

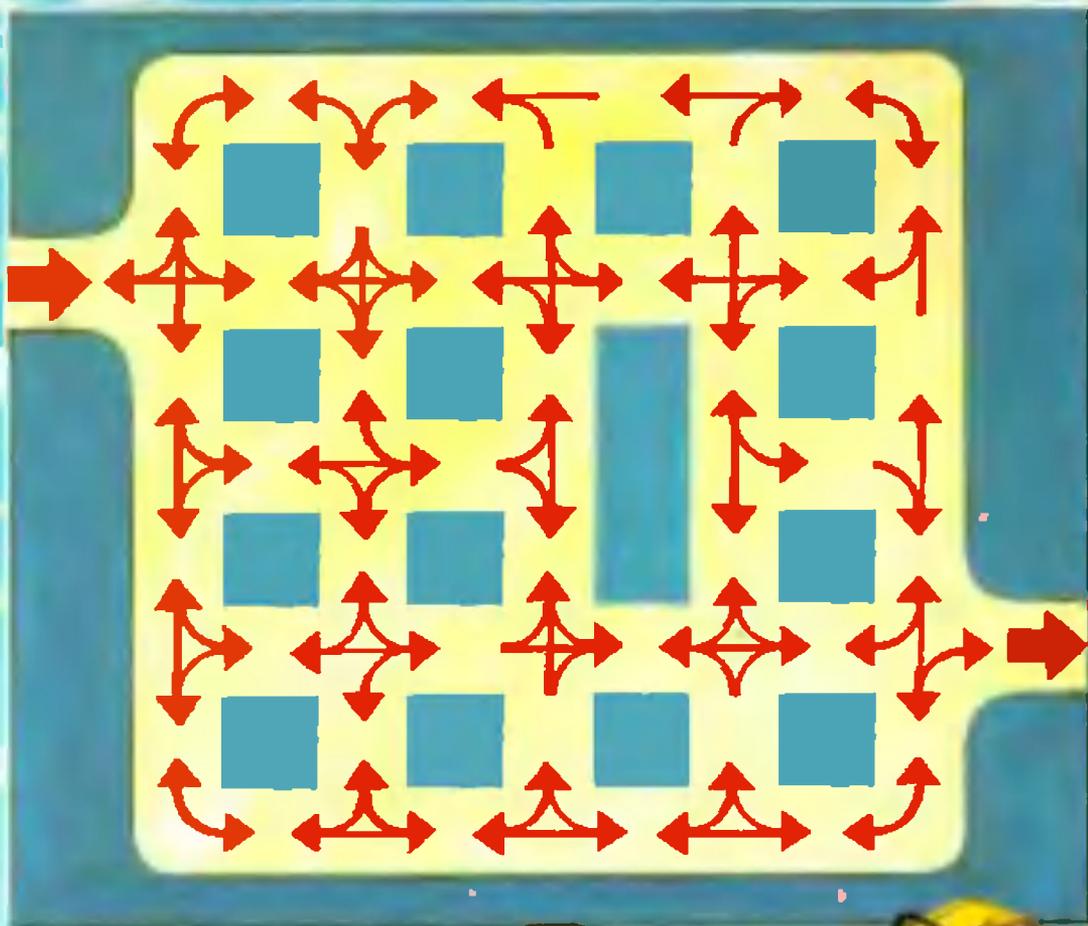
КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

КОШМАР АВТОМОБИЛИСТА



Эта головоломка взята из книги М Гарднера «Математические досуги». В некоем городе начальник местного ГАИ, большой шутник, развесил дорожные знаки так, что ни одному автомобилисту не удавалось проехать через весь город, ни разу не нарушив правила (а это весьма благотворно сказалось на состоянии городской казны).

План города перед вами. Двигаться можно только в направлении стрелок, поворачивать — только там, где есть закругления, разворачиваться на 180° или давать задний ход запрещено. Попробуйте объехать весь город и избежать штрафа



КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

МАРТ/АПРЕЛЬ · 1998 · №2

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА
С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
Н.Б.Васильев, А.Н.Виленкин,
С.А.Гордюнин, Н.П.Долбиллин,
В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.Р.Зильберман,
С.С.Кротов

(директор «Бюро Квантум»),

А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаев,

Н.Х.Розов, А.П.Савин,
Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора),

И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд,
М.И.Башмаков, В.И.Берник,
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов,
Г.Л.Коткин,
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,
А.И.Шапиро

Бюро Квантум

©1998, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Магнитная монополия. *Дж.Вайли*
9 Самоподобные мозаики. *Н.Долбиллин*
16 Физика рулетки. *Э.Руманов*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 20 Первый лауреат Нобелевской премии по физике.
А.Васильев

НОВОСТИ НАУКИ

- 21 Элемент 112 — самый тяжелый на сегодня?

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

- 22 Что может ЭВМ. *Б.Болотовский*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 24 Задачи М1631—М1635, Ф1638—Ф1642
25 Решения задач М1606—М1615, Ф1623—Ф1627

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Названия числовых великанов

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 34 Задачи
35 Почему у сыра круглые дыры. *С.Кротов*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 38 О кубических уравнениях. *А.Рубинштейн*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 40 Математический маятник на наклонных поверхностях.
П.Хаджи, А.Михайленко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 42 О вписанно-описанных многоугольниках. *А.Заславский*

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 44 Секрет змеи. Ползет или катится? *А.Черкун*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 46 Задачи с распределенной массой. *А.Черноуцан*

ВАРИАНТЫ

- 48 Материалы вступительных экзаменов 1997 года

ИНФОРМАЦИЯ

- 56 Конкурс в сети Интернет
57 Физико-математический колледж при «Курчатовском институте»
58 Московская экспериментальная школа №1189

- 59 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Э.Руманова*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Физики на монетах мира*

S



$$F = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\phi = B(\pi R^2) = n \frac{h}{2e}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$F = q(\vec{v} \times \vec{B})$$



N

BB 20

Магнитная монополия

(Маленькая монография об объекте, который, возможно, и не существует)

Дж. ВАЙЛИ

ЭТА СТАТЬЯ представляет собой некоторые результаты моих «раскопок» в области магнитных монополей. Как физик, я не чувствую, чтобы мои поиски были уж совсем тривиальным предметом. Но моя жена Холли, очень талантливая художница, удивляется, почему я трачу столько времени на исследования и написание статьи о невидимых малосерьезных штучках, которые могут и не существовать. Я не могу сказать, почему они скорее всего не существуют, но, возможно, я смогу немного рассказать о том, как бы они вели себя если бы существовали. Это один из моментов, которые делают жизнь физика такой занимательной, — возможность воображать вещи, которые могли бы существовать.

Северный полюс, южный полюс

Прежде чем углубиться в проблему магнитного монополия, имеет смысл заметить, что вы знаете уже довольно много о полюсах вообще. Первыми полюсами, о которых вы узнали, были, вероятно, географические полюса Земли — северный и южный. Следующими были магнитные полюса — северный и южный. Еще в 1269 году Петрус Перегринус де Марикур, французский военный инженер, впервые заметил, что «силовые» (магнитные) линии вокруг куска магнетита кажутся выходящими из двух определенных участков. Простейшим отражением этого факта в наше время являются окрашенные концы намагниченной стрелки компаса. Обычно конец стрелки, указывающий на Север, окрашивается в красный цвет и называется северным

магнитным полюсом. Другой конец стрелки, который часто окрашивают в голубой цвет, называют южным магнитным полюсом.

Безусловно, вы знаете, что северные магнитные полюса притягиваются к южным, так что мы можем заключить, что около северного географического полюса Земли лежит южный магнитный полюс, а около южного географического полюса Земли — северный магнитный полюс. На самом деле эти два различных вида полюсов не совпадают. Южный магнитный полюс расположен немного южнее северного географического полюса, так что у меня дома в Торонто (Канада) компас показывает направление на 10° к западу от истинного Севера.

Тот факт, что географический и магнитный полюса Земли не совпадают, представляет собой интересный предмет исследования сам по себе. Оказывается, магнитные полюса Земли непрерывно блуждали и блуждают, и хорошая топографическая карта подскажет вам, насколько сильного изменения положения северного магнитного полюса можно ожидать в ближайшие годы. Более того, имеются геологические доказательства того, что магнитные полюса Земли в прошлом менялись местами, и эта перемена мест происходила почти мгновенно (разумеется, в геологическом масштабе времени).

Для любых магнитных полюсов, будь то полюса Земли, полюса стрелки компаса или полюса любого магнита, справедливо то, что они всегда встречаются в виде пары (северный — южный). Эти пары называют магнитными диполями. А вот магнитный монополюс — это изолированный северный или южный полюс, без пары. Имеются достаточно веские причины думать, что такое чупо-чудо должно существовать, и большинство дово-

дов в пользу этого как-то связаны с симметрией природы. Вы можете услышать утверждения физиков, что уравнения Максвелла, которые описывают электромагнетизм, становятся совершенно симметричными, если магнитные монополии существуют. Это само по себе неплохая причина верить в монополи, но мы также увидим, что Дирак в работе 1931 года нашел способ объяснения одной из величайших тайн физики, который опирается на существование хотя бы одного монополя где-то во Вселенной. Мы познакомимся с этим объяснением и посмотрим, как физики ищут монополи. Но для начала нам стоит повторить кое-какие основы.

Электрический и магнитный монополи

Вспомним, что сила, действующая на одиночный заряд q в электрическом поле, равна $F = qE$ (где E — величина напряженности электрического поля). Электрический диполь состоит из двух пространственно разделенных зарядов $+q$ и $-q$. Мы можем действовать строго формально и назвать каждый заряд этого диполя электрическим полюсом — положительным и отрицательным. «Сила» электрического полюса может быть определена как $q = F \cdot E$. Такой уединенный полюс будем называть электрическим монополюсом.

Если бы мы проделали то же самое в магнетизме, то сказали бы, что два равных по величине, но противоположных по знаку полюса с «силой» полюсов $q' = F \cdot B$ образуют магнитный диполь (здесь B — индукция магнитного поля). Магнитный монополюс — это существующий изолированный магнитный полюс, северный или южный, с «силой» полюса q' . Поскольку мы знаем, как исследовать проблемы, включающие элект-

Эта статья переиздана из журнала «Scientist» (май — июль 1993 г.) С разрешения статьи вернул А. Ушацев

трические монополи (по-иному называемые зарядами), легко понять, как проводить соответствующие вычисления для магнитных монополей. Мы можем, например, выписать выражение для магнитного поля, которое должен был бы создавать единичный монополь. Действительно, электрическое поле, создаваемое отдельным зарядом q , — это радиальное поле, подчиняющееся закону обратных квадратов. Напряженность поля на расстоянии r от заряда равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н м}^2)$ — электрическая постоянная. Аналогично, индукция магнитного поля, создаваемого магнитным монополем, должна быть равна

$$B = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ — магнитная постоянная

Вы, возможно, недоумеваете, откуда мы узнали, какова должна быть магнитная постоянная. Я выскажу без доказательства или объяснения (вы сможете узнать об этом больше в ходе вашего дальнейшего физического образования) утверждение о том, что существует любопытное соотношение

$$\sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}} = c,$$

связывающее электричество, магнетизм и оптику как части единой физики. На самом деле магнитная постоянная в единицах СИ определяется нашим выбором электрической постоянной и скоростью света, т.е. магнитная постоянная сама по себе не является экспериментально определяемой величиной. Вы уже знаете, например, что свет (или, в более общем случае, электромагнитное излучение) состоит из колеблющихся электрического и магнитного полей. Для наших проблем это означает, что у нас есть хорошая рабочая формула для магнитного поля, которое создавал бы магнитный монополь. Однако, как это ни печально и, может быть, удивительно, одинокий магнитный монополь никогда не был обнаружен. Но это не мешает нам поинтересоваться, каковы могли бы быть его свойства.

Свойства магнитного монополя

В 1904 году Дж. Дж. Томсон теоретически изучал движение электрона в окрестности магнитного монополя. Несомненно, он хотел понять, как он мог бы «узнать» магнитный монополь, если бы наткнулся на него. Мы имеем большой опыт определения наличия электрических монополей (зарядов), и я напомню вам, как это делается. Мы просто выстреливаем некоторый заряд в сторону исследуемого и наблюдаем характерное отклонение первого.¹ Чтобы заметить присутствие магнитного монополя, мы также вообразим, что пробный магнитный заряд — движущийся электрический заряд — выстреливается в его сторону, но мы должны понимать, какого рода отклонения следует ожидать. Сила, испытываемая одним электрическим зарядом со стороны другого, направлена по прямой, соединяющей заряды; сила, испытываемая движущимся электрическим зарядом со стороны магнитного монополя, более сложна и потребует детального объяснения.

На рисунке 1 приведена схема воображаемого эксперимента. Пусть

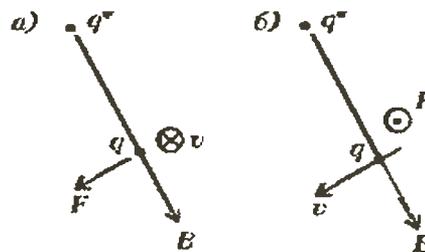


Рис. 1

пробный заряд q обладает начальной скоростью, равной v , и движется по направлению к неподвижному (закрепленному) монополю с «силой» полюса q^m . Мы можем проводить эксперименты с меняющимся прицельным расстоянием b , т.е. расстоянием между двумя прямыми, параллельными скорости заряда, причем

¹ Хотя я еще не упоминал об этом, мы можем также представить гравитационные же (поле планеты) как результат действия гравитационного монополя (обычно называемого массой). Мы замечаем при этом, что так же гравитационный полюс путем наблюдения движущейся пробной массы. В отличие от поля в электромагнетизме, гравитационных полюсов в гравитации не существует (не существует отталкивающей гравитационной силы).

одна проходит через монополь, а другая — через заряд. Все, что мы должны знать, — это выражение для силы, действующей на движущийся заряд в магнитном поле, а эта сила, разумеется, является хорошо известной силой Лоренца

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Одно очевидное заключение, которое мы можем вывести, состоит в том, что при прицельном расстоянии $b=0$ скорость будет параллельна одной из линий поля и сила, действующая на заряд, не возникнет. Заряд в юнце концов столкнется с монополем. Это — крайне маловероятный сценарий, поэтому мы изобразили схематически движение нашего пробного заряда для ненулевых прицельных расстояний. При этом оказывается, что наш заряд движется под ненулевым углом к магнитным линиям поля. В специальном случае, когда скорость заряда составляет прямой угол с магнитными линиями поля, заряд должен двигаться по круговой траектории. Большинство старшеклассников изучают подобные проблемы и даже учатся вычислять радиусы кругового и спирального движений.

Наша задача отличается от вышеупомянутых по двум очень важным причинам. Поле монополя не однородно — его линии расходятся. Поэтому заряд постепенно входит в области все более и более сильного поля. Мы сможем лучше понять траекторию заряда, если разобьем его движение на два этапа. Рисунок 1 выявляет две существенные характеристики движения заряда. В любой момент можно представить скорость в виде векторной суммы двух составляющих — радиальной составляющей, параллельной линиям магнитного поля, и тангенциальной составляющей, перпендикулярной линиям поля. Первоначально движение будет в основном (хотя и не совсем) радиальным, поскольку заряд движется к монополю издалека с небольшим прицельным расстоянием. На рисунке 1, а начальная небольшая тангенциальная составляющая скорости заряда показана стрелкой, направленной за рисунок. Радиальная составляющая скорости не приводит к появлению силы. Сила же, действующая на заряд вследствие тангенциальной составляющей скорости, так же тангенциальная.

Первая общая характеристика движения нашего пробного заряда теперь ясна. По мере приближения к монополю движение превращается из поступательного (близкого к прямолинейному) во вращательное (вокруг узкого пучка линий поля). При этом должен иметь место переход кинетической энергии поступательного движения в кинетическую энергию вращательного движения, поскольку магнитное поле не совершает работы. Действительно, сила Лоренца, действующая на движущийся заряд, всегда перпендикулярна скорости заряда, поэтому она не может изменить величину скорости (а только направление). Заряд, который первоначально двигался по направлению к монополю, замедляет приближение к нему, приобретая одновременно вращательное движение. Так как поле растет по мере приближения заряда к монополю, этот эффект проявляется все больше и больше, пока заряд не приобретает чисто вращательное движение и не перестает приближаться к монополю. Хотя у заряда вначале была в основном радиальная скорость, в конечном итоге он будет иметь чисто тангенциальную скорость.

На рисунке 1, б мы изобразили силу, изменяющую тангенциальную составляющую скорости в магнитном поле. В данном случае сила направлена на рисунке. Таким образом, здесь проиллюстрирована вторая общая характеристика движения нашего заряда: по мере того как заряд приобретает вращательное движение вокруг одной из линий поля, отталкивание между зарядом и монополем растет, что должно привести к обратному превращению вращательного движения в поступательное, но теперь в направлении, противоположном тому, откуда он пришел.

Объединяя все это, можно сказать, что наш заряд будет приближаться к монополю, закручиваясь все больше и больше вокруг одной из линий поля и испытывая отталкивание при этом закручивании. В некоторой точке заряд будет совершать только вращательное движение и, под действием все еще присутствующего отталкивания, начнет удаляться, двигаясь по спирали вокруг той же линии поля. В конечном итоге мы ожидаем, что заряд вырвется обратно, двигаясь к нам с той же скоростью, которую мы ему первоначально придали. Это движе-

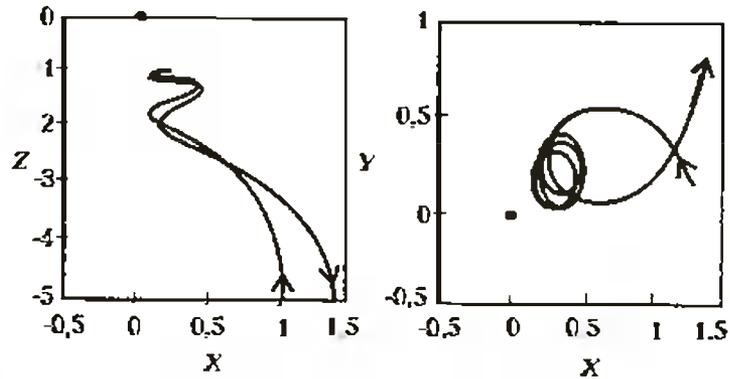


Рис.2 Компьютерные расчеты траектории электрического заряда около магнитного монополя

ние не ограничивается случаем чисто радиального поля, как только что рассмотрели поле монополя. Любое сильно расходящееся магнитное поле будет отражать движущийся заряд таким же образом.

Пространственное движение заряда изображено на рисунке 2 в виде проекции его траектории на две плоскости. Начальная скорость заряда направлена по оси Z, начальное положение заряда в точке $x = 1, y = -5$, а монополь помещен в начало координат. Переменные по осям — это безразмерные величины, используемые для описания движения заряда. Рисунок 2, а представляет вид движения заряда «сверху» в плоскости X, Z. Заметьте, как заряд изменяет свое поступательное движение на вращательное, сначала медленно и затем быстрее и быстрее по мере увеличения интенсивности поля. Рисунок 2, б показывает вид движения заряда, если смотреть от начала «синовой» линии. Заряд первоначально приходит к нам из рисунка и достигает точки, где его движение становится чисто круговым. Силы отталкивания затем посылают его назад в направлении $-Z$, опять заменяя его вращательное движение на поступательное. Спиральное движение заряда вокруг радиальной линии поля ясно видно на двух показанных проекциях.²

Проблема Томпсона 1904 года состоит в том, что в простейшем варианте

² Я не могу считать, что я сам себе иду изобрести эти компьютерные рисунки. В 1988 году я швырял декицию о монополях Канадской команде для Международной Олимпиады по физике. Один из членов команды, Дэвид Хогг, прислал мне несколько аналогичных компьютерных рисунков, которые он сделал в физической компьютерной лаборатории Массачусеттского технологического института. Мне было приятно, когда мой бывший свидетель становится членом команды.

предполагается возможность обстреливать электронами неподвижный монополь. Решение такой задачи несомненно дало бы нам некоторое понимание свойств монополя, но мы имеем значительно больше шансов встретить монополь, движущийся зигзагообразно мимо нас, чем натолкнуться на монополь, стоящий на месте. Нам придется стать немного более изобретательными в наших идеях, чтобы обнаружить монополи, но сначала полезно осознать, что мы можем понять многое в природе, используя наши понятия физики монополей.

Магнитные монополи в природе

Заголовок этого раздела несколько обманчив, поскольку магнитные монополи не существуют (или, по крайней мере, ни один из них не был обнаружен). Тем не менее, наше изучение физики монополей позволит нам понимать природу лучше. Чтобы убедиться в этом, давайте сначала исследуем поле, созданное магнитным диполем. На рисунке 3 изображен магнитный диполь, и мы хотим вычислить величину поля на рассто-

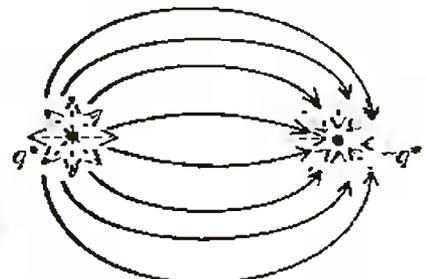


Рис.3 Магнитное поле (сплошные линии) диполя, которое является суперпозицией двух радиальных полей (пунктирные линии), окружающих каждый отдельный полюс

ниям x от средней точки диполя на его оси. Классические линии поля диполя (вспомните Землю или простой стержневой магнит) изображены здесь схематически. Величина поля определяется суперпозицией полей индивидуальных монополей

$$B(x) = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi r_1^2} - \frac{\mu_0 q^2}{4\pi r_2^2},$$

где $r_1 = x - l/2$ и $r_2 = x + l/2$ (l — длина диполя). Вдали от диполя для $x \gg l$, выражение упрощается и дает

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi x^3} \frac{2m}{3},$$

где $m = q^2 l$ — магнитный момент диполя. Вы можете чуть развлечься, записывая выражение магнитного поля вдали от диполя, но на линии, перпендикулярной оси диполя. Это поле тоже обратно пропорционально кубу расстояния. Таким образом можно убедиться, что магнитное поле вдали от диполя всегда меняется как $1/x^3$.

Самое важное состоит в том, что поле магнитного диполя является суперпозицией двух радиальных полей монополей. Вычисление, приведенное выше, как раз использует этот факт. Напомним, что расстояние между полюсами диполя равно l и мы считали, что $r \gg l$. Предположим теперь, что мы исследуем поле диполя на расстоянии $r \ll l$ от одного из полюсов. Впоследствии увидим только радиальное поле монополя, так что, хотя монополи не существуют в природе, поведение заряженной частицы вблизи одного из полюсов поля диполя (или, в более общем случае, любого мультипольного поля) в основном такое, как было описано в предыдущем разделе. Чтобы найти весьма впечатляющий пример этого, обратимся к так называемым радиационным поясам Ван Аллена.

В мае 1958 года американский физик Ван Аллен объявил, что существует пояс окружающий Землю, включающий интенсивные потоки частиц высоких энергий. Его утверждение основывалось на показаниях счетчика Гейгера, который Ван Аллен поместил на ракете, запустившей первый американский спутник Земли (Эксплорер-1). Последующие исследования обнаружили два пояса: внутренний пояс в пределах двух земных радиусов от центра Земли и внешний пояс между двумя и во-

семью земными радиусами. Частицы — это в основном протоны, возникающие под действием высокоэнергетических космических лучей, проникающих в земную атмосферу. Плотность атмосферы на высотах нижних границ поясов (между 400 и 1000 км над уровнем моря) так мизерна, что протоны могли бы путешествовать сотни земных радиусов между столкновениями с молекулами атмосферных газов.

Протоны в нижнем поясе могут иметь энергию вплоть до $3 \cdot 10^7$ эВ, а их плотность такова, что до 20000 частиц могут пересекать площадку в 1 см^2 каждую секунду. Оценки показывают, что для достижения этих величин протон в среднем должен

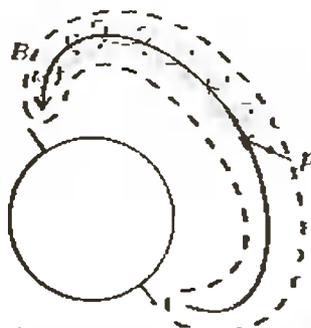


Рис. 4

был бы оставаться пойманным в поясе в течение 10 лет! Что может обеспечить такое удержание высокоэнергетических частиц?

На рисунке 4 магнитное поле Земли показано со схематически изображенным внутренним поясом Ван Аллена. Показана траектория протона с начальной скоростью, направленной под углом к оси пояса. Как и в наших предыдущих рассуждениях, протон будет двигаться по спирали вокруг линии поля по направлению к магнитному полюсу, но в конечном итоге будет отражен назад по начальной линии его движения. Оглядываясь от другого полюса подобным же образом, протон может быть захвачен на годы.

Сейчас наступает время вернуться к основной теме данной статьи — исследованию физики монополей. Я обещал, что мы исследуем великую тайну физики, — и вот мы начинаем

Монополи Дирака

В 1931 году Поль Дирак использовал квантовую механику для изучения свойств монополей и нашел возмож-

ный ответ на вопрос о квантовании электрического заряда. До сего дня остается загадкой, почему электрический заряд существует только в количествах, кратных фундаментальному заряду $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Дирак нашел выражение для «силы» магнитного полюса, которое, казалось, указывало на тот факт, что, если хотя бы один магнитный монополь существует в природе, электрический заряд обязан быть квантованным. Дирак использовал для доказательства этого факта достаточно сложные методы квантовой механики, но мы можем избежать применения сложной математики и добраться до сути дела с помощью современного понимания сверхпроводимости.

Сверхпроводник позволяет току течь без всякого сопротивления. Многие металлы становятся сверхпроводниками ниже некоторой очень низкой температуры (часто сравнимой с температурой жидкого гелия). В последнее время специалисты проявляют большой интерес к области высокотемпературной сверхпроводимости. В этом случае удастся превратить некоторые специальные соединения в сверхпроводники при высокой критической температуре — порядка 100 К. Вообразим, например петлю, сделанную из сверхпроводящей проволоки ЭДС, индуцированная в проволоке за сколь угодно короткий промежуток времени, вызовет стационарный ток, поскольку сопротивление, которое могло бы «подавить» индуцированный ток, отсутствует. Мы можем индуцировать этот ток, пропуская магнитный поток через петлю. Магнитный поток — это производное магнитного поля, проходящего через петлю с током, и площади, охватываемой петлей. Закон Фарадея дает

$$\text{ЭДС} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ — магнитный поток. Если в какой-то момент поток через петлю изменится, в петле будет индуцирована ЭДС, а значит, и ток. Отрицательный знак в законе Фарадея — это напоминание о правиле Ленца, которое утверждает, что индуцированная ЭДС будет противодействовать изменению магнитного потока, которое ее вызвало.

Вообразим также, что монополь с «силой» полюса q' движется по направлению к нашей сверхпровод-

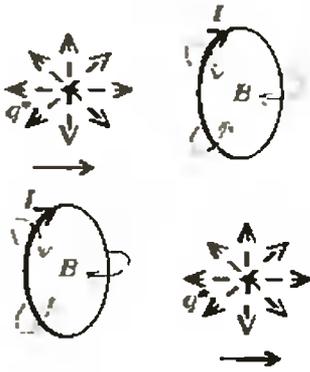


Рис. 5

щей петле (рис.5). Тогда в петле будет индуцироваться начальный ток I , создающий поле B , проходящее через петлю, которое будет, в свою очередь, противоположно полю монополя, которое вызвало индукцию. После того как монополю прошел через петлю, индуцированный ток все еще течет в том же направлении, чтобы создавать поле, которое уменьшающееся поле монополя. Таким образом, когда монополю пройдет через петлю, ток будет течь только в одном направлении. Этот ток

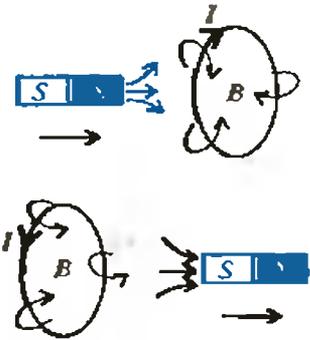


Рис. 6

весьма отличается от тока, индуцированного в петле, когда через нее проходит магнитный диполь (рис.6). В этом случае ток, индуцированный при приближении магнитного диполя к петле, будет того же направления, что для приближающегося монополя, но индуцированный ток для удаляющегося диполя будет противоположен току для приближающегося

Ток, индуцированный в сверхпроводящей петле проходящим монополю, сохранялся бы очень долго после того, как монополю улетел. Это характерное событие позволило бы зарегистрировать прохождение магнитного монополя. С использо-

ванием этого эффекта были сконструированы многие экспериментальные установки. Одной из возникающих при этом проблем оказалось изготовление достаточно больших сверхпроводящих детекторов, которые можно заэкранировать от влияния внешних изменений магнитного поля.

14 февраля 1982 года (в день Святого Валентина) физик Блас Кабрера, работавший на экспериментальной установке в Станфордском университете, зарегистрировал сигнал от одиночного большого события-кандидата, которое дало совершенно правильную форму индуцированного тока. Кабрера использовал четырехвитковую сверхпроводящую катушку с площадью 20 см^2 . Было объявлено, что обнаруженное событие имеет неопределенность всего $\pm 5\%$. Но даже несмотря на то, что Кабрера не мог приписать событие какой-либо другой причине, кроме прохождения монополя, оно не получило общего признания в качестве доказательства существования монополей, поскольку в таком эксперименте не было зарегистрировано других значительных событий.

В 1983 году группа ученых в Беркли собрала установку, которая должна была скомбинировать сигналы от нескольких сверхпроводящих петель, нажда площадью порядка 1 м^2 . Явление, сходных с прохождением монополя, при этом не наблюдалось. Этот метод, однако, остается многообещающим, поскольку очень чувствителен и не зависит от массы и скорости пролетающего монополя.

Закон Фарадея требует, чтобы возник ток, который вызывает магнитный поток, равный и противоположный полному потоку от монополя, проходящего через петлю. Поскольку весь монополю проходит через петлю, полный магнитный поток от монополя должен уравниваться полем петель. Вычислить этот полный поток легко, если мы вообразим сферическую поверхность радиусом r вокруг монополя. Поток будет тогда равен

$$\Phi = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} 4\pi r^2 = \mu_0 q.$$

Придирчивый студент-физик должен возразить против такого вывода. Почему я вычисляю здесь полный поток монополя, когда в большинстве ситу-

аций только поток магнитного поля, перпендикулярного плоскости петель с током, даст вклад в эффект индукции? Рваница со стандартной ситуацией здесь в том, что мы не просто изменяем величину или направление поля относительно петли с током — мы на самом деле пропускаем изолированный источник линий поля через петлю.

Чтобы увидеть, в чем причина, вообразим разделение каждой линии поля на составляющие, перпендикулярные и параллельные плоскости петель с током. Когда монополю приближается к петле, величина перпендикулярной составляющей поля увеличивается, и в петле по закону Фарадея возникает индуцированная ЭДС. Однако радиальные линии поля, параллельные поверхности, также вносят вклад в индуцированную ЭДС. Действительно, вообразим движение петли с током в системе отсчета монополя. Когда металлическая проволока проходит через радиальные линии поля, свободные носители заряда в проволоке будут испытывать действие силы Лоренца, и это вызовет протекание тока в том же направлении, в котором течет индуцированный ток, вызываемый перпендикулярными составляющими поля. И, таким образом, действительно сверхпроводящая петля должна скомпенсировать полный поток монополя.

Теперь приступим к самому любопытному. В 1961 году было экспериментально обнаружено, что поток через сверхпроводящую петлю с током квантован и может принимать только значения, кратные некоторому конечному минимальному потоку. Вспомним, что в нашей экспериментальной установке прохождение монополя оставит постоянный ток, текущий в сверхпроводящей петле. Поскольку поток через петлю зависит от этого тока, который, в свою очередь, вызывается движением носителей заряда, это означает, что носители могут находиться только в дискретных энергетических состояниях. Это должно звучать знакомо — заряд, движущийся по круговой орбите и находящийся только в дискретных энергетических состояниях. Боровская модель атома водорода дает как раз такую картину. Бор утверждал, что электрон, движущийся по круговой орбите радиусом R , должен подчиняться ус-

ловню

$$2\pi R = n\lambda = n \frac{h}{p}$$

где $\lambda = h/p$ — длина волны де Бройля электрона (здесь $p = mv$ — импульс электрона, h — постоянная Планка) В нашем случае мы можем считать, что носитель заряда — электрон — движется по круговой орбите в однородном магнитном поле B Сида Лоренца будет вызывать центростремительное ускорение:

$$evB = m \frac{v^2}{R}$$

Комбинация этих двух результатов даст

$$B(\pi R^2) = n \frac{h}{2e}$$

Таким образом, поток через петлю с током квантован:

$$\Phi = B(\pi R^2) = n \frac{h}{2e}$$

Квант потока (или флюксон) очень мал — порядка $2 \cdot 10^{-15}$ Тл m^2 . В типичной макроскопической системе это квантование не заметно, т.е. не каждый электрон, движущийся по круговой орбите, надо рассматривать квантово-механически. Однако сверхпроводники — это редкий класс материалов, у которых квантово-механическое поведение становится заметным на макроскопическом уровне (Этп должно быть темой другой статьи, а сейчас достаточно отметить, что в процессах твпа сверхпроводимости и сверхтекучести — когда жидкость течет, не обнаруживая вязкости, квантовые корреляции макроскопического масштаба между одиночными электронами очень реальны и очень заметны) В результате прохождения монополя через сверхпроводящую петлю возникает магнитный поток величиной всего в пару флюксонов. Замечательно, что современная технология может аккуратно измерить столь малый поток (и это возможно только благодаря развитию сверхпроводящих полупроводниковых устройств).

Скомбинируем наши результаты для полного потока, который должен быть уравновешен потоком петли с токком из-за прохождения монополя, и условий квантования потока. Мы в

конечном счете приходим к равенству

$$\mu_0 q^2 e = n \frac{h}{2}$$

Это — знаменитое дираковское условие для магнитного заряда монополя. Здесь оно выражено в единицах СИ, которая обычно не используется для квантово-механических расчетов (вот почему оно может показаться с первого взгляда незнакомым тому, кто видел его ранее выраженным в единицах других систем). Дирак впервые вывел это условие в 1931 году, и монополи, которые оно описывает, до сих пор называются монополями Дирака. То, что оно утверждает, замечательно. Если хотя бы один монополь с каким угодно магнитным зарядом существует во Вселенной, то электрический заряд обязательно должен быть квантованным. То, почему электрический заряд квантован, на самом деле великая тайна физики. Нет причин, почему это должно быть именно так. Просто так оно есть. Существование монополя Дирака объяснило бы причину квантования заряда (а физики любят знать причины вещей)

Мы можем оценить массу монополя Дирака по результатам квантования. Энергии электрического и магнитного полей даются выражениями

$$W_e \sim E^2, W_m \sim \frac{B^2}{c^2},$$

где c — скорость света, а E и B — электрическое и магнитное поля. Поскольку поля электрона и монополя пропорциональны электрическому и магнитному зарядам соответственно, мы можем оценить массу монополя Дирака так.

$$m_m = \frac{q^2}{c^2 e^2} m_e$$

Используя наше условие квантования, мы находим, что минимальная масса монополя Дирака

$$m_m \geq \frac{h^2 m_e}{2^2 e^2} \geq 4700 m_e$$

Таким образом, у монополя Дирака должна быть масса лишь немного больше двух протонных масс. Не исключено, что монополь Дирака мог бы возникнуть в современном

ускорителе, но оказалось, что это не самый эффективный путь его поиска.

Большой магнитный заряд и относительно маленькая масса монополей Дирака означают, что один из них может быть ускорен до очень больших скоростей галактическими магнитными полями и затем сильно взаимодействовать с веществом (Монополь, алетая в вещество с большой скоростью, действует как шар для боулинга в магазине фарфора) Тогда почему ученые не ищут монополей? Может быть, их вокруг очень мало (если они вообще существуют)?

Модель расширяющейся Вселенной может предложить объяснение. Предполагается, что если «первобытные» монополи и возникли бы в достаточном количестве при Большом Взрыве, то быстрое раздувание Вселенной ограничило бы плотность монополей до значений, которые находятся в согласии с тем верхним пределом их плотности, который можно определить, опираясь на факт ненаблюдаемости монополей.

Наконец, дираковская теория монополя не является единственным претендентом на истину. Так, наиболее известная среди других теорий — Теория великого объединения (ТВО для краткости) также предсказывает существование монополей. Эти ТВО-монополи должны иметь свойства, весьма отличные от монополей Дирака. Наиболее существенно, что их массы могут быть даже в 10^{16} раз больше массы монополей Дирака. Эта огромная масса означала бы, что ТВО-монополь мог быть порожден только во время Большого Взрыва. Если бы это было так, было бы вполне вероятно, что имеется некоторый высший смысл в квантовании как электрического, так и магнитного зарядов. В физике тайны порождают тайны.

Самоподобные мозаики

Н. ДОЛБИЛИН

ПЕРЕД чтением этой статьи необходимо ознакомиться со статьей «Игра «Хаос» и фракталы» («Квант» № 4 за 1997 г.) В той статье упоминается, что многие фракталы самоподобны. Однако прежде чем рассуждать о самоподобных фракталах, разумно обратиться к более простым примерам самоподобных объектов — мозаикам. Один из первых и знаменитых примеров самоподобных мозаик был построен английским физиком Роджером Пенроузом. После открытия в 1984 году физических кварккристаллов узоры Пенроуза стали общепринятой моделью для изучения их геометрических свойств. Новые неожиданные связи этих разбиений с некоторыми другими разделами математики были обнаружены американскими математиками Джоном Конвеем и Билом Терстоном. Явление самоподобия играет важную роль в современных областях математики, таких как динамические системы, фракталы, кварккристаллы.

Самоподобные фигуры

Хорошо известно, что треугольник разбивается средними линиями на четыре равных между собой треу-

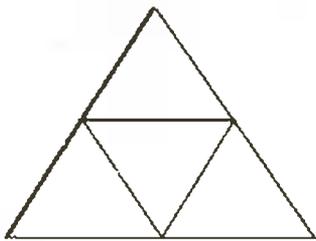


Рис. 1

гольника (рис.1). Каждый из них подобен исходному. В этом смысле треугольник является самоподобной фигурой.

Фигуру F называют *самоподобной*, если ее можно разрезать на несколько фигур F_1, F_2, \dots, F_m , каждая из которых подобна исходной.

Так как каждое слагаемое F_i подобно фигуре F , то имеется преобразование подобия h_i , которое переводит фигуру F в фигуру F_i : $h_i(F) = F_i$. Коэффициенты $k_i, i = 1, \dots, m$, этих преобразований подобия не обязательно равны между собой, но все меньше единицы.

Преобразования подобия

Вспомним, что *преобразование подобия* называется такое преобразование h плоскости (или пространства), при котором расстояние $d(x, y)$ между любыми двумя точками x и y изменяется в некоторое, одно и то же, число k раз:

$$d(x, y) = k \cdot d(h(x), h(y)), \quad k > 0$$

В частном случае, когда $k = 1$, преобразование подобия является движением. Некоторые из движений, например *параллельный перенос* или ненулевой вектор, перемещают *каждую* точку в некоторую *другую* точку. Другие, например *поворот* g плоскости вокруг точки O на некоторый угол, оставляют точку O на месте. Протякую точку O , что $g(O) = O$, говорят, что она является *неподвижной* точкой преобразования g . Таким образом, поворот вокруг точки имеет *единственную неподвижную точку*. Третий тип движений — *отражение* (симметрия) относительно некоторой прямой l — имеет *бесконечно много неподвижных точек*, которые составляют прямую l . Итак, одни движения могут не иметь неподвижных точек, другие могут иметь одну или бесконечно много неподвижных точек.

Положение меняется, когда мы имеем дело с подобием h , не являющимся движением, а именно когда коэффициент $k (> 0)$ подобия h не равен 1. Тогда преобразование h имеет неподвижную точку и притом *единственную*!

Благодаря замечательной теореме о неподвижной точке всякое преобразование подобия плоскости с коэффициентом $k \neq 1$ имеет единственную неподвижную точку, скажем точку O . Поэтому преобразование подобия можно представить как гомотегию с центром в точке O и коэффициентом

Эта прекрасная теорема верна не только для преобразований подобия, но и для любых общих сжимающих отображений $f(x)$, когда $d(x, y) \leq k \cdot d(f(x), f(y))$ при некотором $0 < k < 1$.

k с последующим поворотом вокруг O на некоторый угол или отражением относительно некоторой прямой, проходящей через O . В частности, такое преобразование может быть «чистой» гомотегией, т.е. может не содержать никакой поворотной составляющей.

Примеры самоподобных фигур

Треугольник

Итак произвольный треугольник разбивается средними линиями на четыре подобных ему треугольника. Каковы те преобразования подобия, которые переводят исходный треугольник ABC в ему подобные части? Первые три — это гомотегии с центрами в вершинах A_1, A_2, A_3 и коэффициентом $\frac{1}{2}$, и четвертое — это гомотегия с центром в точке пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$ и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Последнее преобразование можно представить иначе как гомотегию в точке пересечения медиан с положительным коэффициентом $\frac{1}{2}$ с последующим поворотом вокруг той же точки на 180° .

Прямоугольный треугольник

Если треугольник прямоугольный, то он допускает, как известно, и другое разбиение на два подобных треугольника (рис.2)

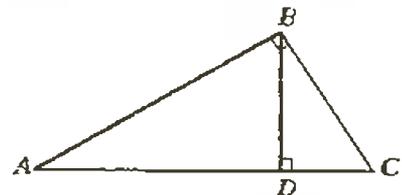


Рис. 2

Рассмотрим преобразование подобия g_1 , которое есть произведение гомотегии h_1 с неподвижным центром в вершине A и с коэффициентом $k_1 = \frac{AB}{AC}$ и отражения относительно биссектрисы угла $\angle BAC$. Ясно, что

$$g_1(\triangle ABC) = \triangle ADB$$



Преобразование g_2 , которое переводит треугольник $\triangle ABC$ в $\triangle BDC$, есть, как легко видеть, произведение **гомотетии** с центром в S и коэффициентом $k_2 = \frac{BC}{AC}$ и **отражения** относительно биссектрисы угла $\angle ACB$.

Обратим внимание на одно отличие этого примера от предыдущего. В случае прямоугольных треугольников коэффициенты преобразований различны по абсолютной величине.

«Домино»

Фигура «домино» состоит из двух равных квадратов и может быть опять



Рис. 3

разрезана на 4 подобные копии (рис. 3).

Задача 1. Определите неподвижную точку для каждого из преобразований подобия h_i .

«Стул»

Фигура «стул» (тримино) составляется из трех равных квадратов и может быть разрезана на 4 подобных копии F_1, F_2, F_3 и F_4 (рис. 4). Пусть

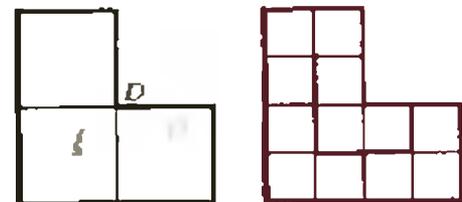


Рис. 4

h_1, h_2, h_3, h_4 — преобразования подобия, которые переводят «большой» стул в соответствующие части. Ясно, что все они имеют коэффициент $\frac{1}{2}$. При этом h_1 и h_2 являются, очевидно, гомотетиями с центрами в точках A и D соответственно.

Задача 2. Определите неподвижную точку для преобразования подобия h_3 (соответственно h_4).

«Сфинкс»

«Сфинкс» (гексамино) составляется из 6 равных треугольников (рис. 5) и может быть разбит на 4 подобные копии (рис. 6).

Задача 3. Определите неподвижную точку для каждого из преобразований подобия h_i .

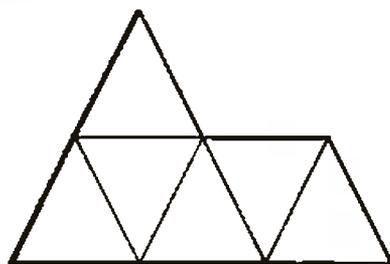


Рис. 5

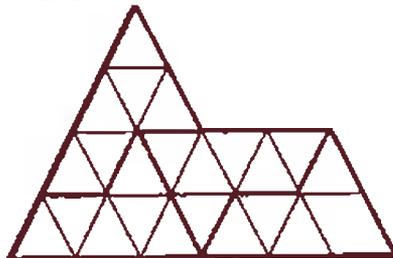


Рис. 6

Самоподобные фигуры и мозаики

Рассмотрим на плоскости какую-нибудь «хорошую» самоподобную фигуру F без дыр, такую как, например, треугольник или параллелограмм или еще какой-нибудь самоподобный многоугольник, который допускает разбиение на подобные ему и в то же время попарно равные между собой фигуры. Тогда копиями фигуры F можно замостить всю плоскость без пропусков и перекрытий. Замощение *всей* плоскости плитками без перекрытий называют *мозаикой*. Если все плитки в мозаике попарно равны, то мозаика называется *монодральной*.

Как получить монодральную мозаику, исходя из самоподобной фигуры F ? Имеется несколько путей. Один из них, на первый взгляд, кажется наиболее простым, хотя в действительности содержит каверзный момент. Возьмем, например, «стул» F определенного размера (рис. 7, а) и

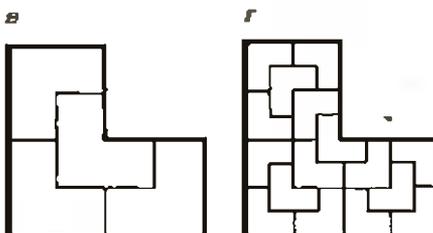
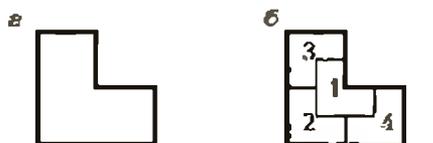


Рис. 7

разобьем его на четыре «стульчика», каждый вдвое меньшего размера (рис. 7, б). Увеличим эту картинку вдвое так, чтобы каждый «стульчик» вырос до размеров оригинала (рис. 7, в). Затем разрежем каждый из четырех «стульев» опять на четыре «стульчика» (рис. 7, г) и опять получившиеся увеличим вдвое. Повторяя эту процедуру опять и опять, мы получаем неограниченно расширяющуюся F -образную область, состоящую из равных «стульев».

Эта процедура имеет странное название: «дефляция — инфляция». Знакомое всем нам слова «инфляция» соответствует этапу укрупнения плиток, а менее привычное «дефляция» — подразбиению укрупненных на предыдущем этапе плиток на более мелкие плитки. «В пределе», как часто говорят, этот процесс (будем обозначать его как «ди-процесс») приводит к монодральной мозаике. Но как раз «переход к пределу» и содержит упомянутый выше каверзный момент. Собственно, о каком «пределе» здесь идет речь? Очевидно, что в результате ди-процесса мы получаем *возрастающую по размерам* последовательность кусков плоскости, уложенных плитками. Однако эта последовательность не есть последовательность фрагментов, вырастающих следующий из предыдущего по мере того, как мы добавляем к уже уложенной мозаике новые и новые плитки. Тем не менее можно доказать, что самоподобным многоугольником всегда можно замостить плоскость.

Мозаика, полученная посредством самоподобной фигуры F , называется **самоподобной**, если

- плитки этой мозаики (будем говорить, что это — плитки 1-го уровня) могут быть объединены в более крупные плитки (плитки 2-го уровня), которые подобны плиткам 1-го уровня, причем так, что плитки 2-го уровня опять составляют мозаику (рис. 8, а);

- такое последовательное укрупнение возможно для любого k -го уровня (рис. 8, б).

В силу этого самоподобные мозаики называют также *иерархическими*, понимая под этим иерархию, которая существует между плитками предыдущего и последующего уровней. Однако иерархия может быть как «строгой», так и «слабой». Присущей иерархии мозаика каждого сле-

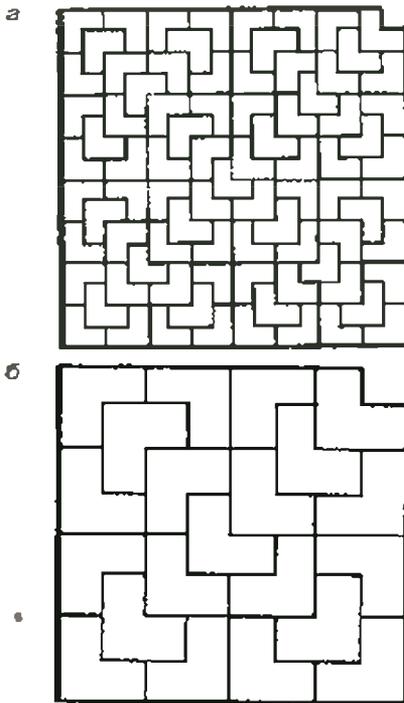


Рис. 8

дующего уровня komponуется из плиток мозаики предыдущего уровня единственным способом. При слабой иерархии плитки мозаики могут объединяться в плитки мозаики следующего уровня несколькими разными способами

Строгий или слабый характер иерархии во многом определяется самой фигурой F . Так, квадрат определяет слабую иерархию. Действи-

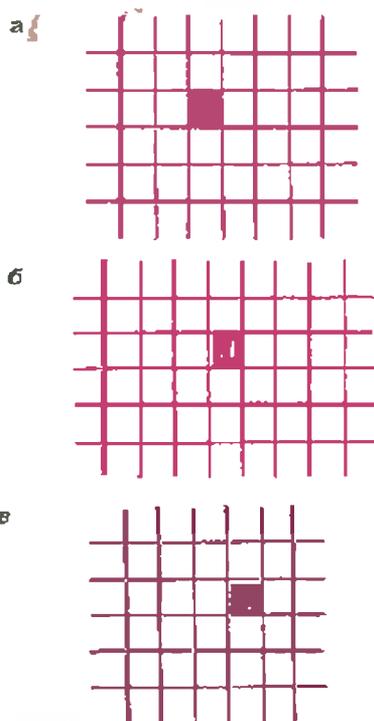


Рис. 9

тельно, мозаика из квадратов (рис. 9, а) может быть укрупнена в мозаику 2-го уровня разными способами, так что данный квадрат A 1-го уровня может входить в плитки мозаики 2-го уровня различными способами (рис. 9, б, в)

А вот «стула», «сфинкса», «домино» определяют строгую иерархию. Возьмем какую-нибудь плитку «стула» в соответствующей мозаике. Он вместе с тремя другими «стульями» объединяется в «стула» 2-го уровня, причем каждая плитка 1-го уровня определяет тройку дополнительных плиток однозначно.

Тем самым укрупненная мозаика 2-го уровня определяется однозначно. Так как мозаика 2-го уровня обладает тем же свойством, то самоподобное разбиение плоскости на «стулья» — строго иерархическое.

Свойства строго иерархических мозаик

Строго иерархические мозаики обладают рядом удивительных свойств, отличающих их от слабо иерархических.

Непериодичность

Мозаика, для которой можно указать хотя бы один параллельный перенос, переводящий ее в себя, называется *периодической*.

Слабо иерархические мозаики, как это видно на примере квадратной мозаики, могут быть периодическими. Так, любая плитка квадратной мозаики может быть параллельно перенесена в любую другую плитку вместе со всей мозаикой.

Важнейшее отличие строго иерархических мозаик — в том, что все они **непериодичны**. Причина непериодичности строго иерархических мозаик проста. Действительно, предположим, что существует параллельный перенос t , который передвигает всю строго иерархическую мозаику в себя. Ясно, что перенос t перемещает каждую плитку F_1 мозаики в какую-то другую плитку F_2 . В силу однозначной определенности следующей мозаики из плиток 2-го уровня параллельный перенос t перемещает в себя также мозаику 2-го уровня и, вообще, мозаику любого k -го уровня. Опять, в силу того, что плитки мозаики второго уровня однозначно составляют плитки мозаики 3-го уровня, параллельный перенос t

перемещающий в себя мозаику 2-го уровня, перемещает в себя мозаику 3-го уровня, и, вообще, мозаику любого уровня k .

Плитка k -го уровня в 2^{k-1} раз больше плитки мозаики 1-го уровня. Поэтому, если в плитку 1-го уровня можно поместить круг диаметром, скажем, d (рис. 10, а), то в плитку k -го уровня можно поместить круг диаметром $2^{k-1}d$. При достаточно большом значении k диаметр $2^{k-1}d$ превзойдет длину вектора переноса

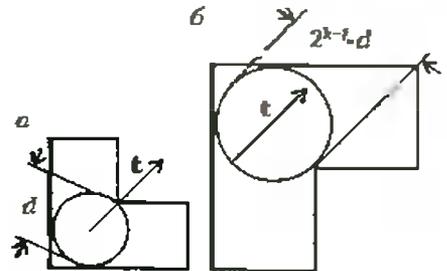


Рис. 10

t (рис. 10, б). Это означает, что перенос на вектор t переводит круг радиуса $2^{k-1}d$ в круг такого же радиуса, перекрывающийся с первым. С другой стороны, эти круги должны принадлежать разным плиткам k -уровня и потому круги не могут пересекаться. Почему разным? Дело в том, что никакая ограниченная фигура, как нетрудно видеть, при параллельном переносе не может переходить в себя. А так как различные плитки мозаики k -го уровня не перекрываются друг с другом, то тем более не перекрываются и содержащиеся в них круги. Пришли к противоречию.

Итак, все строго иерархические мозаики непериодичны. В то время как периодические мозаики являются удобной моделью для кристаллов, строго иерархические мозаики играют важную роль в изучении квазикристаллических структур, которые были обнаружены в природе чуть более 10 лет тому назад. В отличие от кристаллических, эти структуры уже непериодичны. В частности, знаменитые узоры Пенроуза (рис. 11), являющиеся наиболее известной геометрической моделью квазикристалла, представляют собой прямое обобщение строго иерархической мозаики.

«Все — на одно лицо»

Теперь еще об одной особенности мозаик со строгой иерархией. Так

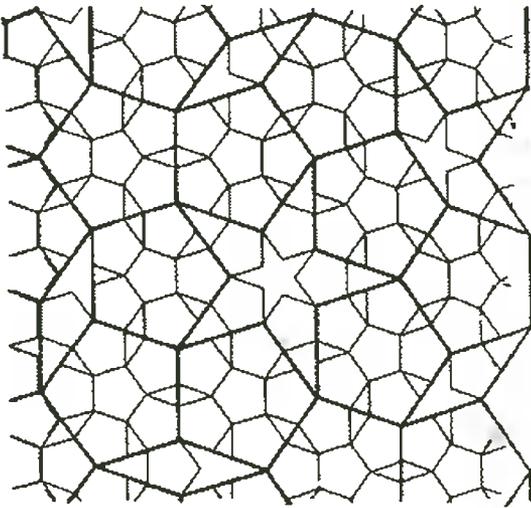


Рис. 11

как в этом случае восстановление мозаики каждого следующего уровня по предыдущему происходит вполне однозначно, то строго иерархическая мозаика, например такая, как «стул», на первый взгляд, должна определяться однозначно. Однако, как раз наоборот, разных самоподобных мозаик, составленных из плиток «стул», бесконечно много. Более того, их даже несчетно много. Уточним, что две (бесконечные) мозаики на плоскости считаемся одинаковыми, если одну из них можно совместить с другой некоторым движением плоскости. В противном случае мозаики считаются разными.

Объясним, например, почему из «стульев» получается несчетное множество самоподобных мозаик. Разобьем «стул» на 4 «стульчика» и каждому из них припишем одно из четырех чисел 1, 2, 3 или 4, как показано на рисунке 7, 6. Пусть «стул» из первом этапе див-процесса входит в больший «стул» под номером a_1 . В свою очередь, из 2-этапе див-процесса этот «стул» входит под некоторым номером a_2 в «стул» следующего уровня и т. д. Таким образом, мозаика, вырастающая из данного «стула», определяет некоторую последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, состоящую из чисел 1, 2, 3, 4. Та же мозаика может вырасти из любой другой ее плитки. При этом получится другая последовательность. Так как число плиток в данной мозаике счетно, а различных последовательностей несчетно много, то и различных самоподобных мозаик из «стульев» несчетно много.

Так как строго иерархические мозаики, которые можно составить из данной самоподобной плитки, несчетно много, то все такие мозаики нельзя занумеровать одним лишь натуральными числами, как элементы последовательности. Но можно «занумеровать» при помощи действительных чисел.

Допустим, что все мозаики из несчетной семьи «Стул» уже получили свои имена в виде действительных чисел, и теперь мы хотели бы составить их семейный альбом. Каждая мозаика — бесконечна, и уместить ее на «фотографии» ограниченного размера невоз-

можно. «Портрет» мозаики — это, разумеется, некоторый ограниченный ее фрагмент. Поэтому портретов у данной мозаики может быть много, даже бесконечно много. Допустим теперь, «фотограф» уже отобрал в этот альбом по портрету для каждой из мозаик, но, забыв вовремя подписать фотографии, написал имена в альбоме наоборот. Как это ни удивительно, но по существу никакой ошибки он при этом не совершил. Дело в том, что любой конечный фрагмент, который можно встретить в какой-нибудь мозаике из семейства «Стул», можно встретить также в любой другой мозаике из этого семейства, причем встретить его в каждой мозаике бесконечно много раз.

Таким образом, все строго иерархические мозаики из одной семьи, хотя в целом, т. е. глобально, отличаются друг от друга, локально выглядят как «близнецы-братья».

Мозаики Конвея

Напомним, что самоподобная мозаика может быть периодической. Если же она имеет строгую иерархию, то она непериодическая. Однако несмотря на непериодичность рассматривавшихся нами строго иерархических мозаик плитки в них имели лишь конечное число положений с точностью до параллельного переноса. Так, в случае «доминио» все (прямоугольные) плитки «рассыпались» на два класса параллельных друг другу плиток, в случае «стула» — на четыре.

Задача 4. Сколько классов параллельных между собой плиток в иерархической мозаике «финкса»?

Вопрос существует ли мозаика, составленная по-прежнему из идентичных плиток, однако такая, что плитки эти уже ориентированы в мозаике бесконечным числом способов? В 1992 году Конвей предложил самоподобную мозаику со строгой иерархией, в которой все плитки суть равные треугольники, допускающие однако бесконечное число различных ориентаций. Идея очень проста: возьмем прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2 и гипотенузой $\sqrt{5}$. Он допускает самоподобное разбиение на 5 равных треугольников (рис 12а, б). Острый угол α треугольника равен $\alpha = \arctg 1/2$. Указанное разбиение треугольника Конвей индуцирует самоподобные мозаики — мозаи-

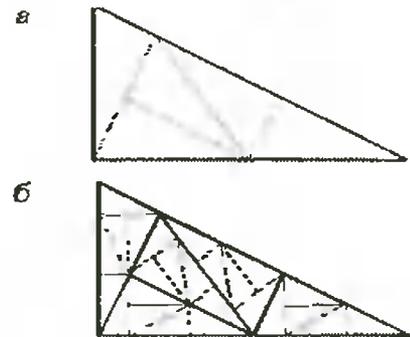


Рис 12

ки Конвея. Легко видеть, что в мозаике Конвея для любой ее треугольной плитки и любого целого m всегда найдется другая плитка, повернутая относительно первой на угол $m \cdot \alpha$. Однако, как можно показать, угол α несоизмерим с 2π (см задачу ниже). Тогда любые два треугольника, повернутые относительно друг друга на $m \cdot \alpha$, $m \neq 0$, не параллельны друг другу. Поэтому в мозаике Конвея треугольные плитки встречаются в бесконечно многих ориентациях.

В действительности, все мозаики Конвея — самоподобные мозаики со строгой иерархией, поэтому их бесконечно, даже несчетно много, и во всех них треугольники прикрутываются с бесконечно многими ориентациями.

Задача 5. Докажите, что угол $\arctg 1/2$ несоизмерим с π , т. е. что уравнение $n \arctg 1/2 = m \pi$ не имеет решений в натуральных числах (m, n).

Отметим еще раз основное свойство мозаики Конвея, для любого возможного положения треугольника Конвея Δ на плоскости и любого маленького положительного значе-

ния ϵ в мозаике Конвея найдется плитка Δ_ϵ , которая «параллельна» треугольнику Δ с точностью до ϵ , т.е. углы между соответствующими сторонами треугольников Δ и Δ_ϵ меньше ϵ . Другими словами, ориентации плиток в мозаике Конвея распределены всюду плотно во множестве всех возможных ориентаций вообще.

Несколько позже Конвей (совместно с другим математиком Чарльзом Радзином) предложил вариант пространственной мозаики, состоящей из равных призм, чьи ориентации распределены «всюду плотно» среди всех возможных ориентаций в пространстве. Ориентацию многогранника в пространстве можно определить при помощи *тройки*, скажем взаимно перпендикулярных векторов, жестко связанных с перемещаемым многогранником. «Всюду плотность» ори-

ентаций ячеек означает, что для любого положения многогранника P в пространстве и любого заданного наперед сколь угодно маленького $\epsilon > 0$ найдется такая ячейка P_ϵ мозаики, что векторы ее тройки составляют с соответствующими векторами из тройки многогранника P углы меньше ϵ .

В качестве исходного объекта берется прямая призма (рис. 13, а) высотой 2, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 2 и $2\sqrt{3}$ и гипотенузой 4. Этот треугольник разбивается на четыре ему подобных, как указано на рисунке 13, б. Поэтому исходная призма (рис. 13, а) может быть разбита на восемь ей подобных призм (рис. 13, в). Теперь две призмы A и B на верхнем этаже, взятые вместе, составляют *правильную* треугольную призму. Поэтому эту пару как единое целое можно повернуть на 120° и затем водворить ее на прежнее место (рис. 13, г). Далее, призмы C и D (рис. 13, в) на нижнем этаже составляют прямоугольный параллелепипед с квадратной гранью 1×1 . Поэтому повернем эту пару на 90° и разместим ее на том же месте (рис. 13, г).

В итоге мы получили конструкцию Конвея — Радина. Заметим, что в этой конструкции идентичны призмы, повернутые друг относительно друга на 120° и на 90° вокруг взаимно перпендикулярных осей. Самоподобная мозаика из призм Конвея — Радина, которая строится при помощи процесса инфляции-дефляции, наряду с каждой призмой P будет содержать призмы, повернутые относительно P при помощи всевозможных комбинаций вида

$$g_1^{m_1} g_2^{m_2} g_1^{m_3} g_2^{m_4} \dots g_1^{m_n} g_2^{m_{n-1}},$$

где g_1 и g_2 — повороты на 120° и 90° вокруг взаимно перпендикулярных осей.

За ориентирующую тройку векторов можно взять три взаимно перпендикулярно направленных ребра призмы, исходящих из вершины прямого угла основания призмы. Сравнительно нетрудно показать, что в силу перпендикулярности осей поворотов g_1 и g_2 множество различных ориентаций должно быть бесконечным. Установить всюду плотность всевозможных ориентаций призм в мозаике Конвея — Радина — задача потруднее. Ее решение требует знания теории групп.

Игра «Хаос» и самоподобные мозаики

Неожиданный и простой способ получения самоподобных мозаик на компьютере дает так называемая игра «Хаос». Она имеет много вариантов, один из них был подробно исследован в статье «Игра «Хаос» и фракталы».

Мы напомним правила игры. В качестве исходного набора преобразований подобия возьмем те, которые переводят треугольник Конвея в пять составляющих его треугольничков. Обозначим их через h_1, h_2, h_3, h_4 и h_5 (см. рис. 12, б). Пусть датчик случайных чисел выдает числа 1, 2, 3, 4 или 5. Отметим на плоскости *произвольную* начальную точку x_0 .

Шаг 1-й. Предположим, датчик выдал число 2. Пусть $x_1 = h_2(x_0)$.

Шаг 2-й. Предположим, что на датчике выпало число 1. Обозначим через x_2 точку $x_2 = h_1(x_1)$.

Шаг n -й. Пусть уже имеется точка x_{n-1} и на n -й раз выпадает число α_n , где $\alpha_n = 1, 2, 3, 4$ или 5. Тогда, по определению нашей последовательности, $x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1})$.

Действуя таким образом, мы получим последовательность точек

$$X = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$$

Не алаяясь здесь в причины (читатель может найти их в упомянутой ранее статье), заметим, что результатом выведения на дисплей, скажем, первых двух-трех тысяч точек будет

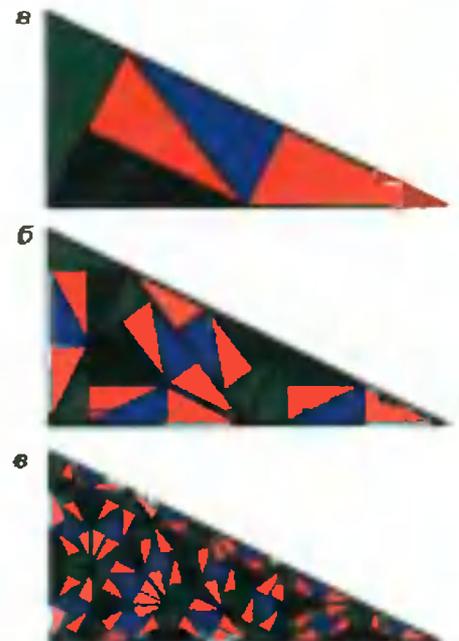


Рис 14

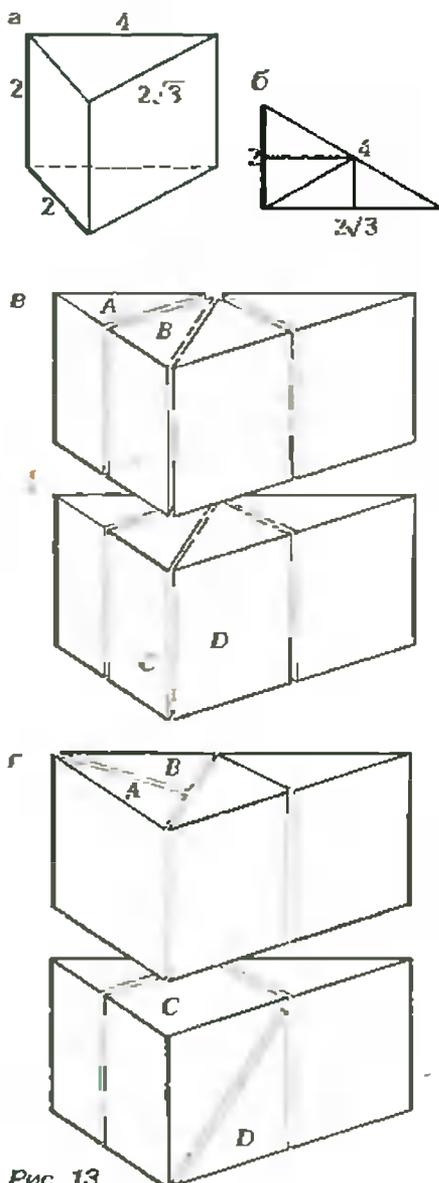


Рис 13

изображение на экране треугольника Конвея

И вообще, пусть F — самоподобная фигура, $F = F_1 \cup \dots \cup F_m$ и h_i, h_m — преобразования подобия, переводящие фигуру F в подобные составляющие F_1, \dots, F_m . Игра «Хаос» замечательна тем, что, используя в ней преобразования h_i , можно получить на экране фигуру F .

Для того чтобы получить мозаику, будем раскрашивать точку $x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1})$ в зависимости от значения выпавшего числа α_n . Давайте сопоставим числу 1 зеленый цвет, числу 2 — красный, 3 — синий, 4 — оранжевый и, наконец, 5 — серый. Будем теперь окрашивать точку $x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1})$ в цвет, соответствующий числу α_n . Тогда на дисплее мы получим цветную картинку (рис. 14, а). Это — первый фрагмент самоподобной мозаики Конвея. Если же точку x_n окрашивать в цвет, соответствующий номеру α_{n-1} , то мы получим более детальный портрет той же мозаики в цвете (рис. 14, б). Еще более дробный фрагмент получается, если каждую точку x_n окрашивать в цвет, соответствующий номеру α_{n-2} (рис. 14, в) и т.д.

Задача Конвея

Подведем некоторые итоги. Итак, если многоугольник самоподобен, то его копиями можно заполнить всю плоскость. Причем если мозаика из этих многоугольников строго иерархична, то она неперидична. Таковы, например, самоподобные мозаики, составленные из «стульев». Однако было бы ошибочно думать, что из «стульев» можно составить лишь неперидические мозаики. На рисунке 15 представлена простенькая мозаика из «стульев», которая является периодической. Таким образом, самоподобные многоугольники наряду со строго иерархическими мозаиками, которые неперидичны, могут допускать также и периодические мозаики.

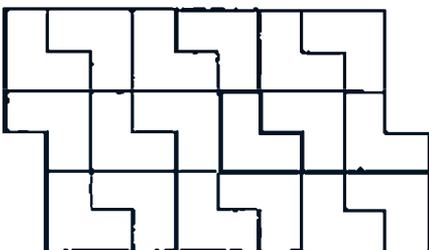


Рис. 15

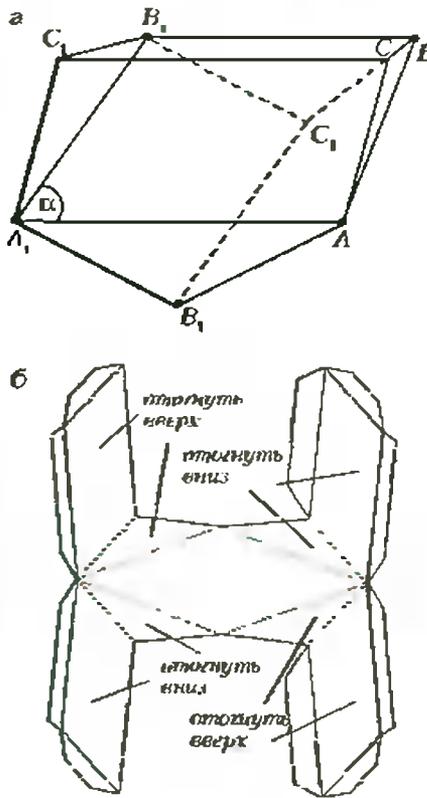


Рис. 16

Джон Конвей поставил вопрос, существует ли на плоскости такая многоугольная или даже криволинейная фигура, из которой можно составить лишь НЕпериодические мозаики? Любопытно, что в пространстве на подобный вопрос недавно был получен положительный ответ: да, существует. Это — так называемая бипризма Шмитта — Конвея — Давцера (рис. 16, а). Склеить ее можно из выкройки, представленной на рисунке 16, б (заметьте, что это — не развертка многогранника в обычном ее понимании, так как в выкройку входит ромб, который является не гранью призмы, а вспомогательным элементом конструкции).

Бипризма определяется следующим образом. Возьмем сначала треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$, у которой боковая грань $ABBA_1$ есть ромб (с острым углом α). Теперь приставим к ромбовидной боковой грани такую же призму, повернув исходную призму на угол 180° вокруг диагонали ромбической грани. Заметим, что боковые ребра второй призмы составляют угол α с боковыми ребрами первой призмы. Пара так приставленных друг к другу призм составляет искомую бипризму.

Нетрудно убедиться в том, что бипризма разбивает пространство, т.е.

заполняет его без пропусков и перекрытий. И устройство всех таких мозаик во многом предсказуемо. Действительно, если мы хотим заполнить пространство такими бипризмами, мы должны прежде всего составить из них слой (рис. 17, а). Все бипризмы в данном слое параллельны друг другу. Более того, слой представляет собой периодическое семейство бипризм. Далее все пространство заполняется такими слоями (рис. 17, б). Очевидно, что каждый следующий слой получается из предыдущего поворотом вокруг перпендикулярной (к плоскости слоя) оси на угол, равный острому углу ромба, с последующим параллельным переносом. Поэтому если угол ромба несоизмерим с π , т.е. если $\alpha \neq \frac{m}{n}\pi$, то никакие две бипризмы из разных слоев не параллельны друг другу с другой стороны, каким параллель-

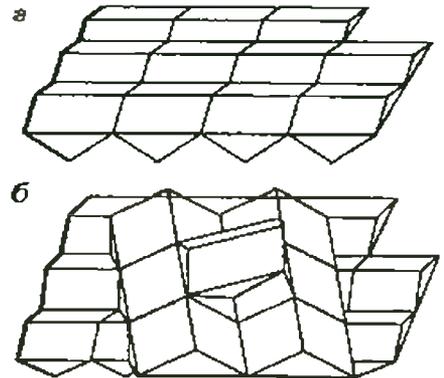
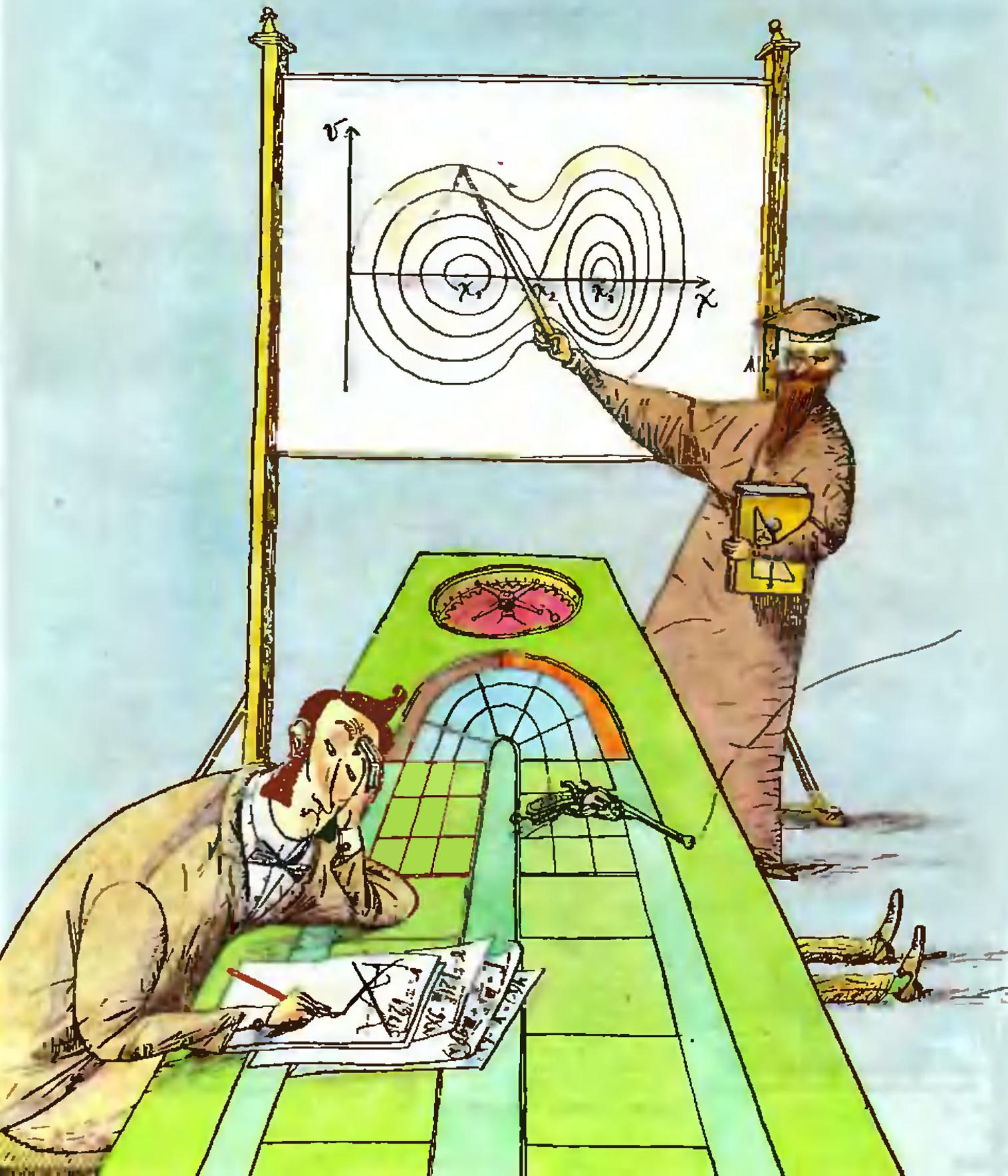


Рис. 17

ный перенос, который совмещает один слой с самим собой, не совмещает, как нетрудно видеть, никакой другой слой с собой. Таким образом, при $\alpha \neq \frac{m}{n}\pi$ не существует ни одного (I) параллельного переноса, который бы совмещал это разбиение с собой.

Однако неизвестно, существует ли аналогичная фигура на плоскости. Однако не исключено, что таких так называемых «аперидических» плиток на евклидовой плоскости нет, т.е. если фигура допускает какие-то мозаики, то среди них будет непременно и периодическая.

Заметим, что аналог «аперидической» плитки на плоскости Лобачевского уже найден. И будет замечательно, если кто-нибудь из читателей «Кванта» откроет «аперидическую» плитку на евклидовой плоскости.



Физика рулетки

Э.РУМАНОВ

РУЛЕТКА манит возможностью быстро разбогатеть без особого труда — достаточно лишь «поймать удачу». Погоня за удачей создает драматические ситуации, изображение которых так обжигающе правдиво у Ф.М.Достоевского (в «Игроке»). Мы же обратимся не к человеческим страстям и порокам, а к их объекту — самой рулетке.

Почему нельзя заранее определить, куда попадет шарик? Если известны начальные условия — положение и скорость шарика в тот момент, когда его запускает крупье, — то, казалось бы, интегрируя уравнения Ньютона, можно узнать всю траекторию и, в частности, ту точку, где шарик остановится. П.Лаплас (1749 — 1827) думал, что предсказывать будущее мешают чисто технические трудности: нет такого демона, который смог бы проинтегрировать множество уравнений для всех частиц Вселенной. Демона действительно нет, зато появились компьютеры, способные справиться с объемом вычислений, какой во времена Лапласа едва ли можно было представить. Тем не менее, наша способность делать точные (а не вероятностные — типа «ожидается переменная облачность, местами возможен кратковременный дождь») предсказания с тех пор практически не возросла. Что же мешает изгнать случайность из нашей жизни? Попробуем разобраться.

С этой целью вместо настоящей рулетки рассмотрим весьма упрощенную, но вполне работоспособную ее модель. Пусть шарик движется по желобу, изогнутому, как показано на рисунке 1. Ускорение в каждой точке определяется действием силы тяжести и силы трения. Но часть силы тя-

жести компенсируется реакцией дна желоба, ускорение создает только проекция на направление движения (вспомните наклонную плоскость). На рисунке 2 изображен малый участ-

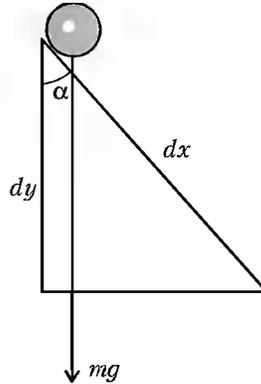


Рис. 2

ток дна желоба, который приближенно можно считать кусочком наклонной плоскости. Пусть размер этого кусочка dx . Проекция силы тяжести на направление движения равна $F_1 = mg \cos \alpha$, где m — масса шарика. Перемещаясь по желобу на расстояние dx , шарик опускается на $dy = dx \cos \alpha$. Поэтому

$$F_1 = -mg \frac{dy}{dx}. \quad (1)$$

Силу трения запишем в виде

$$F_2 = -kv, \quad (2)$$

где $v = dx/dt$ — скорость шарика, а величину k называют коэффициентом трения. Направления скорости и силы трения всегда противоположны, отсюда знак «минус» в формуле.

Согласно рисунку 1, имеются три точки x_1, x_2, x_3 , в которых производная dy/dx , а значит и сила F_1 , обращается в ноль. В окрестности точки равновесия x_1 сила тяжести стремится приблизить шарик к этой точке (при $x < x_1$ величина F_1 положительна, а при $x > x_1$ — отрицательна). Такое равновесие называют устойчивым. Равновесие в точке x_3 тоже устойчивое, а в точке x_2 — неустойчивое: малейшее отклонение

от этой точки под действием силы тяжести будет увеличиваться. Очевидно, движение шарика может окончиться только в точке устойчивого равновесия. Поэтому для системы с одной точкой равновесия конечный результат вообще не зависит от начальных условий. Но поскольку в желобе таких точек две, множество возможных начальных условий разбивается на две части. Условия, принадлежащие одной из них, приводят шарик в точку x_1 , другие — в x_3 . Эти части называют областями притяжения точек x_1 и x_3 соответственно. Теперь мы можем четче сформулировать задачу: нужно найти области притяжения, точнее говоря, — границу между ними. Ставки сделаны, господа!

Плоскость, на которой расположена эта граница, называется фазовой плоскостью. Сейчас мы с ней познакомимся. В каждый момент времени шарик находится в какой-либо точке x и имеет скорость v . Начертив на листе оси x и v , скажем, что каждому состоянию шарика, т.е. каждой паре (x, v) , отвечает точка на плоскости. Это и есть фазовая плоскость. Она как бы состоит из множества точек — «представителей» разных состояний шарика («фаза» и «состояние» имеют практически одинаковый смысл). Про фазовую плоскость можно сказать и иначе. Пусть x_0, v_0 — координата и скорость шарика в начальный момент, так что состояние изображается точкой (x_0, v_0) . По мере движения x и v меняются, точка будет рисовать линию — фазовую траекторию. Если выбрать другую начальную точку, получится другая траектория. Продолжая выбор начальных точек, покроем траекториями весь лист. Поэтому фазовую плоскость можно представить составленной из множества траекторий, отвечающих разным начальным условиям.

Математики доказали теорему о том, что через каждую точку фазовой плоскости проходит лишь одна траектория, так что выбора у шарика, как будто, нет. Однако эта

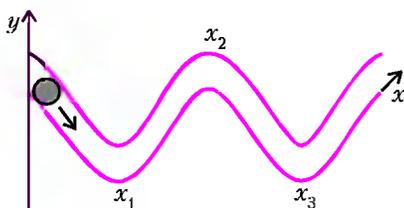


Рис. 1

теорема допускает исключения: есть особые точки, и мы увидим, что они играют самую главную роль. При первом знакомстве с фазовыми траекториями положим (временно), что трения нет, т.е. $k = 0$. Тогда сохраняется полная энергия шарика E — сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgy(x). \quad (3)$$

Согласно этому равенству, каждому значению E отвечает линия на плоскости (x, v) . Действительно, равенство (3) можно переписать, например, в виде

$$v = \pm \sqrt{2 \left(\frac{E}{m} - gy(x) \right)} \quad (4)$$

и строить графики $v(x)$ для разных E . Эти графики — фазовые траектории — изображены на рисунке 3.

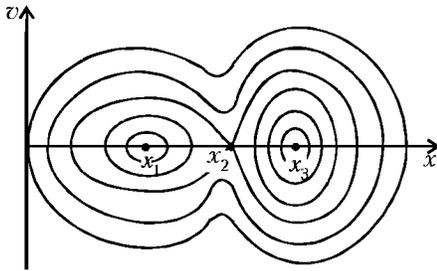


Рис. 3

Они напоминают горизонтали на топографической карте с двумя котловинами, разделенными перевалом.

Пусть энергия шарика немного больше, чем mgy_1 , где y_1 — ордината точки x_1 на рисунке 1. Тогда его фазовой траекторией будет замкнутая кривая, охватывающая точку x_1 , как это показано на рисунке 3. В самой левой точке этой траектории скорость равна нулю, а потенциальная энергия равна E . Затем шарик приближается к точке равновесия x_1 , скорость его растет и достигает максимума в точке равновесия. Далее, по мере того как шарик отклоняется от равновесия вправо, скорость падает и обращается в ноль при максимальном отклонении, когда потенциальная энергия вновь равна E . Теперь шарик движется справа налево ($v < 0$) до тех пор, пока не вернется в исходную точку (в которой был, когда

мы начали следить за ним). Потом все повторяется — движение колебательное. Таким образом, замкнутые траектории на фазовой плоскости отвечают колебательному движению.

На рисунке 3 есть траектории, охватывающие точку x_1 , точку x_3 и обе эти точки. Пока $E < mgy_2$, где y_2 — высота точки неустойчивого равновесия ($y_2 = y(x_2)$), шарик колеблется в пределах одной из ям — той, в которую его поместили в начальный момент. Если энергию увеличивать, то размах колебаний скачком возрастет при $E = E_2 = mgy_2$, когда появляется возможность перекачаться через горб (см. рис.1). Траектории малого и большого размахов на рисунке 3 разделяет линия (отвечающая $E = E_2$) в форме восьмерки, лежащей на боку. Это — сепаратриса (от separate — разделять). Ее значение в жизни нашей рулетки так велико, что давайте сделаем небольшое математическое усилие и найдем форму этой кривой вблизи точки x_2 .

В окрестности x_2 ординату представим в виде

$$y(x) = y_2 - b\delta^2, \quad (5)$$

где $b > 0$, а δ — малая разность $x - x_2$. Действительно, величины δ^3 , δ^4 и т.д. слишком малы и ими можно пренебречь. Почему, однако, нет слагаемого $a\delta$? Если такой член включить, то функция $y(x)$ в одну сторону от точки x_2 будет убывать, а в другую — возрастать. Но она убывает в обе стороны от x_2 . Поэтому должно быть $a = 0$ и $b > 0$. Подставляя выражение (5) в формулу (4), получаем

$$v = \pm \sqrt{2bg\delta}. \quad (6)$$

Конечно, это равенство пригодно лишь при малых δ . Важно, что через точку $(x_2, 0)$ фазовой плоскости проходят две траектории, а не одна. Потом эти линии соединяются, образуя петли сепаратрисы, но для свойств точки $(x_2, 0)$ это не имеет значения. Особая точка, через которую проходят две траектории, называется седловой, так что сепаратриса — это траектория, проходящая через седловую точку. Другие особые точки на рисунке 3 — точки $(x_1, 0)$ и $(x_3, 0)$ — характеризуются тем, что через них не проходит ни одна траектория. Заметим еще, что если взять две близкие точки на фазовой плоскости,

то проходящие через них траектории тоже близки, но за одним исключением. Когда такие точки разделены сепаратрисой, близкие первоначально траектории подходят вместе с ней к седловой точке, а там «разбегаются».

Идеальный мир сохраняющейся механической энергии не подходит, конечно, в качестве модели рулетки. Запущенный в желоб шарик будет вечно там колебаться, не желая выбирать между двумя ямками. Покидая этот воображаемый мир, обратим внимание на то, что в нем нельзя различить прошлое и будущее. По фазовой траектории можно вращаться по (или против) часовой стрелке, проходя одни и те же состояния. Имеет место симметрия траекторий относительно оси x . Это свойство обусловлено тем, что сила F_1 , в отличие от силы трения F_2 , не зависит от скорости. Выражающее второй закон Ньютона равенство

$$ma = F_1, \quad (7)$$

где $a = d^2x/dt^2$ — ускорение шарика, оказывается симметричным относительно преобразования $t \rightarrow -t$.

В реальном мире (с трением) у шарика есть будущее. Его энергия убывает со временем, колебания затухают, достигается равновесие. Фазовые траектории больше не являются замкнутыми линиями, они превращаются в спирали, скручивающиеся к точкам x_1 и x_3 , так что через каждую из точек проходит бесконечное множество траекторий. Говорят, что точки равновесия «притягивают» траектории. Что касается седловой точки, то ее природа не меняется: по-прежнему через эту точку проходят две траектории.

Теперь у читателя, которому еще не надоела рулетка, имеются две возможности. Либо поверить утверждению о двух траекториях и пропустить следующий абзац. Либо познакомиться с доказательством. (Тому, кого привлекает исследовательская работа, стоит быть недоверчивым.)

В законе Ньютона учтем силу трения и запишем

$$ma = -mg \frac{dy}{dx} - kv. \quad (8)$$

Вблизи точки x_2 используем для функции $y(x)$ приближенное выражение (5), так что $dy/dx = dy/d\delta = -2b\delta$. Из определений $v = dx/dy$,

$a = dv/dt$ следует $a = v(dv/dx)$, или $a = v(dv/d\delta)$. Учитывая все эти соотношения, можем переписать равенство (8) в виде

$$\frac{dv}{d\delta} = \frac{2bg\delta}{v} - \frac{k}{m}. \quad (9)$$

Вблизи точки $(x_2, 0)$ малы δ , и v . Положим в окрестности этой точки $v = A\delta$. Тогда получим уравнение

$$A = \frac{2bg}{A} - \frac{k}{m},$$

откуда

$$A = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} + 2bg}. \quad (10)$$

Как видим, для A получаются два вещественных значения (одно из них положительное, другое отрицательное). Значит, через рассматриваемую точку фазовой плоскости по-прежнему проходят две траектории.

Но теперь на фазовых траекториях надо ставить стрелки, показывающие направление движения (направление убыли энергии). Из четырех «ветвей» сепаратрисы, соединяющихся в седловой точке, две — входящие, две другие — выходящие. Ветвь, выходящая в сторону $x < x_2$, переходит в спираль, скручивающуюся к точке $(x_1, 0)$, другая выходящая ветвь скручивается к точке $(x_3, 0)$. Если же двигаться от седловой точки по входящей ветви, то это будет движение «назад по времени». ¹ Энергия шарика по мере такого движения будет увеличиваться, поэтому получится раскручивающаяся спираль. Но так как есть две входящие ветви, должны быть две такие спирали, вложенные одна в другую. Эта сепаратриса построена на рисунке 4.

Прежде всего заметим, что симметрия относительно оси x , которая была на рисунке 3, пропала. Это — следствие необратимости движения, направленности фазовых траекторий. Спирали входящих ветвей сепаратрисы делят фазовую плоскость на две области — на рисунке 4 они окрашены красным и синим. Это те самые области притяжения, найти которые было нашей целью.

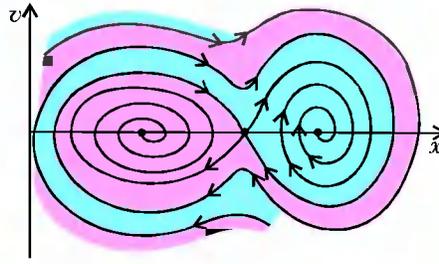


Рис. 4

Действительно, согласно известной нам теореме, траектории не могут пересекаться (нигде, кроме особых точек); в частности, не могут пересекать входящие ветви сепаратрисы — границы синей и красной областей. Учитывая это и глядя на рисунок 4, нетрудно убедиться, что если траектория начинается где-либо в красной области, она придет в точку $(x_1, 0)$, если в синей — в точку $(x_3, 0)$.

Итак, чтобы узнать, в какую ямку попадет шарик, нужно нанести на рисунке 4 точку, изображающую его начальное состояние (положение и скорость), и посмотреть, каков цвет области, где окажется эта точка. Значит, крупье все известно заранее и всякая рулетка — сплошное жульничество? Жульничество, вероятно, бывает. Но утверждать, что все заранее известно, пожалуй, нельзя, и вот почему.

Структура областей притяжения вблизи точек $(x_1, 0)$, $(x_3, 0)$ компактна, но дальше (иначе говоря, при больших энергиях) начинается «чересполосица». Плавно меняя начальные условия, вы обнаруживаете, что результат «прыгает»: шарик оказывается то в левой ямке, то в правой, потом вновь в левой и т.д. Особенно часты прыжки при малом трении, когда полосы областей притяжения достаточно узкие. Если начальные условия известны с некоторой погрешностью (что всегда имеет место в реальном мире) и величина погрешности Δx , Δv сравнима или превышает ширину полосы, никаких достоверных предсказаний сделать нельзя. В настоящей рулетке движение шарика не стеснено желобом, вместо фазовой плоскости приходится гулять по четырехмерному фазовому пространству, где полным-полно седловых точек и сепаратрис. Там дело предсказателя вовсе безнадёжно.

То что именно неточность знания

начальных условий мешает предсказывать будущее, впервые понял ленинградский физик Н.С.Крылов (1917 — 1947). Позднее к этим проблемам обратился один из основателей квантовой теории Макс Борн (1882 — 1970) и пришел к похожим выводам. Когда трением можно пренебречь, все сводится к разбеганию траекторий вблизи седловой точки, о котором мы уже знаем. Благодаря разбеганию, небольшие изменения начальных условий со временем сильно сказываются на движении, если фазовое пространство достаточно богато седловыми точками. Соответственно, малая погрешность исходных данных лишает определенности долгосрочный прогноз. Однако трение приводит в конце концов к равновесию, и неопределенность остается лишь там, где — как у рулетки — несколько точек равновесия.

Почти все окружающие нас системы подвержены внешнему воздействию, так что равновесие в них не устанавливается. (Световой поток от Солнца мешает Земле прийти в равновесие с межпланетной средой.) Такие системы называют активными. Из-за трения и других необратимых (подобно трению) процессов состояния активной системы постепенно перестают зависеть от начальных условий — они одинаковы для разных условий. Это означает, что в фазовом пространстве точки, отвечающие этим состояниям, окружены областью притяжения. Но теперь траектории, покрывающие область притяжения, не обязательно сходятся к точке, как в случае равновесия. Они могут «притягиваться» к линии, поверхности и т.д. При этом разные притягивающие объекты соответствуют разным типам поведения системы.

¹ Если вы захотите в будущем изучать физику всерьез и столкнетесь с диаграммами Фейнмана, то, может быть, вспомните «движение назад по времени».

Первый лауреат Нобелевской премии по физике

А. ВАСИЛЬЕВ

ВРЯД ЛИ найдется хотя бы один человек, который ни разу в жизни не соприкоснулся с открытием немецкого физика Вильгельма Конрада Рентгена. Большинству оно известно по рентгеновским кабинетам в лечебных учреждениях, а специалистам в точных науках — как один из наиболее мощных инструментов экспериментального исследования. Рентгеновские лучи настолько быстро и уверенно вошли в науку и медицину, что кажется, будто они существовали всегда. Однако день рождения этого изобретения точно известен — 8 ноября 1895 года.

В этот день Рентген проводил исследование электрического разряда в вакуумных трубках. В своих экспериментах он использовал трубку Крукса с наклонным платиновым анодом и вогнутым алюминиевым катодом. Для того чтобы облегчить наблюдения, Рентген затемнил комнату и обернул трубку плотной непрозрачной бумагой. Неожиданно он увидел на стоявшем неподалеку флуоресцентном экране светящуюся полосу. Трубки с катодными лучами существовали уже сорок лет, но никто до тех пор не замечал испускаемых ими лучей.

Следующие семь недель Рентген провел, изучая то, что он назвал X-лучами, и обнаружил, что эти лучи способны проникать во все предметы на различную глубину — в зависимости от их толщины и плотности. В одной из своих работ он писал: «Я наблюдал, а частью и фотографировал большое количество таких теневых картин, получение которых доставляет иногда совсем особого рода удовольствие. У меня есть, например, фотография тени профиля двери, разделяющей две комнаты (по одну сторону двери находилась разрядная трубка, а по другую пластинка), фотографии тени проволоки, намотанной на деревянную катушку, запертого в ящике набора разновесов,

куска металла, неоднородность которого делается заметной с помощью X-лучей, и т.д.». Широкую известность приобрела выполненная Рентгеном в X-лучах фотография (рентгенограмма)



*Вильгельм Конрад РЕНТГЕН
(1845 — 1923)*

кости жены. На ней, как на негативе, были отчетливо видны белые кости (так как более плотная костная ткань задерживает рентгеновские лучи, не давая им попасть на фотопластинку) на фоне более темного изображения мягких тканей (задерживающих X-лучи в меньшей степени) и белые полосы от колец на пальцах.

Что же представляют собой рентгеновские лучи? Сейчас ответ на этот вопрос можно найти в любом школьном учебнике. Это — электромагнитное излучение, занимающее спектральную область между ультрафиолетовыми лучами и гамма-излучением в пределах длин волн от 10^2 до 10^{-3} нм. До сих пор наиболее распространенным способом получения этих лучей служит рентгеновская трубка, в которой электроны, вырывающиеся из катода в результате термоэлектронной или автоэлектронной эмиссии, ускоряются элек-

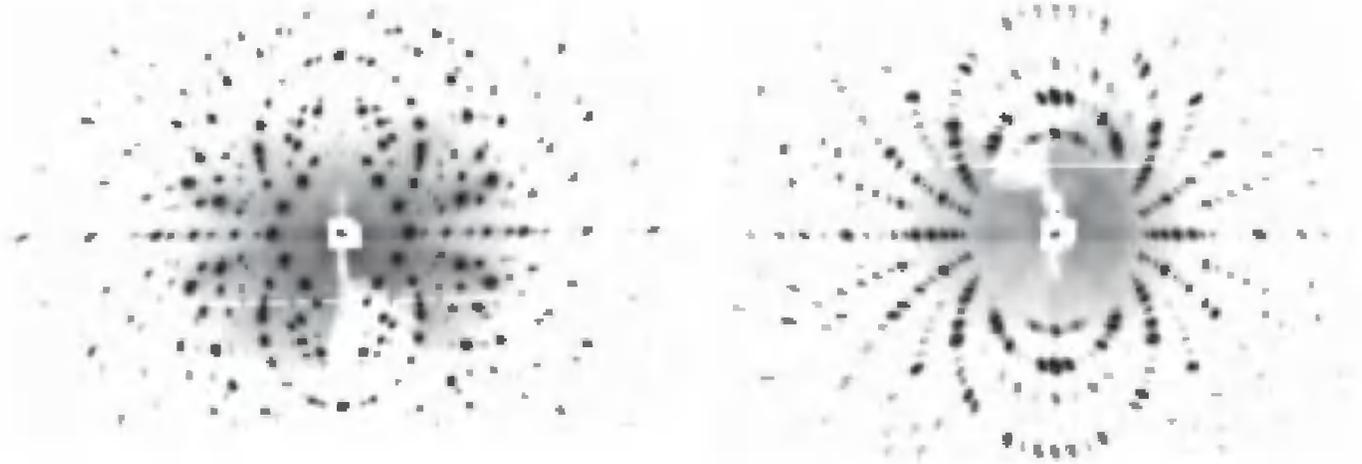
трическим полем и бомбардируют металлический анод. Атомы анода, возбуждаемые электронным ударом, и электроны, теряющие свою кинетическую энергию при соприкосновении с веществом, испускают рентгеновское излучение (X-лучи). Кроме трубки, источниками этого излучения могут быть естественные и искусственные радиоактивные изотопы, Солнце и другие космические объекты.

Огромные возможности рентгеновского излучения в диагностике, а затем и в терапии некоторых заболеваний были сразу же оценены медиками. Для физиков колоссальное значение имела высказанная в 1912 году немецким физиком М. фон Лауэ гипотеза о том, что для X-лучей кристаллы являются трехмерными дифракционными решетками. Лауэграмма монокристалла NaV_2O_5 , представляющая собой его дифракционное изображение (в двух проекциях), показана на приведенном здесь рисунке. Она получена при падении тонкого пучка X-лучей непрерывного спектра на неподвижный кристалл. Излучение, рассеянное кристаллом в некоторых четко определенных направлениях, регистрируется на фотопленке, помещенной перпендикулярно падающему пучку лучей. Открытие дифракции рентгеновских лучей на кристаллах А.Эйнштейн назвал одним из наиболее красивых в физике.

В настоящее время с именем Рентгена и открытыми им лучами связан целый ряд понятий и методов, образующих обширный раздел современной физики. Среди них:

- рентгеновская томография — метод послойного исследования структуры неоднородных объектов в рентгеновском излучении, основанный на зависимости линейного коэффициента поглощения рентгеновских лучей от состава и плотности вещества;
- рентгеновская топография — совокупность методов получения изображений дефектов в кристаллах при помощи дифракции рентгеновских лучей;
- рентгеновская литография — ме-

О Рентгене и его открытии см. также 4-ю страницу обложки. (Прим. ред.)



Лауэграмма ванадата натрия

тод микроэлектронной технологии, заключающийся в формировании за счет рентгеновских лучей защитной маски заданного профиля на поверхности подложки;

- рентгеновская микроскопия — совокупность методов, позволяющих изучать не только распределение общей плотности вещества, но и распределение плотностей отдельных химических элементов по их рентгеновскому излучению;

- рентгеновская астрономия — раздел наблюдательной астрономии, исследующий источники космического рентгеновского излучения.

Первое сообщение Рентгена, озаглавленное им «О новом роде лучей», было опубликовано 28 декабря 1895

года, а свой первый публичный доклад о Х-лучах он сделал в Вюрцбургском научном обществе 23 января 1896 года. Второе сообщение «Новый род лучей» публикуется уже 9 марта 1896 года, а третье «Дальнейшие наблюдения над свойствами Х-лучей» — в мае 1897 года. В целом работа Рентгена над открытым им новым родом лучей продолжалась менее двух лет. Затем его интересы переместились в другие области, однако его следующая крупная работа — об электропроводности кристаллов — вышла лишь через двадцать с лишним лет.

В 1901 году Рентген узнал, что стал первым физиком-лауреатом Нобелевской премии. Награда была вручена ему

«в знак признания необычайно важных заслуг перед наукой, выразившихся в открытии замечательных лучей, названных впоследствии в его честь».

Рентген считался лучшим экспериментатором своего времени, он доверял только фактам, и в его работах можно найти лишь то, что не вызывало у него даже тени сомнения. По своим взглядам и методам Рентген принадлежал к представителям классической физики второй половины XIX века; вместе с тем, он был одним из тех блестящих ученых, которые открыли дорогу современной физике.

НОВОСТИ НАУКИ

ЭЛЕМЕНТ 112 — САМЫЙ ТЯЖЕЛЫЙ НА СЕГОДНЯ!?

9 февраля 1996 года в Лаборатории тяжелых ионов в немецком городе Дармштадте было объявлено об открытии самого тяжелого из известных на сегодня — 112-го элемента. Открыла его международная группа физиков из Германии, России, Словакии и Финляндии под руководством Петера Армбрустера. Это сотрудничество работает на редкость продуктивно: его членам удалось обнаружить шесть новых элементов — со 107-го до 112-го — за последние несколько лет.

Новый элемент имеет атомную массу 277 и по своим химически свойствам должен быть похож на цинк и

кадмий. Однако, в отличие от своих более легких собратьев, он очень нестабилен и уже через тысячную долю секунды распадается на ядро 110-го элемента и альфа-частицу. Родившийся 110-й элемент также нестабилен и тоже распадается с испусканием альфа-частицы. Эта искрометная вереница распадов останавливается лишь на более или менее стабильном изотопе фермия с атомным номером 100 и атомной массой 253. И все ступени этой цепочки распадов физикам удалось зарегистрировать, измеряя энергию вылетевших частиц — именно это и служит доказательством рождения нового элемента.

А родить его тоже было очень и очень непросто. Три недели физики обстреливали ядрами цинка, разогнанными до большой энергии на

ускорителе тяжелых ионов, ядра свинца. При некоторой определенной скорости столкновения ядер они могут слиться и образовать ядро 112-го элемента. Так вот, за три недели экспериментаторам удалось зафиксировать одно-единственное рождение!

Новорожденный 112-й элемент подтверждает давно существующие в ядерной физике гипотезы о стабильности (естественно, в ядерном смысле, где тысячная доля секунды — стабильная жизнь) некоторых ядер с определенным числом протонов и нейтронов.

Группа Армбрустера планирует продолжать исследования и надеется найти еще более тяжелые элементы.

А. Семенов

Что может ЭВМ

Б.БОЛОТОВСКИЙ

ЭЛЕКТРОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ машины неумолимо входят в нашу жизнь. Они берут на себя планирование, управление производством, сбор и обработку информации, они анализируют обстановку и принимают наиболее целесообразные решения. Я уже не говорю о том, что электронно-вычислительные машины неизмеримо облегчают решение чисто математических задач. Никто не может сравниться с ними в скорости вычислений — за считанные минуты они совершают такую работу, на которую опытный вычислитель потратил бы годы.

Не отрицаю. Но и не обольщаюсь. Не надо слепо надеяться, что вычислительная машина решит все наши затруднения. Не надо думать, что она такая умная. Машина не умная, она исполнительная — что ей задано, то она и делает. Причем делает очень быстро, неизмеримо быстрее человека.

Почему машина быстро и хорошо считает, это понятно. Дело в том, что вычисления — или, более научно говоря, логические операции — это единственное, для чего и существует электронно-вычислительная машина. Она именно для этого сделана и избавлена от всех других забот. Ей не надо одеваться, обуваться, умываться. Ей не надо заботиться о пропитании — люди ее снабжают всем необходимым: запасными деталями и питанием. Ей не надо утром ехать на работу в общественном транспорте, а вечером — домой и тоже общественным транспортом, не надо стоять в очередях, воспитывать детей, лечить зубы, вести общественную работу. Ее задача — только вычисления. Но если нас с вами поставить в такие условия, избавить от всех забот, то любой из нас, наверное, сумел бы вычислять с огромным быстродействием, не хуже, чем ЭВМ. И более того: ЭВМ

делает только то, что ей задано, правда быстро и точно, но только то, что задано. Она — идеальный исполнитель. А люди, если бы их ничто не отвлекало от работы, могли бы сделать нечто большее и гораздо более важное: они бы, выполняя работу, могли внести в нее что-то свое, не предусмотренное заданием, свои улучшения. ЭВМ — слепой исполнитель, человек — инициативный исполнитель. Человек, ничем не отвлекаемый от своего дела, даст сто очков вперед любой ЭВМ. Но для этого о человеке тоже надо заботиться не меньше, чем об ЭВМ. В частности, следует улучшать службу быта, торговлю, транспорт и всю службу.

Но это пока присказка. Сказка — впереди. Это так говорится: «сказка впереди», а на самом деле я вам расскажу достоверную быль.

В нашем Научно-исследовательском институте бесполезных ископаемых есть большая электронно-вычислительная машина. Когда ее устанавливали, предполагалось, что она в корне изменит к лучшему положение с разведкой и эксплуатацией бесполезных ископаемых, а это, как всем известно, — важнейшая



народнохозяйственная проблема. Беспольных ископаемых надо добывать как можно больше, сокращая при этом расход денежных средств, материалов и энергии. И в этом деле ЭВМ должна была оказать решающую помощь. Но до этого не дошло. Первой машину освоила бухгалтерия. Теперь вся зарплата, весь учет материальных фондов института, разные там балансы, дебет, кредиты — все считает вычислительная машина. Быстро считает и выдает результаты счета, печатая столбики цифр на больших бумажных простынях. При этом численность сотрудников бухгалтерии вовсе не сократилась, а еще выросла. Прибавилось несколько программистов, оператор на ЭВМ, радиоинженер и три лаборанта. Насчет ископаемых машина пока не высказывается — программа не готова, не хватает опытных программистов. А сама машина пока не знает, что ей делать. Но это — дело времени.

Есть у нас сотрудник, назовем его сокращенно Сеней. Давно работает. И вот он взялся за решение важнейшей задачи — научить электронно-вычислительную машину думать, т.е. не просто выполнять то, что ей задано в программе, а раз от разу все лучше и лучше. Как вам объяснить, чего Сеня добивался? Представьте себе исполнительного дурака (это, чисто условно, — ЭВМ). И вот этот дурак, выполняя данные ему поручения, начинает вдруг присматриваться к тому, что и как он делает и нельзя ли все это сделать лучше. Словом, дурак умнеет и раз от разу все лучше выполняет поставленную задачу. Дурак с рефлексией — это уже почти умный. В принципе можно составить такие программы, которые предусматривают самообучение машины в процессе работы. Вот Сеня и занялся таким делом.

Для обучения машины Сеня выбрал игру в крестики и нолики. Игра эта очень простая, но Сеня рассудил, что если удастся научить машину прилично играть хотя бы в крестики и нолики, то откроется путь и к обучению более сложным делам.

Сеня составил такую программу. Первоначально машина не умеет играть в крестики и нолики, она знает только правила игры. В частности, она знает, что может поставить свой крестик на любое свободное поле. На какое именно поле следует ставить крестик, чтобы выиграть, машина сначала не знает и поэтому, конечно, проигрывает. Но Сеня построил такую программу, что машина от партии к партии улучшает свою игру. Как это достигается, я вам не могу точно сказать, потому что сам

толком не знаю. Но если объяснить грубо и приблизительно, то дело обстоит следующим образом. В соответствии с программой, машина запоминает сыгранную (и проигранную) партию, а затем повторяет эту партию в своей памяти. При этом машина имеет задание: надо найти в той уже сыгранной партии такой последний ход (или два последних хода), чтобы помешать противнику сделать выигрывающий ход. Грубо говоря, играл дурак с умным в крестики и нолики. Играл и первую партию проиграл. А потом ему говорят: «Вспомни еще раз проигранную партию и подумай, как надо было ходить, чтобы помешать противнику сделать выигрывающий ход. И в следующий раз не забудь, как надо ходить». Я об этом рассказываю очень неточно, потому что я и сам не очень хорошо понимаю, как все это делается. А если бы я все хорошо понимал, то было бы для вас еще хуже: тогда бы вы меня не поняли.

Так или иначе, в памяти ЭВМ остается какой-то положительный опыт после каждой партии. И этот опыт накапливается. Дурак играет с умным и сам постепенно умнеет. Через шесть-восемь партий машина начинает играть с человеком беспроигрышно. Выиграть она у человека не может, потому что крестики и нолики — такая игра, в которой при правильных действиях партнера выигрыш невозможен. Но и человек уже не может выиграть у машины. Дурак научился играть — он уже не дурак. Вот такую программу составил Сеня — программу с самообучением.

Но это не все, как говорил Анри Пуанкаре. Составив программу и испытав ее, Сеня проделал следующий опыт. Он взял две электронно-вычислительные машины, заложил в каждую из них одну и ту же программу и посадил эти две машины играть друг с другом в крестики и нолики. Как вы понимаете, это уже совсем другая задача. Действительно, в предыдущем случае дурак играл с умным и от умного набирался ума. А здесь дурак играет с таким же, как он сам, дураком. Спрашивается, чему они могут научить друг друга? Чему один дурак может научить другого? На первый взгляд — ничему. Но есть одна тонкость. Дело в том, что электронно-вычислительные машины обладают большим быстродействием. Пока человек сыграет с машиной одну партию, машина с машиной успеет сыграть миллионы партий. И, может быть, огромное количество сыгранных партий, несмотря на низкую квалификацию обоих партнеров, поможет им чему-то обучиться. Повторяю, программы самообучения у обеих машин были

совершенно одинаковые. В каждую машину была введена программа для игры машины с человеком. Сеня запустил обе машины и дал им поиграть друг с другом в течение нескольких часов (за это время они сыграли миллионы и миллионы партий). А потом Сеня стал проверять, научились ли машины играть в крестики и нолики. Он сыграл партию с одной из двух машин, и оказалось, что ЭВМ как не умела играть сначала, так и не научилась. Как была душой, так и осталась. Сеня не поленился, сыграл и со второй ЭВМ. Тот же результат.

Эти глубокие исследования позволили Сене сформулировать один из основных законов обучения:

При игре дурака с дураком самообучения не происходит.

Когда я узнал про этот закон и про то, как он был открыт, я долго смеялся. Действительно, закон обучения кажется хорошей шуткой. Но отсмеявшись вволю, я пришел к выводу, что закон обучения, открытый Сеней, гораздо важнее, чем это может показаться на первый взгляд. Он применим не только к обучению вычислительных машин, но и к обучению людей. Мы все знаем, что плохой учитель не может ничему научить. Он не может передать ученику знания, если они есть. Он тем более не может ничему научить, если сам ничего не знает. Не случайно человек, если хочет чему-нибудь научиться, ищет хорошего учителя, человека умнее себя. Не случайно тренер должен быть мастером. Хороший учитель — всегда знаток. Он знает, чему учить и как учить. Плохой учитель — это беда. Не надо надеяться, что у него будут хорошие, знающие ученики. Когда дурак учит, обучения не происходит. И самообучения тоже. Надо готовить хороших учителей во всех областях обучения. И не жалеть на это сил и средств.

Захваченный открытым законом обучения, я разыскал Сеню и расспросил его обо всем подробнее. И изложил ему большое количество важных следствий, которые вытекают из его открытия. Сеня выслушал меня и сказал, что не думает, что открыл закон обучения, что, по-видимому, программы не очень хороши и если составить хорошую программу, то возможно, машина, играя с машиной, сможет все-таки обучиться.

Таким образом, полной ясности в проблеме обучения пока нет. Но надо хотя бы пытаться ее решить. Даже если нет твердой надежды на успех. Как говорится, можешь — дерзай, не можешь — слезай. Но в любом случае мы должны знать, чего ждать от ЭВМ.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто из нас ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1998 года по адресу 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1631» или «Ф1638». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»)

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1631 — М1635 предлагались на осеннем туре Турнира городов.

Задачи М1631 — М1635, Ф1638 — Ф1642

М1631. Верны ли теоремы

а) Если многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника.

б) Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника.

в) Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два многоугольника, один из которых переводится в другой с помощью движений, сохраняющих ориентацию (т.е. с помощью поворота и параллельного переноса), то его можно разбить отрезком на два многоугольника, один из которых переводится в другой с помощью движений, сохраняющих ориентацию.

С Маркитин

М1632. Раскрашенный в черный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку погнали по одной из клеток шахматной доски и прокатали по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по разу. Можно ли так раскрасить кубик и так прокатить его по доске, чтобы каждый раз цвета клетки и соприкасающейся с ней грани совпадали?

М1633. В треугольнике ABC отрезки CM и BN — медианы, P и Q — точки соответственно на AB и AC такие, что биссектриса угла C треугольника одновременно является биссектрисой угла MCP , а биссектриса угла B — биссектрисой угла NBQ . Можно ли утверждать, что треугольник ABC равнобедренный, если

а) $BP = CQ$.

б) $AP = AQ$,

в) $PQ \parallel BC$?

В Сендеров

М1634 а) На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму правильного 6-угольника, причем у всех салфеток одна сторона параллельна одной и той же прямой. Всегда ли можно набить в стол несколько гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причем каждая — только одним гвоздем?

б) Тот же вопрос про правильные 5-угольники.

А.Кань

М1635* Каждая сторона правильного треугольника разбита на n равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на n^2 маленьких треугольничков-клеток. Треугольнички, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полосу.

а) Какое наибольшее число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали одной полоске ни по одному из трех направлений, если $n = 10$?

б) Тот же вопрос для $n = 9$.

А Шаповалов

Ф1638. Маленький упругий шарик подпрыгивает, ударяясь о горизонтальную подставку, при этом высота подскоков равна H . Подставку очень медленно сдвигают параллельно самой себе на h вниз и останавливают. Найдите новую высоту, на которую шарик будет

подпрыгивать относительно подставки после ее остановки.

А. Зильберман

Ф1639. Горизонтально расположенный цилиндрический сосуд с массивным поршнем находится в вакууме (рис.1). Пружина жесткостью k , закрепленная с одной

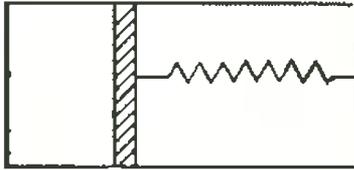


Рис. 1

сторону, упирается в поршень. В начальном положении газа под поршнем нет, пружина не деформирована. Через дырку в дне сосуда в него впускают некоторое количество гелия и закрывают дырку. После установления равновесия пружина оказалась деформированной на L . Затем газ очень медленно нагревают, пока поршень не сдвигается еще на L . Какое количество теплоты получил газ при этом? Теплоемкостью стенок и поршня пренебречь.

М. Учительев

Ф1640. Четыре одинаковые тонкие проводящие пластинки площадью S каждая расположены параллельно и очень близко друг к другу; расстояние между соседними пластинками равно d (рис.2). Первую и третью пластинки соединили проводником, а между второй и четвертой включили батарейку напряжением U . Какие силы действуют на каждую из пластинок?

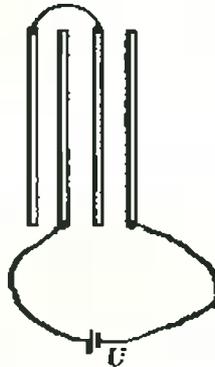


Рис. 2

А. Повторов

Ф1641. Три длинных куска провода сложили вместе и получившимся «тройным» проводом намотали на ци-

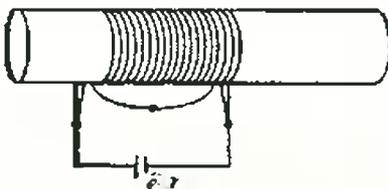


Рис. 3

линдрический немагнитный сердечник катушку, состоящую из большого количества витков (рис.3). Две из получившихся трех катушек соединили последовательно и к концам образовавшейся двойной катушки параллельно подключили выводы третьей катушки. Систему охладили до температуры, при которой катушки стали сверхпроводящими, и к выводам системы подключили батарейку с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r . Какие токи будут течь через катушки после того, как эти токи практически перестанут изменяться?

З. Рафаилов

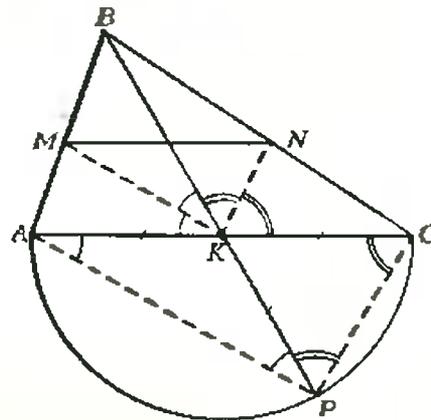
Ф1642. В сеть переменного напряжения (220 В, 50 Гц) включили последовательно конденсатор некоторой емкости и катушку индуктивностью 1 Гн. Параллельно конденсатору подключили вольтметр с очень большим сопротивлением. При какой емкости конденсатора вольтметр покажет напряжение 220 В? Какую емкость конденсатора ни в коем случае использовать нельзя?

Р. Александров

Решения задач М1606 — М1615, Ф1623 — Ф1627

М1606. Дан треугольник ABC . Постройте отрезок MN с концами на сторонах AB и BC , параллельный стороне AC и видимый из середины стороны AC под прямым углом.

Задача легко решается методом подобия. Пусть P — точка, в которой продолжение медианы BK пересекает полуокружность с центром K и диаметром AC (см. рисунок). При гомотетии с центром B , переводящей точку P в точку K , отрезок AC перейдет в искомый отрезок MN : этот отрезок параллелен AC и $\angle MKN = \angle APC = 90^\circ$.



Заметим, что треугольник AKP (а также $СКР$) — равнобедренный, поэтому углы $\angle MKA = \angle KAP$ и $\angle MKB = \angle APR$ равны (и, аналогично, $\angle BKN = \angle NKC$). Таким образом, для построения нужного отрезка MN достаточно провести биссектрисы KM и KN углов AKB и BKC . То, что полученный отрезок MN обладает нужными свойствами, легко доказать непосредственно: $\angle MKN = 90^\circ$, поскольку он состоит из половинок углов, дающих в сумме развернутый угол, а из параллельности MN и AC вытекает из равенств, использующих свойства биссектрис:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AK}{KB} = \frac{CK}{KB} = \frac{CN}{NB}$$

Задача имеет и другие решения, связанные с подсчетом углов

Р. Травкин, Н. Васильев, В. Сендеров

М1607. Корень трехчлена $ax^2 + bx + b$ умножили на корень трехчлена $ax^2 + ax + b$ и получили в произведении 1. Найдите эти корни.

По условию a и b отличны от нуля. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + ax + b = 0$, то $1/x_1$ и $1/x_2$ — корни уравнения $bx^2 + ax + a = 0$. Таким образом, уравнения

$$ax^2 + bx + b = 0 \text{ и } bx^2 + ax + a = 0$$

имеют общий корень. Тот же корень имеет и их сумма $(a+b)(x^2 + x + 1) = 0$. Поскольку $x^2 + x + 1 \neq 0$ (речь идет о вещественных корнях), то $b = -a$ и трехчлены в условии задачи имеют вид $ax^2 - ax - a$ и $ax^2 + ax - a$, а искомые корни равны $(\sqrt{5} + 1)/2$ и $(\sqrt{5} - 1)/2$ либо $(-\sqrt{5} + 1)/2$ и $(-\sqrt{5} - 1)/2$.

Вместо суммы двух равенств можно рассмотреть произведение равенств

$$ax^2 = -(bx + b) \text{ и } bx^2 = -(ax + a),$$

которое после сокращения на $ab \neq 0$ приводится к виду $x^2 = (x+1)^2$, откуда $x^2 - x - 1 = 0$

С Берлов, В Сендеров

M1608. На фестивале военно-морской песни приглашены хоры из 100 стран. Каждый хор должен исполнить три песни и сразу уехать домой. Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из участвующих стран. Докажите, что они могут назначить порядок выступлений таким образом, чтобы никому не пришлось выслушивать больше трех оскорбительных для его страны песен.

Нетрудно доказать по индукции, что если n хоров исполняют по три песни, каждая из которых может быть оскорбительной для одного из остальных хоров, то выступления хоров можно организовать в таком порядке, что каждый хор до своего выступления услышит не более трех оскорбительных песен.

Для $n = 1$ и $n = 2$ это очевидно. Если хоров n , то всего оскорбительных песен не более $3n$, и значит, найдется хор, на долю которого приходится не более трех оскорблений. Пусть этот хор выступает последним. Для остальных $n - 1$ хоров выполняемо то же условие и, по предположению индукции, их выступления можно организовать требуемым образом.

Конечно, число 3 в условии можно заменить на любое натуральное s .

Ф. Назаров

M1609. Пусть $P(x) = a$ квадратный трехчлен с неотрицательными коэффициентами, $Q(x)$ — произвольный многочлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство

$$(P(xy))^2 \leq P(x^2) \cdot P(y^2).$$

Пусть коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ многочлена $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$ неотрицательны. Положим $b_k = \sqrt{a_k} x^k$; $c_k = \sqrt{a_k} y^k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Неравенство, которое требуется доказать, имеет вид

$$(b_0 c_0 + b_1 c_1 + \dots + b_n c_n)^2 \leq (b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_n^2)(c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2). (*)$$

Последнее неравенство (оно называется неравенством Коши — Буняковского) справедливо для любых значе-

ний переменных (и обращается в равенство только если «векторы» (b_0, b_1, \dots, b_n) и (c_0, c_1, \dots, c_n) пропорциональны — один из них получается умножением всех координат другого на одно и то же число). Одно из самых простых доказательств неравенства (*) рассмотреть квадратный трехчлен

$$Q(t) = (b_0 t + c_0)^2 + (b_1 t + c_1)^2 + \dots + (b_n t + c_n)^2.$$

очевидно неотрицательный при всех t , и записать условие, что дискриминант этого трехчлена $Q(t) = At^2 + Bt + C$ неотрицателен, т.е. $B^2 \leq 4AC$.

Е. Малишикова, Н. Васильев

M1610. Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает на голову каждому колпак а) белого или черного; б) белого, синего или красного цвета. Каждый мудрец видит цвета колпаков всех впереди стоящих мудрецов, но не видит цвет своего колпака и цвета колпаков мудрецов, стоящих позади него. Затем мудрецы по одному называют какой-нибудь цвет (каждому разрешается говорить только один раз). После этого король казнит всех мудрецов, не угадавших цвет своего колпака. Накануне переаттестации все члены Совета договорились между собой и придумали, как минимизировать число казненных. Сколько из них гарантированно удастся избежать казни?

Ответ на оба вопроса а) и б) одинаков: для любого количества n мудрецов все, кроме одного — последнего, могут избежать казни. (Разумеется, последний не может иметь гарантии спасения, поскольку его колпак не видит никто.) В случае а) достаточно соображения четности — сложения по модулю 2, в случае б) помогает сложение по модулю 3.

Покажем, как могут действовать мудрецы, сначала — на более простом примере

а) Пусть белый и черный цвета обозначаются числами 0 и 1, а x_k — число, означающее цвет колпака k -го мудреца. Каждый из мудрецов может посчитать четность количества черных колпаков у стоящих перед ним, другими словами — остаток при делении на 2 суммы соответствующих чисел, обозначим это число для k -го мудреца через s_{k-1} ($k = 2, 3, \dots, n$): $s_{k-1} = x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}$ по модулю 2. Пусть сначала n -й мудрец называет s_{n-1} . Затем, зная s_{n-1} и x_{n-1} , стоящий перед ним $(n-1)$ -й называет свое число x_{n-1} (оно равно разности $s_{n-1} - s_{n-2}$ по модулю 2). Затем, зная s_{n-1} , x_{n-1} и s_{n-2} , $(n-2)$ -й называет свое число x_{n-2} (оно равно $s_{n-1} - x_{n-1} - s_{n-2}$ по модулю 2), затем $(n-3)$ -й называет свое число $x_{n-3} = s_{n-1} - x_{n-1} - x_{n-2} - s_{n-3} \pmod{2}$ и так далее вплоть до $x_1 = s_{n-1} - x_{n-1} - \dots - x_2$.

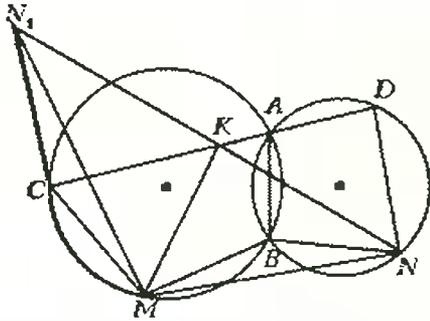
б) Рассуждения совершенно аналогичны: достаточно трем цветам сопоставить числа 0, 1, 2 и считать суммы и разности по модулю 3, т.е. остатки соответствующих чисел при делении на 3.

Н. Васильев

M1611. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C , а вторую — в точке D . Пусть M и N — середины дуг BC и BD , не содержащих точку A , а K — середина отрезка CD . Докажите, что угол MKN прямой. (Можно счи-

вать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A .)

Пусть N_1 — точка, симметричная точке N относительно K (см. рисунок). Тогда $\Delta KCN_1 = \Delta KDN$, поэтому



$CN_1 = ND$ и $\angle N_1CK = \angle NDK = \pi - \angle ABN$. Заметим еще, что $\angle MCK = \pi - \angle ABM$. Складывая полученные равенства, находим, что $\angle N_1CM = \angle MBN$. Кроме того, из условия следует, что $CM = MB$ и $BN = ND$ (т.е. $BN = CN_1$). Значит, $\Delta MCN_1 = \Delta MBN$, откуда $MN_1 = MN$. Отрезок MK — медиана в равнобедренном треугольнике MNN_1 , поэтому $\angle MKN = 90^\circ$.

Замечание. Задача имеет много других решений. Например, можно воспользоваться подобием треугольников MEK и KFN , где E и F — середины отрезков BC и BD соответственно. Эти треугольники имеют две пары взаимно перпендикулярных сторон: EK и FN , ME и KF ; следовательно, перпендикулярны и их третьи стороны.

Кроме того, соображения, использующие композицию поворотов, позволяют отказаться от дополнительного условия в задаче (о том, что точки C и D лежат по разные стороны от A), которое было задано лишь затем, чтобы избежать разбора различных случаев. Действительно, рассмотрим композицию поворотов $R_M^\beta \circ R_N^\alpha$ — на углы $\alpha = \angle DNB$ и $\beta = \angle BMC$ вокруг точек N и M соответственно (углы предполагается ориентированными). Заметим, что $\alpha + \beta = 180^\circ$, поэтому $R_M^\beta \circ R_N^\alpha = Z_X$ — центральная симметрия относительно некоторой точки X . Но

$$Z_X(D) = (R_M^\beta \circ R_N^\alpha)(D) = R_M^\beta(B) = C,$$

поэтому X — середина отрезка CD , т.е. точка K . Если $N_1 = Z_X(N)$, то $N_1 = (R_M^\beta \circ R_N^\alpha)(N) = R_M^\beta(N)$, т.е. ΔMN_1 равнобедренный и $\angle MKN = 90^\circ$.

Д.Терешин

M1612*. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа $1, 2, 3, \dots, 100$ так, что сумма любых двух соседних чисел не превосходит S . Найдите наименьшее возможное значение S . (Числа называются соседними, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону.)

Ответ. 106. Пример расстановки, для которой $S = 106$, приведен на рисунке (этот пример, где наибольшие числа в «черных» клетках соседствуют с наименьшими в «белых»). Докажем теперь, что $S \geq 106$ для любой расстановки чисел в таблице. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Если в прямоугольнике 2×10 отмечено $1 \leq n \leq 9$ парно несоседних клеток, то число неотмеченных клеток прямоугольника, соседних с отмеченными, больше n .

Доказательство. В каждом на 10 прямоугольничков 1×2 , длинные стороны которых параллельны коротким сторонам прямоугольника 2×10 , отмечено не более одной клетки. Если одна клетка в таком прямоугольничке отмечена, то другая — неотмеченная, соседняя с отмеченной. Тем самым мы уже имеем n та-

46	55	47	54	48	53	49	52	50	51
60	41	59	42	58	43	57	44	56	45
36	65	37	64	36	63	39	62	40	61
70	31	69	32	68	33	67	34	68	35
26	75	27	74	28	73	29	72	30	71
80	21	79	22	78	23	77	24	76	25
16	85	17	84	18	83	19	82	20	81
90	11	89	12	88	13	87	14	86	15
6	95	7	94	8	93	9	92	10	91
100	1	99	2	98	3	97	4	96	5

ких клеток, а поскольку $n \leq 9$, то (при $n \geq 1$) найдется, очевидно, и клетка, принадлежащая прямоугольничку 1×2 без отмеченных клеток, граничащая с отмеченной клеткой соседнего прямоугольничка 1×2 . Следовательно, общее число неотмеченных клеток, соседних с отмеченными, больше n , что и требовалось доказать.

Допустим, что $S \leq 105$ для некоторой расстановки чисел. Стерев все числа в таблице, будем вписывать их на прежние места, начиная с числа 100 , в порядке убывания.

Выделим в таблице пять неперекрывающихся горизонтальных полос размерами 10×2 клеток и пять неперекрывающихся вертикальных полос 2×10 клеток. Зафиксируем число n_0 , после вписывания которого впервые либо в каждой горизонтальной, либо в каждой вертикальной полосе окажется не меньше одного вписанного числа; соответствующий момент назовем критическим. Пусть уже вписаны 33 числа от 100 до 68 , но есть пустые горизонтальная и вертикальная полосы. Те 64 клетки таблицы, которые не входят в эти полосы, можно разбить из 32 прямоугольничка 1×2 , хотя бы в одном из них окажутся два вписанных числа с суммой не меньше чем $68 + 69 > 105$. Отсюда следует, что $n_0 \geq 68$.

Заметим, что в критический момент в каждую из полос вписано меньше 10 чисел (если бы нашлась, например, горизонтальная полоса, в которую вписано не меньше 10 чисел, то перед вписыванием числа n_0 в ней было бы не меньше 9 чисел, в силу чего в каждой из вертикальных полос было бы минимум по одному числу, что противоречит определению числа n_0). Поэтому к полосам того направления, в которых в критический момент оказалось хотя бы по одному числу, можно применить лемму.

Поскольку в критический момент в таблицу вписано $101 - n_0$ чисел, из леммы следует, что у клеток, куда

они вписаны, есть не менее $(101 - n_0) + 5 = 106 - n_0$ пустых соседних. Нам предстоит, таким образом, вписать в таблицу число, которое не меньше чем $106 - n_0$, причем рядом с числом, которое не меньше чем n_0 . Сумма этих двух чисел будет не меньше чем $106 - n_0 + n_0 = 106$, что противоречит нашему предположению о том, что $S \leq 105$.

Д. Храмцов, Д. Фон-дер-Флаас

M1613*. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по несколько в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:

1° снять по одному камню с клеток $n - 1$ и n и положить один камень в клетку $n + 1$;

2° снять два камня с клеток n и положить по одному камню в клетки $n + 1$, $n - 2$.

Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя, и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам).

Обозначим через a_i количество камней в клетке с номером i . Тогда последовательность $A = (a_i)$ задает конфигурацию — расположение камней по клеткам. Назовем весом конфигурации A число $w(A) = \sum a_i \lambda^i$, где число $\lambda > 0$ выбрано так, что разрешенные действия не меняют веса конфигурации. Для этого достаточно взять λ равным большему корню уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, т.е. $\lambda = (\sqrt{5} + 1)/2$. Действительно, $\lambda^{n+1} - \lambda^n - \lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$, $\lambda^{n+1} - 2\lambda^n + \lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$.

Докажем индукцией по k — числу камней, что любая последовательность действий завершается. При $k = 1$ это верно. Пусть k — наименьшее, при котором для какой-то конфигурации $A = (a_i)$ с $\sum a_i = k$ есть бесконечная последовательность действий. Наибольший номер непустой клетки при разрешенных действиях не уменьшается, но и расти бесконечно он не может — он не может превысить числа n , при котором $\lambda^n > w(A)$. Значит, с какого-то момента наибольший номер непустой клетки перестает изменяться, и с камнями, попавшими в эту клетку, уже ничего не происходит. Выбросим эти камни и применим предположение индукции к оставшимся.

В конечной конфигурации в каждой клетке не более одного камня, и нет двух непустых клеток подряд. Докажем, что любые две конфигурации $A = (a_i)$ и $B = (b_i)$ с такими свойствами имеют разные веса. Пусть n — наибольший номер, при котором $a_i \neq b_i$; пусть $a_n = 1$, $b_n = 0$. Выбросим из A и B все камни с номерами, большими n (они в A и B совпадают). Для оставшихся конфигураций A' и B' имеем

$$w(A') \geq \lambda^n;$$

$$w(B') < \lambda^{n-1} + \lambda^{n-3} + \lambda^{n-5} + \dots = \lambda^{n-1} \frac{1}{1 - \lambda^{-2}} = \lambda^n.$$

Д. Фон-дер-Флаас

M1614. На плоскости расположены $2n + 1$ прямых. Докажите, что существует не более $n(n + 1)(2n + 1)/6$ различных остроугольных треугольников, стороны которых лежат на этих прямых.

Можно считать, что среди прямых нет ни параллельных, ни перпендикулярных и никакие три прямые не пересекаются в одной точке (другими словами, любые три прямые образуют треугольник, причем либо остроугольный, либо тупоугольный). Действительно, выполнения этого условия можно добиться, поворачивая прямые на сколь угодно маленькие углы, а при достаточно малых углах поворота существующие остроугольные треугольники не перестанут быть остроугольными, так что число остроугольных треугольников не уменьшится.

Пусть A и B — количества соответственно остроугольных и тупоугольных треугольников на картинке. Будем называть треугольник, образованный прямыми a , b , c , частично остроугольным относительно a , если его углы при стороне, лежащей на a , оба острые. Выберем произвольную прямую l из изшего набора и повернем картинку так, чтобы l стала горизонтальной осью. Остальные $2n$ прямых разбаваются на два класса: прямые с положительным коэффициентом наклона и прямые с отрицательным коэффициентом наклона. Нетрудно видеть, что две прямые образуют вместе с l частично остроугольный относительно l треугольник тогда и только тогда, когда они принадлежат разным классам. Поэтому количество таких треугольников равно произведению количества прямых в двух классах, что по неравенству о средних не превосходит n^2 . Сложив такие оценки для всех прямых, получаем, что количество нар «прямая и частично остроугольный относительно нее треугольник» не превосходит $n^2(2n + 1)$. В этом количестве каждый остроугольный треугольник учитывается три раза, а тупоугольный — один раз, значит,

$$3A + B \leq n^2(2n + 1).$$

Общее число треугольников равно количеству троек прямых, т.е.

$$A + B = \frac{(2n + 1)2n(2n - 1)}{6}$$

Вычтем это тождество из предыдущего неравенства:

$$2A \leq \frac{3n^2(2n + 1)}{3} - \frac{n(2n + 1)(2n - 1)}{3} = \frac{n(2n + 1)(n + 1)}{3}.$$

Таким образом, $A \leq n(n + 1)(2n + 1)/6$, что и требовалось.

Замечание 1. Оценка $n(n + 1)(2n + 1)/6$ — точная: существуют расположения прямых, в которых ровно такое количество остроугольных треугольников. Примером служит набор из $2n + 1$ прямых, содержащих стороны правильного $(2n + 1)$ -угольника. Предлагаем читателям ответить на вопрос: какова точная оценка для $2n$ прямых?

Замечание 2. Задача имеет следующую эквивалентную переформулировку: для набора из $2n + 1$ точек на окружности не более $n(n + 1)(2n + 1)/6$ треугольников с вершинами в этих точках содержат центр окружности в качестве внутренней точки. Для доказательства экви-

валентности установим соответствие между расположением прямых и наборами точек на окружности, при котором остроугольным треугольникам соответствуют треугольники (с вершинами на окружности), содержащие внутри себя центр окружности. Для этого достаточно прямым, составляющим угол φ с фиксированной прямой (скажем, осью Ox), сопоставить точку на фиксированной окружности δ с координатой 2φ , где $0 \leq \varphi < \pi$. Нетрудно проверить, что при таком соответствии тройка прямых разных направлений (не проходящих через одну точку) ограничивает прямоугольный треугольник, если две на соответствующих им точек на окружности δ диаметрально противоположны, тупоугольный (остроугольный) треугольник — если точки лежат (соответственно, не лежат) по одну сторону от некоторого диаметра δ .

С.Иванов

M1615. В прямоугольную коробку $m \times n$, где m и n — нечетны, уложены кости домино размерами 2×1 так, что остался не покрыт только квадрат 1×1 (дырка) в углу коробки. Если доминошка прилегает к дырке короткой стороной, ее разрешается сдвинуть вдоль себя на одну клетку, закрыв дырку (при этом открывается новая дырка). Докажите, что с помощью таких передвижений можно перекинуть дырку в любой другой угол.

Назовем полями клетки доски, стоящие на пересечении горизонталей и вертикалей с нечетными номерами (см. рисунок 1, где поля закрашены голубым цветом). За-

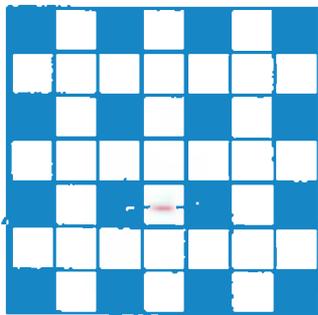


Рис.1

метим, что дырка будет перемещаться только по этим полям. Докажем, что на доске $m \times n$ дырка, первоначально расположенная в углу, может быть перемещена в любое другое поле, как бы ни были расположены доминошки.

Из центра каждого поля A , закрытого доминошкой, проведем стрелку в соседнее поле, граничащее с короткой стороной этой доминошки; если дырка находилась бы в B , то после передвижения этой доминошки она попала бы в A . Таким образом, на каждого поля выходит ровно одна стрелка (именно здесь используется нечетность m и n).

Докажем, что из каждого поля путь по стрелкам неизбежно приведет к полю, где расположена дырка, для этого убедимся, что такой путь не может заиклиться. Другими словами, не существует замкнутого пути на стрелок, ограничивающего многоугольник.

Для этого докажем, что (строго) внутри замкнутого контура из стрелок, соединяющих центры клеток — этот контур, очевидно, расположен из решетки квадра-

тов со сторонами 2 — лежит нечетное число k клеток (исходной решетки со стороной 1). Тем самым, внутренность этого контура не может быть заполнена доминошками! (Здесь используется тот факт, что дырка лежит на границе прямоугольника.)

Приведем два доказательства этой леммы о нечетности. Первое использует подсчет площадей и углов. Вся площадь, ограниченная контуром на стрелок, очевидно, кратна 4, поскольку она состоит из нескольких квадратов 2×2 . Отметим с внутренней стороны каждой стрелки контура полоску шириной $1/2$ — примыкающей к ней прямоугольник $2 \times 1/2$ (рис.2). Сумма пло-

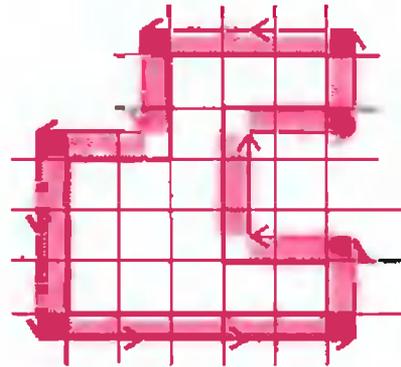


Рис.2

щадей с таких полосок равна числу звеньев замкнутой ломаной и потому четна (вверх направлено столько же звеньев, сколько вниз, аправо — столько же, сколько влево). Но при каждом повороте на угол 90° или -90° образуется пересечение полосок площадью $1/4$ или возникает зазор между полосками и внутренними клетками с такой же площадью $1/4$. В замкнутой ломаной поворотов одного знака в 4 больше, чем другого. Таким образом, площадь зазора (шириной $1/2$) между контуром из стрелок и внутренностью из k клеток отличается на 1 от s , т.е. нечетна. Итак, k получается вычитанием из числа, кратного 4, нечетного числа $s - 1$ и, значит, нечетно.

Второе доказательство нетрудно провести индукцией по числу квадратов 2×2 , заключенных внутри контура. Нужно лишь доказать, что в любом многоугольнике M , состоящем из нескольких квадратов клетчатой бумаги, можно выбрать один «крайний» квадрат, после удаления которого остается (неразпадающийся) многоугольник. Это можно сделать (примерно так же, как выше «с помощью стрелок» мы искали путь для перемещения доминошек).

Выберем из нашего многоугольника M любой квадрат — присвоим ему номер 0, соседним с ним (по стороне) квадратам из M присвоим номер 1, их соседям (которые еще не имеют номера) присвоим номер 2, и т.д. (рис.3) Квадрат K с наибольшим номером и будет «крайним».

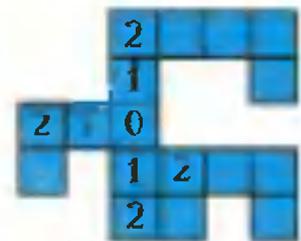


Рис.3

Он граничит либо с одним квадратом из M , либо с двумя (причем в последнем случае весь угол из четырех квадратов, включающий K , принадлежит M); как легко видеть, внутренность M при удалении такого квадрата K

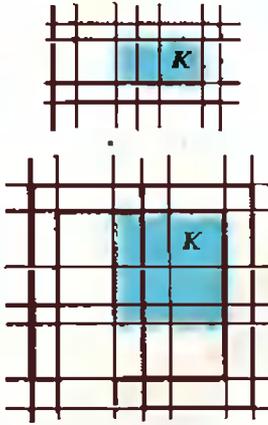


Рис.4

уменьшается на 2 или 4 клетки (рис.4). Поскольку для M , состоящего на одного квадрата, внутренность — одна клетка, по индукции мы докажем, что для любого M она состоит на нечетного числа клеток.

А.Шаповалов, Н.Васильев

Ф1623. На гладком горизонтальном столе находится клин массой M с углом 45° при основании, на нем — клин такой же массы M с таким же углом, так что верхняя плоскость второго клина горизонтальна, а на ней лежит кубик массой m (рис.1). Всю конструкцию удерживают неподвижной. Какую скорость приобретет кубик через время τ после растормаживания системы? Трением пренебречь. Считать, что за указанный интервал времени характер движения не меняется.

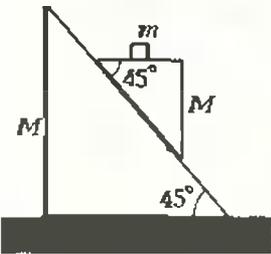


Рис.1

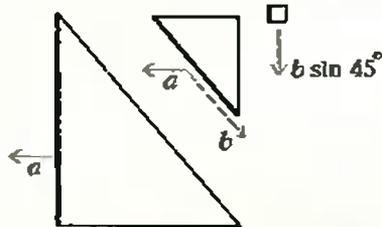


Рис.2

Обозначим буквой a ускорение нижнего клина — оно горизонтальное (рис.2). Ускорение верхнего клина относительно нижнего направлено вдоль плоскости их соприкосновения — вниз под углом 45° к горизонту. Удобно представить полное ускорение верхнего клина в виде суммы двух векторов — горизонтально направленного вектора, по величине равного a , и направленного вниз под углом 45° вектора, равного по величине b . Тогда горизонтальная составляющая ускорения верхнего клина направлена противоположно ускорению нижнего и равна $b \cos 45^\circ - a$, вертикальная составляющая равна $b \sin 45^\circ$. Ускорение кубика, очевидно, направлено вниз и равно вертикальной составляющей ускорения верхнего клина, т.е. $b \sin 45^\circ$.

Найдем соотношение между величинами a и b . Для этого вспомним, что в отсутствие внешних горизонтальных сил ускорение центра масс по горизонтали должно быть нулевым. Кубик движется строго верти-

кально. поэтому

$$M(b \cos 45^\circ - a) = Ma, \quad b = 2a / \cos 45^\circ = 2\sqrt{2}a.$$

Тогда горизонтальная составляющая полного ускорения верхнего клина относительно земли равна a , вертикальная составляющая ускорения этого клина (и кубика) равна $2a$. Модуль полного ускорения клина при этом равен $\sqrt{5}a$.

Для нахождения ускорений тел воспользуемся законом сохранения энергии. Для этого подождем время τ после начала движения тел и приравняем полную кинетическую энергию системы уменьшению ее потенциальной энергии. Скорости и смещения за время τ найдем по соответствующим формулам для равноускоренного движения. Уменьшение потенциальной энергии системы связано с вертикальным смещением верхнего клина и кубика:

$$\Delta E_p = (M + m)g \frac{2a\tau^2}{2}.$$

Суммарная кинетическая энергия тел равна

$$E_k = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{M(\sqrt{5}a\tau)^2}{2} + \frac{m(2a\tau)^2}{2}.$$

Приравняв ΔE_p и E_k , получим величину ускорения a :

$$a = g \frac{M + m}{3M + 2m},$$

а значит, и скорость кубика через время τ после начала движения:

$$v = 2a\tau = 2g\tau \frac{M + m}{3M + 2m}.$$

З.Рафаилов

Ф1624. Два маленьких шарика массой M каждый находятся на расстоянии L друг от друга и имеют одинаковые по величине и противоположно направленные скорости v_0 , перпендикулярные отрезку, соединяющему шарики. Никаких внешних сил нет. Учитывая гравитационное взаимодействие шариков, найдите максимальное расстояние между ними в процессе движения и минимальные скорости шариков.

При достаточно большой начальной скорости шариков расстояние между ними будет увеличиваться, а их скорости будут уменьшаться — шарики притягиваются друг к другу. В этом случае максимальное расстояние между шариками соответствует минимальной скорости (в силу симметрии, скорости шариков в любой момент равны друг другу). Если шары не разлетятся на бесконечное расстояние (а при достаточно большой скорости так и было бы), максимальное расстояние между ними будет в тот момент, когда проекции скоростей на прямую, соединяющую шарики, окажутся равными нулю. Обозначим скорости шариков в этот момент v , а расстояние между ними s . Тогда из закона сохранения энергии получим (шариков — два)

$$Mv_0^2 - \frac{GM^2}{L} = Mv^2 - \frac{GM^2}{s}.$$

В соответствии с законом сохранения момента импуль-

са (или второго закона Кеплера), можно записать

$$Mv_0L = Mvs.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$s = \frac{L}{GM/(Lv_0^2) - 1}, \quad v = v_0 \left(\frac{GM}{Lv_0^2} - 1 \right).$$

Проанализируем полученный ответ. Отрицательное значение знаменателя в первой формуле соответствует разлету шариков на бесконечное расстояние, это произойдет при выполнении условия $v_0^2 > GM/L$. Если знаменатель меньше единицы, то все в порядке, а если он больше единицы — то мы нашли минимальное расстояние между шариками (наши уравнения годятся и для минимума, и для максимума). В этом случае ответ простой: максимальное расстояние между шариками L , а минимальная скорость v_0 . Это соответствует выполнению условия

$$\frac{GM}{Lv_0^2} - 1 > 1, \text{ или } v_0^2 < \frac{GM}{2L}.$$

И наконец, если скорости шариков не слишком малы и не очень велики, т.е. лежат в заданных границах, то максимальное расстояние — это s , а минимальная скорость — v .

Р. Шариков

Ф1625. В кубическом сосуде объемом $V = 1 \text{ м}^3$ находится гелий при температуре $T = 300 \text{ К}$ и давлении $p = 10^5 \text{ Па}$. В стенке сосуда открывают отверстие площадью $S = 1 \text{ см}^2$ и через время $\tau = 0,01 \text{ с}$ закрывают. Снаружи — вакуум. Оцените изменение температуры газа в сосуде после установления в нем равновесия. Считайте, что открывание и закрывание отверстия производят очень аккуратно — не создавая лишних потоков газа.

Газ в сосуде довольно плотный, молекулы вылетают из сосуда как бы «сплошной средой». Оценим число вылетевших молекул — его мы найдем так же, как обычно включают число ударов молекул о стенку сосуда (тут несущественны удары молекул друг о друга). За время τ вылетает половина молекул на объема $Sv\tau$. Скорость молекул v оценим из средней кинетической энергии (мы потом непременно проверим, не слишком ли сильно изменится температура и можно ли для ее оценки использовать начальное значение 300 К):

$v = \sqrt{3RT/M} \approx 1500 \text{ м/с}$, где $M = 4 \text{ г/моль}$ — молярная масса гелия. Тогда объем, в котором вначале сохранились вылетевшие молекулы, составит

$$\Delta V = \frac{1}{2} Sv\tau \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 \ll V.$$

Видно, что в сосуде практически ничего не изменилось.

Оставшийся в сосуде газ совершит некоторую работу, «выдавливая» вылетающую порцию наружу. Тепла к сосуду не подводилось, значит, работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа. Запишем уравнение первого начала термодинамики:

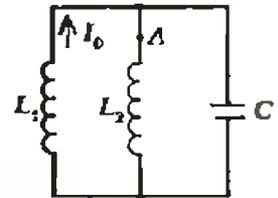
$$p\Delta V = -\Delta U = -1,5\nu R\Delta T.$$

Отсюда, учитывая уравнение состояния $pV = \nu RT$, найдем

$$\Delta T = -T \frac{\Delta V}{3V} \approx -0,15 \text{ К}.$$

А. Повторов

Ф1627¹. Конденсатор емкостью C подключают к параллельно соединенным катушкам, индуктивности которых L_1 и L_2 (см. рисунок²). В начальный момент конденсатор не заряжен, через первую катушку течет ток I_0 , ток второй катушки равен нулю. Найдите максимальный заряд конденсатора и максимальную величину тока в точке A .



Катушки подключены параллельно, значит, их ЭДС индукции в любой момент одинаковы, а изменения магнитных потоков через них равны между собой. (Тот же вывод можно сделать, рассматривая магнитный поток через сверхпроводящий контур, образованный катушками.) Обозначая токи катушек в некоторый момент времени I_1 и I_2 , запишем

$$L_1 I_0 = L_1 I_1 + L_2 I_2.$$

Максимальный заряд конденсатора соответствует моменту, когда ток, «втекающий» в обкладку конденсатора, обращается в ноль, т.е. $I_1 = I_2$. Тогда заряд можно найти, используя закон сохранения энергии. После несложных преобразований получим

$$Q_m = I_0 \sqrt{\frac{CL_1 L_2}{L_1 + L_2}}.$$

Максимальный ток через вторую катушку получится в тот момент, когда ЭДС индукции обратится в ноль. Это означает, что и заряд конденсатора в этот момент обращается в ноль. Тогда закон сохранения энергии можно записать без учета энергии конденсатора.

$$L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 = L_1 I_0^2.$$

Объединяя это уравнение с уравнением для токов (магнитных потоков), получим

$$L_1 I_0^2 = L_1 \left(I_0 - \frac{L_2 I_2}{L_1} \right)^2 + L_2 I_2^2.$$

У этого уравнения для I_2 имеются два корня. Один из них равен нулю — он соответствует минимальному значению этого тока (условия минимума очень похожи на условие максимума — ЭДС индукции и в этом случае равна нулю), а второй корень искомый:

$$I_2 = 2I_0 \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

Р. Александров

¹ Решение задачи Ф1626 будет опубликовано позже.

² К сожалению, на рисунке в условии задачи (см. «Квант» №6 за 1997 г.) допущена неточность.



Названия числовых великанов

Названия чисел в пределах первой тысячи у разных народов звучат по-разному. Но число 1 000 000 представителю разных стран называют одинаково — миллион.

Любопытна история числительного миллион. В 1271—1275 годах венецианский купец Марко Поло (ок. 1254—1324) первым из европейцев посетил далекий и загадочный Китай. Путь в Китай лежал через многие страны. Вернувшись домой, он не переставал восторгаться увиденными чудесами. В его речи то и дело проскальзывало слово «миллионе... миллионе...». Слово *mille* (тысяча) было известно еще в Древнем Риме. Словечко «миланоне», которым отважный путешественник назвал тысячу тысяч, так прочно пристало к Марко Поло, что современники прозвали его «Марко Миллионе».

Слово *миллиард* для названия числа 1 000 000 000 имеет французские корни. Его синоним — слово *биллион*. Приставка *би-* по-латыни означает «второй» — к предыдущему числу как бы присоединяется второй «вагончик» из трех нулей.

Далее названия чисел образуются из латинских названий количества таких «вагончиков», прикрепляемых справа: 1 000 000 000 000 — *триллион*, 1 000 000 000 000 000 — *квадриллион*, 1 000 000 000 000 000 000 — *квинтиллион*. Названия чисел до числа 10^{63} с двадцатью одним «вагончиком» помещены в таблице. Заметьте, что количество «вагончиков» на единицу больше латинского числа, звучащего в названии. Ведь состав из «вагончиков» начал формироваться не с «тепловоза» — единички, а от сцепки «тепловоза» с



одним «вагоном» — тысячи. Такая система названий больших чисел принята в большинстве европейских стран и в Соединенных Штатах Америки. А вот во Франции XV века считали, что «вагончик» из трех нулей слишком мал, и поместили в один «вагончик» 6 нулей. В рукописном сочинении по арифметике лионского врача Никола Шюке мы находим слова *биллион*, *триллион* и т.д., которыми он обозначал *вторую*, *третью* и т.д. степени миллиона, т.е. числа $(1000000)^2 = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$, $(1000000)^3 = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$ и т.д. Эта традиция до сих пор сохранилась в Германии и Англии, сами же французы с середины XVII в. стали разделять числа на периоды по три цифры в каждом вместо шести, и слово *бишюн* получало у них значение 10^9 .

В III в. до н.э. величайший ученый древности Архимед (ок. 287—212 до н.э.), отправляясь от модели Вселенной своего старшего современника, астронома Аристарха Самосского (IV —

III в. до н.э.), нашел число мельчайших песчинок, какое потребовалось бы, чтобы заполнить все пространство Вселенной, весь мир, представляемый древними греками. Это число оказалось не столь уж запредельным для человеческого понимания — наш современник оценил бы его как единицу с 63 нулями. Свою систему чисел Архимед изложил в сочинении «Псаммит» («исчисление песчинок»). Основополагающим числом в его системе служит *мириада* — число 10^4 . Так, 1 у Архимеда — единица чисел первых, *мириада* — 10^4 единиц чисел первых, 10^8 — единица чисел вторых, 10^{16} — единица чисел третьих, $10^{8 \cdot 10^8}$ — единица чисел *мириадо-мириадных*.

Затем Архимед, назвав эти числа числами первого периода, переходит к другим периодам: второму, третьему, ..., *мириадно-мириадному*. Таким образом, у Архимеда названия получили числа в огромном диапазоне — от 1 до $(10^{8 \cdot 10^8})^{10^8} = 10^{8 \cdot 10^{16}}$. Если записать величину нулей последнего числа из бумажной ленты, отводя на каждую цифру до 5 мм, то в итоге потребуются лента, длина которой превысит в несколько раз размеры нашей планетной системы. (Для желающих проверить расчеты сообщаем, что самая отдаленная от Солнца планета Плутон имеет средний радиус орбиты около 6 млрд км.)

И в наши дни ученые предлагают для больших чисел новые названия. Так, например, профессор Станфордского университета (США) Дональд Э. Кнут полагает, что в традиционных системах названия для чисел «расходуются» слишком расточительно. Представим





на минутку, что мы умеем называть только числа в пределах от 1 до 100. Уже этого небольшого багажа знаний достаточно, чтобы поименовать все числа от 1 до 9999 — последнее число можно назвать девяносто девять сотен девяносто девять. Точно так же, если влезет за древними греками число 10 000 иззвать *мириадой*, то далее мы сможем поименовать все числа от 1 до 10^8 , например, называя число 9999 9999 *девяносто девять сотен девяносто девять мириад девяносто девять сотен девяносто девять*. Следующее по необходимости названное число должно быть 10^9 . Э. Кнут предлагает для него название *милльон* («однокорневые слова, например, *милльонер* — обладатель миллионного состояния, также были бы удобны в обращении», — отмечает Кнут). Действуя точно так же и далее, новое название мы каждый раз будем давать числу, представляющему собой квадрат предыдущего именованного числа.

Любопытно, что близкая идея — при образовании нового именованного числа «брать столько постолько», встречается не только у Кнута и Архимеда, но и в старинной нумерации славян. В одной из рукописей XVII века строится числовая система, в которой число 10^6 именуется *тьмой*, затем *тьма тьму щая*, число 10^{12} , получает название *легиона*; *легион тегинюв*, т.е. число 10^{24} , называется *леодром*, а *леодр леодров*, т.е. 10^{48} , именуется *воронам*. Следующий рубеж, 10^{96} , объявится *колодой*. На ней спотыкались, и счет прерывался: «и более сего несть человеческому разумевати».

Для чего ученые интересуются системами названий чисел? Ведь если обозначить какое-нибудь большое число степенью 10, то все понятно, о чем идет речь. Трудно на согласиться с этим аргументом. И все же па следует думать, что рассматриваемые числовые конструкции интересны лишь с точки зрения науки о языке — лингвистики. Рассуж-

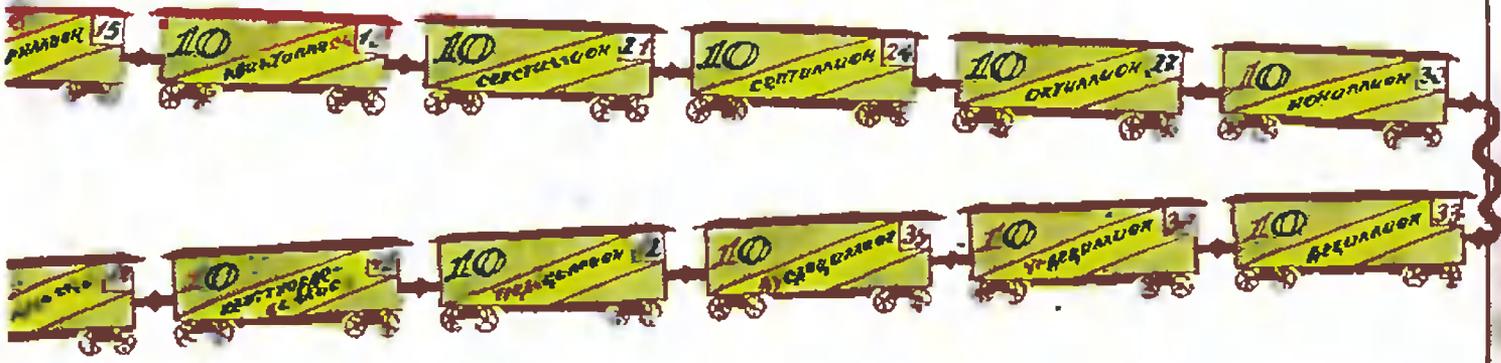
Латинские числительные			Большие числа и их названия
Число	Название	Производные	
I	unus	унус	10^6 миллион
II	duo	дуо	10^9 миллиард, билион
III	tres tria	трес триа	10^{12} триллион
IV	quattuor	кваттур	10^{15} квадриллион
V	quinque	квинкис	10^{18} квинтиллион
VI	sex	секс	10^{21} секстиллион
VII	septem	септем	10^{24} септиллион
VIII	octo	окто	10^{27} октиллион
IX	novem	новем	10^{30} нониллион
X	decem	децем	10^{33} дециллион
XI	undecim	ундецим	10^{36} ундециллион
XII	duodecim	дуоцим	10^{39} дуоциллион
XIII	tredecim	тредецим	10^{42} тредециллион
XIV	quattuordecim	кваттуордецим	10^{45} кваттуордециллион
XV	quindecim	квиндецим	10^{48} квиндециллион
XVI	sedecim	седецим	10^{51} седециллион
XVII	septendecim	септандецим	10^{54} септандециллион
XVIII	duodeviginti	дуодевигинти	10^{57} дуодевигинтиллион
XIX	undeviginti	ундевигинти	10^{60} ундевигинтиллион
XX	viginti	вигинти	10^{63} вигинтиллион

дения о схемах построения названий больших чисел позволили профессору Кнуту построить в 1977 году систему математических символов, с помощью которой впоследствии была представлена самая большая на когда-либо встречавшихся в математических доказательствах констант — так называемое *число Грэхема*. Это число связано с бикрихматическими типеркубами и не может быть выражено без особой 64-уровневой системы символов Кнута. Естественно, что число Грэхема вошло в книгу рекордов Гиннесса как самое большое число, когда-либо применявшееся в математическом доказательстве.

В заключении нельзя не упомянуть о таких «внесистемных» малых числах, как *зугол* — для числа 10^{100} и *зуголлекс* — для числа 10 в степени зугол: $10^{10^{100}}$. Однажды американский математик Эдвард Каснер стал подыскивать простое и ясное слово для названия числа 10^{100} . На ум ничего не приходило, и он решил обратиться за помощью к своему девятилетнему племяннику. Тот, не долго думая, ответил «зугол».

В толковых словарях можно найти и еще одно большое число, имеющее свое собственное название, это *центиллион* — миллион в сотой степени.

А. Жуков



Задачи

Задачи 1 – 4 собраны из старых номеров «Кванта». Их решали младшие школьники, которые уже стали младшими и старшими научными сотрудниками.



1. Восьмиклассники построены в шеренгу. Перед каждым из них стоит семиклассник, который ниже его ростом. Докажите, что если шеренги семиклассников и восьмиклассников построить по росту, то по-прежнему каждый восьмиклассник будет выше стоящего перед ним семиклассника.

(«Квант» №8 за 1974 г.)



2. Мастер спорта Седов, кандидат в мастера Чернов и перворазрядник Рыжов встретились в клубе перед началом турнира.

— Обратите внимание, — заметил черноволосый, — один из нас седой, другой рыжий, а третий черноволосый. Но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии. Забавно, не правда ли?

— Ты прав, — подтвердил мастер.

Какого цвета волосы у кандидата в мастера?

(«Квант» №10 за 1976 г.)



3. Десять человек пришли в гости в галошах. Уходили они по одному, и каждый надевал произвольную пару галош, в которую он мог влезть (т.е. не меньшего размера, чем его собственная). Какое наибольшее число людей не смогло надеть галоши?

(«Квант» №5 за 1978 г.)

4. Из спичек сложено слово «ТОЛЯ»:



Переложите ровно одну спичку так, чтобы получилось женское имя.

(«Квант» №2 за 1976 г.)



5. На каждой горизонтали и каждой вертикали шахматной доски стоит нечетное число фигур. Докажите, что на черных клетках шахматной доски стоит четное число фигур.

В.Произволов

Почему у сыра круглые дыры

С. КРОТОВ

...На полянке рос высокий-превысокий дуб, а на самой верхушке этого дуба кто-то громко жужжал: жжж! Винни-Пух сел на траву под деревом, обхватил голову лапами и стал думать. Сначала он подумал так: «Это — жжжжж — неспроста! Зря никто жужжать не станет. Само дерево жужжать не может. Значит, тут кто-то жужжит. А зачем жужжать, если ты — не пчела? По-моему, так!». Потом он еще подумал-подумал и сказал про себя: «А зачем на свете пчелы? Для того, чтобы делать мед! По-моему, так!». Тут он поднялся и сказал: «А зачем на свете мед? Для того, чтобы я его ел! По-моему, так, а не иначе!».

А.Милн. Винни-Пух и все-все-все

ПОЧЕМУ многие любят симпатичного героя — медвежонка Винни-Пуха? Наверное, потому, что он нам напоминает нас самих, когда мы были маленькими, задавали всякие глупые (по мнению взрослых) вопросы и тут же хотели получить на них ответы. Но задавать вопросы очень полезно в любом возрасте. И конечно — при знакомстве с физикой. Давайте попробуем — может быть мне удастся вас в этом убедить.

Не приходилось ли вам в детстве читать сказку «Два жадных медвежонка»? Не знаю как вам, но мне больше всего запомнилась сама книжка, причем незабываемое впечатление произвели красочные иллюстрации с исчезающей на глазах лостройкой сыра в ярко-красном «мундире» и ужасно «дырявой» внутри. Дырки были абсолютно круглые и все почти одинаковые.

С тех пор прошло много времени, и лишь недавно я понял, что за устройство дырок в сыре отвечает один из фундаментальных законов природы — закон Паскаля. Не забыли, как он звучит? «Давление, производимое на жидкость или газ, передается без изменения в каждую точку жидкости или газа.» Как видите, главным действующим лицом здесь выступает давление. Вот и давайте прежде всего обсудим эту физическую величину. Помните, как в печальной сказке «Серая шейка» хитрая лиса подползала к польньне, в которой плавала Серая шейка? Понимая опасность передвижения по тонкому льду, лиса распласталась по нему как только могла.

Эта статья была опубликована в «Кванте» №1 за 1985 год.

Но сила, с которой она давит на лед, не зависит от ее положения — лиса ведь не становится легче от того, что она стоит, а не лежит. Нет ли здесь противоречия?

Оказывается, нет. Все дело в том, на какую площадь поверхности приходится эта сила давления. Чем больше поверхность соприкосновения лисы и льда, тем меньше сила, прогибающая лед в различных его участках, тем безопаснее по нему передвигаться. (Лиса была хитрая и знала об этом.) Точно так же и для описания многих других явлений мало знать общую силу давления — силу, с которой давят друг на друга соприкасающиеся тела, а важно знать, какая сила приходится на единицу площади поверхности их соприкосновения. Но сила давления, приходящаяся на единицу площади поверхности, это и есть давление. Не припомните еще какую-нибудь историю, в которой все (с точки зрения физики) определялось бы именно давлением?

Ну конечно, это сказка Андерсена «Принцесса на горошине». Почему горошина, попавшая в постель принцессы, могла вызвать у нее столь неприятные ощущения? Опять все дело в давлении. Очевидно, что как с горошиной, так и без нее общая сила, «удерживающая» принцессу на кровати, остается неизменной. Но если на кровати появится выступающая часть в виде горошины, то давление в этом месте резко возрастет, что тотчас испортит настроение принцессе, и она может потерять сон. Вы не станете возражать, что вовсе не нужно быть изнеженной принцессой, чтобы обнаружить в своей постели небольшую горо-

шину? Я думаю, с этим справился бы и свинопас. А вот обнаружить горошину через толщу нескольких пуховых перин (в сказке их было двенадцать) — это требует изысканной утонченности чувств. Чуть дальше мы обсудим, почему пуховая перина, положенная поверх горошины, способна все запутать (а может быть, и нет, если, конечно, принцесса настоящая).

Итак, давление — это величина, равная отношению силы, действующей перпендикулярно к поверхности, к площади этой поверхности. Но в законе Паскаля неявно присутствует вроде бы еще одно давление — внутри жидкости или газа. Получается так, что жидкость внутри как-то «узнает» о том, что извне на нее что-то давит. То есть действующее на внешнюю поверхность жидкости давление передается самой жидкостью от точки к точке, причем одинаково во всех направлениях. И это является неотъемлемым свойством именно жидкости. Так она «устроена». Разберемся в этом поподробнее.

Нам понадобится мягкая пружина. Например, такая, как в пневматическом пистолете. Если ее положить на стол, то расстояние между соседними витками будет одним и тем же по всей длине пружины. А вот если ту же пружину поставить вертикально, то под действием силы тяжести витки начнут «падать» вниз, приближаясь друг к другу. В конце концов в разных сечениях пружина будет сжата по-разному — чем ниже витки, тем меньше будет расстояние между ними. В чем здесь дело? В результате взаимных перемещений витков в пружину?



жине возникают упругие силы, причем чем ниже витки, тем большую часть пружины они несут на себе и тем сильнее они сжаты. Итак, в различных сечениях давления в пружине разные. Чтобы увидеть картину давлений внутри тела, сожмите в руке поролоновую губку. Одни участки поролона сожмутся, другие, наоборот, растянутся. Чем сильнее сжато какое-то место, тем меньше и размеры соответствующих «пор».

Как видите, о внутренних давлениях мы могли судить так: для пружины — по изменению расстояний между соседними витками, для поролона — по изменению размеров «пор».

Жидкости или газы, в отличие от твердых тел, как правило, могут быть только сжаты. Причем если в непроницаемую оболочку налить жидкость и сильно сжать ее, то (если не учитывать силу тяжести) она будет сжата одинаково по всему объему — изнутри нельзя отличить одну точку от другой. Важно, что независимо от формы внешней поверхности давление из любой точки жидкости передается во все соседние точки одинаково. Чтобы сделать свои слова более наглядными, я вынужден буду попросить у вас прощения и напомнить не самые лучшие минуты жизни. Всем нам когда-то делали уколы. Помните, как, прежде чем сделать укол, врач надавливает на шприц и из тоненькой иголки выпускает струйку целебной жидкости? Представим теперь, что нам удалось по всей поверхности шприца сделать небольшие отверстия и вставить в них иголки — у нас получилось что-то вроде ежика. Если теперь надавить на поршень шприца-ежика, то из всех иголок, находящихся на одной высоте, будут бить абсолютно одинаковые струйки. Это происходит потому, что жидкость подчиняется закону Паскаля и выдавливается из отверстий, находящихся на одной высоте, с одной и той же силой. Для отверстий, находящихся на разных высотах, необходимо учитывать силу гидростатического давления.

Для сравнения упругих свойств жидкости и твердого тела приведем еще один пример. Представим себе, что в одну узкую мензурку мы опустили пружину (такую, что

диаметр ее витков совпадает с внутренним диаметром мензурки), а в другую налили воду. Вообразим теперь, что стенки сосудов внезапно исчезли. Как будут вести себя пружина и вода? Разумеется, пружина останется на месте, как ни в чем не бывало. Вода же разлетится во все стороны, как лопнувший пузырь. Как вы думаете, почему? Оказывается, причина различного поведения — в различных способах передачи давления твердым телом и жидкостью. Пружина передает давление практически только по своей длине. В воде же давление передается одинаково во все стороны — и вверх, и вниз, и в бок — в соответствии с законом Паскаля. Кстати сказать, аналогичную картину наблюдал и сам Паскаль. Если вы вспомните его классический опыт, то согласитесь, что по своей идее он напоминает только что описанный мысленный эксперимент (именно мысленный — мы ведь его себе только представили). Правда у Паскаля стенки сосуда — бочки — не исчезали, а трескались, и по форме возникающего «фонтана» можно было судить о давлениях в разных частях жидкости.

Теперь легко понять и «действие» пуховой перины. Взбитая перина представляет собой как бы гору маленьких пружинок, случайным образом расположенных друг относительно друга. Каждая такая пружинка передает давление по своей длине, но из-за хаотичности расположения пружинок сила давления со стороны горошины передается... Но не будем лишать вас радости самостоятельного поиска правильного решения. Скажем лишь, что интуиция принцессы позволяла безошибочно установить любой подвох — пусть он даже исходил от величественных особ, разбиравшихся в физике.

Теперь пришло время ответить на основной вопрос статьи. (Вы его еще не забыли?) В нескольких словах расскажем о том, как делают сыр, точнее — как делают дырки в сыре.

Сначала готовят «тесто» для сыра. Потом полученную массу уплотняют под большим давлением и заполняют ею специальные формы. Образовавшиеся в формах головки сыра вынимают и

помещают в теплые камеры для созревания. В этот период сыр «бродит». Внутри спрессованного «теста» образуется углекислый газ, который накапливается в виде пузырьков. Чем больше углекислого газа, тем сильнее раздуваются пузырьки. (Не забудьте, что на этой стадии внутренняя часть будущего сыра представляет собой сплошную мягкую массу.)

Потом сыр затвердевает, и внутри него как бы запечатлевается картина внутреннего «дыхания» бродящего сыра в виде вкраплений пузырьков углекислого газа. Что же можно сказать о форме образуемых полостей? Вследствие закона Паскаля, давление в пузырьках одинаково передается во все стороны — это во-первых, а во-вторых, «тесто» в этот момент подобно жидкости по своим упругим свойствам. Поэтому пузырьки раздуваются строго сферической формы. Отступление от этого правила будет означать, что в каком-то месте внутри «теста» имеются уплотнения или, наоборот, пустоты. Чем тверже сыр, тем меньше раздувается внутренний пузырек, тем меньше размер дырки. Некоторые сорта сыра перед созреванием не подвергаются обработке высоким давлением, и в них выделение углекислого газа при брожении происходит в уже имеющиеся в «тесте» пустоты, которые, как правило, имеют неправильную форму, — это промежутки, оставшиеся между зернами полуфабриката после спекания «теста» в печи. Такие сыры в разрезе представляют не правильную картину застывших пузырей, а довольно затейливый узор, гармония которого открывается только опытному сыроделу.

Вот видите, сколько нам пришлось задать разных маленьких вопросов, чтобы ответить на один большой — почему у сыра круглые дыры.

— Здорово, Пух, — сказал Кролик.

— Здравствуй, Кролик, — сказал Пух сонно.

— Это ты сам додумался?

— Да, вроде как сам, — отвечал Пух. — Не то чтобы я умел думать, — продолжал он скромно, — ты ведь сам знаешь, но иногда на меня это находит.

О кубических уравнениях

А. РУБИНШТЕЙН

20 ФЕВРАЛЯ 1535 года в итальянском городе Болонья состоялся публичный диспут-поединок между профессором Никколо Фонтана по прозвищу Тарталья, занимавшим кафедру математики в Вероне, и неким Фиоре. В то время такие состязания были явлением нередким. Противники предлагали друг другу заранее опроверженное число задач, и тот, кто успешнее справлялся с ними за отведенные несколько часов, объявлялся победителем. Он награждался обусловленным денежным призом и получал возможность занять университетскую кафедру, часто за счет побежденного. Подобный порядок вел к тому, что полученные математические результаты хранились авторами в тайне.

Важнейшим математическим достижением XVI века явилось решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степени (квадратные уравнения умели решать уже древние). В начале XVI века профессор математики Болонского университета Сильвон дель-Ферро нашел метод решения уравнений вида

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1)$$

с $p > 0$. Легко сообразить, что при этом условию уравнение (1) имеет единственное действительное решение, поскольку если его записать в эквивалентном виде

$$x^3 = -px - q,$$

то становится очевидным строгое возрастание от $-\infty$ до $+\infty$ функции в левой части и строгое убывание от $+\infty$ до $-\infty$ функции в правой части. Быть равными они могут, следовательно, лишь при одном значении аргумента, причем это обязательно происходит.

Свое открытие дель-Ферро держал, разумеется, в строгом секрете и лишь незадолго до смерти в 1526 году сообщил его двум своим ученикам, одним из которых и был Фиоре. К 1535 году Тарталья был достаточно известным математиком. Прозвище свое — «заяц» — он получил из-за невнятной речи (в детстве, когда его родной город

Брешия в 1512 году заняли французские войска, он был ранен в лицо). Получив вызов, Тарталья понял, что Фиоре знает метод решения уравнения (1). Упорно работая день и ночь, Тарталья за 8 дней до диспута нашел этот метод. В результате за два часа 20 февраля 1526 года он решил все 30 задач, предложенных ему Фиоре и оказавшихся, как и предполагалось, уравнениями вида (1). А Фиоре не смог решить ни одной из 30 задач, выбранных Тартальей из различных разделов математики.

Попытаемся реконструировать ход рассуждений Тартальи. Запишем очевидное тождество

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0. \quad (2)$$

Из сравнения (1) и (2) легко заметить, что $x = u + v$ является решением (1), если

$$\begin{cases} p = -3uv, \\ q = -(u^3 + v^3), \end{cases} \quad (3)$$

или

$$\begin{cases} \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = u^3 v^3, \\ q = -(u^3 + v^3). \end{cases} \quad (4)$$

Если исключить из (4) v^3 или u^3 , то видно, что u^3 и v^3 являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \quad (5)$$

с положительным при $p > 0$ дискриминантом

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Следовательно,

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

и окончательно

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (6)$$

Это и есть формула, получаемая Тартальей, установленная ранее дель-Ферро, но называемая формулой Кардано — по имени еще одного итальянца, впервые опубликовавшего ее в 1545 году в сочинении «О великом искусстве, или об алгебраических вещах, в одной книге».

Теперь о задачах Фиоре. Сомнительно, что он мог предложить Тарталье уравнения, решением которых является целое число, например $x^3 + 6x - 7 = 0$. Разумеется, как это в то время было принято, коэффициенты уравнений выбирались целыми. Целые решения можно подобрать, так как для уравнения (1) целые решения являются делителями свободного члена q . Процедура подбора, конечно, затрудняется, если в (3) взять значение u большим положительным, а v — малым отрицательным целыми числами, причем так, чтобы $u + v$ имело много делителей. Например, если $u = 25$, $v = -1$, то по (3) число $24 = 25 + (-1)$ является корнем уравнения $x^3 + 75x - 15624 = 0$. Однако сомнительно, чтобы Фиоре рискнул оставить сопернику шанс найти решение путем подбора. Скорее всего, он подобрал примеры, в которых $\frac{q}{2} + \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ — целые и последнее является полным квадратом, однако числа $-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ не являются кубами целых чисел. Используя тройки пифагоровых чисел, т.е. таких целых, что $a^2 + b^2 = c^2$, и выбирая те из них, в которых одно из двух меньших чисел является кубом, подобные примеры можно строить. Возможно и комбинирование таблиц квадратов и кубов натуральных чисел. Например, при $q = -2$, $p = 6$ получаем уравнение

$$x^3 + 6x - 2 = 0. \quad (7)$$

По (6) единственным действительным решением уравнения (7) является число $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$. Не представляет труда непосредственным подсчетом это проверить, причем секрет формулы (6) не

раскрывается

$$\begin{aligned} & (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})^3 + 6(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})^2 - 2 = \\ & = 4 - 3(\sqrt[3]{4})^2 \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} (\sqrt[3]{2})^2 - 2 + \\ & \quad + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2} - 2 = \\ & = -3\sqrt[3]{32} + 3\sqrt[3]{16} + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2} = \\ & = -3 \cdot 2\sqrt[3]{4} + 3 \cdot 2\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2} = 0. \end{aligned}$$

Приведем еще несколько примеров с подобными свойствами

$$x^3 + 9x - 6 = 0, \quad x = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$$

$$x^3 - 12x - 20 = 0, \quad x = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4}, \quad (8)$$

$$x^3 + 15x - 20 = 0, \quad x = \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}$$

С большой степенью уверенности можно утверждать, что уравнения (7), (8) были среди тридцати, которые должен был на диспуте решить Тарталья.

Обсудим теперь вопрос о том, насколько частным является разобранный выше случай кубического уравнения, и попытаемся найти все целые значения p и q такие, что дискриминант $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ есть точный квадрат

Произвольное уравнение третьей степени

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad a_0 \neq 0 \quad (9)$$

делением на a_0 приводится к виду

$$x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0.$$

Если в этом уравнении положить $x = y - \frac{b_1}{3}$, то получим

$$\begin{aligned} & y^3 - by^2 + \frac{b_1^2}{3}y - \frac{b_1^3}{27} + b_2y^2 - \frac{2}{3}b_1b_2y + \\ & \quad + \frac{b_1^3}{9} + b_2y - \frac{b_1}{3} + b_3 = \\ & = y^3 + \left(b_2 - \frac{b_1^2}{3}\right)y + \left(\frac{2}{27}b_1^3 - \frac{b_1}{3} + b_3\right) = \\ & = y^3 + py + q = 0 \end{aligned}$$

Получу изучение уравнения (1) позволяет исследовать и уравнения (9). Для $x \neq 0$

$$x^3 + px + q = x^3 \left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right)$$

и при достаточно больших значениях $|x|$ выражение в скобках положительно, а знак $x^3 + px + q$ совпадает со знаком x . В силу этого уравнение (1) при любых p и q имеет по крайней мере один действительный корень x_1 . По теореме

Безу имеем

$$x^3 + px + q = (x - x_1) \left(x^2 + x_1x - \frac{q}{x_1}\right)^*$$

при $x_1 \neq 0$. Если же $x_1 = 0$, то $q = 0$ и (1) принимает вид $x^3 + px = 0$, откуда $x(x^2 + p) = 0$ и решение не представляет труда. Уравнение $x^2 + x_1x - \frac{q}{x_1} = 0$ имеет два, возможно и совпадающих действительных корня или вообще не имеет действительных корней. Допустим, имеется три действительных корня. По теореме Безу тогда

$$\begin{aligned} x^3 + px + q &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \\ & \quad + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p, \\ -x_1x_2x_3 = q. \end{cases} \quad (10)$$

Считаем $q \neq 0$, так как в противном случае один из корней равен нулю и исследование тривиально. Исключение из (10) с помощью первого уравнения величины x_3 приводит к системе

$$\begin{cases} x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2 = p, \\ x_1x_2(x_1 + x_2) = q. \end{cases} \quad (11)$$

В силу первого из уравнений (10) два корня уравнения (1), скажем x_1 и x_2 , имеют совпадающие знаки, а x_3 — противоположный им знак. Тогда $x_1x_2 > 0$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} p &= x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2 = \\ &= -(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \\ &= -\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}x_2^2 < 0 \end{aligned}$$

Итак, если уравнение (1) имеет три действительных ненулевых корня, то $p < 0$. Из второго уравнения (11)

$$(x_1x_2)^2(x_1 + x_2)^2 = q^2$$

и, используя неравенство между средними арифметическим и геометрическим,

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2,$$

откуда

$$(x_1x_2)^3 \leq \frac{q^2}{4}. \quad (12)$$

Преобразуем дискриминант, учитывая

(11) и (12)

$$\begin{aligned} D &= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \\ &= \frac{q^2}{4} + \frac{(x_1x_2 - q^2(x_1x_2)^{-3})^3}{27} = \\ &= \frac{4(x_1x_2)^9 + 15q^2(x_1x_2)^6}{108(x_1x_2)^6} + \\ & \quad + \frac{12q^3(x_1x_2)^3 - 4q^6}{108(x_1x_2)^6} = \\ &= \frac{((x_1x_2)^6 + 4q^2(x_1x_2)^3 + 4q^4)(4(x_1x_2)^3 - q^2)}{108(x_1x_2)^6} = \\ &= \frac{((x_1x_2)^3 + 2q^2)^2 \left(x_1x_2^3 - \frac{q^2}{4}\right)}{27(x_1x_2)^6} \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, если уравнение (1) имеет три действительных корня, то дискриминант $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leq 0$. Если $D = 0$, то по (6) имеем $x_3 = -\sqrt[3]{4q}$, а $p = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{q^2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x^3 + px + q &= x^3 - 3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}}x + q = \\ &= \left(x + \sqrt[3]{4q}\right) \left(x^2 - \sqrt[3]{4q}x + \frac{1}{4}\sqrt[3]{(4q)^2}\right) = \\ &= \left(x + \sqrt[3]{4q}\right) \left(x - \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}\right)^2 \end{aligned}$$

и $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$. Итак, при $q \neq 0$, $D = 0$

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}, \quad x_3 = -\sqrt[3]{4q}, \quad (13)$$

т. е. уравнение (1) имеет два совпадающих на трех действительных корнях. Если $q \neq 0$, $D < 0$, то (1) имеет три действительных попарно различных корня. Наконец, при $q \neq 0$, $D > 0$ уравнение (1) имеет один действительный корень, вычисляемый по формуле (6).

При $D < 0$ формула (6) позволяет найти все три действительных корня уравнения (1), однако для этого придется использовать комплексные числа. Можно показать, что

$$x_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad (14)$$

$$x_3 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right).$$

где

$$\varphi = \arctg\left(-\frac{2}{q}\sqrt{-D}\right).$$

Формулы (14) не были известны в XVI веке. Однако и в XX веке они не производят приятного впечатления, поскольку, например, для уравнения $x^3 - 7x + 6 = 0$, корнями которого, как легко проверить, являются числа 1, 2 и -3, формулы (14) приходится использовать при $D = -\frac{100}{27}$, $\varphi = \arctg\left(-\frac{10\sqrt{3}}{27}\right)$, $\sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Теперь о целых значениях p и q таких, что $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ есть квадрат целого числа. Очевидно, что в этом случае q делится на 2, а p — на 3. Введя обозначения $r = \frac{q}{2}$, $s = \frac{p}{3}$, $n = \sqrt{D}$, приходим к задаче решения в целых

числах уравнения (диофантова)

$$r^2 + s^3 = n^2. \quad (15)$$

Легко видеть, что если $(r; s; n)$ — решение (15), то $(\pm r; s; \pm n)$ и $(\pm n; -s; \pm r)$ — также решения этого уравнения. Следовательно, достаточно искать натуральные решения (15).

Непосредственно проверяется, что $\left(\frac{s(s-1)}{2}; s; \frac{s(s+1)}{2}\right)$ при всех $s = 2, 3, \dots$ есть решение (15). Если $s^3 = p_1^3 p_2^3 \dots p_v^3$, где $1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_v$ — простые числа, то записывая s^3 в виде произведения двух сомножителей одной четности, т.е. в виде

$$s^3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2, \quad \sigma_2 - \sigma_1 = 2l \quad (16)$$

(причем для нечетных s используется и представление $s^3 = 1 \cdot s^3$), непосредственно убеждаемся в том, что $\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}; s; \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right)$ — решение (15).

Действительно,

$$\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2 = \sigma_1 \sigma_2 = s^3.$$

Таким образом, все натуральные решения уравнения (15) даются формулой

$$\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}; s; \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right), \quad (17)$$

где

$$\sigma_1 \sigma_2 = s^3, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} \in \mathbb{N}$$

Формула (17) позволяет получать для уравнений вида (1) решения типа $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, а также находить сами такие уравнения.

Решения (15) можно получить и из тождества

$$\begin{aligned} (u^2 + 3v^2)^2 + (v^2 - u^2)^2 &= \\ &= (u(3u^2 + v^2))^2 \end{aligned}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Математический маятник на наклонных поверхностях

П. ХАДЖИ, А. МИХАЙЛЕНКО

ПРЕДЛАГАЕМ вам рассмотреть несколько частных случаев из жизни математического маятника с длиной нити L и массой подвешенного к ней грузика m .

Наклонная плоскость. Пусть математический маятник расположен на абсолютно гладкой поверхности, наклоненной под углом α к вертикали (рис. 1.а). В положении равновесия на тело маятника действуют три силы: сила тяжести mg , направленная вертикально вниз, натяжение нити N , направленное по нити, и реакция опоры Q , перпендикулярная плоскости. Проектируя все силы вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно к ней, получаем

$$N = mg \cos \alpha, \quad Q = mg \sin \alpha.$$

При отклонении нити от равновесного положения на небольшой угол φ маят-

ник начнет двигаться по дуге окружности на наклонной плоскости. При этом нормальная составляющая силы тяжести сохраняет свое значение, а сила натяжения нити меняется по величине. Ответственной за создание возвращающей силы F является проекция силы тяжести на наклонную плоскость. Из рисунка 1.б, на котором изображе-

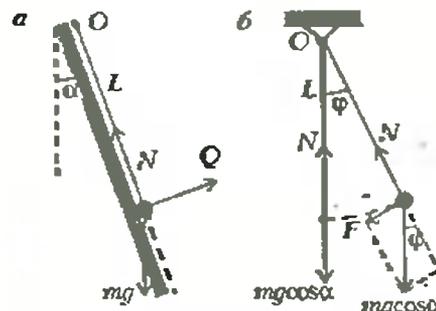


Рис. 1

ны действующие на маятник силы в проекции на наклонную плоскость, видно, что

$$F = mg \cos \alpha \sin \varphi$$

Считая колебания малыми ($\varphi \ll 1$), получаем

$$F = mg \cos \alpha \cdot \varphi = mg \cos \alpha \cdot \frac{x}{L},$$

где x — длина дуги окружности, вдоль которой движется грузик маятника. Таким образом, возвращающая сила F пропорциональна смещению x из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению. Сравнивая полученный результат с известными соотношениями для обычного маятника, легко прийти к выводу, что частота колебаний математического маятника на наклонной плоскости выражается формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} \cos \alpha}.$$

При $\alpha = 0$ для частоты колебаний снова получаем известное выражение $\omega = \sqrt{g/L}$. С ростом угла наклона плоскости α частота колебаний монотонно убывает, обращаясь в ноль при $\alpha = 90^\circ$ (это связано с тем, что проекция силы тяжести на наклонную плоскость убывает с ростом угла α).

Внутренняя поверхность полусферы. Представим себе, что математический маятник прикреплен в некоторой точке

А с внутренней стороны абсолютно гладкой полусферы радиусом R (рис. 2). Точка A расположена на окружности большого круга, ось симметрии полусферы вертикальна. Предполагается, что $L < \sqrt{2}R$. Найдём частоту малых колебаний маятника

Грузик маятника при колебаниях перемещается вдоль дуги окружности,

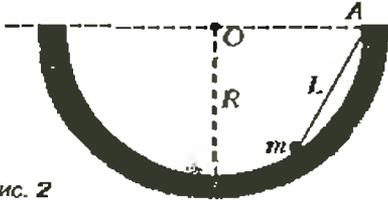


Рис. 2

плоскость которой перпендикулярна большому кругу полусферы. Из простых геометрических соображений следует, что радиус этой окружности

$$r = L \sqrt{1 - \frac{L^2}{4R^2}}$$

Маятник на полусфере эквивалентен обычному математическому маятнику с длиной нити, равной r . Поэтому частота малых колебаний маятника на полусфере равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L \sqrt{1 - \frac{L^2}{4R^2}}}}$$

Отсюда следует, что частота колебаний определяется длиной нити L и радиусом полусферы R . При $L = \sqrt{2}R$ получаем известную формулу для частоты малых колебаний свободного тела в полусфере $\omega = \sqrt{g/R}$. При $L \ll R$ (либо при $L \rightarrow 0$) получаем выражение для частоты колебаний традиционного математического маятника. Это обусловлено тем, что участок поверхности полусферы, где происходят колебания, при $L \ll R$ вырождается в вертикальную плоскость. С увеличением длины нити L частота колебаний монотонно убывает и при $L = \sqrt{2}R$ достигает приведенного выше минимального значения.

Внутренняя поверхность прямого кругового конуса. Рассмотрим математический маятник, который подвешен в некоторой точке A с внутренней стороны абсолютно гладкого прямого кругового конуса, где радиус окружности в сечении конуса равен R (рис. 3). Ось конуса OO' расположена вертикально, угол между образующей конуса и осью равен α . Определим частоту малых колебаний нашего маятника. Для этого воспользуемся энергетическим подходом.

В положении равновесия нить маятника ориентирована вдоль образующей конуса. Введём прямоугольную систе-

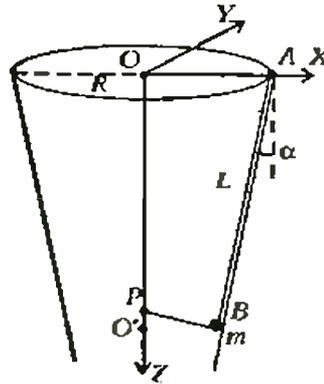


Рис. 3

му координат с началом в точке O , где ось X направлена вдоль прямой OA , ось Z совпадает с осью конуса, а ось Y перпендикулярна к ним. Координаты точки подвеса маятника в положении колебаний не меняются и равны $x_A = R$, $y_A = 0$, $z_A = 0$. Координаты точки B , в которой находится груз маятника в положении равновесия, равны соответственно

$$x_B^0 = R - L \sin \alpha, \quad y_B^0 = 0, \quad z_B^0 = L \cos \alpha$$

Из этих выражений следует очевидное равенство

$$L^2 = (x_B^0 - x_A)^2 + (y_B^0 - y_A)^2 + (z_B^0 - z_A)^2$$

Выведем маятник из положения равновесия, отклонив нить на некоторый угол. Будем характеризовать положение грузика маятника углом φ , который образует радиус OB при отклонении нити. Критерием малости колебаний здесь будет, как обычно, равенство $\varphi \ll 1$. При отклонении нити от положения равновесия грузик слегка поднимается вверх, приобретая таким образом потенциальную энергию относительно положения равновесия. Обозначим высоту подъёма грузика через h . Координаты грузика при этом изменяются и оказываются равными

$$x_B = (R - L \sin \alpha) \cos \varphi,$$

$$y_B = (R - L \sin \alpha) \sin \varphi,$$

$$z_B = L \cos \alpha - h.$$

Отметим, что в силу малости угла φ малой будет и высота подъёма грузика, причем критерий малости h можно получить из условия малого изменения координаты z_B по сравнению с z_B^0 .

Выразим длину нити L через сумму квадратов разностей соответствующих координат верхнего и нижнего концов нити (т. е. точек A и B) при смещении грузика из положения равновесия:

$$L^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

Отсюда после соответствующих преоб-

разований получаем

$$h = \frac{2R(R - L \sin \alpha)}{L \cos \alpha} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \frac{R(R - L \sin \alpha)}{L \cos \alpha} \varphi^2$$

Тогда сообщенная маятнику потенциальная энергия равна

$$E_p = mgh = \frac{1}{2} mg \frac{R(R - L \sin \alpha)}{L \cos \alpha} \varphi^2.$$

Определим теперь кинетическую энергию движения грузика при прохождении им положения равновесия. В этот момент грузик движется со скоростью $v = \Omega r$, где Ω — угловая скорость вращения, а r — радиус окружности BP , перпендикулярной к нити. Из рисунка 3 видно, что $r \cos \alpha = R - L \sin \alpha$. Учитывая еще, что $\Omega = \omega \varphi$, где ω — частота колебаний, для кинетической энергии движения грузика получаем

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{(R - L \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} \varphi^2.$$

В силу закона сохранения энергии, $E_p = E_k$, откуда для частоты малых колебаний математического маятника на внутренней поверхности прямого кругового конуса находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{L \left(1 - \frac{L \sin \alpha}{R}\right)}}$$

Очевидно, что частота колебаний существенно определяется геометрией конуса и длиной нити маятника. Если выражение для ω представить в виде

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} \frac{R \cos \alpha}{\sin \alpha \left(\frac{R^2}{4 \sin^2 \alpha} - \left(L - \frac{R}{2 \sin \alpha} \right)^2 \right)}}$$

то легко видеть, что с ростом L частота сначала убывает, достигая минимального значения

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{2g \sin \alpha}{R}}$$

при $L = R^2 / (2 \sin \alpha)$, а затем снова растет. При $L \rightarrow 0$ и при L , приближающемся снизу к $R / \sin \alpha$, частота колебаний неограниченно растет. В первом случае ($L \rightarrow 0$) геометрия конуса не играет никакой роли и «поведение» частоты колебаний такое же, как и для традиционного математического маятника.

Заметим, что полученное выражение для частоты имеет физический смысл при условии $L < R / \sin \alpha$. В случае $R = L \sin \alpha$ грузик маятника находится в вершине конуса, где колебания невозможны.

О вписанно-описанных многоугольниках

А. ЗАСЛАВСКИЙ

В КНИГАХ по элементарной геометрии достаточно часто встречаются задачи о вписанных или описанных четырехугольниках. Существенно более редкими являются задачи о четырехугольниках, являющихся вписанными и описанными одновременно. Сведения же о конвексно-описанных многоугольниках с большим числом сторон ограничиваются, пожалуй, теоремой Понселе. Приведем ее формулировку:

Пусть окружность β лежит внутри окружности α . Из точки A окружности α проведем касательную к окружности β и найдем вторую точку A_1 ее пересечения с α . Из точки A_1 проведем касательную к β и найдем вторую точку A_2 ее пересечения с α и т.д. Если для некоторой точки A точка A_n совпадает с A , то это будет выполнено и для любой другой точки окружности α .

Теорема Понселе, безусловно, является одной из самых сложных и красивых теорем элементарной геометрии. Ее доказательство можно найти, например в «Задачнике по планиметрии» И.Ф. Шарыгина (задача 615). Оказывается, однако, что если число n четно, то теорему можно усилить:

Пусть O — центр α , I — центр β , A — произвольная точка α , B — точка, полученная из A через $n/2$ описанных в формулировке теоремы Понселе шагов. Тогда точка M пересечения прямых AB и OI не зависит от выбора точки A .

Прежде чем доказывать усиленную теорему, сформулируем две леммы, верные для любых двух окружностей, одна из которых лежит внутри другой.

Лемма 1. Пусть AB и CD — касательные к β , перпендикулярные прямой OI (A, B, C, D лежат на α), M — точки пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ (очевидно, M лежит на OI), P — произвольная точка α , PQ — касательная к β . Тогда отношение PQ/PM не зависит от P (рис. 1).

Доказательство. Введем систему координат с началом в точке O и осью абсцисс, совпадающей с OI . Пусть $OI = d$. Нетрудно убедиться, что координата l точки M удовлетворяет равен-

ству

$$(R^2 + d^2 - r^2)/(R^2 + l^2) = d/l,$$

где R и r — радиусы α и β соответственно. Пусть теперь P — точка с

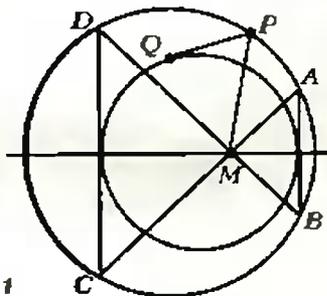


Рис. 1

координатами $(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$. Тогда $PM^2 = R^2 + l^2 - 2Rl \cos \varphi$, $PQ^2 = R^2 - r^2 = R^2 + d^2 - r^2 - 2Rd \cos \varphi$, и отношение PQ/PM не зависит от φ .

Лемма 2. Пусть A, B — точки α , AB касается β , A', B' — вторые точки пересечения прямых AM и BM с α . Тогда $A'B'$ касается β (рис. 2).

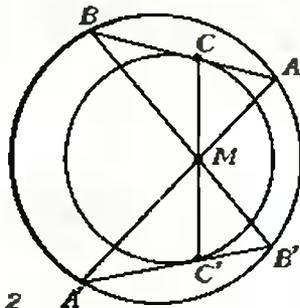


Рис. 2

Доказательство. Пусть C — точка касания AB и β . Из леммы 1 следует, что MC — биссектриса угла AMB . Продолжим MC за точку M до пересечения с $A'B'$ в точке C' . Так как треугольники AMB и $B'MA'$ подобны, $A'C'/AM = B'C'/BM = AC/AM$. По лемме 1 это означает, что отрезки $A'C'$ и $B'C'$ равны касательным, проведенным из A' и B' к β , а это возможно только если прямая $A'B'$ касается β в точке C' .

Теперь усиленная теорема Понселе доказывается совсем просто. Действительно, пусть A_0A_1 — сторона вписанно-описанного $2k$ -угольника, B_k, B_1 —

вторые точки пересечения прямых A_0M , A_1M с α . Покажем, что B_0 совпадает с A_k . Предположим, например, что A_k находится ближе к A_1 , чем B_0 . Тогда по лемме 2 B_k находится ближе к B_1 , чем A_k , и следовательно, A_{k+1} ближе к A_k , чем B_1 . Таким образом, $A_k A_{k+1}$ ни может касаться β . Аналогично разбирается случай, когда A_k находится дальше от A_1 , чем B_0 .

Из усиленной теоремы Понселе легко выводятся следующие свойства вписанно-описанных многоугольников с четным числом сторон:

1) Главные диагонали многоугольника пересекаются в одной точке M .

2) Точка M лежит на прямой, соединяющей центры окружностей.

3) Прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон многоугольника с вписанной окружностью, тоже проходят через M и являются биссектрисами углов между диагоналями.

Для читателей, знакомых с понятием инверсии, отметим также, что инверсия с центром в M переводит вписанную и описанную окружности в концентрические.

На рисунках 3, 4 приведены примеры вписанно-описанных шести- и восьмиугольников.

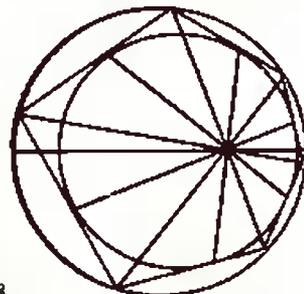


Рис. 3

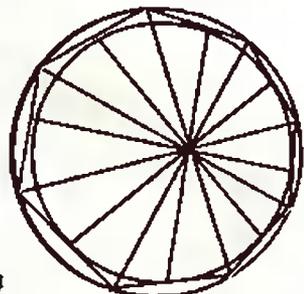


Рис. 4

Теперь нам придется сделать небольшое отступление. Прежде всего напомним одну простую задачу:

Степенью точки относительно окружности называется величина $d^2 - r^2$, где r и d , соответственно, радиус окружности и расстояние от точки до ее центра. Требуется найти множество точек, степени которых относительно двух данных неконцентрических окружностей равны.

Выбрав систему координат так, чтобы центры окружностей лежали на оси абсцисс, нетрудно убедиться, что искомым множеством будет прямая, перпендикулярная линии центров. Эта прямая называется радикальной осью окружностей.

Пусть теперь даны три окружности. Если их центры не лежат на одной прямой, то три радикальные оси пересекаются в одной точке. Если же центры лежат на одной прямой, то радикальные оси параллельны либо совпадают. В последнем случае окружности называются *соосными*. Любые две неконцентрические окружности определяют множество соосных с ними окружностей, которое называется *пучком*. Если две окружности пересекаются, определяемый ими пучок состоит из всех окружностей, проходящих через точки их пересечения, если касаются — из окружностей, касающихся их в той же точке. Нас будет интересовать третий случай, когда окружности не пересекаются. В этом случае пучок состоит из двух симметричных друг другу относительно радикальной оси совокупностей вложенных окружностей, стягивающихся к двум предельным точкам. В дальнейшем, говоря о пучке, мы будем подразумевать лишь одну из этих совокупностей. Отметим, что точка M , определенная в лемме 1, является предельной для пучка окружностей, соосных с α и β . Отсюда сразу получается следующее обобщение леммы 1.

Пусть α, β, γ — три соосных окружности (β, γ лежат внутри α), A — произвольная точка α , AB, AC — касательные к β, γ . Тогда отношение AB/AC не зависит от A .

Теперь нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть A_1, A_2, A_3 — точки окружности α , A_1A_2 касается β , A_1A_3 касается γ (α, β, γ определены выше). Тогда при любой точке A_4 прямая A_2A_3 касается одной и той же окружности, соосной с данными.

Лемма 3 фактически является обобщением теоремы Понселе. Действительно, ее утверждение можно сформулировать так.

Даны $n+1$ соосных окружностей, α и лежащие внутри нее β_1, \dots, β_n . Из точки A окружности α проведена касательная к β_1 , вторично пересекающая α в точке B_1 , из A_1 проведена касательная к β_2 , пересекающая α в точке A_2 и т.д. Если A_n совпадает с A , то это будет выполняться для любой точки окружности α .

Очевидно, что теорема Понселе является частным случаем этого утверждения, получающимся при совпадении

окружностей β_1, \dots, β_n . При этом приведенное выше обобщение леммы 1 позволяет без каких-либо изменений распространить доказательство теоремы Понселе на общий случай. Следует также отметить, что если в лемме 3 B_1, B_2, B_3 — точки касания прямых A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 с соответствующими окружностями, то прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 пересекаются в одной точке.

Вернемся к вписанно-описанным многоугольникам. Введем такое определение:

Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — произвольный многоугольник. Диагонали $A_1A_3, A_2A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ назовем *диагоналями первого типа*, диагонали $A_1A_4, A_2A_5, \dots, A_{n-2}A_1$ — *диагоналями второго типа* и т.д.

Оказывается, верна следующая теорема:

Во вписанно-описанном многоугольнике все диагонали одного типа касаются окружности, соосной с описанной и вписанной окружностями многоугольника (рис. 5).

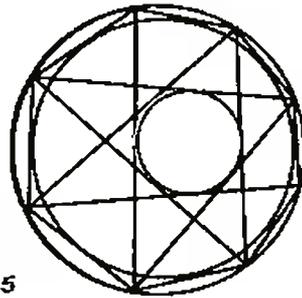


Рис. 5

Доказательство. Для диагоналей первого типа утверждение теоремы сразу получается из леммы 3, если положить $\gamma = \beta$. Индуктивный переход от k -го к $(k+1)$ -му типу также осуществляется с помощью леммы 3.

И в заключение — серия задач. Из теоремы Понселе следует, что радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами связаны между собой, причем соответствующее соотношение зависит от числа сторон n . Нетрудно вывести такие соотношения для $n=3$ и $n=4$. Несколько сложнее получить соотношения для $n=6$ и $n=8$. Для других значений n соотношения мне неизвестны. Подумайте, как вывести их. Нельзя ли получить единое соотношение, связывающее R, r, d и n (скорее всего, нет, но вдруг...)?

Дополнение. Доказательство теоремы Понселе

Для читателей, не имеющих возможности посмотреть книгу И.Ф. Шарыгина, приведем содержащееся в ней доказательство

теоремы Понселе. Прежде всего докажем следующее утверждение (задача 614)

Внутри окружности α находится окружность β . На α заданы две последовательности точек A_1, A_2, \dots, A_n и B_1, B_2, \dots, B_n , идущие в одном направлении и такие, что прямые $A_1A_2, A_2A_3, \dots, B_1B_2, B_2B_3, \dots$ касаются β . Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2, \dots касаются одной окружности, центр которой лежит на линии центров окружностей α и β . (Утверждение задачи можно усилить: эти прямые касаются окружности, соосной с данными.)

Доказательство. Пусть для определенности B_1 лежит на дуге A_1A_2 , ограничивающей сегмент, не содержащий β . Обозначим точки касания β с прямыми $A_1A_2, A_2A_3, \dots, B_1B_2, B_2B_3, \dots$ через $C_1, C_2, \dots, D_1, D_2, \dots$ соответственно (рис. 6). K, L, P — соответственно точки пересечения D_1C_1 и A_1B_1, D_1C_1 и A_2B_2, A_1B_1 и A_2B_2 .

В треугольниках A_1KC_1 и D_1LB_1 равны следующие углы: $\angle ZKC_1A_1 = \angle ZLD_1B_1, \angle C_1A_1K = \angle D_1B_1L$, следовательно, $\angle C_1KA_1 = \angle D_1LB_1$, т.е. треугольник KLP — равнобедренный, $KP = PL$, и существует окружность γ , касающаяся KP и PL в точках K и L .

Аналогично существует окружность, касающаяся A_2B_2 и A_3B_3 в точках L' и M .

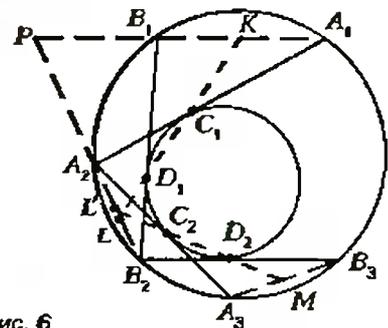


Рис. 6

пересечения этих прямых с C_2D_2 . Для совпадения этой окружности с γ достаточно совпадения точек L и L' . Но

$$\begin{aligned} A_2L/LB_2 &= S_{\Delta C_1A_1} / S_{\Delta C_1B_1} = \\ &= (A_2C_1 / C_1D_1 \cdot \sin \angle A_2C_1D_1) / \\ &/ (B_2D_1 / C_1D_1 \cdot \sin \angle B_2D_1C_1) = \\ &= A_2C_1 / B_2D_1 = A_2C_2 / B_2D_2 = A_2L' / B_2L'. \end{aligned}$$

При этом отношение касательных, проведенных из любой точки α к β и γ , будет одним и тем же, и значит, γ соосна с α и β .

В обозначениях предыдущего утверждения теорема Понселе означает следующее: если A_{n+1} совпадает с A_1 , то B_{n+1} совпадает с B_1 . Предположим, что это не так. Тогда A_nB_n и A_1B_1 касаются γ , A_1A_2 пересекает γ , точки B_1, B_{n+1} лежат на дуге A_1A_2 . Получается, что из A_1 к γ проведены две касательные, причем их точки касания лежат на одну сторону от секущей A_1A_2 . Этого быть не может.

Секрет змеи. Ползет или катится?

А. ЧЕРКУН

ЗАДУМЫВАЛИСЬ ли вы о том, как перемещаются змеи? Понятно, что они извиваются и что используют силу трения. Сила трения действительно необходима — иначе, проскальзывая, не сдвинетесь с места. Но, в порядке мысленного эксперимента, попробуйте со связанными попарно руками и ногами проползти хотя бы метров десять по дугу — та же сила трения окажется серьезным препятствием. Змея, однако, столь изящна и легка в движениях, что без труда охотится на мелких млекопитающих. Ее движение завораживает, а механизм движения таит в себе красивую загадку. Маловероятно, чтобы никто ее не решил, но решение это широко не известно, а любопытно чрезвычайно.

Оказывается, решение можно найти чисто умозрительно. Дело в том, что высокоорганизованное существо напрасно энергию тратить не будет — энергия расходуется на работу против силы трения. Сделаем некоторые оценки.

Разобьем тело змеи по длине на 39 маленьких участков (это довольно много). Пусть каждый участок имеет мгновенную скорость v_n , где n — номер участка, и давит на землю с силой Q_n . Если P — вес змеи, то

$$P = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{39}.$$

Для силы трения на каждом участке воспользуемся известной формулой

$$F_n = \mu Q_n,$$

где μ — коэффициент трения, и будем помнить, что эта сила противоположна скорости по направлению. В этом случае для расходуемой против силы трения мощности верно следующее выражение:

$$N_n = F_n v_n = \mu Q_n v_n.$$

Тогда для всей змеи получим

$$N = \mu (Q_1 v_1 + Q_2 v_2 + \dots + Q_{39} v_{39}).$$

Предположим, что змея куда-нибудь спешит, и выразим этот факт неравенством

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{39} > c.$$

Здесь c — некоторая положительная константа, назовем ее фактором спешки. А сколь малой может быть трата энергии змеей при известных весе змеи P и факторе спешки c ?

Обозначим минимальную из всех сил давления через Q_m и минимальную из всех скоростей — через v_m . Тогда, очевидно,

$$N > 39 \mu Q_m v_m.$$

Желательно, чтобы $Q_m = 0$ и $v_m = 0$, т.е. чтобы змея на некоторых участках имела нулевую скорость, а на некоторых участках давила на землю с нулевой силой. Разумеется, за это придется заплатить повышенной скоростью и повышенным давлением на других участках. Но здесь есть выход — там, где повышена скорость, надо давить меньше, а где повышено давление, надо двигаться потише. Что если змея приподнимает все тело над землей и почти все силы давления равны нулю, кроме нескольких точек, в которых сосредоточен весь вес, а мгновенная скорость тоже равна нулю? Тогда $N = 0$! Правда при этом придется совершать работу против силы тяжести, но эта работа невелика, так как приподниматься надо всего на несколько миллиметров.

Интересно, что идущий человек безотчетно следует описанному принципу. Нога, которая в данный момент касается земли, держит весь вес тела, а другая разгружена и без сопротивления перемещается по воздуху, опережая по скорости корпус человека. Человек при этом еще поднимается на несколько сантиметров. Однако его передвижение разбито на такты — левой, правой. Змеиное движение поражает видимой непрерывностью и отсутствием тактов. Как представить себе движение с постоянной средней скоростью, при котором есть участки с нулевой мгновенной скоростью и отсутствуют такты?

Как известно, уж ползет в направлении от хвоста к голове, а пустынная эфа — перпендикулярно этому направлению, т.е. боком (рис.1). Давайте попробуем смоделировать ее движение.

Намотайте четыре-пять витков тол-

той проволоки на бутылку, снимите ее и растяните за концы, чтобы получилась спираль. Положите ее на светлую поверхность и, осветив настольной лампой, толкните в сторону от лампы. Тень от катящейся спирали идеально напоминает движение эфы. Для большего эффекта к внутренней стороне

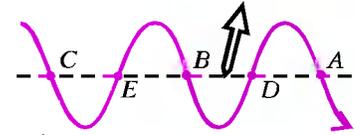


Рис. 1

спирали (чтобы не мешать движению) прикрепите несколько пластилиновых шариков, имитирующих голову и спинной узор змеи. Вы увидите, что тень от шариков то вдвое опережает по скорости ось спирали, то останавливается в момент прохождения шариком нижней точки. Будем считать, что точки A, B, C (см. рис.1) — точки сиомиутного касания «эфы» с землей, а точки D и E находятся в нескольких миллиметрах от земли. Прижмем «эфу» в точках A, B, C. Сможет она еще сместить свою

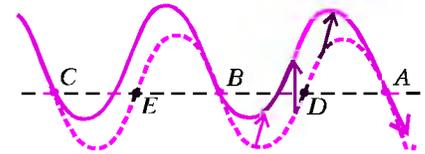


Рис. 2

среднюю линию в прежнем направлении? Да, на рисунке 2 сплошной линией показано ее новое положение, а стрелки иллюстрируют смещения некоторых точек.

Аналогия с тенью спирали хороша, но обладает недостатком — змея не дождевой червяк и не растягивается, в то время как расстояние между тенями соседних шариков постоянно меняется (убедитесь в этом). Для получения более точной модели обратимся к ри-

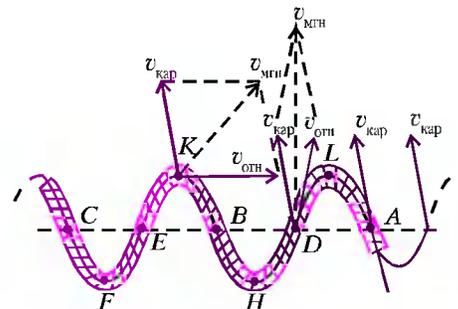


Рис. 3

сунку 3. Возьмем плоский волнообразный проволочный каркас, бесконечно простирающийся влево и вправо. Прикрепим к нему петельками толстую веревочку — суть эфу. Начнем двигать весь каркас поступательно вверх и чуть влево (по касательной к каркасу в точке *A*) с постоянной скоростью, а веревочку потянем слева направо с той же по величине скоростью так, чтобы она огибала каркас. Сложное движение веревочки относительно плоскости рисунка обладает всеми нужными свойствами: постоянная средняя скорость, локальная нерастяжимость, отсутствие тактов и наличие точек с нулевой мгновенной скоростью. Действительно, в точках типа *A, B, C* скорости относительного движения веревочки и поступательного движения каркаса в сумме дают ноль. Для других точек векторное сложение скоростей дает ненулевой результат с максимумом в точках *D* и *E*. Для еще большего уточнения модели каркас надо подогнуть: прижать к поверхности все точки типа *A, B, C*, а за точки типа *D, E* потянуть от поверхности, чтобы они застыли над ней в нескольких миллиметрах. Если бы веревочка без каркаса погнала волну изгиба вдоль своего «тела», выгибая еще и чуть-чуть «спину», то она поползла бы, подобно эфе, с минимальными затратами энергии. Точки касания при этом, начинаясь от головы *A*, пробегали бы равномерно все тело и отрывались на хвосте *C*.

Приспособим теперь модель каркаса и веревочки для ужа. Каркас, изображенный на рисунке 3, будем двигать слева направо, а веревочку — в обратном направлении. Скорости при сложении дадут ноль в точках *F, H, K, L* — значит, в них уж касается земли, а точки *A, B, C, D, E* парят над землей. Точки касания теперь бегут по телу от хвоста к голове.

Интересно, что след эфы на песке

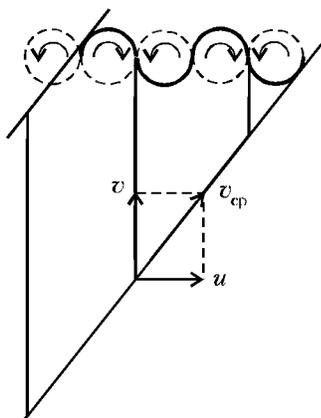


Рис. 4

представляет собой отдельные полосы, длина которых равна длине змеи (рис.4). А след ужа выглядит как след саней — в виде двух полос (так что по нему уже легко не определишь размер змеи).

Оценим средние скорости v_{cp} ужа и эфы в случае их одинаковых размеров и одной и той же частоты телодвижений. Скорости веревочек v относительно каркасов будут одинаковыми, одинаковыми и равными v будут и скорости каркасов. Веревочка огибает все извилины каркаса со скоростью v , поэтому ее прямолинейная средняя скорость u вдоль каркаса меньше v во столько раз, во сколько длина каркаса между точками *A* и *D* больше длины отрезка *AD*. Если считать каркас состоящим из полуокружностей, то это отношение равно $\pi/2$, т.е.

$$u = \frac{v}{\pi/2}.$$

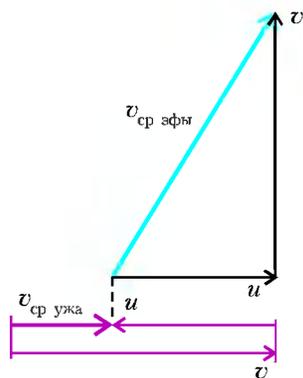


Рис. 5

Сложим векторно скорость веревочки относительно каркаса и поступательную скорость каркаса (рис.5) и получим

$$v_{cp\ ужа} = (1 - 2/\pi)v \approx 0,36v,$$

$$v_{cp\ эфы} = \sqrt{(2/\pi)^2}v = 1,18v.$$

Таким образом, эфа движется втрое быстрее ужа.

Оказывается, свойства колеса — гордости человечества — удивительным образом похожи на описанные выше. Действительно, колесо касается земли в одной точке, что приводит к большому давлению и накладывает требования на твердость дорожного покрытия. Отсутствие проскальзывания (нулевая мгновенная скорость) не дает силе трения в точке касания совершить работу. Точка касания равномерно бежит по ободу колеса, отсутствуют такты.

Представим себе, что на рисунке 6 изображено сплошное колесо с отверстием, в которое вставлена ось *O*, жестко связанная с тележкой. В оси колеса

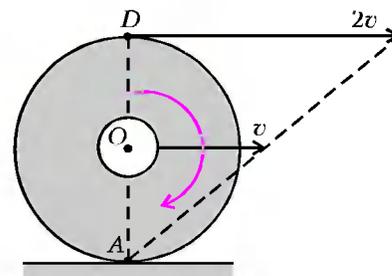


Рис. 6

действует сила трения. Ее величина грубо равняется произведению нагрузки на ось и коэффициента трения, т.е. такая, какая была бы и без колеса. Но работа этой силы мала, так как при полном обороте колеса тележка переместится на длину обода колеса, а трение в оси совершит работу на длине окружности оси. Колесо дает выигрыш в отношении диаметров обода и оси. У змеи «точка касания» представляет собой вытянутое пятно, которое на периферии все-таки проскальзывает, и энергия расходуется. Более того, надо помнить, что мышцы устроены так, что при напряжении они расходуют энергию даже в отсутствие видимых перемещений. Выходит, поверье о том, что змея догоняет жертву, свернувшись колесом, абсурдно не полностью. Заметим, что описанный принцип движения уменьшает также износ шкурки змеи и минимизирует тепловой контакт с горячим песком или холодной землей.

Для проверки теории в летний солнечный день на реке Оке был пойман уж и отвлечен от своих занятий на 15 минут. Сначала хотелось увидеть его след на песке, но по сухому песку он двигался плохо, перечеркивая предыдущий отпечаток (можно предположить, что он не может оторваться от сыпучего песка), а на сыром песке след был почти не виден. Оказалось, что уж умеет ползать боком, как эфа, и давать задний ход, но это к теории не относится. Затем, прижавшись щекой к песку, я увидел четкие (миллиметров пять) зазоры между брюшком и песком. Это уже факт серьезный. Десятки раз я встречал раньше ужа, но о том, что большая часть его тела приподнята над землей, не подозревал. Общая картина динамики зазоров и точек касания не выяснилась, так как пора было отпускать ужа домой, но то, что он не ленился отрывать тело от земли, — вполне удовлетворительный результат.

Итак, можно сказать, что змея, хоть и не летает, но и не ползает. Видимо, колесный бронетранспортер — один из лучших образов, пригодных к описанию движения змеи.

Задачи с распределенной массой

А. ЧЕРНОУЦАН

ДВЕ ОСНОВНЫЕ модели механики — это материальная точка и твердое тело. В отличие от точек, твердые тела могут двигаться не только поступательно, но и вращательно. Поскольку динамику вращательного движения твердого тела в школе не изучают, большинство задач динамики посвящено движению точки. И тем не менее, некоторые школьные задачи (как олимпиадные, так и вступительные) имеют дело с протяженными телами, массу которых нельзя считать сосредоточенной в одной точке.

В этой статье будут рассмотрены разнообразные линейные объекты — веревки (массивные нити), цепочки, струн, масса которых распределена вдоль одной линии. Подход к обсуждению движения таких тел, в сущности, обычный — в основе лежат уравнения динамики точки для небольшого элемента протяженного тела. При этом в одних случаях достаточно записать уравнения динамики для одного-единственного элемента линейного объекта. Главное — правильно этот элемент выбрать. В других случаях возникает необходимость просуммировать уравнения движения, записанные для отдельных элементов, но всей длине. При удачной записи уравнений (при проектировании на удачно выбранные оси) суммирование может оказаться совсем несложным.

Теперь — конкретные задачи.

Задача 1. Струя воды сечением S ударяется о стенку, расположенную перпендикулярно струе. Скорость воды в струе v , после удара вода теряет скорость и стекает по стенке. Какова сила давления воды на стенку? Плотность воды ρ .

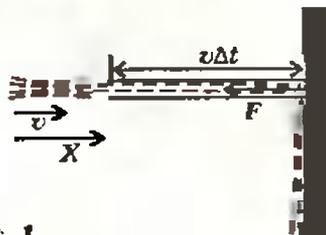


Рис. 1

Изменение импульса воды за время Δt равно импульсу силы реакции, действующей на воду со стороны стенки, а по третьему закону Ньютона эта сила равна по величине обратной силе давления струи на стенку. Изменение импульса воды сводится к изменению импульса элемента струи длиной $\Delta l = v\Delta t$, который за время Δt пришел в соприкосновение со стенкой (рис. 1):

$$0 - \Delta m v = -F \Delta t$$

Подставляя $\Delta m = \rho(v\Delta t)S$ и сокращая из Δt , получаем

$$F = \rho S v^2$$

Характерно, что интервал времени Δt и длина элемента струи Δl выбираются произвольно, но в ответ они, конечно же, не входят.

Задача 2. Космический корабль массой M движется в глубоком космосе. Для управления кораблем используется реактивный двигатель, который выбрасывает реактивную струю со скоростью \vec{u} относительно корабля, причем расход топлива в струе равен μ (расход топлива — это масса топлива, выбрасываемая за единицу времени). Найдите ускорение корабля.

Изменение импульса замкнутой системы корабль — топливо за время Δt равно нулю. Запишем закон сохранения импульса в системе отсчета, в которой скорость корабля в начале этого интервала времени равна нулю

$$0 = M \Delta \vec{v} + \mu \Delta t \vec{u},$$

где $\Delta \vec{v}$ — изменение скорости корабля. Перепишем это уравнение в виде

$$M \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = -\mu \vec{u}.$$

Стоящее в правой части выражение называется реактивной силой. Если на корабль действует еще и внешняя сила \vec{F} (например, со стороны поля тяготения), то ускорение корабля $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ вычисляется по формуле

$$M \vec{a} = -\mu \vec{u} + \vec{F}.$$

Это уравнение называется уравнением Мещерского. При его решении, вообще говоря, надо учитывать, что масса корабля M уменьшается со временем.

Задача 3. Тонкая цепочка длиной l и массой m удерживается за верхний конец так, что нижним концом она касается земли. Цепочку отпускают, и она начинает падать. Найдите силу давления цепочки на землю через время t . Цепочка неупругая и мягкая.

Поскольку цепочка мягкая, сила взаимодействия нижних звеньев с поверхностью не передается верхним, которые свободно падают с ускорением g . К моменту времени t часть цепочки длиной $gt^2/2$ и массой $(m/l)gt^2/2$ лежит на земле, а верхняя часть цепочки падает со скоростью $v = gt$. Сила реакции земли, равная по величине силе давления цепочки, складывается из двух частей. Одна уравновешивает силу тяжести неподвижной части цепочки и равна

$$F_1 = \frac{mg^2 t^2}{2l}.$$

Вторая связана с изменением импульса элемента цепочки длиной $v\Delta t$ и массой $\Delta m = (m/l)v\Delta t$ при его соприкосновении с поверхностью и находится на уравнении $F_2 \Delta t = \Delta m v$, откуда

$$F_2 = \frac{mv^2}{l} = \frac{mg^2 t^2}{l}.$$

Видно, что $F_2 = 2F_1$, а полная сила давления

$$F = \frac{3mg^2 t^2}{2l}$$

в три раза больше веса неподвижной части цепочки. Перед самым концом падения эта сила достигает максимального значения $3mg$.

Задача 4. Длинная тонкая цепочка перекинута через блок так, что ее правая часть свисает до пола, а левая лежит, свернувшись клубком, на высоте H (рис. 2). Цепочку отпускают, и она приходит в движение. Найдите установившуюся скорость движения цепочки. Блок идеальный, цепочка неупругая.

Рассмотрим сначала правую часть цепочки. Поскольку цепочка неупругая и мягкая, взаимодействие с полом нижнего звена не передается верхним. Значит, натяжение цепочки возле пола равно нулю. Так как цепочка при установившемся режиме движется равномерно, натяжение на некоторой высоте h равно весу изгнутой части цепочки:

$$T_h = \lambda gh,$$

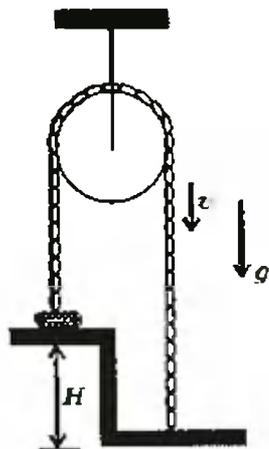


Рис. 2

где λ — масса единицы длины цепочки. Перейдем теперь к левой части цепочки. Натяжение в нижней части, над самым уступом, можно найти, записав изменение импульса элемента цепочки длиной $v\Delta t$ и массой $\lambda v\Delta t$, который за время Δt приходит в движение

$$\lambda v\Delta t v = T_H \Delta t, \text{ или } T_H = \lambda v^2$$

При равномерном движении натяжения справа и слева на одном уровне должны быть равны

$$T_n = T_H,$$

откуда получаем

$$\lambda gH = \lambda v^2, \text{ или } v = \sqrt{gH}$$

Попробуем решить эту задачу из энергетических соображений. Если быть не очень внимательным, можно легко прийти к противоречию с полученным выше результатом. Казалось бы, при установившемся движении цепочки работа силы тяжести за время Δt должна быть равна выделившемуся за то же время количеству теплоты. Работа равна $\lambda gHv\Delta t$, а количество теплоты, выделяющееся при неупругом ударе о пол элемента длиной $v\Delta t$, равно $\lambda v\Delta t v^2/2$. Однако, если приравнять эти выражения, получим ответ, в $\sqrt{2}$ раз больший предыдущего. В чем же здесь дело?

Оказывается, тепло выделяется не только при неупругом ударе элемента цепочки о пол, но и (хотя это не столь очевидно) при разгоне такого же элемента на уступе до скорости v . Более того, эти количества теплоты оказываются одинаковыми. Это приводит к тому, что общее количество теплоты увеличивается вдвое и лишний $\sqrt{2}$ из ответа исчезает. Действительно, сравним работу силы натяжения при подъеме элемента длиной $v\Delta t$ с уступа $\lambda v^2(v\Delta t)$ с кинетической энергией, приобретенной этим элементом $(\lambda v\Delta t)v^2/2$

Видно, что работа в два раза больше, а разность между работой и энергией как раз равна количеству теплоты, которое выделилось при разгоне этого элемента.

Чтобы лучше понять механизм выделения тепла, представим себе, что мы хотим разогнать тело массой m до скорости v при помощи пружины, для чего начнем перемещать конец пружины с постоянной скоростью v . Если пружина идеальная, то скорость тела никогда не установится, так как колебательный процесс никогда не прекратится. Если же пружина не идеальная, то колебания в конце концов затухнут и тело приобретет скорость v . Чтобы узнать, сколько за это время выделилось тепла, надо перейти в систему отсчета, в которой конец пружины покоится. В этой системе начальная кинетическая энергия тела $mv^2/2$ полностью перейдет в тепло. Значит, приобретенная телом кинетическая энергия при разгоне равна количеству теплоты, которое при этом выделяется.

Задача 5. Тонкое переовочное кольцо массой m и радиусом R положили на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутили до угловой скорости ω . Найдите силу натяжения веревки.

Запишем второй закон Ньютона для элемента веревки длиной Δl и массой $\Delta m = m\Delta l/(2\pi R)$, который виден из центра окружности под малым углом $\Delta\phi = \Delta l/R$ (рис 3). Действующая на элемент сила равна векторной сумме

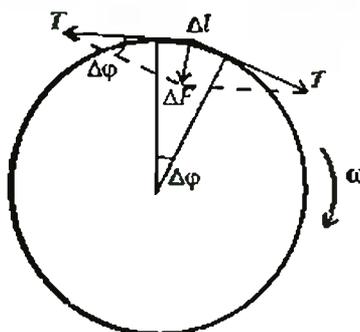


Рис. 3

двух сил натяжения: $\Delta F = T\Delta\phi$. Из второго закона Ньютона $\Delta F = \Delta m\omega^2 R$ находим

$$T = \frac{m\omega^2 R}{2\pi}$$

Полученный результат имеет неожиданное применение — с его помощью можно найти положение центра масс (центра тяжести) тонкой однородной полуокружности. Действительно, сила, действующая на вращающуюся полуокружность, равна $2T$, а в уравнении движения входит ускорение центра

масс $2T = (m/2)\omega^2 x$, где x — расстояние от центра окружности до центра масс полуокружности. Подставляя T , получаем $x = 2R/\pi$.

Задача 6. Веревку длиной l и массой m кладут на гладкое горизонтальное бревно радиусом R (рис.4), причем вначале веревку удерживают за верхний конец, прикладывая горизонтальную силу F , а затем отпускают. Определите: а) значение силы F ; б) ускорение веревки в первый момент.

Обозначим через H расстояние по вертикали (разность высот) между верхней и нижней точками веревки. Если

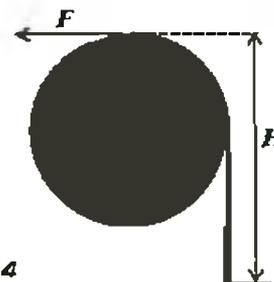


Рис. 4

веревка свешивается с бревна ($l > \pi R/2$), то $H = l - \pi R/2 + R$, если же нет, то $H = R \cos(l/R)$. Как мы увидим, в ответ будет входить только H .

Запишем второй закон Ньютона для элемента веревки длиной Δl и массой $\Delta m = (m/l)\Delta l = \lambda\Delta l$ (λ — масса единицы длины веревки) в проекциях на ось,

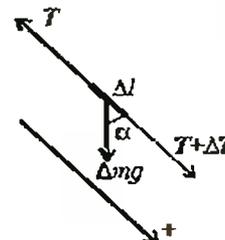


Рис. 5

направленную вдоль этого элемента (рис 5).

$$\Delta T + \Delta mg \cos \alpha = \Delta m a.$$

Здесь ΔT — разность между натяжениями на концах элемента, a — ускорение веревки (в первом случае, пока веревку удерживают, надо положить $a = 0$). Перед тем как просуммировать эти уравнения, заметим, что $\Delta m \cos \alpha = \lambda \Delta l \cos \alpha = \lambda \Delta h$, где Δh — расстояние по вертикали между концами элемента.

Теперь просуммируем уравнения вдоль всей длины веревки. Сумма всех ΔT равна разности сил натяжения на концах веревки, т.е. для неподвижной веревки это $-F$, а для свободной веревки это ноль. В случае а) получаем уравнение

$$-F + \lambda gH = 0, \text{ откуда } F = (m/l)gH.$$

В случае б) —

$$\lambda g H = ma, \text{ откуда } a = g(H/l).$$

Эту задачу можно решить и из энергетических соображений, причем в этом случае удастся обойтись без суммирования. Начнем с неподвижной веревки. Сместив конец веревки на малое расстояние Δx , мы совершим работу $F\Delta x$, которая должна равняться изменению потенциальной энергии веревки ΔE . Заметим, что для расчета потенциальной энергии можно считать, что вся веревка осталась на месте, а элемент длиной Δx был перевесен с одного конца веревки на другой. Значит, $\Delta E = \lambda \Delta x g H$. Приравняв изменение энергии к работе, получаем $F = (m/l)gH$. Для свободной веревки надо ΔE приравнять к кинетической энергии, а для определения ускорения — использовать кинематическое выражение $v^2 = 2ax$. Сделайте это сами и, кроме того, подумайте, почему получается $a = F/m$. Если поймете, то вторая часть задачи станет просто продолжением первой.

Задача 7. Цепочку массой m и длиной l подвесили за концы к потолку (рис. 6). При этом оказалось, что в местах закрепления цепочка образует углы α с вертикалью. Найдите расстояние h от нижней точки цепочки до потолка.

Используя метод суммирования, описанный в предыдущей задаче, найдем

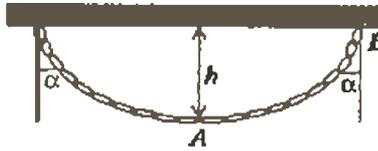


Рис. 6

соотношение между натяжениями в нижней точке A и в верхней точке B :

$$T_B - T_A = (m/l)gh$$

Кроме того, запишем условия равновесия половины цепочки в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси.

$$T_B \sin \alpha = T_A, \quad T_B \cos \alpha = \frac{mg}{2}$$

Выразив отсюда T_A и T_B , подставим их

в первое уравнение и получим

$$h = l \frac{1 - \sin \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

Упражнения

1. По трубе сечением S движется вода со скоростью v . Найдите силу, с которой вода действует на трубу в том месте, где труба лежит наклонно на 90° . Плотность воды ρ .
2. Готовясь к прыжку, кобра поднимает голову со скоростью v . Найдите силу давления кобры на землю. Массу кобры m считать равномерно распределенной вдоль туловища длиной l .
3. Через застопоренный блок (который не может вращаться) перекинули веревку длиной l так, что один ее конец находится на Δh выше другого. Считая поверхность блока идеально гладкой, найдите, с каким ускорением начнет соскальзывать веревка.
4. Веревку длиной l закрепили за концы на разных уровнях. Оказалось, что у одного конца веревка образует с вертикалью угол α , а у другого — угол β . На сколько первый конец веревки выше второго?

ВАРИАНТЫ

Материалы вступительных экзаменов 1997 года

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий

реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь необходимо понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

Вариант 1

1. На невесомом стержне длиной l висит маленький шарик массой m с зарядом Q (рис. 1). На короткое время τ включается постоянное горизонтальное электрическое поле напряженностью \vec{E}_0 . Найдите максимальный угол отклонения стержня от вертикали.

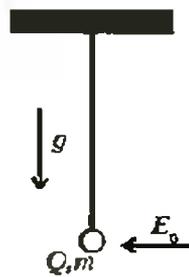


Рис. 1

из стекла с показателем преломления n и толщиной d вставлена в перпендикулярный ей экран (рис. 2). В плоскости, перпендикулярной экрану, на

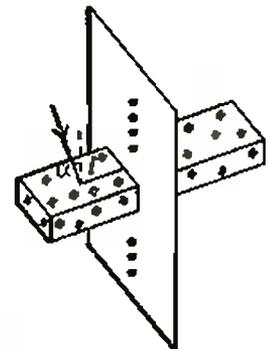


Рис. 2

пластинку под углом α к нормали падает тонкий луч света в точку, находящуюся на расстоянии l от экрана. На нем по обе стороны от пластинки видна система светящихся точек. Найдите расстояние между соседними точками, а также между самыми дальними из них.

3. На горизонтальной плоскости находится невесомый кубический сосуд, разделенный толстым подвижным поршнем массой m . В каждой части сосуда заключено по одному молю идеального газа при постоянной температуре T . С какой вертикальной силой F надо удерживать нижнее ребро сосуда, чтобы он сохранял положение, в котором его дно составляет плоскостью угол α (рис.3)? Сторона куба равна a . Трением, а так-

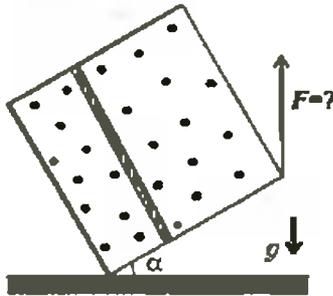


Рис. 3

же массой газа в сосуде пренебречь. Универсальная газовая постоянная равна R .

4. Человек стоит на непроводящем резиновом коврике, лежащем на земле, и держится рукой за оголенный провод бытовой электрической сети. Оцените величину тока, проходящего через руку.

5. На столе лежат один на другом два журнала, придавленные небольшим грузом. Нижний журнал закреплен, а верхнему привязана нить, свисающая с края стола, с подвешенным к ней другим грузом. Если этот груз отпустить, то журнал соскользывает. Если же вставить некоторое количество страниц одного журнала между страницами другого, то при прежних условиях журнал останется неподвижным. Объясните явление.

Вариант 2

1. Дымовая шапка падает вертикально с высоты H_0 с нулевой начальной скоростью. Дым сносится ветром, который дует горизонтально на всех высотах с постоянной скоростью v_0 . На сколько он будет смещен относительно вертикальной траектории шапки на высоте h над поверхностью земли в момент падения шапки на землю? Ускорение свободного падения g .

2. В вертикальном теплоизолированном сосуде под поршнем массой M находится жидкость со своим насыщенным паром. Какую мощность необходимо подводить к нагревателю в жидкости, чтобы поршень поднимался с постоянной скоростью v ? Температура внутри сосуда T , молярная масса вещества M , удельная теплота парообразования λ . Внешнее давление отсут-

ствует. Универсальная газовая постоянная равна R .

3. На горизонтальной поверхности лежат касающиеся друг друга куб и цилиндр массой M каждый (рис.4). С какой минимальной горизонтальной

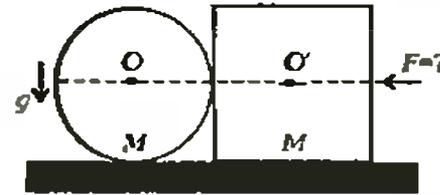


Рис. 4

силой F , направленной вдоль прямой OO' , проходящей через центры тел, надо толкать куб, чтобы при движении системы цилиндр не вращался? Коэффициенты трения обоих тел о поверхность и между собой одинаковы и равны μ .

4. Оцените сопротивление и мощность бытовой электрической лампы накаливания сразу после ее включения.

5. Параллельный пучок света освещает предмет. На экране видно изображение его тени, полученное с помощью линзы. Если поместить между предметом и линзой матовое стекло непосредственно вблизи предмета, то изображение на экране сохраняется. Если же матовое стекло приближать к линзе, то изображение постепенно расплывается и затем исчезает. Объясните явление.

Вариант 3

1. Однородный равномерно заряженный прут AB , согнутый под прямым углом AOB , расположен в горизонтальной плоскости и может свободно вращаться в ней без трения вокруг вертикальной закреплённой оси, проходящей через вершину угла O . Часть прута AO в n раз короче части OB . Прут находится в горизонтально направленном однородном электрическом поле E . Найдите угол между AO и направлением электрического поля.

2. Два вертикальных цилиндра с сечениями S_1 и $S_2 > S_1$ сообщаются между собой снизу через узкий короткий канал. Цилиндры наполнены газом и плотно закрыты сверху поршнями одинаковой массы M . Поршни могут перемещаться без трения. Они находятся в равновесии на одной высоте h_0 , и при этом на поршень с большим сечением помещен дополнительный груз массой m . На какой высоте установится этот поршень, если груз убрать? Температура газа постоянна, ускорение свободного падения g .

3. Невесомый стержень длиной l с телами массами m и M , закрепленными

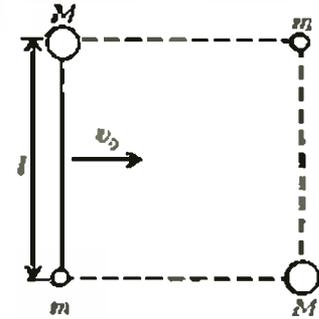


Рис. 5

на его концах, движется поступательно со скоростью v_0 , перпендикулярной его оси (рис.5). Найдите натяжение стержня после того, как к этим телам одновременно прилипнут два первоначально покоящихся тела с такими же массами M и m соответственно.

4. Дети стреляют косточками отбив, сжимая их между пальцами. Оцените максимальное расстояние, на которое может улететь такая косточка.

5. К заряженному конденсатору подключают первоначально незаряженный конденсатор меньшей емкости, соединяя их выводы A, B и a, b соответственно. В момент подсоединения между выводами конденсаторов проскакивает искра, сопровождающаяся характерным щелчком. Затем второй конденсатор «переворачивают» и снова подключают, соединяя на тот раз выводы A, B и b, a соответственно. Процедура «переворачивания» и подсоединения повторяется многократно, каждый раз сопровождаясь проскакиванием искры. Если же второй конденсатор такой же, как и первоначально заряженный, то искры будут только при первых двух подсоединениях, после чего полностью исчезают. Объясните явление.

Публикацию подготовил Г. Меледин

Государственная академия нефти и газа им.И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите до числового значения

$$\frac{\sqrt[3]{2b^{23}} - 4}{\sqrt[10]{2b^{13}} + 2} - \sqrt[10]{2} \sqrt[3]{b}$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x+14} = -x - 12.$$

3. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 363. Знаме-

натель прогрессии равен 3. Найдите первый член прогрессии.

4. Найдите наибольшее целое решение неравенства $|x - 20|(x - 14) < 0$.

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства $0,2^{5x-3} \cdot 5^{8x+4} < 0,04$.

6. Вычислите $10^{8 \lg 7} \cdot 18^6 \sqrt[3]{10}$.

7. Найдите наибольшее отрицательное число x , при котором функция $y = \cos[(x - 0,2)\pi]$ принимает свое наименьшее значение.

8. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения

$$8 \cos 2x - 3 \sin 4x = 0.$$

9. Найдите значение параметра a , при котором наименьшее значение функции

$$y = x^2 + (22a + 12)x + 116a^2 + 135a + 27$$

максимально.

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_{x-156} 7 > \log_x 497$$

11. Прямая, проходящая через вершину A равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) и центр O вписанной в этот треугольник окружности, пересекает сторону BC в точке K . Известно, что $AO : OK = 1,4$. Найдите $\cos \angle BAC$.

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α , $\sin \alpha = \sqrt{7}/3$. Через сторону основания BC перпендикулярно ребру SA проведена плоскость, пересекающая это ребро в точке M . Объем пирамиды $MABC$ равен $0,5$. Найдите объем пирамиды $SMBC$.

Вариант 2

1. Упростите и вычислите при $a = 3/7$, $y = 1 + \sqrt[3]{2}$

$$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2y+a}} + \frac{2a}{\sqrt[3]{4y^2-a^2}} \right] : \frac{1}{\sqrt[3]{4y^2-\sqrt[3]{2ay}} - \sqrt[3]{2y-2}}$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{10x-20-x^2} = 4-x.$$

3. Произведение 12-го и 16-го членов геометрической прогрессии равно 6,2. Найдите произведение 4-го и 24-го членов этой прогрессии.

4. Найдите наименьшее целое решение уравнения $\frac{|2x+9|}{2x+9} = 1$.

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства $0,2^{x-3,5} < 2^{-\frac{x-3,5}{3}}$.

6. Вычислите $\frac{\log_2 71}{\log_5 71} - \log_2 3$.

7. Вычислите $\frac{4 \cos 80^\circ - \sin 170^\circ}{\cos 100^\circ}$.

8. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения

$$2 \sin 14x \sin 11x = \left\{ \sqrt{3/2} \right\} - \cos 25x.$$

9. Найдите кратчайшее расстояние от точки $M(8, 0)$ до точек, лежащих на графике функции $y = \sqrt{x^2 + 32}$.

10. Сколько целых чисел входит в область решений уравнения

$$\log_{x/42} \left[\log_x \sqrt{42-x} \right] > 0?$$

11. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены высоты AM , BN и CP . Найдите отношение площади треугольника MNP к площади треугольника ABC , если $\cos \angle ABC = 0,2$.

12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через диагональ основания BD перпендикулярно к ребру SC проведено сечение. Найдите объем пирамиды, если плоскость сечения образует с плоскостью основания угол ϕ , $\sin \phi = \sqrt{7}/4$, а площадь сечения равна 189.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 .

Вариант 1

1. От движущегося поезда отцепляют последний вагон. При этом поезд продолжает движение с той же скоростью. Считая, что вагон движется равномерно, найдите, за сколько раз путь, пройденный вагоном до его остановки, меньше пути, пройденного поездом к тому моменту.

2. Мяч массой 150 г, летящий со скоростью 2 м/с, пойман на лету. Какова средняя сила удара мяча о руку, если он остановился за 0,01 с?

3. Аквариум, имеющий форму параллелепипеда, доверху заполнен водой. С какой силой действует вода на стенку аквариума, если ее длина 1,2 м, а высота 0,5 м? Атмосферное давление не учитывайте. Плотность воды 1000 кг/м^3 .

4. При постоянном давлении $0,3 \text{ МПа}$ газ получил 800 Дж тепла. При этом объем газа увеличился от 5 л до 7 л, а внутренняя энергия газа стала 950 Дж. Чему была равна внутренняя энергия газа до нагревания?

5. Плоский конденсатор емкостью 40 пФ соединяют последовательно с таким же конденсатором, но заполненным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью, равной 3. Найдите емкость (в пФ) такой батареи.

6. Плоский виток, площадь которого 10 см^2 , расположен перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Найдите абсолютную величину ЭДС, возникающей в витке, если индукция поля равномерно убывает от $0,7 \text{ Тл}$ до $0,2 \text{ Тл}$ за 10^{-4} с .

7. Две материальные точки совершают гармонические колебания первая — с циклической частотой 27 с^{-1} , вторая — с циклической частотой 9 с^{-1} . Во сколько раз максимальное ускорение первой точки больше максимального ускорения второй, если амплитуды колебаний точек одинаковы?

8. Человек стоит перед плоским зеркалом, укрепленным на вертикальной стене. Какова должна быть минимальная высота зеркала (в см), чтобы человек мог видеть себя в полный рост? Рост человека 170 см.

9. Брусок массой 2,8 кг перемещают вверх вдоль вертикальной стены с помощью силы, равной 70 Н и направленной под углом α к вертикали. Найдите ускорение бруска, если известно, что $\sin \alpha = 0,6$, а коэффициент трения между стеной и бруском 0,4.

10. Грузик, подвешенный на легкой нерастяжимой нити длиной 30 см, свободно вращается в вертикальной плоскости. В верхней точке окружности скорость грузика равна 2 м/с. Во сколько раз сила натяжения нити в нижней точке больше, чем в верхней?

11. Открытую с обеих сторон цилиндрическую трубку длиной 1 м наполовину погружают в ртуть. Затем верхнее отверстие трубки плотно закрывают и вынимают трубку из ртути. В трубке остается столбик ртути длиной 25 см. Определите по этим данным атмосферное давление (в кПа). Плотность ртути 13600 кг/м^3 . Температура постоянна.

12. Конденсатор подключен к клеммам батареи. Когда параллельно конденсатору подключили резистор сопротивлением 20 Ом, заряд на конденсаторе уменьшился в 1,2 раза. Определите внутреннее сопротивление батареи.

Вариант 2

1. В лифте, опускающемся с ускорением 2 м/с^2 , на пружине жесткостью 560 Н/м висит груз. Найдите массу груза (в г), если удлинение пружины равно 1 см.

2. Тонкий лом длиной 1,5 м и массой 16 кг лежит на горизонтальной поверхности. На сколько изменится потенциальная энергия лома, если его поставить на землю в вертикальное положение?

3. Однородный шарик массой 50 г лежит на дне пустого стакана. В стакан наливают жидкость так, что объем пог-

руженной части шарика оказывается в 5 раз меньше его общего объема. Плотность жидкости в 1,5 раза больше плотности материала шарика. Найдите (в мН) силу давления шарика на дно стакана

4. Газ находится в цилиндре с подвижным поршнем и при температуре 300 К занимает объем 300 см³. Какой объем (в см³) займет газ, если температура новизнется до 270 К? Давление постоянно.

5. Найдите ускорение, с которым падает шарик массой 0,03 кг с зарядом 3 мкКл в однородном электрическом поле с напряженностью 20 кВ/м. Вектор напряженности направлен вертикально вверх. Трение не учитывать.

6. Определите сопротивление нихромовой проволоки длиной 3 м и массой 4,98 г. Удельное сопротивление нихрома 10⁻⁶ Ом м, плотность 8300 кг/м³.

7. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией 3 мТл со скоростью, равной 3,2 · 10⁶ м/с и направленной перпендикулярно линиям индукции. Определите радиус (в мм) окружности, на которой движется электрон. Заряд электрона 1,6 · 10⁻¹⁹ Кл, его масса 9 · 10⁻³¹ кг.

8. Фокусное расстояние собирающей линзы равно 20 см. Найдите расстояние (в см) от предмета до переднего фокуса линзы, если экран, на котором получается четкое изображение предмета, расположен на расстоянии 10 см от заднего фокуса линзы.

9. Шарик падает на наклонную плоскость из точки А без начальной скорости и испытывает с плоскостью абсолютно упругое соударение. На каком расстоянии от места падения он ударится о плоскость второй раз? Угол наклона плоскости к горизонту 45°, а расстояние от точки А до плоскости 25 см.

10. Тяжелый шарик, подавленный на легкой нерастяжимой нити длиной 1 м, совершает колебания в вертикальной плоскости. Крайнее положение шарика на 40 см выше нижнего. Во сколько раз максимальная сила натяжения нити в процессе движения больше, чем минимальная?

11. При работе тепловой машины расходуется 180 кг угля за 1 час. Охлаждение машины осуществляется водой, расход которой составляет 15 л/с, температура на входе 10 °С, на выходе 20 °С. Какая часть тепла (в процентах) расходуется на нагревание воды? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг К), плотность воды 1000 кг/м³, удельная теплота сгорания угля 30 Мдж/кг.

12. Небольшой груз подвешен на легкой пружине. Насколько миллиметров

укоротится пружина после снятия груза, если собственная циклическая частота колебаний груза на этой пружине равна 20 с⁻¹?

Публикацию подготовили
Б.Писаревский, А.Черноуцан

**Московский
государственный
автомобильно-дорожный
институт (технический
университет)**

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{x^5 - x^4}{100x + 1000} = \frac{100x^2 - 200x + 100}{x^2 + 9x - 10}$$

2. Точки М и N являются серединами сторон АВ и CD правильного шестиугольника ABCDEF. Длина отрезка MN равна 3. Найдите длину стороны шестиугольника.

3. Найдите значение параметра a, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x^3 + 6ax^2y + 12a^2xy^2 + 8a^3y^3 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

4. Решите уравнение

$$2\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{8x+5} = 1.$$

5. Найдите наибольшее целое отрицательное значение x, для которого выполняется неравенство

$$|4x + 2| - |4 - x| < -2.$$

6. Пусть α, β, γ — внутренние углы треугольника. Найдите

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

7. Производные в точке x = 2 произведения и частного функций f(x) и g(x) равны, соответственно, 18 и 1, а f'(2) = -4,5. Найдите g(2).

8. Число умных людей на 40% больше числа красивых, а 25% умных обладают красивой внешностью. Каков процент умных среди красивых?

9. Найдите площадь фигуры, описываемой на координатной плоскости системой неравенств

$$|4x - y^2| \leq 2, (y - 1)^2 \leq 9.$$

10. Найдите число целочисленных решений (x, y) неравенства

$$12x^5 + 11y^4 \leq 193.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$x^4 + 16 + \frac{1}{(2-x)^4} = \frac{1}{(x-2)^4} + 8x^2$$

2. Длина боковой стороны равнобедренной трапеции равна √8, а длины ее оснований равны 2 и 6. Найдите площадь трапеции.

3. Найдите середину промежутка, на котором выполняется неравенство

$$8\sqrt{2x-1} - 6 \cdot 4\sqrt{2x-1} + 12 \cdot 2\sqrt{2x-1} \leq 8.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2x+9y-1} = 3, \\ \sqrt{2x-y+4} = 3y-1. \end{cases}$$

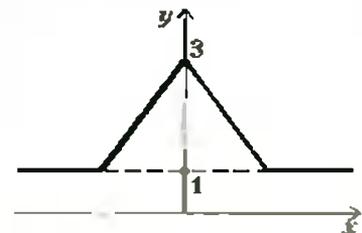
5. Найдите наименьшее целое значение x, для которого выполняется неравенство |5 - x| ≤ 9x + 15.

6. Вычислите

$$\log_2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{9} + \log_2 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9} + \log_3 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{9} + \log_3 \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9}.$$

7. В точке x = 2 найдите значение производной функции F(x) = x² f(2/x), если f(1) = 3, f'(1) = 5.

8. Площади параллелограмма и треугольника составляют, соответственно, 67% и 44% площади их объединения.



Сколько процентов площади треугольника находится вне параллелограмма?

9. На рисунке дан график функции y = f(x). Сколько решений имеют уравнения

- а) sin f(x) = 0,9;
- б) sin f(x) = 0,7?

10. Сколько существует трехзначных чисел, которые в 80 раз больше суммы своих цифр?

Вариант 3 (тест)

К каждой задаче предлагается пять вариантов ответов. Выберите из них единственный верный.

1. Вычислите сумму 2 + 6 + 10 + 14 + ... + 402.

2. Найдите отношение пятнадцатого члена геометрической прогрессии со знаменателем 2 к ее пятому члену.

3. Найдите дискриминант квадратного трехчлена 2x² + px + q, корнями которого являются числа 1 и 2.

4. Найдите множество всех значений параметра a , при которых квадратный трехчлен $x^2 - 2ax - 3a^2 + 4$ не имеет корней

5. Найдите радиус окружности, описываемой уравнением $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 36 = 0$.

6. Сколько решений (x, y) имеет система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 1)(y^2 - 4) = 0, \\ (x^4 - 4)(y^2 - 1) = 0? \end{cases}$$

7. Сколько существует точек в плоскости xy , лежащих одновременно на расстоянии 7 от точки $(1; 2)$ и на расстоянии 8 от точки $(10, 14)$?

8. Два целых числа удовлетворяют неравенству $|0,5 - x| \leq 14,3$. Найдите максимальное значение их разности.

9. Вычислите без калькулятора $\sin 15^\circ$.

10. Найдите наименьшее положительное значение параметра a , при котором $x = \pi/18$ является корнем уравнения $\cos(ax) = 1$.

11. Вычислите без калькулятора: $\sin 17^\circ + \cos 253^\circ + \operatorname{ctg} 315^\circ$

12. Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции

$$f(x) = 7 - 3 \sin(2x + \pi/7)$$

13. Среди указанных в бланке ответов выберите число, не принадлежащее области значений функции

$$f(x) = \frac{23 - 7x}{3 - x}$$

14. Дана функция $f(x) = 3x - \frac{1}{x^2}$. Решите уравнение $f'(x) = 5$.

15. Цена товара уменьшилась на 30%, а затем еще на 10%. На сколько всего процентов уменьшилась первоначальная цена?

16. Первую треть пути автомобиль проехал со скоростью 40 км/ч, а оставшуюся часть пути — со скоростью 70 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля за все время движения

17. В параллелограмме $ABCD$ известны $AB = \sqrt{7}$, $AD = 2\sqrt{7}$ и $\angle DAB = 60^\circ$. Найдите диагональ AC .

18. Две плоскости перпендикулярны. Прямая образует с этими плоскостями равные углы α . Чему равно α ?

19. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, площади граней которого равны 6, 20 и 30.

20. Плоскости α и β образуют угол 60° . В плоскости α лежит треугольник площадью 6. Чему равна площадь ортогональной проекции этого треугольника на плоскость β ?

Ответы

1. 20010	20402	22042	24402	Ответы 1 — 4 неверны
2. 3	8	10	16	1024
3. 8	4	1	6	Ответы 1 — 4 неверны
4. (0,1)	$ a > 1$	$(-1, 1)$	$(0, \infty)$	Ответы 1 — 4 неверны
5. 6	1	3	4	Ответы 1 — 4 неверны
6. 2	4	6	8	Ответы 1 — 4 неверны
7. 0	1	2	3	Бесконечно много
8. 14	15	27	29	Ответы 1 — 4 неверны
9. 3	$\sqrt{5}$	25	5	Ответы 1 — 4 неверны
10. 18	36	9	54	Ответы 1 — 4 неверны
11. 0	1	-1	0,5	Ответы 1 — 4 неверны
12. 7	14	6	10	Ответы 1 — 4 неверны
13. 3	23/7	23/3	7	Ответы 1 — 4 неверны
14. 1	2	3	4	Ответы 1 — 4 неверны
15. 40	20	35	37	39
16. 60	56	50	48	48
17. 14	$3\sqrt{7}/2$	$3\sqrt{7}$	7	Ответы 1 — 4 неверны
18. 30	90	60	45	Данных недостаточно
19. 18	60	36	54	Ответы 1 — 4 неверны
20. 3	6	12	4	Данных недостаточно

Публикацию подготовили А.Буслав, А.Ярский

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1¹

1. Вычислите $\cos \alpha$, если

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{8} \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{7 - 2x} + 2 = x.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} \geq 3^{2+x}$$

4. Найдите площадь круга, описанного около правильного треугольника, площадь которого равна $9\sqrt{3}$.

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3 = 0$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{y+1}{\sqrt{x-3}}, \\ 2y^2 + 4y = x^2 - 10. \end{cases}$$

7. Найдите наименьшее значение выражения $6\cos x + \cos 2x$.

8. Две бригады с одинаковым количеством косцов получили задание скосить траву на двух полях разной площади. На первом поле все косцы брига-

ды начали работу одновременно, а на другом члены второй бригады приступили к работе один за другим через равные промежутки времени, и далее каждый работал до окончания работы. Какая бригада выполнила работу быстрее и во сколько раз, если производительность косцов второй бригады в $4/3$ раза выше и первый член второй бригады работал в 5 раз дольше, чем последний?

9. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 10π , площадь основания равна 2π . В цилиндр вписана правильная шестигольная призма. Найдите расстояние от центра одного основания цилиндра до стороны шестигольника, вписанного в другое основание.

10. Сформулированы следующие два утверждения:

А) уравнение $ax - \sqrt{x} + 1 = 0$ имеет ровно одно решение;

Б) неравенство $x^2 - 8x + 1 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение.

Определите все значения параметра a , при каждом из которых оба утверждения справедливы

11. Вычислите площадь построенной в координатной плоскости Oxy фигуры, если координаты точек этой фигуры удовлетворяют соотношениям

$$4 - |2x| \leq |2y - 3| \leq \sqrt{16 - 4x^2}.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение $x^6 = 27 - 26x^3$.

2. Вычислите $(4/9)^{\log_{0,25} 2}$.

8. Найдите первый член арифметической прогрессии, если сумма первых шести ее членов равна 26, а ее разность составляет 25% от значения первого члена.

¹ Вариант предлагается на экономико-гуманитарном факультете.

4. Решите неравенство $\frac{2}{2x-3} < \frac{1}{x}$
 5. Решите уравнение

$$\log_{x+1}(15-3x) = 2.$$

6. Решите уравнение

$$2\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin 3x.$$

7. Чему равно $f'(2)$, если

$$f(x) = (x-2)(3x+1)x^2?$$

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\frac{3}{x} - y^3$, если $-3 \leq x \leq -1,5$ и $-2 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. Основание AD трапеции $ABCD$ является диаметром окружности радиусом 2. Прямая, содержащая среднюю линию трапеции, пересекает окружность в точках M и N . Известно, что $AB = BC = CD = 2$. Найдите длину отрезка MN .

10. Через середины ребер AA_1 и CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которого лежит квадрат со стороной a , и точку K на ребре BB_1 , проведена секущая плоскость. Найдите расстояние от точки K до середины ребра BB_1 , если известно, что площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью равна $2a^2$ и длина бокового ребра составляет $4a$.

11. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^4 - (4a+2)x^2 + 3a^2 + 2a = 0$$

имеет два решения?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Грузик на пружинке совершает вертикальные гармонические колебания. Спомощью собирающей линзы получено четкое изображение грузика на экране, находящемся на расстоянии $L = 0,5$ м от линзы. Амплитуда колебаний изображения $A = 0,1$ м, максимальная скорость изображения $V_m = 1$ м/с. Определите период колебаний и максимальную скорость движения самого грузика. Оптический сила линзы $D = 5$ дптр.

2. Шайба, брошенная по горизонтальному льду со скоростью $v_1 = 2$ м/с, скользит до остановки $s_1 = 5$ м. Определите путь, пройденный до остановки шайбой, брошенной вверх вдоль ледяной наклонной плоскости с начальной скоростью $v_2 = 15$ м/с. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^\circ$.

3. Один моль идеального одноатомного газа совершает одинаковые работы в изобарном и изотермическом про-

цессах. Определите отношение количества теплоты, сообщаемых газу в этих процессах.

4. Четыре одинаково заряженных шарика массой $m = 1,9 \cdot 10^{-2}$ кг каждый подвешены в одной точке на изолирующих нитях одинаковой длины. Заряд каждого шарика $q = 10^{-6}$ Кл. При этом шарики расположились в вершинах квадрата со стороной $a = 0,3$ м. Определите угол отклонения каждой нити от вертикали. Постоянная в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н м²/Кл², ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

5. В сигнальном фонаре имеются две одинаковые лампочки, позволяющие включать или белый свет, или красный, или тот и другой одновременно. При поочередном включении каждой из лампочек вольтметр с очень большой внутренним сопротивлением показывает напряжение $U_1 = 5$ В, а при одновременном параллельном включении обеих лампочек — $U_2 = 4$ В. Определите ЭДС батареи фонаря.

6. Неподвижный атом водорода испустил фотон с длиной волны $\lambda = 121,5$ нм. Какую скорость приобрел при этом атом водорода? Масса атома водорода $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, постоянная Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж с.

Вариант 2

1. С какой наименьшей скоростью должен бросить камень мальчик с берега реки шириной $L = 12$ м, чтобы перебросить его на другой берег, если он бросает этот камень с высоты $h = 1$ м от поверхности воды под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. По наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, с помощью пружины, параллельной плоскости, брусок сначала равномерно втащили вверх, а затем, удерживая за пружину, равномерно спустили вниз. Отношение удлинений пружины при движении вверх и вниз составляет $\Delta L_1/\Delta L_2 = n = 4$. Определите коэффициент трения между бруском и плоскостью.

3. В сосуде находится кусок льда при температуре $t_1 = 0^\circ\text{C}$. После того как в сосуд ввели $m_2 = 30$ г пара при температуре $t_2 = 100^\circ\text{C}$, в сосуде установилась температура $t_3 = 15^\circ\text{C}$. Определите массу льда. Теплоемкостью сосудов пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды $r = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

4. Точечный заряд $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл переместили в однородном электри-

ческом поле с напряженностью $E = 500$ В/м из точки с координатами $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ сначала в точку с координатами $x_2 = -1$ м, $y_2 = 0$, а затем в точку с координатами $x_3 = -1$ м, $y_3 = -1$ м. Какая работа была при этом совершена внешними силами? Вектор напряженности поля E находится в плоскости XOY и направлен под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси OX .

5. Неподвижный проводящий квадратный контур со стороной $a = 20$ см помещен в однородное магнитное поле, индукция которого составляет с плоскостью контура угол $\alpha = 30^\circ$, а ее величина возрастает по линейному закону от нуля до $B = 0,5$ Тл за некоторое время. Определите заряд, прошедший через контур за это время. Сопротивление контура $R = 1$ Ом.

6. Муха летит параллельно главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 0,2$ м со скоростью $v = 0,6$ м/с по направлению к линзе. В момент $t_0 = 0$ расстояние от мухи до плоскости линзы $d = 2,5$ м. Постройте ход лучей, формирующих изображение мухи, и определите расстояние от плоскости линзы до изображения мухи через время $t = 4$ с.

Публикацию подготовили
 А. Берестов, И. Кожухов, С. Кужин,
 Д. Ничегоносский, Т. Олейник,
 А. Поспелов, А. Прокофьев,
 Г. Сафонова

Московский энергетический институт (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'\left(\frac{1}{6}\right)$, $f'(6)$, если

$$f(x) = \left[\left(1 + \frac{2}{3x-1} \right) \times \left(1 - \frac{9x-9x^2}{3x+1} \right) + 1 \right] \cdot 9^{\log_3 \sqrt{x}}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(x+1)^2 - 2z(x+z) = 0, \\ (1+x^2)\sqrt{y-2} - 2x^2 = 0, \\ \sqrt{y-2}(z-2) + z = 0. \end{cases}$$

3. Двое рабочих, работая вместе, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал вдвое быстрее, а второй работал вдвое медленнее,

то всю работу они выполняли бы за 4 дня. За сколько дней может выполнить всю работу первый рабочий, работая самостоятельно?

4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(\cos^2 x - a \cos x - 2a^2) \times \left(\cos^2 \frac{x}{2} - 3 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 0$$

имеет на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ровно два различных корня

5. Площадь остроугольного треугольника ABC равна 30 см^2 , высота треугольника, проведенная на некоторой его вершины, равна 6 см. Найдите периметр треугольника ABC , если его углы A и B связаны соотношением $\sin(\angle A - \angle B) = \sin^2 \angle A - \sin^2 \angle B$.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x^3 + 3\sqrt{3}x - 2a} + \\ & + \sqrt{4a^2 - x^6 - 6\sqrt{3}x^4 - 27x^2} + \\ & + 16^{\log_4 \sqrt{2a}}) / (x - \sqrt{a + \sqrt{a^2 + 3\sqrt{3}} -} \\ & - \sqrt{a - \sqrt{a^2 + 3\sqrt{3}} + 1}). \end{aligned}$$

2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(2 \log_2 x + 3) \times (\log_2^2 x + 5(a-3) \log_2 x + 4) = 0$$

имеет три различных корня, каждый из которых удовлетворяет неравенству $x \leq 1$.

3. Сумма квадратов цифр некоторого двузначного положительного числа равна 73, среднее геометрическое его цифр равно $2\sqrt{6}$. Найдите это число.

4. Найдите все корни уравнения

$$\frac{\sqrt{8(1 - \cos x)} \cos \frac{x}{2}}{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{4} - \operatorname{tg}^2 x \right) \cos x} = 2 \cos \frac{13\pi}{3}.$$

принадлежащие области определения функции $y = \sqrt[4]{3^{\log_3 2} - 4x^2}$.

5. В конус вписан шар радиусом $\frac{1}{\pi}$.

Найдите объем данного конуса, если объем конуса с тем же основанием и с вершиной в центре вписанного шара равен 3.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Электромагнитные волны. Скорость их распространения. Свойства элек-

тромагнитных волн. Излучение и прием электромагнитных волн

2. Как изменится период колебаний математического маятника, если его поместить в воду? Маятнику придана идеально обтекаемая форма, так что силой трения можно пренебречь.

3. Под каким давлением p_1 нужно наполнить воздухом баллон объемом $V_1 = 10 \text{ л}$, чтобы при соединении его с баллоном объемом $V_2 = 30 \text{ л}$, содержащим воздух при $p_2 = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$, установилось давление $p = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$?

4. В однородном электрическом поле с напряженностью E , силовые линии которого составляют угол α с вертикалью и направлены вверх, висит на непроводящей невесомой нити заряженный шарик массой m (рис. 1). Сила натяжения нити T . Определите заряд шарика.

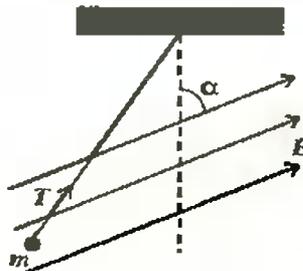


Рис. 1

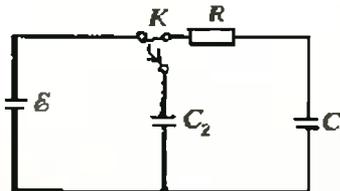


Рис. 2

5. Аккумулятор с ЭДС \mathcal{E} , конденсаторы емкостями C_1 и C_2 и резистор сопротивлением R соединены, как показано на рисунке 2. Определите количество теплоты, вышедшее в резисторе после переключения ключа K .

Вариант 2

1. Проводники в электрическом поле. Двухзарядки в электрическом поле

2. Какая сила, действующая на тело, не производит работы при перемещении тела?

3. В сосуд, на дне которого лежит твердый шар, магнетают воздух при температуре $t = 27^\circ \text{C}$. Когда давление стало $p = 20 \cdot 10^5 \text{ Па}$, шар поднялся вверх. Определите массу шара, если его радиус $r = 5 \text{ см}$. Молярная масса воздуха $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль К)}$.

4. При нагревании серебряного проводника сечением $S = 5 \cdot 10^{-2} \text{ мм}^2$ его

сопротивление возросло на $\Delta R = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}$, а внутренняя энергия увеличилась на $\Delta U = 1,6 \text{ Дж}$. Найдите температурный коэффициент сопротивления серебра. Плотность серебра $\rho = 10,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоемкость $c = 235 \text{ Дж/(кг К)}$, удельное сопротивление $\rho_c = 1,47 \cdot 10^{-8} \text{ Ом м}$.

5. Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r = 0,08 \text{ Ом}$ при силе тока $I_1 = 4 \text{ А}$ отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 8 \text{ Вт}$. Какую мощность он отдаст во внешнюю цепь при силе тока $I_2 = 6 \text{ А}$?

Публикацию подготовили
В Прохорова, А. Седов

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)^2(x-1)}{x+2}}.$$

а) Найдите область определения этой функции.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \frac{x+2}{x-1} f^2(x)$$

в) Найдите точки пересечения графиков функции $f(x)$ и $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$.

2. Найдите все решения уравнения

$$\cos x - \cos 3x = \sin 2x,$$

удовлетворяющие неравенству $|\pi/2 - x| < \pi$.

3. Решите уравнение

$$|x - 3|^{3x^2 - 10x + 3} = 1.$$

4. Каждая из трех равных окружностей с радиусом r касается двух других. Найдите площадь треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

5. Найдите объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна a и боковая поверхность равновелика сумме площадей оснований.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = 3 + 2^x - 4^x$.

а) Вычислите $f(\log_4 9)$.

б) Найдите область определения функции $g(x) = \sqrt{\frac{f(x) - 1}{2^{x+1} - 3}}$.

в) Определите, сколько решений в зависимости от a имеет уравнение $f(x) = a - 4^x$

2. Определите, что больше: $\cos 2$ или $\cos 8$.

8. Руда содержит 40% примесей, а выплавляемый из нее металл содержит 4% примесей. Сколько металла получится из 24 тонн руды?

4. Из вершины остроугольного ромба проведены перпендикуляры к прямым, содержащим стороны ромба, которым не принадлежит эта вершина. Длина каждого перпендикуляра равна 3, а расстояние между их основаниями $3\sqrt{3}$. Вычислите длины диагоналей ромба.

5. Центр верхнего основания правильной четырехугольной призмы и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в призму пирамиды, объем которой равен V . Найдите объем призмы.

Публикацию подготовили
В. Лопачев, О. Корсакова

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(Физико-механический факультет)

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{a^{-1}}{1+a^{-1}} - 1\right)(a+1)^{-1}.$$

2. Найдите 150% от числа 12.

3. Вычислите без калькулятора

$$\log_2 2 \log_4 27.$$

4. Вычислите производную функции

$$y = \sqrt{x} - \frac{2}{x}$$

в точке $x = 1$.

5. Решите неравенство $\cos 2x - 1 \geq 0$.

6. Упростите выражение $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 2}$

7. Найдите больший корень уравнения $2x - \frac{1}{x} = 1$.

8. Решите уравнение

$$\log_2(2^{4x} - 1) = 1 - \frac{1}{x}.$$

9. Решите уравнение $\sin x = \cos 3x$.

10. Вычислите $\operatorname{tg}^2 \alpha$, если $\cos 2\alpha = 1/3$.

11. Решите уравнение

$$(3-x)\sqrt{x-1} = 1.$$

12. Решите неравенство $2^{3x} < 3^{2x}$

13. Решите неравенство

$$x^4 + 3x^3 + 2x^2 \leq 0.$$

14. Решите неравенство $\log_2(x-1) < 1$.

15. Первый член убывающей геометрической прогрессии $b_1 = 1$, а сумма $b_1 + b_2$ в два раза больше суммы $b_2 + b_3$. Найдите знаменатель прогрессии.

16. Вычислите

$$\arcsin\left(\frac{\sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ}{2}\right).$$

17. Решите неравенство $x^2 + x < 2|x|$.

18. Найдите длину стороны квадрата, два вершины которого лежат на окружности радиусом $R = \sqrt{5}$, а две другие — на касательной к этой окружности.

19. В усеченный конус вписан шар радиусом $r = 2$. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $\alpha = \pi/3$. Найдите объем усеченного конуса.

20. При каких значениях a уравнение

$$ax^2 - (3a+2)x + 2(a+1) = 0$$

имеет решение, большее 1?

Вариант 2

(Физико-технический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{1}{\sqrt{ab}-a} + \frac{1}{\sqrt{ab}+b} + \frac{2}{a-b}$$

2. Вычислите без таблиц и калькулятора $\log_4 \operatorname{ctg} 225^\circ$.

3. Найдите наибольший общий делитель чисел $m = 36$ и $n = 120$.

4. Установите без калькулятора, какое число больше $a = \cos 125^\circ$ или $b = \operatorname{ctg} 225^\circ$.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x+8} = 4.$$

6. Вычислите без таблиц и калькулятора $(2\cos 15^\circ - \cos 45^\circ)^2$. Покажите, что это число — рациональное.

7. Решите уравнение

$$\log_4(2^x + 2) = x$$

8. Вычислите без таблиц и калькулятора $\pi/3 + \arccos(-1/2)$.

9. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} = 1$.

10. Число 2 является корнем многочлена $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$. Найдите сумму квадратов двух других его корней.

11. Решите неравенство $|x| < 2x + 1$.

12. Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{2-3^x}}{x}$$

19. Решите неравенство $\log_2(x^2) \leq 2$.

14. На прямой линии $y = 2x - 5$ найдите точку, расстояние от которой до начала координат наименьшее.

15. Найдите площадь прямоугольного треугольника, одна из сторон которого лежит на касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $A(1; 1)$, а две другие — на осях координат.

16. Сколько целых чисел содержится в арифметической прогрессии длиной $n = 100$, если известно, что ее первый член $a_1 = 1/7$, а ее разность $d = 2/7$?

17. При каких целых значениях n неравенство $nx^2 - 2nx - 2 < 0$ выполняется для всех действительных x ?

18. Найдите объем конуса, если известен угол при вершине $\alpha = \pi/3$ в его осевом сечении и радиус вписанного шара $r = 1$.

19. На сколько сантиметров длиннее большая диагональ ромба его меньшей диагонали, если стороны ромба имеют длину $a = 5$ см, а его площадь равна $S = 16 \text{ см}^2$?

20. При каких a уравнение $2\sqrt{1-ax} = x + 2$ имеет ровно два решения?

Вариант 3

(Факультет экономики и менеджмента)

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{1+a^{-1/2}} - a\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{-1}.$$

2. За 2 кг одного продукта и 4 кг другого заплатили 40 тыс. р. Стоимость того же количества продуктов не изменилась после того, как первый продукт подорожал на 5%, а второй подешевел на 15%. Сколько стоил первоначально 1 кг второго продукта?

3. Найдите девятый член геометрической прогрессии $b_1 = 3$, $b_2 = -6$, ...

4. Вычислите

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}\right) / \operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}.$$

Докажите, что это число — целое.

5. Является ли функция

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$$

четной, нечетной или общего вида?

6. При каком x функция $y = -2\sin x - \cos 2x$ принимает свое наибольшее значение на отрезке $[0; 3\pi/4]$?

7. Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin^2 x + \cos x = 0.$$

8. Найдите область допустимых значений аргумента x функции

$$y = \lg(2 - \sqrt{x}).$$

9. Найдите область значений функции $y = \operatorname{arctg}|\operatorname{tg} x|$.

10. Найдите сумму чисел x , удовлетворяющих уравнению

$$x^2 \sqrt{1-x} = 4\sqrt{1-x}.$$

11. Найдите меньший корень уравнения $|x + 2| = 2 - x/2$

12. Найдите произведение целых чисел, являющихся решением неравенства $2/(2x-1) > 1/(x-3)$

13. Сумма 3-го и 15-го членов арифметической прогрессии равна 14. Найдите ее 9-й член

14. Найдите абсциссу точки пересечения касательной в точке (2; 9) к графику функции $y = x^3 - 3x + 7$ с осью Ox .

15. Решите неравенство

$$\log_2^2(2x+1) \leq 1$$

16. Решите неравенство $9^{\sqrt{x}} < 3^{\sqrt{x+1}}$

17. Пусть высота параллелограмма $ABCD$, опущенная из вершины D на сторону AB , имеет длину 5 и разбивает AB на части длинами 3 и 6. Найдите длину большей диагонали параллелограмма.

18. Решите уравнение

$$\cos x = 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

В ответе укажите те x , которые удовлетворяют двойному неравенству $-\pi < x < \pi$

19. При каких a уравнение

$$\sqrt{x+1} - 2a + \sqrt{x+4a+4} = 3$$

имеет хотя бы одно решение?

20. Решите неравенство

$$\frac{1}{x+1} \leq \sqrt{1-x}.$$

Вариант 4

(факультет математики кабернетика)

1. Упростите выражение

$$\frac{a^{-1} - 1}{a^{-1/2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{a-1} \right)^{-1}$$

2. Упростите выражение

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{1 - \operatorname{ctg} \alpha}$$

3. Найдите наименьшее целое положительное число, при делении на 5 дающее в остатке 3, а при делении на 7 дающее в остатке 4

4. В арифметической прогрессии 5-й член a_5 больше 3-го a_3 в 3 раза, а их разность $a_5 - a_3 = 8$. Найдите a_1 .

5. Представьте число $12/11$ в виде периодической десятичной дроби.

6. Определите знак выражения

$$A = \sin 142^\circ + \cos 140^\circ.$$

7. Найдите меньший корень уравнения $|2x| - 1 = 3$.

8. Найдите расстояние между точками $A(-1; 2)$ и $B(2; -2)$.

9. Решите уравнение $\log_x 3 = -2$

10. При каком x функция $y = x^2(x+3)$ имеет локальный максимум?

11. Вычислите $2 \cos(\pi/2 + 2\alpha)$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

12. Решите уравнение

$$\arcsin(-x)^2 + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

13. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства $x < \frac{2}{x+1}$

14. Решите неравенство

$$2|\log_2 x| - \log_2 x < 1.$$

15. Решите уравнение

$$2 \sin^2 \pi \sqrt{x} = 1$$

16. Решите неравенство

$$\sqrt{5+2x} < 3.$$

17. Решите уравнение $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} x$.

18. Найдите множество значений, принимаемых функцией

$$y = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

19. В треугольнике длины двух сторон равны 6 и 8, а радиус описанной окружности равен 5. Найдите длину третьей стороны треугольника.

20. В шар вписан конус, объем которого в 4 раза меньше объема шара. Чему равно отношение высоты конуса к радиусу шара?

Публикацию подготовили
Е.Подсыпанн, С.Преображенский,
Ю.Хватов

КОНКУРС В СЕТИ ИНТЕРНЕТ

В 1997 году журнал «Квант» совместно с Московским детским клубом «Компьютер» провела заочный конкурс по математике в электронной сети Интернет MATNET-97. Условия задач были размещены на одной из WEB-страницек сетевого сервера МГУ. Участники конкурса присылали свои решения по электронному адресу

VZMSH Econ@econ.msu.ru

в виде TXT или DOC файлов. В конкурсе приняли участие 38 школьников из России, Украины, Белоруссии и Казахстана. Победителем конкурса стал учащийся 10 класса Технического лицея г. Пскова Виктор Андреев. Жюри конкурса отмечает также хорошие работы Антона Мордасова (школа №3 г. Заречного), и Натальки Шелеповой (электронный адрес: natali@sch101.alien.ru). Эти школьники награждаются памятными дипломами

Задачи конкурса MATNET-97

1. Генератор чисел, сконструированный профессором Синусом-Минусом, обладает следующим свойством: если на его вход подать число C , то на выходе получается два числа x_1 и x_2 , которые являются корнями уравнения $x^2 - 4x + 4 - C = 0$. Профессор Синус-Минус утверждает, что, имея вначале число 1 и пользуясь своим генератором, он может получить 1997 попарно различных чисел, произведение которых равно 1. Верно ли это?

А. Жуков

2. Докажите, что число $1997^{19960000} - 1$ кратно числу $(1997^{2000} - 1) \cdot 1996$.

А. Жуков

3. Кузнечики Петя и Вася соревнуются на беговой дорожке в виде ленты Мёбиуса, обустроенной следующим образом: длинная гибкая полоска расчерчивается с двух сторон на сантиметровые деления так, как показано на рисунке, после чего лента перекручивается, участки 0 и 1997 накладываются друг на друга и склеиваются. Кузне-

1-я сторона

1	2	...	1996
---	---	-----	------

1997	1996	1995	...	1	0
------	------	------	-----	---	---

2-я сторона

чки стартуют одновременно с пункта 1 в сторону увеличения нумерации, причем кузнечик Петя прыгает на 100 см вперед, а кузнечик Вася — на 150 см. Кто из них первым окажется в пункте с номером 1?

А. Жуков

4. Как уложить 16 квадратов со сторонами 1, 2, ..., 16 без пересечений внутри квадрата со стороной 39?

А. Савки

5. В равностороннем треугольнике расположены 9 попарно непересекающихся кругов радиуса 1. Докажите, что в этом треугольнике можно расположить 10 кругов радиуса 1 так, чтобы они попарно не пересекались.

В. Произволов

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ПРИ «КУРЧАТОВСКОМ ИНСТИТУТЕ»**

В 1995 году начал свою работу Физико-математический колледж (Малый исследовательский университет), входящий в состав Института естественных наук и экологии (ИНЕСНЭК) при Российском научном центре (РНЦ) «Курчатовский институт».

Колледж готовит высококвалифицированных специалистов в области физики и прикладной математики и информатики. Занятия проводятся на базе РНЦ. За основу обучения взята схема, успешно опробованная ранее в Московском физико-техническом институте и Новосибирском государственном университете. Эта схема подразумевает интенсивное научение базовых университетских курсов физики и математики в течение первых лет обучения, чтобы уже со второго-третьего курса студенты могли принимать активное участие в научных исследованиях, проводимых в РНЦ. Количество студентов на курсе сравнительно небольшое (не более 20 человек), что позволяет сделать обучение практически индивидуальным. Как общие, так и специальные курсы читаются ведущими учеными — сотрудниками РНЦ и научно-исследовательских институтов Российской академии наук, непосредственно работающими в данных областях физики и математики. Спектр исследований, проводимых в РНЦ, достаточно обширен. Это — фундаментальные исследования в области термоядерного синтеза, физики элементарных частиц, слабого взаимодействия, кварк-глюонной плазмы, высокотемпературной сверхпроводимости, физики твердого тела, математического моделирования в экологии, работы по созданию нового поколения безотрадных ядерных реакторов и многое другое. По всем этим направлениям РНЦ имеет прочные контакты и ведет совместные работы с ведущими мировыми научными центрами.

Обучение в колледже — 4 года. Окончившие колледж получают диплом бакалавра и продолжают учиться в ИНЕСНЭК еще 1 год и 10 месяцев до получения диплома магистра. Набор на первый курс осуществляется по результатам письменных экзаменов — по физике, математике и русскому языку — и собеседования. Вступительные экзамены проводятся в июле. Уровень требований на экзаменах достаточно высок — аналогичен требовани-

ям вступительных экзаменов в МФТИ, на механико-математический и физический факультеты МГУ и в другие ведущие вузы.

Справки о поступлении можно получить по телефону 196-53-11 с 10 до 17 часов по рабочим дням.

Адрес колледжа: 123182 Москва, ул. Максимова, д.4.

Ниже приводятся образцы задач письменных вступительных экзаменов 1997 года по математике и физике.

МАТЕМАТИКА

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3/8, \\ \log_x y + 5 \log_y x - 4z = 4, \\ 3 \log_x y - \log_y x + 4z = 6. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} 2x}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x} \geq \frac{4 \cos^2 x - 1}{3 \cos 2x}$$

на отрезке $[0; \pi]$

3. Из точки M с абсциссой x_0 , расположенной на оси Ox , проводится прямая так, что она пересекает в точке A параболу $y = -2 - ax^2$ ($a > 0$), являясь в то же время перпендикулярной к касательной к данной параболе в точке A . Эта прямая пересекает параболу во второй точке B и отсекает от данной параболы сегмент. Определите наименьшее возможное значение длины отрезка AB и соответствующие этому отрезку значения минимальной площади отсекаемого сегмента и абсциссы x_0 точки M . Какое числовое множество значений при данном условии минимальности длины отрезка AB может принимать абсцисса x_0 точки M при допустимых значениях параметра a ?

4. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 12$, $BC = 15$, $AC = 9$ проведена биссектриса BB_1 . Пусть C_1 — точка касания AB с вписанной в треугольник окружностью, отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P , прямая AP пересекает BC в точке A_1 . Найдите отношение AP/PA_1 .

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB в p раз превосходит длину бокового ребра AS . Сфера с центром в точке O_1 каса-

ется плоскостей SAB и SAC в точках B и C , сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей SAC и SBC в точках A и B . Найдите отношение объемов пирамид SBO_1O_2 и $SABC$.

6. Докажите, что при любых $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$x^4 + 9x^2 + 16 \geq \frac{17x(x^2 + 4)}{4}.$$

7. Найдите целую часть выражения

$$\sqrt{4n^2} + \sqrt{16n^2} + \sqrt{64n^2 + 16n + 3},$$

где n — натуральное число.

ФИЗИКА

1. На горизонтальной плоскости находится клин массой M с углом наклона

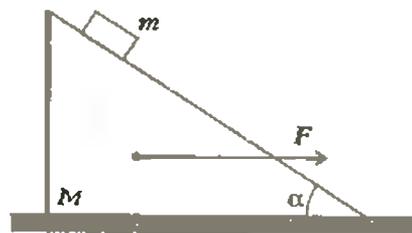


Рис. 1

α (рис.1) на гладкую поверхность клина помещают брусок массой m . Вся система разгоняется приложенной к клину постоянной горизонтальной силой F . Коэффициент трения между клином и плоскостью μ , трения между клином и бруском нет. Какова должна быть сила F , чтобы брусок в процессе разгона был неподвижен относительно клина?

2. В цилиндрической трубке с теплоизолируемыми стенками имеются две жестко укрепленные перегородки

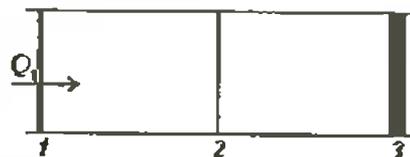


Рис. 2

1 и 2 и свободно движущийся теплопроводящий поршень 3 (рис.2). В начальный момент времени объем V_1 между перегородками 1 и 2 и объем V_2 между перегородкой 2 и поршнем 3 заполнены одноатомным газом с давлением $p_0 = 1$ атм и температурой T_0 . При этом поршень 3 неподвижен, так как вся система находится в атмосфере с тем же давлением $p_0 = 1$ атм.

как вся система находится в атмосфере с тем же давлением $p_0 = 1$ атм. Через перегородку 1 в объем V_1 медленно передается количество теплоты Q_1 . В результате система переходит в новое равновесное состояние. Какая температура установится в пространстве между перегородкой 1 и поршнем 3? Какое количество теплоты пройдет через перегородку 2? Газ считайте идеальным. Трением поршня о стенки цилиндра пренебрегите. Рассмотрите варианты:

- $V_1 = V_2 = V_0$;
 - V_1 и V_2 — произвольные.
3. Плоский полый конденсатор емкостью C , на котором поддерживается

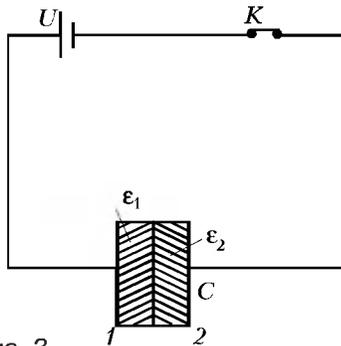


Рис. 3

постоянная разность потенциалов U , разделили тонкой жесткой перегородкой на две равные части и заполнили жидкостями с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 (рис.3). После замыкания ключа K диэлектрик с проницаемостью ϵ_2 вытек. Найдите:

- заряд на обкладках конденсатора;
 - силы, действующие на обкладки 1 и 2, и давление на перегородку.
- Площадь каждой обкладки S .

4. В схеме, изображенной на рисунке

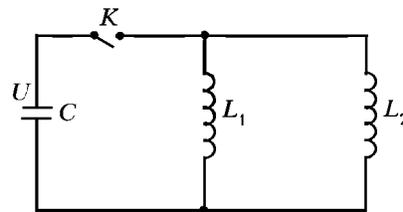


Рис. 4

4, конденсатор емкостью C заряжают до напряжения U . Затем ключ K замыкают. Найдите:

- время перезарядки конденсатора;
 - максимальные токи в катушках.
- Индуктивности катушек L_1 и L_2 .
5. В плечи интерферометра Юнга

поместили два одинаковых открытых прозрачных сосуда длиной L (рис.5). При наблюдении интерференционной картины с монохроматическим источником света (длина волны λ) расстояние между двумя соседними темными полосами на экране было равно Δh . Как изменится интерференцион-

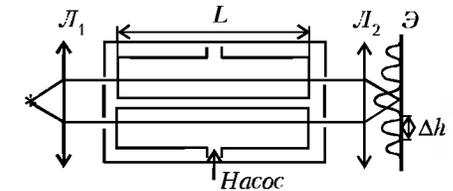


Рис. 5

ная картина, если в одном из сосудов равномерно повышать давление воздуха по закону $p = p_0 + kt$?

Найдите скорость движения главного максимума, если показатель преломления воздуха n линейно зависит от давления: $n = 1 + \alpha p$.

МОСКОВСКАЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ШКОЛА №1189

Несколько лет назад на базе экспериментальной школы №1189 города Москвы начали работать классы с углубленным изучением физики и математики. Инициаторами их открытия были Департамент образования Северо-Западного округа Москвы, Российский научный центр (РНЦ) «Курчатовский институт» и Московский физико-технический институт. Учащиеся 10 и 11 классов проходят обучение в дневных классах, а 8 и 9 — в вечерних. Программы по физике и математике разработаны таким образом, чтобы заложить основы общей физико-математической культуры и детально изучить эти предметы на уровне требований, необходимых для поступления в МФТИ и другие ведущие вузы страны. В частности, учащиеся выполняют задания Заочной физико-технической школы при МФТИ.

Уже состоялись три выпуска физико-математических классов. Все окончившие успешно поступили в такие

вузы как МФТИ, МИФИ, на механико-математический и физический факультеты МГУ.

Занятия по физике и математике в дневных классах проводятся по группам численностью не более 10 человек. Программа по математике включает три часа алгебры, три часа геометрии и два часа математического анализа в неделю, по физике — шесть часов семинарских занятий и два часа лабораторных работ. Занятия ведет коллектив докторов и кандидатов физико-математических наук, активно работающих в РНЦ и МФТИ. Курс «Компьютерное моделирование физических процессов» подразумевает в течение первого полугодия освоение техники программирования на языке СИ, а в дальнейшем — самостоятельную разработку программ, которые позволяют изучать отдельные темы из курсов механики, теории колебаний и физики фракталов. Занятия по этому предмету проводятся по три часа в

неделю на базе РНЦ. Большое внимание уделяется также углубленному изучению английского языка, которое происходит во внеурочное время (факультативно) по четыре часа в неделю.

В вечерних классах занятия по физике и математике проводятся два раза в неделю по четыре часа.

Большой объем занятий и их высокая интенсивность в свою очередь предъявляют достаточно серьезные требования к учащимся физико-математических классов. Прием в дневные классы школы проводится по результатам собеседования, а в вечерние классы прием свободный.

Справки о поступлении можно получить по телефону 193-60-23.

Адрес школы: 123182 Москва, ул.Василевского, д.9, кор.1.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №1)

1. За 6 мин мотоциклист проезжает расстояние $6v_m$ метров, так как он догнал велосипедиста, который за это время проехал расстояние $6v_b$ метров, получим: $6v_m = 100 + 6v_b$. За 12 мин мотоциклист проехал $12v_m$ метров, так как он догнал пешехода, прошедшего за это время $12v_p$ метров, получим: $12v_m = 400 + 12v_p$. Отсюда $100 + 6v_b = 200 + 6v_p$, $v_b = 100/6 + v_p$.

Если велосипедист догонит пешехода через t мин, они за это время пройдут tv_p и tv_b метров соответственно, а начальное расстояние между ними было $400 - 100 = 300$ метров, поэтому $tv_b = 300 + tv_p$, $(100/6)t + tv_b = 300 + tv_p$, откуда $t = 18$ (мин)

2. Опустим из точки C перпендикуляр CQ на диагональ BD и продолжим его до пересечения с основанием AD в точке P .

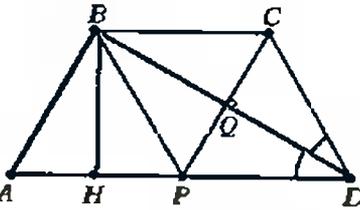


Рис. 1

Имеем: $\angle ADB = \angle CBD$ как внутренние накрест лежащие при пересечении двух параллельных прямых третьей, по $\angle CDB = \angle ADB$ по условию, значит, $ABCD$ равнобедренный, поэтому $BC = CD$ и $BQ = QD$; тогда $BCDP$ — ромб. Следовательно, $BP = AB$ и $\angle ABH = \angle HBP$, $\angle PBD = \angle DBC$ и $\angle HBD = \angle HBP + \angle PBD = \angle ABH + \angle CBD$.

3. Пусть для определенности король стоит сначала на черном поле. Диагональный ход означает, что король перешел с белого поля на белое (или с черного на черное). Допустим, что был сделан один диагональный ход, для определенности — с белого поля на белое, а остальные ходы — без смены цвета; тогда к предпоследнему ходу будут пройдены все 32 белые клетки и 31 черная, король стоит на черном поле, и конечная клетка (она же начальная) — тоже черная. Следовательно, неминуем диагональный ход с черной клетки на черную. Таким образом, каждый диагональный ход с белой клетки на белую влечет диагональный ход с черной клетки на черную, следовательно, число диагональных ходов четно (возможно, равно нулю).

4. Допустим, что удалось отобрать по различному количеству учеников из каждой школы (из первой — эк одного, из второй — одного, ..., из пятнадцатой — 14). Тогда общее число школьников будет $0 + 1 + 2 + \dots + 14 = 105$, что противоречит условию.

5. Пусть у фирмы имеется l филиалов и k представителей. Общее количество компьютеров превосходит общее количество сотовых телефонов из величину $5l + 2k - 7k = 5(l - k)$, что по условию задачи равно $100(l - k)/k$. Из составленного уравнения находим искомое число представителей $k = 20$.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6—8»

(см. «Квант» №5 за 1997 г.)

6. Пусть сотрудники фирмы собрали $5k + m$ пятидолларовых купюр, где k, m — целые, $0 \leq m < 5$, что позволило им приобрести $6k + m$ колец. Если бы сотрудники фирмы приобрели по два кольца — в общей сложности $12k + 2m$ колец, — то в зависимости от величины m стоимость одного кольца была бы такой, как показано в таблице:

m	$2m$	количество колец	количество пятидолларовых купюр	стоимость одного кольца
0	0	$12k = 6 \cdot 2k$	$10k$	$\frac{50}{12}$
1	2	$12k + 2 = 6 \cdot 2k + 2$	$10k + 2$	$\frac{5(10k + 2)}{12k + 2}$
2	4	$12k + 4 = 6 \cdot 2k + 4$	$10k + 4$	$\frac{5(10k + 4)}{12k + 4}$
3	6	$12k + 6 = 6(2k + 1)$	$10k + 5$	$\frac{5(10k + 5)}{12k + 6}$
4	8	$12k + 8 = 6(2k + 1) + 2$	$10k + 7$	$\frac{5(10k + 7)}{12k + 8}$

Сравнивая стоимость одного кольца с соответствующей ценой одного кольца $\frac{5(5k+m)}{6k+m}$ при различных значениях $m =$

$0, 1, 2, 3, 4$ я случае приобретения сотрудниками фирмы по одному кольцу, находим, что лишь при $m = 4$ получается экономия в 1 цент (0,01 доллара), при этом $k = 41$. Итак, в фирме $41 \cdot 6 + 4 = 250$ сотрудников. Если бы каждый сотрудник купил по 4 кольца, то для общего количества $1000 = 6 \cdot 166 + 4$ колец нужно было бы собрать $5 \cdot (5 \cdot 166 + 4) = 4170$ долларов. Стоимость одного кольца при этом составила бы 4,17 доллара, что также на 1 цент экономичнее первоначальной стоимости.

7. Время пребывания на катке каждого школьника представим в виде отрезка $[t_1, t_2]$ на временной оси. Справедливо следующее свойство: если каждые два из семейства отрезков на прямой имеют общую точку, то все отрезки этого семейства имеют общую точку. Пусть $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$ — удовлетворяющая данному условию совокупность отрезков, a — наибольшее из чисел a_1, a_2, \dots, a_n , b — наименьшее из чисел b_1, b_2, \dots, b_n . Нетрудно проверить, что отрезок $[a, b]$ является общим для всех отрезков совокупности. Если времена пребывания на катке $[t_1, t_2], [T_1, T_2]$ каких-то двух мальчиков не перекрываются, скажем $T_1 > t_2$, то поскольку каждый на них встретил всех девочек, в интервале времени $[t_2, T_1]$ на катке должны присутствовать все девочки. Если же каждые два мальчика встретились на катке, то по отмеченному выше свойству существует момент времени, когда все мальчики присутствовали на катке.

8. Укажем один из возможных способов. Назовем операцией ОП1 замену чисел в двух соседних клетках их полусуммами, операцией ОП2 — замену местами чисел в двух соседних клетках. Результат операции ОП1 делает равными числа в двух соседних клетках. На рисунке 2 показан способ «выравнивания» чисел в полоске из 4 клеток, в двух парах клеток которой числа равны. На рисунке 3 показан способ «выравнивания» чисел в полоске на 8 клеток, состоящей из двух четверок с равными числами.

Применение этих операций к горизонталям шахматной доски позволяет «выравнивать» число в каждой горизонтали. После этого следу-

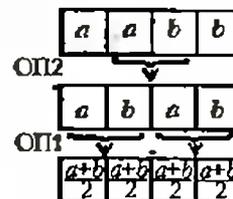


Рис. 2

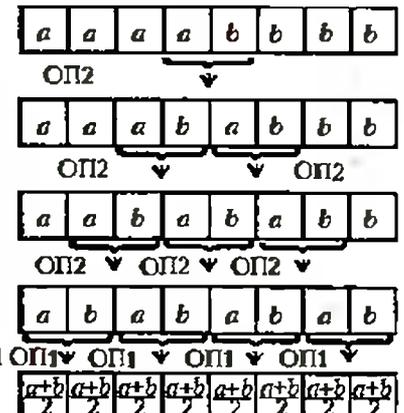


Рис. 3

ет повторить точно такую же процедуру с каждой вертикалью шахматной доски

9. Назовем треугольник *полувеликим параллелограммом*, если у него имеется одна общая с параллелограммом сторона и, кроме этого, одна из вершин треугольника лежит из правой, содержащей противоположную сторону параллелограмма (на рисунке 4 треугольник AMD полувелик параллелограмму $ABCD$). Два полувеликих данному параллелограмму треугольника имеют одинаковые площади, равные половине площади параллелограмма.

Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ (рис.5) состоят из трех частей, попарно полувеликих одним и тем же параллелограммам ΔB_1C_1P и ΔB_2C_2P полувеликим параллелограмму AC_1PB_2 .

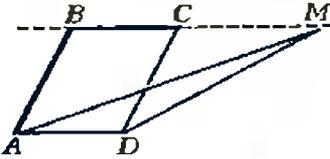


Рис. 4

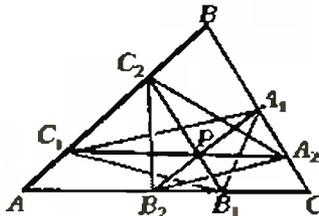


Рис. 5

ΔC_1A_1P и ΔC_2A_2P полувелики параллелограмму $A_1PC_1B_1$; ΔA_1B_1P и ΔA_2B_2P полувелики параллелограмму PA_2CB_2 . Следовательно, площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

10. Обозначим настоящие монеты n_1, n_2, \dots, n_9 , а фальшивые — f_1, f_2, \dots, f_9 . За три взвешивания можно убедиться суд, что монеты n_1, n_2, \dots, n_9 настоящие, а f_1, f_2, \dots, f_9 — фальшивые. Вот как это делается.

При первом взвешивании на левую чашку весов кладем монеты $n_1, n_2, f_3, f_4, f_5, f_6, n_7, n_8, n_9$, на правую — все остальные. При втором взвешивании на левой чашке оставим все прежние монеты, кроме n_1, n_2 , а на правой — все прежние монеты, кроме f_1, f_2 . Если при первом взвешивании перевесила левая чашка весов, а при втором взвешивании — правая чашка, то это могло произойти в одном-единственном случае — когда обе изъятые с левой чашки монеты настоящие, а обе монеты, изъятые с правой чашки, — фальшивые.

При третьем взвешивании на левую чашку весов положим монеты n_7, n_8, n_9, f_1, f_2 , а на правую — f_3, f_4, f_5, n_1, n_2 . Левая чашка перетянет правую, причем суду известно, что слева лежат две фальшивые монеты, а справа — две настоящие. Но это может произойти лишь тогда, когда монеты n_7, n_8, n_9 настоящие, а монеты f_1, f_2, f_3 — фальшивые. Возвращаясь вновь к результату второго взвешивания, заключаем, что правая чашка с заведомо фальшивыми монетами f_1, f_2, f_3 может перетянуть левую чашку с тремя заведомо настоящими монетами n_7, n_8, n_9 лишь тогда, когда монеты f_4, f_5, f_6 фальшивые, а монеты n_3, n_4, n_5, n_6 — настоящие.

ЗАДАЧИ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ

1. $F = \sqrt{2\rho S v^2}$. 2. $F = mg + mv^2/l$. 3. $a = g\Delta h/l$.

4. $\Delta h = l \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Пренебрежем смещением шарика за короткое время τ . Шарик получает импульс $p = mv = QE_0\tau$ и приобретает кинетическую энергию $p^2/(2m) = Q^2E_0^2\tau^2/(2m)$. При максимальном угле α_m отклонения маятника от вертикали эта энергия полностью переходит в потенциальную $mg(1 - \cos\alpha_m)$. Из закона сохранения энергии получаем

$$\alpha_m = \arccos\left(1 - \frac{Q^2E_0^2\tau^2}{2m^2gl}\right)$$

При $(QE_0\tau/m)^2 > 4gl$ маятник сделает полный оборот.

2. Из рисунка 6 получаем, что расстояние между соседними точками равно

$$\Delta y = 2d \operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2d \cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$$

а между самыми дальними точками —

$$y_n = d + l \operatorname{ctg}\alpha + (l - d \operatorname{tg}\beta) \operatorname{ctg}\alpha = d + 2l \operatorname{ctg}\alpha - \frac{d \cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$$

3. Пусть поршень сместился от центрального положения вниз так, что отстоит от левой стенки куба на расстоянии x (рис.7). Если слева от поршня давление p_1 , а справа p_2 , то,

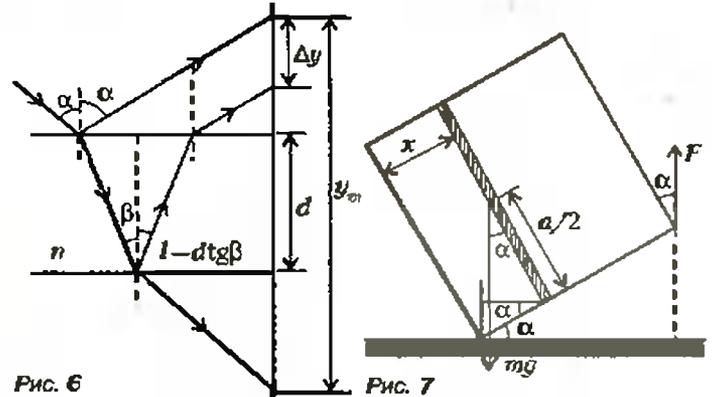


Рис. 6

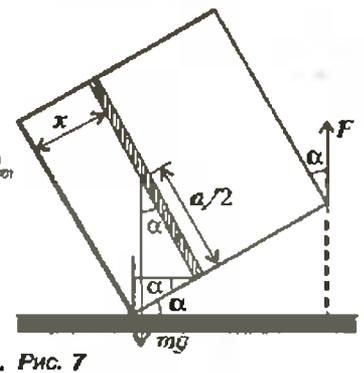


Рис. 7

записывая условие равновесия поршня $(p_1 - p_2)a^2 = mgs \sin\alpha$ и уравнение состояния одного моля идеального газа $p_1 x a^2 = RT = p_2(a - x)a^2$, получаем квадратное уравнение

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{a-x} = \frac{mgs \sin\alpha}{RT}$$

Из него однозначно имеем

$$x_1 = \frac{a}{2} + \frac{RT}{mgs \sin\alpha} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{RT}{mgs \sin\alpha}\right)^2}$$

(второй корень x_2 дает значение $x > a$, поэтому отброшен). Теперь запишем уравнение моментов сил относительно оси, проходящей через ребро куба, соприкасающееся с плоскостью:

$$F a \cos\alpha = mg \left(x_1 \cos\alpha - \frac{a}{2} \sin\alpha \right).$$

Отсюда находим

$$F = \frac{mg}{2} \left(\frac{2x_1}{a} - \operatorname{tg}\alpha \right) \text{ при } \operatorname{tg}\alpha < \frac{2x_1}{a}.$$

4. Пусть C — емкость человека, U — напряжение сети. Тогда переменный ток через емкость равен $I = \Delta Q/\Delta t = C \Delta U/\Delta t$. Полагая $\Delta U/\Delta t \sim \omega U$, где ω — циклическая частота ($\omega = 2\pi\nu \sim 2\pi \cdot 50 \text{ с}^{-1}$ — для бытовой сети), получаем $I \sim \omega C U$.

Емкость человека можно оценить различными способами, например как емкость шара радиусом R той же массы m и плотности ρ , что и у человека, или как емкость плоского конденсатора, образованного стопами и землей, разделенными резиной коврика толщиной d с диэлектрической проницаемостью ϵ . Для шара $C = 4\pi\epsilon_0 R$, где $R = (m/\rho)^{1/3} \sim 0,3 \text{ м}$ для $m \approx 60 \text{ кг}$, $\rho \sim \rho_{\text{чел}} \sim 10^3 \text{ кг/м}^3$. Тогда $C \sim 3 \cdot 10^{-11} \text{ Ф}$. Емкость плоского конденсатора $C = \epsilon\epsilon_0 S/d$. Площадь двух стоп $S \sim 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, для резины $\epsilon \sim 5$ и $d \sim 0,5 \text{ см}$. Отсюда получаем тот же порядок емкости. Таким образом, искомый ток $I \sim \omega C U \sim 2\pi \cdot 50 \cdot 3 \cdot 10^{-11} \cdot 2,2 \cdot 10^2 \text{ А} \sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ А} = 2 \text{ мкА}$.

5. Во втором случае на каждую вставленную страницу сверху и снизу будет действовать практически одна и та же сила нормального давления (страница имеет малый вес) и, соответственно, каждая страница будет давать вклад в горизонтальную силу, равный удвоенной силе трения. Против первоначальной силы тяги теперь будет действовать резко возросшая сила трения, и журнал на сдвинется

Вариант 2

1. $x = v_0 \left(\sqrt{2H_0/g} - \sqrt{2(H_0 - h)/g} \right)$.

2. Давление паров $p = Mg/S$, где S — сечение сосуда, постоянно, следовательно, постоянна и температура T . При подведении к нагревателю мощности P за время Δt испарится масса жидкости $\Delta m = pS\Delta t$, тогда $P\Delta t = \lambda\Delta m = \lambda pS\Delta t$, где p — плотность пара, которую найдем из уравнения Клапейрона—Менделеева. $p = pM/(RT)$. Таким образом, для мощности получаем

$$P = MgM\lambda v/(RT).$$

3. Введем обозначения: F_k — сила трения между кубом и плоскостью, F_c — между цилиндром и плоскостью, F_{kc} — между кубом и цилиндром и N_k, N_c и N — соответствующие силы реакции. Тогда $F_k = \mu N_k, F_c = \mu N_c$ и $F_{kc} = \mu N$. Если a — ускорение системы, то уравнения второго закона Ньютона для каждого из тел имеют следующий вид: $Ma = F - \mu N_k - N$ для куба по горизонтальной оси X , $Ma = N - \mu N_c$ для цилиндра по X , $N_k = Mg - \mu N$ для куба по вертикальной оси Y и $N_c = Mg + \mu N$ для цилиндра по Y . Цилиндр движется, не вращаясь, если момент сил, действующих на него, равен нулю. Этими силами являются F_c и F_{kc} . Их равенство, поскольку плечи этих сил одинаковы (они равны радиусу цилиндра), дает равенство сил N_c и N . Таким образом, $Ma = N(1 - \mu)$ и $Mg = N(1 - \mu)$, откуда $a = g$ и $N = Mg/(1 - \mu)$. Следовательно, на уравнениях, описывающих движение куба, получаем

$$F = Ma + \mu N_k + N = 2Mg(1 + \mu)$$

4. Светящая разогретая лампочка при температуре спирали $T_0 \approx 3 \cdot 10^2$ К, напряжении сети $U = 220$ В и сопротивлении R_0 потребляет мощность $P_0 = U^2/R_0$. Если, например, $P_0 = 100$ Вт, то $R_0 = 48,4$ Ом. В холодном состоянии при комнатной температуре $T \approx 300$ К мощность $P = U^2/R$. Для металлов в диапазоне температур 300 К — 3000 К зависимость сопротивления от температуры приближенно можно считать линейной: $R/T = R_0/T_0$. Тогда $P/P_0 = R_0/R = T_0/T \approx 3 \cdot 10^2/3 \cdot 10^3 = 10$. Таким образом, $R = R_0T/T_0 \approx 5$ Ом и $P = P_0T_0/T \approx 1$ кВт

5. Линза создает на экране изображение тени, возникающей на матовом стекле. По мере приближения к нему резкость (сфокусированность) падает вплоть до исчезновения в соответствии с формулой линзы $\frac{1}{l-f} + \frac{1}{f} = \frac{1}{l}$, где l — расстояние между матовым стеклом и экраном, а f — между линзой и экраном.

Вариант 3

1. $\alpha = \arctg n^2$.

2. После удаления груза равновесие нарушится, поршень с меньшим сечением провалится до дна, а поршень с большим сечением поднимется на исходную высоту

$$H = h_0(1 + m/M)(1 + S_1/S_2).$$

3. Из закона сохранения импульса находим скорость центра масс системы после неупругого удара

$$(M + m)v_0 = 2(M + m)v. \quad v = v_0/2$$

Перейдя в систему отсчета, где центр масс покоится, из этого же закона находим скорость слипшихся тел в отдельности. В этой системе большая и малая массы M и m движутся навстречу друг другу до удара со скоростью $v_0/2$ каждая, а после удара они имеют скорость v_1 :

$$(M - m)v_0/2 = (M + m)v_1, \quad v_1 = \frac{M - m}{M + m} \frac{v_0}{2}.$$

Скорость v_1 — это линейная скорость вращения двух слипшихся тел, массой $M + m$ каждое, вокруг общего центра, находящегося посередине между ними, т.е. из расстояния $l/2$ от каждого. Таким образом, в невесомом стержне возникает

сила натяжения

$$T = \frac{(m + M)v_1^2}{l/2} = \frac{(M - m)^2}{M + m} \frac{v_0^2}{2l}$$

4. При сжатии гладкой косточки с силой F совершается работа $A \sim Fh$, где h — толщина косточки. Эта работа идет на разгон косточки, которая приобретает кинетическую энергию $mv^2/2 \sim Fh$, где m — масса косточки. Для максимального расстояния при вылете под углом 45° получаем $l \sim v^2/g \sim 2Fh/(mg)$. Положим $m \sim 5$ г, $g = 10$ м/с², $F \sim 10$ Н, $h \sim 5$ мм, тогда

$$l \sim \frac{2Fh}{mg} \sim 2 \text{ м.}$$

5. При соединении конденсаторов различных емкостей первый раз незаряженный конденсатор получает меньший заряд, чем остался на зарядке. Поэтому при втором подключении, когда соединяются обкладки с зарядами противоположных знаков, на происходит компенсации зарядов. И при третьем, и при всех последующих соединениях наблюдается перетекание зарядов, сопровождающееся искрой и характерным щелчком. При соединении же одинаковых конденсаторов, один из которых заряжен, заряды на них выравниваются. При втором соединении после «переворачивания» происходит полная компенсация зарядов, и далее никаких электрических эффектов наблюдаться не должно.

ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ НЕФТИ И ГАЗА ИМ. И. М. ГУБКИНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -2. 2. -13. 3. 3. 4. 13. 5. -4. 6. 49. 7. -0,8. 8. -45. 9. 0,3. 10. 11. 11. 0,2. 12. 1.

Вариант 2

1. -2,7. 2. 3. 3. 6,2. 4. -4. 5. 4. 6. 1. 7. -3. 8. 10. 9. 6. 10. 34. 11. 0,16. 12. 3024.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 2. 2. 30 Н. 3. 1500 Н. 4. 750 Дж. 5. 30 нФ. 6. 5 В. 7. 9. 8. 85 см. 9. 4 м/с². 10. 19. 11. 102 кПа. 12. 4 Ом.

Вариант 2

1. 700 г. 2. 120 Дж. 3. 350 мН. 4. 270 см³. 5. 8 м/с². 6. 15 Ом. 7. 6 мм. 8. 40 см. 9. 2 м. 10. 3. 11. 42%. 12. 25 мм.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 10. 2. 2. 3. -0,5. 4. -0,5. 5. -1. 6. 0. 7. -3. -6. 8. 35. 9. 6. 10. 15.

Вариант 2

1. -2. 3. 8. 3. -0,75. 4. 0,5. 5. -1. 6. 1. 7. 2. 8. 75. 9. а) 4; б) 2. Решение. Построим схематически эскиз графика (рис. 8) указанной в условии функции $g(x) = \sin f(x)$.

Для подтверждения того, что на графике верно изображено взаимное расположение значений функции $g(x)$, требуется

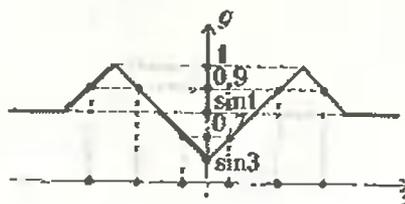


Рис. 8

обоснование.

$$\sin 1 > \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2 > 0,7; \sin 1 < \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2 < 0,9;$$

$$\sin 3 = \sin(\pi - 3) < \sin 0,15 < 0,15 < 0,7.$$

Следовательно, первое уравнение имеет 4 решения, второе уравнение имеет 2 решения.

10. 1.

Вариант 3

Номера верных ответов: 2; 5; 2; 3; 4; 4; 2; 3; 3; 2; 3; 2; 4; 1; 4; 2; 4; 5; 2; 1.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-\frac{3}{4}$. 2. 3. 3. $(-\infty; 0)$. 4. 12π . 5. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 6. (4; 1).
7. -5. 8. Вторая в 5/4 раза быстрее. 9. $\sqrt{14}$. 10. $a = 0,25$,
 $a \leq -0,25$. 11. $4\pi - 8$.

Вариант 2

1. 1; -3. 2. 1,5. 3. $\frac{8}{3}$. 4. $(0; \frac{3}{2})$. 5. 2. 6. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$. 7. 28.
8. $f_{\max} = -1$; $f_{\min} = -6$. 9. $\sqrt{13}$. 10. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 11. $0 > a > -\frac{2}{3}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $T = 2\pi A/V_m \approx 0,63$ с, $v_m = V_m/(LD - 1) \approx 0,67$ м/с.
2. $s_2 = \frac{v_2^2}{2(g \sin^2 \alpha + (v_1^2 \cos \alpha)/(2s_1))} \approx 21$ м.
3. $Q_1/Q_2 = 5/2$. 4. $\alpha = \arctg \left(\frac{kg^2}{mgd^2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) \right) \approx 45^\circ$.
5. $\epsilon = U_1 U_2 / (2U_2 - U_1) \approx 6,7$ В. 6. $v = h/(\pi \lambda) \approx 3,3$ м/с.

Вариант 2

1. $v_0 = \frac{L}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h + L \tan \alpha)}} \approx 11,3$ м/с.
2. $\mu = ((n-1)/(n+1)) \tan \alpha \approx 0,34$.
3. $m_4 = \frac{m_2 + c m_2 (\ell_2 - \ell_1)}{\lambda + c(\ell_3 - \ell_1)} \approx 200$ г.
4. $A = qE \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \approx 1A \cdot 10^{-3}$ Дж.
5. $q = (Ba^2 \sin \alpha)/R = 10^{-3}$ Кл.
6. $L = (d - v\ell)F/(F - d + v\ell) = 0,2$ м.

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $f(x) = 3x^2$ при $x > 0$, $x \neq \frac{1}{3}$; $f'(\frac{1}{6}) = 1$, $f'(6) = 36$.
2. $\{(0; 2; 0); (1; 3; 1)\}$. 3. За 10 дней. 4. $a \in [-1, -\frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.
5. $(2\sqrt{61} + 10)$ см или $(20 + 2\sqrt{10})$ см.

Вариант 2

1. 2a при $a > 0$, $x^3 + 3\sqrt{3}x = 2a$. 2. $a \in (\frac{19}{5}, \frac{23}{6}] \cup (\frac{23}{6}, +\infty)$.
3. 83 или 38. 4. $\{\frac{\pi}{8}\}$. 5. $\frac{54\pi^2}{9\pi^2 - 1}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

2. Увеличится

3. $p_1 = (p(V_1 + V_2) - p_2 V_2)/V_1 = 5 \cdot 10^2$ Па.

4. $q = \frac{mg \cos \alpha}{E} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{T^2 - (mg)^2}{(mg \cos \alpha)^2}} \right)$.

5. $Q = \frac{C_1 C_2 \delta^2}{2(C_1 + C_2)}$.

Вариант 2

2. Перпендикулярная перемещению.

3. $m = 4\pi^2 M \rho / (3RT) = 0,0121$ кг.

4. $\alpha = \Delta R S^2 \cos \rho / (\rho \Delta U) = 0,0375$ град $^{-1}$.

5. $P_2 = I_2 (P_1/I_1 + I_1 \tau - I_1 \rho) = 11,16$ Вт.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А. И. ГЕРЦЕНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $x \in (-\infty; -2) \cup \{-1\} \cup [1; +\infty)$; б) $g(x) = (x+1)^2$ (рис 9), а) графики функций пересекаются в точке (1, 0).
2. $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/6$, $x_3 = \pi/2$.
 $x_4 = 5\pi/6$, $x_5 = \pi$.
3. $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.
4. $2\sqrt{2\sqrt{3} + 3}$ 5. $a^3/8$.

Вариант 2

1. а) -3; б) $x \in (\log_2 3/2; 1]$, в) если $a \leq 3$, то уравнение решений не имеет; если $a > 3$, то уравнение имеет одно решение.
2. $\cos 8 > \cos 2$. 3. 5 т. 4. 6; $2\sqrt{3}$.
5. 6V.

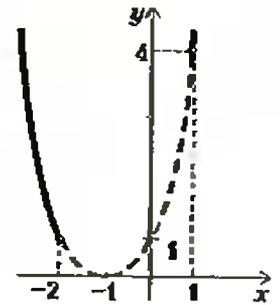


Рис. 9

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -a. 2. 18. 3. 3/4. 4. 5/2. 5. $\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 6. $-\tan \alpha$. 7. 1.
8. 1. 9. $\pi(4n+1)/8$, $\pi(4k+3)/4$, $n, k \in \mathbb{Z}$. 10. 1/2
11. $\{2, (5 - \sqrt{2})/2\}$. 12. $(0, +\infty)$. 13. $[-2, -1] \cup \{0\}$. 14. $(3/2, 3)$.
15. 1/2. 16. $-\pi/4$. 17. $(-3, 0) \cup (0, 1)$. 18. $8/\sqrt{5}$. 19. $(208/9)\pi$.
20. $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

Вариант 2

1. $1/\sqrt{ab}$. 2. 0. 3. 12. 4. $b > a$. 5. 0. 8. 3/2. 7. 1. 3. π .
9. $\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 10. 6. 11. $(-1/3, +\infty)$.
12. $(-\infty, 0) \cup (0, \log_2 2]$. 13. $[-2, 0) \cup (0, 2]$. 14. $(2, -1)$. 15. 9/4.
16. 14. 17. $(0, -1)$.
18. 3 π . 19. 6. 20. $(-\infty, -1) \cup (-1, 1/2]$.

Вариант 3

1. -a. 2. 2,5 тыс р. 3. 768. 4. -2. 5. Общего вида. 6. $x = \pi/2$.
7. $2\pi n \pm 3\pi/4, n \in \mathbb{Z}$. 8. $[0, 4)$. 9. $[0, \pi/2)$. 10. -1. 11. -8.
12. 2. 13. 7. 14. 1. 15. $[-1/4, 1/2]$. 16. $[0, 1/3]$. 17. 13. $5\sqrt{10}$.
18. 0. $-\pi/2$. 19. $[-2, 1]$. 20. $(-\infty, -1) \cup (0, (\sqrt{5}-1)/2]$.

Вариант 4

1. -1 2. $\sin \alpha$ 3. 18 4. -4 5. 1, (09) 6. $\lambda < 0$ 7. -2 8. 5.
9. $1/\sqrt{3}$ 10. -2 11. -1 12. $\{0, -1\}$ 13. 0 14. $(1/\sqrt{2}, 2)$
15. $((2n+1)/4)^2, n \geq 0$ 16. $[-5/2, 2)$ 17. $(2m+1)\pi/8, m \in \mathbb{Z}$
18. $[0, 2)$ 19. 10, $14/5$ 20. 1, $(1+\sqrt{5})/2$.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ПРИ «КУРЧАТОВСКОМ ИНСТИТУТЕ»

МАТЕМАТИКА

1. $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{3-\sqrt{5}}{8}, \frac{1}{6}\right), (4-2\sqrt{3}, \sqrt{3}-1, \frac{13}{8})$.
2. $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right], x = \frac{\pi}{3}, x = \pi$.
3. $AB = \frac{3\sqrt{3}}{2a}, S = \frac{9\sqrt{2}}{8a^2}, x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}(1+2a)}{a}$.
 $x_0 \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$
4. $\frac{AP}{PA_1} = \frac{17}{15}$ 5. $\frac{V_{SBO_1O_2}}{V_{SABC}} = \frac{1}{3-p^2}$ 7. $2n+1$.

ФИЗИКА

1. $F = (M+m)(\mu + \operatorname{tg} \alpha)g$.
2. а) $T_1 = T_0 \left(1 + \frac{Q_1}{4p_0 V_0}\right), Q_2 = \frac{5}{8} Q_1$;
б) $T_1 = T_0 \left(1 + \frac{2Q_1}{p_0(3V_1 + 5V_2)}\right), Q_2 = Q_1 \frac{5V_2}{3V_1 + 5V_2}$.
3. а) $q = \frac{2\epsilon_0 \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} CU$;
б) $F_1 = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \epsilon_1 S}, F_2 = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}, p = \frac{F_2 - F_1}{S} = \frac{q^2(\epsilon_1 - 1)}{2\epsilon_0 \epsilon_1 S^2}$.
4. а) $T = 2\pi \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{CL_1 L_2}}$;
б) $I_{1m} = U \sqrt{\frac{L_2 C}{L_1(L_1 + L_2)}}, I_{2m} = U \sqrt{\frac{L_1 C}{L_2(L_1 + L_2)}}$.

5. Интерференционная картина будет двигаться равномерно вниз со скоростью $v = \alpha k \Delta h / \lambda$.

МНОГОЧЛЕНЫ ДЕЛЕНИЯ КРУГА

(см. «Квант» №1)

1. Если $x^2 + x + 1 = (ax + b)(cx + d)$, то $ac = 1, bd = 1$, откуда числа a, b, c, d могут быть равными только ± 1 . Без ограничения общности можно считать $a = 1, c = 1$. Дальнейшее очевидно.
Впрочем, можно рассуждать и проще: квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ не имеет корней.
5. $\Phi_{20}(x) = (x^{10} + 1)/(x^2 + 1) = x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1, \Phi_{30}(x) = -x^9 + x^7 - x^5 + x^3 - x + 1, \Phi_{60}(x) = -(x^{30} - x^{10} + 1)/(x^4 - x^2 + 1) = -x^{26} + x^{24} - x^{22} + x^{20} - x^{18} + x^{16} - x^{14} + x^{12} - x^{10} + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$.
8. б) $\Phi_{p^2} = \frac{(x^{p^2} - 1)(x^p - 1)(x^2 - 1)(x^2 - 1)}{(x - 1)(x^p - 1)(x^p - 1)(x^p - 1)}$.
7. б) $x^{2n} - 1 = (x^n - 1)(x^n + 1)$. Первый множитель есть произведение Φ_k , где $n : k$. Значит, $x^n + 1 = \prod_{n:k} \Phi_{2k}(x)$. Заменяя в

последней формуле x на $-x$, получим: $(-x)^n + 1 =$

$-\prod_{n:k} \Phi_{2k}(-x)$. Поскольку $\Phi_{2k}(-x) = -x + 1 = -\Phi_1(x)$ и поскольку для всех делителей k числа n , отличных от 1 и n , можно считать уже доказанной формулу $\Phi_{2k}(x) = \Phi_1(-x)$, получаем по индукции, что $\Phi_{2^n} = \Phi_1(-x)$.
8. По формуле (2), $x^{2p} - 1$ есть произведение множителей $\Phi_1, \Phi_p, \Phi_2, \Phi_{2p}, \Phi_4, \Phi_{4p}, \dots$, а многочлен $x^{2p} - 1$ разлагается на множители $\Phi_1, \Phi_p, \Phi_2, \Phi_{2p}$. Выбрав использовавшись формулой $x^{2p} - 1 = (x^{2p} - 1)(x^{2p} + 1)$, получаем равенство $x^{2p} + 1 = \Phi_1(x)\Phi_p(x)$. Поскольку $\Phi_1(x) = x^2 + 1$, окончательно $\Phi_{2p} = (x^{2p} + 1)/(x^2 + 1) = \Phi_p(-x^2)$.
9. б) При $p = 2$ полином $f_2(x^2) = x^2 + 1$ неприводим. При $p > 2$ имеем $f_p(x^2) = \frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^p - 1}{x - 1} \frac{x^p + 1}{x + 1} = f_p(x)f_p(-x)$, где оба множителя неприводимы.

10. а) 1 - a, 2 - b, 3 - c, 4 - d, 6 - e, 8 - f, 12 - g, 24 - h.
в) $n, \text{НОД}(k, n)$.
12. а) Если $x^3 = 1$, то $x^3 + x + 1 = x^3 + x + 1$. Значит, корни многочлена $x^3 + x + 1$ являются и корнями многочлена $x^3 + x + 1$. Поделив, получим разложение $x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$ на неприводимые множители. (Если бы многочлен третьей степени $x^3 - x^2 + 1$ был разложим, то он имел бы рациональный корень. Как показано в Приложении, этот корень был бы равен 1 или -1.)
в) Без ограничения общности можно считать $m \equiv 2 \pmod{3}, n \equiv 1 \pmod{3}$. Имеем
 $x^n + x^n + 1 = (x^n - x^3) + (x^n - x) + x^3 + x + 1 =$
 $-x^2(x^{n-2} - 1) + x(x^{n-1} - 1) + x^3 + x + 1.$

Многочлены в скобках делятся на $x^3 - 1 = (x^3 + x + 1)(x - 1)$.

14. а) $\cos 72^\circ = (\sqrt{5} - 1)/4$;

б) $\sin 72^\circ = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/4$

16. а) $n = 3k \pm 1$. Многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$ в том и только том случае, когда решения уравнения $x^2 + x + 1 = 0$ удовлетворяют уравнению $x^{2n} + x^n + 1 = 0$.

Первое из этих уравнений равносильно тому, что $x + \frac{1}{x} = -1$, или $x + \frac{1}{x} = 2\cos 120^\circ$

В силу упражнения 15, $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$. Осталось выяснить, при каких n величина $(\cos 120^\circ)^n = -1/2$.

Аналитично, можно использовать результат упражнения 15 в решении любого из пунктов задач 16 и 17.

б) $n = 6k \pm 2$ в) $n = 12k \pm 4$. Если $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^4 - x^3 + 1$, то, заменив x на $-x$, видим, что $x^{2n} + (-x)^n + 1$ делится на $x^n - x^2 + 1$ (последний многочлен не изменялся!). При нечетном n сразу получаем противоречие: если $x^{2n} + x^n + 1$ и $x^{2n} - x^2 + 1$ делятся на $x^4 - x^2 + 1$, то $2x^n$ делится на $x^4 - x^2 + 1$, что неверно.

При четном $n = 2m$ заменой $y = x^2$ сводим дело к пункту б).

г) $n = 6k \pm 2$. Воспользуемся разложением $x^4 + x^3 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

17. а) Таких n не существует. Если $x^2 + x + 1 = 0$, то $x^3 = 1$. При $n = 3k$ имеем, $x^{2n} - x^n + 1 = (x^3)^{2k} - (x^3)^k + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$. При $n = 3k + 1$, аналогично, $x^{2n} - x^n + 1 = x^{6k+2} - x^{3k+1} + 1 = x^3 - x + 1 \neq x^3 + x + 1 = 0$. Так же разбирается случай $n = 3k + 2$.

б) $n = 6k \pm 1$
в) $n = 12k \pm 2$. Аналогично решению упражнения 16, в), вос-

пять, увеличилось значение x на $-x$. Докажите, что в случае Дартс вышесказанная замена $y = x^2$ не приводит к результатам (пункт б).

г) Таких n не существует.

24. Обозначим $a = b_2$, $b = a_2$, $c = b_1$, $d = a_1$. Так как $a - b = c - d$, $ab = cd = 0$, то $(a-b)^2 + 4ab = (c-d)^2 + 4cd$. Значит, $(a+b)^2 = (c+d)^2$, $a+b = c+d$. Учитывая равенство $a-b = c-d$, получим $a = c$, $b = d$, т.е. $b_i = a_{i+1}$, $a_i = b_{i+1}$. Но мы предположили, что хотя бы одно из пяти данных двух равенств не выполнено.

28. Точки, расположенные у правого конца рассматриваемого короткого отрезка, не могут быть, подобно ли сдвигами само это отрезка (или наоборот), следовательно не могут быть меньше k , ни сдвигами шпалкой ближе левого конца отрезка (поскольку он выдвигался бы на k -длину короткого отрезка).

33. Если $f(x) = (k_1 x^4 + k_2 x^3 + \dots + k_{n-1} x + k_n)(r_1 x^m + r_2 x^{m-1} + \dots + r_{m-1} x + r_m)$, то $k_i, r_i = a_i$. Значит, одно из чисел k_i, r_i должно делиться на p , а другое — не должно. Пусть k_i делится на p , r_i — не делится. Рассмотрим по очереди выражения для коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_k . Докажите, что все числа k_1, k_2, \dots, k_n делятся на p . Значит, что если k_i делится на p , то и r_i делится на p .

35. При составных a приведем уже $f_0(x)$. Рассмотрим $f_0(x^2)$, где b делится на простое число $q \neq p$. Так как $f_0(x) = f_0(x)/f_0(x^2)$, то $f_0(x^2)$ делится на $f_0(x)$. Значит, $f_0(x)$ и $f_0(x^2)$.

А все многочлены вида $f_0(x^{2^k}) = \Phi_{p, 2^k}(x)$, где p — простое, а $k \geq 0$, неприводимы по признаку Эйзенштейна.

39. $\Phi_{15}(2) = 151$ — простое число. Если бы Φ_{15} был разложен на множители, то, в силу предыдущих упражнений, оба значения множителей в точке $x = 2$ были бы больше 1.

40. Если $P(x)$ — один из неприводимых делителей многочлена $f(x^2)$, то $f(x^2)$ делится на $P(-x)$. Если $P(x) = P(-x)$, то нечетных степеней x в многочлене $P(x)$ нет, так что $P(x) = q(x^2)$, откуда $f(x)$ делится на $q(x)$. Вспомнив, что f неприводим, получаем $f(x) = \pm q(x)$, или $f(x) = \pm P(x)$.

Если $P(x) = -P(-x)$, то $P(0) = 0$, т.е. $P(x)$ делится на x , откуда $f(x)$ делится на x , т.е. $f(x) = \pm x$.

Осталось разобрать случай, когда $P(-x) \neq \pm P(x)$. Тогда $P(x)$ и $P(-x)$ — неприводимые делители многочлена $f(x^2)$.

при этом $f(x^2)$ делится на $P(x)P(-x)$. Ясно, что $P(x)P(-x) = q(x^2)$ — многочлен от x^2 , откуда следует, что $f(x)$ делится на $q(x)$, т.е. $f(x) = \pm q(x)$. Получим $f(x^2) = \pm P(x)P(-x)$.

Если степень многочлена f нечетна, то так в разложении $f(x^2) = \pm P(x)P(-x)$ непременно должен быть старший коэффициент многочлена f .

41. а) Первый шаг. Из упражнения 40 следует, что Φ_{25} разлагается не более чем на два неприводимых множителя $\Phi_{25}(x) = P(x)Q(x)$, где старшие коэффициенты многочленов P и Q можно считать равными 1. Далее $\Phi_{25}(2) = 5 \cdot 41$ и $\Phi_{25}(3) = 5 \cdot 1181$ — произведения простых чисел. Но оба многочлена P и Q вырастают при $x \geq 1$.

Второй шаг. Говорим, все члены множителей P и Q должны быть равны ± 1 . Если свободный член многочлена $P(x)$ равен -1 , то полином имеет вещественный корень, что неверно. Значит, свободные члены равны 1, откуда $P(3) = 1(\bmod 3)$ и $Q(3) = 1(\bmod 3)$. Это противоречит разложению $\Phi_{25}(3) = 5 \cdot 1181$, поскольку $5 \not\equiv 1(\bmod 3)$.

Третий шаг. Пусть $\Phi_{25}(x) = P(x)P(-x)$. В этом случае должно быть $\Phi_{25}(\sqrt{2}) = A^2 + 2B^2$, где A и B — целые числа.

Но число $\Phi_{25}(\sqrt{2}) = 31$ не представимо в виде суммы $A^2 + 2B^2$.

б) Первый шаг. $\Phi_{60}(3) = 47 \cdot 73 \cdot 361$ — произведение чисел $47, 73, 361$. Пусть

$$\Phi_{60}(x) = (x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d)(x^4 + \dots) \times (x^6 - ax^5 + bx^4 - cx^3 + dx^2 - \dots)$$

Положим $x = \sqrt{2}$. Тогда $\Phi_{60}(\sqrt{2}) = 151$ будет представлено в виде произведения сопряженных чисел:

$$151 = (A + B\sqrt{2})(A - B\sqrt{2}) = A^2 - 2B^2$$

где A, B — целые числа. Но 151 не может быть в таком виде (проверьте!).

ВНИМАНИЕ!

Информацию о «Кванте» (и других образовательных и научно-популярных журналах) можно найти в ИНТЕРНЕТЕ, а именно в интернет-журнале «Курьер образования».

Адреса.

<http://io.iph.ras.ru>

http://ss1000.infoart.ru/misc/edu_cour

<http://www.riph.net/infomag>

<ftp://io.iph.ras.ru>

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардашев, С.П.Коновалов
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.Н.Балдин, В.А.Власов, Д.Н.Гришукова,
В.А.Иванюк, М.М.Константинов, А.Е.Падурерия,
П.И.Чернуский, С.Б.Шехов

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симаков

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати
Reg. он-во №0110473

Адрес редакции

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А «Квант»,
тел: 930-56-40

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чехосском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г. Чехов Московской области
Заказ № 2739

ФОКУСЫ О.БЕНДЕРА

В конце прошлого года исполнилось, как вы помните, 100 лет со дня рождения замечательного писателя Ильи Ильфа, одного из авторов любимого всеми романа «Двенадцать стульев». Этот роман, написанный Ильфом совместно с Евгением Петровым, посвящен похождениям знаменитого гротескмейстера О.Бендера. Кстати, в «Записных книжках» Ильфа есть одно замечательное изречение, с которым согласится любой из читателей нашей странички:

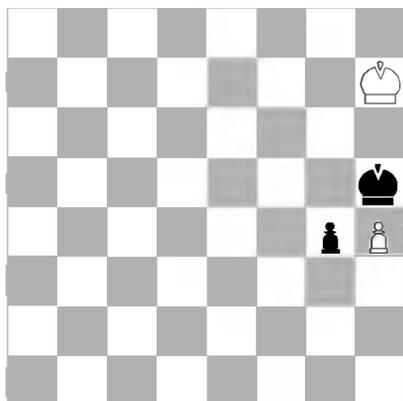
Тот не шахматист, кто, проиграв партию, не заявляет, что у него было выигрышное положение.

Не правда ли, Илья Ильф тонко чувствовал психологию шахматного игрока?!

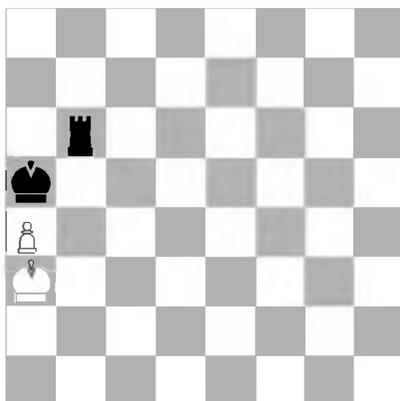
Кстати, в 1997 году состоялся еще один юбилей — исполнилось семьдесят лет со дня проведения легендарного сеанса одновременной игры великим комбинатором Остапом Ибрагимовичем Бендером. Цитируем:

-
- 22 июня 1927 г.
- В помещении клуба «Картонажник»
- состоится лекция на тему:
- «Плодотворная дебютная идея»
- и сеанс одновременной игры в шахматы
- на 160 досках гроссмейстера (старший мастер) О.Бендера.
- Все приходят со своими досками.
- Плата за игру — 50 коп.
- Плата за вход — 20 коп.
- Начало ровно в 6 час. вечера.
- Администрация К.Михельсон
-

На вечер, посвященный юбилею, из

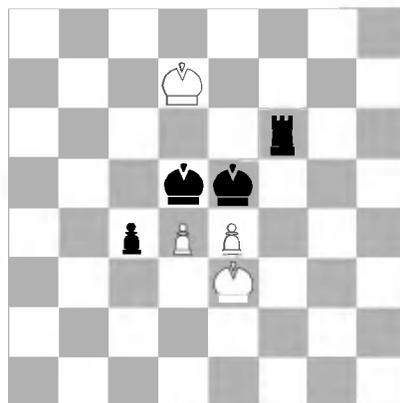


Рио-де-Жанейро в Москву собственной персоной прибыл неуязвимый Остап Бендер. Попутно он наведлся и в шахматный клуб, чтобы провести второй в своей жизни сеанс одновре-



менной игры. Принять участие в нем посчастливилось и ведущему «Шахматной странички».

Хотя я, очевидно, был целиком погружен в собственную партию, все же краем глаза замечал и то, что происходит по соседству. Гроссмейстер, как и положено, всюду руководил белыми фигурами, и тут я обратил внимание,



что его положение на двух досках слева от меня оставляет желать лучшего...

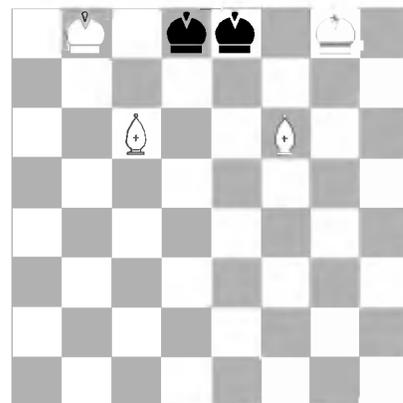
И тем не менее, Бендеру удалось взять верх, причем даже не прикоснувшись к фигурам. Бесспорно, это была лучшая комбинация в его шахматной карьере. Остап Ибрагимович подошел к столикам, едва взглянул на доски и легко, не уронив ни единой фигуры, сдвинул их вместе.

Картина была впечатляющая. Оба черных короля, только что пребывавшие в полной безопасности, неожиданно очутились в матовой сети. Да, это была победа в стиле О.Бендера!

Покачав головой от изумления, я взглянул на две доски справа от меня.

Там тоже происходили загадочные события. Похоже, впервые в жизни, не выходя за рамки уголовного, пардон, шахматного кодекса, О.Бендер сумел свести дело к ничьей, причем сразу в двух партиях.

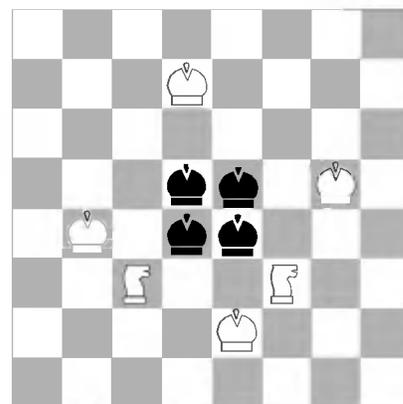
Однако великий комбинатор не удовлетворился достигнутым. Он применил отработанный прием манипулирования досками, и оба черных короля к немалому удивлению окружающих



мгновенно оказались в плену.

Я был совершенно потрясен, однако главные события, как ни странно, ждали впереди.

Сеанс шел к завершению, оставалось всего четыре партии, причем в каждой из них на доске стояла, как говорят в таких случаях, мертвая ничья. Но Остап Бендер одним махом сложил все четыре доски вместе и добился убедительных побед, заматывая неприятельских королей во всех четырех безнадежно ничейных позициях. Вот окончательное положение в



этих четырех встречах.

Под гром рукоплесканий великий комбинатор покинул помещение.

Е.Гук