t_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n,\ \text{и}\ t_n=1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Как известно, последовательность $(1+1/n)^n\ a_n$ = возрастает и стремится к числу $e = 2{,}71828\ldots$ при n, стремящемся к бесконечности. Поэтому последовательность $t_n = 1 - 1/a_n$

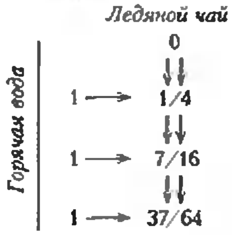


Рис. 1

тоже возрастает и стремится к $1 - 1/e = 0{,}632$. В частности, это значит, что температура воды может быть сделана сколь угодно близкой к $1/e \approx 0{,}388$ — т.е. может быть сделана значительно ниже, чем температура чая![1]

[1] *В этих и последующих рассуждениях мы пренебрегаем потерями тепла.*

Этот способ теплопередачи при $n = 3$ графически изображен на рисунке 1. Каждая теплопередача изображена парой стрелочек, идущих от исходных температур чая и соответствующей капельки воды (ее температура всегда 1 °С) к их равновесной температуре.

Способ 3. Можно делать наоборот: обливать воду струей чая, т.е. приводить воду в контакт поочередно с «капельками» чая. Как и раньше, через t_k обозначим температуру воды после взаимодействия с k-й капелькой чая. Тогда, как можно увидеть на рисунке 2,

$$t_{k+1}=\frac{1}{n+1}(nt_k+1\cdot 0)=\frac{n}{n+1}t_k.$$

Итак, $t_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\to 1/e$, когда n стремится к бесконечности, и мы получаем абсолютно такой же результат, как и при втором способе: темпе-

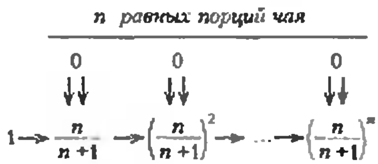


Рис. 2

ратура воды становится $(1/e)$ °С, а температура чая $(1-1/e)$ °С. Итак, третий способ не дал нам ничего нового. Но не нужно отчаиваться!

Способ 4. Мы изучили взаимодействие целого стакана чая со струей воды и наоборот. Естественно попробовать изучить взаимодействие двух струй: одной — горячей, другой — холодной. Что это значит? Предположим, что мы разделили обе жидкости на n одинаковых порций. Теперь приводим первую порцию воды в контакт со всеми порциями чая поочередно; потом делаем то же самое со второй порцией и так далее. Так шаг за шагом порции чая будут получать тепло от порций воды.

Это можно описать так: капельки водной струи плывут вдоль по струе чая и обмениваются с ней теплом.

Этот способ двух струй проиллюстрирован на рисунке 3. Строчки описывают путь капелек воды, а столбцы — путь капелек чая. Так как массы всех порций двух жидкостей

i \ j	1	2	3	…
	0	0	0	
	↓↓	↓↓	↓↓	
1	1 → 1/2 →	1/4 →	1/8 →	…
	↓↓	↓↓	↓↓	
2	1 → 3/4 →	1/2 →	5/16 →	…
	↓↓	↓↓	↓↓	
3	1 → 7/8 →	11/16 →	1/2 →	…
⋮	⋮	⋮	⋮	

Рис. 3

равны, температура любых двух порций после их взаимодействия будет средним арифметическим их температур до взаимодействия. Отсюда видно, что температура t_{ij} i-порции воды и j-й порции чая сразу после их взаимодействия не зависит от общего числа порций. Формально говоря, числа t_{ij} при $i \ge 1$, $j \ge 1$ находятся из рекуррентного соотношения:

$$t_{ij} = \left(t_{i,j-1} + t_{i-1,j}\right)/2, \qquad (1)$$

а «начальные условия» для температур до каких-либо взаимодействий будут $t_{0j} = 0$, $t_{0i} = 1$. Даже беглого взгляда на рисунок 3 достаточно, чтобы сделать несколько полезных наблюдений. Например, мы видим, что $t_{nn} = 1/2$ при всех $n \ge 1$. На самом деле это частный случай более общего соотношения, а именно:

$$t_{ij} + t_{ji} = 1. \qquad (2)$$

Чтобы доказать это равенство для всех $i \ge 0$, $j \ge 0$ (кроме $(i,j) = (0;0)$), положим $s_{ij} = t_{ij} + t_{ji}$. Тогда, очевидно, числа s_{ij} удовлетворяют аналогичному (1) рекуррентному уравнению, т.е.

$$s_{ij} = \left(s_{i-1,j} + s_{i,j-1}\right)/2,$$

однако у них другие начальные условия, а именно $s_{0j} = s_{i0} = 1$. Поэтому, очевидно, $s_{ij} = 1$ для всех i, j.

Второе наблюдение заключается в том, что числа t_{ij}, взятые вдоль любой диагонали, где $i - j$ постоянно, т.е. числа $t_{n,n-k}$ при любом фиксированном k образуют монотонную последовательность. Эта последовательность — убывающая при $k > 0$, возрастающая при $k < 0$ и постоянная при $k = 0$ ($t_{nn} = 1/2$). Доказательство аналогично предыдущему. Пусть $d_{ij} = t_{i+1,j+1} - t_{ij}$ (разность между двумя последовательными числами на диагонали). Конечно, d_{ij} удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению; кроме того,

$$d_{0j} = t_{1,j+1} - 0 > 0,\; d_{nn} = 1/2 - 1/2 = 0,$$

$$d_{i1} = t_{i+1,2} - 1 < 0.$$

Отсюда следует, что $d_{ij} > 0$ выше главной диагонали (т.е. при $i < j$) и $d_{ij} < 0$ ниже главной диагонали, и это доказывает, что последовательность $t_{n,n-k}$ возрастает при росте n при любом фиксированном $k < 0$ и убывает при $k < 0$. Теперь мы можем оценить среднюю температуру T_n чая после всех n^2 теплопередач. Для любого k пусть $S_k = t_{k1} + t_{k2} + \ldots + t_{kk}$. В частности, $S_1 = t_{11}$. Пусть $S_0 = 0$ (разумный выбор для t_{00}). Заметим, что $S_n = nT_n$. Теперь напишем удвоенные уравнения (1) для $i = n$ и всех $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} 2t_{k1} &= t_{k-1,1} + 1, \\ 2t_{k2} &= t_{k-1,2} + t_{k1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2t_{k,k-1} &= t_{k-1,k-1} + t_{k,k-2}, \\ 2t_{kk} &= 1 \end{aligned}$$

и сложим их все:

$$2S_k = S_{k-1} + 2 + S_k - t_{k,k-1} - t_{k,k},$$

или

$$S_k = S_{k-1} + \left(3/2 - t_{k,k-1}\right)$$

(пусть читатель проверит это для $k = 1$ и $k = 2$). Теперь сложим все эти уравнения для $k = 1, 2, \ldots, n$. После сокращения соответствующих членов в левой и правой части получаем:

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 + \left(3/2 - t_{n,n-1}\right) + \\ &+ \left(3/2 - t_{n-1,n-2}\right) + \ldots + \left(3/2 - t_{21}\right) + \\ &+ \left(3/2 - t_{10}\right) = \\ &= \left(3/2 - t_{n,n-1}\right) + \left(3/2 - t_{n-1,n-2}\right) + \ldots \\ &\ldots + \left(3/2 - t_{21}\right) + \left(3/2 - t_{10}\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n}\Big(\left(3/2 - t_{10}\right) + \\ &+ \left(3/2 - t_{21}\right) + \ldots + \left(3/2 - t_{n,n-1}\right)\Big) = \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n}\left(t_{10} + t_{21} + \ldots + t_{n,n-1}\right). \quad (3) \end{aligned}$$

Покажем, что $t_{n,n-1}$ стремится к $1/2$ при $n \to \infty$. Это убывающая последовательность; она ограничена ($0 < t_{n,n-1} < 1$), поэтому имеет предел a_1. Аналогично, при всяком k последовательность $t_{n,n-k}$ имеет предел a_k. Переходя к пределу в равенстве

$$t_{n,n-k} = \left(t_{n-1,n-k} + t_{n,n-k-1}\right)/2,$$

получаем

$$a_k = \frac{1}{2}\left(a_{k-1} + a_{k+1}\right),$$

или

$$a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$$

при всех k, т.е. a_k — арифметическая прогрессия, и так как она ограничена ($0 \le a_k \le 1$), она постоянна, т.е. $a_k = a_0 = 1/2$ при всех k и, в частности, $t_{n,n-1} \to a_1 = 1/2$. Теперь применим следующую лемму.

Лемма Чезаро. *Если последовательность x_n имеет предел и*

$$S_n = x_1 + \ldots + x_n,$$

то S_n/n имеет тот же предел.

(Идея доказательства состоит в том, что начиная с достаточно большого n все числа x_n примерно равны своему пределу со сколь угодно высокой точностью. А значит, это же верно и для их среднего арифметического. Провести строгое доказательство мы предлагаем в качестве упражнения читателю, знакомому с теорией пределов.)

По этой лемме второй член в правой части уравнения (3) имеет предел, равный пределу $t_{n,n-1}$, т.е. $1/2$. И мы окончательно получаем $T_n \to 3/2 - 1/2 = 1$. Невероятно! Наши вычисления привели нас к удивительному результату: мы можем нагреть наш холодный чай почти до температуры кипятка, а сам кипяток при этом охлаждается почти до нуля.

Этот парадокс показывает нам, что здравый смысл иногда нас обманывает и на вид простые вещи бывают сложнее, чем кажутся.

Дополнительные замечания.

Диаграмма на рисунке 3 имеет два очень интересных свойства. Вы можете попробовать доказать их сами.

1. Существует явная формула для t_{ij}:

$$t_{ij} = \frac{1}{2^{i+j-1}} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i+j-1}{k},$$

где $\binom{n}{k}$ — биномиальный коэффи-

Иллюстрация Д.Крымова


Lipton
Кипяток
Quality №1
Lipton
YELLOW LABEL
TEA
Quality №1
Крылов

циент:

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Это явное выражение позволяет дать другое доказательство того, что $a_1 = 1/2$, основанное на довольно громоздких вычислениях, использующих так называемую формулу Стирлинга:

$$n! \approx (n/e)^n \sqrt{2\pi n}.$$

С помощью этой формулы можно также оценить скорость приближения T_n к 1. Мы приведем только ответ:

$$T_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

2. Существует интересная вероятностная интерпретация чисел t_{ij}. Представим себе человека, случайно двигающегося по нашему рисунку 3, делая шаги либо вверх, либо влево (против стрелочек) с равной вероятностью. Тогда t_{ij} есть вероятность того, что этот человек, начав в точке с координатами (i, j), выйдет из рисунка через его левый, а не верхний край.

Другое замечательное свойство возникает, если делить жидкости на неравные порции. Допустим, что горячая вода поделена на порции с массами $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а холодный чай — на порции с массами $q_1, q_2, \ldots, q_m$, и мы нагревали чай 4-м способом. Мы, конечно, можем рассмотреть аналогичную таблицу t_{ij}, где

$$t_{ij} = \frac{1}{p_i + q_j}\left(p_i t_{i,j-1} + q_j t_{i-1,j}\right).$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & & p_1 = 1/3 & p_2 = 2/3 \\
\hline
 & & 0 & 0 \\
 & & \downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow \\
q_1 = 3/4 & 1 \to & 9/13 \to & 81/221 \\
 & & \downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow \\
q_2 = 1/4 & 1 \to & 75/91 \to & 8361/17017
\end{array}$$

Рис. 4

Эта формула для равновесной температуры порций p_i и q_j после их теплового взаимодействия следует из закона сохранения энергии (в нашей конкретной ситуации энергия равна произведению массы на температуру, с неким коэффициентом, зависящим только от свойств воды). Пример приведен на рисунке 4. На самом деле, можно забыть про физический смысл и изучить ситуацию с чисто математической точки зрения. Пусть $H(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_m)$ — полная энергия чая по окончании процесса; при соответствующем выборе единиц измерения H будет просто равняться средней температуре чая. К примеру, на рисунке 4

$$H(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_m) = \frac{75}{91}\cdot\frac{1}{3} + \frac{8361}{17017}\cdot\frac{2}{3} \approx 0{,}602.$$

Можно показать (хоть это и не очевидно), что эта функция полусимметрична — т.е. ее значение не зависит ни от порядка p_i, ни от порядка q_j!

Иными словами, *конечный результат теплового обмена одинаков независимо от того, каков порядок порций в каждой струе!*

И наконец, несколько упражнений.

1. Докажите, что

а) $H\left(p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in}; q_{j1}, q_{j2}, \ldots, q_{jm}\right) = H(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_m)$,

где $p_{i1}, \ldots, p_{in}$ — любая перестановка (p_i), а $q_{j1}, \ldots, q_{jm}$ — любая перестановка (q_j);

б) $H(q_1, \ldots, q_m; p_1, \ldots, p_n) = H(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_m)$.

2. Докажите независимость конечного результата от порядка порций с помощью физики, например, используя понятие энтропии.

А атомные ядра тоже колеблются!

Ю.БРУК, М.ЗЕЛЬНИКОВ, А.СТАСЕНКО

(Начало см. на с. 3)

называют ядерными. А более аккуратный анализ показывает, что для интересующих нас тяжелых ядер реализуется ситуация, когда $p_N > p_e$.

Как и в обычной жидкости, коллективный характер движения частиц в ядерной несжимаемой жидкости приводит к колебаниям формы капель (объем ядра при этом не меняется). В квантовой механике колебательные движения квантуются. Изменение энергии при переходе ядра из одного состояния в другое равно $\Delta E = s\hbar\omega$, где $\omega = 2\pi\nu$, а s — целые числа. Таким образом, мы можем оценить и возможные значения энергии колебаний атомных ядер. (Простейшими типами таких колебаний являются квадрупольные и октупольные. При квадрупольных колебаниях возбужденная ядерная капля принимает форму эллипсоида, при октупольных — форму груши.)

Подведем итоги

Общим для колебаний ядер и капель тумана является то, что квадрат частоты колебаний пропорционален отношению двух характерных величин — поверхностного натяжения и массы капельки. Мы убедились в том, что колебания капель совершенно разных несжимаемых жидкостей можно описывать так называемой капельной моделью. Нам кажется очень важным, что с помощью сравнительно простых рассуждений и аналогий можно проникнуть в глубь атомного ядра и даже получить разумные качественные и количественные оценки для характерных частот и энергий. И все же мы должны еще раз напомнить читателю о том, что мы исходили из определенных модельных представлений. В ядерной физике существует довольно много моделей, но пока нет единой и полностью последовательной теории. Поэтому, если вам придется встретиться с другими моделями, — будьте внимательны. Не торопитесь искать противоречия в разных подходах, но и не избегайте их. Решающей проверкой должен быть, конечно, эксперимент. Но увы, ни в одну из физических моделей никак не удается включить ту каплю сочувствия, о которой так мечтала Татьяна Ларина.

Космология XX века в лицах

Г.ГОРЕЛИК

Яков Борисович Зельдович (1914—1987) и Андрей Дмитриевич Сахаров (1921—1989)

В 60-е годы космология стала новой наукой. Астрономическое уточнение межгалактической шкалы расстояний устранило главный дефект предшествующей релятивистской космологии — хаббловский возраст Вселенной перестал противоречить данным космогонии, прежде всего ядерной геохронологии, согласно которой возраст Земли составлял несколько миллиардов лет.

К этому «исправленному» изданию релятивистской космологии подоспели два эпохальных открытия. Радиотелескопы обнаружили фоновое — вселенское — радиоизлучение, со всех сторон одинаково греющее Землю так, как если бы весь Космос был нагрет до 3 К. А оптические телескопы обнаружили квазары — звездоподобные объекты, излучающие с галактической интенсивностью и находящиеся на космологических расстояниях, сравнимых с расстоянием до горизонта Вселенной, откуда свет за конечное время расширения Вселенной уже не дошел бы до наблюдателя.

Нетрудно понять, насколько увеличилась «жилплощадь» космологии, если учесть, что в предыдущие три десятилетия единственной экспериментальной точкой ее опоры было хаббловское разбегание галактик. Этой точки опоры было достаточно, чтобы перевернуть мир космологических умозрений, но слишком мало, чтобы устойчиво строить здание релятивистской астрофизики и физической космологии.

Именно в ту пору в космологию пришли два зрелых физика — академики и трижды Герои Соцтруда. Первая космологическая работа Я.Б.Зельдовича датирована 1961 годом, первая работа А.Д.Сахарова — 1965 годом. У этого их биографического поворота были свои социальные, психологические и научные причины. Академические звания и звезды Героев оба получили за вклады в советский атомный проект. Зельдович вошел в этот проект еще до его государственного развертывания и сыграл ключевую роль в создании

Я.Б.Зельдович

атомной бомбы. Сахаров попал в проект накануне испытания атомной бомбы и сыграл ключевую роль в создании термоядерной. По воле истории оба физика-теоретика в самом творческом возрасте должны были жить в самом секретном городе страны и заниматься самым секретным и самым разрушительным оружием. Переход от всего этого к совершенно открытой и абсолютно мирной работе с бесконечной звездной Вселенной перед глазами, каким бы прыжком не казался, был довольно естественным в силу совокупности обстоятельств.

Физико-технические задачи ядерно-оружейного проекта после решающего успеха 1955 года, когда была испытана советская супербомба, все больше эволюционировали в сторону техники. Фундаментальная физика — физика элементарных частиц — все дальше уходила от физики ядерного взрыва в глубь микромира. К этому добавлялась политическая оттепель, затронувшая и ядерное противостояние сверхдержав. Необходимость сверхусилий по созданию все более мощной взрывчатки уже не казалась столь очевидной и безусловной, как в 40-е годы. Впрочем, подобные общественно-политические факторы имеют разный вес для разных физиков. Гораздо универсальней действовало истощение физического «задачника» Министерства среднего машиностроения, руководящего спецпроблемой.

В 40-е годы у Энрико Ферми были основания сказать по поводу чудовищно-разрушительного оружия: «superb physics» (превосходная физика). Сахаров о еще более адском оружии сказал: «рай для теоретиков». И для их коллег, привыкших к реалиям ядерного века, это была не столько кощунственная, сколько точная констатация. Ведь это была возможность воспроизвести и «подержать в руках» звездное вещество!

Однако Минсредмаш не очень-то интересовался миром звезд, и его военно-технические задачи становились все скучнее и рутиннее для физиков-теоретиков, для тех из них, кто не превратился в инженерно-технических работников и сохранил свободолюбивый исследовательский инстинкт. Этот инстинкт побуждал пренебречь привилегиями Минсредмаша (которые, впрочем, диалектически соединялись с тяготами секретности) и постараться вернуться в открытую науку. А в этой науке областью, наиболее близкой к физическому раю, была релятивистская астрофизика и космология. Для тех, кто привык иметь дело с миллионами градусов, составлять уравнения для таких состояний вещества и проверять их на полигонах, космология не была столь уж неземной областью.

В начале 60-х годов, когда Зельдович и Сахаров вернулись к чистой физике, стала осознаваться мысль,

Окончание. Начало см. в № 2, 3.

что ответы на самые фундаментальные вопросы требуют соединить микрофизику, или физику элементарных частиц, и мегафизику, т.е. космологию. Именно сюда, на стык двух филологически не стыкующихся областей, обратился мысленный взор «отцов» советских супербомб.

Научные наследия Зельдовича и Сахарова сильно различаются, как различаются и сами эти два замечательных физика. О Зельдовиче один его западный коллега сказал, что, познакомившись с его разнообразными и многочисленными работами, он заподозрил в его фамилии коллективный псевдоним, подобный Бурбаки в математике. В библиографии работ Зельдовича раздел «Астрофизика и космология» содержит около 200 названий, а из его соавторов можно было бы составить небольшой институт. У Сахарова космологических работ раз в десять меньше, нет и соавторов. В этом отражалось и различие их интересов. Зельдович занимался всей огромной областью астрофизической космологии с ее обилием наблюдательного материала, простором для приложения разнообразных методов физики и математики. Сахарова более занимала космогоническая космология.

Я.Б.Зельдович помимо специальных статей писал обзоры, популярные статьи и книги, в которых сам рассказывал о своих астрокосмологических идеях. У А.Д.Сахарова таких рассказов практически нет. Поэтому поясним, быть может, наиболее фундаментальную и успешную его космологическую идею.

Почти сразу после открытия того, что наша Вселенная расширяется, физики-теоретики, склонные к целостному взгляду на мир, пришли в глубокое недоумение. Им было ясно, что расширение Вселенной — это не просто некая астрономическая закономерность, а фундаментальный факт мироздания. Им было ясно, что космологическая теория должна опираться на физику. Но формально глядя на физический закон — уравнение Эйнштейна, из которого Фридман получил нестатическую космологию, было еще яснее, что само уравнение в равной мере описывает и расширение, и сжатие, и более сложные движения Вселенной. Иными словами, уравнение Эйнштейна симметрично по времени, или T-симметрично, а реально наблюдаемое (одно-единственное) поведение Вселенной явно не T-симметрично.

Кто же или что же отвечает за отбор из всех возможных космологических сценариев только одного? Не лежит ли в основе космологии такая физика, объединяющая и теорию относительности, и квантовую теорию, что основной закон этой физики тоже T-несимметричен?

Наиболее отчетливо эти соображения высказал еще в тридцатые годы М.П.Бронштейн, и он же впервые обнаружил, что эйнштейновский закон гравитации, управляющий расширением Вселенной, применим лишь

А.Д.Сахаров

ограниченно. Раз Вселенная расширяется, значит, вчера ее галактики были ближе друг к другу, чем сегодня, а позавчера — еще ближе. Если бы эйнштейновское уравнение было везде и всегда правильно, то в некий момент плотность вещества во Вселенной была бы бесконечно велика. Однако в физике бесконечность обычно говорит о каком-то неблагополучии. И в 1935 году Бронштейн обнаружил, что эйнштейновский закон гравитации неабсолютен, и в ситуациях, когда на сцену выходит Его Малейшество Квант, закон Эйнштейна надо исправлять. Происходит это, например, когда плотность вещества больше некоторой величины, составленной из констант c, G и $\hbar$, — невообразимо большой и называемой планковской плотностью. Все это означает, что ключ к разгадке вселенского расширения надо искать в миллиарднолетнем прошлом Вселенной, или, как иногда выражаются, в ее первых мгновениях. И несколько десятилетий этот ключ таился в кромешной космологической тьме.

Загадка, однако, была заперта двумя ключами, и второй замок долгое время был незаметен. Хотя свет из этой замочной скважины проник в физику уже в начале тридцатых годов под именем «позитрон». Под именем ошибочным, скажем прямо — вводящим в заблуждение. Подобрать имя для новой частицы надо было попросить теоретиков, тем более что один из них предсказал эту частицу до ее экспериментального открытия. Они назвали бы ее просто антиэлектроном — это длиннее, но зато гораздо понятнее. Со всеми другими подобными частицами именно так и поступили. К шестидесятым годам античастиц наоткрывали уже достаточно для того, чтобы из них творить антимиры, писать о них стихи и фантастические романы, а главное — чтобы задать вопрос: если у любой частицы имеется свой антипод, симметрично противоположный двойник, то почему эти антиэлектроны, антипротоны, антинейтроны... встречаются так редко, а сделанные из них антизвезды и антигалактики глазу астрофизиков по сию пору не встречались? Неужели наш мир столь несимметричен?

Слово «симметрия» произнесено, и поскольку живет оно не только в физике, нетрудно понять, что симметрии бывают двух типов. Например, возьмем в руки колесо. Относительно оси колесо можно повернуть на любой угол, и в результате его положение не отличишь от исходного. Если же осью вращения сделать «спицу» колеса, то для совпадения с исходной конфигурацией надо совершить поворот ровно на 180 градусов, не менее. Первая симметрия называется непрерывной, а вторая — дискретной.

В физике действуют симметрии, не сводящиеся к пространственным, а в квантовой физике особую роль играют именно дискретные симметрии. Для физика созвучны слова «атомизм», «квантовость», «дискретность». А после того как выяснилось, что квантовая физика позволяет рождать частицы сразу, целиком, на авансцену вышли три дискретные симметрии.

С одной из этих симметрий мы уже познакомились, правда без всякой квантовости: T-симметрия поворачивает время вспять, заменяя везде t на $-t$ и, значит, заменяя все скорости на противоположно направленные. P-симметрия, наиболее геометрическая, превращает правую руку в левую, родинку с левой щеки переносит на правую, вращение волчка меняет на противоположное — короче, делает все, что делает с нашим миром любое зеркало. И наконец, самая непонятная — C-симметрия — любую элементарную частицу заменяет на ее античастицу.

Каждая из операций C, P, T похожа на взмах волшебной палочки. И в общем-то ниоткуда не следует, что после такого взмаха в физическом мире ничего не изменится. Из теории относительности удалось извлечь только то, что взмах сразу тремя палочками ничего в физике не меняет — это называется CPT-симметрией. А по отдельности?

Несколько десятилетий физики были уверены, что фундаментальные законы симметричны для любой из C, P, T волшебных палочек. Жить в таком мире физикам, конечно, было бы проще, но...

Представьте себе, что у человека правая и левая руки совершенно одинаковы. Делать перчатки таким людям, конечно, в два раза проще, но можно ли понять, что такое человек, игнорируя различие правой и левой рук (и геометрическое, и динамическое), различие правого и левого полушарий его мозга (образного и логического)? Простота бывает признаком гениального, но бывает и хуже воровства. Чрезмерное упрощение мира крадет у него красоту.

Уже в 30-е годы наиболее проницательные из теоретиков заподозрили нечто неладное в сочетании T-симметрии фундаментальной микрофизики и явной T-несимметрии в мегафизике, т.е. в космологии. Однако всему свое время, и довольно долгим было время раздельного развития микрофизики и мегафизики. Вопросов хватало в физике элементарных частиц и в космологии по отдельности. Симметрии же целиком достались микрофизике.

Первой, в 1956 году, дрогнула право-левая симметрия P. Оказалось, что некоторые физические законы различают правое и левое. Это открытие было шокирующим, нобелевским и всего лишь «перволасточным». Физики не могли мириться с кособокостью мироздания и предположили, что воссоздать симметрию можно операцией CP, т.е. комбинированной симметрией. И в первых обнаруженных случаях P-несимметрии это предположение оправдалось: от перемены правого на левое и одновременно частиц на античастицы физические явления не менялись.

Дальнейшее изучение мира элементарных частиц привело к неполноте CP-симметрии: обнаружились такие законы их жизни, которые нарушают и CP-симметрию. Остался только один всеобщий закон — CPT-симметрия, и он останется в силе, пока останется сама теория относительности. Однако согласно этому закону получалось, что микрофизика несимметрична относительно переворота стрелы времени. Всю микрофизику можно разделить на три области, вложенные одна в другую и другая в третью. Явления одной, самой доступной, области симметричны относительно C, P и T по отдельности, в другой действительны симметрии CP и T, наконец, в самой удаленной от «уровня Земли» — только совместно CPT.

Но все это микрофизика, все это относится к элементарным частицам. А в мегафизике в это же время теоретики ломали себе головы над тем, как могла бы космология развести подальше друг от друга миры и антимиры, чтобы они не соприкасались (и их аннигиляция не осветила Вселенную обжигающе ярким светом) и чтобы не пришлось гадать о Творце Вселенной — правша он или левша.

Легче всего было тем, кто был готов принять асимметрию мироздания как факт изначальный и всякие размышления на этот счет назвать досужими. Однако испокон веков были такие, кто в обнаруженной асимметрии упрямо искал симметрию более глубокую.

Среди таких и был А.Д.Сахаров. Он вывел CPT-симметрию из микромира на мегапросторы Вселенной, а точнее — в мегамикромир, поскольку речь идет о бурных событиях, происходивших с элементарными частицами по всей Вселенной в самые первые мгновения ее Большого Взрыва. И суть идеи Сахарова состояла в том, что наблюдаемые C-, T-, P-асимметрии Вселенной связаны с CPT-симметрией микрофизики. Конечно, суть не была голой: сколь ни важна роль скелета, для жизни организма нужны и другие составляющие. И основную, скелетную, идею Сахаров ввел в жизнь в совокупности с другими: несохранение барионного заряда и распад протона, гипотетические частицы с планковской массой и теория великого объединения... Названные идеи живут и развиваются уже два десятилетия — работа Сахарова положила начало важнейшему этапу в объединении физики микромира и мегамира.

Отличие этого этапа космологии от предыдущих в том, что прежде ключевые, освещающие путь идеи появлялись поодиночке, «на межгалактических расстояниях» друг от друга. Для нынешнего этапа характерна сцепленность, одновременная значимость сразу нескольких идей. И, соответственно, обсуждает проблемы космологии целое научное сообщество.

Одно такое обсуждение состоялось в конце 1979 года в малом зале теоротдела ФИАНа. Докладывал А.Д.Сахаров. Хотя до его высылки в Горький оставались считанные недели, речь шла исключительно о неземных делах. О супертяжелых X-бозонах, о механизме несохранения барионного заряда в ранней Вселенной. Никаких объявлений о докладе не было, поэтому пришли только «свои». И еще один коренастый и подвижный, человек в свитере. Это был ЯБ — так называли Зельдовича не только его сотрудники.

Сахаров говорил о развитии идеи барионной асимметрии Вселенной, говорил, как всегда, неуверенным по звучанию голосом. Затем у доски вынырнул ЯБ и наоборот очень уверенным голосом стал говорить о трудных местах нового эскиза космологической картины, о том, как образовывались супертяжелые бозоны в сверхплотной Вселенной...

А кто-то, глядя на них, подумал о том, как образовалась такая большая плотность Героев Соцтруда — шесть у одной доски, как за полтора десятилетия до того оба академика вышли из закрытого мира Минсредмаша на просторы Вселенной. Первым — Я.Б.Зельдович, затем А.Д.Сахаров. Они жили по-разному в мире людей, но у обоих одной из важнейших составляющих жизни была Вселенная.

О математиках — с улыбкой

В.ТИХОМИРОВ

Борис Слуцкий как-то сказал о своих учителях: «Умирают мои старики, мои Боги, мои Педагоги...». Моих мехматских учителей, тех, про кого и я мог бы сказать: «Мои Боги», уже почти не осталось. Но остались воспоминания...

Незабываемый 1917-й

Дмитрий Евгеньевич Меньшов, пожалуй, самая легендарная фигура среди наших «стариков»: историй про него — не счесть. Вот одна, где я выступаю живым свидетелем.

Как-то в шестидесятые годы (это было принято тогда) в общежитии организовали встречу профессоров и преподавателей кафедры теории функций и функционального анализа со студентами. Дмитрия Евгеньевича попросили

Д.Е.Меньшов

рассказать о рождении Московской математической школы. Он начал свой рассказ так:

«В 1914 году я поступил в Московский университет. Николай Николаевич Лузин был тогда за границей. Но он договорился с Дмитрием Федоровичем Егоровым, что они организуют *семинарий* для студентов. И в 14-м году Дмитрий Федорович такой семинарий организовал. Он был посвящен числовым рядам. В следующем году Николай Николаевич вернулся в Москву и начал руководить семинарием сам. В 1915 году мы занимались функциональными рядами, а в 1916 году — ортогональными рядами.

А потом наступил тысяча девятьсот семнадцатый год.

Это был очень памятный год в нашей жизни, в тот год произошло важнейшее событие, повлиявшее на всю нашу дальнейшую жизнь: мы стали заниматься *тригонометрическими рядами*...»

Что делать с женой?

Нина Карловна Бари всегда очень трогательно заботилась о Дмитрии Евгеньевиче. Но вот пришла война. Нина Карловна со своим мужем — Виктором Владимировичем Немыцким — собралась эвакуироваться из Москвы. Наступила пора прощания. Нина Карловна сказала: «Дмитрий Евгеньевич, идет война, я уезжаю, заботиться о вас некому. Вы бы женились, что ли! Жена будет о вас заботиться, и душа моя будет спокойна». Меньшов слушал со вниманием. Задумался. Но вдруг его лицо выразило недоумение: «А когда война кончится, что я с ней буду делать?»

Бари и Колмогоров

Нина Карловна Бари была ученицей Николая Николаевича Лузина. Она сохранила любовь и преданность своему учителю до последней минуты своей жизни.

Отношения между Ниной Карловной и Андреем Николаевичем Колмогоровым были непростые, — она осуждала некоторые его поступки по отношению к Лузину. Но несмотря на это Нина Карловна всегда восхищалась математическим гением Колмогорова.

Как верная ученица Лузина, Нина Карловна видела смысл и величие математики в свободном развитии и торжестве человеческого разума, к приложениям она относилась с пренебрежением.

Об этом случае рассказывал мне сам Андрей Николаевич.

В конце тридцатых годов Колмогоров сделал очень интересную работу по геометрии — он построил несколько замечательных кривых в гильбертовом пространстве, «скользящих сами по себе» (обобщающих окружность на плоскости и винтовую линию в трехмерном пространстве; исходной точкой для его исследования послужила «спираль» Винера, основанная на конструкции «винеровского процесса»). Базируясь на этих своих геометрических идеях, Андрей Николаевич создал теорию экстраполяции случайных последовательностей и процессов.

Кстати, несколько позже той же задачей занялся сам Норберт Винер. Это было во время войны, его открытия были вызваны проблемами радиолокации и потому засекречены. Секретный отчет Винера был издан для служебного пользования в ярко-желтой обложке и получил у инженеров (испытывавших большие трудности при чтении этого отчета) название «желтой опасности».

Н.К.Бари

Винер очень гордился своими работами по экстраполяции и фильтрации случайных процессов и считал их одними из самых значительных в своей научной биографии. При этом всегда воздавал должное Колмогорову, чуть опередившему его в проблеме экстраполяции, впрочем, отмечая, что тот, по-видимому, не осознавал важности практических применений этой теории. Андрей Николаевич не был согласен с этим последним суждением Винера, однако факт остается фактом: советские военные инженеры учили экстраполяцию по Винеру — какими-то путями «желтая опасность» достигла и нашей страны, — а не по Колмогорову.

Но продолжим.

О своих исследованиях Андрей Николаевич сделал доклад на Московском математическом обществе. (По-видимому, это случилось 22 марта 1939 года. Доклад назывался «Об экстраполируемости стационарных рядов в зависимости от характера их спектра».) Нине Карловне очень понравился этот доклад (особенно — геометрия), и после него она подошла к Андрею Николаевичу с комплиментами.

Колмогоров был очень тронут. Ему особенно польстило, что он услышал похвалу из уст Нины Карловны. Андрею Николаевичу захотелось усилить впечатление, и он сделал попытку рассказать о том, что эти абстрактные геометрические рассмотрения имеют также и некоторое прикладное значение...

Но только он начал об этом говорить, Нина Карловна возмущенно воскликнула: «Фу, какая гадость! Не хочу даже слушать!» — повернулась и ушла.

П.С.Александров

Павел Сергеевич Александров был непревзойденным мастером афористического экспромта.

Один такой экспромт привел в своих (недавно вышедших) воспоминаниях об Андрее Николаевиче Колмогорове Владимир Андреевич Успенский. Как-то, просматривая газету, Павел Сергеевич произнес: «Вот, пишут «бог» с маленькой буквы. Наверное, боятся, что если будут писать с большой, то как бы он вдруг не *засуществовал*!»

А вот мое воспоминание. Как-то я был в Комаровке — на загородной даче, где жили Андрей Николаевич и Павел Сергеевич. Там между завтраком и обедом подавалось молоко с хлебом. Молоко покупалось в совхозном магазине. И было очень хорошим, особенно в сравнении с тем порошковым, которое я покупал по утрам в своем московском магазине. Я стал расхваливать комаровское молоко, сравнивая со «своим». Но затруднился выразить, чем мне особенно нравится комаровское молоко, у меня как-то не нашлось подходящего слова.

П.С.Александров

Павел Сергеевич немедленно нашелся: «Просто наше молоко *имеет некоторое отношение к корове*!»

Б.В.Шабат

В этом моем воспоминании нет шутливой компоненты, оно о другом.

В 1967 году большая делегация выехала в Болгарию на Конгресс болгарских математиков. Это была прекрасная поездка. В Болгарию тогда поехало много моих друзей. Среди них был и Борис Владимирович Шабат.

Б.В.Шабат

Кто-то из нас двоих сказал: «Пошли купаться!» И мы пошли. На берегу я быстро разделся и побежал было в воду, как услышал голос Бориса Владимировича: «Володя, помогите мне, пожалуйста!» Я оглянулся и обомлел: у него не было правой ступни. Я видел, что он иногда прихрамывает, но никогда не думал, что у него просто нет ноги! «Вы потеряли ногу на войне?» — спросил я (я знал, что Борис Владимирович был участником войны — его фотография и поныне висит на доске ветеранов). Ответ Бориса Владимировича до сих пор не укладывается у меня в голове. Он спокойно сказал: «Нет, до войны. Все мои друзья стали записываться в ополчение, и я записался. А медкомиссии тогда не было».

И он пошел — без ноги — воевать.

Историю нашей страны, причину нашей победы невозможно понять, если не почувствовать той силы, которая влекла людей, подобных Борису Владимировичу, на фронт, почти на верную гибель.

Лучший язык

Этот рассказ я слышал от Д.Б.Фукса. Его отец — Б.А.Фукс — был учеником С.Бергмана.

В тридцатые годы, спасаясь от фашизма, переехал к нам жить один математик. Звали его Стефан Бергман. Он был крупным специалистом в области комплексного переменного, и сейчас еще нередко можно услышать термин «ядро Бергмана». Прожил он у нас недолго, но оставил след, ощутимый и поныне: сибирская школа комплексного анализа во многом обязана именно ему.

Он был добрым, веселым, обаятельным человеком. К тому же у него была поразительная особенность: он говорил на всех языках! Но при этом совершенно невозможно было понять, какой же язык является для него родным.

Бергман родился в Польше (бывшей тогда частью Российской империи), учился в Германии, потом, кажется, в Англии, жил долго в Италии, жил у нас (сначала в Москве, затем в Томске, в конце — в Тбилиси). Из Тбилиси он уехал во Францию, где-то еще скитался и в итоге в разгар войны очутился в Америке. Там и остался.

Всюду он говорил на языке той страны, в которой жил (хотя бы и не очень долго, как, скажем, в Грузии, там он говорил по-грузински). Однако поляки находили изъяны в его польском, евреи — в идише, немцы — в немецком и так далее.

А о русском — отдельный рассказ.

Приехав в Томск, Бергман получил кафедру в университете. Как заведующему кафедрой, ему полагалась секретарша. Он попросил подобрать ему кого-

С.Бергман

нибудь для этой работы. А надо сказать, что Томск — старинный университетский город. В те годы он хранил еще многие культурные традиции, доставшиеся ему от старых времен. Бергману порекомендовали женщину — очень интеллигентную, воспитанную и культурную. Немолодую.

Бергман пригласил ее для беседы. Один из его вопросов немало смутил его собеседницу. Бергман спросил: «Вы *порядочная* женщина?» Почувствовав, что произошла какая-то неловкость, Бергман пояснил, что именно он хотел выяснить. Ему хотелось понять, является ли его собеседница аккуратным человеком, можно ли надеяться, что она будет в полном *порядке* держать кафедральные дела.

Словом, и русский язык не был для него родным...

Но вот кончилась война, постепенно начала входить в нормальную колею мирная жизнь. Математики стали организовывать первые международные конференции. На них Стефан Бергман был самой приметной фигурой. Английский не стал еще в ту пору языком всемирного общения. Поляки говорили по-польски (старые поляки еще чуть по-русски, но русские математики на Запад не ездили), немцы в основном владели лишь немецким, французы и до сих пор еще не любят учить иностранные языки... Словом, взаимное общение было затруднено.

И Бергман был незаменим. Если рядом стояли поляк, немец, итальянец, испанец, англичанин и кто-то произносил что-то забавное — интересное замечание или шутку, — Бергман тут же, прямо как фокусник, в мгновение ока переводил все это каждому на его родной язык! Вокруг него обычно образовывалась толпа, и где бы он ни появлялся, всегда становилось весело, слышался смех, всем передавалось какое-то радостное настроение. И ощущение братства.

А однажды во время одного такого сеанса одновременного перевода «на все языки», участвовавшая в беседе дама воскликнула с неподдельным восхищением: «Боже мой, сколько же языков вы знаете! И так хорошо! А каким языком вы владеете лучше всего?»

Бергман ответил: «I am sure, my English is *the bestest*».[1]

[1] *Это звучит примерно так, как по-русски звучало бы «лучшайший».*

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

МОНСТРЫ ЗАЗЕРКАЛЬЯ

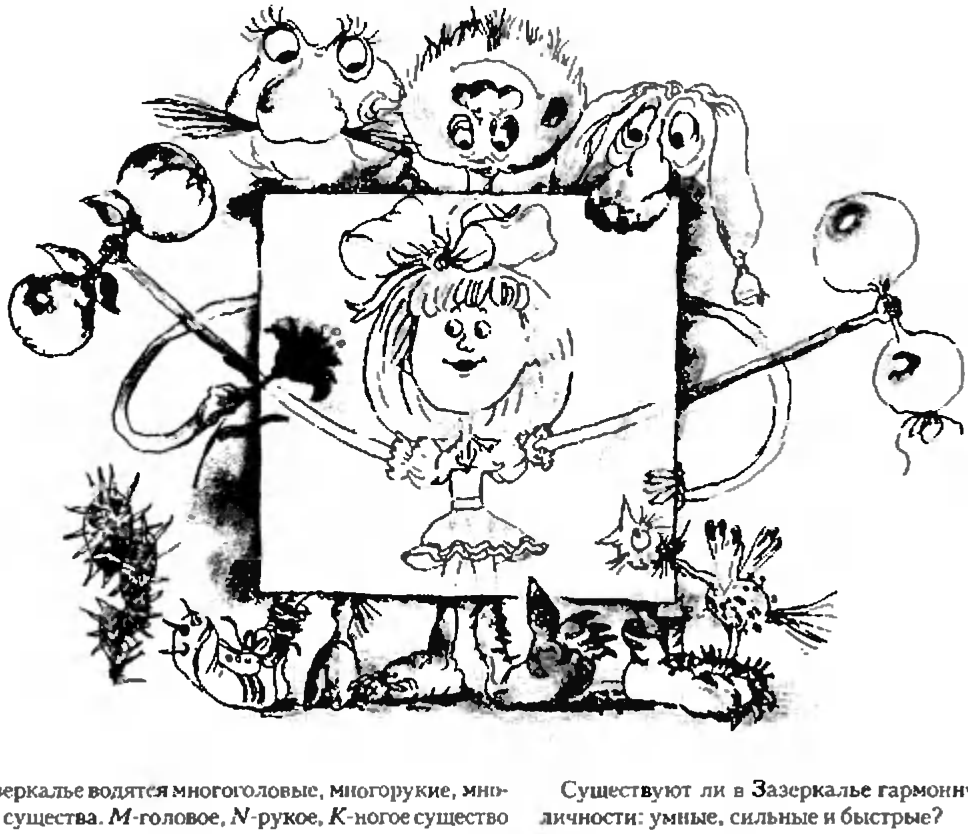


Иллюстрация П. Чернуского

В Зазеркалье водятся многоголовые, многорукие, многоногие существа. M-головое, N-рукое, K-ногое существо считается

умным, если $M>N+K$,

сильным, если $N>M+K$,

быстрым, если $K>M+N$.

Существуют ли в Зазеркалье гармонически развитые личности: умные, сильные и быстрые?

А.Жуков

Да, конечно, например, при $M=-3$, $N=-4$, $K=-5$. Это же Зазеркалье!

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1996 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 96» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1551» или «Ф1563». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1551 — М1560 предлагались на LIX Московской математической олимпиаде и на весеннем туре Турнира городов, а задачи Ф1563 и Ф1564 — на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М1551 — М1560, Ф1563 — Ф1567

М1551. Вершины шестизвенной замкнутой ломаной лежат на окружности. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь такая ломаная?

Н. Васильев

М1552. Обозначим через $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$ многочлен $(n-1)$-й степени, все коэффициенты которого равны единице. а) Докажите, что для любого натурального числа s существует такое число k, что многочлен $P_k(x)$ можно разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами, один из которых имеет вид $1 + sx + \ldots$ (многоточие заменяет члены степени выше первой). б) Докажите, что такое число k найдется и для любого целого числа s.

В. Сендеров

М1553. Из множества чисел $1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/100$ составляются всевозможные подмножества, содержащие четное количество чисел (два, четыре, ..., 100 чисел), и для каждого подмножества вычисляется произведение входящих в него чисел. Найдите сумму всех таких произведений.

Н. Васильев

М1554. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABMN$, $BCKL$, $ACPQ$. На отрезках NQ и PK построены квадраты $NQZT$ и $PKXY$. Найдите разность площадей квадратов $NQZT$ и $PKXY$, если известна разность площадей квадратов $ABMN$ и $BCKL$.

А. Герко

М1555. Даны два непересекающихся круга и точка P такая, что четыре касательные PA, PB, PC, PD, проведенные из нее к двум кругам, равны. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ совпадает с точкой пересечения общих внутренних касательных этих кругов.

С. Маркелов

М1556. Докажите, что существует бесконечно много троек чисел $n-1$, n, $n+1$ таких, что а) n представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, а $n-1$ и $n+1$ — нет; б) каждое из этих трех чисел представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

В. Сендеров

М1557. A и B — две данные точки окружности. Найдите геометрическое место середин хорд этой окружности, пересекающих отрезок AB.

И. Шарыгин

М1558. Игра происходит на квадратной шахматной доске $n \times n$. Двое поочередно передвигают по доске ладью, при этом не разрешается, чтобы ладья стала на поле или прошла через поле, на котором она уже побывала (или через которое уже проходила). Вначале ладья стоит в углу доски. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Для кого существует способ выиграть: для начинающего игру или для того, кто ходит вторым?

Б.Бегун

М1559. Существует ли в пространстве куб, расстояния от вершин которого до данной плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

В.Произволов

М1560. В некотором государстве человек может быть зачислен в гвардию только в том случае, если он выше ростом, чем 80% (или больше) его соседей. Чтобы доказать свое право на зачисление в гвардию, человек сам называет число R (радиус), после чего его «соседями» считаются все, кто живет на расстоянии меньше R от него. В этом же государстве человек освобождается от службы в армии только в том случае, если он ниже ростом, чем 80% (или больше) его соседей. Определение «соседей» аналогично: человек сам называет число r (радиус) и т.д., причем R и r не обязательно совпадают. Может ли случиться, что не менее 90% населения имеют право на зачисление в гвардию и одновременно не менее 90% населения освобождены от армии? (Значения R и r должен выбираться так, чтобы «множества соседей» были непустыми.)

Н.Константинов

Ф1563. Небольшая лампочка освещает вертикальную стену. Проходящий вдоль стены хулиган швырнул в лампочку камень под углом 45° к горизонту и попал в нее. Найдите максимальное и минимальное значения скорости тени от камня на вертикальной стене. В момент броска камень находится на одной высоте с лампочкой на расстоянии L от нее.

А.Андрианов

Ф1564. Модель водяного колеса устроена следующим образом. На ободе очень легкого колеса радиусом R = 1 м равномерно расположено N = 201 ячеек. Когда ячейка проходит верхнее положение, в нее без начальной скорости относительно земли сбрасывают груз массой m = 100 г. Выпадает груз из ячейки в момент прохождения самой нижней точки. Трения нет, удары абсолютно неупругие. Найдите установившуюся угловую скорость вращения колеса.

А.Андрианов, С.Рахманов

Ф1565. Один моль идеального одноатомного газа расширяется от начального объема 20 литров до конечного 200 литров. Давления в сосуде при различных значениях объема газа таковы:

V, л	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
p, кПа	100	35,4	19,2	12,5	8,9	7,8	6,95	6,3	5,75	5,3

Получает газ тепло или отдает на участке расширения от 40 до 80 литров? Нагревается или охлаждается газ на участке расширения от 140 до 180 литров? Найдите отношение теплоемкостей газа на этих двух участках процесса.

Р.Александров

Ф1566. Гантелька массой M и длиной L заряжена на концах, причем левый конец имеет заряд Q, правый — заряд $-4Q$. Слева от гантельки на продолжении прямой, проходящей через концы гантельки, очень далеко от нее покоится шарик массой m, заряженный зарядом Q. От малого толчка шарик начинает двигаться в сторону гантельки. Найдите максимальную скорость шарика и минимальное расстояние до гантельки в процессе движения. Гантелька не закреплена, сила тяжести отсутствует. Считайте, что гантелька не вращается и движение происходит вдоль упомянутой прямой.

З.Рафаилов

Ф1567. Нагреватель имеет сопротивление R = 100 Ом. В вашем распоряжении есть две одинаковые катушки, индуктивность каждой катушки L = 0,5 Гн, и большое количество разнообразных конденсаторов. Сеть — 36 В, 50 Гц — рассчитана на очень большую мощность, катушки и конденсаторы можно считать идеальными. Какую максимальную мощность можно получить в нагревателе?

А.Зильберман

Решения задач М1531 — М1535, Ф1548 — Ф1552

М1531. *На плоскости дан квадрат и невидимая точка P. Разрешается провести любую прямую и спросить, по какую сторону от нее (или на самой прямой) лежит P. За какое наименьшее число вопросов можно выяснить, лежит ли P внутри квадрата?*

Ответ: за 3 вопроса.

Сначала проведем диагональ AC. Если окажется, что P лежит от нее по ту же сторону, что и вершина B, достаточно будет узнать, по какую сторону от прямых AB и BC лежит точка P (рис.1).

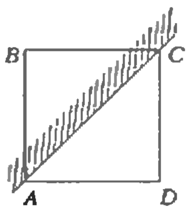


Рис.1

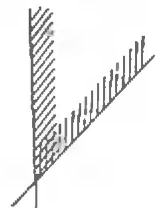


Рис.2

Двух вопросов явно недостаточно: пересечением двух полуплоскостей, где может лежать точка P, окажется неограниченная область — угол, так что нельзя будет (ни при каких ответах) утверждать, что точка лежит внутри квадрата (рис.2).

Для аналогичной задачи про выпуклый 2^k-угольник (а тем самым, и про n-угольник, где $n \le 2^k$) достаточно $k+1$ вопросов; здесь работает идея «дихотомии» — деления пополам: первым вопросом мы выясняем, по какую сторону от прямой, соединяющей 1-ю вершину с «противоположной» $(2^{k-1}+1)$-й, лежит точка P, и (по индукции) сводим задачу к аналогичной для 2^{k-1}-угольника.

Аналогичные задачи в пространстве сложнее, но и там полезна идея «дихотомии» (именно она оказалась ключевой в вызвавших несколько лет назад определенную сенсацию работах А.Хочияна и др., где вопреки ожиданиям было обнаружено, что некоторые задачи линейного программирования имеют полиномиальную сложность, т.е. решаются значительно быстрее, чем полным перебором).

А.Канель, Н.Васильев

М1532. *Существуют ли а) 4 различных натуральных числа, б) 5 различных натуральных чисел, в) 5 различных целых чисел, г) 6 различных целых чисел таких, что сумма любых трех из них — простое число?*

а) Ответ утвердителен. Пример: 1, 3, 7, 9. Вот еще один пример, в котором сами исходные числа — тоже простые: 7, 13, 23, 53. б) Ответ отрицателен: среди любых пяти целых чисел либо найдутся три, дающих одинаковые остатки при делении на 3, либо найдутся три, дающих попарно различные остатки при делении на 3. в) Ответ: да. Приведем два примера.

(1) -9, -3, 15, 25, 31; соответствующие суммы: 3, 13, 19, 31, 37, 47, 37, 43, 53, 71.

(2) -11, -5, 19, 23, 29; соответствующие суммы: 3, 7, 31, 37, 13, 37, 41, 43, 47, 71.

Для построения таких примеров удобно предварительно доказать, что любые пять чисел, удовлетворяющих условиям пункта в), нечетны. г) Ответ: нет.

Заметим, что если $a_1 < \ldots < a_6$, то $a_1 + a_2 + a_3$ и $a_1 + a_2 + a_4$ — две наименьшие из сумм троек чисел. Значит, любая из остальных сумм больше 3.

Рассмотрим теперь остатки от деления на 3 сумм троек из чисел $a_2, a_3, \ldots, a_6$. Сумма некоторых трех из этих чисел делится на 3 (см. решение пункта б)). Так как эта сумма больше 3, то она — составное число.

В.Сендеров, П.Филевич

М1533. *На плоскости даны три точки A, B, C. Проведите через C прямую, произведение расстояний до которой от A и B наибольшее. Всегда ли такая прямая единственна?*

Рассмотрим сначала прямые, пересекающие отрезок AB — идущие внутри угла ACB. Пусть $\angle ACB = 2\gamma$. Произведение P расстояний от точек A и B до прямой l равно (рис.1)

$$P = ab\sin\varphi\sin\psi = ab\left(\cos(\varphi-\psi) - \cos(\varphi+\psi)\right)/2,$$

где φ, ψ — углы, образуемые l с отрезками AC и BC. Поскольку $\varphi + \psi = 2\gamma$ — величина постоянная, максимальное значение P достигается при $\varphi = \psi$ и равно

$$P' = ab(1-\cos 2\gamma)/2 = ab\sin^2\gamma.$$

Для прямых, идущих вне угла ACB, формула для P точно такая же (рис.2). В этом случае сумма

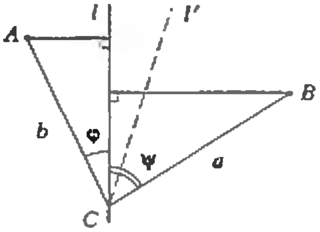


Рис.1

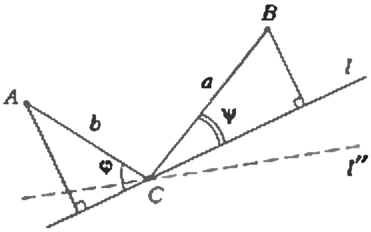


Рис.2

$\varphi + \psi = \pi - 2\gamma = 2\delta$ тоже постоянна и равна внешнему углу 2δ при вершине C треугольника ABC, максимальное значение P достигается при $\varphi = \psi$ и равно

$$P'' = ab\sin^2\delta.$$

Таким образом, если угол $2\gamma = \angle ACB > \pi/2$, то искомая прямая — биссектриса l' внутреннего угла треугольника ABC при вершине C (в этом случае $\sin^2\gamma > \sin^2\delta$ и $P' > P''$), если $2\gamma < \pi/2$, то — биссектриса l'' внешнего угла ($P' < P''$), а если $2\gamma = \pi/2$, то $P' = P''$ и искомых прямых две: l' и l''.

Н.Васильев

М1534. *Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n - n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \ge \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n}\right)^2.$$

Приведем два решения. Нам удобнее считать, что в правой части стоит a_2, а не a_n (из-за симметрии это не меняет дела).

Первое решение. Обозначим $A_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)/k$, $G_k = \sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$, где $k = 2, \ldots, n$, и докажем сначала такое замечательное неравенство:

$$(k+1)(A_{k+1} - G_{k+1}) \ge k(A_k - G_k). \qquad (*)$$

Пусть $x = \sqrt[k+1]{a_{k+1}}$, $g = \sqrt[k+1]{G_k}$. Так как

$$A_{k+1} = kA_k + x^{k+1},\ G_{k+1} = \sqrt[k+1]{G_k^k x^{k+1}} = g^k x,$$

то $(*)$ переписывается в виде

$$x^{k+1} - (k+1)g^k x + kg^{k+1} \ge 0,$$

а это неравенство легко доказать (при $x \ge 0$, $g \ge 0$), исследуя левую часть с помощью производной или заметив, что она делится не только на $x - g$, но и на $(x-g)^2$:

$$x\left(x^k - g^k\right) - kg^{k+1}(x-g) =$$
$$= (x-g)\left(x^k + x^{k-1}g + \ldots + xg^{k-1} - kg^k\right) =$$
$$= (x-g)^2\left(x^k + 2gx^{k-1} + 3g^2x^{k-2} + \ldots + kg^{k-1}\right).$$

Итак, $(*)$ доказано. Отсюда получаем

$$n(A_n - G_n) \ge (n-1)(A_{n-1} - G_{n-1}) \ge \ldots \ge 2(A_2 - G_2) =$$
$$= a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1a_2} = \left(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}\right)^2.$$

Из этого решения получается одновременно и доказательство основного неравенства $A_n \ge G_n$ для среднего арифметического и среднего геометрического n положительных чисел.

А вот — совсем короткое решение, опирающееся на это неравенство.

Второе решение. Перепишем данное неравенство так:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_2}+a_3+\ldots+a_n \ge n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

и воспользуемся неравенством между средним арифметическим и геометрическим для n чисел $\sqrt{a_1a_2}$, $\sqrt{a_1a_2}$, $a_3, \ldots, a_n$.

Из любого решения нетрудно получить ответ на вопрос, при каких условиях наше неравенство превращается в равенство: это происходит, когда все числа, кроме двух — наименьшего и наибольшего, стоящих в правой части, — равны их среднему геометрическому.

Впервые доказательство неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим было опубликовано в 1821 г. Огюстеном Коши, именем которого оно часто называется.

Существует, наверное, более полусотни различных его доказательств. Вот одно из самых коротких — использующее тот факт, что график функции $y = e^x = \exp(x)$ всюду, кроме точки $x = 0$, лежит выше касательной $y = 1 + x$ в этой точке: $\exp(x) \ge 1 + x$. Пусть $A = (a_1+\ldots+a_n)/n$, $\xi_k = (a_k - A)/A$ $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$a_1a_2\ldots a_n = A^n(1+\xi_1)(1+\xi_2)\ldots(1+\xi_n) \le$$
$$\le A^n\exp(\xi_1+\ldots+\xi_n) = A^n.$$

Существует и много разных оценок отклонений средних друг от друга. Например, одна такая оценка вытекает из тождества, полученного в 1891 г. немецким математиком Гурвицем — он представил разность $x_1^n + \ldots + x_n^n - nx_1\ldots x_n$ в виде многочлена от $x_1, \ldots, x_n$, положительность которого при $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ очевидна. Для $n = 3$ тождество Гурвица выглядит так:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right).$$

Советуем посмотреть первые параграфы книги Р.Беллмана «Неравенства», которая начинается с 12 разных доказательств теоремы о средних и где приведены другие оценки их разности.

Л.Курляндчик

М1535. *Куб с ребром 1 надо обшить (в один слой) куском ткани. а) Докажите, что если узелки, где сходятся (по крайней мере) три шва, могут лежать только в вершинах, то суммарная длина швов не менее 7. б) Может ли эта длина быть меньше 6,5?*

Конечно, в этой задаче предполагается, что ткань нерастяжима, и все расстояния и углы на поверхности куба, о которых говорится в решении, — те же, что и на куске ткани.

а) Разумеется, можно считать, что речь идет об одном (связном) куске ткани — иначе длину шва, по которому сшиты куски, можно уменьшить. Можно также считать, что отрезки швов, идущие по поверхности куба, прямолинейные.

В каждую вершину должен входить хотя бы один шов — иначе возникнет треугольная «шапочка», которую нельзя без складок уложить на плоскость (строго это можно доказать так: сумма шести красных углов на рисунке 1 — т.е. сумма трех углов треугольной шапочки — равна $3\pi/2$, т.е. на $\pi/2$ больше, чем сумма углов плоского треугольника!).

Рис. 1

Далее, швы образуют связное множество, — от каждой вершины куба можно дойти до любой другой по шву: иначе на поверхности куба можно было бы выделить кольцо из ткани, по обе стороны которого остаются вершины куба, а такое кольцо не может быть уложено на плоскость (это можно доказать так же, как выше сделано для шапочки: если на поверхности куба имеется замкнутая ломаная линия, то сумма углов «n-угольника» на поверхности куба, который она ограничивает, равна $\pi(n-2) + d\pi/2$, где d — число вершин куба, который лежит внутри этого n-угольника, а не $\pi(n-2)$, как должно быть для плоского n-угольника).

Весь шов разбивается вершинами на несколько отрезков. Объявив некоторую вершину куба A начальной, поставим в соответствие каждой из остальных 7 вершин X последний отрезок пути от A к X по шву. При этом разным вершинам X соответствуют разные отрезки, а длина каждого — не меньше 1. (Именно здесь мы используем дополнительное условие пункта а), что шов может «разветвляться» только в вершинах).

В нашем решении не предполагалось, что швы идут обязательно по ребрам (как считали некоторые читатели, приславшие решение этого пункта задачи); при этом предположении возможны и другие пути решения.

б) Да, — как это ни удивительно. Мы используем здесь замечательную (кратчайшую!) сеть дорог, связывающую четыре вершины квадрата (рис.2,*а*, где $a = 1/\sqrt{3}$, $b = 1 - 1/\sqrt{3}$; отмеченные углы равны 120°). Если расположить такие сети на двух горизонтальных гранях куба и добавить одно вертикальное ребро (рис.2,*б*).

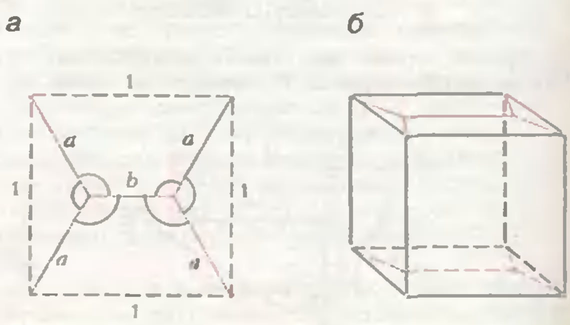


Рис.2

получится шов длиной

$$1+8a+2b=3+6/\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}=6{,}4652...$$

По-видимому, это — минимальный возможный шов для получения «развертки» куба.

Н. Васильев

Ф1548. *Через легкий блок перекинута нерастяжимая и невесомая нить, к концам которой прикреплены грузы массой 1 кг и 3 кг. Блок насажен на ось с трением, сила трения пропорциональна нагрузке на ось. Ускорение тяжелого груза в описанной ситуации составило 2 м/с². Какой массы грузик следует положить на легкий груз, чтобы предоставленная самой себе система могла оставаться в равновесии?*

Найдем силы натяжения нитей с двух сторон блока. Пусть нить в месте прикрепления к грузу массой M = 3 кг имеет натяжение T_1. Для этого груза запишем

$$Mg-T_1=Ma\text{, и } T_1=M(g-a).$$

Аналогично для участка нити с другой стороны блока получаем

$$T_2-mg=ma\text{, и } T_2=m(g+a).$$

Разность сил натяжения нити с двух сторон блока компенсирует трение в оси (точнее, нужно говорить о моментах сил, но в данном случае это все равно). Трение пропорционально нагрузке на ось, т.е. силе T_1+T_2. Тогда можно записать

$$T_1-T_2=k(T_1+T_2).$$

Отсюда можно выразить коэффициент k, но удобнее найти величину $(1-k)/(1+k)$ — именно она нам понадобится в дальнейшем:

$$\frac{(1-k)}{(1+k)}=\frac{m(g+a)}{M(g-a)}.$$

Равновесие достигается в целом диапазоне возможных «добавок» — от минимальной, при которой прекращается ускоренное движение большого груза вниз, до максимальной, при которой этот груз едет без ускорения вверх. Для минимальной массы добавочного грузика Δm_1 запишем

$$\frac{m+\Delta m_1}{M}=\frac{1-k}{1+k}\text{, и } \Delta m_1=\frac{2ma}{g-a}=\frac{1}{2}\text{ кг}.$$

Аналогично находим максимальную массу добавочного грузика Δm_2:

$$\frac{M}{m+\Delta m_2}=\frac{1-k}{1+k}\text{, и } \Delta m_2=\frac{M^2(g-a)-m^2(g+a)}{m(g+a)}=5\text{ кг}.$$

С. Варламов

Ф1549. *Тонкую упругую полоску длиной L согнули в полуокружность и связали концы нитью — натяжение нити составило при этом T. Какую работу нужно совершить, чтобы «догнуть» пластинку, превратив ее в обруч?*

В условии задачи сказано, что согнутая полоска имеет форму полуокружности (окружности — в конце сгибания). Отвлекаясь от вопроса, как это вообще могло получиться, заметим, что деформация равномерно распределяется по полоске и любые ее кусочки одинаковой длины деформированы одинаково. Закрепим один из концов маленького кусочка полоски длиной l и сместим другой его конец в перпендикулярном направлении на малую (по сравнению с l) величину x. Выразим смещение x через длину кусочка и радиус кривизны R получившегося куска окружности: $x=l^2/(2R)$. Ясно, что полную энергию деформации всей полоски также можно выразить через радиус кривизны: $W=C/R^2$. Тогда при «догибании» полоски радиус кривизны уменьшится в два раза, энергия деформации возрастет в четыре раза, а совершенная работа будет равна

$$A=3W=\frac{3C}{R^2}.$$

Осталось только найти значение коэффициента C. Для этого немного укоротим нитку и сравним приращение энергии полоски из-за уменьшения радиуса кривизны и совершенную нами работу — они должны быть равны друг другу. При уменьшении радиуса кривизны на малую величину ΔR изменение энергии всей полоски будет

$$\Delta W=-\frac{2C\Delta R}{R^3}.$$

Работа силы T в этом случае (немного геометрии — укорочение нити равна $2\Delta R$) составит

$$\Delta A=T\cdot 2\Delta R.$$

Из равенства $\Delta A=-\Delta W$ получим

$$C=TR^3=T\left(\frac{L}{\pi}\right)^3.$$

Итак, для «догибания» нужно совершить работу

$$A=\frac{3TL}{\pi}.$$

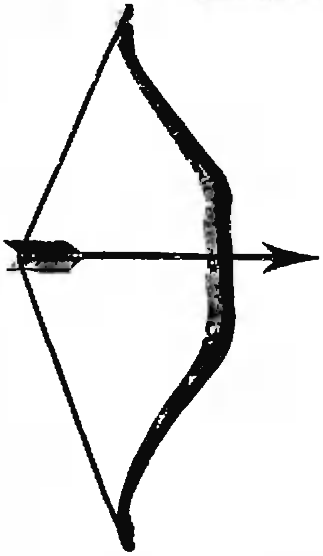
Вернемся к началу рассуждений — форма согнутой полоски на практике будет сильно отличаться от окружности, мы провели расчет для заданной модели.

З. Рафаилов

Ф1550. *Планета З очень похожа на Землю, но на последних выборах во Всемирный парламент там победили антиэкологисты, которые немедленно построили на всей поверхности планеты (включая моря и океаны) атомные электростанции для нагрева атмосферы. На один квадратный метр поверхности приходится мощность 1000 Вт. Через какое время после начала нагрева температура атмосферы увеличится на 1 градус? Считайте, что сама планета не нагревается, а мощность излучения в космос остается неизменной.*

Каждая порция воздуха при нагревании будет расширяться в условиях неизменного давления — своего для каждой порции, которое определяется весом столба воздуха, расположенного над этой порцией. Воздух представляет смесь двух двухатомных газов — кислорода и азота, остальными газами мы пренебрегаем. Молярная теплоемкость такого газа в процессе нагревания

(Продолжение см. на с. 34)



Тригонометрия

С течением времени появляются новые науки. К этому мы привыкли, но мы не замечаем, как некоторые науки исчезают, поскольку этот процесс медленный и не сопровождается повсеместным обсуждением. Исчезла наука алхимия, правда, вместо нее появилась химия. Исчезла наука география. То, что она изучала — новые моря, земли, животных, растения и т.д., — изучают океанология, геология, вулканология, зоология, ботаника...

То же самое случилось с наукой тригонометрией.

Тригонометрия — математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника. Но подобно тому как мореплаватели и путешественники не оставили белых пятен на карте Земли, так и математики подробно исследовали треугольник — простейшую из геометрических фигур, не оставив здесь «белых пятен».

ХОТЯ треугольник — простейшая фигура (он часто называется «симплексом», что по-латыни значит «простейший»), соотношений между его элементами было найдено немало. Причиной таких поисков не было простое любопытство. Землемерам было необходимо измерять земельные участки, астрономам изучать движение светил — звезд и планет, чтобы по ним путнику можно было узнать свое местонахождение, и во всех таких случаях важно знать соотношения между длинами сторон и углами.

Свойства треугольника изучает геометрия. Вспомним, что больше 2000 лет назад Пифагор доказал свою теорему, а Герон Александрийский нашел формулу, выражающую площадь треугольника через его стороны. Это чисто геометрические теоремы. Чем же отличается тригонометрия от геометрии? В первую очередь тем, что она использует функции от углов треугольника: синус, косинус, тангенс, а также котангенс, секанс и косеканс. Основной функцией следует считать синус.

Сейчас $\sin\alpha$ принято определять как ординату точки, находящейся на единичной окружности, если угол между осью абсцисс и направлением из начала координат на эту точку равен α (рис.1). Угол отсчитывается в направлении, обратном движению часовой стрелки.

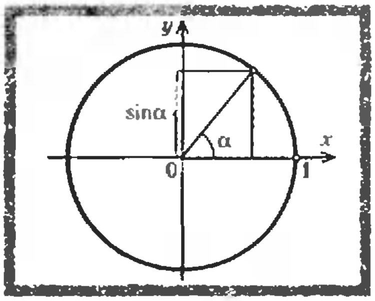


Рис. 1

Первоначально вместо синуса рассматривали всю хорду, стягивающую концы дуги (рис. 2). Поэтому индусы, придумавшие это понятие, назвали его словом «джива» или «джийя», что означало тетиву охотничьего лука. Это слово перекочевало в арабский язык, где оно стало звучать как «джиба», а потом «джайб». Это неудивительно, поскольку в арабской письменности гласные буквы не пишут. В арабском языке «джайб» означает «пазуха», поэтому при переводе на латинский язык оно превратилось в «sinus» — «пазуха», «перегиб». Если вы будете изучать анатомию, то узнаете, что среди латинских названий внутренних частей тела тоже встречаются «синусы» — пазухи.

Слово «косинус» произошло в результате сокращения выражения «complimenti sinus» — «синус до-

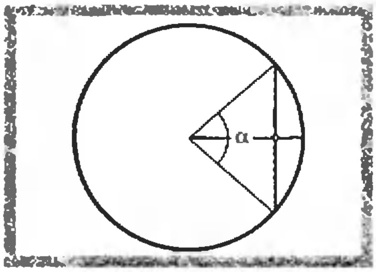


Рис.2

полнения», выражающего тот факт, что равен синусу угла, дополнительного к углу α до $\frac{\pi}{2}$, а именно,

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Тангенс угла определяется как отношение синуса к косинусу этого угла. Слово «тангенс» произошло от латинского слова «tangens» — касающийся, поскольку это есть длина отрезка касательной к окружности единичного радиуса между осью абсцисс и второй стороной угла α (рис. 3). Как и слово «косинус», слово «котангенс» произошло от сокращения термина «complimenti tangens» — «тангенс дополнения». Секанс угла есть величина, обратная косинусу. Его название происходит от латинского «seco» — режу, рассекаю. А «косеканс» происходит от секанса так же, как косинус и котангенс от синуса и тангенса. Обозначения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\sec\alpha$, $\mathrm{cosec}\,\alpha$ ввел Л.Эйлер.

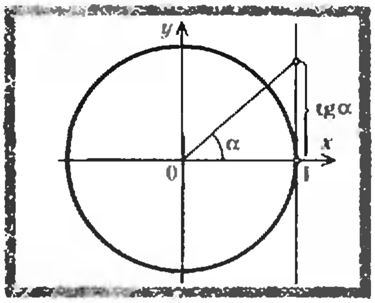


Рис.3

Как мы уже говорили, в разные времена математики нашли многочисленные зависимости между сторонами и углами треугольника. Уже в «Началах» Евклида в III в. до н.э. содержится теорема косинусов:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

(рис.4), конечно же, не в такой записи. Аналогом теоремы Пифагора в тригонометрии является соотношение $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Теорема синусов

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}=2R,$$

где R — радиус описанной окружности, была обнаружена арабскими математиками в X–XI веках.

В XV веке немецким астрономом Региомонтаном (под этим псевдонимом известен Иоганн Мюллер) была открыта теорема тангенсов

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Региомонтан также составил таблицу синусов с шагом в 1′.

Исследованиям в тригонометрии занимались многие астрономы. Так, знаменитый Птолемей (II в.) составил таблицу синусов с шагом в 30′ и с точностью до 10^{-6}. Ряд работ по тригонометрии выполнил создатель гелиоцентрической системы мира Николай Коперник (1473–1543).

Окончательный порядок в тригонометрии навел Леонард Эйлер. Кроме того, что он ввел удобные

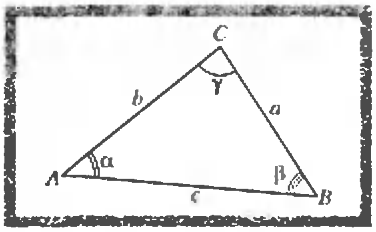


Рис.4

обозначения для тригонометрических функций, он подробно исследовал их, причем не только для вещественных значений аргумента, но и для комплексных.

Ему принадлежит следующее представление функции $\sin x$:

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\ldots$$

Эйлер часто использовал и другое представление синуса:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

Напомним, что через $k!$ обозначают произведение всех натуральных чисел от 1 до k, т.е. $k!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k$.

Используя комплексные числа, Л.Эйлер обнаружил тесную связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией. Основным здесь явилось соотношение, получившее название «формулы Эйлера»:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

Отсюда следует, что синус и косинус можно выразить через экспоненту:

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\ \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}.$$

Эйлер завершил создание тригонометрии. Тем самым тригонометрия перестала быть развивающейся наукой, а поэтому потеряла право вообще называться наукой. Изучение тригонометрических функций и вопросов, связанных с ними, взял на себя математический анализ, вопросы исследования и решения тригонометрических уравнений рассматривает алгебра, практические задачи применения тригонометрии рассматривают геодезия, картография и другие.

Упомянутые приложения тригонометрии привели к необходимости исследовать вопросы точности измерений. Этим много занимался знаменитый Карл Фридрих Гаусс, которому в свое время было поручено руководство геодезической съемкой и составлением карты Ганноверского королевства (сейчас часть Германии).

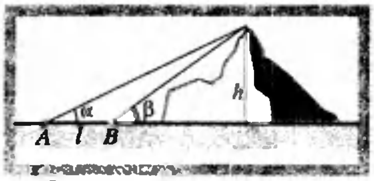


Рис.5

Следует заметить, что часто небольшие неточности в измерении могут привести к значительным ошибкам.

Рассмотрим следующий метод определения высоты горы (рис.5). Из точек A и B, расстояние между которыми равно l, измеряются углы, под которыми видна вершина горы. Нетрудно показать, что высота горы определяется по формуле

$$h=l\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Теперь представим, что $\alpha=9°$, $\beta=16°$, а наблюдатель получил $\alpha=10°$ и $\beta=15°$. Сравним истинное значение высоты $h=l\sin9°\sin16°/\sin7°$ и полученное значение $h_1=l\sin10°\sin15°/\sin5°$. Используя таблицы, получаем, что $h\approx0{,}3536l$, а $h_1\approx0{,}5152l$, т.е. получили высоту, в полтора раза превосходящую истинную.

Если вы наблюдали работу геодезистов, то могли заметить скрупулезность выполнения ими своей работы, многократное повторение одного измерения для того, чтобы уменьшить ошибку замера.

Вопросы обработки результатов измерений с целью уменьшения ошибки изучает раздел математической статистики, который так и называется — «теория ошибок».

А.Савин

(Начало см. на с. 27)

при неизменном давлении составляет $2,5R + R = 3,5R$. Осталось найти полное число молей газа ν в атмосфере.

Давление на поверхности планеты определяется весом всей атмосферы. Поскольку толщина атмосферы во много раз меньше радиуса планеты, можно не учитывать изменения ускорения свободного падения с высотой. Тогда, если m — масса атмосферы, S — площадь поверхности планеты и M — средняя молярная масса газа, то для давления p (p = 1 атм) получим

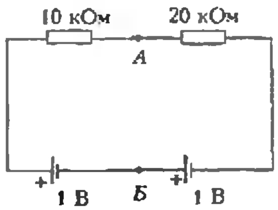
$$p = \frac{mg}{S} = \frac{\nu Mg}{S}, \text{ и } \nu = \frac{pS}{Mg}.$$

Время τ нагрева атмосферы на 1 градус определится из условия теплового баланса:

$$3{,}5R\nu\Delta T = NS\tau, \text{ и } \tau = \frac{3{,}5Rp\Delta T}{MgN} \approx 10^4 \text{ с.}$$

С.Варламов

Ф1551. *В схеме на рисунке при помощи быстродействующего переключателя к точкам А и Б подключается конденсатор емкостью 1000 мкФ то в одной, то в другой полярности. При этом переключаются выводы конденсатора — в течение 0,001 с конденсатор включен в одной полярности, затем мгновенно переключается и в течение 0,002 с оказывается включенным наоборот, после чего процесс повторяется. Найдите средние значения токов, протекающих через батарейки.*



При заданных значениях R и C конденсатор за указанные малые интервалы времени почти не изменяет своего заряда — заряд немного увеличивается за время включения в одной полярности и уменьшается на такую же величину при включении в другой полярности. Обозначим установившееся напряжение конденсатора U. Токи резисторов при одной полярности составят $(\mathcal{E} - U)/R$ и $(U + \mathcal{E})/(2R)$. Ток заряда конденсатора при этом будет $I = (\mathcal{E} - U)/R - (U + \mathcal{E})/(2R)$, а приращение заряда за время τ составит $I\tau$. Приравнивая по величине приращения зарядов за отрезки времени τ и 2τ (во втором случае подставим вместо U величину $-U$), получим $U = -\mathcal{E}/9$. Средний ток через левую батарейку равен среднему току через резистор R — они включены последовательно. Цикл длительностью 3τ состоит из отрезка времени τ, в течение которого ток равен $(\mathcal{E} - U)/R$, и отрезка 2τ, при котором ток равен $(\mathcal{E} + U)/R$. Для среднего тока на первом отрезке получаем

$$I_{\text{ср}1} = \frac{\frac{10}{9}\frac{\mathcal{E}}{R}\tau + \frac{8}{9}\frac{\mathcal{E}}{R}\cdot 2\tau}{3\tau} = \frac{26}{27}\frac{\mathcal{E}}{R} \approx 10^{-4} \text{ А}.$$

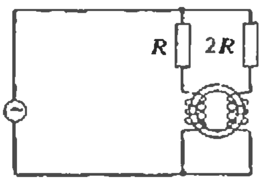
Аналогично для правой батарейки находим

$$I_{\text{ср}2} = \frac{\frac{8}{9}\frac{\mathcal{E}}{2R}\tau + \frac{10}{9}\frac{\mathcal{E}}{2R}\cdot 2\tau}{3\tau} = \frac{14}{27}\frac{\mathcal{E}}{R} \approx 0{,}5\cdot 10^{-4} \text{ А}.$$

Этот ответ не зависит ни от значения емкости конденсатора C, ни от величины промежутка времени τ. Важно только, что $RC \gg \tau$.

Р.Александров

Ф1552. *На ферромагнитный сердечник намотаны две одинаковые катушки, каждая индуктивностью L (см. рисунок). Последовательно с одной из катушек подключили резистор сопротивлением R, последовательно с другой — резистор сопротивлением $2R$, а получившиеся цепочки соединили параллельно и включили в сеть переменного напряжения, амплитуда которого U_0 и частота f. Найдите токи, протекающие через резисторы. Элементы цепи считать идеальными, рассеянием магнитного потока пренебречь.*



Из рисунка в условии задачи видно, что точки подключения резисторов к обмоткам представляют собой «начала» обмоток, а соединенные между собой точки обмоток — их «концы». Иначе говоря, поля токов, протекающих от источника через резисторы по обмоткам, суммируются в сердечнике, а напряжение между точками соединения резисторов с обмотками точно равно нулю в любой момент времени (напомним, что обмотки по условию задачи одинаковые). Ясно, что резисторы при этом включены параллельно и ЭДС индукции каждой из обмоток (они ведь тоже включены параллельно) определяется суммарным полем. Тогда получается простая эквивалентная схема «нагрузки» — катушка индуктивностью L соединена последовательно с резистором сопротивлением $2R/3$. Ток от источника по амплитуде составляет

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{(2\pi fL)^2 + 4R^2/9}}.$$

Из этого общего тока одна треть протекает по резистору сопротивлением $2R$ и две трети — по резистору сопротивлением R. Сдвиг фаз между общим током и напряжением источника находится обычным путем — как в стандартной цепи из последовательно соединенных катушки и резистора.

Случай обратного включения обмоток получается немного более сложным, однако и он сводится к «эквивалентной» последовательной цепочке.

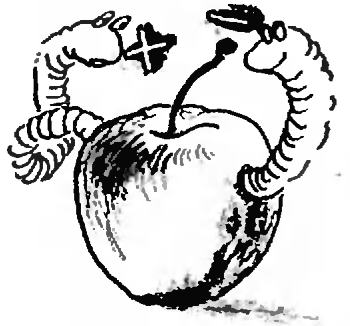
А.Зильберман

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

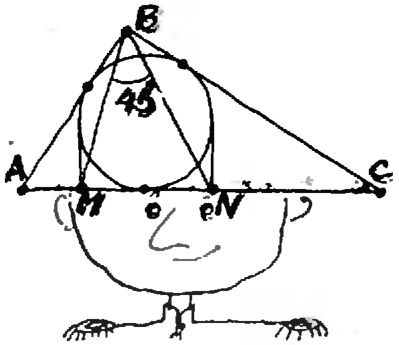
1. Существуют ли два таких простых числа, сумма и разность которых вновь простые числа?

С.Азлецкий



2. В прямоугольный треугольник ABC вписали окружность. Проекция этой окружности на гипотенузу AC есть отрезок MN. Покажите, что угол MBN равен 45°.

М.Евдокимов

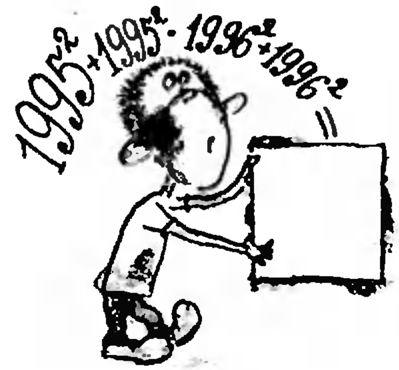


3. Алеша вышел из поселка Алешино в 10 ч 18 мин и, двигаясь с постоянной скоростью, пришел в поселок Борисово в 13 ч 30 мин. В тот же день Борис вышел из Борисова в 9 ч 00 мин и, идя той же дорогой с постоянной скоростью, пришел в Алешино в 11 ч 40 мин. Дорога пересекает широкую реку. Алеша и Борис одновременно подошли к мосту через эту реку, каждый со своей стороны. Алеша ушел с моста на одну минуту позже Бориса. Когда они подошли к мосту?

А.Савин

4. Покажите, что число $1995^2 + 1995^2 \cdot 1996^2 + 1996^2$ является квадратом целого числа.

В.Произволов



5. Стекольщику заказали изготовить 85 квадратных пластинок 10×10 см из особого стекла. Он принял

заказ, зная, что у него есть такое стекло размером 1×1 м и поэтому он сможет вырезать даже 100 таких пластинок. Но, перемерив в мастерской свое стекло, стекольщик обнаружил, что оно имеет размер 99×99 см. Сможет ли он вырезать из него хотя бы 85 пластинок?

С.Охитин

Паркет-хамелеон

А. ПЯТАКОВ

Однажды в ожидании урока я стоял в школьном коридоре и окидывал скучающим взглядом чередующиеся друг с другом темные и светлые ряды паркета, убегающие в дальний конец рекреационного зала (рис.1).

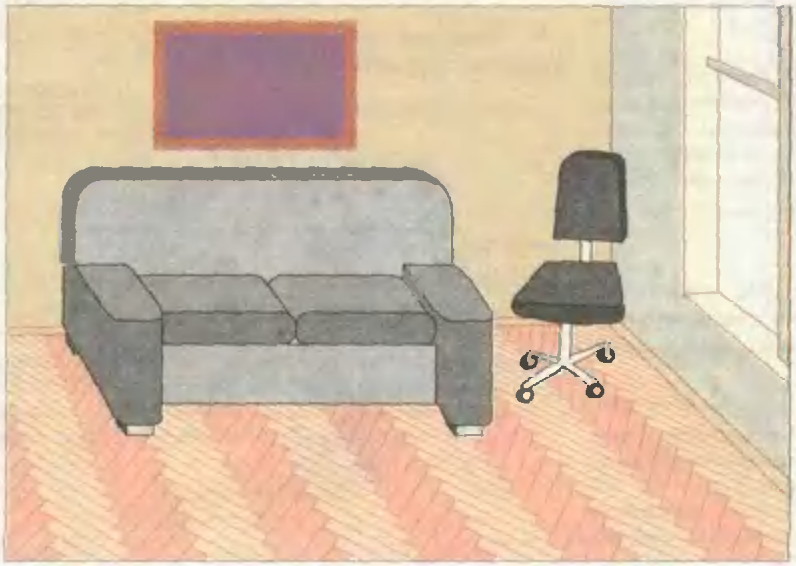


Рис.1

Чтобы как-то убить время, я принялся ходить по темному ряду, стараясь не наступать на светлые. Представьте мое удивление, когда, дойдя до конца зала и повернувшись, я обнаружил, что стою на светлой дорожке!

Решив, что произошла какая-то ошибка, я, встав на темную дорожку, снова пересек зал.

Дошел до конца, развернулся и... оказался на светлом ряду! В сомнении я упрямо шагал по залу туда и обратно, пытаясь обмануть паркет. Но он оказался упрямее меня! После тщетной борьбы я остановился посреди зала, пораженный способностью паркета менять свой цвет, как хамелеон. Ошибки быть не могло: впереди меня ряды располагались в одном порядке, а позади — в противоположном. В чем причина столь странного явления?

Оказывается, описанный эффект появляется только при боковом освещении. В этом случае доски способны по-разному рассеивать свет — в зависимости от их ориентации по отношению к окну.

Рис.2

И вот почему. Если внимательно приглядеться к поверхности паркетной доски, то можно заметить, что по всей ее длине тянутся бороздки, или волокна, как их обычно называют (рис.2).

Благодаря этим бороздкам по-разному расположенные доски и рассеивают свет по-разному. Как видно из рисунка 3, *а*, паркетные доски ряда 1 будут казаться светлее досок ряда 2, так как волокна

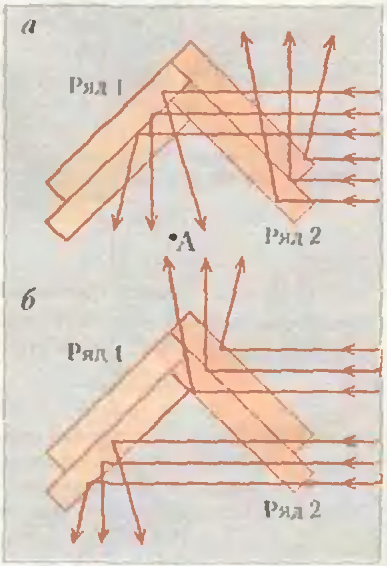


Рис.3

первых рассеивают свет по направлению к наблюдателю (точки *A*), а волокна вторых — в противоположную сторону. Если же наблюдатель обернется (рис. 3, *б*), то картина будет обратной: второй ряд станет светлее первого.

В правильности этих рассуждений вы можете наглядно убедиться с помощью простого деревянного угольника, держа его при боковом освещении то впереди себя, то позади. К явлениям того же рода можно также отнести образование последовательных темных и светлых полос на свежескошенном лугу или на футбольном поле. При повороте наблюдателя светлые и темные полосы меняются местами. Правда на футбольном поле «дорожки» часто получают искусственно — высевая различные сорта трав. В этом случае «эффект хамелеона» не наблюдается.

Конкурс «Математика 6—8»

Мы открываем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Традиционно мы начинали его в пятом номере, но по многочисленным просьбам читателей начало конкурса переносится на номер вперед. Как и в предыдущих конкурсах, будет предложено 20 задач — в №4—6 этого года и в №1 за 1997 год — по пять задач в каждом. Срок присылки решений задач этого номера — 15 ноября 1996 года. Решения присылайте по адресу:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64а, «Квант»
(с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»).
Не забудьте указать фамилию, имя и класс.
Так же как и в двух предыдущих конкурсах, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Победители конкурса будут награждены призами журнала и приглашены на заключительный тур конкурса в одну из летних математических школ в августе 1997 года.

1. Рассмотрим следующую числовую последовательность:

$$12 + 34,\ 56 + 78,\ 910 + 1112,\ 1314 + 1516,\ \ldots$$

Сколько чисел в этой последовательности делится на 4?

Д.Шихов

2. В прямоугольном треугольнике ABC проведены биссектрисы острых углов AP и BQ. Затем проведены медианы CM и CN треугольников APC и CBQ (рис.1).

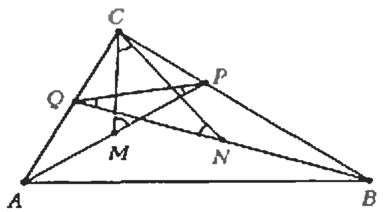


Рис.1

Докажите, что в пятиконечной звезде $MNPCQ$ сумма углов в вершинах M и N равна сумме углов в остальных трех вершинах.

С.Азлецкий

3. Гангстеры ограбили редакцию научно-популярного журнала «Квантум», похитив большую пачку свежеотпечатанных номеров, что нанесло ущерб, превышающий две с половиной тысячи долларов. Седьмую часть похищенного бандиты успели распродать к моменту их поимки, а оставшиеся экземпляры были возвращены владельцам. Чтобы уменьшить потери, редакция была вынуждена продавать каждый возвращенный журнал на 60 центов дороже, но это не возместило убытка. После того, как сотрудник журнала «Квант» пожертвовал страдальцам 1 доллар, урон был с лихвой компенсирован.

Сколько стоил журнал «Квантум» до подорожания?

И.Акулич

4. Целые числа x, y и z удовлетворяют уравнению

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz.$$

Докажите, что среди этих чисел всегда найдутся два равных.

В.Произволов

5. 49 кнопок расположены в виде квадрата 7×7. Каждая из них может либо светиться, либо быть погашенной. При нажатии на любую из кнопок меняется состояние этой кнопки и всех соседних с ней по горизонтали, вертикали и диагоналям (рис.2). Докажите, что можно погасить все кнопки, независимо от того, какие кнопки светились первоначально.

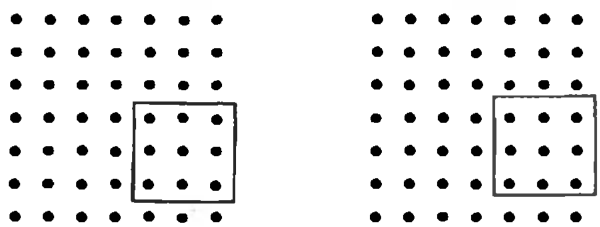


Рис.2

С.Токарев

Семь решений задачи Штейнера

А. КОРОБОВ

В ГЕОМЕТРИИ, как и в арифметике, встречаются задачи, формулировка которых очень проста, но при этом найти столь же простое решение, используя лишь совсем элементарные средства, сразу не удается.

Мы приведем различные решения четырех задач (А – Г), которые, на наш взгляд, можно отнести к числу таких «крепких орешков». Все они приводят к решению задачи Штейнера (А).

Задача (А). *Докажите, что если в треугольнике равны биссектрисы двух различных углов, то треугольник равнобедренный.*

Задача (Б). *Докажите, что если у двух треугольников равны соответственные углы при вершине, биссектрисы этих углов и основания, то треугольники равны между собой.*

Задача (В). *Постройте треугольник по углу при вершине, биссектрисе этого угла и основанию.*

Задача (Г). *В треугольнике ABC проведена биссектриса AL угла A. Из точки L основания BC опущен перпендикуляр LK на прямую AC и продолжен на отрезок KM=BC (рис.1). Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABC и AKM, касаются стороны AC в одной и той же точке.*

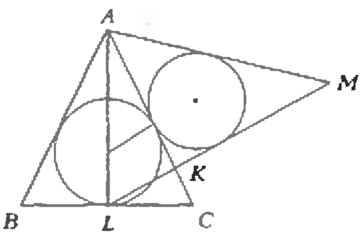


Рис. 1

Задача (А), наиболее известная из всех четырех задач, связана с именем знаменитого геометра Якоба Штейнера, который нашел первое «чисто геометрическое» (т.е. без использования алгебры и тригонометрии) доказательство. Задачи (Б) и (В) известны тем, что по слухам, бытующим среди абитуриентов, они предлагаются на устных экзаменах в качестве вопросов «на засыпку». Задача (Г) появилась совсем недавно, как геометрическая интерпретация алгебраического решения задачи (В).

Заметим, что все четыре задачи тесно связаны в том смысле, что из решения каждой из них следует решение предыдущей. Действительно, если утверждение задачи (Г) доказано, то построение треугольника ABC по углу A, биссектрисе AL и стороне BC легко осуществить следующим образом.

Построим сначала ΔALK по гипотенузе и острому углу, затем построим ΔAMK по двум катетам. После этого легко восстановить вписанную в ΔABC окружность по точке касания со стороной AC окружности, вписанной в ΔAKM. Наконец, проведя касательную из точки L к этой окружности, построим ΔABC, т.е. решим задачу (В). Поскольку полное решение задачи (В) предполагает доказательство единственности построения (которая в случае нашего построения очевидна), то из решения задачи (В) должно следовать утверждение (Б). Наконец, при помощи признака равенства треугольников задачи (Б) легко получается решение задачи Штейнера (А).

Действительно, если в ΔABC равны биссектрисы BM и CN и O — точка их пересечения (рис.2), то у треугольников ABM и ANC общий угол A при вершине, общая биссектриса AO и равные основания BM и CN. В силу утверждения задачи (Б) эти треугольники равны, а тогда равны соответственные стороны этих треугольников, т.е. AB и AC (очевидно, $AB \neq AN$).

Таким образом, решение каждой из задач (Б) — (Г) приводит к доказательству знаменитого утверждения (А), которое даже иногда называют теоремой Штейнера – Лемуса (так как Лемус предложил Штейнеру найти чисто геометрическое решение этой задачи).

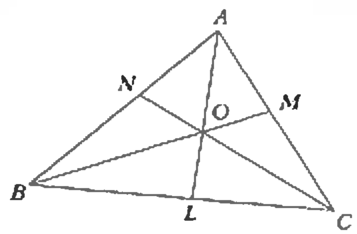


Рис. 2

Перейдем теперь к *первому решению* задачи (А). Оно взято из книги Коксетера и Грейтцера «Новые встречи с геометрией», где можно также более подробно прочитать об истории задачи Штейнера.

Очевидно, достаточно доказать следующее утверждение. *Пусть в треугольник ABC угол B меньше угла C. Тогда биссектриса BM больше биссектрисы CN.*

Доказательство. Выберем точку M' на отрезке BM так, чтобы $\angle M'CN = \angle NBM'$ (это можно сделать, так как $\angle NBM = \frac{1}{2}\angle B < \frac{1}{2}\angle C$). Тогда точки B, N, M', C лежат на одной окружности с центром в точке O (рис.3), причем

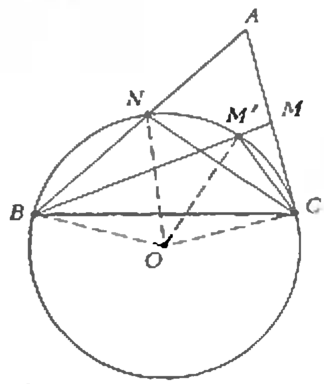


Рис. 3

$$\angle B < \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) < \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C).$$

Следовательно,

$$\angle NBC < \angle BCM' < 90^\circ.$$

Но тогда для центральных углов

$$\angle NOC = 2\angle NBC$$

и

$$\angle BOM' = 2\angle BCM'$$

справедливы неравенства

$$\angle NOC < \angle BOM' < 180^\circ.$$

Отсюда следует, что соответствующая хорда CN меньше хорды BM', а значит и отрезка BM, что и требовалось доказать.

Приведем теперь *второе решение* задачи (А).

Пусть в ΔABC равны биссектрисы CN и BM. Докажем, что тогда $AC=AB$.

Выберем точку K так, чтобы $BM \parallel KC$ и $BK \parallel MC$, т.е. чтобы четырехугольник $BMCK$ был параллелограммом (рис.4).

Тогда $CN=BM=KC$ и треугольник NCK равнобедренный.

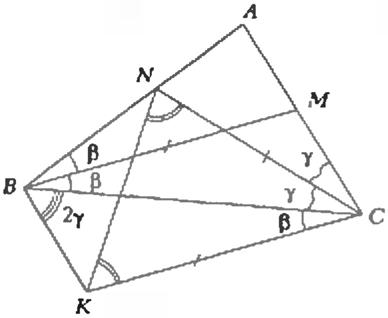


Рис. 4

Предположим теперь, что $AB>AC$, т.е. $\angle C=2\gamma>\angle B=2\beta$. Тогда $\gamma>\beta$ и треугольники BNC и BKC имеют общую сторону BC и равные стороны CN и CK. Известно, что тогда большему углу между этими сторонами соответствует большая третья сторона $BN>BK$. Отсюда следует, что $\angle BKN>\angle BNK$ и тогда $\angle BKC>\angle BNC$, так как в равнобедренном треугольнике NCK равны углы при основании NK. Запишем неравенство

$$\angle BKC>\angle BNC,$$

выразив эти углы через углы γ и β. Тогда получим

$$180^\circ-\beta-2\gamma>180^\circ-2\beta-\gamma.$$

Но из этого неравенства следует, что $\beta>\gamma$, т.е. предположение $AB>AC$ противоречиво. Точно так же приводится к противоречию предположение $AC>AB$. Следовательно, $AC=AB$, что и требовалось доказать.

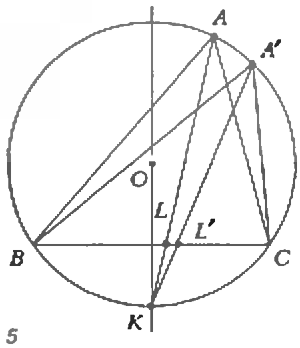


Рис. 5

Третье решение задачи (А) получим как следствие задачи (Б). Такое решение можно найти во многих задачниках, например в книге И.Ф.Шарыгина «Задачи по геометрии: планиметрия».[1]

Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ совмещены равные основания $BC=B'C'$, равны углы при вершинах A и A' и равны биссектрисы AL и $A'L'$, причем вершины A и A' лежат по одну сторону от диаметра OK окружности, описанной вокруг ΔABC, где K — середина дуги BC (рис.5). Докажите, что тогда вершины A и A' совпадут.

Так как $\angle A=\angle A'$, то точка A' лежит на той же окружности, причем продолжения биссектрис AL и $A'L'$ пересекают окружность в точке K. Предположим, что A' лежит на дуге AC (случай, когда A лежит на дуге $A'C$, рассматривается аналогично). Тогда $AK>A'K$ и $KL<KL'$, откуда

$$AL=AK-KL>A'K-KL'=A'L',$$

что невозможно. Противоречие доказывает, что точки A и A' должны совпадать, и задача (Б) решена.

Заметим, что все три рассмотренные выше решения использовали метод доказательства «от противного», т.е. приведения к противоречию. Прямое доказательство теоремы Штейнера можно получить, решив задачу (В).

Мы рассмотрим два способа решения задачи (В), которые дадут нам соответственно *четвертое* и *пятое решения* задачи Штейнера.

Первый способ — алгебраический. Он представляет интерес с двух точек зрения. Во-первых, в тех случаях, когда другие методы не позволяют просто найти решение, алгебраический подход вполне корректен и универсален. Яркий пример тому — знаменитое построение Гауссом правильного 17-угольника. Во-вторых, любое алгебраическое решение (т.е. сведение задачи к построению отрезков, длины которых выражаются через длины известных отрезков с помощью арифметических операций и извлечения корня) может быть всегда интерпретировано геометрически. Это приводит иногда к любопытным новым утверждениям, как например, в нашем случае задача (Г).

Итак, *четвертое решение*. *Пусть известны $\angle A=2\alpha$, биссектриса $AL=l$ и основание $BC=a$ (рис.6). Найдем выражения для сторон $AB=c$ и $AC=b$ через эти данные для построения ΔABC.*

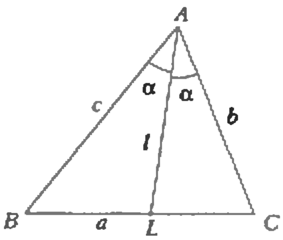


Рис. 6

Запишем выражение для площади ΔABC как сумму площадей ΔABL и ΔALC. Тогда получим

$$\frac{1}{2}bc\sin 2\alpha=\frac{1}{2}bl\sin\alpha+\frac{1}{2}cl\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}(b+c)l\sin\alpha.$$

Отсюда получаем полезную формулу

$$l=\frac{2bc\cos\alpha}{b+c}, \qquad (*)$$

которая накладывает одно ограничение на величины b и c. Второе соотношение получим из теоремы косинусов:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 2\alpha=$$
$$=(b+c)^2-2bc(1+\cos 2\alpha).$$

Применив равенство $(*)$, получим квадратное уравнение относительно $(b+c)$:

$$a^2=(b+c)^2-\frac{l(b+c)}{\cos\alpha}(1+\cos 2\alpha),$$

или

$$(b+c)^2-2(l\cos\alpha)(b+c)-a^2=0,$$

откуда следует еще одна полезная формула

$$b+c=l\cos\alpha+\sqrt{l^2\cos^2\alpha+a^2}. \qquad (**)$$

С помощью этих соотношений находим

$$(b-c)^2=(b+c)^2-4bc=$$
$$=a^2+2(l\cos\alpha)(b+c)-\frac{2l(b+c)}{\cos\alpha},$$

$$b-c=\pm\sqrt{a^2+2l(b+c)\left(\cos\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}\right)}.$$

Теперь уже ясно, что с помощью $(**)$ и этой формулы отрезки b и c выражаются в радикалах через известные отрезки a, $l/\cos\alpha$, $l\cos\alpha$, причем для построения ΔABC решение единственно, так как при $b<c$ получается тот же треугольник ABC. Мы не будем интерпретировать соответствующее геометрическое построение, поскольку это сделано в задаче (Г) более простым методом.

Докажем теперь утверждение задачи (Г), что даст нам *пятое решение* задачи Штейнера.

Во-первых, заметим, что из $(**)$ следует равенство периметров треугольников ABC и AKM, так как $AK=l\cos\alpha$ и $AM=\sqrt{l^2\cos^2\alpha+a^2}$. Пусть O и O' — центры окружностей, вписанных в ΔABC и ΔAKM (рис.7), и пусть S и S' — площади ΔABC и ΔAKM соответственно. Обозначим через r и r' радиусы этих окружностей. Из формулы

$$S=\frac{(a+b+c)}{2}\cdot r$$

следует, что $S/S'=r/r'$, так как пери-

[1] М.: Наука, 1986. — Б-чка «Квант», вып. 17.

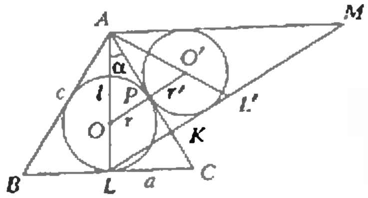


Рис. 7

метры треугольников равны. Но, с другой стороны,

$$\frac{S}{S'}=\frac{AC\cdot LK}{AC\cdot L'K}=\frac{LK}{L'K},$$

т.е. $r/r'=LK/L'K$, откуда легко следует, что окружности касаются стороны AC в точке P, для которой

$$\frac{AP}{AK}=\frac{r}{LK}=\frac{r'}{L'K},$$

и задача (Г) решена.

Шестое решение задачи Штейнера можно получить как простое следствие формулы (*).

Пусть в ΔABC равны биссектрисы углов $\angle B=2\beta$ и $\angle C=2\gamma$ (рис.8):

$$l_C=\frac{2ab\cos\gamma}{(a+b)}=l_B=\frac{2ac\cos\beta}{(a+c)}.$$

Докажем, что тогда $\angle B=\angle C$, т.е. $AB=AC$.

Действительно,

$$\frac{l_C}{l_B}=\frac{b\cos\gamma(a+c)}{c\cos\beta(a+b)}=\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\cdot\frac{ab+bc}{ac+bc}=1.$$

Предположим, что $\gamma>\beta$. Тогда $\cos\gamma<\cos\beta$ и $c>b$, т.е. $ab+bc<ac+bc$, противоречие с предыдущим равенством. Аналогично не может быть $\gamma<\beta$, и задача решена.

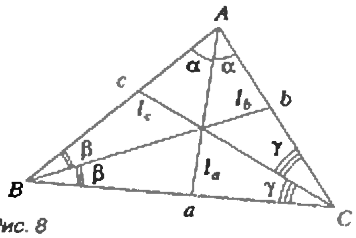


Рис. 8

И, наконец, в качестве упражнения предоставим читателю самостоятельно найти *седьмое решение* с помощью формулы $l_A^2=bc\left(1-a^2/(b+c)^2\right)$, которая следует из (*) и теоремы косинусов.

В заключение отметим, что пока никому не удалось получить чисто геометрическое решение задачи (Г). Возможно, читателям удастся это сделать?

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Идеальные проводники и кинетическая индуктивность

С.ГОРДЮНИН

В этой статье речь пойдет об идеальных индуктивностях, т.е. о контурах и катушках из проводов с бесконечной проводимостью (без омического сопротивления).

Начнем с нескольких задач. Их решение основано, в сущности, на законе Ома $U=IR$ – если сопротивление проводника равно нулю, на таком проводнике не может возникнуть напряжение.

Задача 1. *Идеально проводящее тонкое кольцо радиусом a, индуктивностью L и массой m влетает со скоростью v_0 в область однородного магнитного поля с индукцией B перпендикулярно линиям поля. Требуется найти скорость кольца в поле.*

Так как сопротивление кольца равно нулю, в нем не может возникнуть ЭДС индукции. Значит, не меняется поток магнитного поля через кольцо. Поток магнитного поля складывается из потока внешнего поля, который изменяется при влете кольца от нуля до $B\pi a^2$, и потока магнитного поля индукционного тока, возникающего в кольце и равного LI. Эти потоки противоположны по знаку, таким образом, в любой момент времени

$$\Phi_{ext}(t)-LI(t)=0$$

(индекс ext происходит от слова external — внешний), или в области однородности поля

$$I(t)=\frac{B\pi a^2}{L}.$$

Энергия возникшего магнитного поля тока в кольце равна

$$W_м=\frac{LI^2}{2}=\frac{\left(B\pi a^2\right)^2}{2L}.$$

По закону сохранения энергии получаем

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{\left(B\pi a^2\right)^2}{2L},$$

откуда

$$v=\sqrt{v_0^2-\frac{\left(B\pi a^2\right)^2}{mL}}.$$

Если $v_0^2<\left(B\pi a^2\right)^2/(mL)$, кольцо отразится от границы области, занимаемой полем, — кольцо тормозится силой Ампера, действующей на ток в кольце со стороны внешнего поля.

Задача 2. *Идеальная индуктивность L в момент времени $t=0$ замыкается на батарейку без внутреннего сопротивления с ЭДС $\mathcal{E}$. Найдите зависимость тока в цепи от времени.*

Напряжение на индуктивности должно быть равно нулю. А оно равно сумме (алгебраической) ЭДС батарейки $\mathcal{E}$ и ЭДС самоиндукции $-L\frac{dI}{dt}$. Таким образом,

$$\mathcal{E}+\left(-L\frac{dI}{dt}\right)=0,$$

откуда

$$I(t)=\frac{\mathcal{E}}{L}t.$$

Вот и все. И все по законам электродинамики. Одна только загвоздка. Откуда идеально проводящие электроны «знают», что им к данному моменту нужно создать ток $I(t)$? Ведь ни в индуктивности, ни в кольце нет напряжения, значит, в проводах нет электрического поля. А электроны могут менять свою кинетическую энергию только под действием *электрического поля*. И если мы доверяем законам механики и электродинамики, то должны признать, что в идеальных проводниках вполне законно наличие ЭДС. Электроны надо ускорять! Разберется.

Рассмотрим самую простую, но достаточную для общего понимания ситуацию (начинать надо всегда с максимально упрощенных задач). Пусть плоский, круглый, сделанный из тонкого провода без сопротивления контур помещен в перпендикулярное внешнее магнитное поле (не обязательно однородное). И пусть силовые линии индукционного электрического поля в отсутствие колечка образуют концентрические окружности, общий центр которых совпадает с центром колечка. (Максимально простая геометрия, не правда ли?) Внешнее поле начинает меняться, для простоты — от нуля. ЭДС индукции в колечке должна быть, поэтому *полный поток* через него *не равен нулю*. Если E_i — напряженность индукционного поля, а $\mathscr{E}_i$ — ЭДС индукции, то $E_i = \mathscr{E}_i/(2\pi a)$, где a — радиус колечка.

Запишем второй закон Ньютона для электрона в колечке:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = eE_i(t) = \frac{e\mathscr{E}_i(t)}{2\pi a}.$$

Скорость электронов в момент t связана с током известным соотношением $I(t) = nev(t)s$, где n — концентрация электронов, s — площадь сечения провода. Выразим v через I, тогда уравнение Ньютона приобретет вид

$$\left(\frac{m\cdot 2\pi a}{ne^2 s}\right)\frac{dI}{dt} = \mathscr{E}_i.$$

То, что стоит в скобках, имеет размерность индуктивности. Это указывает на то, что закону Ньютона для электронов в идеальном проводнике можно придать вид закона электромагнитной индукции Фарадея (с точностью до знака). Выражение в скобках называют кинетической индуктивностью и обозначают L_κ.

Аналогия, как и следовало ожидать, идет дальше. Кинетическая энергия всех электронов проводника равна

$$\frac{mv^2}{2}\cdot n\cdot 2\pi as = \frac{L_\kappa I^2}{2},$$

т.е. представляется как бы магнитной энергией. Стоит задуматься о феноменально согласованном действии механики Ньютона и электродинамики Фарадея — Максвелла.

Пойдем дальше. По закону электромагнитной индукции,

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d}{dt}\left(\Phi_{ext} + LI\right),$$

таким образом,

$$L_\kappa\frac{dI}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\Phi_{ext} + LI\right),$$

или

$$\left(L + L_\kappa\right)\frac{dI}{dt} = \mathscr{E}_{ext}.$$

Теперь итог: учет электрического поля в идеальных проводниках и инертности электронов просто сводится к добавлению к индуктивности контура L (ее называют геометрической индуктивностью) кинетической индуктивности

$$L_\kappa = \frac{ml}{ne^2 s}\ (l \text{ — длина контура}).$$

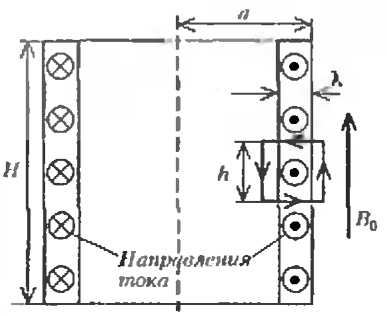
Вы уже догадались, что в большинстве случаев $L_\kappa \ll L$. Сделаем оценки. Индуктивность тонкого колечка радиусом a по порядку величины равна (точно в школе не вычислить) $L \sim \mu_0 a$ (здесь $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная). Поэтому

$$\frac{L_\kappa}{L} \sim \frac{ma}{ne^2 s\mu_0 a} \sim \frac{\lambda_L^2}{s},\ \text{где}\ \lambda_L^2 = \frac{m}{ne^2\mu_0}.$$

При оценке надо все же учесть, что это не обычные электроны, а какие-то «сверхтекучие», и все величины снабдить соответствующим индексом S: m_S, e_S, n_S. Но $m_S = m_e$ — ничего другого в металлах нет, так же и $e_S = e$. А вот n_S может быть и меньше, чем плотность электронов в типичных металлах (возможно, они не все «сверхтекучие»). И может быть (так оно и есть), n_S зависит от температуры и при некоторой температуре может вообще обращаться в ноль. Мы для оценки примем, что все электроны «сверхтекучие», т.е. оценим минимальное значение λ_L. Оказывается (подставьте и убедитесь), что типичные значения $\lambda_L \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ см. Существенно и замечательно, что это хотя и малые длины, но макроскопические. Если бы получилось, к примеру, $10^{-8} - 10^{-9}$ см, наше с самого начала макроскопическое, т.е. усредненное по многим атомным размерам, рассмотрение лишалось бы смысла.

Таким образом, для проводников с толщинами больше 10 мкм кинетической индуктивностью можно спокойно пренебречь (электроны легкие, плотность их велика, а заряд «недостаточно» мал). То что кинетическая индуктивность велика при малых сечениях, понятно — заданный ток через малое сечение требует больших скоростей зарядов, и, значит, их кинетическая энергия растет.

Наличие кинетической индуктивности, однако, играет не только познавательную роль. Рассмотрим идеально проводящий цилиндр, длина которого H много больше его радиуса a (см. рисунок). Внесем его в однородное магнитное поле, индукция $\vec{B}_0$ которого параллельна образующей цилиндра. Если забыть про кинетическую индуктивность, то сразу придем к выводу, что поле внутри цилиндра полностью отсутствует — через любой контур внутри него не может возникнуть поток. Понятно — по поверхности течет ток, создающий внутри цилиндра встречное магнитное поле, равное внешнему. Можно сказать, идеальный соленоид (без всяких обмоток). Но такое состояние энергетически невыгодно! Ведь кинетическая индуктивность поверхностных токов, а значит и их кинетическая энергия, бесконечно велика (толщина ноль). Поэтому ток будет течь по поверхностному слою конечной толщины, следовательно, и поле будет проникать в цилиндр на такую же глубину.



Покажем это, оценив энергию цилиндра во внешнем поле. Примем, что в некотором слое толщиной λ ($\lambda \ll a$) ток и поле распределены однородно, т.е. поле в слое везде равно B_0, а ток равен I. Тогда

$$W = \frac{B_0^2}{2\mu_0}V_L + \frac{L_\kappa I^2}{2},$$

где $V_L = 2\pi a\lambda H$ — объем цилиндра, занятый полем. (Если бы не кинетический член, то минимум энергии требовал бы, чтобы объем V_L был ноль.) В нашем случае

$$L_\kappa = \frac{m_S\cdot 2\pi a}{n_S e_S^2 H\lambda}.$$

А ток найдем по теореме о циркуляции (см. рисунок):

$$B_0 h = \mu_0 I\frac{h}{H},\ \text{и}\ I = \frac{B_0 H}{\mu_0}.$$

Таким образом,

$$W = \frac{B_0^2}{2\mu_0}2\pi aH\left(\lambda + \frac{\lambda_L^2}{\lambda}\right).$$

Все, конечно, знают, что минимум скобки достигается при равенстве двух слагаемых, значит, $\lambda = \lambda_L$. Поле и ток проникают в идеальный проводник на глубину λ_L, из проводников меньших размеров поле не вытесняется!

Величина λ_L называется лондоновской глубиной проникновения магнитного поля. Ее впервые получил 60 лет назад в первой удачной теории сверхпроводимости известный английский физик Ф.Лондон.

Сформулируем теорему о циркуляции магнитного поля для тех, кто с ней незнаком. Если провести в магнитном поле замкнутый контур и вычислить вдоль этого контура величину $\sum_i \vec{B}_i\cdot\Delta\vec{l}_i$, которую называют циркуляцией поля $\vec{B}$ (внешне похоже на работу силы), то получим величину, пропорциональную току, пронизывающему выбранный контур:

$$\sum_i \vec{B}_i\cdot\Delta\vec{l}_i = \mu_0 I.$$

Например, проведя вокруг бесконечного прямого провода с током I окружность радиусом r, получим $B\cdot 2\pi r = \mu_0 I$, т.е. магнитная индукция вокруг провода равна $B = \mu_0 I/(2\pi r)$.

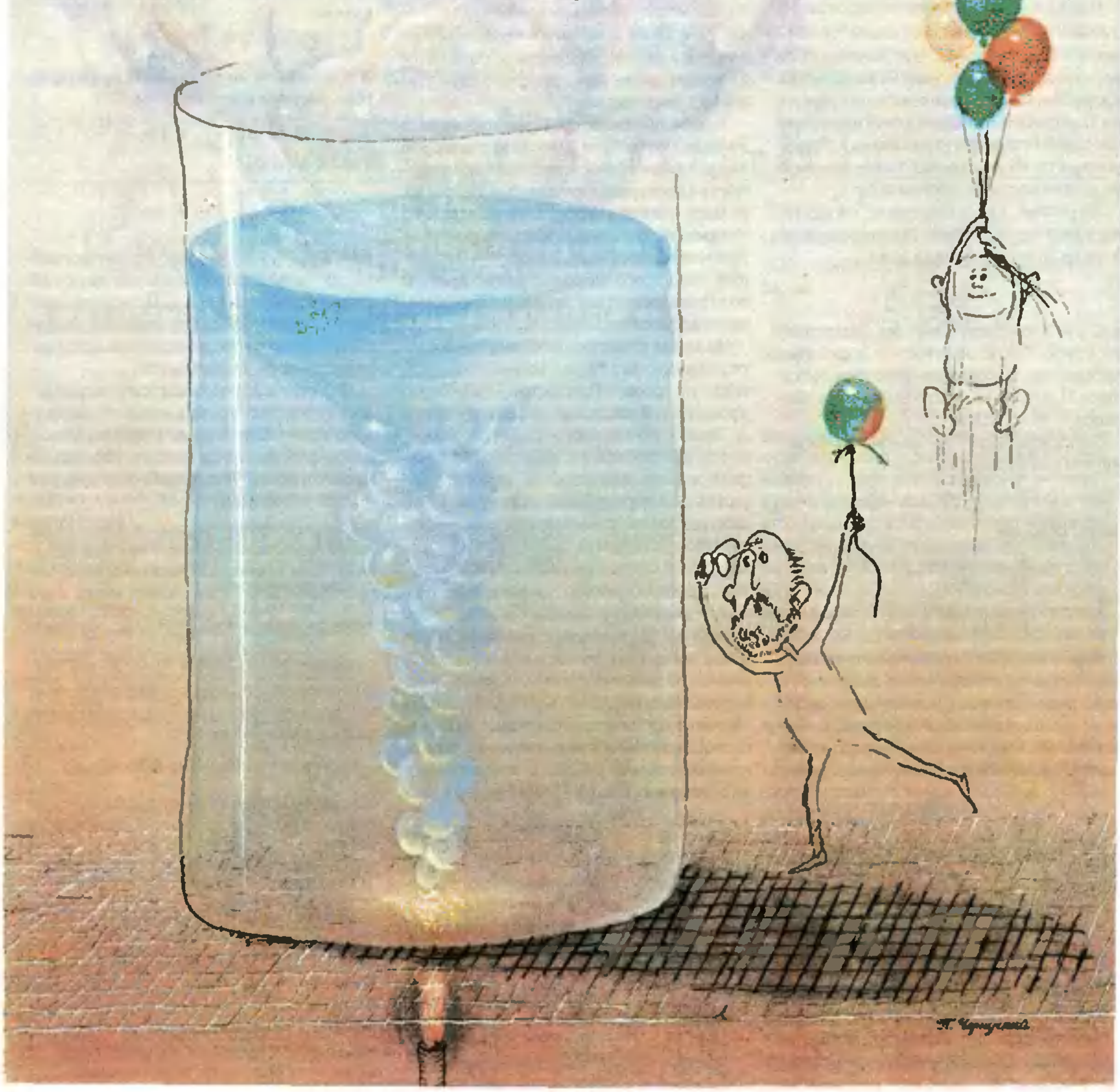
Я старательно избегал писать «сверхпроводник», предпочитая везде использовать термин «идеальный проводник». И не зря — это вовсе не одно и то же. Если, конечно, под сверхпроводником понимать реально существующие сверхпроводники со всеми их свойствами, а не то, что просто не имеет сопротивления. Но об этом — в другой раз.

Пузыри и вихри в кипящей жидкости

Т.ПОЛЯКОВА, В.ЗАБЛОЦКИЙ, О.ЦЫГАНЕНКО

Кипение жидкости — явление, которое мы можем наблюдать практически каждый день. И, казалось бы, увидеть что-либо новое и удивительное в кипении обычной воды невозможно. На самом же деле это довольно сложный и многообразный процесс, который и на сегодняшний день исследован далеко не в полной мере.

В этой статье речь пойдет о кипении вращающейся воды. Начнем с описания простого опыта, который каждый может осуществить у себя дома. Будем подогревать воду в цилиндрическом сосуде радиусом около 10 см и высотой 25 – 30 см. В тот момент, когда вода начнет закипать, приведем ее в состояние быстрого вращения, например размешав ее ложкой. Поверхность жидкости примет форму поверхности параболоида вращения, а ее угловая скорость вращения, как и следовало ожидать, будет со временем постепенно уменьшаться вследствие трения о стенки сосуда. Но если нагревание производить с помощью источника тепла, который локализован преимущественно в центре дна сосуда, то мы сможем наблюдать очень странную кар-



тину. А именно. Вода начинает кипеть лишь вблизи центра дна, и большое количество пузырьков пара быстро поднимается вдоль оси вращения. Потом на поверхность воды вырывается столб пара, что сопровождается характерным шумом и разлетающимися брызгами воды. Сразу после этого уровень воды вблизи стенок сосуда понижается, а угловая скорость ее вращения увеличивается. Затем скорость вращения жидкости снова начинает уменьшаться, и через некоторое время (1–2 с) все повторяется вновь. Графически зависимость угловой скорости вращения кипящей жидкости от времени можно изобразить кривой A на рисунке 1. Здесь же кривой B показана зависимость угловой скорости вращения некипящей жидкости.

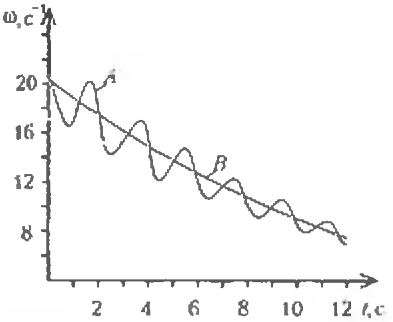


Рис. 1

Если вы решили проделать этот опыт, но у вас ничего не получилось, не отчаивайтесь. Попробуйте еще раз, изменив интенсивность нагрева или высоту уровня воды в сосуде. Дело в том, что это явление очень капризно к условиям нагревания. (Опыт получается лучше, если нагревание производится при помощи газовой горелки.)

При сравнении кривых A и B возникает по меньшей мере два вопроса. 1) Почему, в отличие от некипящей жидкости, зависимость угловой скорости вращения кипящей жидкости от времени имеет осциллирующий характер? 2) Чем определяется период осцилляций угловой скорости? Чтобы ответить на эти вопросы и разобраться в физике наблюдаемого явления, прежде остановимся на основных закономерностях кипения жидкости, подогреваемой снизу.

Как известно, кипением называется процесс интенсивного парообразования, характеризующийся непрерывным возникновением и ростом внутри жидкости пузырьков пара, которые всплывают к поверхности жидкости под действием силы Архимеда. Важнейшей величиной, определяющей характер кипения жидкости, является так называемый температурный напор $\Delta T = T_1 - T_S$, где T_1 – температура горячей поверхности нагревателя, T_S – температура кипящей жидкости. В зависимости от ΔT различают три различных характера кипения жидкости: пузырьковый, переходной и пленочный. Кроме того, если температура жидкости (T_0) во всем объеме равна температуре кипения, то такое кипение называется насыщенным. Если же $T_0 < T_S$, а жидкость кипит только вблизи поверхности нагревателя, то это ненасыщенное (или недогретое) кипение.

В пузырьковом кипении принято выделять четыре основных этапа. Первый этап для воды, которая подогревается в металлическом сосуде, наблюдается при ΔT = 10 – 16 К и называется областью отдельных пузырьков. Для этого этапа характерно наличие отдельных активных центров образования пузырьков. Поверхностные и оторвавшиеся пузырьки пара не взаимодействуют между собой. Вокруг каждого центра существует «зона влияния», радиус которой равен отрывному диаметру пузырька d_0. («Зона влияния» всплывающих пузырьков представляет собой шар диаметром $2d_0$.) С увеличением ΔT число активных центров на дне сосуда возрастает, а расстояние между соседними центрами уменьшается. Когда среднее расстояние между активными центрами становится равным приблизительно $2d_0$, наступает второй этап кипения. На этом этапе в некоторых центрах вместо отдельных пузырьков возникают непрерывные цепочки пузырьков – столбики пара, образующиеся вследствие взаимодействия пузырьков. При дальнейшем увеличении ΔT начинает происходить слияние пузырьков не только в одном столбике, но и в соседних активных центрах. В результате слияния нескольких столбиков возникает структура, называемая паровым грибом, и пузырьковое кипение вступает в третий этап – область паровых грибов. При этом с нагреваемой поверхности поднимаются большие облака пара. Обычно паровые грибы соединены с нагреваемой поверхностью большим количеством паровых ножек. Когда паровой гриб вырастает до достаточно крупного размера, он отрывается у основания и всплывает. Четвертый этап кипения начинается для воды при ΔT = 22 К (и длится до наступления так называемого кризиса кипения). На этом этапе ножки грибов сливаются друг с другом, и получается так, что паровое облако непосредственно соприкасается с нагреваемой поверхностью. (Таким образом, четвертый этап кипения уже содержит отдельные области пленочного кипения. О пленочном кипении жидкости рассказывается, например, в увлекательной статье Дж. Уокера «Как кипит вода?» (см. «Квант», 1991, №5).)

Приступим к объяснению загадки возникновения осцилляций угловой скорости кипящей жидкости.

Пусть жидкость вращается (целиком, как твердое тело) с угловой скоростью ω. Легко показать, что в этом случае ее свободная поверхность удовлетворяет уравнению

$$z - z_0 = \frac{\omega^2}{2g} r^2, \qquad (1)$$

где g – ускорение свободного падения, z и r – обозначены на рисунке 2. Так как давление жидкости на дно сосуда равно $p = \rho g z$, из уравнения (1) найдем зависимость давления вблизи дна сосуда как функцию расстояния до оси вращения:

$$p = p_0 + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}, \qquad (2)$$

где p_0 – давление в центре дна, ρ – плотность жидкости. Если во вращающейся жидкости образовался пузырек пара радиусом R, то он сможет расти только в том случае, когда давление внутри пузыря ($p_п$) будет превосходить сумму внешнего давления (2) и добавочного давления под изогнутой поверхностью жидкости (лапласовского давления), равного $2\sigma/R$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Из (2) следует, что при одной и той же температуре всех участков поверхности дна более благоприятные условия для роста имеют пузыри, образующиеся в центре. Кроме этого, при удалении от оси вращения растет линейная скорость вращения жидкости, что также неблагоприятно сказывается на процессе роста пузырьков. Если все же пузырек и образовался не в центре дна, то под действием силы Архимеда, равной в этом случае $\rho\omega^2 rV$, где V – объем пузыря, и направленной к оси вращения, он будет двигаться к центру.

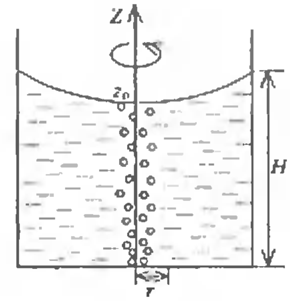


Рис. 2

Мы пришли к выводу, что во вращающейся жидкости все пузырьки должны концентрироваться вблизи оси вращения. Поэтому рассмотрим более детально условие роста пузырька, который

Иллюстрация П. Чернуского

находится на оси вращения жидкости. Для характеристики степени завихренности течения жидкости (или газа) вводится специальная физическая величина — циркуляция скорости Γ. Вокруг нашего пузырька циркуляция скорости отлична от нуля и равна

$$\Gamma = 2\pi\omega R^2.$$

Наличие такой циркуляции означает, что на пузырек (точнее на его «экватор») со стороны жидкости действует отрицательное давление, которое можно выразить через циркуляцию скорости:

$$p_\Gamma = -\frac{\rho\omega^2 R^2}{2} = -\frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 R^2}.$$

Тогда условие роста пузыря будет выполненным, если $p_п \ge p_1$, где

$$p_1 = p_0 + \frac{2\sigma}{R} - \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 R^2}. \qquad (3)$$

Если построить в соответствии с равенством (3) графики зависимостей p_1 от R при различных значениях циркуляций, то получим кривые, приведенные на рисунке 3. Эти кривые показывают, что с возрастанием циркуляции скорости выполнение условия роста пузырька облегчается (условия смягчаются). (Интересно заметить, что давление жидкости, обусловленное ее вращением вокруг пузырька, играет роль, противоположную лапласовскому давлению. Например, для вращающейся воды роль лапласовского давления в процессе кипения будет сведена к нулю при значениях циркуляции $\Gamma > 1{,}5$ см^2/с. А это означает, в частности, что получить перегретую воду, в которой есть вихри с таким значением циркуляции, невозможно.)

Из предыдущих рассуждений и рисунка 3 можно заключить, что вихрь с любым значением циркуляции скорости представляет собой возможный центр образования пузырьков. Именно такие центры и возникают в нашем опыте с

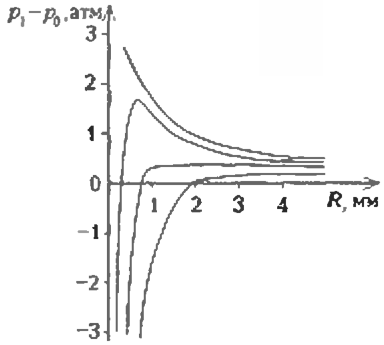


Рис. 3

вращающейся водой. Поскольку температура воды в сосуде $T_0 < T_S$ (т.е. мы имеем дело с недогретым кипением), центры кипения могут возникать только вблизи поверхности дна, где циркуляция скорости максимальна. Так как температура кипения определяется из условия $p_п(T_S) = p_1$, то в соответствии с равенством (3) (см. также рис. 3) температура кипения воды в местах, где $\Gamma \ne 0$, оказывается ниже, чем там, где $\Gamma = 0$. Это означает, что в центре дна сосуда величина температурного напора $T_1 - T_S$ может быть значительно больше, чем в других точках дна.

Если в центре дна температурный напор достигает значений $\Delta T \approx 16-20$ К, то наступает второй или третий этап пузырькового кипения (в зависимости от величины Γ). В нашем опыте, скорее всего, имеет место третий этап. Паровые грибы, образовавшиеся в центре дна, поднимаясь вверх вдоль оси вращения, сливаются друг с другом и образуют довольно крупные полости пара, поднимающиеся на поверхность. Когда такой столб пара вырывается в центре поверхности жидкости, то в образующееся «пустое» пространство устремляется «холодная» вода ($T_0 < T_S$) с поверхности. Вода движется вниз, вращаясь почти точно так, как это происходит, когда вы выпускаете воду из ванны. В этот момент угловая скорость вращения воды в сосуде увеличивается, поскольку при перемещении некоторой массы воды от стенок цилиндра к оси вращения уменьшается момент инерции системы. (Здесь уместно вспомнить о законе сохранения момента импульса замкнутой системы. О нем рассказывается, например, в статье В.Сурдина «Тайна «утренней звезды» (см. «Квант», 1995, № 6). — *Прим. ред.*) Холодная вода, пришедшая с поверхности, быстро нагревается в центре сосуда до температуры, при которой вихрь вновь превращается в активный центр кипения. Снова на оси вращения образуются большие паровые полости, которые вытесняют воду ближе к стенкам сосуда, тем самым увеличивая момент инерции воды и уменьшая угловую скорость ее вращения перед выходом столба пара на поверхность.

Таким образом, ответ на первый из поставленных в начале статьи вопросов может быть дан в очень простой форме. Некипящая жидкость монотонно уменьшает свою скорость вращения вследствие трения о стенки сосуда, подобно фигуристу на льду, который не изменяет положения своих рук при вращении. Кипящая же жидкость изменяет свою угловую скорость вращения подобно фигуристу, который во время вращения периодически разводит руки в стороны и прижимает их к туловищу.

Нам остается выяснить, кто же дирижирует движением рук нашего «фигуриста», или от чего зависит период осцилляций угловой скорости вращения кипящей жидкости. Ясно, что в соответствии с предложенным механизмом возникновения осцилляций их период равен сумме времени всплывания парового пузыря (t_1) и времени «падения» воды от поверхности до дна (t_2). Известно, что крупные пузыри ($R > 0{,}1$ см) в воде всплывают со скоростью $v \approx 30$ см/с. Поэтому время всплывания пузыря $t_1 = z_0/v \approx 0{,}7$ с. Время t_2 найти несколько сложнее, так как вода движется вниз по сложной кривой. Однако грубую оценку можно получить, используя формулу $H = gt^2/2$ для свободного падения. При $H = 25-30$ см это дает $t_2 \approx 0{,}3$ с. Тогда для периода осцилляций угловой скорости получаем

$$T = t_1 + t_2 \approx 1 \text{ с},$$

что находится в хорошем согласии с опытными данными.

Интересно также понаблюдать, как происходит недогретое кипение воды при малых значениях циркуляции скорости в вихре. Для этого воду перед началом кипения надо вращать не очень быстро, а само явление наблюдать при освещении поверхности воды светом лампы. Если скорость нагрева невелика и источник тепла достаточно локализован, то вблизи оси вращения возникает отдельный активный центр образования пузырьков. В этом случае наблюдается второй этап пузырькового кипения — пузырьки, взаимодействуя по вертикали, образуют столбик пара. Когда пар выходит на поверхность, то, естественно, никакого изменения угловой скорости вращения всей жидкости не происходит, так как слишком малы источник парообразования и масса воды, вовлеченная в процесс кипения. Однако в центре поверхности воды можно наблюдать небольшую воронку, которая видна как темное пятно на дне сосуда. (Углубление на поверхности воды служит рассеивающей линзой для света, идущего от лампы.) Это означает, что после выхода столбика пара холодная вода устремляется вниз. И действительно, через время порядка 0,5 — 1 с после появления воронки центр кипения прекращает свою активную деятельность, но, спустя некоторое время, все повторяется вновь.

В этой статье мы рассмотрели лишь некоторые аспекты пузырькового кипения жидкости, но и они позволили сделать несколько важных выводов, касающихся этого удивительного явления.

Нелинейные элементы в электрических цепях

В. МОЖАЕВ

ПОД нелинейными элементами будем понимать элементы, у которых вольт-амперная характеристика (зависимость тока I от напряжения U) не является прямой, проходящей через начало координат ($I = 0$, $U = 0$). О таких элементах говорят, что для них не выполняется закон Ома. Но это не означает, что нужно забыть о нем. Можно считать, что закон Ома остается справедливым в том смысле, что каждой паре значений I и U такого элемента соответствует свое значение сопротивления ($R = U/I$), равное некоторому линейному сопротивлению, вольт-амперная характеристика которого проходит через начало координат и через точку с координатами I, U.

Чисто линейных элементов в природе не существует. Любой резистор в той или иной степени является нелинейным элементом: его сопротивление зависит от температуры, растущей по мере нагрева от джоулевого тепла, от магнитного поля, вызванного протеканием через него тока, и, наконец, от величины напряженности электрического поля в нем. В одних случаях этими нелинейностями можно пренебречь, а в других они настолько велики, что сопротивления элементов в рабочем режиме возрастают в несколько раз (например, у лампочки накаливания).

Во всех современных электротехнических и радиотехнических устройствах чрезвычайно широко используются специальные нелинейные элементы: диоды, тиристоры, транзисторы и т.п.

Перейдем к рассмотрению конкретных электрических цепей, в которых присутствуют нелинейные элементы.

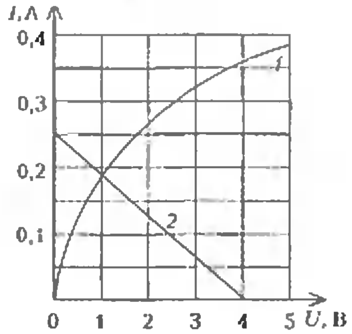


Рис. 1

Задача 1. *На рисунке 1 приведена вольт-амперная характеристика лампочки от карманного фонаря (кривая 1), включенной в схему, изображенную на рисунке 2. ЭДС батареи $\mathcal{E}$ = 4 В, сопротивление резистора r = 16 Ом, внутренним сопротивлением батареи пренебречь. Используя вольт-амперную характеристику лампочки, постройте график зависимости ее сопротивления от протекаемого тока. Определите ток в цепи сразу после замыкания ключа (индуктивностью пренебречь). Найдите графически установившийся ток в лампочке.*

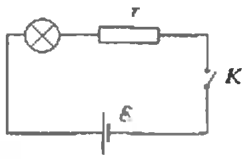


Рис. 2

Каждая точка на вольт-амперной характеристике лампочки соответствует стационарному состоянию: через лампочку течет постоянный ток I и на лампочке имеется постоянное напряжение U. Используя закон Ома, можно определить сопротивление лампочки: $R = U/I$. Полученная зависимость R от I изображена на рисунке 3.

А как определить сопротивление лампочки в отсутствие тока ($I = 0$)? Оказывается, для этого достаточно аккуратно снять вольт-амперную характеристику при допустимо малых значениях тока, вычислить соответствующие значения сопротивлений лампочки и построить

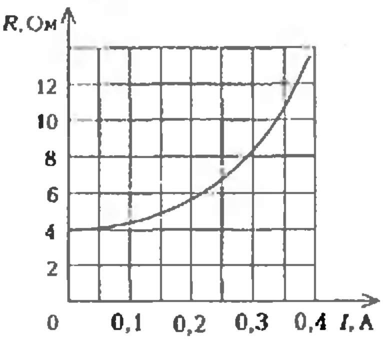


Рис. 3

зависимость $R(I)$ в увеличенном масштабе, а затем через эти точки провести прямую до пересечения с осью R. Точка пересечения и даст значение сопротивления обесточенной лампочки. Такой способ называется экстраполяцией.

Итак, сразу после замыкания ключа сопротивление лампочки R_0 = 4 Ом, следовательно, ток в лампочке

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + r} = 0{,}2 \text{ А}.$$

Затем начнется нагрев спирали лампочки, ее сопротивление будет расти, а ток в цепи уменьшаться, и через некоторое время установится стационарный режим, при котором наступит тепловой баланс: мощность тепловых потерь будет равна выделяемой в лампочке мощности.

Обозначим в установившемся режиме напряжение на лампочке через U, а ток через I, тогда закон Ома для данной цепи будет иметь вид

$$U = \mathcal{E} - Ir .$$

Поскольку $\mathcal{E}$ и r постоянные величины, зависимость $U(I)$ является уравнением прямой, которую можно провести по двум точкам: при $I = 0$ $U = \mathcal{E} = 4$ В, а при $U = 0$ $I = \mathcal{E}/r = 0{,}25$ А. Это — прямая *2* на рисунке 1. Любая точка на нашей прямой удовлетворяет закону Ома, который утверждает, что какой бы элемент не был включен в цепь (вместо лампочки), точка на плоскости I и U будет принадлежать данной прямой. Но различные элементы отличаются друг от друга своими вольт-амперными характеристиками. Поэтому установившееся значение тока в лампочке и напряжение на ней будут определяться точкой пересечения нашей прямой (*2*) и вольт-амперной характеристики лампочки (*1*):

$$I = 0{,}18 \text{ А}, \quad U = 1 \text{ В}.$$

Задача 2. В *схеме, изображенной на рисунке 4, ЭДС батареи $\mathcal{E}_2$ = 4 В, сопротивление резистора R = 50 Ом. Имеется также нелинейный элемент (НЭ), в котором ток I связан с приложенным к нему напряжением U соотношением*

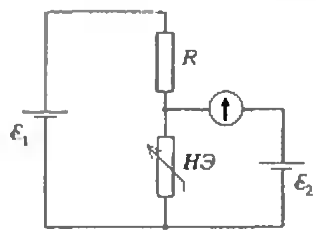


Рис. 4

$I = 0{,}02U^2$ (I — в амперах, U — в вольтах). Схема сбалансирована, т.е. гальванометр показывает отсутствие тока. Определите мощность батареи с ЭДС $\mathcal{E}_1$, пренебрегая ее внутренним сопротивлением.

Поскольку ток через гальванометр отсутствует, падение напряжения на нелинейном элементе равно ЭДС батареи $\mathcal{E}_2$, а следовательно, через нелинейный элемент течет ток

$$I = 0{,}02U^2 = 0{,}02\mathcal{E}_2^2.$$

Этот же ток протекает через резистор, поэтому падение напряжения на нем

$$U_R = IR = 0{,}02R\mathcal{E}_2^2.$$

ЭДС первой батареи равна

$$\mathcal{E}_1 = U + U_R = \mathcal{E}_2 + 0{,}02R\mathcal{E}_2^2.$$

Мощность этой батареи составляет

$$W = I\mathcal{E}_1 = 0{,}02\mathcal{E}_2^2\left(\mathcal{E}_2 + 0{,}02R\mathcal{E}_2^2\right) =$$

$$= 0{,}02\mathcal{E}_2^3(1 + 0{,}02R\mathcal{E}_2) = 6{,}4\ \text{Вт}.$$

Можно рассуждать иначе: для данного стационарного состояния будем считать наш нелинейный элемент обычным резистором, сопротивление которого $R_{нэ} = U/I = 1/(0{,}02\mathcal{E}_2)$. Тогда общее сопротивление цепи

$$R_{об} = R + R_{нэ} = R + \frac{1}{0{,}02\mathcal{E}_2},$$

выделяемая мощность

$$W = I^2R_{об} = (0{,}02)^2\mathcal{E}_2^4\left(R + \frac{1}{0{,}02\mathcal{E}_2}\right) =$$

$$= 0{,}02\mathcal{E}_2^3(1 + 0{,}02R\mathcal{E}_2).$$

Задача 3. *Для стабилизации напряжения применяют газоразрядную лампу стабиловольт, схема включения которого показана на рисунке 5. При изменении тока, протекающего через стабиловольт, от 5 до 15 мА напряжение на нем практически не меняется и остается равным 150 В. Сопротивление нагрузки $R_н = 10$ кОм. Определите сопротивление резистора R и входное напряжение, при которых напряжение на нагрузке остается постоянным при изменениях входного напряжения на $\pm 10\%$.*

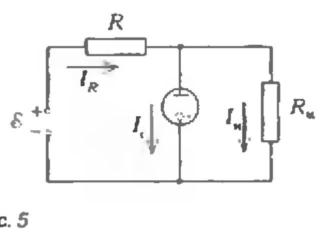


Рис. 5

Пусть через стабиловольт течет ток I_c, величина которого изменяется в пределах 5 мА < I_c < 15 мА. Обозначим напряжение на стабиловольте через U_c, тогда ток через сопротивление нагрузки составляет $I_н = U_c/R_н$. Ток через резистор R будет равен сумме двух токов:

$$I_R = I_c + I_н = I_c + \frac{U_c}{R_н}.$$

Закон Ома для замкнутой цепи позволяет записать

$$\mathcal{E} = I_RR + U_c = I_cR + U_c\frac{R}{R_н} + U_c.$$

При фиксированных значениях R и $R_н$ изменение входного напряжения на $\pm\Delta\mathcal{E}$ приводит к изменению тока в стабиловольте на $\pm\Delta I_c = \pm\Delta\mathcal{E}/R$. Для стабилизации напряжения U_c на нагрузке допустимые отклонения тока составляют ± 5 мА, а в рабочей точке ток через стабиловольт равен $I_{c0} = 10$ мА. Допустимая вариация тока ΔI_c позволяет выразить рабочее сопротивление резистора R_0 через отношение $\Delta\mathcal{E}/\Delta I_c$. Пусть $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}_0 = \alpha$ (здесь $\mathcal{E}_0$ – рабочее напряжение), тогда

$$R_0 = \frac{\alpha\mathcal{E}_0}{\Delta I_c}.$$

Это равенство является первым уравнением, связывающим два неизвестных параметра R_0 и $\mathcal{E}_0$. Второе уравнение получается из закона Ома для замкнутой цепи:

$$\mathcal{E}_0 = \left(I_{c0} + \frac{U_c}{R_н}\right)R_0 + U_c.$$

Совместное решение этих двух уравнений позволяет определить R_0 и $\mathcal{E}_0$:

$$R_0 = \frac{\alpha U_c}{\Delta I_c - \alpha I_{c0} - \alpha U_c/R_н} = 6\ \text{кОм},$$

$$\mathcal{E}_0 = \frac{U_c}{1 - \alpha I_{c0}/\Delta I_c - \alpha U_c/(\Delta I_cR_н)} = 300\ \text{В}.$$

Задача 4. *Диод имеет вольт-амперную характеристику, изображенную на*

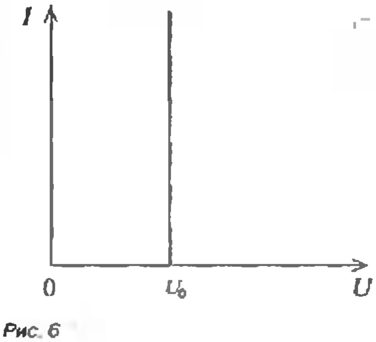


Рис. 6

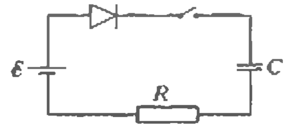


Рис. 7

рисунке 6. При напряжениях $U \ge U_0$ (в прямом направлении) диод открыт. Диод включен в цепь, изображенную на рисунке 7. Конденсатор вначале не заряжен. Чему будет равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? Какое количество теплоты выделится на резисторе R после замыкания ключа?

Рассмотрим случай, когда ЭДС батареи $\mathcal{E} > U_0$. Пусть сразу после замыкания ключа ток в цепи равен I_0. Закон Ома для замкнутой цепи в этом случае будет иметь вид $\mathcal{E} = U_0 + I_0R$, откуда $I_0 = (\mathcal{E} - U_0)/R$. Появившийся ток в цепи начнет заряжать конденсатор, но по мере зарядки ток будет уменьшаться, и при напряжении на конденсаторе, равном $\mathcal{E} - U_0$, ток в цепи прекратится. Это будет новое стационарное состояние: ток $I = 0$, а заряд на конденсаторе

$$q = C(\mathcal{E} - U_0).$$

За время зарядки конденсатора батарея совершит работу

$$A = C(\mathcal{E} - U_0)\mathcal{E}.$$

Часть этой работы пойдет на работу по преодолению разности потенциалов U_0 внутреннего электрического поля диода:

$$A_д = qU_0 = C(\mathcal{E} - U_0)U_0.$$

Вторая часть работы перейдет в энергию, запасенную конденсатором:

$$W_к = \frac{q^2}{2C} = \frac{C(\mathcal{E} - U_0)^2}{2}.$$

И наконец, оставшаяся часть работы выделится в виде тепла в резисторе:

$$Q = A - A_д - W_к = C(\mathcal{E} - U_0)\mathcal{E} -$$

$$- C(\mathcal{E} - U_0)U_0 - \frac{C(\mathcal{E} - U_0)^2}{2} =$$

$$= C(\mathcal{E} - U_0)\left(\mathcal{E} - U_0 - \frac{\mathcal{E} - U_0}{2}\right) =$$

$$= \frac{C(\mathcal{E} - U_0)^2}{2}.$$

Задача 5. *На рисунке 8 показана зависимость сопротивления некоторого нелинейного элемента от температуры. При нагревании по достижении температуры $t_1 = 100\ ^\circ C$ мгновенно происходит скачок сопротивления от $R_1 = 50$ Ом до $R_2 = 100$ Ом; при охлаждении обратный* *скачок происходит при температуре $t_2 = 99$ °С (гистерезис). Когда к такому элементу приложили постоянное напряжение $U_1 = 60$ В, его температура оказалась равной $t_3 = 80$ °С. Наконец, когда к элементу приложили постоянное напряжение $U_2 = 80$ В, в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определите период этих колебаний, а также максимальное и минимальное значения тока. Температура окружающей среды $t_0 = 20$ °С. Мощность теплоотвода с поверхности элемента пропорциональна разности температур элемента и окружающей среды. Теплоемкость элемента $C = 3$ Дж/К.*

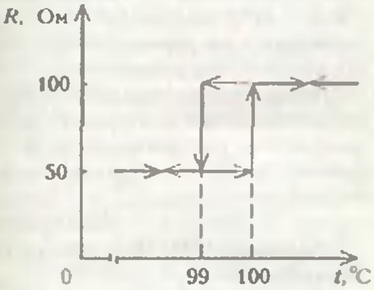


Рис. 8

Состояние элемента при температуре t_3 позволяет определить неизвестный коэффициент пропорциональности α между отводимым теплом и разностью температур элемента и окружающей среды. Поскольку это состояние стационарно, выделяемое в элементе в единицу времени количество теплоты равно мощности теплоотвода:

$$\frac{U_1^2}{R_1} = \alpha(t_3 - t_0),$$

и

$$\alpha = \frac{U_1^2}{R_1(t_3 - t_0)} = 1{,}2 \text{ Вт/К}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда к элементу приложено напряжение $U_2 = 80$ В. Найдем температуру t_4 элемента, которая установилась бы, если бы сопротивление элемента оставалось постоянным и равным R_1:

$$\frac{U_2^2}{R_1} = \alpha(t_1 - t_0),$$

и

$$t_4 = t_0 + \frac{U_2^2}{\alpha R_1} = 126{,}6 \text{ °C}.$$

Эта температура выше 100 °С, а это означает, что при достижении 100 °С сопротивление элемента скачкообразно изменится и станет равным R_2. Опять же из теплового баланса найдем температуру t_5, которая установилась бы при сопротивлении элемента R_2:

$$\frac{U_2^2}{R_2} = \alpha(t_5 - t_0),$$

и

$$t_5 = t_0 + \frac{U_2^2}{\alpha R_2} = 73{,}3 \text{ °C}.$$

Эта температура меньше 99 °С, следовательно, при ее достижении сопротивление элемента вернется к значению R_1. Мы убедились, что в цепи действительно возникнут самопроизвольные колебания тока. Оценим период этих колебаний.

Пусть время нагрева элемента от температуры 99 °С до 100 °С равно τ_1. Выделившееся за это время тепло частично пойдет на нагрев, а остальное уйдет в окружающую среду:

$$\frac{\tau_1 U_2^2}{R_1} = C\Delta t + \alpha(\bar{t} - t_0)\tau_1,$$

где $\Delta t = 1$ °С, а $\bar{t} = 99{,}5$ °С. Отсюда

$$\tau_1 = \frac{C\Delta t}{U_2^2/R_1 - \alpha(\bar{t} - t_0)} = 0{,}092 \text{ с}.$$

Аналогичный тепловой баланс при охлаждении элемента от 100 °С до 99 °С имеет вид

$$\frac{\tau_2 U_2^2}{R_2} + C\Delta t = \alpha(\bar{t} - t_0)\tau_2,$$

где τ_2 — время охлаждения. Отсюда

$$\tau_2 = \frac{C\Delta t}{\alpha(\bar{t} - t_0) - \dfrac{U_2^2}{R_2}} \approx 0{,}095 \text{ с}.$$

Период колебаний

$$T = \tau_1 + \tau_2 \approx 0{,}19 \text{ с}.$$

Максимальное значение тока при колебаниях составляет $I_{max} = U_2/R_1 = 1{,}6$ А, а минимальное значение равно $I_{min} = U_2/R_2 = 0{,}8$ А.

Упражнения

1. В случае несамостоятельного газового разряда зависимость тока I через газоразрядную трубку от напряжения U на трубке имеет вид, показанный на рисунке 9. Напряжение насыщения $U_н = 1$ кВ, ток насыщения $I_н = 10$ мкА. Трубка с последовательно соединенным балластным сопротивлением $R = 3 \cdot 10^8$ Ом подключена к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ кВ. Какой ток установится в трубке и каково будет при этом напряжение на трубке? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

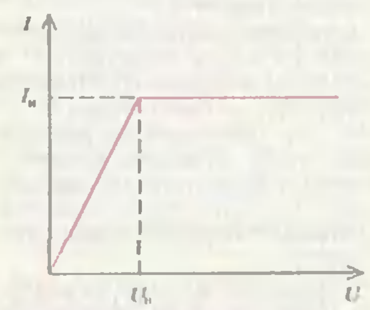


Рис. 9

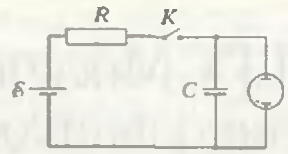


Рис. 10

2. Зажигание неоновой лампы осуществляется с помощью схемы, показанной на рисунке 10. После замыкания ключа K конденсатор C начнет заряжаться. Когда напряжение на лампе, равное напряжению на конденсаторе, достигнет некоторого значения, лампа загорится, после чего напряжение на ней будет падать. Минимальное напряжение на лампе, при котором она еще горит, составляет $U = 80$ В, при этом через лампу течет ток $I = 1$ мА. При каких сопротивлениях резистора R лампа после зажигания будет гореть стационарно? ЭДС батареи $\mathcal{E} = 120$ В.

3. Имеется нелинейный элемент, в котором ток I связан с приложенным напряжением U соотношением $I = 0{,}01U^2$ (I — в амперах, U — в вольтах). Этот элемент последовательно с резистором, сопротивление которого $R = 100$ Ом, подключен к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 15{,}75$ В. Найдите количество теплоты, выделяющееся на нелинейном элементе в единицу времени. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. В одно из плеч моста (рис.11) включено нелинейное сопротивление R_x, для которого зависимость тока I_x от приложенного напряжения U_x дается формулой $I_x = AU_x^2$, где A — некоторая константа. Сопротивления остальных плеч моста таковы: $R_1 = R_3$, а $R_2 = 4$ Ом. При каком значении константы A мощность тепловых потерь на нелинейном сопротивлении составляет $P_x = 1$ Вт для сбалансированного моста (ток через гальванометр G равен нулю)? Балансировка достигается изменением тока в цепи с помощью источника ЭДС.

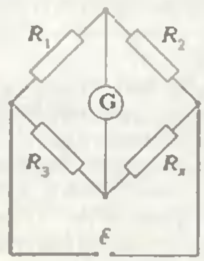


Рис. 11

LIX Московская олимпиада школьников по математике

Математический праздник

6 класс

1. В двух кошельках лежат две монеты, причем в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Как это может быть?

2. Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% меньше, чем Вася. На сколько процентов больше, чем Алик, собрал грибов Вася?

3. Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая слева цифра не пятерки?

4. Три человека A, B и C пересчитали кучу шариков четырех цветов. Каждый из них правильно различал два цвета, а два других не различал. Кто-то один из них не различал красный и оранжевый, другой не различал оранжевый и желтый, а еще один не различал желтый и зеленый. Глядя на таблицу, узнайте, сколько каких шариков было.

	красный	оранжевый	желтый	зеленый
A	2	5	7	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

5. Можно ли разрезать а) какой-нибудь выпуклый пятиугольник; б) правильный пятиугольник на четыре остроугольных треугольника?

6. Покрасьте клетки доски 5×5 (рис.1) в 5 цветов так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном и в каждом выделенном блоке все цвета встречались бы по одному разу.

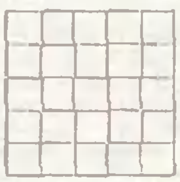


Рис. 1

7 класс

1. По кругу расставлены цифры 1, 2, …, 9 в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трехзначное число. Найдите сумму всех девяти таких трехзначных чисел. Зависит ли она от порядка, в котором расставлены цифры?

2. Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет и отдал второму, потом второй проиграл половину всех своих монет, потом снова первый проиграл половину своих. В результате у первого оказалось 15 монет, а у второго — 33. Сколько монет было у первого пирата до игры?

3. Найдите хотя бы две пары натуральных чисел x и y, для которых верно равенство $2x^3 = y^4$.

4. Сколькими способами можно прочитать слово а) КРОНА, б) КОРЕНЬ, начиная с буквы К и двигаясь вправо или вниз до последней буквы (рис.2)?

```
К Р О Н А            К
Р О Н А            К О
О Н А            К О Р
Н А            К О Р Е
А            К О Р Е Н
           К О Р Е Н Ь
```

Рис. 2

5. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

6. Произведение последовательных чисел $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ обозначают $n!$ и называют «эн факториал». Можно ли вычеркнуть из произведения $1!\cdot2!\cdot3!\cdot\ldots\cdot99!\cdot100!$ один из ста факториалов, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа?

Задачи старших классов

8 класс

1. Известно, что $a+b^2/a=b+a^2/b$. Верно ли, что $a=b$?

Р.Федоров

2. По кругу расставлены 10 железных гирек. Между каждыми соседними гирьками находится бронзовый шарик. Масса каждого шарика равна разности масс соседних с ним гирек. Докажите, что шарики можно разложить на две чашки весов так, чтобы весы уравновесились.

В.Произволов

3. В узлах клетчатой бумаги живут садовники, а вокруг них повсюду растут цветы. За каждым цветком должны ухаживать три ближайших к нему садовника. Один из садовников хочет узнать, за каким участком он должен ухаживать. Нарисуйте этот участок.

И.Шарыгин

4. См. задачу М1546, а) из «Задачника «Кванта».

5. В углу шахматной доски размером $n\times n$ полей стоит ладья. При каких n, чередуя горизонтальные и вертикальные ходы, она может за n^2 ходов побывать на всех полях доски и вернуться на место? (Учитываются только поля, на которых ладья останавливалась, а не те, над которыми она проносилась во время хода. За каждым горизонтальным ходом должен следовать вертикальный, а за вертикальным – горизонтальный.)

А.Спивак

6. См. задачу М1547 из «Задачника «Кванта».

9 класс

1. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике имеется не более 35 углов, меньших 170°.

А.Галочкин

2. Докажите, что если для чисел a, b и c выполняются неравенства $|a-b|\ge|c|$, $|b-c|\ge|a|$, $|c-a|\ge|b|$, то одно из этих чисел равно сумме двух других.

А.Галочкин

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность и через точки A и B проведены касательные, которые пересекаются в точке M. Точка N лежит на стороне BC, причем прямая MN параллельна стороне AC. Докажите, что $AN = NC$.

И.Шарыгин

4. Целые числа от 1 до n записаны в строчку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Может ли случиться так, что сумма каждого числа и записанного под ним есть точный квадрат а) при $n = 9$, б) при $n = 11$, в) при $n = 1996$?

П.Филевич

5. См. задачу М1557 из «Задачника «Кванта».

6. Али-Баба и разбойник делят клад, состоящий из 100 золотых монет, разложенных в 10 кучек по 10 монет. Али-Баба выбирает 4 кучки, ставит около каждой из них по кружке, откладывает в каждую кружку по несколько монет (не менее одной, но не всю кучку). Разбойник должен как-то переставить кружки, изменив их первоначальное расположение, после чего монеты высыпаются из кружек в те кучки, около которых оказались кружки. Далее Али-баба снова выбирает 4 кучки из 10, ставит около них кружки и т.д. В любой момент Али-Баба может уйти, унеся с собой любые три кучки по своему выбору. Остальные монеты достаются разбойнику. Какое наибольшее число монет сможет унести Али-Баба, если разбойник тоже старается получить побольше монет?

А.Белов

10 класс

1. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2+b^2-ab=c^2$. Докажите, что $(a-c)(b-c)\le 0$.

А.Егоров, В.Бугаенко

2. В клетчатом квадрате 10×10 отмечены центры всех единичных квадратиков (всего 100 точек). Какое наименьшее число прямых, не параллельных сторонам квадрата, нужно провести, чтобы вычеркнуть все отмеченные точки?

А.Шаповалов

3. См. задачу М1546 из «Задачника «Кванта».

4. См. задачу М1558 из «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1560 из «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1549 из «Задачника «Кванта».

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. См. задачу М1548 из «Задачника «Кванта».

3. См. задачу М1559 из «Задачника «Кванта».

4. См. задачу М1556, а) из «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1555 из «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1550 из «Задачника «Кванта».

Отбор на Всероссийскую олимпиаду

11 класс

1. Может ли $\sin(2\pi x)$ при каком-либо натуральном n быть многочленом от $\sin x$?

В.Сендеров

2. В тетраэдре четыре перпендикуляра к его граням, восставленные в точках пересечения медиан, пересекаются в одной точке. Докажите, что четыре перпендикуляра к его граням, восставленные в точках пересечения высот, также пересекаются в одной точке.

С.Маркелов

3. См. задачу М1553 из «Задачника «Кванта».

4. Стороны AB, BC, CD и DA описанного четырехугольника $ABCD$ касаются его вписанной окружности в точках K, L, M и N соответственно. Прямая, проведенная через точку C параллельно диагонали BD, пересекает прямые NL и KM в точках P и Q соответственно. Докажите, что $CP=CQ$.

С.Маркелов

5. См. задачу М1552, а) из «Задачника «Кванта».

6. На координатной плоскости расположен выпуклый 10^9-угольник, все вершины которого имеют целые координаты. Докажите, что его диаметр не менее 10^{12}.

А.Белов

Санкт-Петербургская математическая олимпиада

9 класс

1. На доске написано несколько однозначных чисел. Разрешается вычислить сумму всех чисел и последнюю цифру получившегося результата записать на доску вместо одного из чисел. Докажите, что применив несколько таких операций, можно будет снова получить исходный набор чисел.

Р.Женодаров

2. Среди натуральных чисел от 1 до 99 выбрано 50 чисел. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 99, ни 100. Докажите, что выбранные числа — это все числа от 50 до 99.

С.Иванов

3. M — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. На основании BC выбрана точка P такая, что $\angle APM=\angle DPM$. Докажите, что расстояние от точки C до прямой AP равно расстоянию от точки B до прямой DP.

С.Берлов

4. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, некоторые — нет. Каждый вечер один из этих людей устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека все еще не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.

С.Иванов

5. M — точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника, N — точка пересечения его средних линий, O — центр описанной окружности. Докажите, что $OM\ge ON$ (средней линией называется отрезок, соединяющий середины противоположных сторон).

Е.Гольберг

6. Докажите, что для любого многочлена $p(x)$ десятой степени с целыми коэффициентами найдется непостоянная целочисленная бесконечная в обе стороны арифметическая прогрессия, которая не содержит ни одного члена вида $p(k)$, где k — целое.

А.Голованов, С.Иванов

7. Вдоль улицы с односторонним движением расположено n мест для парковки автомобилей. На улицу въезжают последовательно n автомобилей (с номерами от 1 до n в порядке возрастания). Каждый водитель едет к своему любимому месту парковки и, если оно не занято, припарковывается; в противном случае он едет дальше до первого свободного места и припарковывается там, если же все места дальше заняты, он уезжает

(насовсем). Последовательностью предпочтений назовем список a_1, a_2, ..., a_n любимых мест парковки первого, второго, ..., n-го водителя. Сколько существует последовательностей предпочтений, для которых все водители сумеют припарковаться?

D.Haiman[1]

10 класс

1. Найдите все натуральные n, для которых 3^n+5^n делится на $3^{n-1}+5^{n-1}$.

А.Голованов

2. M – середина стороны BC треугольника ABC, r_1 и r_2 – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM и ACM. Докажите, что $r_1<2r_2$.

А.Храбров

3. На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается стереть с доски два различных числа и написать вместо этого их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что когда-нибудь числа на доске перестанут меняться.

А.Пастор

4. Никакие три диагонали выпуклого 1996-угольника не пересекаются в одной точке. Докажите, что количество треугольников, вершины которых расположены строго внутри этого 1996-угольника, а стороны лежат на его диагоналях, делится на 11 (речь идет не обязательно о треугольниках разбиения, упомянутые треугольники могут быть разбиты диагоналями на более мелкие части).

С.Берлов

5. Докажите, что для каждого многочлена x^2+px+q с целыми коэффициентами найдется такой многочлен $2x^2+rx+s$ с целыми коэффициентами, что множества значений этих многочленов в целых точках не пересекаются.

А.Голованов

6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ стороны AB и BC равны,

$$\angle ABE+\angle DBC=\angle EBD$$

и

$$\angle AEB+\angle BDC=180^\circ.$$

Докажите, что ортоцентр треугольника BDE лежит на диагонали AC.

С.Берлов

7. В федеративном государстве, состоящем из двух республик, каждые два города соединены дорогой с односторонним движением; при этом, двигаясь по дорогам, можно из любого города попасть в любой другой. Туристическое агентство «Гамильтон» предлагает n различных туристических маршрутов по городам первой республики и m – по городам второй (любой из этих маршрутов предполагает посещение каждого города республики ровно по одному разу и возвращение в исходный город, причем все это – не выезжая за пределы республики). Докажите, что агентство «Гамильтон» могло бы предложить любознательным туристам не менее mn аналогичных туристических маршрутов по городам всей федерации.

Д.Карпов

11 класс

1. Сережа решал уравнение $f(19x-96/x)=0$ и нашел 11 различных корней. Докажите, что если он постарается, то сумеет найти еще хотя бы один корень.

С.Берлов, К.Кохась

2. Числа от 1 до $2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Докажите, что множества остатков попарных сумм чисел каждой группы при делении на $2n$ совпадают (во множество попарных сумм входят и выражения вида $a+a$).

С.Иванов

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взяты точки A' и C', так что $AA' \parallel CC'$. Точка K принадлежит отрезку $A'C$, прямая AK пересекает прямую $C'C$ в точке L. Через точку K проведена прямая, параллельная BC, через точку C проведена прямая, параллельная BD. Эти две прямые пересекаются в точке M. Докажите, что точки D, M, L лежат на одной прямой.

С.Берлов

5. Найдите все четверки не постоянных многочленов $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$ с вещественными коэффициентами, которые обладают следующим замечательным свойством: для любых целых чисел x, y, z, t, связанных соотношением $xy-zt=1$, выполняется равенство $p_1(x)\,p_2(y)-p_3(z)\,p_4(t)=1$.

А.Голованов

6. См. задачу 6 для 10 класса.

7. Два человека играют на доске 100×100 в следующую игру: первый игрок отмечает какую-либо свободную клетку доски, после чего второй игрок кладет на доску доминошку (прямоугольник 1×2 клетки) так, чтобы она закрывала две свободные клетки, одна из которых отмечена. Первый выигрывает, если всю доску удалось покрыть доминошками, а второй – если не всю. Кто выиграет при правильной игре?

С.Берлов

Избранные задачи отборочного тура

1 (9 кл.). BD – биссектриса угла B треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BDC пересекает отрезок AB в точке E, описанная окружность треугольника ABD пересекает отрезок BC в точке F. Докажите, что $AE=CF$.

С.Берлов

2 (9 кл.). В стране 2000 городов, каждые два из которых соединены дорогой. Строительные организации представили все возможные проекты введения одностороннего движения на всех дорогах. Министерство транспорта отвергло все проекты, не обеспечивавшие возможности добраться из любого города в любой другой. Докажите, что все же осталось более половины проектов.

Д.Карпов

3 (9 кл.). На доске написано 4 натуральных числа: m, n, m, n. К этой упорядоченной четверке чисел применяют обобщенный алгоритм Евклида: если на доске написаны числа (x, y, u, v) и $x>y$, то их заменяют на $(x-y, y, u+v, v)$, если же $x<y$, то их заменяют на $(x, y-x, u, v+u)$. Выполнение алгоритма прекращается, когда числа в первой паре станут равными (в этот момент они будут равны наибольшему общему делителю чисел m и n). Докажите, что среднее арифметическое чисел второй пары в этот момент будет равно наименьшему общему кратному чисел m и n.

А.Кириченко

4 (9 кл.). В клетках таблицы $n\times n$ расставляют натуральные числа от 1 до n^2. Поставив очередное число в свободную клетку, на доску выписывают сумму чисел, уже расставленных в строке и столбце, содержащих эту клетку. Когда вся таблица заполнена, вычисляют сумму чисел, записанных на доске. Приведите пример способа расстановки чисел, для которого эта сумма будет иметь наименьшее возможное значение.

К.Кохась

5 (10, 11 кл.). На сторонах AB и BC треугольника ABC отложены отрезки AE и CF равной длины. Окружность, проходящая через точки B, C,

[1] *D.Haiman D.// Journ. of Comb. – 1994. – № 3. – P. 17-76.*

E, и окружность, проходящая через точки A, B, F, пересекаются в точках B и D. Докажите, что прямая BD — биссектриса угла ABC.

С.Берлов

6 (10 кл.). Последовательность натуральных чисел задается соотношениями

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$

($[a]$ обозначает целую часть числа a). Докажите, что последние цифры десятичной записи чисел a_n образуют непериодическую последовательность.

Д.Карпов, А.Пастор

7 (10 кл.). Пусть A — множество наборов $\{a_n\}_{n=1}^{1996}$ натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $a_1 = 1$, $a_{k+1} \le a_k + 1$ (k=1, 2, ...,1995); B — множество наборов $\{b_n\}_{n=1}^{1996}$ натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $b_1 = 1$, $b_k \le b_{k+1} \le k+1$ (k=1, 2, ...,1995). Докажите, что во множествах A и B поровну элементов.

Д.Карпов

8 (11 кл.). Диаграммой Юнга называется фигура, полученная вырезанием из прямоугольника «по клеточкам» нескольких прямоугольных частей, чьи правые нижние углы совпадают с правым нижним углом этого прямоугольника. Крюком называется часть диаграммы Юнга, состоящая из какой-либо клетки и всех клеток, расположенных либо правее, либо ниже ее. Дана диаграмма Юнга из n клеток. Пусть s — количество крюков, состоящих ровно из k клеток. Докажите, что $s(k+s) \le 2n$.

К.Кохась

9 (11 кл.). В треугольнике ABC угол A равен 60°. Внутри треугольника нашлась точка O, из которой все стороны видны под углом 120°. На луче CO выбрана точка D такая, что ΔAOD — равносторонний. Серединный перпендикуляр к отрезку AO пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что прямая OQ делит отрезок BD пополам.

С.Берлов

10 (11 кл.). В городе Энске 120 линий метро, причем с любой станции можно доехать до любой другой, сделав не более 15 пересадок. Будем говорить, что две станции находятся далеко друг от друга, если требуется не менее 5 пересадок для того, чтобы добраться с одной станции на другую. Какое наибольшее количество попарно далеких друг от друга станций может быть в этом городе?

Ф.Назаров

11 (11 кл.). a, b, c — целые числа, такие что многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных попарно взаимно простых натуральных корня, и многочлен $ax^2 + bx + c$ имеет натуральный корень. Докажите, что число $|a|$ — составное.

С.Берлов

Московская астрономическая олимпиада

В АПРЕЛЕ этого года состоялась юбилейная астрономическая олимпиада московских школьников. Начало этой традиции было положено в 1947 году совместными усилиями астрономов МГУ, сотрудников Московского планетария и других энтузиастов. В первой олимпиаде приняли участие 32 ученика из десяти школ Москвы. Но год от года популярность олимпиады росла, и число участников доходило до 200. В последние годы оно составляет 80 — 100 человек. Обычно кроме москвичей в олимпиаде участвуют ребята из Подмосковья, а нередко — и гости издалека.

По традиции Московская олимпиада проходит в два тура, за которыми следует третья встреча всех участников — для разбора задач и награждения победителей. В первые годы на каждом туре продолжительностью 2 часа требовалось решить 3 задачи. В последние два десятилетия каждый тур продолжается 3 часа, а число задач во втором туре порой увеличивается до 4. На первых олимпиадах требования к знаниям учащихся не превышали содержания школьного учебника по астрономии, а сейчас составители задач ориентируются на реальные знания юных астрономов, которые значительно превышают школьный минимум. Если в первые годы проведения олимпиады в ней участвовали только ученики выпускного класса, в котором по традиции изучается астрономия, то теперь олимпиада проходит по трем возрастным категориям: 10 – 11 классы, 8 – 9 классы, 6 — 7 классы и младше, причем в младшей группе нередко выступают ребята из 3 – 4 классов и показывают неплохие результаты.

Астрономия обладает счастливым достоинством - квалифицированный любитель астрономии может стать полноправным членом научного сообщества. Но для этого, как и профессионал, любитель должен серьезно заниматься наукой, а не ограничиваться любованием звездным небом. Астрономические олимпиады - хороший способ возбуждения любознательности и поощрения талантливых, работоспособных ребят. Закономерно, что среди известных отечественных астрономов немало победителей Московской астрономической олимпиады.

А теперь — условия задач олимпиады.

Задачи I тура

Младшая группа (6—7 кл.)

1. Во время великого противостояния экспедиция прибыла на Марс в район экватора планеты. Ночью два космонавта вышли на поверхность. «Смотри, как сияет наша Земля, - сказал один. — Она самая яркая на марсианском небе». Прав ли он?

2. В какое время года Солнце быстрее движется по эклиптике?

3. «Все звезды, видимые простым глазом, и многие из телескопических давно уже сосчитаны, зарегистрированы и занесены на карты», — написано в учебнике астрономии. Почему же в таком случае число звезд, видимых невооруженным глазом, никогда не указывается точно, а только приближенно?

Средняя группа (8—9 кл.)

1. При каких условиях полюс эклиптики совпадает с зенитом наблюдателя?

2. Корабль плыл мимо острова. Капитан записал в судовом журнале: «Над островом возвышается великолепная гора Нгоро-Нгоро. В полдень, когда мы поравнялись с ней, я при помощи секстанта измерил расстояние до вершины и нашел его равным 12.5 мили». Как капитан смог измерить расстояние?

3. Какие светила видны днем и при каких условиях?

Старшая группа (10—11 кл.)

1. Сколько бы Земля падала на Солнце, если бы внезапно остановилась в своем движении по орбите?

2. Космонавты, достигшие α Cen, осматривают небо. В каком созвездии они заметят новую яркую звезду?

3. Сферический астероид разделился на две равные сферические части. Как изменился их суммарный блеск по сравнению с блеском исходного астероида (в звездных величинах)?

Задачи II тура

Младшая группа (6—7 кл.)

1. Где 21 марта день длиннее — в Сиднее ($\varphi = -33°$, $\lambda = 151°$ в.д.) или в Сантьяго ($\varphi = -33°$, $\lambda = 70°$ з.д.)?

2. Каково склонение звезд, которые в любом месте Земли могут быть видимы на горизонте?

3. В звездном скоплении Москиты 250 звезд, причем каждая имеет нулевую абсолютную звездную величину. Расстояние до скопления 1 кпк. Каков его блеск?

4. Почему во время полного лунного затмения Луна все же видна и имеет красный цвет?

Средняя группа (8—9 кл.)

1. Как изменилась бы орбита Земли, если бы масса Солнца внезапно удвоилась?

2. Лунная экспедиция решила совершить кругосветное путешествие на луноходе, двигатели которого работают от солнечных батарей. Средняя скорость лунохода 10 км/ч. Возможна ли такая экспедиция?

3. Сколько времени прошло от соединения до противостояния планеты, если блеск ее за это время увеличился на $0{,}85^m$? Орбиту планеты считайте круговой и лежащей в плоскости эклиптики.

4. На искусственном спутнике, обращающемся вокруг Земли, т.е. постоянно свободно падающем на нее, космонавты не ощущают силу тяжести: у них невесомость. А на самой Земле, точно так же обращающейся вокруг Солнца, мы чувствуем силу тяжести. Почему?

Старшая группа (10—11 кл.)

1. В романе Айзека Азимова «Немезида» космическая станция движется по круговой околоземной орбите так, что, «если смотреть со станции, то Земля и ее естественный спутник никогда не разделялись более чем на 15 градусов». При этом «в небе станции Земля и Луна постоянно изменяли положение и фазы». Может ли это быть?

2. В книге С. и Ж.Миттон «Астрономия» есть такое утверждение: «Пыль и газ рассеяны в глубинах космоса и загораживают от нас звезды Млечного Пути. Как много этого тумана находится в далеком пространстве? Он заслоняет так много света, что, если бы нам удалось каким-то образом сдуть его прочь, ты смог бы с легкостью читать ночью книгу при ярком свете одного лишь Млечного Пути.» Насколько справедливо это утверждение?

3. С какой максимальной и минимальной скоростями может столкнуться метеорное тело с ИСЗ, находящимся на низкой круговой орбите?

В.Сурдин

Призеры 50-й Московской астрономической олимпиады

Младшая группа (6—7 кл.)

Первое место завоевали

Золотухин И. — шк. 57, кл. 7,
Чугнин А. — гимн. 1542, кл. 6;

второе место —

Тыклин А. — шк. 124, кл. 5,
Шишков А. — шк. 332, кл. 7,
Тихонов Е. — шк. 875, кл. 5;

третье место —

Прокофьев С. — гимн. 1532, кл. 7,
Потекаев М. — шк. 9 (Калининград Московской обл.), кл. 7;

поощрительные премии получили

Голованенко П. — шк. 5 (Юбилейный Московской обл.), кл. 6,
Серов Р. — гимн. 11 (Железнодорожный Московской обл.), кл. 6,
Старков В. — шк. 3 (Жуковский Московской обл.), кл. 5.

Средняя группа (8—9 кл.)

Первое место завоевал

Евдокимов Н. — лиц. 1525, кл. 9;

второе место —

Журавлев В. — гимн. 1 (МПС РФ), кл. 9;

третье место —

не присуждалось;

поощрительные премии получили

Котов А. — шк. 659, кл. 9,
Марков И. — шк. 659, кл. 9.

Старшая группа (10—11 кл.)

Первое место завоевали

Егоров И. — лиц. 1525, кл. 11,
Тунцов А. — Донская гимн., кл. 10;

второе место —

Бакланов П. — лиц. 1525, кл. 11,
Чилингарян И. — гимн. 1534, кл. 10;

третье место —

Кузнецов М. — гимн. 1 (Жуковский Московской обл.), кл. 10,
Фадюшин М. — лиц. 1189, кл. 11;

Поощрительные премии получили

Колосков М. — гимн. 1515, кл. 11,
Белов В. — лиц. 4 (Калининград Московской обл.), кл. 10,
Иерусалимов К. — шк. 867, кл. 10,
Власов А. — шк. 843, кл. 11.

Чемпионат мира по головоломкам

В.ДУБРОВСКИЙ

БЕЗ риска ошибиться можно предположить, что большинство читателей «Кванта» любят решать головоломки. Вам, наверное, будет интересно узнать, что существует своего рода олимпиада, а точнее, «чемпионат мира» по решению этого популярного вида задач.

Это соревнование имеет не очень долгую историю. Пожалуй, за точку отсчета надо принять 1984 год, когда команды из нескольких восточноевропейских стран, представлявшие, в основном, специализирующиеся на кроссвордах и других головоломках издания, приехали в Польшу на первый международный «Марафон кроссвордов». Участники марафона, правила которого были заимствованы из аналогичного всепольского состязания, в течение 24 часов без остановки занимались составлением кроссвордов. Критерием для определения победителя служила длина «продукта» (в метрах). Марафон стал проводится ежегодно, к нему присоединились новые страны, но быстро выяснилось, что этот вид соревнования не вполне справедлив просто из-за различий в языках (финская, а также голландская команды заявили, что придумывать длинные кроссворды на их родных языках труднее, чем, скажем, на английском). Возможно, были и другие причины, но так или иначе в 1990 году, в Хорватии, марафон был проведен в последний раз.

Однако благодаря Виллу Шорцу, капитану американской команды (в то время — главному редактору журнала «Games»), идея международного соревнования по головоломкам была реанимирована в новом виде. В 1992 году в Нью-Йорке Шорц организовал первый Чемпионат мира по головоломкам, основным принципом которого была провозглашена языковая и культурная нейтральность. Естественно, это повлекло коренной пересмотр характера заданий: в основном это были математические и логические головоломки, а также лабиринты, механические головоломки, задание на поиск на картинке скрытого изображения и даже тест на зрительную память. (Часть задач первого чемпионата можно найти в «Кванте» №3/4 за 1993 год.)

С тех пор чемпионат стал проводится ежегодно: в 1993 году он проходил в Брно, в 1994 — в Кельне, а в прошлом году — в Брашове (Румыния). Пока наибольших успехов в этих соревнованиях добивались чехи (в 1993 и 1994 г.) и американцы (1992 и 1995).

В прошлом году, благодаря газете «Поле чудес», на чемпионат впервые приехала команда России, сформированная по результатам заочного конкурса, проводившегося этой газетой, и специального очного отбора. Активное участие в отборе и подготовке команды принял и наш журнал.

По правилам чемпионата в команду включаются четыре человека, никаких ограничений на возраст или род их занятий не накладывается. В нашей команде собрались, в основном, математики: А.Ходулев, давний автор «Кванта», О.Леонтьева (обо они в прошлом — победители международной математической олимпиады), А.Майсурадзе, студент МФТИ, и А.Крюков, инженер-системотехник, участник многих телевикторин. Команда заняла 8-е место из тринадцати (с учетом участников вне конкурса), и это трудно назвать успешным дебютом, однако упреков она не заслужила.

Дело в том, что организаторы соревнования в Брашове сознательно пошли на некий эксперимент, а точнее, сделали шаг назад, и включили в конкурс непомерно много заданий типа кроссвордов. Здесь уж нужно было не столько соображать, сколько знать, причем знать довольно далекие для нас вещи, вроде имен короля Таиланда или американского телеведущего. К тому же вписывать ответы нужно было по правилам английского правописания, а это отнюдь не очевидно: как бы вы написали, например, имя Майя (Чибурданидзе) — Maya, Maia или Maja? Аналогичные трудности испытывали и некоторые другие команды, особенно японцы, занявшие следующее за нами место.

Практически все участники Международного конгресса по головоломкам, который проходил параллельно с соревнованием, согласились, что эксперимент себя не оправдал, так что уже

	3	3	6	2	3	
	5	4	3	2	4	
	5	2	2	0	3	
	2	2	3	0	2	
	4	3	5	3	6	

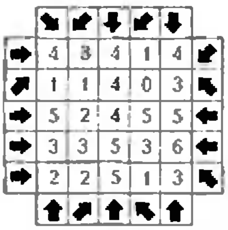
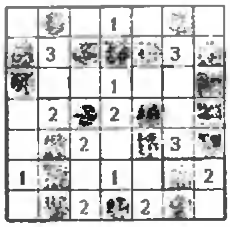


Рис. 1 *Пример*

						2
1		1	2	2		
					1	
3						
		3			1	
				1		
			2		2	



Пример

Рис. 2

на следующем чемпионате, а он пройдет в октябре в Утрехте (Голландия), все будут в равных условиях.

Как же проходило само соревнование? В общем, оно было очень похоже на обычную математическую олимпиаду. Команды «работали» два дня, каждый день проводилось по два примерно трехчасовых тура – до и после обеда. В каждом туре каждому участнику предстояло решить 16 задач. Некоторое разнообразие вносилось тем, что утренние туры были индивидуальными – каждый решал сам за себя и в командный зачет шла сумма индивидуальных результатов, а во второй половине дня команде разрешалось заранее определять, в каком порядке ее участники будут решать задачи, и на счет команды зачислялся лучший результат по каждой задаче. (Интересно, что россияне в командном зачете выступили относительно лучше, чем в индивидуальном.)

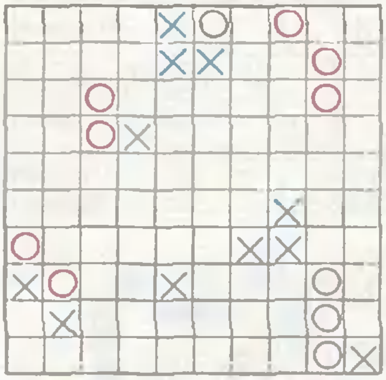


Рис. 3

Впрочем, «формат» предшествующих чемпионатов был несколько иным – пока что он определяется организаторами, а постоянный регламент еще предстоит выработать. На плечах организаторов лежит и тяжелое бремя составления всех заданий; может быть поэтому определенные накладки неизбежны. Однако с точки зрения приема участников и культурной программы (включавшей, в частности, экскурсию в замок знаменитого Дракулы, расположенный неподалеку от Брашова) чемпионат в Брашове был проведен на очень высоком уровне и его организаторы заслужили искреннюю благодарность от всех команд.

А теперь познакомьтесь с некоторыми из головоломок, предлагавшихся на четвертом чемпионате мира. Все они являются оригинальными, но, так сказать, «сварены по японским рецептам». Дело в том, что в Японии распространены логические головоломки на клетчатой бумаге, популярные там не меньше, чем у нас кроссворды. Имеется не меньше десятка различных типов этих головоломок, и каждый из них допускает практически неограниченное тиражирование. Характерной их чертой является то, что в принципе их всегда можно решить перебором вариантов – проблема лишь в ограниченном запасе времени. Однако как правило они составляются так, что с помощью логических рассуждений можно свести перебор к минимуму и даже избавиться от него вообще.

«Японские головоломки» составили около четверти заданий в Брашове – этим организаторы хотели компенсировать неизбежные языковые трудности для команды Японии (компенсация оказалась явно недостаточной). В нашей стране головоломки этого типа малоизвестны, и российскую команду выручило лишь то, что перед началом соревнований всем были розданы материалы с их типовыми образцами; в итоге результат россиян по этим задачам был практически стопроцентным.

Во всех приводимых ниже задачах надо определенным образом заполнить клетки данных на рисунках таблиц; для пояснения рядом с ними нарисованы примеры аналогичных правильно заполненных таблиц.

Расстановка стрелок (рис. 1). Нарисуйте стрелки в 20 пустых клетках на сторонах квадрата с числами таким образом, чтобы число в каждой клетке равнялось количеству указывающих на нее стрелок. Стрелки должны быть параллельны сторонам или диагоналям квадрата.

Новый морской бой (рис.2). Расставьте внутри данного квадрата 7×7 стандартный набор кораблей для игры в «морской бой» так, чтобы каждое из данных чисел равнялось количеству клеток, занятых кораблями и примыкающих к клетке с числом по стороне. Клетки с кораблями могут касаться друг друга, но только по вершине.

От крестиков к ноликам (рис.3). Разбейте значки в таблице на пары крестик-нолик и соедините значки каждой пары путем из двух перпендикулярных отрезков, параллельных сторонам квадрата, так, чтобы через каждую клетку прошел ровно один путь.

Географический секрет (рис. 4). Впишите в каждую пустую клетку одну из букв A, B, C, E, H, R, S, T, U так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и каждом из выделенных квадратов 3×3 буквы не повторялись. Найдите слово, которое возникнет в результате.

A			C		H			E
		H				S		
	C	T		R		B	H	
T			B		U			H
		C				E		
H			S		T			A
	B	U		H		A	E	
		E				T		
R			U		E			S

Рис. 4

В заключение – еще одна головоломка или, скорее, игра для одного игрока. Она предлагалась как одно из заданий на втором чемпионате (Брно, 1993 г.).

Числовая чехарда. В квадрат 6×6 на шахматной доске вписаны числа как показано на рисунке 5. Одним ходом разрешается «побить» любым числом соседнее с ним по горизонтали, вертикали или диагонали меньшее число, перепрыгнув через него на свободное поле. Цель игры – за данное число ходов набрать наибольшую возможную сумму «побитых» чисел. Для десяти ходов известно решение, дающее сумму 50. Если Вы сумеете перекрыть этот результат, пришлите нам свою последовательность

	a	b	c	d	e	f	g	h
8								
7		4	1	2	6	2	5	
6		2	3	4	1	4	5	
5		1	5	3	8	3	3	
4		7	4	1	2	3	2	
3		6	1	2	4	6	1	
2		7	2	1	3	1	5	
1								

Рис. 5

ходов. Ходы записываются в шахматной нотации с указанием набранных очков; например, на данном рисунке можно пойти 1. c3-a1(7), 2. d2-b2 (3) и т.д.

ЗАОЧНАЯ ШКОЛА ПРИ НГУ

При Новосибирском государственном университете работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9 — 11 классов общеобразовательных школ республик, входивших ранее в состав СССР.

В ЗШ пять отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9 — 11 классов, на биологическое — только учащиеся 10 классов, на экономическое — только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителя. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ и дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяются в ЗШ, а работы членов кружка проверяет руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 10 — 11 классов ЗШ (тех, кто будет учиться в этих классах в следующем учебном году) приглашаются в Летнюю школу при НГУ. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно-исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление. Заявление необходимо оформить по приведенному здесь образцу:

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	*НЕДЕЛИН ИГОРЬ ИВАНОВИЧ*
Класс, в котором Вы учитесь в своей школе	*9 «а»*
Отделение ЗШ, на котором Вы желаете учиться (можно указать два отделения)	*математическое (математическое и физическое)*
Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	*632149 Новосибирская обл., с. Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5*

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября.*

Для получения ответа вложите конверт с маркой, с написанным на нем Вашим домашним адресом.

Решения задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работу отошлите вместе с заявлением, причем *только простой бандеролью* (тетрадь не перегибайте, не сворачивайте в трубочку; тетрадь должна быть тонкой, так как средства на почтовые расходы в ЗШ ограничены). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем Вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Для поступления в ЗШ достаточно решить две-три задачи. Сообщение о размере оплаты за обучение Вам будет выслано вместе с проверенным первым заданием. Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах и детей из многодетных семей (в которых пять и более детей до 18 лет, находящихся на иждивении родителей).

Наш адрес: 630090 г. Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по физике

9 класс

1. Одновременно зажгли толстую и тонкую свечи, имеющие одинаковые длины. Через время t тонкая свеча прогорела наполовину, а толстая — на треть. Через какое время после поджога длины свечей будут отличаться в 4 раза?

2. Два восьмиклассника, имеющие одинаковый вес, поспорили, кто оставит при ходьбе по сырому песку более глубокий след. Первый выбрал галоши от водолазного костюма (масса 20 кг, общая площадь подошв 7 дм^2), а второй — обыкновенные ботинки (масса 2 кг, общая площадь подошв 4 дм^2). Кто из них выиграл пари?

3. В воде, покрытой слоем масла толщиной h, плавает прямоугольный брусок толщиной $3h$, на h погруженный в воду. Когда масло слили, брусок стал плавать в воде, погруженным наполовину. Найдите плотность масла.

4. Какое максимальное напряжение можно подать на последовательно соединенные резисторы, сопротивления которых R_1 = 10 Ом и R_2 = 20 Ом, если они рассчитаны на мощности, не превышающие P_1 = 1,6 Вт и P_2 = 1,8 Вт соответственно. Величина сопротивления не зависит от величины тока, протекающего по резистору.

10 класс

1. Решите задачу 1 для 9 класса.

2. Параллельно кромке футбольного поля летит мяч с постоянной скоростью v_0. Стоящий у кромки футболист в момент, когда расстояние между ним и мячом становится минимальным и равным h, бросается на перехват. Через какое время футболист догонит мяч, если он движется по прямой, а его ускорение равно a?

3. Клин, расположенный на горизонтальной плоскости, имеет угол при основании α. Найдите интервал допустимых горизонтальных ускорений клина, при которых тело, находящееся на клине, может двигаться вместе с ним без проскальзывания. Коэффициент трения скольжения между телом и клином μ.

4. Обезьяна массой m висит на нижнем конце длинной лианы на высоте h над землей. Кусок лианы массой M обрывается. Обезьяна начинает карабкаться вверх, оставаясь все время на высоте h. Через какое время лиана коснется земли?

5. После лобового удара одного бильярдного шара о другой, неподвижный, скорость первого уменьшилась в 10 раз. Какая часть энергии перешла при ударе в тепло?

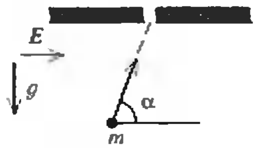
11 класс

1. Решите задачу 2 для 10 класса.

2. Объем, в котором находился лишь насыщенный пар, изотермически уменьшили в два раза. При этом оказалось, что $1/10$ часть уменьшенного объема заполнена конденсатом. Во сколько раз нужно было уменьшить исходный объем, чтобы сконденсировать весь пар?

3. В сосуде, разделенном пополам массивным поршнем, содержатся два различных газа. Система находится в равновесии. Поршень проницаем для газа из верхней части (газ *1*) и непроницаем для газа из нижней части сосуда (газ *2*). Как изменится соотношение объемов через очень большое время, если известно, что числа молей газов *1* и *2* отличаются в три раза? Температура в сосуде поддерживается постоянной.

4. Тело массой m бросают в поле тяжести, целясь прямо в отверстие (см. рисунок). Какой заряд надо сообщить



телу, чтобы оно могло пролететь через это отверстие, если напряженность однородного электрического поля равна E и направлена горизонтально? Какую минимальную скорость должно иметь при этом тело, если расстояние от точки бросания до отверстия равно L?

5. Маятник сделан из легкой нити длиной l и маленького заряженного шарика, масса которого m и заряд q. Возле точки подвеса поместили еще один заряд q. Какую минимальную горизонтальную скорость необходимо сообщить шарику, чтобы он в вертикальной плоскости сделал оборот по окружности с центром в точке подвеса?

Первое задание по математике

9 класс

1. Какое из чисел больше:

$$\frac{10^{1995}+1}{10^{1996}+1} \text{ или } \frac{10^{1996}+1}{10^{1997}+1}?$$

2. В круг вписан прямоугольник, середины сторон которого последовательно соединены. Докажите, что периметр полученного четырехугольника равен удвоенному диаметру данного круга.

3. Найдите четыре последние цифры числа 5^{1996}.

4. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ вне его построены правильные треугольники AXB и BYC. Докажите, что треугольник DXY тоже правильный.

5. В три сосуда налита вода. Если $1/2$ воды первого сосуда перелить во второй, $1/3$ воды, оказавшейся во втором сосуде, перелить в третий и, наконец, $1/4$ воды третьего сосуда перелить в первый, то в каждом сосуде окажется по 6 литров. Сколько воды было в каждом сосуде первоначально?

6. Можно ли в квадрате со стороной 28 см разместить без пересечения 5 квадратов со стороной 10 см? Ответ требуется обосновать.

10 класс

1. Для нумерации страниц некоторой книги всего использовано 1996 цифр. Сколько страниц в этой книге?

2. Докажите, что выпуклый четырехугольник, имеющий ось симметрии, либо можно вписать в окружность, либо вокруг него можно описать окружность.

3. Найдите все пары действительных чисел x и y, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x+xy+y=7. \end{cases}$$

4. Докажите, что если a, b и c — целые числа и уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет рациональный корень, то хотя бы одно из чисел a, b и c является четным.

5. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты. Точки A' и B' — вершины этих квадратов, лежащие на продолжениях сторон BC и AC соответственно. 1) Докажите, что продолжение высоты CH треугольника ABC является медианой треугольника $A'B'C$. 2) Докажите обратное утверждение.

6. Докажите, что среди произвольно выбранных 51 различных двузначных чисел обязательно найдутся три таких, что одно из них равно сумме двух других.

11 класс

1. Можно ли в круг радиусом 1 поместить какое-то число непересекающихся кругов так, чтобы сумма длин их окружностей оказалась больше 1996π?

2. Буратино и папа Карло планировали положить свои капиталы на совместный счет в банк «Навроде» под 500% годовых, рассчитывая через год забрать весь вклад величиной Ф. Крах банка изменил их планы. Буратино подарил часть своих золотых папе Карло и остальные положил в банк «Обирон», даже не поинтересовавшись процентной ставкой. Папа Карло присоединил полученные золотые к своему капиталу и сделал вклад в банк «Вампирнал» под 50% годовых. Ровно через год они забрали свои вклады. Оказалось, что папа Карло получил 1/6Ф, а Буратино — в три раза меньше. Какой процент годовых дает банк «Обирон»?

3. Докажите, что для всех x, принадлежащих промежутку $[-\pi;\pi]$, функция $f(x)=2\sin x+\cos x$ удовлетворяет неравенству $f(x)<2{,}5$.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}}+\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}=2.$$

5. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами нового квадрата.

6. Найдите зашифрованные числа, если

ЛИК × ЛИК = БУБЛИК.

Здесь одной и той же буквой обозначены одинаковые цифры, а разными буквами — разные.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

(см. «Квант» № 3)

1. Казалось бы, что нельзя разложить 20000 рублей в два кошелька так, чтобы в одном денег было вдвое больше, чем в другом, так как 20000 на 3 не делится. Однако, давайте положим в один кошелек 10000 рублей, а во второй — 10000 рублей и первый кошелек. Теперь в первом кошельке лежит 10000 рублей, а во втором — 20000 рублей.

2. КЛИМ = 9218, ЛЕВА = 2573, ИВАН = 1734, МАНЯ = =8346.

3. Алисе 9 лет, Орленку Эдду 7 лет, Ореховой Соне 5 лет и Пичужке 1 год.

4. Проведем в девятиугольнике еще несколько диагоналей так, как показано на рисунке 1. Девятиугольник разбился на 13 треугольников. На рисунке расставлены номера треугольников,

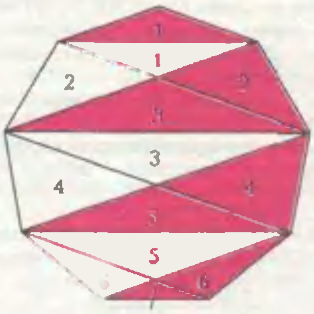


Рис. 1

13

причем одинаковым номером помечены равные треугольники разных цветов. 12 треугольников разбились на пары, а тринадцатому треугольнику, который оказался красным, пары не нашлось. Значит, красная часть площади треугольника больше его белой части.

5. Заметим, что в русском алфавите 33 различные буквы, а слов в данном предложении 34, поэтому нельзя выбрать из каждого слова по одной букве так, чтобы все эти буквы были различны.

Конкурс «Математика 6 — 8»

(см. «Квант» № 1)

11. Эта последовательность такова: А-Г-И-Д-Ж-В-З-Б-Е.

12. Из условий задачи следует, что дуги AC, BD и CE равны по 90°, поэтому дуга AE равна 180° и отрезок AE — диаметр этой окружности. Кроме того, очевидно, что отрезок AB параллелен CD, а DE параллелен BC. Из равенства указанных дуг следует и равенство стягиваемых ими отрезков: $AC = BD = CE$. Значит, четырехугольники $ABCD$ и $BDEC$ — равнобочные трапеции, а в них диагонали равны, т.е. $BC = AD$ и $BE = CD$ (рис.2). Но отрезок AE — диаметр, поэтому треугольники ABE и ADE прямоугольные и по теореме Пифагора $AB^2 + BE^2 = AE^2$ и $AD^2 + DE^2 = AE^2$. Но мы показали, что $AD = BC$, а $BE = CD$, поэтому $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

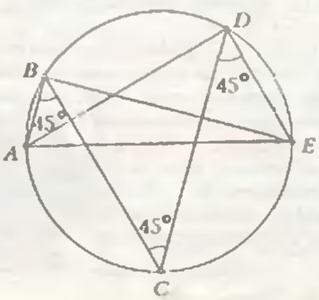


Рис. 2

13. Сначала попробуем решить поставленную задачу не для ферзей, а для ладей. Очевидно, что можно расставить только 8 ладей так, чтобы они не били друг друга, при этом на каждой горизонтали и на каждой вертикали будет стоять по одной ладье. Также очевидно, что сумма номеров клеток для 7 ладей будет меньше, чем для 8 ладей, так как при расстановке 7 ладей останутся горизонталь и вертикаль, в которых не стоят ладьи. Поставив на пересечение этих вертикали и горизонтали восьмую ладью, мы увеличим сумму номеров клеток, сохранив свойство, что ладьи не бьют друг друга.

Рассмотрим 1-ю, 3-ю, 5-ю и 7-ю горизонтали сверху. Чтобы сумма номеров клеток для стоящих на них ладей была максимальна, эти четыре ладьи должны стоять на четырех правых вертикалях. Независимо от их расположения, в этом случае сумма номеров клеток, в которых стоят эти ладьи, равна 122. Аналогично, ладьи, стоящие на 2-й, 4-й, 6-й и 8-й горизонталях следует ставить на четыре левых вертикали, в противном случае сумма номеров клеток, на которых стоят эти ладьи, уменьшится.

При постановке ладей на четыре левых вертикали сумма номеров клеток не зависит от расстановки и равна 154.

Таким образом, для всех ладей сумма номеров клеток, на которых они стоят, не больше, чем 122 + 154 = 276. Ясно, что для ферзей сумма номеров клеток тоже не может оказаться большей, чем 276. Осталось расставить их так, чтобы сумма номеров клеток стала равной 276. Это возможно при установке ферзей на поля с номерами 6, 13, 23, 32, 40, 47, 53, 62 (рис.3).

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56
64	63	62	61	60	59	58	57

Рис. 3

14. Предположим, что мы нашли n различных натуральных чисел, удовлетворяющих условию задачи, т.е. таких, что произведение любых двух из них делится на их разность. Покажем, как можно построить набор из $n + 1$ натурального числа, удовлетворяющий тому же требованию. Обозначим первоначальные числа через a_1, a_2, ..., a_n. Возьмем число $p = a_1a_2...a_n$. Это число делится на разность любых двух чисел из первоначального набора, так как содержит все возможные попарные произведения чисел из этого набора. Новый набор мы составим из чисел $p, p+a_1, p+a_2, ..., p+a_n$.

Нетрудно проверить, что этот набор также удовлетворяет условиям задачи.

Этот результат позволяет нам последовательно строить наборы со все большим и большим количеством чисел. Если мы начнем с набора чисел 1 и 2, то мы будем последовательно получать

1, 2

2, 3, 4

24, 26, 27, 28

и так далее.

15. Сначала разделим числа a, b и c на наибольшее число d, являющееся делителем всех трех чисел. Числа $a_1 = a/d$, $b_1 = b/d$ и $c_1 = c/d$, очевидно, также удовлетворяют соотношению

$$a_1b_1 + b_1c_1 = c_1a_1. \qquad (*)$$

Кроме того, если

$$\text{НОД}(a_1,b_1)+\text{НОД}(b_1,c_1)=\text{НОД}(c_1,a_1),$$

то и

$$\text{НОД}(a,b)+\text{НОД}(b,c)=\text{НОД}(c,a).$$

Заметим теперь, что $\text{НОД}(a_1,b_1)=\sqrt{a_1b_1/c_1}$, $\text{НОД}(b_1,c_1)=\sqrt{b_1c_1/a_1}$ и $\text{НОД}(a_1,c_1)=\sqrt{a_1c_1/b_1}$.
Разделим обе части соотношения (*) на $\sqrt{a_1b_1c_1}$. Получим

$$\sqrt{\frac{a_1b_1}{c_1}}+\sqrt{\frac{b_1c_1}{a_1}}=\sqrt{\frac{c_1a_1}{b_1}},$$

что и требовалось доказать.

Нелинейные элементы в электрических цепях

1. $I = 10$ мкА, $U = 3$ кВ. 2. $R < 40$ кОм. 3. $P_x = 0{,}43$ Вт. 4. $A = 0{,}125$ А/В^2.

LIX Московская олимпиада школьников по математике

Математический праздник

6 класс

1. Один кошелек лежал внутри другого.

2. 50%. Если Боря собрал 12 грибов, то Алик собрал 10, а Вася — 15.

Можно рассуждать и «более учено»: Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик. Значит, Боря собрал в 1,2 раза больше грибов, чем Алик. Поскольку Боря собрал на 20% меньше грибов, чем Вася, Боря собрал 0,8 от собранного Васей количества грибов, т.е. Вася собрал в 1 : 0,8 = 1,25 раз больше, чем Боря. Вспоминая, что Боря набрал в 1,2 раза больше, чем Алик, заключаем: Вася набрал грибов в 1,2·1,25 = 1,5 раз больше, чем Алик.

3. Поровну. Всего пятизначных чисел 90 000. Каждое пятое из них делится на 5. Значит, не делящихся на 5 пятизначных чисел всего 90 000 − 90 000 : 5 = 72 000.

Теперь посчитаем, сколько вариантов существует для двузначного числа, образованного первыми двумя цифрами пятизначного числа, у которого ни первая, ни вторая цифры не равны 5. Для этого заметим, что всего двузначных чисел 90. Из них надо выбросить начинающиеся на цифру 5 (таких чисел 10) и оканчивающиеся на цифру 5 (таких двузначных чисел 9, но одно из них, а именно число 55, уже выбросили, так что выбрасывать в действительности надо 8 чисел). Итак, имеем 90 − 10 − 8 = 72 варианта для числа из первых двух цифр. Остальные три цифры могут быть любыми, от 000 до 999, всего 1000 вариантов. Осталось заметить, что 72·100 = 72 000.

4. 2 красных, 4 оранжевых, 8 желтых и 9 зеленых шариков. Поскольку красные шарики путал лишь один человек, на самом деле было 2 красных шарика. Следовательно, *С* путал красный с оранжевым. Значит, *С* правильно посчитал желтые и зеленые шарики. Осталось заметить, что *В* путал желтые и зеленые, следовательно, правильно посчитал оранжевые.

5. а) Да, достаточно сложить из остроугольных треугольников трапецию и пристроить к ее большему основанию еще один остроугольный треугольник (рис.4; можно пристраивать его и к меньшему основанию, но в таком случае надо помнить о том, что пятиугольник должен получиться выпуклым).

б) Нет, ибо правильный пятиугольник имеет 5 тупых углов. В каждом из них должны сходиться по крайней мере два треугольника, что невозможно, если треугольников всего лишь 4.

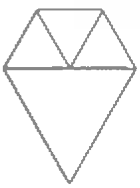


Рис. 4

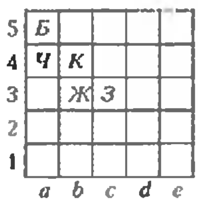


Рис.5

6. Закрасим сразу целый блок белой, черной, красной, желтой и зеленой красками, как показано на рисунке 5. Разумеется, мы ничуть не рискуем: любая соответствующая условию задачи раскраска этого блока будет отличаться от нашей лишь выбором цветов. Поскольку клетка a3 находится на одной вертикали с белой и черной клетками и на одной горизонтали с желтой и зеленой, она не может быть окрашена ни в один из этих цветов и потому должна быть красной. Поскольку в «верхнем» блоке (точнее говоря, в блоке, образованном клетками b5, c5, d5, c4, d4) должна быть красная клетка, причем не на четвертой, а на пятой горизонтали (на четвертой горизонтали уже есть красная клетка b4), мы видим, что красной клетке «правого верхнего» блока (состоящего из клеток d2, d3, e3, e4, e5) некуда деться, кроме как на d2. Значит, красная клетка «верхнего» блока — это обязательно c5. Для последней, пятой красной клетки доски остается единственное поле — e1.

Теперь займемся черным цветом. В «верхнем» блоке есть две возможности: b5 и d5. Но, закрасив в черный цвет b5, мы никак не сможем покрасить черным ни одной клетки «левого нижнего» блока. Значит, черная клетка — не b5, а d5. Цвет клетки b5 теперь тоже можно определить: зеленый, ибо на одной горизонтали с ней находятся белая и черная, а на одной вертикали — красная и желтая. Теперь очевиден цвет клетки e5, и т.д. В конце концов приходим (совершенно однозначно!) к изображенному на рисунке 6 ответу.

Б	З	К	Ч	Ж
Ч	К	Б	Ж	З
К	Ж	З	Б	Ч
З	Ч	Ж	К	Б
Ж	Б	Ч	З	К

Рис. 6

7 класс

1. Поскольку каждая цифра участвует в разрядах единиц, десятков и сотен по одному разу, ответ ясен:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 + 20 + 30 + \ldots + 90 + \\ + 100 + 200 + 300 + \ldots 900 = 4\,995.$$

2. Рассуждаем с конца: перед последней игрой у первого было 30, а у второго — 18. Перед второй игрой у первого было 12, а у второго 36. А в начале — 24 и 24.

3. Одна пара очевидна ($x = y = 2$), а вторая — $x = 2^5 = 32$, $y = 2^4 = 16$. Вообще, из уравнения сразу видно, что число y четное. Положив $y = 2m$, получим $2x^3 = 16m^4$, откуда видно, что x четно, $x = 2n$, и уравнение преобразуется к виду $n^3 = m^4$. Но если число одновременно является и третьей и четвертой степенью, то оно есть двенадцатая степень k^{12}, т.е. $n = k^4$, $m = k^3$, что позволяет указать все решения нашего уравнения: $(x,y) = (2k^4, 2k^3)$.

4. а) $2^4 = 16$. На каждом шаге есть 2 возможности: идти направо или вниз. б) $2^5=32$. Если читать слово в обратном порядке, то пункт б) будет отличаться от а) только тем, что в «кроне» букв на 1 меньше, чем в слове «корень».

5. Если белых лоскутов x, то, поскольку каждый белый лоскут граничит с тремя черными, имеется $3x$ границ между белым и черным. Черных лоскутов $32 - x$. Поскольку каждый из них граничит с 5 белыми, можно еще раз посчитать границы между белым и черным и составить уравнение:

$$5(32-x)=3x,$$

из которого следует, что $x = 20$.

6. Заменив в произведении $N = 1!\cdot2!\cdot3!\cdot\ldots\cdot99!\cdot100!$ факториалы их определениями, т.е. записав

$$1\cdot(1\cdot2)\cdot(1\cdot2\cdot3)\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot4)\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5)\cdot\ldots\cdot(1\cdot2\cdot\ldots\cdot100),$$

видим, что множитель 1 появится 100 раз, множитель 2 — 99 раз, 3 — 98 раз, и так далее вплоть до единственного множителя 100. Значит,

$$N = 2^{99}\cdot3^{98}\cdot4^{97}\cdot5^{96}\cdot\ldots\cdot99^2\cdot100,$$

так что N можно представить в виде

$$N = a^2\cdot2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot98\cdot100.$$

Вынося из четных чисел по двойке, получим

$$N = a^2\cdot2^{50}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot49\cdot50.$$

Выходит, достаточно зачеркнуть 50!, и произведение факториалов станет точным квадратом!

Задачи старших классов

8 класс

1. Да, верно. Действительно, $a+\frac{b^2}{a} = \frac{a^2+b^2}{a}$; $b+\frac{a^2}{b} = \frac{a^2+b^2}{b}$, откуда $\frac{a^2+b^2}{a} = \frac{a^2+b^2}{b}$, следовательно, $a = b$ (так как $a^2+b^2 \neq 0$).

2. Обозначим массы гирек через m_i, массы шариков — через x_i. Тогда $(m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) + \ldots + (m_9 - m_{10}) + (m_{10} - m_1) = 0$. Заметим, что величины, стоящие в скобках, по модулю равны массам шариков. Перенесем все меньшие нуля в правую часть с противоположным знаком, получим $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k} = x_{i_{k+1}} + \ldots + x_{i_{10}}$, что и требовалось доказать.

3. См. рис.7.

Пусть на плоскости даны две точки X и Y. Тогда множество точек, которые ближе к X, чем к Y, есть одна из полуплоскостей, на которые разбивает плоскость серединный перпендикуляр к отрезку XY. На этом очевидном утверждении основано решение задачи.

Нетрудно видеть, что за цветком ухаживают трое из садовников, живущих в углах клетки, в которой находится цветок. Поэтому цветы, за которыми ухаживает наш садовник, могут находиться только в прилежащих к нему клетках, и, к тому же, достаточно нарисовать искомую область для одной клетки, а для остальных продолжить, исходя из симметрии. Пусть наш садовник обозначен буквой A, а соседние с ним по этой клетке — буквами B, C и D (см. рисунок). Тогда найдем в этой клетке точки, находящиеся ближе к B, C и D, чем к A (проведя соответствующие серединные перпендикуляры). Ясно, что за цветами, растущими в остальных точках этой клетки, ухаживает садовник A.

5. При четных n.

Рассмотрим некоторую строку. Если в какой-то момент ладья попадает на эту строку, то ей надо следующим ходом перейти на другую клетку этой же строки, а потом обязательно уйти с нее на другую строку. Таким образом, клетки выбранной строки делятся на пары. Отсюда следует, что в этой строке должно быть четное число клеток.

При четных n см. рис.8.

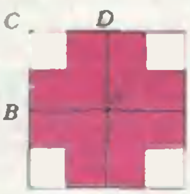


Рис. 7

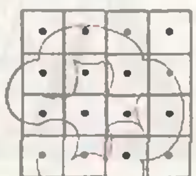


Рис. 8

9 класс

1. Допустим противное. Тогда в некотором выпуклом n-угольнике имеется не менее 36 углов, меньших 170° (остальные $n - 36$ углов не превосходят 180°). Как известно, сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$. Следовательно, получаем неравенство

$$180\cdot(n-2) < 170\cdot36 + 180\cdot(n-36),$$

т.е. $180\cdot34 < 170\cdot36$, что неверно.

2. **Первое решение.** Возведем неравенства в квадрат, перенесем все члены в левые части и разложим разности квадратов на множители. Мы получим, что все произведения $(a-b-c)(a-b+c)$, $(b-c-a)(b-c+a)$, $(c-a-b)(c-a+b)$ неотрицательны. Перемножая эти произведения, находим, что

$$(a-c-b)^2(b-c-a)^2(c-a-b)^2 \le 0.$$

Мы видим, что произведение неотрицательных чисел равно 0, значит, хотя бы одно из этих чисел равно 0, откуда следует требуемое утверждение.

Второе решение. Без ограничения общности можно считать, что число a — максимальное среди чисел a, b и c по абсолютной величине, также можно считать, что $a \ge 0$ (в противном случае произведем замен: $a = -a_1$, $b = -b_1$, $c = -c_1$).

Тогда, из неравенства $|b-c| \ge |a|$ следует, что числа b и c не могут иметь одинаковых знаков. Возможны два случая.

1) $b \ge 0$, $c \le 0$. Тогда, раскрывая модули, приходим к неравенствам $a-b \ge -c$, $b-c \ge a$, $a-c \ge b$, из которых следует, что $b \le a+c$, $b \ge a+c$, т.е. $b = a + c$.

2) $b \le 0$, $c \ge 0$. Тогда получим неравенства $a-b \ge c$, $c-b \ge a$, $a-c \ge -b$, следовательно, в этом случае одновременно выполняются неравенства $c \ge a+b$, $c \le a+b$, т.е. $c = a + b$. Таким образом, в обоих случаях утверждение доказано.

3. Используя свойства углов, вписанных в окружность, и углов, образованных параллельными прямыми и секущей, получаем серию равных углов: $\angle BNM = \angle NCA = \angle BAM$ (рис.9). Следовательно, вокруг четырехугольника $AMBN$ можно описать

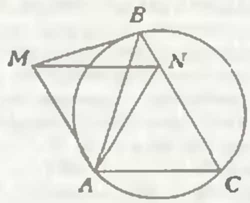


Рис. 9

окружность и, значит, $\angle NCA = 5\angle MBA = \angle MNA = \angle NAC$, откуда получаем, что треугольник ANC равнобедренный. Значит, $AN = NC$.

4. а) Может. Вторую строчку запишем в следующем порядке: 8, 2, 6, 5, 4, 3, 9, 1, 7. б) Не может. Под числом 11 может быть написано только число 5, но под числом 4 тоже может быть написано только число 5. в) Может. Докажем это по индукции для любого $n \ge 12$. Легко показать, что утверждение верно при $n \in \{12, 13, \ldots, 25\}$. Пусть $k > 25$; предположим, что утверждение верно для всех $n \in \{12, 13, \ldots, k-1\}$. Докажем, что тогда оно будет верным и для $n = k$.

Очевидно, что для k можно найти такое число $m \ge 5$, для которого

$$m^2 \le k < (m+1)^2.$$

Тогда $2k \ge 2m^2 > (m+2)^2$ и, следовательно,

$$k + k - 1 = 2k - 1 \ge (m+2)^2,$$

т.е. существует такое число $p \le k-1$, что

$$k + p = (m+2)^2.$$

Пусть $a_p = k$, $a_{p+1} = k - 1$, …, $a_k = p$. Тогда

$$a_p + p = a_{p+1} + (p+1) = \ldots = a_k + k = (m+2)^2.$$

Так как

$$p > (m+2)^2 - (m+1)^2 = 2m+3 \geq 13,$$

то, по предположению индукции, для 1, 2, ..., $p-1$ существует перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ такая, что a_1+1, a_2+2, ..., $a_{p-1}+(p-1)$ — точные квадраты.

Утверждение задачи доказано.

6. 72 монеты. Покажем, что Али-Баба может добиться, чтобы в 7 кучках лежало не более чем по 4 монеты, а разбойник может добиться, чтобы не было кучек, содержащих менее 4 монет. Следовательно, Али-Баба унесет 100 − 7·4 = 72 монеты.

Пусть имеются 4 кучки, в каждой из которых лежит более, чем 4 монеты, и $x_1^{(0)} \geq x_2^{(0)} \geq x_3^{(0)} \geq x_4^{(0)} \geq 4$ — количества монет в этих кучках. Разложим их следующим образом:

$$x_1^{(0)} = y_1+1,\ x_2^{(0)} = y_2+2,\ x_3^{(0)} = y_3+3,\ x_4^{(0)} = y_4+4,$$

положив в кружки соответственно 1, 2, 3 и 4 монеты. После перестановки кружек получим новые кучки, состоящие из

$$x_1^{(0)} = y_1+z_1,\ x_2^{(0)} = y_2+z_2,\ x_3^{(0)} = y_3+z_3,\ x_4^{(0)} = y_4+z_4$$

монет, где z_1, z_2, z_3 и z_4 — некоторая перестановка чисел 1, 2, 3, 4. Далее процесс повторяется с заменой чисел $x_1^{(0)}$, ..., $x_4^{(0)}$ на расположенные в невозрастающем порядке числа $x_1^{(1)}$, ..., $x_4^{(1)}$.

Докажем, что на некотором шаге процесс оборвется. Имеет место одна из следующих трех возможностей:

1. $x_1^{(1)} > x_1^{(0)}$;
2. $x_1^{(1)} = x_1^{(0)}$, $x_2^{(1)} > x_2^{(0)}$;
3. $x_1^{(1)} = x_1^{(0)}$, $x_2^{(1)} = x_2^{(0)}$, $x_3^{(1)} > x_3^{(0)}$.

На каждом шаге количество монет в наибольшей из выбранных 4 кучек не уменьшается. Поэтому число шагов, при которых реализуется первая возможность, конечно. При втором и третьем случаях суммарное число монет в двух наибольших кучках тоже не уменьшается, поэтому число шагов, при которых реализуется вторая возможность, также конечно. Аналогично проверяется, что число шагов, реализующих третью возможность, тоже конечно. Следовательно, на некотором шаге процесс оборвется, что соответствует тому, что в некоторой кучке окажется не более 4 монет. Продолжая этот процесс с оставшимися кучками, в конце концов придем к тому, что останется не более трех кучек, содержащих больше 4 монет.

Однако и разбойник может добиться, чтобы в каждой кучке оставалось не менее 4 монет. Действительно, для первоначальной ситуации это верно. Пусть на некотором шаге это верно и часть монет уже отложена в кружки. Тогда, если в двух кружках содержится одинаковое число монет, то разбойник переставляет эти кружки и положение не изменяется, если же количество монет во всех кружках разное, то в двух наибольших из них соответственно не менее 3 и 4 монет, и разбойник переставляет эти кружки. В результате во всех новых кучках опять будет не менее 4 монет.

10 класс

1. **Первое решение.** Надо доказать, что c заключено между наименьшим и наибольшим из чисел a и b. Без ограничения общности будем считать, что $a \geq b$. Так как $a^2 - ab \geq 0$, то $b^2 \leq c^2$, $b \leq c$. Поскольку $b^2 - ab \leq 0$, то $a^2 \geq c^2$, $a \geq c$. Утверждение задачи доказано.

Второе решение. Из теоремы, обратной теореме косинусов, следует, что существует треугольник со сторонами a, b и c и углом $\gamma = 60°$ против стороны c. Поскольку наибольший угол любого треугольника не меньше 60°, а наименьший — не больше 60°, угол γ является средним по величине в треугольнике. Из того, что против большего угла треугольника лежит большая сторона, следует, что либо $a \leq c \leq b$, либо $b \leq c \leq a$. Значит, из двух сомножителей $a - c$ и $b - c$ один неотрицателен, а другой неположителен. Поэтому их произведение неположительно.

2. 18. Проведем все прямые, параллельные одной из диагоналей квадрата и содержащие более одной из отмеченных точек — таких прямых 17. Невычеркнутыми останутся две угловые точки. Их можно вычеркнуть, проведя еще одну прямую.

Докажем, что нельзя обойтись меньшим числом прямых. Действительно, рассмотрим центры единичных квадратиков, расположенных по периметру большого квадрата. Ясно, что прямая, не параллельная стороне квадрата, может вычеркнуть не более двух таких точек, но всего таких точек 36.

Отбор на Всероссийскую олимпиаду

11 класс

1. Ответ отрицателен: $\sin(2nx)$ вообще не является функцией $\sin x$. Достаточно взять $x_1 = \pi/4n$, $x_2 = \pi - x_1$: $\sin x_1 = \sin x_2$, однако

$$\sin(2nx_1) = 1,\quad \sin(2nx_2) = -1.$$

2. Обозначим вершины тетраэдра A, B, C, D, а точку пересечения перпендикуляров к граням, восставленных в точках пересечения медиан, обозначим O. Проведем через O плоскость α, перпендикулярную прямой AC и пересекающую ее в точке P. Точки пересечения медиан граней ACD и ACB обозначим N, M соответственно (рис.10). По теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах, N и M лежат в плоскости α, а $NP \perp AC$, $MP \perp AC$.

Поскольку точка пересечения медиан делит медиану в отношении 1:2, образ P при гомотетии с центром в середине AC и коэффициентом 3 является общим основанием высот, проведенных к стороне AC в гранях ACD и ACB; обозначим его через H. Плоскость DHB перпендикулярна AC. По теореме о трех перпендикулярах перпендикуляры, восставленные к граням ACD и ACB в точках пересечения высот, лежат в плоскости DHB; следовательно, они пересекаются.

Приведенное выше рассуждение справедливо для любой пары перпендикуляров, восставленных к граням в точках пересечения высот. Таким образом, эти перпендикуляры попарно пересекаются. Осталось заметить, что никакие три из них не могут лежать в одной плоскости, откуда следует, что все они пересекаются в одной точке.

4. Обозначим точку пересечения прямых BD и LN через X (рис.11). Угол между хордой и касательной равен половине дуги, стягиваемой хордой. Поэтому

$$\angle BLN + \angle LND = 180°,\ \text{а}\ \sin\angle BLN = \sin\angle LND.$$

Используем теорему синусов для треугольников BLX и XND, учитывая равенства $\angle BXL = \angle NXD$ (вертикальные углы) и $ND = MD$ (отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки). Получим $BX/XD = BL/MD$.

Аналогичное рассуждение можно провести для точки Y пересечения BD и KM. Получим $DY/YB = MD/BL$, т.е. $X = Y$.

Так как $BD \parallel PQ$, имеем: треугольник LCP подобен LBX, треугольник MCQ подобен MDX. Коэффициенты подобия LC/LB и MC/MD относятся как $MD : LB$, поскольку $LC = CM$. Но длины отрезков BX и XD находятся, по доказанному выше, в обратном отношении $LB : MD$. Поэтому $CP = CQ$.

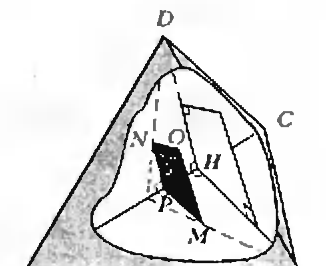


Рис. 10

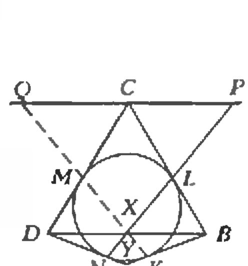


Рис. 11

6. Докажем более общее утверждение. Если дан выпуклый $4n$-угольник, все вершины которого имеют целочисленные координаты, то его диаметр больше $d(n) = \frac{1}{2}n\sqrt{n}$ при $n \ge 200$.

Докажем сначала следующее утверждение. Даны $4n$ попарно различных ненулевых целочисленных векторов ($n \ge 200$). Тогда из них можно выбрать несколько, сумма которых имеет длину, большую $d(n)$.

Из принципа Дирихле следует, что по крайней мере в одном из четырех углов, на которые делят плоскость биссектрисы координатных углов, содержится не менее n из данных векторов. (Из каждых двух лучей, ограничивающих угол, один считаем принадлежащим ему, а второй — нет). Пусть это будет (без ограничения общности) угол, задаваемый неравенствами $x \ge y$, $x > -y$. Рассмотрим n векторов в этой области, имеющих наименьшие проекции на ось абсцисс, и оценим снизу длину их суммы.

В точку $x = 1$ проектируются два вектора, ..., в точку $x = m$ проектируются $2m$ векторов. Таким образом, $n = m^2 + m + k$, где $0 \le k < 2m + 2$. Абсцисса суммы этих векторов равна

$$\sum_{i=1}^{m} 2i \cdot i + k(m+1) \ge \frac{m(m+1)(2m+1)}{3}.$$

Поскольку $n < m^2 + 3m + 2 < (m+2)^2$, достаточно доказать, что

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{3} > \frac{(m^2+3m+2)(m+2)}{2},$$

или

$$2m(2m+1) > 3(m+2)^2, \quad m^2 - 10m - 12 > 0.$$

При $m \ge 12$ это неравенство выполняется, а при $m < 12$ имеем:

$$n < 14^2 < 200.$$

Значит, абсцисса суммы любых n векторов, лежащих в указанной области, а следовательно, и сама длина этой суммы, больше $d(n)$.

Перейдем теперь к решению задачи. Превратим стороны многоугольника в векторы, расставив стрелки по (произвольно выбранному) направлению обхода многоугольника. Согласно доказанному утверждению, длина суммы некоторых из этих векторов больше $d(n)$. Рассмотрим прямую, на которой лежит сумма такого набора векторов, и выберем на ней положительное направление, определяемое этой суммой. Очевидно, что длина суммы всех рассматриваемых векторов, имеющих положительную проекцию на построенную прямую, также больше $d(n)$. С другой стороны, это будут векторы, соответствующие нескольким последовательным сторонам многоугольника. Следовательно, их сумма является диагональю многоугольника, длина которой больше $d(n)$.

Замечание. Приведенную оценку можно несколько улучшить за счет того, что векторы, задающие стороны выпуклого многоугольника, не только попарно различны, но и попарно несонаправлены.

Санкт-Петербургская математическая олимпиада

9 класс

1. Проверьте, что если произвести указанную операцию над одним и тем же числом 10 раз подряд, то получится исходный набор чисел.

2. Выпишем в ряд все числа от 1 до 99 в следующем порядке: 99, 1, 98, 2, 97, 3, ..., 52, 48, 51, 49, 50.

В этому ряду сумма любых двух соседних чисел равна 99 или 100. Поэтому никакие два выбранных числа не могут быть соседними в этом ряду.

3. Обозначим расстояние от точки X до прямой l через $d(X,l)$. Так как

$$d(C,AP) = d(M,AP)\cdot\frac{AC}{AM}, \quad d(B,DP) = d(M,DP)\cdot\frac{DB}{DM}$$

и $d(M,AP) = d(M,DP)$, то достаточно доказать, что $AC/AM = DB/DM$.

4. Допустим, что A и B, не сумевшие познакомиться после указанной серии ужинов, на следующем ужине смогут познакомиться. Тогда можно выстроить цепочку знакомств, связывающую A и B. Рассмотрим эту цепочку и будем каждый вечер убирать из нее того, кто устраивает ужин (если он присутствует в цепочке). Когда каждый человек устроит хотя бы один ужин, в цепочке между A и B никого не останется, так что A и B окажутся знакомыми между собой. Противоречие.

5. Пусть X и Y — середины диагоналей данного четырехугольника. Тогда точка N является серединой отрезка XY (а также серединой обеих средних линий). Это легко доказать, например, с помощью векторов: вектор ON равен четверти суммы векторов, идущих из O в вершины четырехугольника. Так как O — центр описанной окружности, точки X и Y являются основаниями перпендикуляров, опущенных из O на диагонали. Следовательно, X и Y лежат на окружности, построенной на OM как на диаметре. Точка N лежит внутри (или на) той же окружности, как середина хорды XY. Следовательно, $ON \le OM$, так как расстояние между любыми двумя точками круга не превосходит его диаметра.

6. Утверждение задачи верно для многочлена любой степени выше первой. Пусть $d > 1$ — натуральное число. Если среди всевозможных остатков по модулю d чисел вида $p(x)$ не встречается остаток a, то в качестве искомой можно взять прогрессию вида $a_n = a + nd$. Остаток числа $p(x)$ определяется остатком числа x и может принимать всего d различных значений. Поэтому если двум различным остаткам x и y соответствуют одинаковые остатки $p(x)$ и $p(y)$, то какой-то остаток не может быть получен как остаток числа вида $p(x)$. Возьмем такие x и y, что $|p(x) - p(y)| > |x - y|$, и в качестве d выберем $d = |p(x) - p(y)|$.

7. $(n+1)^{n-1}$. Увеличим стоянку, добавив $(n+1)$-е место для парковки и замкнув улицу в цикл так, чтобы с $(n+1)$-го места она вела обратно к 1-му. Теперь имеется ровно $(n+1)^n$ последовательностей предпочтения (каждый из n водителей независимо от других может предпочитать одно из $(n+1)$ мест), и для каждой из них все n водителей сумеют припарковаться, причем одно место парковки останется свободным. Последовательность предпочтений удовлетворяет требованию исходной задачи только тогда, когда свободным остается $(n+1)$-е место. Разобьем все последовательности предпочтений круговой стоянки на $(n+1)^{n-1}$ групп по $(n+1)$ последовательностей в каждой: в одну группу с данной последовательностью отнесем те, которые получаются из нее циклическим сдвигом номеров мест парковки. В каждой группе имеется ровно одна последовательность предпочтений, удовлетворяющая требованию исходной задачи, а именно та, в которой свободному месту соответствует номер $(n+1)$. Значит, искомое число последовательностей равно числу групп, т.е. $(n+1)^{n-1}$.

Теорема Кэли (A.Cayley, 1889) гласит, что количество неизоморфных деревьев с помеченными вершинами равно $(n+1)^{n-1}$, где $(n+1)$ — число вершин дерева. Как видите, эта величина совпадает с ответом в данной задаче. Более того, можно в явном виде построить взаимно однозначное соответствие между удачными последовательностями предпочтений и деревьями с $(n+1)$ вершинами. Придумайте такое соответствие. Это даст еще одно решение задачи (или доказательство теоремы Кэли). Другие доказательства теоремы Кэли и полезные ссылки можно найти в книге Ф.Харари, Э.Палмер «Перечисление графов».

10 класс

1. $n - 1$. 2. Воспользуйтесь формулой, выражающей радиус вписанной окружности через площадь и периметр.

3. При выполнении операций произведение всех написанных на доске чисел остается неизменным, а сумма при этом может меняться только в большую сторону.

4. Количество таких треугольников равно C_{1996}^{6}.

5. Перебором остатков при делении на 4 нетрудно проверить, что при целых x значения квадратного трехчлена x^2+px+q не могут принимать все возможные остатки при делении на 4. Пусть s — тот остаток, которые не встречается у его значений. Положим $r=2$. Нетрудно проверить, что тогда трехчлен $2x^2+rx+s$ принимает в целых точках только значения, дающие остаток s при делении на 4.
6. Построим на стороне AB во внешнюю сторону треугольник BAE_1, равный треугольнику BCD. Тогда $\Delta E_1BE=\Delta DBE$ и четырехугольник AE_1BE вписанный. Проверьте, что точка O — ортоцентр треугольника EBD — тоже лежит на этой окружности, и $\angle BOA=\angle BEA$. Аналогично, $\angle BOC=\angle BDC$. Значит, $\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=180°$, и точка O лежит на прямой AC.
7. Покажите, как по паре маршрутов в республиках можно построить общегосударственный гамильтонов цикл.

11 класс

1. Если x — корень данного уравнения, то $y=-96/19x$ — тоже его корень.
5. Возьмем натуральное число N, у которого больше чем $\deg p_1+\deg p_2$ делителей. Все они удовлетворяют уравнению $p_1(x)p_2(N/x)=1+p_3(1)p_4(N-1)$. Это может быть лишь если $p_1=ax^n$, $p_2=bx^n$. Аналогично, $p_3(x)=cx^m$, $p_4(x)=dx^m$. Подставляя небольшие значения переменных, убеждаемся, что $ab=cd=1$, $m=n=1$.
7. Выигрывает первый. Диагональным рядом будем называть любой ряд клеток, идущих от какой-либо клетки левой или верхней стороны доски по диагонали вправо-вниз до правой или нижней стороны. Первый игрок каждый раз должен указывать на свободную клетку в самом нижнем диагональном ряду, причем если в этом ряду есть клетки, которые можно накрыть доминошкой единственным способом, то в первую очередь он должен указывать на любую из таких клеток, если же все свободные клетки в этом диагональном ряду можно накрыть двумя способами, то можно указать на любую из них.

Избранные задачи отборочного тура

1. Докажите, что треугольники ADE и FDC равны по двум сторонам и углу.
3. Величина $xv+yu$ не изменяется при указанных операциях.
4. Будем называть «обобщенной диагональю» любой набор из n клеток, находящихся в разных строках и в разных столбцах таблицы. Разобьем множество клеток таблицы на n обобщенных диагоналей. Искомую расстановку чисел можно получить так: числа от 1 до n расставляем на первой «диагонали», числа от $n+1$ до $2n$ — на второй, и так далее.
5. Докажите, что треугольники AED и DFC равны.
6. Сравните периоды последовательностей $(a_{n+1}-a_n)$ и $\left(a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right)$.
7. Проверьте, что если последовательность a_n принадлежит множеству A, то последовательность $b_n=(n+1)-a_n$ принадлежит множеству B, и наоборот: если последовательность b_n принадлежит множеству B, то последовательность $a_n=(n+1)-b_n$ принадлежит множеству A.
8. Крюки, состоящие из k клеток, будем для краткости называть k-крюками, а их угловые клетки — вершинами. В любой строке и в любом столбце диаграммы Юнга может быть, очевидно, не более одной вершины k-крюка. Вместе с каждым k-крюком рассмотрим также «крест» — объединение вертикального и горизонтального ряда клеток, содержащих крюк. Каждый такой крест состоит из клеток k-крюка и остальных клеток — «антикрюка». Ясно, что вершины других k-крюков расположены либо ниже горизонтальной стороны антикрюка, либо правее его вертикальной стороны. В каждом антикрюке отметим все клетки, в столбце или строке которых находятся вершины других k-крюков. Тогда в каждом антикрюке отмечена $(s-1)$ клетка. Тогда, если мы условимся вершину каждого крюка учитывать дважды, каждый крест состоит не менее чем из $(k+s)$ клеток. Рассмотрим объединение всех s крестов. Формальный подсчет говорит, что оно состоит из $s(k+s)$ клеток. При этом любая клетка диаграммы Юнга входит не более чем в два креста (в том числе и вершины k-крюков, каждая из которых входит в один крест, но все равно учитывается нами два раза). Поэтому $s(k+s)\le 2n$.
10. Нарисуем такую схему метро города Энска (граф), в которой каждой линии метро соответствует вершина, а наличие пересадки между линиями изображается ребром, соединяющим вершины. Вместе с каждой «далекой» вершиной отметим все вершины, находящиеся на расстоянии не более двух пересадок от нее. Тогда вместе с каждой из вершин мы отметим не менее двух других вершин, причем все отмеченные вершины не пересекаются. Ответ: наибольшее количество попарно далеких друг от друга станций — 40. Примером может служить паукообразная сороконожка, у которой имеется центральная вершина-«туловище», 39 двухколенных ног и 1 одноколенная нога (т.е. всего как раз 120 вершин); 40 попарно далеких вершин — это концы всех ног.
11. Воспользуйтесь соображениями четности и теоремой Виета.

50-я Московская астрономическая олимпиада

Задачи I тура

Младшая группа

1. Нет, не прав, потому что во время противостояния Земли не видна — Солнце находится в том же направлении.
2. Зимой, поскольку Земля ближе к Солнцу и, следовательно, движется быстрее.
4. Потому что острота зрения у разных людей и условия наблюдения не одинаковы.

Средняя группа

1. При условии наблюдения на полярных кругах, причем на северном — в момент восхода точки весеннего равноденствия, а на южном — в момент ее захода.
2. Возможны несколько способов. а) Приближаясь к острову или удаляясь от него, нужно измерить угловую высоту вершины горы над горизонтом в двух точках, а лагом измерить пройденный при этом путь. Зная углы α и β, а также отрезок AB, легко найдем все стороны треугольников ACD и BCD (рис. 12). б) Используя секстант как горизонтальный угломерный инструмент, а известную капитану длину судна как базу, нужно измерить параллакс вершины и вычислить расстояние до нее (рис. 13). в) Обычно в лоции указаны высоты гор, поэтому достаточно измерить угловую высоту горы, чтобы вычислить расстояние (этот способ самый простой). г) Определив с помощью секстанта по солнцу свои точные координаты и сняв с карты

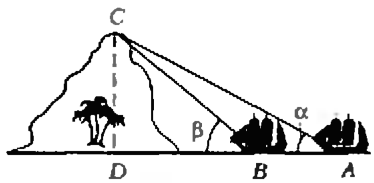


Рис. 12

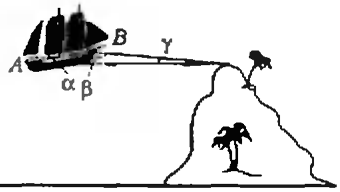


Рис. 13

координаты горы на острове, в принципе, можно вычислить расстояние. Правда, обычный секстант хорошей точности не даст.

3. Солнце, Луна и Венера видны невооруженным глазом. Звезды блеском до 4^m — с помощью телескопа.

Старшая группа

1. Представив это падение как движение по сильно вытянутому эллипсу, из третьего закона Кеплера получим

$$(1\ \text{год})^2/(2t)^2 = 1/(0{,}5)^3,$$

откуда t = 65 суток.

2. Двойную звезду α Cen примем за одно «двойное солнце». Тогда новыми яркими звездами на ночном небе могут быть только наше Солнце и далекий спутник α Cen — Проксима. Солнце очень похоже на α Cen A, поэтому его блеск будет таким же, как у нее на нашем небе — около 0^m. Проксима имеет у нас 11^m и видна на расстоянии 2,2° от α Cen. Значит, ее линейное расстояние от α Cen не менее 1,3 пк$\cdot$2,2°/57,3° = 0,05 пк. Это больше разности расстояний от Солнца до Проксимы и до α Cen ($\approx$ 0,02 пк), поэтому ее можно не учитывать. Итак, Проксима в 1,3/0,05 = 25 раз ближе к α Cen, чем Солнце. На расстоянии Солнца она имела бы блеск 11^m, а приближенная в 25 раз стала бы на 7^m ярче ($25^2 = 625 = 100\cdot 6{,}25$). Значит, она имела бы блеск около 4^m и не выделялась бы среди других звезд умеренного блеска. Итак, лишь Солнце оказалось бы новой яркой звездой на небе Альфы Кентавра.

Указать место Солнца среди звезд очень легко: если координаты α Cen составляют $\alpha = 14^h36^m$ и $\delta = -62°38'$, то Солнце будет в диаметральнo противоположной точке неба с координатами $\alpha + 12^h$ и $-\delta$, т.е. 2^h36^m и $62°38'$. Это созвездие Кассиопеи. При этом Солнце будет выглядеть значительно ярче главных звезд Кассиопеи, образующих фигуру W и имеющих блеск 2 — 3^m, а фигура созвездия станет похожа на волну.

3. Поток отраженного света пропорционален суммарной площади. Радиус каждого куска составил $0{,}5^{1/3}$ радиуса исходного астероида, и площадь поверхности — соответственно $0{,}5^{2/3}$. Полная площадь двух кусков возросла по сравнению с исходной в $2(0{,}5^{2/3}) = 2^{1/3} = 1{,}26$ раза. В звездных величинах это составляет $2{,}5\lg(1{,}26) = 0{,}25^m$.

Задачи II тура

Младшая группа

1. В Сиднее день длиннее, поскольку в южном полушарии продолжительность дня в это время года убывает, а в Сантьяго день начинается почти на 15 часов позже, чем в Сиднее.

2. $\delta = 0°$.

3. Абсолютная звездная величина скопления $0^m - 2{,}5\lg 250 = -6^m$. С учетом расстояния (mod = +10) получаем видимый блеск $+4^m$.

4. Во время затмения на Луну попадает свет, прошедший сквозь земную атмосферу и преломленный ею. Вспомним, что максимальный угол рефракции для наблюдателя на поверхности Земли около 0,5°. Выходя из нижних слоев атмосферы в космос, свет еще раз испытывает преломление на 0,5°. Итого около 1°. А диаметр геометрической земной тени у Луны около 1,5°. Значит, преломленный в атмосфере Земли свет попадает во все области геометрической тени у поверхности Луны.

Красные лучи солнечного света менее других рассеиваются и поглощаются в земной атмосфере, поэтому они-то в основном и доходят до Луны сквозь земную атмосферу.

Средняя группа

1. Орбита стала бы эллиптической с афелием в той точке, где была Земля в момент воображаемого изменения массы Солнца (R_a = 1 а.е.). Чтобы определить расстояние в перигелии (R_p), запишем законы сохранения момента импульса:

$$R_p v_p = R_a v_a$$

и энергии:

$$\frac{1}{2}\left(v_p^2 - v_a^2\right) = G\alpha M_C\left(\frac{1}{R_p} - \frac{1}{R_a}\right).$$

Учитывая, что $v_a^2 = GM_C R_a$, найдем, что $R_a/R_p = 2\alpha - 1$ и эксцентриситет $e = (R_a - R_p)/(R_a + R_p) = (\alpha - 1)/\alpha$. В нашем случае $\alpha = 2$, следовательно, $e = 0{,}5$ и расстояние в перигелии R_p = 0,3 а.е. Таким образом, при мгновенном удвоении массы Солнца Земля перешла бы на эллиптическую орбиту, заключенную между современными орбитами Земли и Меркурия.

2. Возможна. Выехав утром на запад и вернувшись в исходную точку вечером, можно провести в пути на дневной стороне Луны 3/2 синодического периода Луны, т.е. 44,25 сут = = 1062 ч. Примем максимальный интервал времени в пути за 1000 ч, тогда луноход способен пройти 10000 км. А длина экватора Луны составляет 11000 км. Следовательно, нужно двигаться не по экватору, а по одной из параллелей к северу или к югу от него.

3. Расстояние между планетами в соединении $R + r$, а в противостоянии $R - r$. Тогда отношение потоков света от планеты равно

$$\frac{(R+r)^2}{(R-r)^2} = 2{,}512^{\Delta m},$$

где Δm — разность блеска. Отсюда

$$\frac{R}{r} = \frac{2{,}512^{\Delta m/2}+1}{2{,}512^{\Delta m/2}-1}.$$

Из третьего закона Кеплера найдем орбитальный период планеты: $T = (R/r)^{3/2}$ лет, а время t от соединения до противостояния найдем из соотношения

$$\frac{1}{1\ \text{год}} - \frac{1}{T} = \frac{1}{2t},$$

откуда $t \approx$ 200 дней.

4. Потому что Земля значительно массивнее спутника.

Старшая группа

1. По теореме об углах треугольника, вписанного в окружность, определим, что точки, из которых радиус лунной орбиты $R_Л$ виден под углом менее 15°, находятся за пределом фигуры вращения, образованной окружностью радиусом $R = R_Л/(2\sin 15°) = 743$ тыс. км, проходящей через центры Земли и Луны и вращающейся вокруг прямой, их соединяющей. В проекции на плоскость лунной орбиты (которую будем считать совпадающей с плоскостью эклиптики) это две окружности, пересекающиеся в точках Земли и Луны. К тому же эта фигура с периодом 1 месяц вращается вокруг оси, перпендикулярной эклиптике и проходящей через центр масс системы Земля — Луна (для простоты будем считать его совпадающим с центром Земли).

Итак, требованию задачи безусловно удовлетворяют все точки за пределом поверхности этой второй фигуры вращения, которая практически представляется шаром радиусом около $R_{min} = 1{,}5\cdot 10^6$ км. Может ли быть у ИСЗ орбита такого радиуса? Сравним ускорение к Земле ($a_З$) и приливное ускорение к Солнцу (a_C):

$$a_З = \frac{GM_З}{R^2},\quad a_C = \frac{2GM_C}{R_З^3}R,$$

где $M_З$ — масса Земли, $R_З$ = 1 а.е. — радиус земной орбиты. Очевидно, что при $a_З \le a_C$ спутник не может двигаться по околоземной орбите. Отсюда найдем максимальное расстояние спутника:

$$R_{max} = R_З\left(\frac{M_З}{2M_C}\right)^{1/3} = 1{,}7\cdot 10^6\ \text{км},$$

что очень близко к R_{min}. Это указывает на крайнюю неустойчивость орбиты спутника. Существует лишь одна возможность стабильно двигаться на таком расстоянии от Земли — это зависнуть в одной из двух прямолинейных точек Лагранжа системы Земля — Солнце. Найти расстояние этой точки от Земли (R_L)

можно, приравняв разность ускорений $a_З(R_L) - a_С(R_L)$ центростремительному ускорению, необходимому для обращения спутника вокруг Земли с периодом $T = 1$ год:

$$a_З(R_L) - a_С(R_L) = \frac{v^2}{R_L} = \frac{(2\pi R_L)^2}{T^2 R_L}.$$

Отсюда

$$R_L = R_З\left(\frac{M_З}{3M_С}\right)^{1/3} = 1{,}5\cdot10^6 \text{ км}$$

Как видим, полученное значение R_L как раз совпадает с R_{max}. Значит, находясь в точке Лагранжа системы Земля — Солнце, спутник будет видеть Луну на расстоянии не более 15° от Земли. Однако у Земли при этом не будет наблюдаться смены фаз (ведь спутник постоянно находится на прямой Земля – Солнце), а у Луны разность фаз составит ±15° от полной, что практически незаметно. Поэтому найденное решение не отвечает условию задачи.

Вспомним, однако, что существует и вторая возможность: если спутник обращается вокруг Земли синхронно с Луной, то ему достаточно быть вне первой фигуры вращения, т.е. (если ограничиться плоскостью эклиптики) вне двух пересекающихся окружностей, проходящих через Землю и Луну. Синхронное с Луной обращение обеспечивается равенством радиуса орбиты спутника большой полуоси орбиты Луны. Нарисовав окружность такого радиуса с центром в точке Земли, мы видим, что ее небольшая дуга попадает в нужную область. Практически это означает, что спутник должен двигаться по круговой орбите, близкой к лунной, находясь на расстоянии менее 15° от антиподной точки Луны. Тот факт, что сама Луна движется по эллиптической орбите, будет вызывать ее периодическое смещение относительно Земли. При этом смена фаз Луны и Земли будет происходить в полной мере.

2. Используем два способа рассуждений.

1) Абсолютная звездная величина Галактики оценивается как –20. Приняв формально расстояние Солнца от центра Галактики (10 кпк) как расстояние от источника света, получим видимую величину Галактики: $m = -20 + 5\lg(10 \text{ кпк}/10 \text{ пк}) = -5$.
Ясно, что это оценка снизу.

2) Если приблизиться к Туманности Андромеды с нынешнего *расстояния 700 кпк до 10 кпк, то ее видимый блеск* возрастет с 3^m до $3 - 5\lg(700/10) = -6^m$. При этом часть ее излучения также поглощается пылью, хотя и гораздо меньше, чем в Галактике, поскольку мы находимся вне его слоя и наблюдаем галактику не с ребра.

Итак, можно принять с хорошей точностью, что в отсутствие пыли суммарный блеск звездного неба будет около -5 или -6^m. Это в сотни раз слабее полной Луны. А как известно, даже в полнолуние с трудом удается разобрать лишь крупный и четкий шрифт. Так что даже при отсутствии пыли Млечный Путь все равно был бы слабым источником света.

3. Скорость ИСЗ на этой орбите 7,9 км/с. А скорость подлетающего к Земле метеорита не может быть меньше второй космической, равной 11,2 км/с. Значит, минимальная скорость столкновения $v_{min} = 3{,}3$ км/с. (В принципе, возможна встреча с метеоритом, обращающимся по околоземной орбите, хотя на низких орбитах таких естественных метеоритов практически нет. В этом случае $v_{min} = 0$.)

Максимальной скорость метеорита убудет в том случае, если он приближается к орбите Земли по параболической траектории. Тогда его скорость вблизи земной орбиты будет третьей космической, равной 42 км/с. При удачной ориентации она может сложиться с орбитальной скоростью Земли: 42 км/с + 30 км/с = 72 км/с. А вблизи Земли, за счет ее притяжения, она возрастет еще (складываются энергии, т.е. квадраты скоростей): $(72^2 + 11{,}2^2)^{1/2}$ км/с = 73 км/с. Такова максимальная скорость метеорита вблизи Земли. И еще к ней может добавиться скорость спутника. В результате получим максимальную скорость столкновения: $v_{max} = 80{,}9$ км/с.

Чемпионат мира по головоломкам

Расстановка стрелок. См. рис.14.

Новый морской бой. См. рис.15.

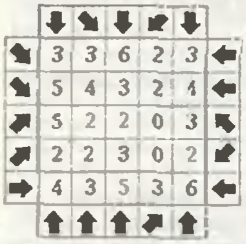


Рис. 14

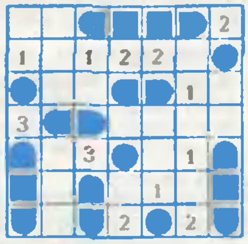


Рис. 15

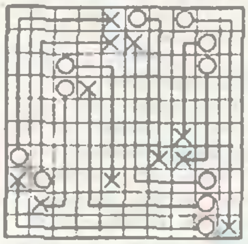


Рис. 16

A	S	B	C	U	H	R	T	E
U	R	H	E	T	B	S	A	C
E	C	T	A	R	S	B	H	U
T	A	S	B	E	U	C	R	H
B	U	C	H	A	R	E	S	T
H	E	R	S	C	T	U	B	A
S	B	U	T	H	C	A	E	R
C	H	E	R	S	A	T	U	B
R	T	A	U	B	E	H	C	S

Рис. 17

От крестиков к ноликам. См. рис.16.

Географический секрет. См. рис.17. Скрытое слово — BUCHAREST (БУХАРЕСТ).

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.П.Бухарев, Д.А.Крымов, С.А.Стулов, Л.А.Тишков, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Е.В.Самойлова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64а, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №2603

Как Каспаров и робот играли разные партии

В конце прошлого года в Лондоне чемпион мира среди людей Гарри Каспаров провел матч из двух партий с программой «Fritz» — последним, восьмым чемпионом мира среди компьютеров. Напомним, что пару лет назад эта немецкая программа в международном блиц-турнире расправилась со многими известными гроссмейстерами, в том числе и с Каспаровым, к тому же разделила с ним 1 – 2-е места. Правда, в дополнительном матче белковый чемпион взял убедительный реванш у электронного… И вот новая встреча с «Fritz», при более солидном контроле — по 25 минут на партию каждой стороне.

В первой партии произошел удивительный случай, подобного которому, пожалуй, не было еще в шахматной истории…

«Fritz» — Г.Каспаров
Защита Нимцовича

1. d4 e6 2. c4 Kf6 3. Kc3 Cb4 4. Фc2 0-0 5. a3 C:c3+ 6. Ф:c3 b6 7. Cg5.

В этом матче Каспаров пользовался обычной шахматной доской, а оператор Матиас Файст мышкой вводил ход в персональный компьютер (с микропроцессором «Pentium Pro 150»), и ответ машины также воспроизводился на доске. И вот, когда в данной позиции Каспаров только дотронулся до слона c8, оператор, кстати, сам один из разработчиков «Fritz», решил сэкономить несколько секунд для компьютера и мгновенно передал ему теоретический ход Cc8-b7.

Однако в действительности Каспаров, как это ни странно, избрал другой ход белопольным слоном, на соседнее поле — **7...Ca6.** Партия продолжалась, и только спустя четыре хода — **8. e3 d6 9. f3 Kbd7 10. Cd3 h6 11. Ch4 c5**, когда компьютер подольше задумался, оператор заметил, что человек и машина играют разные партии. Он тут же подозвал судью и сообщил ему о досадном недоразумении. Все ожидали, что партия будет возвращена к тому моменту, где произошла ошибка — так, кажется, предписывает поступать шахматный кодекс. Но судья неожиданно заявил, что нужно продолжать игру с той позиции, что стоит на доске. Странное решение, и наверное, «Fritz» был немало удивлен, когда в процессе размышлений ему вдруг предложили переставить черного слона с b7 на a6…

Итак, судья-человек «подыграл» человеку, и это решающим образом повлияло на исход встречи. Ведь компьютер играл при черном слоне на b7, поэтому он и сделал ход f2-f3, который теперь, в новой ситуации, оказался совершенно бессмысленным. При слоне на a6 пешка белых g2 вне опасности, и им следовало позаботиться о другой пешке — c4.

Еще пять ходов — **12. Лd1 Лc8 13. Ke2 cd 14. Ф:d4 Ke5 15. b3 K:d3+ 16. Ф:d3 d5**, и черные добились явного перевеса.

Но предположим на минутку, что в «новой» партии были бы сделаны примерно те же ходы, что и в «старой», за исключением нелепого 9. f2-f3. Тогда события могли бы развиваться следующим образом: 9. Cd3 Kbd7 10. Ke2 h6 11. Ch4 c5 12. 0-0 Лc8 13. b3 (заранее готовясь к выпаду коня на e5) 13...cd 14. Ф:d4 Ke5 15.Cc2, и говорить можно только о преимуществе белых (нельзя 15... b5 из-за 16. Ф:a7).

А в партии Каспаров легко реализовал дебютный перевес. Вот как она завершилась.

17. Фc3 Ke4 18. Ф:g7+. Или 18. C:d8 K... 19. K:c3 Лf:d8, и потеря пешки неизбежна (20. Kb5 C:b5 21. cb Лc3).

18. ...Kp:g7 19. C:d8 Лf:d8 20. fe dc 21. bc Л:d1+ 22. Kp:d1 Л:c4. У белых проигранный ладейный эндшпиль, и дальнейшее не слишком интересно. Вскоре чемпион мира взял верх.

Во второй партии Каспаров белыми играл так, как когда-то с ним — Карпов. Однако если в их первом матче за шахматную корону черным в защите Тарраша пришлось несладко (два нуля), то на сей раз компьютер применил новинку — 10...Фb6 вместо 10...h6 и почти уравнял игру.

Г.Каспаров — «Fritz»
Защита Тарраша

1. d4 d5 2. c4 e6 3. Kf3 c5 4. cd ed 5. g3 Kf6 6. Cg2 Kc6 7. 0-0 Ce7 8. Kc3 0-0 9. Cg5 cd 10. K:d4 Фb6 11. Kb3 Ce6 12. C:f6 C:f6 13. K:d5 C:d5 14. Ф:d5 Лfd8 15. Фf5 C:b2 16. Лab1 Ca3 17. e3 Лac8 18. h4 Фe7 19. Лfd1 h6 20. h5 Ke7 21. Фe4 b5 22. Kd4 a6 23. Фb7. При ферзях белые сохраняли инициативу, но Каспаров вел в матче 1:0 и его устраивал ничейный результат. **23... Лd6 24. Лb3 Ф:b7 25. C:b7 Лc7 26. Ce4 Cc5 27. Лbd3 Cb6 28. Kf5 Л:d3 29. Л:d3 Лc1+ 30. Kpg2 K:f5 31. C:f5 a5 32. Лd7 b4 33. Ce4 Kpf8 34. Cd5 Лc7 35. Л:c7 C:c7 36. Cb3 Ce5 37. f4 Cf6 38. Kpf3 Cd8 39. e4 g6 40. hg fg 41. g4 h5 42. gh gh 43. e5 Cc7 44. Ca4 Kpg7 45. Cc6 Kpg6 46. Kpe4 Cb6 47. f5+Kpg5 48. f6.**

В равном эндшпиле с разноцветными слонами компьютер позволил сопернику образовать пару связанных проходных пешек в центре, и теперь от него требуется аккуратная игра.

48...Cc5! Проигрывает 48...h4? 49. Kpd5 Cd8 (или 49...Kpg6 50. Ce8+Kph7 51. e6 h3 52. e7 h2 53. Cg6+!) 50. Kpe6 Cb6 51. Kpd6 Kpg6 52. Ce8+ Kph6 53. e6, и все кончено.

49. Kpd5 Cf8 50. Ce8. Сильно выглядит 50. Kpe6, но черные держатся — 50... Cc5! 51. Kpf7 Cd4! 52. e6 C:f6 53. e7 C:e7 54. Kp:e7 Kpf4 55. Kpd6 Kpe3 56. Kpc5 Kpd3 57. Kpb5 Kpc3 с ничьей в двух вариантах: 58. Cd5 h4 59. Kp:a5 h3 60. Kpa4 h2 61. Kpb5 b3 62. ab h1Ф 63. C:h1 Kp:b3 или 58. Kp:a5 Kpb2 59. Cd5 Kpa3 60. Kpb5 h4 61. Kpc5 h3 62. Kpd4 h2 63. Kpd3 h1Ф 64. C:h1 Kp:a2.

50...h4 51. Cd7 Kpg6 52. Kpe6 h3 53. Ce8+ Kpg5 54. Kpf7 Cc5 55. e6 Cd4 56. e7 C:f6 57. Cd7 C:e7 58. C:h3. «Fritz» устоял в этом напряженном поединке, и уже пару точных ходов должен сделать Каспаров, проигрывает 58. Kp:e7? h2 59. Cc6 a4 и т.д.

58...a4! Компьютер все еще рассчитывает сравнять счет — 59. Kp:e7? b3 60. ab a3! Но Каспаров начеку… **59. Ce6 Cd8 60. Kpe8 Kpf6 61. Cg8 Cc7 62. Kpd7 Cf8. Ничья.**

Итак, Гарри Каспаров одолел компьютер со счетом 1,5:0,5, но впереди Каспарова ждало еще одно, более серьезное испытание — первый в истории матч чемпиона мира с роботом при нормальном контроле времени, настоящий матч из шести партий. Но об этом в следующий раз…

Е.Гик

Индекс 70465

Читательница

Восстановите точный хронологический порядок картинок.

Я.Мюллер, Я.Фишерова

(Второй чемпионат мира по головоломкам, Брно, лето 1993 г.)