ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ
ISSN 0130-2221
1997 · №1

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ · 1997 · №1

В номере:

Гипотеза сотворения мира

В.МЕЩЕРЯКОВ

Исследовать истину в одном отношении трудно, а в другом легко. Это видно из того, что никто не в состоянии достичь ее надлежащим образом, но и не терпит полную неудачу, а каждый говорит что-то о природе и поодиночке, правда, ничего или мало добавляет к истине, но, когда все складывается, получается заметная величина.

Аристотель

ЭТО БЫЛО очень давно, и, судя по тому, что человечество не запомнило облика Творца, создавшего наш Мир, можно предположить, что оно даже не присутствовало при этом. И теперь приходится заниматься физикой, выяснять, в чем там было дело, чтобы разобраться, как устроен Мир и как нам жить дальше.

Говорят, весь Мир состоит из атомов, а атомы — из электронов и ядер. Наверное, это правда, если компьютеры построены из электронных приборов. Но ведь Мир еще состоит из планет и звезд. Мы сами живем на планете. Получается, что существование электронов и планет должно быть взаимосвязанным? Но как?

Ответ на этот вопрос не может быть простым, коротким и исчерпывающим. Поэтому, если Вы хотите взглянуть на Мир в целом, давайте работать, и пусть облик нашего Создателя, такой же поначалу неопределенный, как сама Природа, сопровождает нас.

Он сидел за своим рабочим столом и перебирал атомы. Они состояли из положительно заряженных ядер, окруженных плотными облаками отрицательно заряженных электронов. Приближая два атома друг к другу, можно было видеть, как электронные облака искажаются. Наблюдающиеся при этом зарядовые протуберанцы являлись следствием сложной гаммы электромагнитных взаимодействий. На близких расстояниях доминирующим было притяжение электронов одного атома к ядру другого. Вследствие этого некоторые из электронов становились как бы общими, и энергия системы, состоящей из двух слипшихся облаками атомов, оказывалась меньше, чем сумма энергий атомов, разнесенных на достаточно большое расстояние. Однако при попытках прижать атомы друг к другу возникали силы отталкивания, обусловленные, в основном, взаимодействием внутренних слоев одноименно заряженных электронных облаков.

Нетрудно себе представить, что причудливая конструкция, собранная из нескольких десятков атомов, так называемый атомный кластер, обладал ячеечной структурой и по своим свойствам во многом был похож на уединенный атом. Энергию, приходящуюся на одну ячейку такого кластера, можно оценить следующим образом.

Будем полагать, что атомная ячейка радиусом R состоит из точечного ядра, внутренних электронных оболочек, или, как говорят, ионного остова, который занимает сферический объем радиусом R_e, и внешних электронов, заполняющих ячейку. Найдем зависимость энергии ячейки от R, например, для одновалентного атома с ядерным зарядом Ze, где Z — число зарядов, равное числу электронов в атоме, и $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный заряд. Приближенно эта энергия складывается из потенциальной энергии кулоновского притяжения внешнего электрона к ядру $E_1 = \frac{-Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$ (здесь ε_0 — электрическая постоянная), потенциальной энергии кулоновского $E_2 = \frac{(Z-1)e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$ и некулоновского E_3 отталкивания внешнего электрона от ионного остова и кинетической энергии внешнего электрона E_4.

Энергия E_3 обусловлена неточечностью ионного остова. Если принять, что электроны остова и внешний электрон однородно распределены по соответствующим объемам $V_e = 4\pi R_e^3/3$ и $\Omega = 4\pi R^3/3$, то E_3 оценивается величиной, пропорциональной площади поверхности остова $4\pi R_e^2$ и обратно пропорциональной объему ячейки Ω. Поэтому

$$E_3 = \frac{3e^2 R_e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Энергию E_4 можно оценить с помощью соотношения де Бройля для импульса электрона: $p = 2\pi\hbar/\lambda$, где λ — длина волны электрона,

Иллюстрации В.Митурич-Хлебниковой

$\hbar = 1{,}0 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка. В основе этой формулы лежит фундаментальный экспериментальный факт, что поведение электрона в пространстве имеет волнообразный характер. Именно поэтому даже уединенный электрон, как в кластерной ячейке, справедливо назвать электронным облаком. Полагая λ равной длине наиболее удаленной орбиты $2\pi R$ и учитывая, что кинетическая энергия равна $m_e v^2/2$, где $v = p/m_e$ — скорость электрона массой $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, найдем $E_k = \frac{\hbar^2}{2m_e R^2}$.

Таким образом, суммарная энергия

$$E(R) \simeq -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{3R_c^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + \frac{\hbar^2}{2m_e R^2}. \quad (1)$$

Обратим внимание, что в выражение (1) не вошла величина Z. Это значит, что наша оценка годится для атомов с произвольным числом электронов.

Итак, сдавливанию ячейки и, следовательно, всего кластера способствует кулоновская энергия притяжения внешнего облака к иону, но препятствует некулоновская энергия его отталкивания от внутренних электронных оболочек, а также кинетическая энергия внешнего облака. Поэтому функция $E(R)$ имеет минимум при $R = R_a$, который можно найти, взяв производную $dE(R)/dR$ и приравняв ее к нулю. Результат $R_a \simeq 3{,}5R_c$ соответствует минимальному значению энергии E_m.

Размеры внутренних электронных оболочек большинства элементов периодической системы Менделеева, находящихся в конденсированных состояниях вещества, не сильно отличаются друг от друга и в среднем составляют величину, равную боровскому радиусу $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м. Это значит, что ионные остовы радиусом $R_c = a_0$ занимают в ячейках довольно-таки малую часть объема: $R_c^3/R_a^3 \cdot 100\% \simeq 10\%$, не препятствуя внешнему облаку объединять атомы в прочный и упругий кластер, свойства которого зависят от отношения R_c/R_a. Объем ячейки такого кластера по порядку величины равен

$$\Omega = \frac{4\pi}{3}R_a^3 \simeq$$

$$\simeq 10^2 a_0^3 \simeq 10^2\left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}\right)^3 \simeq 10^{-29}\ \text{м}^3. \quad (2)$$

Интересно, что большая часть из всего разнообразия форм вещества, встречающегося в природе, образует кластеры с атомными объемами, отличающимися от (2) не более чем на порядок. Этот замечательно предусмотренный Создателем факт позволяет в первом приближении как бы подразделить наш Мир на два: микроскопический Мир с электронами и ядрами, который задает величину Ω, и макроскопический Мир с булыжниками, горами и планетами, параметры которых определяются величиной Ω.

Обратите внимание на отличие эстетической благозвучности слов «электрон» и «планета» от прозаичности слова «булыжник». А все потому, что булыжник рядом. Далекое, непознанное или малопознанное всегда кажется привлекательнее. Но познан ли нами Булыжник? Думаю, что на страницах «Кванта» это имя звучит впервые. А впереди речь о Булыжнике и ему подобных.

Энергию E_m можно еще представить как работу A внешней силы f, которую надо приложить к атому, чтобы удалить его от кластера на расстояние, большее размера ячейки. Другими словами, на расстояние, соответствующее разрыву межатомной связи. В этом случае $E_m = A = fR = f\Omega^{1/3}$.

Для характеристики жесткости межатомной связи удобно ввести величину $\varkappa = E_m/\Omega$, которая называется упругой постоянной. Эта величина определяет плотность энергии в ячейке и может быть вычислена на основании формул (1) и (2). Результат

$$\varkappa \simeq 10^{-2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^4} = \frac{10^{-2} m_e^4 e^{10}}{(4\pi\varepsilon_0)^5 \hbar^8} \simeq$$

$$\simeq 10^{11}\ \text{Н/м}^2 \quad (3)$$

соответствует порядку экспериментально наблюдаемых величин упругих постоянных твердых тел.

Таким образом, в первом приближении сложная картина электромагнитных взаимодействий внутри атомной ячейки может быть представлена параметрами $\varkappa$ и Ω, которые можно использовать для оценок макроскопических параметров кластера.

Увлекаясь, Он продолжал собирать кластер, присоединяя к нему теперь уже сотни атомов, потом тысячи... Его интересовало, когда же начнут проявляться гравитационные эффекты... Да, конечно, Он знал, что уже в III веке до нашей эры великий Аристотель начнет разрабатывать идею сферически-симметричной гравитации: «...ибо каждая из ее частей имеет вес до тех пор, пока не достигнет центра, и так как меньшая часть теснима большей, то они не могут образовывать волнистую поверхность, но подвергаются взаимному давлению и уступают одна другой до тех пор, пока не достигнут центра».

Согласитесь, что пренебрежение многокилометровыми неоднородностями земной поверхности, например горами, которые на 3–4 порядка превосходят типичные размеры человека и окружающих его предметов, является нетривиальным шагом на пути к пониманию гравитации. Однако, хотя Аристотель был не только замечательным физиком, но и высочайшего класса математиком, потребовалось 2000 лет, чтобы найти математическое описание этой физической идеи. Такой трудной оказалась эта задача. Еще позже была решена задача об электромагнитных явлениях в средах и, в частности, было установлено, что силы гравитационного притяжения должны быть много меньше электромагнитных сил. Наши предыдущие вычисления позволяют проиллюстрировать этот вывод.

Упругую постоянную $\varkappa$ можно еще определить через давление критической силы $f \simeq \varkappa\Omega^{2/3}$ на поверхность ячейки. Значения сил, больших f, разрушают ячейку кластера. Сравним силу f с гравитационной силой $f_{гр}$, действующей между двумя атомами. Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, $f_{гр} = Gm^2/(2R_a)^2$, где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2 — гравитационная постоянная. Полагая, что характерная плотность твердых тел $\rho \simeq 5000$ кг/м^3, получим

$$\frac{f_{гр}}{f} \simeq \frac{Gm^2}{\varkappa\Omega^{4/3}} \simeq 10^{-35}.$$

Известный американский физик Р. Фейнман по аналогичному поводу и без надежды услышать ответ однажды воскликнул: «Каким же должно быть общее уравнение, если, решая его для двух видов сил гравитационного притяжения и электростатического отталкивания, мы приходим к такому фантастическому отношению.»

Из приведенных рассуждений и оценок Создателю стало ясно, что кластер можно собрать из очень большого числа атомов. Но Он беспокоился, что когда гравитационная сила F, сжимающая одну из ячеек макроскопического Мира, превзойдет упругую силу, определяющую давление микроскопического Мира в этой ячейке, то она может разрушиться. Чем это грозит? Может быть, ядерной катастрофой? Необходимо было продолжать количественные оценки.

Выразим силу F через число атомов N сферического объема $V = N\Omega$, массой $M = Nm$ и радиусом $R_s = (3N\Omega/(4\pi))^{1/3}$. Вес одного из поверхностных атомов такого кластера равен mg, где ускорение свободного падения $g(R) = GM/R^2$. Принимая плотность кластера постоянной величиной $\rho = M/V$, найдем

$$g(R) = \frac{4\pi}{3}G\rho R. \qquad (4)$$

Это соотношение говорит о том, что ускорение свободного падения на поверхности сферического кластера увеличивается пропорционально его радиусу. И следовательно, чем дальше от центра расположен атом, тем больше его вес. Поверхность кластера в этих рассуждениях только лишь фиксирует расстояние до пробного атома. Но, помечая атом на расстоянии r от центра, мы не обнаружим изменения его веса при любых изменениях радиуса кластера $R \ge r$. Хотя, конечно, силовое состояние атома будет меняться. Посмотрим, как.

Начнем выкапывать в кластере вдоль его радиуса тоннель сечением в один атом и будем измерять вес каждого очередного атома. Ясно, что результатом такого измерения будет функция $F_k = mg(r_k)$, где r_k – расстояние от центра кластера до k-го атома. Например, вес центрального атома будет равным нулю, т.к. для него $r_k = 0$. И это согласуется с гипотезой Аристотеля об исчезновении веса в центре.

Теперь начнем обратно закапывать тоннель. После опускания первого атома центральная ячейка окажется под воздействием силы со стороны этого атома, которая будет равна его весу. Следующий атом увеличит силу, действующую на центральную ячейку, также на величину своего веса, который однако будет отличаться от веса первого атома из-за своей большей удаленности от центра. Третий атом даст тот же эффект и т.д.

Таким образом, для определения силы F, действующей на одну из центральных ячеек кластера, достаточно просуммировать силы F_k по длине тоннеля:

$$F = \sum_{k=1}^{n} F_k =$$

$$= \frac{4\pi}{3}G\rho m(r_1 + r_2 + \ldots + r_k + \ldots + r_n).$$

Так как атомы находятся друг от друга на расстоянии $2R_a$, то $r_1 = 2R_a$, $r_2 = 4R_a$, ..., $r_k = 2kR_a$. Последнее слагаемое суммы, очевидно, должно быть равно силе, действующей на атом, находящийся на поверхности кластера радиусом R. Поэтому $r_n = R = N^{1/3}R_a$. Выражая F через R_a, получим

$$F = \frac{4\pi}{3}G\rho m \times$$

$$\times 2R_a\left(1 + 2 + \ldots + k + \ldots + \frac{N^{1/3}}{2}\right). \quad (5)$$

Стоящая в скобках арифметическая прогрессия при больших значениях последнего члена суммы $n = N^{1/3}/2$ приближенно равна $n^2/2 = N^{2/3}/8$. Подстановка этого значения и использование соотношений $R_a = (3\Omega/4\pi)^{1/3}$ и $\rho = m/\Omega$ дает

$$F \simeq G\rho^2\Omega^{4/3}N^{2/3}. \qquad (6)$$

Сопоставление F с $f = \varkappa\Omega^{2/3}$ приводит к числу атомов кластера

$$N \simeq \frac{1}{m\rho^2}\left(\frac{\varkappa}{G}\right)^{3/2}, \qquad (7)$$

соответствующему его «упруго»-гравитационной устойчивости. Понятно, что кавычки для слова «упруго» употреблены для подчеркивания того обстоятельства, что параметры этой формулы $\varkappa$ и $\rho = m/\Omega$, помимо заданной массы атома, определяются микроскопическими механизмами взаимодействий в атомной ячейке.

К проведенному анализу можно сделать ряд замечаний. Например: почему сила F определяется давлением только одного столбика атомов? Почему предлагалось измерить вес атома в тоннеле одноатомной толщины, хотя ясно, что электромагнитное взаимодействие атома со стенками тоннеля не позволит реализовать этот эксперимент? Почему не следовало бы брать тоннель большей толщины или почему не показана связь сил $f_{гр}$ и F_k? Но, может быть, Вы сами дадите ответы на эти вопросы, а также придумаете новые?

Соотношение (7) было установлено в 1905 году английским физиком Джеймсом Джинсом и явилось первым в веренице последующих соотношений, определяющих гравитационную устойчивость различных систем.

Оценим порядок величины N, основываясь на значениях атомного объема (2), упругой постоянной (3) и принятой выше характерной плотности твердого вещества. По формуле (7) получим $N \simeq 10^{49}$.

– О Боже! – воскликнул Создатель. – Какими же являются параметры такого кластера?

Легко проверить, что так называемые джинсовская масса и джинсовский радиус составляют соответственно $M \simeq 10^{24}$ кг и $R \simeq 10^7$ м.

Так была создана планета. Ускорение свободного падения на ее поверхности, как следует из формул (3), (4), (5), оказалось не связанным ни с размером планеты, ни с массой атомов, ее составляющих, а определялось только набором фундаментальных физических постоянных:

$$g \simeq (\varkappa G)^{1/2} \simeq \frac{10^{-1}G^{1/2}m_e^2e^6}{(4\pi\varepsilon_0)^{5/2}\hbar^4}$$

и было равно приблизительно 10 м/с^2.

Созданная Творцом планета удовлетворяла требованию «упруго»-гравитационной устойчивости и «поскольку меньшие количества выравнивались большими посредством толкания вперед, производимого тяготением,.. то она должна была возникнуть указанным образом, откуда ясно, что она возникла в форме шара» (Аристотель).

Созданная планета была голой.

– Да и если я, например, надумаю заселить планету людьми, то ведь им потребуется строительный материал, – думал Создатель.

И работа продолжалась. Он вспомнил о причудливых атомных образованиях – кластерах, с которыми имел дело вначале, и решил их использовать. Но для этого необходимо было сначала разработать физический механизм, определяющий устойчивое образование тел малых размеров на поверхности планеты. Основания к существованию такого механизма он увидел в том, что созданная им планета с джинсовской массой, удовлетворяющей требованию устойчивости, обладала гравитационным полем, определяемым только фундаментальными постоянными. Интуитивно чувствовалось, что этот механизм должен существовать в гравитационном поле именно устойчивой планеты, а не произвольно придуманной. Идея пришла как-то сама собой и состояла в том, чтобы использовать гравитационно-прочный кластер, который бы исключал разрыв межатомных связей кластера, находящегося на поверхности такой планеты, под действием собственного веса.

Реализовать эту идею удалось следующим образом. Если гравитирующую планету массой M приводить в соприкосновение с атомным кластером массой $M_0 \ll M$, то их статическое равновесие под действием силы притяжения $F_0 = GMM_0/R^2$ и силы реакции опоры будет достигаться путем разрыва межатомных связей на границе раздела и перераспределением атомов до образования опорных атомов числом

$$n = F_0/f, \qquad (8)$$

где, напомним, f — сила, которую надо приложить к атому, чтобы оторвать его от кластера.

В качестве фундаментальной строительной единицы был взят кластер с максимально возможным числом атомов при минимальном числе опорных атомов. Ясно, что более массивный кластер будет лучше предохранять границу раздела при кратковременных нагрузках. (Аналогичная ситуация имеет место в цирковом трюке с ударами кувалдой по массивной плите, лежащей на человеке. Сохранение импульса в системе «плита — кувалда» оставляет плиту практически без движения. Докажите это сами.)

Требование минимального числа опорных атомов $n = 3$ нужно потому, что подключение четвертого опорного атома возможно лишь за счет разрыва межатомных связей и свидетельствовало бы о начале разрушения кластера. Наконец, случай $n < 3$ исключается, так как не обеспечивает устойчивого равновесия кластера на плоскости.

Трехопорный кластер был назван Зерном, и были оценены его проектные параметры. Подставляя $f \simeq \varkappa\Omega^{2/3}$ и $n = 3$ в формулу (8) и учитывая формулу Джинса для числа атомов планеты (7), получим, что масса Зерна

$$M_0 \simeq \Omega^{2/3}\left(\frac{\varkappa}{G}\right)^{1/2}. \qquad (9)$$

Из этой формулы следует, что масса гравитационно-прочного кластера на поверхности планеты не зависит от массы атома и, следовательно, должна определяться лишь характером межатомных связей. Но тогда многообразие форм и имеющаяся в природе количественная разносортица межатомных связей должны приводить к кластерам, сильно различающимся и по объему, приходящемуся на атом, и по числу атомов, составляющих кластер, и по массе. Так ли это? Известно пока лишь одно, что, как уже говорилось, в конденсированных состояниях вещества атомные объемы отличаются не более чем на порядок. То же имеет место и для упругих постоянных. Судите сами, если выразить Ω и $\varkappa$ через боровский радиус, то опытные данные для элементов таблицы Менделеева, взятые из справочника, укладываются в следующие диапазоны:

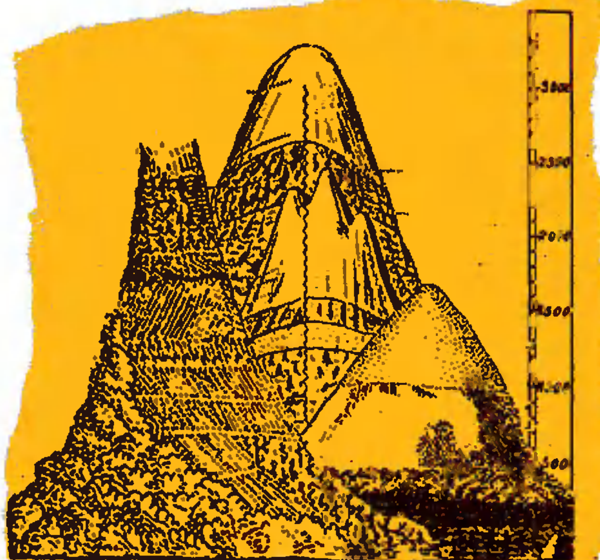
$$\Omega \simeq \left(10-10^2\right)a_0^3, \quad \varkappa \simeq \frac{\left(10^{-4}-10^{-3}\right)e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^4}, \qquad (10)$$

которые следует признать довольно-таки узкими.

Указанное постоянство Ω и $\varkappa$, казалось бы, противоречит существованию многообразия форм межатомных связей. Однако подстановка (10) в (9) дает

$$M_0 = \frac{ze}{4\pi\varepsilon_0 G^{1/2}}, \qquad (11)$$

где z — постоянный коэффициент, принимающий значение порядка 1.



Итак, масса критического кластера оказалась не зависящей не только от массы атомов, его составляющих, но и от боровского радиуса. Это почти фундаментально! Не здесь ли проложена Создателем узкая тропинка из Микромира в Макромир? Ведь исчезновение боровского радиуса из определения M_0 говорит о том, что масса Зерна не зависит от особенностей межатомных взаимодействий или, может быть, определяется как-то усреднению, выражаясь только в виде коэффициента z. Физический смысл этого параметра следует из формулы (11): будучи умноженным на элементарный заряд, он дает произведение ze, которое можно интерпретировать как заряд, обеспечивающий межатомную связь. Тогда параметр z является числом электронов, участвующих в образовании этой связи.

Сделаем для начала несколько оценок. Например, для лития $\Omega = 2{,}1\cdot10^{-17}$ м^3 и $\varkappa(78\ \text{К}) = 0{,}11\cdot10^{11}$ Н/м^2 получим $M_0 \simeq 1{,}0\cdot10^{-9}$ кг и $z \simeq 0{,}53$. Для бериллия с $\Omega = 0{,}81\cdot10^{-17}$ м^3 и $\varkappa(0) = 1{,}7\cdot10^{11}$ Н/м^2 найдем $M_0 \simeq 2{,}0\cdot10^{-9}$ кг и $z \simeq 1{,}1$. Как видно, число электронов, участвующих в образовании связи, может быть не целый числом. И это верно. Вспомните, в начале статьи мы говорили об электронных облаках, которые имеют пространственную протяженность и, следовательно, могут участвовать в образовании связей не только целым облаком, но и какой-либо его частью.

Примем, что по порядку величины $M_0 \simeq 10^{-9}$ кг. Тогда для характерной плотности твердого вещества $\rho \simeq 5000$ кг/м^3 получим число атомов Зерна: $N_0 = M_0/m = = M_0/(\rho\Omega) \simeq 10^{16}$ и его характерный размер: $R_0 = (N_0\Omega)^{1/3} \simeq 10^{-4}$ м. Из формулы Джинса для числа атомов планеты и из формулы (9) следует, что масса гравитационно-прочного кластера и джинсовская масса связаны соотношением

$$M_0 \simeq \left(Mm^2\right)^{1/3}. \quad (12)$$

Подставляя сюда значения $M_0 \simeq N_0m$ и $M \simeq Nm$, найдем

$$N_0 \simeq N^{1/3}. \quad (13)$$

Полученный результат говорит о том, что число атомов Зерна с точностью до порядка величины равно числу атомов, расположенных вдоль радиуса планеты. Связано это, конечно, с тем, что радиальный столбик атомов и Зерно, как скомканный радиальный столбик, своим весом в поле планеты дают предельную нагрузку до разрыва единичных межатомных связей.

Работу по изготовлению Зерна Творец сделал быстро, но результат получился отличный. Конструкция из 10^{16} атомов прочно стояла на трех опорах, каким боком ее ни поставь на поверхность планеты.

— Интересно, — подумал Он, — догадается ли когда-нибудь человечество, что Мир, который я создам, будет стоять на трех опорах, или они вечно будут представлять себе только что-то примитивно-круглое и ни на что не опирающееся? — и по его лицу пробежала тень неудовольствия.

Остатки от производства таких Зерен сейчас встречаются в космосе в виде частичек межзвездной пыли. Но ее там очень мало, что, кстати, свидетельствует о высокой эффективности и экологической чистоте работы Создателя.

Предназначались же эти Зерна, по замыслу Творца, для образования зернистой структуры тел много больших размеров. Так Он стал собирать новую конструкцию.

Кластер с массой m_1 следующего структурного уровня должен быть построен из кластеров с критическими массами M_0. Тогда среди масс m_1 можно найти такую массу M_1, при которой число n_1 опорных кластеров M_0 будет равно 3: $m_1(n_1{=}3) = M_1$. Кластеры с массами $m_1 < M_1$ исключают разрыв межатомных связей между парой кластеров с критическими массами M_0 и в этом смысле также обладают гравитационной прочностью в поле тяготения джинсовской массы.

Число опорных атомов n_0 кластера M_1 не может превосходить величины, приблизительно равной числу поверхностных атомов кластера M_0, т.е. $n_0 < N_0^{2/3}$. Отсюда следует, что сила гравитационного притяжения кластера M_1 не должна быть больше силы $F_1 = N_0^{2/3}f$. Так как поле на поверхности джинсовской массы равно $g = GM/R^2$ и гравитационная сила, действующая на кластер M_1, равна $F_1 = M_1g$, то $M_1g = N_0^{2/3}f$. Определяя число атомов нового кластера $N_1 = M_1/m$, получим

$$N_1 = N_0^{2/3}\left(\frac{f}{mg}\right) = N_0^{5/3} = N^{5/9}, \quad (14)$$

где $f/mg = N_0$. Используя эту формулу, найдем параметры 1-го структурного уровня:

$$N_1 \simeq 10^{27}, \; M_1 \simeq 50 \text{ кг}, \; R_1 \simeq 0{,}3 \text{ м}.$$

Так из Зерен получились Булыжники и Валуны. Присмотритесь к ним как-нибудь. Какие красивые! А их зернистую структуру можно увидеть даже невооруженным взглядом.

— Конечно, — подумал Творец, — у Булыжника (или Валуна), который тысячелетиями пролежит на поверхности планеты, верхние Зерна будут иметь меньшее число опор и, следовательно, межатомных связей, чем нижние. Поэтому с течением времени Булыжники и Валуны будут разрушаться, превращаясь в Песок. Но, во-первых, Песок человеку тоже понадобится, а во-вторых, из Булыжников и Валунов будет создан другой структурный уровень вещества.

Аналогичная картина построения кластера M_2, находящегося в равновесии под действием сил $F_2 = M_2g$ и реакции со стороны джинсовской массы при условии, что он покоится на трех кластерах M_1, дает

$$N_1 = N_0^{2/3}\left(\frac{f}{mg}\right) = $$
$$= N_0^{5/3} = N^{5/9}. \quad (15)$$

Оценки по такой формуле показывают, что параметры кластера 2-го структурного уровня таковы:

$$N_2 \simeq 10^{34},$$
$$M_2 \simeq 5 \cdot 10^8 \text{ кг}, \quad R_2 \simeq 100 \text{ м}.$$

— Да! Этот материал пойдет на Скалы и Утесы, а разрушаясь, они будут давать Булыжники и Валуны.

Вдохновленный придуманной последовательностью, Создатель решил обобщить результаты (14) и (15) и получил, что число атомов n-го структурного уровня равно

$$N_n = N_0^{\sum_0^n (2/3)^k} \simeq N^{\frac{1}{3}\sum_0^n (2/3)^k},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Числовой сходящний ряд

$$\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

имеет n-частичную сумму $S_n = 3 - 2^{n+1}/3^n$, поэтому

$$N_n = N_0^{3-3(2/3)^{n+1}} = N^{1-(2/3)^{n+1}}. \quad (16)$$

Он убедился, что при $n = 0$ формула (16) дает предыдущий результат (13), и решил тотчас же продолжить количественные оценки. При $n = 3$ Он получил $N_3 = N^{65/81}$, а результаты расчетов стал записывать в таблицу структурных уровней твердого вещества. Получившиеся при $n = 3$ Горы высотою в 1 км были достаточно надежны, высоки и красивы. Но хотелось чего-то еще — потрясающего, что люди могли бы видеть, но не понимать, чтобы они овладели чувством эстетического величия. И Он решил оценить еще один уровень — четвертый. Результаты, основанные на соотношении $N_4 = N^{211/243}$, приведены в таблице.

Так были созданы настоящие Горы, высотою до 10 км. Конечно, с течением времени они также разрушаются, потому что верхние плиты имеют меньшее число атомных связей, а нижние находятся под слишком большой нагрузкой. Но что делать? Кто может придумать лучше? Да и нужно ли? Как бы человек мог жить без разрушающихся гор?

Из атомов создавались Зерна, из Зерен — Булыжники и Валуны, из Булыжников и Валунов — Утесы и Скалы, из Утесов и Скал — Малые Горы, а из Малых Гор — большие, настоящие Горы.

— Ох! Ну и задача. Ведь теперь придется создавать Плиты, на которые потом придется укладывать Материки. А для Материков понадобится Кора, потом Мантия... Что же? Так и творить до бесконечности?! До бесконечности?

И здесь Он сообразил, что при $n \to \infty$ из формулы (16) получается $N_\infty = N$ — число атомов джинсовской массы. Это значит, что распределение масс твердого вещества, построенного по трехопорному иерархическому механизму образования последующих тел, удовлетворяет требованию упруго-гравитационной устойчивости предельного тела. Другими словами, еще одно устойчивое образование, составленное из Песка, Булыжников, Валунов, Скал, Гор, Материков и др., должно иметь массу того же порядка, что и исходная гравитирующая джинсовская масса. И это действительно так! Экспериментальные оценки показывают, что наша планета Земля состоит в основном из двух частей — ядра массой порядка $2 \cdot 10^{24}$ кг и мантии массой порядка $4 \cdot 10^{24}$ кг.

Таблица структурных уровней твердого вещества

Номер уровня	Имя уровня	Число атомов	Масса, г	Характерный размер, см
0	Зерно	10^{16}	10^{-6}	10^{-2}
1	Булыжники и валуны	10^{27}	10^{4}	10^{1}
2	Скалы и утесы	10^{34}	10^{11}	10^{4}
3	Малые горы	10^{39}	10^{16}	10^{5}
4	Горы	10^{42}	10^{5}	10^{6}
∞	Планета Земля	10^{49}	10^{27}	10^{9}

— Мне нравится моя работа, — раздумывал Творец. — Во-первых, потому что людям не сложно будет установить этот механизм образования макроскопических структурных уровней твердого вещества. Пусть знают, в каком простом и красивом мире живут. А во-вторых, потому что теперь однозначно решается до сих пор беспокоивший меня вопрос, на каком структурном уровне будут жить люди. Конечно же, на планете, ибо она порождает саму себя.

— Мне нравится моя работа, — повторил вслух Творец. — Именно на такой планете должны жить люди и так же сами порождать себя. Пусть они сами дадут имя своей планете. Каждый народ на своем родном языке. И пусть у этой планеты будет тысяча имен, и каждое из них правильное!

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

АТОМ, КОТОРЫЙ ПОСТРОИЛ БОР

Вот атом, который построил Бор.
Это — протон,
Который в центр помещен
Атома,
        который построил Бор.
А вот электрон,
Который стремглав облетает протон,
Атома,
        который построил Бор.
Вот мю-мезон,
Который распался на электрон,
Который стремглав облетает протон,
Который в центр помещен
Атома,
        который построил Бор.
А вот пи-мезон,
Который, распавшись, дал мю-мезон,
Который распался на электрон,
Который стремглав облетает протон,
Который в центр помещен
Атома,
        который построил Бор.
Вот быстрый протон,
Который в ударе родил пи-мезон,
Который, распавшись, дал мю-мезон,
Который распался на электрон,
Который стремглав облетает протон,
Который в центр помещен
Атома,
        который построил Бор.
А вот беватрон,
В котором ускорился тот протон,
Который в ударе родил пи-мезон,
Который, распавшись, дал мю-мезон,
Который распался на электрон,
Который стремглав облетает протон,
Который в центр помещен
Атома,
        который построил Бор.
А вот дополнительность,
        Это закон,
Который Бором провозглашен,
Закон всех народов,
Закон всех времен,
Успешно описывающий с двух сторон -
Не только протон
И электрон,
Но также нейтрон,
Фотон,
Позитрон,
Фонон,
Магнон,
Экситон,
Полярон,
Бетатрон,
Синхротрон,
Фазотрон,
Циклотрон,
Циклон,
Цейлон,
Нейлон,
Перлон,
Одеколон,
Декамерон
И, несомненно, каждый нейрон
Мозга, которым изобретен
Тот замечательный беватрон,
В котором ускорился тот протон,
Который в ударе родил пи-мезон,
Который, распавшись, дал мю-мезон,
Который распался на электрон,
Который стремглав облетает протон,
Который в центр помещен
Атома,
        который также построил
                Нильс Бор!

Какая дорожка короче?

В.БОЛТЯНСКИЙ

Причем тут 114°?

Представьте себе сквер, в котором есть одна дорожка в виде окружности и несколько радиальных дорожек, соединяющих центр сквера с несколькими точками круговой дорожки (рис.1). Как пройти из точки

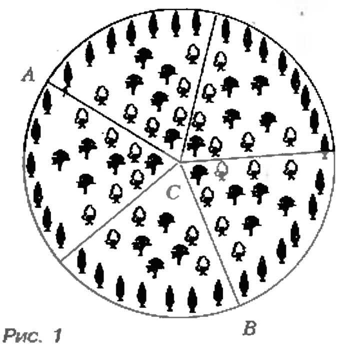


Рис. 1

A в точку *B* наиболее коротким путем: по окружности или по двум радиусам? Ответ может показаться странным: если $\angle AOB$ содержит меньше 114° (примерно), то выгоднее идти по дуге окружности, а в противном случае более уместна прогулка по двум радиусам.

Как измерять углы?

Чтобы объяснить, откуда взялось число 114, надо прежде всего вспомнить, в каких единицах измеряются углы. Привычнее всего, конечно, в *градусах*. Если разбить полный угол на 360 равных углов, мы получим представление о градусе. То же получится, если прямой угол разделить на 90 равных частей.

Будем теперь, начиная от одной стороны угла *AOB*, откладывать один за другим углы величиной 1 градус (с той же вершиной *O*). Если окажется, что внутри угла *AOB* поместилось *n* таких «угловых градусов», а ($n+1$)-й уже выходит за пределы угла *AOB*, то мы говорим, что угол *AOB* содержит *n* градусов. Если имеется остаток, то его измеряют в *минутах* (так называют шестидесятую часть градуса), а если опять окажется остаток, его измеряют в *секундах* (так называют шестидесятую часть минуты).

Такой способ измерения величин углов пришел к нам из седой древности. И поныне этот способ бытует в астрономии, да и в других науках, имеющих дело с измерением углов. Впрочем, не во всех. В артиллерии, например, применяется *град*, т.е. одна четырехсотая часть полного угла; иначе говоря, прямой угол содержит сто градов.

Откуда пришел градус?

В древности в бассейнах рек Тигра и Евфрата жили шумеры — один из наиболее интересных древних народов с высокоразвитой культурой. Они обладали математическими знаниями, имели торговые отношения между собой и с другими народами. Видимо, именно шумеры впервые ввели денежные отношения как основу для обмена одних товаров на другие. Их основной денежной единицей была *мина* — кучка серебра. Мина представляла собой довольно крупную денежную единицу, на нее можно было много купить. Поэтому часто делили мину на две половины, а для еще более мелких покупок делили каждую половинку на три равные части. Так возникла шестая часть мины. Для более мелких покупок использовали отдельные кусочки серебра (или серебряные изделия).

Аккадяне, другой древний народ Междуречья, стали использовать *шекель*, который представлял собой довольно мелкую денежную единицу. При торговых отношениях между шумерами и аккадянами шестая часть мины была приравнена десяти шекелям. И получилось, что мина равна шестидесяти шекелям. Число 60 делится на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 и другие числа, что очень удобно при покупке.

Впоследствии, в древнем Вавилоне, число 60 было положено не только в основу торговых отношений, но стало основанием шестидесятиричной системы счисления.

Она сыграла важную роль при создании единиц для измерения углов и времени. Правильный шестиугольник — одна из наиболее простых фигур, которые можно построить простыми средствами (скажем, циркулем и линейкой). И величину угла в равностороннем треугольнике (шесть таких треугольников и составляют правильный шестиугольник, рис.2) приняли, за единицу измерения углов. Эта единица — весьма крупная. И ее разделили (подобно тому, как мина была разделена на 60

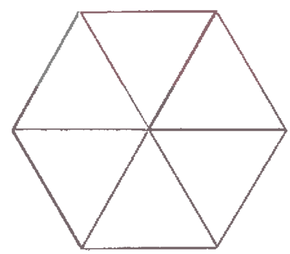


Рис. 2

шекелей) на 60 равных частей — градусов. А при более точных измерениях углов, что было важно для быстро развивавшейся астрономии, каждый градус делился на 60 минут. Так 60-ричная система счисления наложила свой отпечаток на исторически возникшие единицы измерения углов. Аналогичное положение вещей возникло и при измерении промежутков времени: час делится на 60 минут, а минута на 60 секунд.

Длина окружности

Измерению длин и площадей придавалось с древних времен большое значение. Интерес представляло не только измерение длин отрезков (или площадей многоугольников), но так же измерение длины окружности и ее дуг (или измерение площади круга и его частей). Правильный шестиуголь-

Иллюстрация В.П.Бухарева

ник, вписанный в окружность с радиусом r (рис.3), имеет периметр немного меньший, чем длина этой ок-

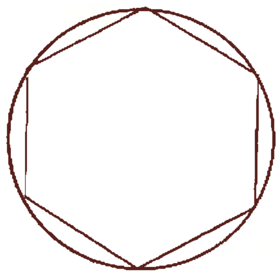


Рис. 3

ружности (вообще, выпуклая замкнутая линия L_1 имеет меньшую длину, чем длина «объемлющей» ее замкнутой выпуклой линии L_2, рис.4). А так как правильный шестиугольник име-

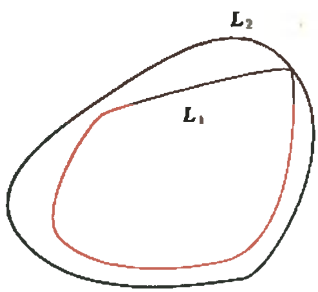


Рис. 4

ет периметр $6r$, то длина окружности с радиусом r несколько больше, чем $6r$, т.е. длина полуокружности несколько больше $3r$. Отношение длины полуокружности к ее радиусу обозначают буквой π, т.е. длина полуокружности равна πr, а длина всей окружности равна $2\pi r$.

Важно заметить, что число π — одно и то же для всех окружностей, т.е. оно не зависит от радиуса. Это

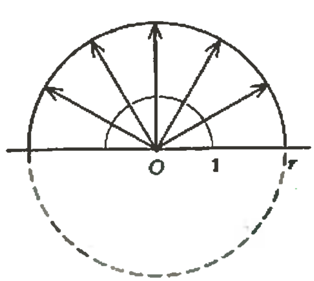


Рис. 5

можно пояснить следующим образом. Обозначим через π длину полуокружности радиусом 1. Полуокружность с радиусом r (с тем же центром O) получается из единичной полуокружности подобным преобразованием (гомотетией) с коэффициентом r (рис.5). Но при подобном преобразовании с коэффициентом r все длины увеличиваются в r раз. Поэтому длина полуокружности с радиусом r получается, если число π мы умножим на r, т.е. она равна πr. А длина всей окружности с радиусом r равна сумме длин двух полуокружностей, т.е. равна $2\pi r$.

Как мы видели, число π немного больше, чем 3. Великий древнегреческий ученый Архимед доказал, что число π заключается между

$$3\frac{1}{7}\approx 3{,}1429 \text{ и } 3\frac{10}{71}\approx 3{,}1409,$$

т.е. им было обосновано приближенное значение $\pi\approx 3{,}14$.

Как измерить длину окружности?

Будем рассматривать углы с вершиной в центре окружности. Полный угол содержит 360°, а длина всей окружности равна $2\pi r$. Из соображе-

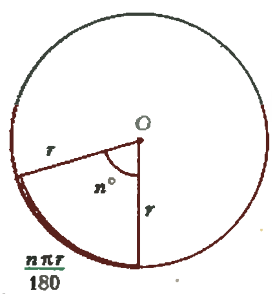


Рис.6

ний пропорциональности, центральный угол, содержащий n градусов, опирается на дугу, длина которой равна

$$l=\frac{n}{360}\cdot 2\pi r=\frac{n\pi r}{180} \qquad (1)$$

(рис.6). Разумеется, длина дуги получается вычисленной в тех же единицах длины, в которых измерен радиус.

В качестве несложной задачи рекомендуем проверить, что если угол измерен в градах (напомним, град — это сотая часть прямого угла), то длина дуги, на которую опирается угол, содержащий k градов, равна

$$l=\frac{k\pi r}{200}.$$

Конечно, можно измерять величины углов не только в градусах (или в градах), но и в других единицах. Наиболее удобной и часто применяемой единицей измерения углов является радиан. Он определяется следующим образом: длина дуги окруж-

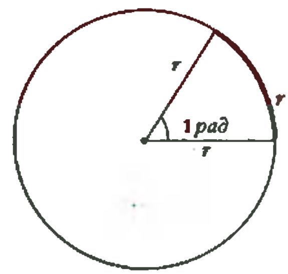


Рис. 7

ности, соответствующей центральному углу в 1 радиан, равна радиусу. А сколько же градусов содержит 1 радиан? По формуле (1) мы находим, что если длина дуги окружности равна радиусу (т.е. $l=r$), то $n=180/\pi$ (градусов), т.е. 1 радиан содержит $180/\pi\approx 57$ градусов (рис.7). Таким образом, радиан немного меньше 60° (поскольку π немного больше трех).

Из определения радиана непосредственно следует, что центральный угол, содержащий α радианов, опирается на дугу окружности, длина которой равна αr, т.е. формула (1) заменяется следующей простой формулой (рис.8):

$$l=\alpha r. \qquad (2)$$

Именно простота этой формулы и является причиной, по которой углы наиболее удобно измерять в радианах. В частности, полный угол содер-

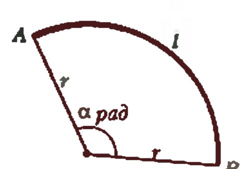


Рис. 8

жит 2π радианов (т.е. примерно 6,28 радианов), поскольку длина всей окружности равна $2\pi r$.

А теперь вернемся к задаче, рассмотренной в начале статьи. Если угол между двумя радиальными дорожками содержит α радианов, то длина дорожки, идущей по окружности, равна αr. Длина же дорожки, идущей через центр, равна $2r$. Значит, при $\alpha r < 2r$ выгоднее идти по дуге окружности. Итак, если угол между радиальными дорожками меньше двух радианов (что составляет $\approx 114°$), то дорожка, идущая через центр, менее выгодна.

Площадь сектора круга

Рассмотрим сектор круга с центральным углом α (радианов) и вписанный в него равнобедренный треугольник (рис.9). Основание и высоту

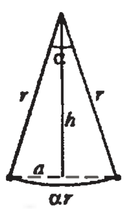


Рис. 9

треугольника обозначим через a и h соответственно. Площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}ah$. Если угол α мал, то $h \approx r$ и $a \approx l = \alpha r$. Поэтому площадь треугольника примерно равна $\frac{1}{2}\alpha r\cdot r = \frac{\alpha}{2}r^2$. Значит, если мы рассмотрим вписанный в круг правильный n-угольник (рис.10), то мы получим n таких треугольников, и в каждом из них центральный угол равен $\alpha = 2\pi/n$. Площадь всего многоугольника примерно равна

$$n\cdot\frac{1}{2}\alpha r\cdot r = n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}r\cdot r = \pi r^2.$$

Но чем больше n, тем точнее площадь правильного вписанного многоугольника совпадает с площадью круга. А так как при любом n площадь многоугольника примерно равна одной и той же величине πr^2, то площадь круга *точно* равна πr^2.

Круг можно рассматривать как сектор, у которого центральный угол содержит 2π (радианов). Так как площадь круга равна πr^2, то (из соображений пропорциональности) площадь сектора с центральным углом α радианов равна

$$s = \frac{\alpha}{2}r^2. \qquad (3)$$

Вернемся теперь к нашим дорожкам и рассмотрим случай, когда оба пути (по дуге окружности или по двум радиусам) имеют одинаковую длину $2r$. Это будет в том случае, когда радиальные дорожки составляют между собой угол 2 радиана (т.е. примерно 114°). Значит, площадь сектора (рис.11), заключенного между обеими дорожками, согласно формуле (3) равна r^2, т.е. этот сектор равновелик квадрату со стороной r.

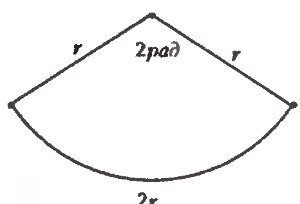


Рис. 11

Таким образом, решение задачи о дорожках можно сформулировать еще и следующим образом: рассмотрим фигуру F (меньшую полукруга), которая заключена между двумя дорожками (одна дорожка идет по двум радиусам, другая — по дуге окружности); если площадь фигуры F меньше r^2, то более короткой является дорожка, идущая по дуге окружности, а если эта площадь больше r^2, то выгоднее идти по двум радиусам.

Перейдем в пространство

Обратил ли читатель внимание на замечательный факт: и в формуле (2), выражающей длину дуги окружности, и в формуле (3), дающей площадь сектора круга, присутствует одно и то же число π?

Более того, это же число π присутствует и в формулах пространственной геометрии. Старшеклассники знают, что площадь поверхности сферы с радиусом r равна $4\pi r^2$, а объем ограниченного ею шара равен $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Можно рассмотреть и пространственный аналог задачи о дорожках. Именно, рассмотрим конус с вершиной в центре шара. В пересечении с шаром он дает тело (рис.12), поверхность которого состоит из двух частей: боковой поверхности конуса и сферической «шапочки» (сравните с рисунком 6, где сектор есть пересечение угла и круга). Какая из этих двух частей имеет большую площадь поверхности? Для того чтобы ответить на этот вопрос, надо условиться о том, как измерять пространственные углы. Условимся говорить, что конус с вершиной в центре шара содержит пространственный угол, который имеет величину S/r^2 *стерадианов*, где S — площадь поверхности той сферической «шапочки», которую высекает конус из сферы. Таким образом, полный пространственный угол вокруг точки O содержит 4π стерадианов. Можно доказать, что если угол между образующей и осью конуса равен φ, то этот конус содержит $2\pi(1-\cos\varphi)$ стеррадианов.

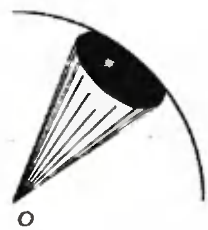


Рис. 12

Теперь ответ на поставленный выше вопрос ясен: боковая поверхность конуса имеет площадь $\pi r^2\sin\varphi$, а сферическая «шапочка» имеет площадь $2\pi r^2(1-\cos\varphi)$. Отношение этих площадей равно

$$\frac{\pi r^2\sin\varphi}{2\pi r^2(1-\cos\varphi)} = \frac{\cos\varphi/2}{2\sin\varphi/2}.$$

Если это отношение меньше единицы, то «более выгодной» (т.е. имеющей меньшую площадь) будет боковая поверхность конуса. Равенство

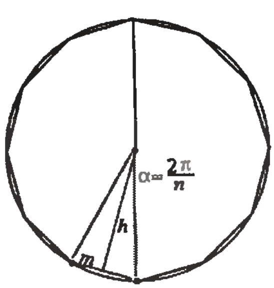


Рис. 10

достигается при $\cos\varphi/2 = 2\sin\varphi/2$, т.е. при $\operatorname{tg}\varphi/2 = 1/2$. Можно подсчитать, что в этом случае пространственный угол конуса содержит $4\pi/5$ стерадианов.

Читатель, знакомый с понятиями многомерной геометрии, может задать вопрос о том, что будет в n-мерном пространстве. Входит ли число π в формулы для объема n-мерного шара и величины его поверхности? Ответ удивителен: при $n = 2k$ и $n = 2k + 1$ в эти формулы входит (с некоторым рациональным коэффициентом) число π^k, т.е. объем шара равен $\lambda_n\pi^n r^n$, а величина поверхности сферы равна $\lambda_n n\pi^n r^{n-1}$, где λ_n — некоторое рациональное число. Например, для четырехмерного пространства $\lambda_4 = 1/2$. Читатель, умеющий интегрировать и владеющий понятиями многомерной геометрии, может найти, что $\lambda_{2m} = 1/m!$, а $\lambda_{2m+1} = 2^{m+1}/(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2m+1))$.

Что такое экстремум?

Рассмотрим теперь скверик с более сложной системой дорожек, среди которых, кроме радиальных, есть дорожки в форме окружностей разных радиусов (рис.13). Какой путь, соединяющий точки A и B, является наиболее коротким? Читатель теперь без труда сможет ответить на этот вопрос: если угол AOB (не превосходящий развернутого) меньше двух радианов, то наиболее коротким является путь, состоящий из отрезка AM и дуги MB окружности. Если же угол AOB больше двух радианов, то

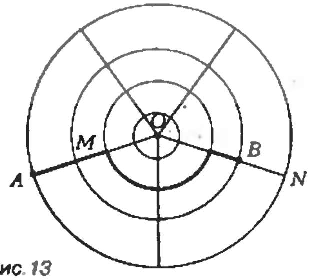


Рис. 13

наиболее коротким является радиальный путь AOB.

А теперь посмотрим на эту задачу с общей математической точки зрения. Мы имеем несколько различных путей в скверике, ведущих из точки A в точку B (среди них радиальный путь AOB и различные пути, включающие дуги окружностей, например путь, вычерченный жирной линией на рисунке 13). Иными словами, мы имеем некоторое множество путей, ведущих из A в B. Обозначим это множество через S. Каждому пути x (т.е. каждому элементу $x \in S$) сопоставлена его длина, которую обозначим через $l(x)$. Таким образом, на множестве S задана функция $l(x)$. Рассмотренная задача о дорожках состоит в том, чтобы найти наименьшее значение функции $l(x)$, заданной на множестве S.

Наименьшее и наибольшее значения функции называют ее экстремальными значениями. Старшеклассники знают, что если задана числовая функция (определенная на некотором интервале и принимающая действительные значения) и если эта функция дифференцируема, то ее экстремальные значения можно найти, приравнивая нулю производную. В этом состоит теорема, принадлежащая Ферма — замечательному математику, внесшему большой вклад в развитие математического анализа и теории чисел.

Но современная математика рассматривает не только числовые функции, заданные на интервалах, но и функции, рассматриваемые на более сложных множествах. Например, множество (или, как говорят в этих случаях математики, «пространство») может состоять из различных траекторий ракет, производственных планов предприятий, выпуклых фигур, различных форм крыла и т.п. На таком пространстве рассматривается некоторая функция (расход горючего, объем производства, площадь, аэродинамическое сопротивление и т.п.). И задача состоит в том, чтобы найти экстремальные значения рассматриваемой функции, например наиболее выгодную траекторию полета ракеты с точки зрения минимального расхода горючего. Рассмотренная задача (схематически показанная на рисунке 13) тоже относится к числу экстремальных задач.

Современная математика состоит не только из геометрии, алгебры, анализа. Она насчитывает десятки различных направлений, и большинство разделов современной математики (как «чистой», теоретической математики, так и прикладной) связаны с решением тех или иных экстремальных задач.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

* * *

На одной из своих лекций Давид Гильберт сказал:

—Каждый человек имеет некоторый определенный горизонт. Когда он сужается и становится бесконечно малым он превращается в точку. Тогда человек говорит: «Это моя точка зрения».

* * *

Интересный пример того, как можно использовать слова для количественного описания результатов измерений, был приведен профессором Чикагского университета Гейлом.

Профессор работал в лаборатории с одним своим студентом, и они не знали, под каким напряжением — 110 или 220 вольт — находились клеммы, к которым они должны были подключить аппаратуру. Студент собрался сбегать за вольтметром, но профессор посоветовал ему определить напряжение на ощупь. — Но ведь меня просто дернет, и все, — возразил студент. — Да, но если тут 110 вольт, то вы отскочите и воскликнете просто: «О, черт!», а если 220, то выражение будет покрепче.

Когда об этой истории я рассказал студентам, один из них заметил: «Сегодня утром я встретил одного малого, так он, наверное, как раз перед этим подключился к напряжению 440!»

* * *

Дирак любил потеоретизировать на самые различные темы. Однажды он высказал предположение, что существует оптимальное расстояние, на котором женское лицо выглядит привлекательнее всего: поскольку в двух предельных случаях — на нулевом и бесконечном расстоянии — «привлекательность обращается в нуль» (ничего не видно), то между этими пределами, естественно, должен существовать максимум.

О термоэлектричестве, анизотропных термоэлементах и ... английской королеве

А.СНАРСКИЙ, А.ПАЛЬТИ

С САМОГО начала термоэлектричеству не везло. В своих знаменитых опытах по «животному электричеству», лежащих в основе науки об электрических явлениях, А.Вольта (1745 – 1827) его просто не заметил. Никаких амперметров в то время, конечно, не было, и для индикации тока в своих опытах он использовал препарированную лягушку. В одном из опытов лапки лягушки помещали в один сосуд, а позвоночник – в другой. При соединении сосудов металлическим стержнем, один из которых предварительно нагревали в кипятке, другими словами, при замыкании электрической цепи, мышцы лягушки начинали сокращаться. В опытах с использованием гальванических элементов сокращение наблюдали и без нагрева стержня. Вот почему Вольта и не обратил внимания на возникновение тока в цепи при нагреве мест контакта проводников до разных температур.

В другой раз термоэлектричеству не повезло, когда в 1821 году Т.Зеебек (1770 – 1831) на заседании Берлинской академии наук объявил об открытии нового эффекта – термомагнетизма. Решающий опыт был очень простым. Внутрь контура, состоящего из висмутового стержня и соединяющей его концы медной проволоки, помещали магнитную стрелку (рис.1). При нагреве одного из контактов стрелка отклонялась. Это означало появление магнитного поля. Но какова причина его возникновения? Зеебек был противником гипотезы о единой природе электрических и магнитных явлений. Он считал, что «разность температур в местах соприкосновения металлических проводников цепи является источником освобождающегося магнетизма, причиной магнитных воздействий». Поэтому возникновение земного магнетизма Зеебек связывал с «термомагнетизмом» – ведь между полюсом и экватором существует разность температур.

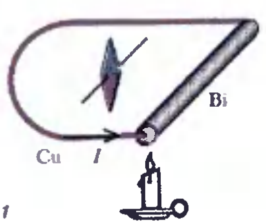


Рис. 1

Правильное объяснение предложил Х.Эрстед (1777 – 1851), который к этому времени провел опыты по изучению действия проводника с током на магнитную стрелку. Он связал природу эффекта с электричеством. Именно электрический ток порождал магнитное поле. Между тем, эффект носит имя Зеебека. Такова уж история науки – на первом месте открытие, а уж потом объяснение. Исходя из правильного объяснения, Эрстед предложил более точное название явления – «термоэлектричество».

Дальнейшие исследования показали, что термоэлектродвижущая сила (термоэдс) $\mathscr{E}$ зависит от перепада температур ΔT между местами контакта проводников из разных материалов и от термоэлектрических свойств этих проводников. Указанные свойства проводников характеризуют коэффициентом термоэдс α, который численно равен термоэдс, вырабатываемой при перепаде температур в один градус. Из опытов также следовало, что термоэдс $\mathscr{E}$ не зависит от распределения температур между контактами. Таким образом, если α_1 и α_2 – коэффициенты термоэдс контактирующих материалов, то

$$\mathscr{E} = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T. \qquad (1)$$

Заметим, что не для каждой пары различных проводников $\alpha_1 - \alpha_2$ отлично от нуля.

Какова же физическая природа явления термоэлектричества? Рассмотрим проводящий стержень. Один из основных механизмов возникновения термоэдс состоит в том, что при нагреве какого-нибудь из его концов растет как средняя энергия, так и (в случае полупроводников) число носителей тока. Возникает диффузионный поток носителей в сторону холодного конца стержня. Но диффузия свободных носителей, т.е. их направленное движение от горячего к холодному концу стержня, – это электрический ток, так как носители заряжены. Таким образом, полный ток в стержне есть сумма обычного тока и тока, связанного с разностью температур. Как известно, обычный ток, в соответствии с дифференциальным законом Ома, связан с электрическим полем соотношением $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, где $\vec{j}$ – плотность тока, σ – удельная проводимость, $\vec{E}$ – напряженность поля. Аналогично и в нашем случае току $\vec{j}_T$ принято сопоставлять так называемое термоэлектрическое поле $\vec{E}_T$. Тогда полное выражение для плотности тока принимает вид

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_T\right). \qquad (2)$$

Подобно тому, как при наложении разности потенциалов $\Delta\varphi$ в проводнике длиной L возникает электрическое поле $E = -\Delta\varphi/L$, новое поле E_T зависит от перепада температур на единицу длины $\Delta T/L$ и коэффициента термоэдс однородного материала α:

$$E_T = -\alpha(\Delta T/L). \qquad (3)$$

Нетрудно видеть, что формулу (1) можно получить, применив выражение (3) к разомкнутой цепи, состоящей из двух разнородных проводников с коэффициентами термоэдс α_1 и

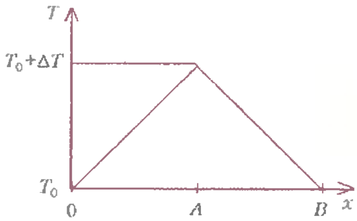


Рис. 2

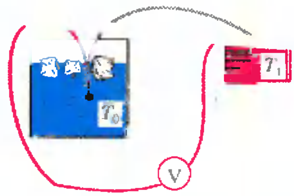


Рис.3

α_2. Действительно, рассмотрим два проводника из разных материалов, контакт которых находится при температуре $T_0 + \Delta T$, а другие концы поддерживают при одной и той же температуре T_0. При этом разность температур между концами равна ΔT (рис.2). Для упрощения последующих выкладок предположим, что α не зависит от температуры. (В действительности эта зависимость нелинейна, и ее обычно описывают кубическим полиномом.) Тогда работа сторонней силы, действующей на заряд q, есть $-qE_TL$. Как известно из школьного курса физики, электродвижущая сила $\mathcal{E}$ равна работе сторонних сил по перемещению единичного заряда, поэтому

$$\mathcal{E} = (E_{T1} - E_{T2})L = (\alpha_1(\Delta T/L) - \alpha_2(\Delta T/L))L = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T.$$

Тем, кто знаком с интегрированием, можно предложить вывод, пригодный для произвольного закона распределения температур вдоль проводника (при желании нетрудно учесть и зависимость $\alpha(T)$):

$$\mathcal{E} = \int_0^B E_T dx = \int_0^A \alpha_1(dT/dx)dx + \int_A^B \alpha_2(dT/dx)dx = \alpha_1\Delta T - \alpha_2\Delta T = (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T.$$

Независимость термоэдс от распределения температур в проводнике используют в простейшем приборе для измерения температур — термопаре. Состоит термопара из трех последовательно соединенных проводников, причем крайние сделаны из одного и того же материала. Один из контактов располагают на исследуемом объекте, а другой поддерживают при некоторой известной температуре, например помещают в сосуд со льдом (рис.3). Свободные концы термопары соединяют с вольтметром. Перед измерением термопары градуируют, т.е. определяют, какая термоэдс возникает между «холодным» и «горячим» спаями при перепаде температур в один градус. Например, для пары медь — константан (так называют специальный сплав на основе меди) $\alpha_1 - \alpha_2 = 39$ мкВ/К при температуре 0 °С.

Сделаем одно важное обобщение. Понятно, что температура тонкого проводника (проволочки) может существенно меняться только вдоль него. Количественной характеристикой такого распределения служит перепад температур на единицу длины. А как охарактеризовать распределение температур в массивном теле, когда температура по-разному меняется в разных направлениях? В этом случае вводят специальный вектор, который называют градиентом температур. Направление этого вектора совпадает с направлением максимального роста температуры в теле, а его составляющие указывают изменение температуры на единицу длины вдоль каждой из координатных осей.

Теперь мы можем попытаться понять, что такое анизотропный термоэлемент. Зададим себе странный, на первый взгляд, вопрос: возможно ли возникновение разности потенциалов, поперечной градиенту температур? Заметим, что до сих пор у нас разность потенциалов возникала только вдоль градиента температур. Еще в 1857 году известный английский физик У.Томсон (лорд Кельвин, 1824 — 1907) ответил на него утвердительно. Существуют среды, в которых термоэлектрическое поле может не совпадать по направлению с градиентом температур. Это так называемые термоэлектрически анизотропные среды. В таких средах коэффициент термоэдс зависит от направления. Чтобы понять, в чем тут дело, обратимся к средам с анизотропией электропроводности (свойства таких сред были описаны в статье С.Лыкова и Д.Паршина «Симметрия, анизотропия и закон Ома» в «Кванте» №10 за 1989 г.). Оказывается, что если электропроводность в разных направлениях различна, то вектор плотности тока и поле, вообще говоря, ориентированы под углом друг к другу. Закон Ома в этом случае имеет вид

$$\vec{j} = \hat{\sigma}\vec{E}. \qquad (4)$$

Здесь $\hat{\sigma}$ уже не скаляр, а физическая величина, учитывающая то, что электропроводность тела в разных направлениях различна. Эту величину называют тензором электропроводности. Если в теле с изотропными электрическими свойствами направления электрического поля и тока совпадают, то в общем случае это не так. Тензор электропроводности описывает анизотропию проводимости в проводнике и осуществляет поворот вектора плотности $\vec{j}$ относительно вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$. Рассмотрим для примера проводящую плоскость, у которой электропроводности в продольном и поперечном направлениях не совпадают. Тогда формулу (4) можно представить в развернутом виде:

$$j_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y,$$
$$j_y = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y. \qquad (5)$$

В отличие от векторов плотности тока и напряженности поля, у которых в нашем примере по две составляющие, у тензора их четыре — σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yx}, σ_{yy}. Для того чтобы повернуть такой вектор, надо, как это видно из формул (5), специальным образом преобразовать каждую его составляющую. Обычный случай изотропной электропроводности соответствует тому, что $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma$ и $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0$. При всей сложности понятия тензора, есть одно упрощающее обстоятельство. Оказывается, существуют выделенные направления, их называют главными осями тензора, при выборе которых в качестве осей координат уравнения (5) становятся особенно простыми:

$$j_x = \sigma_{\parallel}E_x + 0,$$
$$j_y = 0 + \sigma_{\perp}E_y. \qquad (6)$$

Величины $\sigma_{\perp}$ и $\sigma_{\parallel}$ называют главными значениями тензора электропроводности. Как видно из ри-

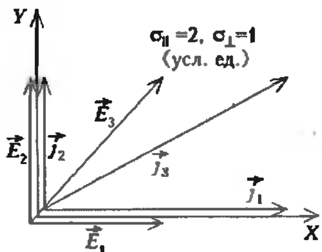


Рис.4

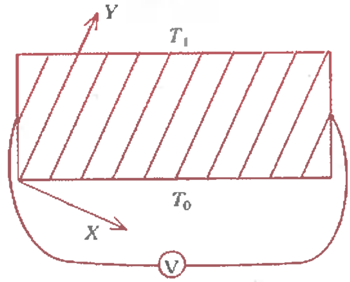


Рис.5

сунка 4, при $\sigma_\perp \neq \sigma_\parallel$ существует составляющая тока $j_{3\perp}$, которая перпендикулярна вызвавшему ее полю $\vec{E}_3$.

Аналогичная ситуация имеет место и в термоэлектрически анизотропных средах. Здесь тензором оказывается коэффициент термоэдс, и возможна ситуация, когда термоэлектрическое поле $\vec{E}_T$ будет иметь составляющую, поперечную градиенту температур. Возникает вопрос: можно ли на практике получить поперечное термоэлектрическое поле? Оказывается, можно. Так был создан анизотропный термоэлемент.

Что же он собой представляет? Возьмем термоэлектрически анизотропный кристалл и вырежем из него пластинку высотой a и шириной b, под углом θ к главным осям тензора термоэдс $\hat{\alpha}$ (рис.5). Если создать между поверхностями пластинки разность температур, то с помощью вольтметра можно измерить поперечную этому градиенту термоэдс $\mathcal{E}_A$. Понятно, что $\mathcal{E}_A$ связана с анизотропией, т.е. с тем, что $\sigma_\parallel \neq \sigma_\perp$, и поэтому термоэдс должна быть пропорциональна разности $\sigma_\parallel - \sigma_\perp$. Кроме того, термоэдс тем больше, чем больше ΔT. Теория дает выражение

$$\mathcal{E}_A = \frac{1}{2}\left(\alpha_\parallel - \alpha_\perp\right)\Delta T(a/b)\sin 2\theta. \quad (7)$$

Нетривиальным в этой формуле является наличие сомножителя a/b. Вспомним, что термоэдс термопары не зависит от длины проводов (см. формулу (1)). Анизотропный термоэлемент имеет определенные преимущества по сравнению с термопарой. Вот пример. Для увеличения сигнала отдельные термопары соединяют в термобатарею последовательно, что трудоемко и сильно снижает надежность прибора. Термоэдс анизотропного термоэлемента, при фиксированной разности температур, можно повысить либо уменьшая высоту пластинки, либо увеличивая ее длину.

Для характеристики термоэлемента часто вводят понятие чувствительности, которая показывает, какой сигнал он вырабатывает при перепаде температур в один градус. Так вот, у традиционных полупроводниковых анизотропных термоэлементов чувствительность значительно выше, чем у термопар ($\alpha_\parallel - \alpha_\perp = 100-200$ мкВ/К).

Совсем недавно были синтезированы новые материалы для анизотропных термоэлементов. Оказывается, высокотемпературная сверхпроводящая керамика при нормальных температурах имеет удивительные термоэлектрические свойства. Получают такие термоэлементы напылением пленки из керамики на специальную подложку. Хотя разность $\alpha_\parallel - \alpha_\perp$ у таких термоэлементов относительно невелика, отношение a/b может достигать значения 10^5. Таким способом получили самый чувствительный на сегодняшний день анизотропный термоэлемент. При нагреве пленки размером 10×10 мм лазером исследователи снимали сигналы в десятки вольт (!).

Сказанное может быть и интересно, но причем здесь английская королева? Дело в том, что предсказания У.Томсона более ста лет оставались незамеченными. И лишь сравнительно недавно были переоткрыты учеными Черновицкого университета А.Г.Самойловичем и Л.Л.Коренблитом. Они не только заложили основу теории анизотропных термоэлементов (чего не было у Томсона), но и указали реальные полупроводниковые материалы с требуемыми свойствами. Более того, они получили в Англии патент на изобретение под названием «Анизотропный термоэлемент» (Патент UK №1088764 от 25.10.1964 г.).

Таким образом, они защитили идею, высказанную английским физиком, на его же родине. Как известно, в соответствии с патентным законодательством, гарантом владельцев английских патентов выступает королева Великобритании. Конечно, при желании она бы могла отказать претендентам в приоритете, сославшись на труды своего соотечественника, но такого желания у нее, по-видимому, не возникло. Впрочем, не стоит упрекать в невольном присвоении приоритета ни «ловких» физиков, ни педантичных английских патентных поверенных. Просто иногда путь между замечательной идеей и обоснованным практическим применением оказывается очень долгим.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

* * *

— Никак не могу найти себе помощника, — пожаловался однажды Эдисон Эйнштейну. — Каждый день заходят молодые люди, но ни один не подходит.

— А как вы определяете их пригодность? — поинтересовался Эйнштейн.

Эдисон показал ему листок с вопросами.

— Кто на них ответит, тот и станет моим помощником.

«Сколько миль от Нью-Йорка до Чикаго?» — прочел Эйнштейн и ответил: «Нужно заглянуть в железнодорожный справочник». «Из чего делают нержавеющую сталь?» — «Об этом можно узнать в справочнике по металловедению...». Пробежав глазами остальные вопросы, Эйнштейн сказал:

— Не дожидаясь отказа, свою кандидатуру снимаю сам.

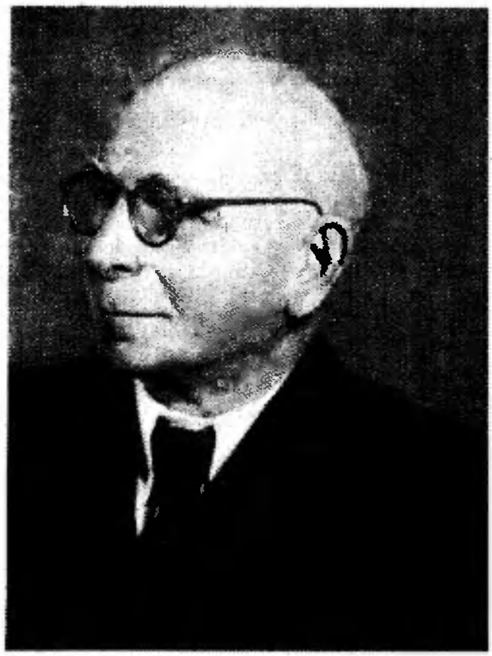
Из сборника
«Физики продолжают шутить»

Сергей Натанович Бернштейн

В.ВИДЕНСКИЙ

Это рассказ о человеке, который был одним из величайших математиков двадцатого века.

Однако его имя школьникам мало известно, а иные его и вовсе не слыхали. Отчасти это объяснимо. Труды академика С.Н.Бернштейна относятся к областям математики, далеким от средней школы: дифференциальным уравнениям в частных производных, теории вероятностей, конструктивной теории функций. Но, естественно, читатель может интересоваться не только конкретными результатами, но и личностью творца математики, его отношением к этой замечательной науке, вопросом, как он выбирал задачи для исследования, как была организована его работа, как он относился к коллегам и ученикам. За свою долгую жизнь Сергей Натанович встречался со многими прославленными математиками, учился у них, сотрудничал и соперничал с ними.



По древней традиции, говоря о выдающихся мужах, нередко подчеркивают, что они имели довольно невзрачный вид. Этого не скажешь о Сергее Натановиче. Его облик поражал с первого взгляда, производил впечатление неординарности и значительности. На лице лежала печать внутренней сосредоточенности, напряженной духовной жизни, твердой воли, живой и ясной мысли.

В 1946/47 учебном году, 50 лет тому назад, Сергей Натанович последний раз вел занятия на механико-математическом факультете Московского университета. Он читал курс лекций о приближении функций, определенных на всей вещественной прямой, руководил научно-исследовательским семинаром, а по вторникам с двух до четырех дома давал консультации, в частности, обсуждал со слушателями их результаты и представлял заметки к опубликованию в «Докладах Академии наук». Тогда я и стал посещать эти занятия и познакомился с Сергеем Натановичем. С тех пор мне посчастливилось работать с ним 16 лет подряд.

Лекции С.Н.Бернштейна были прекрасны, но не по форме, не благодаря отточенности и отшлифованности, и не потому, что их было легко понимать, пожалуй, наоборот, — довольно трудно. Исключительное достоинство и привлекательность этого курса состояли в свежести материала: излагались совершенно новые результаты, полученные лектором в самое последнее время, иные только что вышли из печати, а другие лишь к ней готовились.

Слушали лекции и участвовали в семинаре такие известные математики, как А.О.Гельфонд, В.Л.Гончаров, Б.М.Левитан, С.М.Никольский, а также несколько аспирантов и студентов. На семинаре царила творческая обстановка. Сергей Натанович был неизменно доброжелателен, безукоризненно вежлив, слушал докладчиков очень внимательно. Несмотря на это, ему не удавалось создать вполне непринужденную обстановку: докладчики несколько смущались и стушевывались в его присутствии, испытывали какую-то скованность и неловкость. Эти ощущения были еще сильнее, когда посетитель попадал в его рабочий кабинет. Читатель, наверное, бывал в музеях-квартирах знаменитых писателей, художников или артистов. Все же я не сомневаюсь, что такого строгого кабинета, как у Сергея Натановича, он еще не видывал. Большая высокая комната, почти посередине огромный письменный стол, заваленный открытыми книгами и журналами, которые годами не закрывались, старинная настольная лампа с козырьком, перемещающимся по вертикали. Вдоль всех стен высокие книжные шкафы. В кабинете ни единой лишней вещи, только математическая литература; ни художественной литературы, ни портретов или картин на стенах, ни телефона, ни радиоприемника — это в других комнатах. Здесь все для сосредоточенного занятия математикой, ничто не должно отвлекать. Впрочем, одно исключение из правила было — по кабинету гулял большой пушистый кот, по временам вспрыгивая на стол, но осторожно, ничего не роняя. Казалось, что кот каким-то мистическим образом вовлечен в работу хозяина.

Мы почти ничего не знаем о детских и юношеских годах С.Н.Бернштейна. Он родился в Одессе 5 марта

1880 года в семье доктора медицины, доцента университета. Отца он в живых не застал, тот внезапно умер в конце предыдущего года. В семье было еще трое детей — две сестры и брат. Мать имела небольшие средства, впрочем, достаточные, чтобы дать детям хорошее воспитание и образование. Далее приходится пропустить 18 лет, мы знаем только, что, окончив гимназию в 1898 году, С.Н.Бернштейн отправился учиться в Парижский университет (знаменитую Сорбонну).

По словам Сергея Натановича, математикой он заинтересовался в старших классах гимназии и самостоятельно изучил аналитическую геометрию. В прошлом веке не практиковались математические кружки и олимпиады, так что гимназисты не имели случая отличиться и оценить свои силы. К этим скудным сведениям остается только добавить, что, родившись на берегах Черного моря, он любил его и был прекрасным пловцом. Случалось ему заплывать в такую даль, что не видно было земли, и приходилось определять направление к берегу по солнцу.

В Сорбонне курс был рассчитан на 4 года, но С.Н.Бернштейн закончил обучение на год раньше. Экзаменов было мало, но зато они были огромного объема. Лекции читали такие первоклассные математики, как Аппель и Гурса, а небесную механику читал сам Пуанкаре. Кроме того, С.Н.Бернштейн тщательно изучал современные труды Адамара по теории аналитических функций и Пикара по дифференциальным уравнениям. Париж издавна — со времен Декарта и Паскаля — был мировым центром математической мысли. Однако в конце прошлого века там еще не вошли в моду научные семинары, и молодому иностранцу было трудно, почти невозможно, примкнуть к кругу французских математиков. После нескольких бесплодных попыток установить с ними контакты и обсудить темы возможных самостоятельных исследований С.Н.Бернштейн, разочарованный неудачей, переехал в Германию, в Геттинген, где работал прославленный семинар Гильберта и куда съезжалась молодежь со всех концов света.

Вы, вероятно, знаете, что в 1900 году, на рубеже двух столетий, на Международном конгрессе математиков в Париже Гильберт выдвинул свои 23 знаменитые проблемы, которым суждено было во многом определить направление творческих усилий математиков в нашем веке. В начале доклада Гильберт говорил: «Как вообще каждое человеческое начинание связано с той или иной целью, так и математическое творчество связано с постановкой проблем». Далее он сказал, что хотел бы предложить проблемы достаточно трудные, чтобы нас привлекать, но не настолько трудные, чтобы нас отталкивать. Вы и сами были бы рады, если бы на кружках и олимпиадах вам давали задачи именно такие — интересные и нелегкие, но вместе с тем не совсем уж безнадежные. Кроме того, Гильберт полагал, что проблему можно считать совершенной лишь тогда, когда ее условие так просто и ясно, что мы готовы ее объяснить первому встречному. Смешно было бы эту метафору понимать буквально.

Итак, в 1902 году С.Н.Бернштейн приехал в Геттинген в поисках подходящих задач для начала творческой работы, а также для знакомства с трудами знаменитой геттингенской школы, которая вела свою родословную от Гаусса, Дирихле и Римана. В университете С.Н.Бернштейн посещал блестящие лекции Гильберта и Минковского, полные новых идей, а также стал работать в семинаре Гильберта. Вскоре тот обратил внимание на глубокий интерес молодого участника и лично предложил С.Н.Бернштейну испытать свои силы на 19-й проблеме. Эта проблема касалась аналитических решений дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных эллиптического типа. Дорогой читатель, не падайте духом, если не поняли ни единого слова, — это нормально. В чем смысл вопроса? Попытаемся в общих чертах, не входя в детали, разобраться. Иными словами, не хотите ли примерить на себя шкуру вышеупомянутого прохожего? Если угодно, то можете коечто пропустить и следить только за общей нитью рассказа.

Рассмотрим функцию двух переменных $u = f(x,y)$. Зафиксируем переменную y и вычислим производную от u по переменной x; она называется частной производной от функции u по переменной x и обозначается $\frac{\partial u}{\partial x}$; аналогично вводится $\frac{\partial u}{\partial y}$. Можно вычислить частные производные от $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, они называются частными производными второго порядка и обозначаются $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Вот простой пример дифференциального уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Это уравнение встречается в математике, физике и астрономии. Оно называется уравнением потенциала, а его решения называются гармоническими функциями. Гармонических функций имеется бесконечное множество. Укажем некоторые из них:

$$u = x^2 - y^2, \ u = xy,$$
$$u = \left(e^x + e^{-x}\right)\cos y.$$

Произвольное уравнение второго порядка можно записать так:

$$\varphi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \quad (1)$$

где $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_8)$ — некоторая функция от восьми переменных. В зависимости от свойств φ эти уравнения классифицируют как уравнения эллиптического, гиперболического или параболического типов. Слова не случайны: имеется связь с уравнениями эллипса, гиперболы и параболы. Свойства решений существенно зависят от того, к какому типу относится уравнение.

А какие функции называются аналитическими? Функция комплексной переменной f, определенная в некоторой области D, называется аналитической в D, если существует производная f' в каждой точке области D. По форме производная определяется точно так же, как в вещественном случае, но принципиальное различие состоит в том, что приращение независимой переменной стремится к нулю, принимая комплексные значения. Требование иметь такую производную гораздо более жесткое, чем дифференцируемость в вещественном смысле. Функцию f от нескольких комплексных переменных $z_1, \ldots, z_m$ называют аналитической, если существуют ее частные производные по всем переменным.

Обе идеи — дифференцировать функции по комплексной переменной и рассматривать уравнения в частных производных — восходят к Эйлеру, к его статье, опубликованной в «Комментариях Петербургской академии наук» за 1734—35 годы. Эйлер жил тогда и трудился в Петербурге, было ему 27 лет. За истекшие с тех пор 260 лет появилось несметное число исследований в той и другой области, они продолжаются и в наши дни.

Возвратимся к 19-й проблеме и уточним вопрос. Если уравнение (1) эллиптического типа, а функция φ — аналитическая, то можно ли утверждать, что его решение $u = f(x,y)$ будет аналитической функцией? Для частного случая, уравнения потенциала, это было известно. Ответ С.Н.Бернштейна в целом был утвердительным, но при некоторых дополнительных ограничениях. Для того чтобы решить задачу, С.Н.Бернштейну пришлось создать новый метод, построить некоторые специальные ряды, которые автор назвал нормальными. Этой превосходной работой С.Н.Бернштейна тема не была исчерпана. Она дала ответ на конкретный вопрос, но, кроме того, сыграла роль первопроходческой и открыла дорогу другим исследователям.

Но почему так интересовались, окажется ли решение аналитической функцией? Дело вот в чем: если аналитическая функция задана в сколь угодно малой части области, то она полностью определена во всей области. Это порождало иллюзию, что лишь аналитические функции пригодны для описания законов природы, где, как предполагалось, каждое состояние полностью предопределено состоянием предыдущим. Но эта слишком общая мысль не оставляла никакого места для природных явлений, связанных со случайными процессами.

Решению 19-й проблемы С.Н.Бернштейн посвятил, как тогда говорили, мемуар (большую статью) и защитил его в 1904 году в качестве докторской диссертации в Парижском университете перед комиссией из Адамара, Пикара и Пуанкаре. На защите диссертанту полагалось быть во фраке — одежде старомодной, а потому комичной. К счастью, покупать его не пришлось: его давал напрокат университетский швейцар. На этот раз французские математики отнеслись к Сергею Натановичу дружелюбно и явно гордились, что молодой выпускник их университета был первым, кто решил проблему Гильберта. Остальные 22 проблемы еще не были даже атакованы. Диссертация начиналась словами: «Кажется, все математики и физики наших дней согласны, что область приложения математики не имеет иных границ, кроме границ самого знания». Так Сергей Натанович всегда и думал.

В 1905 году С.Н.Бернштейн вернулся в Россию, в Санкт-Петербург. Здесь, как он и предвидел, его ждали большие трудности. Иностранные дипломы не признавались: не было никакого международного соглашения. Можно было получить в Париже докторскую степень, но при этом дома, в России, формально не считаться даже имеющим высшее образование. Экзаменоваться за университет его все же не заставили, а магистерские экзамены сдавать пришлось. Это было трудно, так как программы были далеки от принятых во Франции и Германии. Постоянной работы не было, приходилось искать временные заработки. Не оставил ли Сергей Натанович перед лицом встретившихся препятствий свою научную работу? Нет, нет, ни в коем случае. Если так реагировать на жизненные невзгоды, то математикой не будешь заниматься никогда. За какую задачу приняться, было ясно. К 19-й проблеме примыкает 20-я проблема — по смыслу, разумеется, а не по номеру. Она касается так называемой задачи Дирихле и тоже об аналитических решениях. С.Н.Бернштейн успешно справился с проблемой, совершенствуя свои методы.

Так как получить работу и подать магистерскую диссертацию в Петербурге не удалось, то в 1908 году С.Н.Бернштейн переехал в Харьков, куда был приглашен преподавать теорию вероятностей на Высших женских курсах. Лет через 40 Сергей Натанович вспоминал, что это предложение его немало огорчило. Я не вполне правильно понял тогда причины этой досады и подумал, что речь шла только о большой затрате времени на подготовку к лекциям. Но позднее я осознал, что он в большей мере имел в виду другое, а именно, он склонен был верить, что законы природы написаны на языке аналитических функций, а роль случайных событий тогда еще не особенно ценил. Так или иначе, но это был перст судьбы. Ему предстояло сделать решающий шаг в развитии теории вероятностей — создать ее аксиоматику и превратить ее в строгую математическую науку. Это было еще далеко впереди, а в тот момент Сергей Натанович своего предназначения не мог сознавать и предчувствовать.

По приезде в Харьков С.Н.Бернштейн защитил магистерскую диссертацию, в которую включил решение двух проблем Гильберта — 19-й и 20-й. Это был уникальный в мире случай, чтобы диссертация на первую научную степень содержала решение двух знаменитых проблем.

Вскоре С.Н.Бернштейн оставил дифференциальные уравнения и начал заниматься приближением функций. Одновременно над двумя темами Сергей Натанович никогда не работал — это противоречило его принципу полного погружения в проблему и максимальной сосредоточенности. Его внимание было привлечено задачей о наилучшем приближении функции $f(x) = |x|$ многочленами. По инициативе выдающегося бельгийского математика Валле Пуссена Королевская академия наук Бельгии в 1910 году объявила конкурс на решение этой проблемы. Нетрудно объяснить историю вопроса, термины и плодотворную роль проблемы. В середине прошлого столетия П.Л.Чебышёв своими исследованиями шарнирных механизмов был приведен к следующей общей задаче: приблизить непрерывную на отрезке $[a,b]$ функцию f наилучшим образом многочленом $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ данной степени n. Под отклонением P_n от f Чебышёв понимал

$$\max_x |P_n(x) - f(x)| = \|P_n - f\|$$

(читается «норма $P_n - f$»). Приблизить наилучшим образом — это значит выбрать коэффициенты многочлена так, чтобы $\|P_n - f\|$ была минимальной. Этот минимум называется наилучшим приближением и обозначается $E_n(f)$. Многочлен, для которого этот минимум достигается, называется многочленом, наименее уклоняющимся от f, обозначим его $P_n^*(f,x)$. Простых формул для его вычисления нет. Чебышёв указал его замечательное характеристическое свойство: график разности $f(x)$ —

$-P_n^*(f,x)$ похож на синусоиду, в $n+2$ точках отрезка он принимает с последовательно противоположными знаками значения $\pm E_n(f)$.

С другой стороны, лет 30 спустя, совершенно иные соображения, а именно, исследования по теории аналитических функций, привели Вейерштрасса к следующей фундаментальной теореме: всякая непрерывная на отрезке функция f есть предел некоторой последовательности многочленов $\{P_n(f)\}$, подобно тому, как любое вещественное число есть предел последовательности рациональных чисел. Из определений ясно, что при любом натуральном n

$$E_n(f)=\|P_n^*(f)-f\|\le\|P_n(f)-f\|$$

и значит, для любой непрерывной функции

$$\lim_{n\to+\infty}E_n(f)=0. \qquad (2)$$

Легко проверяется, что условие (2) также и достаточно, чтобы функция была непрерывной. Но это решительно все, что можно сказать без дальнейшей настойчивой и упорной работы. Естественный вопрос: от каких свойств функции f зависит скорость убывания $E_n(f)$? Начать надо было с простых случаев. Выбор удачно пал на функции $f(x)=|x|$ на отрезке $[-1,1]$; ее график — двухзвенная ломаная, она имеет производную всюду, за исключением точки $x=0$. Кроме того, функция $|x|$ играла решающую роль в одном из доказательств фундаментальной теоремы Вейерштрасса, указанном Лебегом, который заметил, что любая непрерывная n-звенная ломаная может быть записана в виде

$$\Lambda_n(x)=kx+b+\sum_{k=1}^{n}A_k|x-\alpha_k|,$$

где α_k — абсциссы вершин ломаной. Его доказательство оказалось весьма плодотворным, оно содержало скрытые возможности, которые повлекли за собой широкие обобщения, в то время Лебег их предвидеть не мог. Лебег лишь на несколько лет старше С.Н.Бернштейна, он был его товарищем, а не учителем. Сергей Натанович упоминал о нем с большой теплотой.

В техническом отношении конкурсная тема об оценке $E_n(|x|)$ была очень трудной. Валле Пуссен сначала сам пытался решить вопрос и опубликовал предварительные результаты. С.Н.Бернштейн дал исчерпывающий ответ и доказал, что существует предел

$$\lim_{n\to+\infty}nE_n(|x|)=\mu,\ 0{,}278<\mu<0{,}286.$$

Интересно, что это всего-навсего побочный результат общего исследования С.Н.Бернштейна о наилучшем приближении функции в зависимости от ее дифференциальных свойств. Тем самым был заложен фундамент новой области, которую С.Н.Бернштейн назвал впоследствии «конструктивная теория функций». А мы теперь называем С.Н.Бернштейна создателем конструктивной теории функций. Выяснилось, что скорость убывания $E_n(f)$ при $n\to+\infty$ полностью определяет класс приближаемых функций. Например, чтобы функция f была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы при всех натуральных n выполнялись неравенства

$$E_n(f)<Aq^n\ \ (A>0,\,0<q<1).$$

Аналогично, чтобы f имела на отрезке бесконечно много производных, необходимо и достаточно, чтобы при любом $p>0$

$$\lim_{n\to+\infty}n^pE_n(f)=0.$$

В результате С.Н.Бернштейн был удостоен премии Бельгийской академии; с трудом защитил по этой теме докторскую диссертацию в Харьковском университете, потому что один из двух оппонентов дал о работе отрицательный отзыв; наконец, был приглашен сделать часовой доклад на Международном конгрессе математиков в Кембридже в 1912 году. По уставу этих конгрессов честь сделать часовой доклад можно удостоиться лишь один раз в жизни; С.Н.Бернштейну было 32 года. В этом докладе он, в частности, сказал: «Пример задачи о наилучшем приближении $|x|$, предложенной Валле Пуссеном, дает еще одно подтверждение того факта, что хорошо поставленный частный вопрос способен быть отправной точкой для далеко идущих теорий». Эту мысль о роли проблем я не раз слышал от него на семинаре и в частных беседах.

Что касается метода, созданного С.Н.Бернштейном, то он представлял собой глубокий синтез идей Чебышёва и Вейерштрасса, а также основывался на получении точных неравенств и их тонкого применения.

Мы уже несколько раз упоминали фундаментальную теорему Вейерштрасса. Важны не только сами теоремы, но и их доказательства. Вместе они существенно влияют на развитие математики. Бернштейн, который вел тогда исследования по теории приближений, уже несколько лет преподавал теорию вероятностей и под ее влиянием изобрел следующую изящную конструкцию многочленов

$$B_nf=\\ =B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k},$$

которые теперь называются многочленами Бернштейна. Многочлены B_nf и есть в явном виде последовательность, фигурирующая в теореме Вейерштрасса для функции f, непрерывной на отрезке $[0,1]$. То, что $\|B_nf-f\|\to0$ при $n\to+\infty$, С.Н.Бернштейн очень просто вывел при помощи закона больших чисел, но это легко доказывается и средствами математического анализа.

Тем временем С.Н.Бернштейн уже начал углубляться в размышления над основами теории вероятностей. Хотя ее история насчитывала уже почти 300 лет, ей были присущи черты экспериментальной науки с интуитивными и размытыми пояснениями случайного события и его вероятности, что нередко приводило к ошибочным применениям и математическим парадоксам. Кое-кто сомневался даже в том, существуют ли в реальном мире случайные события; другие полагали, что шанс наступления случайного события оценивается каждым весьма субъективно. Мы уверены, что случайные события существуют. Например, в детстве бежишь по школьному коридору, сломя голову, и налетаешь на директора; извиняешься, говоришь: «Я случайно». Уж, конечно, не умышленно, но вероятность, видно, не мала. Теория вероятностей была очень содержательной наукой, которая включала в себя много важных результатов, а также имела широкие приложения в астрономии, статистической механике и других разделах физики. Но строгая математическая теория имеет дело не непосредственно с явлениями материального мира, а с их идеальными образами, что и дает возможность ее продуктивного применения к широкому кругу вопросов. Мы это хорошо знаем из геометрии, которая имеет дело не с колесами и столами, а с абстрактными окружностями и прямоугольниками. Так вот, назрела необходимость подвести под здание теории вероятностей логический фундамент, дать ее аксиоматическое обоснование. Именно это осуществил С.Н.Бернштейн в 1917 году в мемуаре, опубликованном в «Сообщениях Харьковского математического общества». Построение аксиоматики теории вероятностей числилось под номером 6 среди проблем Гильберта, но в упомянутом мемуаре, выполненном во время первой мировой войны, — ссылки нет видимо, в военное время такая цитата была невозможна. Мне кажется, что С.Н.Бернштейн обратился к этой теме не столько ради решения еще одной проблемы Гильберта, сколько благодаря работе над лекциями и учебником по теории вероятностей, а также под влиянием современных ему успехов статистической физики. В 1929 году Андрей Николаевич Колмогоров дал другое аксиоматическое построение теории вероятностей, ныне более употребительное, связанное с теорией множеств и теорией меры. Вскоре С.Н.Бернштейн применил теорию вероятностей к математической генетике и обоснованию законов Менделя. Дальнейшие труды С.Н.Бернштейна по теории вероятностей содержали результаты большой глубины и силы, они завершали классические направления и прокладывали новые пути.

В 1929 году С.Н.Бернштейн был избран академиком. Академия наук тогда находилась в Ленинграде, по ее уставу там и полагалось жить академикам. Сергей Натанович не торопился переезжать, как видно, опасаясь нарушить налаженный ритм научной работы. Но с 1930 года в харьковских газетах началась травля С.Н.Бернштейна, которому приклеили ярлык буржуазного ученого, нависла реальная угроза ареста. В 1933 году Сергей Натанович переехал в Ленинград. Это оказалось очень своевременно, так как на Украине в результате насильственной коллективизации вскоре разразился свирепый голод, унесший миллионы жизней.

В Ленинграде Сергей Натанович вполне успешно продолжал творческую деятельность, включился в интересы ленинградских математиков и вошел в их круг, особенно он подружился с Владимиром Ивановичем Смирновым. Здесь С.Н.Бернштейн прожил до начала войны. После войны Сергей Натанович в Ленинград не вернулся, так как во время блокады умер от голода его единственный сын. Ехать туда, где случилась эта трагедия, не хотелось. Последние 25 лет С.Н.Бернштейн прожил в Москве. О его педагогической деятельности в МГУ мы уже упоминали в начале статьи.

В 1950 году, когда Сергею Натановичу минуло 70 лет, он получил неожиданный и приятный подарок — Академия наук постановила издать собрание его сочинений. С одной стороны, это была дань глубокого уважения великому математику. С другой — забота о сохранении и объединении в одно целое богатейшего научного наследия, распыленного почти в двух сотнях статей в различных журналах мира.

Работа над изданием собрания сочинений в четырех томах под редакцией автора длилась 14 лет. Сергей Натанович отнесся к изданию с огромной ответственностью, потратил много времени и сил. Можно сказать, исчерпал свои силы. Осенью 1968 года С.Н.Бернштейн умер в возрасте 88 лет.

Еще не раз известные ученые и начинающие молодые математики будут обращаться к сочинениям С.Н.Бернштейна, чтобы найти там темы для собственных исследований и развить идеи, заложенные в его трудах.

Но ошибся бы тот, кто понадеялся бы на беглое чтение, — его уму и воображению оставлена нелегкая работа. Он должен будет вспомнить предисловие к «Гаргантюа и Пантагрюэлю» и последовать совету Рабле — уподобиться умной, сообразительной и терпеливой собаке, которая старается высосать из мозговой кости мозг, чтобы им полакомиться.

Две теоремы Бернштейна

В.ТИХОМИРОВ

СРЕДИ многих выдающихся достижений Сергея Натановича Бернштейна два его результата произвели особое впечатление на современников. Они вызвали множество восхищенных отзывов, дискуссий, обобщений и комментариев. Этими результатами были «вероятностное» доказательство теоремы Вейерштрасса и замечательное неравенство, известное ныне всем математикам как неравенство Бернштейна.

В 1885 году знаменитый немецкий математик — патриарх математического анализа Карл Вейерштрасс — доказал, что любую непрерывную на отрезке функцию можно с любой точностью приблизить алгебраическими многочленами.

Вот что это значит. Пусть $y = f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$, а ε — любое наперед заданное число (например, $\varepsilon = 1/10^m$). Тогда существует такой многочлен $p(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа, что

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

при всех x из отрезка $[a;b]$. Таким образом, имеет место приближенное равенство $f(x) = p(x)$ с точностью до ε.

Рассмотрим теперь график функции $y = f(x)$ (рис.1) и сдвинем его на

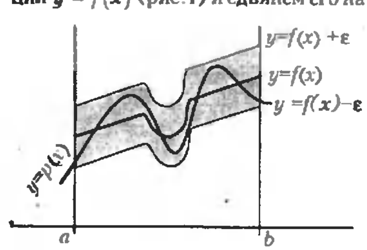


Рис. 1

ε вверх и на ε вниз, т.е. построим графики $y = f(x)+\varepsilon$ и $y = f(x)-\varepsilon$. На плоскости образовался «коридор», верхней и нижней границами которого служат построенные графики. Теорема Вейерштрасса утверждает, что внутри этого коридора содержится график некоторого многочлена.

Как и большинство выдающихся математических результатов, теорема Вейерштрасса допускала множество подходов к ее осмыслению. Появилось большое число доказательств этой теоремы.

Однако, когда в 1912 году вышла из печати полуторастраничная заметка С.Н.Бернштейна «Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей», оно произвело огромное впечатление неожиданностью подхода и красотой.

Вот это доказательство.

Все знают, что

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Известна и общая формула для $(a+b)^n$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k. \quad (1)$$

Она получила название формулы бинома Ньютона. Числа $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{k}$ называются биномиальными коэффициентами. Вот их выражения:

$$\binom{n}{0}=1,\ \binom{n}{1}=n,$$
$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\ \ldots,\ \binom{n}{n}=1,$$
$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Формула (1) без особого труда доказывается по индукции. Попробуйте это проделать самостоятельно.

В первых строках своей заметки С.Н.Бернштейн пишет:

«Мы укажем здесь очень простое доказательство следующей теоремы Вейерштрасса:

Если $F(x)$ — произвольная непрерывная функция на отрезке $[0;1]$, то сколь бы мало ни было ε, всегда можно определить многочлен $E_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ достаточно высокой степени n, для которого имеет место неравенство

$$|F(x)-E_n(x)| < \varepsilon$$

в каждой точке рассматриваемого отрезка».

И Бернштейн выражает этот многочлен явной формулой:

$$E_n(x) = F(0)\binom{n}{0}x^n + F\left(\frac{1}{n}\right)\binom{n}{1}x^{n-1}(1-x)+\ldots+F\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^{n-k}(1-x)^k+\ldots+F(1)\binom{n}{n}(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}F\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^{n-k}(1-x)^k. \quad (2)$$

Полином $E_n(x)$ получил название полинома Бернштейна; обычно его обозначают в честь Бернштейна $B_n(x)$.

Доказательство теоремы Вейерштрасса основывается на двух формулах:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1, \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x) \quad (4)$$

и на таких двух утверждениях из классического анализа:

1) если $F(x)$ — непрерывная на отрезке $[0;1]$ функция, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что как только $|x-x'|<\delta$, так $|F(x)-F(x')|<\varepsilon/2$ (теорема Кантора),

2) непрерывная на конечном отрезке функция ограничена по модулю (теорема Вейерштрасса).

Выведем из (3), (4) и теоремы Кантора теорему Вейерштрасса, а затем выведем (4) и прокомментируем доказательство с вероятностной точки зрения. Имеем:

$$E_n(x)-F(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(F\left(\frac{k}{n}\right)-F(x)\right) = \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\le\delta}+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta} = S_1+S_2.$$

При этом, если δ выбрано в соответствии с теоремой Кантора, то

$$|S_1| = \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\le\delta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(F\left(\frac{k}{n}\right)-F(x)\right)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим через C число, ограничивающее максимальное по модулю значение функции. Тогда из определений, простейших свойств неравенств и (4) мы получим

$$|S_2| = \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(F\left(\frac{k}{n}\right)-F(x)\right)\right| \le 2C\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \le$$
$$\le 2C\frac{1}{n^2\delta}\sum_{|k-nx|>n\delta}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \le 2C\frac{1}{n^2\delta}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{2Cx(1-x)}{n\delta} \le \frac{2C}{4n\delta}$$

(ибо $x(1-x)\le\frac{1}{4}$ при $0\le x\le 1$).

Выбрав n столь большим, что $2C/(4n\delta)<\varepsilon/2$, получим, что $|E_n(x)-F(x)|<\varepsilon$ для любого x из $[0;1]$. Теорема доказана.

Формула (4) получается двукратным дифференцированием формулы

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^kb^{n-k} = (x+b)^n.$$

Дифференцируя ее один раз и умножая затем на x, получим

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(x+b)^{n-k} = nx(x+b)^{n-1}. \quad (5)$$

Повторив еще раз ту же операцию, получим

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(x+b)^{n-k} = nx(nx+b)(x+b)^{n-2}. \quad (6)$$

Подставив в (5), (6) вместо b величину $(1-x)$, получим

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx,$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(nx+1-x),$$

и из этих двух формул читатель легко получит (4), используя то, что $(k-nx)^2 = k^2 - 2knx + n^2x^2$.

На самом деле мы по ходу дела вывели замечательный результат теории вероятностей — так называемый закон больших чисел Бернулли. Предоставим снова слово Бернштейну: «Рассмотрим событие A, вероятность которого равна x. Предположим, что произведено n испытаний, и мы условились платить некоторому игроку сумму $F\left(\frac{m}{n}\right)$, если событие A произойдет m раз. В этом случае математическое ожидание выигрыша (т.е. «средний выигрыш») будет иметь значение E_n». В силу теоремы Бернулли (а мы ее доказали),

$$\left|\sum_{\left|\frac{m}{n}-x\right|>\delta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - F(x)\right| \le \frac{2C}{4n\delta},$$

откуда Бернштейн и вывел свою теорему.

В том же 1912 году Бернштейн доказал одно замечательное неравенство.

Пусть

$$p(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots$$
$$\ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

Такая функция называется тригонометрическим многочленом степени n. Пусть также $M = \max|p(x)|$, а $M' = \max|p'(x)|$. Тогда $M \le nM'$.

Иначе говоря, максимум модуля производной тригонометрического многочлена степени n не больше чем в n раз превосходит максимум самого многочлена.

Простейший пример тригонометрического многочлена степени n

$$q(x) = a\cos nx + b\sin nx = \sqrt{a^2+b^2}\cos(nx+\varphi)$$

показывает, что оценка эта достигается, так как в этом случае

$$M = \max|q(x)| = \sqrt{a^2+b^2},$$

а

$$M' = \max|q'(x)| = \max\left|n\sqrt{a^2+b^2}\sin(nx+\varphi)\right| = n\sqrt{a^2+b^2},$$

т.е. $M' \le nM$.

В дальнейшем все функции будут рассматриваться на отрезке $[-\pi;\pi]$, что естественно ввиду периодичности тригонометрических многочленов с периодом 2π.

Этот результат снова вызвал оживленную дискуссию, появилось множество его доказательств и истолкований. Здесь я приведу доказательство, принадлежащее знаменитому бельгийскому математику Валле Пуссену (1866 – 1962).

В доказательстве мы используем четыре элементарных факта математического анализа. Эти факты наглядно очевидны, да и доказываются достаточно просто при более подробном знакомстве с действительными числами. Мы их иллюстрируем рисунками.

1) Если на отрезке непрерывная функция принимает в двух точках значения разных знаков, то между этими точками она имеет нуль (теорема Коши) (рис. 2).

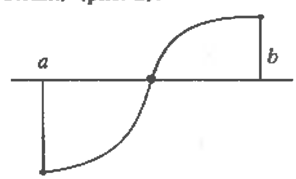


Рис. 2

2) Если дифференцируемая функция принимает в двух точках нулевое значение, то между ними есть точка, где производная функции равна нулю (теорема Ролля) (рис. 3).

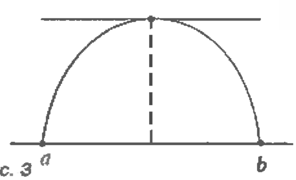


Рис. 3

3) Если дифференцируемая функция достигает максимума в некоторой точке, то в этой точке производная равна нулю (теорема Ферма) (см. рис. 3).

4) Тригонометрический полином степени n не может иметь больше $2n$ нулей на промежутке $[0;2\pi)$.

Итак, приступим к доказательству неравенства Бернштейна. Достаточно доказать (убедитесь в этом), что если $M \le 1$, то $M' \le n$.

Пусть существует тригонометрический многочлен $\bar{p}(x)$ степени n такой, что в любой точке x справедлива оценка $|\bar{p}(x)| \le 1$, в то время как в некоторой точке $\bar{x}$ его производная принимает максимальное значение, равное M' и превосходящее n. Не ограничивая общности, можно считать, что $\bar{x} = 0$ (иначе мы рассмотрели бы многочлен $\tilde{p} = \bar{p}(\bar{x}-x)$, для которого максимум модуля производной достигается при $x = 0$, а значения M и M' — те же самые).

Рассмотрим многочлен

$$q(x) = \bar{p}(x) - \left(\frac{M'}{n}\right)\sin nx.$$

Функция $\left(\frac{M'}{n}\right)\sin nx$ колеблется $2n$ раз между значениями M'/n и $-M'/n$ и при этом M'/n больше единицы. Полином же $\bar{p}(x)$ в каждой точке x по модулю не превосходит единицы.

Поэтому в точках $x_k = x_0 + \frac{\pi k}{n}$, где $x_0 = \frac{\pi}{2n}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$, многочлен $q(x)$ принимает попеременно положительные и отрицательные значения, так что график функции q имеет вид, показанный на рисунке 4, и, в силу утверждения 1, уравнение $q(x) = 0$

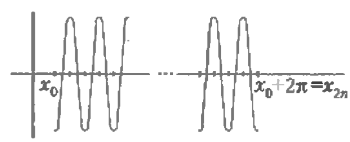


Рис. 4

имеет не меньше $2n$ корней на интервале $(x_0; x_0+2\pi)$, а следовательно, и на интервале $(0;2\pi)$. По утверждению 2, многочлен $q'(x)$ имеет не менее $2n-1$ нулей на $(0;2\pi)$. Кроме того,

$$q'(0) = \bar{p}'(0) - \frac{M'}{n}\cdot n = M' - M' = 0,$$

и следовательно, на полуинтервале $[0;2\pi)$ функция $q'(x)$ имеет $2n$ нулей, а на отрезке $[0;2\pi]$ — $2n+1$ нуль(поскольку $q'(2\pi) = q'(0) = 0$). Возьмем производную еще раз. Многочлен $q''(x)$ также имеет степень n, обращается в нуль в $2n$ точках интервала $(0;2\pi)$ и, кроме того $q''(0) = 0$, так как

$$q''(x) = \bar{p}''(x) + M'\sin nx$$

и $\bar{p}'(x)$ достигает в нуле своего максимума, т.е. $\bar{p}''(0) = 0$.

Значит, $q''(x)$ имеет больше $2n$ нулей на полуинтервале $[0;2\pi)$. Но, в силу утверждения 4, это невозможно! Получилось противоречие, и тем самым теорема доказана.

Задачи по математике и физике

В этом номере мы возобновляем ежегодный конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Победители конкурса будут награждены призами журнвла «Квант» и получат рекомендации для участия в региональных физических и математических олимпиадах.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1997 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1— 97» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1576» или «Ф1583». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиао. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1576, М1578, М1579—М1581, М1585 предлагались на осеннем туре Турнира городов, а задача М1584 — на заочном туре Соросовской олимпиады по математике.

Задачи М1576 — М1585, Ф1583 — Ф1592

М1576. а) Можно ли нарисовать на плоскости четыре красных и четыре черных точки так, чтобы для любой тройки точек одного цвета нашлась точка другого цвета такая, что эти четыре точки являются вершинами параллелограмма?
б) Можно ли 8 вершин куба разбить на две четверки так, чтобы в каждой плоскости, проходящей через любые три точки одной четверки, находилась точка из другой четверки?

Н.Васильев, И.Шарыгин

М1577. В треугольнике отношение синуса одного угла к косинусу другого равно тангенсу третьего. Докажите, что высота, проведенная из вершины первого угла, медиана, проведенная из вершины второго, и биссектриса третьего угла пересекаются в одной точке.

Л.Альтшулер

М1578*. Докажите, что не существует никакой (даже разрывной) функции $y = f(x)$, определенной при всех x, для которой

$$f(f(x)) = x^2 - 1997.$$

С.Богатый, М.Смуров

М1579. Пусть A', B', C', D', E', F' — середины сторон AB, BC, CD, DE, EF, FA произвольного выпуклого шестиугольника $ABCDEF$. Известны площади треугольников $ABC', BCD', CDE', DEF', EFA', FAB'$. Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$.

Н.Васильев

М1580. Можно ли несколькими отрезками и дугами разрезать круг на части так, чтобы сложить из этих частей равновеликий квадрат?

А.Канель

М1581. а) Существует ли шестизначное число A такое, что среди чисел A, $2A$, $3A, \ldots, 500\,000A$ ни одно не оканчивается шестью одинаковыми цифрами?
б)* Для каждого целого $k > 1$ найдите наименьшее натуральное $N = N(k)$ такое, что при любом натуральном A хотя бы одно из чисел A, $2A$, $3A, \ldots, NA$ оканчивается k одинаковыми цифрами.

С.Токарев

М1582. Все точки плоскости Oxy с целыми координатами (x, y) раскрашены в два цвета — синий и красный. Докажите, что найдется бесконечное одноцветное (синее или красное) множество, симметричное относительно некоторой точки.

В.Протасов

М1583. Докажите, что а) медиана произвольного тетраэдра (отрезок, соединяющий вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани) меньше среднего арифметического длин ребер, выходящих из той же вершины; б) биссектриса тетраэдра (отрезок, идущий от вершины до противоположной грани и одинаково наклоненный к граням, содержащим эту вершину) меньше полусуммы длин ребер, выходящих из той же вершины. в) Верно ли для биссектрисы неравенство из пункта а)?

В.Сендеров

М1584. Бесконечная последовательность чисел a, b, c, d, ... получается сложением двух геометрических прогрессий. Может ли она начинаться такими четырьмя числами a, b, c, d:

а) 1, 1, 3, 5; б) 1, 2, 3, 5; в) 1, 2, 3, 4?; г) 1, 2, 3, 2?

д) Докажите, что если первые четыре члена a, b, c, d — рациональные числа, то все члены последовательности — рациональные.

Н.Васильев

М1585. В новой лотерее на карточке из $36 = 6 \times 6$ клеток надо отметить 6. При розыгрыше лотереи называются некоторые 6 «черных» (проигрышных) клеток. Билет считается выигравшим, если на нем не отмечено ни одной черной клетки. Какое наименьшее число билетов нужно купить, чтобы наверняка среди них был хоть один выигравший? Решите ту же задачу для карточки из $N = k^2$ клеток, из которых надо отмечать k, при четном k.

С.Токарев

Ф1583. Автомобиль массой $M = 1000$ кг разгоняется по окружности радиусом $R = 100$ м из состояния покоя. Какая необходима мощность двигателя для максимально быстрого разгона? Коэффициент трения колес о землю $\mu = 0,7$, все колеса автомобиля ведущие. Сопротивлением воздуха пренебречь.

А.Повторов

Ф1584. На рисунке 1 показан профиль гладкой горки, по которой скользит без начальной скорости тело маленького размера. Найдите максимальную величину ускорения тела. Найдите также максимальную перегрузку, действующую на тело при таком движении (перегрузка показывает, во сколько раз вес тела превышает действующую на него силу тяжести).

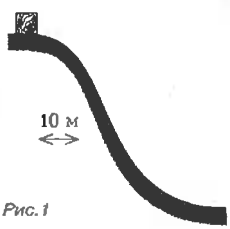


Рис.1

Р.Александров

Ф1585. В системе, изображенной на рисунке 2, трение отсутствует. В начальный момент все тела удерживают, при этом свисающие концы нитей вертикальны, а

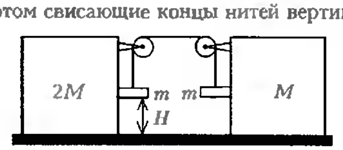


Рис.2

висящие на них грузы касаются боковых поверхностей кубов. Массы кубов M и $2M$, каждый из грузов имеет массу m. Систему отпускают. Найдите скорость большого куба в тот момент, когда касающийся его груз ударится о стол. Начальная высота грузов относительно горизонтальной поверхности стола H.

З.Рафаилов

Ф1586. В кубическом сосуде объемом $V = 1$ л находится некоторое количество гелия при температуре $T = 300$ К. Оцените давление газа, при котором число ударов молекул друг о друга за некоторый отрезок времени равно числу ударов молекул о стенки сосуда. Сильно усложнилась бы задача, если бы вместо гелия в сосуде был водяной пар?

М.Учителев

Ф1587. В длинной горизонтальной гладкой пустой трубе находятся два поршня, которые могут скользить без трения вдоль трубы. Один поршень имеет массу $M = 1$ кг, другой — в два раза тяжелее. В начальный момент между поршнями находится моль кислорода при температуре $T_0 = 300$ К, а тяжелый поршень движется со скоростью $v_0 = 1$ м/с по направлению к неподвижному в этот момент легкому поршню. Чему равна максимальная температура газа в этом процессе? Найдите также скорости поршней через большой отрезок времени. Теплоемкость стенок трубы и поршней считать малой, теплопроводностью пренебречь.

А.Зильберман

Ф1588. Плоский конденсатор состоит из двух пластин площадью S каждая, находящихся на маленьком расстоянии d друг от друга. Оцените работу, которую нужно совершить для того, чтобы зарядить пластины одинаковыми зарядами Q. Считайте, что заряды распределяются по пластинам равномерно.

А.Зильберман

Ф1589. Длинная цепочка резисторов включает звенья двух типов $2R - R$ и $R - 2R$, соединенных попеременно, как показано на рисунке 3. Найдите сопротивление между точками A и B при большом числе звеньев в цепи.

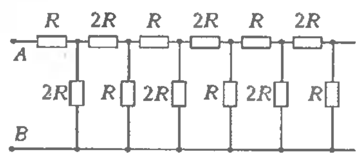


Рис.3

Ф1590. Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L. В тот момент, когда заряд конденсатора Q, а ток катушки I, параллельно подключают еще одну катушку индуктивностью $2L$. Найдите максимальный заряд конденсатора после такого подключения. Как изменится ответ, если вместо катушки подключить в тот же момент конденсатор емкостью $2C$? Элементы цепи считать почти идеальными.

Р.Александров

Ф1591. Источник переменного напряжения частоты ω имеет внутреннее сопротивление R. Известно, что максимальную мощность в нагрузке можно получить в том случае, когда сопротивление нагрузки в точности равно внутреннему сопротивлению источника (как и для цепей постоянного тока). Однако сопротивление нагрузки составляет $5R$. Как нужно включить в цепь катушку индуктивности и конденсатор и какими они должны быть, чтобы мощность в нагрузке оказалась максимально возможной?

А.Зильберман

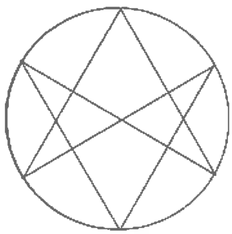
Ф1592. На оси длинной трубы с зеркальной внутренней поверхностью находятся изотропный точечный источник света и полностью поглощающий падающий свет шарик радиусом 1 см. Центр шарика отстоит на расстояние 2 см от источника. Каким должен быть внутренний диаметр трубы, чтобы шарик поглощал ровно половину испускаемой источником энергии?

З.Рафаилов

Решения задач М1551 — М1560, Ф1568 — Ф1577

М1551. *Вершины шестизвенной замкнутой ломаной лежат на окружности. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь такая ломаная?*

На рисунке изображена шестизвенная ломаная с семью точками самопересечения.



Докажем, что такая ломаная не может иметь больше семи самопересечений. Пусть общее число самопересечений равно N. Для каждого звена рассмотрим число точек самопересечения, которые лежат на этом звене, и обозначим через S сумму этих чисел. Тогда $S \ge 2N$ (если в одной точке самопересечения пересекаются два звена, то эта точка входит в сумму дважды, если три или больше, то — больше двух раз).

На любом звене может лежать не больше трех точек самопересечения, так как, кроме этого звена и двух соседних с ним, имеется всего три звена, которые могут с ним пересекаться. При этом три точки могут быть только на таком «диагональном» звене, что из четырех вершин, не являющихся его концами, две лежат в одной полуплоскости от него, а две другие — в другой. (Если по какую-то сторону от звена лежит лишь одна вершина, то нельзя провести больше двух отрезков к вершинам, лежащим по другую сторону звена.) Таких «диагональных» звеньев максимум три. На каждом из остальных лежит не больше чем по две точки самопересечения, поэтому $S \le 3\times2 + 3\times3 = 15$, т.е. $N \le S/2$ не превосходит 7.

Можно примерно так же доказать, что и у любой шестизвенной ломаной (не обязательно с вершинами на окружности) не больше 7 точек самопересечения (на двух соседних звеньях не может быть по три точки самопересечения).

Было бы интересно получить точную оценку и для любой n-звенной ломаной.

Н.Васильев

М1552. *Обозначим через $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$ $\ldots + x^{n-1}$ многочлен $(n-1)$-й степени, все коэффициенты которого равны единице. а) Докажите, что для любого натурального числа s существует такое число k, что многочлен $P_k(x)$ можно разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами, один из которых имеет вид $1 + sx + \ldots$ (многоточие заменяет члены степени выше первой). б) Докажите, что такое число k найдется и для любого целого числа s.*

Поясним идею решения одним примером. Поскольку $x^{30} - 1$ делится на $x^2 - 1$, на $x^3 - 1$ и на $x^5 - 1$, то $1 + x + \ldots + x^{29}$ делится на

$$(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4) = 1+3x+\ldots+x^7.$$

Ниже мы будем рассматривать многочлены с целыми коэффициентами; формулировка «многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$» будет означать следующее: существует многочлен $R(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(x) = Q(x)R(x)$.[1] Всюду ниже $P_n(x) = 1 + x + \ldots$ $\ldots + x^{n-1}$.

Основная лемма. *Если натуральные числа a и b взаимно просты, то многочлен $P_{ab}(x)$ делится на произведение многочленов $P_a(x)P_b(x)$.*

Доказательство. Так как $P_{ab}(x) = P_a(x)P_b(x^a)$, то достаточно доказать, что многочлен $P_b(x^a)$ делится на $P_b(x)$, т.е. что многочлен

$$(1-x)P_b(x^a) = 1 - x + x^a - \\ - x^{a+1} + x^{2a} - x^{2a+1} + \ldots + x^{(b-1)a} - x^{(b-1)a+1} \qquad (*)$$

делится на $(1-x)P_b(x) = 1 - x^b$.

Но при делении на b чисел 1, $a+1$, $2a+1$, $\ldots$, $(b-1)a+1$ (так же как чисел 0, a, $2a$, $\ldots$, $(b-1)a$) встречаются по одному разу все остатки $0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, b-1$ (поскольку a и b взаимно просты). Поэтому многочлен $(*)$ можно представить в виде суммы b двучленов $x^{kb+r} - x^{mb+r}$ (где k, m — целые, зависящие от r; $r = 0, 1, 2, \ldots, b-1$), а каждый такой двучлен делится на $1 - x^b$.

Приступим теперь к решению задачи.

а) Рассмотрим многочлен $P_{a_1\ldots a_s}(x)$, где $a_1, \ldots, a_s$ — попарно взаимно простые числа, большие единицы. Из леммы по индукции следует, что он раскладывается в произведение

$$P_{a_1\ldots a_s}(x) = P_{a_1}(x)\ldots P_{a_s}(x)R(x),$$

но, очевидно,

$$P_{a_1}(x)\ldots P_{a_s}(x) = 1 + sx + \ldots$$

(здесь многоточие заменяет члены, степени которых выше первой).

б) При $s = 0$ утверждение очевидно: $P_4(x) =$ $= (1+x)(1+x^2)$. (Так как $P_{2c+2}(x) = (1+x)P_{c+1}(x^2)$ при $c \ge 0$, то примером может служить также и любой многочлен $P_{2c+2}(x)$, где $c \ge 1$.)

Пусть теперь $s < 0$. В утверждении леммы положим $a = 2$, $b = 2m+1$, где $m \ge 0$. Из доказательства леммы следует, что $P_{2m+1}(x^2)$ делится на $P_{2m+1}(x)$, а значит, и на $P_{2m+1}(-x)$. Рассмотрим построенный при решении пункта а) многочлен $P_{a_1\ldots a_{-s}}(x)$. Из решения пункта а) следует, что $P_{a_1\ldots a_{-s}}(-x)$ делится на $1 + sx + \ldots$ (здесь, как и выше, многоточием заменены члены, степени которых выше первой).

Выберем теперь в качестве $a_1, \ldots, a_{-s}$ нечетные числа (большие единицы) и положим $2m = a_1 \ldots a_{-s} - 1$. Получим: $P_{2m+1}(x^2)$ делится на $1 + sx + \ldots$

[1] *Впрочем, если многочлен с целыми коэффициентами делится на многочлен с целыми коэффициентами, у которого старший коэффициент либо свободный член равен единице, то и частное тоже многочлен с целыми коэффициентами.*

Для завершения решения достаточно воспользоваться равенством

$$(1+x)P_{2m+1}(x^2)=P_{4m+2}(x).$$

Замечания. 1. Основную лемму легко доказать также и с помощью комплексных чисел: очевидно, что корни многочленов $P_a(x)$ и $P_b(x)$ обращают в нуль и многочлен $P_{ab}(x)$, а при взаимно простых a и b многочлены $P_a(x)$ и $P_b(x)$ не имеют общих корней. (Вот эквивалентное геометрическое утверждение: при взаимно простых a и b у правильных a-угольника и b-угольника, вписанных в окружность, не может быть более одной общей вершины.)

2. Доказанное утверждение задачи нетрудно обобщить следующим образом.

Предложение. Для любого конечного набора T целых чисел существует такое натуральное число n, что многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x)=Q(x)R(x),$$

где $Q(x)=1+\ldots$ — многочлен с целыми коэффициентами, среди которых встречаются все числа из T.

В.Сендеров

М1553. ***Из множества чисел 1/2, 1/3, 1/4, …, 1/100 составляются всевозможные подмножества, содержащие четное количество чисел (два, четыре, …, 100 чисел), и для каждого подмножества вычисляется произведение входящих в него чисел. Найдите сумму таких произведений.***

Обозначим сумму произведений чисел $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, взятых в четном количестве (по 2, по 4, …, по 98), через G, в нечетном (по одному, по 3, …, по 97 и, наконец, всех 99) — через H. Тогда

$$G+H=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{99}\right)\left(1+\frac{1}{100}\right)-1=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{99}\cdot\frac{101}{100}-1=\frac{101}{2}-1=\frac{99}{2},$$

$$G-H=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)-1=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100}-1=\frac{1}{100}-1=-\frac{99}{100},$$

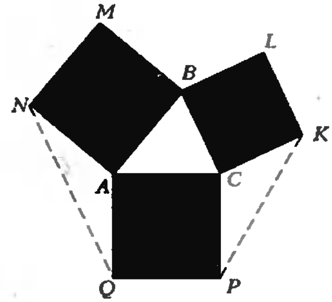
откуда

$$G=\frac{1}{2}\left(\frac{99}{2}-\frac{99}{100}\right)=\frac{99\cdot 49}{200},$$

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{99}{2}+\frac{99}{100}\right)=\frac{99\cdot 51}{200}.$$

Н.Васильев

М1554. ***На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты ABMN, BCKL, ACPQ. На отрезках NQ и PK построены квадраты NQZT и PKXY. Найдите разность площадей квадратов NQZT и PKXY, если известна разность площадей квадратов ABMN и BCKL.***



Ответ: $3d$ (где d — заданная разность площадей).

По теореме косинусов (см. рисунок),

$$NQ^2=AN^2+AQ^2-2AN\cdot AQ\cdot\cos\angle NAQ=$$

$$=AB^2+AC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle NAQ,$$

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC.$$

Поскольку $\angle NAC+\angle BAC=180^\circ$, сумма их косинусов равна 0. Поэтому

$$NQ^2+BC^2=2AB^2+2AC^2.$$

Аналогично, $PK^2+AB^2=2BC^2+2AC^2$. Поэтому

$$NQ^2-PK^2=3AB^2-3BC^2=3d.$$

А.Герко, М.Вялый

М1555. ***Даны два непересекающихся круга и точка P такая, что четыре касательные PA, PB, PC, PD, проведенные из нее к двум кругам, равны. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырехугольника ABCD совпадает с точкой пересечения общих внутренних касательных этих кругов.***

Точка X пересечения общих внутренних касательных окружностей с радиусами r_1 и r_2 и центрами O_1 и O_2 делит отрезок O_1O_2 в отношении $XO_1/XO_2=r_1/r_2$. Докажем, что в том же отношении делит этот отрезок и точка Y пересечения с ним диагонали. Поскольку точки A, B, C, D лежат на одной окружности (с центром P), $\sin\angle O_1AY=\sin\angle O_2CY$ и по теореме синусов получаем

$$\frac{YO_1}{r_1}=\frac{\sin\angle O_1AY}{\sin\angle O_1YA}=\frac{\sin\angle O_2CY}{\sin\angle O_2YC}=\frac{YO_2}{r_2},$$

откуда $YO_1/YO_2=r_1/r_2$. Поэтому Y (и, аналогично, точка пересечения BD с O_1O_2) совпадает с X.

На самом деле эта задача — переформулировка теоремы о том, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон описанного четырехугольника (со вписанной окружностью) проходят через точку пересечения его диагоналей: A, B, C, D играют роль точек касания, P — центра окружности, O_1 и O_2 — двух вершин описанного четырехугольника. Этот факт был использован недавно И.З.Вайнштейном в замечательном решении задачи М1524.

Н.Васильев, С.Маркелов

М1556. ***Докажите, что существует бесконечно много троек чисел n − 1, n, n + 1 таких, что а) n предста-***

вимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, а $n-1$ и $n+1$ — нет; б) каждое из этих трех чисел представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

а) Изучим, какие остатки от деления на 16 может давать сумма двух квадратов. Нетрудно найти остаток q при делении на 16 квадрата некоторого числа в зависимости от того, какой остаток r имеет это число при делении на 8; если $r = 0, 1, 2, \ldots, 7$, то $q = 0, 1, 4, 9, 0, 9, 4, 1$.

Итак, квадрат может давать при делении на 16 лишь четыре остатка: 0, 1, 4, 9. Попарные суммы этих четырех чисел могут принимать лишь следующие значения: 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13. В этом списке отсутствуют оба соседа числа 13. Этим можно воспользоваться для получения одной серии ответов задачи. Нужно взять в качестве n число $(8a+5)^2 + (8b+6)^2$ при каких-нибудь натуральных a и b (таких чисел бесконечно много). Тогда $n-1$ и $n+1$ заведомо не являются суммами двух квадратов натуральных чисел.

В дальнейшем мы будем говорить коротко: число *представимо*, если оно является суммой квадратов двух натуральных чисел.

Вот еще одно решение, использующее более простые факты, чем первое: число вида $4t+3$ не представимо, и число, делящееся на 3, но не делящееся на 9, также не представимо. Число $2\cdot 100^m = (10^m)^2 + (10^m)^2$ представимо, а числа $2\cdot 100^m - 1$ и $2\cdot 100^m + 1$ — нет (сумма цифр последнего числа, а значит и остаток его при делении на 9, равны 3).

Наконец, отметим еще одно решение, предложенное школьниками на олимпиаде. Для нечетного k рассмотрим число $n = k^2 + 1$. Тогда число $n+1$ имеет вид $4t+3$. Осталось указать бесконечную серию значений k, при каждом из которых $n - 1 = k^2$ не представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Достаточно положить $k = 3^l$. Действительно, если $9^l = a^2 + b^2$, то, как легко видеть, оба числа a и b должны делиться на 3. Разделив все члены последнего равенства на максимально возможную степень 3, придем к противоречию.

б) Найдем сначала хотя бы одну тройку $n-1$, n, $n+1$, в которой все числа представимы. Заметим, что первое число $n-1$ должно делиться на 4 и если какое-то число делится на 3, то оно должно делиться и на 9. Пользуясь этим, легко найти наименьшую такую тройку: $72 = 6^2 + 6^2$, $73 = 3^2 + 8^2$, $74 = 5^2 + 7^2$.

Укажем некоторую бесконечную серию таких троек. В этой серии первый элемент тройки $n - 1 = 2k^2 = k^2 + k^2$. Тогда число $n+1$ тоже автоматически представимо: $n + 1 = 2k^2 + 2 = (k+1)^2 + (k-1)^2$.

Попробуем найти k так, чтобы число $2k^2 + 1$ также было представимо в виде суммы двух квадратов, а именно

$$2k^2 + 1 = (k-x)^2 + (k+x-1)^2. \qquad (*)$$

Для этого нужно, чтобы было $2x^2 - 2k - 2x = 0$. Отсюда $k = x^2 - x$. Итак, взяв бесконечную серию значений $x = 3, 4, \ldots$, находим тройки соседних натуральных чисел, каждое из которых представимо: это числа $n-1$, n и $n+1$, где $n = 2k^2 + 1$.

(Кстати, похожее решение уже публиковалось в «Кванте» — см. М814.)

Следующее, второе решение позволяет добиться того, чтобы все квадраты в представлениях были различны. Будем искать решения такой системы уравнений в натуральных числах:

$$m^2 + k^2 = (m-1)^2 + a^2 - 1 = (m+1)^2 + b^2 - 2,\ m > 1.$$

Перепишем систему эквивалентным образом:

$$2m = a^2 - k^2 = k^2 - b^2 + 1. \qquad (**)$$

Мы приходим к равенству $2k^2 + 1 = a^2 + b^2$, для которого выше уже научились находить решения (см. $(*)$). Поскольку число $(**)$ должно быть четным, получаем, что набор значений

$$k = x^2 - x,\ a = k + x - 1,\ b = k - x,\ m = (a-k)(a+k)/2$$

годится при любом нечетном x. При $x = 3$ получаем тройку $14^2 + 6^2$, $13^2 + 8^2$, $15^2 + 3^2$.

Еще один замечательный способ получать серию примеров вытекает из такого утверждения: если числа $n-1$, n и $n+1$ представимы, то и числа $(n-1)^2$, n^2 и $(n+1)^2$ тоже представимы. Это можно доказать, опираясь на следующий факт: произведение двух представимых чисел само представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел. Этот факт, наряду с другими глубокими теоремами о суммах двух квадратов, мы предполагаем обсудить в одном из ближайших номеров «Кванта».

Замечания. 1. Среди наших примеров представимых троек $n-1$, n и $n+1$ легко найти бесконечные серии таких, что ни одно из чисел тройки — не квадрат.

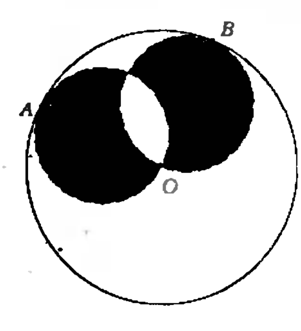
2. Можно (разными способами) доказать, что существуют сколь угодно длинные отрезки натурального ряда, состоящие из непредставимых чисел.

3. Можно также найти бесконечно много значений n, для которых пара чисел n, $n+1$ представима, а соседние с ними числа — нет. Простой пример: $n = 100^k$.

Н.Васильев, В.Сендеров

М1557. *A и B — две данные точки окружности. Найдите геометрическое место середин хорд этой окружности, пересекающих отрезок AB.*

Пусть O — центр круга, A и B — данные точки. Задачу можно переформулировать так: найти множество точек M таких, что прямая l, перпендикулярная к отрезку OM, проведенная через точку M, пересекает



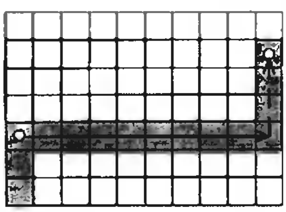
отрезок AB. Заметим, что l проходит через точки A или B, когда один из углов AMO или BMO – прямой. А пересекать AB прямая l будет в том и только в том случае, если ровно один из углов AMO и BMO – тупой. Поэтому искомое множество состоит из точек, лежащих внутри ровно одного из кругов с диаметрами OA и OB (см. рисунок).

И.Шарыгин

М1558. *Игра происходит на квадратной шахматной доске $n \times n$. Двое поочередно передвигают по доске ладью, причем не разрешается, чтобы ладья стала на поле или прошла через поле, на котором она уже побывала (или через которое уже проходила). Вначале ладья стоит в углу доски. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Для кого существует способ выиграть: для начинающего игру или для того, кто ходит вторым?*

Выигрывает первый. Выигрывающие ходы состоят в следующем: он должен идти параллельно стороне до конца по тому направлению, где больше клеток.

Эта стратегия годится для доски любого размера $m \times n$ клеток ($m \geq 1$, $n > 1$), если ладья стоит на любом поле, граничащем с меньшей (не большей) стороной. Если ширина доски равна 1, тогда игра на этом кончается и выиграл первый. В противном случае в результате хода первого игрока и любого ответа второго мы имеем ту же ситуацию (см. рисунок), что вначале, но ширина



доски становится меньше. Через конечное число ходов игра заканчивается победой первого.

Б.Бегун

М1559. *Существует ли в пространстве куб, расстояния от вершин которого до данной плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?*

Рассмотрим куб, вершины которого имеют декартовы координаты (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), ..., (1,1,1) – всего восемь троек. Если каждую такую тройку записать подряд, выбросив из записи запятые, и прочитать эти тройки как двоичные числа, то получится ряд чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; при этом тройке (x, y, z) нулей и единиц соответствует число $4x + 2y + z$, т.е. скалярное произведение вектора $\vec{v} = (4,2,1)$ на вектор (x,y,z).

Проведем через начало координат плоскость p, перпендикулярную вектору v. Вспомнив, что скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного из них на проекцию на него другого вектора, видим, что проекции вершин куба на прямую, содержащую вектор $\vec{v}$, находятся от начала координат (а значит, вершины куба – от плоскости p) на расстояниях, пропорциональных числам 0, 1, 2, ..., 7. Чтобы получить искомый куб, нужно наш куб подвергнуть гомотетии с центром в начале координат с коэффициентом, который легко вычисляется (он равен $\sqrt{21} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1}$).

В.Произволов

М1560. *В некотором государстве человек может быть зачислен в гвардию только в том случае, если он выше ростом, чем 80% (или больше) его соседей. Чтобы доказать свое право на зачисление в гвардию, человек сам называет число R (радиус), после чего его «соседями» считаются все, кто живет на расстоянии меньше R от него. В этом же государстве человек освобождается от службы в армии только в том случае, если он ниже ростом, чем 80% (или больше) его соседей. Определение «соседей» аналогично: человек сам называет число r (радиус) и т.д., причем R и r не обязательно совпадают. Может ли случиться, что не менее 90% населения имеют право на зачисление в гвардию и одновременно не менее 90% населения освобождены от армии? (Значения R и r должны выбираться так, чтобы «множества соседей» были непустыми.)*

Ответ: может. Приведем условный пример такого государства. Рассмотрим точки числовой прямой: x, $x + d$, $x + d/3$, $x + d/9$, ..., $x + d/3^9$ ($d > 0$). В эти точки поместим 10 человек. Пусть их рост (в той же последовательности) выражается числами a, $a - h$, $a - 2h$, ..., $a - 9h$, где a, h – произвольные положительные числа с естественным ограничением, что $a - 9h > 0$. Пусть значения R, которые они называют (в том же порядке), $-d$, $d/3$, $d/9$, ..., $d/3^8$, $d/3^8$. Тогда 9 из них (все, кроме последнего) будут выше всех своих соседей. Конфигурацию из таких точек с какими-то значениями x, d, R, a и h назовем *базовой конфигурацией*.

Теперь определим 100 базовых конфигураций B_0, B_1, ..., B_{99} со следующими параметрами. Пусть у всех B_i $(0 \leq i \leq 99)$ будет одинаковое $d = 1$ и одинаковое $h = 1/10$; последовательные значения x для этих конфигураций пусть будут $D/3^i$, где $D = 3^{99}$, а параметра $a = A + i$, где A – достаточно большое число, скажем, 100. Пусть в этом государстве больше нет жителей. Тем самым их всего 1000.

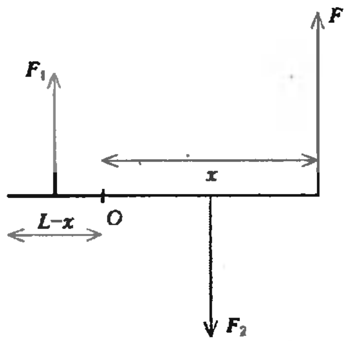
При таком расположении базовых конфигураций они не будут мешать друг другу, т.е. у каждого человека «соседями» для гвардии будут те же люди, которые получались, когда эту базовую конфигурацию рассматривали отдельно. Таким образом, в гвардию годятся все, кроме последних людей в базовых конфигурациях, а таких всего 100 человек из 1000. Одно из условий задачи выполнено.

В качестве r (радиус для освобождения от армии) пусть каждый назовет число $D/3^i$, где i – номер его базовой конфигурации. Тогда число людей среди его «соседей» (определенных через этот радиус), которые ниже него, не больше 9 – это те, кто находится с ним в одной базовой конфигурации. Число же людей, которые выше него – это все люди из базовых конфигураций с большими, чем у него, номерами. Пусть $i < 96$. Тогда это число не меньше 50, что составляет больше 80% всех «соседей». Таких людей 950, т.е. больше 90% всех жителей.

Н.Константинов

Ф1568. *Граненый карандаш массой $M = 20$ г лежит на горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения $\mu = 0{,}05$. К одному из концов прикладывают горизонтальную силу в направлении, перпендикулярном карандашу, и увеличивают эту силу, пока карандаш не начинает проскальзывать. При каком значении силы это произойдет? Какая из точек карандаша при этом не проскальзывает?*

Обозначим через O (см. рисунок) точку карандаша, которая не проскальзывает, а через F_1 и F_2 — силы



трения, действующие на каждую из частей карандаша, которые проскальзывают по-разному. Силы пропорциональны длинам соответствующих частей карандаша (ведь поверхность стола «не очень жесткая») и приложены в серединах этих частей, а направления сил противоположны друг другу. Для минимального значения силы F (при минимальном значении силы как бы еще сохраняется равновесие, но силы трения уже максимальны, еще немного — и все поедет) можно записать два уравнения равновесия — сил и моментов (моменты запишем относительно искомой непроскальзывающей точки):

$$F + F_1 - F_2 = 0,\ Fx = \frac{F_1(L-x)}{2} + \frac{F_2 x}{2},$$

где

$$F_1 = \frac{\mu Mg(L-x)}{L},\ F_2 = \frac{\mu Mgx}{L}.$$

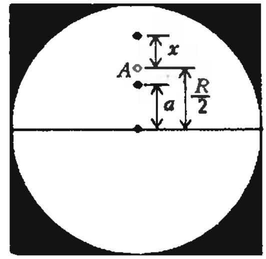
Решая уравнения, получим

$$x = \frac{L}{\sqrt{2}},\ F = \mu Mg\left(\sqrt{2}-1\right) = 0{,}004\ \text{Н}.$$

М.Ермилов

Ф1569. *Из однородного квадратного листа со стороной d вырезали круг максимального диаметра, при этом остались четыре «уголка». Где находится центр масс одного такого уголка? Центр масс полукруга радиусом R находится на расстоянии $a = 4R/(3\pi)$ от своего диаметра.*

Центр тяжести A половинки всего квадрата находится на расстоянии $R/2$ от диаметра круга (см. рисунок). Обозначим через x расстояние по вертикали от центра тяжести «уголка» до точки A. Отношение масс частей фигуры равно отношению их площадей. Тогда из пра-



вила моментов сил (для четвертинки) получаем

$$\left(R^2 - \frac{\pi R^2}{4}\right)x = \frac{\pi R^2}{4}\left(\frac{R}{2} - a\right),$$

откуда

$$x = \frac{\pi(R/2 - a)}{4-\pi} = \frac{R(\pi - 8/3)}{2(4-\pi)} = 0{,}277R.$$

Расстояние от центра тяжести уголка до вершины соответствующего прямого угла составляет примерно $0{,}316R$.

З.Рафаилов

Ф1570. *На неподвижное тонкое кольцо надета небольшая бусинка. Коэффициент трения между бусинкой и кольцом $\mu = 0{,}1$, сила тяжести отсутствует. Во сколько раз уменьшится из-за трения скорость движения бусинки за $n = 3$ оборота? Если у вас не получится точное решение, постарайтесь посчитать приближенно.*

Сила трения, которая тормозит бусинку, определяется силой нормальной реакции. В нашем случае эта сила равна силе, действующей на бусинку со стороны кольца и направленной к центру, т.е.

$$N = \frac{mv^2}{R},\ F_{\text{тр}} = \mu N = \frac{\mu m v^2}{R}.$$

За малый отрезок времени Δt скорость бусинки уменьшится на

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{F_{\text{тр}}}{m}\Delta t = \frac{\mu v^2 \Delta t}{R} = \frac{\mu v \Delta s}{R}.$$

Видно, что на заданном маленьком участке пути скорость уменьшается на определенную долю. Например, если на перемещении 1 см скорость уменьшается до 0,99 своего значения в начале этого сантиметра, то за 5 см она составит $(0{,}99)^5$ от этого значения. Воспользуемся этим для вычисления окончательной скорости — найдем такой кусочек Δs_0, на котором скорость уменьшается, скажем, до $1 - 0{,}001 = 0{,}999$ своего значения:

$$\Delta s_0 = \frac{0{,}001R}{\mu}.$$

На всем пути $s = 2\pi Rn$ таких кусочков получится $N = s/\Delta s_0 = 1000n \cdot 2\pi\mu$, тогда скорость бусинки в конце составит

$$v = v_0\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^N = v_0\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000N/1000}$$

Простое преобразование показателя степени позволяет увидеть (если кто еще не догадался!) в этом выражении знаменитое основание натуральных логарифмов — число $e = 2{,}718\ldots$ (Число 1000 достаточно большое, а если какой-нибудь математик заявит, что оно не так уж велико и есть побольше, нам никто не мешает провести рассуждение и для любого большого числа.) Тогда наша формула перепишется так:

$$v = v_0\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000N/1000} = v_0\left(\frac{1}{e}\right)^{N/1000} = v_0\left(\frac{1}{e}\right)^{n2\pi\mu} = 0{,}152v_0.$$

Следовательно, через 3 оборота скорость бусинки уменьшится в $1/0{,}152 \approx 6{,}58$ раза.

М.Ермилов

Ф1571. *Микропроцессор при работе выделяет значительное количество тепла. На практике удается ускорить работу микропроцессора за счет увеличения так называемой тактовой частоты — но при этом возрастает выделяемая мощность (очень грубо можно считать, что она пропорциональна рабочей частоте микропроцессора). Для уменьшения перегрева на корпус микропроцессора надевают металлический радиатор, имеющий большую поверхность, улучшающую теплообмен с окружающим воздухом. Температура корпуса микропроцессора, работающего в самодельной ЭВМ в обычном режиме, составляет +95 °С, температура радиатора при этом +50 °С, а температура воздуха в корпусе ЭВМ +30 °С. При помощи специальной пасты с высокой теплопроводностью удалось улучшить тепловой контакт корпуса микропроцессора с радиатором — температура микропроцессора снизилась при этом до +65 °С. Во сколько раз можно теперь повысить быстродействие микропроцессора, если предельно допустимая температура его корпуса составляет +95 °С? Температуру внутри корпуса можно считать неизменной, для оценки можно также считать, что условия теплообмена остаются прежними.*

При улучшении теплового контакта остается прежней рассеиваемая мощность — значит, температура радиатора остается равной +50 °С. При увеличении рабочей частоты в k раз во столько же раз возрастет и рассеиваемая мощность, т.е. во столько же раз возрастут разности температур между корпусом микропроцессора и радиатором и между радиатором и окружающим воздухом:

$$(95-T_x):(65-50)=(T_x-30):(50-30).$$

Отсюда находим новую температуру радиатора:

$$T_x = 67{,}1\ ^\circ\text{C}.$$

Итак,

$$k=\frac{67{,}1-30}{50-30}\approx 1{,}9.$$

Это можно было и сразу сообразить — поскольку микропроцессор отдает тепло в воздух с неизменной температурой 30 °С, его мощность возрастет во столько же раз, во сколько возрастет разность температур, т.е. в $(95-30):(65-30) = 1{,}9$ раз.

Р.Александров

Ф1572. *Порцию кислорода нагревают при постоянном давлении до тех пор, пока объем газа не возрастет в 2 раза, а затем охлаждают при получившемся объеме, пока газ не отдаст все тепло, полученное при расширении. Найдите отношение начальной и конечной температур в этом процессе.*

Для нагревания при постоянном давлении порции кислорода (это двухатомный газ) от T_0 до $2T_0$ требуется количество теплоты

$$Q = 3{,}5\nu R(2T_0 - T_0) = 3{,}5\nu RT_0.$$

Охлаждаясь при неизменном объеме от $2T_0$ до T_x, газ должен отдать такое же количество теплоты

$$Q = 2{,}5\nu R(2T_0 - T_x).$$

Таким образом,

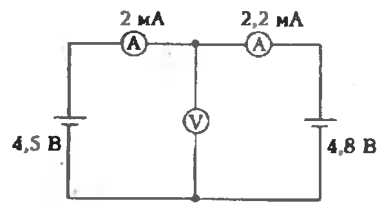
$$2{,}5\nu R(2T_0 - T_x) = 3{,}5\nu RT_0.$$

Отсюда найдем

$$T_x = T_0\left(2-\frac{3{,}5}{2{,}5}\right) = 0{,}6T_0,\ \text{и}\ \frac{T_0}{T_x}=\frac{5}{3}.$$

З.Рафаилов

Ф1573. *В схеме на рисунке миллиамперметры одинаковые, батарейки идеальные. Что может показывать вольтметр в этой схеме? Какими могут быть сопротивления миллиамперметров и вольтметра? Учтите — приборы бывают и не очень идеальными!*



Тут возможны два случая. Если сопротивление вольтметра велико, то ясно, что ток через него составляет 0,2 мА, а напряжение меньше 4,8 В и больше 4,5 В, т.е. можно записать

$$4{,}8 - U = 2{,}2r \text{ и } U - 4{,}5 = 2r$$

(ток — в миллиамперах, сопротивление миллиамперметра r — в килоомах). Эти уравнения легко решить. Получим $U = 4{,}64$ В, $r = 0{,}071$ кОм. Тогда сопротивление вольтметра

$$R = 4{,}64\ \text{В} : 0{,}2\ \text{мА} = 23{,}2\ \text{кОм}.$$

Но в том (вполне возможном) случае, когда сопротивление вольтметра мало, его напряжение меньше напряжения каждой из батарей, а ток через него течет суммарный, т.е. 4,2 мА. При этом

$$4{,}8 - U = 2{,}2r \text{ и } 4{,}5 - U = 2r.$$

Отсюда получим $U = 1{,}5$ В, $r = 1{,}5$ кОм, а сопротивление вольтметра $R = 1{,}5$ В : 4,2 мА = 0,36 кОм, что явно маловато!

А.Зильберман

(Окончание см. на с. 34)

Видимо, нет ничего, таким образом, плотного в мире.

Тит Лукреций Кар

...тот же воздух, доведенный до уровня плотности примерно вдвое большего, чем раньше, получает упругость вдвое большую, чем первоначальная.

Роберт Бойль

...определить при помощи прибора.., когда воздух бывает более густым и тяжелым и когда он более тонкий и легкий...

Эванджелиста Торричелли

...плотность Земли оказывается в 5,48 раза больше плотности воды.

Генри Кавендиш

...отношения между давлением, температурой и плотностью в идеальном газе могут быть объяснены, если предположить, что частицы движутся с постоянной скоростью по прямолинейным путям.

Джеймс Клерк Максвелл

А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМА ВАМ

ПЛОТНОСТЬ?

Да что в ней особенного, — скажет старшеклассник, — так, детское понятие. Не спешите, взгляните еще раз на эпиграфы. Вроде бы интуитивно ясная, не стоящая в первом ряду физических величин плотность всякий раз приходит ученым на помощь, когда заходит речь о серьезных вопросах: строении вещества, различии в свойствах тел, плавании и летании, тяготении... Список вопросов можно продолжить, так же как и добавить к именам упомянутых известных ученых многих пока незнакомых современников. Они исследуют микромир и устройство звезд, где приходится сталкиваться с чудовищно большими плотностями, необъятный космос и расширяющуюся Вселенную, будущее которой зависит от изменений ничтожно малой плотности материи.

Но даже не забираясь столь далеко, можно обнаружить, как многолика плотность. И действительно, помимо плотности вещества, говорят о плотности заряда, тока и энергии, кроме объемной, бывает поверхностная и погонная (линейная) плотность. Так что вокруг нас есть много любопытного, связанного с этим понятием, в чем мы вам и предлагаем еще раз убедиться.

Вопросы и задачи

1. Чем поддерживается непрерывное движение воды в системе водяного отопления?

2. Что тяжелее: ящик мелкой дроби или такой же ящик крупной дроби?

3. Выходя из последнего шлюза Панамского канала, корабли медленно выплывают в океан, не включая ходового двигателя. Какие же силы заставляют их двигаться?

4. Кусок дерева плавает в воде, погружаясь на 3/4 своего объема. Какова плотность дерева?

5. В сосуде с водой плавает брусок льда. На нем лежит деревянный шар, плотность которого меньше плотности воды. Изменится ли уровень воды в сосуде, если лед растает?

6. Посередине большого озера сделали прорубь. Толщина льда оказалась равной 10 метрам. Какой длины нужна веревка, чтобы зачерпнуть ведро воды?

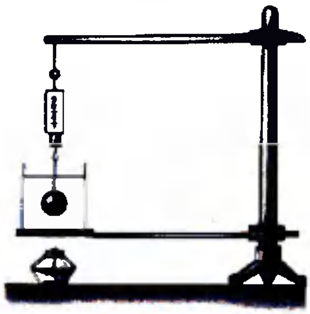
7. Как, не дожидаясь затвердевания расплавленного вещества, предсказать, что произойдет с его плотностью, если у вас есть кусочек того же вещества в твердом состоянии?

8. Какой из двух изображенных на рисунке ареометров (приборов для измерения плотности жидкости) следует выбрать, чтобы следить за изменениями плотности жидкости с большей точностью?

9. На точных аналитических весах, находящихся под стеклянным колпаком, взвешивают тело. Изменятся ли показания весов, если выкачать из-под колпака воздух?

10. К пружинным весам (см. рисунок) подвешено тело, погруженное в сосуд с водой при комнатной температуре. Как изменятся показания весов, если жидкость вместе с телом нагреть?

11. На дне сосуда с жидкостью (или газом) лежит тело, плотность которого лишь немного превышает плотность жидкости. Можно ли, увеличивая давление на жидкость, заставить тело



подняться вверх? Тело к дну сосуда не прижато.

12. Смешали две равные массы воды с температурами 1 °С и 7 °С. Изменится ли общий объем воды, когда установится тепловое равновесие? Теплообменом с окружающими телами пренебречь.

13. Внешнее давление на воду увеличивают. Что при этом нужно делать — нагревать или охлаждать воду, чтобы сохранить ее объем неизменным?

14. Внутри воды при комнатной температуре плавает полый стеклянный пузырек. В сосуд подливают воду, и пузырек поднимается вверх. Затем еще подливают воду, и пузырек тонет. Как это объяснить?

15. Начертите графики изменения плотности идеального газа в зависимости от температуры при изотермическом, изобарном и изохорном процессах.

16. На весах установили два одинаковых сосуда. Один заполнен сухим воздухом, другой – влажным при одинаковых давлениях и температурах. Какой из сосудов тяжелее?

17. Как зависит подъемная сила аэростата от температуры, при которой производится его подъем?

18. Почему заряженный проводник, покрытый пылью, быстро теряет свой заряд?

19. В раствор медного купороса опущены два цилиндрических угольных электрода, на одном из которых отлагается медь. Почему наиболее толстый слой меди получается на той части его поверхности, которая обращена к другому углю?

Микроопыт

Попробуйте определить среднюю плотность Вашего тела. Что Вам для этого потребуется?

Любопытно, что...

...знаменитый греческий врач Гиппократ отмечал в своих сочинениях, что дождевая вода легче всякой другой воды. Удивительно, что древние греки отличали дождевую воду по плотности даже от колодезной и пользовались ею для определения меры емкости.

...для определения плотности твердых веществ с XVII века использовали так называемую биланцетту, изобретение которой приписывали Галилею. Этот прибор был подобен пружинным весам, позволяющим сравнивать вес тел в воде и в воздухе.

...размышляя о существовании пустоты, Отто Герике решил на опыте проверить теорию Декарта, по которой все пространство должно быть заполнено материей. Идея первых экспериментов по получению «пустоты» привела в конечном счете к созданию воздушного насоса.

...оригинальность опытов Кавендиша по определению средней плотности Земли заключалась в том, что они проводились в лабораторных условиях по наблюдениям взаимодействия сравнительно небольших масс. До этого все оценки искомой плотности базировались на измерениях отклонения отвеса от вертикали под действием расположенной поблизости горы.

...в Италии, вблизи Неаполя, есть знаменитая «собачья пещера». В ее нижней части непрерывно выделяется углекислый газ, плотность которого в полтора раза больше плотности воздуха. Газ стелется понизу и медленно выходит из пещеры. Человек беспрепятственно может войти в пещеру, для собаки же такая прогулка кончается печально.

...плотность янтаря близка к плотности морской воды. Это приводит к тому, что янтарь десятилетиями может находиться в море как бы во взвешенном состоянии, не давя на дно и не истираясь о песок.

...загадка аномального поведения плотности воды при изменении температуры от 0 до 4 °С связана с ее квазикристаллическим строением. Повышение температуры в этом диапазоне приводит, помимо увеличения средних расстояний между атомами, к эффекту ломки структуры и более плотной упаковке самих молекул.

...наличие у веществ критической точки показывает, что между газом и жидкостью нет принципиального различия (и не только при температурах выше критической). Оказывается, изменяя температуру и давление, возможно перевести жидкость в газообразное состояние без всякого подобия кипения, непрерывным образом.

...если мысленно равномерно «размазать» вещество, сосредоточенное в звездах, по всему объему Галактики, то средняя плотность материи в ней окажется равной примерно $5 \cdot 10^{-24}$ г/см^3.

...через одну десятитысячную долю секунды после начала расширения Вселенной ее средняя плотность равнялась приблизительно 10^{14} г/см^3, т.е. плотности атомных ядер!

...нынешнее значение средней плотности Вселенной определяет сценарий ее дальнейшей эволюции. Либо процесс расширения будет продолжаться неограниченно долго, либо сменится сжатием. Поскольку материя во Вселенной, возможно, существует и в труднодоступных наблюдению формах, окончательно установить нынешнюю ее плотность не удается, и вопрос о будущем Вселенной пока открыт.

Что читать в «Кванте» о плотности

(публикации последних лет)

1. *«Ах, уж эта влажность»* — 1992, №11, с.35;
2. *«Колебания заряда и космическая оранжерея»* — 1994, №5, с.43;
3. *«Замерзающая лужа»* — 1995, №4, с.46;
4. *«Новая Земля и Новое Небо»* — 1996, №1, с.2;
5. *«Метод электростатических изображений»* — 1996, №1, с.42;
6. *«Аэро- и гидростатика»* — 1996, №3, с.53.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 24)

Ф1574. ***К проводящему уединенному заряженному шару подносят небольшой незаряженный проводящий предмет. Потенциал точки, в которую помещают предмет, до его внесения составлял $\varphi = 10000$ В. После внесения потенциал шара изменился на величину $\Delta\varphi = 1$ В. Найдите силу, действующую в этот момент на шар. Размеры вносимого предмета во много раз меньше расстояния между ним и шаром.***

Суммарный заряд маленького тела (предмета) равен нулю, поэтому все возникшие на его поверхности заряды можно разбить на пары равных по величине и противоположных по знаку зарядов — диполей. Рассмотрим один такой диполь, у которого расстояние между зарядами равно a_i, причем $a_i \ll L$, где L — расстояние между предметом и шаром, а заряды составляют $-q_i$ и q_i. Этот диполь уменьшает потенциал центра шара (центр шара — удобная для расчетов точка, поскольку потенциал от собственных зарядов шара в этой точке не зависит от их распределения по поверхности шара) на

$$\Delta\varphi_i = \frac{kq_i}{L} - \frac{kq_i}{L+a_i} = \frac{kq_i a_i}{L^2}.$$

На диполь со стороны шара действует сила Кулона

$$F_i = \frac{kQq_i}{L^2} - \frac{kQq_i}{(L+a_i)^2} = \frac{2kQq_i a_i}{L^3} = \frac{2\varphi_\delta \varphi_i}{k}.$$

Суммируя силы, действующие на диполи, мы получим полную силу, действующую на предмет. Такая же по величине сила действует на шар — он притягивается к поднесенному телу. При суммировании «добавок» к потенциалу шара мы получим заданное в условии изменение потенциала $\Delta\varphi = 1$ В. В результате искомая сила будет равна

$$F = \frac{2\varphi_\delta \varphi}{k} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ Н}.$$

З.Рафаилов

Ф1575. ***Из куска тонкой проволоки, сопротивление которого R, сделано замкнутое кольцо диаметром d. Магнитное поле с индукцией B параллельно плоскости кольца. Выводы источника напряжением U_0 присоединены к двум точкам кольца. Какой может быть максимальная сила, действующая на кольцо со стороны магнитного поля?***

Понятно, что искомая сила направлена перпендикулярно плоскости кольца. Как нужно подключить к кольцу источник напряжения, чтобы сила стала наибольшей? Можно, конечно, задать произвольно точки, ориентировать получившуюся цепь под некоторым углом к магнитному полю, записать выражение для силы и начать искать условия максимума. Это прекрасный способ (может быть, немного нудный, да и времени потребуется много...), но мы пойдем другим путем, более простым, — угадаем ответ. Ясно, что нужно выбирать между двумя возможностями: либо подключить кольцо диаметрально противоположными точками и сориентировать этот диаметр перпендикулярно полю, либо взять точки как можно ближе друг к другу, чтобы получить в маленьком кусочке очень большой ток, и этот кусочек расположить перпендикулярно полю. Проведем расчет для обоих случаев и сравним ответы.

Для первого случая (подключение к концам диаметра) токи через половинки кольца составят

$$I_1 = \frac{U_0}{R/4} = \frac{4U_0}{R}.$$

Сила, действующая на произвольно взятый участок, определяется проекцией длины этого участка на диаметр, поэтому полная сила будет равна

$$F_1 = 2I_1 Bd = \frac{8U_0 Bd}{R}.$$

Для второго случая (подключение к близко расположенным точкам) сила будет полностью определяться действием поля на маленький кусочек — силы на остальную часть кольца практически будут скомпенсированы. Зададим малый угол α, под которым этот кусочек «виден» из центра круга, и выразим величину тока:

$$I_2 = \frac{U_0}{B\alpha/(2\pi)}.$$

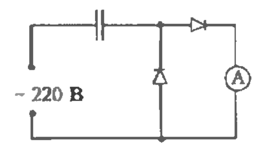
Тогда искомая сила

$$F_2 = I_2 B\alpha \frac{d}{2} = \frac{\pi U_0 Bd}{R} < F_1.$$

Итак, максимальная сила, действующая со стороны магнитного поля на кольцо, получается в первом случае.

Р.Александров

Ф1576. ***Схема, изображенная на рисунке, подключена к сети (220 В, 50 Гц). Емкость конденсатора $C = 0{,}01$ мкФ, диоды можно считать идеальными.***



Какой ток покажет миллиамперметр магнитоэлектрической системы, предназначенный для постоянного тока? До какого напряжения зарядился бы еще один конденсатор емкостью C, если бы его включили вместо миллиамперметра?

При подключении в сеть переменного напряжения конденсатор в схеме заряжается через один из диодов до максимального значения напряжения, т.е. до амплитудного, равного $U_0 = 220\sqrt{2}$ В $= 310$ В, и полностью разряжается через другой диод и сопротивление измерительного прибора. При этом каждый раз через прибор протекает заряд $q = CU_0$ и средний ток через прибор составляет $I_{ср} = qf = CU_0 f = 0{,}15$ мА. Именно это значение и покажет прибор магнитоэлектрической системы — отклонение стрелки у такого прибора определяется средним вращающим моментом, действующим на катушку с током в магнитном поле. (Прибор другой системы, например электромагнитной, у которого отклонение стрелки определяется «втягиванием» кусочка ферромагнетика в неоднородное магнитное поле, создаваемое протекающим током, и который при постоянном токе показывает то же, что и магнитоэлектрический, при изменяющемся, «импульсном» токе будет показывать совсем другое значение.)

Если вместо миллиамперметра включить конденсатор, то после некоторого переходного процесса токи в цепях протекать перестанут — конденсаторы окажутся заряженными до таких напряжений, что оба диода будут все время заперты. Для этого первый конденсатор должен иметь напряжение U_0 «плюсом» к точке соединения диодов, а второй конденсатор при этом будет заряжен до напряжения $2U_0$ (именно таким будет максимальное значение потенциала точки соединения диодов по отношению к общему проводу). Пока конденсаторы не зарядятся до таких напряжений, они будут получать дополнительные заряды в те отрезки времени, когда диоды оказываются открытыми. Итак, напряжение на втором конденсаторе составит примерно 620 В. Кстати, такая схема используется на практике, ее называют «выпрямитель с удвоением напряжения» — ясно, почему.

А.Повторов

Ф1577. ***Цепь состоит из 1000 одинаковых звеньев — каждое звено включает катушку индуктивностью $L = 1$ мГн и конденсатор емкостью $C = 0,1$ мкФ (рис.1). К последнему звену подключен резистор сопротивлением $R = 100$ Ом (числа подобраны специально!). Батарейку напряжением $U_0 = 10$ В подключают к первому звену, после чего через некоторое время ток через резистор начинает возрастать, а потом принимает установившееся значение. Через какую из катушек быстрее всего меняется ток, если с момента подключения батарейки прошло $\tau = 0,001$ с? Оцените также скорость нарастания тока через резистор в тот момент, когда ток через него станет равным половине установившегося значения. Элементы цепи считайте идеальными.***

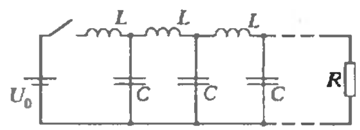


Рис.1

В момент подключения батарейки по цепи начинает бежать волна. Для оценки будем считать, что при прохождении волны через очередную ячейку ее конденсатор зарядится до U_0, а в катушке установится ток I_0. Как обычно, в волне равны энергии $CU_0^2/2$ и $LI_0^2/2$, откуда для тока получим

$$I_0 = U_0\sqrt{\frac{C}{L}} = 0{,}1\ \text{А} = \frac{U_0}{R}.$$

Видно, что сопротивление на конце цепи и в самом деле подобрано — оно «заменяет» бесконечную цепь из конденсаторов и катушек с заданными в условии задачи параметрами. Оценим грубо запаздывание $\Delta\tau$ в расчете на одно звено, т.е. время, за которое ток I_0 заряжает конденсатор от нуля до U_0:

$$\Delta\tau = \frac{CU_0}{I_0} = \sqrt{CL} = 10^{-5}\ \text{с}.$$

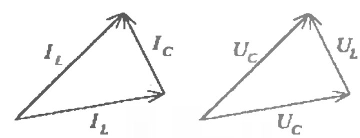
Быстрее всего меняется ток через катушку того звена, до которого добежала к данному моменту волна, — в нашем случае это ячейка номер $10^{-3}/10^{-5} = 100$. Скорость нарастания тока через резистор в тот момент, когда величина этого тока составит половину установившегося значения, может быть оценена так. Через последнюю катушку течет ток I_0, через резистор — ток $I_0/2$, а ток, заряжающий конденсатор, составляет $I = I_0 - 0{,}5I_0 = 0{,}5I_0$. Тогда скорость нарастания тока определяется ростом напряжения на конденсаторе, т.е. величиной

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{0{,}5I_0}{C} = \frac{0{,}5U_0}{RC} = 5\cdot 10^5\ \text{В/с}.$$

Оценку времени запаздывания можно провести более аккуратно, если рассмотреть в качестве источника не батарейку, а источник гармонического напряжения, — впрочем, ответ останется тем же. Для гармонического напряжения выбранной низкой частоты ω можно найти сдвиг фаз между напряжениями соседних ячеек — у нас получится величина $\varphi \sim \omega$, что и будет означать наличие некоторого запаздывания $\Delta\tau = \varphi/\omega$. Найти эти величины проще всего из векторных диаграмм напряжений и токов в соседних ячейках (рис.2).

Для упрощения рассуждений будем считать, что цепь имеет бесконечное число звеньев. Первая диаграмма построена для разветвления токов «катушка — конденсатор — катушка», амплитуды токов всех катушек в установившемся режиме (а для нашего случая синусоидального воздействия мы интересуемся именно установившимся режимом) одинаковы, ведь элементы цепи идеальные. Вторая диаграмма соответствует напряжениям катушки и двух конденсаторов. Ясно, что сдвиги фаз на диаграммах одинаковы. Обозначив фазовый сдвиг φ, запишем

Рис.2



$$0{,}5I_C = I_L\sin\frac{\varphi}{2} = I_L\frac{\varphi}{2}$$

(для низких частот токи конденсаторов малы, и угол сдвига фаз можно считать малым). Аналогично для напряжений:

$$0{,}5U_L = U_C\sin\frac{\varphi}{2} = U_C\frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда сразу находим

$$\varphi = \frac{U_L}{U_C} = \omega\sqrt{LC},\ \Delta\tau = \frac{\varphi}{\omega} = \sqrt{LC}.$$

У нас получилась одна и та же величина для всех достаточно низких частот приложенного гармонического напряжения. Теперь получим соотношения между амплитудами токов и напряжений в такой бесконечной цепи:

$$I_L = \frac{U_L}{\omega L} = \frac{\varphi U_C}{\omega L} = \frac{U_C}{\sqrt{L/C}}.$$

Напряжения всех конденсаторов одинаковы, поэтому получается, что сопротивление такой цепи чисто активное и составляет $\sqrt{L/C} = 100$ Ом. Ясно, что резистор с таким сопротивлением и в самом деле «заменяет» цепь из бесконечного числа звеньев, подключенную к концу нашей цепи из 1000 звеньев.

А.Зильберман

Задачи

1. Управдом Остап Бендер собрал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров.

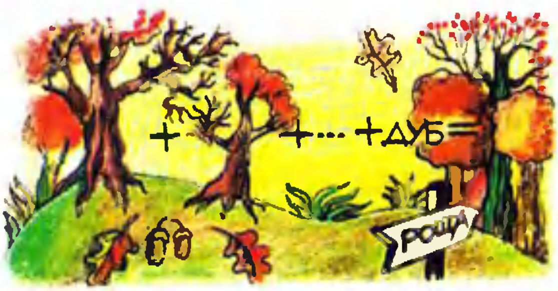
Адам Козлевич заинтересовался, почему у них в третьем подъезде надо собрать денег на 20% больше, чем во втором, хотя квартир во всех подъездах поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что за двузначные номера приходится платить вдвое, а за трехзначные — втрое больше, чем за однозначные. Сколько квартир в подъезде?

А.Шаповалов

2. В арифметическом ребусе

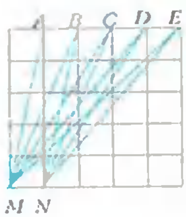
ДУБ + ДУБ + ... + ДУБ = РОЩА

замените буквы цифрами так, чтобы равенство



оказалось верным. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры. Какое наибольшее число «дубов» может быть в «роще»?

Р.Женодаров



3. Найдите сумму величин углов *MAN*, *MBN*, *MCN*, *MDN* и *MEN*, нарисованных на клетчатой бумаге так, как указано на рисунке.

В.Произволов

4. В кассе купца Калашникова впервые за долгое время появились деньги — 99 монет. Стало известно, что одна из них — фальшивая, отличающаяся по весу от настоящих, которые весят одинаково. Разгневанные работники требуют немедленной выдачи зарплаты, причем настоящими монетами. У приказчика имеются чашечные весы

без гирь. Как только становится ясно, что какие-либо монеты — настоящие, они выплачиваются очередным работникам и, естественно, в дальнейших взвешиваниях не участвуют. Любопытный приказчик хочет определить, легче фальшивая монета настоящей или тяжелее. Сможет ли он наверняка это сделать?

С.Токарев

5. Дед Щукарь пять дней подряд работал в бригаде пахарей кашеваром, и по его невнимательности каждый день в суп попадали одна или две лягушки. За первые два дня он сварил в полтора раза больше лягушек, чем за последние два дня, причем в понедельник сварил меньше лягушек, чем в пятницу. Сколько лягушек оказалось в супе во вторник?

И.Акулич

Иллюстрации И.А.Тэрябяновой

Конкурс «Математика 6—8»

Мы завершаем конкурс «Математика 6—8» 1996/97 учебного года. Первые 15 задач были опубликованы в номерах 4, 5, 6 нашего журнала за 1996 год. Решения задач из этого номера высылайте не позже 15 мая 1997 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Победители — отдельные участники и математические кружки — будут награждены призами журнала и приглашены на заключительный тур конкурса в одну из летних математических школ.

Следующий конкурс мы начнем в четвертом номере нашего журнала за 1997 год.

16. Таблица Пифагора (таблица умножения) неограниченно продолжается вправо и вниз так, что на пересече-

	1	2	3	4	5	6
1	2	4	6	8	10	12
4	3	6	9	12	15	18
10	4	8	12	16	20	24
20	5	10	15	20	25	30
35	6	12	18	24	30	36
	7	14	21	28	35	42

нии n-й строки и m-го столбца стоит число nm. Рассматриваются суммы чисел, стоящих на диагоналях таблицы (на рисунке указаны суммы на 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й диагоналях).

Докажите, что сумма чисел на 1996-й диагонали оканчивается на 1996.

А.Жуков

17. Из вершины квадрата со стороной a по его периметру с постоянной скоростью начинает двигаться точка A. Одновременно из той же вершины со вчетверо большей скоростью по периметру начинает двигаться точка B. Точка M — середина отрезка AB. Какой путь пройдет точка M к моменту, когда точка A вновь попадет в исходную вершину?

А.Савин

18. С числом разрешается проделывать следующую операцию: выбрать цифру в десятичной записи этого числа и прибавить или отнять ее от этого числа. Можно ли с помощью этой операции, примененной несколько раз, из числа 1970 получить число 97?

А.Шаповалов

19. Из шахматной доски вырезали квадрат 4×4 так, что оставшуюся часть оказалось возможным разрезать на прямоугольники 1×3. Какой квадрат вырезали?

А.Грибалко

20. В равностороннем треугольнике расположено пять попарно непересекающихся кругов радиуса 1. Докажите, что в этом треугольнике можно расположить шесть попарно непересекающихся кругов радиуса 1.

В.Произволов

ИНФОРМАЦИЯ

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП КОНКУРСА «МАТЕМАТИКА 6—8»

Идея привлечения к конкурсу «Математика 6—8» не только отдельных школьников, но и математических кружков возникла сама собой, поскольку редакция часто получала решения задач, выполненные целым кружком. Эта идея получила развитие в прошлом году, когда Ивановский энергетический университет согласился организовать очный этап конкурса для математических кружков — победителей заочного этапа.

В этом году эстафету Иванова подхватил Костромской региональный центр новых информационных технологий. Его директор С.А.Фоминых и сотрудник этого центра Р.Г.Женодаров приложили много усилий для того, чтобы вторая встреча математических кружков, проходившая на этот раз в живописном месте на берегу Волги, была максимально полезной и приятной для ее участников.

Конкурс всемерно поддержал и Московский институт развития образовательных систем. А.М.Абрамов, директор института, выделил значительное количество математической литературы для премирования победителей конкурса, сотрудники института приняли непосредственное участие в проведении всех этапов конкурса.

Итак, с 15 по 22 августа прошлого года в доме отдыха «Тихий уголок» под Костромой собрались математические кружки, победившие в конкурсе «Математика 6—8» в 1995/96 учебном году. К сожалению, из 15 команд приехала ровно половина — команды Харькова (что дало повод объявить этот турнир международным), Иванова, Чебоксар, Нижнего Тагила, Пензы, Самары, Омска и половина команды Кирова. Эта половинка была дополнена тремя школьниками из Ярославля и получила название команда ЯК-96. Кроме того, в турнире участвовали две команды из Костромы, команда Челябинска и команда Ижевска.

После математической олимпиады, в которой каждый участник решал задачи индивидуально, начались командные соревнования — математические бои. Победители отборочных боев встретились в полуфинале, а венцом соревнований был финальный бой, в котором встретились команды ЯК-96 и Челябинска. Первенство завоевала ЯК-96, третье и четвертое места разделили Харьков и Нижний Тагил.

Следует отметить высокий уровень задач турнира. Это неудивительно, поскольку их предложило жюри (состоявшее в основном из членов жюри Всероссийской математической олимпиады): С.В.Дорянинов, Р.Г.Женодаров, А.В.Жуков, О.В.Крыжановский, Л.Э.Медников, В.В.Произволов, И.С.Рубанов, А.П.Савин, С.И.Токарев, А.В.Шаповалов.

Приводим задачи олимпиады и финального боя.

Олимпиада

1. На каждом километре шоссе между селами Елкино и Палкино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано, сколько километров до Елкина, а на другой — до Палкина. Боря заметил, что на каждом столбе сумма всех цифр равна 13. Каково расстояние от Елкина до Палкина?

А.Шаповалов

2. Разрежьте прямоугольник 1×5 на 5 частей, из которых можно сложить квадрат.

Р.Садыков

3. В круге провели несколько (конечное число) различных хорд так, что каждая из них проходит через середину какой-либо другой из проведенных хорд. Докажите, что все эти хорды являются диаметрами круга.

В.Произволов

4. Числа a, b и c таковы, что графики функций $y = ax + b$, $y = bx + c$ и $y = cx + a$ имеют общую точку. Докажите, что $a = b = c$.

С.Токарев

5. См. задачу 4 на с. 36.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке N. Известно, что точки M и N различны и $MN\perp AB$. Докажите, что $\angle A = \angle B$.

Р.Женодаров

7. На квадратном клетчатом поле 10×10 расположена эскадра из 10 кораблей. Корабли — это не имеющие общих точек прямоугольники 1×2 со сторонами по линиям сетки. Докажите, что можно сделать 32 «выстрела» так, чтобы наверняка попасть в какой-нибудь корабль.

Р.Женодаров

8. Наименьшее общее кратное некоторых 50 натуральных чисел равно наименьшему общему кратному других 50 натуральных чисел. Могут ли все эти 100 чисел быть последовательными натуральными?

С.Токарев

Финальный бой

1. Двое играют в следующую игру. В начале игры имеется доска, полученная из прямоугольника $m\times n$ удалением всех внутренних клеток. За один ход можно выпилить несколько клеток, образующих прямоугольник (возможно, состоящий из одной клетки), если при этом оставшаяся часть не распадется на два куска. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?

А.Калинин

2. В треугольнике ABC одна из трисектрис угла B пересекается с одной из трисектрис угла C в ортоцентре этого треугольника. Докажите, что другие трисектрисы этих углов пересекаются в центре описанной окружности.

А.Савин

3. Из A в $Б$ с небольшими интервалами выехали семь велосипедистов. У одного из них фляжка с водой. Время от времени кто-нибудь из них обгоняет другого, и, если у одного из них есть фляжка, он обязательно передает ее другому. Какое наименьшее число обгонов (как с передачей фляжки, так и без) могло произойти, если известно, что фляжка по дороге побывала у всех и другим способом она не передавалась?

А.Шаповалов

4. Есть 28 заготовок для детского домино. У каждой заготовки одну половинку наугад раскрасили в какой-нибудь цвет, использовав всего не более семи цветов. Докажите, что можно раскрасить оставшиеся половинки так, чтобы домино можно было разложить на 7 кучек, по 4 одинаково раскрашенных домино в каждой.

А.Шаповалов

5. Можно ли из 1996 дробей $\frac{1}{1996}$, $\frac{2}{1995}$, $\frac{3}{1994}$, ..., $\frac{1995}{2}$, $\frac{1996}{1}$ выбрать три, произведение которых равно единице?

С.Токарев

6. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 20 так расставить в вершинах и серединах ребер куба, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?

С.Токарев

7. На каждой клетке шахматной доски сидело по два таракана. В некоторый момент каждый таракан переполз на соседнюю (по горизонтали или вертикали) клетку, причем тараканы, сидевшие на одной клетке, оказались на разных. Какое наибольшее число клеток могло освободиться?

Р.Женодаров

8. Двадцать пять различных натуральных чисел расставлены в таблице 5×5 так, что все суммы чисел по строкам одинаковы. Могут ли при этом быть одинаковы все произведения чисел по столбцам?

С.Токарев

Победители олимпиады

Дипломы 1 степени получили

Поярков Алексей — Рыбинск, гимназия-лицей 2, 7кл.;
Бойко Константин — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.;
Забирник Алексей — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.;
Рачков Роман — Нижний Тагил, Политехническая гимназия, 8 кл.;
Филатов Евгений Иваново, школа-лицей 22, 8 кл.

Дипломы 2 степени получили

Бакшин Алексей — Иваново, с.ш. 30, 7 кл.;
Горелов Сергей — Челябинск, ФМЛ 31, 7 кл.;
Красненко Екатерина — Омск, с.ш. 140, 7 кл.;
Алеев Михаил — Харьков, академическая гимназия, 8кл.;
Гаммель Роман — Челябинск, ФМЛ 31, 8 кл.;
Звольский Сергей — Омск, лицей 64, 8 кл.;
Лузгарев Александр — Киров, ФМЛ 35, 8 кл.

Дипломы 3 степени получили

Есина Елена — Омск, лицей 64, 8 кл.;
Осипов Андрей — Чебоксары, лицей-интернат, 8 кл.;
Шибанов Антон — Киров, ФМЛ 35, 8 кл.;
Шляхов Никита — Нижний Тагил, Политехническая гимназия, 8 кл.

Публикацию подготовил
А Савин

Физика 9 — 11

Публикуемая ниже заметка «Как бесплатно улететь на каникулы» предназначена девятиклассникам, заметка «Внутренняя энергия и теплота» — десятиклассникам. Одиннадцатиклассникам рекомендуются обе заметки.

Как бесплатно улететь на каникулы

А.Стасенко

«ОДНАЖДЫ в студеную зимнюю пору я из лесу вышел. Был сильный мороз. Гляжу...». Тут Догадливый Студент взглянул на высокое здание общежития — и его осенило. Он хотел домой на каникулы. Но авиабилеты были дороги, идти в ночные грузчики или в «комок» было неохота, а сила Знания безгранична. И осенила его Мысль. Если сделать планер и разогнать его вдоль скользкой обледеневшей крыши... А разогнать при помощи невесомого нерастяжимого троса, перекинутого через блок без трения, и при участии нескольких Преданных Друзей (рис.1). Да если при этом еще пренебречь трением о крышу и сопротивлением воздуха...

Итак, пусть масса планера M, масса Догадливого Студента и каждого его Друга m, сила натяжения троса F. Тогда можно записать уравнения второго закона Ньютона для горизонтального движения планера с пилотом (масса $M + m$) и вертикального движения люльки с N Преданными Друзьями (масса mN, а люлька пусть невесома):

$$(M+m)a_x = F_x, \quad mNa_y = mNg - F_y.$$

Но поскольку трос нерастяжим, модули ускорений его концов и ускоряющих сил одинаковы, т.е. $a_x = a_y = a$, $F_x = F_y = F$. Поэтому предыдущие равенства можно записать в виде одного уравнения (исключив F, как сказал бы математик)

$$(M+m(N+1))a = mNg. \qquad (1)$$

Смысл этого уравнения очевиден: справа стоит сила тяжести всех Преданных

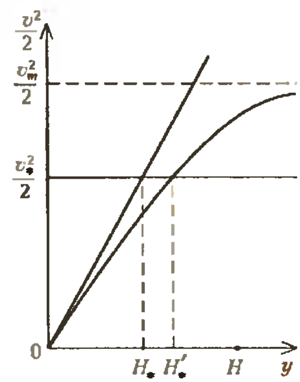


Рис. 2

Друзей, а слева — масса всей системы (включая массу Догадливого Студента и его планера), которой упомянутая сила тяжести сообщает ускорение a.

Согласно уравнению (1), ускорение постоянно, значит, скорость будет расти со временем линейно, а пройденный путь — квадратично:

$$v = at, \quad s = y = a\frac{t^2}{2},$$

где

$$a = \frac{mN}{M+m(N+1)}g.$$

Но в рассматриваемой ситуации важно не время. Важно, чтобы высота общежития H и число Преданных Друзей N были достаточны для достижения какой-то наименьшей скорости v_*, при которой можно будет взлететь. Поэтому, исключив время t, лучше записать зависимость скорости от пройденного пути в виде

$$v = \sqrt{2ay}, \text{ или } \frac{v^2}{2} = ay. \qquad (2)$$

Последнее равенство уж очень что-то напоминает. Подставив сюда a, получим

$$(M+m(N+1))\frac{v^2}{2} = (mNg)y. \qquad (3)$$

Это — закон сохранения полной механической энергии: кинетическая энергия общей массы системы $M_0 = M + m(N+1)$ приобретается за счет изменения потенциальной энергии Преданных Друзей при их опускании по вертикальной координате от 0 до $-y$ или за

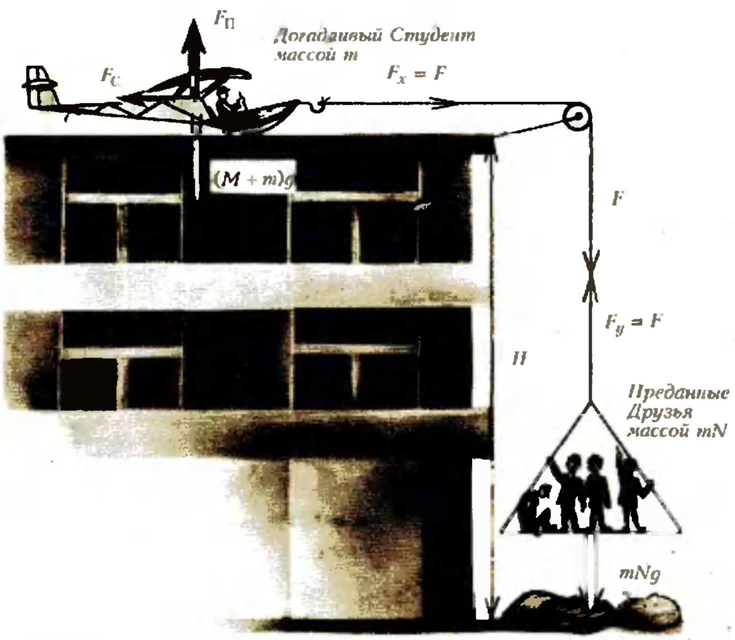


Рис. 1

счет работы постоянной силы mNg на пути $s = y$. И «энергетическое» утверждение (3) в отсутствие потерь механической энергии (что и предполагалось) адекватно «силовому» уравнению (1).

Итак, в принятых предположениях удельная кинетическая энергия системы $v^2/2$ (в расчете на единицу массы) пропорциональна расстоянию y (см. равенство (2) и рисунок 2). Но какую наименьшую скорость v_* надо набрать при $y = H$? Очевидно, такую, при которой подъемная сила планера $F_п$ станет равной силе тяжести $(M+m)g$. Из соображений размерностей, например, легко понять, что подъемная сила пропорциональна квадрату скорости, площади крыла S и плотности воздуха ρ:

$$F_п \sim \frac{v^2}{2}S\rho. \qquad (4)$$

А чтобы знак пропорциональности заменить знаком равенства, нужно поставить в эту формулу еще какой-то безразмерный множитель C, который зависит от конструкции планера, но никак не «охватывается» теорией размерности. Для его определения нужны другие теории или эксперимент. Он так и называется: коэффициент сопротивления. Таким образом, чтобы взлететь, нужно соблюсти условие

$$C\frac{v_*^2}{2}S\rho = (M+m)g. \qquad (5)$$

На рисунке 2 проведена горизонтальная прямая, соответствующая этой наименьшей скорости v_*.

И тут Догадливого Студента осенила следующая мысль: как же так — подъемная сила есть, значит, воздух есть, а сопротивления воздуха нет?! Не может такого быть. Поэтому либо в уравнение (1) нужно добавить силу сопротивления воздуха F_c, либо в уравнение (3) — ее работу. По-видимому, сила сопротивления должна зависеть от тех же величин, что и подъемная сила (см. равенство (4)), только с каким-то другим безразмерным коэффициентом сопротивления C_x. Чем меньше сопротивление при данной подъемной силе, тем более совершенен летательный аппарат. Существует понятие аэродинамического качества летательного аппарата $K = C/C_x$, с помощью которого силу сопротивления планера можно записать в виде

$$F_c = -\frac{F_п}{K} = -\frac{C}{K}\frac{v^2}{2}S\rho.$$

Добавим теперь работу этой силы в уравнение (3). Но поскольку эта сила изменяется по мере ускорения планера, уравнение нужно записывать не для конечного расстояния y, а для малых приращений Δy, внутри каждого из которых переменные силы можно считать постоянными:

$$M_0\Delta\left(\frac{v^2}{2}\right) = mNg\Delta y - \frac{C}{K}S\rho\left(\frac{v^2}{2}\right)\Delta y. \qquad (6)$$

Получилось так называемое дифференциальное уравнение относительно $v^2/2$ как функции y. Эти страшные слова не смутили Догадливого Студента. Уравнение простенькое, решать такие он умел еще в школе. Но многое можно сказать, даже не решая это уравнение.

Например, совершенно ясно, что в любой момент времени (или при любом значении y) скорость планера с учетом силы сопротивления будет меньше, чем без учета этой силы. Значит, соответствующая кривая на рисунке 2 пойдет ниже прямой ay. Далее, когда (из-за увеличения скорости) сила сопротивления станет равной постоянной силе тяжести mNg, скорость перестанет изменяться и достигнет предельного значения v_m. Положив левую часть уравнения (6) равной нулю, получим

$$\frac{v_m^2}{2} = mNg\frac{K}{CS\rho}. \qquad (7)$$

Эта горизонтальная прямая проведена штрихами на рисунке 2. Именно к ней будет асимптотически стремиться (никогда не достигая) кривая зависимости удельной кинетической энергии от расстояния. Из рисунка видно, что теперь (с учетом силы сопротивления) эта кривая пересечет прямую $v_*^2/2$, соответствующую наименьшей требуемой скорости v_*, при $H_*' > H_*$. Если вообще пересечет — для этого нужно соблюдение условия $v_m^2/v_*^2 > 1$. Тогда, разделив друг на друга равенства (7) и (5), получим

$$\frac{mNK}{M+m} > 1.$$

Видно, что друзей надо приглашать побольше (увеличивать N) или делать планер полегче (уменьшать M) и аэродинамически совершеннее (увеличивать K). Все это очевидно, но теперь можно ответить и на вопросы «сколько?».

И еще одно важное наблюдение сделаем, не решая уравнение (6), а лишь слегка преобразовав его. Используем характерную скорость v_m в качестве масштаба скоростей. Для этого уравнение (6) разделим на равенство (7) и на суммарную массу M_0:

$$\Delta\left(\frac{v}{v_m}\right)^2 = \left(1-\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\right)\left(\frac{CS\rho}{KM_0}\right)\Delta y. \qquad (8)$$

Теперь видно, что и расстояние Δy просто напрашивается отнести к некоторой характерной величине, имеющей размерность длины. Она уже приготовлена во вторых скобках правой части уравнения. Обозначим ее через h:

$$h = \frac{KM_0}{CS\rho}.$$

Пусть, например, качество планера соответствует $K \sim 10$, площадь его крыла $S \sim 10$ м^2, суммарная масса всей движущейся системы $M_0 \sim 10^3$ кг, плотность морозного воздуха $\rho \sim 1$ кг/м^3, а безразмерный коэффициент подъемной силы $C \sim 1$. Тогда $h \sim 10$ м.

Введенная нами h — не случайная комбинация букв. Она действительно характеризует то расстояние, на котором скорость «почти» достигает своего максимального значения, или, как говорят физики, релаксирует к установившемуся значению. Поэтому h можно назвать длиной релаксации.

Сказанного уже вполне достаточно. Но уж совсем Любопытный Читатель может потребовать точную зависимость скорости планера от расстояния. Пожалуйста. Для этого нужно просто решить уравнение (8), добавив к нему начальное условие: при $y = 0$ скорость планера $v = 0$. Учтем еще, что $\Delta(v/v_m)^2 = -\Delta\left(1-(v/v_m)^2\right)$, поскольку знак приращения Δ «съедает» любую постоянную, в том числе и единицу, и введем новую переменную

$$\beta = 1-\left(\frac{v}{v_m}\right)^2.$$

Тогда уравнение (8) запишется в виде

$$d\beta = -\beta\frac{dy}{h}.$$

Это уравнение широко известно в науке. Например, оно может описывать распад радиоактивных элементов (тогда y играет роль времени, а h — периода полураспада) или изменение популяции микробов в банке (тогда h отрицательно). В нашем случае решение последнего уравнения с упомянутым начальным условием имеет вид (не верите — спросите любого прохожего):

$$\left(\frac{v}{v_m}\right)^2 = 1-e^{-y/h}.$$

И теперь уж Догадливый Студент, измерив высоту общежития H, точно может сказать, сколько Преданных Друзей нужно пригласить, чтобы его планер достиг необходимой скорости...

Но где взять планер? Подсчитав все затраты и предвидя еще возражения коменданта общежития, мэрии, муниципалитета, самих Преданных Друзей и, наконец, возможную оттепель (при которой нужно учесть еще и силу трения о крышу), он понял, что дешевле купить авиабилет. Так что — летайте самолетами...

Внутренняя энергия и теплота

А.Черноуцан

ОБОБЩЕНИЕ закона сохранения энергии на тепловые процессы потребовало введения двух новых понятий. Во-первых, расширилось само понятие энергии: к знакомой вам механической энергии $E_{мех}$ добавилась *внутренняя энергия* U. Во-вторых, вы узнали, что для изменения энергии системы не обязательно совершать над ней работу — в процессе теплопередачи энергия переходит от более горячего тела к более холодному на молекулярном уровне, без какого-либо механического движения. Переданную таким образом энергию называют *количеством теплоты* (или *теплотой*) Q. Оба эти понятия входят в первый закон термодинамики:

$$Q=\Delta U+A,$$

где A — работа системы против внешних сил. Можно записать его в более общем виде, с учетом возможного изменения механической энергии:

$$Q=\Delta\left(U+E_{мех}\right)+A.$$

По-настоящему, «в полную силу», первый закон термодинамики используется в школе только при изучении процессов, происходящих с идеальным газом, — поскольку газ может существенно изменять свой объем, совершая при этом заметную работу, все три члена в первом начале термодинамики играют одинаково важную роль. Например, при изобарном процессе изменяются как температура газа, так и его объем, и поэтому нужно учитывать как изменение внутренней энергии газа, так и его работу.

В то же время при решении задач, где «участниками» являются жидкости и твердые тела, обычно обходятся формулами для количества теплоты, необходимого для нагревания (охлаждения) тела:

$$Q=cm\left(t_2-t_1\right),$$

для плавления (кристаллизации):

$$Q=\pm\lambda m$$

и для испарения (конденсации):

$$Q=\pm rm.$$

Здесь c — удельная теплоемкость, m — масса тела, t — его температура, λ — удельная теплота плавления, r — удельная теплота парообразования. Наиболее естественным и понятным образом эти формулы используются при составлении уравнения теплового баланса, описывающего теплообмен между телами замкнутой (теплоизолированной) системы. В процессе установления теплового равновесия тела системы обмениваются теплом, и формулы для количества теплоты выглядят здесь вполне уместно (хотя, как мы увидим, и здесь возникают вопросы).

Однако в задачах на превращение механической энергии в тепловую ситуация не столь очевидна. Рассмотрим простейший пример: неупругий удар двух одинаковых шаров, летящих навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. При обсуждении вопроса, насколько нагреются шары после соударения, обычно сначала говорят, что вся механическая энергия перешла в тепло, а потом применяют формулу для количества теплоты, необходимого для нагревания тела. Полученное уравнение $\left(2\frac{mv^2}{2}=c\cdot 2m\Delta t\right)$ позволяет решить задачу. Но возникает естественный вопрос: как можно применять формулы для количества теплоты, если никакого теплообмена в этой задаче нет и в помине? На самом деле слова «энергия перешла в тепло» указывают не на теплообмен, а на изменение внутренней (тепловой) энергии, а первый закон термодинамики в этом случае имеет вид $\Delta U+\Delta E_{мех}=0$. Значит, надо использовать формулы не для количества теплоты, а для изменения внутренней энергии. Как же выглядят эти формулы?

Отвлечемся пока от плавления и испарения и выясним, как зависит внутренняя энергия от температуры. Но почему только от температуры? Правильнее поставить вопрос так: как зависит внутренняя энергия тела от температуры и давления? Ведь состояние системы определяется двумя параметрами, и внутренняя энергия должна зависеть от них обоих. Лишь в случае идеального газа внутренняя энергия зависит только от одного параметра — от температуры, а для жидкостей и твердых тел это не так. Правда, поскольку в большинстве задач можно считать, что давление не меняется и равно, например, атмосферному, достаточно установить зависимость внутренней энергии от температуры при постоянном давлении. Отметим, что приведенные выше формулы для количества теплоты относятся, строго говоря, к изобарным процессам, и в справочниках указаны, например, не просто удельные теплоемкости c, а удельные теплоемкости c_p при постоянном (атмосферном) давлении.

Если же в интересующей вас задаче давление, наряду с температурой, все-таки изменяется, то полезно знать, что при изменении внешнего давления в пределах нескольких атмосфер внутренняя энергия меняется довольно слабо. Например, увеличение давления воды при 300 К на одну атмосферу приводит к уменьшению внутренней энергии на величину порядка 10 Дж/кг, а нагревание всего на 1 К — к увеличению на 4200 Дж/кг. Впрочем, мы постараемся вернуться к вопросу оценки ΔU в разделе «Физический факультатив».

Итак, к делу. Нагреем тело при постоянном давлении на Δt и запишем для этого процесса первый закон термодинамики. Количество теплоты, необходимое для нагревания, равно $Q=cm\Delta t$. Работа против внешних сил равна $A=p\Delta V$, где ΔV — увеличение объема за счет теплового расширения: $\Delta V=V\beta\Delta t=(m/\rho)\beta\Delta t$ (ρ — плотность тела, β — коэффициент теплового расширения). Тогда из первого закона термодинамики $Q=\Delta U+A$ для изменения внутренней энергии получаем выражение

$$\Delta U=\left(c-\frac{\beta}{\rho}\right)m\Delta t,$$

отличающееся от выражения для количества теплоты на ничтожно малую величину (поправка к теплоемкости проявляется только начиная с девятого знака). Поэтому для изменения внутренней энергии можно смело применять такую же формулу, как для количества теплоты, т.е. $\Delta U=cm\Delta t$. Однако надо помнить, что между этими формулами имеется одно принципиальное различие: формула для внутренней энергии применима не только при нагревании, но и при любом другом способе изменения внутренней энергии, например при неупругом ударе.

Пойдем дальше. При плавлении (кристаллизации) изменение объема может быть более значительным, чем при нагревании. Например, при замерзании воды объем увеличивается примерно на 10%, и в расчете на каждый кг воды при атмосферном давлении совершается работа порядка 10 Дж. Это ничтожно мало по сравнению с удельной теплотой плавления $\lambda = 3{,}34 \cdot 10^5$ Дж/кг, так что поправка к удельной теплоте плавления за счет работы проявляется только в пятом знаке. Опять получаем, что для изменения внутренней энергии при плавлении можно применять такую же формулу, как для количества теплоты. И, опять же, главное отличие формулы для внутренней энергии состоит в том, что она применима независимо от того, каким образом изменилась внутренняя энергия.

Остался третий процесс — испарение жидкости. Будем считать, что испарение происходит в закрытом поршнем сосуде, в котором поддерживается атмосферное давление и соответствующая этому давлению, равному давлению насыщенных паров, температура (для воды 373 К). Оценим произведенную паром работу, учитывая, что объем пара гораздо больше объема воды:

$$A = p(V_п - V_ж) \approx pV_п = \frac{m}{M}RT,$$

где M — молярная масса вещества. Изменение внутренней энергии при этом равно

$$\Delta U = \left(r - \frac{RT}{M}\right)m,$$

относительная поправка к удельной теплоте испарения составляет для воды $RT/(Mr) \approx 0{,}076$, т.е. почти 8%. Видно, что удельное изменение внутренней энергии заметно отличается от удельной теплоты испарения.

После столь многих аргументов «в защиту внутренней энергии» становится непонятным, почему же все-таки за основные приняты формулы не для ΔU, а для Q? Почему в технических справочниках приводят значения удельной теплоты испарения, а не удельных изменений внутренней энергии? Чтобы понять, в чем тут дело, обратимся к уравнению теплового баланса — одному из важных для практики применений формул термодинамики.

Как правильно записать закон сохранения энергии для теплообмена между телами теплоизолированной системы? На первый взгляд может показаться, что закон сохранения энергии должен иметь вид $\Delta U = 0$, где U — полная внутренняя энергия, т.е. $\Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots = 0$. Однако это не так. Если в систему входят тела, объем которых заметно изменяется (газы, пары), то работа системы против внешних сил не равна нулю и не равно нулю изменение полной внутренней энергии, но $\Delta U + A = 0$. Запишем первый закон термодинамики для каждого из тел, входящих в систему: $Q_1 = \Delta U_1 + A_1$, $Q_2 = \Delta U_2 + A_2$, ... и сложим получившиеся уравнения. Так как полная работа тел друг над другом равна нулю (в соответствии с третьим законом Ньютона), сумма $A_1 + A_2 + \ldots$ равна только работе против внешних сил A. Поскольку $\Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots = \Delta U$, то, с учетом уравнения $\Delta U + A = 0$, получаем, что закон сохранения энергии надо записывать в виде

$$Q_1 + Q_2 + \ldots = 0.$$

Значит, в точное уравнение теплового баланса входят именно количества теплоты, полученные телами системы от других тел, а не изменения их внутренних энергий.

Так что в справочниках действительно все в порядке. Но, усомнившись и развеяв сомнения, мы почувствовали себя гораздо лучше.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Миф о Дидоне и изопериметрическая задача

И.ШАРЫГИН

Мы смогли найти клад потому, что знали о его существовании.

Из воспоминаний кладоискателя

В римской мифологии есть легенда о Дидоне. Согласно этой легенде, Дидона была дочерью царя Тира и женой жреца Геракла Акербаса; После того как брат Дидоны Пигмалион убил ее мужа, позарившись на его богатства, Дидона была вынуждена бежать. Захватив с собой часть сокровищ мужа, она в сопровождении многочисленных спутников прибыла в Африку и купила у берберийского царя Ярба землю. По условию она могла взять столько земли, сколько покроет одна бычья шкура. Дидона разрезала эту шкуру на тонкие ремни и окружила этими ремнями изрядный кусок земли. На этом месте была основана цитадель Карфагена Бирсу. (По-гречески «бирсу» как раз и означает «шкура».)

Так гласит легенда. А вот известная головоломка.

Можно ли в листе бумаги размером с обычную страницу из тетради проделать такое отверстие, чтобы сквозь него мог свободно пройти человек?

Нетрудно увидеть сходство этой головоломки с проблемой, которую решала Дидона. Несмотря на некоторое усложнение задачи — лист не должен распадаться на части, — «метод Дидоны» вполне может быть использован при решении этой головоломки. Кстати, очень может быть, что и сама Дидона решала именно такую задачу. Просто историки, специалисты по мифологии, наконец, переводчики не слишком обращали внимание на точную постановку «задачи Дидоны». (Если вы не справились с этой головоломкой, загляните в конец журнала, там вы найдете одно из возможных решений.)

И хотя с математической точки зрения постановка задачи в головоломке является более точной, чем задача, поставленная перед Дидоной, она еще не дотягивает до уровня точности, которой должна удовлетворять настоящая «математическая задача». Вообще, проблема «постановки задачи» является главной проблемой математического моделирования, главным вопросом прикладной математики. В некотором смысле даже умение правильно поставить, сформулировать задачу важнее умения ее решить.

Но прежде чем перейти к математической части нашей статьи, упомянем еще одну задачу, которая часто встречается в фольклоре и литературе. В качестве примера возьмем притчу Л.Н.Толстого «Много ли человеку земли нужно». Не станем пересказывать ее сюжет, сформулируем лишь задачу, которую пытался решить герой притчи: обойти за день как можно больший участок земли.

Можно говорить о целом цикле математических задач, порожденных этими мифологическими и литературными историями. Вот одна из простейших.

Задача 1. *Среди треугольников, у которых задана одна из сторон и сумма двух других, найдите треугольник с наибольшей площадью.*

Решение. Пусть известная сторона равна $2a$, а сумма двух других $2b$. (Понятно, что $b > a$.) Обозначим одну из этих сторон через $b + x$, тогда вторая будет $b - x$ (рис.1). По формуле

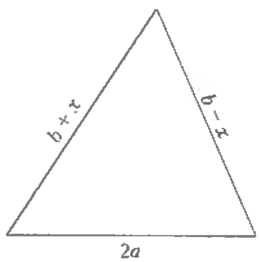


Рис. 1

Герона имеем (обозначив площадь треугольника через Δ):

$$\Delta^2 = (a+b)(b-a)(a+x)(a-x) = \left(b^2-a^2\right)\left(a^2-x^2\right).$$

Из этого равенства видно, что наибольшей площадь будет при $x = 0$, т.е. когда наш треугольник является равнобедренным.

Замечание к решению. Обратите внимание на то, что мы смогли так коротко решить задачу благодаря правильно выбранной параметризации. В частности, если задана сумма двух величин (у нас это $2b$), а нужный результат по всей видимости достигается при их равенстве, то очень часто удобно оказывается обозначить эти величины именно так: $b + x$, $b - x$.

Задача 2. *Докажите, что среди треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный.*

Очень важно то, что при доказательстве мы будем использовать факт *существования* среди треугольников с заданным периметром треугольника с наибольшей площадью.

Доказательство. Рассмотрим треугольник наибольшей площади с заданным периметром. Предположим, что этот треугольник не является равносторонним. Докажем, что тогда найдется треугольник с тем же периметром и большей площадью. Т.е. рассматриваемый треугольник не может иметь наибольшую возможную площадь.

Итак, среди сторон рассматриваемого треугольника имеется хотя бы одна

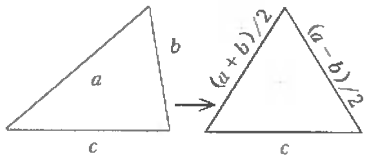


Рис. 2

пара неравных сторон (рис.2). Обозначим эти стороны через a и b, c — третья сторона ($a \neq b$). Треугольник со сторонами $(a+b)/2$, $(a-b)/2$, c, как это следует из предыдущей задачи, имеет бóльшую площадь при том же периметре. А это противоречит предположению о том, что рассматриваемый треугольник имел наибольшую площадь среди треугольников с периметром $P = a + b + c$.

Дальше можно было бы доказать, что среди всевозможных n-угольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный. Затем, увеличивая n, в пределе «добраться» до окружности. Но мы не будем идти по этому длинному пути, а перейдем сразу к основной задаче. Сначала сформулируем ее.

Задача 3. *Среди всевозможных плоских замкнутых линий заданной длины найдите ту, которая ограничивает фигуру наибольшей площади.*

Это и есть знаменитая изопериметрическая задача (от греческих слов «ísos» — равный и «perimetréō» — измеряю вокруг). С термином «периметр» вы давно знакомы, правда, относили его в основном к многоугольникам. Но это понятие, как в нашей задаче, распространяется на произвольные фигуры. Иногда эту задачу называют также «задачей Дидоны». Происхождение этого названия теперь можно уже не объяснять.

При решении мы, как и в предыдущем случае, будем опираться на факт существования среди всевозможных фигур с заданным периметром фигуры с наибольшей площадью. Иными словами, тем, что среди замкнутых линий данной длины существует линия, ограничивающая наибольшую площадь. (А как же иначе, ведь площади всевозможных фигур с данным периметром ограничены!) Мы приведем решение, найденное Якобом Штейнером (1796—1863) — выдающимся швейцарским геометром XIX столетия. (Как видите, в прошедшем году исполнилось 200 лет со дня его рождения.)

Решение. Прежде всего заметим, что фигура наибольшей площади с заданным периметром должна быть выпуклой. (Т.е. если какие-то две точки фигуры расположены внутри нее или на границе, то и весь отрезок, соединяющий эти точки, также расположен внутри или на границе фигуры.) В противном случае мы могли бы построить

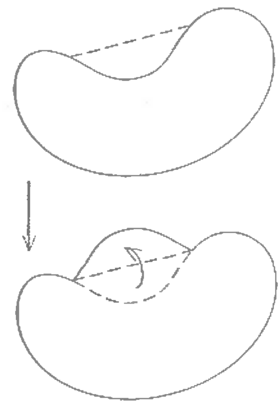


Рис. 3

линию той же длины, ограничивающую фигуру большей площади (рис.3).

Второе замечание о свойствах искомой фигуры: если прямая делит пополам периметр фигуры, то она делит

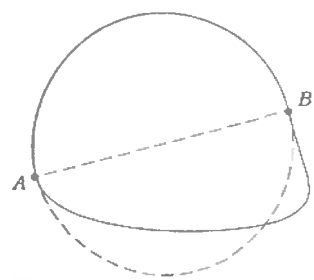


Рис. 4

пополам и площадь фигуры. В самом деле, пусть прямая AB (A и B — точки на границе, рис.4) делит пополам периметр фигуры, но при этом одна из двух частей имеет большую площадь. Заменим меньшую часть фигурой, симметричной большей относительно прямой

AB. При этом площадь фигуры увеличится, а периметр не изменится.

Пусть теперь M — любая точка на границе фигуры, отличная от A и B (рис.5). Докажем, что $\angle AMB = 90°$.

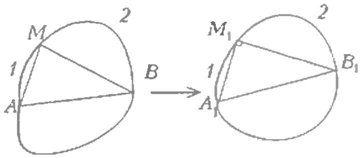


Рис. 5

Предположим, что это не так. Проведем отрезки AM, MB и AB, они разрежут нашу фигуру на четыре части. Построим новую фигуру следующим образом. Сначала строим прямоугольный треугольник $A_1M_1B_1$, в котором $A_1M_1 = AM$, $M_1B_1 = MB$, $\angle A_1M_1B_1 = 90°$. Приставим к его катетам сегменты, равные сегментам *1* и *2* (см. рис.5), после чего отразим все относительно гипотенузы A_1B_1. Получим новую фигуру с тем же периметром и большей площадью. Ведь площадь треугольника $A_1M_1B_1$ больше площади треугольника AMB. Итак, мы доказали, что если прямая AB делит пополам периметр фигуры с наибольшей площадью, M — произвольная точка на границе, отличная от A и B, то $\angle AMB = 90°$, т.е. M лежит на окружности с диаметром AB. Таким образом, решение изопериметрической задачи дает окружность.

С изопериметрической задачи по существу начинается одно из важнейших направлений современной математики — вариационное исчисление.

На этом можно было бы и закончить заметку, но мы сделаем еще один шаг (вперед? назад?). Как мы уже отмечали, наиболее естественным казался путь от многоугольников к окружности. Однако был предложен способ решения общей задачи, совсем не опирающийся на свойства экстремальных многоугольников. Более того, наоборот, некоторые свойства этих многоугольников относительно легко получаются из этого общего результата, в то время как доказательства этих свойств, не опирающиеся на общий результат, представляются весьма затруднительными. Вот пример.

Задача 4. *Рассмотрим всевозможные n-угольники с заданными сторонами. (Можно считать, что имеется некоторый многоугольник, соседние стороны которого шарнирно соединены друг с другом. Рассматриваются всевозможные многоугольники, которые получаются при деформации такого многоугольника.) Докажите, что среди таких многоугольников найдется многоугольник, около которого можно описать окружность, и именно этот многоугольник имеет наибольшую площадь среди рассматриваемых многоугольников.*

Решение. Рассмотрим достаточно большую окружность, такую, что если мы начнем от какой-то точки A этой окружности откладывать последовательно в одном направлении хорды, равные сторонам многоугольника, то сумма всех соответствующих дуг будет меньше окружности. Обозначим через B конец последней хорды. Одна из двух дуг AB не содержит построенных нами хорд (рис.6). Начнем уменьшать радиус окружности. В какой-то

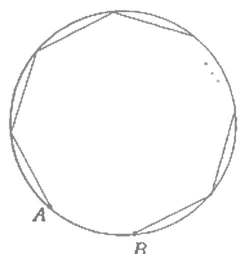


Рис. 6

момент точки A и B совпадут. При этом мы получим искомый вписанный многоугольник (рис.7,*а*). Докажем, что он имеет наибольшую площадь. Рассмотрим произвольный многоугольник с такими же сторонами. Построим на его сторонах такие же сегменты, как и на соответствующих сторонах вписанного многоугольника (рис.7,*б*). Граница этих сегментов имеет длину, равную длине описанной окружности. Значит, площадь, ограниченная дугами сегментов на рисунке 7,*б*, меньше площади круга на рисунке 7,*а*. Убирая эти сегменты, получим, что площадь вписанного многоугольника

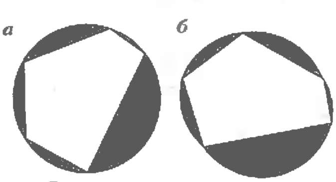


Рис. 7

(рис.7,*а*) больше площади любого другого многоугольника с такими же сторонами (рис.7,*б*).

А теперь вновь вспомним главную изопериметрическую задачу (задача 3). Сам факт существования решения задачи, факт, достаточно очевидный для неиспорченного математическими трюизмами разума, позволяет это самое решение найти. В связи с этим расскажем одну историю, относящуюся уже к современному научному фольклору.

Решение одной сложной научной проблемы было поручено группе ученых, среди которых были математик и физик. Как-то раз математик, встретив физика, радостно сообщил, что он сумел доказать теорему о существовании решения проблемы. В ответ физик заметил, что если бы он хоть на мгновение усомнился в существовании решения, то никогда бы не стал заниматься этой проблемой.

Задачи для самостоятельного решения

1. Одна сторона треугольника равна a, а противоположный угол равен α. Найдите наибольшее значение площади таких треугольников.

2. Рассмотрим всевозможные треугольники единичной площади. Найдите наименьшее значение периметров таких треугольников.

3. На дуге AB некоторой окружности найдите такие точки K и M, что площадь четырехугольника $AKMB$ достигает наибольшего значения.

4. Рассмотрим фигуру с периметром l и площадью Δ. Докажите, что $l^2 > 12{,}5\Delta$.

5. Имеется набор из отрезков. Рассмотрим всевозможные многоугольники, последовательные стороны которых равны заданным отрезкам, взятым в некотором порядке. Докажите, что наибольшее значение площади таких многоугольников не зависит от того, в каком порядке взяты отрезки.

6. Рассмотрим всевозможные n-угольники, у которых заданы $n-1$ сторона. Докажите, что наибольшее значение площади таких n-угольников достигается для такого вписанного n-угольника, у которого нефиксированная сторона является диаметром описанной окружности.

7. Найдите линию наименьшей длины, делящую пополам площадь правильного треугольника со стороной 1.

ПОПРАВКА

В статье «Поступайте в ОЛ ВЗМШ» (см. «Квант» №6 за 1996 г.) в задаче 6 вступительной работы на отделение химии допущена ошибка. Масса выделившегося в результате реакции черного осадка С должна быть 12,7 г.

Движение тел в гравитационных полях

В.МОЖАЕВ

Мы БУДЕМ рассматривать относительно слабое гравитационное взаимодействие между телами, когда эти тела покоятся или достаточно медленно движутся (по сравнению со скоростью света). В этом случае справедлив закон всемирного тяготения Ньютона. Он утверждает, что две любые материальные частицы (тела, линейные размеры которых много меньше расстояния между ними) с массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой F, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Коэффициент пропорциональности G называют гравитационной постоянной. По современным данным $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $м^3/(кг \cdot с^2)$.

В ньютоновской теории тяготения справедлив принцип суперпозиции гравитационных полей — сила тяготения, действующая на данную частицу со стороны многих других частиц, является векторной суммой сил, действующих на частицу со стороны каждой из частиц, и каждая из этих сил не зависит от действия других сил.

Из закона Ньютона следует, что гравитационное поле — потенциальное поле. При перемещении тела в таком поле по любой замкнутой траектории работа, совершенная полем, равна нулю. Из потенциальности гравитационного поля следует также связь между силой тяготения F, действующей на материальную частицу, и ее потенциальной энергией U. В случае сферически симметричного гравитационного поля эта связь имеет вид

$$F_r = -\frac{dU}{dr},$$

где F_r — проекция силы на направление радиуса-вектора $\vec{r}$.

Ниже на конкретных примерах мы рассмотрим сферически симметричные гравитационные поля и движения тел в этих полях.

Задача 1. *1) Приняв за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии бесконечность, найдите потенциальную энергию тела массой m в гравитационном поле Земли. Землю считайте однородным шаром массой $M_{\text{З}}$ и радиусом $R_{\text{З}}$. Рассмотрите случаи, когда тело находится вне и внутри Земли. 2) На какое максимальное расстояние от поверхности Земли сможет удалиться небольшое тело массой m, если ему сообщить начальную скорость, равную первой космической скорости $v_к$?*

1) Рассмотрим сначала случай, когда тело массой m находится на произвольном расстоянии r от центра Земли и $r \ge R_{\text{З}}$. В этом случае на тело действует гравитационная сила, равная $F = -GmM_{\text{З}}/r^2$ и направленная к центру Земли. Используем связь $F = -dU/dr$, где U — потенциальная энергия тела в поле Земли. Отсюда $U = -\int F dr + C_1$, где C_1 — некоторая константа, которую найдем из условия, $U(\infty) = 0$. После подстановки выражения для силы получим

$$U(r) = -G\frac{mM_{\text{З}}}{r}.$$

Очевидно, что $C_1 = 0$.

Теперь рассмотрим ситуацию при $r < R_{\text{З}}$. В этом случае $F = -GmM_{\text{З}}r/R_{\text{З}}^3$ (покажите это). Тогда $U(r) = -\int GmM_{\text{З}}r dr/R_{\text{З}}^3 + C_2$. Константа C_2 находится из граничного условия $U(R_{\text{З}}) = -GmM_{\text{З}}/R_{\text{З}}$. После подстановки получим, $C_2 = -3GmM_{\text{З}}/(2R_{\text{З}})$, следовательно,

$$U(r) = G\frac{mM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_{\text{З}}}\right)^2 - \frac{3}{2}\right).$$

Общая зависимость $U(r)$ показана на рисунке 1. Очевидно, что такая же зависимость будет иметь место не только для гравитационного поля Земли, но и для поля любого тела в виде однородного (по плотности) шара, если вместо массы Земли в полученные выражения подставить массу данного шара.

Изображенную на рисунке 1 зависимость $U(r)$ обычно называют потенциальной ямой. Это название связано с тем, что, если полная энергия тела, находящегося в таком поле, меньше нуля, то это тело оказывается как бы запертым в яме, т.е. оно не сможет уйти от Земли на бесконечность и будет совершать финитное движение. Максимально возможное удаление тела определяется границей (стенкой) ямы, при достижении которой скорость тела становится равной нулю и тело возвращается обратно.

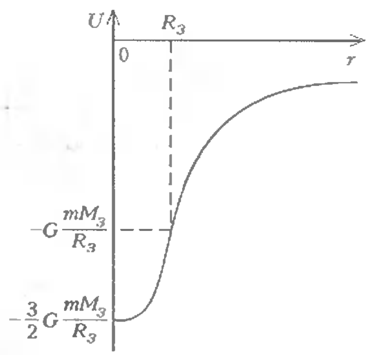


Рис. 1

2) При фиксированной величине начальной скорости v_0 тело сможет максимально удалиться от поверхности Земли, если его скорость будет направлена по радиусу. Это удаление H находим из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}} = -G\frac{mM_{\text{З}}}{R_{\text{З}} + H},$$

откуда

$$H = \frac{R_{\text{З}}}{2GM_{\text{З}}/(R_{\text{З}}v_0^2) - 1}.$$

Первая космическая скорость равна $v_к = \sqrt{GM_{\text{З}}/R_{\text{З}}}$. После подстановки получим

$$H = R_{\text{З}}.$$

Задача 2. *Вторая космическая скорость для некоторой планеты равна $v = 12$ км/с. Найдите минимальную величину второй космической скорости для такой же планеты, но с полостью, заполненной веществом с плотностью в $\beta = 2$ раза больше плотности планеты (рис.2). Отношение радиуса полости к радиусу планеты $\alpha = 1/2$.*

Тема этой статьи несколько выходит за рамки школьного курса физики. Однако рассмотренные в статье задачи неоднократно предлагались на вступительных экзаменах в вузы, например — в Московский физико-технический институт. (Прим. ред.)

Вторая космическая скорость для планеты соответствует скорости тела на поверхности планеты, при которой полная энергия тела равна нулю. Для однородной планеты массой M и радиусом R это условие имеет вид

$$\frac{v^2}{2} - G\frac{M}{R} = 0.$$

В случае неоднородной планеты плотность вещества, заполняющего полость, равна $\rho = 3\beta M/\left(4\pi R^3\right)$. Будем рассматривать эту полость как суперпозицию двух полостей, одна из которых заполнена веществом плотностью $\rho_0 = 3M/\left(4\pi R^3\right)$, а другая — плотностью $\rho_1 = 3(\beta-1)M/\left(4\pi R^3\right)$. Очевидно, что потенциальная энергия тела на поверхности такой планеты будет равна сумме потенциальных энергий однородной планеты и шара с радиусом полости и плотностью ρ_1.

Минимальная величина второй космической скорости будет в той точке поверхности планеты, где потенциальная энергия минимальна по абсолютной величине. Этой точкой будет точка A (см. рис.2). Обозначим для нее величину второй космической скорости через v_1, тогда условие равенства нулю полной энергии тела в точке A будет иметь вид

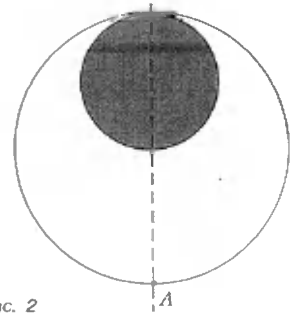


Рис. 2

$$\frac{v_1^2}{2} - G\frac{M}{R} - G\frac{\alpha^3(\beta-1)M}{(\alpha+1)R} = 0,$$

или, после подстановки численных значений α и β,

$$v_1^2 - \frac{13}{6}G\frac{M}{R} = v_1^2 - \frac{13}{12}v^2 = 0.$$

Отсюда получаем

$$v_1 = \sqrt{\frac{13}{12}}\,v \approx 12{,}5 \text{ км/с}.$$

Задача 3. *Для спутников, движущихся вокруг Земли по эллиптическим орбитам, выразите длину большой оси эллипса через полную энергию спутника E (кинетическая плюс потенциальная).*

Рассмотрим эллиптическую орбиту спутника, изображенную на рисунке 3.

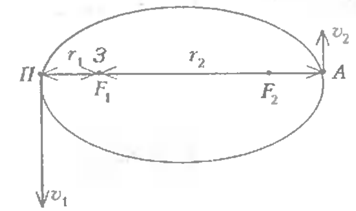


Рис. 3

Пусть в одном из фокусов эллипса находится Земля (например, в F_1). Тогда точка A (афелий) соответствует максимальному удалению спутника от Земли, а точка $П$ (перигелий) является точкой минимального удаления. Длину отрезка $ПF_1$ обозначим через r_1, а длину отрезка F_1A — через r_2. В этих обозначениях длина большой оси равна $2a = r_1 + r_2$.

Запишем полную энергию спутника для точки $П$:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GmM_З}{r_1} = E,$$

где m — масса спутника, v_1 — его скорость, а $M_З$ — масса Земли. Воспользуемся вторым законом Кеплера (законом площадей): радиус-вектор спутника в равные промежутки времени описывает равные площади. Из этого закона для точек орбиты спутника A и $П$ можно записать

$$v_1 r_1 = v_2 r_2.$$

Обозначим это произведение через L. Выражая v_1 через L и подставляя в выражение для полной энергии, получим относительно r_1 квадратное уравнение

$$r_1^2 + G\frac{mM_З}{E}r_1 - \frac{mL^2}{2E} = 0.$$

Это уравнение имеет два решения, которые соответствуют нашим двум точкам A и $П$ (поскольку коэффициент при r_1 и свободный член данного уравнения одинаковы для этих точек). Поэтому получаем

$$r_1 = -G\frac{mM_З}{2E} - \sqrt{\left(G\frac{mM_З}{2E}\right)^2 + \frac{mL^2}{2E}},$$

$$r_2 = -G\frac{mM_З}{2E} + \sqrt{\left(G\frac{mM_З}{2E}\right)^2 + \frac{mL^2}{2E}}.$$

Отсюда находим большую ось эллиптической орбиты спутника:

$$2a = r_1 + r_2 = -G\frac{mM_З}{E}.$$

Следует напомнить, что полная энергия E величина отрицательная — полная энергия при финитном движении всегда является отрицательной величиной.

Обсудим физический смысл полученного соотношения. При фиксированном значении полной энергии спутник может двигаться по большому семейству эллиптических орбит, но все эти орбиты будут иметь одну и ту же большую ось. А если мы знаем величину большой оси эллипса орбиты спутника, то мы однозначно можем вычислить полную энергию спутника. Естественно, что полученная связь имеет место не только для спутников Земли, но и для орбит планет Солнечной системы, для спутников других планет — главное, чтобы это были спутники, т.е. тела, масса которых много меньше массы тела, вокруг которого они вращаются.

Задача 4. *Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите, большая ось которой равна*

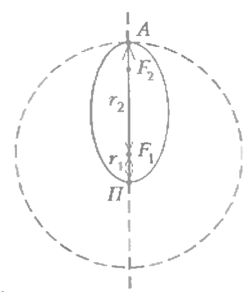


Рис. 4

2a. Центр Земли расположен в фокусе эллипса F_1 (рис.4). В тот момент, когда корабль находится в точке максимального удаления и расстояние от центра Земли до корабля равно r_2, на короткое время включается двигатель. Как надо изменить скорость корабля в этой точке, чтобы он стал двигаться по круговой орбите радиусом r_2? Считать известными ускорение свободного падения g на поверхности Земли и радиус Земли $R_З$.

Поскольку речь идет о переходе на круговую орбиту, новая скорость корабля должна быть перпендикулярна радиусу-вектору, соединяющему центр Земли и центр масс корабля, а следовательно, и вектор изменения скорости корабля должен быть направлен вдоль скорости корабля перед включением двигателя. Вычислим теперь величину и знак изменения скорости.

Величина скорости v_0, которую должен иметь корабль на круговой орбите радиусом r_2, находится из уравнения движения корабля $v_0^2/r_2 = GM_З/r_2^2$, где $M_З$ — масса Земли. Отсюда

$$v_0 = \sqrt{G\frac{M_З}{r_2}} = \sqrt{R_З g\frac{R_З}{r_2}}.$$

Скорость корабля v_A в точке A до включения двигателя можно найти из соотношения между большой осью эллиптической орбиты и полной энергией корабля (см. задачу 3). Для нашего случая эта связь имеет вид

$$\frac{mv_A^2}{2} - G\frac{mM_З}{r_2} = -G\frac{mM_З}{2a},$$

откуда

$$v_A = \sqrt{G\frac{M_З}{r_2}\left(2 - \frac{r_2}{a}\right)} = v_0\sqrt{2 - \frac{r_2}{a}}.$$

Поскольку $r_2 > a$, то $v_A < v_0$. Следовательно, для перехода на круговую орбиту необходимо увеличить скорость на величину

$$\Delta v = v_0 - v_A = \sqrt{R_З g\frac{R_З}{r_2}}\left(1 - \sqrt{2 - \frac{r_2}{a}}\right).$$

Задача 5. *Вычислите приближенно третью космическую скорость, т.е. минимальную скорость, которую надо сообщить ракете относительно Земли, чтобы ракета навсегда покинула пределы Солнечной системы (ушла в бесконечность). Влиянием планет Солнечной системы пренебречь. Орбиту Земли вокруг Солнца считать круговой с радиусом $R_{ЗС} = 1{,}5\cdot 10^8$ км и временем обращения $T = 1$ год. Первая космическая скорость $v_к = 7{,}9$ км/с.*

Разделим движение ракеты на два этапа. На первом этапе движение будем рассматривать в системе отсчета, в которой Земля неподвижна, пренебрегая при этом неоднородностью поля солнечного тяготения. Считая массу Земли $M_З$ бесконечно большой по сравнению с массой ракеты m, запишем уравнение энергии в виде

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_З} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

где v — скорость ракеты у поверхности Земли, $R_З$ — радиус Земли, а v_∞ — скорость ракеты в тот момент, когда она практически выходит из зоны действия земного тяготения. Выразим потенциальную энергию ракеты через круговую скорость спутника Земли, движущегося по круговой орбите вблизи ее поверхности:

$$G\frac{mM_З}{R_З} = mv_к^2.$$

Тогда

$$v_\infty^2 = v^2 - 2v_к^2.$$

На втором этапе, после того как ракета выйдет из зоны земного тяготения, будем рассматривать ее движение в гравитационном поле Солнца. Скорость ракеты в системе координат, связанной с Солнцем, векторно складывается из скорости $\vec{v}_\infty$ и скорости кругового движения Земли вокруг Солнца $\vec{V}$. Найдем, какую скорость (параболическую) $v_п$ должно иметь тело на земной орбите, чтобы уйти из Солнечной системы. По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv_п^2}{2} - G\frac{mM_С}{R_{ЗС}} = 0,$$

откуда

$$v_п = \sqrt{2G\frac{M_С}{R_{ЗС}}} = \sqrt{2}V.$$

Очевидно, что минимальное значение скорости ракеты v_{min} должно быть в том случае, когда ее скорость направлена вдоль скорости Земли, т.е. $v_п = v_\infty + V$. После подстановки выражений для $v_п$ и v_∞ получим

$$v_{min} = \sqrt{2v_к^2 + V^2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2}.$$

Поскольку $V = 2\pi R_{ЗС}/T \approx 30$ км/с, а $v_к = 7{,}9$ км/с, то $v_{min} = 16{,}7$ км/с.

Задача 6. *Определите, какую минимальную дополнительную скорость необходимо кратковременно сообщить спутнику Земли, движущемуся по очень высокой круговой орбите, чтобы он смог достичь Марса. Орбиты Земли и Марса считать круговыми, радиус орбиты Земли равен $R_{ЗС} = 1{,}5\cdot 10^8$ км, а радиус орбиты Марса $R_{МС}$ в 1,52 раза больше, чем у Земли.*

«Очень высокая круговая орбита» означает, что радиус орбиты спутника много больше радиуса Земли и что скоростью, которой обладает спутник относительно Земли, можно пренебречь. Но, оставаясь спутником Земли, он движется вместе с Землей относительно Солнца по круговой орбите со скоростью

$$V = \sqrt{GM_С/R_{ЗС}} \approx$$

$$\approx (2\pi R_{ЗС})/T \approx 30 \text{км/с},$$

где M — масса Солнца, T — время обращения Земли вокруг Солнца. Если мы будем добавлять спутнику скорость

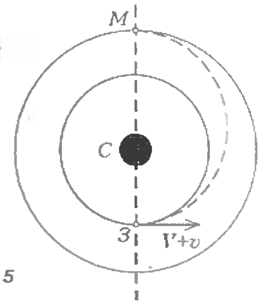


Рис. 5

вдоль направления скорости Земли, то он будет двигаться по эллиптическим орбитам, большая ось которых больше диаметра орбиты Земли и растет по мере увеличения добавочной скорости. Очевидно, что цель будет достигнута, когда точка максимального удаления спутника достигнет круговой орбиты Марса. Такая траектория (полуэллипс) показана на рисунке 5 штриховой линией, большая ось орбиты равна $2a = R_{ЗС} + R_{МС}$.

Полная энергия спутника массой m на данной орбите составляет

$$E = \frac{m(V+v)^2}{2} - G\frac{mM_С}{R_{ЗС}} =$$

$$= \frac{m(V+v)^2}{2} - mV^2 = \frac{m\left(v^2 + 2Vv - V^2\right)}{2}.$$

Используем связь между большой осью эллипса и полной энергией спутника:

$$R_{ЗС} + R_{МС} = \frac{2GM_С}{V^2 - 2Vv - v^2} =$$

$$= \frac{2V^2 R_{ЗС}}{V^2 - 2Vv - v^2}.$$

После простых преобразований, относительно добавочной скорости v получим квадратное уравнение

$$v^2 + 2Vv - \frac{(R_{МС} - R_{ЗС})V^2}{R_{МС} + R_{ЗС}} = 0,$$

которое имеет два корня:

$$v_1 = V\left(\sqrt{\frac{2R_{МС}}{R_{МС} + R_{ЗС}}} - 1\right) \approx 2{,}95 \text{ км/с},$$

$$v_2 = -V\left(1 + \sqrt{\frac{2R_{МС}}{R_{МС} + R_{ЗС}}}\right) \approx$$

$$\approx -62{,}95 \text{ км/с}.$$

Нашему случаю соответствует первый корень, а второй корень отвечает случаю, когда дополнительная скорость будет направлена в противоположную сторону.

Упражнения

1. Предположим, что от поверхности Земли до ее центра прорыта узкая шахта и некоторое тело падает из бесконечности с нулевой начальной скоростью в эту шахту. Какую скорость будет иметь это тело в тот момент, когда оно достигнет центра Земли? Землю считать однородным шаром. Считать известными радиус Земли $R_З$ и ускорение свободного падения на поверхности Земли g. *Указание*: под бесконечностью следует понимать большое удаление тела от Земли, но при этом тело и Земля как единое целое движутся вокруг Солнца.

2. Вторая космическая скорость для некоторой планеты равна $v_0 = 10$ км/с. Найдите минимальную величину второй космической скорости для такой же планеты, но с полостью (см. рис.2), заполненной веществом с плотностью в 2 раза меньше плотности планеты. Отношение радиуса полости к радиусу планеты равно 0,5.

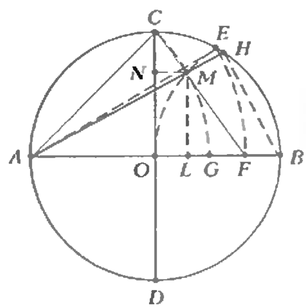
3. Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите, большая полуось которой равна a. Центр Земли расположен в фокусе эллипса F_1 (см. рис.4). В тот момент, когда корабль находится в точке $П$ (перигелий) и расстояние от центра Земли до корабля равно r_1, включается двигатель. Как надо изменить скорость корабля в этой точке, чтобы он стал двигаться по круговой орбите радиусом r_1? Считать известными ускорение свободного падения g на поверхности Земли и радиус Земли $R_З$.

4. Со спутника, движущегося по круговой орбите со скоростью v_0, стреляют в направлении, составляющем угол $\varphi = 120°$ к курсу. Какой должна быть скорость пули относительно спутника, чтобы пуля ушла на бесконечность?

НАМ ПИШУТ

И СНОВА О КВАДРАТУРЕ КРУГА ...

Квадратура круга — задача построения с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу, — около 2000 лет занимала умы математиков (и профессионалов, и любителей), пока в 1882 году немецкий математик Карл Луис Фердинанд фон Линдеман не доказал невозможность такого построения. «Квадратура круга» стала синонимом неразрешимой задачи. Однако и по сию пору находятся любители математики, пытающиеся решить эту задачу. Естественно, что точное построение не находится, но появляются новые приближенные решения.



Вот какое построение прислала нам читательница Э.И.Лютина из города Мончегорска Мурманской области.

Проведем в данном круге с радиусом R два перпендикулярных диаметра AB и CD. На дуге BC отметим точку E, находящуюся на расстоянии R от точки B. На диаметре AB отметим точку F, находящуюся от точки A на расстоянии AE, и проведем окружность с центром в точке A и радиусом AC. Обозначим через M точку пересечения этой окружности с прямой, проходящей через точки C и F. Через точки A и M проводится хорда AH, которая приближенно равна стороне квадрата, равновеликого этому кругу. Вычисления показывают, что площадь квадрата со стороной, равной AH, равна $3{,}1521773R^2$.

ЕЩЕ ОДИН «МОНСТР»

С точки зрения математики, весьма интересны фразы, которые говорят что-то сами о себе. Например, такие:

В этой фразе двадцать восемь букв.

Это предложение содержит двенадцать слов, двадцать шесть слогов и семьдесят три буквы.

Эти примеры можно встретить в статье С.Л.Табачникова «У попа была собака...» («Квант» №6 за 1989 год). В той же статье была опубликована первая рекордная фраза такого рода — огромное предложение под названием «монстр». О любом своем слове эта фраза сообщала, в каком количестве это слово встречается в ней.

Спустя некоторое время у «монстра» появился «брат», составленный И.Акуличем («Квант» №11 за 1990 год). Помимо сведений о каждом своем слове, новый «монстр» рассказывал о всех входящих в него знаках препинания.

Обе фразы производят сильное впечатление. Предлагаю теперь третью фразу — третьего «монстра». Он не повествует ни о словарном составе, ни о пунктуации, зато дает исчерпывающую информацию о собственных... буквах.

В ЭТОЙ ФРАЗЕ

ДВЕНАДЦАТЬ	В
ДВЕ	Э
СЕМНАДЦАТЬ	Т
ТРИ	О
ДВЕ	Й
ДВЕ	Ф
СЕМЬ	Р
ЧЕТЫРНАДЦАТЬ	А
ДВЕ	З
ДВЕНАДЦАТЬ	Е
ШЕСТНАДЦАТЬ	Д
СЕМЬ	Н
СЕМЬ	Ц
ТРИНАДЦАТЬ	Ь
ВОСЕМЬ	С
ШЕСТЬ	М
ПЯТЬ	И
ДВЕ	Ч
ДВЕ	Ы
ТРИ	Я
ТРИ	Ш
ДВЕ	П

И все 22 утверждения — истинны!

А.Ханян

Варианты вступительных экзаменов 1996 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{4+3\cos x-\cos 2x}=\sqrt{6}\sin x.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{|x+2|}\left(4^{-x}-1\right)<$$
$$<\log_{|x+2|}\left(2^{-x}+1\right)+\log_{|x+2|}\left(2^{-x-1}+1\right).$$

3. Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность. Прямая CD, перпендикулярная AB, пересекает окружность в точке P. Касательная к окружности, проходящая через точку P, пересекает прямую AB в точке Q. Найдите длины отрезков PA и PQ, если $AC=5$, $\angle ABC=$ $=2\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$.

4. График функции $y=f(x)$, где $f(x)=-2x^3-8ax^2-4a^2x+5$, $a<0$, и прямая l, заданная уравнением $y=$ $=4a^2x+5$, имеют ровно две общие точки.

1) Найдите a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямой l, равна $\frac{27}{2}$.

2) Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y=f(x)$ в точке с положительной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наименьшей ординатой. Найдите эту ординату.

5. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$. Острые углы D_1DA и D_1DC равны между собой, угол между ребром D_1D и плоскостью основания призмы равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}$, а $CD=$ $=5\sqrt{6}$. Все грани призмы касаются некоторой сферы. Найдите длину BC, угол между плоскостями D_1DC и ABC, а также расстояние от точки D до центра сферы.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_{49}(x-1)^2+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{7}}\left(\frac{2x+9}{7x+9}\right)=0.$$

2. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\frac{8x^2-20x+16}{4x^2-10x+7}\le a$$

является верным при всех значениях x.

3. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ биссектрисы AM и BK пересекаются в точке O. Площади треугольников BOM и COM соответственно равны 25 и 30. Найдите площадь треугольника ABC и проекцию отрезка OM на прямую BC.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\left|\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=-\sqrt{2}\cos y,\\ \cos 2y+2\sin 2x+\frac{3}{4}=2\sin^3 2x.\end{cases}$$

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6, точки M и N — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка K расположена на ребре DC так, что $DK=2KC$. Найдите:

1) расстояние от точки N до прямой AK;

2) расстояние между прямыми MN и AK;

3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника MNK.

Вариант 3

1. Окружность с центром на стороне AC равнобедренного треугольника ABC $(AB=BC)$ касается сторон AB и BC. Найдите радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна 25, а отношение высоты BD к стороне AC равно $\frac{3}{8}$.

2. Выразите $\log_{600}900$ через a и b, где $a=\log_5 2$ и $b=\log_2 3$.

3. Дана функция

$$f(x)=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^6 x+\cos^6 x}.$$

Найдите:

1) корни уравнения $f(x)=\frac{10}{7}$;

2) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+xy-2y^2+8x+10y+12=0,\\ x^2+3xy+2y^2-x+y-6=0.\end{cases}$$

5. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ACD, а вершиной конуса является точка O, лежащая на высоте BE треугольника ABC так, что $BE:OB=3$. Найдите радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой B.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. По горизонтальной поверхности стола скользит брусок массой m и сталкивается неупруго с неподвижным бруском массой $2m$, имея перед ударом скорость $v=2$ м/с. Какое расстояние пройдут слипшиеся бруски до остановки? Коэффициент трения скольжения между брусками и столом $\mu=1/18$.

2. На стене в комнате висит плоское зеркало в форме ромба с диагоналями 16 см и 12 см. Лампочка висит на расстояниях $l_1=2$ м от стены с зеркалом и $l_2=1$ м от противоположной стены. Нить накала лампочки можно считать точечным источником света.

1) На каком расстоянии от противоположной стены находится изображение нити накала лампочки в зеркале?

2) Найдите форму и размеры «зайчика», полученного от зеркала на противоположной стене.

3. Тонкая трубка, запаянная с одного конца, заполнена водой и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Открытое

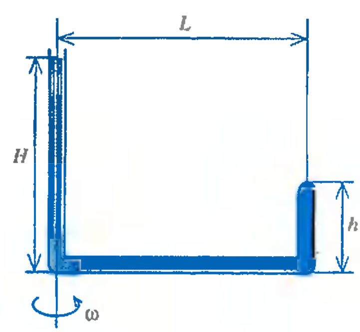


Рис. 1

и запаянное колена трубки вертикальны. Геометрические размеры установки даны на рисунке 1. Атмосферное давление p_0, плотность воды ρ. 1) Найдите давление воды в месте изгиба трубки, расположенном на оси вращения. 2) Найдите давление воды у запаянного конца трубки.

4. В сосуде находятся водяной пар и вода при температуре 100 °С. В процессе изотермического расширения вода начинает испаряться. К моменту, когда она вся испарилась, объем пара увеличился в $\beta = 10$ раз. Найдите отношение объемов пара и воды в начале опыта.

5. В колебательном контуре, состоящем из двух последовательно соединенных катушек с индуктивностями L_1 и L_2 и конденсатора емкостью C, происходят свободные незатухающие колебания, при которых амплитуда колебаний тока равна I_0 (рис.2).

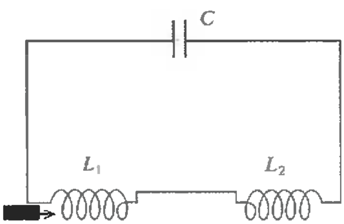


Рис. 2

Когда сила тока в первой катушке максимальна, в нее быстро (за время, малое по сравнению с периодом колебаний) вставляют сердечник, что приводит к увеличению ее индуктивности в μ раз. 1) Определите максимальное напряжение на конденсаторе до вставки сердечника. 2) Определите максимальное напряжение на конденсаторе после вставки сердечника.

Вариант 2

1. Кусок пластилина массой $m = 32$ г попадает в брусок массой $6m$, движущийся по гладкой горизонтальной поверхности стола, и прилипает к нему (рис.3). Перед ударом скорость куска пластилина равна $v = 7$ м/с и направлена под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, а скорость бруска равна $v/4$ и

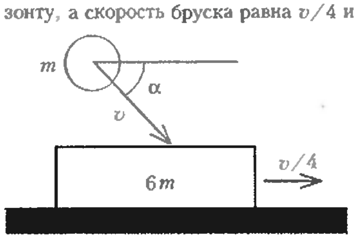


Рис. 3

лежит в одной вертикальной плоскости со скоростью пластилина.
1) Определите скорость бруска с пластилином после удара.
2) На сколько увеличилась суммарная внутренняя энергия бруска, пластилина и окружающих тел?

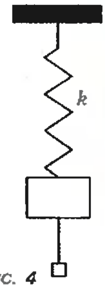


Рис. 4

2. На пружине жесткостью k висят два груза, связанные нитью (рис.4). После пережигания нити верхний груз стал колебаться с амплитудой A. Найдите массу нижнего груза.

3. Тонкая собирающая линза вставлена в отверстие радиусом $R = 2{,}5$ см в тонкой непрозрачной ширме. Точечный источник света расположен на расстоянии $d = 15$ см от линзы на ее главной оптической оси. Экран, находящийся по другую сторону ширмы, чем источник, отодвигают от линзы. В результате радиус светлого пятна на экране плавно уменьшается и на расстоянии $L = 12$ см от линзы становится равным $r = 1{,}5$ см. 1) На каком расстоянии от линзы надо поместить экран, чтобы получить четкое изображение источника? 2) Найдите фокусное расстояние линзы.

4. Цикл для ν молей гелия состоит из двух участков линейной зависимости давления p от объема V и изохоры (рис.5). В изохорическом процессе *1*–*2* газу сообщили количество теплоты Q, и его температура увеличилась в 4 раза. Температуры в состояниях *2* и *3* равны. Точки *1* и *3* на

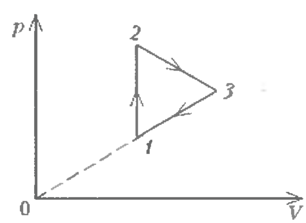


Рис. 5

диаграмме p–V лежат на прямой, проходящей через начало координат.
1) Найдите температуру в точке *1*.
2) Найдите работу газа за цикл.

5. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием d между ними помещен в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением ρ, движущейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам (рис.6). Кон-

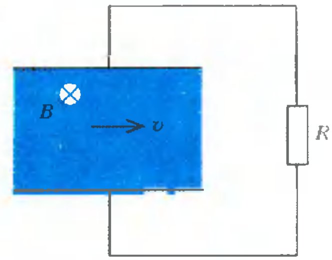


Рис. 6

денсатор находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной вдоль пластин и перпендикулярной скорости жидкости. Найдите полезную мощность, которая выделяется в виде тепла на внешней нагрузке, имеющей сопротивление R.

Вариант 3

1. На схему (рис.7) подано постоянное напряжение $U = 36$ В. В каких пределах можно изменять напряжение на

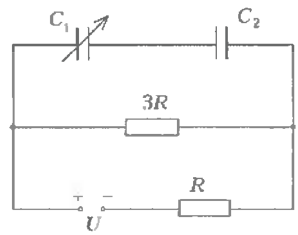


Рис. 7

конденсаторе емкостью C_1 при медленных изменениях его емкости в пределах от $C/2$ до $8C$? Емкость C_2 второго конденсатора постоянна и равна C.

2. Гелий в количестве $\nu = 2$ моля расширяется в процессе с постоянной теплоемкостью C. В результате к газу подвели количество теплоты 3000 Дж и внутренняя энергия газа уменьшилась на 2490 Дж. 1) Чему равна работа, совершенная газом?
2) Определите теплоемкость C.

3. В цилиндрический сосуд с водой (стенки сосуда вертикальны) опустили кусок льда, в который был вморожен осколок стекла. В результате уровень воды в сосуде поднялся на $h_1 = 11$ мм, а лед стал плавать, целиком погрузившись в воду. На сколько опустится уровень воды в сосуде за время таяния всего льда? Плотности стекла $\rho_с = 2{,}0$ г/см^3, воды $\rho_в = 1$ г/см^3, льда $\rho_л = 0{,}9$ г/см^3.

4. Тонкая рассеивающая линза диаметром $D = 4{,}5$ см с фокусным расстоянием $F = 100$ см разрезана по

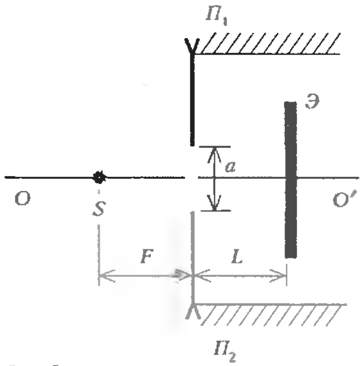


Рис. 8

диаметру, и ее половинки раздвинуты симметрично относительно главной оптической оси OO' на расстояние $a = 1$ см (рис.8). Сверху и снизу половинки линзы ограничены двумя зеркальными полуплоскостями $П_1$ и $П_2$, параллельными оси OO' и друг другу. В фокальной плоскости линзы на оси OO' расположен точечный монохроматический источник света S. 1) Найдите расстояние между изображениями источника в половинках линзы. 2) При каком минимальном расстоянии L в центре экрана Э (около оси) можно наблюдать интерференционную картину от лучей, предварительно прошедших половинки линзы?

5. Конструкция из жестко соединенных легкого стержня и небольшого

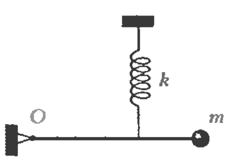


Рис. 9

по размерам шарика массой m может совершать колебания под действием пружины жесткостью k, двигаясь при вращении без трения вокруг горизонтальной оси O в вертикальной плоскости (рис.9). Пружина легкая, ее точка прикрепления к стержню делит его длину в отношении 1:2, считая от шарика. В положении равновесия стержень горизонтален, а ось пружины вертикальна. 1) Найдите удлинение пружины в положении равновесия системы. 2) Найдите период малых колебаний конструкции.

Публикацию подготовили В.Трушин, В.Чивилёв, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(досрочный экзамен)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{8x-7}-\sqrt{2x+1}=2.$$

2. Решите уравнение

$$\left|\log_2\left(2x-\frac{1}{2}\right)\right|-1=\log_2(6x-2).$$

3. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы, равная 6, составляет угол 30° с плоскостью другой боковой грани. Найдите объем призмы.

4. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Они встретились в 16 часов. Если бы первый автомобиль увеличил скорость в полтора раза, то они встретились бы в 15 часов. Если бы второй автомобиль увеличил скорость в три раза, то встреча произошла бы в 14 часов 24 минуты. В котором часу выехали автомобили?

5. Решите неравенство

$$4a\cos x+4\cos 2x+7a-16>0$$

при $a = 2$ и определите все значения a, при которых это неравенство справедливо при любых x.

Вариант 2

(основной экзамен)

1. Решите уравнение

$$2-\frac{3a-2}{(x-1)(x+a)}=\frac{3x-a}{x+a}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3^2(81x)-\log_{1/3}x=2.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{7+8\cos x}+2\sin x=0.$$

4. В треугольной пирамиде $SABC$ $AB = AC = 10$, $BC = 16$. Высота пирамиды, опущенная из вершины S, проходит через вершину B и равна 4. Найдите полную поверхность пирамиды и радиус шара, вписанного в пирамиду.

5. Решите уравнение

$$\log_{3x-1}(x+a)=\frac{1}{2}$$

при $a = -1/3$ и найдите все значения a, при которых это уравнение имеет единственное решение.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Определите время подъема камня массой $m = 1{,}0$ кг, брошенного под углом к горизонту, если начальный импульс камня, равный $p = 10\,кг\cdot м/с$, больше импульса в верхней точке траектории в $n = 2$ раза.

2. Невесомый блок радиусом $R = 10$ см подвешен при помощи не-

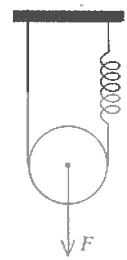


Рис. 1

весомой нити и пружины жесткостью $k = 50$ Н/м (рис.1). На какой угол повернется блок, если к его оси приложить силу $F = 10$ Н? Блок относительно нити не проскальзывает.

3. Два одинаковых шарика упруго сталкиваются друг с другом. После удара первый шарик, двигавшийся со скоростью $v_1 = 5{,}0$ м/с, начинает двигаться под углом $\alpha = 60°$ к первоначальному направлению, а второй останавливается. Определите скорость первого шарика после удара.

4. Один моль идеального газа переводят из состояния *1* в состояние *2* (рис.2). Определите, какое количество теплоты газ получает при нагревании и какое при охлаждении, если $p = 7{,}6\cdot10^5$ Па, $V = 20$ л.

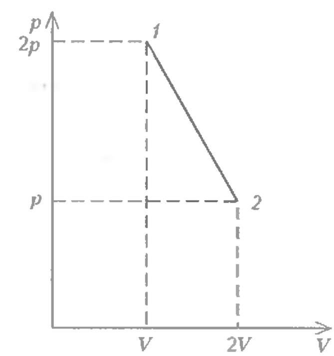


Рис. 2

5. Тепловой двигатель работает по циклу Карно. Количество теплоты, отдаваемое холодильнику, равно $Q_х = 20$ кДж. Определите, какое количество теплоты будет передаваться

холодильнику, если температура холодильника уменьшится в $n = 2{,}0$ раза.

6. Металлический шар с зарядом $+Q$ окружен сферическим слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε (рис.3). Под действием электрического поля шара диэлектрик поляризуется, и на границах диэлектрика наводятся связанные заряды. Определите величину связанного заряда на внешней поверхности диэлектрика.

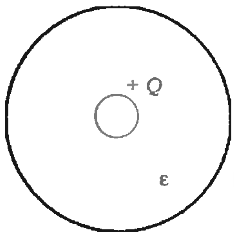


Рис. 3

7. Диполь, состоящий из двух разноименных зарядов величиной $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл и массой $m = 70 \cdot 10^{-27}$ кг каждый, расположенных на расстоянии $l = 10$ нм, удерживается в однородном электрическом поле с напряженностью $E = 30$ кВ/м перпендикулярно силовым линиям. Какую максимальную угловую скорость будет иметь диполь, если его отпустить?

8. Первичная обмотка трансформатора имеет $N_1 = 2400$ витков. Сколько витков должна иметь вторичная обмотка, чтобы при напряжении на зажимах $U = 11$ В передавать во внешнюю цепь мощность $P = 22$ Вт? Сопротивление вторичной обмотки $r = 0{,}2$ Ом, напряжение в сети $U_1 = 380$ В.

9. Луч лазера пересекает главную оптическую ось собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см на расстоянии $a = 5{,}0$ см от линзы под углом $\alpha = 10°$. Определите угол между преломленным лучом и главной оптической осью.

10. Уединенный шарик радиусом $r = 5{,}0$ мм осветили светом с длиной волны $\lambda_1 = 250$ нм. Сколько электронов покинет шарик, если его дополнительно осветить светом с длиной волны $\lambda_2 = 200$ нм? Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Публикацию подготовили Ю.Сезонов, В.Тонян

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен[1]

Вариант 1 *(математический факультет)*

1. Спустя месяц после того, как некоторая сумма была внесена в банк на срочный депозит, вклад за счет процентов увеличился на 8 тыс. рублей. Внеся дополнительно 42 тыс. рублей, вкладчик оставил свой вклад вместе с доходом еще на месяц под те же проценты. По истечении этого срока на счете вкладчика оказалось 260 тыс. рублей. Какова была первоначальная сумма вклада, если по условиям банка она должна была быть не менее 10 тыс. рублей?

2. Решите уравнение

$$\left(4\cos^4 x - \sin^2 2x\right)\sqrt{(x+\pi)\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)} = 0.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4|y| = 8, \\ x + 3y = 6. \end{cases}$$

4. Найдите площадь треугольника, основание которого равно c, а углы при основании равны 45° и 60°.

5. Решите неравенство

$$\left(\frac{35}{x} - x - 2\right)\log_{0{,}25}(2-x) \ge 0.$$

6. Найдите наибольший возможный объем цилиндра, вписанного в конус, высота которого равна 27 и радиус основания 9.

Вариант 2 *(математический факультет)*

1. Из поселка A в поселок $Б$, расстояние между которыми 22 км, отправился турист. Через час из поселка A со скоростью 6 км/ч вышел его товарищ, который, догнав туриста и передав ему забытую вещь, немедленно и с той же скоростью двинулся обратно. Турист же после встречи увеличил свою скорость на 1 км/ч и достиг поселка $Б$ в тот момент, когда его товарищ возвратился в A. Найдите первоначальную скорость туриста.

2. Решите уравнение

$$(\sin 2x + \cos 2x + 1)\sqrt{\left(\frac{\pi}{2} + x\right)(x - \pi)} = 0.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ |x| + y = 2. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC дано, что $BC = a$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Найдите длину биссектрисы AD.

5. Решите неравенство

$$\left(2^x - 5\right)\left(x - 2 - \frac{3}{x}\right) \ge 0.$$

6. Найдите наибольший объем конуса с образующей a.

Вариант 3 *(физический факультет)*

1. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Большая диагональ призмы равна d и составляет с плоскостью основания угол β. Определите объем призмы.

2. Решите уравнение

$$2\lg x - \lg 4 = -\lg\left(5 - x^2\right).$$

3. Упростите выражение

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^4 - y^4}.$$

4. Упростите выражение $\dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$.

5. Решите неравенство

$\sqrt{10 - x} < x - 4$.

Вариант 4 *(химический факультет)*

1. Велосипедист проехал из поселка в город и возвратился обратно, двигаясь с постоянной скоростью. Второй велосипедист ехал в город со скоростью, большей скорости первого на 2 км/ч, а возвращался в поселок со скоростью, меньшей скорости первого велосипедиста на 2 км/ч. Кто из них затратил на весь путь меньше времени?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\left(2\frac{1}{3} - x\right)(x+1)} \cdot \operatorname{tg}\pi x = 0.$$

3. Решите неравенство

$$(3 - x)\lg(2x - 1) \ge 0.$$

4. Постройте график функции

$$y = -|x|(x+2) + x(x+2).$$

5. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите длину стороны основания, если объем пирамиды равен 18.

6. Найдите точку максимума функции

$$f(x) = \frac{27}{x} - 4x^2 \text{ при } x < 0.$$

[1] *Во всех вариантах, содержащих по 6 задач, за любые пять верно выполненных заданий ставилась максимальная оценка.*

Вариант 5
(факультет технологии и предпринимательства)

1. Два программиста обрабатывали файл, содержащий 165 страниц информации. Второй программист работал на 4 дня больше, чем первый, но за день обрабатывал на 5 страниц меньше, чем его коллега. Сколько страниц в день обрабатывал первый программист, если всего он обработал на 45 страниц меньше, чем второй?
2. Решите уравнение
$$\left(1-2\sin\frac{\pi x}{3}\right)\sqrt{36-x^2}=0.$$
3. Решите неравенство
$$\log_9\left(8+2x-x^2\right)\le\frac{1}{2}.$$
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}|2x+y|=2,\\ x-y=-1.\end{cases}$$
5. Найдите точку минимума функции
$$f(x)=x^2+\frac{80}{x} \text{ при } x>0.$$
6. В равнобедренной трапеции основания равны a и b, боковая сторона равна c. Найдите площадь трапеции.

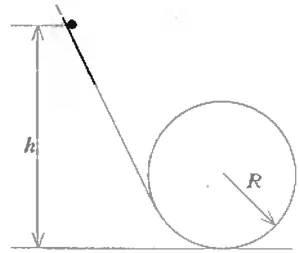
Задачи устного экзамена
(математический факультет)

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x|x+1|$ на промежутке $\left[-1\frac{1}{10};\frac{1}{2}\right]$.
2. Найдите такое число x из промежутка $1\le x\le 2$, что точка с абсциссой x и ординатой $y = \sqrt{8-x^2+2\cos 2x}$ удалена на наименьшее расстояние от начала координат.
3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2-7x+10\right| = a$ имеет ровно три решения.
4. Сколько корней имеет уравнение $-|x-2|\cdot x = a$ (a — некоторое действительное число)?
5. Найдите все целые числа, удовлетворяющие неравенству
$$\left(5\cdot 3^{\frac{1}{x^2-x}}\right)^{2-x}\ge 1.$$
6. В окружность вписан правильный n-угольник со стороной a. Найдите площадь сегмента круга, отсекаемого стороной n-угольника.
7. Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ выполняются неравенства
$f(-3)<-10$, $f(-1)>0$, $f(1)<-1$.
Определите знак коэффициента a.
8. Постройте график функции
$$y=\frac{|x+1|\cdot\sin x}{x+1}-\sin x.$$
9. Постройте график функции
$$y=\left|\frac{1}{2}-\cos x\right|+\cos x.$$
10. Постройте график функции
$$y=2\left|\log_3(2-x)\right|+\log_3(2-x)^2.$$
11. Постройте график функции
$$y=-2\cos\left(x-\left|x-\frac{\pi}{3}\right|\right).$$
12. На координатной плоскости изобразите множество точек $M(x;\,y)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений
$$\begin{cases}x^2-9y^2=0,\\ (x+3y)(x+y-1)=0.\end{cases}$$
13. На координатной плоскости изобразите множество точек $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\log_y x<1$.
14. На координатной плоскости изобразите множество точек $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x+|y-1| = |x|$.
15. На координатной плоскости изобразите множество точек $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $\left|y^2-4\right| = x$.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Проекция скорости движущегося тела изменяется по закону $v_x = 10 - 2t$. Опишите характер движения тела. Постройте график зависимости проекции скорости от времени и найдите, графически и аналитически, проекции скорости через 2 с и 8 с от начала движения. Определите координаты тела в эти моменты времени, если оно начало двигаться из начала координат.
2. Пуля массой 10 г, выпущенная под углом α к горизонту, в верхней точке имеет кинетическую энергию 450 Дж. Определите угол α, если начальная скорость пули 600 м/с.
3. В школьном опыте с «мертвой петлей» шарик массой m отпущен с высоты $h = 3R$, где R — радиус петли (см. рисунок). С какой силой шарик давит на опору в нижней и верхней точках петли?
4. Объем 120 г кислорода при изобарном нагревании увеличился в два раза. Определите работу при расширении, сообщенное количество теплоты и изменение внутренней энергии кислорода, если его началь-



ная температура была 20 °С. Универсальная газовая постоянная 8,31 Дж/(моль·К). Удельная теплоемкость кислорода при постоянном объеме 650 Дж/(кг·К).
5. На электрической плитке мощностью 600 Вт находится чайник с двумя литрами воды. Как долго была включена плитка, если вода и чайник нагрелись от 20 °С до 100 °С и 50 г воды испарилось? КПД плитки 80%, теплоемкость чайника 500 Дж/К, удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $2{,}3\cdot 10^6$ Дж/кг.
6. Заряды 50 нКл и −20 нКл расположены на расстоянии 10 см друг от друга. Какой нужно взять третий заряд и где его следует поместить, чтобы он находился в равновесии?
7. Лампа мощностью 500 Вт рассчитана на напряжение 110 В. Определите величину дополнительного сопротивления, позволяющего включить лампу в сеть с напряжением 220 В без изменения ее мощности.
8. Определите массу выделившейся на электроде меди, если затрачено 6 кВт·ч электроэнергии. Напряжение на клеммах электролитической ванны 12 В. Электрохимический эквивалент меди $3{,}3\cdot 10^{-7}$ кг/Кл.
9. Магнитный поток, пронизывающий контур проводника, равномерно изменился на 0,5 Вб так, что ЭДС индукции оказалась равной 1 В. Определите время изменения магнитного потока и силу индукционного тока, если сопротивление проводника 0,3 Ом.
10. Под каким углом должен упасть луч света на стекло, чтобы преломленный луч оказался перпендикулярным отраженному? Показатель преломления стекла 1,6.

Публикацию подготовили
Г.Брайчев, Б.Кукушкин,
Н.Пурышева, Ю Шахов

XXVII Международная физическая олимпиада

С 30 июня по 7 июля этого года в Осло (Норвегия) состоялась очередная международная олимпиада по физике, в которой приняли участие команды школьников из 55 стран мира (всего — 275 участников).

В сборную команду России, по итогам Всероссийских олимпиад 1995—1996 годов после проведения зимнего (отборочного) и летнего (учебно-тренировочного) сборов, вошли

Васильев Дмитрий — г.Киров,
Иванов Павел — г. Нижний Новгород,
Милицин Владимир — г.Москва,
Тарасов Евгений — г. Санкт-Петербург,
Фомин Евгений — г. Березники Пермской области.

Участникам были предложены 3 задачи на теоретическом туре и одна на экспериментальном. Условия задач были составлены в традиционном стиле международных олимпиад, решения задач требовали проведения сложных математических расчетов и знания многих вопросов, выходящих за рамки нашего школьного курса физики. Так, при решении теоретических задач было необходимо применение закона Стефана — Больцмана, использование понятия теплоемкости металла при постоянном давлении, понимание движения электрона в стационарных электрических и магнитных полях, знание основных формул СТО, умение рассчитать высоту приливной волны при заданных параметрах.

Российские школьники успешно выступили на олимпиаде, завоевав в сложной борьбе одну золотую медаль (Д. Васильев — 43 балла из 50), три серебряные (Е. Тарасов — 40,5 балла, В. Милицин — 39,5 балла, П. Иванов — 38 баллов) и одну бронзовую (Е. Фомин — 32,5 балла). Всего они набрали 193,5 балла из 250 возможных (113,5 балла из 150 по задачам теоретического тура и 80 баллов из 100 по задачам экспериментального тура).

Победителям олимпиады были вручены 20 золотых, 24 серебряных, 47 бронзовых медалей и 63 грамоты. Золотые медали получили школьники из 10 стран: Китая, США, Румынии, России, Ирана, Болгарии, Украины, Южной Кореи, Вьетнама и Германии.

В неофициальном командном зачете команды-участницы распределились следующим образом:

Китай	*– 228 баллов*	*– 1 место*
Румыния	*– 200 баллов*	*– 2 место*
США		
Россия	*– от 190 до 200 баллов*	*-3 место*
Иран		
Вьетнам		
Германия	*– 175 баллов*	*– 4 место*
Болгария	*–145 баллов*	*– 5 место*

Участникам олимпиады была предложена обширная культурная программа: экскурсия по Осло, посещение столицы зимней Олимпиады 1996 года — города Лиллехаммер, морская прогулка.

Предлагаем вниманию читателей условия задач теоретического тура олимпиады.

Задача 1 (пять частей этой задачи не связаны между собой).

a) Пять резисторов, сопротивлением 1 Ом каждый, соединены, как показано на рисунке 1. Сопротивление соединительных проводов (изображенных сплошными линиями) пренебрежимо мало. Определите результирующее сопротивление между точками A и B. (1 балл)

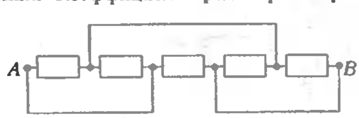


Рис. 1

b) Лыжник стартует из состояния покоя в точке A (рис.2) и скользит по склону без поворотов и притормаживаний. Коэффициент трения равен μ. Когда он останавливается в точке B, его горизонтальное смещение равно s. Какова разность высот между точками A и B? (Скорость лыжника мала настолько, что можно пренебречь дополнительным давлением на снег, возникающим вследствие кривизны траектории. Сопротивлением воздуха и зависимостью μ от скорости тоже можно пренебречь.)(1,5 балла)

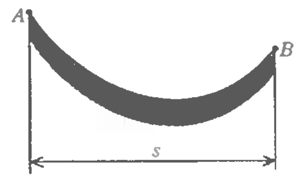


Рис. 2

c) Теплоизолированный кусок металла нагревается при атмосферном давлении электрическим током таким образом, что мощность P постоянна. Это ведет к росту температуры T металла в зависимости от времени t по закону $T(t) = T_0\left(1 + a(t - t_0)\right)^{1/4}$, где a, t_0 и T_0 — постоянные величины. Определите зависимость теплоемкости $C_p(T)$ металла от температуры в области температур, соответствующей данному опыту. (2 балла)

d) Черная плоская поверхность, находящаяся при постоянной температуре T_1, параллельна другой черной плоской поверхности, находящейся тоже при постоянной, но более низкой температуре T_2. Между поверхностями находится вакуум. Чтобы уменьшить тепловой поток излучения, между пластинами помещают тепловой экран, состоящий из двух тонких черных пластин, параллельных исходным пластинам (рис. 3). По истечении некоторого времени устанавливается стационарное состояние. Во сколько раз уменьшает-

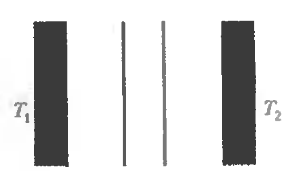


Рис. 3

ся тепловой поток за счет теплового экрана? Краевыми эффектами, обусловленными конечными размерами пластин, пренебречь. (1,5 балла)

e) Два прямых и очень длинных немагнитных проводника C_+ и C_-, изолированных друг от друга, несут одинаковые токи I, соответственно, в положительном и отрицательном направлениях оси Z. Сечения проводников (заштрихованные на рисунке 4) ограничены окружностями диаметром D, лежащими в плоскости XY, причем

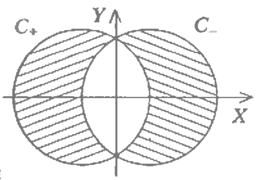


Рис. 4

расстояние между их центрами равно $D/2$. (Таким образом, площади поперечного сечения проводов равны $\left(\pi/12+\sqrt{3}/8\right)D^2$.) Ток в каждом проводнике равномерно распределен по сечению. Определите магнитное поле $B(x, y)$ в пространстве между проводниками. (4 балла)

Задача 2. В пространстве между двумя коаксиальными цилиндрическими проводниками (рис. 5) создан вакуум. Радиус внутреннего цилиндра равен a, а внутренний радиус внешнего цилиндра равен b. На внешнем цилиндре, называемом анодом, можно создать положительный потенциал U по отношению к внутреннему цилиндру. Система помещена в статическое однородное магнитное поле $\vec{B}$, параллельное оси цилиндров и направленное из плоскости рисунка вверх. Исследуется динамика электронов с массой m и зарядом $-e$. Эти электроны испускаются поверхностью внутреннего цилиндра.

a) Пусть потенциал внешнего цилиндра равен U, но $B=0$. Электрон испускается поверхностью внутреннего цилиндра с пренебрежимо малой скоростью. Определите его скорость в момент, когда он достигает анода. Дайте ответ для двух случаев: в нерелятивистском и релятивистском приближениях. (1 балл)

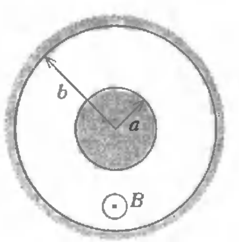


Рис. 5

В последующих разделах этой задачи используется нерелятивистское приближение.

b) Пусть теперь $U=0$, но присутствует однородное магнитное поле $\vec{B}$. Электрон стартует с начальной скоростью v_0 в радиальном направлении. При магнитном поле, превышающем критическое значение B_0, электрон никогда не достигнет анода. Изобразите схематически траекторию электрона, когда B немного больше B_0. Определите B_0. (2 балла)

В последующих разделах задачи присутствуют как потенциал U, так и однородное магнитное поле $\vec{B}$.

c) Магнитное поле создает ненулевой угловой момент L электрона относительно оси цилиндра. Напишите уравнение для скорости изменения углового момента dL/dt. Покажите, что из него вытекает, что величина $L-keBr^2$ (где k — безразмерный коэффициент, а r — расстояние от оси цилиндра) остается постоянной в процессе движения электрона. Определите значение k. (3 балла)

d) Рассмотрим электрон, испущенный с пренебрежимо малой скоростью внутренним цилиндром. Этот электрон не достигает анода и удаляется от оси цилиндра на максимальное расстояние r_m. Определите скорость электрона в точке максимального удаления в зависимости от r_m. (1 балл)

e) Мы хотим использовать магнитное поле для регулировки тока анода. При $B>B_0$ электрон, испущенный с пренебрежимо малой скоростью, не достигнет анода. Определите B_0. (1 балл)

f) Если электроны высвобождаются с поверхности внутреннего цилиндра за счет нагрева, то в общем случае электрон на этой поверхности имеет ненулевую начальную скорость. Пусть составляющая начальной скорости, параллельная $\vec{B}$, есть v_B, а составляющие, перпендикулярные $\vec{B}$, есть v_r (в радиальном направлении) и v_φ (в азимутальном направлении, т.е. перпендикулярно радиальному направлению). Определите в этой ситуации критическое магнитное поле B_0, при котором электрон не достигает анода. (2 балла)

Задача 3. Рассмотрим некоторые общие свойства океанских приливов и отливов на Земле. Упростим проблему, сделав такие предположения: Земля и Луна считаются изолированной системой; расстояние между Землей и Луной считается постоянным; считается, что Земля полностью покрыта океаном; пренебрегается динамическими эффектами, обусловленными вращением Земли вокруг своей оси; гравитационное притяжение Земли считается так, как если бы вся ее масса была сосредоточена в центре Земли. Пусть заданы следующие величины: масса Земли $M=5{,}98\cdot10^{24}$ кг, масса Луны $M_Л=7{,}3\cdot10^{22}$ кг, радиус Земли $R=6{,}37\cdot10^{6}$ м, расстояние между центрами Земли и Луны $L=3{,}84\cdot10^{8}$ м, гравитационная постоянная

$$G=6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{м}^3\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}.$$

a) Луна и Земля вращаются около общего центра масс C с угловой скоростью ω. Каково расстояние между C и центром Земли? Определите численное значение ω. (2 балла)

Будем теперь использовать вращающуюся вокруг точки C систему координат, одна из осей которой совпадает с линией, проходящей через центры Земли и Луны. В этой системе координат форма жидкой поверхности Земли является статической. В плоскости P, проходящей через C и перпендикулярной оси вращения, положение материальной точки на жидкой поверхности Земли может быть описано полярными координатами r и φ, как показано на рисунке 6 (здесь r есть расстояние от центра Земли). Мы будем изучать форму жидкой поверхности Земли в

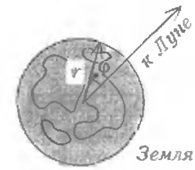


Рис. 6

плоскости P, представив ее в виде

$$r(\varphi)=R+h(\varphi).$$

b) Рассмотрим материальную точку (с массой m) на жидкой поверхности Земли (в плоскости P). В нашей системе отсчета на нее действует центробежная сила, а также силы притяжения со стороны Луны и Земли. Напишите выражение для потенциальной энергии, соответствующей этим трем силам. (3 балла)

Указание: любая сила $F(r)$, направленная радиально по отношению к некоторому началу координат, есть производная от некоторой сферически симметричной потенциальной энергии $U(r)$, взятая со знаком минус: $F(r)=-U'(r)$.

c) Выразите приближенно форму приливной волны $h(\varphi)$ через заданные величины M, $M_Л$ и т.д. Какова разница (в метрах) между уровнями прилива и отлива в данной модели?

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Коровин, О.Овчинников

Межобластная заочная физическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» (информацию об этой школе см. в «Кванте №5 за 1996 г.) совместно с Министерством образования РФ и при участии журнала «КВАНТ» впервые проводит Межобластную заочную физическую олимпиаду для школьников 7—10 классов. Срок проведения олимпиады январь—март 1997 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно в течение недели после получения этого номера журнала решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу — на отдельном листочке) и отослать их по почте в обычном почтовом конверте в Оргкомитет олимпиады по адресу: 115551 Москва, Ореховый б-р, д.11, корп.3, ВШМФ «АВАНГАРД», Оргкомитет олимпиады. В письмо вложите пустой конверт с заполненным домашним адресом для сообщения результатов олимпиады. Не забудьте сделать пометку, что информацию об олимпиаде Вы узнали из журнала «КВАНТ».

Заметим, что для участия в олимпиаде необязательно решить все задачи — достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получат призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «КВАНТ». (Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и дипломы получили все приславшие хотя бы одно правильное решение.)

Победители, приславшие наиболее интересные решения, будут награждены призами и, возможно, войдут в сборную для участия в международных встречах.

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки, получат приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 1996/97 учебном году на льготных условиях.

Внимание учителей физики 7 — 10 классов! Пригласите к участию в олимпиаде своих учеников!

Задачи олимпиады

7 класс

1. Возьмите стеклянный стакан и налейте в него до половины пепси или другой сильно газированный напиток. Затем опустите в стакан небольшую (не более 1 см в диаметре) виноградину. Понаблюдайте за тем, что будет происходить с виноградиной, и объясните увиденное.

2. Рыбак, проплывая на лодке по озеру, уронил за борт топор. Как изменился уровень воды в озере?

3. В стакан, имеющий форму усеченного конуса, расширяющегося кверху (рис.1), налита вода при 20 °С. Как изменится давление на дно стакана, если воду нагреть до 30 °С? Тепловым расширением стакана пренебречь.

4. В стакане с водой при температуре 0 °С находится железный шарик, подвешенный на нити (рис.2). Как изменится сила натяжения нити, если воду в стакане нагреть до 4 °С?

8 класс

1. Возьмите стеклянный стакан, переверните его вверх дном и подержите одну-две минуты над газовой горелкой. Затем, не переворачивая, поставьте стакан на блюдце с водой. Опишите и объясните наблюдаемое явление.

2. Всегда ли будут отталкиваться два одноименно заряженных металлических шарика? Почему?

3. На дне стакана с водой на глубине 10 см лежит деревянный кубик, ребро которого 1 см (рис.3). Плотность дерева 0,7 г/см^3, плотность воды 1 г/см^3. Нижняя грань кубика настолько плотно прилегает ко дну, что вода не подтекает под кубик. Определите величину результирующей силы, с которой вода действует на кубик. Куда направлена эта сила?

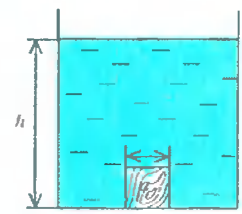


Рис. 3

4. Найдите сопротивление участка цепи AB (рис.4).

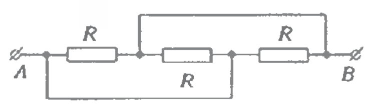


Рис. 4

5. В бутылку налиты две несмешивающиеся жидкости, плотности которых ρ_1 и ρ_2, причем $\rho_1 < \rho_2$ (рис.5). Как изменится давление на дно бутылки после перемешивания жидкостей?

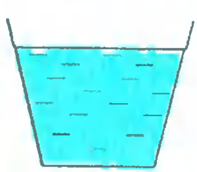


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 5

9 класс

1. Поставьте стопку из 10 монет на лист бумаги. Попробуйте осторожно вынуть бумагу из-под монет так, чтобы монеты не рассыпались. Удалось это сделать? Теперь, оставив всякую осторожность, попробуйте выдернуть бумагу из-под монет резким движением (рывком). Остались ли монеты на месте? Объясните опыт.

2. Вниз по реке плывет плот. Движется ли он относительно воды? Если да, то в какую сторону? Чем объясняется это движение?

3. При резком торможении на повороте автомобиль «заносит», т.е. разворачивает поперек дороги. Объясните это явление.

4. Колесо спустили первый раз с деревянной горки, а второй — с точно такой же ледяной горки. В каком случае скорость колеса у основания горки больше? (При движении по ледяной горке колесо не вращается.)

5. См. задачу 5 для 8 класса.

10 класс

1. Поставьте на плиту чайник с холодной водой. Через некоторое время вода в чайнике начнет шуметь. Если вы откроете крышку, то увидите, что кипение еще не началось. Еще через некоторое время шум сменится бульканьем, и вода закипит.

Почему, перед тем как закипеть, вода шумит?

2. Как, имея положительно заряженный металлический шарик:

1) зарядить два других шарика одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами (величина зарядов этих шариков необязательно должна равняться заряду исходного шарика);

2) зарядить другой проводник точно таким же по величине и знаку зарядом;

3) зарядить другой проводник зарядом, равным по величине и противоположным по знаку заряду исходного шарика?

3. Шесть батареек с ЭДС 1,5 В и внутренним сопротивлением 1 Ом каждая соединены последовательно (рис.6). Что покажет вольтметр, подсоединенный к клеммам пятой слева батарейки? Сопротивление соединительных проводов считать равным нулю, а сопротивление вольтметра — бесконечно большим.

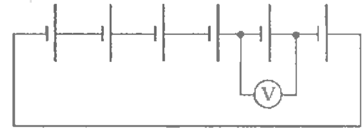


Рис. 6

4. Имеются два небольших проводящих шарика. Один из них несет заряд $q > 0$, другой не заряжен. Шарики не взаимодействуют между собой, а значит, потенциальная энергия их взаимодействия равна нулю. Соединим шарики на короткое время проволокой, тогда их заряды будут равны q_1 и q_2 $(q_1 + q_2 = q > 0)$. Шарики начнут отталкиваться, при этом потенциальная энергия их взаимодействия будет равна $W = kq_1q_2/r > 0$ (r — расстояние между шариками). Откуда появилась эта энергия?

5. См. задачу 5 для 8 класса.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Различием плотностей воды, нагретой до разных температур.

2. Объем, занятый дробью, не зависит от ее радиуса, поэтому ящики имеют одну и ту же массу.

3. Пресная вода, которой заполнен шлюз, имеет меньшую, чем соленая вода в океане, плотность. Шлюзовые ворота открываются, когда выравниваются давления по обе стороны, но при этом уровень пресной воды оказывается выше уровня соленой, и вытекающая из канала в океан вода увлекает корабль.

4. 3/4 плотности воды.

5. Не изменится.

6. В центре большого озера лед обязательно плавает. Поскольку отношение плотностей льда и воды равно 0,9, то 0,9 всей толщины льда находится в воде. Тогда расстояние от поверхности льда до воды, а значит, и длина веревки равны 1 метру.

7. Если брошенный в расплав твердый кусочек будет плавать на поверхности, плотность при затвердевании уменьшится, если потонет — увеличится.

8. Ареометр с узкой трубкой.

9. Показания весов увеличатся, если средняя плотность тела меньше плотности разновесок, уменьшатся — если больше, не изменятся — если плотности равны.

10. Если вода и тело при нагревании расширяются в равной степени, показания весов не изменятся. Если тело расширяется в меньшей степени, чем вода, показания весов увеличатся, если в большей степени — уменьшатся.

11. Если тело сжимается под давлением меньше, чем жидкость (газ), то при некотором давлении его плотность станет меньше плотности жидкости и тело всплывет.

12. Объем уменьшится.

13. Если начальная температура воды ниже 4 °С, воду следует охлаждать, если выше — нагревать.

14. Вначале подливали более холодную воду, затем — более горячую, чем в сосуде.

15. См. рис.1, где I — изотерма, II — изобара, III — изохора.

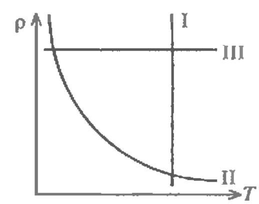


Рис. 1

16. Сосуд с сухим воздухом тяжелее.

17. Подъемная сила пропорциональна разности плотностей воздуха и газа, заполняющего аэростат. Так как плотность обратно пропорциональна температуре, подъемная сила тем больше, чем ниже температура воздуха.

18. На выступах пылинок заряды распределяются с большей поверхностной плотностью, откуда быстро «стекают».

19. В этом месте наибольшая плотность тока.

Микроопыт

Для этого надо Вашу массу, измеренную на весах, разделить на Ваш объем, измеренный по вытесненной воде, например в ванне. Сравните полученную плотность с плотностью воды.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6 — 8»

(см. «Квант» №4 за 1996 г.)

1. Ни одно из указанных чисел не делится на 4, так как в каждой сумме одно из чисел (второе) делится на 4, а предыдущее нет. Любопытно, что в последовательности 34 + 56, 78 + 910, 1112 + 1314, ... ровно одно число, а именно второй член последовательности, делится на 4.

2. Сначала заметим, что в любой пятиконечной звезде сумма углов равняется 180°. Действительно, соединив вершины M и N звезды (рис.2), получаем, что сумма углов OMN и ONM равняется сумме углов в вершинах P и Q, но сумма всех пяти

углов звезды в таком случае равняется сумме углов треугольника MCN.
Так как треугольники ACP и QCB прямоугольные, а MC и NC — их медианы, то углы ACM и CAM равны, как равны и углы BCN и CBN. Угол звезды при вершине M равен сумме углов ACM и CAM, а следовательно, углу CAB. Аналогично, угол звезды при вершине N равен углу CBA, следовательно,

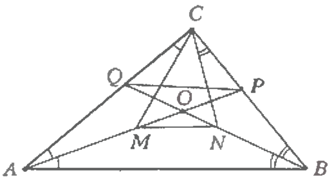


Рис. 2

сумма углов звезды при вершинах M и N равна 90°, а сумма остальных углов звезды также равняется 90°.
3. Для упрощения будем все цены выражать в центах. Если обозначить через N количество украденных журналов, а через x цену одного журнала, то ущерб составит Nx. По условию

$$Nx > 250000. \qquad (1)$$

Условие, что 6/7 украденного количества журналов, будучи проданными по цене на 60 центов большей, чем первоначальная, не компенсируют потери, запишется в виде неравенства

$$(x+60)6N/7 < Nx. \qquad (2)$$

А условие, что прибавление одного доллара компенсирует потерю, запишется в виде

$$(x+60)6N/7 + 100 > Nx. \qquad (3)$$

Из неравенства (2) получаем, что $x > 360$. Из неравенства (3) получаем

$$Nx < 360N + 700. \qquad (4)$$

Из (1) и (4)

$$250000 < 360N + 700,$$

отсюда $N \ge 693$. С другой стороны, из (4) получаем, что $x < 360 + \frac{700}{N}$. Значит, $360 < x < 360 + 700/N$, но $N \ge 693$, поэтому единственное целое x, удовлетворяющее этому неравенству, есть $x = 361$. Теперь из четвертого неравенства получаем, что $N < 700$. Заметим, что N должно делиться на 7. Единственное число в интервале $693 \le N \le 699$, делящееся на 7, это 693. Итак, было украдено 693 журнала, каждый стоимостью 3 доллара 61 цент.
4. Решение этой задачи будет опубликовано в следующем номере журнала.
5. Рассмотрим какие-нибудь три подряд стоящие клетки — прямоугольник 3×1. Нетрудно проверить, что, нажимая только эти клетки, можно погасить все светящиеся клетки этого прямоугольника.
Отсюда следует, что такое же утверждение верно и для квадрата 3×3. В самом деле, пусть A, B и C — трехклеточные столбики этого квадрата. Погасим сначала все клетки левого столбика A, потом правого столбика C и затем среднего столбика B. Заметим, что те кнопки из A и C, которые останутся светящимися, будут расположены симметрично относительно столбика B. Погасив теперь все светящиеся клетки в столбике A, а затем по той же схеме в столбике C, получим, что во всем квадратике не будет светящихся клеток. Действительно, клетки в A и C будут погашены, а клетки в B поменяют свое состояние четное число раз и поэтому также окажутся погашенными.
Такая процедура позволит погасить все клетки в прямоугольнике 3×7. Для этого в нем следует выделить три квадрата 3×3 — один в центре и два по краям — и последовательно гасить в них клетки. А из этого утверждения аналогично выводится утверждение и для всего квадрата 7×7.

МИФ О ДИДОНЕ И ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Отверстие на листе можно проделать, например, так, как показано на рисунке 3.

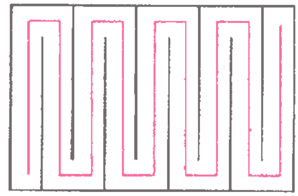


Рис. 3

1. $\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине, равным α.
2. $6/\sqrt[4]{3}$. Наименьший периметр имеет правильный треугольник площади 1.
3. Докажите, что точки K и M должны делить дугу на три равные части. **4.** Достаточно проверить это неравенство для круга. **5.** Рассмотрим многоугольник, последовательные стороны которого равны заданным отрезкам. (Как мы знаем из задачи 4 статьи, именно для такого многоугольника достигает наибольшего значения площадь.) Поменяем в нем две соседние стороны. Многоугольник останется вписанным, его площадь не изменится, но порядок следования сторон изменится. Так, меняя попарно соседние стороны, мы будем получать вписанные многоугольники с теми же сторонами, следующими в любом порядке. Все они имеют равные площади. **6.** Возьмем некоторый многоугольник заданного вида и пристроим к нему многоугольник, симметричный относительно изменяющейся стороны. Получим многоугольник с заданными сторонами и в два раза большей площадью. Применим к нему утверждение задачи 4. **7.** Отражая симметрично треугольник относительно соответствующих сторон, получим шестиугольник, внутри которого имеется замкнутая линия, ограничивающая фигуру с площадью, равной половине площади шестиугольника. Длина линии будет наименьшей, если эта линия — окружность.

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

1. $v = \sqrt{3R_З g}$.
2. $v = \sqrt{7/8}\,v_0 \approx 9{,}35$ км/с.
3. $\Delta v = -\sqrt{R_З g R_З / r_1}\left(\sqrt{2 - r_1/a} - 1\right)$.
4. $v = \left(1+\sqrt{5}\right)v_0/2$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Математика

Вариант 1

1. $\pi + 2\pi n$, $\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
2. $(-3;-2)\cup(-1;0)$. **3.** $PA = \sqrt{\frac{15}{2}}$, $PQ = 6$. *Указание.* Пусть K — середина AC, M — точка пересечения AB и PC (рис.4), $\angle ABK = \angle CBK = \beta$, где $\beta = \arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$. Тогда $\angle ABC = \angle APC = 2\beta$, $\angle APQ = \angle ACP = \beta$, $\angle PAQ = 2\beta + \frac{\pi}{2}$. Поэтому $\angle AQP = \frac{\pi}{2} - 3\beta$. Применяя теорему синусов к треугольникам APC и APQ, находим требуемое.
4. $a = -\frac{3}{2}$, $b_{min} = b(2) = -11$. *Решение.* 1) Так как уравнение $2x^3 \quad 8ax^2 \quad 4a^2x + 5 = 4a^2x + 5$, равносильное уравнению $x(x+2a)^2 = 0$, имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = -2a$, то точки $A(0;5)$ и $B(2a;5-8a^3)$ являются общими точками графика функции

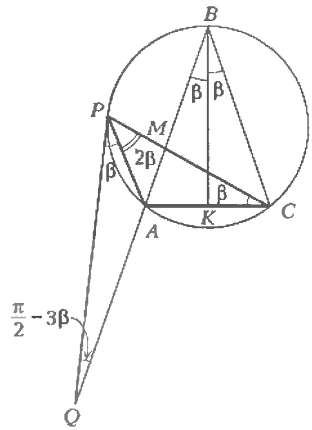


Рис. 4

$y = f(x)$ и прямой l, заданной уравнением $y = g(x)$, где $g(x) = 4a^2x + 5$.

Площадь S рассматриваемой фигуры определяется формулой

$$S = \left|\int_0^{-2a}(g(x)-f(x))dx\right| = \left|\int_0^{-2a}(2x^3+8ax^2+8a^2x)dx\right| = \frac{8a^4}{3}.$$

По условию $S = \frac{27}{2}$ и поэтому $a = -\frac{3}{2}$, так как $a < 0$, а $f(x) = -2x^3+6x^2-9x+5$.

2) Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, задаваемая уравнением $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, пересекает ось Oy в точке с ординатой $b(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$, и мы должны найти наименьшее значение $b_{\min}$ функции $b(x) = f(x) - f'(x)x$, что нетрудно сделать.

5. $BC = 5\sqrt{6}$, угол между плоскостями D_1DC и ABC равен $\arccos\frac{1}{5}$, расстояние от точки D до центра сферы равно 12.

Указание. Пусть $\angle D_1DA = \angle D_1DC = \alpha$, где α — острый угол (рис.5). Двугранные углы при ребрах DA и DC равны между

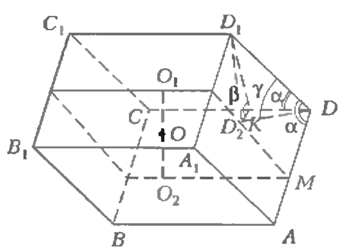


Рис. 5

собой и являются острыми (каждый из этих углов обозначим β).

Пусть O — центр вписанной в призму сферы, O_1 и O_2 — проекции точки O на грани $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$. Тогда $OO_1 = OO_2 = R$, где R — радиус сферы.

Сечения призмы плоскостями, проходящими через O_1O_2 и перпендикулярными ребрам AD и DC, являются ромбами с острым углом β, описанными около окружности радиуса R, а из равенства ромбов следует, что $ABCD$ — квадрат.

Пусть D_2 — проекция точки D_1 на плоскость $ABCD$, тогда $D_1D_2 = 2R$. Проведем через D_1D_2 плоскость, перпендикулярную DC и пересекающую DC в точке K. Тогда D_1D_2K, D_1D_2D и D_1DK — прямоугольные треугольники, $\angle D_1DD_2 = \gamma = \arccos\frac{1}{\sqrt{13}}$ (по условию), $\angle D_1KD_2 = \beta$. Так как отрезок D_1K равен стороне ромба, т.е. $D_1K = CD$, то

$$D_1D_2 = 2R = D_1K\cdot\sin\beta = CD\cdot\sin\beta,$$

$$D_1D_2 = D_1K\cdot\sin\beta = DD_1\sin\alpha\sin\beta,$$

$$D_1D_2 = DD_1\sin\gamma.$$

Заметим еще, что точка D_2 лежит на диагонали квадрата $ABCD$ и поэтому

$$D_2DK = \frac{\pi}{4},\quad D_1D_2 = DD_2\cdot\mathrm{tg}\gamma,$$

где

$$DD_2 = \frac{DK}{\cos\frac{\pi}{4}},\quad DK = DD_1\cos\alpha,$$

и поэтому

$$D_1D_2 = DD_1\frac{\mathrm{tg}\gamma\cos\alpha}{\cos\frac{\pi}{4}}.$$

Отсюда получаем

$$\sin\alpha\sin\beta = \sin\gamma = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\gamma\cos\alpha.$$

Из этих соотношений находим, что

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}},\quad \cos\beta = \frac{1}{5},\quad R = 6,$$

а затем, рассмотрев прямоугольные треугольники DOO_2, DMO_2 и DMO, находим DO.

Вариант 2

1. $x_1 = -7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$.

2. $a \ge \frac{14}{3}$. *Указание*. Исходное неравенство, равносильное неравенству

$$(4a-8)x^2 + (20-10a)x + 7a - 16 \ge 0,$$

является верным при $a = 2$, а при $a \ne 2$ справедливо при всех $x \in \boldsymbol{R}$ тогда и только тогда, когда $a > 2$ и

$$D = [10(2-a)]^2 - 16(a-2)(7a-16) \le 0.$$

3. Площадь треугольника ABC равна 176, проекция отрезка OM на прямую BC равна $2\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Указания. 1) Пусть S_1, S_2, S_3 и S — площади треугольников BOM, COM, KOC и ABC соответственно (рис.6). Тогда

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{6} = \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2\cos 2\alpha},$$

откуда $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Искомая площадь $S = 2(S_1 + S_2 + S_3)$, где

$$\frac{S_3}{S_1+S_2} = \frac{OK}{OB} = \frac{KC}{BC} = \cos 2\alpha = \frac{3}{5},$$

откуда $S_3 = 33$, $S = 176$.

2) Пусть $D \in BC$ и $OD \perp BC$, тогда DM — проекция OM на BC. Заметим, что точка D расположена либо на отрезке BM, либо на отрезке MC. В первом случае $DM = OD\cdot\mathrm{ctg}\beta$, где $\beta = \angle OMB = 3\alpha$ (по свойству внешнего угла в треугольнике MAC), во втором — $DM = OD\cdot\mathrm{ctg}(\pi - 3\alpha) = -OD\,\mathrm{ctg}\,3\alpha$. Та-

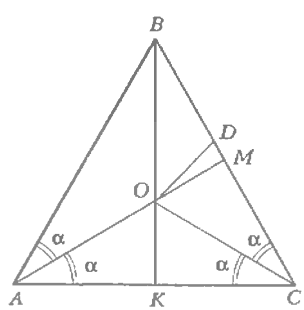


Рис. 6

ким образом, $DM = OD\cdot|\mathrm{ctg}\,3\alpha|$, но

$$\mathrm{ctg}\,3\alpha=\frac{2}{11}.$$

Теперь искомые величины находятся без труда.

4. $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2};\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Указание. Возводя в квадрат обе части первого уравнения и исключая из полученной системы y с помощью формулы $2\cos^2 y = \cos 2y + 1$, придем к уравнению

$$\cos^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}-2\sin 2x\cdot\cos^2 2x.$$

5. $6\sqrt{\frac{17}{13}}$; $\frac{18}{\sqrt{53}}$; $\frac{66}{\sqrt{173}}$.

Решение. 1) Пусть N_1 — проекция точки N на плоскость $ABCD$ (рис. 7), E — основание перпендикуляра, опущенного из точки

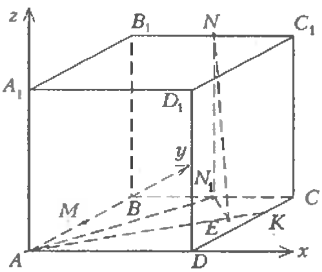


Рис. 7

N на AK, S_1 — площадь треугольника AN_1K, h_1 — расстояние от точки N до AK ($NE\perp AK$ по теореме о трех перпендикулярах). Используя условия задачи, найдем площади S_2, S_3, S_4 треугольников ADK, KCN_1 и N_1BA и тогда

$$S_1 = 36-(S_2+S_3+S_4)=12,\quad N_1E=\frac{2S_1}{AK},$$

где

$$AK=6\sqrt{1+\frac{4}{9}}=2\sqrt{13},\quad N_1E=\frac{12}{\sqrt{13}},$$

$$h_1=\sqrt{NN_1^2+N_1E^2}=6\sqrt{\frac{17}{13}}.$$

2) Для нахождения расстояния r между MN и AK воспользуемся формулой

$$r=\frac{6v}{AK\cdot MN\cdot\sin\varphi},\qquad (1)$$

где v — объем пирамиды $AMNK$, φ — угол между MN и AK. Для этого введем систему координат (см. рис. 7). Вычисляя координаты векторов $\vec{MN}$ и $\vec{AK}$, находим $\cos\varphi$ (по формуле скалярного произведения), а затем и $\sin\varphi$, v и r по формуле (1).

3) Если плоскость перпендикулярна вектору $\vec n=(a;b;c)$ и проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, то уравнение плоскости записывается в виде

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,\qquad (2)$$

а расстояние h от точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ до этой плоскости выражается формулой

$$h=\frac{|a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.\qquad (3)$$

Вектор $\vec n$, перпендикулярный плоскости MNK, найдем, пользуясь тем, что $\vec n\perp\vec{MK}$ и $\vec n\perp\vec{MN}$, после чего h без труда получим из формулы (3).

Вариант 3

1. $2\sqrt3$.

2. $\frac{2(ab+a+1)}{ab+3a+2}$.

3. 1) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $f_{\max}=2$, $f_{\min}=1$. *Указание.* Поскольку

$$f(x)=g(t)=\frac{2(t-2)}{3t-4},$$

где $t=\sin^2 2x$, задача сводится к отысканию минимума и максимума функции $g(t)$, возрастающей на промежутке $[0;1]$.

4. $(-2;0)$, $(-3;0)$, $(-4;2)$. *Указание.* Решите каждое из уравнений системы как квадратное относительного x или y.

5. Радиус основания конуса $r=\frac{a}{4}$, радиус шара

$$R=\frac{a\sqrt{13}\left(8-3\sqrt3\right)}{74\sqrt3}.$$

Физика

Вариант 1

1. Скорость слипшихся брусков v_1 можно найти из закона сохранения импульса $3mv_1=mv$. Кинетическая энергия брусков $E_k=3mv_1^2/2$. Модуль работы силы трения $A=3\mu mgl$. По закону сохранения энергии $E_k=A$. Отсюда находим расстояние l, пройденное брусками до остановки:

$$l=v^2/(18\mu g)\approx 41\ \text{см}.$$

2. 1) Изображение S' нити накала лампочки в зеркале находится на расстояниях l_1 от плоскости зеркала и $x=2l_1+l_2=5$м от противоположной стены, что следует из правил построения изображения в плоском зеркале (рис. 8). 2) После отра-

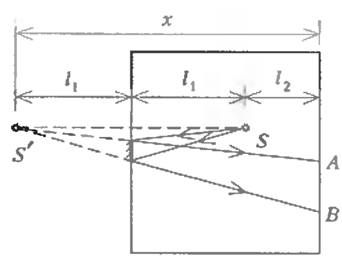


Рис. 8

жения от зеркала световые лучи ограничены конической поверхностью $S'AB$. Плоскости зеркала и противоположной стены дают два сечения этой поверхности, которые подобны. Значит, «зайчик» AB будет иметь форму ромба с линейными размерами в $k=x/l_1=2{,}5$ раза большими размеров зеркала. Итак, «зайчик» имеет форму ромба с диагоналями 40 см и 30 см.

3. 1) Разность давлений у нижнего и верхнего концов левого вертикального колена равна ρgH (это следует из второго закона Ньютона, записанного в проекциях на вертикальное направление для столба воды в этом колене). Следовательно, давление в месте изгиба трубки на оси вращения составляет

$$p_1=p_0+\rho gH.$$

2) Центр масс горизонтального столба воды движется с ускорением $\omega^2L/2$, которое обеспечивается разностью давлений в местах изгиба трубки: $p_3-p_1=\rho\omega^2L^2/2$. Разность давлений на концах колена высотой h равна $p_3-p_2=\rho gh$. Отсюда

$$p_2=p_0+\rho g(H-h)+\rho\omega^2L^2/2.$$

4. Процесс идет при постоянном давлении $p=10^5$ Па. Пусть в начале опыта объемы пара и воды равны $V_п$ и $V_в$ соответственно. Тогда можно записать

$$pV_п=\frac{m_п}{M}RT,\quad p\beta V_п=\frac{m_п+\rho_в V_в}{M}RT,$$

где $m_п$ — начальная масса пара, $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды, $T = 373$ К, $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды. Отсюда отношение объемов пара и воды в начале опыта составляет

$$\frac{V_п}{V_в} = \frac{\rho_в RT}{Mp(\beta-1)} = 191.$$

5. В соответствии с законом сохранения энергии,

$$\frac{L_1 I_0^2}{2} + \frac{L_2 I_0^2}{2} = \frac{CU_1^2}{2}.$$

Отсюда находим максимальное напряжение на конденсаторе до вставки сердечника:

$$U_1 = I_0\sqrt{(L_1 + L_2)/C}.$$

2) За время вставки сердечника сумма магнитных потоков в катушках сохраняется:

$$L_1 I_0 + L_2 I_0 = \mu L_1 I + L_2 I,$$

откуда находим ток в цепи после вставки сердечника:

$$I = \frac{I_0(L_1 + L_2)}{\mu L_1 + L_2}.$$

За время вставки сердечника заряд на конденсаторе не изменился, т.е. остался равным нулю. По закону сохранения энергии,

$$\frac{CU_2^2}{2} = \frac{\mu L_1 I^2}{2} + \frac{L_2 I^2}{2}.$$

Отсюда находим максимальное напряжение на конденсаторе после вставки сердечника:

$$U_2 = \frac{I_0(L_1 + L_2)}{\sqrt{C(\mu L_1 + L_2)}}.$$

Вариант 2

1. 1) $v_1 = 2v/7 = 2$ м/с;
2) $\Delta W = 45mv^2/112 = 0{,}63$ Дж.
2. $m = kA/g$.
3. 1) $f = L/(1 - r/R) = 30$ см; 2) $F = 10$ см.
4. 1) $T_1 = 2Q/(9\nu R)$; 2) $A = Q/3$.
5. $P = \left(Bvd/(R + \rho d/S)\right)^2 R$.

Вариант 3

1. От $U/2 = 18$ В до $U/12 = 3$ В.
2. 1) $A = 5490$ Дж; 2) $C = -30$ Дж/К.
3. $h_2 = \dfrac{\rho_в - \rho_л}{\rho_с - \rho_л}\dfrac{\rho_с - \rho_в}{\rho_в} h_1 = 1$ мм.
4. 1) $b = a/2 = 0{,}5$ см; 2) $L = \dfrac{(D+a)F}{2D+a} = 55$ см.
5. 1) $x = 3mg/(2k)$; 2) $T = 3\pi\sqrt{m/k}$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ

Математика

Вариант 1

1. 4. *Указание.* Выполните замену $u = \sqrt{2x+1}$.
2. $\dfrac{1}{2}$.
3. $18\sqrt{2}$. Поскольку $A'B = 6$, $\angle BA'K = 30°$, $BK \perp AC$ (рис. 9),

$$BK = A'B\sin 30° = 3,\ A'K = A'B\cos 30° = 3\sqrt{3},$$
$$AK = BK/\mathrm{tg}\,30° = \sqrt{3},\ AC = 2AK = 2\sqrt{3},$$

площадь основания призмы равна

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BK = 3\sqrt{3},$$

а так как

$$AA' = \sqrt{A'K^2 - AK^2} = 2\sqrt{6},$$

искомый объем равен

$$V = AA' \cdot S = 18\sqrt{2}.$$

4. В 12 часов. *Указание.* Пусть t — время (в часах) от отправления автомобилей до их встречи в третьем варианте условия,

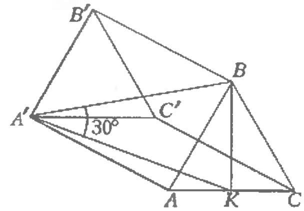


Рис. 9

S — расстояние между A и B. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} S = (v_1 + v_2)\left(t + 1 + \dfrac{3}{5}\right), \\ S = \left(\dfrac{3}{2}v_1 + v_2\right)\left(t + \dfrac{3}{5}\right), \\ S = (v_1 + 3v_2)t, \end{cases}$$

где v_1 и v_2 — скорость автомобилей. После замены $x = v_1/S$, $y = v_2/S$ получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 1 = (x + y)\left(t + \dfrac{8}{5}\right), \\ 1 = \left(\dfrac{3}{2}x + y\right)\left(t + \dfrac{3}{5}\right), \\ 1 = (x + 3y)t. \end{cases}$$

5. $x \in \left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; $a \in (4; +\infty)$.
Преобразуем левую часть неравенства, положив $u = \cos x$. Осталось выяснить, при каких a неравенство

$$8u^2 + 4au + 7a - 20 > 0$$

выполняется при всех $u \in [-1; 1]$.

Вариант 2

1. $x_1 = 2$, $x_2 = 3a - 1$ при $a \neq -2, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{3}, 1$;

$$x = 2 \text{ при } a \in \left\{\frac{1}{4}; \frac{2}{3}; 1\right\};\ x = -7 \text{ при } a = -2.$$

2. $1/9$, $1/3^7$. *Указание.* Сделайте замену $u = \log_3 x$.
3. $\dfrac{4}{3}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 7 + 8\cos x = \sin^2 x, \\ \sin x \le 0. \end{cases}$$

4. $S_{полн} = 152$, $r = 24/19$. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что объем многогранника, описанного около сферы с радиусом r, равен $Sr/3$, где S — площадь поверхности многогранника.
5. $x = 10/3$; $a \in (-\infty; -1/3] \cup \{1/3\} \cup \{5/12\}$.
Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + a = \sqrt{3x - 1}, \\ x + a > 0, \\ 3x - 1 > 0, \\ 3x - 1 \neq 1. \end{cases}$$

Физика

1. $t = \sqrt{n^2 - 1}\, p/(nmg) = 0{,}87$ с. **2.** $\alpha = \dfrac{F}{4kR} = 0{,}5$ рад.
3. $u_1 = 2v_1 = 10$ м/с.
4. $Q_1 = 5pV/4 = 19$ кДж, $Q_2 = pV/4 = 3{,}8$ кДж.
5. $Q_{x_1} = Q_x/n = 10$ кДж. **6.** $q = Q(\varepsilon - 1)/\varepsilon$.
7. $\omega = \sqrt{4qE/(ml)} = 0{,}5 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$.

8. $N_2=\frac{N_1\left(U^2+PR\right)}{U_1U}=72$. 9. $\beta=\operatorname{arctg}(1-a/F)\operatorname{tg}\alpha=5°$.

10. $N=\frac{4\pi\varepsilon_0 hcr(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2 e^2}=4{,}3\cdot10^6$.

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 200 тыс. рублей. *Указание*. За каждый месяц вклад возрастает в одно и то же число раз.
2. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k=-2,-1,0,1,2,3,4$; $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n=-1,0,1,2$; $x=-\pi$ (всего 12 корней).
3. $(0;2)$.
4. $S=\frac{3-\sqrt3}{4}c^2$. *Указание*. Если h — высота, проведенная к основанию c, α и β — углы при основании, то $h\operatorname{ctg}\alpha+h\operatorname{ctg}\beta=c$.
5. $[-7;0)\cup[1;2)$.
6. $V_{max}=324\pi$.

Вариант 2

1. 4 км/ч. *Указание*. Товарищ туриста шел туда и обратно одинаковое время.
2. $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; π; $k,n\in\mathbf{Z}$, $k\ne0$, $n\ne0$, 1.
3. $\left(\frac32;\frac12\right)$.
4. $\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$. *Указание*. Найдите угол между биссектрисой и основанием и примените теорему синусов к ΔACD и ΔABC.
5. $(-\infty;-1]\cup(0;\log_2 5]\cup(3;+\infty]$.
6. $\frac{2\pi}{9\sqrt3}a^3$.

Вариант 3

1. $\frac12 d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\beta\cos^2\beta$.
2. $x_1=1$, $x_2=2$.
3. $\frac{1}{x+y}$ (желательно указать, что $x\ne\pm y$).
4. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. *Указание*. Введите угол $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Тогда $\sin\alpha=\cos\beta$, $\cos\alpha=\sin\beta$.
5. $(6;10]$. *Указание*. Не забудьте об условиях $10-x\ge0$, $x-4\ge0$.

Вариант 4

1. Первый. 2. -1; 0; 1; 2; $2\frac13$.

3. $[1;3]$. 4. См. рис.10. 5. 6.

6. $-\frac32$. *Указание*. Не забудьте убедиться в том, что найденная точка действительно является точкой максимума.

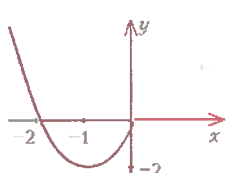


Рис. 10

Вариант 5

1. 20. *Указание*. Сначала определите, сколько страниц обработал каждый программист.
2. −6; −5,5; −3,5; 0,5; 2,5; 6.
3. $\left(-2;1-\sqrt6\right]\cup\left[1+\sqrt6;4\right)$.
4. $(-1;0)$, $(1/3;4/3)$.
5. $2\sqrt[3]{5}$. *Указание*. Не забудьте убедиться в том, что найденная точка действительно является точкой минимума.
6. $\frac{a+b}{4}\sqrt{c^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$.

Задачи устного экзамена

1. $-1/2$ и 0.
2. $\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{6-\frac{\pi^2}{4}}\right)$. *Указание*. Исследуйте x^2+y^2.
3. 2,25.
4. При $a<-1$ один корень, при $a=-1$ два корня, при $-1<a<0$ — три корня, при $a=0$ — два корня и при $a>0$ — один корень.
5. 2; $-k$, $k\in\mathbf{N}$. *Указание*. Представьте 5 в виде $3^{\log_3 5}$.
6. $S=\frac{a^2}{8\sin^2\frac{\pi}{n}}\left(\frac{2\pi}{n}-\sin\frac{2\pi}{n}\right)$.
7. $a<0$. *Указание*. Укажите на координатной плоскости, где могут находиться точки с абсциссами −3, −1, 1. Можно также воспользоваться равенством $f(-3)-2f(-1)+f(1)=8a$, из которого следует даже, что $a<-11/8$.

8 — 11. См. рис.11,*а*–*г*.

12 — 15. См. рис. 12,*а*–*г*.

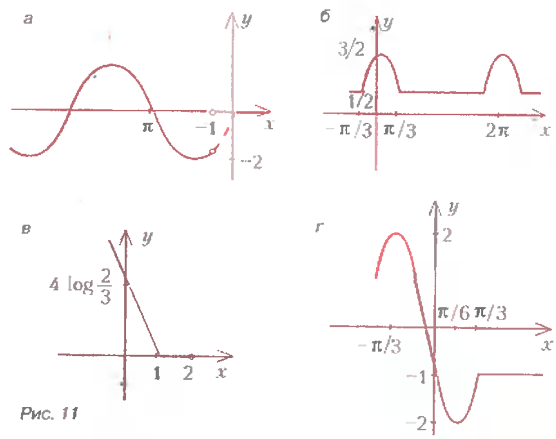


Рис. 11

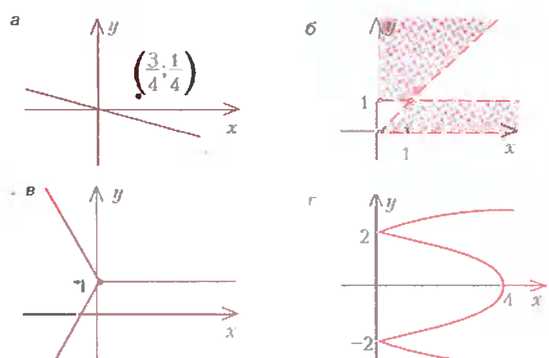


Рис. 12

Физика

1. Движение равноускоренное, проекция ускорения отрицательная (рис. 13); $v_{x1} = 6$ м/с, $v_{x2} = -6$ м/с; $x_1 = x_2 = 16$ м.

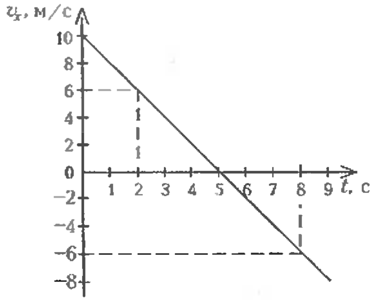


Рис. 13

2. $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{2E/m}}{v_0} = 60^\circ$.

3. $F_1 = 7mg$; $F_2 = mg$.

4. $A = mRT/M = 9{,}1\cdot10^3$ Дж; $\Delta U = c_V mT = 22{,}9\cdot10^3$ Дж; $Q = A + \Delta U = 32\cdot10^3$ Дж.

5. $t = \dfrac{(C + c\rho V)\Delta T + mr}{\eta P} = 1{,}7\cdot10^3$ с $\approx 28{,}7$ мин.

6. $q_3 = 144{,}5$ нКл; $x = 0{,}17$ м.

7. $R_g = \dfrac{U_1(U_2 - U_1)}{P} = 24{,}2$ Ом.

8. $m = kW/U = 0{,}59$ кг.

9. $\Delta t = \Delta\Phi/\mathcal{E} = 0{,}5$ с; $I = \mathcal{E}/R = 3{,}3$ А.

10. $\alpha = \operatorname{arctg} n = 58^\circ$.

XXVII МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

1. *a*) $R = 0{,}5$ Ом; *b*) $h = \mu s$; *c*) $C_p = 4PT^3/\left(aT_0^4\right)$; *d*) в 3 раза; *e*) поле направлено по оси Y, постоянно и равно $B = 6\mu_0 I/\left(\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)D\right)$.

2. *a*) В первом случае $v = \sqrt{2eU/m}$, во втором — $v = c\sqrt{1 - \left(mc^2/\left(mc^2 + eU\right)\right)^2}$; *b*) траектория электрона — окружность, касающаяся внутренней поверхности внешнего цилиндра, $B_0 = 2bmv_0/\left(\left(b^2 - a^2\right)e\right)$; *c*) $k = 1/2$; *d*) $v = eB\left(r_m^2 - a^2\right)/(2mr_m)$; *e*) $B_0 = 2b\sqrt{2mU/e}/\left(b^2 - a^2\right)$; *f*) $B_0 = 2mb\left(\sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + 2eU/m} - v_\varphi a/b\right)/\left(e\left(b^2 - a^2\right)\right)$.

3. *a*) $l = 4{,}63\cdot10^6$ м, $\omega = 2{,}67\cdot10^{-6}$ с$^{-1}$;
b) $U = -m\omega^2\left(r^2 - 2rl\cos\varphi + l^2\right)/2 - GmM/r - GmM_л/\left|\vec{L} - \vec{r}\right|$;
c) $h = M_л R^4\left(3\cos^2\varphi - 1\right)/\left(2ML^3\right)$, $h_{max} - h_{min} = 0{,}54$ м.

БУТЫЛКА, КОЛЬЦО И ... ИМПУЛЬС

(см. 4-ю страницу обложки)

Надо нанести удар по внутренней стороне кольца. Тогда кольцо деформируется так, что его верхняя точка смещается вниз, и взаимодействия кольца и палочки практически не происходит. Если же ударить по внешней стороне кольца, то палочку подбросит вверх, и попасть в бутылку ей не удастся.

МОЖНО ЛИ УВИДЕТЬ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ?

(см. «Квант» №6 за 1996 г.)

1. В радуге, сколь ни богаты ее световые оттенки, нет еще очень многих цветов, а не только коричневого. Это сразу бросается в глаза, когда сравниваешь цвета радуги и какой-нибудь большой набор художественных красок, цветных карандашей или мелков. Такое же заключение можно сделать, имея на руках тестовую карту цветного монитора современного компьютера, на которой представлено не менее $2^8 = 256$ разноцветных квадратиков (к примеру, тестовые карточки типа Epson Color Reference Chart).

По мнению Д.Хьюбела, автора книги «Глаз, мозг, зрение» (М.: Мир, 1990), существует три типа цветов помимо цветов радуги. Во-первых, это пурпурные цвета, которые получаются при смешивании красного и синего цветов в разных пропорциях. Второй тип цветов получается при добавлении белого цвета к любому цвету спектра радуги или к пурпурному цвету (говорят, что такое добавление «разбавляет» цвет, делает его более бледным, менее насыщенным). Коричневый цвет относится к третьему типу цветов — ощущение коричневого цвета возникает, когда желтое или оранжевое пятно окружено более ярким цветом. Хотите это проверить? Посмотрите на любую коричневую поверхность через свернутую из черной бумаги или черного бархата трубочку. Вы увидите (вероятно, неожиданно для себя) оранжевый или желтый цвет! Поэтому коричневый цвет можно считать смесью черного (в условиях пространственного контраста) с оранжевым или желтым цветом.

2. Эта задача — известный парадокс, который когда-то волновал многих естествоиспытателей и который первым объяснил Г.Гельмгольц (1821—1894). Ответ таков. Желтая краска отражает и рассеивает сравнительно широкую область спектра, включая зеленую, но максимум кривой отражения приходится на желтую часть спектра. Аналогично, синий пигмент рассеивает и отражает синий цвет и какую-то часть зеленого. Когда желтую и синюю краски смешивают в достаточном количестве, то рассеяние и отражение белого света наблюдается только в области перекрытия спектральных кривых отражения двух пигментов, т.е. в зеленой области, а все остальное поглощается. Поэтому такая смесь красок и выглядит зеленой.

Однако желтый и синий лучи от диапроекторов при совмещении на белом экране вызывают у зрителя ощущение белого цвета (этот опыт рассматривается часто как экспериментальная иллюстрация теории цветового зрения). Цветные лучи от диапроекторов можно получать, если на пути каждого луча установить окрашенный целлофан — синий или желтый. Если же эти два целлофановых светофильтра поставить друг за другом на пути одного луча от диапроектора, то на белом экране получается зеленый цвет, как и в опыте по смешению красок.

3. Восприятие черного цвета в изображении сильно зависит от контраста разных участков изображения. Черный бархатный цвет на экране телевизора кажется нам более темным и насыщенным, чем экран выключенного телевизора, только потому, что при наблюдении телевизионного изображения на экране кроме черного есть светлые (окрашенные или белые) участки изображения.

4. В условиях низкой освещенности цветовое зрение не работает, все предметы кажутся нам одноцветными, серо-синими.

5. Экспериментатор легко справится с этой задачей. Деформация теневой маски, сделанной из мягкого магнитного материала, не зависит от ориентации полюсов магнита. А отклонение электронного луча, вызывающее изменение цвета экрана, зависит от полярности магнита. На опыте как раз это и наблюдается.

6. При ответе на вопрос надо учесть, что для телевизора, расположенного на горизонтальной подставке или столе, видимое на экране отклонение луча в кинескопе определяется вертикальной составляющей магнитного поля при любой ориентации телевизора относительно направления север—юг. Остается только правильно вообразить направление линий индукции магнитного поля Земли, вспомнить про силу Лоренца и воспользоваться правилом левой руки для определения направления этой силы. Например, в Москве вертикальная составляющая магнитной индукции направлена вниз, и электронный пучок в кинескопе телевизора отклоняется в левую часть экрана.

Примечание. В северном полушарии находится южный магнитный полюс Земли!

7. Для оценки горизонтального смещения электронного луча на экране кинескопа будем считать, что на всей длине L трубки кинескопа электроны двигаются почти по прямой с постоянной

скоростью v_0 ($mv_0^2/2 = W$), а вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли, равная $B_0 \approx 0{,}4 \cdot 10^{-4}$ Тл в окрестностях Москвы, вызывает незначительное изменение траектории электрона. Сила Лоренца, действующая на электрон, равна ev_0B_0. За интервал времени $\tau = L/v_0$ электрон сместится в боковом направлении на величину

$$\Delta = \frac{a_\perp \tau^2}{2} = \frac{ev_0B_0L^2}{2mv_0^2} = \frac{eB_0L^2}{2\sqrt{2mW}} \approx 1{,}5 \text{ мм},$$

что составляет ни много ни мало целых два периода люминофорных триад.

8. Цвет изображения изменяется, когда смещение луча по горизонтали (от невозмущенного положения) порядка 0,1 – 0,2 мм. Для наблюдаемого же изменения формы предметов требуются внешние возмущающие магнитные поля в десятки раз большие, при которых смещение электронного луча достигает нескольких миллиметров.

9. Установка подобного типа должна включать в себя большой цветной телевизионный монитор, экран которого находится в области сравнительно однородного и сильного магнитного поля (например, в вертикальном соленоиде). Локальные изменения магнитного поля вблизи экрана монитора при внесении магнитных материалов в такой установке будут выявляться по изменению цветов на экране.

10. Идея опыта состоит в следующем. Цветной телевизор устанавливают горизонтально на прочном и широком столе при ориентации оси кинескопа в направлении север – юг. Далее, не изменяя этой ориентации, включенный телевизор аккуратно поворачивают на бок на 90° сначала в одну сторону, потом в другую. Если на экране светится одноцветная заставка (например, голубая с часами, которая бывает перед информационной программой), при вращении телевизора цвет заставки изменяется. По этим изменениям и определяют отношение e/m (см. задачу 7).

Предупреждение! Эксперимент надо проводить только в присутствии опытного экспериментатора. Во-первых, телевизор подключен к сети, а во-вторых, телевизор тяжелый и его можно нечаянно уронить и разбить.

ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ ДЛЯ ТЕТРАЭДРА

(см. «Квант» №6 за 1996 г.)

1. *Указание.* Из теоремы Менелая для тетраэдра следует, что $DL : LC = AM : MB$ (рис.14). Многогранник $KDLNBM$ — объ-

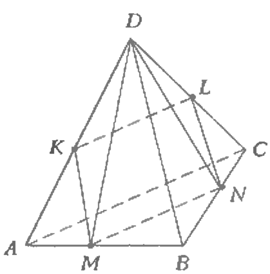


Рис. 14

единение четырехугольной пирамиды $DKLMN$ и треугольной пирамиды $DMBN$. Аналогично, многогранник $AKMNCL$ — объединение пирамид $AKLNM$ и $ALCN$. Четырехугольные пирамиды имеют равные объемы, так как у них общее основание $KLNM$ и равные высоты ($AK = KD$, следовательно, расстояния от точек A и D до основания равны).

Объемы треугольных пирамид также равны (эти объемы относятся к объему пирамиды $ABCD$ как площади оснований):

$$V_{ALCN} : V_{ABCD} = S_{CLN} : S_{BCD} = CL : 2CD = BM : 2AM = V_{DBMN} : V_{ABCD}.$$

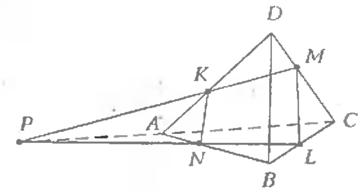


Рис. 15

2. 3/2. См. указание к задаче 1.

3. 68 : 37. *Указание.* Пусть $CL/BL = x$, $DM/MC = y$ (рис.15). Из условия задачи и теоремы Менелая для тетраэдра получаем систему

$$\begin{cases} 3x - 4y = 3, \\ xy = 1/3, \end{cases}$$

откуда $x = 4/3$, $y = 1/4$.

Точка P пересечения плоскости с прямой AC лежит на продолжении AC за точку A. Из теоремы Менелая для треугольника ADC получим, что $AP : PC = 1 : 2$. Пусть V — объем тетраэдра $ABCD$. Выразив через V объемы тетраэдров $PANK$ и $PMCL$, получим ответ.

4. 9. *Указание.* Докажите, что точки K, L, M и N лежат в одной плоскости и являются вершинами вписанного четырехугольника.

5. 1 : 1. *Указание.* Пусть L и N — точки пересечения плоскости с ребрами AD и BC соответственно. Из теоремы Менелая следует, что $AL : LD = BN : NC = k$. Если $k \neq 1$, то объемы частей, на которые плоскость разбивает пирамиду, не равны (см. указание к задаче 1).

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.П.Бухарев, В.А.Иванюк, Т.Н.Кольченко, В.М.Митурич-Хлебникова, А.Е.Пацхверия, И.А.Тарабанова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области

Заказ №

Сражение при Элисте

Летом минувшего года в столице Калмыкии Элисте состоялся очередной поединок за шахматную корону, в котором сразились чемпион мира Анатолий Карпов и юный претендент Гата Камский. Одержав уверенную победу со счетом 10,5:7,5, Карпов сохранил чемпионское звание и в пятый раз был провозглашен шахматным королем. Поскольку этот матч проводила Международная шахматная федерация (ФИДЕ), некоторые называют Карпова чемпионом мира ФИДЕ. Но особого значения это не имеет: чемпион мира, как говорится, он и в Африке чемпион...

Поединок между Карповым и Камским можно назвать историческим. Во-первых, потому что историческими являются все матчи за шахматную корону, во-вторых, потому, что он последний, который проводился по старой системе. Следующий чемпионат мира должен пройти уже по новой системе, предложенной президентом ФИДЕ (и президентом Калмыкии) Кирсаном Илюмжиновым: на него соберется сотня сильнейших гроссмейстеров мира, которые и определят своего нового лидера.

Прошедший матч состоял из 18 партий (было сыграно на две меньше, чем планировалось), и его можно разделить на две равные части, по девять партий в каждой. В первой половине Карпов взял весьма высокий темп и, одержав пять побед всего при одном поражении, резко вышел вперед.

Казалось, что дело сделано. Но претендент не намерен был без борьбы складывать оружие. Камский приноровился к манере игры чемпиона и во второй половине матча, действуя вполне уверенно, выиграл ее: две победы при одном поражении. Последние партии протекали весьма напряженно, жестко, чувствовалось, что сражение в них идет не на жизнь, а на смерть...

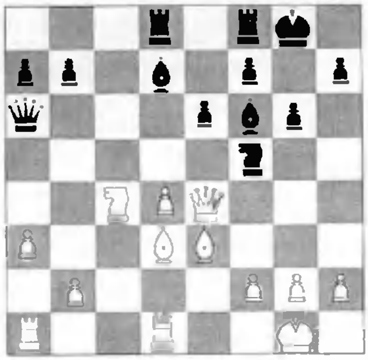
Подробный комментарий к партиям матча, освещение всех нюансов борьбы заняло бы слишком много места, тем более что средняя продолжительность встречи составляла более 55 ходов! Мы приведем две победы чемпиона мира, весьма характерные для его стиля, для этого матча...

4-я партия
Г.Камский — А.Карпов
Защита Каро—Канн

1. e4 c6 2. d4 d5 3. ed cd 4. c4 Kf6 5. Kc3 e6 6. Kf3 Cb4 7. cd K:d5 8. Cd2 Kc6 9. Cd3 0-0 10. 0-0 Ce7 11. Фe2 Kf6 12. Ke4 Фb6!

В типичной позиции «с изолированной пешкой» Карпов применяет важную новинку и захватывает инициативу. **13. a3 Cd7 14. Лfd1 Лad8!** Легко убедиться, что пешки b2 и d4 неуязвимы. **15. K:f6+ C:f6 16. Фe4 g6 17. Ce3.** Кажется, что черный ферзь должен покинуть диагональ a7-g1, однако следует неожиданный маневр конем, и выясняется, что черные выиграли стратегическое сражение.

17...Ke7! Теперь пешка «d» надежно блокирована, и проблема «изолятора» в данной партии решена. **18. Ke5 Kf5 19. Kc4 Фa6!**



Бесстрашный ферзь не боится противостояния слона ни на какой диагонали. Действия Карпова в этой партии производят сильное впечатление. **20. a4.** Отскок коня не опасен, ввиду ответа 20... Cb5. **20... Cc6 21. Фf4 Cd5 22. Ke5 Фb6 23. C:f5 ef 24. Лd2 Cg7 25. h4 Лfe8 26. Фg3 Лc8 27. Kd7 Фc6 28. Ke5 b6 29. Kd3 Фd7 30. a5 Лe4!** Появление ладьи в самом центре доски полностью сковывает силы белых. **31. Kf4 b5 32. Лdd1 Cc4 33. Лac1 h6!** Тонкий профилактический ход, подчеркивающий беспомощность белых: на случай h4-h5 черные готовы к ответу g6-g5.

34. Лc3 b4 35. Лc2 Лc6! 36. Лdc1 Cb5 37. Kph2 Kph7 38. Л:c6 C:c6 39. Лc4? Cf8! Появление слона на диагонали b8-h2 решает дело. **40. Kd3 Фe6 41. d5 C:d5!** В случае 41...Ф:d5 42. Л:c4 fe 43. Ke5 Cd6 44. Cf4 C:e5 45. C:e5 Ф:a5 46. Cd4 у белых серьезная контригра: их ферзь хозяйничает на той самой диагонали, где недавно доминировал черный слон.

42. Л:e4 C:e4 43. C:a7 Cd6. Двойной удар 43...Фa6? или 43...Фd7? не приводит к цели, ввиду ответа 44. Cc5!

44. Kf4 Фe5! 45. Kh3. Конь долго бродил по доске (это уже его 11-й прыжок в партии!), но так и не нашел пристанища... После 45. Ce3 Ф:b2 45. a6 Фa1 47. a7 b3 черная пешка проскакивала в ферзи.

45...Фe7! Белые сдались.

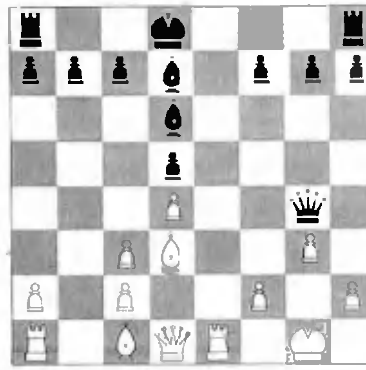
Элегантная победа, напоминающая доказательство математической теоремы!

6-я партия
Г.Камский — А. Карпов
Русская партия

1. e4 e5 2. Kf3 Kf6 3. d4 K:e4 4. Cd3 d5 5. K:e5 Kd7 6. K:d7 C:d7 7. 0-0 Cd6 8. Kc3. Редкое продолжение (обычно играют 8. c4), на которое Карпов припас отличный ответ. **8...Фh4!** Чемпион мира размышлял над этим ходом более 40 минут, но это не значит, что он придумал его за доской...

9. g3 K:c3 10. bc Фg4 11. Лe1+ Kpd8! А вот король отступил в сторону сразу, и это о чем-то говорит... В блиц-партии такие королевские прогулки позволительны, а в матче за шахматную корону?

12. Ce2. Конечно, можно было разме-



нять ферзей, но Камский полагает, что бороться с застрявшим в центре королем надо решительным образом. **12...Фf5 13. Лb1 b6 14. c4 dc 15. C:c4 Лe8 16. Ce3 Cc6! 17. d5 Cd7.** Ценой двух темпов черные обесценили потенциальную опасность прорыва c2-c4-c5.

18. Cf1 h6 19. c4 Лe7 20. Cd3? Фf6 21. Kpg2? Такое впечатление, что белые перепутали фигуры: вместо того, чтобы поставить слона на его законное место g2, заняли это поле королем... **21...Kpe8 22. Cc2.** Готовясь к появлению черного короля на королевском фланге, белые сооружают батарею Ф+C по диагонали b1-h7. Но ответ черных охлаждает атакующий пыл Камского.

22...Фc3! 23. Cb3. После 23. Фd3 или 23. Cd4 ферзи менялись, а вместе с ними исчезали и все опасности для белых. Но Камский все еще не может смириться с быстрой потерей дебютной инициативы. **23... Kpf8 24. Лe1 Фf6 25. Cc2? Лae8 26. Фd3.** Итак, черные переправили своего короля с d8 на f8, попутно активизировав ладью. А что же белые? Они построили задуманную батарею, но вот вопрос, куда она стреляет...

26... Cg4! 27. Cd2? Настоящая катастрофа! **27...Лe2! 28. Л:e2 Л:e2 29. Лf1 Л:d2! Белые сдались.**

После 30. Ф:d2 Фf3+ и 31...Ch3 крупные материальные потери неизбежны!

Е. Гик

Индекс 70465

ИГРУШКИ ПО ФИЗИКЕ

В этом номере четвертую страницу обложки мы отдаем новой рубрике, в которой будут описываться небольшие опыты, демонстрации, физические сюрпризы. Иногда (но не всегда) предлагаемую «установку» легко изготовить самостоятельно, и тогда можно экспериментировать, размышлять и усовершенствовать «игрушку». Вот — пример.

БУТЫЛКА , КОЛЬЦО И ...ИМПУЛЬС

Начнем с очень простого опыта-демонстрации. Для него нужны всего три предмета: бутылка, желательно невысокая (например, из-под кетчупа); кольцо из плотного картона диаметром 10—15 см и шириной 8—10 мм, так чтобы его можно было поставить вертикально на горлышко бутылки; небольшая палочка длиной 4—5 см (например, из стекла, дерева и т.д.), которая должна устойчиво стоять в вертикальном положении и свободно проходить в горлышко бутылки. Вместо палочки можно попробовать взять маленький кубик или шарик со спиленной (для устойчивости) площадкой.

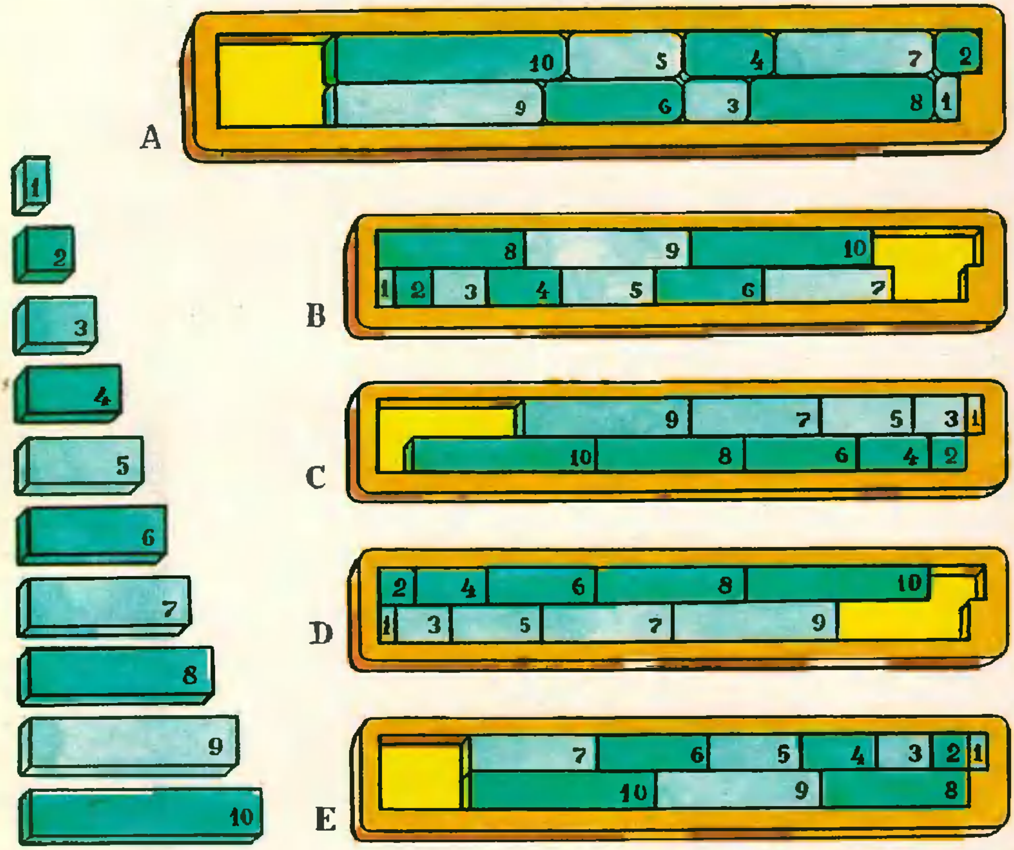
Поставим кольцо на бутылку, а палочку – на кольцо. Если теперь ловко и правильно выбить кольцо из-под палочки, то она со звоном упадет в бутылку.

Эта незамысловатая игрушка очень наглядно иллюстрирует тот факт, что за время удара импульс горизонтальной силы трения, действующей на палочку, не успевает сообщить ей сколько-нибудь заметный импульс в горизонтальном направлении — палочка падает практически вертикально.

Возможно, этот опыт напомнит вам известную демонстрацию, в которой ударом палки выбивают спичечный коробок из-под стакана с водой, а стакан остается почти на месте.

Однако в нашем случае есть одна хитрость, которую вы сможете обнаружить, если ваша палочка будет упорно отказываться попадать в бутылку. Скорее всего, вы наносите удар «неправильно». В чем ваша ошибка? Как надо правильно ударить по кольцу? (Наводящий вопрос: можно ли кольцо заменить легким мячиком?) Постарайтесь ответить на эти вопросы. Желаем успеха!

«1 → 10»



Новая головоломка «1→10» берет начало от известной всем игры «15», но значительно превосходит ее по трудности. Придумал головоломку голландец Герман Виттевеен, по профессии банкир (а головоломки — его хобби).

Лучшее, т.е. самое короткое, решение головоломки пока неизвестно. Предлагаем вам принять участие в его поисках.

На рисунке показаны 5 вариантов размещения планок в головоломке. Нужно найти кратчайшие пути перехода от одного варианта к другому. При этом можно только двигать планки, не вынимая их из коробочки.

Но сначала игрушку надо изготовить, что, впрочем, совсем нетрудно. Найдите подходящую коробочку. Высота и ширина ее особой роли не играют, важно, чтобы коробочка была длинной. Очень удобно использовать пенал или коробку из-под карандашей.

Исходя из размеров коробочки, рассчитайте размеры планок. Всего их 10 штук, и в порядке нумерации каждая следующая на один шаг шире предыдущей. Ширина свободного места в коробочке — 5 шагов. Планки можно вырезать из фанеры, линолеума или картона. Разместив их в коробочке, проверьте, чтобы размеры свободного места были достаточны для перемещения между верхним и нижним рядами планки №5. Ходы можно записывать, указывая номера планок и направления движения.