

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

МАЙ/ИЮНЬ · 1998 · №3

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР  
Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА  
С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
Н.Б.Васильев, А.Н.Виленкин,  
С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин,  
В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.Р.Зильберман,  
С.С.Кротов

(директор «Бюро Квантум»),

А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
В.В.Можаев,

Н.Х.Розов, А.П.Савин,

Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,  
А.И.Чернуцан

(заместитель главного редактора),

И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд,  
М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов,  
Г.Л.Коткин,  
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,  
А.И.Шапиро

Бюро Квантум

©1997, Президиум РАН,  
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Аэродинамический парадокс спутника. *А.Митрофанов*  
7 О квантовой природе теплоты. *В.Митюгов*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

- 10 Павел Самуилович Урысон. *В.Тихомиров, В.Успенский*  
В «Архимедесу» — 25 лет. *А.Егоров*

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 16 Пьер и Мария Кюри — у истоков открытия радиоактивности.  
*А.Васильев*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 18 Задачи М1636—М1645, Ф1643—Ф1652  
20 Решения задач М1616—М1620, Ф1628—Ф1637

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 29 Задачи  
30 Разумно или логично? *И.Григорьева*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Оптические построения

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 34 Маятник с несколькими грузиками. *П.Хаджи, А.Михайленко*  
35 Еще один вечный двигатель? *А.Стасенко*  
37 Закон электромагнитной индукции или «правило потока»?  
*М.Лившиц*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 39 Поле заряженной плоскости. *Д.Александров*

## ИНФОРМАЦИЯ

- 40 Заочная физическая школа при МГУ

## ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

- 41 Отгадать слово. *Е.Гик*

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 45 Эти блуждающие токи. *Н.Паравян*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 47 Уравнения, которые «не решаются». *А.Ярский*  
50 Фазовые переходы в задачах по физике. *А.Шеронов*

## ОЛИМПИАДЫ

- 53 VII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»  
55 II Международная астрономическая олимпиада  
57 Московская олимпиада студентов по физике

- 58 Ответы, указания, решения  
Смесь (17, 28)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье В.Митюгова*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Физики на монетах мира*



# Аэродинамический парадокс спутника

А. МИТРОФАНОВ

Неожиданное случается в жизни чаще, чем ожидаемое.

Тит Макций Плавт

Парадоксы – вот единственная правда.

Бернард Шоу

**П**ОПРОБУЕМ ответить на вопрос, может ли тело, двигаясь в среде и испытывая действие силы со стороны среды, увеличить свою скорость. На первый взгляд, такое событие кажется не более правдоподобным, чем известное предложение барона Мюнхгаузена тащить себя за волосы. Казалось бы, скорость тела в среде должна только уменьшаться, однако не торопитесь с выводами. Такие случаи вполне возможны и в той или иной степени наблюдаются при движении искусственных спутников и метеоритов вокруг планет в разреженной атмосфере. Речь идет об известном аэродинамическом парадоксе спутника – попадая в верхние слои атмосферы, космический аппарат, испытывая торможение в разреженном газе, увеличивает при этом скорость своего движения.

Прежде чем перейти к описанию происходящего на орбите, рассмотрим более простой пример из механики. Пусть небольшое тело закреплено на конце растяжимой упругой нити, пружины, резинового шнура или какого-то другого подвеса и движется с постоянной скоростью в плоскости по окружности. Будем считать, что для подвеса справедлив закон Гука, т.е. сила натяжения пропорциональна удлинению подвеса. Оказывается, если тело каким-либо образом начать тормозить, его движение изменится. В частности, если тело мгновенно остановить, а потом отпустить, то растянутый подвес сообщит телу некоторую скорость в направлении перпендикулярного центра вращения. Максимальную скорость, которую приобретет тело, можно найти из закона сохранения энергии для системы тело – упругий подвес. В случае, когда растяже-

ние подвеса значительно превышает его начальную длину, максимальная конечная скорость тела будет почти равна начальной скорости вращения по окружности.

Наш пример – упрощенная аналогия задачи о торможении спутника в атмосфере: тело – это спутник, а упругий подвес – модель притяжения Земли. Конечно, эта аналогия грубая, так как закон Гука вовсе не описывает гравитационные силы, которые (как и кулоновские силы, действующие между зарядами) обратно пропорциональны квадрату расстояния между телами, а в нашем случае – квадрату радиуса орбиты. Движение спутника в верхних слоях атмосферы планеты происходит сложнее и интереснее, чем движение шарика на резиновом подвесе.

Для изучения эволюции орбиты спутника, движущегося в разреженном газе, нам потребуются некоторые формулы. Рассмотрим движение спутника массой  $m$  по круговой орбите радиусом  $R$  вокруг Земли, масса которой  $M$ . Для высоких орбит, когда притяжение Земли является основной силой, оказывающей влияние на движение спутника, его скорость определяется уравнением

$$v^2 = \frac{GM}{R}, \text{ или } v = v_0 \sqrt{\frac{R_0}{R}}, \quad (1)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,  $R_0$  – радиус Земли, равный примерно 6400 км, а  $v_0 = \sqrt{g_0 R_0}$  – первая космическая скорость спутника, равная 7,9 км/с для нашей планеты ( $g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли).

Сила сопротивления, действующая со стороны разреженного газа на спут-

ник в верхних слоях атмосферы, определяется формулой

$$F_{\text{сопр}} = C_x \frac{\rho v^2}{2} S_x. \quad (2)$$

Здесь  $\rho$  – плотность атмосферы на орбите, которая сильно зависит от высоты полета спутника;  $S_x$  – площадь поперечного сечения спутника, точнее – площадь максимального сечения спутника плоскостью, перпендикулярной вектору скорости  $\vec{v}$  полета спутника относительно среды (или, как говорят, площадь миделя);  $C_x$  – так называемый коэффициент лобового сопротивления, зависящий, вообще говоря, от скорости, но для реальных условий полета спутника на большой высоте его можно считать примерно равным 2. Последнее просто означает, что соударения молекул и атомов с обшивкой спутника неупругие, в результате чего спутнику в единицу времени передается импульс, равный  $\rho v^2$  на единицу площади поперечного сечения. Напомним, что орбитальная скорость спутника во много раз превышает среднюю тепловую скорость молекул и атомов атмосферного газа. (Если бы было иначе, то, как нетрудно догадаться, Земля очень быстро потеряла бы свою атмосферу!) Поэтому собственное движение частиц среды в рассматриваемых примерах при расчетах сил торможения можно не учитывать.

К каким же следствиям приводит наличие разреженного газа (или, как говорят, атмосферного «хвоста») на орбите спутника? Для высоких орбит учет силы сопротивления среды можно рассматривать как малые возмущения, приводящие к небольшим изменениям параметров орбиты.

Плавно тормозясь в разреженном газе, спутник переходит на более низкую орбиту. Но при меньших  $R$ , как следует из формулы (1), скорость орбитального движения спутника должна быть больше, чем на первоначальной более высокой орбите. Получается, что сила сопротивления, направленная против движения, может ускорить спутник в направлении этого же движения! Более того, оказывается (как мы увидим дальше из расчетов), что тангенциальное ускорение, т.е. ускорение вдоль траектории, точно равно силе сопротивления, деленной на массу спутника. Этот интересный факт и называется аэродинамическим парадоксом спутника, к объяснению которого мы сейчас перейдем.

Заметим, что с этой, казалось бы, непростой задачей можно справиться, используя только законы сохранения и проводя элементарные вычисления.

Увеличение скорости спутника при его торможении в верхних слоях атмосферы имеет простую причину. Спутник, теряя первоначальную круговую скорость, попросту говоря, падает в гравитационном поле Земли, приближаясь к ней, так как сила притяжения  $F = GMm/R^2$  становится больше силы  $mv^2/R$ , необходимой для того, чтобы удерживать спутник на прежней орбите. Но падает космический аппарат не отвесно (как кирпич с крыши высокого дома), а по плавной кривой – спирали, виток за витком медленно приближаясь к земной поверхности, причем каждый виток спирали мало отличается от окружности. А в поле тяжести, как мы знаем, при падении тел их скорость увеличивается. Для такого движения космического аппарата уменьшение его потенциальной энергии не только компенсирует работу сил трения на орбите, т.е. сил сопротивления среды, но и служит причиной увеличения его скорости  $v$  и кинетической энергии  $mv^2/2$ . Так что ускоряет падающий спутник земное притяжение, а вовсе не силы трения спутника на орбите. Последние лишь помогают «сбросить» космический аппарат с более высокой орбиты на более низкую. (Вспомните простенький пример с шариком на упругом подвесе, о котором шла речь в начале статьи.)

Обратимся к рисунку 1, где показаны траектория искусственного спутника в разреженной атмосфере и силы, действующие на него. Движение про-

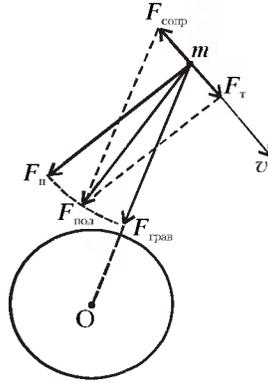


Рис. 1

исходит в плоскости при медленном уменьшении радиуса орбиты, т.е. по плавно закручивающейся к Земле спирали с малым шагом по сравнению с высотой полета спутника  $h = R - R_0$ . Здесь  $\vec{F}_{\text{грав}}$  – сила гравитационного притяжения спутника к Земле,  $\vec{F}_{\text{сопр}}$  – сила сопротивления со стороны атмосферы и  $\vec{F}_{\text{пол}}$  – векторная сумма сил  $\vec{F}_{\text{грав}}$  и  $\vec{F}_{\text{сопр}}$ . Поскольку траекторией движения является спираль, каждый виток которой хотя и мало, но все же отличается от окружности, силу  $\vec{F}_{\text{пол}}$  можно разложить на две составляющие:  $\vec{F}_{\text{н}}$  и  $\vec{F}_{\text{т}}$ , т.е. нормальную и тангенциальную (касательную) к траектории космического аппарата. Сила  $\vec{F}_{\text{т}}$ , действующая вдоль траектории спутника, увеличивает его скорость таким образом, что в данной точке траектории мгновенное ускорение в направлении вектора  $\vec{v}$  равно по модулю  $F_{\text{т}}/m$ . Покажем, что  $F_{\text{т}} = F_{\text{сопр}}$ .

Пусть на некоторой орбите радиусом  $R$  на спутник действует сила торможения  $F_{\text{сопр}}$ , определяемая формулой (2), в которой плотность  $\rho(R)$  на всем витке считается малой и постоянной величиной. Определим увеличение скорости спутника  $\Delta v$  и уменьшение радиуса его орбиты  $\Delta R$  на одном витке полета. Воспользуемся законом сохранения энергии с учетом работы силы сопротивления. Напомним, что потенциальная энергия спутника на орбите равна  $W_1 = -GMm/R = -mv^2$ , кинетическая энергия равна  $W_2 = mv^2/2 = -W_1/2$ , а полная энергия составляет  $W_1 + W_2 = -mv^2/2$ . Запишем баланс полной энергии спутника в начале и в конце витка:

$$-\frac{mv^2}{2} - 2\pi R F_{\text{сопр}} = -\frac{m(v + \Delta v)^2}{2}. \quad (3)$$

Откуда, с учетом условия  $\Delta v \ll v$ , следует

$$\Delta v = \frac{2\pi F_{\text{сопр}} R}{mv} = \frac{2\pi F_{\text{сопр}} \sqrt{R}}{m\sqrt{g}},$$

или

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{2\pi F_{\text{сопр}}}{mg}. \quad (4)$$

Поскольку продолжительность витка составляет  $\Delta t = 2\pi R/v$ , тангенциальное ускорение пролетающего в разреженной атмосфере спутника равно

$$a_{\text{т}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi F_{\text{сопр}} R}{mv} \frac{v}{2\pi R} = \frac{F_{\text{сопр}}}{m}. \quad (5)$$

Отсюда

$$F_{\text{т}} = ma_{\text{т}} = m \frac{F_{\text{сопр}}}{m} = F_{\text{сопр}},$$

что и требовалось установить.

Итак, чем больше сопротивление, которое оказывает разреженный газ на спутник при его движении, тем быстрее увеличивается скорость спутника! (Когда катаешься на санках с горки, такое и не приснится. Кстати, подумайте, почему. Ведь санки и спутник движутся в одном и том же поле гравитации Земли.)

Найдем теперь уменьшение радиуса орбиты  $\Delta R$  на одном витке. Связь между  $\Delta R$  и  $\Delta v$  легко получается из формулы (1):

$$\Delta v = -\frac{v}{2R} \Delta R,$$

а величину  $\Delta v$  мы уже определили. Поэтому получаем

$$\frac{\Delta R}{R} = -\frac{4\pi F_{\text{сопр}}}{mg}. \quad (6)$$

Заметим, что относительное уменьшение высоты полета точно в два раза превышает соответствующее увеличение относительной скорости спутника.

Обратим внимание на формулу (6). Если мысленно развернуть окружность радиусом  $R$  и траекторию спутника на одном витке полета в прямые отрезки  $AB$  и  $AC$  (рис.2), расположив их так, чтобы отрезок  $BC$  был равен по величине  $\Delta R = 4\pi F_{\text{сопр}} R/(mg)$ , то станет ясно, что

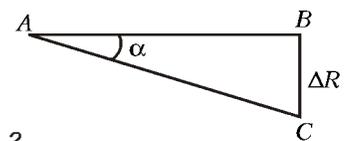


Рис. 2

в разреженной атмосфере в каждой точке орбиты касательная к траектории полета спутника образует с местной горизонталью малый, но отличный от нуля угол

$$\alpha \approx \arctg \frac{4\pi F_{\text{сопр}} R}{mg \cdot 2\pi R} = \frac{2F_{\text{сопр}}}{mg}$$

Угол этот не постоянный, а зависит от силы сопротивления среды и, следовательно, от высоты полета спутника. Чем сильнее тормозится тело, тем больше этот угол. Формально спутник движется как тело, соскальзывающее с наклонной плоскости, причем составляющая силы тяжести вдоль наклонной плоскости равна  $mg \sin \alpha \approx 2F_{\text{сопр}}$ , т.е. удвоенной силе сопротивления среды. Если векторно сложить эту силу с силой сопротивления среды, направленной против движения спутника, то результирующая сила окажется равной по величине  $F_{\text{сопр}}$  и ускоряющей спутник в направлении вперед. Вот вам и объяснение аэродинамического парадокса.

Внимательный читатель, наверное, уже заметил, что аэродинамический парадокс, в том виде, как он был сформулирован, обязан замечательной особенностью, которая есть у гравитационного (и кулоновского) поля, где полная энергия тела равна кинетической, взятой со знаком «минус». К примеру, если бы сила притяжения спутника к Земле зависела от  $R$  как  $1/R^3$ , то в разреженной атмосфере тангенциальное ускорение спутника равнялось бы  $F_{\text{сопр}}/(3m)$ . (Движение спутника в общем случае степенной зависимости силы притяжения от радиуса в разреженной атмосфере рассматривается в упражнении 4.)

Расчеты ускорения спутника были выполнены на основе баланса энергии спутника в гравитационном поле с учетом работы внешней силы сопротивления. Этот же результат можно получить другим путем, не прибегая к закону сохранения энергии, а используя уравнение для скорости изменения момента импульса  $L = mvR$  спутника на круговой орбите:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = M, \quad (7)$$

где  $M = -F_{\text{сопр}} R$  — момент внешней силы (силы сопротивления среды), уменьшающий момент импульса спутника при его торможении в атмосфере

и спуске с высокой орбиты на низкую. Пусть  $\Delta L$  — изменение момента импульса спутника за один виток орбиты. Как и раньше, считаем, что плотность газа на орбите столь мала, что сила  $F_{\text{сопр}}$  приводит к малому возмущению орбиты на одном витке. Имеем:  $\Delta L = mv\Delta R + mR\Delta v$ , откуда из уравнения (7) и выражения  $\Delta v = -v\Delta R/(2R)$ , справедливого в случае ньютоновского поля тяготения, сразу же получаются те же самые результаты для  $\Delta v$ ,  $\Delta R$  и  $a_T$ .

Уравнение моментов (7) позволяет упростить решение многих задач о движении спутника в гравитационном поле с центральной симметрией, потому что в этом случае не надо учитывать момент силы тяжести — вектор этой силы проходит через центры масс спутника и Земли и ее момент равен нулю.

Аэродинамический парадокс спутника и связанные с этим явлением вопросы имеют важное прикладное значение. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1. Плотность атмосферы на больших высотах.**

Наблюдения за торможением спутников позволяют определить профиль плотности атмосферы на таких высотах, куда не могут подняться самолеты и воздушные шары-зонды.

Действительно, если единственная сила, изменяющая момент импульса спутника, — это сила сопротивления  $F_{\text{сопр}} = C_x \rho v^2 S_x / 2$ , где  $\rho = \rho(R)$  — неизвестная функция радиуса орбиты  $R$  или высоты полета  $h = R - R_0$ , то из уравнения моментов (путем несложных математических преобразований, с которыми вы сможете справиться самостоятельно) получаются уравнения для определения функции  $\rho(R)$  по наблюдениям за скоростью уменьшения радиуса орбиты  $dR/dt$  или периода обращения спутника  $dT/dt$  на разных высотах:

$$\rho(R) = -\frac{1}{2C_x v} \frac{dR}{dt}, \quad (8)$$

$$\rho(R) = -\frac{1}{6\pi C_x R} \frac{dT}{dt}, \quad (9)$$

где  $C = C_x S_x / (2m)$  — постоянный множитель, который называют баллистическим коэффициентом спутника (он имеет размерность  $\text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-1}$ ). Формулы (8) и (9) справедливы для

круговых орбит на больших высотах, когда взаимодействие спутника с молекулами газа лишь слегка возмущает орбиту.

До запуска искусственных спутников Земли сведения об атмосфере на больших высотах добывались только на основе астрономических и (какое-то время) с помощью радиолокационных наблюдений за движением метеоритов и метеорокетов. Навигационные возможности спутников, и прежде всего наличие на спутнике радиопередатчика и автономных навигационных приборов, а также использование наземных ЭВМ качественно изменили задачу слежения за параметрами орбиты тела в окрестностях Земли. Благодаря многочисленным наблюдениям за полетами искусственных спутников на разных высотах, вхождением аппаратов в плотные слои атмосферы, сейчас имеется обширная информация о плотности газа верхней атмосферы, ее зависимости от времени года, суток, широты, солнечной активности и т.д.

Очевидно, что эксперименты по определению плотности газа атмосферного «хвоста» планеты удобнее проводить на спутниках шарообразной формы, когда площадь сечения  $S_x$ , и следовательно, баллистический коэффициент  $C$ , не зависит от ориентации спутника. Именно такую форму имели американские спутники-зонды серии «Эксплорер». К тому же, они были сделаны специально пустотелыми, что увеличивало эффективность их торможения в разреженном газе при зондировании земной атмосферы, которое проводилось в широком диапазоне высот — вплоть до 1000 км, где плотность газа меньше  $10^{-13} - 10^{-15} \text{ кг/м}^3$ .

**Пример 2. Последний виток.**

Оценим, на какую высоту  $\Delta h = \Delta R$  снижается спутник в разреженной атмосфере за один виток полета. Пусть спутник имеет массу  $10^3 \text{ кг}$  и площадь миделевого сечения  $1 \text{ м}^2$ , а на высоте 200 км плотность воздуха в среднем составляет  $4 \cdot 10^{-10} \text{ кг/м}^3$ . Из формулы (6) получаем

$$\Delta R = \frac{4\pi \rho v^2 S_x R}{mg} \approx 2 \text{ км}$$

На первый взгляд,  $\Delta R$  вроде бы малая величина, и вектор скорости спутника в каждой точке траектории полета на этой высоте отклоняется от местной горизонтали на ничтожно

малый угол

$$\alpha \approx 2\rho v^2 S_x / (mg) \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ рад} \approx 1''.$$

Однако за сутки спутник совершает более 16 оборотов, и, спускаясь все ниже и ниже, где плотность атмосферы очень резко возрастает, он все круче и круче «зарывается» в атмосферу Земли. На высоте 150 км, где  $\rho \approx 4 \cdot 10^{-9} \text{ кг/м}^3$ , за один виток этот же спутник снизится на 20 км! Еще один-два витка, и спутник попадает в столь плотную воздушную среду, что не может завершить очередной виток и, вместо того чтобы двигаться по спирали, начинает падать почти отвесно, испытывая при этом большие механические нагрузки и тепловой удар. Наступает неминуемый конец его орбитального

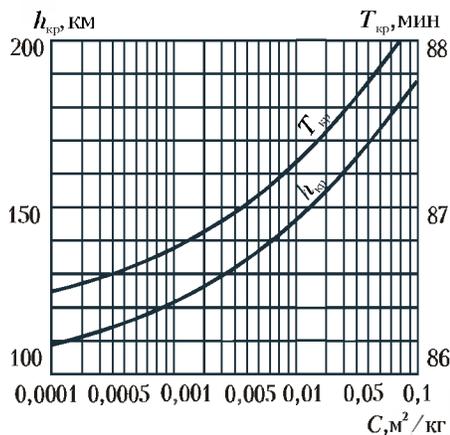


Рис. 3

путешествия. Легкие, пустотелые спутники падают раньше, сходят с орбиты на больших высотах, тяжелым удается вращаться вокруг Земли ближе к ее поверхности.

На рисунке 3 показано, как критическая высота и, соответственно, критическое время обращения спутника вокруг Земли зависят от его баллистического параметра  $C$ . Например, корабль «Восток», на котором летал Юрий Гагарин, имел массу 2,4 т и диаметр 2,3 м, т.е. баллистический коэффициент корабля был равен  $C = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{кг}^{-1}$ . Как видно из графика, критическая высота полета составляет  $h_{кр} \approx 130 \text{ км}$ , а критическое время обращения —  $T_{кр} \approx 86 \text{ мин}$  54 с. Спутник, о котором шла речь выше, имеет примерно такое же отношение  $S_x/m$ , как корабль «Восток», и близкие критические параметры орбиты, в частности — критическая высота полета спутника

составляет около 125 км. Заметим, что для ледяного шарика диаметром 1 см критическая высота превышает 200 км, а для меньших частиц она еще больше! Атмосфера и Земля работают как пылесос, исправно удаляя мелкий космический мусор с околоземных орбит.

И еще одно. Когда спутник, спускаясь, приближается к критической высоте, сила сопротивления среды все еще не так велика по сравнению с силой тяжести спутника. Она примерно во столько же раз меньше нее, во сколько эффективная толщина атмосферы меньше радиуса Земли, умноженного на  $4\pi$  (см. формулу (6)), т.е. составляет примерно десятитысячную часть от силы тяжести. Мало? Но этого уже достаточно, чтобы спутник очень скоро исчез.

**Пример 3. Время жизни спутника в орбитальном полете.**

Протяженный атмосферный «хвост» укорачивает жизнь спутника. Формулы, которые есть в нашей статье, позволяют сделать оценку времени жизни спутника, если известны начальная высота полета и высотный профиль плотности атмосферы. Хотя проведение точных расчетов — достаточно трудоемкая операция, в приближенных оценках можно учитывать, что основное время жизни спутника связано с нахождением его на самых верхних орбитах, где плотность воздуха наименьшая. Результаты оценок зависят от типа спутника, точнее — от его баллистического параметра  $C$ . Не будем здесь рассматривать само решение этой задачи (тем более что один из ее вариантов опубликован в журнале «Квант» №2 за 1996 год в статье «V Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон» — см. задачу 3 по физике), а только приведем в форме таблицы результаты оценочных величин времени жизни обычных исследовательских спутников на орбитах с разными начальными высотами

Высота полета (км)	Время жизни
150	1 сутки
190	2 суток
210	1 неделя
230	1 месяц
400	1 год
500	10 лет
650	100 лет
850	1000 лет
1300	10 тыс. лет
2000	100 тыс. лет

полета:

Эта таблица иллюстрирует, прежде всего, сколь резко убывает плотность воздуха на больших высотах при удалении от земной поверхности. Таблица помогает также ответить на вопрос, почему спутник, на борту которого устанавливается аппаратура, рассчитанная на многолетнюю программу исследований, выводится на орбиту высотой не менее 500 км.

В заключение предлагаем несколько задач и вопросов для самостоятельной работы.

### Упражнения

1. Первые запуски спутников продемонстрировали нечто любопытное. При выводе на орбиту и отделении спутника от последней ступени ракеты-носителя ракета с уже выключенными двигателями обгоняла спутник и вырывалась вперед. Как объяснить это явление? Можно считать, что в момент отделения скорости ракеты и спутника одинаковые.

2. Объясните, почему из-за торможения спутника в верхних слоях атмосферы его первоначально эллиптическая орбита стремится стать круговой.

3. Покажите, что если бы плотность воздуха убывала с высотой по закону  $\rho \sim R^{-1/2}$ , где  $R$  — расстояние от центра планеты, то скорость уменьшения радиуса орбиты спутника была бы постоянной.

4. Спутник вращается по окружности в поле планеты с разреженной атмосферой. Предположим, что сила притяжения к планете подчиняется закону  $F \sim R^{-n}$ , где  $n$  — произвольное положительное число (случай  $n = 2$ , как известно, соответствует ньютоновскому тяготению). При каких  $n$  возможен аэродинамический парадокс спутника?

5. Зависит ли торможение спутника на больших высотах от температуры воздуха?

6. Допустим, что в результате сильного нагрева Земли вся вода в океанах испарилась, а планета покрылась плотной и горячей атмосферой из водяного пара. Как это скажется на движении существующих ныне искусственных спутников Земли и ее естественного спутника Луны?

# О КВАНТОВОЙ ПРИРОДЕ ТЕПЛОТЫ

## КВАНТОВОЙ ПРИРОДЕ ТЕПЛОТЫ

7

В. МИТЮГОВ

**Н**ЕДАВНО попалась мне на глаза олимпиадная школьная задача: «Сконструируйте и продемонстрируйте устройство, которое при хаотическом воздействии движется направленно». Ломать голову в поисках подходящего примера долго не пришлось. Сразу вспомнились летние месяцы послевоенного детства, проводимые мною у родных в деревне. Деревенские ребята научили меня одной занятной затее. Когда куда-нибудь далеко собираешься идти, засунешь под рубашку возле пояса пшеничный колосок и на какое-то время забудешь про него. Потом такие колоски оказываются у кого в руке, у кого на спине или еще где. Причина-то и глупому понятна, но результат был всегда удивителен.

Думаю, примеров «механических выпрямителей», преобразующих в поступательное перемещение энергию хаотических движений, можно придумать немало. На этом же принципе основано и действие приливных электростанций, которые строят в подходящих морских заливах. На приливном подъеме воды залив перекрывают заслонкой типа шлюзных ворот, а по мере отлива гидротурбина дает замечательную даровую элек-

троэнергию. Через половину периода приливной волны все можно сделать наоборот и с тем же результатом.

Но приливы и отливы связаны с видимым движением Луны по небосклону, и в них нет ничего хаотического. А что изменилось бы, если бы мы захотели вместо приливов использовать нерегулярные подъемы и опускания уровня? (Например, ветровые нагоны вод Финского залива — читайте «Медный всадник» А.С. Пушкина.) Разве что пришлось бы обустроить специальную контрольно-измерительную службу, которая давала бы сведения для правильного управления заслонкой.

Действующую модель подобной энергетической установки можно построить на небольшом озере или на речке, где есть подходящие гидрофизические условия, или даже в тазу или в луже. Классическая механика и принадлежащая к ней гидродинамика вообще позволяют широко пользоваться масштабным моделированием, изучая крупное на малых моделях и мелкое на больших. И люди этим пользуются.

Перед тем как строить большой корабль, можно изучить его устойчи-

вость и качку в штормовых условиях на маленькой модели. Насколько маленькой? Важно, чтобы волновые свойства поверхности были вполне подобны природе настоящего шторма. Правда известно, что на малых масштабах структура волны существенно зависит от сил поверхностного натяжения, так что чрезмерно уменьшать модель корабля все же не стоит. В свою очередь, поверхностное натяжение вызвано силами молекулярного сцепления и, следовательно, подчинено квантовым законам.

Попробуем сделать уменьшенную настольную модель большого токарного или карусельного станка. Подобрать нужный электромоторчик, мы прекрасно смоделируем все режимы вращения на холостом ходу. Но если мы попытаемся на этой модели станка обточить модель заготовки, что-нибудь да обязательно не заладится. Зернистая поликристаллическая структура металла не обладает свойством «масштабной инвариантности» — в отличие от законов классической механики. Она сформирована квантовыми законами. Так же и миниатюрный резец модели станка состоит из реального металла и уже поэтому не сможет нужным образом работать.

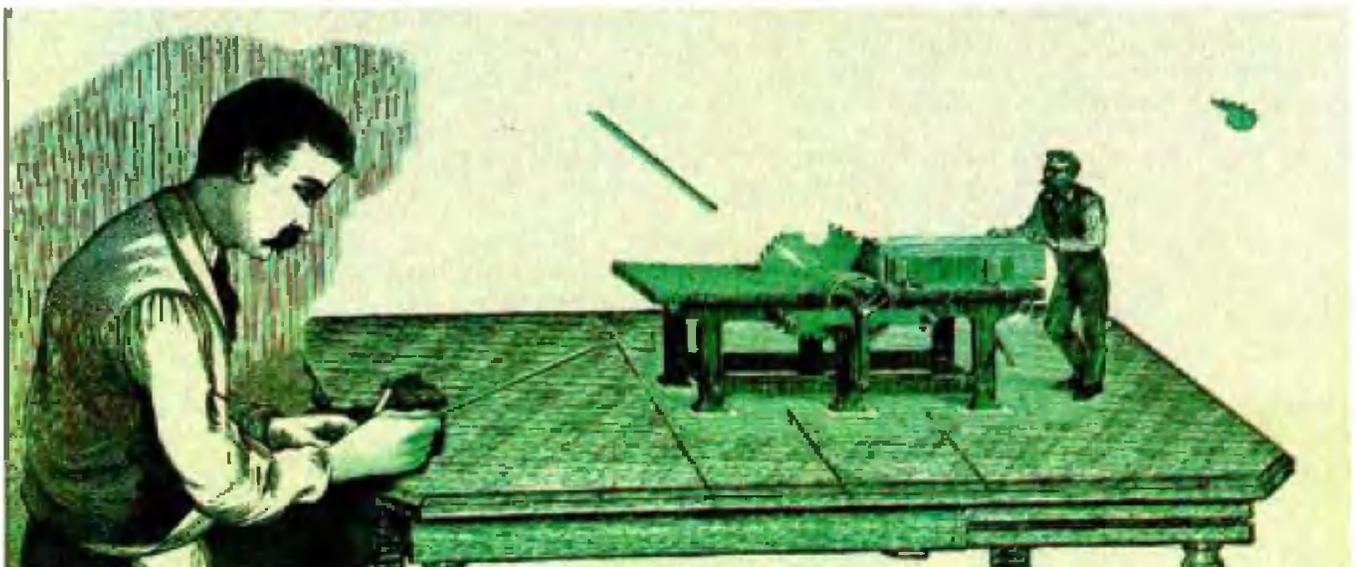


Иллюстрация В. Митюгов

Вернемся к хаотическим движениям. В 1871 году английский физик Дж.К.Максвелл придумал гипотетическое существо, способное в известном смысле «выпрямлять» энергию хаотических движений молекул нагретого газа. Манипулируя крохотной дверцей-заслонкой, это существо смогло бы рассортировать по двум половинкам сосуда быстрые и медленные молекулы. Как бы намекая на неосуществимость этого микроскопического агента физическими средствами, Максвелл назвал его «демоном». Если бы он сам в него верил, то назвал бы контролером, вахтером или кем-то еще в этом роде. Что же интуитивно смущало физика?

Кинетические причины тепла и холода были к тому времени для всех наглядно разъяснены трудами М.В.Ломоносова и Д.Бернулли. Понятная всем картина хаотического поведения корпускул нагретого тела навсегда изгнала из науки специальную субстанцию «флогистон» как носителя теплоты. Лишь язык — весьма консервативная штука — и доселе сохранил выражения типа «перетекание тепла». А квантовой теории тогда еще не было и в помине.

Логическая структура классической механики во многом подобна геометрии — дисциплине сугубо математической. И та и другая обладают упоминавшимся выше свойством масштабной инвариантности. Это означает, что при одновременном и произвольном изменении всех пространственных масштабов и законы движения, и отношения чисто геометрического характера сохраняют свои структуры. Свойства медиан треугольника, теорема Пифагора и тому подобное никак не зависят от масштаба. Так же и упругое столкновение двух малых частиц вполне подобно столкновению больших. Когда Э. Резерфорд сконструировал планетарную модель атома, знакомую сейчас каждому школьнику, сразу же появились литературные фантазии насчет разумных обитателей электронов-планет.

Таким образом, при тогдашнем понимании фундаментальных физических законов ничто, вроде бы, не мешало максвелловскому вахтеру-демоу осуществиться хотя бы в качестве толково придуманного автоматического устройства. Сомнение, по-видимому, было в другом.

Еще в 1824 году Сади Карно сформулировал знаменитую теорему о предельных возможностях преобразования теплоты в полезную механическую работу. А через два с небольшим десятилетия результат Карно был обобщен Р.Клаузиусом и У.Томсоном (лордом Кельвином) и возведен в ранг фундаментального принципа — второго начала (закона) термодинамики. Термодинамика становилась в известном смысле самодостаточной, неплохо аргументированной аксиоматической наукой, как бы независимой от классической механики. Она давала отчетливые и разумные ответы на важные для практики вопросы. Например, можно ли отнять энергию тепловых движений у холодного тела и передать горячему, не затратив при этом работы? Нет. А можно ли получить полезную работу за счет разности температур двух тел? Да.

Стройная система термодинамических представлений хорошо согласовывалась практически со всеми наблюдениями естествоиспытателей: биологическими и химическими метаболизмами, планетарными процессами переизлучения солнечной энергии в холодный космос. Если бы кому-то случилось поставить под сомнение или отменить законы Клаузиуса–Томсона–Карно, то многое в нашем понимании живого и так называемого неживого пришлось бы переосмысливать заново (и еще неизвестно, как).

Действительно, тогда позволительно было бы черпать из океана тепловой энергии буквально все (и обогрев, и прохладу в жаркий день). А по мере использования — пожалуйста — пускай даровая энергия возвращается обратно в свой первородный хаос. Это называлось бы *вечным двигателем второго рода*, отнюдь не нарушающим закон сохранения энергии.

Едва ли Максвелл не осознавал всей глубины последствий от реализации своего антитермодинамического «демона». Вернее будет представлять его рассуждения как формулировку ключевого парадокса, вскрывающего принципиальную логическую дилемму для будущего развития всей системы естественных наук. Первая мыслимая возможность — признать необязательность термодинамических ограничений на произвольное извлечение полезной работы

из теплового хаоса. Если так, то представляется загадочным, почему никакие существа не научились этого делать в ходе миллионлетнего развития. Другая возможность — открытие некоего фундаментального закона движения частиц, принципиально необъяснимого с позиций механики Ньютона. Кроме всего прочего, этот закон требовал бы и нарушения принципа масштабной инвариантности при переходе к описанию тепловых микродвижений.

Теперь пора кое-что вспомнить. Мы умышленно забыли на время про квантовую теорию, чтобы исподволь ощутить настоятельную потребность в ее появлении на сцене. Теперь пора. Не будем здесь углубляться в изложение истории возникновения квантовых идей, хотя сама по себе эта история и увлекательна, и драматична. Иногда полезнее сосредоточить внимание на парадоксах науки, которые подобно волшебным дверцам знаменуют переходы в неведомые прежде миры. Очередная такая дверца на нашем пути — знаменитый парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена.

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц. В классической физике на этой простейшей модели начинают изучение законов сохранения энергии и импульса. Если значения импульсов частиц до столкновения известны, то механика Ньютона позволяет вычислить с полной определенностью и конечные их значения. Задача эта школьная, здесь нет, вроде бы, и намека на возможность какой-то тайны. По крайней мере, пока частицы достаточно крупны и могут быть восприняты как бильярдные шары или что-то в этом роде.

Парадокс возникает при описании такого же столкновения микроскопических частиц методами квантовой теории. И хотя суммарные импульс и энергия по-прежнему в точности сохраняются, каждой из частиц по отдельности оказывается уже невозможным приписать определенные значения импульса и энергии после столкновения. Ситуация действительно кажется парадоксальной. За сотни лет существования классической физики ни разу еще не возникало случая, когда состояния подсистем (частиц) оказывались бы неопределенными при полной физической определенности сложной системы (включающей обе частицы). Подобное труд-

но было даже помыслить. Тем не менее, логическая и математическая структура квантовой теории такую возможность предусматривает.

Множество кажущихся несообразностей с элементарным здравым смыслом появляется, если пытаться обсуждать явления квантового микромира на языке и в образах классической физики. Как об этом неоднократно писал В.Гейзенберг, речь шла о необходимости выработки новой структуры физической интуиции и адекватного ей языка. Это вовсе не означает враждебности образного строя квантовой физики самому человеческому мышлению. Ведь и классическая картина мира не заложена в устройстве наших мозгов — просто мы слишком долго к ней привыкли. Как некая старушка у Ильфа и Петрова не верила в электричество (и только поэтому готовила еду на керосинке), так и современный человек склонен объявить абсурдной физическую ситуацию за пределами знакомой картины столкновения массивных шаров. (Точно так же идея шарообразности Земли овладела умами далеко не сразу.)

Кому-то может показаться, что мы несколько отвлеклись от первоначальной темы. Но собака зарыта именно здесь. Мы добрались до главного — доказательного опровержения принципа масштабной инвариантности при переходе в микромир. Попутно возникла и специфическая, сугубо квантовая неопределенность состояний частиц, при всяком столкновении как бы распыляющая сведения об их предыстории по разнообразным «степеням свободы» открытого мира. Возвращаться к разбору дееспособности пресловутого «демона» на достигнутом теперь новом уровне едва ли стоит — слишком уж наивным представляется сам его замысел, когда идея независимости физических реалий от пространственного масштаба уже разрушена.

Не вдаваясь особенно в детали, эту мысль можно подкрепить анализом размерностей физических величин. Для нарушения принципа независимости законов столкновения от масштаба нужно, чтобы из параметров движения частиц можно было составить еще одну комбинацию с размерностью длины кроме таких, как размеры частиц и протяженность области эффективного взаимодействия при столкновении. Это становится воз-

можным лишь в том случае, если в механике появится добавочная размерная мировая константа. Кстати, первые три закона Ньютона вообще не содержат такой константы. Масса и размер частицы, ее энергия и скорость в классической механике задаются произвольно. Соответственно остается произвольным и выбор пространственно-временной шкалы (линейки и часов). Именно поэтому на возможность масштабного моделирования здесь не наложено никаких ограничений.

В квантовой теории нужная мировая константа есть — это постоянная Планка  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Движение частицы теперь уже описывается не по Ньютону, а с помощью волновой функции. Представлению о свободном движении частицы массой  $m$  со скоростью  $\vec{v}$  теперь отвечает полет сгустка волн (волнового пакета), пространственные осцилляции внутри которого характеризуются *длиной волны де Бройля*  $\lambda = h/(mv)$ .

Вот оно! Отношение  $\lambda$  к чисто геометрическим протяженностям как раз и является необходимым безразмерным параметром, по величине или малости которого следует судить о пределах применимости классической механики. Если, скажем, пуля массой 9 г летит со скоростью порядка сотен метров в секунду, то  $\lambda$  составит примерно  $10^{-34}$  м. Ясно, что законы Ньютона здесь будут работать с чудовищным запасом точности. А вот длина волны де Бройля для электрона с энергией в несколько электронвольт уже окажется одного порядка с размером атома водорода и с характерным размером области взаимодействия таких электронов при их столкновении.

Квантовый процесс столкновения частиц хотя и устроен удивительно просто, но для нас пока еще совершенно непривычен. В целом система из двух сталкивающихся частиц не подвергается при этом «хаотизации» в каком-то механическом или другом смысле. В то же время состояние отдельной частицы уже становится неопределенным, при последующих контактах с другими объектами или с наблюдателем она будет вести себя как порождение хаоса.

Именно здесь находится логическое звено, позволяющее согласовать законы механических движений с термодинамическими принципами. Кроме всего прочего, ситуация еще и

удивительно красива. Смотрите, в основе фундаментального понимания природы теплоты лежит какая-то специфическая «неизбыточность» квантового описания вещества. Здесь как бы нет ничего лишнего, но того, что есть, хватает для всего.

Известно, что на рисовом зернышке при всей его видимой малости китайцы ухитряются писать поэмы. А вот на электроде ничего, непосредственно к состоянию электрона не относящегося, записать нельзя. Обогатившись при столкновении сведениями о состоянии партнера, электрон вынужден в известном смысле «забыть себя» и, будучи рассмотрен как отдельный объект, несет на себе печать принципиальной непредсказуемости. Заметим снова, что на бытовом языке у нас для этого разговора не хватает слов, хотя в символике математического формализма тут уже давно все в порядке.

С привлечением перечисленных принципов и на основе развитого аппарата квантовой теории открытых систем получают математическое обоснование законы термодинамики, прозорливо угаданные еще в прошлом столетии. Однако прежняя картина «теплового хаоса» корпускул-молекул приобретает при этом непривычные черты. Прежде механистические представления подсказывали нам идею о разрушительном характере теплового движения. Казалось, что хаотические столкновения необратимо разрушают память о прошлых состояниях физических систем, безвозвратно уничтожают любую информацию.

Теперь же оказывается, что уходит лишь локализованная, индивидуализированная информация, но Вселенная помнит все. Мировая «когерентная» память не только не исчезает, она ежемгновенно обогащается, пока продолжается История. Движение в будущее из прошлого похоже скорее на формирование голограммы, нежели на перестановку каких-то неизменных объектов. Впрочем, как всякая аналогия, и эта, наверное, неточна.

Едва добравшись до разгадок некоторых старых человеческих кроссвордов, мы получили в придачу многоцветие новых захватывающих тайн. Но ведь это-то и хорошо!

# Павел Самуилович Урысон

В.ТИХОМИРОВ, В.УСПЕНСКИЙ

**В** ЭТОМ ГОДУ исполнилось сто лет со дня рождения Павла Самуиловича Урысона. Его жизнь трагически оборвалась, когда ему было всего двадцать шесть лет, но имя его известно каждому математику — столь фундаментальным явился его вклад в нашу науку.

П.С.Урысон родился 3 февраля 1898 года в Одессе. Он рано лишился матери. Заботу о мальчике, наряду с отцом, взяла на себя его сестра — Лина Самойловна Нейман, в будущем — известная детская писательница. В 1912 году мальчик вместе с отцом и сестрой переезжает в Москву.

В Москве юноша поступает в гимназию и блестяще заканчивает ее. Еще будучи школьником, он начинает работать в университете Шанявского под руководством выдающегося русского физики П.П.Лазарева. Павел выполняет экспериментальное исследование о радиации рентгеновских лучей — он мечтает стать физиком. Но затем интерес к математике перевешивает. В 1915 году Павел становится студентом физико-математического факультета Московского университета и вскоре примыкает к школе Николая Николаевича Лузина. (В эти годы учениками Лузина были П.С.Александров, Д.Е.Меньшов, М.Я.Суслин и А.Я.Хинчин, ставшие впоследствии знаменитыми математиками.)

Окончив университет, Урысон поступает в аспирантуру к Лузину, которую заканчивает в 1921 году. Тогда же начинается его сотрудничество с П.С.Александровым. (С 30 марта 1921 года ПСы — как называли Павла Самуиловича Урысона и Павла Сергеевича Александрова в университете — исчисляли начало своей дружбы.)

К моменту окончания аспирантуры Урысон выполнил несколько ярких работ.

Одна из них была посвящена теории дифференциальных уравнений, и основное построение основывалось

на физической интуиции. (Впоследствии стало известно, что чуть раньше сходный результат получил А.Лебег, один из крупнейших математиков Франции, но его работа была недоступна в Москве.) Урысон на-



П.С.Урысон (1898 — 1924)

писал первую в России работу по теории нелинейных уравнений в бесконечномерном пространстве (за одним важным классом нелинейных уравнений закрепилось имя Урысона). Эта работа относится по сути дела к еще не родившемуся тогда функциональному анализу: она была «востребована» лишь через тридцать лет.

Павлу Самуиловичу принадлежит замечательная теорема выпуклой геометрии: он доказал, что шар является телом максимального объема при фиксированной средней ширине.

Но главным делом жизни П.С.Урысона стало создание (совместно с П.С.Александровым) топологической школы в нашей стране. (С необычайной щедростью к своему другу, отодвинув себя в тень, Павел Сергеевич написал: «Основное место П.С.Уры-

сона в истории советской математики тем и определяется, что именно он является создателем советской топологии».)

Именно в топологии Урысон получил наиболее выдающиеся результаты, результаты на все времена. Он первым доказал теоремы метризации и построил универсальное метрическое пространство.

Но важнейшим вкладом Урысона в топологию явилось создание *теории размерности*, решение проблемы, поставленной А.Пуанкаре<sup>1</sup>. О некоторых достижениях Урысона в топологии мы расскажем в этой статье.

«Топология (Analysis Situs) есть определенный раздел геометрии, который изучает свойства множеств, инвариантные относительно всякого гомеоморфного, т.е. взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения», — с этих слов начинается один из знаменитых мемуаров Урысона. В топологии есть несколько разделов. Один из них примыкает к геометрии (*комбинаторная топология*), старинное название его — Analysis Situs — «анализ положения»; другой — к теории множеств (*общая топология*). Для общей топологии ключевыми являются слова «предел», «непрерывность», «открытое» и «замкнутое» множества.

Родоначальником общей топологии считается Георг Кантор (о Канторе см. «Квант» №5 за 1995 г.). Кантор ввел основные топологические понятия, перечисленные нами, на прямой и в пространствах большего числа измерений.

Дадим современное аксиоматическое определение топологического пространства.

Пусть  $X$  — некоторое множество,  $\tau$  — система его подмножеств. Пара  $(X, \tau)$  называется *топологическим*

<sup>1</sup> О том, что такое *размерность*, можно прочитать в «Кванте» №6 за 1991 год.

пространством, если пересечение конечно числа и объединение любого числа множеств из  $\tau$  принадлежит системе  $\tau$ , все множество  $X$  и пустое множество также принадлежат  $\tau$ . Множества из  $\tau$  называют *открытыми*; множества из  $\tau$ , содержащие некоторую точку, называются *окрестностями* этой точки. Далее всегда предполагать хаусдорфовым, когда любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности.

Множество, являющееся дополнением к открытому множеству, называется *замкнутым*. Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество  $A$ , называется *замыканием*  $A$  и обозначается  $\bar{A}$ . (Первая аксиоматика топологического пространства, данная Куратовским в 1922 году, исходила именно из понятия замыкания.)

*Внутренность* множества  $A$  — это наибольшее открытое множество, содержащееся в  $A$ , *граница* множества — это разность между замыканием и внутренностью. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  одного топологического пространства в другое *непрерывно*, если прообраз любого открытого в  $Y$  множества открыт в  $X$ . Всякое подмножество  $A$  топологического пространства  $X$  может рассматриваться как топологическое пространство, в котором открытые множества — это пересечения открытых в  $X$  множеств с  $A$ .

Понятие топологического пространства выкристаллизовалось не сразу, на это ушли многие десятилетия. В его окончательном формировании приняли участие (среди многих других) немецкий математик Ф. Хаусдорф, французский математик М. Фреше и польский математик К. Куратовский. А именно в той форме, которая была приведена нами, понятие топологического пространства было сформулировано другом Павла Самуиловича Урысона П. С. Александровым в 1925 году.

Во времена, предшествовавшие рождению топологии, основным объектом, в котором изучали свойства непрерывности, были *метрические пространства*. Что это такое? Пусть снова  $X$  — некоторое множество, и имеется определенная на нем *функция расстояния*, которая каждой паре  $(x, y)$  точек из  $X$  ставит в соответствие число  $d(x, y)$  (расстоя-

ние между  $x$  и  $y$ ), удовлетворяющее трем свойствам: а)  $d(x, x) = 0$  и  $d(x, y) > 0$ , если  $x \neq y$ ; б)  $d(x, y) = d(y, x)$  и, наконец, в)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ . (Последнюю аксиому называют *аксиомой треугольника*.) Пару  $(X, d)$  с описанными свойствами и называют *метрическим пространством*.

Каждое метрическое пространство является топологическим пространством. Открытые множества в метрическом пространстве  $X$  определяются как объединения *открытых шаров* вида  $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ . Например, на числовой прямой  $\mathbf{R}$  с метрикой  $d(x, y) = |x - y|$  открытые множества — это объединения открытых интервалов.

И сразу же возник один из центральных вопросов общей топологии: *когда топологическое пространство можно метризовать*, т.е. ввести на нем метрику, задающую ту же топологию, что изначальная?

Урысону принадлежит основополагающий результат в этой области, получивший название теоремы метризации Урысона. Для его формулировки надо дать два определения.

Топологическое пространство называется *нормальным*, если для любой пары замкнутых непересекающихся множеств существуют два непересекающихся открытых множества, одно из которых содержит первое замкнутое множество, а другое — второе.

Говорят, что топологическое пространство *имеет счетную базу*, если имеется счетное семейство открытых множеств, объединяя которые можно получить любое открытое множество. Для метрического пространства наличие счетной базы равносильно *сепарабельности*, т.е. наличию в нем счетного множества, замыкание которого совпадает со всем пространством.

Имеет место

**Метризациянная теорема Урысона.** *Нормальное топологическое пространство со счетной базой метризуемо.*

Центральным местом в доказательстве этого результата является следующее утверждение, известное как *лемма Урысона*, авторское доказательство которой производит большое эстетическое впечатление, а заложенный в него прием построения бесчисленное число раз в различных формах использовался в математических исследованиях.

**Лемма Урысона.** *Пусть  $A$  и  $B$  — два замкнутых непересекающихся подмножества нормального пространства  $X$ . Тогда существует непрерывная функция  $f$ , определенная на всем  $X$ , принимающая значение нуль на  $A$ , единица на  $B$  и удовлетворяющая неравенству  $0 \leq f(x) \leq 1$  для любого  $x$ .*

Наметим доказательство этой леммы. Пусть  $U_1$  — дополнительное к  $B$  множество. Оно открыто и содержит  $A$ . Из определения нормальности вытекает, что для всякой пары  $(F, G)$ , где  $F$  — замкнутое множество в  $X$ , а  $G$  — содержащее  $F$  открытое множество, существует открытое множество  $V$ , содержащее  $F$  и содержащееся в  $G$  вместе со своим замыканием. Применяя это рассуждение к паре  $(A, U_1)$ , найдем открытое множество  $U_0$ , для которого  $A \subset U_0 \subset \bar{U}_0 \subset U_1$ .

Далее находим открытое множество  $U_{1/2}$ , которое содержит  $\bar{U}_0$  и с замыканием содержится в  $U_1$ . Затем построим два открытых множества  $U_{1/4}$  и  $U_{3/4}$  относительно пар  $(\bar{U}_0, U_{1/2})$  и  $(\bar{U}_{1/2}, U_1)$ . Продолжая далее этот процесс, построим семейство  $\{U_r\}$ , где  $r$  пробегает совокупность всех двоично-рациональных чисел (т.е. рациональных чисел, знаменатель которых — степень двойки), расположенных между нулем и единицей. Остается положить  $f(x)$  равным нижней грани тех (двоично-рациональных) чисел  $r$ , при которых  $x \in U_r$ . Без труда доказывается, что построенная функция непрерывна и обладает всеми перечисленными свойствами.

Но основным вкладом Урысона в математику явилось построение им теории размерности. В создании теории размерности основополагающую роль сыграли пять математиков. Это А. Пуанкаре, один из величайших ученых всех времен, голландский математик Л. Брауэр, упомянутый нами французский математик А. Лебег, австрийский математик К. Менгер и П. С. Урысон.

Как придать точный смысл утверждению, что плоскость двумерна, а пространство трехмерно? У Пуанкаре есть цикл статей, написанных незадолго до его смерти. Одна из них называется «Почему пространство имеет три измерения». Пуанкаре писал там: «Я попытаюсь обосновать определение числа измерений на по-

нятии сечения. Представим себе замкнутую кривую, т.е. непрерывность одного измерения. Если мы отметим на этой кривой две какие-нибудь точки, через которые мы запретим себе переступать, то кривая окажется разделенной на две части, и невозможно будет перейти из одной части в другую, оставаясь на кривой. Возьмем, наоборот, замкнутую поверхность, образующую непрерывность двух измерений. Мы можем отметить на этой поверхности одну, две, любое число запретных точек, поверхность от этого не окажется разбитой на две части. Можно будет перейти от одной ее точки к другой, не встречая препятствий, так как всегда можно будет обойти запретные точки.

Но если мы проведем на нашей поверхности одну или несколько замкнутых кривых и если мы будем рассматривать их как сечения, которые нельзя переступать, то поверхность может быть рассечена на несколько частей». И далее Пуанкаре аналогично объясняет, что пространство имеет три измерения.

Эти высказывания выражают суть дела, но не могут, разумеется, служить точным определением размерности. Первым, кто дал строгое определение, был Л.Брауэр. Его подход основан на понятии перегородки. Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $A$  и  $B$  — непересекающиеся множества в  $X$ . Замкнутое множество  $C$  называют *перегородкой* между  $A$  и  $B$ , если дополнение к  $C$  в  $X$  можно представить в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств  $U$  и  $V$ , из которых первое содержит  $A$ , а второе —  $B$ . Теперь индукцией по  $n$  определим, что значит выражение «пространство имеет размерность  $\leq n$ » (обозначается  $\text{Ind}X \leq n$ ). Пустое множество (и только оно) имеет размерность  $-1$ . Пространство  $X$  имеет размерность  $\leq n$ , если между любыми двумя замкнутыми непересекающимися множествами в  $X$  существует перегородка размерности  $\leq n - 1$ . Положим  $\text{Ind}X = n$ , если неравенство  $\text{Ind}X \leq n$  имеет место, а неравенство  $\text{Ind}X \leq n - 1$  — нет.

Нетрудно показать, что для евклидова пространства  $\mathbf{R}^n$  выполняется неравенство  $\text{Ind}\mathbf{R}^n \leq n$ . Значительно сложнее установить, что на самом деле имеет место равенство  $\text{Ind}\mathbf{R}^n = n$ . Это равенство связано с *теоремой Брауэра о неподвижной точке*: если  $B$  — замкнутый шар в  $\mathbf{R}^n$  и

$f: B \rightarrow B$  — непрерывное отображение, то найдется точка  $x \in B$ , для которой  $f(x) = x$ .

Урысон исходил из несколько иного определения размерности: он рассматривал перегородки не между произвольными замкнутыми множествами, а между точками и замкнутыми множествами. Определим *малую индуктивную размерность*  $\text{ind}X$  аналогично тому, как мы определили  $\text{Ind}X$ . Полагаем  $\text{ind}X \leq n$ , если для любой точки  $x \in X$  и любого замкнутого множества  $F \subset X$ , не содержащего точки  $x$ , существует перегородка  $C$  между  $x$  и  $F$  размерности  $\leq n - 1$ . Эквивалентно:  $\text{ind}X \leq n$  тогда и только тогда, когда у каждой точки  $x \in X$  есть сколь угодно малая окрестность, граница которой имеет размерность  $\leq n - 1$ . Равенство  $\text{ind}X = 0$  означает, что у каждой точки  $x \in X$  есть сколь угодно малая окрестность с пустой границей, т.е. окрестность, являющаяся одновременно открытым и замкнутым множеством. Например, непустое подмножество прямой нульмерно тогда и только тогда, когда оно не содержит никакого интервала. Для сепарабельных метрических пространств большая индуктивная размерность совпадает с малой.

Существует еще один подход к размерности, восходящий к Лебегу и основанный на понятии кратности покрытия. Один из наиболее значительных результатов Урысона заключается в том, что размерность, определенная с помощью кратности покрытий, совпадает с индуктивной размерностью.

Пусть  $S$  — система подмножеств  $X$ . Скажем, что  $S$  имеет *кратность*  $\leq n$ , если любая точка из  $X$  принадлежит не более чем  $n$  множествам из  $S$ . Лебег доказал, что всякое покрытие плоскости замкнутыми ограниченными множествами имеет кратность  $\geq 3$  (покрытия кратности 3, очевидно, существуют — достаточно замостить плоскость шестиугольниками). Это вытекает из такого утверждения: если треугольник со сторонами  $a_1, a_2, a_3$  покрыт тремя замкнутыми множествами  $F_1, F_2, F_3$ , причем  $F_i$  не пересекается с  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), то множества  $F_1, F_2, F_3$  имеют общую точку. Аналогичное утверждение справедливо для  $\mathbf{R}^n$  при любом  $n$ . Например, всякое покрытие пространства  $\mathbf{R}^n$  замкнутыми ограниченными множествами имеет кратность  $\geq n + 1$ .

Пусть  $X$  — замкнутое ограниченное

множество в некотором евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^k$ . Скажем, что размерность  $\dim$  (*размерность, определенная с помощью кратности покрытий*) метрического пространства  $X$  не превосходит  $n$ , если для любого  $\epsilon > 0$  существует покрытие  $S$  пространства  $X$  конечным числом замкнутых множеств диаметра  $< \epsilon$ , такое, что кратность  $S$  не превосходит  $n + 1$ . Как и в случае индуктивной размерности, равенство  $\dim X = n$  означает, что неравенство  $\dim X \leq n$  имеет место, а неравенство  $\dim X \leq n - 1$  нарушается.

Урысон доказал, что  $\dim X = \text{ind}X$ . Таким образом, два совершенно разных подхода к определению размерности — через понятие перегородки и через кратность покрытий — приводят к одному и тому же числу. Размерность  $\dim$  можно определить для произвольных метрических пространств, при этом для сепарабельных метрических пространств  $X$  все три размерности совпадают:  $\dim X = \text{ind}X = \text{Ind}X$ . Для несепарабельных метрических пространств равенство  $\dim X = \text{Ind}X$  по-прежнему выполняется, но при этом малая индуктивная размерность может оказаться строго меньше большой.

Таким образом, каждому подмножеству  $X$  евклидова пространства  $\mathbf{R}^n$  можно сопоставить целое число  $\geq -1$  — размерность  $\dim X$ . При этом  $\dim X = n$  тогда и только тогда, когда  $X$  имеет внутренние точки (т.е. содержит некоторый шар), в противном случае  $\dim X < n$  (Урысон).

Приведем замечательный пример одномерного замкнутого множества в  $\mathbf{R}^3$ . Возьмем единичный куб  $F_0$  в  $\mathbf{R}^3$ . Разделим его естественным образом на 27 равных кубиков со стороной  $1/3$ . Пусть  $F_1$  — объединение тех 20 из них, которые имеют общие точки с ребрами куба  $F_0$  (остальные 7 — это центральный кубик и еще шесть, примыкающих к нему по граням). С каждым из 20 кубиков, из которых складывается  $F_1$ , сделаем аналогичную операцию. Получим 400 кубиков с ребром  $1/9$ . Пусть  $F_2$  — их объединение. Продолжая эту конструкцию, получаем убывающую последовательность множеств  $F_0 \supset F_1 \supset \dots F_n \dots$ . Пересечение  $M$  всех множеств  $F_n$  называется *кривой Менгера*. Можно показать, что кривая Менгера одномерна. Кроме того,  $M$  является универсальной кривой в следующем смыс-

ле: всякое одномерное сепарабельное метрическое пространство гомеоморфно подпространству в  $M$ .

Существует аналог кривой Менгера на плоскости — так называемый ковер Серпинского. Пусть  $K_0$  — единичный квадрат на плоскости. Разделим его на 9 равных квадратиков со стороной  $1/3$ . Пусть  $K_1$  — объединение восьми квадратиков, кроме центрального. Далее аналогично получаем  $K_2, K_3, \dots$ . Ковер Серпинского — это пересечение всех множеств  $K_n$ . Ковер Серпинского  $K$  одномерен и является универсальной плоской кривой: всякое одномерное подмножество плоскости гомеоморфно подмножеству в  $K$ .

Опишем, наконец, универсальное  $n$ -мерное пространство Небелинга. Пусть дано целое  $n \geq 0$ . Рассмотрим множество  $N_n$  всех тех точек  $\{x_1, \dots, x_{2n+1}\} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ , для которых среди чисел  $x_1, \dots, x_{2n+1}$  не более чем  $n$  рациональных. Оказывается, что  $\dim N_n = n$ , и всякое сепарабельное метрическое пространство размерности  $\leq n$  гомеоморфно подпространству в  $N_n$ . Отсюда получается такой результат Урысона:  $\dim X \leq n$  тогда и только тогда, когда  $X$  можно представить в виде объединения  $n + 1$  нульмерных подпространств. Для пространства  $N_n$  такое представление получается, если рассматривать точки  $(x_1, \dots, x_{2n+1})$  с фиксированным числом  $k$  рациональных координат,  $0 \leq k \leq n$ .

Творчество Урысона представлено в двух томах собрания его трудов

(Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, 2. М.-Л., (1951), там же имеются подробные комментарии); оно многократно было с блеском освещено П.С.Александровым. (Необходимо сказать, что сам Павел Самуилович написал лишь малую часть того, что вошло в собрание его сочинений. Большую часть оформил Павел Сергеевич — по оставшимся письменным наброскам Урысона и по воспоминаниям об их математических беседах. Поразительный пример благородства!)

Лина Самойловна Нейман посвятила своему любимому брату книгу «Радость открытия» (М., «Детская литература», 1972). Помимо ее воспоминаний и выдержек из дневников Урысона, в книге содержатся воспоминания и обзоры творчества Урысона, написанные П.С.Александровым, А.Н.Колмогоровым, Л.А.Люстерником, В.А.Ефремовичем и М.А.Красносельским. Читатель получит большое удовольствие, прочитав эту книжку. Отрывки из дневников Урысона, приводимые в ней, помимо того что дают впечатление о его личности, являются выразительным историческим документом той эпохи.

Павел Самуилович был человеком редкой душевной красоты. Об этом много рассказывали те, кому выпало счастье быть знакомым с П.С.Урысоном: Павел Сергеевич Александров, Андрей Николаевич Колмогоров и другие.

Среди многих привлекательных черт, помимо доброты, отзывчивости, душевной щедрости, все отмечали

исключительную разносторонность его интересов и поразительную целеустремленность. Андрей Николаевич Колмогоров подчеркивал еще одну очень импонирующую ему черту характера Павла Самуиловича — жизнерадостность, неумную жажду жизни.

Счастливейшей уверенности, что в жизни все кончается хорошо, Андрей Николаевич приписывал причину трагической гибели Урысона. Павел Самуилович, считая, что знает тайну купания в штормовую погоду, бесстрашно бросился в беспокойное море. И погиб.

Павел Сергеевич Александров так писал о своем друге: «В лице П.С.Урысона математическая наука потеряла ученого самого большого масштаба, с универсальной одаренностью, с интересами, охватывающими всю математику, с любознательностью, распространяющейся на самые разнообразные области знания человеческого. Общая одаренность его личности проявлялась [...] в его сильных и глубоких реакциях на все значительное, что происходило вокруг него в жизни человеческого общества, в его умении и любви работать, в той остроте, с которой он воспринимал природу и искусство. Все это делало образ Павла Самуиловича Урысона не только живым, но и незабываемым [...] для всех людей, которым довелось с ним встретиться на жизненном пути».

## «Архимедесу» — 25 лет

А.ЕГОРОВ

ЭТОТ АДРЕС в Белграде — улица Моше Пияде, 6 — известен очень многим учителям и школьникам Югославии. Там, в самом центре столицы Югославии, в трех сравнительно небольших комнатах расположен Клуб юных математиков «Архимедес» («Архимед»).

Официальный день рождения клу-

ба 1 октября 1973 года. Именно в этот день существовавшее в одной из школ общество учащихся «Архимедес» превратилось в общегославский КЮМ, 25-летие которого отмечается в этом году. Организовал школьное общество в 1961/62 учебном году молодой профессор Боголюб Маринкович — энтузиаст математического просвещения,

автор многих книг и брошюр, замечательный лектор и преподаватель. С тех пор Боголюб Маринкович — бесменный директор всех математических школ и изданий «Архимедеса».

Общее руководство КЮМ осуществляет Правление из 17 известных ученых, педагогов, сотрудников министерства просвещения. С 1973 по 1987 год, до самой своей кончины, совет возглавлял известный математик и педагог Владо Миланович. В настоящее время его возглавляет профессор математического факультета Белградского университета Душан Тошич.

Членами КЮМ «Архимедес» могут быть и школьники, и академики. Всего за 25 лет в КЮМ состояли около 13 000 школьников и около 700 более



Боголюб Маринкович

взрослых математиков. Обладатели членских билетов КЮМ не имеют каких-либо привилегий. Их всех объединяет любовь к математике, школьников — стремление узнать что-то новое, старших членов клуба — научить, приобщить к математике, поделиться своими знаниями с младшими товарищами.

На самом деле «Архимедес» — больше чем клуб: это специализированный учебно-научный центр, распространяющий свою деятельность на всю территорию Югославии до распада страны, а сейчас работающий в двух республиках, оставшихся в составе Югославии, — Сербии и Черногории. Естественно, известные события нанесли серьезный урон «Архимедесу», но он выстоял и сейчас продолжает свою благородную деятельность.

### Школы «Архимедеса»

В Белграде и других городах в течение всего учебного года работают вечерние и воскресные «Архимедесовы школы». Их посещают несколько сот школьников. Существуют и компьютерные школы. Ведут занятия, читают лекции в них (как правило, безвозмездно или за минимальную плату) наиболее квалифицированные учителя и преподаватели университетов и вузов. В общей сложности в школах «Архимедеса» обучались около 17 000 учеников.

Ежегодно проводятся зимние школы. Местом проведения их обычно служит оздоровительный детский центр Митровац, расположенный в живописнейшем национальном парке Тара. В зимних школах занятия математикой и

информатикой перемежаются с активным отдыхом, катанием на лыжах, веселыми развлечениями по вечерам.

Также ежегодно «Архимедес» организует две летние школы. Первая из них работает, как правило, в первой декаде июля (продолжительность — 9—10 дней) на Адриатическом побережье в очень красивом курортном поселке черногорской Ривьеры — Бечичи. Вторая летняя школа проводится, как и зимняя, на Таре.

Учитывая климат, занятия в летних школах проводятся утром: с 8 до 10—11 часов. Остальное свободное от еды и сна время посвящается купанию в море (на Адриатике) и прогулкам по лесам Тары (в Митроваце), спортивным играм, конкурсам и другим соревнованиям.

Участие детей в этих школах оплачивается родителями. Путевки стоят недорого, во всяком случае, они обходятся дешевле, чем обычные путевки в пансионаты и летние лагеря. В зимние и летние школы принимают всех желающих, однако предпочтение отдается ребятам, уже как-то себя проявившим участием в олимпиадах, конкурсах, кружках и т.п. Победители конкурсов «Архимедеса», математических турниров направляются в летние школы бесплатно.

Преподаватели летних школ никакой платы не получают — им обеспечивается бесплатное проживание, питание и проезд.

В отличие от летних школ, действующих в России, где, как правило, организаторы ставят себе целью дополнительно обучить заранее подобранных и уже

прошедших какую-то подготовку школьников, в летних школах «Архимедеса» главная задача организаторов — заинтересовать, увлечь участников. Поэтому там не читают систематических курсов. Темы лекций и занятий — самые разные. Главное, чтобы лекции были доступны, интересны и соответствовали возрасту слушателей — учеников III—VIII классов основной школы и I—IV классов средней школы (в Югославии 12-летняя система среднего образования: основная школа — с I по VIII класс и средняя школа — с I по IV класс).

Приведем далеко не полный список тем лекций и занятий в летних школах в Бечичи и на Таре в 1997 году.

#### Основная школа:

тренировка мышления (логические задачи); равенства и неравенства; вятязи князя Лазаря; математические игры; принцип Дирихле; арифметика остатков; немного о графах; геометрические преобразования; прямая и окружность; шахматы и математика; принцип Кавальери.

#### Средняя школа:

инварианты; инверсия; решения алгебраических уравнений в радикалах; комплексные числа и векторы в геометрии; периодические функции; задача Аполлония; модуль действительного числа, математические игры.

И так ежегодно. Разумеется, темы лекций и занятий меняются — это, в конечном счете, зависит от вкусов и интересов преподавателей. Во всяком случае, школьники с удовольствием посещают занятия, решают задачи, общаются с преподавателями. Тради-



Группа преподавателей летней школы Тара-97

ционно в летней школе на Таре проходит шахматный турнир, его организатор — мастер ФИДЕ Милан Йовичич.

Завершается работа школы тестированием. Это небольшая контрольная работа, состоящая из нескольких несложных задач, подобранных с учетом новых познаний, усвоенных учеником в школе. На церемонии закрытия по результатам участия в конкурсах, викторинах и тестировании победителям вручаются призы и грамоты.

Всего через 65 летних и зимних школ прошло около 8000 учеников и 750 учителей и преподавателей.

В последние годы в работе летних школ участвовали и российские математики, члены редколлегии нашего журнала В.Н. Дубровский (1995, 1996), Н.Х. Розов (1997) и автор этих строк (1995—1997).

## Турниры, «Трибуны» и прочее

КЮМ «Архимедес» регулярно проводит различные математические соревнования, в том числе турнир «Архимедеса» — командное соревнование (первенство Сербии) для учеников основных и средних школ. К моменту написания этой статьи прошло уже 42 турнира, в которых участвовали более 1900 команд, для турниров было составлено огромное количество задач.

Турнир начинается со школьных соревнований. Около 100 лучших команд (из четырех человек каждая) участвуют в заключительном туре. Команда-победительница определяется по сумме баллов, набранных ее участниками.

Систематически проводятся и одноразовые массовые состязания, напоминающие наши математические КВН, математические вечера, выставки работ школьников, всевозможные курсы.

Из года в год «архимедовцы» добиываются превосходных результатов на всевозможных математических соревнованиях в Югославии. Во многом деятельности «Архимедеса» Югославия обязана и успехами своей команды на международных олимпиадах самых разных уровней.

Огромную работу «Архимедес» ведет с учителями. Действуют семинары, проводятся симпозиумы. Примерно раз в месяц в Белграде проходят «Математические трибуны» — тематические конференции, на которых обсуждаются конкретные проблемы преподавания и работы со школьниками. В рамках «Трибун» перед учителями выступают известные ученые и преподаватели вузов, задающие тон и направление последующей дискуссии. Во время зимних школьных каникул в Белграде устраиваются специальные

семинары для учителей математики и информатики.

## «Архимедес» — издатель

«Архимедес» — крупный издатель учебной и популярной математической литературы. Под его эгидой издаются программы средних и основных школ, всевозможные сборники задач, тестов, материалов выпускных и приемных экзаменов, наглядные пособия.

Особенно интересны небольшие тематические брошюры, написанные крупными учеными. В этих книжечках много оригинальных учебных материалов, способствующих более глубокому усвоению школьных программ. Часть брошюр знакомит школьников с современными проблемами, историей математики, биографиями выдающихся математиков. Не забыта и «олимпиадная» тематика. Я не буду перечислять здесь названий этих книжек. Думаю только, что многие из них могли бы быть не без пользы переведены на русский язык как некоторое дополнение к известной у нас серии «Популярные лекции по математике».

Издательская деятельность — серьезное финансовое подспорье для КЮМ. «Архимедес» частично финансируется министерствами просвещения и науки Сербии, но главным образом клуб существует за счет пожертвований своих членов и активистов, а также на доходы от издательской деятельности.

В 1996 году после длительного перерыва начал выходить ежемесячный журнал «Математический забавник» — очень хороший, веселый журнал для учеников основной школы. По уровню своему он примерно соответствует рубрике нашего журнала «Квант» для младших школьников».

За 25 лет в КЮМ «Архимедес» создана прекрасная математическая библиотека, насчитывающая несколько десятков тысяч напечатанных и с трудом помещающаяся в тесных комнатах клуба. Это и собственные издания, и книги других издательств на сербском, русском, английском, немецком и других языках. Все члены клуба и другие желающие имеют доступ к этому богатству.

## Люди «Архимедеса»

Директор клуба Боголюб Маринкович ежедневно проводит много часов в «Архимедесе» и обычно покидает клуб около полуночи, невзирая на праздники и выходные дни. И даже несмотря на такой сумасшедший режим работы, он ничего не смог бы сделать, если бы ему не помогала созданная им команда. Это самоотверженные, бескорыстно преданные своему делу люди.

Самые заслуженные ветераны «Архимедеса», его создатели, наряду с Б.Маринковичем, — это известные математики профессор Влодо Миланович, Михаил Арсенович, Душан Богданович, Йово Кривокапич, Милован Младенович, Драгица Трешняк.

Выдающуюся роль играет крупный математик академик Милослав Марьянович. Его очень глубокие беседы, лекции и книги задают тон и во многом стиль и уровень работы «Архимедеса».

Много сделал для «Математической трибуны» профессор Славиша Прешич. С первого дня сотрудничает с КЮМ профессор Миодраг Груич. Профессор Драган Трифунович — член правления клуба, автор книг и брошюр, немало потрудившийся в «Архимедесе».

Хочется назвать также руководителей команды Югославии на международных математических олимпиадах, выдающихся сотрудников «Архимедеса», — профессор Ратко Тошича и Влодо Янковича. Все они постоянно принимают участие в работе летних школ и других видах деятельности «Архимедеса».

Повседневная жизнь КЮМ держится на учителях школ и преподавателях вузов, таких как Стоян Величкович, Славиша Джукич, Джорджи Дугошия, Джорджи Кадиевич, Михаил Сопич, Драгана Стошич-Милькович, Томислав Стошич, Любича Киселички, Милица Прошич, Драголюб Йованович, Милан Шарич, Йованка Петрович, Радмила Проданович, Зоя Хелдрик и многие, многие другие. К сожалению, я не могу здесь перечислить всех, ибо я не всех знаю, да и места бы не хватило. Пусть они простят меня и не обижаются. Честь им и хвала!

Почетными членами и сотрудниками «Архимедеса» были наиболее известные сербские математики академики Джуро Курепа, Слободан Алянчич, Тостомир Анджелич и профессор Драгослав Митринович.

Через школу «Архимедеса» прошли очень многие югославские ученые. Некоторые из них успешно работают в Югославии, другие уехали и трудятся в Германии, Канаде, США и других странах. Все они помнят «Архимедес» и помогают ему.

К сожалению, в России нет подобной организации. Было бы очень хорошо, если бы где-нибудь (не обязательно в Москве или Петербурге) нашлись бы люди, способные организовать нечто похожее на КЮМ «Архимедес».

В заключение хочется поздравить наших югославских друзей и коллег с их славным юбилеем и пожелать им успехов в их многотрудной деятельности.

# Пьер и Мария Кюри — у истоков открытия радиоактивности

**А. ВАСИЛЬЕВ**

**О**ТКРЫТИЕ радиоактивности положило начало новой эре в истории человечества — эре использования атомной энергии. Впервые в руках ученых, а затем политиков и военных, появился практически неисчерпаемый источник энергии.

Знаменитый французский физик Пьер Кюри в своей Нобелевской лекции отмечал, что «принадлежит к числу тех, кто вместе с Нобелем считает, что новые открытия принесут человечеству больше бед, чем добра». Дискуссии по этому поводу продолжаются и сейчас, в конце двадцатого века. Причем беспокойство вызывает не только проблема ядерного оружия, но и безопасность ядерных реакторов, на долю которых приходится около 6% общего производства энергии на Земле и около 17% глобального производства электричества. Сейчас в 32 странах насчитывается почти 480 действующих или строящихся атомных электростанций. И хотя опыт эксплуатации этих реакторов, каждого в среднем более 20 лет, завоевал ядерной энергетике в целом отличную репутацию, события в Чернобыле в 1986 году подтвердили опасения Кюри.

Радиоактивность представляет собой свойство атомных ядер самопроизвольно превращаться в другие ядра с испусканием некоторых частиц. Среди существующих в природе ядер есть естественно радиоактивные, однако большинство радиоактивных нуклидов получены искусственно в результате ядерных реакций. На первых этапах изучения этого явления

было обнаружено, что при распаде атомного ядра испускается три типа проникающего излучения —  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Положительно заряженные  $\alpha$ -частицы состоят из двух протонов и двух нейтронов и представляют собой ядра гелия, отрицательно заряженные  $\beta$ -частицы — это электроны, а нейтральные  $\gamma$ -кванты — фотоны большой энергии. Современные представления о радиоактивности включают также процессы ядерных превращений, сопровождаемые захватом электронов, излучением позитронов и протонов и, наконец, делением на осколки (чаще всего два) сравнимых масс и зарядов.

Явление радиоактивности было открыто в 1896 году французским физиком Анри Беккерелем, пытавшимся получить рентгеновское излучение при освещении люминесцентных материалов. В течение нескольких часов он подвергал воздействию солнечного света одну из солей урана, а затем наблюдал влияние этой соли на фотографическую пластинку. Хотя пластинка и засвечивалась, солнечный свет оказался здесь ни при чем, поскольку этот же эффект наблюдался и в темноте. Загадочное излучение, которое, как считалось, присуще лишь урану и его соединениям, стали называть лучами Беккереля.

Сообщение Беккереля в одном из научных журналов привлекло внимание Марии Склодовской-Кюри (жены Пьера Кюри). Прежде всего она попыталась установить, существуют ли другие вещества, испускающие подобного рода лучи, и выяснила, что из всех известных в то время элементов таким свойством обладают лишь уран и торий. Для количественного определения интенсивности излучения использовался тот факт, что в присут-

ствии радиоактивных соединений воздух проводит электричество, и измерялся ток, проходящий под воздействием различных веществ сквозь воздушный конденсатор. (Заметим кстати, что измерения проводились при помощи пьезоэлектрического кварца с использованием эффекта пьезоэлектричества — появления на поверхности кристалла электрических зарядов под действием приложенных извне механических сил, деформирующих кристалл. Подробное исследование этого эффекта было проведено несколько раньше братьями Ж. и П. Кюри.) С помощью этих исследований Склодовская-Кюри обнаружила, что некоторые минералы, в частности урановая руда, известная под названием смоляной обманки, испускают гораздо более сильное излучение, чем чистый уран. Было высказано предположение, что в смоляной обманке содержится новый химический элемент, обладающий способностью к радиоактивности в большей мере, чем уран или торий.

В 1898 году Склодовская-Кюри сообщила о результатах своих экспериментов Французской академии наук, и в том же году к ее исследованиям присоединился Пьер Кюри, оставивший свою работу по изучению свойств кристаллов. Урановая смолка стоила дорого, и у супругов не было средств приобрести ее. К счастью, им удалось практически даром получить переработанные отходы рудника по добыче урана в Иохимстале (Богемия), в которых и содержалась необходимая руда. В июле и декабре 1898 года супруги Кюри объявили об открытии двух новых элементов, которые они назвали полонием —  ${}^{210}_{84}\text{Po}$  и радием —  ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ . Существование этих эле-

*О Марии Склодовской-Кюри и Пьере Кюри см. также 4-ю страницу обложки. (Прим. ред.)*



*П.Кюри (1859 – 1906)*

ментов, однако, еще требовалось доказать.

Пьер Кюри предпринял комплексное изучение физических свойств наблюдавшегося излучения, а его жена взяла на себя наиболее тяжелую по исполнению химическую часть. Целыми днями в маленьком продуваемом сарайчике, который заменял им лабораторию, она в огромных чанах ворочала железным ломом по двадцать килограммов нагретой урановой смолки, чтобы выделить из нее новые металлы, составлявшие не более одной миллионной части. Разработанный ею метод заключался в том, чтобы под воздействием кислот и се-

роводорода разделять руду на две фракции. Измерение их радиоактивности показывало, в какую часть ушло нужное вещество, и обработка продолжалась дальше.

Наконец, в сентябре 1902 года супруги Кюри объявили о том, что им удалось выделить дециграмм хлорида радия и определить атомный вес радия. Полученное вещество обладало уникальными свойствами: в полумраке оно светилось голубоватым светом, воздействовало на фотографическую пленку сквозь черную бумагу, превращало воздух в проводник электричества, окрашивало в лиловый цвет посуду, в которой содержалось. Кроме того, излучение радия оказалось «прилипчивым»: оно повышало активность всех находящихся рядом с ним предметов.

Это открытие перевернуло традиционные представления о неизменности атома, побудив многих физиков заняться соответствующими исследованиями. В 1903 году Э.Резерфорд и Ф.Содди выдвинули гипотезу, согласно которой радиоактивное излучение объясняется распадом ядер. Гипотезу поддержали супруги Кюри.

Когда четырехлетний труд был завершен, у Марии появилась возможность написать докторскую диссертацию, По мнению комитета, присудившего ей научную степень, это был наибольший вклад, когда-либо внесенный в науку докторской диссертацией.

В декабре 1903 года Королевская Академия наук в Стокгольме объяви-



*М.Склодовская-Кюри*

ла о том, что Нобелевская премия по физике присуждается Анри Беккерелю — «за открытие явления спонтанной радиоактивности» и супругам Марии и Пьеру Кюри — «за исследование радиоактивного излучения». В 1911 году Мария Склодовская-Кюри первой в мире стала дважды Нобелевским лауреатом — ей была присуждена Нобелевская премия по химии «за открытие радия и полония, изучение свойств радия, получение радия в металлическом состоянии и осуществление экспериментов, связанных с радием».

## НОВОСТИ НАУКИ

### Магниты

#### ...бывают без металла

Представьте себе, что, пронося магнит над чашечкой кофе, вы вытяните всю жидкость из чашки. Чудеса? Не совсем: ученым удалось создать магнитные материалы из молекул типа кофеина. С физической точки зрения, ничего особо удивительного в этом нет, поскольку магнетизм — это свойство не металлов, а электронов в них. У электронов есть собственный магнитный момент под названием «спин», и магнетизм связан с выстраиванием всех спинов в одном направлении. Некоторые металлы легко сделать магнитными потому, что в них есть много свобод-

ных электронов, однако свободные электроны есть и в неметаллах.

Д.Миллер из университета штата Юта (США) и А.Эшштейн из Огайо открыли первый такой органический магнит еще в 1985 году. В 1991 году японцы создали сложный органический магнит, в состав которого входят углерод, водород, азот и кислород — те же ингредиенты, из которых сделан кофеин и многие другие вещества. Эти открытия не имели практического применения, поскольку магнитные свойства вещества начинали проявляться лишь вблизи абсолютного нуля. А вот в 1997 году те же Миллер и Эшштейн нашли органический магнит, «магнитящий» вплоть до 75 градусов по Цельсию. Он состоит из немагнитного ванадия, окруженного

молекулами тетрацианоэтилена. Практически в это же время французские исследователи под руководством М.Вердаже из Университета Пьера и Марии Кюри в Париже тоже создали органический магнит, «работающий» при комнатной температуре. И у него внутри ванадий и хром, а вокруг органические группы. Магнетизм в новых материалах возникает потому, что атомы выстраиваются в них упорядоченным образом.

Неметаллические магниты гораздо дешевле своих металлических собратьев, их легче изготавливать и обрабатывать — вот очевидные аргументы за их широчайшее внедрение.

*По материалам зарубежной печати подготовил А.Семенов*

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M1636» или «Ф1643». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M1637 – M1639, M1641 и M1645 предлагались на LXI Московской математической олимпиаде. Задачи Ф1643 – Ф1652 предлагались на Соросовской физической олимпиаде 1998 года.

## Задачи M1636—M1645, Ф1643—Ф1652

**M1636.** Вокруг трапеции нельзя описать окружность. Докажите, что трапеция, образованная серединными перпендикулярами к ее сторонам, подобна исходной.

*В.Куршченко*

**M1637.** Квадрат со стороной 1 разрезали на  $k$  прямоугольников. Докажите, что сумма длин  $k$  наименьших сторон всех треугольников не менее 1.

*В.Произволов*

**M1638.** Красный квадрат площадью 1 покрывают более 100 белых квадратов, площадь каждого из которых равна 1. При этом стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один белый квадрат так, что остальные все еще будут покрывать целиком красный квадрат?

*С.Азеев*

**M1639.** Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Жители селения стали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив тог или лжив. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют правдивые. Определите и вы, чему она равна.

*Б.Френкин*

**M1640.** Четырехугольник  $ABCD$  обладает тем свойством, что внутри него существует точка  $M$ , для которой  $AMB$  и  $CMD$  – равнобедренные треугольники с уг-

лом  $120^\circ$  при вершине  $M$ . Докажите, что тогда существует точка  $N$ , для которой  $BNC$  и  $DNA$  – равнобедренные треугольники.

*И.Шарыгин*

**M1641.** Есть полубесконечная полоска бумаги, разделенная на клеточки с номерами 1, 2, 3, ..., и  $n$  камней. На первой клеточке камень лежит всегда. Разрешается положить в клетку камень или убрать камень из клетки, если на предыдущей клетке лежит камень. Как далеко от начала полоски можно положить камень, действуя в соответствии с этим правилом? Докажите, например, что на клетку с номером  $2^{n-1}$  камень положить можно.

*А.Шень*

**M1642.** Некоторые стороны клеток шахматной доски  $8 \times 8$  объявляются перегородками. Расстановка перегородок называется хорошей, если доска остается связанной (ладья может пройти с любого поля на любое другое, минуя перегородки), и плохой – в противном случае. Каких расстановок больше – хороших или плохих?

*А.Шаповалов*

**M1643.** а) Существуют ли целые числа  $a$  и  $b$  ( $a \neq 0$ ) такие, что последовательность  $c_n = an! + b$  состоит только из квадратов?

б) Существуют ли целые числа  $a, b, c$  ( $ab \neq 0$ ) такие, что для каждого  $n$  существует целое  $x$ , для которого  $ax^2 + bx + c = n!$ ?

*А.Егоров*

**M1644.** Двое показывают следующий фокус. Один из перетасованной колоды, содержащей 52 карты, вытаскивает 5 произвольных карт и выкладывает четыре из них в ряд картинкой вверх, а пятую а) также выкладывает в ряд среди остальных четырех, но картинкой вниз; б\*) берет себе. Второй, глядя на эти четыре карты, называет пятую карту. Как он это делает?

*Г. Гальперин*

**M1645.** Докажите, что число способов, которыми можно расставить  $n$  чисел  $1, 2, \dots, n$  ( $n \geq 10$ ) в последовательность без убывающих подпоследовательностей длиной 10, не превосходит  $81^n$ .

*А. Канель*

**Ф1643.** На горизонтальной подставке с коэффициентом трения  $\mu$  находятся два одинаковых больших бруска массой  $M$  каждый, связанные легкой нерастяжимой натянутой нитью (рис.1). На гладкой верхней

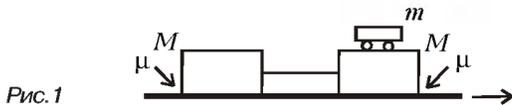


Рис.1

грани первого бруска находится небольшой гладкий грузик массой  $m$ . Подставку двигают в горизонтальном направлении с большой скоростью, направленной параллельно нити в сторону первого бруска (того, что с грузиком). Найдите силу натяжения нити, связывающей движущиеся тела, пока грузик не свалится.

*М. Учителев*

**Ф1644.** На гладком горизонтальном столе покоится тележка массой  $M$  (рис.2). По дну тележки может скользить без трения груз такой же массы, прикрепленный к

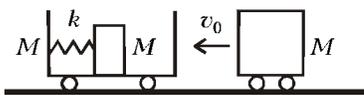


Рис.2

боковой стенке горизонтальной легкой пружинкой жесткостью  $k$ . Кубик массой  $M$  наезжает на тележку со скоростью  $v_0$  и мгновенно прилипает к ней. Чему равна разность между максимальной и минимальной длинами пружинки при движении?

*А. Кубиков*

**Ф1645.** Через легкий блок, закрепленный на большой высоте  $H$  над горизонтальной поверхностью земли, переброшена гибкая веревка (рис.3). Концы веревки сложены внизу двумя бухтами, которые не препятствуют движению. С одной стороны за веревку ухватился человек массой  $M$ , который быстро перебирает руками, стараясь висеть на одной высоте над землей. При некоторой установившейся скорости движения веревки это ему удастся. Найдите эту скорость. Масса одного метра веревки  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ . Трение в блоке отсутствует.

*З. Рафаилов*

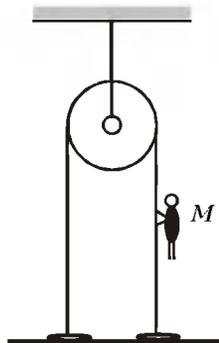


Рис.3

**Ф1646.** На легкой нити к потолку подвешен груз массой  $M$ , к нему на очень легкой пружинке жесткостью  $k$  прикреплен груз массой  $m$  (рис.4). Система вначале неподвижна. Нить пережигают, и грузы начинают падать в однородном поле тяжести. Чему равна разность между максимальным и минимальным значениями длины пружинки? Через какое время после пережигания нити натяжение пружинки в первый раз станет нулевым? Считайте, что за время, необходимое для решения задачи, грузы еще не упадут на пол.

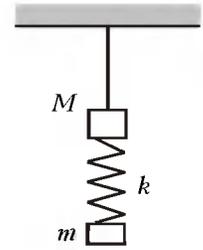


Рис.4

*А. Повторов*

**Ф1647.** В глубоком космосе на большом расстоянии от всех других тел движется длинная цилиндрическая труба, запаянная с одного конца. Неподалеку от этого конца приклеен поршень массой  $M = 1$  кг, отделяющий от окружающего вакуума  $1/100$  полного объема трубы. В этой части трубы находится небольшая порция азота при температуре  $T = 300$  К и давлении  $p = 0,5$  атм. В некоторый момент поршень отклеивается и под давлением газа начинает скользить без трения вдоль трубы. Определите, через какое время после начала движения поршень вылетит из трубы. Длина трубы  $L = 5$  м, площадь поперечного сечения  $S = 100$  см<sup>2</sup>, масса трубы в 10 раз больше массы поршня.

*Р. Александров*

**Ф1648.** В сосуде объемом  $V = 100$  л находится воздух при нормальных условиях. Снаружи – вакуум. В стенке сосуда на время  $\tau = 1$  с открывается небольшое отверстие площадью  $S = 0,1$  см<sup>2</sup> и сразу после этого закрывается. Оцените количество вылетевших за это время молекул и их суммарную энергию. Кстати заметим, что воздух – смесь двухатомных газов.

*К. Тотов*

**Ф1649.** Конденсатор емкостью  $C$  состоит из двух параллельных пластин, находящихся на малом расстоянии друг от друга. Конденсатор зарядили до напряжения  $U_0$  и отключили от источника. Посредине конденсатора параллельно его пластинам вставлена еще одна пластина, и еще одна пластина расположена параллельно снаружи, так что эти дополнительные пластины образуют точно такой же конденсатор (рис.5). Дополнительные пластины соединяют между собой проводником, имеющим большое сопротивление. Какое количество теплоты выделится в этом проводнике?

*А. Зильберман*



Рис.5

**Ф1650.** Электрическая цепь составлена из большого количества одинаковых звеньев (рис.6). Каждое такое

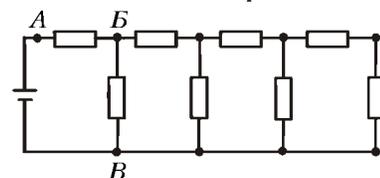


Рис.6

звено состоит из двух резисторов. К началу цепи подключен источник постоянного напряжения  $U = 12$  В. Идеальный амперметр подключают параллельно первому резистору цепи (между точками  $A$  и  $B$ ), и он показывает силу тока  $I_1 = 5$  мА. Если тот же амперметр подключить между точками  $B$  и  $B$  (параллельно второму резистору), то он покажет  $I_2 = 2$  мА. Определите по этим данным сопротивления резисторов одного звена.

*А. Зильберман*

**Ф1651.** Конденсатор емкостью  $C$  заряжен до напряжения  $U_0$ . К нему подключают катушку индуктивности  $L$  и в некоторый момент к выводам катушки подключают цепочку из параллельно соединенных катушки индуктивностью  $2L$  и резистора с большим сопротивлением  $R$  (рис.7).

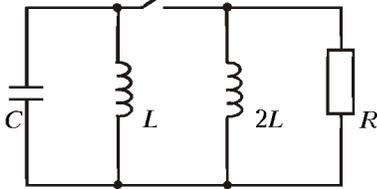


Рис.7

Какое количество теплоты выделится в резисторе? Зависит ли эта величина от момента подключения цепи к катушке? Элементы цепи считайте идеальными.

*М. Учителев*

**Ф1652.** К простой цепи, собранной из двух резисторов сопротивлением  $R = 1$  кОм и двух конденсаторов емкостью  $C = 1$  мкФ, подведено напряжение сети: 220 В, 50 Гц (рис.8). Амперметр в схеме имеет очень маленькое сопротивление. Найдите показание амперметра. Обычно приборы переменного тока градуируются в действующих (эффективных) значениях.

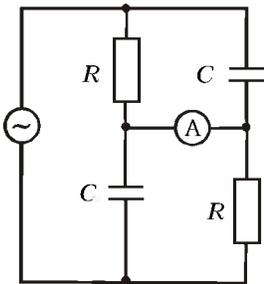


Рис.8

*А. Зильберман*

**Решения задач М1616—М1620, Ф1628—Ф1637**

**М1616.** Дана правильная треугольная пирамида  $ABCD$  с плоскими углами  $\alpha$  при вершине  $D$ . Плоскость, параллельная основанию, пересекает ребра  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Поверхность многогранника  $ABCA_1B_1C_1$  разрезали по пяти ребрам  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1A$  и  $AB$  и полученную развертку уложили на плоскость. При каких  $\alpha$  развертка будет (частично) накрывать сама себя?

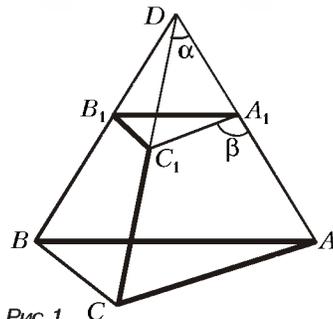


Рис.1

На рисунке 1 жирными линиями выделены ребра разреза данной развертки усеченной пирамиды. Обозначим через  $\beta$  угол  $\angle AA_1C_1$ . Ясно, что  $\alpha = 2\beta - 180^\circ$ . Если угол  $\beta$  достаточно большой, то отрезки  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$  на развертке усеченной пирамиды (рис.2) должны

пересекаться. Найдем значение угла  $\beta$ , при котором отрезок  $B_1C_1$  проходит через вершину  $B_1$ .  $\triangle A_1B_1C_1$  — равнобедренный, так как  $A_1B_1 = A_1C_1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \angle B_1A_1C_1 &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B_1A_1B_1) = \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - (360^\circ - 60^\circ - 2\beta)) = \beta - 60^\circ. \end{aligned}$$

С другой стороны,  $\angle B_1A_1C_1 = 360^\circ - 2\beta$ . Отсюда получаем  $\beta = 140^\circ$ . Следовательно,  $\alpha = 2\beta - 180^\circ = 100^\circ$ .

**Ответ:** данная развертка усеченной треугольной пирамиды будет накрывать (частично) сама себя при любом значении  $100^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

*Замечание.* До сих пор не решена следующая геометрическая проблема. Пусть дан выпуклый многогранник. У него имеется несколько различных разверток. Всегда ли среди них имеется хотя бы одна самонепересекающаяся? Ответ на этот вопрос неизвестен.

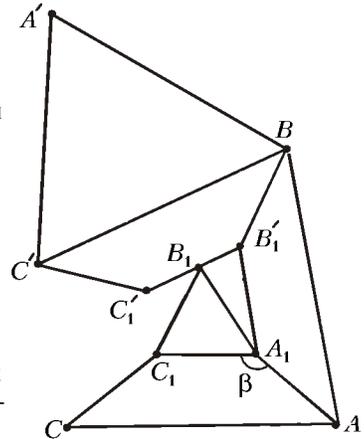


Рис.2

Проблема относится к числу очень трудных: не зря ее называют a killer problem (проблема-убийца).

Легко убедиться в том, что у любого тетраэдра каждая развертка самонепересекающаяся. Что касается многогранников с пятью гранями, то, как видно из решения задачи, уже имеются такие, у которых не все развертки самопересекающиеся. Заметим, что рассмотренная усеченная пирамида даже при  $\alpha > 100^\circ$  имеет помимо самопересекающихся также самонепересекающиеся развертки.

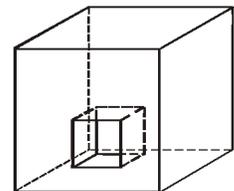


Рис.3

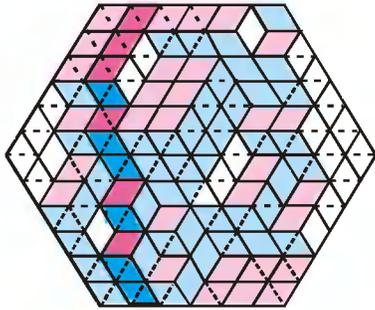
Вызывает удивление, что до сих пор неизвестен ни один невыпуклый многогранник (гомеоморфный сфере) с выпуклыми гранями, который бы имел лишь самопересекающиеся развертки.

Невыпуклый многогранник с невыпуклыми гранями, который допускает лишь самопересекающиеся развертки, представлен на рисунке 3.

*Н. Долбилин*

**М1617\*.** Дан правильный шестиугольник со стороной 100. Каждая его сторона разделена на 100 равных частей, и через точки деления проведены всевозможные прямые линии, параллельные сторонам шестиугольника (образующие сетку единичных правильных треугольников). Рассмотрим произвольное покрытие шестиугольника единичными ромбами, каждый из которых состоит из двух соседних треугольников сетки. Сколько существует линий сетки, разрезающих пополам (на два треугольника) а) 17 ромбов; б)  $k$  ромбов (для каждого  $k \geq 1$ )? (Зависит ли ответ от покрытия?)

Каждая сторона любого ромба, участвующего в разбиении шестиугольника, имеет одно из трех направлений



— она параллельна некоторой паре противоположных сторон шестиугольника (в самом деле, если эта сторона не лежит на стороне шестиугольника, к ней примыкает еще один ромб, к противоположной ей стороне этого ромба — следующий ромб и так далее, вплоть до стороны шестиугольника). Таким образом, все ромбы разделяются на три типа: стороны ромбов одного типа параллельны определенным двум из трех направлений (на рисунке ромбы трех типов раскрашены в белый, синий и красный цвета). Пусть стороны шестиугольника содержат по  $n$  единичных отрезков — сторон ромбов (по условию задачи  $n = 100$ ), и одна из сторон горизонтальна. Рассмотрим все ромбы тех двух типов, которые имеют горизонтальную сторону. Они образуют  $n$  дорожек, ведущих от верхней стороны шестиугольника к нижней (ведь к каждой горизонтальной стороне верхнего ряда ромбов примыкает снизу ромб с горизонтальной стороной, и так далее — вплоть до ряда из  $n$  нижних ромбов). Занумеруем горизонтальные линии сетки, проходящие через точки деления на левых и правых сторонах, по порядку сверху вниз числами  $1, 2, \dots, n$  (диагональ шестиугольника),  $n + 1, \dots, 2n - 1$ . При этом  $k$ -я и  $(2n - k)$ -я линии ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) пересекают шестиугольник по отрезку длины  $n + k$ . Поскольку каждая горизонтальная линия пересекает  $n$  дорожек, то  $k$ -я и  $(2n - k)$ -я линии разрезают ровно  $k$  «вертикальных» (на рисунке — белых) ромбов. Итак, для каждого  $k$ ,  $1 \leq k < n$ , существуют ровно две горизонтальные линии, разрезающие  $k$  ромбов (для  $n$  ромбов такая линия одна). Разумеется, точно так же обстоит дело и с линиями двух других направлений. Итак, мы получили следующий ответ: при любом разбиении шестиугольника со стороной  $n = 100$  на единичные ромбы для  $k = 17$  и вообще для каждого  $k$  от 1 до 99 существует ровно 6 линий, разрезающих пополам  $k$  ромбов (для  $k = 100$  таких линий 3 — это диагонали шестиугольника).

В связи с этой задачей естественно заметить, что количество ромбов каждого типа в любом разбиении также одинаково и равно  $n^2$ .

В.Алексеев, Н.Васильев

**M1618\***. В вершины правильного  $n$ -угольника из его центра проведены  $n$  векторов и из них выбраны несколько (не все), сумма которых равна нулю. Докажите, что концы некоторой части выбранной совокупности векторов образуют правильный многоугольник (две симметричные относительно центра точки считаются правильным «двуугольником»), если а)  $n = 6$ ; б)  $n = 8$ ; в)  $n = 9$ ; г)  $n = 12$ . д) Будет ли аналогичное утверждение верным при любом  $n$ ?

Ответ на общий вопрос д) отрицательный. Приведем пример для  $n = 30$ , т.е. укажем «неправильную» систему векторов, ведущих из центра  $O = (0; 0)$  в некоторые вершины тридцатиугольника, сумма которых равна нулю, среди которых нет  $k$  векторов, ведущих в вершины правильного  $k$ -угольника при  $k = 2, 3$  и  $5$  (а тем самым и при любом  $k$ , не превосходящем 30).

Пусть  $A(1; 0)$  — одна из вершин тридцатиугольника, тогда  $B(-1; 0)$  — противоположная вершина. Направим векторы в вершины правильного пятиугольника, одна из которых  $A$ , и в вершины правильного треугольника, одна из которых  $B$ , а затем удалим векторы  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  (они дают в сумме

нуль). Оставшиеся шесть векторов (см. рисунок) составляют нужную систему.

Разумеется, здесь (и ниже) мы используем тот факт, что сумма  $k$  векторов, ведущих в вершины правильного  $k$ -угольника из его центра, равна нулю; это следует, например, из того, что сумма не меняется при повороте всей картины вокруг центра на угол  $2\pi/k$ . Заметим, что для проекций векторов, один из которых имеет координаты  $(0; 1)$ , этот факт по существу эквивалентен тождеству

$$1 + \cos \frac{2\pi}{k} + \cos \frac{4\pi}{k} + \dots + \cos \frac{2(k-1)\pi}{k} = 0$$

(для четного  $k$  оно очевидно, для любого  $k$  легко доказывается после умножения на  $\sin \frac{\pi}{k}$ ). Аналогично, в примере на рисунке можно провести доказательство прямым подсчетом: чтобы убедиться, что сумма векторов равна нулю, нужно проверить тождество  $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$  (здесь удобно домножить левую часть на  $\sin \frac{\pi}{5}$ ).

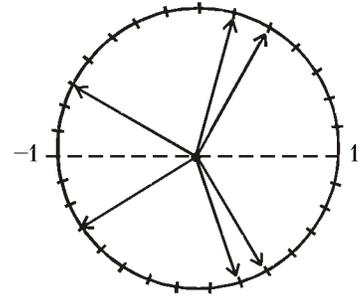
Перейдем теперь к отрицательным результатам а) — г), показывающим, что для малых  $n$  такой пример не построить. Сформулируем простую лемму. Пусть  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$  и  $\vec{OD}$  — различные единичные векторы. Тогда:

- 1) если  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ , то  $A, B, C$  — вершины правильного треугольника;
- 2) если  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$ , то векторы разбиваются на две пары взаимно противоположных (т.е.  $A, B, C, D$  являются вершинами прямоугольника).

Докажем 2). Пусть точки  $A, B, C, D$  лежат на окружности в указанном порядке. Тогда из равенства

$$\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right) / 2 + \left(\vec{OC} + \vec{OD}\right) / 2 = \vec{0}$$

следует, что середины хорд  $AB$  и  $CD$  равноудалены от  $O$ , откуда  $AB = CD$ ; аналогично,  $BC = DA$ , так что  $ABCD$  — вписанный параллелограмм, т.е. прямоугольник. Доказательство 1) еще проще: из равенств вида  $\left(\vec{OB} + \vec{OC}\right) / 2 =$



$= -\vec{OA}/2$  ясно, что середины хорд  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  равноудалены от точки  $O$ . Значит,  $BC = CA = AB$ .

При  $n \leq 9$  в системе векторов, о которой идет речь в задаче, либо в дополняющей ее до  $n$  системе не более четырех векторов. По лемме, эту систему можно разбить на правильные  $k$ -угольники ( $k = 2$  или  $k = 3$ ). Значит, этим же свойством обладает и дополнительная система вершин.

Тем самым, пункты а) – в) задачи решены.

В пункте г) можно рассуждать так. Пусть система содержит вектор  $(1; 0)$  и не содержит противоположный вектор  $(-1; 0)$ . Докажем, что тогда она содержит и векторы  $(\cos \frac{2\pi}{3}; \pm \sin \frac{2\pi}{3})$ .

В самом деле, среди наших 10 векторов (не считая  $(1; 0)$  и противоположного) три пары дают в проекции на ось  $Ox$  рациональные числа

$$\cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\pm \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

две другие пары – иррациональные числа; ясно, что получить в сумме из этих чисел нужную минус единицу можно, лишь используя две  $(-1/2)$ .

Используя результаты статьи «Многочлены деления круга» («Квант» №1, 1998), нетрудно доказать, что при  $n = p$  и  $n = 2p$ , где  $p$  – простое число, нетривиальных систем векторов с суммой нуль не существует, а при любом  $n$ , имеющем не менее трех разных простых множителей, такая система существует.

Один из способов построения нужных примеров – использование корней многочленов деления круга с коэффициентами  $+1$  и  $-1$ ; например, равенство многочлена  $\Phi_{15}(\xi) = 0$ , где  $\xi$  – один из корней  $\Phi_{15}$ , дает пример «неправильной семерки» векторов. Оно же позволяет получить такую же шестерку векторов, как на рисунке.

Однако остается немало вопросов, связанных с этой задачей.

Например, существует ли пример для  $n = 15$  (из сказанного выше следует, что для  $n < 15$  его нет), для  $n$  вида  $p^a$  и  $p^a q^b$ , где  $p$  и  $q$  простые? Существует ли для некоторого  $n$  неправильная система из 5 векторов, идущих в вершины правильного  $n$ -угольника, с суммой нуль (не содержащая меньших правильных подсистем)? Возможна ли система, которую, в отличие от построенных выше примеров, нельзя получить не только как «сумму», но и как «алгебраическую сумму» (т. е. «сложением» и «вычитанием») правильных подсистем?

*Н.Васильев, В.Сендеров*

**M1619\***. Числа  $x, y, z$  удовлетворяют условиям

$$x^2 + xy + y^2 = 3, \quad y^2 + yz + z^2 = 16.$$

Найдите наибольшее возможное значение величины  $xy + yz + zx$ .

**Ответ:** 8.

Самое короткое решение задачи основано на следующей геометрической интерпретации. Заметим, что  $x^2 + xy + y^2$  равно квадрату длины третьей стороны треугольника, две стороны которого равны  $x, y$ , а угол между ними равен  $120^\circ$ ; аналогично можно истолковать и формулу  $y^2 + yz + z^2$ .

Проведем три оси  $OX, OY, OZ$  на плоскости с общим началом  $O$  и одинаковым масштабом, составляющие друг с другом угол  $120^\circ$ . Выберем на них соответственно по точке  $A(x), B(y), C(z)$  (рис.1). Для того чтобы выполнялись заданные в условии равенства, необходимо и достаточно, чтобы стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  равнялись соответственно  $\sqrt{3}$  и 4 (если координаты точек на соседних осях, скажем,  $x$  и  $y$ , имеют разные знаки, угол  $AOB$  будет равен не  $120^\circ$ , а  $60^\circ$ ). Величина

$$S = \frac{1}{2}|xy + yz + zx|\sin 120^\circ = |xy + yz + zx|\frac{\sqrt{3}}{4}$$

равна площади треугольника  $ABC$ . Эта площадь не превосходит  $AB \cdot BC/2 = 2\sqrt{3}$ , поэтому наибольшее значение  $xy + yz + zx$  не превосходит 8. Это значение достигается, когда угол  $ABC$  – прямой; ясно, что внутри прямоугольного треугольника с катетами  $AB = \sqrt{3}, BC = 4$  можно построить точку  $T$ , для которой  $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$  (рис.2).

Эта точка  $T$  будет играть роль начала координат  $O$ , и для расстояний  $x = AT, y = BT, z = CT$  достигается равенство  $xy + yz + zx = 8$ . Заметим, что в этом решении используется на самом деле лишь то, что площадь  $S$  треугольника  $ABC$  не больше  $|xy + yz + zx|\sqrt{3}/4$  (а это очевидно, поскольку  $S$  не больше суммы площадей  $AOB, BOC, COA$ ). Тот факт, что всегда выполнено равенство  $S = |xy + yz + zx|\sqrt{3}/4$ , можно доказать, рассмотрев различные случаи расположения точек  $A, B, C$  на осях  $OX, OY, OZ$  (рис.3).

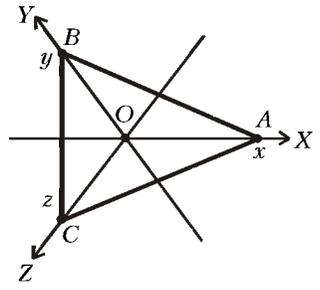


Рис.1

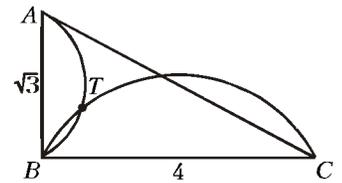


Рис.2

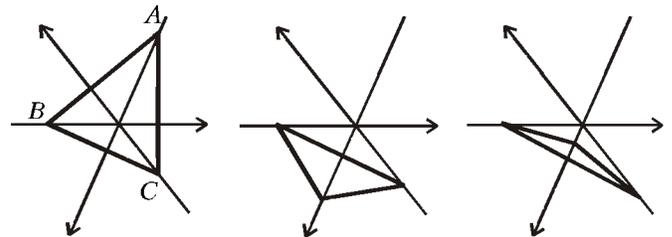


Рис.3

Можно прийти к решению и чисто аналитическим путем. Дополним нашу систему условий (напишем ее в самом общем виде) еще одним:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, \\ y^2 + yz + z^2 = b^2, \\ z^2 + zx + x^2 = c^2. \end{cases}$$

Ниже мы считаем  $a, b, c$  положительными числами, среди которых хотя бы два различны. Обозначим  $t = x + y + z, s = xy + yz + zx$ . Вычитая одно из равенств из двух других, получаем уравнения,

выражающие  $x, y, z$  через  $t$ , вида  $(3z - t)t = b^2 + c^2 - 2a^2$ . С другой стороны, можно показать, что

$$s = \frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

и, подставив выражения  $x, y, z$  через  $t$  в одно из исходных уравнений, получить

$$s^2 = 3/4(a + b + c)(b + c - a)(a + b - c)(c + a - b). \quad (*)$$

(Теперь нетрудно видеть, что исходная система имеет решение  $x, y, z$  тогда и только тогда, когда  $a, b, c$  — стороны треугольника, быть может, вырожденного — ср. с задачей М1090.) Мы должны найти максимальное значение  $s^2$  как функции  $s$ . Поскольку правая часть  $(*)$  — квадратный трехчлен от  $c^2$ , решение можно завершить, в частности для  $a = 4$  и  $b = \sqrt{3}$ , алгебраически. Впрочем, из формулы  $(*)$  видно, что  $s$  с точностью до коэффициента совпадает с выражением площади по «формуле Герона», и возникает естественная геометрическая интерпретация, о которой шла речь выше.

Из наших выкладок можно извлечь и значения  $x, y, z$ , при которых достигается максимум  $s$ :

$$(x, y, z) = \pm(7/\sqrt{31}, 4/\sqrt{31}, 20/\sqrt{31}).$$

Отметим, в заключение, выражение для суммы расстояний  $t = AT + BT + CT$  от «точки Торричелли» до вершин треугольника  $A, B, C$ , которое фигурировало как промежуточный результат:

$$2t^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{3(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}.$$

(Для треугольника с углами не больше  $120^\circ$  точка  $T$  замечательна тем, что именно для нее сумма расстояний до вершин — наименьшая.)

М.Волчкевич, В.Сендеров

**М1620\***. Через точку  $O$  плоскости проведено  $n$  прямых, делящих плоскость на  $2n$  углов. В каждый из них вписана окружность, касающаяся сторон на расстоянии 1 от точки  $O$ . Лучи занумерованы по порядку, начиная с луча  $OA_1$  (рис. 1). Для произвольно выбранной на луче  $OA_1$  точки  $M_1$  строится ломаная  $M_1M_2M_3\dots M_{2n}M_{2n+1}$ , вершина  $M_i$  которой лежит на  $OA_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ), вершина  $M_{2n+1}$  — снова на  $OA_1$ , а звено  $M_iM_{i+1}$  касается окружности, лежащей в угле  $A_iOA_{i+1}$ . Докажите а) для  $n = 3$ ; б) для любого  $n$ , что если для некоторой точки  $M_1$  ломаная оказа-

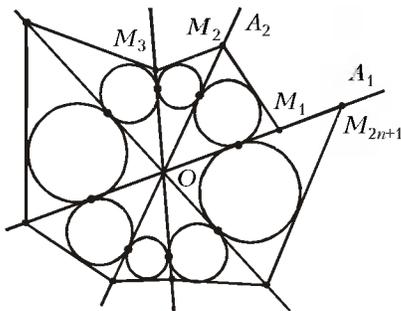


Рис. 1

лась замкнутой ( $M_{2n+1} = M_1$ ), то она получится замкнутой при любом выборе точки  $M_1$ .

Заметим сразу, что формулировку задачи надо дополнить таким разъяснением. При некотором положении точки  $M_1$  (или, аналогично,  $M_k$ ) — а именно, если  $OM_1$  немного больше 1, — касательная прямая, проведенная к окружности из  $M_1$  (отличная от  $OM_1$ ) пересекает не луч  $OA_2$ , а прямую  $OA_2$  по другую сторону от  $O$  — эту точку пересечения следует считать точкой  $M_2$  (и из нее проводить касательную к окружности, вписанной в угол  $A_2OA_3$ ); таким образом, ломаная  $M_1M_2M_3\dots$  может получиться не только невыпуклой, но и самопересекающейся. (Строго говоря, возможен еще случай, когда касательная, проведенная из  $M_1$ , параллельна  $OA_2$  — тогда  $M_2$  следует считать «бесконечно удаленной» и следующую касательную проводить также параллельно  $OA_2$ .) Впрочем, если  $M_1$  выбрана на отрезке  $OA_1$ , т.е.  $OM_1 < 1$ , то подобные оговорки не нужны.

Идею решения задачи можно объяснить одной фразой. Оказывается, функции, выражающие  $OM_{k+1}$  через  $OM_k$ , а также их композиция, выражаются простой формулой — они дробно-линейные, причем удовлетворяют дополнительным условиям, так что при соблюдении условия задачи итоговая функция  $OM_1 \rightarrow OM_{2n+1}$  оказывается просто тождественной. Объясним это подробно.

Каждую прямую  $OA_k$  мы рассматриваем как числовую ось с началом в точке  $O$  и единицей в соответствующей точке  $A_k$ . Обозначим координату точки  $M_k$  на оси  $OA_k$  через  $x_k$ ; в частности, пусть  $x_1 = x, x_2 = y$ . Пусть  $\angle A_kOA_{k+1} = 2\alpha_k$ , и в частности  $\alpha_1 = \alpha$ .

Подсчитаем площадь треугольника  $OM_1M_2$  (рис. 2) по формуле  $S = pr$ , где  $p$  — полупериметр,  $r = \text{tg } \alpha$  — радиус вписанного круга.

Поскольку  $2S = xy \sin 2\alpha, 2p = x + y + (x - 1) + (y - 1)$  — здесь используется равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности, — получим:  $xy \cos^2 \alpha = x + y - 1$ . Нетрудно про-

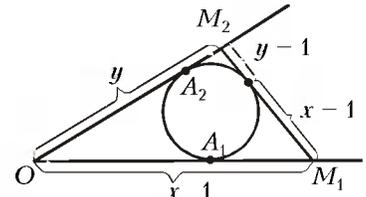


Рис. 2

верить, что такое соотношение выполнено не только при  $x > 1, y > 1$ , как на рисунке 2, или  $0 < x < 1$ , но и при других значениях  $x$ , о которых шла речь вначале. Итак (при  $x \cos^2 \alpha \neq 1$ )

$$y = f_1(x) = \frac{x - 1}{x \cos^2 \alpha - 1}. \quad (*)$$

Аналогичный вид имеет и функция  $f_k(x_k) = x_{k+1}$ . Положим  $g_k = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_1$ , т.е.  $g_2(x) = f_2(f_1(x)), g_3 = f_3(g_2(x))$  и т.д. Заметим, что  $f_k(0) = 1, f_k(1) = 0$  — это легко проверить с помощью  $(*)$  и аналогичных формул для других  $f_k$ . Отсюда следует, что при четных  $k$ , в частности при  $k = 2n, g_k(0) = 0$  и  $g_k(1) = 1$  (при нечетных  $k$ , наоборот,  $g_k(0) = 1, g_k(1) = 0$ ).

Далее, как нетрудно проверить, композиция (последовательное применение) двух, а значит и нескольких,

дробно-линейных функций

$$y = f_1(x) = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}, \quad f_2(y) = \frac{a_2y + b_2}{c_2y + d_2}$$

(здесь  $a_i, b_i, c_i, d_i$  — некоторые числа) также будет дробно-линейной:

$$f_2(f_1(x)) = \frac{a_2(a_1x + b_1) + b_2(c_1x + d_1)}{a_2(c_1x + d_1) + b_2(a_1x + b_1)} = \frac{Ax + B}{Cx + D}.$$

Пусть  $g_{2n}(x) = \frac{ax}{bx + c}$  (мы учли, что  $g_{2n}(0) = 0$ ); поскольку  $g_{2n}(1) = 1$ ,  $c = b - a$ . Если для некоторого  $\xi$ , отличного от 0 и 1,

$$\frac{a\xi}{b\xi + (a-b)} = \xi,$$

то  $a = b\xi + a - b$  и, значит,  $b = 0$ , так что  $g_{2n}(x) = x$  (при всех  $x$ ).

Это и означает, что при любом начальном выборе точки  $M_1(x)$  координата  $g_{2n}(x)$  точки  $M_{2n+1}$  совпадает с  $x$ , т.е. ломаная замкнута.

Интересно выяснить, при каких  $n$  существуют такие расположения прямых (соотношения углов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ), при которых ломаные действительно замыкаются. Нетрудно проверить, что при  $n = 2$  замыкание происходит только для двух взаимно перпендикулярных прямых, когда оно очевидно.

Замечательно, что для  $n = 3$  и вообще для любого нечетного  $n$  при любом расположении прямых ломаная получится замкнутой. Докажем это. Рассмотрим композицию первых  $n$  функций  $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 = g_n$ , отображающую точку  $M_1$  с координатой  $x$  в точку  $M_{n+1}$  с координатой  $g_n(x)$ . Поскольку  $n$  нечетно,  $g_n(0) = 1$ ,  $g_n(1) = 0$ . Заметим, что если  $M_1$  лежит на отрезке  $OA_1$ ,  $0 < x < 1$ , то точка  $M_{n+1}$  лежит на симметричном ему отрезке  $OA_{n+1}$  той же прямой. Поскольку функция  $g_n$  непрерывна, найдется  $\xi$ ,  $0 < \xi < 1$ , такое, что  $g_n(\xi) = \xi$ . При этом  $OM_{n+1} = OM_1$  и вторая половина ломаной окажется симметричной первой относительно  $O$ ;  $g_{2n}(\xi) = g_n(g_n(\xi)) = \xi$ . Тем самым, по доказанному, и для любой другой точки  $M_1$  ломаная будет замкнутой:  $M_{2n+1}$  совпадет с  $M_1$ .

Н. Васильев

**Ф1628.** *Пластинка радиусом 20 см равномерно вращается в горизонтальной плоскости, совершая 33 оборота в минуту. От центра пластинки к ее краю ползет строго вдоль радиуса жучок маленького размера, его скорость постоянна по величине и составляет 10 см/с. При каком минимальном коэффициенте трения жучка о поверхность пластинки он сумеет добраться таким образом до края пластинки?*

Ускорение жучка в любой точке определяется силой трения, которая, в свою очередь, связана с коэффициентом трения. Ускорение мы найдем, разделив приращение скорости жучка за очень малый интервал времени  $\tau$  на продолжительность этого интервала (интервал этот мы выбираем сами).

В нашем случае для расчета полного приращения скорости удобно рассмотреть три его составляющие. Одна из них связана с поворотом линейной (касательной) скорости пластинки  $\omega r$  на угол  $\omega\tau$  — это даст приращение скорости  $\Delta v_1 = \omega r \omega\tau$ , что обеспечит хорошо известное центростремительное ускорение, равное  $\omega^2 r$  и

направленное вдоль радиуса к центру. Вторая составляющая связана с поворотом скорости  $v$  жучка на тот же угол  $\omega\tau$ , что дает приращение скорости  $\Delta v_2 = \omega v$  и ускорение, равное  $\omega v$  и направленное перпендикулярно радиусу в направлении вращения. И наконец, третья составляющая приращения скорости связана с тем, что по мере увеличения расстояния от центра вращения увеличивается линейная (касательная) скорость жучка:  $\Delta v_3 = \omega(r + \Delta r) - \omega r = \omega\Delta r$ ; это дает ускорение, равное  $\omega$  и направленное перпендикулярно радиусу в сторону вращения, т.е. она просто складывается со вторым ускорением.

Итак, полное ускорение жучка можно найти, сложив две его перпендикулярные составляющие. Модуль полного ускорения (именно эта величина нас интересует) равен

$$a = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + (2\omega v)^2}.$$

Максимальное по величине ускорение получится у самого края пластинки, где  $r = 0,2$  м, угловая скорость равна  $\omega = 2\pi \cdot 33/60 \text{ с}^{-1} \approx 3,46 \text{ с}^{-1}$ ; при этом  $a \approx 2,49 \text{ м/с}^2$ . Принимая  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , получим минимально необходимый коэффициент трения:

$$\mu = \frac{ma}{mg} \approx 0,25.$$

А. Жучков

**Ф1629.** *Два одинаковых кубика массой  $M$  каждый стоят почти соприкасаясь гранями на гладкой горизонтальной поверхности. Сверху на них аккуратно помещают шар массой  $m$ , который начинает сдвигаться вертикально вниз, раздвигая кубики в стороны. Найдите скорость шара непосредственно перед ударом о горизонтальную поверхность. Начальная скорость шара пренебрежимо мала. Радиус шара  $R$ , ребро кубика  $H$ . Трения нигде нет.*

Шар движется все время вертикально, кубики разъезжаются с одинаковыми скоростями. До некоторого момента шар касается кубиков, затем они разлетаются в стороны, а шар продолжает двигаться, свободно падая. Найдем положение шара, при котором прекратится касание. Обозначим угол между вертикалью и радиусом, проведенным в точку касания,  $\alpha$ , скорость кубика  $u$ , скорость шара  $v$ . Рассмотрим момент перед самым отрывом — шар уже не давит на кубики (а они на него), но касание еще есть. В системе отсчета, которая движется вместе с кубиком, центр шара движется по окружности радиусом  $R$ . Его скорость в этой системе отсчета (кстати, это инерциальная система — ускорение кубика перед отрывом можно считать нулевым) равна  $u/\cos\alpha$  и его нормальное ускорение определяется только проекцией силы тяжести:

$$a_{\text{н}} = \frac{(u/\cos\alpha)^2}{R} = g\cos\alpha.$$

Мы получили соотношение между скоростью кубика в момент отрыва и косинусом угла  $\alpha$  в этот момент. Дополним это соотношение еще одним уравнением для тех же переменных — его можно получить из закона сохранения энергии с учетом того, что  $v = u \operatorname{tg}\alpha$ :

$$mgR(1 - \cos\alpha) = \frac{mv^2}{2} + Mu^2 = \frac{mu^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{2} + Mu^2.$$

Подставляя в это уравнение значение квадрата скорости кубика  $u$ , получим уравнение для функции искомого угла  $\alpha$ :

$$mgR(1 - \cos \alpha) = \left( \frac{1}{2} m \operatorname{tg}^2 \alpha + M \right) gR \cos^3 \alpha,$$

или, введя обозначение  $\gamma = M/m$ :

$$(2\gamma - 1)\cos^3 \alpha + 3\cos \alpha - 2 = 0.$$

Это уравнение можно решить, пользуясь известной формулой Кардано, но это не обязательно – вполне можно ограничиться численным (или графическим) решением для нескольких конкретных значений отношения масс. Например, для  $\gamma = 1$  получаем  $\cos \alpha \approx 0,596$ , для  $\gamma = 2$  получаем  $\cos \alpha \approx 0,523$ , для еще большего значения отношения масс (легкий шар)  $\gamma = 50$  получаем  $\cos \alpha \approx 0,235$ . Попробуем теперь уменьшать величину  $\gamma$ , но так, чтобы коэффициент при кубическом слагаемом в уравнении оставался положительным – значение  $\cos \alpha$  будет стремиться к  $2/3$ . При отрицательных значениях этого коэффициента получаются большие значения для  $\cos \alpha$  – от  $2/3$  до 1.

Дальше все уже просто – скорость кубиков после отрыва не меняется, и скорость шара  $V$  перед ударом о плоскость находим при помощи закона сохранения энергии

$$mgH = \frac{mV^2}{2} + Mu^2.$$

При этом  $u^2 = gR \cos^3 \alpha$ , а значения косинуса предельного угла мы находили раньше – подставляя их, найдем ответы для различных соотношений масс.

*З.Рафаилов*

**Ф1630.** На гладком горизонтальном столе покоится тележка массой  $M$  и длиной  $L$ . Посередине тележки находится кубик маленького размера, его масса  $m$ . Кубику сообщают толчком скорость  $v$  по направлению к одному из бортиков тележки. Найдите смещение тележки к тому моменту, когда кубик снова окажется посередине тележки, испытав ровно 17 ударов. Считать удары кубика о бортики тележки абсолютно упругими.

В этой задаче можно долго и подробно анализировать движение тележки – после первого удара она поедет, после второго остановится, затем снова поедет и т.д. Но ответ можно получить и очень быстро – нужно только учесть, что при абсолютно упругом лобовом ударе двух тел их относительная скорость остается неизменной (это легко доказать – убедитесь сами) и поэтому интервал между последовательными ударами составит  $L/v$ . Всего от начала движения до интересующего нас момента пройдет: полинтервала до первого удара, затем 16 интервалов между ударами (проверьте!) и еще полинтервала между ударами (еще «полтележки»), т.е.  $T = 17L/v$ . За это время центр масс системы сместится на

$$s = Tv_{\text{цм}} = 17 \frac{L}{v} \cdot v \frac{m}{M+m} = 17L \frac{m}{M+m}.$$

*Р.Александров*

**Ф1631.** Три маленьких заряженных тела одной и той же массы движутся в пространстве вдали от всех других тел. В некоторый момент тела оказываются на одной прямой, при этом ускорение среднего равно

по величине  $a$  и ускорение одного из оставшихся в этот момент составляет по величине  $3a$ . Найдите ускорение третьего тела в этот же момент времени.

Система находится вдали от всех других тел, поэтому ускорение центра масс системы равно нулю. Отсюда сразу можно найти ускорение третьего тела. Действительно, если ускорения первых двух направлены в одну сторону, то ускорение третьего равно  $4a$  и направлено в противоположную сторону. Если же исходные ускорения направлены в разные стороны, то ускорение третьего тела равно  $2a$  и направлено против ускорения, равного  $3a$ .

*М.Учителев*

**Ф1632.** Куб с ребром  $a = 10$  см, имеющий массу  $M = 1$  кг, подвешен на пружине жесткостью  $k = 400$  Н/м так, что его основание параллельно земле. Снизу на куб направляют поток маленьких упругих шариков, обладающих скоростью  $v_0 = 20$  м/с на высоте первоначального положения нижней грани куба. Куб начинает колебаться, двигаясь поступательно вдоль вертикальной оси. Найдите период и амплитуду этих колебаний. Оказывается, колебания эти медленно затухают, хотя никакого трения тут нет. Объясните причину затухания колебаний и оцените время, в течение которого амплитуда уменьшится на 10%. Масса одного шарика  $m = 1$  г, концентрация шариков в потоке  $n = 1000 \text{ м}^{-3}$ . Ударами шариков друг о друга пренебречь.

Ударяясь о нижнюю грань куба и упруго отскакивая, шарики создают почти постоянную (далее мы уточним эту оценку) силу, направленную вверх. Эта сила смещает положение равновесия куба на пружине вверх, и в системе начинаются колебания. Оценим величину силы, считая для начала куб неподвижным. За малый отрезок времени  $\tau$  о грань куба ударятся только те шарики, которые находятся на расстоянии  $v_0\tau$  от грани, – таких шариков будет  $na^2v_0\tau$ . Каждый удар передает кубу импульс  $2mv_0$ , всего за время  $\tau$  куб получает импульс  $na^2v_0\tau \cdot 2mv_0$ . Это дает силу, равную  $F = 2na^2mv_0^2$ , которая смещает положение равновесия на  $s = F/k$ . Такой и была бы амплитуда колебаний, если бы не затухание, которое эту амплитуду уменьшает. Период колебаний груза на пружине определяется стандартной формулой  $T = 2\pi\sqrt{M/k}$  – это самые обычные колебания груза на пружине.

Сделаем теперь числовые оценки: сила  $F = 8$  Н, смещение  $s = 0,02$  м, период  $T \approx 0,31$  с.

Максимальное значение скорости можно найти из закона сохранения энергии, а можно просто умножить амплитуду на круговую частоту колебаний  $\omega = 2\pi/T$  – получим  $v = 0,4$  м/с. Малая амплитуда колебаний позволяет считать, что положение нижней грани почти не меняется и скорость шариков перед ударом можно считать равной  $v_0$ . А вот импульс, передаваемый кубу, меняется в зависимости от его скорости – именно этим и объясняется затухание.

Посчитаем силу, действующую на движущийся куб. При скорости куба, направленной вверх и равной  $u$ , сила будет равна

$$F = 2na^2m(v_0 - u)^2 = 2na^2m(v_0^2 + u^2) - 4na^2mv_0u.$$

При изменении скорости куба на противоположную второе слагаемое меняет знак. Слагаемое это очень похоже на силу вязкого трения – она также направлена против скорости и пропорциональна ей по величине. (Если бы сила оказалась не зависящей от направления скорости, работа ее за период колебаний была бы нулевой и затухания не было бы.) Сделаем очень грубую оценку затухания. Возьмем четверть периода колебаний – от нуля до максимального отклонения от положения равновесия на  $s$ . Силу трения заменим на ее «среднее» значение, т.е. на половину от максимального значения  $f$ . Тогда работа этой силы будет равна  $A = 0,5fs \approx 3 \cdot 10^{-3}$  Дж. Энергия колебаний системы в начале равна  $W = ks^2/2 = 0,08$  Дж. Уменьшение амплитуды на 10% (по условию) соответствует потере 20% энергии, при потере же за четверть периода примерно 4% (это  $A/W$ ) мы получим, что время заданного затухания составляет приблизительно один – полтора периода колебаний, т.е. 0,3 – 0,4 секунды. Можно сделать и более аккуратную оценку – либо решая уравнение колебаний с затуханием, либо пользуясь аналогией с колебательным контуром, содержащим катушку, конденсатор и небольшой резистор (для этого случая все формулы хорошо известны). Однако и наша оценка вполне разумна.

А.Зильберман

**Ф1633.** Цикл тепловой машины состоит из двух адиабат и двух изохор. Найдите КПД цикла, если известны температуры  $T_1$  и  $T_2$  – начальная и конечная для одной из адиабат. Рабочее тело – идеальный газ.

Пусть цикл тепловой машины  $1-2-3-4-1$  состоит из адиабатического расширения  $1-2$ , изохорического охлаждения  $2-3$ , адиабатического сжатия  $3-4$  и изохорического нагревания  $4-1$ . Введем обозначения:  $T_1, T_2, T_3$  и  $T_4$  – температуры в точках 1, 2, 3 и 4 соответственно. Газ получает тепло от нагревателя ( $Q_H$ ) на участке  $4-1$  и отдает тепло холодильнику ( $Q_X$ ) на участке  $2-3$ . Для расчета КПД не обязательно знать уравнение адиабатического процесса, а вполне достаточно понимать, что отношение начальной и конечной температур на адиабате однозначно определяется отношением начального и конечного объемов. Отсюда следует, что  $T_1:T_2 = T_4:T_3$ . Запишем теперь выражение для КПД цикла:

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H}$$

Найдем количество теплоты, полученное газом на участке  $4-1$ . В этом процессе газ работы не совершает, а полученное тепло идет целиком на повышение внутренней энергии газа, поэтому  $Q_H = U_1 - U_4 = \nu C_V (T_1 - T_4)$ . Аналогично, переданное холодильнику количество теплоты равно  $Q_X = U_2 - U_3 = \nu C_V (T_2 - T_3)$ . Тогда для искомого КПД получим

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(T_1 - T_4) - (T_2 - T_3)}{T_1 - T_4} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} = \\ &= 1 - \frac{T_2(1 - T_3/T_2)}{T_1(1 - T_4/T_1)} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \end{aligned}$$

*Примечание:* обратите внимание на то, что, хотя это выражение и напоминает внешне известную формулу для КПД идеальной тепловой машины, температуры в нашем случае совсем не те – в известную формулу подставляют температуры холодильника и нагревателя.

А.Зильберман

**Ф1634.** В распоряжении физика есть два тепловых резервуара – очень горячий с температурой  $+200^\circ\text{C}$  и просто горячий с температурой  $+70^\circ\text{C}$ . Окружающая среда имеет постоянную температуру  $+20^\circ\text{C}$ . Физика велено сообщить очень горячему телу количество теплоты 1000 Дж и просто горячему – количество теплоты 2000 Дж. Какую минимальную механическую работу ему придется для этого совершить? Теплоемкости горячего и очень горячего тел можно считать очень большими.

Передавать тепло от холодного тела к горячему позволяет так называемая обращенная тепловая машина. Она использует обычный тепловой цикл, но он проводится в обратном направлении, т.е. при контакте с горячим телом (нагревателем) рабочее тело не расширяется, совершая работу, а сжимается и при этом тепло перетекает в нагреватель, при контакте же с холодным телом (холодильником) рабочее тело расширяется и при этом тепло отнимается от холодильника. Если в качестве такой машины использовать идеальную тепловую машину, обратив ее цикл, то для перекачки заданной порции тепла между данными горячим и холодным телами потребуются минимальная работа. Итак, мы используем обращенную идеальную тепловую машину, коэффициент полезного действия которой (в прямом цикле) нам известен:

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{T_H - T_X}{T_H}$$

Такое же соотношение между затраченной работой и количеством теплоты, переданным горячему телу, получится и в обращенном цикле. Осталось решить, сколько тепла очень горячее тело должно получить от холодного тела, а сколько – от горячего. И хотя ответ очевиден, проведем расчет. Обозначим количество теплоты, которое мы передадим непосредственно от холодного ( $T_3 = 293\text{ K}$ ) к очень горячему ( $T_1 = 473\text{ K}$ ) телу буквой  $Q$ , тогда от горячего ( $T_2 = 343\text{ K}$ ) останется передать  $Q_1 - Q$  тепла, где  $Q_1 = 1000$  Дж. На все это понадобится работа

$$A_1 + A_2 = \frac{Q(T_1 - T_3)}{T_1} + \frac{(Q_1 - Q)(T_1 - T_2)}{T_1}$$

Осталось найти количество теплоты, которое нужно передать от холодного тела горячему. При передаче  $Q_1 - Q$  тепла очень горячему телу горячее «потеряло» только  $(Q_1 - Q)T_2/T_1$  – остальное дала совершенная при этом работа. Значит, нужно еще сообщить количество теплоты  $Q_2 + (Q_1 - Q)T_2/T_1$ , где  $Q_2 = 2000$  Дж. При этом необходимо совершить работу

$$A_3 = \left( Q_2 + \frac{(Q_1 - Q)T_2}{T_1} \right) \frac{T_2 - T_3}{T_2}$$

Складывая рассчитанные величины работ, получаем

полную работу:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{Q(T_1 - T_3)}{T_1} + \frac{(Q_1 - Q)(T_1 - T_2)}{T_1} + \frac{(Q_2 + (Q_1 - Q)T_2/T_1)(T_2 - T_3)}{T_2} = \frac{Q_1(T_1 - T_2)}{T_1} + \frac{(Q_2 + Q_1 T_2/T_1)(T_2 - T_3)}{T_2} + Q \left( \frac{T_1 - T_3}{T_1} - \frac{T_1 - T_2}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} \frac{T_2 - T_3}{T_2} \right).$$

Нетрудно увидеть, что множитель при  $Q$  в точности равен нулю. Это говорит о том, что необходимая работа вовсе не зависит от того, какие порции тепла мы забираем у конкретных тел. Результат будет во всех случаях одинаковым:

$$A = \frac{Q_1(T_1 - T_2)}{T_1} + \frac{(Q_2 + Q_1 T_2/T_1)(T_2 - T_3)}{T_2} \approx 672 \text{ Дж.}$$

А.Теплов

**Ф1635.** *Нелинейный двухполюсник имеет вольт-амперную характеристику, которая описывается формулой  $U = 10I^2$ , где ток измеряется в амперах, а напряжение — в вольтах. Два таких двухполюсника соединены последовательно и подключены к идеальной батарееке с напряжением  $E = 10$  В. Параллельно одному из двухполюсников подключают резистор. При каком сопротивлении этого резистора тепловая мощность, которая на нем выделяется, окажется максимальной?*

Пусть напряжение на резисторе, подключенном параллельно одному из двухполюсников, равно  $U$ . Тогда на втором двухполюснике напряжение равно  $E - U$ , а через резистор идет ток, равный разности токов двухполюсников:

$$I = \frac{\sqrt{E - U} - \sqrt{U}}{\sqrt{\alpha}}$$

(вместо конкретного числового значения  $10 \text{ В/А}^2$  мы используем букву  $\alpha$ ). Мощность, рассеиваемая на резисторе, равна

$$P = UI = \frac{U(\sqrt{E - U} - \sqrt{U})}{\sqrt{\alpha}}.$$

У нас получилась функция одной переменной — напряжения на резисторе, и мы можем обычным способом исследовать эту функцию на максимум. Нужно только учесть, что напряжение на параллельной цепочке обязательно получится меньше половины напряжения батарейки. Возьмем производную по  $U$  и приравняем ее к нулю, отбросив ненужный множитель  $1/\sqrt{\alpha}$ :

$$\sqrt{E - U} - \frac{U\sqrt{E - U}}{2} - \frac{3\sqrt{U}}{2} = 0.$$

После несложных преобразований мы получим квадратное уравнение

$$18U^2 - 21EU + 4E^2 = 0.$$

Выбирая нужный корень, найдем

$$U = \frac{E(21 - \sqrt{153})}{36} \approx 0,24E.$$

Ток  $I$  мы уже выразили через  $U$ , теперь легко найти величину сопротивления нужного нам резистора:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U\sqrt{\alpha}}{\sqrt{E - U} - \sqrt{U}} \approx 6,27 \text{ Ом.}$$

З.Рафаилов

**Ф1636.** *К идеальной батарееке подключены последовательно конденсатор емкостью  $C = 100$  мкФ и амперметр, сопротивление которого составляет  $r = 10$  Ом. При помощи быстродействующего переключателя конденсатор в этой цепи переключается  $n = 100$  раз в секунду то в одной, то в другой полярности (выводы конденсатора все время меняются местами друг с другом); стрелка прибора при этом практически не дрожит. Обычный магнитоэлектрический амперметр показывает в таком случае силу тока  $I_1 = 0,01$  А. Что покажет в такой цепи амперметр тепловой системы с тем же сопротивлением? Приборы были отградуированы в цепи постоянного тока.*

За время между переключениями  $T = 1/n = 0,01$  с конденсатор успевает практически полностью перезарядиться (характерное время для цепи с конденсатором емкостью  $C = 100$  мкФ и резистором сопротивлением  $R = 10$  Ом составляет  $0,001$  с, что существенно меньше рассчитанного  $T$ ). При каждом переключении по цепи протекает заряд  $q = 2CU$ , средний ток при этом составляет  $I_1 = 2CU/n$ . Для расчета показаний теплового амперметра нам понадобится напряжение батарейки. Выразим его из полученного соотношения:  $U = I_1/(2Cn)$ .

При каждом переключении батарейка совершает работу  $A = Uq = 2CU^2$ , энергия конденсатора каждый раз одна и та же, значит, вся работа переходит в тепло. За секунду в резисторе (амперметре) выделяется в виде тепла энергия  $2CU^2n$ , и показание амперметра тепловой системы  $I_2$  можно найти из соотношения

$$I_2^2 r = 2CU^2 n = \frac{I_1^2}{2Cn}.$$

Отсюда

$$I_2 = \frac{I_1}{\sqrt{2Cnr}} \approx 0,022 \text{ А.}$$

А.Повторов

**Ф1637.** *Катушка индуктивностью  $L = 1$  Гн присоединена параллельно конденсатору емкостью  $C = 10$  мкФ, последовательно с получившимся контуром включен еще один такой же конденсатор и к получившейся цепи подключен генератор низкой частоты с амплитудой выходного напряжения  $U_0 = 1$  В. На какой частоте ток, потребляемый от генератора цепью, получается очень малым? На какой частоте этот ток резко возрастает? Оцените максимальную амплитуду напряжения на катушке, если сопротивление провода ее обмотки  $R = 10$  Ом. Остальные элементы цепи считайте идеальными.*

Для ответов на первые два вопроса будем считать элементы цепи идеальными — разница получится совсем небольшой, а рассуждения сильно упростятся. Очень малым ток получится на такой частоте  $\omega_1$ , при которой параллельный контур имеет очень высокое (для иде-

альных элементов — бесконечное) сопротивление. В этом случае токи через конденсатор и катушку в параллельном контуре равны друг другу по величине и противоположны по фазе, откуда получаем

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Сильно возрастает ток цепи на частоте  $\omega_2$ , определяемой условием: напряжения на контуре и на последовательном конденсаторе почти компенсируют друг друга (при идеальных элементах цепи компенсация будет полной, и ток в цепи может оказаться сколь угодно большим). Для компенсации нужно, чтобы токи через конденсаторы были одинаковы и текли в противоположные стороны, следовательно, ток катушки должен быть в два раза больше, чем ток параллельного ей конденсатора:

$$2I\omega_2 L = \frac{I}{\omega_2 C}, \text{ откуда } \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Для оценки максимального напряжения на катушке нам придется учитывать влияние небольшого (это мы дальше проверим) последовательного сопротивления — без него амплитуда получилась бы сколь угодно боль-

шой. Для грубой оценки вполне можно считать, что максимальная амплитуда будет на частоте  $\omega_2$ . Строго говоря, это будет на немного другой частоте, однако при небольшом последовательном сопротивлении разность этих частот совсем мала. Итак, на указанной частоте напряжение катушки почти равно напряжению последовательного конденсатора и имеет противоположную фазу. Это означает, что напряжение генератора приложено к резистору сопротивлением  $R$  и по нему (а значит, и по катушке) течет ток, амплитудное значение которого равно  $I_0 = U_0/R = 0,1$  А. Тогда на катушке амплитуда напряжения составит

$$U_L = I_0 \omega_2 L = \frac{U_0 L}{R \sqrt{2LC}} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{2C}} \approx 22,5 \text{ В}.$$

Мы видим, что напряжение существенно превышает амплитуду генератора — затухание контура получилось небольшим и наши предположения о малости последовательного сопротивления достаточно оправданы. Аккуратный расчет дает для амплитуды напряжения на катушке почти в 2 раза меньшую величину — примерно 11 В, однако и наша грубая оценка вполне разумна.

*А. Повторов*

## Н А М П И Ш У Т

### ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ В ШКОЛЕ

Как известно, основная теорема арифметики утверждает, что всякое натуральное число можно разложить на простые множители, причем это разложение единственно с точностью до перестановки множителей. Благодаря этой теореме существует каноническая форма записи натурального числа, которая дает описание всех его делителей.

Естественно, что основная теорема арифметики используется в школе. Однако в большинстве учебников ее нет, и это порождает странную ситуацию. Например, школьники используют разложение на простые множители при сокращении дробей, причем единственность разложения лишь подразумевается, но не доказывается.

Причина такого положения в том, что наиболее известное доказательство этой теоремы — довольно длинное и сложное. Точнее говоря, существование разложения на простые множители доказывается легко, а вот его единственность выводится из другой теоремы: если произведение двух натуральных чисел делится на некоторое простое число, то на него делится хотя бы один из сомножителей. В свою очередь, при доказательстве этой теоремы используется тот факт, что наибольший общий делитель двух чисел является их целочисленной линейной комбинацией; есть варианты, использующие индукцию.

В действительности основная теорема арифметики может быть доказана непосредственно, причем это доказательство вполне подходит для факультативных занятий в школе. Оно приведено, например, в книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» (М.: Просвещение, 1967. — с. 47–48). Придумать такое рассуждение непросто, зато оно короткое и прозрачное. Поскольку это доказательство недостаточно известно, то приведем его здесь (с небольшими изменениями).

Будем доказывать теорему «от противного»: допустим, что некоторые натуральные числа можно разложить на простые множители двумя или более способами. Тогда среди таких чисел существует наименьшее. Однако мы построим еще меньшее число, которое также имеет не менее двух разложений. Полученное противоречие докажет теорему.

Пусть  $N$  — наименьшее число с неоднозначным разложением на простые множители. Рассмотрим два его различных разложения:

$$P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_l.$$

Все множители в левой части отличаются от всех множителей в правой (иначе можно сократить на одинаковые множители и получить меньшее число с неоднозначным разложением). Можно считать, что  $P_1 < Q_1$ . Положим

$$M = (Q_1 - P_1) \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_l.$$

Тогда  $M$  — натуральное число, меньшее  $N$ . Докажем, что  $M$  также имеет хотя бы два разложения на простые множители, вопреки выбору числа  $N$ .

С одной стороны,  $M$  делится на  $P_1$ , поскольку

$$\begin{aligned} M &= Q_1 \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_l - P_1 \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_l = \\ &= P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k - P_1 \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_l = \\ &= P_1 \cdot (P_2 \cdot \dots \cdot P_k - Q_2 \cdot \dots \cdot Q_l). \end{aligned}$$

Поэтому  $M$  имеет разложение, содержащее  $P_1$ .

С другой стороны,  $Q_1 - P_1$  не делится на  $P_1$ , а простые числа  $Q_2, \dots, Q_l$  не равны  $P_1$ . Поэтому, разложив  $Q_1 - P_1$  на простые множители, мы придем к разложению для  $M$ , не содержащему  $P_1$ . Искомое противоречие получено.

Примененный метод доказательства называют методом бесконечного спуска (по натуральному числу с данным свойством строим меньшее число с тем же свойством). Он знаком школьникам: например, так устанавливается иррациональность квадратного корня из двух. По существу это одна из форм метода математической индукции.

В заключение напомним, почему единицу не относят к простым числам. Многие считают это произвольным соглашением. На самом деле причина состоит в том, что иначе не будет выполняться основная теорема арифметики.

*А. Ковальджи, Б. Френкин*

## Задачи

1. У Сережиной мамы три сына. Первого она назвала Андреем. Второго – Борисом. Как зовут ее третьего сына?



2. Когда канатоходец встал на середину каната, натянутого между двумя столбами, то канат удлинился на 40 см, а артист опустился на 1 м. Какова была первоначальная длина каната?

*А. Павлов*



3. Решите систему уравнений



не прибегая к помощи карандаша и бумаги.

*А. Савин*

4. В турпоход отправились 9 юношей и 10 девушек. На привале один из них заметил, что до похода каждый юноша был знаком с одинаковым числом девушек, идущих в поход, а все девушки были



знакомы с разным количеством юношей. Могло ли такое быть?

*С. Дворянинов*

5. В городе Старозаводске троллейбус связывает центр города с заводом. Поэтому в субботу и воскресенье на нем практически никто не ездит. В связи с этим Городская Дума постановила, что цена декадного проездного билета должна быть пропорциональна количеству рабочих дней в декаде. В один из месяцев стоимость всех трех декадных



проездных билетов оказалась одинаковой, причем в этом месяце не было праздничных дней. Назовите эти месяц и год.

*И. Акулич*

# Разумно или логично?

И. ГРИГОРЬЕВА

Когда мы считаем, что кто-то рассуждает правильно и хорошо, мы называем его речь логичной и разумной. Но совпадает ли смысл двух этих эпитетов? Человеческие мысли, знания и высказывания редко вписываются в простые строгие схемы. *Разумно* — не всегда то же, что *логично*, хотя разумные рассуждения также имеют свои закономерности. Только природа их другая: они не бывают жесткими, однозначными, а скорее направляющими, желательными.

Если прислушаться к любому разговору, окажется, что чаще всего человек реагирует не на точный смысл фразы, а на подтекст, т.е. на то, что вложил в нее говорящий (точнее, что уловил слушающий). Причем делается это совершенно неосознанно. Вот как описывает этот феномен патер Браун, герой Г.К.Честертон, в рассказе «Невидимка»:

*Вы, наверное, замечали, что люди никогда не отвечают именно на тот вопрос, который им задают? Они отвечают на тот вопрос, который услышали или ожидают услышать. Предположим, одна леди гостит в усадьбе у другой и спрашивает: «Кто-нибудь сейчас живет здесь?» На это хозяйка никогда не ответит: «Да, конечно, — дворецкий, три лакея, горничная», — ну и все прочие, хотя горничная может хлопотать тут же в комнате, а дворецкий стоять за ее креслом. Она ответит: «Никто», имея в виду тех, кто мог бы вас интересовать. Зато если врач во время эпидемии спросит ее: «Кто живет в вашем доме?» — она не забудет ни дворецкого, ни горничную, ни всех остальных. Так уж люди разговаривают: вам никогда не ответят на вопрос по существу, даже если ответят самую правду.*

Люди так привыкли к этому, что обычно не испытывают от такой формы общения никаких неудобств. Напротив, беседа на формальном уровне может удивить и даже создать комический эффект. Как, например, в таком диалоге:



*Шалтай – Болтай: «Как ты сказала, сколько тебе лет?»*

*Алиса быстро посчитала в уме и ответила: «Семь лет и шесть месяцев!»*

*— А вот и ошиблась! — закричал торжествующе Шалтай. — Ты ведь мне об этом ни слова не сказала!*

*— Я думала, вы хотели спросить, сколько мне лет?*

*— Если б я хотел, я так бы и спросил, — сказал Шалтай.*

В повседневной речи «нелогичные» выражения встречаются весьма часто, нисколько не мешая нам понимать смысл высказывания. Например, в фразе *Они мелют зерно и из этой муки пекут хлеб* с точки зрения логики непонятно, почему говорится *эта мука*, ведь о муке перед этим не упоминалось. Однако наши знания позволяют нам вывести связь между *поломом* и *мукой*, так что появление этого слова нас не смущает.

Обычно, когда человек говорит, он пропускает очень много информации, сам того не замечая. Считать ли это недостатком речи или ее достоинством? Безусловно, достоинством. Такой способ общения делает его динамичным, насыщенным, позволяет экономно передавать самые сложные мысли.

Впрочем, в рассказе «Жених» писательницы-юмориста Тэффи лингвистические разногласия разрушили намечавшуюся свадьбу. Жених не пере-



*нес того, что невеста сказала «Сейчас свет зажгу»: «Вы можете зажечь лампу, свечу, наконец, спичку. И тогда будет свет. Но как вы будете зажигать свет?» На том сватовство и кончилось!*

В пятом номере нашего журнала за 1995 год в рубрике «Квант улыбается» были предложены задачи-анекдоты. Для них надо было найти концовку, одновременно и логичную и смешную. Однако, если присмотреться, логика ответов была разной, или, вернее, разного уровня. В некоторых случаях правильным был самый формальный ответ, кото-

рый требовал отвлечения от «сопутствующей» информации. Как, например, в таком анекдоте:

— *Знаете, если бы не усы, вы были бы очень похожи на мою жену!*

— *Но у меня же нет усов!*

— *Зато...*

«Логичный» ответ: *...у нее есть.*

А в следующем примере, наоборот, надо использовать наши знания о ситуации:

— *Как-то на вечеринке я на спор съел 40 бутербродов!*

— *И без каких-либо последствий?*

— *С последствиями! С тех пор меня...*

«Разумный» ответ: *...в эту компанию не приглашают.*



А теперь попробуйте сами закончить анекдоты. Какие из концовок кажутся вам «логичными», а какие — «разумными»?

### Упражнения

1) — Я так много читал о вреде алкоголя и никотина, что с нового года решил бросить.

— Пить или курить?

— Нет, ...

2) Беседуют два путешественника.

— В какой гостинице лучше остановиться в этом городе?

— В отеле «Под розой».

— Вы в нем уже останавливались?

— Нет, но я останавливался ...

3) — Что это Вы мне подали — кофе или помой?

— А Вы что, не можете отличить?

— Представьте себе, не могу!

— В таком случае ...

4) — Почему Вы все время опаздываете?

— А Вы видели у лифта табличку «Только на 10 человек»? Каждое утро я жду ...

5) — Обвиняемый, почему вы обманули людей, которых вам так доверяли?

— Потому что я не мог обмануть ...

6) — У меня есть приспособление, которое позволяет видеть сквозь стену.

— Не может быть! И что это такое?

— ...

7) — Дорогой, закрой форточку, на улице холодно!

— А что, если я закрою форточку, на улице...

8) — Хотел бы я иметь столько денег, чтобы хватило купить слона!

— Зачем тебе слон?

— Слон мне не нужен, мне нужно ...

9) В бюро находок:

— К вам доставляют потерянные вещи?

— Нет, только...

10) — Почему у вас вокзал так далеко от гостиницы?

— Чтобы он был поближе к ...

11) — Ремонт Вашей обуви стоит 5 рублей, но так как один ботинок мы потеряли, вы заплатите ...

12) — Товарищ старшина, ваше приказание выполнил!

— Да я же ничего не приказывал.

— А я ...

13) — Что у тебя в медальоне?

— Я положила туда на память волосы своего мужа.

— На память? Но ведь он же еще жив!

— Он-то жив, а вот ...

14) — Я целую ночь не спал, — говорит постоялец гостиницы, — ловил клопов!

— А что, они хотели...

15) — Мадам, Вы уже перемеряли двадцать платьев!

— Учитывая их цену, для меня это единственный способ ...

16) Двое наездников участвуют в скачках. Одни говорит другому:



— Поднажми, Билли! А то я поставил ...

17) — Вы попали в автокатастрофу? Наверное, слишком быстро ездите?

— Наоборот, слишком медленно ...

18) — Не волнуйтесь, больной! У меня у самого была такая болезнь!

— Да, но у вас был другой...

19) — Сколько стоит номер?

— На первом этаже — 10 долларов, на втором — 8, на третьем — 6.

Турист собирается уходить.

— Что, цены слишком высокие?

— Нет, ...

20) — Каких Вам сардин — португальских, испанских, французских?

— Какая разница! Я же не собираюсь ...

...я прикрепил к одному углу книги нить, протянул ее через отверстие и, обводя ее вдоль контуров отверстия, начертил другим концом при помощи мела фигуру на стене.

Иоганн Кеплер

...мы также рассматриваем не кратчайшие расстояния или линии, а те, которые могут быть пройдены легче, удобнее и за более короткое время.

Пьер Ферма

А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМЫ ВАМ

## ОПТИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ?

Тема этого «Калейдоскопа» свела воедино и автора законов движения планет, и математика, знаменитого своими теоремами, и создателя классической механики, и ученого, проведшего труднейшие эксперименты по определению скорости света в разных средах, и многих других известных ученых. При всем различии научных интересов, их волновал вопрос: можно ли (и как) верно отобразить движение неуловимых световых лучей?

Важность этой проблемы вы ощутите, например, как только начнете перечислять оптические приборы, для постройки и качественной работы которых необходимо знать, что происходит с проходящим через них потоком света. Это очки и лупы, микроскопы и телескопы, разнообразные проекторы и фотоаппараты, видеокамеры и бинокли...

Оптические построения играют огромную роль не только для развития оптической техники. Разработанные в оптике модели и представления проникли в другие научные области, где нашли отражение в таких терминах, как «электронный микроскоп», «нейтронное зеркало», «оптическая ЭВМ».

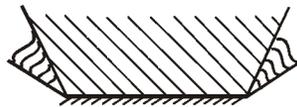
Очень хотелось бы, чтобы в предложенной здесь россыпи задач вы обнаружили и красоту самих построений, и логику стоящих за ними оптических законов.

### Вопросы и задачи

1. Заходящее Солнце освещает сквозь щель между облаками решетчатую

ограду. Почему в тени, отбрасываемой решеткой на стену, отсутствуют тени вертикальных прутьев, тогда как тени горизонтальных отчетливо видны? Толщина всех прутьев одна и та же.

2. На рисунке показаны область полной видимости в плоском зеркале



прямого предмета (штриховка прямыми линиями) и области частичной видимости (штриховка волнистыми линиями). Где находится предмет?

3. Солнечные лучи, отражаясь от большого горизонтального зеркала, падают на вертикальный экран. На зеркале стоит шахматная фигура. Какой величины будет ее тень на экране?

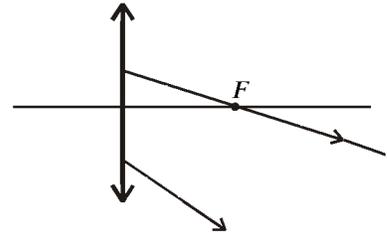
4. Зачем осветительное зеркальце у микроскопа обычно делается вогнутым?

5. Между светящейся точкой и глазом помещена плоскопараллельная пластина. Выясните построением, где находится изображение этой точки.

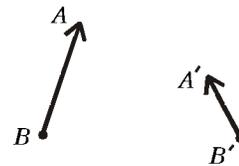
6. Расстояние между предметом и его изображением, создаваемым тонкой линзой, равно  $0,5F$ , где  $F$  – фокусное расстояние линзы. Какое это изображение – действительное или мнимое?

7. Собирающая линза дает изображение источника в точке  $S'$  на главной оптической оси. Положение центра линзы  $O$  и ее фокусов  $F$  известно, причем  $OF < OS'$ . Найдите построением положение источника  $S$ .

8. Определите построением положение светящейся точки, если два луча после преломления в линзе идут так, как изображено на рисунке.

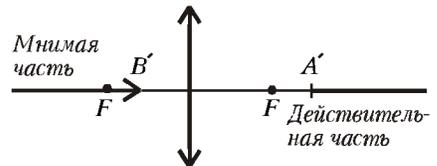


9. На рисунке изображены предмет  $AB$  и его изображение  $A'B'$ , получен-



ное с помощью тонкой линзы. Найдите построением положение линзы и ее фокусов.

10. Изображение некоторого прямого непрерывного предмета  $AB$  состоит из двух полубесконечных час-



тей, одна из которых действительная, другая мнимая. По рисунку восстановите положение предмета.

11. Можно ли сфотографировать мнимое изображение?

12. Где на оптической оси собирающей линзы должен находиться точечный источник света, чтобы ни из какой точки нельзя было одновременно увидеть источник и его изображение?

13. Как расположить две линзы, одна из которых рассеивающая, а другая собирающая, чтобы параллельные лучи, пройдя через них, остались параллельными?

14. Постройте изображение предмета в оптической системе, состоящей из собирающей линзы и плоского зеркала, расположенного в фокальной плоскости линзы. Предмет находится перед линзой между фокусом и двойным фокусом.

15. Почему телескоп, выведенный в космос, способен зарегистрировать значительно менее яркие звезды, чем наземный телескоп того же диаметра?

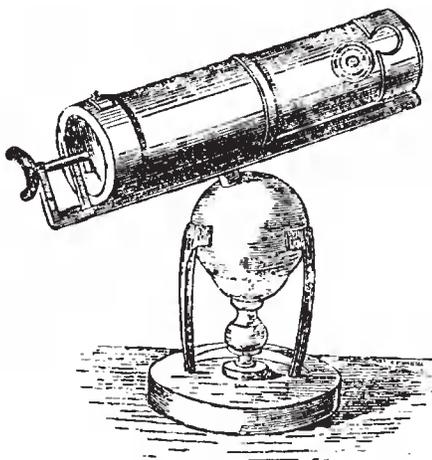
### Микроопыт

Расположите в углу комнаты двугранное зеркало с углом при вершине  $90^\circ$ . Каким будет ваше изображение в нем? Попробуйте найти в комнате точки, из которых вы не увидите свое изображение.

### Любопытно, что...

...даже в эпоху позднего Возрождения зрение и оптические явления считались подозрительными феноменами. Возможно поэтому один из крупных ученых-оптиков Франческо Мавролик долго не осмеливался опубликовать свой основной труд, и тот увидел свет лишь в год его смерти – 1575.

...первые безупречное с научной точки зрения построение хода лучей в глазу удалось выполнить в начале XVII века великому астроному Иоганну Кеплеру. Ему же принадлежат раз-



работка теории построения изображений в оптических приборах, введение понятий «фокус» и «оптическая ось», применяемые по сей день.

...к телескопу, изобретенному Галилеем, относились как к чуду – народ толпами спешил в него заглянуть. А после того как Галилей преподнес экземпляр телескопа в подарок венецианскому сенату, его жалованье удвоилось.

...простому микроскопу, состоящему из лупы, снабженной штативом, со временем пришел на смену сложный микроскоп, представляющий собой уже систему линз. Придуман он был почти одновременно с изобретением зрительной трубы – в XVII веке, и заслуги в его создании принадлежат, по-видимому, также голландцам. Однако конкурировать с лупой такой микроскоп смог лишь в XIX веке – при появлении составных объективов.

...пытаясь усовершенствовать линзовый телескоп, Ньютон самостоятельно сконструировал и построил прибор, «применяя вместо объективного стекла вогнутый металл», т.е. зеркало. Именно за создание такого – отражательного – телескопа он был избран членом Лондонского Королевского общества в 1672 году.

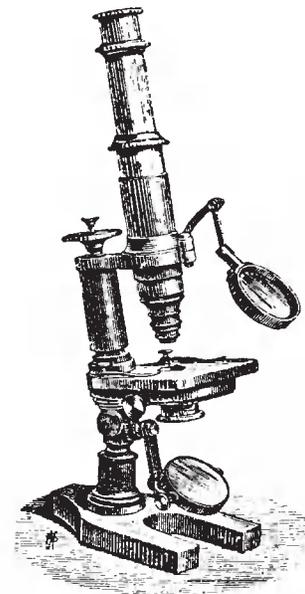
...как и немало выдающихся ученых, Фуко сам изобретал оригинальные инструменты, в том числе и для астрономических наблюдений. Им, например, был разработан очень важный метод серебрения стекла для отражательных телескопов.

...старинное изобретение «камера-обскура» – черный ящик с маленьким отверстием – при всей своей простоте порой может соперничать даже с современной специальной фотоаппаратурой. Так, с ее помощью делают превосходные цветные снимки без каких-либо искажений.

...телескопы XVIII века имели невероятную длину. Причина в том, что составных объективов, компенсирующих искажения, тогда делать не умели, а однолинзовый объектив давал неокрашенное изображение, лишь если его фокусное расстояние достигало 40 метров!

...отчетливое изображение в глазу рыб возникает подобно настройке на резкость в фотоаппарате. Шарообразный хрусталик не изменяет своей кривизны, как у человека, а перемещается мышцами «вперед-назад».

...чтобы улучшить качество изображения, объективы современных фотоаппаратов составляют из нескольких линз, изготовленных из разных сор-



тов стекла. Конструкция настолько сложна, что проектирование объективов «поручают» компьютерам. Чисто геометрические построения, однако, не могут учесть всех потерь, которые испытывает световой поток при многократных отражениях на поверхностях линз.

...в последнее время неизмеримо возрос поток астрономической информации – во многом благодаря началу работы рекордного по размерам десятиметрового зеркального телескопа имени Кека на Гавайях и запуску на околоземную орбиту космического телескопа Хаббла с зеркалом диаметром 2,4 метра.

### Что читать в «Кванте» об оптических построениях

(публикации последних лет)

1. «Путешествие в луче отраженного света» – 1995, №2, с.38;
2. «Глаз и небо» – 1995, №3, с.2;
3. «Звездная aberrация и теория относительности» – 1995, №4, с.10;
4. «Геометрическая оптика» – 1995, №4, с.52;
5. «Калейдоскоп «Кванта» – 1995, №5, с.32;
6. «Странные тени и отражения» – 1996, №3, с.11;
7. «Аномальные атмосферные явления» – 1996, №4, с.7;
8. «Законы отражения и преломления света» – 1996, №5, с.49;
9. «Интерференция света» – 1997, №4, с.47;
10. «Интерференция на островах Синего Мыса» – 1998, №1, с.42.

Материал подготовил  
А.Леонovic

**Физика 9—11**

Публикуемая ниже заметка «Маятник с несколькими грузиками» предназначена девятиклассникам, заметка «Еще один вечный двигатель?» — десятиклассникам, «Закон электромагнитной индукции или «правило потока»?» — одиннадцатиклассникам.

# Маятник с несколькими грузиками

**П. ХАДЖИ, А. МИХАЙЛЕНКО**

**Л**ОГИЧЕСКИМ и простейшим обобщением традиционного математического маятника является маятник с двумя или более грузиками. Такой маятник можно назвать частным случаем физического маятника.

Рассмотрим сначала более простой случай. Пусть к жесткому невесомому стержню прикреплены два точечных тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  на расстояниях  $l_1$  и  $l_2$  соответственно от точки подвеса (рис.1,а). Найдем частоту колебаний такого маятника.

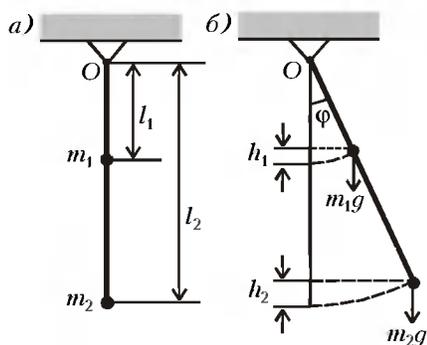


Рис. 1

В положении равновесия стержень маятника располагается вертикально. Выведем маятник из положения равновесия, отклонив стержень с грузами на небольшой угол  $\varphi$  (рис.1,б). Каждый из грузов при этом поднимется на определенную высоту относительно своего положения равновесия. Первый поднимется на высоту  $h_1 = l_1(1 - \cos \varphi)$ , а второй — на  $h_2 = l_2(1 - \cos \varphi)$ . Запасенная системой грузов потенциальная энергия относительно положения рав-

новесия будет равна

$$\Delta E_p = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g (1 - \cos \varphi).$$

Предоставим теперь маятник самому себе. Благодаря касательным составляющим сил тяжести грузов (которые играют роль «возвращающих» сил), маятник начнет двигаться к положению равновесия. Линейные скорости грузов по мере приближения к положению равновесия будут возрастать. В положении равновесия полная кинетическая энергия грузов станет равной

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — линейные скорости движения грузов. Выражая  $v_1$  и  $v_2$  через угловую скорость вращения стержня  $\Omega$  и длины  $l_1$  и  $l_2$ :

$$v_1 = \Omega l_1, \quad v_2 = \Omega l_2,$$

кинетическую энергию системы можно представить в виде

$$E_k = \frac{1}{2} \Omega^2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2).$$

Предполагая, что в системе отсутствуют потери энергии из-за трения в оси и сопротивления воздуха, и используя закон сохранения энергии, можно приравнять потенциальную энергию кинетической. В результате для угловой скорости вращения стержня получаем выражение

$$\Omega^2 = 2g \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} (1 - \cos \varphi).$$

Сравним наш маятник с некоторым математическим маятником, имеющим

такую длину  $L$ , что при одном и том же начальном отклонении  $\varphi$  от положения равновесия угловые скорости  $\Omega$  и периоды колебаний  $T$  обоих маятников оказываются одинаковыми. Для математического маятника можно записать

$$\Delta E_p = mgL(1 - \cos \varphi),$$

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2,$$

$$v = \Omega L.$$

Используя закон сохранения энергии, для угловой скорости  $\Omega$  получаем выражение

$$\Omega^2 = 2 \frac{g}{L} (1 - \cos \varphi).$$

Так как при одном и том же угловом отклонении  $\varphi$  угловые скорости  $\Omega$  обоих маятников равны, приравнявая правые части соответствующих равенств, находим длину  $L$  математического маятника, эквивалентного исходному маятнику с двумя грузами:

$$L = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2},$$

а значит, и частоту колебаний нашего физического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{g \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}},$$

и его период:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2}}.$$

Если  $m_1$  либо  $m_2$  равны нулю (т.е. один из грузов отсутствует), то из последнего выражения получаем формулу для периода колебаний математического маятника. Если же, например,  $m_1 = m_2$  (т.е. массы обоих грузов одинаковы), то

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1 + l_2}}.$$

Таким образом, частота и период колебаний нашего маятника определяются как массами грузов, так и их расстояниями от оси вращения.

Сравним полученное выражение для частоты колебаний исследуемого маятника  $\omega$  с частотами колебаний двух независимых математических маятников с длинами нитей  $l_1$  и  $l_2$  соответственно, которые выражаются формулами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l_2}}.$$

Если положить  $l_1 > l_2$ , то получаем неравенство

$$\omega_1 < \omega < \omega_2.$$

Таким образом, частота колебаний маятника с двумя грузами, расположенными на расстояниях  $l_1$  и  $l_2$  от оси вращения, меньше большей и больше меньшей из собственных частот колебаний двух независимых математических маятников с длинами нитей  $l_1$  и  $l_2$  соответственно.

Исследуем теперь более детально выражение для  $\omega$ . Предположим, что один из грузов, например груз с массой  $m_1$ , расположен на фиксированном расстоянии  $l_1$  от оси вращения маятника, а расстояние  $l_2$  второго груза с массой  $m_2$  меняется. Найдем отношение частоты колебаний нашего маятника к частоте колебаний математического маятника с длиной нити  $l_1$ :

$$y = \frac{\omega}{\omega_1} = \sqrt{\frac{l_1(m_1 l_1 + m_2 l_2)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}}.$$

Введем безразмерные переменные  $x = l_2/l_1$  и  $a = m_2/m_1$ . Тогда

$$y = \sqrt{\frac{1+ax}{1+ax^2}}.$$

Исследуем зависимость  $y$  от  $x$ , т.е. зависимость отношения частот  $\omega/\omega_1$  от отношения длин  $l_2/l_1$ . Поступим следующим образом. Обозначим  $z = 1 + ax$  и

запишем

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{az}{z^2 - 2z + a + 1}} = \sqrt{\frac{a}{z + \frac{a+1}{z} - 2}} = \\ &= \sqrt{\frac{a}{\left(\sqrt{z} - \sqrt{\frac{a+1}{z}}\right)^2 + 2(\sqrt{a+1} - 1)}}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция  $y(z)$  изменяется немонотонно: с ростом  $z$  (начиная с  $z = 1$ ) функция сначала растет, достигает максимума при  $z = \sqrt{a+1}$  (это следует из условия обращения в ноль первого слагаемого в знаменателе), после чего монотонно убывает. Максимальное значение при этом равно

$$y_{\max} = \sqrt{\frac{a}{2(\sqrt{a+1} - 1)}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a+1} - 1)}.$$

Возвращаясь снова к переменной  $x$ , находим значение  $x = x_0$ , при котором функция  $y(x)$  достигает максимума:

$$\begin{aligned} x = x_0 &= \frac{\sqrt{a+1} - 1}{a} = \\ &= \frac{\sqrt{m_1(m_1 + m_2)} - m_1}{m_2}. \end{aligned}$$

На рисунке 2 представлен график зависимости функции  $y = y(x)$ . Видно, что  $y > 1$  в области  $0 < x < 1$ , т.е. при  $l_1 > l_2$  получаем  $\omega > \omega_1$ . Наоборот,  $y < 1$

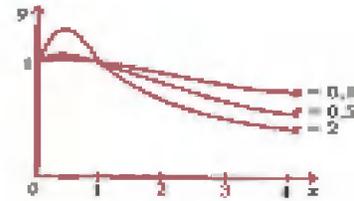


Рис. 2

в области  $x > 1$ , т.е. при  $l_1 < l_2$  получаем  $\omega < \omega_1$ . Отметим, что чем больше параметр  $a$ , тем выше максимум.

Нетрудно обобщить полученные результаты на случай  $n$  тел с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , закрепленных на невесомом стержне на расстояниях  $l_1, l_2, \dots, l_n$  соответственно от точки подвеса:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + \dots + m_n l_n^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2 + \dots + m_n l_n}}.$$

Если массы всех грузов одинаковы, то

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}},$$

т.е. период колебаний определяется только расстояниями, на которых располагаются грузики.

модуля) или неупруго (полностью теряя эту скорость и «соскальзывая» уже вдоль поверхности). И тут его осенило.

Он решил приобрести пластинку, одна сторона которой отражает молекулы абсолютно упруго, а другая — неупруго, и, вырезав из нее два одинаковых по площади диска, насадить их на стержень (конечно, невесомый), предварительно развернув на  $180^\circ$  их плоскости относительно друг друга, а затем этот стержень укрепить на вертикальной оси, конечно, без трения. И он даже нарисовал это устройство (рис.1, вид сверху). На этом рисунке он обозначил и площадь дисков  $S$ , и среднюю тепловую скорость молекул газа  $v$ , и линейную (окружную) скорость дисков  $u$  в данное мгновение, а круглой стрелкой показал ожидаемое направление вращения всего устройства. При этом он принял, что левая поверхность верхнего диска отражает молекулы упруго, а правая — неупруго.

## Еще один вечный двигатель?

### А. СТАСЕНКО

*Первые проекты механического вечного двигателя относятся к 13 веку (Виллар де Оннекур, 1245, Пьер де Марикур, 1269, Франция) ... С 1775 года Парижская Академия наук отказалась рассматривать проекты вечного двигателя.*

Физический энциклопедический словарь

**П**РОЕКТЫ вечных двигателей запрещено рассматривать, чтобы не тратить напрасно время. Но иногда полезно порассуждать и понять, действительно ли некую машину можно отнести к классу запретных «вечных двигателей».

Так вот, один вдумчивый школьник слышал, что молекулы при столкновении со стенкой могут терять определенную часть импульса, а в предельных случаях — отражаться абсолютно упруго (изменяя скорость нормально-го удара на обратную без изменения

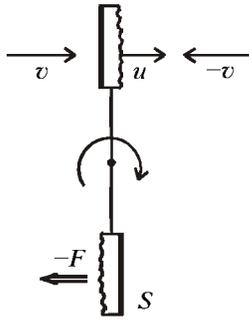


Рис. 1

Разумеется, школьник понимал, что молекулы газа движутся равновероятно во всех направлениях, но рисовать их все он не стал, ибо его интересовали только те, которые движутся по направлению к диску или от него. А таких, согласно привычной школьной оценке, в единице объема было  $n/6$  ( $n$  – концентрация молекул, «шесть» – это число сторон куба: вверх – вниз, вправо – влево, вперед – назад). Значит, плотность потока молекул (т.е. число молекул, попадающих на единицу площади в единицу времени), догоняющих слева верхний диск, равна  $(n/6)(v - u)$  (легко проверить: при  $u = v$  эти молекулы не догонят диск и не столкнутся с ним). Далее, каждая молекула ударяется о левую

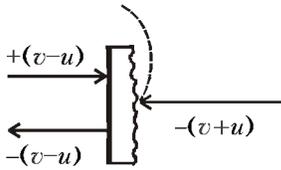


Рис. 2

поверхность диска со скоростью  $+(v - u)$  (в его системе координат) и, согласно условию упругости удара, отражается обратно с той же по величине скоростью (опять же, в системе диска), но с другим знаком (рис.2):  $-(v - u)$ . Значит, в неподвижной (лабораторной) системе координат ее скорость после отражения будет  $-(v - u) + u = -v + 2u$ , а изменение импульса одной молекулы составит  $m(-v + 2u) - mv$ . Такой же по величине, но противоположный по знаку импульс получит верхний диск. А умножив его на соответствующую плотность потока молекул и на площадь диска, найдем силу, действующую на верхний диск слева:

$$\frac{n}{6}(v - u)m(2v - 2u)S = \frac{nmS}{6}2(v - u)^2.$$

Проведем аналогичные рассуждения для правой поверхности верхнего диска. В системе диска скорость перед ударом  $-(v + u)$ , а после удара 0.

Скорость после удара в лабораторной системе равна  $u$ , изменение скорости молекулы в лабораторной системе составляет  $u - (-(v + u)) = u + v$ . Плотность потока молекул, налетающих справа на верхний диск, равна  $(n/6)(v + u)$ , так что суммарная сила, действующая на диск справа, будет

$$-\frac{nmS}{6}(v + u)^2.$$

Можно далее учесть, что произведение  $nm$  равно плотности газа  $\rho$ , и записать силу, действующую на верхний диск, в виде

$$F = \frac{\rho S}{6}(2(v - u)^2 - (v + u)^2) = \frac{\rho S}{6}(v^2 + u^2 - 6vu).$$

Такая же по величине, но противоположная по направлению сила будет действовать на нижний диск, так что система начнет вращаться под действием пары сил как раз в том направлении, которое указано на рисунке 1.

Ясно, что каждая из сил обратится в ноль (и вращение перестанет ускоряться) при условии

$$u^2 - 6vu + v^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, наш исследователь получил установившуюся линейную скорость:

$$u_{\infty} = 3v \pm \sqrt{9v^2 - v^2} = v(3 \pm 2\sqrt{2})$$

и, конечно, выбрал отрицательный знак, чтоб не смешить людей – не может ведь диск двигаться быстрее молекул.

Итак, установившаяся окружная скорость дисков  $u_{\infty} = v(3 - 2\sqrt{2}) = 0,172v$  получилась заметно меньше тепловой скорости молекул, поэтому способный изобретатель догадался пренебречь ее квадратом в выражении для  $F$ , так что уравнение, описывающее второй закон Ньютона для диска, приобрело вид следующего линейного дифференциального уравнения относительно  $u$ :

$$\frac{du}{dt} = \rho \frac{vS}{m} \left( u - \frac{v}{6} \right) = \frac{u - v/6}{\tau}$$

Даже не решая это уравнение, можно кое-что сказать. Из него, в частности, видно, что ускорение с ростом  $v$  уменьшается и обращается в ноль при  $u_{\infty} = v/6 = 0,167v$ , что действительно близко к найденному ранее значению. А постоянная величина  $\tau = m/(\rho v S)$  в знаменателе правой части уравнения называется *временем релаксации*. Например, если взять  $m = 1$  г,  $\rho = 10^{-5}$  кг/м<sup>3</sup>,  $v \sim 300$  м/с,  $S = 1$  см<sup>2</sup>,

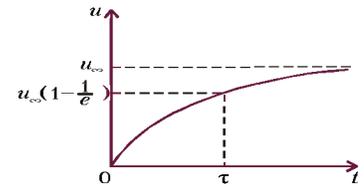


Рис. 3

получится  $\tau \approx 3 \cdot 10^3$  с  $\sim 1$  ч. Это – время, за которое почти достигается «предельное значение скорости»  $u_{\infty}$  (см. рис.3).

Тут надо обратить внимание, что вся теория построена для свободномолекулярного режима обтекания дисков, поэтому наш изобретатель и взял плотность газа на пять порядков ниже, чем для обычного воздуха. Тогда и длина свободного пробега молекул увеличится на пять порядков и, таким образом, вместо  $10^{-7}$  м станет как раз 1 см, что уже сравнимо с принятым размером диска.

Итак, устройство должно вращаться вечно. К нему даже можно сделать привод и заставить совершать полезную работу. Однако никакого отношения к тому вечному двигателю, который отказывалась рассматривать французская академия, наше устройство не имеет. Оно ведь не пытается родить энергию «из ничего»: диски получают энергию при соударениях молекул со стенками сосуда, которые поддерживаются при постоянной температуре. Так что закон сохранения энергии не нарушается.

Казалось бы, все в порядке, и остается только «изобрести» диски нужной конструкции. Необходимо добиться, чтобы с одной поверхностью молекулы соударялись упруго, а с другой – неупруго. Но оказывается, здесь нашего изобретателя подстерегает немалая опасность. Он очень легко может пойти по ложному пути и увязнуть в тщетных попытках сконструировать нечто столь же невозможное, как и вечный двигатель.

«Зеркальность» упругой поверхности равносильна предположению о ее термодинамическом равновесии с газом: молекулы стартуют с поверхности с такой же средней скоростью, как и падают на нее (температуры газа и поверхности одинаковы). Но как сделать другую поверхность «неупругой»?

Рассмотрим два варианта подхода к решению проблемы. В одном из них (назовем его «механическим») поверхность делают пористой: молекулы, попадающие внутрь цилиндрических пор, ударяются о ее «зеркальные» стенки, а каждая пора, плавно искривляясь под

прямым углом, выбрасывает молекулу в конце концов сбоку от пластинки (см. рис. 2).

Другой подход можно назвать «термическим»: специальная жидкость (например, жидкий азот или гелий) постоянно охлаждает «неупругую» поверхность, и средняя энергия отлетающих молекул, определяемая температурой поверхности, будет гораздо меньше, чем энергия падающих молекул.

Какой же из вариантов выбрать? Может показаться, что первый проще и экономичнее: не нужно тратить усилий на поддержание запасов охлаждающей жидкости, а для вращения устройства нужно только поддерживать стенки сосуда при постоянной температуре. Возможно, что такое устройство представляло бы собой нечто замечательное и для человечества весьма полезное. Ведь никто не говорит, какой именно должна быть температура стенок. Можно поместить миллион та-

ких устройств в океан и качать сколько угодно энергии, а потери энергии будут постоянно компенсироваться солнечными лучами. Но люди давно поняли, что подобные устройства – которые могли бы работать за счет энергии *одного* теплового резервуара – ничем не отличаются от вечного двигателя. Их даже тоже называли вечными двигателями, но *второго* рода. На попытки сконструировать такой двигатель было затрачено, неверное, не меньше усилий, чем на создание обычных вечных двигателей (*первого* рода), – но безуспешно. И это, конечно, неслучайно. На пути изобретателей стоял второй закон (второе начало) термодинамики. Одна из формулировок этого закона гласит: «Невозможен процесс, единственным результатом которого было бы превращение в работу теплоты, взятой из резервуара при постоянной температуре». Или так: «Невозможно существование циклической машины,

работающей за счет энергии одного теплового резервуара».<sup>1</sup> Так что «механический» подход к конструированию неупругой поверхности не может быть успешным (кстати – подумайте, почему он не будет работать).

А вот второй, «термический», подход – с использованием охлаждающей жидкости – не противоречит второму закону термодинамики. Ведь кроме «нагревателя» в виде стенок сосуда здесь присутствует и «холодильник» в виде жидкого азота. Но, к сожалению, эффективность такого устройства вряд ли будет высокой.

Итак, ничего вечного и дарового не существует. Хотя, конечно, жаль.

<sup>1</sup> Затронутая здесь тема (второе начало термодинамики и вечные двигатели второго рода) обсуждаются также в статье «О квантовой природе теплоты». (Прим. ред.)

## Закон электромагнитной индукции или «правило потока»?

М. ЛИВШИЦ

В ФИЗИКЕ возможны (хотя и редко) ситуации, когда одна и та же формула допускает различное содержание, т.е. описывает разные по сути физические законы. Рассмотрим один такой случай, связанный со знаменитым законом электромагнитной индукции, открытым Фарадеем.

«Правило потока» как объединение двух законов. Физический смысл закона Фарадея заключается в том, что изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. А именно, при изменении *во времени* магнитного потока ( $\Phi$ ), пронизывающего поверхность, ограниченную замкнутым *неподвижным* проводником, в этом проводнике индуцируется ЭДС ( $E_i$ ), равная по величине и противоположная по знаку скорости

изменения этого потока:

$$E_i = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad (*)$$

Это соотношение называют также «правилом потока».

Однако формулу (\*), называя по-прежнему законом электромагнитной индукции, в ряде учебников, в том числе и школьных, понимают более широко, включая еще одну причину возникновения ЭДС в проводящем контуре. Этой причиной является сила Лоренца, т.е. сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле. Величина этой силы равна

$$F_L = qvB \sin \alpha,$$

где  $q$  – величина заряда,  $v$  – скорость его движения,  $B$  – модуль вектора

магнитной индукции поля, в котором движется заряд,  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Направление силы Лоренца определяется известным правилом левой руки.

Рассмотрим простейший случай движения проводника в магнитном поле, показанный на рисунке 1. Под действием силы Лоренца свободные электроны в проводнике (пластинке) перемещаются так, что нижний конец пластинки заряжается отрицательно,

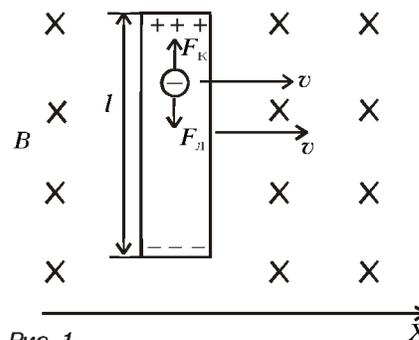


Рис. 1

а верхний – положительно. Это происходит до тех пор, пока возникающее из-за смещения электронов электрическое поле не начнет действовать на электроны кулоновской силой, равной по величине и противоположной по направлению силе Лоренца. Таким образом действие силы Лоренца на свободные заряды проводника, движущегося в магнитном поле, приводит к возникновению ЭДС индукции. Хотя

эта ЭДС не имеет никакого отношения к закону электромагнитной индукции Фарадея, оказывается, что ее можно описать точно такой же формулой. Действительно, напряженность наведенного в проводнике электрического поля равна

$$E = -\frac{F_{\text{Д}}}{q} = -vB,$$

а ЭДС индукции –

$$E_i = EI = -vBl = -\frac{\Delta x}{\Delta t} Bl = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Но в данном случае под  $\Delta \Phi$  понимается не величина изменения во времени магнитного потока, пронизывающего данный контур (как в законе Фарадея), а величина магнитного потока, *пересекаемого движущимся* проводником за время  $\Delta t$ . Для замкнутого контура, перемещающегося или деформируемого в магнитном поле, под  $\Delta \Phi$  понимается происходящее при этом изменение магнитного потока через этот контур.

Обобщение формулы ЭДС электромагнитной индукции, или «правила потока», на движение проводника в магнитном поле (говорят еще – на явление пересечения проводником линий магнитной индукции) можно использовать при решении широкого круга задач – для сколь угодно сложной конфигурации проводящего контура и для любого характера движения его частей (надо только применить этот расчет к отдельным элементам сложного контура и просуммировать результат). Часто гораздо удобнее вычислять величину ЭДС, индуцируемой при движении проводника в магнитном поле, пользуясь «правилом потока», а не прямым вычислением работы силы Лоренца.

Итак, «правило потока» утверждает, что ЭДС в контуре равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока через данный контур независимо от того, меняется ли величина потока из-за изменения магнитного поля во времени при неподвижном контуре, или в результате перемещения или деформации контура, или из-за того и другого вместе.

**Парадоксы, парадоксы...** Так может быть, и не стоит различать причины возникновения ЭДС индукции и считать «правило потока» фундаментальным обобщением закона электромагнитной индукции? Оказывается, стоит, иначе такое отношение к «правилу потока» может вести к парадоксам. Вот несколько примеров.

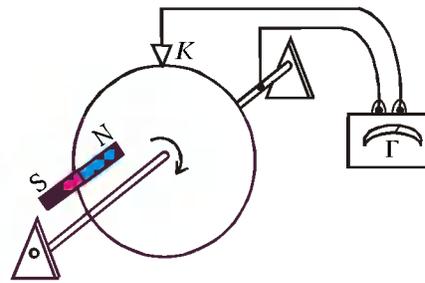


Рис. 2

1) *Магнитный поток, пронизывающий контур, остается неизменным:  $\Delta \Phi / \Delta t = 0$ , а ЭДС создается (рис.2).*

Когда медный диск вращается, контур тока, казалось бы, не изменяется, проходя в пространстве по диску от контакта К к его оси, следовательно, магнитный поток через контур остается постоянным. Но физически эта часть контура осуществляется меняющимися в процессе вращения участками диска, поэтому на свободные электроны в диске, обладающие из-за его вращения скоростью, действует сила Лоренца и возникает ЭДС индукции.

2) *Изменение магнитного потока сквозь контур не приводит к возникновению ЭДС индукции (рис.3).*

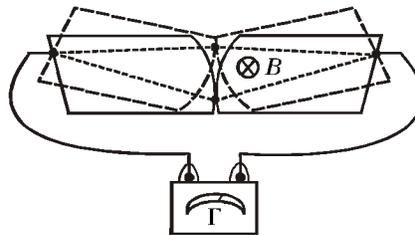


Рис. 3

При повороте металлических пластин с несколькими изогнутыми поверхностями соприкосновения, помещенных в однородное магнитное поле, перпендикулярное их плоскости, на некоторый угол магнитный поток через цепь, замыкающуюся в пластинах по точечным линиям, изменяется на большую величину. Однако поворот пластин связан с незначительным их перемещением, при котором произведение  $vB$  в формуле для силы Лоренца близко к нулю, поэтому ЭДС индукции практически отсутствует.

В чем же причина этих парадоксов?

В тех случаях, когда справедлив закон электромагнитной индукции, ЭДС существует вдоль данного геометрического контура независимо от того, материализуется этот контур или нет. В противоположность этому, для существования ЭДС индукции, порождает-

мой силой Лоренца, совершенно необходимо, чтобы контур был о веществе, т.е. представлял собой проводник. Именно в этом и состоит принципиальное различие явлений возникновения ЭДС индукции, вызываемых действием двух разных законов, объединенных одной формулой «правила потока». Эта формула и оказывается именно правилом, а не законом. Но «нет правил без исключений». Вот мы и познакомимся с исключениями из «правила потока».

А как избежать ошибок при использовании такого удобного правила и не наткнуться как раз на исключение?

Оказывается, имеется надежный ориентир: необходимо проверять, чтобы все время сохранялось точное соответствие между *физическим* контуром, состоящим из проводников, и *геометрическим* контуром, по которому вычисляется наводимая ЭДС. При нарушении такого соответствия необходимо вычисления производить отдельно: по закону Фарадея или непосредственно с помощью силы Лоренца. Иначе, как показывают приведенные выше примеры, возможны ошибки.

**Примечание редактора.** Тот факт, что две физически различные ситуации описываются одним и тем же законом, отнюдь не является случайным. Он находит полное объяснение в теории относительности Эйнштейна. Так, при равномерном приближении проводящего контура к неподвижному магниту возникновение тока в контуре объясняется действием силы Лоренца. Но если перейти в систему отсчета, связанную с контуром, то возникновение тока объясняется действием вихревого электрического поля. Подробнее об этом рассказывает, например, в статье А.Черноуцана «Электромагнитная индукция и принцип относительности», опубликованной в Приложении к журналу «Квант» №5, 95.

# Поле заряженной плоскости

Д. АЛЕКСАНДРОВ

**КАКОЕ** поле создает равномерно заряженная плоскость? Ясно, что вблизи — однородное, а очень далеко — похожее на поле точечного заряда. Например, для поля на оси равномерно заряженного плоского диска радиусом  $R$  зависимость  $E_x(h)$  можно ожидать примерно такую, как показано на ри-

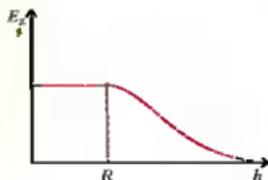


Рис. 1

сунке 1. А какое поле будет тогда снаружи плоского конденсатора, т. е. системы двух стоящих рядом пластин (дисков), равномерно заряженных одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами?

Чтобы найти  $E_x(h)$ , нужно, в соответствии с принципом суперпозиции, сложить поля двух пластин. Так, поле на расстоянии  $h$  от ближней пластины равно разности (так как заряды пластин разных знаков) полей  $E(h)$  и  $E(h+d)$ , где  $d$  — расстояние между пластинами. Если  $d \ll R$ , как это обычно и бывает у плоского конденсатора, разность можно заменить производной:

$$E_x(h) = E(h+d) - E(h) = E'(h) d.$$

График ожидаемой зависимости  $E_x(h)$  приведен на рисунке 2.

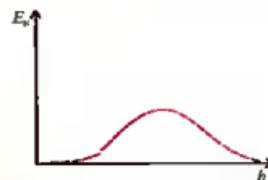


Рис. 2

Поле конденсатора максимальным, где поле одной пластины меняется наиболее быстро. Но, с другой стороны, силовые линии поля снаружи конденсатора выходят перпендикулярно пластинам и далее могут только расходиться (рис. 3). Поэтому напряженность должна монотонно убывать и не может иметь максимума.

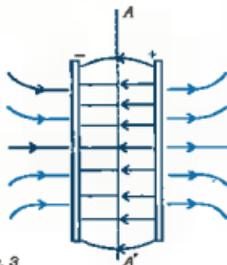


Рис. 3

Полученное противоречие заставляет более аккуратно рассмотреть поле, создаваемое равномерно заряженной плоскостью. Лучшее всего его честно посчитать.

Возьмем равномерно заряженный диск радиусом  $R$  и найдем поле на его оси, воспользовавшись принципом суперпозиции. Маленький кусочек диска площадью  $\Delta S$  имеет заряд  $c\Delta S$  и создает в точке наблюдения поле  $\Delta E = k\sigma\Delta S/l^2$  (рис. 4). Ясно, что в окончательный результат дает вклад только перпендикулярная составляющая поля, поэтому будем учитывать толь-

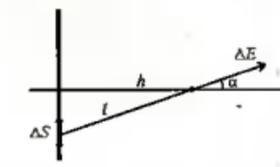


Рис. 4

ко ее

$$\Delta E_{\perp} = \Delta E \cos \alpha = \frac{k\sigma\Delta S \cos \alpha}{l^2}.$$

Если вы знаете, что такое телесный угол, то заметите, что  $(\Delta S \cos \alpha)/l^2$  как раз равно телесному углу, под которым виден кусочек  $\Delta S$  из точки наблюдения; следовательно, суммарное поле равно телесному углу, под которым виден весь диск, умноженному на  $k\sigma$ .

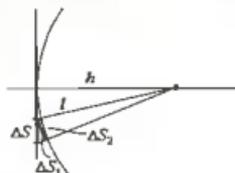


Рис. 5

Для тех, кто не знаком с телесным углом, сделаем следующее.

Проведем сферу с центром в точке наблюдения и касающуюся диска (рис. 5). Тогда поле  $\Delta E_{\perp}$  можно выразить следующим образом:

$$\Delta E_{\perp} = \frac{k\sigma\Delta S \cos \alpha}{l^2} = k\sigma \frac{\Delta S_1}{l^2} = k\sigma \frac{\Delta S_2}{h^2},$$

где  $\Delta S_1 = \Delta S \cos \alpha$  и  $\Delta S_2 = \Delta S_1 \frac{h^2}{l^2}$ . Просуммировав по всем кусочкам, получим, что полное поле равно  $k\sigma S/h^2$ , где  $S$  — площадь, вырезаемая на нашей сфере конусом с вершиной в точке наблюдения и диском в качестве основания. Найдите самостоятельно эту площадь и убедитесь, что

$$S = 2\pi h^2(1 - \cos \alpha) = 2\pi h^2 \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right),$$

а значит,

$$E = 2\pi k\sigma \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right).$$

Проверьте также, что при  $h \gg R$  эта формула переходит в такую:

$$E = k \frac{\pi R^2 \sigma}{h^2}.$$

Из графика на рисунке 6, где изображена найденная зависимость  $E(h)$ , видно, что поле вблизи пластины меняется быстрее всего, т. е. в каком-то смысле оказывается наиболее неоднородным.

Теперь нетрудно найти и поле снаружи конденсатора. Будем считать, что



Рис. 6

$d \ll R$ . Тогда

$$E_x = E(h) - E(h+d) = -E(h) \cdot d = \frac{2\pi k \sigma R^2 d}{(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

При  $h \ll R$

$$E_x = 2\pi k \sigma \frac{d}{R} = E_{\text{внутри}} \frac{d}{2R} \quad (*)$$

т.е. поле действительно мало.

Раз на внешних сторонах пластины начинаются и заканчиваются силовые линии, там должны быть заряды. Формула (\*) позволяет найти связь между поверхностными плотностями заряда на внутренней и внешней сторонах пластины:

$$\sigma_{\text{снаружи}} = \sigma_{\text{внутри}} \frac{d}{2R}$$

Отсюда также следует, что реальная емкость плоского конденсатора больше, чем дает пренебрегающая краевы-

ми эффектами формула  $C = S/(4\pi k d)$ , так как эффективная площадь пластин больше  $S$  из-за того, что у них работают еще и внешние стороны.

Теперь поговорим о потенциале. Если скажем, конденсатор заряжен до разности потенциалов  $U$ , то чему равны потенциалы пластин относительно бесконечности?

При обсуждении подобных вопросов полезен следующий факт: у симметричного конденсатора (пластины одинаковой формы, стоящие параллельно) потенциал точки посередине между пластинами равен потенциалу бесконечности. В этом можно убедиться, посмотрев на картину силовых линий поля конденсатора (см. рис. 3). Из симметрии очевидно, что уходящая в бесконечность плоскость  $AA'$  всюду перпендикулярна силовым линиям и поэтому является эквипотенциальной поверхностью. (Предполагается, что кроме конденсатора никаких зарядов во вселенной нет.) Потенциалы пластин относительно бесконечности совпадают, таким образом, с потенциалами пластины относительно середины конденсатора, т.е. они равны  $\pm U/2$ .

Если от внешней стороны отрицательной пластины заряженного но прикрепив  $U$  конденсатора отрывается электрон, то его скорость в бесконечно-

сти можно найти на уравнении

$$\frac{mv^2}{2} = e \frac{U}{2}$$

(начальной скоростью электрона пренебрегаем). Эта простая задача дает пример ситуации, когда принципиально нельзя пренебречь крайними эффектами.

В заключение заметим, что поле снаружи и заряд на внешней стороне обкладок — неприятности не только плоского конденсатора. Легко показать, что любой заряженный конденсатор создаст вокруг себя поле и, следовательно, имеет заряды на внешних сторонах обкладок, так как силовым линиям нужно где-то начинаться и заканчиваться. В самом деле, работа электростатического поля при переносе заряда с одной клеммы на другую не зависит от маршрута. Переноса заряд как вне конденсатора, так и внутри его, мы получим одинаковые работы. Поэтому, если поле есть внутри конденсатора, то оно есть и снаружи. Можно, конечно, попытаться «запереть» поле, например, между двумя сферами. Но чтобы эта система стала конденсатором, нужно иметь возможность подолзаться к внутренней сфере. Придется сверлить дырочку, через которую поле и заряд вырвется наружу. Так что ничего у нас не получится.

## ИНФОРМАЦИЯ

### Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучать физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, и прежде всего — на физический факультет МГУ.

Физический факультет МГУ готовит физиков — теоретиков и экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений — таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика, ком-

Фамилия, имя, отчество  
Класс ЗФШ  
Профессия родителей  
Подробный домашний адрес  
Номер и адрес школы

Пыров Юрий Андреевич  
10  
мать — инженер, отец — врач  
120713 г.Тула, ул.Лермонтова, д.24, кв.26  
школа №444, Огородный пр, д.11

пьютерная физика и математические моделирование.

Выпускникам физического факультета присваивается степень магистра.

Применяется ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже.

Решение вступительного задания необходимо отослать до 1 сентября по адресу: 119899 Москва, ГСП, Воробьевы горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.

В письме вложите два экземпляра анкеты, заполняемой на листах плотной бумаги размером  $7 \times 12$  см по приведенному здесь образцу, и конверт с Вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября

Принадлежит в ЗФШ в течение года

высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет удостоверяет об окончании ЗФШ учитываться приемной комиссией).

Для проживающих в Москве и Московской области имеется вечерняя физическая школа.

Справки по телефону (095) 939-38-78 с 16 до 18 часов по рабочим дням.

(Продолжение см на с. 46)

# Отгадать слово

Е.ГИК

ЭТА УВЛЕКАТЕЛЬНАЯ игра, появившаяся в 70-е годы, богаче и глубже большинства словесных игр. Для успеха в ней важна не только эрудиция играющих, но и умение логически мыслить. Можно сказать, что игра *отгадать слово* представляет собой некоторую смесь словесной игры с логической.

Играют двое. Один игрок задумывает слово из пяти разных букв, а другой должен его отгадать. С этой целью он называет одно за другим разные слова,

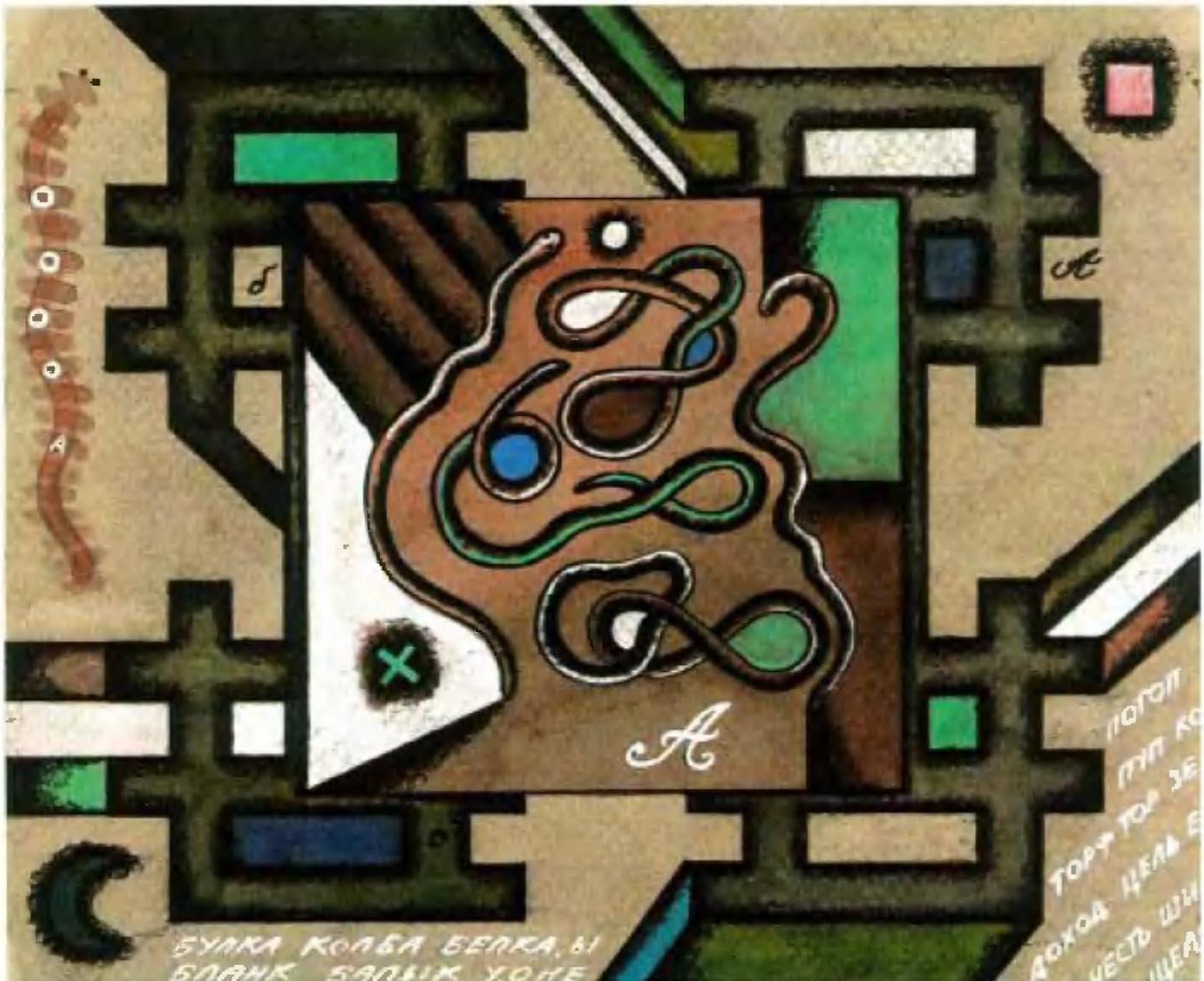
состоящие из любого числа букв, не обязательно разных, на каждое из которых партнер дает ответ. А именно — он сообщает число вхождений букв задуманного слова в названное, при этом каждая буква задуманного учитывается в ответе столько раз, сколько содержится в ответе.<sup>1</sup>

Приведем пример. Пусть наш парт-

<sup>1</sup> Эта игра сходна с числовой игрой «быки и коровы», где нужно отгадывать задуманное число, называя различные комбинации цифр.

нер задумал слово *колба*, а мы назвали слово *оборона*. Тогда он должен ответить числом 5. В самом деле, буквы *к* и *л* не входят в названное слово, буква *о* входит 3 раза, буквы *а* и *б* — по 1 разу. Итого:  $0 + 3 + 0 + 1 + 1 = 5$ .

Называя слово и получая ответ, мы всякий раз делаем определенные выводы относительно задуманного слова. Так, ответ 5 на слово *оборона* означает, что в задуманном слове есть *о* (иначе наибольший ответ равен 4), а также две буквы из четырех *б, р, н, а*. Ответ 0 означал бы, что в слове нет ни одной из пяти букв названного; ответ 1 или 2 — что содержится только одна или две буквы из четверки и нет *о*; ответ 3 — что есть *о*, но нет букв этой четверки, или, наоборот, есть три буквы из этих четырех, но нет *о*; наконец, при ответе 4 делаем вывод, что в задуманном слове есть *о*, а также одна из четырех букв



**б, р, н, а**, или все эти четыре буквы вместе, но тогда отсутствует **о**.

Извлекая на каждом ходу некую информацию о слове партнера, мы делаем ход за ходом, пока не получим ответ: «отгадал».

Естественно, слова задумывают оба игрока, а побеждает тот, кто отгадывает слово противника за меньшее число ходов. Как обычно, и задуманное слово, и ходы должны быть существительными нарицательными, в единственном числе. Делать ходы не обязательно по очереди, важно лишь общее число слов. При большом количестве партий в каждой из них можно учитывать не только, кто раньше отгадал слово, но и на сколько ходов быстрее.

Разберем несколько партий. Будем встуду исходить из того, что слово задумывает партнер, а нам надо его отгадать. Рядом со словами указаны ответы противника на них.

## Партия 1

### 1. перевал 2

В начале игры имеет смысл ходить словами, в которых много гласных — их в русском языке меньше, чем согласных, и значит, есть шансы быстрее отгадать. Для определения одной конкретной буквы лучше воспользоваться словом с большим числом ее вхождений. Например, на слово **обороноспособность** ответ, меньший 7, означает, что буква **о** отсутствует, а ответ 7 или больше — что она почти наверняка есть. Конечно, вопрос о букве **о** решает и ход **око** (или **боб**), но он дает нам меньше информации о других буквах.

В данной партии первый ход позволил сделать следующий вывод: либо в задуманном слове есть буква **е** и нет букв **п, р, в, а, л**, либо есть две буквы из этой пятерки, но нет **е**. Цель второго хода — разобраться в ситуации.

### 2. свалка 0

Ответ 0 всегда радует, так как дает возможность выбросить из рассмотрения сразу несколько букв. В данном случае мы видим, что в задуманном слове нет букв **в, а, л** (и, очевидно, **с** и **к**), значит, с учетом первого хода, оно содержит либо **е**, либо одновременно **п** и **р**.

### 3. поп 0

Итак, второй вариант отпадает, буквы **п, а** значит, и **р**, нет, а есть **е**.

### 4. факультатив 4

Так как мы уже знаем, что букв **а, к, л, в** нет, последний ответ означает, что по сути нам надо проанализировать следующую ситуацию с фиктивным словом:

### фуйтти 4

Пусть в задуманном слове нет **т**, тогда оно содержит все оставшиеся буквы, т.е. **ф, у, в, и**. Поскольку **е** уже найдена раньше, искомое слово должно состоять из букв **ф, у, в, и, е**. Но собрать из них какое-нибудь слово невозможно (это уже не логический, а чисто словесный анализ). Таким образом, в задуманном слове обязательно присутствует **т** и, кроме того, есть **е** и две буквы из четырех: **ф, у, в, и**.

Очередными ходами мы могли бы найти две эти буквы и недостающую пятую. Но попробуем получить больше информации, не делая ходов (самое тонкое место партии!). Две буквы из четырех можно выбрать шестью способами. Добавляя к каждой паре буквы **е** и **т**, получаем шесть возможных комбинаций: 1) **ф, у, е, т**; 2) **ф, в, е, т**; 3) **ф, и, е, т**; 4) **у, в, е, т**; 5) **у, и, е, т**; 6) **в, и, е, т**.

Внимательный анализ показывает, что последние три из них при любом возможном добавлении пятой буквы не могут образовать слова<sup>2</sup>. Что же касается трех первых комбинаций, то добавляя к первой **б** или **э**, ко второй **н** или к третьей **ш**, получаем четыре возможных слова: **буфет** или **фуэте**, **нефть** и **фетиш**. Конечно, анализ потребовал большого перебора вариантов, но зато мы не сделали ни одного лишнего хода!

Итак, осталось выяснить, какая из четырех букв — **б, э, н, ш** — входит в задуманное слово. Хотелось бы справиться с этой задачей в один ход. Для этого надо подобрать слово, в котором одна из этих букв не содержится вовсе, а три другие содержатся, но в разном количестве. К сожалению, буквы, которые должны входить в это слово, встречаются вместе нечасто, а в нужных пропорциях, по-видимому, не встречаются вовсе. Так что одним ходом не обойтись.

### 5. банан 1

Нам повезло! Ответ показывает, что в слове есть **б**, и следующий ход завершает игру.

### 6. буфет отгадал

При ответе на пятом ходу 0 нельзя было бы выбрать, какая из двух букв, **э** или **ш**, входит в задуманное слово, и потребовался бы еще один ход.

*Замечание.* В ситуации, сложившейся на 4-м ходу, могло бы помочь такое наблюдение: в искомом слове **ш** может встречаться только в компании с **и** (в других вариантах нет ни той, ни другой буквы), а **н** — только в сочетании с **в**. Учитывая это, удалось

<sup>2</sup> Мы здесь различаем **е** и **ё**, иначе варианты 4) и 6) дадут соответственно **дутье** и **житье**.

сконструировать слово, которого, к сожалению, нет ни в одном словаре, хотя смысл его совершенно прозрачен: **бесшшность**. В нем есть **е**, которая встречается во всех словах-кандидатах, но вовсе нет **э**, всего одна **б**, **ш** вместе с **и** и два **н** вместе с **в**. Ответ 1 в этом случае будет означать, что нужная нам буква — **э** (**фуэте**), 2 — что это **б** (**буфет**), 3 — **ш** и **и** (**фетиш**), 4 — **н** и **в** (**нефть**).

## Партия 2

### 1. карел 3

### 2. креол 2

Поскольку четыре буквы у этих двух слов общие, а ответы разные, делаем вывод, что буква **а** в задуманном слове есть, а буквы **о** нет. Кроме того, из ответа на второй ход следует, что из четырех букв **к, р, е, л** в нем есть две. Шесть возможных вариантов запишем следующим образом:

- 1) **а, к, р (е, л, о)**;
- 2) **а, к, е (р, л, о)**;
- 3) **а, к, л (р, е, о)**;
- 4) **а, р, е (к, л, о)**;
- 5) **а, р, л (к, е, о)**;
- 6) **а, е, л (к, р, о)**.

Здесь перед скобками записаны буквы, которые искомое слово может содержать, а внутри скобок буквы, которых в этом случае точно нет.

### 3. бекон 3

Три буквы из четырех (**о** отсутствует) можно выбрать четырьмя способами:

- 1) **б, е, к (о, н)**;
- 2) **б, е, н (к, о)**;
- 3) **б, к, н (е, о)**;
- 4) **е, к, н (б, о)**.

Комбинируя шесть вариантов (1) с четырьмя вариантами (2), получаем  $6 \times 4 = 24$  комбинации. Однако не все они совместны. Так, не могут сочетаться первые возможности в (1) и (2): с одной стороны буквы **е** в искомом слове нет, а с другой — есть. Анализ показывает, что из 24 вариантов совместными являются только шесть:

- 1) **к, а, р, б, н (е, л, о)**;
- 2) **к, а, е, б (р, л, о, н)**;
- 3) **к, а, е, н (б, р, л, о)**;
- 4) **к, а, л, б, н (р, е, о)**;
- 5) **а, р, е, б, н (к, л, о)**;
- 6) **а, е, л, б, н (к, р, о)**.

### 4. абрис 1

Учитывая, что в слове есть **а**, делаем вывод, что в нем нет **б**, и значит, из шести вариантов остается только третий.

### 5. брошь 1

Букв **б, р, о** в слове нет, и получаем, что есть **ш** или **в**. Итак, имеем две возможные пятерки: **к, а, е, н, в** или **к, а, е, н, ш**. Из первой слово образо-

вать нельзя, а из второй можно — **кашне**. Следующий ход завершает партию.

#### 6. **кашне** отгадал

Понятно, что если все пять букв задуманного слова найдены, то это еще не конец игры. Ведь не исключено, что из этой пятерки можно составить несколько слов-анаграмм. Если, определив пять букв, мы натолкнулись на блок анаграмм, то понадобятся дополнительные ходы.

### Партия 3

1. **тапок** 5
2. **капот** 5
3. **покат** 5
4. **топка** отгадал

В этом примере, который можно считать эндшпилем более длинной партии, определив пять букв задуманного слова, мы вынуждены сделать еще три хода, чтобы завершить игру: дела сложились не лучшим образом.

Может показаться, что загадывать слова-анаграммы выгодно, поскольку при отгадывании всех букв дальнейшие действия партнера придется вести наобум — от него уже ничего не зависит. Но надо учесть, что в больших блоках анаграмм содержится меньше редких букв, и сама пятерка находится быстро. Напомним, что рекордный блок пятибуквенных анаграмм содержит шесть слов: **автор, товар, тавро, отвар, рвота, втора**. Чтобы разобратся с ним, может понадобиться пять слов.

В игре *отгадать слово* возникают интересные и оригинальные задачи. Рассмотрим десять таких задач и заметим, что решение большинства из них нам неизвестно.

По правилам игры ходы представляются собой слова русского языка. А что изменится, если снять это ограничение и разрешить ходить «абстрактными словами», т.е. любым набором букв? Удивительно, но при таком условии игра сильно упрощается...

**Задача 1.** *За сколько ходов можно угадать слово (или пять букв анаграммы), если разрешается ходить абстрактными словами?*

Эта задача носит скорее математический характер, ответ на нее довольно неожиданный — какое бы слово ни было задумано, для его разгадки требуется всего один ход! Он может быть таким:

$$a \underbrace{b \dots b}_{10^4 \text{ раз}} \underbrace{в \dots в}_{10^2 \text{ раз}} \dots \underbrace{я \dots я}_{10^{32} \text{ раз}}$$

Данное «слово» содержит все 33 буквы алфавита, причем **а** — 1 раз ( $10^0$ ),

**б** —  $10^1$  раз и т.д., ... **я** —  $10^{32}$  раз. Ответ позволяет сразу определить пятерку букв задуманного слова. Действительно, если в нем есть **а**, то последней цифрой ответа будет 1, а если **а** нет, то на конце стоит 0. Если слово содержит **б**, то на втором месте справа в ответе стоит 1, в противном случае 0, и т.д. Очевидно, число-ответ состоит из многих нулей (28, если в слове есть буква **я**) и ровно пяти единиц, которые и определяют однозначно пять нужных букв.

Приведем пример. Пусть в ответ на наше абстрактное слово получено число 100 101 011. Это значит, что в задуманном слове имеются буквы: **а** (1 на правом конце), **б** (1 на втором месте справа), **г** (1 на четвертом месте справа), **е** (1 на шестом месте справа) и **з** (1 на девятом месте справа). Итак, задумано слово **забег**.

Конечно, наше волшебное слово имеет астрономическую длину, но в данном случае важно лишь само существование такого универсального хода.

Часто в процессе игры возникает необходимость выяснить, содержится ли в задуманном соперником слове та или иная конкретная буква. В связи с этим любопытна следующая задача.

**Задача 2.** *Для каких букв алфавита можно определить за один ход, содержится ли она в задуманном слове или нет?*

Предполагается, что никакой информацией мы пока не располагаем. Тем не менее почти две трети алфавита — 20 букв из 33 — требуют всего одного хода (см. таблицу). Идея проста — подозреваемая буква должна выделяться числом своих вхождений в названное слово. Проще всего взять слово, состоящее из двух букв — одна содержится два раза, а другая — один. По любому ответу мы сразу определяем, есть ли две эти буквы в слове (или одна из них) или нет. Пусть сделан первый ход **дед**. Если ответ 0, то в искомым слове нет ни **д**, ни **е**. Если ответ 2, то есть **д**, а **е** отсутствует. Наконец, если ответ 3, то в слове есть обе буквы **д** и **е**.

Трехбуквенными словами такого типа можно определить 10 букв. А еще для десяти используются слова большей длины. Девять из них устроены так: они содержат подозреваемую букву и две пары других букв. В результате нечетный ответ (1, 3 или 5) свидетельствует о наличии этой буквы, а четный (0, 2 или 4) — об отсутствии. Для отгадывания буквы **а** тот же прием потребовал семибуквенного слова (с тремя парами посторонних букв). Можно использовать и более короткое, пятибуквенное слово **атака**. Здесь ответ

А	РОТАТОР
Б	БОБ
В	ДОВОД
Г	НАГАН
Д	ДЕД
Е	ДЕД
Ё	ЕЛКА, ЛАК
Ж	ЖАР, АР
З	КАЗАК
И	МИМ
Й	РАЙ, АР
К	ОКО
Л	ШАЛАШ
М	МИМ
Н	КОКОН
О	ОКО
П	ПОП
Р	ТРАТА
С	КОКОС
Т	ПОТОП
У	ПУП
Ф	ТОРФ, ТОР
Х	ДОХОД
Ц	ЦЕЛЬ, ЕЛЬ
Ч	ЧЕСТЬ, СЕТЬ
Ш	ШИШ
Щ	ЩЕЛЬ, ЕЛЬ
Ъ	ВЪЕЗД, ЗЕВ, ДЕД
Ы	ДЫРА, ДАР
Ь	КОНЬ, КОН
Э	ЭРА, АР
Ю	ЮБКА, БАК
Я	ЯБЕДА, БЕДА

3 или больше говорит о том, что буква **а** в слове есть, а меньший ответ — что нет.

Конечно, пятибуквенное слово, служащее для разгадки одной из букв, может не помочь для других букв. Так, если ответом на ход **довод** служит число 2, то мы знаем, что в задуманном слове нет буквы **в**, а есть **д** или **о**, но какая именно — неизвестно. Другое дело, если пятибуквенное слово содержит только две буквы (одну 2 раза, другую — 3), но такого слова нам найти не удалось.

Даже если все буквы имеют разное число вхождений, слово может быть непригодно для их определения. Так, слово **баобаб** содержит три буквы в разном количестве, но при неудачном ответе мы не определим точно, какая из букв содержится в задуманном слове. Действительно, ответ 0 говорит, что нет букв **а**, **б**, **о**, ответ 1 — что есть **о**, но нет **а** и **б**, однако ответ 3 не вносит ясности — из него следует, что либо в слове есть **б** и нет **а** и **о**, либо, наоборот, нет **б**, но есть **а** и **о**.

**Задача 3.** *За какое наименьшее число ходов можно определить, содержится ли данная буква в задуманном слове?*

Оказывается, любую букву (исключая **ъ**) можно «вычислить» не более чем за два хода. Как мы видели, двад-

цать букв находятся за один ход. Для отгадывания еще 12 букв можно брать пару слов: одно из них состоит из букв второго плюс искомая буква (см. таблицу). Одинаковые ответы на эти слова скажут, что в задуманном слове данной буквы нет, а разные – что есть. Например, один и тот же ответ на ходы **рай** и **ар** (0, 1 или 2) означает, что буква **й** отсутствует, а разные (ответы могут отличаться только на 1) – что присутствует.

Для **ъ** удалось найти только трехходовое решение. Интересно, что если буквы **е** и **ё** не различать, то и для **ъ** достаточно пары из двух слов – **мопед**, **подъем**.

Каждый читатель может составить свою собственную таблицу для отгадывания букв в слове противника. На практике, конечно, редко “гонятся” за одной буквой, а делая ход, пытаются извлечь больше информации о задуманном слове.

В следующем примере определить задуманное слово совсем легко.

#### 1. паранет 7

Полученный ответ сразу дает нам пять букв: **а, н, р, е, т** и, стало быть, слово **патер**. Теперь можно сформулировать еще одну задачу.

**Задача 4.** Придумайте как можно более длинное слово, сыграв которым на первом ходу, мы сразу же определим (при удачном ответе) задуманное.

Поскольку семибуквенное слово мы уже знаем, надо вести поиски более длинных слов.

**Задача 5.** Придумайте как можно более короткое слово, сыграв которым на первом ходу, мы сразу определим (при удачном ответе) задуманное.

Эта задача как бы противоположна предыдущей и напоминает ситуацию в «балде». В самом деле, уже на первом ходу, сыграв коротким словом, мы должны отгадать несколько букв – задуманного противником, чтобы затем однозначно дополнить их до самого слова.

Задачи 4 и 5 связаны с отгадыванием слова за один ход. Предположим теперь, что первым ходом мы отгадали четыре его буквы. Например, такое начало:

#### 1. атлет 5

Ответ показывает, что в задуманном слове есть буквы **а, т, л, е**. Осталось определить пятую букву. Разумеется, не стоит использовать для этой цели нашу таблицу. Анализ показывает, что из 29 оставшихся букв алфавита вместе с четырьмя найденными слово могут образовывать целых десять: **б (балет), в (валет, анаграмма ветла), м (метла), н (лента), п (лепта), р (талер), у (алеут), ф (лафет), г**

**(легат), с (стела)**. Возникает такая задача.

**Задача 6.** Придумайте такой первый ход (с соответствующим ответом), после которого четыре буквы задуманного слова определяются сразу, а для пятой остается как можно больше возможностей (может быть, десять букв – это рекорд?).

В последнем примере после первого хода не удастся сразу установить, какая из десяти букв искомая. Получаем еще одну задачу.

**Задача 7.** Какое наибольшее число букв можно расшифровать одним ходом, т.е. определить, какая из них входит в задуманное слово?

Достаточно найти такое слово, в которое бы одна из подозреваемых букв не входила совсем, вторая входила 1 раз, третья – 2, четвертая – 3 и т.д. Очевидно, мы считаем, что четыре буквы нам уже известны. Пусть, например, надо установить, какая из четырех букв **у, е, н, о** входит в задуманное слово. Задачу решает слово **озеленение**, в которое **у** не входит, **о** входит 1 раз, **н** – 2 раза, **е** – 4 раза. Получив ответ, мы немедленно определяем недостающую пятую букву (зная, конечно, информацию о вхождении в задуманное слово букв **з, л, и**).

Буквы **у, о, н, е** в последнем примере выбраны не случайно. Пусть нами сделан такой первый ход:

#### 1. кабала 6

Тогда слово противника содержит все четыре буквы данного – **к, а, б, л**. Какая же буква пятая? Анализ показывает, что найденные буквы можно дополнить до слова пятью способами: **булка, колба (или бокал), белка, бланк, балык**. Итак, остается выяснить, какая из букв **у, о, н, е, ы** пятая в искомом слове, и мы приходим к рассмотренному примеру.

Если на второй ход **озеленение** следует ответ 1, то искомой буквой будет **у** или **ы** (так как есть вхождение **л**, то букв **о, н, е** в слове нет), задумано слово **булка** или **балык**. Следующим ходом игра завершается.

При ответе 2 получаем букву **о**, а следующим ходом разбираемся с анаграммами (**колба** или **бокал**). При ответе 3 имеем букву **н** и слово **бланк**, наконец при ответе 5 – букву **е** и слово **белка**.

В задаче 6 мы имели 10 возможных пятых букв, и их, по-видимому, можно однозначно распознать не менее чем за три хода. В последнем случае у нас пять возможных пятых букв, но уже после следующего хода картина почти полностью проясняется – либо это одна

из букв **о, и, е**, либо одна из букв **у, ы**. Возникает следующая задача.

**Задача 8.** Придумайте партию, в которой на первом ходу отгадываются четыре буквы, для пятой остается как можно больше возможностей, но все они расшифровываются на втором ходу (в задаче 6 это было не обязательно).

В отличие от предыдущей задачи здесь требуется не просто распознать как можно больше букв за один ход, а сделать это так, чтобы соответствующий набор возник как бы в процессе игры, после первого хода.

Предположим теперь, что мы догадались, какое слово задумал противник, назовем его словом-гипотезой. Будем считать, что самим этим словом ходить нельзя. Тогда получаем еще одну задачу.

**Задача 9.** Для  $p = 2, 3, \dots$  придумать такое слово-гипотезу (играть им запрещено), что убедиться в ее правильности нельзя быстрее чем за  $p$  ходов.

Для  $p = 2, 3, 4, 5, 6$  задача решается легко. В качестве слова-гипотезы достаточно взять любого представителя блока анаграмм, содержащего  $(p + 1)$  слово. Так, слово **автор**, как мы знаем, с гарантией определяется только после пяти ходов. А при меньшем числе ходов гипотеза еще не будет подтверждена. Для больших значений  $p$  блоки из  $(p + 1)$ -й анаграммы неизвестны.

Можно придумать и другие остроумные задачи для игры отгадать слово. Многие из них вряд ли удастся решить без серьезного привлечения компьютера к тем или иным словарям русского языка. Во всяком случае, про последнюю задачу, связанную со стратегией игры, это можно сказать с определенностью.

**Задача 10.** Какое наименьшее число слов достаточно назвать, чтобы наверняка отгадать задуманное слово противника?

Опыт игры показывает, что при тонких и внимательных действиях слово удастся определить за 5 – 7 ходов, но доказать это мы не беремся.

# Эти блуждающие ТОКИ

Н. ПАРАВЯН

**Е**ДЕТ ПО ГОРОДУ трамвай. Едет, деловито погромыхая на стрелках и рельсовых стыках. Такая простая, обыденная картина... Но вот на участок дороги, что проходит рядом с трамвайными путями, пришли муниципальные рабочие, вырыли яму, и оказалось, что пролегающий под землей водопровод в нескольких местах сильно поврежден коррозией.

Вообще говоря, коррозия — явление весьма неприятное и вредное. И что она повредила водопровод, конечно, очень плохо. Но как это произошло? Оказывается, виновником стал... трамвайный путь! Попробуем разобраться.

На трамвайные рельсы подается отрицательный потенциал источника постоянного тока, а на контактный провод, подвешенный над путями, — положительный. В том месте, где на стыке рельсов нарушен контакт, а сами рельсы плохо изолированы от почвы, ток, найдя под землей наименьшее электрическое сопротивление в виде подземного водо- или газопровода, труб канализации, оболочки кабеля и т.п., частично ответвляется в землю и блуждает в ней по различным подземным металлическим сооружениям. В другом месте такой ток, называемый *блуждающим*, снова возвращается в рельс. При этом рельсы разрушаются в местах выхода тока в землю, а подземные коммуникации — в местах возвращения тока в рельс. Эти участки называются анодными зонами (рис. 1). Блуж-

дающие токи могут достигать десятков ампер и причинять серьезные разрушения. Например, ток в один ампер, протекающий по металлическому сооружению в течение года, разрушает в анодной зоне примерно 9 кг железа, 36 кг свинца и т.д.

Возможно, вы не очень-то поверили в блуждающие токи: дескать, сказки все это. Что ж, вы можете проверить наличие блуждающих токов экспериментально.

**Опыт 1.** Соберите установку, изображенную на рисунке 2. Для этого согните кусок толстого зачищенного от эмалевой оболочки медного провода в виде буквы «П», соедините его последовательно с реостатом и через амперметр подключите к любому источнику постоянного электрического тока. В цилиндрический стеклянный (или полиэтиленовый) сосуд с низкими бортиками (кристаллизатор или большое фарфоровое блюдечко) налейте 150 мл индикаторного раствора, о приготовлении которого скажем чуть позже. На дно сосуда положите два кусочка стеклянной трубочки, а на них, как на подставку, уложите полоску обычной углеродистой стали, например кусок проволоки или большой железный гвоздь, так, чтобы она была параллельна медному контуру и находилась на небольшом расстоянии от него.

Включите ток в цепи. Пока сопротивление контура — медный провод плюс участок реостата — небольшое, весь ток течет по нему. Теперь увеличьте сопротивление контура, медленно и плавно вводя ползунок реостата, — амперметр покажет уменьшение силы тока в цепи. При этом, как оказывается, часть тока пойдет по пути меньшего сопротивления, т.е. по железу (стали). Это можно увидеть невооруженным глазом. А именно, в том месте

железной пластинки, откуда ток возвращается в медный провод, в растворе появляется синее окрашивание. Оно показывает, что здесь произошло ра-

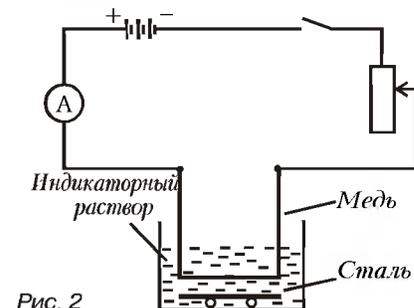
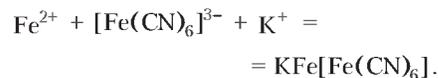


Рис. 2

створение железа:  $Fe^0 - 2e \rightarrow Fe^{2+}$ , а образовавшиеся ионы железа тут же взаимодействовали с красной кровяной солью (она входит в состав индикаторного раствора) и образовали взвесь турбуллевой сини (синего цвета):



В том же месте, где ток вошел в железную пластинку, т.е. вышел из медного провода, индикаторный раствор порозовел, так как здесь образовался избыток отрицательных ионов гидроксидов:  $H_2O + \frac{1}{2} O_2 + 2e \rightarrow 2OH^-$ , из-за которых и окрасился фенолфталеин, также входящий в состав индикаторного раствора.

А индикаторный раствор для этого опыта надо готовить так. Растворите в 100 мл горячей воды 2 г желатина и в еще теплую жидкость добавьте 4 г поваренной соли и 2 г красной кровяной соли, долейте еще 100 мл теплой воды и 10–15 капель спиртового раствора фенолфталеина, хорошо перемешайте раствор и теплым залейте в стеклянный сосуд установки. (Все нужные химикаты можно взять в кабинете химии, где они обычно имеются.) Когда индикаторный раствор окончательно остынет, он превратится в студнеобразную массу. Кстати, желатин нужен для того, чтобы синяя и малиново-розовая окраска не расплылась по всей массе (из-за диффузии), а фиксировались именно в тех местах студня, где образовались катодная и анодная зоны.

Как же бороться с блуждающими токами, этим истинным злом подземных металлических коммуникаций? Для защиты используют так называемый электродренаж, для чего ток от подземных коммуникаций отводят по специально проведенным проводам на

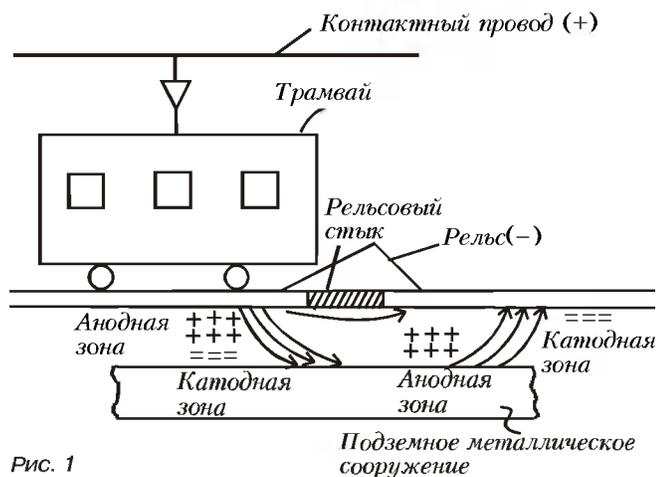


Рис. 1

отрицательный полюс тяговой трамвайной подстанции. При этом рельсы и другие токонесущие конструкции тщательно электроизолируют от почвы, подземные трубопроводы оборачивают бумагой, которую, в свою очередь, пропитывают водонепроницаемым битумом, а в подземных кабелях их внутреннюю, джутовую, обмотку также пропитывают битумом.

Однако под влиянием почвы в изоляции возникают разные дефекты, которые наиболее уязвимы для блуждающих токов. Так что приходится использовать и другие методы защиты. Например, метод катодной защиты, или, как ее еще называют, электрозащиты. Ее суть заключается в следующем. Рядом с корродирующей системой закапывают изолированный от нее кусок старого ненужного железа. Подключив защищаемую систему (кабель, трубопровод) к отрицательному полюсу источника постоянного тока, ее делают катодом, а обреченный на коррозию металлический лом превращают, соответственно, в анод. Если через эту цепь пропустить слабый постоянный ток, защищаемая конструкция останется невредимой, а корродировать будет кусок старого ненужного железа.

Принцип электрозащиты можно смоделировать в виде такого опыта.

**Опыт 2.** Налейте в блюдце 100 мл нового индикаторного раствора (4 г поваренной соли и 2 г красной кровяной соли на 100 мл готового раствора) и положите в него большой железный гвоздь. Через 20 – 25 минут раствор с поверхности железного гвоздя окрасится в синий цвет – произойдет обычная электрохимическая коррозия. И вот почему. Железный гвоздь состоит не из идеально чистого железа, и имеющиеся в нем посторонние примеси образуют множество микрогальванических элементов. Железо, как более электроотрицательный металл, от-

дает свои электроны и переходит в раствор, а посторонние примеси, как менее электроотрицательные (т.е. более электроположительные), принима-

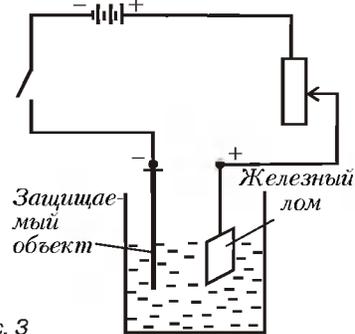


Рис. 3

ют их. В итоге железо разрушается.

Теперь налейте в небольшой стаканчик 100 мл свежей порции того же индикаторного раствора. Новый большой гвоздь присоедините к отрицательному полюсу источника постоянного тока, а железную скрепку либо маленькую железную пластинку – к положительному (рис.3). В этом случае синяя окраска появляется только возле анода (скрепки или пластинки) – ненужного железа.

Существует еще один метод защиты подземных коммуникаций от коррозии – так называемый протекторный метод защиты. Его суть заключается в том, что к корродирующей системе присоединяют кусок металла, имеющего более отрицательный электродный потенциал, нежели металл защищаемой конструкции. Например, к сплаву железа подсоединяют кусок алюминия или цинка. Присоединенный металл становится по отношению к защищаемой конструкции анодом и переводит бывшие анодные участки в микро- и макрогальванических парах на конструкции в катодные. Благодаря этому коррозионные пары гальванических элементов перестают работать.

Можно проделать соответствующий

опыт, разъясняющий принцип протекторной защиты.

**Опыт 3.** Налейте в блюдце 100 мл индикаторного раствора (4 г поваренной соли, 2 г красной кровяной соли и 8 – 10 капель спиртового раствора фенолфталеина на 100 мл готового раствора). Опустите в него большую конторскую железную скрепку, плотно насаженную на маленькую медную пластинку или кусок толстого зачищенного медного провода. Через несколько минут возле поверхности железа появится темно-синее окрашивание, а около меди – розовое. И не удивительно: на поверхности железа происходит известный нам процесс:  $\text{Fe}^0 - 2e \rightarrow \text{Fe}^{2+}$ , значит, железо играет роль анода. На меди происходит другой процесс:

$\text{H}_2\text{O} + \frac{1}{2}\text{O}_2 + 2e \rightarrow 2\text{OH}^-$ , и она играет роль катода. Так что в данной паре железо выполняет функцию протектора, т.е. защитника меди.

В чистое блюдце налейте новую порцию индикаторного раствора того же состава. Новую конторскую скрепку насадите на медь и всю конструкцию оберните несколькими витками алюминиевого провода так, чтобы он касался и железа, и меди, а потом опустите в индикаторный раствор. Очень скоро возле меди и железа появляется малиновое окрашивание, а вот синего окрашивания (из-за турбуллевой сини) не видно. Это и понятно: теперь алюминий стал анодом, а конструкция из железа и меди стала катодом. В этом случае алюминий выполнил роль защитника меди и железа.

Невольно возникает вопрос: а какой срок службы протектора? Оказывается, протектор массой около 10 кг служит примерно 8 – 12 лет. Это довольно большой срок, за время которого оправдываются все расходы, связанные с использованием протектора.

## Заочная физическая школа при МГУ

(Начало см. на с.40)

### Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1 – 4, поступающим в 11 класс – задачи 4 – 7.

1. Равносторонний треугольник  $ABC$  движется так, что в некоторый момент скорость вершины  $C$  направлена вдоль стороны  $CB$ , а скорость вершины  $B$  равна

$v_B$  и направлена вдоль стороны  $AB$ . Найдите скорость вершины  $A$ .

2. Пружину жесткостью  $k$  распилили на две части равной длины. Чему равна жесткость половины пружины?

3. Сплошное однородное тело в жидкости с плотностью  $\rho_1$  весит  $P_1$ , а в жидкости с плотностью  $\rho_2$  весит  $P_2$ . Определите плотность тела.

4. Придумайте качественную задачу по любому разделу физики (и приведите ее решение).

5. Плотность смеси двух газов при температуре  $T$  и давлении  $p$  равна  $\rho$ . Найдите концентрацию молекул газов, если их молярные массы равны  $M_1$  и  $M_2$ .

6. Закрытый сосуд с влажным воздухом охлаждают от начальной температуры  $T_1$  до температуры  $T_2$ , при которой на стенках сосуда появляется роса. Найдите относительную влажность воздуха в начальном состоянии, если давление насыщенных паров при температурах  $T_1$  и  $T_2$  равны  $p_{н1}$  и  $p_{н2}$  соответственно.

7. Заряд плоского конденсатора емкостью  $C$  равен  $Q$ . Какую работу необходимо совершить, чтобы пробный заряд  $q$  переместить из бесконечности к положительно заряженной обкладке конденсатора?

# Уравнения, которые «не решаются»

**А. ЯРСКИЙ**

**Н**ЕНАУЧНАЯ классификация уравнений по принципу «решается — не решается» принадлежит абитуриентам. «Нерешающимися» были названы ими уравнения (неравенства, системы), для решения которых недостаточно упрощающих запись тождественных преобразований, — нужно предложить какие-то оригинальные идеи.

Однако при внимательном рассмотрении выясняется, что «нерешающиеся» уравнения решаются по существу единообразно, а «оригинальные идеи» сводятся к одному — *изучить поведение встречающихся функций*.

Как известно, исследование функции уместно начинать с отыскания ее области определения. Иногда одного этого достаточно для решения задачи.

**Пример 1** (МГУ, химфак, 83). *Решите неравенство*

$$\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right) \cdot (\log_5 x - 1) + \frac{1}{x} \left(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1\right) \leq 0.$$

**Решение.** Найдем область определения неравенства:

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0, \quad 8x - 2x^2 - 6 \geq 0, \quad x > 0.$$

Сравнив первое и второе неравенства, получим

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

откуда либо  $x = 0$ , либо  $x = 3$ .

При  $x = 1$  исходное неравенство выполнено. При  $x = 3$  левая часть неравенства, равная  $\log_5 3 - 2/3$ , положительна, так как  $\log_5 27 > 2$ .

Тем самым  $x = 3$  не удовлетворяет неравенству.

**Ответ:** 1.

В следующей задаче ключом к решению является анализ областей значений входящих в уравнение функций.

**Пример 2** (МГУ, ВМК, 89). *Найдите все значения  $p$ , при которых уравнение*

$$\sqrt{(x + 3p - 3\pi - 4)(|x + \pi| + p - 2\pi + 2)} + \log_{\pi} \left( \frac{\pi^2 + p^2 + 4}{2(p - \pi)|x + 2| - x^2 - 4x + 2\pi p} \right) = 0$$

*имеет хотя бы одно целочисленное решение.*

**Решение.** В левой части уравнения первое слагаемое неотрицательно. Если и второе слагаемое окажется неотрицательным, то равенство будет достигаться лишь при одновременном обращении слагаемых в нуль.

Преобразуем знаменатель стоящего под логарифмом выражения:

$$\begin{aligned} 2(p - \pi)|x + 2| - x^2 - 4x + 2\pi p &= \\ &= \pi^2 + p^2 + 4 - (|x + 2| - (p - \pi))^2 \leq \\ &\leq \pi^2 + p^2 + 4. \end{aligned}$$

Следовательно, стоящее под знаком логарифма выражение не меньше единицы и сам логарифм неотрицателен, — догадка оказалась верной. Итак, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x + 3p - 3\pi - 4)(|x + \pi| + p - 2\pi + 2) = 0, \\ |x + 2| - (p - \pi) = 0. \end{cases}$$

Остается «техническая» часть решения. Полученная система распадается на две:

$$\begin{cases} x + 3(p - \pi) - 4 = 0, \\ |x + 2| - (p - \pi) = 0, \\ |x + \pi| + p - 2\pi + 2 = 0, \\ |x + 2| - (p - \pi) = 0. \end{cases}$$

В первой системе, прибавив к первому ее уравнению утроенное второе, приходим к уравнению  $x + 3|x + 2| = 4$ . Это уравнение имеет единственное целочисленное решение  $x = -5$ . Подставив его в систему, получим  $p = \pi + 3$ .

Сложив уравнения второй системы, приходим к соотношению

$$|x + 2| + |x + \pi| = \pi - 2.$$

Это уравнение выполнено при всех  $x \in [-\pi, -2]$ . И так как по условию  $x$  — целое число, то  $x = -3$  или  $x = -2$ . Поочередно подставив эти значения в систему, получим равенства  $p = \pi + 1$  или  $p = \pi$ .

**Ответ:**  $\pi$ ;  $\pi + 1$ ;  $\pi + 3$ .

Необходимость анализа множества значений функции нередко возникает при решении тригонометрических уравнений.

**Пример 3.** *Решите уравнение*

$$\begin{aligned} (\sin^2 x - \sqrt{2} \sin x + 1) \times \\ \times (\sin^4 x + \cos^4 x) = 1/4. \end{aligned}$$

**Решение.** Исследуем область значений первого множителя. Положив  $\sin x = y$ , запишем этот множитель в виде  $f(y) = y^2 - y\sqrt{2} + 1$ . Графиком  $f(y)$  является парабола с направленными вверх ветвями. И так как  $y = \sqrt{2}/2$  — координата вершины параболы, то  $f(y) \geq f(\sqrt{2}/2) = 1/2$ .

Преобразуем второй сомножитель:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin^2 x \cos^2 x = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \\ &= 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = \frac{1}{4} (3 + \cos 4x) \geq 1/2. \end{aligned}$$

Из полученных неравенств следует, что значение  $1/4$  левая часть уравнения может принять лишь тогда, когда оба сомножителя принимают свое минимальное значение  $1/2$ . Последнее равносильно системе

$$\sin x = \sqrt{2}/2, \quad \cos 4x = -1,$$

при решении которой затруднений уже не возникает.

**Ответ:**  $\pi/4 + 2\pi n$ ,  $3\pi/4 + 2\pi k$ ,  $n, k \in \mathbf{Z}$ .

Решение следующей задачи вновь основано на тщательном исследовании областей значений фигурирующих в системе переменных.

**Пример 4** (МГУ, химфак, 78). *Найдите удовлетворяющие условию  $z \geq 0$  решения системы*

$$\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^2; \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y; \\ x^2 + y^2 = 4x. \end{cases}$$

**Решение.** Третье уравнение системы можно переписать в виде

$$(x - 2)^2 + z^2 = 4.$$

Из полученного соотношения следует, что  $|z| \leq 2$ . И так как по условию  $z \geq 0$ , то  $0 \leq z \leq 2$ .

Выразим  $z$  из второго уравнения системы ( $y \neq -2$ ):

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{(y + 3)^2}{y + 2}.$$

Решив систему неравенств

$$0 \leq z \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(y + 3)^2}{y + 2} \leq 4,$$

получим  $y = -3$  или  $y = -1$ . Остается по найденным значениям  $y$  вычислить  $z$  и,

подставив в исходную систему, найти  $x$ .

**Ответ:** (2; -1; 2), (4; -3; 0).

В следующей задаче необходимо, во-первых, увидеть, какую именно функцию следует ввести в рассмотрение, и, во-вторых, обнаружить такие ее свойства, как *нечетность* и *монотонность*.

**Пример 5** (МГУ, химфак, 89). *Решите уравнение*

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0.$$

**Решение.** Введем в рассмотрение функцию

$$f(x)=x\left(2+\sqrt{x^2+3}\right).$$

При таком выборе  $f(x)$  исходному уравнению можно придать вид

$$f(2x+1)+f(3x)=0.$$

Заметим, что  $f(x)$  — нечетная функция:

$$f(-x)=(-x)\left(2+\sqrt{(-x)^2+3}\right)=-f(x).$$

Замеченное свойство позволяет переписать уравнение в виде

$$f(2x+1)=-f(3x)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x).$$

Далее, при  $x \geq 0$  функция  $f(x)$  является произведением двух возрастающих неотрицательных сомножителей  $x$  и  $(2+\sqrt{x^2+3})$ , что гарантирует возрастание  $f(x)$  при  $x \geq 0$ . А в силу нечетности  $f(x)$  возрастает и при  $x < 0$ . Тем самым, функция  $f(x)$  монотонно возрастает на всей числовой оси. Как следствие, равенство  $f(2x+1)=f(-3x)$  выполняется только при условии

$$2x+1=-3x \Leftrightarrow x=-1/5.$$

**Ответ:** -1/5.

*Монотонная* функция принимает любое свое значение в одной-единственной точке. Это простое соображение нередко оказывается полезным.

**Пример 6.** *Решите систему*

$$\begin{cases} x-y=e^x-e^y, \\ x^2+xy+y^2=12. \end{cases}$$

**Решение.** Перепишем первое уравнение системы в виде

$$x+e^x=y+e^y$$

и рассмотрим функцию  $f(x)=x+e^x$ . Рассматриваемое уравнение можно теперь записать в виде

$$f(x)=f(y).$$

Функция  $f(x)$  является суммой двух возрастающих функций и, следовательно, монотонно возрастает на всей числовой оси. По этой причине последнее равенство выполняется только при ус-

ловии  $x=y$ . Подставив  $x=y$  во второе уравнение системы и решив квадратное уравнение, получим

**Ответ:** (2; 2), (-2; -2).

Графики *возрастающей* и *убывающей* функций могут иметь не более одной общей точки. Этот являющийся непосредственным следствием определений факт используется достаточно часто.

**Пример 7.** *Решите систему*

$$\begin{cases} x^4+y^4=2, \\ x^2y^2+1=2y^2. \end{cases}$$

**Решение.** Введем новые переменные

$$a=x^2 \geq 0, \quad b=y^2 \geq 0.$$

Система примет вид

$$\begin{cases} a^2+b^2=2, \\ ab+1=2b. \end{cases}$$

На плоскости  $aOb$  нарисуем множества точек, координаты которых удовлетворяют, соответственно, первому и второму уравнениям системы. Первое уравнение описывает окружность радиусом  $\sqrt{2}$  с центром в начале координат.

Второму уравнению можно придать вид  $a=2-1/b$ . Графиком этой функции является гипербола. При  $b > 0$  последнее уравнение описывает возрастающую функцию, а первое уравнение (при  $a \geq 0$ ) — убывающую функцию  $a=\sqrt{2-b^2}$ . Следовательно, графики рассматриваемых функций могут иметь лишь единственную общую точку. Сама эта точка угадывается:  $a=b=1$ . Вернувшись к исходным переменным, получим

**Ответ:** (1; 1), (1; -1), (-1; -1).

Исследование функций на *монотонность* является ведущей идеей решения многих задач. Однако такое исследование может оказаться не слишком простым делом. Иллюстрацией слу-

**Пример 8.** *Решите уравнение*

$$\log_{12}(\sqrt{2x}+\sqrt[4]{2x})=\frac{1}{2}\log_9(2x).$$

**Решение.** С целью избавиться от радикалов положим  $\sqrt[4]{2x}=a \geq 0$ . В результате такой замены уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \log_{12}(a^2+a) &= \\ &= \frac{1}{2}\log_9(a^4) \Leftrightarrow \log_{12}(a^2+a)=\log_3 a. \end{aligned}$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$f(a)=\log_{12} a+\log_{12}(a+1)-\log_3 a=0.$$

Займемся исследованием функции  $f(a)$ :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{a \ln 12} + \frac{1}{(a+1) \ln 12} - \frac{1}{a \ln 3} = \\ &= \frac{1}{a \ln 12} \left(1 - \frac{\ln 12}{\ln 3} + \frac{a}{a+1}\right) = \\ &= \frac{1}{a \ln 12} \left(1 - \log_3 4 - \frac{1}{a+1}\right) < 0. \end{aligned}$$

Отрицательность производной означает, что функция  $f(a)$  монотонно убывает на всей ее области определения  $a > 0$ . Следовательно,  $f(a)$  может обратиться в ноль лишь при одном-единственном значении  $a$ . Последнее не сложно угадать:  $a=3$ . Вернувшись к исходной переменной, получим  $x=a^4/2=81/2$ .

**Ответ:** 81/2.

Наиболее сложной является ситуация, когда рассматриваемые функции обе возрастают или убывают. В этом случае может потребоваться подробное исследование поведения функций вплоть до построения их графиков.

**Пример 9** (МГУ, мехмат, 79). *Решите неравенство*

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x}.$$

**Решение.** Приведем неравенство к виду

$$\frac{3}{2x+1} > \frac{\log_2(4+2x)}{2x}.$$

В надежде сколько-нибудь упростить дело введем новую переменную  $y=2x+1$ . Неравенство примет вид

$$\frac{3}{y} > \frac{\log_2(3+y)}{y-1}.$$

Начнем с отыскания области определения:  $y \in (-3; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$

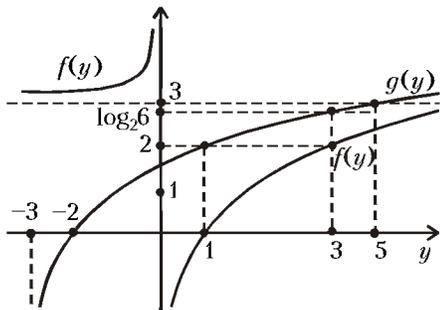
Руководствуясь идеей *метода интервалов*, рассмотрим соответствующее неравенству уравнение

$$\begin{aligned} \frac{3}{y} = \frac{\log_2(3+y)}{y-1} &\Leftrightarrow 3\left(1-\frac{1}{y}\right) = \\ &= \log_2(3+y). \end{aligned}$$

Заметим, что при  $y > 0$  обе функции  $f(y)$  и  $g(y)$  являются *непрерывными* (что существенно для применяемого метода) и монотонно возрастающими. Построим на одном чертеже графики функций

$$f(y)=3\left(1-\frac{1}{y}\right), \quad g(y)=\log_2(3+y)$$

(см. рисунок). Правильность взаимного расположения графиков подтверждается следующей цепочкой неравенств:



при  $y \in (-3; 0)$ :

$$g(y) < 3 < f(y);$$

при  $y \in (0; 1]$ :

$$f(y) \leq f(1) = 0 < \log_2 3 = g(0) < g(y);$$

при  $y \in (1; 3]$ :

$$f(y) \leq f(3) = 2 = \log_2 4 = g(1) < g(y);$$

при  $y \in (3; 5]$ :

$$f(y) \leq f(5) = 12/5 < \log_2 6 = g(3) < g(y);$$

при  $y \in (5; \infty)$ :

$$f(y) < 3 = g(5) \leq g(y).$$

Из всех написанных не вполне очевидно лишь числовое неравенство

$$12/5 < \log_2 6 = \log_2 3 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7/5 < \log_2 3 \Leftrightarrow 2^7 < 3^5 \Leftrightarrow 128 < 243.$$

Итак, соответствующее неравенству уравнение не имеет решений. Это означает, что любой из промежутков области определения может войти в ответ только целиком. Тем самым остается выбрать по точке в каждом из трех интервалов  $(-3; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; \infty)$  области определения и проверить выполнение неравенства в каждой из них. Подставив, например,  $y = -1$ ,  $y = 1/2$ ,  $y = 7$ , убедимся, что неравенство выполнено лишь при  $y = 1/2$  и, следовательно, только на промежутке  $(0; 1)$ .

Вернувшись к старой переменной  $x = (y - 1) / 2$ , получим

**Ответ:**  $(-1/2; 0)$ .

Иногда возникшие в примере 9 сложности удается обойти за счет преобразования уравнения.

**Пример 10.** Решите уравнение

$$x^2 - x + 2 = 2\sqrt[4]{2x - 1}.$$

**Решение.** Уравнение определено при  $x \geq 1/2$ . При таких значениях  $x$  левая и правая части уравнения являются обе возрастающими функциями, что затрудняет исследование взаимного расположения их графиков.

Вычтем  $x$  из обеих частей уравнения:

$$x^2 - 2x + 2 = 2\sqrt[4]{2x - 1} - x.$$

Введем в рассмотрение функции

$$f(x) = x^2 - 2x + 2,$$

$$g(x) = 2\sqrt[4]{2x - 1} - x.$$

Графиком  $f(x)$  является парабола с минимальным значением  $f(1) = 1$ . Для исследования поведения  $g(x)$  вычислим

$$g'(x) = (2x - 1)^{-3/4} - 1.$$

Производная  $g'(x)$  обращается в ноль при  $x = 1$  и при проходе через эту точку меняет знак с «+» на «-». Последнее означает, что в точке  $x = 1$  функция  $g(x)$  достигает своего наибольшего значения  $g(1) = 1$ . Итак, минимум левой части уравнения совпал с максимумом его правой части. Тем самым равенство возможно лишь при  $x = 1$ .

**Ответ:** 1.

В заключение попробуем ответить на естественный вопрос: как угадать, что уравнение, неравенство или система «не решается»? Рассмотренные примеры подсказывают ответ: исследование поведения функций может в любом случае оказаться существенной частью решения задачи. В процессе поиска удобной для такого исследования формы трудно пройти мимо стандартных способов решения, если, конечно, таковые существуют.

**Упражнения**

Решите уравнение, неравенство или систему:

1.  $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{2} + (x-y)^2.$

2. (МГУ, химфак, 89)

$$(2x+1)\left(1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 7}\right) + x\left(1 + \sqrt{x^2 + 7}\right) = 0.$$

3. (МГУ, ВМК, 89) Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение имеет хотя бы одно целочисленное решение:

$$\log_{1/\pi} \left( \frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x| + 4\pi a} \right) - \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34)(|\pi - x| - a + \pi + 2)} = 0.$$

4. (МГУ, ф-т почвоведения, 89)

$$(x^2 - 4x + 3) \times \log_{1/\sqrt{2}} \left( \cos^2(\pi x) + \cos x + 2\sin^2 \frac{x}{2} \right) \geq 2.$$

5. (МГУ, геол. ф-т, 92) Найдите все тройки чисел  $(x, y, z)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 - 2x \sin(\pi y) + 1 + \sqrt{yz - 2z^2} - 64 = (41 - yz)(\cos(2\pi y) + \cos(\pi z))^2.$$

6.  $(\sin^{11} x + \cos^{11} x)(\sin^4 x + \cos^4 x) = 1.$

7.  $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy.$

8.  $2x^9 - x^5 + x > 2.$

9.  $8^x(3x+1) = 4.$

10.  $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}.$

11.  $1 + 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x < 6^x.$

12.  $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1; \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$

13. Для  $x, y \in (-\pi/2; \pi/2)$  решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = x - y, \\ \sin x + \sin y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

14.  $(4^x + 2)(2 - x) = 6.$

15.  $\log_3(1 + \sqrt{4x}) > \log_{16}(4x).$

16. (МГУ, мехмат, 79)

$$\frac{2 + \log_3 x}{x - 1} < \frac{6}{2x - 1}.$$

17. (МГУ, хим. ф-т, 78) При  $x \leq 2$  решите систему

$$\begin{cases} (2-x)(3x-2z) = 3-z, \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2, \\ z^2 + y^2 = 6z. \end{cases}$$

18.  $\begin{cases} x^2 + 2x + \sqrt{x-y} = 0, \\ y^2 - \sqrt{x-y-1} = 4. \end{cases}$

19.  $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{2}.$

20.  $2x^6 - x^5 + x - 2 \leq 0.$

21. (МГУ, ф-т почвоведения, 81) Найдите все пары  $(x, y)$ , для каждой из которых выполнено равенство

$$3\sqrt{4x - x^2} \sin^2 \left( \frac{x+y}{2} \right) + 2\cos(x+y) = \frac{13}{4} + \cos^2(x+y).$$

22. (МГУ, геогр. ф-т, 81)

$$\begin{cases} x^2 y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

23. (МГУ, геол. ф-т, 85)

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 10 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + \sqrt{x+2}.$$

24. (МГУ, ВМК, 83)

$$\sqrt{2-|y|} (5\sin^2 x - 6\sin x \cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt{33}) = \arcsin^2 x + \arccos^2 x - 5\pi^2/4.$$

# Фазовые переходы в задачах по физике

А. ШЕРОНОВ

**И**НТЕРЕС к фазовым превращениям вещества понятен. Достаточно вспомнить, что превращение воды в лед или пар и обратно обеспечивает существование всего живого на Земле. Вся химическая и металлургическая промышленность, работа систем жизнеобеспечения человека тесно связаны с плавлением, кристаллизацией, парообразованием и конденсацией различных веществ. Эти превращения встречаются и в задачах по физике, причем нескольких типов.

Для решения одних задач достаточно использовать закон сохранения энергии, а именно уравнение теплового баланса.

В других задачах используются свойства насыщенного пара жидкости. С одной стороны, масса, давление, объем насыщенного пара при заданной (не слишком высокой) температуре связаны уравнением состояния газов, несмотря на значительно большее взаимодействие молекул пара между собой по сравнению с газами. С другой стороны, пока пар остается насыщенным, его давление не зависит от объема, который он занимает. Понятно, что это может происходить за счет конденсации пара или испарения жидкости, которая должна находиться в указанном объеме.

В задачах третьего типа приходится учитывать условия, при которых происходят фазовые превращения. Например, испарение (конденсация) и плавление (отвердевание) происходят обычно при постоянном давлении. Теплота испарения или плавления при этом идет не только на изменение внутренней энергии системы, но и на совершение работы против внешних сил, обеспечивающих постоянство давления. При испарении (конденсации) жидкости за счет подвода (отвода) тепла часть теплоты испарения (конденсации), расходуемая на совершение этой работы, вполне заметна. Напротив, при плавлении (отвердевании) за счет подвода (отвода) тепла работой против внешних сил, как правило, можно пренебречь.

Рассмотрим теперь несколько приме-

ров решения задач, в которых происходят фазовые превращения.

**Задача 1.** В калориметр, содержащий лед массой  $m_1 = 0,4$  кг при температуре  $t_1 = -53^\circ\text{C}$ , налили воду массой  $m_2 = 0,1$  кг с температурой  $t_2 = 15^\circ\text{C}$ . Найдите температуру в калориметре после установления равновесия. Удельная теплоемкость льда  $c_1 = 2,1$  кДж/(кг · К), воды  $c_2 = 4,2$  кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 334$  кДж/кг.

В этой задаче не задано конечное состояние, в котором будет находиться содержимое калориметра в равновесии. Поэтому для решения необходимо провести предварительные оценки баланса тепла. Превращения льда в воду и обратно происходят при  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  (давление в задаче предполагается равным атмосферному). Найдём количество теплоты  $Q_1$ , которое потребуются, чтобы нагреть весь лед до  $0^\circ\text{C}$  от начальной температуры:

$$Q_1 = c_1 m_1 (t_0 - t_1) = 44,5 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Это тепло может отдать вода при охлаждении от  $15^\circ\text{C}$  до  $0^\circ\text{C}$  и при дальнейшем замерзании. Соответствующие количества теплоты равны

$$Q_2 = c_2 m_2 (t_2 - t_0) = 6,3 \cdot 10^3 \text{ Дж},$$

$$Q_3 = \lambda m_2 = 33,4 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Из сравнения видно, что  $Q_1 > Q_2 + Q_3$ . Потому конечная температура в калориметре будет отрицательной, вода охладится до  $0^\circ\text{C}$ , замерзнет, а получившийся лед охладится до конечной температуры  $t_3$ . Окончательный баланс тепла имеет вид

$$c_1 m_1 (t_3 - t_1) = c_2 m_2 (t_2 - t_0) + \lambda m_2 + c_1 m_2 (t_0 - t_3),$$

или

$$t_3 \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) = t_1 + \frac{c_2 m_2}{c_1 m_1} t_2 + \frac{\lambda m_2}{c_1 m_1}.$$

Отсюда находим

$$t_3 = -4,6^\circ\text{C}.$$

**Задача 2.** В теплоизолированный сосуд, содержащий газообразный азот

при температуре  $T_1 = 300$  К и давлении  $p_1 = 1$  атм, впрыснули жидкий азот при  $T = 77$  К (температура кипения жидкого азота при атмосферном давлении). После того как жидкий азот испарился, в сосуде установилась температура  $T_2 = 150$  К, а давление уменьшилось до  $p_2 = 0,72$  атм. Найдите молярную теплоту испарения жидкого азота. Молярная теплоемкость газообразного азота при постоянном объеме составляет  $C_V = 20,8$  Дж/(моль · К).

Пусть вначале в сосуде содержалось  $\nu_1$  молей азота, а после установления равновесия добавилось еще  $\nu_2$  молей. Из уравнения состояния (при постоянном объеме) имеем

$$\frac{(\nu_1 + \nu_2) T_2}{\nu_1 T_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

За счет охлаждения газообразного азота происходит испарение жидкого азота и нагрев получившегося газа до конечной температуры  $150$  К. Баланс тепла имеет вид

$$\nu_1 C_V (T_1 - T_2) = \nu_2 \lambda + \nu_2 C_V (T_2 - T).$$

С учетом первого равенства для молярной теплоты испарения получим

$$\lambda = \frac{T_2 p_1}{T_1 p_2 - T_2 p_1} C_V (T_1 - T_2) - C_V (T_2 - T) \approx 5500 \text{ Дж/моль}.$$

**Задача 3.** Замкнутый цилиндрический сосуд делится подвижным поршнем на 2 равные части. В одной из них находится воздух, в другой – вода и пар. При медленном нагревании всего сосуда поршень начинает двигаться и в некоторый момент времени останавливается. В этот момент он делит объем сосуда на части в отношении  $1 : 3$ . Определите отношение массы воды к массе пара в начале опыта. Температуры в обеих частях сосуда все время одинаковы. Объемом, занимаемым водой в одной из частей сосуда, пренебречь.

Пусть объем всего сосуда  $V_0$ , масса пара  $m_{\text{п}}$ , воды  $m_{\text{в}}$ . Поршень будет двигаться до тех пор, пока вся вода не испарится. При этом объем, занятый паром, увеличится от  $V_1 = V_0/2$  до  $V_2 = 3V_0/4$ , а его масса – от  $m_{\text{п}}$  до  $m_{\text{п}} + m_{\text{в}}$ . Уравнение состояния для воздуха дает

$$\frac{p_1 (V_0 - V_1)}{T_1} = \frac{p_2 (V_0 - V_2)}{T_2},$$

где  $p_1, T_1$  – начальные давление и температура, а  $p_2$  и  $T_2$  – конечные. Аналогично для пара имеем

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{m_{\text{п}} + m_{\text{в}}}{m_{\text{п}}} \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Из этих двух равенств получаем

$$\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = \frac{V_0 - V_2}{V_0 - V_1} = \left(1 + \frac{m_b}{m_n}\right) \frac{V_2}{V_1},$$

откуда находим искомое отношение масс:

$$\frac{m_b}{m_n} = 2.$$

**Задача 4.** В кастрюлю-скороварку налили немного воды при комнатной температуре, герметично закрыли крышкой и стали медленно нагревать. Когда температура и давление в кастрюле достигли  $t = 115^\circ\text{C}$  и  $p = 3$  атм, вся вода выкипела. Найдите, какую часть объема занимала вода вначале. Давление паров воды и объем, занимаемый водой вначале, малы. Молярная масса воды  $M = 18$  г/моль, плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>, температура в комнате  $t_0 = 17^\circ\text{C}$ , атмосферное давление  $p_0 = 1$  атм.

Пусть  $V$  – объем кастрюли, а  $v$  – объем, занимаемый водой. По условию вначале давление воздуха в кастрюле составляло  $p_0 = 1$  атм, температура была  $T_0 = 290$  К. В конце опыта давление  $p$  в кастрюле складывалось из давления воздуха  $p_0 T/T_0$  и давления пара  $\rho v RT/(Mv)$ . Таким образом,

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} + \frac{\rho v RT}{M V}.$$

откуда

$$\frac{v}{V} = M \frac{p - p_0 T/T_0}{\rho RT} = 9,3 \cdot 10^{-4} \approx 0,1\%.$$

**Задача 5.** В переносном газовом баллоне объемом  $V_0 = 5$  л может поместиться не больше  $m_0 = 2,2$  кг жидкого пропана ( $\text{C}_3\text{H}_8$ ) под давлением  $p = 10$  атм и при температуре  $T = 290$  К. Сколько пропана в газообразном состоянии останется в баллоне, если израсходовать 90% пропана?

Пусть газообразный пропан с молярной массой  $M = 44$  г/моль занимает объем  $V$  и его масса при этом равна  $MpV/(RT)$ . Предварительная оценка по этой формуле показывает, что оставшиеся 220 г пропана при давлении 10 атм заняли бы в газообразном состоянии объем, больший 2,2 л. Значит, часть пропана находится в виде жидкости с плотностью  $\rho = m_0/V_0$ . Таким образом, для оставшегося пропана массой  $0,1m_0$  можно записать равенство

$$\rho(V_0 - V) + \frac{MpV}{RT} = 0,1m_0.$$

Отсюда находим массу пропана в газообразном состоянии:

$$m = \frac{MpV}{RT} = \frac{0,9MpV_0}{RT} \approx 0,085 \text{ кг}.$$

**Задача 6.** Приготовление пищи в кастрюле-скороварке происходит при повышенном давлении, а следовательно, и повышенной по сравнению со  $100^\circ\text{C}$  температуре. Поэтому внезапная разгерметизация кастрюли приводит к образованию «мини-гейзера»: перегретая вода при атмосферном давлении бурно вскипает и кипит до тех пор, пока не охладится до  $100^\circ\text{C}$ . Оцените, какая часть воды в скороварке испарится при разгерметизации за счет внутреннего запаса тепла, если давление внутри кастрюли  $p = 1,2$  атм. Известно, что изменение давления насыщенного пара вблизи атмосферного на  $\Delta p_0 = 27$  мм рт.ст. вызывает изменение температуры на  $\Delta t_0 = 1^\circ\text{C}$ . При температуре  $100^\circ\text{C}$  удельная теплота испарения воды  $\lambda = 2250$  кДж/кг, удельная теплоемкость  $c = 4,2$  кДж/(кг · К).

Избыточное (по сравнению с атмосферным) на  $\Delta p = 0,2$  атм давление вызывает перегрев на

$$\Delta t = \Delta t_0 \frac{\Delta p}{\Delta p_0} = \frac{0,2}{27/760}^\circ\text{C}.$$

При охлаждении до  $100^\circ\text{C}$  за счет внутреннего запаса тепла воды массой  $m$  испаряется часть воды массой  $\Delta m$ . Из уравнения теплового баланса

$$\lambda \Delta m = cm \Delta t$$

находим

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c \Delta t}{\lambda} = 0,01.$$

**Задача 7.** В цилиндре под поршнем находится смесь  $\nu$  молей жидкости и  $\nu$  молей ее насыщенного пара при температуре  $T_0$ . В изобарическом процессе смесь медленно нагрели, подведя к ней количество теплоты  $Q$ . В результате температура внутри цилиндра увеличилась на  $\Delta T$ . Найдите изменение внутренней энергии сжимаемого цилиндра. Начальным объемом, занимаемым жидкостью, пренебречь.

По закону сохранения энергии, изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = Q - A,$$

где  $A$  – работа, совершенная в процессе нагрева против внешних сил, поддерживающих давление в цилиндре постоянным. Подвод тепла при постоянном давлении приводит сначала к испарению жидкости при постоянной температуре, и лишь когда вся жидкость испарится, начнется нагревание пара. (Заметим, впрочем, что для величины изменения внутренней энергии системы неважно, каким именно путем сис-

тема пришла из начального состояния в конечное.)

В процессе изобарического испарения жидкости против внешнего давления  $p$  совершается работа  $A_1 = p(V_{k1} - V_{o1})$ , где  $V_{k1} = \nu RT_0/p$  – конечный объем, занятый испарившейся при постоянной температуре  $T_0$  жидкостью, а  $V_{o1}$  – начальный объем жидкости, которым по условию можно пренебречь. Итак,  $A_1 = \nu RT_0$ . Аналогично, в процессе изобарического нагревания  $2\nu$  молей на  $\Delta T$  работа против внешнего давления равна  $A_2 = p(V_{k2} - V_{o2})$ , где  $V_{k2} = 2\nu R(T_0 + \Delta T)/p$  – конечный объем пара при температуре  $T_0 + \Delta T$ , а  $V_{o2} = 2\nu RT_0/p$  – его начальный объем. Таким образом,  $A_2 = 2\nu R \Delta T$ .

Окончательно полная работа против внешних сил составляет

$$A = A_1 + A_2 = \nu RT_0 + 2\nu R \Delta T,$$

а изменение внутренней энергии жидкости и пара равно

$$\Delta U = Q - \nu RT_0 - 2\nu R \Delta T.$$

**Задача 8.** В герметичном сосуде при  $0^\circ\text{C}$  находится  $m = 1$  г воды. При нагревании сосуда до  $100^\circ\text{C}$  вся вода испаряется, превращаясь в насыщенный пар. Какое количество теплоты было подведено к воде в этом процессе? Удельная теплота испарения воды (при  $100^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении)  $\lambda = 2250$  Дж/г, удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  Дж/(г · К), молярная масса пара  $M = 18$  г/моль.

Объем сосуда не меняется, работа против внешних сил не совершается, поэтому подведенное количество теплоты определяется только изменением внутренней энергии системы и не зависит от способа перехода из начального состояния в конечное.

Нагреем сначала воду (не испаряя ее) от  $0^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$ , т.е. на  $\Delta t = 100^\circ\text{C}$ . Увеличение ее внутренней энергии при этом составит

$$\Delta U_1 = cm \Delta t.$$

Изменение внутренней энергии воды при превращении ее в пар найдем из первого начала термодинамики:

$$\Delta U_2 = \lambda m - A,$$

где  $A$  – работа против постоянного внешнего давления  $p = 10^5$  Па (давление насыщенного пара при  $100^\circ\text{C}$ ). Эта работа равна  $A = p(V_k - V_0)$ , где  $V_k = mRT/(Mp)$  – конечный объем пара при  $100^\circ\text{C}$ ,  $V_0$  – начальный объем воды при  $0^\circ\text{C}$ , которым можно пренебречь. Итак,

$$A = \frac{m}{M} RT, \quad \Delta U_2 = \lambda m - \frac{m}{M} RT.$$

Таким образом, к воде в указанном в задаче процессе необходимо подвести количество теплоты

$$Q = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 2500 \text{ Дж}.$$

Из решения задачи следует, что при испарении 1 г воды при 100 °С и атмосферном давлении из 2250 Дж подведенного тепла 170 Дж, т.е. 8%, идет на работу против внешних сил, а остальные 92% тепла увеличивают внутреннюю энергию системы жидкость – пар.

В заключение рассмотрим несколько более сложную задачу.

**Задача 9.** *Водяной пар находится в теплоизолированной камере при температуре  $T = 300 \text{ К}$ . Там же находится вода, масса которой мала по сравнению с массой пара. В процессе адиабатического сжатия температура пара возрастает на  $\Delta T = 1 \text{ К}$ , а часть воды испаряется. Найдите относительное увеличение массы пара в камере. Удельная теплота испарения при  $T = 300 \text{ К}$  равна  $\lambda = 2370 \text{ кДж/кг}$ , пар можно считать идеальным газом с молярной теплоемкостью при постоянном объеме  $C_V = 3R = 25 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ . Теплоемкостью воды пренебречь. Известно также, что малые относительные изменения температуры  $\Delta T/T$  связаны с относительными изменениями давления насыщенного пара  $\Delta p/p$  соотношением  $\Delta p/p = k\Delta T/T$ , где  $k = 17$ .*

Давление  $p$ , объем  $V$ , масса  $m$ , температура  $T$  насыщенного водяного пара с молярной массой  $M$  ( $M = 18 \text{ г/моль}$ ) связаны уравнением состояния

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Малые изменения величин этих параметров связаны соответствующим равенством

$$p\Delta V + V\Delta p = \frac{m}{M} R\Delta T + \frac{\Delta m}{M} RT.$$

По закону сохранения энергии, в процессе адиабатического сжатия работа внешних сил, равная  $-p\Delta V$  (объем пара уменьшается), идет на испарение массы воды  $\Delta m$  и на увеличение энергии пара на  $mC_V\Delta T/M$  (изменение массы пара мало). Поэтому имеем

$$-p\Delta V = \lambda\Delta m + \frac{m}{M} C_V\Delta T.$$

По условию, кроме того,

$$\frac{\Delta p}{p} = k \frac{\Delta T}{T}.$$

Из всех равенств находим искомую

величину:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{kR - R - C_V}{M\lambda + RT} \Delta T \approx \frac{13}{18} \frac{\Delta T}{T} \approx 0,0024.$$

#### Упражнения

**1.** В калориметр, содержащий 2 кг льда при температуре  $-5 \text{ }^\circ\text{C}$ , добавили 200 г воды при температуре  $+5 \text{ }^\circ\text{C}$ . Сколько льда будет в калориметре после установления равновесия? Удельная теплоемкость льда  $2,1 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$ , воды  $4,2 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$ , удельная теплота плавления льда  $334 \text{ кДж/кг}$ .

**2.** В сосуд с азотом впрыснули жидкий азот при температуре  $-196 \text{ }^\circ\text{C}$  (температура кипения жидкого азота при атмосферном давлении), который испарился. Какое давление было в сосуде сразу после испарения жидкого азота, если к этому моменту теплообменом с окружающими сосуд телами можно пренебречь? Известно, что при прогреве до комнатной температуры в сосуде установилось давление  $1,3 \text{ атм}$ . Начальное давление в сосуде  $1 \text{ атм}$ , температура комнатная, молярная теплоемкость газообразного азота  $20,8 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ , молярная теплота испарения жидкого азота  $5,5 \text{ кДж/моль}$ .

**3.** Подвижная перегородка делит герметичный теплопроводящий сосуд на две неравные части, в которых находится воздух при атмосферном давлении и комнатной температуре. В меньшую часть сосуда впрыскивают легко испаряющуюся жидкость, давление насыщенного пара которой при комнатной температуре равно  $3,5 \text{ атм}$ . Спустя некоторое время перегородка перестала двигаться, а вся жидкость испарилась. При этом объем части сосуда, в которой находится воздух и пары, увеличился в 2 раза по сравнению с начальным. Найдите, какую часть объема сосуда составляла вначале его меньшая часть. Объемом, занимаемым жидкостью, можно пренебречь.

**4.** В герметичный сосуд, содержащий сухой воздух при температуре  $+17 \text{ }^\circ\text{C}$ , впрыснули немного воды и стали медленно нагревать. Определите давление воздуха в сосуде до впрыскивания воды, если к тому моменту, когда испарилась вся вода, давление воздуха составило 46% от общего давления в сосуде. Начальный объем воды в сосуде составлял  $1/1200$  от общего объема сосуда. Молярная масса воды  $18 \text{ г/моль}$ , плотность  $1 \text{ г/см}^3$ .

**5.** Подвижный поршень делит объем замкнутого сосуда на две части в отношении  $4 : 1$ . В одной части находится воздух, в другой – пары воды. При медленном охлаждении сосуда поршень начинает двигаться. Какая часть пара сконденсируется к тому моменту, когда поршень будет находиться посередине сосуда? Температура в обеих частях сосуда одна и та же. Объемом,

занимаемым сконденсированной водой, пренебречь.

**6.** Пропан ( $\text{C}_3\text{H}_8$ ) массой 300 г закачан в переносной газовой баллон объемом 1 л. Давление в баллоне  $10 \text{ атм}$ , температура  $17 \text{ }^\circ\text{C}$ . Сколько пропана в газообразном состоянии содержится в баллоне, если при указанных давлении и температуре пропан превращается в жидкость с плотностью  $440 \text{ кг/м}^3$ ?

**7.** В цилиндре под поршнем находится  $V$  молей ненасыщенного водяного пара при температуре  $T$ . При медленном изобарическом охлаждении цилиндра половина пара сконденсировалась, а внутренняя энергия содержимого уменьшилась на  $\Delta U$ . Какое количество теплоты пришлось при этом отвести от цилиндра, если его температура уменьшилась на  $\Delta T$ ? Объемом, занимаемым водой, пренебречь.

**8.** Насыщенный водяной пар находится в теплоизолированной камере при температуре 300 К. В процессе адиабатического расширения температура в камере уменьшается на 1 К, и часть пара конденсируется. Найдите относительное уменьшение массы пара в камере. Удельная теплота испарения воды при 300 К составляет  $2370 \text{ кДж/кг}$ . Пар можно считать идеальным газом с молярной теплоемкостью при постоянном объеме  $25 \text{ кДж/(моль} \cdot \text{К)}$ . Известно также, что малые относительные изменения температуры  $\Delta T/T$  связаны с относительными изменениями давления насыщенного пара  $\Delta p/p$  соотношением  $\Delta p/p = k\Delta T/T$ , где  $k = 17$ . Теплоемкостью воды пренебречь.

**9.** Смесь воды и ее насыщенного пара находится при температуре  $90 \text{ }^\circ\text{C}$ . Если смесь нагревать в изохорическом процессе, то вся вода испаряется при увеличении температуры до  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ . Чему равно давление насыщенного пара при  $90 \text{ }^\circ\text{C}$ , если в начальном состоянии масса воды составляет 29% от общей массы смеси? Объемом, занимаемым водой, пренебречь.

# VII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб «Глюон» в рамках программы «Дети. Интеллект. Творчество» провел очередную международную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон». Она прошла в Анталии (Турция) с 1 по 8 ноября 1997 года. Соорганизатором олимпиады выступил известный научно-образовательный центр Турции «Анталия Колледж» при поддержке министерства образования Турции и мэрии города Анталии. На олимпиаду съехались 120 участников из семи стран: России, Белоруссии, Грузии, Македонии, Индонезии, Иордании и Турции, всего 20 команд.

3 ноября состоялось торжественное открытие олимпиады. В этот же день прошел первый тур Олимпиады – устное командное соревнование по истории научных идей и открытий. Победу в нем одержала опытная команда школы-гимназии 60 из Уфы (Башкортостан, Россия), второй была команда из Индонезии, а третьей – школа 42 из Уфы.

4 ноября с утра участники выполняли индивидуальную письменную работу по физике. Во второй половине дня был проведен командный устный тур по математике. Первое место в этом туре с высокими баллами (91 балл из 100) завоевала 1-я команда Турции, второе место заняла 2-я команда Турции, а третья – команда Аничкова лицея (Санкт-Петербург, Россия).

Следующий день олимпиады был посвящен культурно-экскурсионной программе, а 6 ноября были проведены последние соревнования олимпиады: индивидуальная письменная работа по математике и командные устные соревнования по физике. В командных соревнованиях по физике первое место заняла команда Набережных Челнов (Татарстан, Россия), второй стала 1-я сборная Турции, а третьей – команда Македонии.

7 ноября – подведение итогов и церемония закрытия олимпиады. Абсолютным победителем в индивидуальном зачете стала ученица ФМЛ из Кирова (Россия) Мария Варавва, ей была вручена большая золотая медаль, а также специальный приз – «Мисс Олимпиада-97». Второе место и серебряную медаль получил ученик гимназии из Скопле (Македония) Александр Донов. Третье место и бронзовая медаль достались Александру Лузгареву, ученику ФМЛ из Кирова (Россия). Он же стал победителем в индивидуальном зачете по математике, набрав 100 баллов из 100 (!). А Александр Донов стал победителем в индивидуальном зачете по физике. Командные соревнования в общем зачете выиграла 1-я сборная Турции; ей был вручен суперкубок, а все ее участники получили призы. Второй стала команда школы-гимназии 60 из Уфы (Башкортостан), а третьей – команда из Индонезии.

Традиционно были вручены специальные призы: самому юному участнику олимпиады (им стал Иван Мицкевич – ученик лицея 1 города Барановичи, Белоруссия), за оригинальные решения трудной задачи по физике и по математике, а также призы от Оргкомитета олимпиады, министерства образования Турции, мэрии Анталии, спонсоров олимпиады (их получили физико-математический лицей 1511 из Москвы (Россия), лицей 1 из Барановичей (Белоруссия), «Анталия Колледж» (Турция), команда Новгородской области (Россия)).

Восьмая олимпиада «Интеллектуальный Марафон» состоится в октябре – ноябре 1998 года. МИК «Глюон» приглашает школы, лицеи, гимназии и образовательные центры, занимающиеся одаренными детьми, к участию в олимпиаде, а также к сотрудничеству по Международной программе «Дети. Интеллект. Творчество».

Заявки присылайте по адресу: Россия, Москва, 115522, Пролетарский пр-т, д. 15/6, к. 2, МИК «Глюон».

Телефон: (095) 324-8479; факс: (095) 396-8227; e-mail: olga@mics.msu.su.

## Задачи

### Письменный индивидуальный тур

#### МАТЕМАТИКА

1. Существует ли натуральное число  $n$  такое, что  $5n$  является пятой степенью

натурального числа,  $6n$  – шестой степенью,  $7n$  – седьмой степенью?

2. Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что его высота  $CD$  и биссектриса  $BE$  пересекаются в такой точке  $M$ , что  $CM = 2MD$ ,  $BM = ME$ .

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 = z^3, \\ x^2 + y^3 = z^4, \\ x^3 + y^4 = z^5. \end{cases}$$

4. Последовательность  $a_n$  удовлетворяет при любом натуральном  $n$  соотношению

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}.$$

Найдите  $a_{1998}$ , если  $a_{19} = 19$ ,  $a_{97} = 97$ .

5. Можно ли разрезать правильный треугольник на 5 попарно неравных равнобедренных треугольников?

6. Выясните, конечно или бесконечно число решений в натуральных числах уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 3.$$

7. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – действительные числа такие, что  $0 \leq x_i \leq 1$ . Найдите наибольшее значение величины

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1 x_2 - x_2 x_3 - \dots - x_{n-1} x_n - x_n x_1$$

при а)  $n = 3$ ; б)  $n = 4$ ; в) произвольном  $n$ .

#### ФИЗИКА

1. На наклонной плоскости, имеющей угол наклона  $\alpha$ , лежит брусок массой  $m$  (рис.1). С помощью невесомой нера-

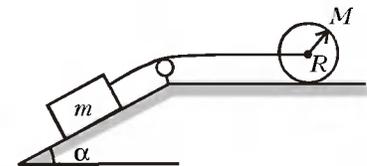


Рис. 1

стяжимой нити, перекинутой через блок, брусок соединяют с осью колеса массой  $M$  и радиусом  $R$ , находящегося на ровной горизонтальной поверхности. Определите ускорение бруска и силу натяжения нити. Коэффициент трения скольжения  $\mu$ , всю массу колеса считать сосредоточенной на его ободу, т.е. в расстоянии  $R$  от оси.

2. Тело массой  $m$  бросают вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0$ . На какую высоту поднимется тело, если на

него действует сила вязкого трения, пропорциональная квадрату скорости:  $f = -\beta v^2$ , причем  $\beta v_0^2 \ll mg$ , где  $g$  – ускорение свободного падения.

3. Один моль одноатомного идеального газа находится в цилиндрическом стакане под поршнем площадью  $S$  и массой  $M$ . Температура газа  $T_0$ , внешнее давление  $p_0$ . Определите период малых колебаний, возникающих при выведении поршня из состояния равновесия. Процесс считать адиабатическим.

4. В цилиндрическом теплоизолированном сосуде под поршнем находится перегретая вода при температуре  $T = 110^\circ\text{C}$ . Определите, на какую высоту поднимется поршень после вскипания жидкости и установления термодинамического равновесия системы. Начальный уровень воды  $h$ , удельная теплота парообразования  $r = 2,3 \cdot 10^6$  Дж/кг, теплоемкость  $c = 4200$  Дж/(кг · г). Массой поршня пренебречь, внешнее давление равно атмосферному.

5. Плоский конденсатор (площадь пластин  $S$ , расстояние между ними  $d$ ), расположенный вертикально, напо-

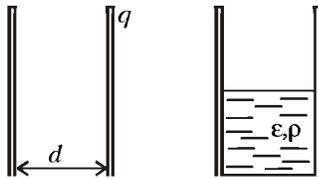


Рис. 2

вину заполняется диэлектриком с плотностью  $\rho$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  (рис.2). Как изменится энергия системы, если заряд на обкладках конденсатора  $q$ ?

6. Согласно представлениям классической физики, электрон, движущийся вокруг ядра с ускорением, теряет энергию. Покажите, что энергия, излучаемая электроном за один оборот, мала по сравнению с его энергией. Оцените время падения электрона на ядро, считая, что начальный радиус орбиты  $r_0 = 0,5 \text{ \AA}$ . Скорость потери энергии на излучение определяется выражением  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3c^3} a^2$ , где  $a$  – ускорение электрона,  $e$  – его заряд,  $c$  – скорость света.

7. Температура поверхности Земли определяется балансом солнечной энергии, поглощаемой Землей, и энергией, излучаемой Землей в космическое пространство. Считая, что поток энергии, излучаемый Солнцем и Землей, определяется законом Стефана – Больцмана  $Q = \sigma T^4$  ( $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана,  $T$  температура поверхности), оцените среднюю температуру по-

верхности Земли. Температура поверхности Солнца  $5770 \text{ K}$ , радиус Земли  $6,4 \cdot 10^6$  м, радиус Солнца  $7 \cdot 10^8$  м, радиус орбиты Земли  $1,5 \cdot 10^{11}$  м, доля отраженного солнечного излучения (альбедо Земли)  $0,4$ .

### Устный командный тур (избранные задачи)

#### МАТЕМАТИКА

1. Простое или составное число  $2^{10} + 5^{12}$ ?

2. В математическом кружке число девочек больше 40%, но меньше 50% от числа всех участников. Какое наименьшее число участников кружка может быть при этих условиях?

3. Можно ли получить нуль из чисел  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 200^2$ , используя только сложение и вычитание?

4. Квадрат разрезан на 100 квадратов, 99 из них – со стороной 1. Какую площадь может иметь этот квадрат?

5. Найдите наибольшее значение выражения  $a^2b - b^2a$ , если выполнено условие  $a^2 + b^2 = 1$ .

6. Можно ли в таблице  $6 \times 6$  расставить 36 вещественных чисел так, чтобы их сумма была отлична от 0, а сумма чисел в любом прямоугольнике  $1 \times 4$  равнялась 0?

7. Число 1,5 интересно тем, что оно в 4 раза меньше суммы своих цифр. Найдите число, которое в 8 раз меньше суммы своих цифр.

#### ФИЗИКА

1. Резиновый шарик прыгает в однородном поле тяготения над горизонтальной поверхностью. Опишите процессы превращения энергии из одного вида в другой, которые при этом происходят. Нарисуйте график зависимости полной механической энергии шарика от времени, считая, что при  $t = 0$  шарик находится на максимальной высоте.

2. Для растяжения пружины на некоторую длину требуется сила  $F$ . Какая сила потребуется для растяжения на ту же длину  $n$  пружин, соединенных параллельно? Во сколько раз изменится растягивающая сила в случае последовательного соединения пружин?

3. Два одноименно заряженных шарика притягиваются. Может ли такое быть?

4. Почему начинают фонтанировать заглушенные нефтяные скважины после накачки их сжатым воздухом?

5. Проволочная прямоугольная рамка вращается с постоянной скоростью вокруг одной из своих сторон, параллельной прямолинейному проводнику с током. Пренебрегая индукцией магнитного поля Земли, укажите, когда в

рамке индуцируется максимальная и минимальная ЭДС.

6. Может ли человек бежать быстрее своей тени?

7. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите со скоростью  $v$ . Нарисуйте график зависимости скорости его движения от времени с учетом силы сопротивления среды.

### История научных идей и открытий (избранные задачи)

#### МАТЕМАТИКА

1. Кто из математиков получил Нобелевскую премию?

2. Назовите великого математика, который ввел в употребление символы « $\pi$ », « $e$ », « $\sin$ », « $\cos$ », « $\Sigma$ », « $f$ ».

3. Какие знаменитые задачи оставили древние математики, и когда эти задачи были решены?

4. В XVII – XVIII веках произошли революционные изменения в математике, связанные с созданием математического анализа. В конце XIX века также произошли революционные изменения в математике. С чем они связаны?

5. Как известно, иногда в названиях встречаются исторические несправедливости. Например, Америку назвали не по имени ее открывателя – Колумба. Назовите известные вам исторические несправедливости в математике.

#### ФИЗИКА

1. Какие важные физические эксперименты удалось провести, благодаря неравномерному оседанию фундамента у одного из архитектурных сооружений Европы? Где находится это сооружение? Кто и когда проводил на нем опыты? Какие выдающиеся выводы были им сделаны?

2. Какой выдающийся ученый предсказал возможность существования черных дыр задолго до создания общей теории относительности? Из каких соображений он исходил? Когда была опубликована его работа?

3. Кто, когда и за какое открытие получил первую в мире Нобелевскую премию по физике?

4. Назовите выдающегося ученого и государственного деятеля Средней Азии, автора всемирно известного каталога звездного неба. В каком веке и где он жил?

5. Когда впервые на орбите Земли появился искусственно созданный объект? Кто его создал и сколько он весил?

В.Альминдеров, Б.Алиев, А.Егоров,  
А.Попов

# II Международная астрономическая олимпиада

Вторая международная олимпиада Астрономического общества прошла с 22 по 28 октября 1997 года в Специальной астрофизической обсерватории (САО) Российской академии наук. Участники и гости олимпиады проживали в гостинице на нижней научной площадке САО – в поселке Нижний Архыз.

В олимпиаде приняли участие команды Армении, Индии и России. Сборная Российской Федерации была сформирована по результатам IV Российской олимпиады школьников по астрономии и космической физике, руководителями команды были В.В. Чичмарь (Москва) и С.Ф. Заикин (Ухта). Другие страны определяли составы своих команд самостоятельно.

Согласно действующему положению, олимпиада проходила для двух возрастных категорий участников: 8–10 классы (15–16 лет) и 11–12 классы (17–18 лет). Официальными языками олимпиады были русский и английский; на этих языках оргкомитет подготовил условия заданий, а перед турами руководители команд могли перевести задания на родные языки участников (этого, однако, не потребовалось).

Как и планировалось, олимпиада включала в себя три тура: теоретический, наблюдательный и практический. Перед теоретическим и практическим турами всем участникам выдавались карты звездного неба, транспортеры и линейки. Жюри олимпиады было сформировано из сотрудников САО, руководителей команд (по одному от каждой страны) и членов Координационного совета олимпиады.

Утром 24 октября состоялся первый тур – теоретический, на котором каждому участнику олимпиады было предложено решить 6 задач в отведенные для этого 4 часа. Задачи теоретического тура оценивались по системе 8 + 2 (реже 9 + 1 или 7 + 3), т.е. за полное правильное стандартное решение ставилось 8 баллов, а остальные 2 балла участники могли набрать, приводя в решении дополнительную информацию (осмысление результата, определение границ применимости рассматриваемой модели, разумные замечания относительно корректности заданий и т.п.). Таким образом, максимальное число баллов, которое можно было набрать на теоретическом туре, равнялось 60.

Вечером того же дня (24 октября) состоялся наблюдательный тур. Процедура проведения этого тура напоминала древние испытания воинов, чье знание звездного неба проверялось в лесу или при частично затянутом облаками небе. Каждый участник проводился через небольшую рощу, и в трех местах ему предлагалось узнать созвездия, видимые в просветах стволов и ветвей. Величины и ориентация просветов резко менялись: вначале был виден северо-восток (Кассиопея, Персей, Возничий) и юго-запад (Орел, Дельфин и др.), затем – открытый южный горизонт и, наконец, север (с Медведицами и Драконом). Максимальное число баллов, которое мог набрать участник на наблюдательном туре, равнялось 20.

На следующее утро прошел практический тур. Как и на наблюдательном туре, задание было одинаковым для всех участников, и на его выполнение давалось 2 часа. Авторы задания поставили задачу познакомить школьников с совершенно новым материалом и выяснить, насколько хорошо они могут осмыслить и обработать наблюдательные данные, представленные в ранее неизвестном им виде. Другими словами, участникам было предложено решить маленькую научную задачу. Максимальное число баллов на практическом туре тоже равнялось 20.

Следует отметить, что организаторы олимпиады уделяли внимание не только соревнованиям. Главным аспектом олимпиады, по мнению организаторов, должен быть научно-познавательный – ведь большинство школьников впервые знакомятся с современными телескопами и настоящей работой научных сотрудников обсерватории, т.е. с тем, как работают астрономы-профессионалы (не случайно олимпиады проводятся именно в обсерваториях). Таким образом, кроме чисто соревновательных, про-

## Теоретический тур

### 8–10 классы

1. Две звезды имеют одинаковые абсолютные величины, но одна из них в тысячу раз дальше другой. Каково различие в их видимых величинах? У какой звезды видимая величина больше?

2. Что увидел бы наблюдатель, находившийся на Луне, глядя на Землю во время полного солнечного затмения на Соловецких островах ( $34^{\circ}45'$  в.д.,  $65^{\circ}01'$  с.ш.) в 5 часов утра 22 июля 1990 года? Ответ поясните рисунком.

3. Сутки на Марсе почти равны земным – всего на 2,5% продолжительнее, а период его обращения вокруг Солнца составляет 687 земных суток. На сколько примерно звездные сутки на Марсе короче средних солнечных?

4. В тот день, когда весь мир отмечал 40-летие запуска первого искусственного спутника Земли (4 октября), Венера была недалеко от положения восточной элонгации, ее координаты составляли приблизительно  $\alpha = 15^{\text{h}}20^{\text{m}}$ ,  $\delta = -22^{\circ}$ . Используя эти данные, определите примерно ее координаты и расположение относительно Солнца в день запуска первого спутника. Период обращения Венеры вокруг Солнца составляет 0,61521 тропического года.

5. Пусть наблюдатель находится на одной из планет Сириуса. Что там светит ярче – наше Солнце или звезды ковша Большой Медведицы?

6. Будем говорить, что Солнце находится в Зените, если оно закрывает Зенит своим диском. Где такое можно видеть чаще – в Кито ( $\varphi = 0^{\circ}$ ) или в Сан-Паулу ( $\varphi = -23,5^{\circ}$ )? Объясните.

### 11–12 классы

1. Если звезда удаляется от Земли с большой скоростью, то будет ли она казаться горячее или холоднее, чем такая же, но практически неподвижная звезда? Объясните.

2. См. задачу 2 для 8–10 классов.

грамма олимпиады включала в себя множество интересных научных и культурно-спортивных мероприятий.

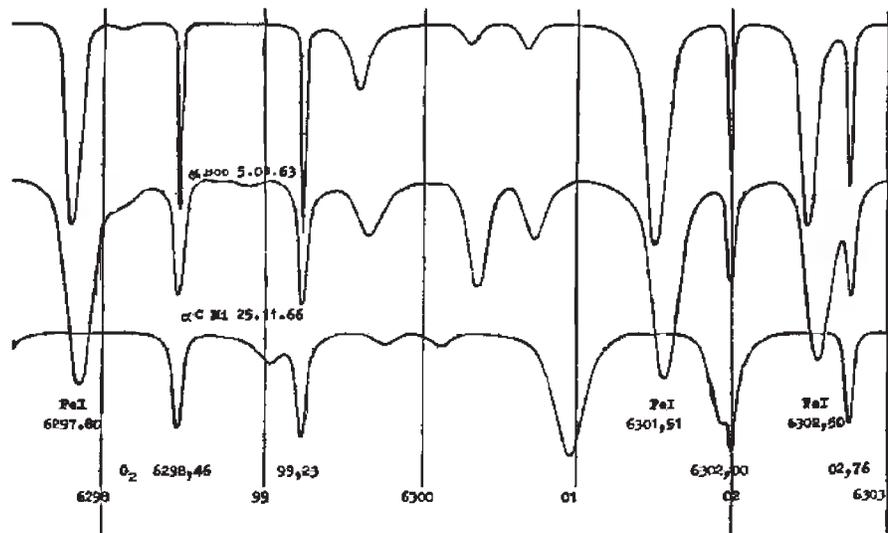
Например, в первый день участникам рассказали об истории создания САО и понаблюдали с местностью, окружающей обсерваторию. Неподдалеку от научного поселка расположен историко-культурный заповедник, главной достопримечательностью которого являются древние христианские храмы. Около тысячи лет назад в этих местах обитали аланы – родственники скифов и других народов иранской языковой группы, которые одними из первых на территории современной России приняли христианство. В последующие дни для участников олимпиады были организованы экскурсии на радиотелескоп РАТАН-600, крупнейший в Евразии оптический телескоп БТА, а также на несколько «маленьких» телескопов: Zeiss-600, Zeiss-1000 и др. После практического тура была проведена экскурсия по интересным местам в окрестностях обсерватории – в Архыз и дальше в горы. Кроме того, участники и гости олимпиады имели возможность посещать спортзал, бассейн, административные здания обсерватории, библиотеку, научные лаборатории, вычислительный центр. Все участники могли воспользоваться электронной почтой.

На закрытии олимпиады ее победители и участники были награждены почетными дипломами. К сожалению, разница в подготовке школьников из разных стран по-прежнему очень велика: практически все призовые места опять заняли российские ребята.

Сразу после окончания олимпиады для школьников стран СНГ, прибывших в САО РАН, прошла IV Осенняя астрономическая школа. Эта школа стала проводиться с 1994 года, сразу же после учреждения Российской олимпиады школьников по астрономии и космической физике – именно приглашение на эту школу считается главным призом для победителей Российских астрономических олимпиад. Программа школы была, как всегда, насыщенной: в первой половине каждого дня – лекции по современным проблемам астрономии и астрофизики, во второй – практические занятия или наблюдения. Отдельная программа организуется и для взрослых. В рамках школы проходят многочисленные неофициальные встречи членов оргкомитета и руководителей – энтузиастов преподавания астрономии.

Следующая Международная олимпиада Астрономического общества планируется в октябре 1998 года в одной из обсерваторий стран СНГ. Информация (на русском и английском языках), включая подробности участия в олимпиаде, размещена в Интернете, на WWW Подмосковного филиала МГУ (142432 Черноголовка Московской обл., Институтский просп., 15): <http://www.issp.ac.ru/univer/>. С организаторами олимпиады можно связаться и по электронной почте: [gavrilov@issp.ac.ru](mailto:gavrilov@issp.ac.ru). Всех заинтересованных читателей просим присылать свои задачи, вопросы, замечания и советы по указанному адресу.

Ниже приводятся условия задач теоретического и практического туров, а также список призеров II Международной астрономической олимпиады.



3. Представители одной очень хорошей цивилизации с элементами мании величия провели чудовищный эксперимент: они зверски разделили свою звезду на две равные части (изменения температуры и плотности вещества звезды при этом не произошло). На сколько изменилась суммарная звездная величина системы?

4. См. задачу 4 для 8–10 классов.

5. См. задачу 5 для 8–10 классов.

6. Какова разрешающая способность 6-метрового телескопа БТА в САО? Что ее ограничивает? Объясните Ваши расчеты.

### Практический тур

*Эффект Доплера, лучевая скорость и орбитальное движение Земли.*

Работа предусматривает несколько этапов. Количество и порядок их выполнения произвольны.

На рисунке изображен маленький участок спектров трех звезд: Солнца, Арктура и Проциона, т.е. три графика зависимости интенсивности излучения (в условных единицах) от длины волны (в ангстремах). Понижения интенсивности, т.е. линии поглощения, распадаются на две группы. Более узкие образовались на подходе лучей к телескопам в земной атмосфере, это – линии поглощения кислорода. Особенно узки они в спектре Солнца, что вызвано более высокой разрешающей способностью солнечного телескопа. Более широкие линии – линии поглощения железа и других металлов – образовались в атмосферах звезд в самом начале пути лучей. Их глубина меняется от звезды к звезде, что связано с различной поверхностной температурой этих звезд. Но для Вас важно лишь то, что спектры звезд сдвинуты по длине волны относительно спектра Солнца.

а) Объясните эти сдвиги качественно.

б) Оцените геоцентрические лучевые скорости Арктура и Проциона.

в) Дайте простейшую схему взаимного движения Солнца, Земли и звезд.

г) Исходя из полученных данных, оцените скорость движения Земли по орбите. Можно воспользоваться картой звездного неба и учесть гелиоцентрические ( $V_c$ ) скорости Арктура ( $-5,5$  км/с) и Проциона ( $-3,3$  км/с).

Публикацию подготовил  
М. Гаврилов

## Призеры II Международной астрономической олимпиады

### Дипломы I степени получили

Евдокимов Н. – Москва, Россия,  
Журавлев В. – Москва, Россия,  
Золотухин Н. – Москва, Россия.

### Дипломы II степени получили

Бондарь В. – Кировская обл., Россия,  
Павлюченко С. – Ухта, Россия,  
Постнов А. – Оренбург, Россия,

Рахчеев М. – Челябинск, Россия,  
Сайфутдинов А. – Челябинск, Россия,  
Смирнов М. – Новгород, Россия.

### Дипломы III степени получили

Захаров Р. – Сыктывкар, Россия,  
Карев Ю. – Ухта, Россия,  
Марковичи А. – Курск, Россия,  
Пандей А. – Лукнау, Индия,  
Эргле С. – Нижний Новгород, Россия.

# Московская олимпиада студентов по физике

В мае 1997 года на базе кафедры физики Московского государственного технического университета им. Н.Э.Баумана (МГТУ) прошла (после шестилетнего перерыва) городская физическая олимпиада среди студентов. К участию в олимпиаде были приглашены все ведущие технические вузы Москвы.

По результатам олимпиады в коллективном зачете первое место заняла команда МГТУ, второе – команда Московского государственного института электронной техники (МГИЭТ), третье – команда Государственной академии нефти и газа им. И.М.Губкина (ГАНГ).

В индивидуальном зачете первое место завоевал А.Авдеев (МГИЭТ), второе – С.Хлебников (ГАНГ), третье – Д.Николаев (МГТУ).

Ниже приводятся условия задач олимпиады.

1. На поверхность сферы радиусом  $R$  случайным образом падают заряженные частицы с зарядом  $Q$ . Определите среднее квадратичное значение модуля напряженности электрического поля в центре сферы, если общее число попавших на ее поверхность частиц равно  $N$ . (6 баллов)

2. Термодинамически изолированный сосуд разделен перегородкой на две равные части объемом  $V$  каждая. Обе половины сосуда заполнены одним и тем же газом при температуре  $T$ . Давление газа в одной части  $p$ , а в другой вдвое больше. Перегородку мгновенно убрали. Определите изменение энтропии газа в сосуде после завершения переходных процессов. (10 баллов)

3. Обруч радиусом  $R$  свободно падает в поле тяжести, вращаясь вокруг собственной оси, расположенной в горизонтальной плоскости, с угловой скоростью  $\omega$ . Определите радиус кривизны траектории точки обруча, занимающей в данный момент наимень-

шее положение, если скорость падения обруча равна  $v_0$ . (6 баллов)

4. Небольшое тело скользит по вогнутой поверхности, имеющей параболическую форму в соответствии с уравнением  $y = ax^2$ , где  $a$  – константа. Коэффициент трения между телом и поверхностью  $\mu \ll 1$ . В начальный момент времени координата тела  $x_0 = 2,75\mu/a$ , а скорость нулевая. Какова будет координата тела, когда оно окончательно остановится? (8 баллов)

5. Сила взаимодействия двух одинаковых круговых витков с током, когда они находятся друг от друга на очень малом расстоянии  $L_1$  по сравнению с их радиусом  $R$ , составляет  $F_1$ . Какой станет сила взаимодействия, если витки разнести на очень большое расстояние  $L_2$ ? Оси витков все время совпадают. Токи в витках поддерживаются постоянными. (6 баллов)

6. Определите механические напряжения, возникающие в однород-

ной диэлектрической пластине с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , помещенной во внешнее однородное электрическое поле напряженностью  $\vec{E}_0$ . Пластина расположена перпендикулярно силовым линиям поля, а ее длина и ширина намного превышают ее толщину. (5 баллов)

7. Материальная точка массой  $m$  висит на нерастяжимой нити длиной  $L$ , пропущенной через отверстие в потолке. Маятник раскачали до угловой амплитуды колебаний  $\alpha$ . Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы подтянуть маятник к потолку? Как при этом необходимо действовать? (7 баллов)

8. Частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  движется с начальной скоростью  $v_0$  в вязкой среде в поперечном магнитном поле индукцией  $B$ . Сила вязкого трения равна  $F_{\text{тр}} = -rv$ . На каком расстоянии от начальной точки частица остановится? (10 баллов)

9. Диэлектрическая сфера радиусом  $R$  разделена на две неравные части плоскостью. Части заряжены равномерно по поверхности зарядами  $Q$  и  $-q$  соответственно. Определите силу притяжения между ними. (9 баллов)

10. Плоская световая волна интенсивностью  $I_0$  падает на поверхность зеркального шара радиусом  $R$ . Определите силу, действующую на шар со стороны световой волны. (6 баллов)

Публикацию подготовил  
М.Яковлев

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. **Указание.** Начинать надо с самого высокого семиклассника, перестановки можно осуществлять по парам (менять местами самого высокого с тем, кто занимает его «законное» место, и так далее). При каждой такой перестановке условие, сформулированное в задаче, будет сохраняться (докажите).
2. Поскольку мастер Седов не черноволосый (он отвечает черноволосому) и не седой, то он рыжий; кандидат в мастера не рыжий и не черноволосый, стало быть – седой.
3. См. рис.1.



Рис. 1

4. 5.

5. На черных полях вертикальных рядов доски с нечетным номером ставим букву А, на остальных черных полях ставим букву В (рис.2). На белых полях горизонтальных рядов с четными номерами ставим букву С. Число фигур, стоящих на

	B		B		B		B
A	C	A	C	A	C	A	C
	B		B		B		B
A	C	A	C	A	C	A	C
	B		B		B		B
A	C	A	C	A	C	A	C
	B		B		B		B
A	C	A	C	A	C	A	C

Рис. 2

А-полях, равно  $n$ , на В-полях –  $m$ , на С-полях –  $k$ . В силу условия задачи числа  $n + k$  и  $m + k$  являются четными. Но тогда число  $n + m$  тоже четное, т.е. на черных полях стоит четное количество фигур.

РАЗУМНО ИЛИ ЛОГИЧНО?

- 1) ... читать! 2) ... во всех остальных.
- 3) ... какая вам разница? 4) ... девятерых попутчиков!
- 5) ... тех, кто мне не верил! 6) ... Окно!
- 7) ... станет теплее? 8) ... столько денег!
- 9) ... найденные. 10) ... железной дороге.
- 11) ... только два пятьдесят. 12) ... ничего и не делал.
- 13) ... волос уже нет. 14) ... разбежаться?
- 15) ... их поносить! 16) ... на твою лошадь. 17) ... хожу.
- 18) ... врач. 19) ... гостиница слишком низкая.
- 20) ... с ними разговаривать!

Разделение на «логичные» и «разумные» ответы, конечно, весьма условно. Нормальная разговорная речь практически никогда не бывает совершенно формальной. Даже в такой формализованной системе, как юридический язык, строгий логик нашел бы много пробелов и не сформулированных явно высказываний. Однако можно заметить, что в задачах 1, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 правильный ответ использует в основном информацию, данную в самом анекдоте, а в остальных требуется привлечь знания о ситуации.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №6 за 1997 г.)

11. Пусть в книге напечатано  $C$  сказок, причем  $n$ -я сказка начинается на странице с номером  $H_n$ , заканчивается на странице с номером  $K_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, C$ . Титул, как известно, всегда располагается в начале книги, а вот аннотация и оглавление могут оказаться как в начале книги, так и в конце. Чтобы не нарушать общности, будем считать, что дополнительной информацией заняты  $D$  первых страниц, а также  $3 - D$  страниц в конце книги, где  $D$  равно либо 1, либо 2, либо 3. Отсюда следует, что  $H_1 = D + 1$ , а  $K_C = 120 - (3 - D) = 117 + D$ . Поскольку каждая сказка начинается с новой страницы, то  $H_2 = K_1 + 1$ ,  $H_3 = K_2 + 1$ , ...,  $H_C = K_{C-1} + 1$ . Сложив последние равенства, получим  $S_H - H_1 = S_K - K_C + C - 1$ , где  $S_H = H_1 + H_2 + \dots + H_C$  – сумма номеров страниц, на которых начинаются сказки, а  $S_K = K_1 + K_2 + \dots + K_C$  – сумма номеров страниц, на которых сказки заканчиваются. Выражая  $H_1$  и  $K_C$  через  $D$ , а также учитывая, что по условию задачи  $S_K = 5S_H$ , отсюда получаем  $S_H = \frac{117 - C}{4}$ . Число  $S_H$  может быть целым лишь в случае, когда  $C$  равно 1, 5, 9, 13, ..., т.е. имеет вид  $C = 4m + 1$ , где  $m$  – целое неотрицательное число. Оценим снизу значение  $S_H$ . Так как  $H_1 = D + 1$ ,  $H_2 \geq D + 2$ ,  $H_3 \geq D + 3$ , ...,  $H_C \geq D + C$ , то

$$S_H \geq (D+1) + (D+2) + \dots + (D+C) = \frac{C(C+2D+1)}{2} \geq \frac{C(C+2 \cdot 1+1)}{2} = \frac{C(C+3)}{2}.$$

Следовательно,  $\frac{117 - C}{4} \geq \frac{C(C+3)}{2}$ , откуда  $2C^2 + 7C \leq 117$ . Для указанного вида  $C$  решения этого неравенства:  $C = 1$  и  $C = 5$ .

Если  $C = 1$ , то сказка в книге всего одна. При этом  $S_H \leq 4$  и  $S_K \geq 117$ , откуда  $S_K/S_H > 5$ , что противоречит условию. В случае  $C = 5$  распределение сказок по страницам книги может быть, например, таким:

номер сказки	1	2	3	4	5	сумма:
номер страницы, на которой сказка начинается	3	4	5	9	119	140
номер страницы, на которой сказка заканчивается						

Таким образом, в книге напечатано 5 сказок.

12. Обозначим угловые меры дуг окружности, как показано на рисунке 3. Тогда

$$\angle DAB = \frac{1}{2}(l_2 + s_2 + l_3 + s_3 + l_4 - l_1);$$

$$\angle BCD = \frac{1}{2}(l_2 + s_1 + l_1 + s_4 + l_4 - l_3);$$

$$\angle DAB + \angle BCD = \frac{1}{2}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) + l_2 + l_4 - \frac{1}{2}(l_1 + l_3).$$

Аналогично,

$$\angle ABC + \angle CDA = \frac{1}{2}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) + l_1 + l_3 - \frac{1}{2}(l_2 + l_4).$$

Поскольку по условию  $l_1 + l_3 = l_2 + l_4$ , то  $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA$ , и следовательно, вокруг четырехугольника  $ABCD$  можно описать окружность.

13. Одно из возможных решений показано на рисунке 4.

14. Перепишем уравнение в виде

$$(a-2)(b-2) + (b-2)(c-2) + (c-2)(a-2) = 12.$$

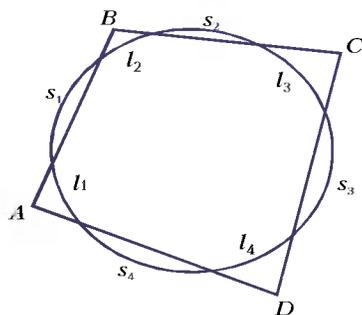


Рис. 3

Учитывая симметрию задачи, будем искать решение, удовлетворяющее условию  $a \leq b \leq c$ . Пусть  $a = 1$ , тогда  $(b - 3)(c - 1) = 13$ , откуда  $b = 4, c = 16$ . Пусть  $a = 2$ , тогда  $(b - 2)(c - 2) = 12$  и либо  $b = 3, c = 14$ , либо  $b = 4, c = 8$ , либо  $b = 5, c = 6$ . Пусть  $a = 3$ , тогда  $(b - 1)(c - 1) = 13$ , что невозможно.

Пусть  $a = 4$ , тогда  $bc = 16$ , откуда  $b = c = 4$ . При  $a \geq 5$  решений нет:  $(a - 2)(b - 2) + (b - 2)(c - 2) + (c - 2)(a - 2) \geq 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 27 > 12$ .

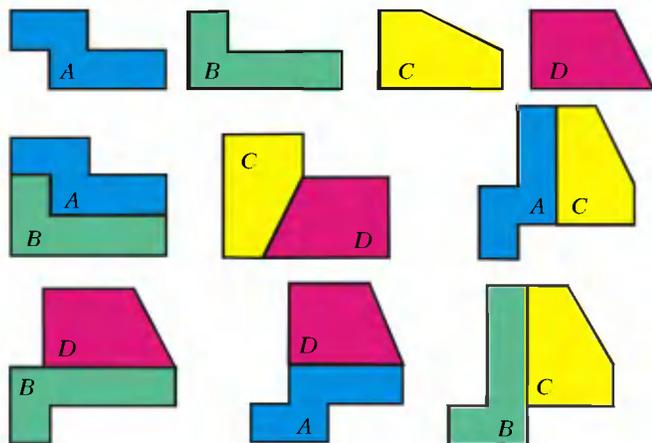


Рис. 4

Остальные решения получаются перестановкой переменных  $a, b$  и  $c$ .

15. Положим  $a_1 = a, a_2 = b$ , тогда  $a_3 = \frac{b+1}{a}$ ;

$$a_4 = \frac{\frac{b+1}{a} + 1}{b} = \frac{a+b+1}{ab}$$

$$a_5 = \frac{\frac{a+b+1}{ab} + 1}{\frac{b+1}{a}} = \frac{a+1}{b}$$

$$a_6 = \frac{\frac{a+1}{b} + 1}{\frac{a+b+1}{ab}} = a; a_7 = \frac{a+1}{\frac{a+1}{b}} = b.$$

Отсюда следует, что последовательность  $\{a_n\}$  периодическая: ее значения повторяются через 5 номеров. Следовательно,  $a_{1997} = a_2 = 1828$ .

### АЭРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПАРАДОКС СПУТНИКА

1. Такое явление наблюдается, когда на орбитальное движение тела влияет сопротивление разреженного атмосферного воздуха. Суть дела в том, что, двигаясь в разреженном газе, компактный спутник, укомплектованный научными приборами или другим оборудованием, испытывает меньшее сопротивление, чем сравнительно большая по размерам пустотелая ракета с отработанными двигателями. У ракеты больший баллистический коэффициент  $C$ , или, как иногда говорят,

большая парусность, чем у спутника. Вот почему аэродинамический парадокс выражен более ярко для ракеты, нежели для спутника, который падает на Землю в разреженной атмосфере медленнее и по более пологой траектории. Таким образом, спутник заметно отстает от ракеты, хотя последняя испытывает большее торможение в разреженной атмосфере, чем спутник.

2. Движение спутника по эллиптической орбите, пересекающей верхние разреженные слои атмосферы, имеет интересную особенность. В перигее спутник, испытывая максимальное сопротивление, теряет в скорости на каждом витке, и, тем самым, его апогей уменьшается. В апогее торможение спутника меньше, чем в перигее, особенно если орбита заметно вытянута. Поэтому перигей не снижается так сильно, как апогей, т.е. орбита действительно стремится к круговой. (Точное решение задачи о движении спутника достаточно сложное, так как требуется учитывать еще изменение скорости спутника на каждом витке вследствие его падения в поле тяжести Земли.)

3. Указание. Воспользуйтесь уравнением моментов (7).

4. Допустим, что сила притяжения спутника к планете определяется выражением  $F = A/R^n$ , где  $A$  – постоянная. Из уравнения  $mv^2/R = A/R^n$  найдем выражение для кинетической энергии спутника:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{A}{2R^{n-1}}.$$

Для заданного поля сил потенциальная энергия спутника равна

$$W_n = -\frac{A(n-1)}{R^{n-1}},$$

а полная энергия составляет

$$W_{\text{пол}} = \frac{A}{2R^{n-1}}(3-2n) = W_k(3-2n).$$

Баланс полной энергии спутника в начале и в конце витка с учетом работы силы сопротивления  $F_{\text{сопр}}$  приводит к такому выражению для тангенциального ускорения пролетающего в разреженной атмосфере спутника:

$$a_t = \frac{F_{\text{сопр}}}{m(2n-3)}.$$

Отсюда очевидно, что при  $n > 1,5$  можно говорить об аналоге аэродинамического парадокса спутника в гравитационном поле.

5. Так как орбитальная скорость спутника во много раз превышает среднюю тепловую скорость молекул, находящихся в верхних слоях атмосферы, при расчетах сил торможения спутника мы не учитывали собственное движение частиц среды. Казалось бы, торможение спутника на больших высотах не должно зависеть от температуры воздуха  $T$ . Однако это не так. Дело в том, что при изменении температуры изменяется плотность газа – с ростом температуры плотность возрастает. Увеличивается также характерная толщина атмосферы  $\Delta h \approx RT/(Mg)$ , на которой давление газа изменяется в  $e$  раз (здесь  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $M$  – молярная масса воздуха,  $g$  – ускорение свободного падения). Вариации плотности газа из-за изменения температуры скажутся на торможении спутника.

6. Мы знаем, что если бы на Земле не было гор и впадин, а вода всего мирового океана равномерно покрывала земной шар, то глубина этого океана была бы около 2 км. Давление на дне достигало бы величины 200 атм. Чтобы при таком давлении превратить воду в пар, требуется ее нагреть до температуры чуть больше 600 К – именно такой должна быть минимальная температура атмосферы Земли, чтобы вся свободная вода на Земле существовала в виде пара. В этом слу-

чае Земля будет окружена толстой и плотной атмосферой водяного пара высотой в сотни километров. Для такой атмосферы характерный перепад высот, на котором атмосферное давление уменьшается в  $e$  раз, будет около 30 км (т.е. в 3 раза больше). Из-за плотного атмосферного «хвоста» водяного пара станет невозможным полет спутников на сравнительно низких орбитах, на которых они сейчас летают. В то же время для таких удаленных объектов, как Луна, влияние земной атмосферы из водяного пара на орбитальные движения будет все же пренебрежимо малым.

**КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»**

**Вопросы и задачи**

1. См. рис.5.
2. См. рис.6.
3. Если экран расположен от фигуры на расстоянии, большем  $htg\alpha$  (где  $\alpha$  — угол падения солнечных лучей), длина тени будет  $2h$  (рис.7). Если экран расположен ближе, длина тени будет меньше.

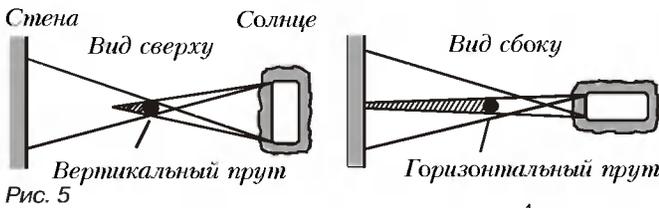


Рис. 5

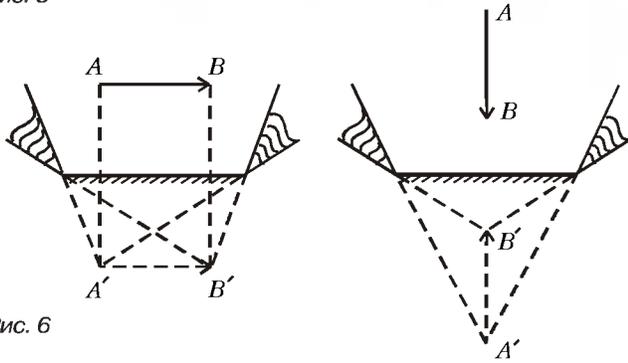


Рис. 6

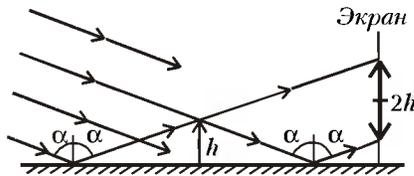


Рис. 7

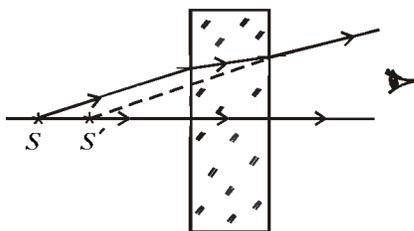


Рис. 8

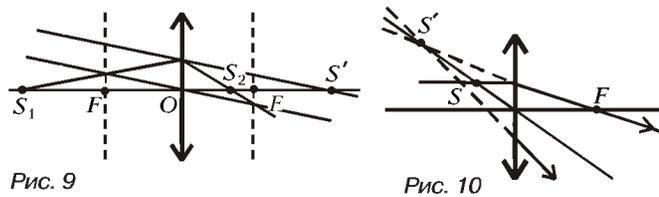


Рис. 9

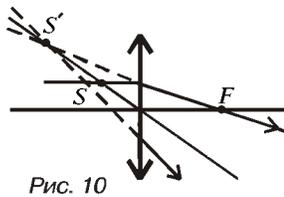


Рис. 10

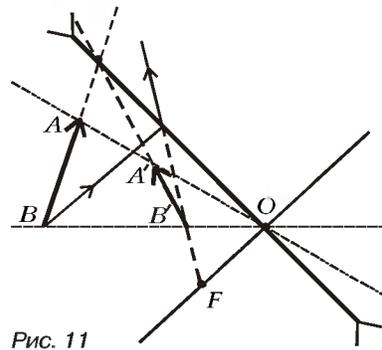


Рис. 11

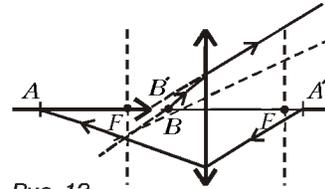


Рис. 12

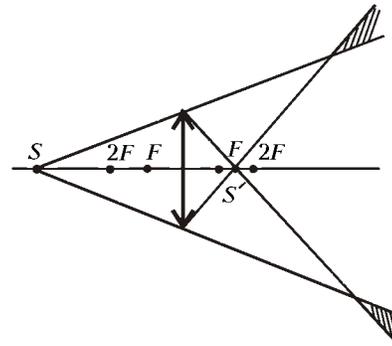


Рис. 13

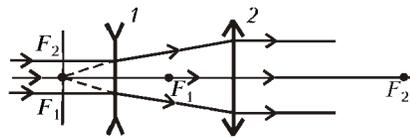


Рис. 14

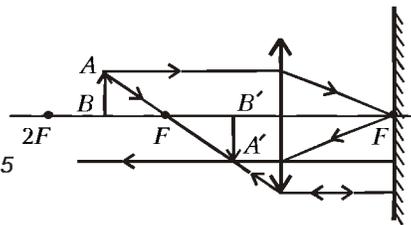


Рис. 15

4. Чтобы собрать на рассматриваемый препарат больше света.
5. См. рис.8.
6. Изображение — мнимое.
7. См. рис.9. Источник находится в точке  $S_1$ , если изображение действительное, и в  $S_2$ , если изображение мнимое.
8. См. рис.10.
9. См. рис.11.
10. Один из вариантов построения приведен на рисунке 12.
11. Да. В этом случае объектив фотоаппарата действует подобно главному хрусталику.

12. Источник света должен быть к линзе ближе, чем двойной фокус, иначе образуются области, из которых источник и изображение видны одновременно (заштрихованные на рис.13).
13. См., например, рис.14.
14. См. рис.15.
15. В космосе нет поглощения света атмосферой, меньше яркость неба, отсутствует атмосферное дрожание, а длительность экспозиции не ограничена только ночным временем — т.е. снижено или исключено влияние факторов, мешающих получать на Земле изображение слабых звезд.

**Микроопыт**

В результате двойного отражения ваше изображение не будет «переворачиваться» слева направо. Если комната прямоугольной формы, вы увидите себя в зеркале из любой ее точки.

УРАВНЕНИЯ, КОТОРЫЕ «НЕ РЕШАЮТСЯ»

1.  $\emptyset$ . 2.  $-1/3$ . 3.  $2\pi - 8; 2\pi - 1; 2\pi$ . 4. 2.
5.  $(1, 513/2, 128), (-1, -513/2, -128)$ .
6.  $2\pi n, \pi/2 + 2\pi k, n, k \in \mathbf{Z}$ . 7.  $(2, 2)$ .
8.  $(1; \infty)$ . 9.  $1/3$ . 10.  $[-3; 9]$ . 11.  $(2; \infty)$ .
12.  $(1; 0), (0; 1)$ . 13.  $(\pi/4, \pi/4), (-\pi/4, -\pi/4)$ .
14. 0,  $1/2, 1$ . 15.  $(0; 4)$ . 16.  $(1/2; 1)$ .
17.  $(2, -3, 3), (1, 0, 0)$ . 18.  $(-1; -2)$ . 19.  $\emptyset$ .
20.  $[-1; 1]$ . 21.  $(2, -2 \pm 2\pi/3 + 2\pi n), n \in \mathbf{Z}$ .
22.  $(1; -1)$ . 23. 7. 24.  $(-1; 2), (-1; -2)$ .

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ

1.  $m_n = 2,05$  кг. 2.  $p = 0,81$  атм. 3.  $V_1/V = 3/7$ .
4.  $p = 0,95$  атм. 5.  $\alpha = 75\%$ . 6.  $m_r = 6$  г.
7.  $Q = \Delta U + \nu R(T + \Delta T)/2$ . 8.  $\Delta m/m = 0,24\%$ .
9.  $p = 0,69$  атм.

VII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

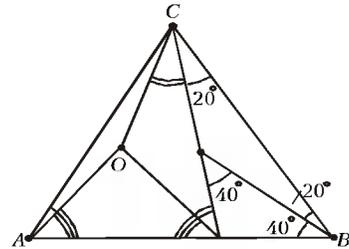
МАТЕМАТИКА

1. Существует. Например, число  $2^{35} \cdot 3^{35} \cdot 5^{84} \cdot 7^{90}$  удовлетворяет условию.
2.  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .
3.  $(0; 0; 0); (0; 1; 1); (1; 0; 1); (-1; 0; -1); (-1; -1; 0), ((1 \pm \sqrt{5})/2; (1 \pm \sqrt{5})/2; (1 \pm \sqrt{5})/2)$ .
4. 1842. *Указание.* Докажите, что последовательность  $a_n$  периодична с периодом 5, т.е. что  $a_{n+5} = a_n$ . Тогда  $a_{19} = a_4, a_{97} = a_2, a_{1998} = a_3$ .
5. Можно (см. рис.16).
6. Бесконечно. Поскольку уравнение можно переписать как  $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 = 6$ , его решениями будут, например,  $x = n+1, y = n, z = n-1$ , где  $n \in \mathbf{N}$ .
7. а) 1; б) 2; в)  $\left[\frac{n}{2}\right]$ .  
*Указание.* Воспользуйтесь тем, что функция  $f = x_1 + \dots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{n-1}x_n - x_nx_1$  — линейная по каждому из переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Зафиксируем  $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  и положим  $x_k = x$ . Тогда  $f(x) = kx + l$  достигает своего наибольшего значения либо при  $x = 0$ , либо при  $x = 1$ . Повторяя проведенное рассуждение, убеждаемся в том, что максимальное значение функции  $f$  достигается, когда некоторые из  $x_i$  равны 0, а остальные 1. Остается выбрать наибольшее из значений  $f$  при таких  $x$ .

Рис. 16

ФИЗИКА

1. а) В режиме проскальзывания колеса  $a = g \frac{m(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu M}{m + M}, T = g \frac{mM}{M + m} (\mu + \sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ .
- б) В режиме качения без проскальзывания  $a = g \frac{m(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{m + 2M}, T = g \frac{2mM}{2M + m} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ .
- в) В состоянии покоя  $a = 0, T = 0$ .
2.  $x_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \frac{\beta v_0^2}{2mg}\right)$ .



3.  $T = \frac{2\pi}{\omega}, \omega^2 = \frac{\gamma}{M} \frac{(Mg + p_0 S)^2}{RT_0}$ , где  $\gamma = 5/3$  — показатель степени адиабаты,  $R$  — универсальная газовая постоянная.
4.  $H = h \left(1 + \delta \left(\frac{\rho RT_0}{Mp_0} - 1\right)\right) \approx h\delta \frac{\rho RT_0}{Mp_0} \approx 40h$ , где  $\delta = \frac{c(T - T_0)}{r}$  — доля воды, перешедшей в парообразное состояние,  $T_0 = 100^\circ\text{C}$  — температура кипения воды при атмосферном давлении  $p_0$ ,  $\rho$  — плотность воды,  $M$  — молярная масса воды.
5.  $\Delta E = \frac{q^2 d}{2\epsilon_0 S} \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}$ . 6.  $\tau \sim 10^{-10}$  с. 7.  $t \approx 20^\circ\text{C}$ .

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. Составное. *Указание.*  $2^{10} + 5^{12} = (2^5 + 5^6)^2 - 2^6 \cdot 5^6$ . 2. 7.
3. Можно. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что при  $k \in \mathbf{N}$   $k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2 = 4$ .
4. 2500; 324; 100. *Указание.* Докажите, что сторона  $k$  сотого квадрата — целое число. Пусть  $n$  — сторона исходного квадрата. Тогда  $n^2 - k^2 = 99$ .
5.  $1/4$ . *Указание.* Положите  $a = \cos \varphi, b = \sin \varphi$ .
6. Можно. 7. 1, 125.

ФИЗИКА

1. В процессе движения шарика над горизонтальной поверхностью происходит переход кинетической энергии в потенциальную энергию тяготения и обратно. При ударе происходит переход кинетической энергии в потенциальную энергию упругой деформации и обратно. Оба процесса сопровождаются потерями механической энергии шарика в результате действия сил вязкого трения и возбуждения акустических волн в шарике и поверхности, а также вследствие того, что деформация шарика и поверхности не может быть абсолютно упругой. См. рис.17.

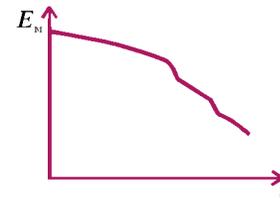


Рис. 17

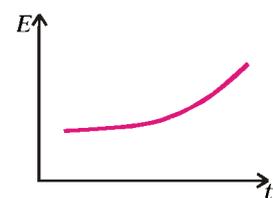


Рис. 18

2.  $nF$ ; уменьшится в  $n$  раз.
3. Да. Например, в случае протяженных заряженных тел, когда один из зарядов значительно больше другого.
4. Воздух хорошо растворяется в нефти и заметно уменьшает ее плотность. Это приводит к тому, что даже ослабленного давления подземных пластов оказывается вполне достаточно для того, чтобы заглушенные скважины вновь зафонтировались.
5. ЭДС индукции максимальна, когда плоскость рамки перпендикулярна проводнику с током, и минимальна, когда они параллельны.
6. Да. Например, если источник света движется быстрее человека и параллельно ему и экрану. Проще всего рассмотреть этот эффект в системе отсчета бегущего человека. Если скорость источника света  $V$ , а человека  $v$ , то скорость тени относительно человека  $v_0 = h(V - v)/(H - h)$ , где  $h$  и  $H$  — расстояния от человека и источника света до экрана.
7. См. рис.18. (Подробно об этом можно прочитать в статье А.Митрофанова «Аэродинамический парадокс спутника» в этом номере журнала. *Прим.ред.*)

*История научных идей и открытий***МАТЕМАТИКА**

1. Л.В.Канторович. 2. Л.Эйлер.
3. Трисекция угла, удвоение куба, квадратура круга (решены в XIX веке).
4. Возникновение аксиоматического метода, появление теории множеств.
5. Два наиболее известных примера – уравнение Пелля и формула Кардано. Задолго до Пелля, малоизвестного английского математика, это уравнение изучил Ферма. Формула Кардано была открыта до Кардано итальянским математиком Тартальей.

**ФИЗИКА**

1. «Падающая башня» находится в городе Пизе в Италии. На ней в конце XVI века Галилео Галилей проводил свои знаменитые опыты по изучению движения падающих тел. В частности, он установил, что при падении с одной высоты скорость падения как легкого, так и тяжелого тела одна и та же.
2. Французский ученый Пьер Лаплас в 1798 году опубликовал статью, в которой рассчитал параметры небесного тела, поле тяготения которого не выпускает даже свет.
3. Вильгельм Конрад Рентген в 1901 году стал первым Нобелевским лауреатом по физике «за открытие лучей, названных его именем (рентгеновских лучей)».
4. Это – Мухаммед Тарагай Улугбек, правитель Самарканда в первой половине XV века.
5. 4 октября 1957 года в СССР был запущен первый в мире искусственный спутник Земли. Он был создан в КБ под руководством С.П.Королева и имел массу 83,6 кг.

**II МЕЖДУНАРОДНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА***Теоретический тур***8—10 классы**

1. Разница в видимом блеске этих звезд:  $1000^2 = 1000000 = 100 \cdot 100 \cdot 100$  раз, или в видимых звездных величинах:  $5^m + 5^m + 5^m = 15^m$ . Звездная величина удаленной звезды, естественно, больше. (За это стандартное решение ставилось 8 баллов.) Следует заметить, что при удалении звезды в 1000 раз, возможно, следует учитывать поглощение света от нее межзвездной средой, т.е. разница будет больше 15 звездных величин (+2 балла).
2. Наблюдатель увидел бы Землю, по которой ползет маленький кружок полной тени от Луны диаметром около 200 км или 2", вокруг которой – полутень (область частного солнечного затмения). При этом Соловецкие острова находятся на краю видимого диска Земли, слева вверху (если верхом считать направление на Северный полюс); земная ось повернута к наблюдателю так, что Северный Ледовитый океан полностью виден. Вопрос о том, увидел ли бы наблюдатель именно кружок полной тени, сильно зависит от условий видимости. На достаточно монотонном фоне облаков кружок был бы отчетливо виден; в отсутствие облаков при движении тени «по лесам, полям и рекам» увидеть темный кружок диаметром около двух угловых секунд довольно сложно.
3. Примерно на две с небольшим минуты, поскольку лишние звездные сутки набегают (по сравнению с солнечными) за 1 марсианский год:  $24(1 + 2,5\%/100\%)/687 \approx 2,1$  мин.
4. За 40 земных лет Венера совершила почти ровно 65 оборотов вокруг Солнца, т.е. 40 лет назад она тоже была вблизи положения восточной элонгации. Учитывая, что вблизи этого

положения расположение Венеры относительно Солнца на нашем небе меняется очень медленно, а координаты Солнца 4 октября 1957 года и 4 октября 1997 года в точности одни и те же, можно с уверенностью сказать, что 40 лет назад координаты Венеры были практически теми же самыми:  $\alpha = 15^h 20^m$ ,  $\delta = -22^\circ$ .

5. Звезды ковша Большой Медведицы находятся на расстоянии около 25 пк и имеют видимую звездную величину порядка  $2^m$ , Сириус находится на расстоянии 2,66 пк от Солнца. Поэтому при перемещении с Земли в окрестность Сириуса видимые звездные величины звезд ковша практически не изменятся, а звездная величина Солнца составит около  $2^m$ . Таким образом, некоторые звезды ковша будут светить ярче Солнца, некоторые – слабее.
6. В Кито (на экваторе) Солнце в Зените можно видеть не более 4 дней в году, т.е. по 2 дня вблизи каждого из дней равноденствия. В это время изменение склонения Солнца очень большое:  $23 - 24'$  в сутки; это означает, что если сегодня Солнце закрывает Зенит своим диском (диаметр диска равен  $32'$ ), то уже послезавтра этого явно не произойдет. В Сан-Паулу (на тропике) Солнце находится в Зените только в дни зимнего солнцестояния, но зато изменение склонения Солнца незначительное и событие может иметь место 16, а изредка даже 17 дней в году.

**11—12 классы**

1. Из-за красного смещения, которое имеет место при наблюдении удаляющейся звезды, пик спектрального распределения смещается в сторону больших длин волн. Следовательно, звезда будет казаться холоднее (8 баллов). Следует добавить, что температура звезд определяется не только положением максимума в излучении, но и положением спектральных линий. Поэтому детальное изучение спектра позволяет вычислить как истинную температуру звезд, так и скорость удаления (+2 балла).
3. Объем каждой из половинок звезды будет равен половине первоначального, радиус будет меньше в  $2^{1/3}$  раза, площадь поверхности – в  $2^{2/3}$  раза. Поскольку половинок две, общая их площадь составит  $2 \cdot 2^{-2/3} = 2^{1/3}$  первоначальной. При неизменной температуре поверхности звезд изменение звездной величины составит  $-5/2 \cdot \lg 2^{1/3} \approx -5/6 \cdot \lg 2 \approx 0,25$  (8 баллов). Заметим, что одна звезда может закрывать наблюдателю другую, в этом случае звездная величина системы становится больше – максимально до +0,5 по сравнению с первоначальной (+2 балла).
6. Теоретическая разрешающая способность идеального объектива определяется только длиной волны принимаемого излучения и диаметром объектива:  $\alpha_r = 1,22\lambda/D$  (в радианах). Для шестиметрового зеркала и  $\lambda \approx 500$  нм это дает  $\alpha_r \approx 10^{-7}$  рад  $\approx 0,02''$ . Однако, это совсем не ответ на поставленный в задаче вопрос. Реальная (практическая) разрешающая способность БТА ограничена атмосферными условиями и качеством поверхности зеркала, и она не лучше чем  $(0,7 - 0,9)''$ . Чисто дифракционное ограничение  $(1,22\lambda/D)$  практически никакой роли здесь не играет.

*Практический тур*

В предложенных спектрах (они были взяты из спектральных атласов) есть линии поглощения кислорода земной атмосферы – они не смещены во всех трех спектрах. В солнечном спектре не смещены также и линии поглощения, образовавшиеся на Солнце, – это говорит о том, что нет лучевой составляющей скорости движения Земли по орбите вокруг Солнца (как и следовало ожидать).

- a) В спектре  $\alpha$ Вoo (Арктур) заметно небольшое красное сме-

щение — эффект Доплера указывает на взаимное удаление Земли и  $\alpha\text{Boo}$ . В спектре  $\alpha\text{Cmi}$  (Процион) видно существенно более сильное синее смещение линий — значит, Земля и  $\alpha\text{Cmi}$  взаимно приближаются.

б) У Арктур все линии поглощения дают одинаковую величину  $\Delta\lambda \approx +0,06 \text{ \AA}$ . Все линии Проциона дают также одинаковые  $\Delta\lambda \approx -0,55 \text{ \AA}$ . По формуле Доплера  $\Delta\lambda/\lambda_0 = V_r/c$ , где  $\lambda_0 \approx 6300 \text{ \AA}$ , а  $c = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}$ , получаем

$$V_r(\alpha\text{Boo}) \approx 2,9 \text{ км/с}, V_r(\alpha\text{Cmi}) \approx -26,2 \text{ км/с}.$$

в) Проще всего построить гелиоцентрическую схему в проекции на плоскость небесного экватора, так как с помощью карты звездного неба можно непосредственно найти прямое восхождение звезд, а также положение Солнца на эклиптике в любой день года. В других системах координат это сделать сложнее — придется пересчитывать все координаты.

Считая от точки весеннего равноденствия ( $\gamma$ ), на которую проецируется Солнце 21 марта, находим (рис.19) направление на Арктур:

$$\alpha(\alpha\text{Boo}) = 14^{\text{h}} 12^{\text{m}} = 213^\circ$$

и направление на Процион:

$$\alpha(\alpha\text{Cmi}) = 7^{\text{h}} 36^{\text{m}} = 114^\circ.$$

Направления на Землю относительно Солнца противоположны направлениям на Солнце относительно Земли, т.е.  $\beta = \alpha(\odot) + 180^\circ$ . Поэтому для 5 мая:  $\alpha(\odot) = 2^{\text{h}} 48^{\text{m}} = 42^\circ$ ,  $\beta = 42^\circ + 180^\circ = 222^\circ$ , а направление движения Земли — на точку  $222^\circ + 90^\circ = 312^\circ$ . Соответственно, для 25 ноября:

$\beta = 60^\circ$ , а направление движения Земли — на точку  $150^\circ$ .

г) Построив кинематическую схему взаимного движения Солнца, Земли и звезд, нетрудно понять, что делать оценку орбитальной скорости движения Земли  $V_{\text{орб}}$  следует по формуле

$$V_r = V_c - V_{\text{орб}} \cos \delta,$$

где  $V_r$  и  $V_c$  — гео- и гелиоцентрические скорости звезд,  $\delta$  — угол между вектором скорости Земли и направлением на звезду. Рассматривая движение только в плоскости небесного экватора, для каждой из звезд записываем

$$V_r(\alpha\text{Boo}) = V_c(\alpha\text{Boo}) - V_{\text{орб}} \cos(312^\circ - 213^\circ),$$

$$V_r(\alpha\text{Cmi}) = V_c(\alpha\text{Cmi}) - V_{\text{орб}} \cos(114^\circ - 150^\circ).$$

Из первого уравнения находим  $V_{\text{орб}} \approx 53 \text{ км/с}$ , из второго —  $V_{\text{орб}} \approx 33 \text{ км/с}$ . Полученные результаты, естественно, не точные — главным образом потому, что вместо истинных углов  $\delta$  мы фактически брали их проекции на плоскость небесного экватора.

### МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА СТУДЕНТОВ ПО ФИЗИКЕ

- $E = \sqrt{N} Q / (4\pi\epsilon_0 R)$ . 2.  $\Delta S = \frac{pV}{3T} \ln \frac{32}{27}$ .
- $r = \frac{(v_0^2 + \omega^2 R^2)^{3/2}}{\omega R(g - \omega^2 R)}$ . 4.  $x = 0,25\mu/a$ . 5.  $F_2 = 3\pi R^3 L_1 F_1 / (2L_2^4)$ .

$$6. f = \epsilon_0 E_0^2 (\epsilon^2 - 1) / (2\epsilon^2).$$

7.  $A = mgL \cos \alpha$ , при этом нить нужно подтягивать в крайних положениях, не изменяя амплитуду колебаний.

$$8. R = \frac{mv_0}{\sqrt{r^2 + q^2 B^2}}. \quad 9. F = qQ / (8\pi\epsilon_0 R^2). \quad 10. F = I_0 \pi R^2 / c.$$

### КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

(см. «Квант» №2)

Ответ: место/номер дорожки — 1/2, 2/7, 3/5, 4/8, 5/6, 6/4, 7/1, 8/3.

### КОНКУРС В СЕТИ ИНТЕРНЕТ

1. Заметим, что при положительных значениях параметра  $c$  корни уравнения

$$x^2 - 4x + 4 - c = 0 \quad (1)$$

— вещественные числа:  $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{c}$ , причем

$$x_1 + x_2 = 4, \quad (2)$$

$$x_1 x_2 = 4 - c. \quad (3)$$

На первом шаге можно получить числа 1 и 3. При  $c = 3$  получим корни  $x_1^{(0)} = 2 + \sqrt{3}$ ;  $x_2^{(0)} = 2 - \sqrt{3}$ . Построим множество чисел  $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(1995)}$  по следующему правилу:

$$x_1^{(k)} = 2 + \sqrt{x_1^{(k-1)}}, \quad k = 1, 2, \dots, 1995 \quad (4)$$

(число  $x_1^{(k)}$  — большее из двух чисел  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ , получающихся на выходе генератора (1), если на его вход подать число  $x_1^{(k-1)}$ ). Покажем, что  $x_1^{(0)} \cdot x_1^{(1)} \cdot \dots \cdot x_1^{(1995)} \cdot x_2^{(1995)} = 1$ . В силу (4), (3) и (2)  $x_1^{(k)} x_2^{(k)} = 4 - x_1^{(k-1)} = x_2^{(k-1)}$ , поэтому

$$x_1^{(0)} \cdot x_1^{(1)} \cdot \dots \cdot x_1^{(1995)} \cdot x_2^{(1995)} = x_1^{(0)} \cdot x_1^{(1)} \cdot \dots \cdot x_1^{(1994)} \cdot x_2^{(1994)} = \dots = x_1^{(0)} \cdot x_2^{(0)} = 1.$$

Все числа  $x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(1995)}, x_2^{(1995)}$  различны в силу неравенств  $x_2^{(1995)} < 2 < x_1^{(0)} < x_1^{(1)} < \dots < x_1^{(1995)}$  и поэтому полностью удовлетворяют требованиям задачи.

*Примечание.* Решение задачи не единственно. В качестве начального числа  $x_1^{(0)}$  можно взять один из двух корней  $2 + \sqrt{3}$  или  $2 - \sqrt{3}$ , и далее находить следующие числа по любой из двух формул:  $x_1^{(k)} = 2 - \sqrt{x_1^{(k-1)}}$  или  $x_1^{(k)} = 2 + \sqrt{x_1^{(k-1)}}$ . Таким образом, можно указать  $2^{1995}$  различных наборов чисел  $\{x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(1995)}, x_2^{(1995)}\}$ , произведение которых равно 1. (Если к тому же учесть, что кроме этих наборов могут быть также наборы  $\{1, x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(1994)}, x_2^{(1994)}\}$ , то всего различных вариантов решений  $3 \cdot 2^{1994}$ ).

Можно доказать, что и в общем случае числа  $x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(1995)}, x_2^{(1995)}$  попарно различны, но, в отличие от рассмотренного в нашем решении специального случая, сделать это уже не так просто.

2. Очевидно, что если взять какое-то количество одинаковых слагаемых, то их сумма будет кратной этому количеству. Неожиданным представляется следующий факт: если взять  $m - 1$  ( $m > 1$  — натуральное число) не обязательно равных между собой натуральных степеней числа  $m$ , то их сумма будет кратной числу  $m - 1$ . Доказательство этого факта основывается на многократном применении формулы

$$m^k - 1 = (m - 1)(m^{k-1} + m^{k-2} + \dots + m + 1)$$

( $k$  – натуральное число) к тождеству

$$m^{k_1} + m^{k_2} + \dots + m^{k_n} = n + (m^{k_1} - 1) + (m^{k_2} - 1) + \dots + (m^{k_n} - 1)$$

(здесь  $k_1, k_2, \dots, k_n$  – натуральные числа). Поскольку в последнем тождестве в скобках стоят числа, кратные  $m - 1$ , то и вся сумма будет кратной  $m - 1$ , если  $n$  кратно  $m - 1$ .

Рассмотрим теперь сумму  $s = \sum_{i=0}^{k(m-1)-1} m^{in}$ , где  $k, n$  – натуральные числа. Поскольку эта сумма объединяет  $k(m - 1)$  слагаемых натуральных степеней числа  $m$ , то она кратна числу  $m - 1$ :  $s = N \cdot (m - 1)$  ( $N$  – натуральное число). С другой стороны, как сумма геометрической прогрессии она равна  $s = \frac{m^{nk(m-1)} - 1}{m^n - 1}$ , поэтому  $m^{nk(m-1)} - 1 = N(m - 1)(m^n - 1)$ , т.е.

число  $m^{nk(m-1)} - 1$  кратно числу  $(m - 1)(m^n - 1)$ . Утверждение задачи получается отсюда при  $m = 1997, n = 2000, k = 5$ .

3. Номер пункта  $a_i$  после  $i$ -го прыжка ( $i = 1, 2, \dots$ ) кузнечика определяется по следующей формуле:

$$\begin{cases} a_i = a_0 + i\Delta - Nk, & \text{если } k \text{ – четное;} \\ a_i = (k + 1)N - a_0 - i\Delta, & \text{если } k \text{ – нечетное,} \end{cases} \quad (*)$$

где  $a_i$  – номер пункта старта кузнечика ( $a_0 = 1$ );  $N$  – максимальный номер пункта на ленте Мебиуса ( $N = 1997$ );  $\Delta$  – длина прыжка кузнечика (для кузнечика Пети  $\Delta = 100$ , для кузнечика Васи  $\Delta = 150$ );  $k = \left[ \frac{1 + i\Delta}{N} \right]$  – индикатор возрастания или убывания нумерации пунктов при выполнении  $i$ -го прыжка (квадратные скобки здесь обозначают функцию «целая часть»:  $[x]$  – наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ).

Решая совокупность (\*) неопределенных уравнений в целых числах относительно целых неизвестных  $i, k$  при  $a_i = 1$ , находим для кузнечика Пети наименьшее натуральное значение  $i = 1318$  (при этом  $k = 15$ ). Следовательно, кузнечик Вася первым окажется в пункте с номером 1.

4. Одно из возможных решений задачи показано на рисунке 20.

5. Предварительно отметим, что в любой треугольник, вершины которого совпадают с центрами трех кругов радиуса 1, можно поместить равносторонний треугольник с длиной стороны 2.

Построим внутри равностороннего треугольника  $ABC$  равносторонний треугольник  $A_1B_1C_1$  так, чтобы его стороны были

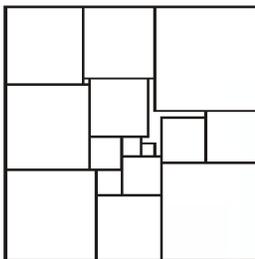


Рис. 20

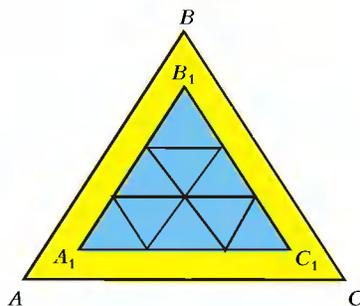


Рис. 21

на 1 удалены от сторон треугольника  $ABC$ , и, проведя параллельные линии, разделим треугольник  $A_1B_1C_1$  на 9 одинаковых треугольных ячеек (рис.21). Предположим, длина стороны треугольной ячейки меньше 2. Покажем, что в этом слу-

чае в три соседние ячейки, образующие трапецию, нельзя поместить равносторонний треугольник с длиной стороны 2. Если бы это удалось сделать, то среди сторон такого треугольника не нашлось бы сто-

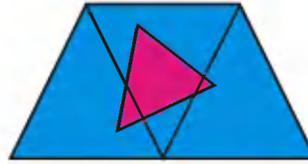


Рис. 22

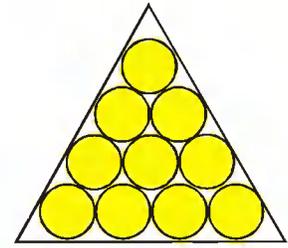


Рис. 23

рон, параллельных сторонам трапеции (рис.22), причем одна из сторон треугольника должна была бы образовать с основанием трапеции угол, больший  $60^\circ$ . Но в этом случае она была бы меньше боковой стороны трапеции. Противоречие.

Итак, поскольку  $\Delta A_1B_1C_1$  содержит не менее 9 центров кругов радиуса 1, то либо каждая из ячеек содержит какой-нибудь центр круга, либо в одной из ячеек содержится два центра. И в том, и в другом случае сторона ячейки не может быть меньше 2. На рисунке 23 показано расположение 10 кругов, когда стороны ячеек имеют длину 2.

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.Н.Балдин, В.А.Иванюк, А.Е.Пацхверия,  
М.М.Константинова, Д.Н.Гришукова,  
П.И.Чернуский, С.Б.Шехов

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

## ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,  
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховском полиграфическом комбинате  
Комитета Российской Федерации по печати  
142300 г. Чехов Московской области  
Заказ №