КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ · 1998 · №6

В номере:

Посвящается 90-летию известнейшего физика-теоретика нашего столетия Льва Давыдовича Ландау.

Законы сохранения помогают понять физические явления

М.КАГАНОВ

НАВЕРНОЕ, у многих читателей существование законов сохранения вызывает некий почтительный трепет: нечто запрещено. Не то чтобы кто-то не разрешил, а в действительности *не может быть, не происходит.*

Когда я решил написать эту статью, первое, что пришло в голову, даже перед мысленным взором возник некий рисунок (наверное, из школьного учебника физики) – это горка с санками, готовыми спуститься. Санки при спуске должны преодолеть подъем (рис.1). И мысль: санки надо поставить несколько выше

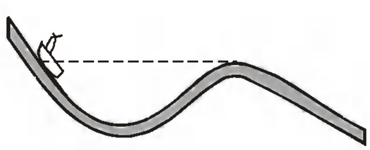


Рис. 1. Санки не достигнут вершины холма, если их начальная скорость равна нулю

– надо, чтобы хватило энергии преодолеть подъем. И необходимо учесть энергию, которая из-за трения превратится в тепло – потеряется... Вспомнились и какие-то иные случаи, когда анализ законов сохранения приводит к менее тривиальным выводам.

Неожиданно выплыл из памяти рассказ знакомого физика. Его пригласили на пост заведующего теоретическим отделом некоего НИИ, имевшего отношение к военному ведомству. Что удивило: обещали высокую зарплату, свободный режим ему самому и его сотрудникам и при этом требовали только одного – посещения заседаний технического совета. Мой знакомый не выдержал и спросил: «Зачем я вам нужен?» Последовал неожиданный ответ: «Нам необходим человек, который знает законы сохранения»...

В этой статье будет приведено несколько примеров – следствий из законов сохранения энергии и импульса. Большинство явлений, о которых пойдет речь, относятся к физике конденсированного состояния вещества (к макрофизике). Некоторые из них имеют непосредственное отношение к работам Л.Д.Ландау, которому в 1962 году была присуждена Нобелевская премия по физике «за пионерские исследования в теории конденсированных сред, особенно жидкого гелия».

Начнем мы, правда, издалека – с задачи об упругом столкновении частиц.

Столкновение двух частиц разных масс

Слово «частица» не должно настораживать, вызывая ассоциации с протонами, нейтронами, мезонами и многими другими представителями того, что по традиции принято называть миром элементарных частиц (хотя эпитет «элементарный», похоже, весьма устарел). В нашем контексте частица – шарик, который может только перемещаться. Например, в нем не могут возбуждаться звуковые колебания.[1]

По-моему, столкновение двух шаров изучают в школе. Не будем рассматривать разные случаи, а ограничимся простейшим: частица массой M покоится, а на нее со скоростью $\vec{v}_0$ налетает частица массой m. Что произойдет в результате столкновения, если столкновение лобовое? Ясно, что после удара обе частицы движутся вдоль оси X (рис.2), а о том, что скорости и импульсы – векторы, можно не думать. Обозначим величины, относящиеся к частице с массой m после столкновения малыми буквами

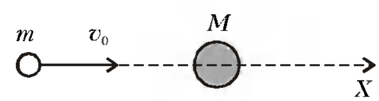


Рис.2. Лобовое столкновение частиц

(v – скорость, $p = mv$ – импульс), а к частице с массой M – большими (V – скорость, P – импульс). Запишем законы сохранения импульса:

$$mv_0 = mv + MV \qquad (1)$$

и энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}. \qquad (2)$$

Решив систему уравнений относительно скоростей v и V, мы *все* будем знать о движении частиц после столкновения[2]. Выражения для v и V очень просты и наглядны:

$$v = v_0 - \frac{2Mv_0}{m+M},\ V = \frac{2mv_0}{m+M}. \qquad (3)$$

При $M = m$ налетающая частица весь свой импульс передает стоящей частице и останавливается, а стоявшая летит со скоростью v_0 ($V = v_0$, $v = 0$).

[1] *См. статью А.Гросберга и М.Каганова «Вокруг шарика» («Квант» №2 за 1996 г.).*

[2] *Тривиальное решение $v = v_0$, $V = 0$ опустим. Оно означает, что столкновение не состоялось.*

Иллюстрация А.Балдина

Чтобы эта задача не осталась лишь примером из школьной физики, придадим полученным формулам несколько другой вид. Если $\varepsilon_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ и $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$ – энергии частицы с массой m до и после столкновения, а $p_0 = mv_0$ и $p = mv$ – ее импульсы, то

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{4\,M/m}{\left(1+M/m\right)^2},\ \text{где}\ \Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0,$$

$$\frac{\Delta p}{p_0} = -\frac{2M/m}{1+M/m},\ \text{где}\ \Delta p = p - p_0. \qquad (4)$$

Пусть масса M покоящейся до столкновения частицы значительно превосходит массу m налетающей на нее частицы ($M \gg m$). Тогда

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \simeq 4\frac{m}{M} \ll 1,\ \frac{\Delta p}{p_0} \simeq -2. \qquad (5)$$

Словами: легкая частица при столкновении с тяжелой, существенно изменяя свой импульс, почти не изменяет энергии. На научном жаргоне: столкновение легкой частицы с тяжелой *квазиупруго* (почти упруго; упругое столкновение – столкновение без передачи энергии, как при $M \to \infty$).

Теперь можно рассмотреть интересную, на мой взгляд, задачу из макрофизики. Представим себе ящик, наполненный газом тяжелых частиц (с массой M). Они, конечно, движутся, как им положено: если температура газа T, то средняя величина скорости частиц равна $V_T = \sqrt{\frac{2k_Б T}{M}}$, где $k_Б$ – постоянная Больцмана (скорость тем меньше, чем тяжелей частицы). В этот ящик «впрыскиваются» струи газа легких частиц (с массой $m \ll M$), причем энергия движения частиц в струях в расчете на одну частицу ε больше энергии теплового движения тяжелых частиц $k_Б T$. (Здесь ε – не энергия теплового движения: все частицы, возможно, имеют одну и ту же скорость v_0, а $\varepsilon = \frac{mv_0^2}{2}$.) «Впрыснули» газовые струи и закрыли ящик. Цель: изучить, что будет происходить дальше.

Чтобы было проще рассуждать, будем считать, что содержимое ящика полностью отгорожено от внешнего мира, а число «впрыснутых» легких частиц равно числу тяжелых. На это условие обратите особое внимание, читая последние абзацы этого раздела.

Легкие частицы сталкиваются с тяжелыми и друг с другом. При столкновении друг с другом они обмениваются энергиями и импульсами. Если бы тяжелых частиц не было вовсе, в газе легких частиц установилось бы равновесное распределение, причем температура газа соответствовала бы энергии движения частиц в струях. Если полный суммарный импульс частиц во всех струях не был равен нулю при «впрыскивании», то он обратится в ноль за счет столкновений (в том числе и со стенками). Время, которое пройдет после впрыскивания до установления равновесия, называется *временем релаксации*. Обозначим его буквой τ.

Что будет происходить, если в ящике есть тяжелые частицы? Сталкиваясь с ними, легкие частицы будут существенно изменять свой импульс. Тяжелые частицы при этом почти ничего не «почувствуют» – их скорость после столкновения практически не изменится (см. формулы (3)). Однако легким частицам для потери полного импульса уже нет необходимости долетать до стенок. Даже если ящик бесконечно большой, постепенно движение струй прекратится, и легкие частицы будут двигаться беспорядочно. Это означает, что суммарный импульс газа легких частиц обратился в ноль. Время, которое для этого необходимо, называется *временем релаксации импульса*. Обозначим его так: τ_p.

Столкновения с тяжелыми частицами, как мы знаем, почти не изменяют энергии легких частиц, т.е. они почти не передают свою энергию тяжелым частицам. Поэтому процесс релаксации в газе легких частиц будет идти так. Быстро, за время τ_p, обратится в ноль суммарный импульс легких частиц. Быстро в газе легких частиц установится равновесное распределение по энергиям (за счет столкновений легких частиц друг с другом), время этого процесса назовем $\tau_{вн}$.[3] Иными словами, за время $\tau_{вн}$ в газе легких частиц установится температура $T_л$, соответствующая энергии легких частиц в струях. По нашему предположению $T_л > T$, где T – температура тяжелых частиц. Потом медленно, за счет квазиупругих столкновений между легкими и тяжелыми частицами, будет идти процесс выравнивания температур в смеси двух газов. В конце концов установится единая температура. На это понадобится время τ_ε, значительно превосходящее τ_p и $\tau_{вн}$. Оно называется *временем энергетической релаксации*.

Перечитайте написанное и вы убедитесь, что описанный «сценарий» релаксации смеси газов основан на формулах (5) – следствиях законов сохранения при $M \gg m$. Но при чем здесь твердое тело, если речь шла о газах?

Пусть легкие частицы – это электроны, а тяжелые – примеси в полупроводнике. Ясно, что рассеяние электронов на примесях, которые в тысячи раз тяжелее электронов, происходит *почти упруго*, и релаксация в полупроводниках происходит приблизительно так, как мы описали выше.

В физике полупроводников существует целый раздел, носящий название *горячие электроны*. Горячие они потому, что их температуры выше, чем температура ионов кристаллической решетки. Теперь мы знаем, почему это возможно. Понимание свойств горячих электронов важно при практическом использовании полупроводников, а также при решении задач физики полупроводников – активно развивающейся области физики твердого тела.

И в физике плазмы, ведь плазма – смесь электронов и ионов, понимание почти упругого характера столкновений электронов с ионами тоже необходимо.

Так решение простой школьной задачи о столкновении двух шариков разных масс оказывается полезным в самых различных областях физики. Заметим (трудно удержаться): плазма – самое распространенное состояние вещества во Вселенной.

Частицы-волны, волны-частицы

В классической (доквантовой) физике описание почти любого явления требовало выбора «исполнителя»: либо частица, либо волна. Оказалось, понятия «частица» и «волна» не исключают друг друга. Микрочастицы иногда ведут себя как волны, а волны обладают свойствами частиц. Совокупность свойств, из которых

[3] *Индекс «вн» – сокращение слова «внутреннее».*

одни надо описывать с помощью корпускул, а другие – с помощью волн, получили название корпускулярно-волнового дуализма. «Переводом» с корпускулярного языка на волновой служат соотношения де Бройля

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},\ \varepsilon = \hbar\omega. \qquad (6)$$

Здесь $\vec{p}$ и ε – импульс и энергия – характеристики движения частицы; $\vec{k}$ и ω – волновой вектор[4] и частота – характеристики волны; $\hbar$ – знаменитая постоянная Планка ($\hbar \approx \approx 10^{-34}$ Дж · с).

Соотношения де Бройля (6) могут служить и для «перевода» с волнового языка на корпускулярный: для этого их надо прочесть справа налево. Каждой волне можно поставить в соответствие частицу. Часто при этом говорят не «частицу», а квазичастицу (почти, не совсем частицу), тем самым подчеркивая, что все же это не настоящая частица, а квант – порция энергии волны, равная $\hbar\omega$. Квант электромагнитной (световой) энергии – квазичастица *фотон*, квант звуковой энергии – *фонон.*

Введя квазичастицы, легко пользоваться законами сохранения энергии и импульса не только при столкновениях частиц, но и в том случае, когда в «реакции» принимают участие волны. Простейший пример – фотоэффект. Световая волна, падающая на поверхность металла, выбивает из него электроны. Рисунок 3 показывает, как это происходит: поглотив фотон, электрон преодолевает потенциальный барьер, который держит его внутри металла. Закон сохранения энергии в этом случае особенно прост:

$$\varepsilon = \hbar\omega - A. \qquad (7)$$

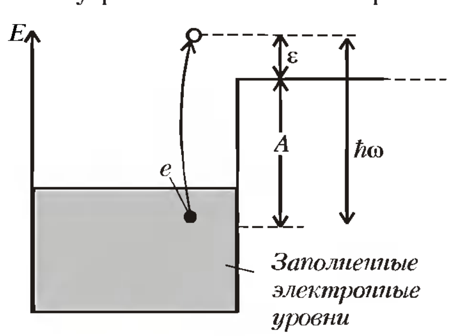


Рис.3. Поглотив фотон с энергией $\hbar\omega$, электрон покидает металл; A—работа выхода, т.е. наименьшая энергия, которую надо затратить, чтобы «вытащить» электрон из металла

Он утверждает, что энергия электрона линейно зависит от частоты. Уравнение (7) называют соотношением Эйнштейна. Эйнштейн первым применил понятие фотона (кванта света) к фотоэффекту и тем объяснил экспериментальные факты, в корне противоречившие классической физике. Импульс фотона в этом случае можно не учитывать, так как он очень мал ($\hbar k = \hbar\omega/c$, где c – скорость света), и воспринимается всем металлическим образцом, а не одним электроном.

Сейчас, когда квантово-механические представления прочно вошли не только в сознание профессионалов, но и всех, интересующихся физикой, трудно себе представить значение работы Эйнштейна по теории фотоэффекта. Для нас главное, что составило славу Эйнштейна, – это создание им теории относительности, изменившей наши представления о пространстве и времени. Наверное, для многих будет неожиданностью узнать, что Нобелевскую премию Эйнштейн получил «за важные физико-математические исследования, особенно за открытие законов фотоэлектрического эффекта». Это произошло в 1921 году, когда и специальная, и общая теория относительности были уже сравнительно давно построены.

Эффект Комптона

Явление рассеяния электромагнитных волн электронами с изменением длины волны названо в честь открывшего его американского ученого А.Комптона (Нобелевская премия 1927 г.).

Согласно волновым представлениям, электромагнитная волна, частота которой ω, заставляет электрон колебаться с той же частотой. Колеблясь, электрон излучает, естественно, электромагнитные волны той частоты, с которой он колеблется. Это и есть рассеянная волна. Тем самым частота рассеянной волны совпадает с частотой падающей на электрон волны.

Однако, если рассматреть рассеяние как столкновение фотона с электроном и учесть, что фотон обладает энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\omega/c$ (см. формулы (6)), то из законов сохранения немедленно следует, что частота фотона должна при рассеянии уменьшаться (а длина волны увеличиваться). Действительно, поскольку электрон приходит в движение, его энергия увеличивается, а энергия фотона должна уменьшиться (на величину приобретенной электроном кинетической энергии). Записав законы сохранения энергии и импульса, можно получить

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_e c}(1 - \cos\theta), \qquad (8)$$

где λ и λ' – длины волн света до и после рассеяния, m_e – масса электрона, а θ – угол рассеяния.

Величину $2\pi\hbar/(m_e c)$ называют комптоновской длиной волны электрона. Она равна $2{,}4 \cdot 10^{-12}$ м. Это очень маленькая величина. Ясно, что относительное изменение волны $\Delta\lambda/\lambda$ заметно только в случае очень коротких волн. Поэтому Комптон-эффект фактически наблюдается при рассеянии рентгеновского и γ-излучений. Вывод формулы (8) – простое упражнение. Удобно считать, что электрон, с которым сталкивается фотон, покоится. Однако, учитывая, что энергичный фотон может заставить электрон двигаться достаточно быстро, надо использовать релятивистскую связь между энергией и импульсом электрона ($\varepsilon = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2}$).

Мы настойчиво рекомендуем вывести формулу (8). Согласие экспериментально наблюденных фактов именно с этой формулой было первым непосредственным доказательством корпускулярных свойств электромагнитных волн, возможности введения «настоящей» частицы – *фотона* с полагающимися частице энергией и импульсом (1922 г.). Ваших знаний уже достаточно, чтобы вывести такую важную формулу!

Частицы излучают волны

До сих пор, говоря о столкновениях, мы рассматривали *истинное* столкновение: до события и после события существуют две частицы. Ни тип частиц, ни их число не менялись. Но в физике термином «столкновение» часто пользуются весьма свободно. Например, на атом налетает фотон (фотон сталкивается с атомом). В результате *столкновения* фотон вовсе исчезает, а атом переходит в возбужденное состояние. Или сталкиваются ион и электрон. Результат стол-

[4] *Волновой вектор равен по модулю, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, где λ – длина волны, а направлен по направлению распространения волны.*

кновения – появление нейтрального атома. Примеры легко умножить.

А может ли элементарная частица (в данном случае это – бесструктурная частица, она может только перемещаться в пространстве), столкнувшись с фотоном или какой-нибудь другой квазичастицей, «проглотить» ее? Или: может ли элементарная частица «родить» какую-либо из квазичастиц? Этот вопрос можно задать на «волновом языке»: может ли частица, двигающаяся с постоянной скоростью, излучить волну (при такой формулировке не обязательно использовать термин «столкновение»)?

Одно общее замечание. Элементарные процессы обратимы. Что это означает? В данном случае следующее: если частица может «проглотить» квазичастицу, то может ее и «родить». Достаточно исследовать один из процессов: либо рождение квазичастицы (излучение волны), либо поглощение квазичастицы. Остановимся на рождении (излучении).

Думаю, ни у кого не вызовут сомнений уравнения, которые будут сейчас предъявлены:

$$\vec{p} = \vec{p}' + \hbar\vec{k},\ \varepsilon\left(\vec{p}\right) = \varepsilon\left(\vec{p}'\right) + \hbar\omega\left(\vec{k}\right). \qquad (9)$$

На всякий случай, все же скажем словами: частица, импульс которой $\vec{p}$, а энергия $\varepsilon = \varepsilon\left(\vec{p}\right)$, рождает квазичастицу – излучает волну с волновым вектором $\vec{k}$ и частотой ω (ω – функция $\vec{k}$). Это событие может произойти, если законы сохранения (уравнения (9)) выполняются. Их мы и должны проанализировать.

Конечно, для того чтобы иметь возможность проанализировать уравнения (9), необходимо знать зависимости входящих в них функций от их аргументов. Много интересного и важного можно обнаружить, не выходя за пределы простых соотношений

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m},\ \omega = uk. \qquad (10)$$

Вы, надеюсь, понимаете, что первое равенство тождественно более привычному $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$ (см. (2)), так как $\vec{p} = m\vec{v}$ (m – масса излучающей частицы). Второе равенство может относиться и к фотону (тогда u – скорость света), и к фонону (тогда u – скорость звука).

Итак, импульс частицы после излучения $\vec{p}'$ можно вовсе исключить:

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{\left(\vec{p} - \hbar\vec{k}\right)^2}{2m} + \hbar\omega\left(\vec{k}\right).$$

Отсюда, учитывая, что скалярное произведение двух векторов $\vec{p}$ и $\vec{k}$ есть $\vec{p}\vec{k} = pk\cos\theta$, где θ – угол

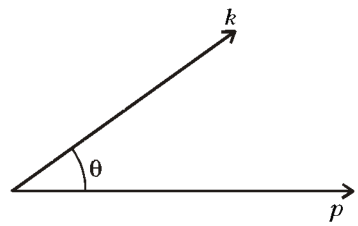


Рис.4. Направление полета квазичастицы (угол θ) отсчитывается от импульса частицы $\vec{p}$.

между этими векторами (рис.4), имеем

$$\frac{\hbar pk\cos\theta}{m} = \hbar\omega(k) + \frac{\hbar^2k^2}{2m},$$

или

$$vk\cos\theta = \omega(k) + \frac{\hbar k^2}{2m}.$$

Условие излучения сводится к утверждению, что $\cos\theta$ не должен по модулю превышать единицу, т.е.

$$\boxed{-1 \le \cos\theta = \frac{\omega(k)}{kv} + \frac{\hbar k}{2mv} \le 1.} \qquad (11)$$

Условие (11) мы взяли в рамку неспроста. Обсуждение его – главное содержание оставшейся части статьи.

Классический предел. Излучение Черенкова

Условие (11) допускает переход к классической физике (пренебрежение квантовыми эффектами): для этого просто(!) надо положить $\hbar = 0$. Конечно, потом надо убедиться, что делать это дозволено (см. ниже). Тогда условие излучения выглядит совсем просто:

$$v > \frac{\omega}{k} = v_ф. \qquad (12)$$

Здесь $v_ф$ – фазовая скорость волны. Частица способна излучить волну, если ее скорость превышает фазовую скорость этой волны.

В 1934 году аспирант С.И.Вавилова П.А.Черенков обнаружил необычное излучение. Оказалось, электроны, летящие через вещество со сверхсветовой скоростью, излучают свет. Теорию этого излучения, получившего название черенковского, построили И.Е.Тамм и И.М.Франк в 1937 году (Нобелевская премия 1958 г. «за открытие и объяснение эффекта Вавилова – Черенкова» присуждена Тамму, Франку и Черенкову).

Как известно, скорость света в пустоте c – предельная скорость движения материальных тел, здесь частицы не могут лететь со скоростью, большей c. Со *сверхсветовой* скоростью они могут лететь лишь в *среде*, где скорость света u меньше скорости света в пустоте.

Проверим, можно ли было пренебречь вторым слагаемым в правой части условия (11). Считаем: $v \approx c$, $m = m_e$ – масса электрона, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (здесь λ – длина волны излученного света); для отброшенного члена получаем: $\sim\frac{\hbar}{m_e c\lambda}$, т.е. отброшенное слагаемое есть отношение комптоновской длины волны к длине волны света. Но, как мы уже знаем, это отношение очень мало для волн видимого света. Пренебрежение оправдано.

Надо сказать, теория черенковского излучения строилась и обычно строится на основе классического (неквантового) рассмотрения. Вывод условия излучения (12) проще, если использовать квантовый подход.

Тяжелое тело, пуля, самолет, ракета не могут лететь со сверхсветовой скоростью (возможно, пока). А вот со сверхзвуковой *уже* могут. В условии (11) в случае макроскопического тела вторым слагаемым заведомо можно пренебречь: оно столь мало, что о нем попросту не стоит говорить. Мы приходим к естественному выводу: если тело летит со скоростью, превышающей скорость звука в воздухе, то оно излучает звуковые волны. О самолете в таких случаях говорят, что он преодолел звуковой барьер. Этот факт можно засвидетельствовать на земле: до земли доходит «пакет» волн, испущенных самолетом. Часто это приводит к тому, что в домах дребезжат окна, а иногда и выпадают.

Электроны металла – причина затухания звука

Возбудить звук в металле проще простого: например, можно стукнуть по его поверхности – побежит сгусток волн от поверхности в глубину. Если мы хотим возбудить звук определенной частоты, надо к поверхности металла приложить источник звука; обычно используют кварц, который колеблется под воздействием электромагнитных излучений.

Итак, по металлу бежит звуковая волна. Постепенно она затухнет. То расстояние, на котором ее амплитуда уменьшится в e раз, называется *длиной затухания.* Ее можно измерить, что и делается с большой точностью в самых различных условиях: изменяют температуру металла, вносят металл в магнитное поле, заставляют перейти в сверхпроводящее состояние и т.д., и т.п. Зачем нужны подобные эксперименты? Затем, что длина затухания очень чувствительна к «устройству» металла. А знать, как «устроен» металл, важно. Думаю этот тезис не вызовет возражений.

Звук в твердом теле – волна колебаний атомных частиц относительно их положений равновесия. В металле атомные частицы – ионы, окруженные «газом» электронов. Принимают ли участие электроны в звуковых колебаниях? Да. Ионы и электроны колеблются так, что равновесие между ними практически не нарушается: каждый элемент объема металла остается при этом нейтральным.

Акустические свойства электронных проводников – важная и интересная глава квантовой физики твердого тела. О ней хотелось бы рассказать подробно отдельно. Здесь мы ответим лишь на один вопрос: принимают электроны участие в поглощении звука металлом или нет? Ответ: принимают. И более того: при низких температурах и достаточно высокой частоте звука (когда он уже не звук, а ультразвук) электроны – главные поглотители звуковых волн. В данном случае лучше говорить – фононов.

Если условие (11) определяет возможность поглощения фонона электроном, то $\omega(k) = uk$, где u – скорость звука. Условие (11) принимает вид

$$-1 \le \cos\theta = \frac{u}{v} + \frac{\hbar\omega}{2muv} \le 1, \quad (13)$$

где v и m – скорость и масса электрона. Максимальная скорость электронов в металлах (так называемая фермиевская скорость) по «земным» масштабам велика[5]: $v \approx 10^6$ м/с, т.е. $u \ll v$. Это – важный факт. Запомним его. Теперь оценим квантовое слагаемое. Удобно его переписать так: $\frac{\hbar\omega}{mu^2}\frac{u}{v}$. Скорость звука в металлах порядка $(2-5)\cdot 10^3$ м/с. Поэтому для частот $\omega < 10^{11}$ с$^{-1}$ квантовый член мал по сравнению с отношением u/v. Значит, для обычного звука и даже ультразвука квантовое слагаемое (опять!) очень мало. А так как скорость электрона значительно превышает скорость звука, то электрон «легко» поглощает фонон. Следовательно, изучая поглощение звука, мы можем узнать об электронах много интересного.

Затухание Ландау

Не нравится мне название этого раздела. Точнее, давно не нравится название явления, которое так названо. Особенно грустно оно звучало в те шесть лет после автомобильной катастрофы (1962 г.), в результате которой шесть лет затухала жизнь Ландау. Но ничего не попишешь. Язык (в данном случае – научная терминология) закрепил такое наименование.

Плазма уже упоминалась в статье. Плазма – нейтральная (в среднем) смесь заряженных частиц разных знаков. Например, положительных ионов и отрицательных электронов. Но нам придется познакомиться с еще одним термином: *бесстолкновительная* плазма. Этот термин не означает, что частицы плазмы никогда не сталкиваются. Бесстолкновительной плазму называют тогда, когда столкновений можно не учитывать. Например, если время между столкновениями значительно больше, чем период тех полей, поведение которых в плазме мы изучаем.

Для описания свойств бесстолкновительной плазмы были сформулированы в 1938 году специальные уравнения. Они получили имя своего создателя – их называют уравнениями Власова[6]. Хотя частицы (по предположению) не сталкиваются, нельзя считать, что они не взаимодействуют. Электромагнитное поле зависит от движения заряженных частиц, а само поле влияет на их движение: возникает своеобразная зависимость всех от всех – коллективное взаимодействие заряженных частиц между собой. Эти уравнения оказались важным помощником в огромном числе задач физики плазмы. С их помощью можно было бы рассчитывать многое: от электронных приборов, составным элементом которых служит электронно-ионный пучок, до свойств ионосферы или межгалактического газа. Но... обратите внимание на частицу «бы». Дело в том, что при получении решений возникала большая трудность. Оказалось: электромагнитные волны с волновым вектором $\vec{k}$ и частотой ω такими, что $\omega = \vec{k}\vec{v}$, где $\vec{v}$ – скорость какой-либо из частиц плазмы, описать невозможно, или, точнее, приходилось использовать искусственный, не оправданный физической природой математический прием (физики-теоретики этого очень не любят!).

Частицы в плазме, как в любом газе, движутся хаотически с самыми различными скоростями. Распределение по скоростям зависит от температуры: в частности, чем плазма горячей, тем средняя скорость частиц больше. В очень холодной плазме, описываемой квантовыми законами, скорости электронов ограничены фермиевской скоростью (см. предыдущий раздел). Отсюда ясно, что пользоваться уравнениями Власова, не внеся в них какую-то новую физическую идею, если не невозможно, то очень неудобно. Как только встречается волна, характеристики которой (ω и $\vec{k}$) удовлетворяют условию

$$\omega = \vec{k}\vec{v}, \quad (14)$$

амплитуду такой волны мы рассчитать не можем. Или, другими словами: мы не умеем рассчитывать такие волны, фазовая скорость которых меньше скорости какой-либо из частиц плазмы.

Новую физическую идею в физику плазмы внес Ландау в своей работе 1946 года. Ее, как большинство теорфизических работ, невозможно изложить, ограничиваясь теми скромными знаниями, которыми нам приходится довольствоваться. Но понять

[5] *См. статью М.Каганова «Как устроены металлы?» («Квант» №2 за 1997 г.).*

[6] *А.А.Власов получил Ленинскую премию 1970 года за цикл работ по плазме.*

физическую природу происходящего в бесстолкновительной плазме можно.

Давайте проквантуем волну поля и посмотрим, может ли «фотон» поглотиться частицами плазмы. Для выяснения этого, как мы знаем, надо посмотреть, удовлетворяются ли законы сохранения энергии и импульса. Сведенные вместе, они запишутся так:

$$\varepsilon\left(\vec{p}\right)+\hbar\omega=\varepsilon\left(\vec{p}+\hbar\vec{k}\right).$$

При расчете электромагнитного поля надо учитывать взаимодействие с ним *всех* частиц. Это означает, что расчет предполагает суммирование по всем частицам (интегрирование по всем импульсам). Поэтому безразлично, возможности какой частицы рассматривать. Давайте займемся частицами, импульс которых равен $\vec{p}' = \vec{p} + \frac{\hbar\vec{k}}{2}$. Тогда уравнение, описывающее законы сохранения, оказывается симметричным:

$$\varepsilon\left(\vec{p}+\frac{\hbar\vec{k}}{2}\right)-\varepsilon\left(\vec{p}-\frac{\hbar\vec{k}}{2}\right)=\hbar\omega. \quad (15)$$

Так как $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$, а $\frac{\vec{p}}{m} = \vec{v}$, то из (15) следует условие (14).

Итак, условие (14) – условие возможности поглощения «фотона». Поглощение должно приводить к затуханию электромагнитной волны с параметрами, удовлетворяющими условию (14). Аппарат теоретической физики позволяет вычислить коэффициент затухания. Его и называют затуханием Ландау.[7]

Во многих случаях затухание Ландау – важный механизм, ограничивающий амплитуду электромагнитного поля. Иногда учет его необходим для наведения порядка в теоретических уравнениях. И то и другое весьма важно.

Обратите внимание, что поглощение звука электронами металла, описанное в предыдущем разделе, по сути дела, проявление затухания Ландау при взаимодействии звуковой волны с электронами проводимости. Должен сказать, это не сразу было понято.

Критерий сверхтекучести

Этот 1998 год можно считать юбилейным не только потому, что отмечается девяностолетие Ландау. Шестьдесят лет назад Петр Леонидович Капица открыл сверхтекучесть – способность жидкого гелия при температурах ниже 2,19 К (гелий II) протекать без вязкости через тонкие капилляры. Обнаружение движения жидкости без трения, а также понимание того, что в гелии при низких температурах возможно два типа движения: обычное (нормальное, как говорят) и сверхтекучее, позволяет объяснять большое число удивительных свойств гелия («за открытия в области физики низких температур» П.Л.Капица удостоин Нобелевской премии 1978 г.).

В 1941 году Л.Д.Ландау построил теорию сверхтекучести. Одно из основных положений этой теории – *критерий сверхтекучести*, о котором мы постараемся рассказать, используя законы сохранения.

Задумаемся, что означает *течение без трения*? Это означает, что энергия упорядоченного движения жидкости не переходит в тепло, не рассеивается – значит, движение не тормозится, не затухает.

Тепловое движение – это беспорядочное движение атомов, молекул. В разных агрегатных состояниях атомные частицы движутся по-разному: в твердых телах колеблются вокруг своих положений равновесия, в газах движутся как свободные частицы, изредка сталкиваясь с себе подобным. В обычной жидкости тепловое движение частиц сложно: они и колеблются, и перемещаются в пространстве на большие расстояния. Но в гелии II, в гелии при температуре ниже 2,19 К, ситуация иная. Переход в сверхтекучее состояние означает возникновение своеобразного коллективного состояния всех атомов гелия. Атомы гелия в этом новом состоянии не могут двигаться независимо друг от друга. Единственное доступное им движение представляет собой звуковые волны. Звуковые волны, как мы знаем, можно проквантовать. Так вводятся фононы. Если нам известна зависимость частоты ω звуковой волны от волнового вектора $\vec{k}$, то, тем самым, известна зависимость энергии фонона ε от его импульса $\vec{p}$:

$$\varepsilon = \varepsilon(p). \quad (16)$$

Так как гелий изотропен, энергия не зависит от направления импульса, а зависит только от его величины.

Теперь тепловое движение в гелии при низкой температуре получает наглядное представление: при температуре $T \neq 0$ в массе гелия «растворен» газ фононов. Чем температура выше, тем фононов больше. Надеюсь, вы понимаете, что сказанное – удобный, наглядный образ. Не более того. Но и не менее, так как используя это представление, можно вычислить зависимость различных характеристик гелия от температуры и выяснить, как зависит энергия фонона от импульса, т.е. построить функцию (16). Она показана на рисунке 5.

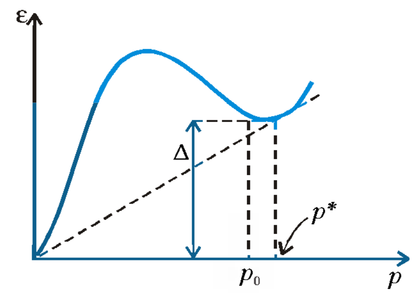


Рис.5. Зависимость энергии фонона в гелии II от импульса. В отмеченной точке (при $p = p^*$) прямая, проведенная из начала координат, касается кривой $\varepsilon = \varepsilon(p)$

Надо подчеркнуть, что зависимость ε от p при $p \to 0$ известна была априори: малый импульс соответствует малому волновому вектору k и, следовательно, большой длине волны λ ($k = 2\pi/\lambda$). Но при $\lambda \gg a$, где a – межатомное расстояние, волна, о которой идет речь, – обычная звуковая волна. Скорость ее хорошо известна: $u \approx 240$ м/с, и

$$\varepsilon = up. \quad (17)$$

При импульсах, близких к минимуму энергии,

$$\varepsilon \approx \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2m^*},\ p \approx p_0, \quad (18)$$

где $p_0/\hbar = 1{,}9 \cdot 10^6$ м$^{-1}$, $\Delta = 8{,}7$ К, $m^* = 0{,}16 m_{He}$ (m_{He} – масса атома гелия).

Значения параметров p_0, Δ и m^* подобраны так, чтобы наилучшим образом описать температурные зависимости характеристик гелия II.

[7] *Слово «фотон» взято в кавычки, так как речь идет не об электромагнитной волне в вакууме. Квазичастицу в плазме называют плазмоном.*

Эти значения удалось подтвердить непосредственно проверкой, «построив» функцию (16). И в этом помогли законы сохранения. Исследовали неупругое рассеяние нейтронов гелием вблизи абсолютного нуля температуры (1961–1964 гг.). Неупругое рассеяние – это рассеяние, при котором нейтрон теряет (или приобретает) энергию. Остановимся на рассеянии с потерей энергии.

На что нейтрон расходует энергию, пролетая через гелий? На «рождение» фонона. Значит, согласно законам сохранения,

$$E\left(\vec{P}\right) = E\left(\vec{P}'\right) + \varepsilon(p),\ \vec{P} = \vec{P}' + \vec{p},$$

или

$$\varepsilon\left(\vec{P} - \vec{P}'\right) = E\left(\vec{P}\right) - E\left(\vec{P}'\right). \quad (19)$$

Здесь $\vec{P}$ и $E\left(\vec{P}\right)$ – импульс и энергия нейтрона *до* рассеяния, $\vec{P}'$ и $E\left(\vec{P}'\right)$ – после. Так как $E\left(\vec{P}\right) = \dfrac{P^2}{2m_{\text{н}}}$, а $\vec{P} = m_{\text{н}}\vec{v}$ ($m_{\text{н}}$ – масса нейтрона), то, зная скорость рассеиваемых нейтронов и измерив скорость нейтрона, рассеянного под определенным углом θ, можно определить и величину $|\vec{P} - \vec{P}'| = \sqrt{P^2 + P'^2 - 2PP'\cos\theta}$, и разность энергий нейтронов, равную энергии фонона. Измерения с большой точностью подтвердили найденные значения.

Теперь есть возможность сформулировать критерий сверхтекучести. Мы покажем, что вид зависимости $\varepsilon = \varepsilon(p)$ (формула 16), изображенной на рисунке 5, свидетельствует: если скорость течения жидкости гелия меньше некоторого критического значения $v_{\text{кр}}$, то при взаимодействии со стенкой капилляра в жидкости не может «зародиться» фонон. А это означает, что энергия движения жидкости не может превратиться в тепловую энергию. Следовательно, при $v < v_{\text{кр}}$ жидкий гелий течет без трения – осуществляется сверхтекучесть.

Пусть по капилляру со скоростью $-\vec{v}$ течет гелий при $T < 2{,}19$ К. Перейдем в систему координат, в которой гелий покоится; капилляр движется относительно гелия со скоростью $\vec{v}$. Предположим, что *«родился» фонон* (мы найдем условие, когда такой процесс возможен). В этом случае должны быть выполнены законы сохранения

$$\frac{P^2}{2M} = \frac{P'^2}{2M} + \varepsilon(p),\ \vec{P} = \vec{P}' + \vec{p}, \quad (20)$$

где $\vec{P} = M\vec{v}$ – импульс капилляра, M – его масса, остальные обозначения прежние. Подставим вместо $\vec{P}'$ его значение, возведем в квадрат и получим

$$\vec{v}\vec{P} = \varepsilon(p). \quad (21)$$

Мы отбросили квадратичный по p член. Он так мал, что его можно было бы не упоминать: ведь M – масса капилляра, а энергия $\varepsilon(p)$, с которой надо сравнить это слагаемое, – энергия *одного* фонона.

Равенство (21) может быть выполнено, если существует направление – угол θ, куда будет двигаться «родившийся» фонон:

$$\cos\theta = \frac{\varepsilon(p)}{pv}.$$

Следовательно, скорость v должна превосходить минимальное значение ε/p. Таким образом, фонон может «родиться», если

$$v > \min\frac{\varepsilon(p)}{p},$$

и не может «родиться», если

$$v < \min\frac{\varepsilon(p)}{p},$$

т.е.

$$v_{\text{кр}} = \min\frac{\varepsilon(p)}{p}. \quad (22)$$

Если $\min\dfrac{\varepsilon(p)}{p} = 0$, то никакой сверхтекучести нет: при любой скорости течения энергия течения превращается в тепловую. Если $v_{\text{кр}} \neq 0$, то при $v < v_{\text{кр}}$ жидкость течет без трения: энергия течения не может превратиться в тепло.

Нетрудно убедиться, что зависимость $\varepsilon = \varepsilon(p)$, изображенная на рисунке 5, приводит к $v_{\text{кр}} \neq 0$. Значение $v_{\text{кр}}$ легко найти графически: оно определяется тем значением $p = p^*$, при котором касательная к кривой $\varepsilon = \varepsilon(p)$, как показано на рисунке 5, есть прямая, вышедшая из начала координат (те, кто умеют дифференцировать, легко могут в этом убедиться).

Зависимость $\varepsilon = \varepsilon(p)$ называют спектром гелия. Критерий сверхтекучести Ландау утверждает, что жидкость может быть сверхтекучей, если ее спектр удовлетворяет условию $\min\dfrac{\varepsilon(p)}{p} \neq 0$. Этот критерий может быть применен не только к гелию. Например, он сыграл важную роль в понимании природы сверхпроводимости.

Надо признаться, что трудно достичь значения критической скорости, вычисленной по формуле (22), – ее значение порядка 60 м/с. Обычно сверхтекучее движение «срывается» из-за возникновения турбулентности – завихрений, которые сравнительно легко появляются в отсутствие вязкости. Но если бы $\min\dfrac{\varepsilon(p)}{p} = 0$, то ни при какой скорости невозможно было бы сверхтекучее течение.

Заключение

Среди подарков, врученных Л.Д.Ландау в день его пятидесятилетия в 1958 году, были «Скрижали»: две мраморные доски, на которых воспроизведены Заповеди Ландау – десять (как положено заповедям) классических формул, выведенных Ландау. Их от имени Института атомной энергии подарил юбиляру академик Исаак Константинович Кикоин. Среди Заповедей под номером 7 – знакомая нам кривая и формулы, ее описывающие.

В тот же день Илья Михайлович Лифшиц (он был известным филателистом) от имени харьковских физиков вручил Ландау «конверт первого дня» – почтовый конверт с маркой, якобы выпущенные в Дании, на родине Нильса Бора, которого Ландау считал своим учителем. На конверте – та же кривая.

Когда создавалась книга «Воспоминания о Л.Д.Ландау» (М.: Наука, 1988), составители в Приложении поместили фотографии «Скрижалей» с комментарием И.К.Кикоина (из журнала «Природа» №1 за, 1968 г.). В комментарии к Заповеди 7 читаем: «Одна из наиболее блестящих работ Ландау – теория сверхтекучести гелия II. Работы Ландау в этой области не только объяснили загадочное явление, впервые открытое П.Л.Капицей, но определили создание нового раздела теоретической физики – физики квантовых жидкостей».

Оказывается, воспользовавшись законами сохранения, можно понять природу сверхтекучести – способности жидкости протекать по тонким капиллярам без вязкости.


49
39
27
19
13
7
3
1

Ум хорошо, а пять — лучше

И.АКУЛИЧ

Говорят, математика наиболее быстро развивается в периоды кризиса экономики, потому что для нее не требуется дорогостоящее оборудование, а лишь карандаш, бумага, да голова на плечах – и все. Так-то оно так, но, право, ничуть не повредит наличие за столом какого-нибудь компьютера, лучше всего – с микропроцессором «Пентиум». Ведь что такое «Пентиум»? В переводе с латыни (или, возможно, с греческого) «пенти» – это, несомненно, пять, а «ум» – он и есть ум. Таким образом, «Пентиум» означает ни много ни мало *пять умов*, и имея его в своем распоряжении, мы сразу как бы становимся во главе целого ученого совета, который способен на великие дела под нашим чутким руководством!

Шутки шутками, но компьютер может многое, и, видимо, зря некоторые математики относятся к нему с некоторым пренебрежением. Каспаров тоже, помнится... Но не будем о грустном. В этой статье вниманию читателя предлагаются три задачи, которые не то что решить, но даже толком сформулировать без компьютера было бы вряд ли возможно. Надеемся, приведенные примеры подвигнут тех, кто еще сомневается, на стремление овладеть компьютером и в дальнейшем использовать его для борьбы с самыми разными проблемами.

Прародителем первой задачи стал кандидат физико-математических наук И.Воронович – автор многих задач Белорусских математических олимпиад. Как-то он предложил всеобщему вниманию две возрастающие непересекающиеся последовательности натуральных чисел a_n и b_n, определяются которые предельно просто: они покрывают все множество натуральных чисел и удовлетворяют условию $a_n = b_n + n$. Доказать, что...

Впрочем, доказывать ничего не требовалось. Для начала следовало хотя бы понять, как эти последовательности себя ведут, и что из этого может следовать. Здесь-то и выяснилось, что несмотря на простоту и лаконичность определения, «сладкая парочка» обладает весьма капризным нравом. Во-первых, далеко не очевидно, что такие две последовательности вообще существуют. К счастью, в этом нетрудно убедиться, для чего достаточно показать, как их «строить». Поскольку все $a_n > b_n$ (и чем дальше, тем значительней), то наименьшее натуральное число, т.е. 1, – это, конечно, b_1. Следовательно, $a_1 = b_1 + 1 = 1 + 1 = 2$. Таким образом, два наименьших натуральных числа использованы. А дальше? Наименьшее свободное пока что число – 3, поэтому $b_2 = 3$; тогда $a_3 = b_3 + 2 = 3 + 2 = 5$. Затем получаем: $b_3 = 4$, $a_3 = b_3 + 3 = 7$, $b_4 = 6$, $a_4 = b_4 + 4 = 10$ и так далее. Как видно, надо каждый раз просто-напросто выбирать наименьшее неиспользованное натуральное число и считать его равным b_n, а затем находить a_n по формуле $a_n = b_n + n$. Но не получится ли так, что очередное вычисленное значение a_n окажется уже занято каким-нибудь другим ранее определенным a_m или b_m, где $m < n$? Нет, не получится! Из самого способа построения последовательностей очевидно, что обе они – строго возрастающие. Поэтому не может быть и речи о равенстве $a_n = a_m$ и уж тем более – о равенстве $a_n = b_m$, поскольку $b_m < a_m$.

Назовем натуральные числа, принадлежащие последовательности a_n, А-числами, а принадлежащие последовательности b_n – В-числами. Поскольку «расстояние» между a_n и b_n с ростом n неограниченно возрастает, то следовало ожидать, что чем дальше идти по натуральному ряду, тем реже будут встречаться А-числа. Чтобы в этом убедиться, был использован наш верный друг компьютер, и оказалось, что ничего подобного не наблюдается! Вот как выглядит начало натурального ряда после замены каждого числа соответствующей буквой А или В:

BABBABABBABBABABBABAB
BABBABABBABBABABBABAB
BABBABAB...

И в том же духе продолжается на протяжении сотен тысяч знаков! Так компьютер отверг первую гипотезу.

Узрев, что частота появления А-чисел вовсе не собирается убывать, пришлось повнимательней рассмотреть, как чередуются А- и В-числа. Оказалось, что между каждыми соседними А-числами всегда располагается одно или два В-числа (чаще два, чем одно). Это подтолкнуло И.Вороновича на гипотезу о периодичности их чередования, возможно, с очень длинным периодом. Он проделал колоссальный объем работы, и неоднократно казалось, что период наконец-то пойман, но... успех так и не пришел.

Впрочем, отрицательный результат – тоже результат, и он убеждает в том, что периода, скорее всего, нет. Между тем, некая «регулярность», безусловно, имеет место. В связи с этим автор настоящей статьи сделал попытку определить хотя бы, к какому пределу стремится отношение количества В-чисел к количеству А-чисел. Так как каждая пара А-чисел, судя по всему, разделена одним или двумя В-числами, то предел (если он, конечно, существует) должен лежать где-то между 1 и 2 (и, пожалуй, ближе к 2). А точнее? И на помощь опять пришел компьютер. Первые несколько миллионов натуральных чисел были распределены между нашими последовательностями, а затем найдено отношение между количеством В- и А-чисел. Оно оказалось равным 1,618033...

Да ведь это же... Ну, конечно! Грех не узнать знаменитое золотое сечение, т.е. $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$. А, может, оно здесь ни при чем – просто случайное совпадение? Нет уж, вряд ли: слишком маловероятно полное тождество семи десятичных знаков! Но тогда откуда оно взялось? Если вдуматься, золотое сечение (как и любая другая квадратичная иррациональность) здесь вообще никаким боком не подходит. Не верь глазам своим!

Никуда не денешься: факты – вещь упрямая. Успокоив себя цитатой из классика научно-популярной литературы М.Гарднера о том, что от золотого сечения можно всего ожидать, автор задумался, как быть дальше. Прежде всего, стало понятно,

Иллюстрация П.Чернуского

почему попытка И.Вороновича нащупать периодичность была обречена на провал – ведь чередуйся А-числа с В-числами по периодическому закону, предел был бы рациональным числом. Но кроме этого, ничего путного в голову не лезло, зато только что использованная компьютерная программа маячила, так сказать, перед самым носом. От безысходности было решено слегка ее модернизировать, чтобы проверить, как поведут себя последовательности a_n и b_n, если связать их более общим соотношением: $a_n = b_n + kn$, где k – некоторое натуральное число (в исходном варианте было, очевидно, $k = 1$).

Сначала соотношение между количеством В- и А-чисел было найдено для $k = 2$. Оно оказалось равным 2,1414213... Дробная часть этого числа поразительно напоминает десятичное разложение $\sqrt{2}$. Правда, целая на 1 больше, чем надо. Но тогда выходит, что предел отношения для $k = 2$ равен $1+\sqrt{2}$. Результат налицо – хотя совершенно непонятный.

Дальше все пошло гораздо хуже. Возникающие отношения были совсем ни на что не похожи: $k = 3$ получилось 3,302775..., для $k = 4$ – 4,236067..., для $k = 5$ – 5,192582... и так далее. Тупик!

И здесь автору невероятно, просто фантастически повезло. По счастливому стечению обстоятельств он незадолго до этого готовил к печати статью о цепных дробях и в процессе подготовки исключительно для собственного удовольствия вычислил значения простейших цепных дробей, которые чудом удержались в памяти. В частности, еще не забылось, что

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

а также:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}} = 1+\sqrt{2}$$

Естественным образом родилась совершенно бредовая идея (вполне под стать самим последовательностям): если $a_n = b_n + kn$, то предел отношения количества В-чисел к количеству А-чисел равен следующей цепной дроби:

$$k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\ldots}}}}$$

Для удобства следует привести ее к более компактному виду. Это нетрудно. Пусть данное выражение равно z. Тогда под самой верхней дробной четой расположено то же самое число z, что дает нам уравнение:

$$k+\frac{1}{z} = z,$$

откуда $z = \left(k+\sqrt{k^2+4}\right)/2$. Для $k = 1$ и 2 получаем уже знакомые нам золотое сечение и $1+\sqrt{2}$. А для других k? Если $k = 3$, то $x = \left(3+\sqrt{13}\right)/2 = 3{,}302775...$ – полное совпадение с компьютерным результатом! То же самое имеет место и для $k = 4$, и для $k = 5$, и (здесь «Пентиум» разошелся не на шутку) для следующих двух десятков значений k. Все сомнения отпали напрочь. Можно было давать руку (или хотя бы палец) на отсечение, что предел равен именно $z = \left(k+\sqrt{k^2+4}\right)/2$, но *как это доказать?*

Здесь решение задачи перешло в стадию, условно именуемую «глаза боятся, а руки делают». Совершенно не веря в успех, автор уныло приступил к рассуждениям. Итак, пусть $a_n = b_n + kn$, где k – заданное натуральное число. Обозначим через $p(N)$ отношение количества В-чисел, не превосходящих N, к количеству А-чисел, не превосходящих N. Обозначим также через p предел значения $p(N)$ при $N \to \infty$ и найдем это p.

Сначала были сделаны предварительные оценки разности между соседними А- и В-числами (докажите их):

$$k+1 \le a_{n+1} - a_n \le k+2,$$

$$1 \le b_{n+1} - b_n \le 2.$$

Теперь возьмем первые N чисел натурального ряда. Пусть среди них имеется n А-чисел и соответственно $(N - n)$ В-чисел. По определению $p(N) = (N-n)/n$, откуда $n = N/(p(N)+1)$.

Затем рассмотрим натуральные числа, не превосходящие b_n. Среди них, очевидно, ровно n В-чисел, а количество А-чисел, разумеется, в $p(n)$ раз меньше, т.е. $n/p(n)$. Всего же натуральных чисел, не превосходящих b_n, будет $n + n/p(n) = n\cdot\left(p(n)+1\right)/p(n)$. Поскольку b_n – наибольшее из них, то $b_n = n\cdot\left(p(n)+1\right)/p(n)$.

Тогда следующее В-число b_{n+1} в силу предварительных оценок либо на 1, либо на 2 превышает b_n, т.е. $b_{n+1} = b_n + \Delta_b$, где $1 \le \Delta_b \le 2$. Поэтому

$$a_{n+1} = b_{n+1} + k(n+1) = b_n + \Delta_b + k(n+1) = \frac{n\cdot\left(p(n)+1\right)}{p(n)} + \Delta_b + kn + k.$$

Среди первых N натуральных чисел имеется n А-чисел. Это означает, что $a_n \le N$, но $a_{n+1} > N$, т.е. $a_{n+1} = N + \Delta_a$, где $\Delta_a \ge 1$. Оценим Δ_a сверху:

$$\Delta_a = a_{n+1} - N \le a_{n+1} - a_n \le k+2$$

(в силу предварительных оценок). Итак, $1 \le \Delta_a \le k+2$.

А теперь приравняем правые части двух полученных различных выражений для a_{n+1}:

$$\frac{n\cdot\left(p(n)+1\right)}{p(n)} + \Delta_b + kn + k = N + \Delta_a.$$

Вспомним, что $n = N/\left(p(N)+1\right)$ и подставим это значение в последнее выражение:

$$\frac{N}{p(N)+1}\cdot\frac{p(n)+1}{p(n)} + \Delta_b + k\cdot\frac{N}{p(N)+1} + k = N + \Delta_a.$$

Отсюда после простых преобразований получаем *главное уравнение*:

$$\frac{1}{p(N)+1}\cdot\left(\frac{p(n)+1}{p(n)} + k\right) = 1 + \frac{\Delta_a - \Delta_b - k}{N}.$$

Так как ограничения сверху и снизу для Δ_a и Δ_b уже известны, то легко получить и ограничения для выражения $\Delta_a - \Delta_b - k$:

$$-1-k \le \Delta_a - \Delta_b - k \le 1$$

(подробности опущены, так как слишком просты).

Наконец, устремим N к бесконечности и рассмотрим, что произойдет с главным уравнением. Очевидно, если $N \to \infty$, то и $n \to \infty$, поэтому и $p(N)$, и $p(n)$ устремятся к p. Кроме того, выражение $\Delta_a - \Delta_b - k$ ограничено сверху и снизу некоторыми фиксированными числами, поэтому предел отношения $(\Delta_a - \Delta_b - k)/N$ устремится к нулю. Следовательно, предельный вид главного уравнения таков:

$$\frac{1}{p+1}\cdot\left(\frac{p+1}{p}+k\right)=1+0.$$

После раскрытия скобок и избавления от знаменателей получается уравнение

$$p^2 - pk - 1 = 0,$$

из которого

$$p=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$$

в полном соответствии с предположением. Гора с плеч!

Конечно, наши рассуждения грешат кое-какими недочетами. В частности, прежде чем переходить к пределу в главном уравнении, следовало бы доказать само существование предела. Но в целом результат следует признать удовлетворительным. И получили мы его, в основном, благодаря компьютеру, ибо не зная броду, куда бы мы сунулись? А подгонять решение под известный ответ – милое дело (в чем с нами согласится любой троечник). Хвала «Пентиуму»!

Вторая задача также связана с последовательностями. Читатель, видимо, неоднократно сталкивался с задачами типа: «Возьмем последовательность натуральных чисел и n раз вычеркнем из нее все числа, стоящие на четных местах. Что получится?» На этот вопрос ответить несложно, как и на подобные вопросы об аналогичных последовательностях (в которых, скажем, вычеркиваются числа, стоящие на нечетных местах, либо попеременно на четных и нечетных и т.п.). Как-то, развлекаясь с подобными экспонатами, автор неожиданно наткнулся на изрядных размеров подводный камень, который сам же, в общем-то, и породил. А именно: возьмем все ту же последовательность натуральных чисел и вычеркнем из нее все числа, стоящие на местах, номера которых делятся на 2 (т.е., другими словами, все четные числа). В получившейся последовательности вычеркнем все числа, стоящие на местах, номера которых делятся на 3. Затем вычеркиваем все числа, стоящие на местах, номера которых делятся на 4. Ну, и так далее *до бесконечности.* Что за последовательность $\{a_n\}$ получится?

Во-первых, обратим внимание, что какая-то бесконечная последовательность, действительно, получится. В самом деле, после того, как вычеркнуты все числа, номера которых делятся на n, первые n членов образовавшейся последовательности дальнейшим изменениям не подвергнутся, ибо после этого будут вычеркиваться какие-то числа, порядковые номера которых строго больше n. Таким образом, чтобы получить, например, первую сотню членов нашей последовательности $\{a_n\}$, придется проделать указанную операцию 99 раз (вычеркивая последовательно каждое второе, третье, ..., сотое число). Вручную проделать нечто подобное даже для не очень больших n – дело немыслимое.

Но позвольте, а «Пентиум» на что? Запряжем-ка его покрепче! Вот и результат: образуется странная последовательность, начинающаяся числами: 1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91, 109, 133, 147, ... Ничего вразумительного о ней сказать нельзя, кроме того, что она возрастает. К нашей радости, компьютер с хорошим программным обеспечением способен помимо вычислений также и строить графики, чем мы не преминем воспользоваться. На рисунке 1 показан график зависимости a_n от n. Хотя зависимость, как видно, явно неравномерная, но *в целом* возрастание a_n весьма регулярное, причем наверняка не линейное, а более быстрое. Какое же?

Здесь пришлось к пяти умам компьютера подключить человеческий и заняться эвристикой, т.е. нестрогими рассуждениями *общего характера*. Допустим, мы взяли не бесконечную последовательность, а лишь a_n первых натуральных чисел и вычеркнули из них каждое второе. Останется *примерно* половина, т.е. $1/2$. Из них вычеркиваем каждое третье. Останется *примерно* $2/3$ остатка. Вычеркнув затем каждое четвертое, оставим *примерно* $3/4$ предыдущего остатка и так далее. Проделав такую операцию n раз, мы дальше, как уже отмечалось, вычеркнуть ничего не сможем, потому что останется как раз n чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. С другой стороны, доля оставшихся чисел (их количество по отношению к количеству исходных) близка к $(1/2)\cdot(2/3)\cdot(3/4)\cdot\ldots\cdot((n-1)/n)=1/n$. Но если n чисел составляют $1/n$ их исходного количества, то первоначально чисел было n^2. Итак, есть основания робко предположить, что a_n должно быть близко к n^2. Как бы это проверить? Безусловно, с помощью того же компьютера: если он построил график зависимости a_n от n, то кто ему мешает построить график зависимости $\sqrt{a_n}$ от n? Что из этого получилось, читатель может лицезреть на рисунке 2. Впечатляет? Еще бы! Теперь можно уже не робко, а вполне уверенно предполагать, что a_n с ростом n *асимптотически* приближается к kn^2.

Что ж, дело за малым – найти k. Сначала, конечно, вычислим его с возможно большей точностью. Запускаем программу... Готово! Получаем k = 0,785398... Господи, что же это? Проницательный читатель уже догадался, а остальные пусть умножат на 4. О ужас – получается π! Это почище золотого сечения! Такой результат способен свалить с ног даже нормального человека, не говоря о любителе математики.

Отдышавшись после нокдауна, пытаемся собрать мысли в кучу. Итак, $k = \pi/4$. Никуда не денешься – придется, как и в предыдущей задаче, объяснить это значение задним числом. Но как? Вспомним наши рассуждения, позволившие предположить, что a_n близко к n^2. Почему

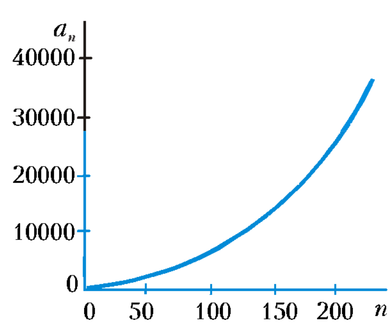


Рис. 1

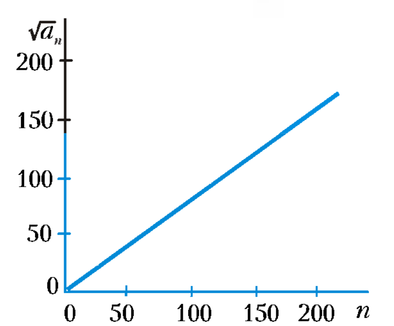


Рис. 2

не получилось просто $a_n = n^2$, т.е. $k = 1$? Несомненно, причина кроется в многократно повторяемых словах «*примерно*». В самом деле, вычеркивая из некоторого количества чисел, скажем, каждое пятое, мы уменьшим их количество ровно на $1/5$ только если оно делится на 5, в противном же случае – меньше, чем на $1/5$. То же верно и при других вычеркиваниях, так что в итоге доля оставшихся чисел окажется несколько больше $1/n$, что повлечет за собой некоторое уменьшение k.

Попытаемся «обналичить» эту идею. Возьмем, как и прежде, a_n первых натуральных чисел. Пусть мы уже вычеркнули каждое второе, третье, ..., $(i-1)$-е из них и сейчас собираемся вычеркнуть каждое i-е. Если количество чисел, еще оставшихся перед этой операцией, равно N, то N может давать при делении на i любой из i остатков – от 0 до $(i-1)$ включительно. Для каждого из них количество вычеркнутых чисел, очевидно, равно N/i, $(N-1)/i$, $(N-2)/i$, ..., $(N-(i-1))/i$. Естественно считать все возможные остатки *равновероятными*, вследствие чего *среднее количество* вычеркнутых чисел должно быть близко к среднему арифметическому перечисленных значений, которое, в свою очередь, равно

$$\frac{\frac{N}{i}+\frac{N-1}{i}+\frac{N-2}{i}+\ldots+\frac{N-(i-1)}{i}}{i}=\frac{N}{i}-\frac{i-1}{2i},$$

а количество оставшихся чисел составляет

$$N-\left(\frac{N}{i}-\frac{i-1}{2i}\right)=\frac{i-1}{i}N+\frac{i-1}{2i}.$$

Теперь поглядим, во что это выльется, меняя i от 2 до n. Поначалу $N = a_n$, поэтому после вычеркивания каждого второго числа количество оставшихся чисел составит

$$\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2\cdot 2}.$$

После вычеркивания каждого третьего числа это количество равно

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2\cdot 2}\right)+\frac{2}{2\cdot 3}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3},$$

а после вычеркивания каждого четвертого –

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3}\right)+\frac{3}{2\cdot 4}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{3}{2\cdot 4}.$$

Дальше, видимо, продолжать не надо – и так все ясно. Закономерность вполне прозрачна, и не составляет труда доказать ее, например, по индукции. Окончательный же результат таков: после вычеркивания каждого n-го числа их всего останется

$$\frac{1}{n}a_n+\frac{1}{2\cdot n}+\frac{2}{2\cdot n}+\ldots+\frac{n-1}{2\cdot n}=\frac{a_n}{n}+\frac{n-1}{4}.$$

Вспомним, что это окончательное значение должно равняться n, и потому

$$\frac{a_n}{n}+\frac{n-1}{4}=n,$$

откуда $a_n = \left(3n^2+n\right)/4$, и $k = \lim\limits_{n\to\infty} a_n/n^2 = 3/4$. Теперь промах в другую сторону – чуть-чуть недотянули до $\pi/4$. Досадно!

Но где же источник этого промаха? Должно быть, в казавшемся нам естественным предположении о равновероятности остатков. «Все не так, ребята!» – сказал бы по этому поводу В.С.Высоцкий. *А как?*

Похоже, на выбранном пути перспектива отсутствует, поэтому возьмемся за дело в буквальном смысле *с другого конца*. А именно: возьмем n чисел и будем *добавлять* к ним (или, точнее сказать, *вставлять*) сначала каждое n-е, затем – каждое $(n-1)$-е и так далее вплоть до каждого второго.

Отметим теперь следующий факт. Вставляя каждое n-е число, мы наверняка увеличим количество чисел *ровно на* 1. Более того, вставляя затем каждое $(n-1)$-е число, каждое $(n-2)$-е число и так далее некоторое количество раз (зависящее, понятно, от n), мы будем тем самым также добавлять *ровно по одному* числу, пока количество чисел не возрастет настолько, что при очередной вставке окажутся вставленными уже два числа. Затем несколько раз будет вставлено по два числа, пока на очередном шаге не перейдем к трем и так далее.

Упорства нам не занимать – в очередной раз приступим к реализации новой идеи. Пусть мы последовательно совершаем описанные «вставные» операции, добавляя при этом по одному числу. Затем, когда мы начали вставлять каждое x_1-е число, добавилось уже два числа, поскольку значение x_1 в достаточной степени уменьшилось, а общее количество чисел в достаточной степени возросло. Итак, мы продолжаем «вставки», добавляя по два числа, но начиная вставлять каждое x_2-е число, добавляем уже по три числа и так далее.

Если бы удалось найти явную зависимость x_m от m, это было бы большим успехом. Что ж, попытка – не пытка, попробуем. До того, как мы станем вставлять каждое x_m-е число, общее «накопленное» количество чисел, очевидно, стало равно

$$y_m = n+\left(n-x_1\right)+2\left(x_1-x_2\right)+$$
$$+3\left(x_2-x_3\right)+\ldots+m\left(x_{m-1}-x_m\right)=$$
$$=2n+\left(x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}\right)-mx_m.$$

То, что при вставке очередного, каждого x_m-го числа, будут добавлены уже не m, а $m+1$ чисел, определяется условием $y_m = (m+1)x_m$ (ведь это как раз и означает, что y_m в достаточной степени возросло, а x_m в остаточной степени уменьшилось). Тогда

$$(m+1)x_m = 2n+\left(x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}\right)-mx_m$$

и

$$x_m=\frac{2n+x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}}{2m+1}.$$

Это уже кое-что: получено рекуррентное выражение. А можно ли из него получить явную зависимость x_m от m? Оказывается, да! Не утомляя читателя описанием творческих процессов и сопровождающими их муками и ошибками, приведем сразу результат, который оказался, согласитесь, очень симпатичным и даже слегка красивым:

$$x_m = n\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2m+1)}.$$

Теперь поразмыслим, до каких пор (т.е., точнее говоря, до какого m) будет продолжаться процесс «вставки». Но здесь и размышлять нечего – до тех пор, пока не станет $x_m = 1$ (поскольку дальнейшее добавление означало бы вставку *каждого первого* числа – абсолютный нонсенс!). Но это означает, что наибольшее m связано с n следующим соотношением:

$$\frac{1}{n} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2m+1)}.$$

Тогда общее число накопленных чисел $y_m = (m+1)x_m = m + 1$. Но что из себя представляет y_m? Это количество чисел, которое получилось, если, стартовав от n чисел, мы последовательно вставили в них каждое n-е, затем каждое $(n - 1)$-е, каждое $(n - 2)$-е, ..., каждое 2-е число. Что получится? Конечно, a_n! Итак, $a_n = y_m = m + 1$. Ну, а для нахождения искомого коэффициента k мы должны найти предел a_n/n^2 при $n \to \infty$. Ясно, что при $n \to \infty$ будет и $m \to \infty$, поэтому

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}(m+1)\left(\frac{1}{n}\right)^2 =$$

$$= \lim_{m\to\infty}(m+1)\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2m+1)}\right)^2.$$

Наверняка значение этого предела можно найти в каком-нибудь толстом справочнике. Но мы можем вычислить его и сами, используя знаменитую формулу Стирлинга: $m! \approx (m/e)^m \sqrt{2\pi m}$. Великое ее достоинство в том, что она — асимптотическая: выполняется тем точнее, чем больше m, и, следовательно, как нельзя лучше подходит для вычисления пределов. Правда, числитель и знаменатель нашей дроби не являются факториалами, но могут быть очевидным образом к ним приведены. В числителе, например, достаточно каждый сомножитель поделить на 2, а в знаменателе — между сомножителями вставить... сомножители числителя! И вот что из этого получается:

$$k = \lim_{m\to\infty}(m+1)\left(\frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2m)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2m \cdot (2m+1)}\right)^2 =$$

$$= \lim_{m\to\infty}(m+1)\left(\frac{\left(2^m \cdot m!\right)^2}{(2m)! \cdot (2m+1)}\right)^2 =$$

$$= \lim_{m\to\infty}(m+1)\left(\frac{\left(2^m \cdot (m/e)^m \cdot \sqrt{2\pi m}\right)^2}{(2m/e)^{2m} \cdot \sqrt{4\pi m} \cdot (2m+1)}\right)^2 =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\pi m(m+1)}{(2m+1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Прямо в яблочко!

Конечно, и здесь наши рассуждения имеют немало огрехов, но искоренять их как-то не поднимается рука: не навредить бы! Куда приятней почивать на лаврах, но некогда, потому что нас ждет третья задача.

Ее предысторией можно считать другую задачу, предложенную в 1995 году на конкурсе «Математика 6—8»:

Из букв А и Б составлено 1995-буквенное слово. Докажите, что его можно разбить менее чем на 800 более коротких слов, каждое из которых является палиндромом. (Палиндромом называется слово, которое не меняется при перестановке его букв в обратном порядке).

Решение ее таково. Рассмотрим все возможные пятибуквенные слова, состоящие из букв А и Б, и убедимся, что каждое такое слово можно разделить не более чем на два палиндрома. Поскольку буквы А и Б равноправны, то достаточно рассмотреть слова, начинающиеся с буквы А. Поэтому перебор оказывается совсем невелик — всего 16 слов:

ААААА = ААААА
ААААБ = АААА + Б
АААБА = АА + АБА
АААББ = ААА + ББ
ААБАА = ААБАА
ААБАБ = АА + БАБ
ААББА = А + АББА
ААБББ = АА + БББ
АБААА = АБА + АА
АБААБ = А + БААБ
АБАБА = АБАБА
АБАББ = АБА + ББ
АББАА = АББА + А
АББАБ = АББА + Б
АБББА = АБББА
АББББ = А + ББББ

Возьмем произвольное 1995-буквенное слово и разобьем его сначала на 5-буквенные — их будет всего 1995 : 5 = 399. Каждое из этих 5-буквенных слов, в свою очередь, может быть составлено не более, чем из двух палиндромов. Поэтому произвольное 1995-буквенное слово можно составить не более, чем из 399 · 2 = = 798 палиндромов, т. е. меньше чем из 800, что и требовалось доказать.

У въедливого читателя наверняка возник естественный вопрос: чем руководствовался автор задачи, разбивая длинное слово именно на пятибуквенные куски? Неужели только тем, что 1995 делится на 5? Конечно, нет. Число 1995 поначалу вообще не фигурировало. Прежде всего, автор хотел произвести наибольшее впечатление на решающих — чтобы при одной и той же длине исходного слова число кусков-палиндромов оказалось наименьшим. Поэтому он предварительно рассмотрел самые короткие слова, выясняя, на какое число палиндромов можно их разбить. Например, однобуквенное слово — само по себе палиндром. Такие слова из двух букв, как АА и ББ — также палиндромы, но АБ и БА — нет, их приходится разбивать на 2 палиндрома каждое. С трехбуквенными словами тоже возни немного — любое из них может быть составлено не более, чем из двух палиндромов. Несколько больше работы с четырехбуквенными словами, но несложно выяснить, что и здесь всегда хватает двух палиндромов. Для пятибуквенных слов перебор сделан выше — тоже два палиндрома!

На этом пока притормозим, и чтобы разбираться далее с большей научностью, введем в обращение функцию $f(n)$. Определим ее так. Рассмотрим все возможные n-буквенные слова, состоящие из А и Б, и разобьем каждое такое слово на наименьшее возможное число кусков-палиндромов. Из полученных наименьших значений выберем наибольшее. Это и будет $f(n)$.

Нетрудно сообразить, что вычислением $f(n)$ для наименьших n мы как раз только что занимались, и выяснили, что $f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = 2$. А чему равно $f(6)$? Оказывается, это значение можно найти и без перебора. Прежде всего заметим, что $f(n + 1) \le f(n) + 1$ для любого n. Действительно, возьмем $(n + 1)$-буквенное слово и отделим от него одну крайнюю букву (безразлично — первую или последнюю). Получится n-буквенное слово, которое (по определению функции f) можно разбить не более, чем на $f(n)$ палиндромов. А так как отрезанная крайняя буква — сама по себе палиндром, то наименьшее число палиндромов, на которые можно разбить $(n + 1)$-буквенное слово, не превышает $f(n) + 1$.

Вычислим, наконец, $f(6)$. Из неравенства $f(n + 1) \le f(n) + 1$ следует, что $f(6) \le f(5) + 1 = 2 + 1 = 3$. С другой стороны, можно указать 6-буквенное слово, которое нельзя разбить на 2 палиндрома: например, АБААББ. Поэтому $f(6) \ge 3$. Таким образом, $f(6) = 3$. Можно также убедиться, что и $f(7) = 3$, но здесь без перебора (и к тому же весьма объемного) не обойтись.

А теперь вернемся к исходной задаче. Почему все-таки автор сначала делил исходное слово на пятибуквенные части, а не на части другой длины? Как уже отмечалось, глобальная цель состояла в том, чтобы произвести наибольшее впечатление, а для этого следовало свести к минимуму итоговое число палиндромов. Если исходное слово состоит из M букв, то разбив его сначала на n-буквенные части, получим M/n частей (полагаем, что M делится на n). Далее, каждую из этих частей можно разделить не более чем на $f(n)$ палиндромов, в результате чего окончательное число палиндромов становится равным $M \cdot f(n)/n$. Следовательно, надо стремиться к тому, чтобы выбрать такое n, для которого отношение $f(n)/n$ наименьшее, или (что то же самое) отношение $n/f(n)$ наибольшее.

Среди тех n, для которых $f(n)$ нам известно, наилучшим является именно 5, потому что $5/f(5) = 5/2 = 2{,}5$ – это больше, чем для любого другого n, не превышающего 7. Ближайшее к нему значение (несколько худшее) равно $7/f(7) = 7/3 = 2{,}33\ldots$

Итак, при создании задачи автор окончательно остановился на $n = 5$, и лишь затем подобрал подходящее $M = 1995$ – длину исходного слова, кратную n, увязав ее заодно с номером текущего года. Такова история данной задачи.

После выпуска задачи в свет автор долгое время пребывал в блаженной уверенности, что из всех натуральных n именно при $n = 5$ достигается наибольшее значение отношения $n/f(n)$. Эта уверенность значительно окрепла после того, как выяснилось, что $f(8) = 4$, и потому $8/f(8) = 2$ – явное ухудшение результата даже по сравнению с $n = 7$. И потому автор был несказанно потрясен, когда все тот же И.Воронович, незадолго до того ознакомленный с задачей, доказал, что $f(13) = 5$. Разумеется, он при этом применил не прямой перебор (для которого пришлось бы просмотреть более 4 тысяч тринадцатибуквенных слов – сизифов труд!), а лишь частичный, компенсируя недостаток количества высоким уровнем и тонкостью логических рассуждений. Так как $13/f(13) = 13/5 = 2{,}6$, то рекордное прежде отношение, достигавшееся при $n = 5$, оказалось превзойденным! Более того, И.Воронович попытался пощупать и 27-буквенные слова, рассматривая их как пару 13-буквенных с одной буквой между ними и высказал (хотя и не сумел доказать) предположение, что $f(27) = 10$. Если это действительно так, то имеет место новый рекорд: $27/10 = 2{,}7$.

Обсуждение задачи вследствие таких открытий приобрело новый импульс. Проанализировав последовательность рекордов, кто-то выдвинул предположение, что с ростом n отношение $n/f(n)$ стремится к некоторому пределу, и еще кто-то, видимо, совсем ошалев, высказал мысль, что этот предел вполне может равняться e – знаменитому основанию натуральных логарифмов, равному 2,71828... Это полумистическое заявление чуть не повергло всех в шоковое состояние и стимулировало дальнейшие исследования. Ну, а поскольку логические рассуждения ничего не давали, пришлось мобилизовать тяжелую артиллерию, то бишь компьютер, чтобы разобраться, как обстоят дела.

Здесь мы вынуждены мажорные интонации нашего изложения заменить минорными: *компьютер мало чем помог.* Если в предыдущих задачах он был вполне способен работать с последовательностями, содержащими сотни тысяч элементов, то здесь все обстояло гораздо хуже. Поскольку при увеличении длины слова на одну букву количество различных слов возрастает сразу вдвое, то даже возможности «Пентиума» довольно быстро исчерпались. Вспомните знаменитые зерна на шахматной доске! Фактически компьютер оказался ими засыпан, и удалось добраться лишь до 19-буквенных слов. Вот значения $f(n)$ для все n от 9 до 19:

$$f(9) = f(10) = 4,$$

$$f(11) = f(12) = f(13) = 5$$

(Воронович был прав!),

$$f(14) = f(15) = f(16) = f(17) = 6,$$

$$f(18) = f(19) = 7.$$

Негусто, но все-таки лучше, чем ничего. Во всяком случае, имеем новый рекорд: $17/f(17) = 2{,}83\ldots$ Как видим, последовательность отношений $n/f(n)$ перешагнула через число e и, похоже, не намерена останавливаться на достигнутом. Так что сомнительно, что пределом является число e. Тогда, может быть, π? Трудно сказать. Конечно, вполне возможно, что предела нет вовсе, и отношения $n/f(n)$ возрастает неограниченно (хотя и неправильно, с рывками и колебаниями). Правда, рассуждая чисто эвристически, трудно в это поверить. Ведь $n/f(n)$ – это, по сути, средняя длина палиндрома, на которые разбито самое «трудноразбиваемое» n-буквенное слово. Может ли эта средняя длина неограниченно возрастать? Вряд ли. Хотя...

Да, здесь особыми успехами хвастаться не приходится. Более того, не доказано даже неравенство $f(n+1) \geq f(n)$, хотя оно-то вообще выглядит почти очевидным.

В общем, начали во здравие, а кончили за упокой. Печально, но что делать? Одна надежда – на читателей. Возможно, кто-то сумеет составить такую программу, которая вычислит значения $f(n)$ для нескольких сотен первых n, анализируя которые, удастся правильно спрогнозировать ее поведение и найти предел (если он существует, конечно). А может, есть и чисто теоретический путь?

P.S. В течение некоторого времени автору казалось, что рассмотренная задача является частью более общей и наверняка более сложной задачи, а именно: что будет, если в алфавите не 2 буквы, а m букв, где m – заданное натуральное число? Таким образом, от частной задачи изучения функции от одной переменной $f(n)$ мы переходим к более общей задаче изучения функции $f(m,n)$.

Оказалось, однако, что эти сложности – фиктивные: для всех m, кроме $m = 2$, задача решается чрезвычайно просто.

Если $m = 1$, то все слова состоят из одинаковых букв, поэтому являются палиндромами. Поэтому $f(1, n) = 1$ для любого n.

Если же $m > 2$, то можно показать, что $f(m,n) = n$. Для этого возьмем лишь три различных буквы (А, Б и В) и составим из них вот такую бесконечную в обе стороны последовательность:

...АБВАБВАБВАБВАБВАБ

ВАБВАБВАБВ...

Вырезанное из нее слово любой длины, как нетрудно заметить, можно разбить на палиндромы, только «рассыпав» на отдельные буквы.

Нильс Бор

А.ВАСИЛЬЕВ

Планетарная модель атома представляется сегодня столь же очевидной, как и планетарное строение Солнечной системы. Однако для осознания и того и другого фактов понадобился гений выдающихся ученых, способных выйти далеко за рамки сложившихся в свое время общепринятых представлений. Так, квантовая планетарная модель атома была предложена в начале двадцатого века великим датским физиком Нильсом Бором (1885–1962), объединившим гипотезу Резерфорда о строении атома и гипотезу Планка о дискретности электромагнитного излучения.

Анализируя рассеяние альфа-частиц на золотой фольге, Резерфорд предположил, что в центре атома находится положительно заряженное ядро, вокруг которого по орбитам вращаются отрицательно заряженные электроны. Эта модель приводила, однако, к неразрешимому парадоксу. Согласно классической электродинамике, вращающийся по орбите электрон должен постоянно терять энергию, излучая электромагнитные волны. По мере уменьшения энергии электрон должен приближаться по спирали к ядру и, в конечном счете, упасть на него. Такая перспектива никоим образом не согласовывалась с твердо установленной стабильностью большинства химических элементов.

Проблема устойчивости планетарного атома привлекла Бора, находившегося в 1912 году на стажировке у Резерфорда в Манчестерском университете. Он высказал идею о том, что электроны вращаются вокруг ядра не поодиночке, а группами, образуя электронные кольца, при этом сжатию кольца препятствует взаимное отталкивание электронов. Однако из устойчивости электронных колец не следовала устойчивость атомных размеров: законы ньютоновской механики позволяли электронному кольцу вращаться на любом расстоянии от ядра, а от изменения радиуса лишь изменялась бы частота обращения электронов вокруг ядра. Тем самым, классическая механика не могла объяснить устойчивость атомов.

Затем Бор выдвинул гипотезу, согласно которой электроны в кольцах могут вращаться лишь со строго определенными частотами и на строго определенных расстояниях от ядра. Это была революционная идея, но уверенность в ней Бору придало знакомство с формулами, описывающими последовательность дискретных линий в спектрах излучения элементов. Одной из таких последовательностей является знаменитая серия Бальмера, полученная чисто эмпирически еще в конце девятнадцатого века и описывающая видимую часть спектра атома водорода:

$$\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),\ n = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,$$

где $R = 10973732{,}5$ м$^{-1}$ – постоянная Ридберга.

Согласно теории Бора, каждая линия в спектре соответствует свету, излучаемому электроном, когда он переходит с одной разрешенной орбиты на другую, более низкую орбиту. Частота каждой такой линии, умноженная на постоянную Планка, равна разности энергий начального (E_1) и конечного (E_2) состояний, между которыми совершают переход электроны:

$$h\nu = E_1 - E_2$$

(здесь $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка). Первое (постоянное) слагаемое в формуле Бальмера говорит о том, что в атоме имеется самый низкий уровень энергии, а второе (переменное) слагаемое указывает на дискретность разрешенных природой электронных состояний. Электронные переходы возможны не только на уровень с наименьшей энергией, но и между высокоэнергичными состояниями, чему соответствуют дополнительные наборы спектральных линий. Обобщающая формула, описывающая все возможные переходы между дискретными уровнями электронов в атоме, может быть записана в виде

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где m и n – соответствующие целые числа.

Таким образом, модель атома Бора постулировала, что электроны, находящиеся на стационарных орбитах, не излучают электромагнитных волн и что излучение возникает лишь при переходах между стационарными состояниями. Эта концепция потребовала отказа от применения классической механики и электродинамики в микромире и знаменовала собой громадный прогресс в понимании природы вещества и излучения.

Опубликованная в 1913 году квантовая модель атома принесла Бору мировую известность. В 1922 году «за заслуги в изучении строения атома» ему была присуждена Нобелевская премия по физике. Атом Бора сыграл роль моста между миром атомной структуры и миром квантовой теории. Уже одно это обстоятельство определило место Бора в ряду создателей квантовой механики, однако ему принадлежит еще целый ряд определяющих принципов этой науки.

Исходя из своей модели атома, Бор показал, что по мере удаления от ядра разрешенные уровни все меньше отличаются друг от друга и в конечном счете сливаются. Квантовые скачки делаются все меньше, и переход из одного стационарного состояния в другое становится практически непрерывным. Тем самым, электрон из власти квантовых законов постепенно поступает в распоряжение классической физики. Эта идея лежит в основе сформулированного Бором принципа соответствия.

Еще один сформулированный им постулат – принцип дополнительности – был настолько дорог Бору, что когда он получил дворянство, то выбрал себе герб с изображением древнекитайского символа инь-ян, олицетворяющего этот принцип. Суть принципа дополнительности заключается в том, что волновой и корпускулярный характеры вещества и излучения представляют собой два взаимодополняющих компонента понимания природы. В различных экспериментах проявляется либо волновое, либо корпускулярное поведение, но смешанное поведение не наблюдается никогда. В древнекитайской философии инь-ян определяют отношения между землей и небом и развитие этого замкнутого мира. Друг без друга инь и ян не могут обнаружить своего действия, а то, что в действии их сил остается скрытым, является непостижимым.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 1999 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1661» или «Ф1668». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1661, М1663 и М1664 предлагались в этом году на Санкт-Петербургской математической олимпиаде.

Задачи М1661 — М1665, Ф1668 — Ф1672

М1661. Можно ли отметить 64 единичных кубика в кубе $8\times8\times8$ так, чтобы среди любых 8 отмеченных кубиков некоторые два находились в одном слое, параллельном грани куба, и при этом в каждом слое, параллельном грани, было отмечено 8 кубиков?

А.Вершик

М1662. Может ли куб натурального числа начинаться с 1998?

В.Сендеров

М1663. Биссектрисы вписанного четырехугольника образуют в пересечении выпуклый четырехугольник. Докажите, что диагонали полученного четырехугольника перпендикулярны.

С.Берлов

М1664. Существуют ли отличный от константы многочлен P с целыми коэффициентами и натуральное число $k > 1$ такие, что все числа вида $P\left(k^n\right)$ попарно взаимно просты?

А.Пастор

М1665. а) В сферу вписано несколько кубов. Каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все кубы имеют общую вершину.

б)* Четыре куба расположены в пространстве так, что каждые три из них имеют общую вершину. Обязательно ли все четыре имеют общую вершину?

В.Произволов

Ф1668. Автомобиль выезжает из города A и приезжает, двигаясь без остановок по прямому шоссе, в город $Б$. Оказалось, что в течение первой половины времени поездки его скорость была 40 км/ч, половину оставшегося пути он проехал со скоростью 60 км/ч, а остаток пути – со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля за все время путешествия.

З.Рафаилов

Ф1669. На горизонтальной поверхности покоится гладкий клин массой M с углом α при основании. Куб такой же массы лежит на столе, касаясь клина (рис.1). Коэффициент трения между кубом и столом μ. На клин ставят тележку массой m, которая может скользить по клину без трения, и отпускают. Какую скорость приобретет тележка, опустившись на высоту h (при этом она все еще находится на поверхности клина)?

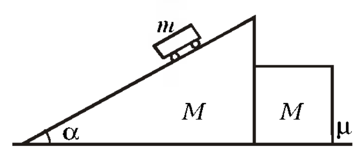


Рис.1

А.Клинов

Ф1670. Комната площадью $S = 20$ м^2 с высотой потолка $H = 3$ м заполнена воздухом при нормальных условиях. Оцените число ударов молекул о потолок за время $\tau = 1$ ч. Куда чаще ударяют молекулы – в пол или в потолок комнаты? Оцените разность чисел ударов молекул о пол и о потолок за время τ. Считайте температуру воздуха в комнате повсюду одинаковой.

Р.Александров

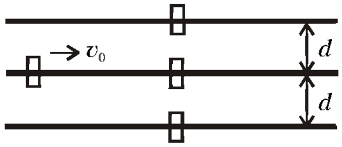


Рис.2

Ф1671. Три параллельных тонких непроводящих стержня находятся в горизонтальной плоскости; расстояние между соседними стержнями d (рис.2). На стержни насажены тяжелые шайбы массой M каждая, заряженные одинаковыми зарядами Q. В начальный момент три из них неподвижны и находятся на прямой, перпендикулярной стержням, а четвертая движется издали по среднему стержню со скоростью v_0. Найдите скорости шайб через большой промежуток времени. Трения нет.

Р.Сашин

Ф1672. Тяжелый проводящий брусок массой $M = 1$ кг лежит на горизонтально расположенных рельсах перпендикулярно им (рис.3). Вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна $B = 0{,}1$ Тл. Заряженный до напряжения $U = 100$ В конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ подключают к рельсам. Считая сопротивление цепи $R = 1$ кОм достаточно большим, определите установившуюся скорость движения бруска. Расстояние между рельсами $d = 1$ м. Брусок движется поступательно.

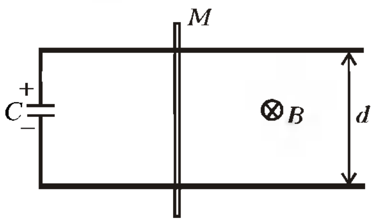


Рис.3

М.Учителев

Решения задач М1636—М1645, Ф1653—Ф1657

М1636. *Вокруг трапеции нельзя описать окружность. Докажите, что трапеция, образованная серединными перпендикулярами к ее сторонам, подобна исходной.*

Сначала определимся с тем, что есть что (рис.1): KL, MN – средние линии трапеций $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно, R – середина KL и PQ, S – середина EF, T – середина AB.

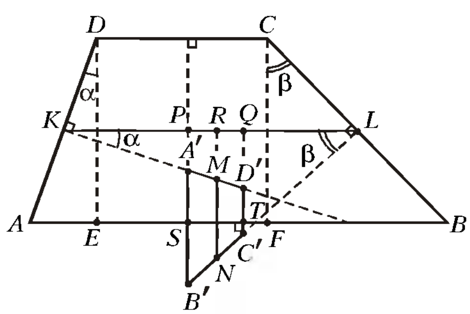


Рис.1

Соответствующие углы трапеций $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны ($\angle A' = 180° - \angle D = \angle A$ и т.д.), поэтому достаточно доказать, например, что

$$\frac{(AB+CD)/2}{H} = \frac{(A'B'+C'D')/2}{h},$$

где H и h – высоты трапеций $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно.

Имеем $MN = NR - MR = RL\operatorname{tg}\beta - RK\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AB+CD}{4}(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$, так как $KR = RL$. Теперь осталось доказать, что $2h = H(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$.

Имеем $H\operatorname{tg}\beta - H\operatorname{tg}\alpha = FB - EA = (BT - TF) - (AT - TE) = TE - TF = (ES + ST) - (SF - ST) = 2ST = 2h$; так как $ES = SF$, то $2h = H(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$.

Доказательство завершено.

В.Кириченко

М1637. *Квадрат со стороной 1 разрезали на k прямоугольников. Докажите, что сумма длин k наименьших сторон всех прямоугольников не менее 1.*

Две стороны исходного квадрата будем считать горизонтальными, а две другие – вертикальными. В соответствии с условием задачи, у каждого прямоугольника отмечена одна сторона – либо горизонтальная, либо вертикальная. Если всякая горизонтальная прямая, пересекающая квадрат, пересекает хотя бы одну отмеченную сторону какого-либо прямоугольника, то ясно, что сумма длин отмеченных сторон не меньше длин сторон квадрата, т.е. не меньше 1.

Если же найдется горизонтальная прямая, пересекающая квадрат, но не пересекающая ни одну из отмеченных сторон, то у всех прямоугольников, которые она пересекает, отмеченными окажутся горизонтальные стороны. Ввиду этого, всякая вертикальная прямая, пересекающая квадрат, пересекает хотя бы одну из отмеченных сторон, т.е. сумма их длин не меньше 1.

В.Произволов

М1638. *Красный квадрат площадью 1 покрывают более 100 белых квадратов, площадь каждого из которых равна 1. При этом стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один белый квадрат так, что остальные все еще будут покрывать целиком красный квадрат?*

Покажем, что не всегда. Для этого построим специальное покрытие красного квадрата N белыми квадратами ($N > 100$). Диагональ AC красного квадрата $ABCD$ разобьем на N равных отрезков, концы которых последовательно обозначим числами 1, 2, ..., $N + 1$ (точка A обозначена числом 1, а точка C – числом $N + 1$). Заметим, что для каждой пары точек K и $K + 1$ ($(1 \le K \le N)$) существуют ровно два квадрата заданного размера, стороны которых параллельны сторонам красного квадрата и проходят через точки K и $K + 1$, причем один из этих квадратов содержит вершину B и не содержит D, а другой, наоборот, содержит D и не содержит B. Если K нечетно, то в качестве белого возьмем тот квадрат, который содержит вершину B, а если K четно, то тот квадрат, который содержит D. Выбранные таким образом N белых квадратов покрывают целиком красный квадрат, но если удалить любой из них, то часть красного квадрата окажется непокрытой. В самом деле, если удалить белый квадрат, стороны которого проходят через точки K и $K + 1$, то отрезок диагонали с концами K и $K + 1$ покрыт не будет.

С.Агеев, В.Произволов

М1639. *Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда* *лжет. Жители селения стали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив тот или лжив. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют правдивые. Определите и вы, чему она равна.*

Пусть x – доля правдивых жителей. Рассмотрим другой круг, в котором все лжецы станут правдивыми, а все правдивые – лжецами; в нем доля правдивых равна $1 - x$. В этом круге путешественник услышит в точности то же, что и в первом круге, поскольку правдивость каждого жителя изменилась, но изменилась и правдивость соседа, о котором он говорит. Поскольку путешественник сумел на основании полученных ответов определить долю правдивых жителей, эта доля в обоих случаях одинакова. Следовательно, она равна $1/2$.

Побочное следствие: число жителей было четным.

Б.Френкин

М1640. *Четырехугольник ABCD обладает тем свойством, что внутри него существует точка M, для которой AMB и CMD – равнобедренные треугольники с углом 120° при вершине M. Докажите, что тогда существует точка N, для которой BNC и DNA – равносторонние треугольники.*

Треугольники AMC и BMD равны по двум сторонам и углу между ними (рис.1). Значит, диагонали AC и BD равны и угол между ними 60°.

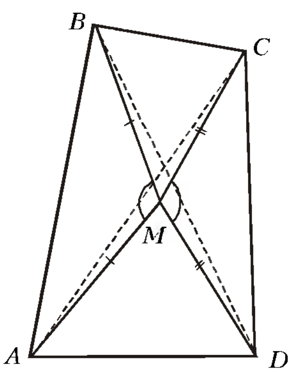


Рис.1

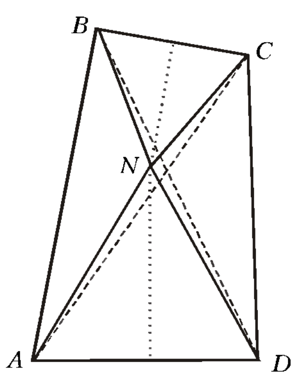


Рис.2

Теперь проведем серединные перпендикуляры к сторонам AD и BC, точка их пересечения и будет искомой точкой N (рис.2). В самом деле, треугольники ANC и DNB равны (по трем сторонам) и получаются один из другого поворотом на 60° около точки N. Значит, $\angle BNC = \angle AND = 60°$ и равнобедренные треугольники AND и BNC – равносторонние.

И.Шарыгин

М1642.[1] *Некоторые стороны клеток шахматной доски 8×8 являются перегородками. Расстановка перегородок называется хорошей, если доска остается связной (ладья может пройти с любого поля на любое другое, минуя перегородки), и плохой – в противном случае. Каких расстановок больше – хороших или плохих?*

Всего мест для потенциальных перегородок 112. На любом из них может быть поставлена или не поставлена перегородка, так что расстановок – хороших и плохих – всего 2^{112}. Поставим две перегородки, ограничивающие угловое поле a1. Расстановок с этими перегородками 2^{110} – четверть от общего количества. Среди оставшихся трех четвертей всех расстановок четверть составляют те, у которых отрезано угловое поле h1. Плохие расстановки этих двух типов составляют в сумме $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$ от общего числа. Четверть оставшихся расстановок составляют те, у которых отрезано поле a8, и плохих расстановок уже больше половины:

$$\frac{7}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{37}{64} > \frac{1}{2}.$$

А.Шаповалов

М1643. *а) Существуют ли целые числа a и b ($a \neq 0$) такие, что последовательность $c_n = an! + b$ состоит только из квадратов?*

б) Существуют ли целые числа a, b, c ($ab \neq 0$) такие, что для каждого n существует целое x, для которого $ax^2 + bx + c = n!$?

а) Нет, не существуют.

Предположим, что числа a и b существуют. Докажем, что $b \neq 0$.

В самом деле, если $b = 0$, то для *любого* простого p существуют такие натуральные x и y, что

$$a \cdot (p-1)! = x^2,$$

$$a \cdot p! = y^2.$$

Но тогда

$$px^2 - y^2 = 0,$$

откуда следует, что y делится на p, при этом и x делится на p, т.е. a делится на p. Итак, a должно делиться на все без исключения простые числа, что невозможно.

Если $b \neq 0$, то при любом натуральном n существуют натуральные x и y, для которых

$$a \cdot \left(n^2 - 1\right)! = x^2 - b,$$

$$a \cdot \left(n^2\right)! = y^2 - b.$$

Умножая первое равенство на n^2 и вычитая из него второе равенство, получаем

$$n^2x^2 - y^2 = \left(n^2 - 1\right)b.$$

Тогда

$$\left(n^2 - 1\right)|b| = |nx - y| \cdot |nx + y| \geq y,$$

но

$$y = a \cdot \left(n^2\right)! + b \geq an^2\left(n^2 - 1\right) + b,$$

откуда

$$\left(n^2 - 1\right)|b| \geq an^2\left(n^2 - 1\right) + b.$$

Последнее неравенство не выполняется при больших n, поскольку слева многочлен второй степени, а справа – четвертой.

б) Не существуют. Иначе дискриминант квадратного уравнения при всяком n являлся бы полным квадратом вопреки а).

А.Егоров

[1] *Решение задачи М1641 будет опубликовано в одном из следующих номеров журнала.*

М1644. *Двое показывают следующий фокус. Один из перетасованной колоды, содержащей 52 карты, вытаскивает 5 произвольных карт и выкладывает четыре из них в ряд картинкой вверх, а пятую*
а) также выкладывает в ряд среди остальных четырех, но картинкой вниз;
б) берет себе.*
Второй, глядя на лежащие перед ним карты, называет пятую карту. Как он это делает?

а) Первый фокусник может выбрать из пяти карт две карты одной масти. Одну из них он положит картинкой вниз (на какое именно место в ряду карт, будет уточнено позднее), а вторую он положит с левого края картинкой вверх. По левой карте второй фокусник узнает масть закрытой карты. Всего карт одной масти 13, одна из них открыта, так что остается выбрать одну из 12 оставшихся. Следующие три карты, которые открыты, можно упорядочить шестью способами (поскольку любые три предмета можно упорядочить всего тремя способами). После того, как 4 открытые карты выложены, закрытую карту можно расположить (между ними или с краю) пятью способами. Всего вариантов оказывается $6 \times 5 = 30$ – этого достаточно, чтобы закодировать 12 карт.
б) Если действовать по той же схеме, то информации не хватает, так как для выделения одной карты из 12 имеется лишь 6 вариантов расположения трех открытых карт. Но не нужно торопиться с выводом, что у задачи отрицательный ответ. Как и в задаче а), первый фокусник выбирает масть, которая представлена хотя бы двумя картами, выбирает эти две карты. Дальше он действует иначе. 13 карт выбранной масти можно расположить по кругу в установленном порядке (например, в порядке роста старшинства). На круге установим направление. От каждой карты проведем стрелки к шести картам, которые в этом круге идут следом за ней. Тогда любые две карты окажутся соединенными, и притом только одной стрелкой. Фокусник по-прежнему выбирает две карты одной масти, но картинкой вверх кладет ту из них, из которой идет стрелка к второй карте. Таким образом, второму фокуснику придется выбирать уже не из 12, а только из 6 карт, что, как мы видели, возможно.

Г.Гальперин

М1645. *Докажите, что число способов, которыми можно расставить n чисел 1, 2, ..., n ($n \geq 10$) в последовательность без убывающих подпоследовательностей длиной 10, не превосходит 81^n.*

Будем называть расстановку чисел хорошей, если она удовлетворяет условиям задачи. Сначала докажем, что если расстановка хорошая, то числа в ряду можно раскрасить в девять цветов так, чтобы числа каждого цвета шли в порядке возрастания. Действительно, будем красить числа слева направо, используя каждый раз цвет с наименьшим номером такой, что последнее покрашенное в этот цвет число меньше текущего. Предположим, что девяти цветов не хватило. Мы не можем покрасить очередное число в девятый цвет, так как в девятый цвет уже было покрашено большее число. Оно не было покрашено в восьмой цвет, поскольку до него встретилось большее число, покрашенное в восьмой цвет... и так далее. Получаются 10 чисел, которые идут в порядке убывания, чего не может быть.

Расстановка чисел от 1 до n вместе с раскраской в девять цветов такой, что последовательность чисел каждого цвета возрастает, полностью определяется цветом каждого числа от 1 до n и цветом каждого места в ряду. Числа от 1 до n можно раскрасить в девять цветов 9^n способами. И столькими же способами можно раскрасить в девять цветов n мест, на которые эти числа будут расставлены. Таким образом, число хороших расстановок не превосходит 81^n.
Замечание. Метод раскраски, который мы применили, позволяет доказать, что при любой расстановке в ряд первых $mn + 1$ натуральных чисел найдется монотонно возрастающая подпоследовательность из $n + 1$ чисел или убывающая подпоследовательность из $m + 1$ чисел.

А.Канель

Ф1653. *С балкона бросают камешки через равные интервалы времени и без начальной скорости. К моменту, когда первый камешек упал на землю, следующий пролетел ровно половину пути. Какую часть пути пролетел к этому моменту третий камешек? Сколько камешков было в полете непосредственно перед ударом первого камешка о землю? Сопротивлением воздуха пренебречь. Считать ускорение свободного падения равным точно 10 м/с^2.*

Обозначим высоту балкона через H. Тогда время полета первого камешка будет $T = \sqrt{2H/g}$. Второй камешек летел в течение времени $T - \tau = \sqrt{H/g}$, откуда найдем интервал между бросаниями:

$$\tau = T\left(1 - 1/\sqrt{2}\right) \approx 0{,}293\ T.$$

Это немного меньше трети времени падения T; отсюда сразу следует, что к моменту падения первого камешка на землю в воздухе, кроме него, будет еще три камня (четыре – включая первый).
Третий камешек к моменту падения первого находился в воздухе в течение времени $T - 2\tau$, за это время он пролетел расстояние

$$h = H(T - 2\tau)^2 / T^2 \approx 0{,}17\ T.$$

З.Рафаилов

Ф1654. *Предлагается следующий проект движущегося тротуара: человек ступает с земли на первую движущуюся дорожку, через некоторое время переходит на следующую, у которой скорость больше, и так далее. Пусть первая дорожка едет с постоянной скоростью $v_1 = 2$ м/с, человек с неподвижной земли ступает на нее перпендикулярно вектору скорости и, перестав скользить, переходит дальше – опять перпендикулярно вектору скорости. Ожидаемая нагрузка на такую дорожку (число людей, ступающих на нее с земли) составляет $N = 10$ человек в секунду, масса человека в проекте принимается равной $M = 80$ кг. С какой минимальной силой нужно тянуть дорожку в горизонтальном направлении, чтобы ее скорость оставалась постоянной? С какой силой нужно действовать на вторую дорожку, если она движется со скоростью $v_2 = 3$ м/с? Считайте, что в среднем число людей на каждой из дорожек одинаково.*

При разгоне человека, ступившего на первую дорожку с земли, его импульс меняется от нуля до величины Mv_1, переходящий же на следующую дорожку не отнимает импульс у дорожки (он «уходит» перпендикулярно), поэтому искомую силу можно выразить через приращение импульса системы за одну секунду:

$$F_1 = NMv_1 = 1600 \text{ Н}.$$

Аналогично, для второй дорожки важно приращение скорости человека, приходящего с первой дорожки, – эта величина в два раза меньше предыдущей (от 2 до 3 м/с), тогда

$$F_2 = NM(v_2 - v_1) = 800 \text{ Н}.$$

Р.Простов

Ф1655. *Моль гелия в процессе расширения получает тепло, его теплоемкость при этом составляет $C = 15$ Дж/(моль·К). Найдите изменение температуры газа в этом процессе при совершении им работы $A = 20$ Дж.*

Запишем уравнение первого начала термодинамики для данного процесса:

$$Q = A + \Delta U, \text{ или } C\Delta T = A + C_V \Delta T.$$

Отсюда находим

$$\Delta T = \frac{A}{C - C_V} = \frac{A}{C - 1{,}5R} \approx 8 \text{ К}.$$

Итак, температура моля гелия в процессе расширения возрастает на 8 К.

М.Учителев

Ф1656. *В вершинах правильного треугольника со стороной d находятся три маленьких заряженных тела. Одно из них закреплено, два других – масса каждого из них M, заряд Q – свободны. Какой заряд нужно поместить на закрепленное тело, чтобы при отпускании двух других их ускорения оказались минимальными? Чему будет равна величина этого ускорения?*

Между подвижными зарядами действует кулоновская сила отталкивания, равная $F = kQ^2/d^2$. Ясно, что третий заряд следует выбрать противоположного знака, тогда на каждый из подвижных зарядов будет действовать дополнительная сила притяжения к неподвижному заряду, равная $f = kqQ/d^2$. Для получения минимального ускорения нужна минимальная суммарная сила. Проще всего разложить силу $\vec{F}$ на направление вдоль силы $\vec{f}$ и перпендикулярно этому направлению и записать квадрат модуля полной силы в виде $(f - F\cos 60°)^2 + (F \sin 60°)^2$. Минимальное значение суммарной силы получим, выбирая оптимальное значение силы f, – ясно, что оно должно обратить в ноль первое слагаемое. Итак,

$$f = F\cos 60° = 0{,}5F.$$

Отсюда получаем, что заряд закрепленного тела должен быть вдвое меньше Q по модулю и иметь противоположный знак:

$$q = -Q/2.$$

В этом случае ускорение каждого подвижного тела в первый момент определяется составляющей силы $\vec{F}$ на направление, перпендикулярное силе $\vec{f}$:

$$a = \frac{F\cos 30°}{M} = \frac{kQ^2\sqrt{3}}{2Md^2}.$$

А.Зильберман

Ф1657. *Два одинаковых громкоговорителя подключены параллельно к выходу генератора звуковых колебаний, а очень маленький микрофон расположен в отдалении. При неизменной температуре воздуха $T = 300$ К мы проводим эксперимент – изменяем частоту генератора и наблюдаем за показаниями чувствительного вольтметра, который измеряет выходной сигнал микрофона. При частоте $f_1 = 2400$ Гц получается максимум выходного сигнала микрофона, на частоте $f_2 = 2600$ Гц – минимум, а между этими частотами уровень сигнала от микрофона монотонно убывает. Что будет наблюдаться на частоте $f_3 = 400$ Гц? При какой температуре воздуха получился бы максимум на частоте f_2? Отражения звуковых волн от стен, пола и потолка не происходит.*

Будем считать, что разность расстояний от громкоговорителей до микрофона равна d, а громкоговорители подключены так, что излучают в фазе (при «переподключении» одного из них излучаемые волны были бы противофазны). Запишем условие максимума на частоте f_1:

$$d = n\lambda_1 = \frac{nc}{f_1},$$

где c – скорость звука при температуре 300 К, n – любое целое число. Из условия задачи следует, что на частоте f_2 выполняется соотношение

$$d = (n + 0{,}5)\lambda_2 = (n + 0{,}5)\frac{c}{f_2}.$$

Из записанных уравнений можно определить число n:

$$\frac{n + 0{,}5}{n} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{2600}{2400}, \text{ и } n = 6.$$

Итак, разность хода равна длине волны, которая соответствует частоте $f_1/4 = 400$ Гц. Ясно, что на этой частоте получится максимум.

Теперь об опытах при измененной температуре. Скорость звука при изменении температуры газа меняется таким же образом, как и скорости молекул (например – как среднее квадратичное значение скоростей), т.е. пропорционально корню квадратному из температуры. Запишем условие получения максимума на частоте f_2:

$$d = m\lambda = \frac{mc_1}{f_2},$$

или

$$\frac{mc_1}{f_2} = \frac{nc}{f_1}.$$

Ближайшая температура T_1, соответствующая скорости c_1, должна получиться при $m = 6$:

$$\sqrt{\frac{T}{T_1}} = \frac{c}{c_1} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{13}{12},$$

и

$$T_1 = T\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = 300\frac{169}{144} \text{ К} \approx 352 \text{ К}.$$

Подстановка значения $m = 7$ дает температуру $T_2 = 278$ К. Формально можно подставлять и другие целочисленные значения m, но соответствующие им температуры совсем уж не способствуют проведению физических экспериментов.

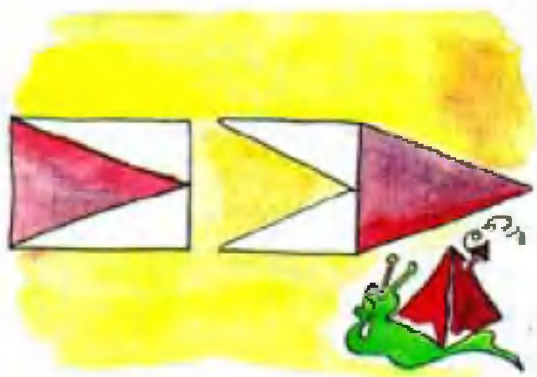
Р.Александров

Задачи

1. Буратино хочет купить букварь, но ему не хватает 18 сольдо. На этот же букварь Мальвине не хватает 7 сольдо, а Пьеро – 10 сольдо. Могут ли Пьеро и Мальвина вместе купить один букварь на двоих?

А.Больбот

2. На рисунке показано, как произвольный прямоугольник можно разрезать на две части и сложить из них невыпуклый равносторонний шестиугольник.



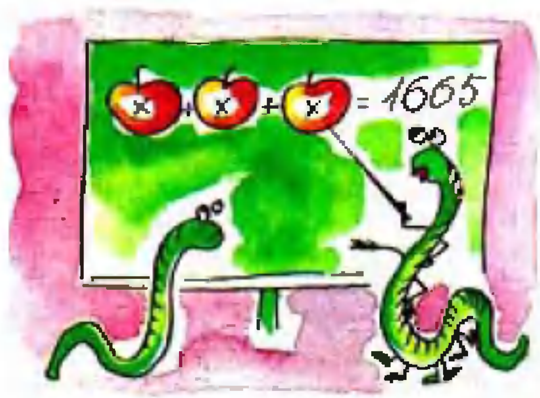
Можно ли разрезать произвольный прямоугольник на три части и сложить из них выпуклый равносторонний шестиугольник?

С.Токарев

3. Верно ли, что любое четное натуральное число можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, каждое из которых состоит из нечетных цифр?

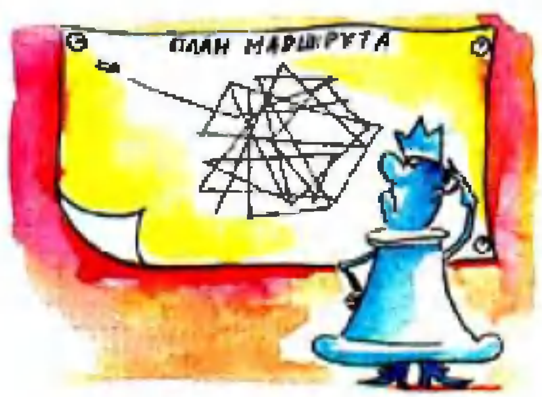
А.Шаповалов

4. Три трехзначных числа, в записи которых участвуют все цифры, кроме нуля, дают в сумме 1665. В каждом числе первую цифру поменяли местами с последней – получили три новых трехзначных числа. Чему равна сумма полученных чисел?



В.Произволов

5. Король обошел все поля шахматной доски, побывав на каждом по одному разу. Когда соединили центры полей, по которым он последовательно проходил, получилась ломаная без самопересечений. Найдите наибольшее возможное число диагональных ходов в маршруте короля.



Н.Акулич

Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6—8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Как и в предыдущих конкурсах, будет предложено 20 задач, по 5 задач в номерах 4—6 этого года и в №1 за 1999 год. Решения задач высылайте в течение месяца после получения номера журнала «Квант», в котором опубликованы условия задач, по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Победители конкурса будут награждены призами журнала.

11. Найдите наименьшее делящееся на 99 натуральное число, все цифры которого четны.

С.Волченков

12. В троллейбусе едут 175 пассажиров и два кондуктора. Каждый пассажир покупает билет только после того, как его три раза об этом попросят. Сначала первый кондуктор просит приобрести билет одного из безбилетных пассажиров, потом то же самое делает второй кондуктор, и так далее до тех пор, пока все пассажиры не купят билеты. Продажу какого наибольшего количества билетов может обеспечить себе первый кондуктор?

Ф.Назаров

13. Конь сделал 8 ходов и вернулся последним ходом на исходное поле. Мог ли он при этом побывать на всех вертикалях и горизонталях шахматной доски?

А.Спивак

14. На стороне AC треугольника ABC находится точка B_1. На сторонах AB и BC постройте соответственно точки C_1 и A_1 так, чтобы площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C были равны.

В.Произволов

15. По окружности, разбитой на несколько дуг, прыгает блоха. Перед каждым своим прыжком она вычисляет длину дуги, на которой находится, а затем прыгает так, чтобы сместиться по часовой стрелке на дугу вычисленной длины. В частности, если блоха попала на границу двух дуг, то она дальше прыгает по часовой стрелке по граничным точкам, и тем самым посещает все дуги. Докажите, что в любом случае блоха побывает на всех дугах.

А.Шаповалов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Метаморфозы последовательностей

С.КОНОВАЛОВ

ЕСЛИ Холмс и Ватсон, пробираясь через Гримпенскую трясину, прыгают по кочкам, то такая «дискретизация» их пути вполне объяснима. Но когда идущие по гладкому аэродромному полю, замощенному бетонными плитами, стараются наступать (или не наступать) на линии стыковки этих плит, то объяснить это рационально значительно сложнее (в некоторых странах нежелание наступить на линию и стремление избежать встречи с черной кошкой – явления одного ряда).

Аналогичным магическим воздействием обладают последовательности, т.е. функции натурального аргумента: возникает желание изучать эту функцию, «прыгая» от точки к точке и не замечая, что вокруг — числовая прямая, по которой можно «ходить»! Но для изучения функций, определенных только на множестве натуральных чисел, у нас нет мощных инструментов в виде теорем дифференциального и интегрального исчисления, поэтому непосредственное изучение последовательностей (конечных или бесконечных) часто становится весьма трудным делом.

С другой стороны, если для данной последовательности a_n ($n = 1, 2, \ldots$) мы подберем функцию $a(x)$, определенную при всех $x > 0$ и такую, что $a(n) = a_n$ для каждого натурального n, то изучив функцию $a(x)$ «целиком», мы узнаем и то, как она ведет себя в целочисленных точках. Конечно, чтобы для анализа свойств функции $a(x)$ можно было применять соответствующие теоремы, она должна быть достаточно «хорошей», например, непрерывной или имеющей производную в каждой точке.

Подобрать функцию, определяемую не очень сложной формулой, не всегда легко, хотя непрерывных линий, проходящих через точки $(n; a_n)$ на координатной плоскости, бесконечно много.

В простейших случаях достаточно заменить n на x: например, последовательности $a_n = \sqrt{n^2+1}$ соответствует функция $a(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Для последовательности $a_n = (-1)^n$ подобная замена невозможна, но предварительное преобразование $(-1)^n =$

$= \cos \pi n$ позволяет и здесь найти простую формулу: $a(x) = \cos \pi x$.

А для внешне простой последовательности $a_n = n!$ один из «лучших» непрерывных двойников выглядит так:

$$a(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \, dt.$$

Эта функция, носящая имя Эйлера, играет особую роль в математике.

В этой статье мы разберем несколько примеров, демонстрирующих пользу, которую приносит переход от изучения последовательности к изучению непрерывной функции.

Производная помогает изучать последовательность

Построение непрерывного двойника с «точным» свойством $a(n) = a_n$ является естественным, например, при решении задачи о нахождении наибольшего или наименьшего члена последовательности.

Пример 1. Найдите наибольший член последовательности $a_n = \dfrac{n-1}{n^2 - n + 7}$.

Решение. Рассмотрим функцию $a(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 7}$, $x > 0$. Найдя производную $a'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 6}{\left(x^2 - x + 7\right)^2}$, мы видим, что функция возрастает при $0 < x < 1 + \sqrt{7}$, убывает при $x > 1 + \sqrt{7}$ и имеет в точке $x_0 = 1 + \sqrt{7}$ локальный максимум (рис.1).

Так как $1 + \sqrt{7} \approx 3{,}6$, то для определения наибольшего члена последовательности надо сравнить два числа: $a(3)$ и $a(4)$. Поскольку $a(3) = \dfrac{2}{13} < a(4) = \dfrac{3}{19}$, наибольшим членом последовательности является $a_4 = \dfrac{3}{19}$.

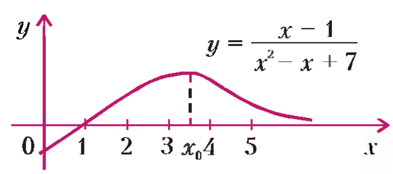


Рис. 1

Ответ. $a_4 = \dfrac{3}{19}$.

Задачи типа разобранной часто являются составной частью задач, в которых надо оптимально выбрать дискретно меняющийся параметр. В качестве примера предлагаем решить задачу, предлагавшуюся на вступительных экзаменах в МФТИ в 1992 году.

Упражнение 1. На берегу реки шириной $8l$ вниз по течению на расстоянии l друг от друга расположены пункты Π_0, Π_1, … …, Π_{100}. От Π_0 до Π_{100} со скоростью $6v$ и с остановками только в пунктах Π_0, …, Π_{100} идут автобусы, которые отправляются из Π_0 один за другим с интервалом времени $\dfrac{l}{10v}$. Турист, находящийся на противоположном берегу реки напротив Π_0, отплывает в лодке одновременно с отправлением из Π_0 очередного автобуса. Доплыв по прямой до одного из пунктов, турист добирается до Π_{100} на автобусе. Скорость течения реки и скорость лодки в стоячей воде равны v. В какой пункт должен плыть турист, чтобы затратить на весь путь до Π_{100} наименьшее время? Найдите все решения. (Временем стоянки автобусов можно пренебречь.)

Интеграл вместо суммы

Известно, что при каждом натуральном k сумма

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$$

может быть представлена как многочлен от n степени $k + 1$ (см. [1], [2]).

Читатель, видимо, знаком с формулами, позволяющими вычислять $S_k(n)$ при небольших значениях k:

$$S_1(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

— это частный случай формулы суммы для первых n членов арифметической прогрессии;

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Приведенные формулы легко доказываются методом математической индукции, но такой подход оставляет невыясненным то, как появились эти формулы.

В этом разделе мы разберем доказательство общего утверждения, которое будет конструктивным и позволит находить коэффициенты многочлена $S_k(n)$ для любого заданного значения k.

Основную идею хорошо видно на примере вычисления $S_1(n)$. На рисунке 2 изображены прямоугольники, сумма площадей которых равна $1 + 2 + \ldots + n = S_1(n)$.

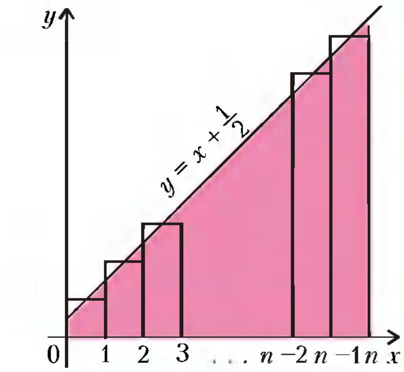


Рис. 2

Очевидно, что площадь трапеции, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = x + \dfrac{1}{2}$, $x = n - 1$ и $x = n$, равна площади прямоугольника, основанием которого служит отрезок $[n - 1; n]$, а высота равна n, т.е.

$$\int_{n-1}^{n} \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = n$$

при любом натуральном n.

Следовательно,

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{m=1}^{n} \int_{m-1}^{m} \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^n \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

Если аналогичным образом нам удастся для каждого значения k найти многочлен $P_k(x)$ степени k такой, что равенство

$$\int_{n-1}^{n} P_k(x) dx = n^k$$

справедливо при каждом натуральном n, то будет решена и задача о представлении $S_k(n)$ в виде многочлена от n степени $k + 1$: тогда

$$S_k(n) = \int_0^n P_k(x) dx.$$

Покажем, что такой многочлен $P_k(x)$ существует и определен единственным образом. Пусть

$$P_k(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Условие

$$n^k = \int_{m-1}^{n} P_k(x) dx = \frac{a_0}{k+1}\left(n^{k+1} - (n-1)^{k+1}\right) + \frac{a_1}{k}\left(n^k - (n-1)^k\right) + \ldots + a_k$$

выполняется при всех натуральных n

лишь в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях и в левой и правой частях равны (мы пользуемся постоянно применяемым при работе с многочленами утверждением: если многочлен степени k обращается в нуль при $k+1$ различных значениях независимой переменной, то этот многочлен является нулевым).

В силу формулы бинома Ньютона

$$n^m-(n-1)^m=$$
$$=mn^{m-1}-\frac{m(m-1)}{2}n+\ldots+(-1)^{m-1},$$

поэтому для определения коэффициентов a_0, a_1, ..., a_k получаем линейную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0=1, \\ -\frac{k}{2}a_0+a_1=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{(-1)^k}{k+1}a_0+\frac{(-1)^{k-1}}{k}a_1+\ldots+a_k=0. \end{cases}$$

В уравнении с номером m ($m=1$, 2, ..., $k+1$) содержатся неизвестные a_0, a_1, ..., a_{m-1}, причем коэффициент при a_{m-1} равен 1. Из первого (верхнего) уравнения системы находим $a_0=1$, из второго — $a_1=\frac{k}{2}$ и т.д. При переходе сверху вниз к очередному уравнению с номером m мы получаем соотношение, в котором a_0, a_1, ..., a_{m-2} уже найдены, а a_{m-1} определяется однозначно, так как коэффициент при a_{m-1} равен 1 (главное, что он не равен нулю). Следовательно, система имеет решение и притом единственное, что доказывает существование многочлена $P_k(x)$.

Пример 2. Найдите формулу для суммы $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

Решение. Действуя по общей схеме, ищем многочлен

$$P_3(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,$$

удовлетворяющий условию

$$\int_{n-1}^{n}P_k(x)dx=n \text{ при } n=1,\ 2,\ \ldots$$

Имеем:

$$\frac{a_0}{4}\left(4n^3-6n+4n-1\right)+$$
$$+\frac{a_1}{3}\left(3n^2-3n+1\right)+$$
$$+\frac{a_2}{2}(2n-1)+a_3=n^3,$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases} a_0=1, \\ -\frac{3}{2}a_0+a_1=0, \\ a_0-a_1+a_2=0, \\ -\frac{1}{4}a_0+\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{2}a_2+a_3=0. \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим: $a_0=1$, $a_1=\frac{3}{2}$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=0$. Следовательно,

$$P_3(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,$$

а

$$S_3(n)=$$
$$=\int_0^n P_3(x)dx=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2=$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Упражнение 2. Найдите формулу для суммы $1^4+2^4+\ldots+n^4$.

Упражнение 3. Докажите, что при любом натуральном k свободный член многочлена $S_k(n)$ равен нулю.

Упражнение 4. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

Идея замены сумм площадей прямоугольников интегралом от некоторой непрерывной функции применяется и при решении следующей задачи.

Пример 3. Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k$.

Решение. Подберем такую непрерывную функцию $f(x)$, что равенство

$$\int_{n-1}^{n}f(x)dx=\cos n$$

выполняется при всех натуральных n. Учитывая вид правой части последнего равенства, естественно искать $f(x)$ в виде гармоники

$$f(x)=A\cos(x+\alpha).$$

Равенство

$$0=\int_{n-1}^{n}A\cos(x+\alpha)dx-\cos n=$$
$$=A\sin(n+\alpha)-A\sin(n+\alpha-1)-\cos n=$$
$$=A\sin n\cos\alpha+A\cos n\sin\alpha-$$
$$-A\sin n\cos(\alpha-1)-$$
$$-A\cos n\sin(\alpha-1)-\cos n$$

будет справедливым при всех n, если коэффициенты при $\cos n$ и $\sin n$ равны нулю. Это условие дает систему уравнений

$$\begin{cases} A\sin\alpha-A\sin(\alpha-1)-1=0, \\ A\cos\alpha-A\cos(\alpha-1)=0. \end{cases}$$

Так как $A\neq 0$, то из второго уравнения находим: $\alpha=\frac{1}{2}+\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$. Нас устраивает любое решение системы, поэтому возьмем $\alpha=\frac{1}{2}$, тогда из первого уравнения получим, что $A=$ $=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}$. Следовательно, нам подходит функция

$$f(x)=\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k=\int_0^n\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=$$
$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}.$$

Ответ. $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}$.

Отметим, что разобранная задача имеет и другие решения, но в этом разделе все задачи мы решаем только одним способом.

Упражнение 5. Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\cos k$.

Литература

1. *Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. – М.: Физматлит, 1965.

2. *В.А.Кречмар.* Задачник по алгебре. – М.: Физматлит, 1964.

Аналогии в задачах по физике

А.ОВЧИННИКОВ, В.ПЛИС

Довольно часто при решении задачи обнаруживается, что она аналогична какой-то другой, уже решенной, причем степени близости задач могут быть весьма разнообразными. Заметив аналогию новой и старой задач, мы получаем дополнительный шанс на успех в поисках решения новой. В этом смысле «рассуждение по аналогии» является одним из методов решения задач (наряду с такими, как соображения симметрии или размерностей, преобразования системы отсчета, использование графиков или векторных диаграмм и т.п.).

В качестве примеров рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Поршневым воздушным насосом откачивают воздух из сосуда объемом V. Рабочий объем камеры насоса V_0. Во сколько раз уменьшится давление в сосуде после n ходов поршня? Переход воздуха из сосуда в камеру насоса считайте изотермическим процессом.*

В каждом цикле работы насоса будем различать два процесса: один – это изотермическое расширение воздуха от объема V до объема $V + V_0$, другой – освобождение камеры насоса от воздуха, оказавшегося в ней в конце первого процесса.

В соответствии с уравнением Менделеева – Клапейрона, число молей воздуха, производящего в объеме V давление p при температуре T, равно

$$\nu = \frac{pV}{RT},$$

где R – универсальная газовая постоянная. В первом акте расширения воздуха условие сохранения количества молей воздуха с учетом постоянства температуры можно описать уравнением

$$pV = p_1\left(V + V_0\right).$$

После удаления воздуха из камеры насоса и возврата поршня в исходное положение произойдет второе расширение оставшегося в сосуде воздуха:

$$p_1V = p_2\left(V + V_0\right),$$

затем третье, четвертое... и, наконец, n-е расширение воздуха:

$$p_{n-1}V = p_n\left(V + V_0\right).$$

Перемножив соответственно левые и правые части этих n уравнений, получим

$$pV^n = p_n\left(V + V_0\right)^n.$$

Отсюда после простых преобразований окончательно находим ответ на вопрос задачи:

$$\frac{p}{p_n} = \left(1 + \frac{V_0}{V}\right)^n.$$

Задача 2. *Конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U и отсоединен от источника. К этому конденсатору подключают незаряженный конденсатор емкостью C_0. Когда заканчивается перераспределение зарядов, зарядившийся второй конденсатор (емкостью C_0) отсоединяют от первого конденсатора (емкостью C). Затем к первому конденсатору присоединяют следующий незаряженный конденсатор емкостью C_0 и т.д. Во сколько раз уменьшится напряжение на конденсаторе емкостью C после n подключений конденсаторов емкостью C_0?*

Эта задача аналогична предыдущей, и ответ, по-видимому, тоже аналогичен предыдущему:

$$\frac{U}{U_n} = \left(1 + \frac{C_0}{C}\right)^n.$$

Проверим это, проведя подробное решение.

В первом акте происходит «расселение» исходного заряда по двум параллельно соединенным конденсаторам. При этом заряд сохраняется, поэтому можно записать

$$CU = \left(C + C_0\right)U_1.$$

Во втором акте «расселению» подвергается заряд CU_1:

$$CU_1 = \left(C + C_0\right)U_2,$$

и так далее. Наконец, n-й акт описывается соотношением

$$CU_{n-1} = \left(C + C_0\right)U_n.$$

Перемножив соответствующим образом эти равенства друг на друга, получим

$$C^nU = \left(C + C_0\right)^nU_n,$$

или (после простых преобразований)

$$\frac{U}{U_n} = \left(1 + \frac{C_0}{C}\right)^n.$$

Таким образом, сравнивая эти две задачи, можно заключить, что похожие процессы, хотя и имеют различную физическую природу, описываются сходной математикой и имеют ответы на аналогичные вопросы в виде совпадающих математических конструкций. Более того, аналогичными оказываются отношения p/p_n и U/U_n, а также V_0/V и C_0/C.

Задача 3. *Тонкий обруч массой m и радиусом R вращается равномерно вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости, с частотой n. Найдите величину силы натяжения, возникающей в обруче.*

При раскручивании обруча до частоты n он слегка деформируется (увеличивается его длина), и возникает сила натяжения. На рисунке 1 выделен малый участок кольца, на концы которого действуют две силы натяжения, величиной T каждая. Длина участка равна $R \cdot 2\Delta\alpha$. При достаточно малом угле $\Delta\alpha$ участок можно считать материальной точкой массой $m(R \cdot 2\Delta\alpha)/(2\pi R)$, движущейся по окружности с линейной скоростью $2\pi Rn$ и центростремительным ускорением $a = (2\pi Rn)^2/R$ под действием радиальных составляю-

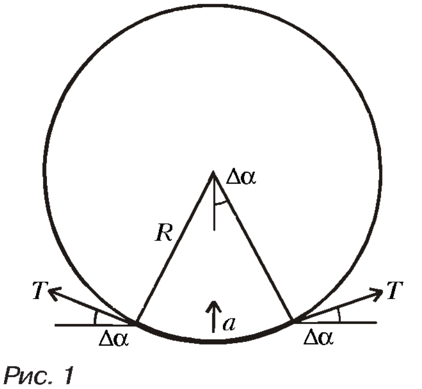


Рис. 1

щих двух сил натяжения, равных в сумме $2T\Delta\alpha$. Таким образом, в соответствии со вторым законом Ньютона, в проекции на радиальное направление имеем

$$\left(\frac{m}{2\pi R}R\cdot 2\Delta\alpha\right)\frac{(2\pi Rn)^2}{R}=2T\Delta\alpha,$$

откуда получаем

$$T=2\pi Rn^2m.$$

Задача 4. *Тонкое проводящее кольцо радиусом R, по которому течет ток I, расположено в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, причем вектор поля перпендикулярен плоскости кольца. Найдите величину силы натяжения, возникающей в кольце.*

На рисунке 2 выделен элементарный участок кольца длиной $R\cdot 2\Delta\alpha$ с током I в магнитном поле, причем вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен к читателю. В соответствии с законом Ампера, участок испытывает со стороны магнитного поля действие силы, равной $\Delta F=I(R\cdot 2\Delta\alpha)B$ и направленной так, как показано на рисунке 2. Обратим внимание на то, что закон Ампера применим только к прямолинейному отрезку проводника с током, так что мы должны потребовать, чтобы угол $\Delta\alpha$ был мал. Учитывая, что выделенный участок кольца покоится, из

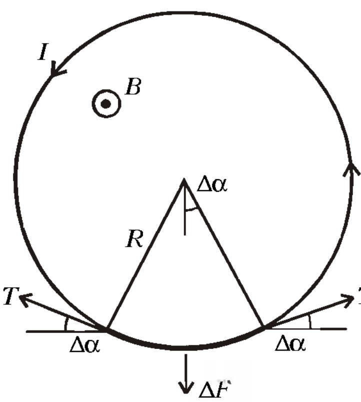


Рис. 2

второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление имеем

$$0=2T\Delta\alpha-I(R\cdot 2\Delta\alpha)B,$$

откуда

$$T=IRB.$$

По-видимому, родственный характер явлений, рассматриваемых в задачах 3 и 4, не так очевиден, как в задачах 1 и 2, но структура решений двух последних задач делает их близкими.

Аналогию, обнаруживаемую при сравнении рисунков 1 и 2, можно усилить, если задачу 3 решать в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг центра обруча, так что в этой системе обруч покоится. Тогда кроме сил натяжения, показанных на рисунке 1, на участок обруча будет действовать еще центробежная сила инерции $\Delta\vec{F}$, направленная против вектора ускорения $\vec{a}$ и равная по величине Δma, т.е.

$$\left(\frac{m}{2\pi R}R\cdot 2\Delta\alpha\right)\frac{(2\pi Rn)^2}{R}.$$

Картина сил качественно совпадает с показанной на рисунке 2. Более того, как и в задаче 4, соответствующий участок обруча теперь покоится. Таким образом, сменив систему отсчета, мы усилили аналогию.

Сравнивая ответы в задачах 3 и 4, можно также обнаружить некие соответствия: совсем понятное $R\leftrightarrow R$, вызывающее сочувствие $nm\leftrightarrow I$ и загадочное $2\pi n\leftrightarrow B$.

Задача 5. *Покажите, что минимальная работа по зарядке первоначально незаряженного конденсатора равна $QU(Q)/2$. Здесь Q и $U(Q)$ – окончательные заряд конденсатора и напряжение между его пластинами.*

На рисунке 3 изображен график зависимости напряжения на конденсато-

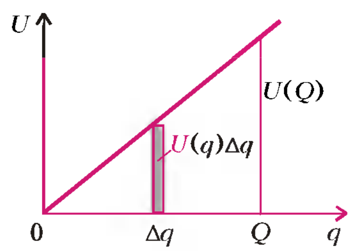


Рис. 3

ре от величины его заряда. В соответствии с определением электрической емкости,

$$U(q)=\frac{1}{C}q.$$

Из графика видно, что величина U, численно равная работе внешней силы по переносу единичного положительного заряда с отрицательно заряженной пластины конденсатора на положительно заряженную, тем больше, чем больше заряд q конденсатора. Работа по дополнительной зарядке конденсатора от заряда q до $q+\Delta q$ равна $U(q)\Delta q$ – на рисунке 3 площадь соответствующего прямоугольника выделена. Наконец, работа по зарядке конденсатора от $q=0$ до $q=Q$ может быть найдена как сумма произведений $U(q)\Delta q$, т.е. как площадь прямоугольного треугольника с катетами Q и $U(Q)$:

$$A=\frac{1}{2}QU(Q).$$

Задача 6. *Покажите, что минимальная работа по строительству вертикальной однородной колонны массой m и высотой H из материала, первоначально расположенного в тонком слое на горизонтальной плоскости, совпадающей с основанием колонны, равна $mgH/2$, где g – ускорение свободного падения. Площадь поперечного сечения колонны одинакова по всей высоте.*

Известно, что формула mgh позволяет найти потенциальную энергию небольшого тела массой m, поднятого на высоту h над нулевым уровнем, от которого отсчитывается потенциальная энергия. Соответственно, величина gh может рассматриваться как минимальная работа по поднятию на высоту h единичной массы.

Пусть ρ – плотность материала, из которого строится колонна:

$$\rho=\frac{m}{SH},$$

где S – площадь поперечного сечения колонны. На рисунке 4 представлен график зависимости величины gh от массы колонны (в процессе ее строительства) ρSh. График показывает, что чем больше высота, а значит, и масса ρSh уже построенной части колонны, тем большую работу gh следует совер-

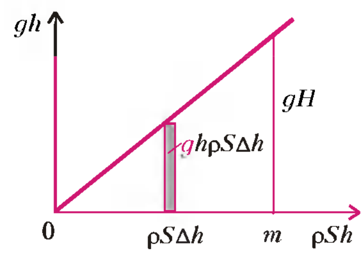


Рис. 4

шить по подъему очередной единичной массы. Работа по увеличению высоты колонны от h до $h+\Delta h$ равна $gh\cdot\rho S\Delta h$ – на рисунке 4 площадь соответствующего прямоугольника выделена. Наконец, работу по строительству всей колонны можно найти как площадь прямоугольного треугольника с катетами m и gH:

$$A=\frac{1}{2}mgH.$$

В задачах 5 и 6 аналогичны структуры мысленных экспериментов по зарядке конденсатора и сооружению колонны; аналогичны также методы решения и структуры ответов.

Задача 7. *Два тела массами m_1 и m_2 движутся со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Происходит абсолютно неупругий удар, в результате которого тела объединяются. Сколько тепла выделится в результате удара?*

Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v},$$

где $\vec{v}$ – скорость образовавшегося тела, и закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}+Q.$$

Перейдя от векторных уравнений к скалярным, после простых преобразований находим выделившееся количество теплоты:

$$Q=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2.$$

Задача 8. *Два небольших проводящих шарика радиусами R_1 и R_2, заряженные до потенциалов φ_1 и φ_2 соответственно, находятся далеко друг от друга. Сколько тепла выделится через достаточно большое время после соединения шариков друг с другом длинной проволокой?*

Будем считать известным, что потенциал φ заряженного шарика связан с его зарядом q формулой

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R},$$

где ε_0 – электрическая постоянная. Закон сохранения заряда для рассматриваемого процесса соединения шариков запишем в виде

$$4\pi\varepsilon_0R_1\varphi_1+4\pi\varepsilon_0R_2\varphi_2=4\pi\varepsilon_0R_1\varphi+4\pi\varepsilon_0R_2\varphi,$$

где φ – окончательный потенциал шариков и соединяющей их проволоки. Рассматривая шарик как конденсатор (второй обкладкой служит концентрическая с шариком сфера бесконечного радиуса) емкостью $4\pi\varepsilon_0R$, можно подсчитать энергию шарика, заряженного до потенциала φ, по формуле $C\varphi^2/2$ (потенциал в бесконечности принят за ноль). С учетом этих соображений, закон сохранения энергии перепишем так:

$$\frac{4\pi\varepsilon_0R_1\varphi_1^2}{2}+\frac{4\pi\varepsilon_0R_2\varphi_2^2}{2}=\frac{4\pi\varepsilon_0R_1\varphi^2}{2}+\frac{4\pi\varepsilon_0R_2\varphi^2}{2}+Q.$$

Отсюда и из закона сохранения заряда после простых преобразований находим выделившееся количество теплоты:

$$Q=\frac{1}{2}\cdot4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}(\varphi_1-\varphi_2)^2.$$

Математическая структура окончательных формул в задачах 7 и 8 одна и та же, и это связано, видимо, с аналогией использованных при решении двух законов сохранения – заряда и импульса.

Задача 9. *Легкий стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. К концам стержня прикреплены небольшие тела массами m_1 и m_2. Стержень удерживают в горизонтальном положении. Какие ускорения возникнут у каждого из тел сразу (в первый момент) после того, как стержень отпустят и у него появится возможность вращаться вокруг оси? Найдите также величину силы давления оси на стержень в этот момент времени.*

На рисунке 5 показаны силы, действующие на стержень и на каждое из

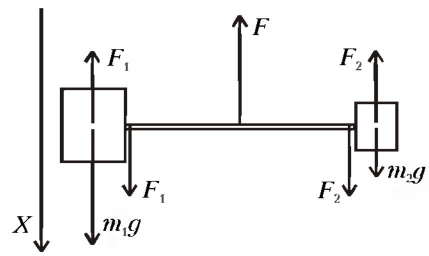


Рис. 5

прикрепленных к нему тел в интересующий нас момент времени. Запишем уравнения движения для тел массами m_1 и m_2 в проекции на ось X:

$$m_1a_{1x}=m_1g-F_1,$$

$$m_2a_{2x}=m_2g-F_2.$$

Уравнение моментов для стержня, с учетом равенства расстояний от каждого из тел до оси вращения и невесомости стержня, приводит к равенству

$$F_1=F_2.$$

Равноудаленность тел от оси вращения и недеформируемость стержня делают справедливым соотношение

$$a_{1x}=-a_{2x}.$$

Второй закон Ньютона, примененный к легкому стержню, дает равенство

$$F=F_1+F_2.$$

Решая систему записанных пяти уравнений, находим все искомые величины:

$$a_{1x}=-a_{2x}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g,$$

$$F=\frac{4m_1m_2g}{m_1+m_2}.$$

Задача 10. *На концах легкой нити, переброшенной через легкий блок, который может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, прикреплены тела массам и m_1 и m_2. Найдите ускорения каждого из тел, а также величину силы давления оси на блок.*

Очевидно, что рисунок, который следовало бы сделать к этой задаче, полностью совпал бы с рисунком 5, только стержень пришлось бы заменить блоком, диаметр которого равен длине стержня. Весь текст решения задачи 9 тоже может быть использован и в этой задаче. Совпадают, конечно же, и ответы. Единственное и принципиально важное отличие состоит в том, что полученные ответы в задаче 9 применимы только к первому моменту, а в задаче 10 – ко всему времени движения тел.

Таким образом, задачи 9 и 10 демонстрируют весьма своеобразное родство.

Упражнения

1. Тонкое кольцо радиусом R однородно заряжено с положительной линейной плотностью заряда λ. В центре кольца покоится большой точечный положительный заряд q. Найдите величину силы натяжения кольца, вызванной взаимодействием заряженного кольца с точечным зарядом. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона считать равным k.

2. На мыльной пленке плавает петля из нити. Часть пленки, находившуюся внутри нити, осторожно прокалывают, и нить принимает форму окружности радиусом R. Найдите величину силы натяжения нити, если коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора равен σ.

3. К заряженному конденсатору, обладающему энергией W_0, присоединяют такой же, но незаряженный конденсатор. На сколько изменится энергия системы конденсаторов?

4. В одно из двух колен U-образной трубки налита жидкость. Вначале колена не сообщаются друг с другом, и энергия жидкости в поле тяжести равна W_0. На сколько изменится энергия жидкости, когда сообщение колен установится и уровень жидкости в них станет одним и тем же?

5. Шарик, имевший кинетическую энергию W_0, сталкивается вдоль линии центров абсолютно неупруго с другим таким же, но покоившимся шариком. На сколько изменится кинетическая энергия системы шариков в результате удара?

Материалы вступительных экзаменов 1998 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{|\cos x|} + \frac{2\cos x}{\cos 3x} = -1.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{3x^2 - 8x - 3} > \frac{1-2x}{3}.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CD. В треугольник BCD вписана окружность, а около треугольника ACD описана окружность. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $BC = 3$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{5}{2}$.

4. Фигура M на плоскости (x, y) ограничена графиками функций $y = 9e^{-ax}$ и $y = 15 - 4e^{ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y = -18x + 9$. Найдите a и площадь фигуры M.

5. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер AB, A_1C_1, BB_1. Постройте сечение призмы, найдите площадь сечения и вычислите угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения, если сторона основания равна 2, а высота призмы равна $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

6. Найдите все пары целых чисел x, y, при которых является верным равенство

$$x^3 - xy - 7x + 2y + 23 = 0.$$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2\left(x^2y + 2xy^2\right) - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) = 4, \\ \log_5\left|\frac{xy}{6}\right| = 0. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5 + 3\cos 4x}{8}} > -\sin x.$$

3. Сторона ромба $ABCD$ равна 6. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, равно 8. Найдите радиусы этих окружностей.

4. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sin x = (4a-2)^2$ имеет корни, а числа $\frac{1-4a}{27a^4}$ являются целыми.

5. Две противоположные боковые грани четырехугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярны основанию, высота пирамиды равна $\sqrt{5}$. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD = BC$), описанная около окружности и такая, что $AB = 6$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$. Найдите расстояние от точки D до плоскости SAB.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SCD, а вершина принадлежит грани SAB. Найдите объем конуса.

6. График функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, $c < 0$, пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M, проходит через точку A. Найдите a, b, c, если площадь треугольника AMN равна 1.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. К концам троса, перекинутого через блок, привязаны бруски с массами m и $M = 4m$, находящиеся на гладкой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ (рис.1). При каком минимальном значении коэффициента трения между брусками они будут покоиться?

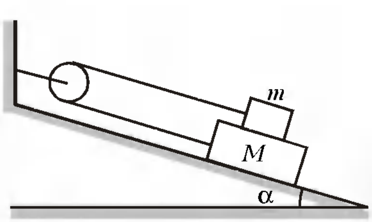


Рис. 1

2. «Тройник» из трех вертикальных открытых в атмосферу трубок полностью заполнен водой (рис.2). После того как тройник стали двигать в горизонтальном направлении (в плоскости рисунка) с некоторым ускорением, из него вылилось $9/32$ всей массы содержавшейся в нем воды. Чему равна величина ускорения a? Внутренние сечения трубок одинаковы, длины трубок равны l. Внутренний диаметр трубок мал по сравнению с их длиной.

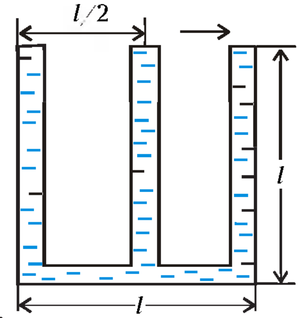


Рис. 2

3. Моль гелия совершает работу величиной A в замкнутом цикле (рис.3), состоящем из адиабаты $1-2$, изотермы $2-3$, изобары $3-1$. Найдите величину работы, совершенной в изотермическом процессе, если разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT.

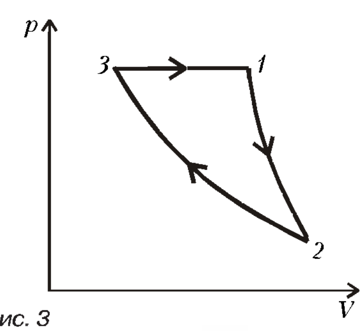


Рис. 3

4. В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке 4, в начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты. Вначале замыкают ключ K_1. Когда ток через катушку индуктивности достигает значения I_0, замыкают ключ K_2. Определите: 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после

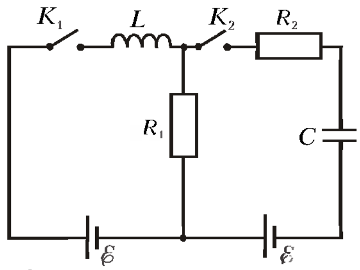


Рис. 4

замыкания ключа K_2; 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме. Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.

5. Два луча симметрично пересекают главную оптическую ось собирающей линзы на расстоянии a = 7,5 см от

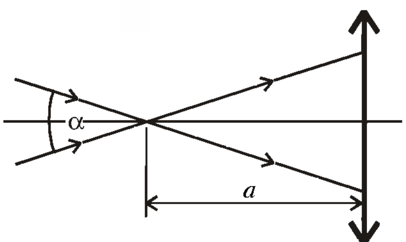


Рис. 5

линзы под углом $\alpha = 4°$ (рис.5). Определите угол между этими лучами после прохождения ими линзы, если фокусное расстояние линзы F = 10 см.

Вариант 2

1. Однородный гибкий канат массой m и длиной L = 75 см прикреплен к бруску массой $2m$, находящемуся на горизонтальной поверхности стола (рис.6). Со стола свешивается половина длины каната. Коэффициент трения

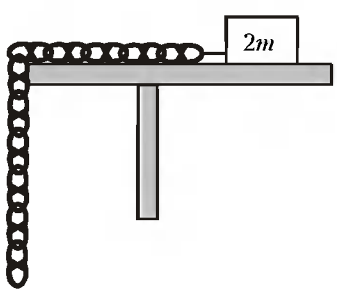


Рис. 6

скольжения бруска о стол μ = 0,15. Трением между канатом и столом пренебречь. Брусок удерживают в покое, а затем отпускают. 1) Найдите ускорение бруска в начале движения. 2) Найдите скорость бруска в момент, когда канат соскользнет со стола.

2. Воздух состоит в основном из азота и кислорода. Концентрация молекул азота при этом в α = 4 раза больше концентрации молекул кислорода. Чему равна кинетическая энергия вращения молекул азота, содержащегося в комнате объемом $V = 60$ м^3? Атмосферное давление $p = 10^5$ Па.

Указание. Внутренняя энергия моля двухатомного газа равна $5/2RT$, где R – газовая постоянная, T – температура; она возрастает по сравнению с энергией одноатомного газа за счет кинетической энергии вращения молекул.

3. Три тонкие незаряженные металлические пластины площадью S каждая расположены на расстояниях d друг от друга, причем d много меньше размеров пластин. К пластинам *2* и *3* подсоединили батарею с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис.7). Пластины *1* и *2* через ключ K можно подсоединить к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$. Пластине *1* сообщили заряд q_0 и замкнули ключ K. 1) Определите заряд пластины *3* до сообщения пластине *1* заряда q_0. 2) Определите заряд пластины *3* после замыкания ключа K.

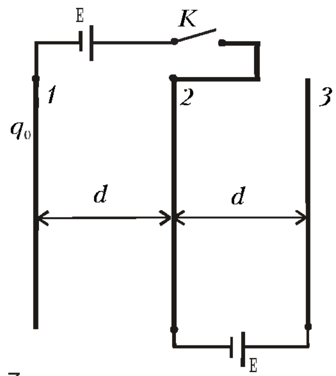


Рис. 7

4. В схеме, изображенной на рисунке 8, сверхпроводящие катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены последовательно с конденсатором емкостью C. В начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсатор заряжен до напряжения U_0. Сначала замыкают ключ K_1, а после того, как напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ K_2. Через некоторое время после замыкания ключа K_2 конденсатор перезарядится до некоторого максимального напряжения U_m. 1) Найдите ток через катушки индуктивности непосредственно перед замыканием ключа K_2. 2) Найдите напряжение U_m.

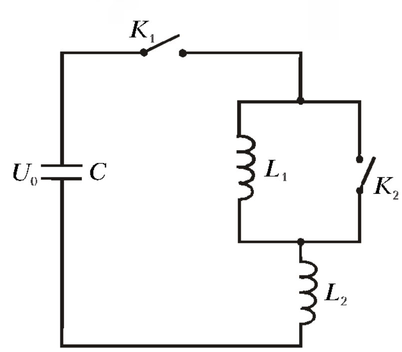


Рис. 8

5. Маленький грузик массой m на пружине жесткостью k совершает гармонические колебания относительно главной оптической оси тонкой плоско-

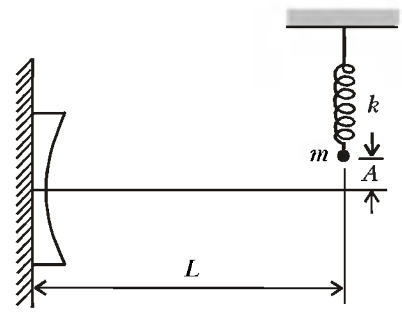


Рис. 9

вогнутой линзы с фокусным расстоянием $-F$ ($F > 0$). Линза плотно прижата к вертикально расположенному плоскому зеркалу (рис.9). Расстояние от грузика до зеркала $L = 4{,}5F$. 1) На каком расстоянии от зеркала находится изображение грузика в данной оптической системе? 2) С какой скоростью изображение грузика пересекает главную оптическую ось линзы, если амплитуда его колебаний равна A?

Публикацию подготовили
В.Трушин, Ю.Чешев, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{3x+2} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x-4}.$$

2. Решите уравнение

$$6\log_9(3x-6) = \log_3^2(x-2) - 1.$$

3. Решите уравнение

$$|4\sin 4x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x = 0.$$

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB = BC = 15$, $AC = 24$. Все боковые грани

(Окончание см. на с. 34)

Замечательные последовательности

В третьем туре предыдущего конкурса «Математика 6—8» с легкой руки Анатолия Павловича Савина была предложена следующая задача:

В последовательности a_1, a_2, a_3, ... число a_1 равняется 1799, а число a_2 равняется 1828. Каждое из следующих чисел находится по закону $a_{n+1} = \dfrac{a_n+1}{a_{n-1}}$. Чему равняется a_{1997}?

Несколько неожиданным представляется тот факт, что, начиная с шестого номера, значения членов последовательности $\{a_n\}$ повторяются: $a_6 = a_1$, $a_7 = a_2$, $a_8 = a_3$ и т.д. Обнаружив и обосновав эту закономерность, уже без труда можно рассчитать величину $a_{1997} = a_{5\cdot 399+2} = a_2 = 1828$.

Некоторые школьники сочли, что с этой задачей играючи справится компьютер. Для этого достаточно составить простенькую программу, что-то вроде:

$a_{\text{пред пред}} := 1799$;
$a_{\text{пред}} := 1828$;
$i := 2$;
начало цикла пока $i < 1997$
  $i := i + 1$;
  $a := \left(a_{\text{пред}} + 1\right)/a_{\text{пред пред}}$;
  $a_{\text{пред пред}} := a_{\text{пред}}$;
  $a_{\text{пред}} := a$
конец цикла;
вывод a.

Рассуждавшие так попали в ловушку! Дело в том, что с абсолютной точностью компьютер умеет обрабатывать лишь *целые* числа, а вот *дробные* числа, хотя и с достаточно высокой точностью, вычисляются им *приближенно*. Так, например, для числа a_{1997} железный вычислитель может выдать результат $1{,}8280000000000000 \cdot 10^3$, гарантируя лишь 16 точных значащих цифр после запятой. Что располагается начиная с 17-го места после запятой и далее – для компьютера «покрыто мглой». В данном случае он может лишь *подсказать* наблюдательному исследователю возможную закономерность, наличие же ее нужно обосновывать иным способом, например с помощью алгебраических выкладок. Кстати, для обоснования периодичности последовательности $\{a_n\}$ недостаточно убедиться лишь в единичном совпадении $a_6 = a_1$, как это сделали некоторые из участников конкурса. Каждый член последовательности $\{a_n\}$ зависит *от двух* предыдущих членов, поэтому необходимо обязательно убедиться также в том, что $a_7 = a_2$.

Замечательные числовые последовательности — частые гости у тех, кто подружился с числами. Возьмем первые 9 членов арифметической прогрессии 143, 286, 429, ..., 1287 и умножим их на число 777. В итоге получим последовательность 111111, 222222, 333333, ..., 999999. Этот пример умножения «с некоим удивлением» приводит уже автор первого российского учебника по математике Леонтий Магницкий (1669—1739).

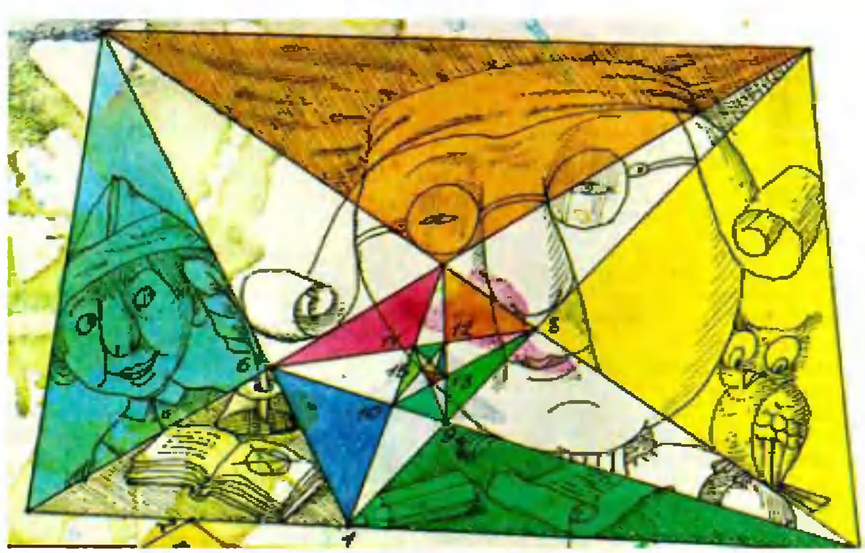
Следующая замечательная последовательность описана в книге Жака Арсака «Программирование игр и головоломок» (М.: Наука, 1990). В качестве начального члена последовательности выберем произвольное натуральное число. Все остальные члены последовательности получаются по правилу: за любым элементом последовательности следует число, равное сумме кубов всех цифр данного элемента. Например,

$b_1 = 27$;
$b_2 = 2^3 + 7^3 = 8 + 343 = 351$;
$b_3 = 3^3 + 5^3 + 1^3 = 27 + 125 + 1 = 153$;
$b_4 = 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$;

и т.д.

Любопытно, что какое бы начальное число b_1, делящееся на 3, мы ни взяли, рано или поздно мы неизбежно придем к числу 153. Этот замечательный факт помог доказать компьютер.

Прежде всего заметим, что все члены последовательности $\{b_n\}$ принадлежат единому семейству чисел, кратных трем (пожалуйста, убедитесь в этом самостоятельно). Далее замечаем, что для элемента последовательности b_n, больше некоторого порога, следующий элемент b_{n+1} всегда меньше своего предшественника. Действительно, для k-значного числа b_n сумма кубов его цифр ограничена сверху числом $k \cdot 9^3 = 729k$. При $k \geq 5$ имеем $b_n \geq 10^4 > 3645 =$



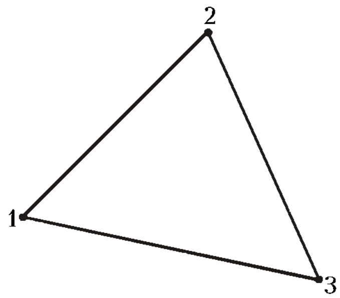


Рис. 1

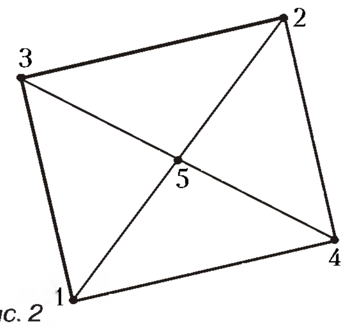


Рис. 2

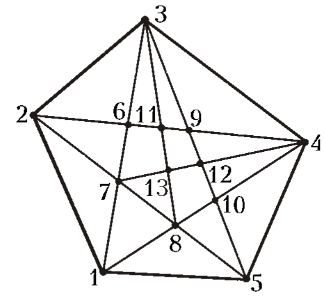


Рис. 3

$= 729 \cdot 5 \geq b_{n+1}$. Итак, порог – это число 10^4. Достаточно проверить справедливость связанного с числом 153 замечательного факта для всех кратных трем чисел от 1 до 10^4, и мы тем самым докажем его справедливость для всех остальных чисел данного семейства. Вот здесь-то как раз и может пригодиться компьютер!

Рассмотрим другую замечательную последовательность. В качестве начального элемента выберем четырехзначное натуральное число, не все цифры которого равны между собой. Переход от данного элемента последовательности к следующему производится по такому правилу. Расположим десятичные цифры в записи данного числа в порядке убывания слева направо – получим первое число. Расположим их в обратном порядке и вычтем это второе число из первого. Таким образом получаем следующий элемент последовательности. Как ведут себя члены такой последовательности?

Следующая числовая последовательность:

11, 101, 1001, 10001, ..., 100...001, ...

обладает загадками иного рода. Сразу можно заметить, что члены этой последовательности, содержащие четное число нулей, делятся на 11 (быстро убедиться в этом помогает известный признак делимости на 11: число делится на 11, если в десятичной записи этого числа сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах). Элементы последовательности с нечетным количеством нулей также обнаруживают некоторые закономерности. Для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$

числа $10^{1+2n} + 1$ делятся на 11;
числа $10^{2+4n} + 1$ делятся на 101;
числа $10^{4+8n} + 1$ делятся на 73;
числа $10^{8+16n} + 1$ делятся на 17;
. . .

Открытым остается вопрос: всякое ли число вида $10^k + 1$ составное (здесь k – натуральное)?

Замечательные последовательности можно искать не только в мире чисел, но и в мире фигур.

Пусть на плоскости задано некоторое множество точек, пронумерованных от 1 до n. Конфигурацию этих точек будем наращивать по следующему правилу. Начнем соединять отрезками точку 1 по порядку с другими точками, имеющими больший номер: с точкой 2, с точкой 3 и т.д. Затем ту же операцию произведем, отправляясь от точки 2, от точки 3 и т.д. (точка с меньшим номером всегда соединяется с точкой с большим номером). Каждый раз, когда на пересечении отрезков образуется одна новая точка, она получает следующий по порядку незанятый номер: $n + 1$, $n + 2$ и т.д. Если проводимый отрезок пересекает сразу несколько других отрезков – нумерация вновь образованных точек производится в порядке возрастания от точки с меньшим номером в сторону точки с большим номером.

Легко заметить, что 3 точки на плоскости не порождают новых точек (рис.1), 4 точки могут породить одну-единственную пятую точку (рис.2). Чудеса начинаются, когда в исходной конфигурации участвуют 5 точек. Вообще говоря, 5 точек – это «критическая масса», с которой начинается «цепная реакция»: необузданный рост новых точек (рисунок 3 – конфигурация после соединения точек 1, 2, 3, 4 с другими точками). Однако существуют такие исходные конфигурации, когда рост новых точек производится «равномерно» (на рисунке 4 показана конфигурация после соединения точек 1, 2, ..., 13 с другими точками).

Существует ли исходная конфигурация из 6 и большего количества точек, обладающая этим же свойством?

А.Жуков

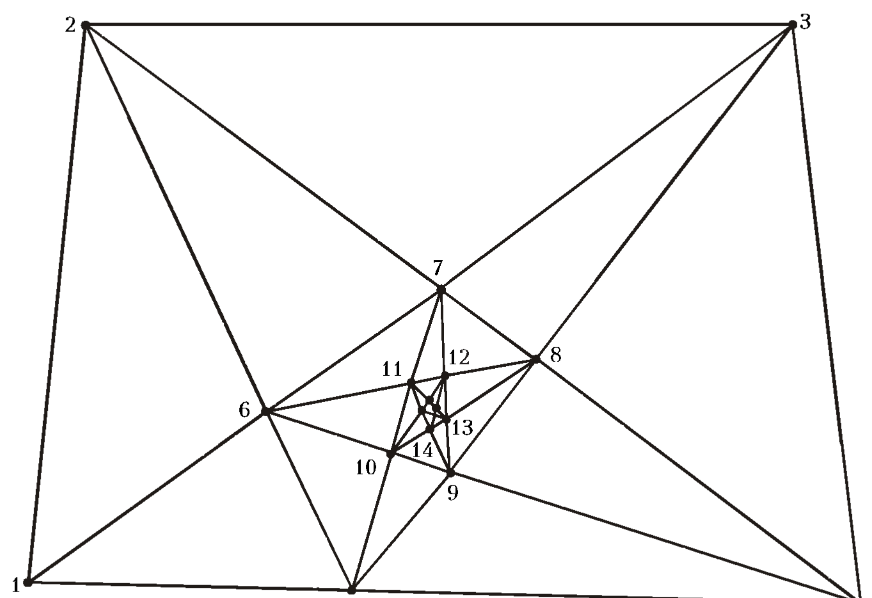


Рис. 4

(Начало см. на с. 30)

образуют с основанием угол 45°. Найдите объем пирамиды.

5. Может ли функция $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}\cos x + 1}{3 + \sin x}$ принимать значение 1? Найдите все значения, которые может принимать функция $f(x)$.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и экономико-математический)

1. Решите неравенство

$$\log_2(x+5) > -2\log_2\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

2. Решите уравнение

$$|1 + 2\sin x + \cos x| + \cos x = 0.$$

3. Решите относительно x уравнение

$$\frac{ax+3}{x+1} = \frac{x+3}{ax+2}.$$

4. В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 1 и высота равна $\sqrt{8}$. Точка N лежит на ребре SD и делит это ребро в отношении $DN : NS = 1 : 2$, точка M – середина ребра AS. Найдите расстояние от вершины D до плоскости, проходящей через точки M и N параллельно ребру DC.

5. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x+2} = ax + 9a - 3$ имеет единственное решение.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Мяч бросают горизонтально со скоростью $v_0 = 14$ м/с с горы, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом. На каком наибольшем расстоянии от поверхности горы окажется мяч во время полета? Где он приземлится?

2. На горизонтальной пружине укреплено тело массой $M = 10$ кг, лежащие на абсолютно гладком столе. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью, равной $v = 500$ м/с и направленной вдоль оси пружины. Тело вместе с застрявшей в нем пулей начинает колебаться с амплитудой $A = 10$ см. Найдите период колебаний.

3. Два одинаковых сосуда, содержащих одно и то же число молекул азота, соединены краном. В первом сосуде средняя квадратичная скорость молекул равна $v_1 = 400$ м/с, а во втором – $v_2 = 500$ м/с. Какая установится скорость, если открыть кран, соединяющий сосуды?

4. Барометрическая трубка опущена в сосуд с ртутью. Столб ртути в трубке имеет высоту $h_1 = 40$ мм, а столб воздуха над ртутью – $h_2 = 19$ см. На сколько надо опустить трубку, чтобы уровни ртути в трубке и сосуде оказались одинаковыми? Ртуть в ртутном барометре находится на высоте $H = 76$ см.

5. До какого потенциала можно зарядить уединенный металлический шарик радиусом $r = 5{,}0$ мм? Какой заряд он при этом будет нести? Напряженность поля, при которой наступает пробой воздуха, равна $E = 3{,}0$ МВ/м.

6. При силе тока $I_1 = 10$ А электродвигатель развивает мощность $P_1 = 0{,}50$ кВт, при $I_2 = 20$ А – мощность $P_2 = 0{,}80$ кВт. Определите КПД двигателя при данных значениях тока. Какой силы ток будет течь через обмотку якоря, если электромотор заклинит?

7. Заряженный конденсатор замкнули на катушку индуктивности. Через какое время (в долях периода T) после подключения энергия конденсатора будет равна энергии катушки индуктивности?

8. Длина линии электропередачи $L = 600$ км. Чему равна разность фаз напряжения на этом расстоянии? Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, частота переменного тока $\nu = 50$ Гц.

9. Два взаимно перпендикулярных луча идут из воздуха в жидкость. Каков показатель преломления жидкости, если один луч преломляется под углом $\beta_1 = 36°$, а другой – под углом $\beta_2 = 20°$?

10. Уединенный шарик радиусом $r = 0{,}50$ см осветили светом с длиной волны $\lambda_1 = 250$ нм. Сколько электронов покинет шарик, если его дополнительно осветить светом с длиной волны $\lambda_2 = 200$ нм? Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Публикацию подготовили Ю.Сезонов, В.Тонян

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{2}\sin x}(1 + \cos x) = 2.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3\log_{0,5} x}{2 - \log_{0,5} x} \geq 2\log_{0,5} x + 1.$$

3. Бригада рыбаков должна была выловить по плану 600 ц рыбы к определенному сроку. В течение первых четырех дней рыбаки перевыполняли дневную норму на 5 ц, а в последние дни — на 6 ц, и уже за два дня до срока для выполнения плана им осталось выловить 6 ц рыбы. Сколько центнеров рыбы выловила бригада за первые 10 дней лова?

4. Все ребра пирамиды $MABCD$ равны a. Точка P лежит на ребре MC, причем $CP : PM = 1 : 3$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку P перпендикулярно прямой MC.

5. Внутри угла, равного 30°, расположена точка A на расстояниях 2 см и 4 см от сторон угла. Найдите наименьшую площадь треугольника, отсекаемого от угла прямой, проходящей через точку A.

Вариант 2

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2|\cos x| + \log_{\mathrm{ctg}\, x}\left(-\frac{|\sin x|}{\cos x}\right) = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_x \log_3\left(10 - 9^x\right) \geq 1.$$

3. Три машинистки начали работу одновременно. Ежедневная норма первой машинистки относится к норме второй, как 5 : 4, а второй к третьей, как 2 : 1,2. Первая машинистка ежедневно перевыполняла норму на 10%, вторая — на 20%, третья – на 10%. В результате за 8 дней первая машинистка напечатала на 14 страниц больше второй. Сколько страниц напечатала каждая машинистка за 8 дней?

4. Все ребра тетраэдра $ABCD$ равны a, точка M лежит на ребре AD так, что $AM : MD = 3 : 1$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно ребру AD, и найдите площадь этого сечения.

5. В равнобедренный треугольник со сторонами 15 см, 15 см и 18 см вписан параллелограмм так, что угол при основании у них общий. Какими должны быть стороны параллелограмма, чтобы его площадь была наибольшей?

Вариант 3

(физический факультет)

1. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписан шар радиуса r. Найдите объем конуса.

2. Решите уравнение

$$\sin 5x + \sin 3x = \sin 4x.$$

3. Решите неравенство

$$\lg 2 + \lg\left(2x - x^2\right) > \lg\left(1 + x^2\right).$$

4. Решите уравнение

$$5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-2} = 26.$$

5. Напишите уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 6x$, проходящей через ее вершину.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно d и наклонено к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Решите уравнение

$$(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x.$$

3. Решите неравенство

$$0{,}5^{\frac{2x-7}{x+3}} > \frac{1}{8}.$$

4. Решите уравнение

$$\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg(1/x).$$

5. На графике функции $f(x) = x(x-4)^3$ найдите точки, в которых касательная параллельна оси абсцисс.

Вариант 5

(факультет технологии и предпринимательства)

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а высота – 4 см. Найдите боковую поверхность усеченной пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию и отстоящей от него на 1 см.

2. Решите уравнение

$$\sin(x - 1) = \sin x - \sin 1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{3x+1}{x+1} > 0.$$

4. Решите уравнение

$$x^{(\log_3 x) - 4} = \frac{1}{27}.$$

5. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = (x+2)^2 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Вычислите

$$\log_{0,5}\left|\left(0{,}25^{0,25} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(4^{-0,25} + \left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right|.$$

2. Вычислите

$$\frac{\cos 20^\circ + \sin 50^\circ - \cos 80^\circ}{\sqrt{1 + \cos 280^\circ}}.$$

3. Вычислите $\log_{abc} x$, если известно, что $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$.

4. Постройте график

$$y = |\sin x| \cdot \operatorname{ctg} x.$$

5. Постройте график

$$y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x + 3} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}.$$

6. Постройте график

$$y = 5^{\left|\log_{\frac{1}{5}} x\right|}.$$

7. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 2 и 3, а угол между диагоналями равен 120°.

8. Основания трапеции равны 3 м и 4 м. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям трапеции и делящего ее на две трапеции одинаковой площади.

9. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если переставить его цифры, то получится число, составляющее 4/7 первоначального. Найдите его.

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot y^2 + 2^{2-y} = 2^{x+2} + y^2 \cdot 2^{-y}, \\ y = x^2. \end{cases}$$

11. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^x \le 5^{\frac{x-6}{x-2}}, \\ \sqrt{x^2} < 16. \end{cases}$$

12. Решите неравенство

$$|x - 1| + |2 - x| \ge x + 3.$$

13. Решите уравнение

$$2\sin x \sin 3x + 4\cos 2x = 3.$$

14. Решите уравнение

$$4^{2-|2x+3|} + 31 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{|2x+3|} = 2.$$

15. При каком значении a максимум функции $f(x) = ax^2 + 2ax + 2a^2 + 1$ равен 2?

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Груз какой массы нужно положить на плоскую льдину, чтобы она полностью погрузилась в воду? Площадь льдины 5 м^2, толщина 20 см. Плотность льда 0,9 г/см^3.

2. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через 5 с. Какова была начальная скорость тела? На какую высоту оно поднялось? Сопротивление воздуха не учитывать.

3. С горы высотой 2,5 м и основанием 5 м съезжают сани и, пройдя по горизонтальному участку 40 м, останавливаются. Определите коэффициент трения.

4. Лифт поднимается с первого этажа равноускоренно на высоту 12 м в течение 4 с. Определите вес груза массой 60 кг, находящегося в лифте.

5. В баллоне содержится 15 л газа при температуре 27 °С и давлении $2 \cdot 10^4$ Па. Чему равен объем этой массы газа при нормальных условиях?

6. В сосуд, содержащий 1 кг воды при 20 °С, впускают 100 г водяного пара при 100 °С. Какая температура установится в сосуде? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

7. Определите напряженность электрического поля в точке, в которой на заряд $2 \cdot 10^{-8}$ Кл действует сила $6 \cdot 10^{-3}$ Н. Определите величину заряда, создающего это поле, если рассматриваемая точка удалена от него на 12 см.

8. Два электронагревателя, сопротивления которых 20 Ом и 10 Ом, находятся под напряжением 200 В. Какое количество теплоты выделится нагревателями при их последовательном и параллельном соединениях в течение 5 минут?

9. Под каким углом должен упасть луч на стекло, чтобы преломленный луч оказался перпендикулярным отраженному? Показатель преломления стекла 1,8.

10. Возникнет ли фотоэффект в цинке под действием излучения, имеющего длину волны 0,45 мкм? Постоянная Планка $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, работа выхода электронов из цинка 3,74 эВ.

Публикацию подготовили
Г.Брайчев, Б.Кукушкин,
Е.Пантелеева, М.Чистова

V Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Заключительный этап Российской олимпиады школьников по астрономии и космической физике 1998 года прошел точно в те же сроки и в том же месте, что и в прошлом году: с 7 по 12 апреля в городе Троицке Московской области, на базе Фонда «Байтик» и Центра новых педагогических технологий. Научное и идейное руководство олимпиадой осуществляло Астрономическое общество.

В Троицк прибыл 121 школьник из 32 регионов России. Как и в прошлые годы, участники олимпиады были разделены на три возрастные группы: 8—9, 10 и 11 классы (правда, задания для учащихся 8 и 9 классов немного различались). Каждый регион мог направить на олимпиаду четырех участников по 8—9 классам, двух десятиклассников и двух одиннадцатиклассников, а также (дополнительно) победителей Российской и Международной олимпиад 1997 года (эти нормы сохраняются и на 1999 г.) и российских победителей заочной олимпиады журнала «Звездочет». Заметим, кстати, что (согласно Положению об олимпиаде) города и районы России, проводящие у себя астрономические олимпиады, по согласованию с Координационным советом, могут представлять свою область на заключительном этапе, если областные олимпиады в этой области не проводятся.

8 и 10 апреля прошли, соответственно, теоретический и творческо-практический туры. На теоретическом туре школьникам было предложено 6 задач, а в задание творческо-практического тура была включена одна творческая задача и одна практическая (работа с фотографиями, сделанными на космическом телескопе «Хаббл»). Продолжительность каждого тура для участников составляла 4 часа, а вот жюри работало существенно дольше. Задачи этого года оказались гораздо более «живыми», что отразилось и на стиле изложения решений. Несомненными лидерами по числу оригинальных решений и фраз в решениях стали: в первом туре – задача про светящиеся кошачьи глаза, во втором – задача про деноминацию; не случайно их взялся проверять председатель жюри (профессор астрономического отделения МГУ А.С.Расторгуев). И ведь какие ответы были! Кошачьи глаза сверкали вплоть до -47^m (этакий галактический монстр)! Легко посчитать, что такую звездную величину можно было бы получить, приблизившись к Солнцу в 10000 раз (а приблизиться, как известно, можно максимум в 108 раз). На самом деле, глаз «среднестатистического кота» (как было написано в одной из работ) с расстояния в 5 метров светит, как звезда порядка -7^m. Ну а советов правительству галактики Млечный Путь было не меньше, чем дебатов в нашей Госдуме.

Важным методическим моментом этой олимпиады были меньшая формализация условий задач и существенное увеличение числа задач оценочного характера, в которых целью решения должны быть не числа или формулы, а понимание явления. Ведь решение именно таких задач развивает у школьников умение делать простые оценки, т.е. быстро и без громоздких вычислений получать правильное представление о разнообразных явлениях и объектах.

Каждая задача первого тура оценивалась из 10 баллов, второго – из 20; таким образом, максимально возможное число баллов составляло 100. Как обычно, после второго тура участники олимпиады могли ознакомиться с оценкой своих работ первого тура, побеседовать с членами жюри, обратиться с апелляцией.

В день между турами олимпиады – 9 апреля – в Московском городском дворце детского и юношеского творчества прошла традиционная научно-практическая конференция, посвященная Дню Космонавтики. Правда, это, хорошо продуманное мероприятие для школьников Москвы, к сожалению, явно не вписалось в программу Российской олимпиады.

Задачи олимпиады

Теоретический тур

8 класс

1. В какой четверти Луна лучше освещает Землю – в первой или в третьей? Ответ обоснуйте и поясните рисунком.

2. В ночь с 23 на 24 февраля 1987 года астрономы зафиксировали вспышку сверхновой звезды в галактике Большое Магелланово облако, расстояние до которой от Земли около 55 кпк. В каком году на самом деле произошла эта вспышка?

3. Приблизительно сколько раз в году при благоприятной погоде могут любоваться полной Луной белые медведи? Наклонение плоскости орбиты Луны к плоскости эклиптики около 5°. Считайте, что белые медведи живут вблизи Северного полюса.

4. Искусственный спутник, находящийся на низкой околоземной орбите, пролетел над Харьковом ($\varphi \approx 50°$ с.ш., $\lambda \approx 36°$ в.д.). Над каким городом или над какой местностью (приблизительно) он пролетит через один оборот вокруг Земли?

5. Год на Меркурии длится 88,0 суток, а период обращения вокруг своей оси составляет 58,7 суток (направления обоих вращений совпадают). Найдите продолжительность меркурианских суток.

6. Определите, внутри или вне Солнца находится центр масс Солнечной системы, пренебрегая массами всех планет, кроме Юпитера. Масса Солнца в 1050 раз больше массы Юпитера. Известно, что диаметр Солнца в 108 раз меньше расстояния от Земли до Солнца, а расстояние от Юпитера до Солнца составляет 5,2 а.е.

9 класс

1—4. См. задачи 1 – 4 для 8 класса.

5. Оцените, сколько времени длится в Троицке заход Солнца (т.е. время от первого до последнего касания горизонта солнечным диском). Широта Троицка $\varphi \approx 55°30'$ с.ш., долгота

На закрытии олимпиады каждому участнику была подарена «Астрономическая энциклопедия для школьников» (выпущенная издательством «Аванта +») и сборник олимпиадных задач по астрономии «Звездный мир» (автор – М.Г.Гаврилов). Призерам олимпиады были вручены также дипломы, ценные подарки и главный приз олимпиады: для одиннадцатиклассников – приглашение на физические и астрономические отделения ведущих вузов России (университетов Москвы, Санкт-Петербурга, Казани, Екатеринбурга), а для остальных – приглашение на V Осеннюю астрономическую школу в Специальную астрофизическую обсерваторию РАН, в рамках которой состоится третья Международная астрономическая олимпиада.

Как обычно, во время олимпиады прошла конференция учителей астрономии. Были обсуждены проблемы как общешкольного, так и дополнительного образования, утвержден порядок проведения I съезда учителей астрономии РФ и стран СНГ (декабрь 1998 г., п.Черноголовка Московской обл.).

Теперь – немного об итогах и о будущем. Российская астрономическая олимпиада отметила свой пятилетний юбилей. Год от года растет число школьников, участвующих в городских и областных олимпиадах, а по числу участников заключительного этапа олимпиада вышла на пятое место, уступая только самым «почтенным» олимпиадам – по математике, физике, химии и биологии. Стали проводиться заочные конкурсы, победители которых участвуют сразу в заключительном этапе (как в былые годы победители конкурса журнала «Квант» участвовали в олимпиадах по математике и физике). Место проведения заключительного этапа следующей олимпиады пока не определено (может быть, это и к лучшему – за все предыдущие годы олимпиада ни разу не прошла в заранее намеченном месте). Городами-кандидатами на проведение олимпиады 1999 года являются Петергоф, Петрозаводск, Майкоп и Нижневартовск.

По традиции, все ваши вопросы, замечания и предложения (по комплекту задач, другим вопросам, а также интересные задачи, условия которых вы хотели бы видеть в будущих олимпиадах) просим сообщать автору по электронной почте: gavrilov@issp.ac.ru или почтовому адресу: 142432 п.Черноголовка Московской обл., Институтский пр., 15, ИФТТ РАН.

Ниже приводятся условия задач обоих туров олимпиады, а также список призеров.

$\lambda \approx 37°15'$ в.д., угловой диаметр солнечного диска $2\rho = 32'$.

6. Вы путешествуете по поясу астероидов, характерная плотность пород которых составляет $3{,}5\ \text{г}/\text{см}^3$. Каковы могут быть размеры астероидов, по которым можно бегать (с такой же скоростью, как на Земле), не боясь «упасть» в космос?

10 класс

1. На какой максимальной высоте может кульминировать Луна в Троицке? Наклонение эклиптики к плоскости небесного экватора $\varepsilon = 23{,}5°$, а плоскости орбиты Луны к плоскости эклиптики $i = 5{,}1°$; широта и долгота Троицка $\varphi \approx 55°30'$ с.ш. и $\lambda \approx 37°15'$ в.д.

2. Гвинейскими астрономами обнаружена одна весьма плотная планета системы τ LynxMajor. Период обращения планеты вокруг своей оси составляет всего лишь $T = 6$ мин. Какой может быть плотность этой планеты?

3. Определите, внутри или вне Солнца находится центр масс Солнечной системы. Необходимые данные возьмите из таблиц Солнечной системы. Видимый с Земли угловой размер Солнца равен $\alpha = 9{,}3 \cdot 10^{-3}$ рад, а масса Солнца в 333 000 раз больше массы Земли.

4. На сколько различаются видимые звездные величины Солнца летом и зимой, если эксцентриситет земной орбиты $e = 0{,}017$?

5. На небе имеется около 160 тысяч звезд ярче 10^m. Считая, что они распределены по небу равномерно, оцените, как часто происходит их покрытие Луной.

6. С какой планеты – Венеры или Марса – легче (по энергетическим соображениям) запустить космический зонд на поверхность Солнца, и каким образом следует это осуществить? Какое время будет длиться полет? Необходимые данные возьмите из таблиц Солнечной системы.

11 класс

1. Некоторая галактика наблюдается как диск с угловым размером около $\alpha = 0{,}5'$, а красное доплеровское смещение в спектрах этой галактики составляет 2% ($\Delta\lambda/\lambda = 0{,}02$). Сравните эту галактику с нашей по размерам. Постоянную Хаббла считать равной $H = 75$ км/(с · Мпк).

2. Малая планета №887 (астероид Алинда) обращается вокруг Солнца по вытянутой эллиптической орбите. Для наблюдателя, находящегося вблизи Солнца, его блеск меняется на $\Delta m = 5{,}24^m$. Определите, на сколько меняется звездная величина Солнца, если наблюдать его с Алинды.

3. На просторах Тихого океана между Чили, Новой Зеландией и Антарктидой находится точка земного шара, диаметрально противоположная нам. Наш исследователь, стоящий «в чистом поле», наблюдает заход Солнца. Солнечный диск только что коснулся горизонта своим нижним краем. Что в этот самый момент увидит наблюдатель в диаметрально противоположной точке земного шара?

4. Наверно, вы нередко замечали, что порой ночью у котов ярко светятся глаза (как правило, желтым или зеленым светом), особенно если невдалеке имеется источник света – уличный фонарь, например. Наиболее хорошо блеск кошачьих глаз будет заметен, если вы правильно выберете взаимное расположение себя, фонаря и кота. А теперь представьте, что вы наблюдаете кота, любующегося полной Луной. Приняв расстояние от себя до кота равным 5 м (как правило, ближе коты ночью людей не подпускают), оцените примерно максимально возможную звездную величину каждого кошачьего глаза. Звездная величина Луны в полнолуние равна $-12{,}7^m$. Иные сведения о Луне и котах вспомните сами.

5. Космический корабль совершает перелет от Земли к Марсу по орбите Гомана–Цандера (в перигелии эта орбита касается орбиты Земли, а в афелии – орбиты Марса). Найдите время такого перелета, а также минимальное время, в течение которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по орбите такой же формы. Из численных данных вам известны только периоды обращения Земли и Марса вокруг Солнца: 365,25 суток и 687 суток соответственно. Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

6. Оцените приблизительно размер солнечного паруса, с помощью которого можно было бы свободно путешествовать по Солнечной системе на космическом корабле-яхте массой 10 тонн (массой паруса можно пренебречь). Солнечная постоянная равна примерно $1{,}4\ \text{кВт}/\text{м}^2$, расстояние от Земли до Солнца около 150 млн км.

Элементы планетных орбит

Планета	Среднее расстояние от Солнца		Сидерический период обращения		Синодический период, в средних сутках	Эксцентриситет (e)	Наклон орбиты (i)	Расстояние от Земли, в млн км	
	в а.е.	в млн км	в тропич. годах	в средн. сутках				наименьшее	наибольшее
Меркурий	0,387	57,9	0,241	87,97	115,88	0,206	7°00′	82	217
Венера	0,723	108,2	0,615	224,70	583,92	0,007	3 24	39	260
Земля	1,000	149,6	1,000	365,26	—	0,017	0 00	—	—
Марс	1,524	227,9	1,880	686,98	779,94	0,093	1 51	56	400
Юпитер	5,203	778,3	11,862	4332,59	398,88	0,048	1 18	591	965
Сатурн	9,539	1427,0	29,458	10759,20	378,09	0,054	2 29	1199	1653
Уран	19,191	2871,0	84,015	30685,93	369,66	0,046	0 46	2586	3153
Нептун	30,071	4498,6	164,788	60187,64	367,48	0,008	1 46	4309	4682
Плутон	39,529	5913,5	247,697	90471,85	366,72	0,253	17 08	4249	7558

Физические характеристики больших планет

Планета	Экваториальный диаметр		Объем относит. Земли	Масса		Средняя плотность, г/см^3	Период вращения вокруг оси орбиты	Наклон экватора к плоскости орбиты	Альбедо
	в км	относит. Земли		10^{24} кг	относит. Земли				
Меркурий	4880	0,38	0,055	0,33	0,054	5,45	58сут 15ч 30мин	0°	0,06
Венера	12104	0,95	0,84	4,87	0,845	5,25	?	?	0,78
Земля	12756	1,00	1,00	5,97	1,000	5,52	23ч 56мин 04с	23°27′	0,36
Марс	6794	0,53	0,15	0,64	0,107	3,89	24 37 23	24 48	0,15
Юпитер	142984	11,21	1327	1898	317,88	1,32	9 50 40	3 07	0,66
Сатурн	120536	9,45	757	568	95,17	0,69	10 14 24	26 45	0,68
Уран	51118	4,01	63	86,8	14,54	1,28	10 49 *)	98 00	0,74
Нептун	49532	3,88	58	102	17,16	1,62	15 48	29 36	0,58
Плутон	2274	0,18	0,006	0,01	0,002	2,06	?	?	0,65

*)Вращение обратное

Творческо-практический тур

8—9 классы

1. В 1996 году на космическом телескопе «Хаббла» был проведен уникальный эксперимент: требовалось увидеть как можно более слабые объекты на небе, не досягаемые для наземной техники. В результате многочасовых экспозиций, выполненных с четырьмя светофильтрами, были получены изображения небольшой области неба вдали от Млечного Пути с площадью несколько квадратных угловых минут, где можно различить объекты до 29—30 звездной величины. Вам даются фотокопии изображений (полученные с некоторым уменьшением предельной звездной величины). На оригинальных изображениях удалось обнаружить около 2000 галактик, но лишь для небольшой части из них можно уверенно определить морфологический тип. Ваша задача: для выбранных объектов (они помечены цифрами) определить (по внешнему виду и цветовому оттенку), к какому классу они относятся. Используйте обозначения: * – звезда нашей галактики, S – спиральная галактика, E – эллиптическая галактика, Ir – неправильная галактика. Там, где можно указать подкласс галактики, укажите: тип Sa или Sc.

Примечание. Галактика №30 указана не совсем точно: вы ее найдете, переместив стрелочку на 30° против часовой стрелки.

2. В 2098 году астрономы Футурландии, пользуясь стареньким наземным двадцатиметровым телескопом, открыли замечательный во многих отношениях астероид, движущийся по круговой орбите. Оказалось, что видимый путь, пройденный им на небе за пять лет наблюдений, имеет вид куска натянутой цепи с пятью удлиненными звеньями, как бы положенной сверху на веревочку. Оцените угловой размер «большой оси» звеньев этой цепи и период обращения вокруг Солнца астероида, открытого нашими футурландскими коллегами. Перерисовав в тетрадь «цепочку», отметьте на ней точки, в которых блеск объекта достигает минимумов и максимумов.

10—11 классы

1. См. задачу 1 для 8—9 классов.

2. 1 января 1998 года правительством галактики Млечный Путь произведена деноминация 1:1000 «мер и весов» внутри галактики. Деноминация распространяется на область Вселенной радиусом (первоначальным) 20 кпк с центром в центре нашей галактики. При этом центр галактики остается в том же месте относительно других галактик, не меняется пространственная ориентация, но все расстояния между объектами внутри галактики уменьшаются в 1000 раз. В той же области деноминируется масса всей материи, т.е. в 1000 раз уменьшаются массы всех макро- и микрообъектов, даже элементарных частиц и электромагнитных волн. Кроме того, в течение всего 1998 года сохраняют свое действие «старые» значения всех мировых констант (скорость света, гравитационная постоянная, постоянная Планка, и т.п.).

Исследуйте последствия деноминации для населения галактики: в частности, к каким физическим последствиям в 1998 году это приведет, будет ли галактика и ее объекты устойчивыми, что обнаружат ученые-астрономы и т.д. И, если уж правительство галактики решилось на деноминацию «мер и весов», то какие еще физические параметры тоже стоило бы деноминировать? Сингулярность и невыполнение некоторых законов сохранения в момент резкой деноминации 1 января не рассматривать.

М.Гаврилов

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

получили

Бакай Д. – Санкт-Петербург, 9 кл.,
Барташевич А. – Нижний Новгород, 10 кл.,
Бирюков А. – Нижний Новгород, 10 кл.,
Воронин П. – Волгоград, 11 кл.,
Евдокимов Н. – Москва, 11 кл.,
Золотухин И. – Москва, 9 кл.,
Иванченко М. – Нижний Новгород, 11 кл.,
Лемешев В. – Тихвин, 10 кл.,
Литвин А. – Саров Нижегородской обл., 9 кл.,
Рахчеев М. – Челябинск, 10 кл.,
Саввин А. – Рязань, 11 кл.,
Самарин П. – Екатеринбург, 9 кл.,
Терентев Д. – Краснодар, 11 кл.,
Шапиро А. – Санкт-Петербург, 10 кл.

Дипломы II степени

получили

Ангер В. – с.Ижевское Рязанской обл., 9 кл.,
Войцик П. – Москва, 8 кл.,
Гедерцев А. – Ухта, 8 кл.,
Головин Д. – Лесной Свердловской обл., 11 кл.,
Горяинов Д. – Липецк, 11 кл.,
Гулевич Д. – Санкт-Петербург, 11 кл.,
Долгов С. – Кингисепп, 11 кл.,
Журавлев В. – Москва, 11 кл.,
Задорин А. – Калининград, 10 кл.,
Захаров Р. – Сыктывкар, 10 кл.,
Канищев К. – Железногорск Красноярского кр., 8 кл.,
Матяж Н. – Казань, 10 кл.,
Павлюченко С. – Ухта, 11 кл.,
Филиппов Е. – Санкт-Петербург, 10 кл.,
Хайрулин Р. – Нижний Новгород, 9 кл.,
Хрешков А. – Рязань, 11 кл.

Дипломы III степени

получили

Бармашова Т. – Нижний Новгород, 7 кл.,
Гоков Е. – Белгород, 10 кл.,
Дегтярёв В. – Оренбург, 9 кл.,
Дёмин А. – Ставрополь, 11 кл.,
Иванов А. – Челябинск, 8 кл.,
Ильин Д. – Казань, 11 кл.,
Карев Ю. – Ухта, 10 кл.,
Кротов Д. – Екатеринбург, 9 кл.,
Курилова Т. – Москва, 9 кл.,
Макеев М. – Славянск-на-Кубани, 8 кл.,
Мальнев А. – Сочи, 10 кл.,
Миронов Д. – Тихвин, 9 кл.,
Петров А. – Приморско-Ахтарск, 9 кл.,
Полиэктов В. – Архангельск, 11 кл.,
Постнов А. – Оренбург, 10 кл.,
Устюжанин А. – Ижевск, 9 кл.,
Фомин Д. – Ижевск, 10 кл.,
Чураев А. – Самара, 11 кл.

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

Первый (районный) тур

1. Можно ли так расставить по кругу все целые числа от -7 до 7, чтобы у каждого числа произведение двух его соседей было неотрицательным?

(7, Ю.Базлов) [1]

2. а) Докажите, что в любом шестидесятизначном числе, среди цифр которого нет нулей, можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы полученное число делилось на 1001.

(7)

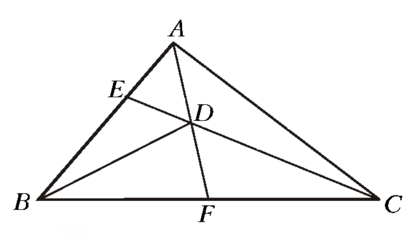
б) Докажите, что в любом тридцатипятизначном числе, среди цифр которого нет нулей и пятерок, можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы полученное число делилось на 41.

(11, жюри)

3. AF – медиана треугольника ABC, D – середина отрезка AF, E – точка пересечения прямой CD со стороной AB (см. рисунок). Докажите, что если $BD = BF$, то $AE = DE$.

(8, С. Берлов)

4. Найдите наименьшее положительное число x, удовлетворяющее неравенству $\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} \geq 3$. (Как обычно, $\lfloor x \rfloor$



и $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ – целая и дробная части числа x.)

(9, А.Храбров)

5. Параллельная стороне BC треугольника ABC прямая пересекает прямые AB и AC в точках K и L. Перпендикуляры, восставленные в точках K и L к прямым AB и AC, пересекаются в

[1] *В скобках после условий указаны класс, которому предлагалась задача, и автор.*

точке M. Докажите, что точки A, M и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

(9, А.Храбров)

6. Уравнение $f(x) = 10$, где f – многочлен с вещественными коэффициентами, имеет ровно 10 вещественных корней, а уравнение $f(x) = 15$ имеет ровно 15 вещественных корней. Докажите, что хотя бы один из корней этих уравнений удовлетворяет уравнению $f'(x) = 0$.

(11, К.Кохась)

Второй (городской) тур

7. Пятизначное число назовем неразложимым, если оно не представляется в виде произведения двух трехзначных чисел. Какое наибольшее число неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

(6, С.Берлов)

8. Через клетчатый квадрат 100×100 проведено по линиям сетки несколько прямых. Образовавшиеся прямоугольные части раскрашены в шахматном порядке в синий и красный цвета. Докажите, что количество синих клеточек четно.

(7, С. Иванов)

9. Несколько служащих получили одинаковую зарплату. После этого время от времени кто-нибудь брал часть своих денег и раздавал их поровну остальным. После нескольких таких операций у одного из служащих оказалось 24 копейки, а еще у одного – 17 копеек. Сколько было служащих?

(7, Р.Исмаилов)

10. По кругу как-то расставили числа от 1 до 30. Стоящие на соседних местах числа можно менять местами. После нескольких таких операций каждое число перешло на диаметрально противоположное место. Докажите, что в некоторый момент меняли местами числа, сумма которых равна 31.

(8, С. Берлов)

11. Дана последовательность натуральных чисел a_n, в которой при всех n выполняется соотношение

$$a_{n+2} = \text{НОД}\left(a_n, a_{n+1}\right) + 1.$$

Может ли эта последовательность содержать более 1998 различных чисел?

(8, С.Берлов)

12. В лагерь приехало несколько школьников. У каждого из них не больше 30 знакомых среди приехавших. Докажите, что школьников можно расселить в 60 комнат так, чтобы никакие двое знакомых не оказались в одной комнате и при этом не было бы школьника, у которого больше одного знакомого и все они живут в одной комнате.

(8, Д.Карпов)

13. В остроугольном треугольнике ABC точка M – середина стороны BC. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 – высоты. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке X, а прямые MC_1 и AC – в точке Y. Докажите, что $XY \parallel BC$.

(9, Д. Ростовский)

14. Числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$\max(a,b) + \max(c,1997) = \min(a,c) + \min(b,1998).$$

Докажите, что $b \geq c$.

(10, А. Храбров)

15. O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая BO вторично пересекает описанную окружность в точке D, а продолжение высоты, опущенной из вершины A, пересекает окружность в точке E. Докажите, что площадь четырехугольника $BECD$ равна площади треугольника ABC.

(10, М.Пратусевич)

16. Город расположен на нескольких островах, соединенных между собой мостами. При поездках по городу жители выражают длину своего пути числом мостов, которые им приходится переезжать. После того как один из мостов закрыли на ремонт, каждый горожанин заявил: «У меня есть друг, кратчайший путь к которому содержит теперь ровно на один мост больше, чем раньше» . Докажите, что хотя бы один из островов – необитаемый.

(10, Ф.Назаров)

17. Две плоскости делят куб на четыре части равного объема. Докажите, что и поверхность куба они делят на четыре части одинаковой площади.

(11, М.Гусаров)

Отборочный тур на Всероссийскую олимпиаду

18. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, описанная вокруг треугольника ABO, пересекает сторону AD в точке E. Окружность, описанная вокруг треугольника DOE, пересекает отрезок BE в точке F. Докажите, что $\angle BCA = \angle FCD$.

(9, С. Берлов)

19. На листе клетчатой бумаги нарисовали многоугольник так, что внутри него оказалось более 90 узлов, а ни на сторонах, ни в вершинах нет ни одного узла. Докажите, что стороны многоугольника пересекают линии сетки по крайней мере в 40 точках.

(9, С.Иванов)

20. Докажите, что проекции точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника на две его противоположные стороны симметричны относительно прямой, соединяющей середины двух других сторон.

(9, С.Берлов)

21. На каждом из 10 листов бумаги написано несколько степеней двойки. Суммы чисел на всех листах одинаковы. Докажите, что какая-то из степеней двойки встречается на этих листах не менее 6 раз.

(10, С.Иванов)

22. В стране 1998 городов. Любые два города соединены авиалинией. Цены билетов на всех авиалиниях различны. Могут ли все круговые маршруты (проходящие через каждый город по одному разу и возвращающиеся в исходный пункт) иметь одинаковую стоимость?

(10, К.Кохась)

23. Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в ее середине D, а сторону BC – в точке E. Окружность, проходящая через точку E и касающаяся в точке C прямой AC, пересекает прямую DE в точке F. K – точка пересечения прямых AC и DE. Докажите, что прямые CF, AE и BK пересекаются в одной точке.

(11, С.Берлов)

24. Найдите все такие многочлены $P(x,y)$ от двух переменных, что $P(x + y, y - x) = P(x,y)$ при любых x и y.

(11, А.Голованов)

25. В окружность с центром O и радиусом 1 вписан $2n$-угольник $A_1A_2\ldots A_{2n}$. Докажите, что

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}\right| \leq$$

$$\leq 2\sin\left(\left(\angle A_1OA_2 + \ldots + \angle A_{2n-1}OA_{2n}\right)/2\right).$$

(11, Ю.Базлов)

26. Пусть $\tau(n)$ обозначает количество натуральных делителей числа n. Докажите, что последовательность $\tau\left(n^2+1\right)$ ни с какого места не становится строго возрастающей.

(11, А. Голованов)

Публикацию подготовили В.Сендеров, А.Спивак

Межобластная заочная математическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством общего и профессионального образования РФ и при участии журнала «Квант» проводит Межобластную заочную математическую олимпиаду для школьников 6—10 классов. Срок присылки решений – до 30 января 1999 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу – на отдельном листочке) и отослать их по почте в обычном конверте в Оргкомитет олимпиады по адресу: 115551 Москва, Ореховый б-р, д.11, корп. 3, ВШМФ «АВАНГАРД», Оргкомитет олимпиады.

Для переписки и сообщения Вам результатов проверки в письмо обязательно вложите:

– пустой конверт с маркой с заполненным домашним адресом;

– дополнительную почтовую марку (марки) достоинством в 1 руб.;

– краткую анкету: возраст, класс и номер школы, фамилия учителя математики.

Не забудьте сделать пометку, что информацию об олимпиаде Вы узнали из журнала «Квант».

Заметим, что для участия в олимпиаде необязательно решить все задачи – достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получат призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «Квант». Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и дипломы получили все приславшие хотя бы одно правильное решение. Списки победителей будут опубликованы в журнале «Квант».

Победители, приславшие наиболее интересные решения, будут приглашены к участию в традиционной очередной Всероссийской конференции одаренных школьников, которая состоится в Москве, и, возможно, войдут в команду для участия в международных встречах.

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки, получат приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 1999/2000 учебном году на льготных условиях.

ВНИМАНИЮ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ 6—10 КЛАССОВ! ПРИГЛАСИТЕ К УЧАСТИЮ В ОЛИМПИАДЕ СВОИХ УЧЕНИКОВ!

Задачи олимпиады

6 класс

1. Восстановите пропущенные цифры:

$$\begin{array}{r} \times\,159 \\ *** \\ \hline *** \\ *** \\ 3** \\ \hline ***29 \end{array}$$

2. Определите пропущенные числа и найдите сумму:

$$2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + 342.$$

3. Замостите плоскость одинаковыми прямоугольными треугольниками.

4. Последовательностью цифр

14012006140120101201

зашифровано слово следующим образом: каждой букве поставлено в соответствие двузначное число. Расшифруйте.

5. Автомобильный номер в стране Авангардии состоит из двух букв русского алфавита и пяти четных цифр. Сколько автомобилей можно зарегистрировать в Авангардии?

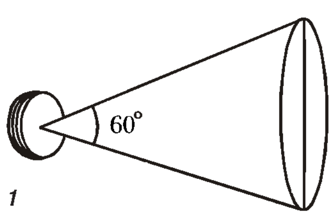


Рис. 1

6. Куб распилили на две части. Какие многоугольники могут быть на срезе?

7. Луч прожектора представляет собой конус с углом раствора 60° (рис.1). Можно ли с помощью восьми таких прожекторов осветить все пространство?

7 класс

1. Восстановите пропущенные цифры:

$$\begin{array}{r} \times\,941 \\ *** \\ \hline **6* \\ **** \\ \hline 5**3** \end{array}$$

2. Выразите s из соотношения

$$3s + p = \frac{9s^2 - p^2}{r + 3s}.$$

3. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}.$$

4. Докажите, что уравнение

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1999,$$

где $abcd$ – четырехзначное число, записанное цифрами a, b, c, d, не имеет решений.

5. На планете Авангард суша занимает 4/7 поверхности планеты, а остальное – океан. Докажите, что авангардцы могут прорыть прямой тоннель через центр планеты, выходящий в обе стороны на сушу.

6. Мышь грызет куб сыра размером 3×3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышь съест какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли она съесть весь куб, кроме центрального кубика?

7. См. задачу 7 для 6 класса.

8 класс

1. Что больше: 4^{500} или 5^{400}?

2. Замостите плоскость одинаковыми прямоугольными треугольниками.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 1999x + y + z = 2000, \\ x + 1999y + z = 2000, \\ 2000x + 2000y + 2z = 4000. \end{cases}$$

4. Существует ли 1999 идущих подряд составных чисел?

5. Решите в целых числах уравнение

$$x^3 - x = 3y^2 + 1.$$

6. См. задачу 7 для 6 класса.

7. Куб распилили на две части. Какие многоугольники могут быть на срезе? Какие из них могут быть правильными?

9 класс

1. Докажите тождество

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt[3]{\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + y^2x = 180, \\ x^3 + y^3 = 189. \end{cases}$$

3. Решите в целых числа уравнение

$$\operatorname{tg}\pi x + \operatorname{tg}\pi y = 2\sin\pi(x + y),$$

где x и y выражены в радианах.

4. Какова может быть наименьшая степень многочлена, график которого показан на рисунке 2?

5. Найдите наибольшее натуральное n такое, что произведение всех натуральных чисел от 1 до 1999 делится на 12^n.

6. См. задачу 7 для 6 класса.

7. Изобразите на координатной плоскости Oab множество точек (a, b) таких, для которых уравнение

$$(ab+1)x^2 + (a+b)x + 1 = 0$$

относительно переменной x имеет неотрицательные корни.

10 класс

1. Решите неравенство

$$|x| + |x+1| \le 1.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + y^2 + x = 5y, \\ x^2 + xy = 6y. \end{cases}$$

3. Решите в целых числах уравнение

$$\left(\overline{xy}\right)^2 - \left(\overline{yx}\right)^2 = 1999,$$

где $\overline{xy}$ – двузначное число, записанное цифрами x и y.

4. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\sin^2 x + \sin^2 y \le 0$.

Рис. 2

Рис. 3

5. Каковы могут быть наименьшие степени многочленов, графики которых показаны на рисунках 2 и 3?

6. См. задачу 7 для 6 класса.

7. Стороны равностороннего единичного треугольника разделены на три равные части. На каждой из средних частей, как на сторонах, построены равносторонние треугольники с вершинами вне первоначального. С каждой из сторон получившегося многоугольника проведена такая же операция, и так далее до бесконечности. Найдите площадь получившейся фигуры.

VIII САХАРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

21–22 мая 1998 года в петербургском лицее «Физико-техническая школа» (ФТШ) при Физико-техническом институте им.А.Ф.Иоффе РАН состоялась научная конференция школьников «Сахаровские чтения».

Спектр научных направлений, представленных на конференции, весьма широк: физика и история, математика и литературоведение, биология и программирование. Рабочая программа конференции была составлена на основании поданных заявок после их рецензирования специалистами соответствующих научных областей. Наибольшее число докладов было представлено на секциях физики (48) и биологии (45). Здесь наряду с устными докладами выполнялись стендовые доклады. Стендовые сессии на Сахаровских чтениях проводятся уже в четвертый раз. Опыт показывает их высокую эффективность.

В чтениях приняли участие более 100 школьников из 30 петербургских школ и около 70 учащихся других городов России, Белоруссии, Украины, Югославии и США.

К сожалению, в связи с финансовыми трудностями, многие школьники, чьи доклады были приняты на чтения, не смогли приехать в Санкт-Петербург.

Жюри конференции состояло из ученых высочайшей квалификации, представляющих ведущие научные учреждения Санкт-Петербурга. В задачу жюри входило не только отобрать работы, но и оценить сильные и слабые стороны каждой работы, донести эти оценки до каждого автора.

Жюри отметило в целом высокий уровень научных сообщений. Каждый докладчик получил диплом участника и памятный сувенир. Некоторые авторы были отмечены особо. Среди них –

по физике: *Николайчик Павел* (Калининград, лицей 23, 9 кл.), *Сергиенко Мария* (Луганск, с.ш. 57, 9 кл.), *Ляхов Андрей* (Черновцы, Украина, лицей 1, 10 кл.), *Щербов Дмитрий* (Калининград, Морской лицей, 10 кл.);

по математике: *Ходаковский Александр* (Черновцы, Украина, лицей 1, 11 кл.), *Мищенко Сергей* (Санкт-Петербург, Аничков лицей), *Парилов Дмитрий* (Санкт-Петербург, Аничков лицей), *Вольфсон Максим* (Санкт-Петербург, Аничков лицей);

по программированию: *Сабашный Вадим*, *Соколов Андрей* и *Чурилин Кирилл* (Санкт-Петербург, с.ш. 261, 10 кл.), *Агапов Виталий* (Новгород, гимназия «Эврика», 8 кл.), коллектив авторов — 12 человек — из школы 30 Санкт-Петербурга.

В заключение приятно отметить, что Сахаровские чтения стали неформальным объединением педагогов различных городов. Теперь не только учителя из ФТШ, но и их коллеги из других городов вносят свой посильный вклад в организацию конференции. Хочется особо отметить ветеранов нашего движения – Г.А.Соколову из Москвы, благодаря помощи которой был изготовлен фирменный значок конференции (художник Генкина С.В.), и Б.В.Чубаренко из Калининграда — его стараниями количество школьников этого города, участвующих в конференции, в последние годы сравнимо с количеством участников из Санкт-Петербурга.

Координаты оргкомитета Сахаровских чтений:

телефон: 247-5649, 247-1515;
факс: 247-5649;
e-mail: Khimin@school.ioffe.rssi.ru.

Н.Химин

Вас ждет ОЛ ВЗМШ

ОЛ ВЗМШ – это открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ)» Российской академии образования. Заочная школа работает при Московском университете им.М.В.Ломоносова и является государственным учреждением дополнительного образования, причем не только для школьников, а и для всех желающих, кто хочет пополнить свои знания в области одной или нескольких из следующих наук: математика, физика, химия, биология, филология, экономика, история, правоведение.

На северо-западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском университете, которая имеет отделения математики, биологии и химии (подробности — ниже).

ВЗМШ существует с 1964 года. За это время удостоверения об окончании курса обучения в ВЗМШ получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков — групп «Коллективный ученик».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ. Это значит, что, начиная с сентября 1999 года, поступившие будут систематически (примерно раз в месяц) получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, разнообразные задачи для самостоятельного решения и контрольные задания.

Контрольные работы будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Некоторые из наших преподавателей сами закончили ВЗМШ и особенно хорошо понимают, как важно, помимо конкретных недочетов, указать пути исправления старых пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметное повышение кругозора и уровня культуры.

Ученики ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьных учебников, познакомиться с массой интересных задач и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет открытием, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, а и в биологии, и в лингвистике, и в экономике. Эти задачи помогут прояснить многие казавшиеся скучными и неинтересными разделы науки.

Особенностью программ и учебных пособий, по которым учатся в ВЗМШ, является то, что их авторы – коллективы, в которых действующие на переднем крае науки ученые сотрудничают с опытными педагогами (часто эти два качества совмещаются в одном и том же человеке).

В настоящее время ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет работы по переводу части своих заданий на язык современных телекоммуникаций и разработке новых технологий в образовании.

В заочной школе придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой; грамотно, четко и ясно излагать свои мысли на бумаге, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, школе удастся помочь выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все окончившие ОЛ ВЗМШ получают соответствующие удостоверения. Формальных преимуществ такое удостоверение не дает, но приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений — люди, в течение продолжительного времени стремившиеся получить дополнительные знания, преодолевшие для этого немало трудностей и, значит, хорошие кандидаты в студенты.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Успешно — это не значит обязательно решить все задачи. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, умение поступающего рассуждать, попытки (пусть поначалу не всегда удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах — там нет крупных научных центров и учебных заведений, и поэтому дополнительное образование можно получить лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в ученической тетради в клетку (на отделения экономики и права — на открытке, см. ниже) и выслать *простой бандеролью, не сворачивая в трубку*. Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу должны прислать в отдельной тетради.

На обложке тетради укажите: фамилию, имя, отчество, год рождения, род занятий (класс, школа с указанием ее адреса и учителя по данному предмету — для школьников; профессия, должность и т.п. – в другом случае), полный почтовый адрес (с индексом), откуда узнали о ВЗМШ (из «Кванта», от друзей, из афиши, от учителя и т.п.).

Вступительные работы обратно не высылаются.

Срок отправки работ — *не позднее 15 апреля 1999 года*.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых) туров Всероссийских олимпиад и заочного и второго туров Соросовских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники последних туров этих олимпиад.

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. Плата невелика, на каждом отделении своя. Если учащийся (его семья) не в состоянии внести эту плату, ВЗМШ может обратиться в любое указанное заявителем учреждение (школа, орган народного образования, другой спонсор) с ходатайством об оплате этой организацией расходов по обучению.

Не успевшие или не сумевшие поступить на индивидуальное обучение могут заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ» (кроме отделения экономики). Каждая такая группа — кружок, работающий под руководством школьного учителя или другого преподавателя, в основном, по той же программе и пособиям, что и на индивидуальном обучении. Прием в эти группы проводится до *15 октября 1999 года*. Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с описанием его профессии и должности, со списком учащихся и четким указанием, в каком классе они будут учиться с сентября 1999 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, а также главой учреждения, при котором будет работать группа, и заверено печатью. Работа групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ОЛ ВЗМШ как факультативные занятия. На разных отделениях ВЗМШ свои правила приема групп (см. ниже).

Проживающие на северо-западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), желающие поступить на отделения математики и химии, высылают вступительные работы по адресу:

198097 Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д. 32, С-З ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы в адрес ВЗМШ или (по математике) в адрес соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ:

117234 Москва В-234, МГУ, ВЗМШ, на прием, (с указанием отделения).

Телефон: (095)939-39-30.

Филиалы математического отделения ОЛ ВЗМШ при университетах работают в городах: Воронеж, Донецк, Екатеринбург, Иваново, Ижевск, Магадан, Ростов-на-Дону, Самара, Ульяновск, Челябинск, Ярославль; при педагогических институтах — в городах: Киров, Петрозаводск, Тернополь; имеются также филиалы при Брянском Дворце творчества молодежи, Калужском Центре научно-технического творчества молодежи и Могилевском областном Дворце пионеров.

Отделение математики

Из этого отделения выросла вся заочная школа (вначале она называлась математической). За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать идеи, лежащие в основе курса элементарной математики, и познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных и вступительных экзаменов в вузы.

Коллективом отделения созданы комплексы учебно-методических пособий, приспособленных для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом.

В целом можно сказать, что окончившие отделение математики получат, в зависимости от своего желания, или подготовку, необходимую для выбора математики как будущей профессии, или математическую базу для успешного освоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: сейчас математика служит основным инструментом исследований во многих отраслях знания.

Обучение длится 4 года. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 1999 года надо иметь следующую базу: на 1 курс – 7 классов средней школы, на 2 курс – 8 классов, на 3 курс – 9 классов, на 4 курс – 10 классов. При этом поступившим на 2 и 3 курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 4 курс обучение осуществляется либо по специальной интенсивной программе с выполнением части заданий за предыдущие курсы, либо только по подготовке в вуз (на обложке тетради с вступительной работой должно быть указано, какой из этих вариантов вы выбрали).

Для поступления необходимо решить задачи помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно решать и задачи для более старших классов).

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

1 (7–10). Винни-Пух, Сова, Кролик и Пятачок съели вместе 100 бананов, причем каждому сколько-то досталось. Винни-Пух съел больше каждого из остальных, а Сова и Кролик вместе осилили 65 бананов. Сколько бананов съел Пятачок?

2 (7–10). Длина окружности переднего колеса повозки равна a метров, а заднего колеса – b метров. Сколько метров должна проехать повозка, чтобы переднее колесо сделало на один оборот больше заднего?

3 (7–10). На какие цифры надо заменить звездочки в записи девятизначного числа $32{*}35717{*}$, чтобы оно разделилось без остатка на 72?

4 (8–10). Пусть точка D – середина стороны AC треугольника ABC, точка E на его стороне BC такова, что углы BEA и CED равны. Найдите отношение $AE : DE$.

5 (8–10). Разложите следующие многочлены на множители первой степени:

а) $x^3 - 4x^2 - 2x + 8$;

б) $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16$.

6 (7–10). За каждый удачный выстрел стрелку начисляют 8 очков, а за каждый неудачный – снимают 27 очков. После некоторого числа выстрелов, меньшего 120, стрелок набрал 97 очков. Сколько удачных и сколько неудачных выстрелов он сделал?

7 (8–10). В окружность вписан четырехугольник. Каков угол между отрезками, соединяющими середины противоположных дуг, стягиваемых его сторонами?

8 (8–10). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 1 = 0, \\ 2y^2 + 2y - x = 0. \end{cases}$$

9 (7–10). На доске написано число 98. Каждую минуту число стирают и вместо него записывают произведение его цифр, увеличенное на 15. Какое число окажется на доске через час?

10 (8–10). Пусть O_1, O_2, O_3 – центры трех равных окружностей, пересекающихся в одной точке, A_1, A_2, A_3 – другие точки пересечения (попарного) этих окружностей. Верно ли, что треугольники $O_1O_2O_3$ и $A_1A_2A_3$ равны?

11 (7–10). Обозначим произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до n через $n!$ (читается «n факториал»; например: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$). Какое из чисел больше: $200!$ или 100^{200}?

12 (7–10). Найдите три простых числа, произведение которых в 5 раз больше их суммы.

13 (9–10). Найдите внутри данного выпуклого четырехугольника $ABCD$ множество таких точек M, что площади четырехугольников $MBCD$ и $MBAD$ равны.

14 (8–10). При каких значениях x из уравнения $2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ можно найти значение переменной y?

15 (7–10). Среди четырех монет одна – фальшивая. Она отличается от настоящих массой, однако неизвестно, легче она или тяжелее настоящей. Масса настоящей монеты равна 5 г. Имеется одна гиря массой 5 г. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах обнаружить фальшивую монету, выяснив при этом, легче она или тяжелее настоящей?

Отделение биологии

Основное внимание при обучении уделяется наименее изучаемым в школе областям биологии: молекулярной биологии, биохимии, иммунологии, генетике, биофизике, физиологии и т.д. На отделении созданы известные в стране оригинальные учебники, учебные пособия и задачники (часть из них издана массовым тиражом издательствами «Мирос» и «Фазис»).

Проводится набор на два потока – трехгодичное обучение на базе 8 классов средней школы и двухгодичное на базе 9 классов. В конкурсе могут также участвовать кружки (группы «Коллективный ученик»), которым надо выслать коллективно выполненную работу и заверенный печатью список членов кружка с указанием фамилии, имени и отчества руководителя и организации, при которой работает кружок.

Во вступительной работе можно использовать как факты, найденные в литературе (тогда необходимо привести ссылку на источник), так и ваши собственные идеи.

Вместе с работой пришлите стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) – он понадобится для отправки вам решения Приемной комиссии.

Для поступающих на трехгодичное обучение (на базе 8 классов)

1. Какие приспособления помогают разным животным выжить в холодное время года?

2. Получив долгосрочный прогноз, описывающий погоду в следующем году, вы решили на его основании сделать выводы об ожидаемых урожаях сельскохозяйственных культур (для каких видов растений урожай будет выше среднего, а для каких – ниже). Перечислите, какими соображениями вы будете при этом руководствоваться. Ответ объясните.

3. Во многих психологических тестах испытуемому предлагают из нескольких перечисленных объектов выбрать один лишний. Однако порой перечни в этих тестах оказываются составленными так, что в задаче возможны несколько верных ответов – в зависимости от того, по какому признаку выбирается лишний объект. Предложите перечень из четырех видов животных, чтобы в нем каждое животное можно было считать лишним, подобрав подходящий признак. Постарайтесь придумать несколько таких перечней, чтобы в них «работали» разные признаки.

4. Отставной поручик Чебурков купил у соседа породистую борзую. Вскоре после этого Чебурков обнаружил, что смертность домашних животных (кур, коров и кроликов) в его поместье резко возросла. Чебурков обвинил соседа в том, что его борзая оказалась источником инфекции. Сосед не соглашается с этим обвинением и, более того, не считает, что гибель животных в поместье Чебуркова – следствие заразного заболевания. Кто из соседей прав? Опишите, как бы вы стали решать эту проблему. Какие сведения, наблюдения и опыты понадобятся вам для того, чтобы принять решение?

5. В XVIII веке в Европе для экономии соломы стали широко применять сбор листового опада в лесу и использовать его в качестве подстилки для скота. Как вы думаете, к каким последствиям это могло привести?

Для поступающих на двухгодичное обучение (на базе 9 классов)

1. Как известно, летать могут и млекопитающие, и птицы, и насекомые (хотя и не все). Какие приспособления к полету имеются у этих организмов? Для каждого приспособления укажите, в каких из трех перечисленных групп животных оно встречается.

2. Конфликт Чебуркова с соседом (см. задачу 4 в варианте на базе 8 классов) привел к появлению еще одной проблемы. Раньше Чебурков регулярно покупал у соседа некое удобрение – смесь минеральных солей, которые сосед добывал на своем земельном участке. Весеннее внесение этого удобрения в почву повышало урожай многих сельскохозяйственных культур, выращиваемых Чебурковым. Теперь же оскорбленный сосед отказался иметь дело с поручиком. Чебуркову остается лишь одно: используя остатки удобрения, выяснить, чем вызван его благотворный эффект, и на основании этого подобрать соответствующую замену. Опишите, как бы на месте поручика вы решили данную проблему.

3. Для каждого из перечисленных ниже мероприятий укажите, предотвращению каких болезней и групп болезней людей оно будет способствовать, а против каких заболеваний окажется бессильным. А какие из этих мероприятий позволят снизить тяжесть заболевания? Ответы обоснуйте.

А. Применение антибиотиков.

Б. Употребление поливитаминов.

В. Обливание холодной водой.

Г. Переливание плазмы крови людей, выздоровевших после этой болезни.

Д. Постоянное ношение на лице марлевой повязки.

4. Наиболее известная конструкция «детектора лжи» основана на измерении сопротивления кожи. Скачки этого сопротивления рассматриваются как следствие повышенного выделения пота при волнении и считаются доказательством неискренности испытуемого. Предложите способы, с помощью которых можно ввести в заблуждение этот «детектор лжи». (Мы не будем рассматривать приемы, которые обманут лишь сам «детектор лжи», но не присутствующего на тестировании наблюдателя: сломать прибор, устроить перебои в энергоснабжении и пр.) Придумайте и обоснуйте свой «детектор лжи». А как можно перехитрить эти приборы?

5. Для транспортировки древесины раньше довольно широко использовали сплав – стволы срубленных деревьев просто плыли по течению реки. Какой вред может это причинить природным сообществам?

Отделение физики

Поступающие на двухгодичный поток (на базе 9 классов средней школы) решают задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы; поступающие на одногодичный поток (на базе 10 классов) – задачи 4–8; желающие за один год пройти всю двухгодичную программу (на базе 10 классов) решают все задачи и пишут «10+11» на обложке тетради.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

1. Стержень длиной $L = 2$ м вращается с периодом $T = 1{,}6$ с вокруг перпендикулярной оси, проходящей через его центр. Сидящий на конце стержня кузнечик совершает прыжок и приземляется в то же место на стержне спустя время $T/4$. Найдите начальную относительную скорость кузнечика.

2. Палочка лежит на гладкой опоре, упираясь одним концом в шероховатую стенку, как показано на рисунке 1. Длина палочки в полтора раза больше расстояния от опоры до стенки. Каким должен быть коэффициент

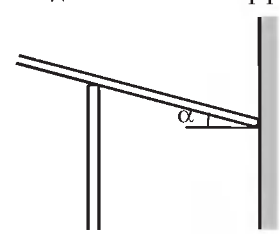


Рис. 1

трения палочки о стенку, чтобы она могла находиться в равновесии под углом α к горизонту?

3. Невесомая пружина жесткостью k расположена вертикально так, что один ее конец закреплен на горизонтальном столе, а к другому прикреплена горизонтальная подставка массой M. Тело массой m падает без начальной скорости с высоты H на подставку и прилипает к ней. Найдите максимальное растяжение пружины при последующем движении.

4. На гладкой горизонтальной поверхности находится подвижный прямоугольный клин массой M, высотой H и углом при основании α. С вершины клина начинает соскальзывать небольшое тело массой m. Найдите путь, пройденный телом относительно земли за время его движения по клину. Трением пренебречь.

5. Стеклянная пластинка толщиной $h = 1$ см придвинута вплотную к плоскому зеркалу. На каком расстоянии от пластинки нужно расположить предмет, чтобы его изображение оказалось на расстоянии h за зеркалом? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

6. Два бруска с массами $m_1 = 400$ г и $m_2 = 600$ г подвешены на нити, переброшенной через неподвижный блок (рис.2). Бруски сделаны из одинаково-

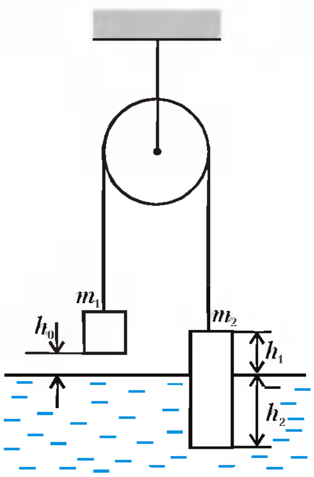


Рис. 2

го материала и имеют одинаковые горизонтальные сечения. Равновесие достигается за счет того, что более тяжелый брусок частично погружен в жидкость. Известны величины $h_0 = 2$ см, $h_1 = 2{,}5$ см, $h_2 = 3{,}5$ см. Уровень жидкости начинает медленно подниматься со скоростью $v = 1$ мм/с. Постройте график зависимости силы натяжения нити от времени. Нить и блок идеальные.

7. В закрытом баллоне находилась смесь кислорода и водорода с массами m_1 и m_2 соответственно. В результате реакции весь кислород вступил в соединение с водородом, при этом температура увеличилась от T_1 до T_2. Во сколько раз изменилось давление газа в сосуде, если конденсации паров воды не произошло?

8. Нагреватель имеет две спирали. При подключении к источнику тока оказалось, что мощность, выделяющаяся в нагревателе, не зависит от способа соединения спиралей, а напряжение на нем при последовательном соединении в пять раз больше, чем при параллельном. Определите внутреннее сопротивление источника, если известно, что сопротивление включенного нагревателя при последовательном соединении спиралей равно $R = 50$ Ом.

Отделение химии

На отделение принимаются имеющие базовое образование в объеме 8, 9 или 10 классов средней школы. Им преподаются следующие одногодичные курсы: «Общая и неорганическая химия», «Органическая химия», «Биоорганическая химия», «Основы медицинских знаний», «Общая экология и экология человека» (подробные условия и порядок обучения высылаются вместе с извещением о приеме).

Задачи вступительной работы – общие для всех поступающих. Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

1. Взлетит ли воздушный шарик массой 10 г, если заполнить газом, выделяющимся при растворении 20 г алюминия в 100 мл 10%-го раствора NaOH?

2. В пяти немаркированных пробирках находятся растворы $CuSO_4$, KOH, $AgNO_3$, HCl, $MgCl_2$. Не пользуясь другими реактивами, промаркируйте пробирки, напишите уравнения всех используемых реакций.

3. Напишите уравнения следующих реакций:

$$NaCl \to Cl_2 \to KClO_3 \to$$
$$\to KClO_4 \to KCl.$$

4. Какова масса молекул бензола C_6H_6 и водорода (в граммах)?

5. Сколько граммов 15%-го раствора брома в CCl_4 потребуется для полного бромирования 3 г фенола?

Отделение филологии

Отделение работает восьмой год. За это время подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, литературе, общей филологии.

Принимаются *все желающие*, имеющие базовую подготовку в объеме 8 классов средней школы. Школьные кружки зачисляются по заявлению руководителя и обучаются на тех же условиях, что и индивидуальные ученики.

Отделение предлагает на выбор несколько учебных циклов, которые могут удовлетворить самым разным требованиям и вкусам: среди них есть и ориентированные на исправление грамотности, и на знакомство с любопытными проблемами теории и практики русского языка, и на изучение приемов лингвистического и литературоведческого анализа, и на приобретение навыков, необходимых для успешной сдачи вступительных экзаменов в вуз.

Для того чтобы специалисты отделения могли предложить вам наиболее удачную форму обучения, им необходимо как можно больше знать о ваших целях и проблемах, поэтому вам предлагается вступительное задание – ответы на вопросы помещенного ниже теста.

Внимание! Условия теста надо полностью переписать в тонкую тетрадь и выполнить задания 1–4 (подчеркнуть нужное, проставить цифры в квадратики и т.п.).

1. Заполните клетки

Моя средняя оценка:
по русскому языку □;
по литературе □.

2. Подчеркните нужное

Моя грамотность:
а) абсолютная;
б) вполне приличная;
в) так себе;
г) низкая.

3. Расставьте цифры от 1 до 6 в соответствии с тем, насколько для вас важны следующие задачи (1 – самое важное, 6 – наименее важное):

□ узнать как можно больше об устройстве русского языка;
□ узнать как можно больше о русской литературе;
□ научиться хорошо и логично выражать свои мысли в сочинении;
□ писать грамотнее;
□ узнать больше об устройстве языков мира;
□ узнать больше о том, что за наука – литературоведение.

4. Подчеркните нужное

Скорее всего, я буду поступать в вуз:
а) на филологическую специальность, где пишут сочинение и сдают русский устно;
б) на гуманитарную специальность, где пишут сочинение;
в) в негуманитарный вуз и писать сочинение;
г) в негуманитарный вуз и писать диктант;
д) мне важно школу закончить!

Отделение экономики

Отделение проводит прием в шестой раз. Обучение – двухгодичное. Первый год обучения – курс «Прикладная экономика» – включает изучение основ экономической теории и практику бизнеса в деловой игре по переписке. Второй год обучения – специализация по выбору на одном из курсов: «Предпринимательство и менеджмент», «Бухгалтерский учет и основы финансов» и др.

Принимаются все желающие, имеющие образование не ниже 7 классов средней школы. Формы обучения «Коллективный ученик» нет.

Для тех, кто весной 1999 года окончит 9 или 10 класс и хочет совместить обучение на экономическом отделении с подготовкой к поступлению в вуз, предлагается программа «Экономика ПЛЮС». Программа включает основной курс по экономике плюс подготовительная программа по математике, русскому языку и литературе, географии и истории (это те предметы, по которым проводятся вступительные экзамены на экономический факультет МГУ и в большинство экономических вузов). Подготовительная программа предлагается в двух вариантах: двухгодичная – для тех, кто осенью 1999 года пойдет в 10 класс, и интенсивная одногодичная – для тех, кто осенью 1999 года будет учиться в 11 классе.

Обучение только по подготовительной программе, отдельно от курсов по экономике, НЕ проводится.

Те, кто осенью 1999 года пойдут в 8 или 9 класс, могут начать обучение на «Прикладной экономике», а к подготовительной программе подключиться вместе с одним из курсов второго года обучения.

Независимо от того, какую форму обучения вы выберете (вместе с подготовительной программой или без нее), вам необходимо выполнить вступительный тест. Он включает вопросы по экономике, математике, истории, литературе, географии и общей культуре. В случае успешного выполнения вступительной работы вам будет выслана подробная информация об условиях обучения на экономическом отделении.

Решение присылайте ТОЛЬКО на открытках с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (все – ПЕЧАТНЫМИ буквами); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите: «Экономика, вступительный тест 1999 г.».

На открытке достаточно написать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Верно ответившие на все вопросы получат из букв своих ответов осмысленную фразу.

Желаем успеха!

1. Слово «экономика» в переводе с греческого означает:
Э) умение выгодно продать товар;
Н) крупное помещичье хозяйство;
П) торговые отношения;
К) махинация;
М) управление хозяйством.

2. Какой город является лишним в списке:
О) Вена;
Ц) Будапешт;
Ы) Нью-Йорк;
К) Мехико;
У) Дублин?

3. Первое упоминание о Москве было в:
С) 988 г.;
Т) 1047 г.;
Р) 1140 г.;
Б) 1147 г.;
О) 1257 г.

4. Сковорода вмещает 4 ломтика хлеба. Для поджаривания одной стороны каждого ломтика необходимо 30 секунд. За какое наименьшее время можно поджарить 22 ломтика:
Н) 7 минут;
Т) 6 минут 30 секунд;
О) 6 минут;
У) 5 минут 30 секунд;
Е) 5 минут?

5. Как в древней Руси называли солнце:
В) светило;
Д) ярило;
О) светоч;
Т) огнище-страшилище;
Ь) светень?

6. Какая повесть не входит в цикл повестей Н.В.Гоголя «Вечера на хуторе близ Диканьки»:
М) «Вечер накануне Ивана Купалы»;
В) «Пропавшая грамота»;
А) «Иван Федорович Шпонька и его тетушка»;
К) «Страшная месть»;
У) «Вий»?

7. Какая из стран НЕ является конституционной монархией:
Н) Нидерланды;
И) Япония;
Щ) Франция;
С) Бельгия;
А) Норвегия?

8. Какой из перечисленных химических элементов назван в честь России:
Я) родий;
Е) рутений;
П) рений;
Ь) радий;
К) родон?

9. Автором строк «Раз в крещенский вечерок девушки гадали: за ворота башмачок, сняв с ноги, бросали...» является:
Е) В.А.Жуковский;
О) Ф.И.Тютчев;
Г) А.С.Пушкин;
А) А.С.Грибоедов;
К) А.А.Фет.

10. Встретились две цыганки, которые продавали веретена, и повели следующий разговор:

– Дай мне два твоих веретена, и моих станет в 2 раза больше, чем твоих, – сказала первая.

– У тебя и без того больше, лучше ты дай мне 2 твоих, и у нас веретен будет поровну, – сказала вторая.

Сколько веретен было у обеих цыганок вместе:
Ш) 10;
Л) 12;
А) 16;
Д) 20;
Н) 24?

11. Самая яркая звезда:
К) Солнце;
Р) Кассиопея;
А) Сириус;
Л) Полярная звезда;
О) Аделаида.

12. Спаржа – это:
Р) название сторожевых башен в древней Индии;
Б) вид ткани;
О) речное судно;
Ш) вид растения;
И) охрана в гареме у аравийских султанов.

13. Самая длинная река в мире:
Е) Амазонка;
И) Нил;
С) Миссисипи;
П) Волга;
У) Енисей.

14. Какой из городов по замыслу архитекторов имеет очертания самолета:
С) Лос-Анджелес;
Й) Бразилиа;
О) Новый Орлеан;
В) Каир;
Т) Сидней?

15. На соревнованиях по стрельбе Алеша 10 раз выстрелил по мишени и выбил 76 очков. Сколько было попаданий в «пятерку» и «семерку», если «девяток» было 4, а других попаданий и промахов не было:
Г) «5» – 5, «7» – 7;
Д) «5» – 3, «7» – 3;
Р) «5» – 1, «7» – 5;
О) «5» – 8, «7» – 0;
Т) «5» – 0, «7» – 8?

16. Первое место по объему производства лука занимает:

К) Россия;

И) Украина;

Е) Канада;

У) Австралия;

О) Китай.

17. Сколько рассказчиков (повествователей) в «Герое нашего времени» М.Ю.Лермонтова:

Н) 1;

И) 2;

Д) 3;

Л) 4;

Т) 5?

18. Дата генерального Бородинского сражения:

К) 24 июля 1812 г.;

И) 26 августа 1812 г.;

А) 25 сентября 1812 г.;

С) 1 сентября 1812 г.;

Я) 22 июля 1813 г.

19. Сотрудники фирмы для обслуживания клиентов пользуются служебными машинами, причем обычно на каждой машине ездит по два сотрудника, и одна машина находится в резерве. Однажды сразу 4 машины вышли из строя, и, хотя сотрудники задействовали резервную машину, в каждую исправную машину пришлось сесть трем сотрудникам. Сколько всего сотрудников и машин в фирме:

А) 12 сотрудников, 7 машин;

Т) 26 сотрудников, 10 машин;

С) 6 сотрудников, 4 машины;

О) 12 сотрудников, 9 машин;

Н) 18 сотрудников, 10 машин?

20. Сабантуй – это:

Ч) свадебный обряд в Монголии;

С) жилище в Средней Азии;

Л) зимняя стоянка татаро-монгольского войска;

Ы) народный праздник у татар и башкир;

Ь) праздник летнего солнцестояния у карелов.

Отделение «Нравственность, право, закон»

Отделение существует третий год. Всем имеющим базовое образование не ниже 8 классов средней школы предлагается одногодичный курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». Курс состоит из разделов:

— человек и природа, обычай, право, мораль, закон и государство, гражданское общество, либерализм (возникновение этих понятий, что они значат для нас сейчас);

— права человека;

— основы современного законодательства России;

— общекультурная тематика, связанная с основным направлением курса;

— игровые задания по теме курса.

Предварительных знаний по праву не требуется, нужны только желание овладеть правовой и общей культурой и настойчивость.

Обучение проводится индивидуально и в небольших группах «Коллективный ученик».

Для поступления необходимо прислать ОТКРЫТКУ со своим полным почтовым адресом, фамилией, именем и отчеством и указание, сколько классов закончено. Все эти сведения заполните ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ. После этого напишите: «Ответы на тест 1 2 3 4 5», а затем под каждым написанным номером впишите букву, соответствующую правильному, по вашему мнению, ответу на задание нижеприведенного теста с этим номером.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

1. Совершение преступления в составе группы лиц:

Н) смягчает наказание;

О) не влияет на наказание;

П) отягчает наказание.

2. Кто провозгласил принцип, согласно которому в своих поступках человек должен относиться к себе и другим только как к цели и никогда – как к средству:

П) И.Сталин;

Р) Иммануил Кант;

С) Аристотель?

3. Что такое «апатрид»:

В) человек, живущий на противоположной стороне Земли;

Б) химическое соединение;

А) человек без гражданства?

4. Чьи это слова – «...Двуногих тварей миллионы для нас орудие одно»:

В) А.С.Пушкина;

Г) Наполеона;

Д) Т.Джефферсона?

5. Откуда пришло к нам слово «демократия»:

М) из Китая;

Н) из Рима;

О) из Древней Греции?

Отделение истории

Отделение проводит свой второй набор. Для чего же нужно изучать историю?

Во-первых, это интересно. Любопытно знать, как жили наши предки, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и на что напарывались...

Во-вторых, это полезно – ведь только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее.

В этом году будет преподаваться курс «История России. От возникновения до наших дней». Для этого подготовлены специальные учебные пособия. Прошедшие этот курс смогут в дальнейшем обучаться и другим специальным курсам.

Принимаются люди любого возраста. Для поступления необходимо выполнить два следующих задания. Все сведения о себе заполняйте ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

Задание 1. Отгадайте, кто это?

С легкой руки Фридриха II его прозвали «русский Гамлет». О нем сплетничали, что он – внебрачный сын. Его отец – внук Петра I по матери и внучатый племянник Карла XII по отцу. Его мать приехала в Россию 15-летней девочкой, пришла к власти в 33 года, свергнув мужа, и правила 34 года, не имея на трон законных прав. Главная черта правления «русского Гамлета» – мелочный деспотизм. Боясь заговора, этот император построил себе замок и в нем был убит. Его сын мечтал о конституции для России, а дал ее Польше.

Задание 2. Нарисуйте не более чем в семи предложениях исторический портрет главнокомандующего русской армией в Полтавской битве.

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Министерства общего и профессионального образования РФ при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 1999/2000 учебный год.

ЗФТШ при МФТИ как федеральное государственное учреждение дополнительного образования работает с 1966 года. За это время школу окончили свыше 56 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – выпускник ЗФТШ. Финансирует ЗФТШ Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации. Обучение в ЗФТШ бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт, который готовит специалистов по существующей только в МФТИ единой специальности «Прикладные математика и физика». В их подготовке принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподаватели МФТИ – крупнейшие ученые, среди которых около ста членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель ЗФТШ при МФТИ – помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы ЗФТШ на 1999/2000 учебный год проводится на следующие отделения:

– *Заочное (индивидуальное).*

Телефон: (095) 408-51-45.

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года (8–11 кл.), но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике и математике (по 4 задания по каждому предмету для 8 класса, 6–7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 кл.), а затем рекомендуемые ЗФТШ авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работа учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (часто – выпускники ЗФТШ).

– *Очно-заочное (в физико-технических факультативах и кружках).*

Телефон: (095) 485-42-27.

Заочные физико-технические кружки и факультативы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями – физики и математики. Руководители кружка или факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа (не менее 8 человек) принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список обучающихся (с указанием класса и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт с маркой достоинством 1 руб. для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать *до 25 мая 1999 года* по адресу: *141700 г.Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ (с указанием «Кружок» или «Факультатив»).* Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются. Работа руководителей кружков и факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Руководители кружков и факультативов будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы ЗФТШ (программы по физике и математике, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся) и информационно-рекламные материалы (газеты МФТИ «За науку», проспекты МФТИ и его факультетов с правилами приема и т.п.). Работы учащихся проверяют и оценивают руководители кружков и факультативов, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию.

– *Очное (в вечерних консультационных пунктах).*

Телефон: (095) 408-51-45.

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты, набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике, которое проводится в мае и сентябре.

Программы ЗФТШ при МФТИ являются дополнительными образовательными программами и едины для всех видов обучения. Кроме занятий по этим программам, ученикам ЗФТШ предлагается участвовать в пробных вступительных экзаменах в МФТИ, которые проводятся в марте, в очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов, конкурсах и научно-технических конференциях.

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ по выбранной форме обучения, переводятся в следующий класс, а выпускники (11 кл.) получают Свидетельство об окончании с итоговыми оценками по физике и математике, которое учитывается на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Вне конкурса (без выполнения вступительного задания) в ЗФТШ принимаются участники областных, краевых, республиканских, зональных и всероссийских олимпиад по физике и математике (участие нужно подтвердить справкой из школы).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраняйте тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу.

Внимание! Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первого задания *обязательно* вложите в тетрадь два конверта: обычный почтовый с маркой достоинством в 1 руб. и бандерольный размером 160×230 мм с марками на сумму 1 руб. 50 коп. На конвертах напишите свой домашний адрес.

Срок отправления решения – *не позднее 1 марта 1999 года*. Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1999 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу: *141700 г.Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ.*

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует высылать работы по адресу: 252680 г.Киев, пр. Вернадского, д.36, Институт ме-

Л. №								
№п/п								Σ
Ф.								
М.								

1. Область	*Костромская*
2. Фамилия, имя, отчество	*Костров Дмитрий Владимирович*
3. Класс, в котором учитесь	*девятый*
4. Номер школы	*№32*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета и т.п.)	*физико-технический лицей*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса и телефона)	*156011 г.Кострома, ул.Студенческая, д.20, кор.2, кв.205, тел. 21-32-43*
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*АОЗТ Завод ЦСП, инженер*
мать	*поликлиника №1, медсестра*
8. Адрес школы и телефон	*156011 г.Кострома, ул. Беговая, д. 4а, тел. 31-42-53*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Королев Сергей Алексеевич*
по математике	*Потапова Марина Николаевна*
10. Каким образом к Вам попала эта афиша?	

таллофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: (044) 444-95-24.

Для учащихся из стран ближнего зарубежья возможно платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях ЗФТШ. Условия обучения для прошедших конкурсный прием будут сообщены дополнительно.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1–5 предназначены для учащихся седьмых классов, 6–11 – для восьмых классов, 9–14 – для девятых классов, 13–18 – для десятых классов. В задании по математике задачи 1–5 предназначены для учащихся седьмых классов, 2–8 – для восьмых классов, 5–11 – для девятых классов, 8–14 – для десятых классов. Номера классов указаны на текущий 1998/99 учебный год.

Вступительное задание по физике

1. Тонкая нерастяжимая нить намотана на катушку, состоящую из цилиндрического стержня радиусом r и двух одинаковых сплошных дисков радиусом R. Нить переброшена через блок, и к концу ее привязан груз (рис.1). Под действием груза катушка катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Какой путь L пройдет центр катушки O, когда груз опустится на высоту l?

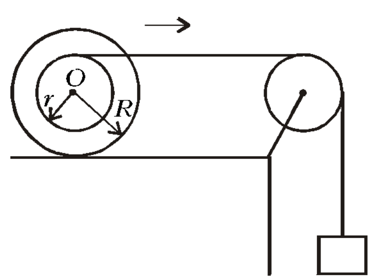


Рис. 1

2. Группа индейцев племени Хитачи, двигаясь цепочкой по тропе со скоростью 3,6 км/ч, растянулась на 200 м. Вдруг замыкающий услышал звуки шагов бледнолицых. С этой вестью он посылает самого быстроногого индейца к вождю, который находится впереди группы. Индеец бежит со скоростью 7 м/с и, мгновенно выполнив приказ, возвращается к замыкающему группы с той же скоростью. Через какое время после получения приказа индеец вернется обратно?

3. Три одинаковых сообщающихся сосуда частично заполнены водой (рис.2). Когда в левый сосуд налили слой керосина высотой H_1 = 20 см, а в правый — высотой H_2 = 25 см, то уровень воды в среднем сосуде повысился. На сколько повысился уровень воды в среднем сосуде? Плотность керосина $\rho_к$ = 800 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3.

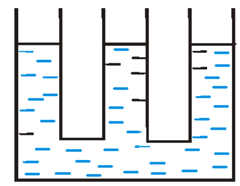


Рис. 2

4. Какую массу имеет деревянный брусок кубической формы со стороной l, если при переносе его из масла в воду глубина погружения бруска уменьшилась на h?

5. Цилиндрический сосуд с вертикальными стенками заполнен водой на 3/4 своего полного объема V = 1 л. Какова максимальная масса деревянного бруска, который можно опустить в сосуд так, чтобы вода еще не выливалась из него? Плотность воды $\rho_в$ = = 1000 кг/м^3.

6. Полый медный шар плавает в сосуде с водой во взвешенном состоянии (шар полностью погружен в воду, но не касается стенок и дна сосуда). Чему равна масса шара, если объем полости равен V_1 = 17,75 см^3? Плотность меди $\rho_м$ = 8900 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3. Массой воздуха в полости пренебречь.

7. С какой силой человек должен тянуть веревку, чтобы удержать платформу, на которой он стоит (рис.3), если его масса 60 кг, а масса платформы 30 кг? С какой силой давит человек на платформу? Какую максимальную

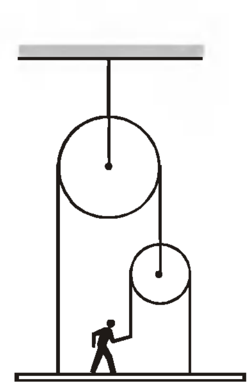


Рис. 3

массу должна иметь платформа, чтобы человек еще мог ее удержать? Веревки считать невесомыми и нерастяжимыми. Массой блоков и трением в них пренебречь.

8. В открытую с обоих концов трубку вставлена пробка длиной a. Пробка находится от края трубки на расстоянии a (рис.4). Какую минимальную работу нужно произвести, чтобы вытащить пробку из трубки, если сила трения между трубкой и полностью вставленной в нее пробкой равна F? Весом пробки пренебречь.

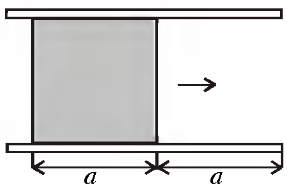


Рис. 4

9. В термос с водой поместили лед при температуре −10 °С. Масса воды 400 г, масса льда 100 г, начальная температура воды 18 °С. Определите окончательную температуру воды в термосе. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · град), удельная теплоемкость льда 2100 Дж/(кг · град), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг. Потерями тепла пренебречь.

10. В схему включены два амперметра и два одинаковых вольтметра (рис.5). Сопротивления вольтметров и амперметров неизвестны, но известны показания обоих амперметров: $I_1 = 100$ мА, $I_2 = 99$ мА и показание первого вольтметра: $U_1 = 10$ В. Найдите показание второго вольтметра U_2.

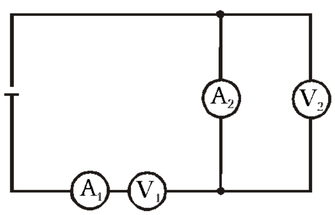


Рис. 5

11. В электрическом самоваре мощностью $P_1 = 600$ Вт и электрическом чайнике мощностью $P_2 = 300$ Вт при включении в сеть напряжением $U = 220$ В, на которое они рассчитаны, вода закипает одновременно через $t = 20$ мин. Через сколько времени закипит вода в самоваре и чайнике, если их соединить последовательно и включить в сеть напряжением $U = 220$ В?

12. Футболист на тренировке бьет мячом в вертикальную стену, находящуюся от него на расстоянии $L = 16$ м. После упругого удара мяч летит обратно и падает на землю на расстоянии $L/4$ от стены. Начальная скорость мяча равна $v_0 = 20$ м/с и лежит в плоскости, перпендикулярной стене. Найдите угол между начальной скоростью мяча и горизонтом. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

13. На гладком горизонтальном столе покоится брусок массой $M = 2$ кг, на котором находится кубик массой $m = 0{,}1$ кг. Кубик и брусок связаны легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок (рис.6). Какую силу F нужно приложить к нижнему бруску, чтобы кубик соскользнул с него за время $\tau = 1$ с? Длина нижнего бруска $L = 0{,}5$ м, длина кубика пренебрежимо мала по сравнению с L. Коэффициент трения между брусками $\mu = 0{,}5$. Трением в блоке пренебречь.

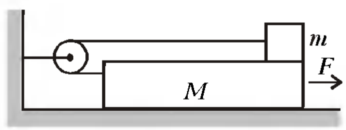


Рис. 6

14. У основания гладкой горки, профиль которой показан на рисунке 7, стоит брусок *1*. Два других таких же бруска находятся на вершине горки. С горки соскальзывает без начальной скорости брусок *2*, а через время τ — брусок *3*. При столкновении брусков происходит абсолютно неупругий удар. На каком расстоянии от конца уклона горки все три бруска начнут двигаться как единое целое? Трением пренебречь. Высота горки H.

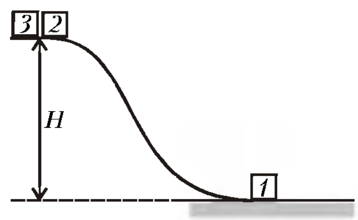


Рис. 7

15. Резиновый шарик массой $m = 2$ г надувают гелием при температуре $t = 17$ °С. По достижении в шарике давления $p_0 = 1{,}1$ атм он лопается. Какая масса гелия была в шарике, если перед тем, как лопнуть, он имел сферическую форму? Известно, что резиновая пленка рвется при толщине $\Delta = 2 \cdot 10^{-3}$ см. Плотность резины $\rho = 1{,}1$ г/см^3, молярная масса гелия $M = 4$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

16. В цилиндре под поршнем находится смесь ν молей жидкости и ν молей ее насыщенного пара при температуре T_0. К содержимому цилиндра подвели количество теплоты Q, медленно и изобарически нагревая его, и температура внутри цилиндра увеличилась на ΔT. Найдите изменение внутренней энергии содержимого цилиндра. Начальным объемом жидкости пренебречь.

17. На поверхности жидкости плотностью ρ плавает тонкостенный цилиндрический стакан, наполовину погруженный в жидкость. На сколько погрузится стакан, если его поставить на поверхность жидкости вверх дном? Высота стакана H, давление воздуха p_a. В обоих случаях стакан плавает в вертикальном положении. Температуру воздуха считать постоянной. Вертикальное положение стакана в обоих случаях поддерживается незначительными боковыми усилиями.

18. Ось неподвижной гантели с шариками, массой m каждый, расположена перпендикулярно силовым линиям однородного электрического поля напряженности E. Заряды шариков гантели равны $+q$ и $-q$, расстояние между шариками неизменно и равно d. Определите скорости шариков в момент, когда ось гантели будет расположена вдоль поля. Размеры шариков малы по сравнению с расстоянием между ними.

Вступительное задание по математике

1. За 10 дней ученик должен был решить определенное количество задач. Сколько задач должен был решать ученик, если в первые 7 дней он решал по $\frac{1}{13}$ от общего числа задач в день; за следующие 2 дня было решено 20% всех задач, а в последний день пришлось решить 17 задач?

2. На реке расположены два острова A и B. Туристы, отправившись от острова A, желают попасть на остров B, побывав поочередно на обоих берегах реки. Как они должны проложить маршрут, чтобы путь имел наименьшую длину (берега реки считать прямыми линиями, а острова A и B – точками)?

3. Докажите, что из любых пяти целых чисел можно найти три, сумма которых делится на 3.

4. На плоскости две параллельные прямые a и b пересечены третьей прямой c. Постройте равносторонний треугольник ABC с данной стороной так, чтобы его вершины A, B и C принадлежали прямым a, b и c соответственно.

5. Найдите натуральное число n, если из трех следующих утверждений два верны, а одно – неверно:

1) $n + 51$ есть точный квадрат;

2) последняя цифра числа n есть 1;

3) $n - 58$ есть точный квадрат.

6. Среди 12 монет есть одна фальшивая. Найдите ее четырьмя взвешиваниями на весах с двумя чашками без гирь, если неизвестно, легче она или тяжелее остальных.

7. Решите уравнение

$$\left|x - \sqrt{x} - 3\right| + \left|\sqrt{x} + 7 - x\right| = 6.$$

8. Сосуд емкостью 8 л наполнен воздухом, содержащим 16% кислорода. Из этого сосуда выпускают некоторое количество воздуха и впускают такое же количество азота; после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять дополняют таким же количеством азота. В новой смеси оказалось 9% кислорода. Определите, сколько литров газа выпускалось каждый раз из сосуда.

9. Найдите все пары чисел x, y, при которых является верным равенство

$$x^3 - x^2 - xy - 17x - 3y + 8 = 0.$$

10. Окружность с центром на стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) касается сторон AB и BC, а сторону AC делит на три равные части. Найдите радиус окружности, если $BH \cdot AC = 18\sqrt{2}$, где BH – высота треугольника ABC.

11. Решите неравенство

$$\frac{7 - 3x + \sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x - 3} < -1.$$

12. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM : MB = 5 : 1$, $CN : NB = 2 : 1$. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABC и BMC, если $\angle AMC = \angle ANC$ и $\angle ABC = 45°$.

13. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{3\left|\sin x\right|}{\sin 3x} = -2.$$

14. Графику функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x = 2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку (0; 1), другая – через точку (0; –5). Найдите значения a, b и c.

НОВЫЙ ПРИЕМ В ШКОЛЫ-ИНТЕРНАТЫ ПРИ УНИВЕРСИТЕТАХ

Специализированный учебно-научный центр (сокращенно – СУНЦ) при МГУ (школа им. академика А.Н.Колмогорова), СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПГУ объявляют набор школьников в 10 (двухгодичное обучение) и 11 (одногодичное обучение) классы.

Обучение ведется на двух отделениях: физико-математическом и химико-биологическом. В составе физико-математического отделения кроме основного профиля предлагаются компьютерно-информационный, биофизический (СУНЦ МГУ) и экономический. Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу производится на конкурсной основе по итогам нескольких туров. Первый тур – заочный письменный экзамен по математике, физике, химии. Успешно выдержавшие письменный экзамен по решению приемной комиссии в апреле – мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены.

Ниже приведены условия заочного вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради (на титульном листе укажите желаемый профиль обучения). На первой странице укажите свои анкетные данные: 1) фамилию, имя, отчество (полностью); 2) домашний адрес (подробный), индекс; 3) подробное название школы, класс. Работу отправляйте простой бандеролью (обязательно вложите в работу конверт с маркой, заполненный на свой домашний адрес). Высылайте вашу работу по одному из следующих адресов:

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ, Приемная комиссия, заочный экзамен (внимание: жители Москвы принимаются в учебный центр без предоставления общежития, телефон для справок 445-11-08);

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет.

Срок отправки работ – *не позднее 20 марта 1999 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь – комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Желаем успеха!

Вступительное задание

Математика

Для поступающих в 10 класс физико-математического отделения предназначены задачи 1–11, 13–20,а; для поступающих в 11 класс – задачи 1, 3–5, 7, 8, 10–20. Для поступающих на химико-биологическое отделение предназначены задачи 1, 5, 8, 10, 14.

Ученики 9 классов, обучающиеся только на 4 и 5 на отделении математики Всероссийской заочной многопредметной школы или на заочном отделении Малого мехмата, приглашаются на устные экзамены в СУНЦ МГУ (но не в СУНЦ НГУ) без выполнения прилагаемой работы.

1. Найдите число цифр у произведения чисел 365989345678932 и 34297348937.

2. Найдите все трехзначные числа, которые в 13 раз больше суммы своих цифр.

3. Найдите наименьшее шестизначное число, которое делится на 321.

4. Найдите число всех n, $1 \le n \le 33000$, которые делятся на 3, 5 и 11.

5. На дискотеке собрались 10 юношей и 9 девушек. Сколькими способами они могут составить 5 пар для участия в танце?

6. Упростите

а)

$$(1 - x)(1 + x)\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^4\right)\ldots\left(1 + x^{2^n}\right);$$

б)

$$\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} + \frac{2}{1 + x^2} + \frac{4}{1 + x^4} + \frac{8}{1 + x^8}.$$

7. Вычислите

$$\cos\left(\pi\cos\left(2\pi\cos\left(3\pi\ldots\cos\left(1998\pi(\cos 1999\pi)\right)\ldots\right)\right)\right).$$

8. При каких a и b существует квадратный трехчлен $P(x)$ такой, что

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 + ax + b = P(x)\left(x^2 - 3x + 2\right)?$$

9. Найдите число корней уравнения

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{199 + x}}}} = 200.$$

10. Найдите число решений системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 6, \\ xy + 4yz + 2xz = 22, \\ xyz = 6. \end{cases}$$

11. Функция f называется *четной (нечетной)*, если для любого x выполнено: $f(-x) = f(x)$ (соответственно, $f(-x) = -f(x)$). Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие – ни те, ни другие (докажите!):

а) $x^3 - 2x^2 + 1$;

б) $\left(x^2 - 3x + 2\right)\left(x^2 + 3x + 2\right)$;

в) $(x+1)^{10} - (x-1)^{10}$?

12. Пусть p – рациональное число, $0 < p < 1$. Расположите в порядке возрастания числа p, $q = p^p$, $r = p^q$.

13. Сумма трех положительных чисел x, y, z равна 1 и $x \le y \le z \le 2x$. Найдите наименьшее значение произведения xyz.

14. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC площади 1 отмечены соответственно точки C', A', B' так, что $9 \cdot BA' = A'C$, $9 \cdot CB' = B'A$, $9 \cdot AC' = C'B$. Найдите площадь треугольника $A'B'C'$.

15. Из произвольной точки M внутри данного острого угла A опущены перпендикуляры MP и MQ на его стороны. Из вершины A опущен перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

16. Дан отрезок длины 1. Постройте циркулем и линейкой отрезок $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

17. Постройте циркулем и линейкой треугольник по двум сторонам a и b, $b > a$, если известно, что угол против одной из них в два раза больше угла против второй.

18. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O, $BO = 4$, $DO = 6$, $AO = 8$, $OC = 3$, $AB = 6$. Найдите AD.

19. Две стороны треугольника единичной площади разделены на три равные части, как показано на рисунке 1.

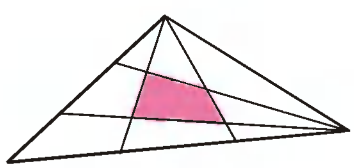


Рис. 1

Найдите площадь выделенного четырехугольника.

20. а) На сколько частей могут делить плоскость 4 прямые?

б) На сколько частей делят пространство 4 плоскости (никакие 3 плоскости не имеют общей прямой, и все 4 плоскости не проходят через одну точку)?

Физика

Для поступающих в 10 класс

1. Начальная скорость автомобиля равна нулю. Первую половину пути он проходит с постоянным ускорением. На второй половине пути он движется с постоянной скоростью $v = 18$ м/с, которой достиг в конце первого участка. Найдите среднее значение скорости автомобиля.

2. Жонглер бросает вверх три мяча с одинаковыми начальными скоростями $v_0 = 6{,}26$ м/с через одинаковые промежутки времени. В некоторый момент времени T первый и третий мячи находятся на одной высоте относительно точки бросания. Найдите высоту, на которой окажется второй мяч в момент времени T.

3. На горизонтальной плоскости лежит пластинка, на которую сверху положена такая же пластинка. Масса каждой пластинки $m = 1$ кг. Коэффициент трения между пластинками и между пластинкой и плоскостью $\mu = 0{,}1$. К нижней пластинке приложили горизонтально направленную силу. Найдите наименьшее значение величины силы, при котором верхняя пластинка соскользнет с нижней пластинки.

4. Спутник движется по круговой орбите на расстоянии $3R$ от поверхности Земли, R – радиус Земли. Найдите отношение скорости спутника к первой космической скорости.

5. Два вертикально стоящих открытых сверху цилиндрических сосуда одинакового поперечного сечения соединены на высоте $H = 8$ м тонкой трубкой, перекрытой краном. Первый сосуд заполнен водой до высоты $H_1 = 10$ м, второй – нефтью до высоты $H_2 = 12{,}5$ м. Давления на уровне дна в первом и втором сосудах одинаково. Найдите приращение уровней воды и нефти после открывания крана.

Для поступающих в 11 класс

1. Воздушный шар, сообщающийся с атмосферой, заполнен воздухом, температура которого $t_1 = 157$ °C. Температура воздуха вне шара $t_2 = 17$ °C. Масса оболочки шара и груза $m = 100$ кг, давление атмосферы $p = 10^5$ Па. При каком значении объема оболочки шар взлетит?

2. В камере объемом $V = 22{,}4$ л находятся воздух и $m = 18$ г воды при давлении $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па и температуре $T_1 = 273$ К. Найдите давление в камере, если ее нагреть до температуры $T_2 = 373$ К.

3. В схеме (рис.2) ЭДС батарей $\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$, емкости двух идентичных плоских конденсаторов $C_1 = C_2 = C$. Тонкий металлический лист помещают между пластинами обоих конденсаторов на одинаковом расстоянии от пластин. Найдите приращение заряда

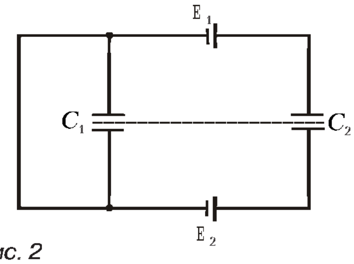


Рис. 2

на верхней пластине конденсатора емкостью C_1.

4. В схеме (рис.3) разность потенциалов между точками a и b равна U_1,

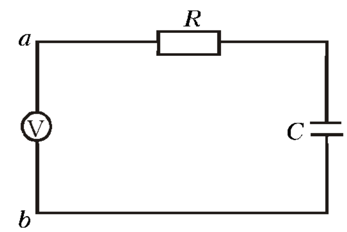


Рис. 3

емкость конденсатора C. Найдите количество теплоты, выделяемое в резисторе при уменьшении разности потенциалов до значения U_2.

5. Стороны правильного треугольника ABC представляют собой проводящий контур – каркас, изготовленный из однородной проволоки. Сопротивление стороны $R_0 = 1$ Ом, длина $a = 10$ см. К вершинам A и C треугольника приложено постоянное напряжение $U = 1$ В. Каркас расположен в плоскости XY, сторона AC параллельна оси X. Вся система находится в постоянном однородном магнитном поле с индукцией, равной $B = 10^{-3}$ Тл и направленной параллельно оси Y. Найдите силу Ампера, действующую на каркас.

Химия

1. Какое вещество А и при каких условиях могло быть использовано в реакции, выражаемой следующей схемой (указаны все исходные вещества и продукты без коэффициентов):

$$A + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + SO_2 + H_2O.$$

Приведите возможные уравнения реакций (с коэффициентами).

2. Сплав магния и цинка массой 7,7 г при сгорании в избытке кислорода дает 10,1 г оксидов. Определите состав сплава. Как изменится условие и решение этой задачи, если кислород заменить на азот?

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №5)

1. Заднее колесо трактора за секунду совершит ровно один оборот.

2. См. таблицу:

	7«А»	7«Б»	7«В»	7«Г»	Σ
7«А»		3:0	2:1	2:0	7:1
7«Б»	0:3		0:0	2:0	2:3
7«В»	1:2	0:0		2:1	3:3
7«Г»	0:2	0:2	1:2		1:6

3. Обозначим угол AOB через α, тогда $\angle AOD = \frac{\alpha}{2}$, а $\angle DOC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Угол COB равен $\alpha - \frac{\pi}{2}$, а $\angle COE = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $\angle DOE = \angle DOC + \angle COE = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

4. Разобьем гирьки на 50 пар соседних гирек. Затем эти 50 пар разобьем на две кучки по 25 пар. Теперь из первой кучки положим на левую чашку весов более тяжелую гирьку из каждой пары, а на правую – более легкую. Со второй кучкой поступим наоборот – на левую чашку положим более легкие гирьки из пар, а на правую – более тяжелые. Очевидно, что в результате весы окажутся в равновесии.

5. Судья не всегда сможет сделать расписание на оставшиеся 2 дня. Например, если в первые три дня команды играли

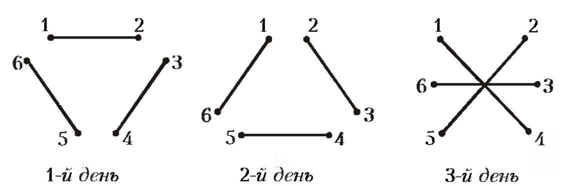


Рис. 1

так, как показано на рисунке 1 (отрезками соединены номера команд, играющих в этот день), невозможно было бы устроить расписание даже только на четвертый день. Действительно, команда с нечетным номером может играть лишь с командами, имеющими нечетные номера, но таких команд три, следовательно, одной из них не с кем будет играть в четвертый

(см. «Квант» №6)

1. Смогут. Поскольку Буратино не хватает 18 сольдо, а Мальвине не хватает 7 сольдо, у Мальвины есть по крайней мере 18 – 7 = 11 сольдо. Если она добавит их к деньгам Пьеро, то денег на букварь, конечно же, хватит.

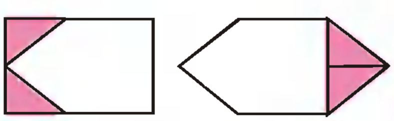


Рис. 2

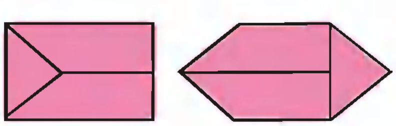


Рис. 3

2. См. рис. 2, 3.

3. Число 220 нельзя представить в виде суммы двух натуральных чисел, все цифры которых нечетны.

4. 1665. Сумма последних цифр трех исходных трехзначных чисел оканчивается на 5. Числа 5 и 25 не представимы в виде суммы трех ненулевых различных цифр. Значит, сумма последних цифр равна 15. Тогда, сумма средних цифр тоже равна 15, и сумма первых цифр тоже 15. Теперь ясно, что после перестановки мы получим три числа, сумма которых 1665.

Напоследок предъявим тройку чисел (одну из возможных), которая удовлетворяет условию задачи: 159, 672, 834.

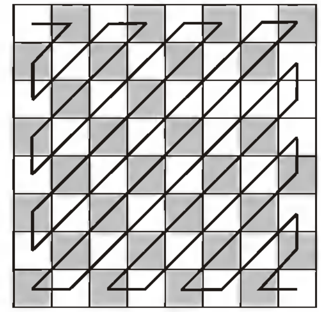


Рис. 4

5. На рисунке 4 король сделал 49 диагональных ходов. Доказать, что число 49 максимально возможное, очень просто. Каждый диагональный ход проходит через один узел шахматной доски. (Узлом мы здесь называем общую точку 4 клеток шахматной доски.) Всего узлов 49. Два раза пройти через один и тот же узел без самопересечения пути невозможно.

МЕТАМОРФОЗЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. $П_9$, $П_{10}$, $П_{11}$. Если считать, что в момент отплытия лодки отправляется автобус №0, то турист должен сесть в автобус №66. (Решение аналогичной задачи см. на с. 87–88 в журнале «Квант» №1/2 за 1993 г.)

2. $P_4(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$,

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

3. $S_k(0) = \int_0^0 P_k(x)dx = 0$.

4. *Указание.* Коэффициент при старшей степени многочлена $P_k(x)$ равен 1.

5. $-\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2\cos\frac{1}{2}}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Указание.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cos k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(\pi+1)k + \cos(\pi-1)k\right).$$

АНАЛОГИИ В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ

1. $T = \frac{kq\lambda}{R}$. **2.** $T = \sigma R$. **3, 4, 5.** $\Delta W = -W_0/2$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* В каждом из случаев $\cos x > 0$ и $\cos x < 0$ выполните подстановку $t = \frac{\cos 3x}{\cos x}$.

2. $x < \frac{34 - 30\sqrt{2}}{23}$, $x \geq 3$.

3. $\frac{5\sqrt{34}}{12}$. *Решение.* Точка D является центром описанной около треугольника ABC окружности, $AB = 5$, $AC = 4$. Пусть O_1 – центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник BCD, O_2 – центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ACD, M – середина отрезка CB (рис.5).

Треугольник DO_1O_2 – прямоугольный и $O_1O_2 = \sqrt{O_1D^2 + O_2D^2}$. Найдем радиусы окружностей: $O_2D = \dfrac{CD}{2\sin A} = \dfrac{25}{12}$; в треугольнике BCD полупериметр равен 4, $DM = 2$, $S_{BDM} = 3$, поэтому $O_1M = \dfrac{S}{p} = \dfrac{3}{4}$, а $O_1D = DM - O_1M = \dfrac{5}{4}$.

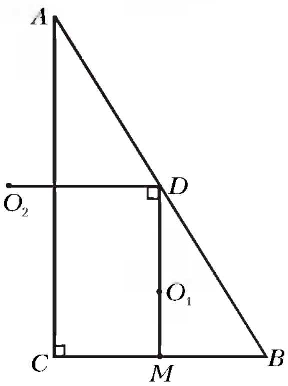


Рис. 5

4. 2; $15\ln 2 - 9$. *Решение.* Прямая $y = -18x + 9$ является касательной к графику функций $y = 9e^{-ax}$ в точке (0; 9), так как эта точка принадлежит обеим линиям, а по условию фигура M и прямая $y = -18x + 9$ имеют только одну общую точку. Следовательно, имеем

$$-18 = \left(9e^{-ax}\right)'\Big|_{x=0} = -9a,$$

откуда $a = 2$.

Найдем точки пересечения кривых $y = f_1(x) = 9e^{-2x}$ и $y = f_2(x) = 15 - 4e^{2x}$:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3},\quad x_2 = \frac{\ln 3}{2}.$$

Площадь фигуры M равна

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left(15 - 4e^{2x} - 9e^{-2x}\right)dx = \left(15x - 2e^{2x} + \frac{9}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}}^{\frac{1}{2}\ln 3} = 15\ln 2 - 9.$$

5. 13/12; $\pi/6$.

Построение плоскости сечения α. Точки K и E лежат в плоскости α, поэтому прямая KE лежит в этой плоскости (рис.6). Пусть M, L – точки пересечения прямых AA_1 и KE, A_1B_1 и KE соответственно. Так как $M \in \alpha$ и $K \in \alpha$, то прямая MK принадлежит α. Далее (с менее подробным изложением) найдем точки пересечения плоскости α с ребрами призмы. Проведем прямую MF, пересекающую ребро AC в точке P. Аналогично проведем прямую LF, пересекающую ребро B_1C_1 в точке N. Соединим точки F, P, E, K, N, F. Сечение построено.

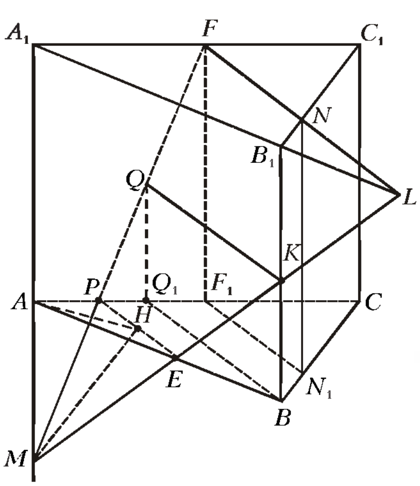


Рис. 6

Вычисление площади сечения S и угла φ между плоскостями. Введем обозначения: $AB = a$, $B_1B = h$. Пятиугольник $EPFNK$, в котором PE и FN параллельны, разбивается на две трапеции прямой, проходящей через точку K параллельно PE и пересекающей PF в точке Q. Из равенства треугольников AME и EKB получим, что $MA = BK = h/2$. Из подобия треугольников MAP и A_1MF получим $AP = (1/3)A_1F$ и, следовательно, $AP = (1/6)a$. По теореме косинусов в треугольнике APE найдем: $PE^2 = a^2/36 + a^2/4 - 2(a/6)(a/2)(1/2)$, т.е. $PE = a\sqrt{7}/6$. Спроектируем сечение на плоскость ABC. Пусть Q_1, F_1, N_1 – проекции точек Q, F, N. Тогда $F_1N_1 = FN$, отрезки F_1N_1, BQ_1, PE попарно параллельны и $AP = PQ_1 = Q_1F_1 = a/6$, $BQ_1 = 2PE$, $F_1N_1 = (3/4)BQ_1 = (3/2)PE = a\sqrt{7}/4$. Итак, $FN = a\sqrt{7}/4$. Пусть x – расстояние между прямыми PE и Q_1B. Для нахождения x воспользуемся тем, что высота AH в треугольнике APE равна x. Вычислим двумя способами площадь треугольника APE. Имеем $(1/2)AP\,AE\sin\pi/3 = (1/2)PE\,x$, откуда получим $x = (a/4)\sqrt{3/7}$. По теореме о трех перпендикулярах MH перпендикуляра PE, т.е. $\angle\varphi = \angle AHM = \mathrm{arctg}(AM/AH) = 1/\sqrt{3} = \pi/6$. Площадь проекции искомого сечения $S_1 = x\left(PE + Q_1B\right)/2 + x\left(Q_1B + F_1N_1\right)/2 = 13a^2\sqrt{3}/96 = 13\sqrt{3}/24$. Искомая площадь $S = S_1/\cos\varphi = 13/12$.

6. (3; 29), (1; –17), (19; 397), (–15; 191). *Решение.* Выразив y через x, получим

$$y = \frac{x^3 - 7x + 23}{x - 2}.$$

Выделим целую часть, преобразовав дробь:

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + 2\left(x^2 - 2x\right) - 3(x - 2) + 17}{x - 2},$$

т.е.

$$y = x^2 + 2x - 3 + \frac{17}{x - 2}. \qquad (*)$$

Целые значения y примет при целых x тогда и только тогда, когда дробь $\dfrac{17}{x-2}$ примет целые значения, т.е. в следующих случаях: $x - 2 = 1$, $x - 2 = -1$, $x - 2 = 17$, $x - 2 = -17$. Отсюда находим: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 19$, $x_4 = -15$ а затем из равенства $(*)$ находим: $y_1 = 29$, $y_2 = -17$, $y_3 = 397$, $y_4 = 191$.

Вариант 2

1. (2; –3), (–6; 1). *Указание.* Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} xy(x + 2y) > 0, \\ (x + 2y)^2 = 16, \\ \left|\dfrac{xy}{6}\right| = 1. \end{cases}$$

2. $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Указание. Неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} -\sin x < 0, \\ \begin{cases} -\sin x \ge 0, \\ \dfrac{5 + 3\cos 4x}{8} > \sin^4 x. \end{cases} \end{array}\right.$$

3. $\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$.

4. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$. *Решение.* Уравнение $\sin x = (4a-2)^2$ имеет корни тогда и только тогда, когда $(4a-2)^2 \le 1$, т.е.

$$\left|a-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{4}, \text{ откуда } \frac{1}{4} \le a \le \frac{3}{4}.$$

Задача сводится к нахождению всех значений a, при которых функция $f(a) = \frac{1-4a}{27a^4}$ принимает целые значения на отрезке $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$. Уравнение $f'(a) = \frac{1}{27}\left(-4a^{-5}+12a^{-4}\right) = \frac{4}{27}a^{-5}(3a-1) = 0$ имеет на отрезке $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ единственный корень $a = \frac{1}{3}$, причем $f'(a) < 0$ при $a < \frac{1}{3}$ и $f'(a) > 0$ при $a > \frac{1}{3}$. Следовательно, функция $f(a)$ убывает при $a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ и возрастает при $a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$.

Так как $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ и $f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$ – целые числа, $a - 1 < f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{2^9}{3^7} < 0$, то искомое множество значений a состоит из чисел $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$.

5. $\sqrt{30}/4$; $\pi\sqrt{30}/28$. *Решение.* Пусть E – точка пересечения BC и AD, M и N – середины отрезков CD и AB соответственно (рис.7). Тогда ABE – правильный треугольник, $NE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 3\sqrt{3}$, $MN = \frac{2}{3}NE = 2\sqrt{3}$, $ME = \sqrt{3}$, так как MN – диаметр вписанной в треугольник ABE окружности, радиус которой равен $\frac{1}{3}NE$.

Заметим, что перпендикулярными основанию пирамиды являются грани SBC и SAD, а линия их пересечения (прямая SE) – перпендикуляр к основанию и $SE = \sqrt{5}$.

Пусть MK – высота в треугольнике SMN, тогда MK – перпендикуляр к плоскости ABS ($KM \perp SN$ и $KM \perp AB$, так как AB – перпендикуляр к плоскости SNE). Прямая CD параллельна плоскости SAB и поэтому расстояние от точки D до плоскости SAB равно MK.

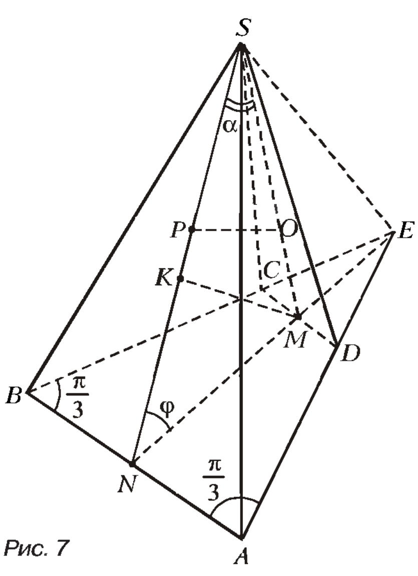


Рис. 7

Если $\angle SNM = \varphi$, то $KM = MN\sin\varphi$, где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{SE}{NE} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$, откуда $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$, $KM = 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}}{4}$.

Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник SCD, P – точка пересечения отрезка SN с перпендикуляром к стороне SM треугольника SMN, проведенном через точку O.

Радиус r этой окружности равен радиусу основания конуса, высота H конуса равна OP, а его объем $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

Если σ – площадь треугольника SCD, p – его полупериметр, то $\sigma = \frac{1}{2}CD \cdot SM$, $p = SD + \frac{CD}{2}$, где $CD = \frac{1}{3}AB = 2$, $SM = \sqrt{SE^2+ME^2} = \sqrt{5+3} = 2\sqrt{2}$, $SD = \sqrt{SM^2+MD^2} = \sqrt{8+1} = 3$, $p = 4$, $\sigma = 2\sqrt{2}$ и поэтому $r = \frac{\sigma}{p} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $SO = SM - r = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Пусть $\angle NSM = \alpha$, тогда $H = SO\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Найдем $\cos\alpha$, применив теорему косинусов к треугольнику SMN.

Получим $MN^2 = SN^2 + SM^2 - 2SN\cdot SM\cos\alpha$, где $SN = \sqrt{SE^2+NE^2} = \sqrt{5+27} = 4\sqrt{2}$, $SM = 2\sqrt{2}$, откуда $\cos\alpha = \frac{7}{8}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{7}$, $H = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{15}}{7} = \frac{3\sqrt{30}}{14}$.

6. $a = -4$, $b = 5$, $c = -2$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – абсциссы точек, в которых график функции $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, где $c < 0$, пересекает ось Ox. Тогда x_1 и x_2 – корни многочлена $f(x)$, а $f(x)$ делится на $(x-x_1)(x-x_2)$, откуда следует, что $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-\alpha)$, где α – одно из чисел x_1, x_2 (уравнение $f(x) = 0$ по условию имеет ровно два различных корня). Таким образом, многочлен $f(x)$ имеет вид $f(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)$, откуда находим $f'(x_1) = 0$ и касательная к графику функции в точке $(x_1, 0)$ совпадает с осью Ox.

По условию ордината точки A равна c, где $c < 0$, а касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке M проходит через точку A. Поэтому абсцисса точки M равна x_2, а абсцисса точки N равна x_1 (рис.8). Задача сводится к нахождению чисел x_1 и x_2. Так как $f'(x_2) = (x_2-x_1)^2 = K$, то уравнение прямой, касающейся в точке M графика функции $y = f(x)$, имеет вид $y = k(x-x_2)$. Эта прямая проходит через

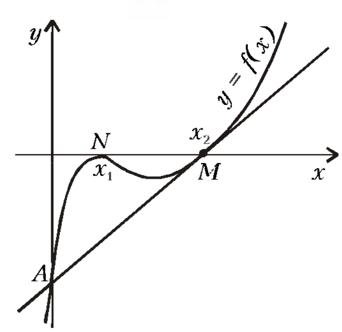


Рис. 8

точку $A(0, c)$, где $c = f(0) = -x_2x_1^2$. Поэтому $c = -kx_2$ и $x_2x_1^2 = x_2(x_2-x_1)^2$, откуда $x_2 = 2x_1$ $(x_2 \ne 0)$ и $c = -2x_1^3$.

Пусть S – площадь треугольника AMN, тогда $S = 1 = -c\frac{1}{2}(x_2-x_1) = -\frac{1}{2}cx_1$, откуда $c = -\frac{2}{x_1} = -2x_1^3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $f(x) = (x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Пусть нижний брусок с массой M движется вниз вдоль наклонной плоскости с ускорением a. Введем систему координат: ось X направим вдоль наклонной плоскости, ось Y пер-

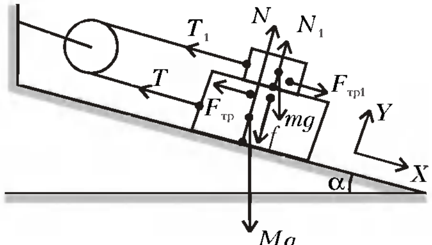


Рис. 9

пендикулярно ей (рис.9). Рассмотрим силы, действующие на нижний брусок. Это сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, сила давления со стороны верхнего бруска $\vec{f}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, действующая со стороны верхнего бруска. Уравнение движения бруска по оси X имеет вид

$$Ma = Mg\sin\alpha - T - F_{тр}.$$

Вдоль оси Y сумма всех сил, действующих на нижний брусок, равна нулю. Следовательно,

$$N = Mg\cos\alpha + f.$$

В силу того, что трос нерастяжим, верхний брусок движется с тем же ускорением вверх по наклонной плоскости под действием силы тяжести $m\vec{g}$, силы реакции $\vec{N}_1$, силы натяжения $\vec{T}_1$ ($T_1 = T$) и силы трения со стороны нижнего бруска $\vec{F}_{тр1}$. Уравнение движения для него по оси X имеет вид

$$ma = T - F_{тр_2} - mg\sin\alpha,$$

а по оси Y –

$$N_1 = mg\cos\alpha = f.$$

Кроме того,

$$F_{тр1} = F_{тр} = \mu mg\cos\alpha.$$

Поскольку система двух брусков покоится, их ускорения равны нулю, и система написанных уравнений примет вид

$$\begin{cases} Mg\sin\alpha - T - \mu mg\cos\alpha = 0,\\ -mg\sin\alpha + T - \mu mg\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Решая систему полученных уравнений, для искомого коэффициента трения μ получаем

$$\mu = \frac{M-m}{2m}\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Очевидно, что при движении «тройника» с ускорением a вправо вода будет выливаться из левой трубки. Уровни воды, оставшейся в средней и правой трубках, обозначим через X и Y (рис.10). Из условия задачи следует, что

$$l - X + l - Y = 9/32 \cdot 4l.$$

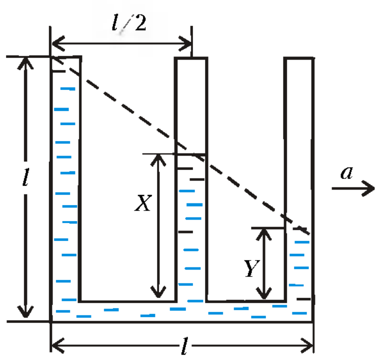


Рис. 10

Следовательно,

$$X + Y = 7/8\, l. \qquad (1)$$

Давление жидкости у дна левой трубки равно

$$p_1 = p_а + \rho gl,$$

где $p_а$ – атмосферное давление. Давление у дна средней трубки равно

$$p_2 = p_а + \rho gX$$

и у дна правой трубки –

$$p_3 = p_а + \rho gY.$$

Запишем уравнение движения горизонтальной части жидкости, заключенной между левой и правой трубками:

$$\rho glS - \rho gYS = \rho lSa. \qquad (2)$$

Для горизонтальной части жидкости, заключенной между средней и правой трубками, уравнение движения имеет вид

$$\rho gXS - \rho gYS = \rho lSa/2. \qquad (3)$$

Совместное решение уравнений (1), (2), (3) дает искомое ускорение:

$$a = 3/4\, g.$$

3. Пусть температура гелия на диаграмме p-V в точке *1* равна T_1. Так как точки *2* и *3* лежат на изотерме, $T_2 = T_3$. Точка *1* лежит «выше» точек *2* и *3*. Следовательно, $\Delta T = T_1 - T_2$. Запишем уравнение первого начала термодинамики для адиабатического процесса *1*–*2*:

$$0 = A_{12} - C_V\Delta T \quad \left(C_V = \frac{3}{2}R\right). \qquad (1)$$

Соответствующее уравнение для изотермы (участок *2*–*3*):

$$Q_{23} = A_{23}. \qquad (2)$$

Наконец, для изобары *3*–*2* имеем

$$R\Delta T = A_{31}. \qquad (3)$$

В силу того, что работа газа в замкнутом цикле равна A:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31},$$

из уравнений (1), (2), (3) получим

$$A_{23} = A - 5/2\, R\Delta T.$$

4. Сразу после замыкания ключа K_2 ток через катушку индуктивности сохраняется и равен I_0. Напряжение на конденсаторе сразу после замыкания ключа K_2 равно нулю. Обозначим ток, протекающий по резистору R_1, через I_1, а по резистору R_2 через I_2 (рис.11). Согласно первому закону Кирхгофа,

$$I_2 = I_0 + I_1.$$

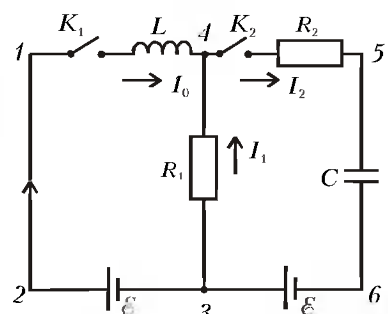


Рис. 11

Запишем закон Ома для замкнутой цепи *3*–*4*–*5*–*6*–*3*:

$$\mathcal{E} = +I_1R_1 + I_2R_2.$$

Из совместного решения приведенных уравнений находим

$$I_1 = \left(\mathcal{E} - I_0R_2\right)/\left(R_1 + R_2\right).$$

Для определения напряжения на катушке индуктивности запишем закон Ома для замкнутой цепи *1*–*2*–*3*–*4*–*1*:

$$\mathcal{E} = U_L - I_1R_1.$$

Отсюда

$$U_L = \frac{\mathcal{E}\left(2R_1 + R_2\right) - I_0R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

В установившемся режиме напряжение на катушке равно нулю, ток через резистор R_2 равен нулю. Рассмотрим контур *1*–*2*–*3*–*6*–*5*–*4*–*1* и найдем

$$U_C = 2\mathcal{E}.$$

5. Через оптический центр линзы проведем вспомогательный луч OC параллельно лучу AB (рис.12). Преломленный луч BC пересекается с лучом OC в точке C, принадлежащей фокальной плоскости линзы. Продолжим луч BC влево до пересечения с главной оптической осью линзы в точке A^*. Угол CA^*O является половиной искомого

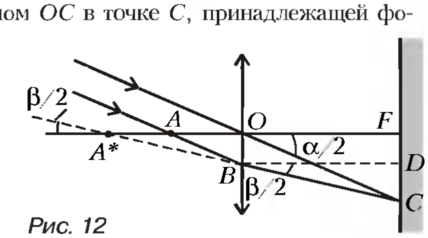


Рис. 12

угла β. Проведем линию BD параллельно OF. Угол CBD равен $\beta/2$. Из треугольника CBD

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{FC - OB}{F} = \frac{(F-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{F}.$$

Отсюда

$$\beta = 1{,}7\cdot 10^{-2}\ \text{рад}.$$

Вариант 2

1. 1) $a = \frac{g}{6}(1-4\mu) = \frac{g}{15} = 0.65$ м/с^2 ; 2) $v = \sqrt{\frac{3-8\mu}{12}gL} \approx 1$ м/с.

2. $E_{\text{вр}} = \frac{\alpha}{\alpha+1}pV = 4{,}8\cdot 10^6$ Дж.

3. 1) $q_{\text{з}0} = \frac{\varepsilon_0 S\mathrm{E}}{d}$; 2) $q_{\text{з}} = \frac{q_0}{2} + \frac{\varepsilon_0 S\mathrm{E}}{d}$.

4. 1) $I = U_0\sqrt{\frac{C}{L_1+L_2}}$; 2) $U_m = U_0\sqrt{\frac{L_2}{L_1+L_2}}$.

5. 1) $b = -\frac{LF}{2L+F} = -0{,}45F$; 2) $v_{\text{из}} = 0{,}1A\sqrt{\frac{k}{m}}$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\{-2\}\cup(-2/3;\,3]$. **2.** 7/3; 83.

3. $-\frac{\pi}{3}+\pi n$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; πn, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\sin 4x + \operatorname{tg} x = \pm\operatorname{tg} x,\\ \operatorname{tg} x \le 0.\end{cases}$$

4. 144. *Указание.* Из условия следует, что проекцией вершины S на плоскость основания служит центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а высота пирамиды равна радиусу этой окружности.

5. Да; $[-1/4;\,1]$. *Указание.* Достаточно выяснить, при каких значениях a имеет корни уравнение $f(x) = a$. Или, что то же самое, уравнение

$$\sqrt{3}\cos x - a\sin x = 3a - 1,$$

или уравнение

$$\cos(x+\varphi) = \frac{3a-1}{\sqrt{a^2+3}},$$

где $\varphi = \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+3}}$.

Вариант 2

1. $(-1;\,1)$. **2.** $\frac{7\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{3\pi}{4}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3. $\frac{5a-4\pm\sqrt{3a^2-40a+28}}{2(1-a^2)}$ при $a\in(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,2/3)\cup(2/3;\,1)\cup$ $\cup(1;\,14/13)\cup(2;\,3)\cup(3;\,\infty)$; 1/3 при $a=-1$; 9/5 при $a = 2/3$; -3 при $a = 1$; $-13/3$ при $a = 14/13$; $-3/8$ при $a = 3$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(a^2-1)x^2 + (5a-4)x + 3 = 0,\\ x+1\ne 0;\quad ax+2\ne 0.\end{cases}$$

Если $a = 1$, то $x = -3$. При $a = -1$ получаем $x = 1/3$. Дискриминант квадратного уравнения положителен при $a < 14/13$ и $a > 2$, так что уравнение имеет 2 корня, из которых необходимо выбрать корни, удовлетворяющие остальным условиям системы. При $a = 14/13$ единственный корень $x = -13/3$; если же $a = 2$, то $x = -1$ – не удовлетворяет системе.

4. $\frac{4}{9}\sqrt{2}$. *Указание.* Проведите плоскость через высоту пирамиды и середину F ребра CD. Эта плоскость пересекает секущую плоскость по прямой. Расстояние от точки F до этой прямой равно расстоянию от точки D до секущей плоскости.

5. $(0;\,3/7)\cup\{1/2\}$. *Указание.* После замены $u = \sqrt{x+2}$ задача сводится к отысканию тех значений a, при которых уравнение $au^2 - u + 7a - 3 = 0$ имеет единственный неотрицательный корень.

ФИЗИКА

1. $s = (2v_0^2\operatorname{tg}\alpha)/(g\cos\alpha) = 57$ м; $H = (v_0^2\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha)/(2g) = 7{,}1$ м.

2. $T = 2\pi A(M+m)/(mv) = 1{,}3$ с.

3. $v = \sqrt{(v_1^2+v_2^2)/2} = 450$ м/с. **4.** $\Delta h = h_1(1+h_2/H) = 5{,}0$ см.

5. $\varphi = Er = 15$ кВ; $q = 4\pi\varepsilon_0 Er^2 = 8{,}3$ нКл.

6. $\eta_1 = P_1I_2(I_2-I_1)/(P_1I_2^2 - P_2I_1^2) = 83\%$,

$\eta_2 = P_2I_1(I_2-I_1)/(P_1I_2^2 - P_2I_1^2) = 63\%$;

$I_0 = (P_1I_2^2 - P_2I_1^2)/(P_1I_2 - P_2I_1) = 60$ А.

7. $t = T/8$. **8.** $\Delta\varphi = 2\pi\nu L/c = \pi/5$.

9. $n = 1/\sqrt{\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2} = 1{,}5$.

10. $N = 4\pi\varepsilon_0 rhc(\lambda_1-\lambda_2)/(\lambda_1\lambda_2e^2) = 4{,}3\cdot 10^7$.

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Не забудьте учесть условия $1 + \cos x > 0$, $\sin x > 0$, $\sqrt{2}\sin x \ne 1$.

2. $\left(\frac{1}{4};\,\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$. *Указание.* Обозначив $y = \log_{0,5}x$, рассмотрите два случая: $y < 2$ и $y > 2$.

3. 456 ц.

4. $\frac{\sqrt{2}}{16}a^2$. *Указание.* Первый способ: сравните сечение с ΔABQ, где Q – середина CM; второй способ: примените формулу Герона.

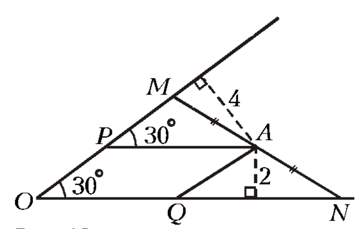


Рис. 13

5. 32 см^2. *Указание.* Проведите AP и AQ параллельно сторонам угла (рис.13), затем докажите, что минимум $S_{\Delta OMN}$ достигается в случае равенства треугольников PMA и QAN.

Вариант 2

1. $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Не забудьте учесть условия $\operatorname{ctg}x > 0$, $\operatorname{ctg}x \ne 1$, $\sin x \ne 0$, $\cos x < 0$, из которых, в частности, следует, что $\sin x < 0$.

2. $\left[\log_3 \frac{\sqrt{41}-1}{2}; 1\right)$. *Указание.* Записав равенство в виде $\log_x \log_3\left(10-9^x\right) \geq \log_x x$, рассмотрите два случая $0 < x < 1$ и $x > 1$.

3. 110, 96, 66 страниц. *Указание.* Заметив, что нормы машинисток относятся, как 5:4:3, примите их равными $5p$, $4p$, $3p$.

4. $\frac{\sqrt{2}}{16}a^2$. *Указание.* Первый способ: сравните сечение с ΔBCQ, где Q – середина AD; второй способ: примените формулу Герона.

5. 9; 15/2. *Указание.* Выразите площадь параллелограмма как функцию $S(x)$, где x – длина стороны параллелограмма, лежащая на основании треугольника.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{3}r^3 \operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$. **2.** $k\frac{\pi}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. **4.** 1; 3. *Указание.* Удобно обозначить $y = 5^{x-1}$.

5. $y = -9$ (касательная горизонтальна).

Вариант 4

1. $2d^2\cos\beta\cdot\sqrt{2-\cos^2\beta}$.

2. $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $(-\infty; 16)\cup(-3; \infty)$.

4. 10; $10^{-9/2}$. **5.** (1; –27), (4; 0).

Вариант 5

1. $26\frac{1}{4}$ см^2. *Указание.* Сначала рассмотрите отсеченную пирамиду – она подобна исходной.

2. $1+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Преобразуйте правую часть уравнения в произведение.

3. $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$. **4.** 3; 27.

5. $y = -1$ (касательная горизонтальна).

Задачи устного экзамена

1. 1.

2. $\sqrt{2}$. *Указание.* Преобразуйте разность $\cos 20° - \cos 80°$ в произведение, а $1 + \cos 280°$ замените на $2\cos^2 140°$.

3. 1. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что
$$\log_q p = \frac{1}{\log_p q}.$$

4, 5, 6. См. рис.14 (*а*, *б*, *в*).

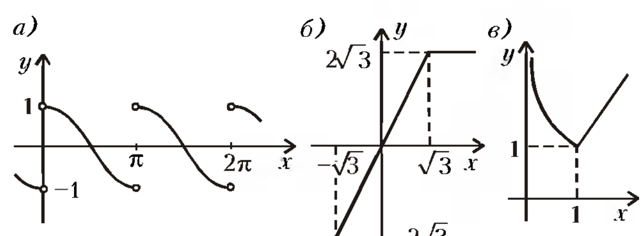


Рис. 14

7. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* Пусть x, y – половины диагоналей параллелограмма. Выразите стороны параллелограмма через x, y, а из полученных уравнений найдите произведение xy.

8. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ м. *Указание.* Через вершину верхнего основания трапеции проведите прямую, параллельную боковой стороне трапеции.

9. 84. **10.** (0; 0), (–1; 1), ($\sqrt{2}$; 2), ($-\sqrt{2}$; 2).

11. $[-2; 2)\cup[3; 4)$. **12.** $(-\infty; 0]\cup[6; +\infty)$.

13. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

14. $-\frac{7}{2}$; $\frac{1}{2}$. *Указание.* Обозначьте $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|2x+3|}$.

15. $a = -1/2$. *Указание.* Рассмотрите случаи $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.

ФИЗИКА

1 $m = 100$ кг. **2.** $v_0 = 25$ м/с; $h = 31{,}25$ м.

3. $\mu \approx 0{,}06$. **4.** $P = 678$ Н. **5.** $V_0 = 2{,}73$ л.

6. $t \approx 77$ °С. **7.** $E \approx 3\cdot10^5$ Н/Кл; $Q \approx 0{,}5\cdot10^{-6}$ Кл.

8. $Q_1 = 400$ кДж; $Q_2 = 1{,}8$ МДж. **9.** $\alpha \approx 61°$. **10.** Нет.

V РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО АСТРОНОМИИ И КОСМИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. Лучше в первой четверти.
2. Около 180 тысяч лет тому назад.
3. От 5 до 8 раз в году. **4.** Над Прагой.
5. Примерно 176 суток. **6.** Вне Солнца.

9 класс

5. Приблизительно 3,8 мин.
6. Диаметр астероидов должен быть больше 20 км.

10 класс

1. $h_{\max} = 90°-\varphi+(\varepsilon+i) \approx 63{,}1°$.
2. $\rho \geq 3\pi/\left(GT^2\right) = 1{,}09\cdot10^6$ кг/м^3.
3. Центр масс может находиться как внутри, так и вне Солнца – в зависимости от взаимного расположения планет.
4. На $0{,}074^m$.
5. Около 700 звезд за 27,3 суток (время полного оборота Луны относительно звезд), т.е. чуть больше одной звезды в час.
6. Зонд легче запустить с Марса, сначала выведя его на околопланетную орбиту, а затем переведя на очень вытянутую орбиту вокруг Солнца. Длительность полета – 121,4 суток.

11 класс

1. Наблюдаемая галактика в 2–2,5 раза меньше нашей.
2. На $\Delta m/2 = 2{,}62^m$.
3. В противоположной точке Солнце поднялось над горизонтом уже на 1°.
4. От -9^m до -5^m (в зависимости от величины коэффициента отражения в кошачьем глазе и яркости фонаря).
5. Время перелета – около 259 суток, а время ожидания – около 454 суток.
6. Площадь паруса – около 6 км^2.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

1. Предположим, что такая расстановка существует. Начиная с места, где стоит нуль, занумеруем по часовой стрелке места, на которых стоят числа, номерами от 0 до 14 (всего чисел от –7 до 7 как раз 15 штук). Рассмотрим числа, стоящие на местах с номерами 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. Числа, номера которых соседние в этом списке, стоят на окружности через одно. Значит, все они одного знака, что противоречит условию задачи.

2. а) Если бы каждая цифра встречалась не более 5 раз, то всего было бы не более $5 \cdot 9 = 45$ цифр. Следовательно, некоторая цифра встречается по крайней мере 6 раз, т. е. можно вычеркнуть цифры так, что останется число из 6 одинаковых цифр. Оно делится на $111111 = 111 \cdot 1001$. б) $41 \cdot 271 = 11111$.

3. Докажем, что $\angle EAD = \angle EDA$ (рис. 15). Поскольку $\angle EDA = \angle CDF$, достаточно доказать, что $\angle EAD =$

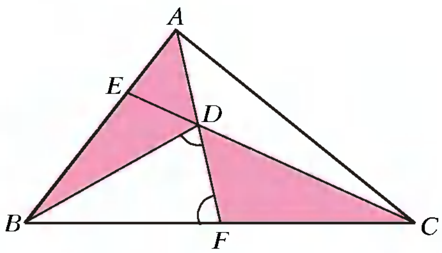


Рис. 15

$= \angle FDC$. Треугольники ADB и DFC равны по двум сторонам и углу между ними: $AD = DF$, $DB = BF = FC$, $\angle ADB = 180^\circ - \angle BDF = 180^\circ - \angle BFD = \angle DFC$. Значит, $\angle EAD = \angle FDC$, что и требовалось.

Более простое решение можно получить, если рассмотреть медианы треугольника BDF (рис. 16).

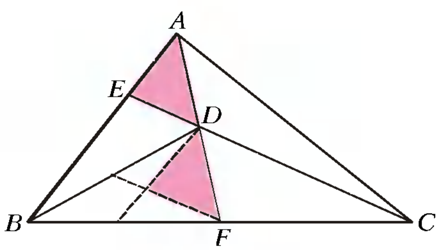


Рис. 16

4. 4,75.

5. *Указание.* Рассмотрите гомотетию с центром A, переводящую точки K и L в середины отрезков AB и AC.

6. Если никакой корень многочлена $f(x) - 10$ не является корнем производной, то многочлен $f(x) - 10$ меняет знак в десяти точках, так что его степень четна. Аналогично из условия следует, что многочлен $f(x) - 15$ меняет знак в пятнадцати точках, так что его степень нечетна. Этого не может быть, поскольку упомянутые многочлены имеют одинаковые степени.

7. 99. Пример – числа от 10001 до 10099. Действительно, все эти числа лежат в промежутке от $100 \cdot 100$ до $100 \cdot 101$, поэтому не могут быть представлены в виде произведения двух трехзначных чисел, так как $100 \cdot 100$ и $100 \cdot 101$ – два наименьших произведения трехзначных чисел. С другой стороны, среди любых 100 подряд идущих пятизначных чисел обязательно встретится число, кратное 100.

8. Разрежем квадрат на блоки размером 2×2. Любой блок либо весь одного цвета, либо две его клетки синие, а две – красные. Значит, в каждом блоке количество синих клеток четно. Следовательно, и во всем квадрате количество синих клеток четно.

9. 7 служащих. *Указание.* Разность количеств денег у первого и второго служащих всегда делится на количество служащих.

10. Пусть числа расставлены в вершинах правильного 30-угольника. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, 15$ проведем луч из точки числа k через точку числа $31 - k$. Если числа вида k и $31 - k$ расположены в соседних вершинах 30-угольника и меняются местами, то соответствующий луч меняет свое направление на 180°. Каждому лучу сопоставим угол, на который нужно его повернуть по часовой стрелке, чтобы после поворота его направление совпало бы с положительным направлением оси абсцисс. Проследим за суммой этих углов (следует помнить, что углы измеряются с точностью до кратных 360°).

Если числа вида k и $31 - k$ ни разу не меняются местами, то при каждой операции один из лучей поворачивается на такой же угол, на какой в противоположном направлении поворачивается другой луч (на рисунке 17 вместо 30-угольника взят 10-угольник и показано, что происходит с лучами, когда меняются местами числа 2 и 6). Если каждое число после не-

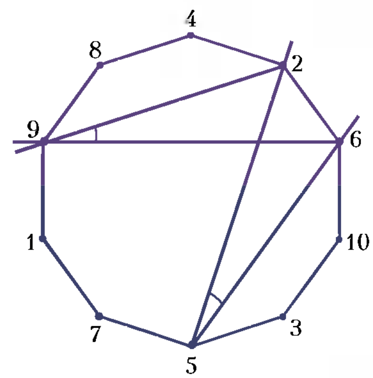


Рис. 17

скольких операций переместится на диаметрально противоположное место, то все 15 лучей изменят свои направления на противоположные. Значит, сумма углов изменится на $15 \cdot 180^\circ$. Получили противоречие: сумма при операциях не менялась, а $15 \cdot 180^\circ$ не кратно 360°.

11. Приведем пример такой последовательности. Пусть $a_{2000} = 3$, $a_{1999} = 4$. Числа a_n при $n > 2000$ определим по данной в условии формуле. Числа a_n при $1 \le n \le 1998$ построим «обратным ходом» (т. е. сначала a_{1998}, потом a_{1997} и так вплоть до a_1) по формуле $a_n = (a_{n+1} - 1)(a_{n+2} - 1)$. Очевидно,

$$4 = a_{1999} < 6 = a_{1998} < a_{1997} < \ldots < a_1 .$$

Убедимся, что построенная последовательность удовлетворяет соотношению $a_{n+2} = \text{НОД}(a_n, a_{n+1}) + 1$. При $n \ge 1999$ это выполняется по определению, при $n = 1998$ проверяется непосредственно, а при $n \le 1997$ имеем $\text{НОД}(a_n, a_{n+1}) = \text{НОД}((a_{n+1} - 1)(a_{n+2} - 1), a_{n+1}) = \text{НОД}(a_{n+2} - 1, a_{n+1}) = \text{НОД}(a_{n+2} - 1, (a_{n+2} - 1)(a_{n+3} - 1)) = a_{n+2} - 1$, что и требовалось.

12. Расселим сначала школьников произвольным образом. Если какие-то двое знакомых при этом окажутся в одной комнате, то у каждого из них в других комнатах не более чем 29 знакомых, так что найдется комната, в которой ни у одного, ни у другого знакомых нет. Переселим одного из двоих в такую комнату. Если после этого опять какие-то два знакомых школьника окажутся в одной комнате, то выполним еще одно переселение. Так будем действовать, пока будем находить знакомых в одной комнате.

Если после этого все знакомые некоторого школьника A оказались в одной комнате и число этих знакомых больше 1, то рассмотрим одного из этих знакомых – школьника B. Подумаем, что может помешать поселить B в некоторую новую комнату, в которой у него нет ни одного знакомого? Только то, что именно в этой комнате живут все знакомые одного из его знакомых.

Комнат, куда можно пытаться переселять школьника B, не менее $60 - 1 - 30 = 29$, поскольку одну из 60 комнат занимает сам школьник и не более 30 комнат занимают его знакомые. Поскольку знакомых у школьника B не более 30, причем один из них – это школьник A, то из наличия препятствий к поселению B во все комнаты, где у него нет знакомых, следует, что B знаком, кроме A, с 29 школьниками и у каждого из этих школьников все знакомые, кроме B, живут в одной комнате. Теперь ясно, что взяв любого отличного от B школьника C, знакомого со школьником A, мы можем переселить C в новую комнату. После ряда таких переселений условие задачи будет удовлетворено.

13. Поскольку AA_1, BB_1, CC_1 – высоты, то четырехугольники ABA_1B_1 и BCB_1C_1 – вписанные, значит, $\angle C_1BM = \angle C_1B_1A = \angle A_1B_1C = \alpha$. Так как C_1M – медиана прямоугольного треугольника BC_1C, выходящая из прямого угла, то $\angle BC_1M = \alpha$, откуда $\angle YC_1X = \angle YB_1X = \alpha$. Точки X и Y лежат в одной полуплоскости с границей BC. Предположим для определенности, что в этой же полуплоскости лежит и вершина A. Тогда четырехугольник XYC_1B_1 – вписанный, и $\angle YXC_1 = \angle YB_1C_1 = \angle C_1BM$. Значит, $XY \parallel BC$.

14. Поскольку $\max(a,b) \geq a \geq \min(a,c)$, из условия задачи следует неравенство $\max(c,1997) \leq \min(b,1998)$, откуда $c \leq \max(c,1997) \leq \min(b,1998) \leq b$.

15. Пусть H – основание высоты, опущенной из A на BC. Угол BCD – прямой, так как BD – диаметр. Четырехугольник $BECD$ составлен из треугольников BCD и BCE, в которых DC и EH – высоты, опущенные на BC. Значит, $S_{BECD} = \frac{1}{2}BC(EH + CD)$. Поскольку $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH$, достаточно доказать равенство $EH + CD = AH$. Сумма $EH + CD$ есть сумма проекций отрезков CE и CD на прямую AE (прямые AE и DC параллельны как перпендикуляры к BC). Отрезок AH есть сумма проекций отрезков AD и DC на прямую AE. Проекции отрезков CE и AD на прямую AE равны, поскольку $ADCE$ – равнобочная трапеция.

16. Пусть закрытый мост M соединяет острова A и B. Расстояние (наименьшее число мостов) между какими-то островами может увеличиться при закрытии моста M только в том случае, когда до закрытия любой кратчайший путь между этими островами проходил через M. Кроме того, ясно, что любой участок кратчайшего пути тоже является кратчайшим путем, и кратчайший путь не может проходить через один остров два раза.

Предположим, что утверждение задачи не выполняется, т.е. на каждом острове кто-то живет. Сначала докажем, что после закрытия моста M с острова A можно добраться до острова B. Для этого рассмотрим человека, живущего на острове A. Пусть его друг, расстояние до которого увеличилось на один мост, живет на острове X. Поскольку кратчайший путь от A до X должен был проходить через мост M, он состоял из переезда через M и некоторого кратчайшего маршрута от B до X, который при этом не проходил через M. Значит, от A до B после закрытия моста M можно добраться, проехав сначала от A до X, а потом от B до X.

Рассмотрим кратчайший путь между островами A и B после закрытия моста M. Выберем остров C посередине или «почти посередине» этого пути, т.е. так, чтобы расстояния от C до A и B отличались не более чем на 1. Пусть Y – тот остров, расстояние от C до которого увеличилось на один мост. Рассмотрим кратчайший путь от C к Y до начала ремонта. Пусть, например, он шел сначала от C к A, потом через мост M на B, а потом от B к Y. Рассмотрим вместо этого путь, который сначала идет от C к B (по участку кратчайшего пути от A к B), а потом от B к Y так же, как и в первом пути. Этот путь CBY не длиннее исходного пути $CABY$, так как участок CB отличается от участка CA не более чем на 1. Значит, существовал кратчайший путь от C к Y, не проходящий через мост M. Это противоречит тому, что расстояние от C до Y увеличилось.

17. Всякая проходящая через центр куба плоскость делит куб на две части, симметричные относительно центра куба. Обратно, всякая плоскость, делящая куб на части равного объема, проходит через центр куба. Действительно, в противном случае можно было бы параллельно перенести плоскость, чтобы она стала проходить через центр куба. При таком движении объем одной из частей куба увеличится, а объем другой – уменьшится, что невозможно, так как после переноса объемы опять должны быть равными.

Итак, обе плоскости проходят через центр куба. Каждая из образовавшихся четвертей куба представляет собой объединение нескольких пирамид с вершинами в центре куба. Высоты этих пирамид равны половине ребра куба. Следовательно, объем любой из четвертей куба равен одной шестой длины ребра куба, умноженной на площадь соответствующей части поверхности куба. Поэтому плоскости делят поверхность куба на части равной площади.

18. В силу свойства вписанных углов, $\angle EFD = \angle EOD = \angle BAD = \angle BCD$, поэтому четырехугольник $BFDC$ – вписанный. Тогда

$$\angle BCF = \angle BDF = \angle OEF = \angle OAB = \angle ACD,$$

откуда $\angle BCA = \angle FCD$.

19. Проведем все вертикали и горизонтали, пересекающие многоугольник. Пусть в результате получилось n вертикальных прямых и m горизонтальных. Поскольку каждая из этих прямых пересекает стороны многоугольника по крайней мере в двух точках, то достаточно доказать неравенство $m + n \geq 20$. Действительно, если $m + n \leq 19$, то $mn \leq 90$.

20. Пусть O – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, K и L – ее проекции на стороны BC и AD, M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Пусть P и Q – середины отрезков AO и OB соответственно. Так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная из прямого угла, равна половине гипотенузы, то $MP = BO/2 = KQ$, $LP = AO/2 = MQ$. Поскольку треугольники AOL и BOK подобны, $\angle APL = \angle BQK$, также $\angle APM = \angle AOB = \angle BQM$, значит, $\angle MPL = \angle MQK$. Следовательно, $\Delta MPL = \Delta KQM$ и $ML = KM$. Аналогично, $KN = NL$, и точки K и L симметричны относительно прямой MN.

21. Пусть N – сумма чисел на одном листе, n – наибольшее целое число, для которого $2^n \leq N$. Тогда сумма чисел на всех листах равна $10N$. Если никакая степень двойки не встречается более 5 раз, то их сумма не превосходит

$$5\left(2^n + 2^{n-1} + \ldots + 1\right) = 5\left(2^{n+1} - 1\right) = 10 \cdot 2^n - 5 < 10N.$$

22. Могут. Сопоставим городам числа $c_1, c_2, \ldots, c_{1998}$ так, чтобы все суммы $c_i + c_j$ пар чисел были различными (например, можно положить $c_i = 2^i$). Пусть цена билета между двумя городами равна сумме чисел, сопоставленных этим городам. Тогда все цены различны, и стоимость любого кругового маршрута равна $2(c_1 + c_2 + \ldots + c_{1998})$.

23. По теореме о вписанном угле, угол $\angle EFC$ равен половине величины дуги EC окружности ECF. По теореме об угле между хордой и касательной, $\angle ECA$ тоже равен половине дуги EC. Поскольку четырехугольник $ADEC$ вписанный, $\angle ECA = \angle EDB$. Таким образом, $\angle EFC = \angle EDB$. Значит, прямые AB и CF параллельны. Обозначим через G точку пересечения прямых AE и BK. Поскольку прямые BC и AG пересекаются на медиане KD треугольника ABK, то $CG \| AB$.

Значит, G – точка пересечения прямых CF и BK. Утверждение задачи доказано.

24. Применим равенство задачи несколько раз:

$$P(x,y)=P(x+y,\ y-x)=$$
$$=P\left((x+y)+(y-x),\ (y-x)-(x+y)\right)=P(2y,-2x).$$

Многочлен $P(x, y)$ есть сумма одночленов вида $a_{kl}x^ky^l$ (в частности, a_{00} – свободный член). Среди всех коэффициентов a_{kl}, где $k+l>0$, выберем наибольший по модулю. Соответствующий член имеет вид Ax^my^n. Подставим: $A(2y)^m(-2x)^n$. Получили коэффициент, по модулю больший A. Значит, $P(x, y)$ – константа.

25. Применим индукцию. При $n=1$ имеем очевидное равенство. Пусть $n>1$ и для всех меньших значений неравенство уже доказано. Пусть $\vec{s}$ – сумма векторов левой части неравенства. Можно считать, что $\vec{s}\neq 0$. Если векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\vec{s}$ не сонаправлены, то будем поворачивать вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ так, чтобы его проекция на $\vec{s}$ возрастала. При этом проекция на $\vec{s}$ суммы векторов будет возрастать (а значит, будет возрастать и длина этой суммы, т. е. левая часть неравенства). Таким образом мы добьемся или того, что конец вектора совпадет с началом следующего за ним по часовой стрелке вектора, или того, что вектор станет сонаправлен с $\vec{s}$. В первом случае можно заменить два «склеившихся» вектора на их сумму и применить предположение индукции. Во втором – рассмотреть вектор $\overrightarrow{A_3A_4}$ и поворачивать его.

26. Поскольку число n^2+1 не является точным квадратом, все его делители можно разбить на пары вида $\left(d,\left(n^2+1\right)/d\right)$. Значит, $\tau\left(n^2+1\right)$ четно. Если n четно, то все делители d числа n^2+1 нечетны и можно считать, что $d<n$. Получили: $\tau\left(n^2+1\right)<n$ при четных n.

Предположим, что при $n\geq N$ последовательность $\tau\left(n^2+1\right)$ возрастает. Так как число $\tau\left(n^2+1\right)$ четно, то при $n\geq N$ имеем $\tau\left((n+1)^2+1\right)\geq\tau\left(n^2+1\right)+2$, откуда по индукции $\tau\left((N+k)^2+1\right)\geq\tau\left(N^2+1\right)+2k$. При достаточно большом k (таком, что $N+k$ четно) неравенства $N+k>$ $>\tau\left((N+k)^2+1\right)\geq\tau\left(N^2+1\right)+2k$ дают противоречие.

НАПЕЧАТАНО В 1998 ГОДУ

Дорогие читатели!

Мы надеемся, что вы уже подписались на наш журнал на первое полугодие 1999 года. Если же что-то помешало вам сделать это вовремя, не расстраивайтесь – оформить подписку можно и в помещении редакции (кстати, это избавит вас от возможных недоразумений, связанных с доставкой через почту).

В редакции можно также приобрести журналы «Квант» и Приложения к ним за прошлые годы.

Наш адрес: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», телефон: 930-56-48.

Мы ждем вас ежедневно с понедельника по пятницу с 11 до 16 часов.

Внимание!

Информацию о «Кванте» (и других образовательных и научно-популярных журналах) можно найти в ИНТЕРНЕТЕ, а именно в интернет-журнале «Курьер образования».

***Адреса:* http://www.courier.com.ru**
http://www.iph.ras.ru/~mc

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
А.Н.Балдин, В.А.Иванюк, А.Е.Пацхверия, Д.Н.Гришукова, П.И.Чернуский, П.А.Шевелев

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №