



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин,
С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин,
В.Н.Дубровский, А.А.Егоров,
А.Р.Зильберман,
С.С.Кротов (директор «Бюро Квантум»),
А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаев, Н.Х.Розов, Ю.П.Соловьев,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора),

И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,
А.И.Шапиро

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро Квантум

©1999, Президиум РАН,
Фонд Осипяна, «Квант»

- 2 Математика в первой половине XX века. *В.Тихомиров*
10 Длинная дорога от входа к выходу. *Л.Ашкинази*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 14 Задачи М1666–М1675, Ф1673–Ф1682
16 Решения задач М1641, М1646–М1650, Ф1658–Ф1667
22 Гауссовы суммы. *В.Сендеров, А.Спивак*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 25 Задачи
26 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
26 Заключительный этап конкурса «Математика 6–8»
28 Мои лингвистические исследования. *А.Котова*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 30 Такие простые качели. *П.Хаджи, Л.Глазова, В.Личман*
31 Горки, электрические токи и Кулон. *Е.Ромишевский*
35 Физическая оптика и два верблюда. *А.Стасенко*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Время

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 37 Поляризованный диэлектрик и его энергия. *Е.Выродов, В.Слепнев*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 40 Вписанные многоугольники. *М.Панов, А.Спивак*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 44 Волшебная линза. *А.Митрофанов*

НАМ ПИШУТ

- 45 Заряженная капля

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 46 Об амплитудах колеблющихся величин. *А.Овчинников, В.Плис*

ВАРИАНТЫ

- 49 Материалы вступительных экзаменов 1998 года

- 5 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- II Коллекция головоломок
III Шахматная страничка
IV Игрушки по физике



Математика в первой половине XX века

В. ТИХОМИРОВ



УБЕЖ XIX И XX ВЕКОВ ознаменовался невиданными достижениями в науке и технике. В 1895 году Рентген открывает лучи, получившие его имя, Попов и Маркони изобретают радио. В 1896 году Антуан Беккерель открывает естественную радиоактивность солей урана. В 1900 году Планк, исходя из гипотезы о квантах, строит теорию теплового излучения, в том же году рождается слово «ген» и начинается блистательный период развития генетики. В 1903 году поднимается над землей и парит в воздухе в течение 59 секунд самолет братьев Райт. В 1905 году Эйнштейн закладывает основания специальной теории относительности (одновременно к тем же концепциям приходит Пуанкаре), дает новый толчок квантовой теории (строит теорию фотоэффекта), создает основы теории броуновского движения, впервые публикует формулу $E = mc^2$...

Многим тогда — на рубеже прошлого и нашего веков — казалось, что мир движется к процветанию и прогрессу, что в недалеком будущем его ждет эра благоденствия и наступит, наконец, царство разума.

Увы, эти надежды не оправдались — в нашем веке случилось много трагического: войны, геноцид, оскудение природы, чудовищные преступления... Ныне человечество стоит перед тяжелейшими испытаниями, и если ему не суждено будет объединиться и согласованно следовать принципам разума, оно может и погибнуть. (В прошлом веке невозможно было представить себе такое — Земля казалась бесконечно богатой, и угроза существованию жизни никем не ощущалась.)

Во всех метаморфозах нашего столетия наука (и, в частности, математика) играла огромную роль. Что же произошло в математике за это

столетие? Поразмышляем об этом, опираясь на опыт первой его половины.

Надо сразу сказать, что XX век был великой эпохой в истории математики. Достижения математики в этом столетии, пожалуй, превосходят все, что было создано в ней за предшествующие две с половиной тысячи лет. Но как оценивать достижения в науке? Сначала имеет смысл поговорить о том, чем математика может служить человечеству и отдельным ее представителям.

О целях математического творчества

В прошлом веке состоялся диалог между двумя знаменитыми учеными — французским математиком Жаном Фурье и немецким математиком Карлом Якоби. Фурье утверждал, что цель математики — содействовать объяснению природы. Якоби возражал, он настаивал на том, что цель математики — прославление человеческого разума. Тем самым Якоби допускал наличие некоего «внутреннего» смысла в труде математика, столь же трудно объяснимого, как смысл поэзии или искусства вообще.

Но кроме познания природы и «прославления разума» стимулом для математических исследований на протяжении всего Нового времени служили и практические приложения — инженерные, конструкторские, экономические, биологические и иные. Не следует забывать еще и о том, что математика всегда была подспорьем для философского осмысления мира.

Математика XX века прославлялась во всех этих сущностях, и далее мы постараемся это показать. Но пока расскажем о некоторых особенностях самого исторического развития математики в нашем столетии.

Весь мир стремительно менялся, многое менялось и в математической действительности.

Математические школы

До начала XX века математика развивалась, в основном, в национальных рамках.

Весь XIX век прошел под знаком состязания двух крупнейших математических школ — французской и немецкой. (Яркое, хотя и пристрастное, изложение этого великого соперничества, в котором в начале века царствовал Гаусс, а в конце века — Пуанкаре, читатель может извлечь из замечательной книги Ф. Клейна «Лекция о развитии математики в XIX столетии» — М.: Наука, 1989.)

Но уже на пороге двадцатого столетия в научную деятельность активнейшим образом включились итальянская, венгерская, австрийская, шведская и некоторые другие математические школы. В середине XIX века образовалась российская, в основном петербургская, школа, во втором десятилетии XX века она пополнилась московской математической школой, ставшей едва ли не крупнейшей в мире в середине тридцатых годов. На рубеже веков появились первые крупные математики на американском континенте, после первой мировой войны начала формироваться замечательная польская математическая школа...

Так было в начале века. Сейчас положение меняется. Во второй половине столетия математика стала приобретать характер истинно интернациональной науки. Начала осуществляться мысль Гильберта о том, что для математики весь культурный мир представляет собой единую страну.

Существенно расширились направления исследований, изменились приоритеты.

Научные направления в математике начала и конца века

Представление о том, какие направления преобладали в математике в начале XX века, дает список секций на Втором парижском математическом конгрессе 1900 года (он оставил особый след в истории математики благодаря тому, что на этом конгрессе Давид Гильберт выступил с докладом о математических проблемах). На этом конгрессе работали четыре основные секции: арифметики и алгебры, анализа, геометрии, механики и математической физики, и еще две: истории и библиографии и преподавания и методологии.

Об изменениях, произошедших в математике в XX веке, свидетельствует перечень секций современных конгрессов: математическая логика и основания математики; алгебра; теория чисел; геометрия; топология; алгебраическая геометрия; комплексный анализ; группы Ли и теория представлений; вещественный и функциональный анализ; теория вероятностей и математическая статистика; дифференциальные уравнения с частными производными; обыкновенные дифференциальные уравнения; математическая физика; численные методы и теория вычислений; дискретная математика и комбинаторика; математические аспекты информатики; приложения математики к нефизическим наукам; история математики; преподавание математики.

Многие из названных направлений родились или оформились лишь в XX столетии. При этом произошла смена приоритетов. Если до второй мировой войны основным направлением в математике был анализ и его различные ответвления (уравнения математической физики, теория вероятностей, теория функций комплексного переменного), то после войны вкусы многих математиков стали смещаться в сторону топологии, многомерного комплексного анализа, алгебраической геометрии, теории групп Ли и теории представлений и т.п. Самый шумный успех и самые престижные премии в подавляющем большинстве стали получать математики, работающие именно в этих областях.

Но эта смена приоритетов произошла в те времена, которые находятся за

пределами избранного нами периода. Какие же новые направления родились в начале нашего века? Прежде всего надо назвать три новые ветви – *функциональный анализ, топологию и теорию функций*. С краткого обзора этих направлений начнем наш обзор достижений математики в первой половине нашего столетия.

Функциональный анализ

Одним из важнейших событий развития математики, происшедшего в период от начала века до первой мировой войны, было рождение функционального анализа, в котором воссоединились многие концепции классического анализа, линейной алгебры и геометрии.

Еще в конце прошлого века были обнаружены аналогии между теорией систем линейных уравнений конечного числа переменных и их бесконечномерных аналогов – линейных интегральных уравнений. Решающий сдвиг в теории был сделан Фредгольмом в 1900 году. Интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t, \tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad (1)$$

где $y(\cdot)$ – известная функция, а $x(\cdot)$ – искомая, Фредгольм заменил системой линейных уравнений

$$x_i - \lambda h \sum_{j=0}^n k_{ij}x_j = y_i, \quad (2)$$

рассмотрев вместо интеграла интегральные суммы:

$$t_i = a + ih, \quad x_i = x(t_i), \quad y_i = y(t_i),$$

$$k_{ij} = K(t_i, \tau_j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Методы решения систем линейных уравнений были разработаны в XVIII веке (о них дается первоначальное понятие в школе, а в полном объеме – на начальной стадии обучения в университете). Применяв эти методы и перейдя к пределу, Фредгольм нашел условия разрешимости и алгоритмы нахождения решений уравнений (1). Это послужило стимулом к разработке теории, сочетавшей в себе элементы алгебры и геометрии, но в бесконечномерных пространствах. Так родился *линейный функциональный анализ*.

Существенным разделом функционального анализа явилась также *теория квадратичных форм*, начала

которой были заложены Гильбертом (1904–1906). Квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

после поворота осей приводится к диагональному виду $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$. Гильберт доказал аналог этого утверждения для квадратичной формы

$$Q(x(\cdot)) = \int_a^b \int_a^b K(t, \tau)x(t)x(\tau)dt d\tau, \\ K(t, \tau) = K(\tau, t),$$

где аргументом является не вектор $x = (x_1, x_2)$, а функция $x(\cdot)$ с интегрируемым квадратом:

$$\int_a^b x^2(t)dt < \infty.$$

Совокупность таких функций была названа *гильбертовым пространством* (ее обозначают L_2). Теория квадратичных форм в гильбертовых пространствах явилась математической базой квантовой механики.

Рождение топологии

Слово «топология» относят ныне к двум разделам математики. И изначально для каждого из них имелись свои определения при слове «топология». Одну топологию, родоначальником которой был Пуанкаре, называли долгое время *комбинаторной*, за другой (у истоков ее были исследования Кантора) закрепилось название *общей* или *теоретико-множественной*.

Общая топология примыкает к теории множеств и лежит в основании математики (в соответствии с планировкой этой науки, которая была намечена последователями Кантора – Гильбертом, Г.Вейлем и др.). Это аксиоматическая теория, призванная исследовать такие понятия, как «предел», «сходимость», «непрерывность» и т.п. Основы общей топологии в нашем веке были заложены немецким математиком Хаусдорфом, польским математиком Куратовским, знаменитым представителем московской школы П.С.Александровым и другими.

Комбинаторная топология – это раздел геометрии. Она изучает свойства геометрических фигур, остающихся неизменными при взаимно однозначных и непрерывных отображениях. Кантор построил взаимно однознач-

ное отображение отрезка на квадрат. Но взаимно однозначного и *непрерывного* отображения отрезка на квадрат построить невозможно. Это доказывается в *теории размерности* – разделе топологии, который появился на свет во втором десятилетии нашего века. В его создании принимали участие Пуанкаре (поставивший задачу и наметивший путь ее решения), крупнейший голландский математик нашего века Брауэр, великий французский математик Лебег, австрийский математик Менгер и выдающийся представитель московской школы (трагически погибший в возрасте 26 лет) Урысон.¹

Ныне слово «комбинаторная» при определении «геометрической» топологии оказалось отброшенным, и когда произносят слово «топология» без дополнительного определения, имеется в виду топология, рожденная Пуанкаре.

Судьба двух топологий оказалась различной. Общая топология служит, в основном (вспомним Якоби), прославлению человеческого разума, не участвуя непосредственно в постижении законов природы или прикладных исследованиях.

Долгое время и геометрическая топология воспринималась как наука «далекая от жизни», призванная лишь прославлять человеческий разум, но в наше время выяснилось, что она имеет самое непосредственное отношение к объяснению устройства мироздания. Помимо этого, топологические методы ныне пронизывают фактически все разделы математики – анализ, теорию дифференциальных уравнений и т.п. Сейчас топология – одна из центральных областей математики.

Теория функций

В начале века Лебег завершил построение теории меры и интегрирования. В XIX веке вслед за Коши и Риманом интеграл $\int_a^b f(x)dx$ понимали как предел римановых сумм: за приближенное значение интеграла брались выражения вида

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

¹ О теории размерности см., например, в статье «Павел Самуилович Урысон» в «Кванте» №3 за 1998 год.

где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ – разбиение отрезка, а ξ_i – некоторая точка отрезка $[x_i, x_{i-1}]$.

Лебег же стал поступать по-другому. Он разбивал не ось абсцисс, а ось ординат точками $\dots y_{i-1} < y_i < \dots$, мотивируя это тем, что для разрывной функции невозможно выбрать точку ξ_i , которая адекватно «представляла» бы функцию f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Но множества E_i на оси абсцисс, для которых $y_{i-1} \leq f(x) < y_i$, у достаточно сложных функций могут быть устроены весьма причудливо, и для построения теории интегрирования необходимо было в первую очередь построить *теорию меры*, т.е. научиться измерять такие множества. Это было сделано Борелем и Лебегом.

Меру множества E (скажем, на отрезке $[0, 1]$) Лебег определял следующим образом. Нижнюю грань сумм длин интервалов, покрывающих E , назовем *верхней мерой* E . Верхняя мера определена для любого множества. Множество E называется *измеримым по Лебегу*, если сумма верхней меры этого множества и верхней меры его дополнения (по отношению к отрезку $[0, 1]$) равна единице. Тогда верхнюю меру E называют *мерой Лебега* множества E и обозначают $\text{mes}(E)$.

Римановы суммы для вычисления интеграла Лебег заменил суммами вида $\sum_i \eta_i \text{mes}(E_i)$, где η_i – некоторая точка отрезка $[y_{i-1}, y_i]$. Он весьма выразительно описал преимущество своего метода. «В методе Коши, – писал Лебег, – оперируют так, как делает это неопытный клерк, который подсчитывает монеты и кредитные билеты соответственно тому, как они попадают под руку. Тогда как мы оперируем, как опытный и методичный клерк, говорящий: у меня $\text{mes}E_1$ монет по одному франку, стоящих $1 \times \text{mes}E_1$, у меня $\text{mes}E_2$ монет по два франка, стоящих $2 \times \text{mes}E_2$, у меня $\text{mes}E_5$ монет по пять франков, стоящих $5 \times \text{mes}E_5$, ... Итого, у меня $1 \times \text{mes}E_1 + 2 \times \text{mes}E_2 + 5 \times \text{mes}E_5 + \dots$ франков. Конечно, и тот и другой клерки придут к одному и тому же результату. Но в случае сумм неделимых, число которых бесконечно, разница двух методов капитальна.» На базе новой теории меры родилось новое направление в теории функций – *метрическая теория функций*.

Трансформировалась и теория множеств. У истоков нового направления стояли три французских ученых – Борель, Бэр и Лебег. Они заложили основания *дескриптивной теории множеств* – теории числовых множеств, где стали изучать строение сложных, причудливо устроенных множеств.

В двадцатые годы ведущая роль в теории функций перешла к русской школе, которую представляли Николай Николаевич Лузин и его ученики П.С.Александров, Н.К.Бари, А.Н.Колмогоров, Д.Е.Меньшов, М.Я.Суслин, А.Я.Хинчин и др. Они и заложили основания московской математической школы. Сделав первые шаги в теории функций, ученики Лузина пошли в дальнейшем каждый своим путем. Колмогоров и Хинчин преобразовали теорию вероятностей, Александров и Урысон – топологию, Люстерник и Шнирельман – нелинейный анализ, Новиков внес выдающийся вклад в математическую логику, Лаврентьев сделал крупнейшие открытия в комплексном анализе и механике. Лишь Меньшов и Бари продолжали дело своего учителя. В тридцатые годы ни одна математическая школа мира не располагала таким созвездием выдающихся ученых.

Теперь настала пора рассказать о том, какую роль сыграла математика в постижении законов природы.

Математика и физика

В конце прошлого века казалось, что физика – завершенная область знаний.² По легенде, когда некий юноша обратился к мэтру с просьбой о напутствии – он хотел стать физиком, – мэтр сказал, что не видит у физики перспектив: на почти безоблачном небе отрывых истин видны лишь два небольших облачка – опыт Майкельсона и законы излучения. Скоро они рассеются, и в физике нечего будет делать.

Через несколько лет из первого облачка родилась *специальная теория относительности*, а из второго – *квантовая механика*, которые перевернули все наше представление о мире.

Специальная теория относительности была создана в 1904–1906 гг. усилиями Лоренца, Эйнштейна и Пуанкаре. Устройство физического мира, описываемого этой теорией,

² Макс Планк. (Прим. ред.)

было очень непривычно, оно противоречило физической интуиции, выработанной на протяжении последних трех веков.

Математические корни специальной теории относительности были вскрыты выдающимся немецким математиком Германом Минковским. Им была установлена поразительная связь специальной теории относительности с геометрией Лобачевского.

Проиллюстрируем эту мысль. Пусть два самолета движутся навстречу друг другу, и один летит с постоянной скоростью v (относительно Земли), а другой – со скоростью v' (относительно нее же). Согласно ньютоновской механике, скорость второго самолета относительно первого равна $v + v'$, а специальная теория относительности приводит к другой формуле: $\frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$, где c – скорость света.

Если бы самолеты летели в одной плоскости, а не вдоль одной прямой, то формула сложения скоростей оказалась бы связанной с преобразованием плоскости Лобачевского. Кратко можно сказать так: *пространство скоростей в специальной теории относительности реализуется, как плоскость Лобачевского, где формула сложения скоростей определяется с помощью движения этой плоскости.*³

При этом выяснилось, что время и пространство нельзя рассматривать изолированно, что наш мир *четырёхмерен*. В итоге многомерная геометрия приобрела физический смысл.

Это стало вдохновляющим событием для математиков: теории, представлявшие многим абсурдной заумью, вдруг оказались у оснований всего мироздания.

Через десять лет Эйнштейн создаст общую теорию относительности, где рушит представления о «плоском» мире. Геометрия мира оказывается «искривленной» и связанной с тяготением. Показания приборов, совершивших путь из одной точки в другую, как оказалось, должны зависеть от траектории движения. В основании этого явления лежит одно

³ Объяснению смысла этой фразы и многим другим связям специальной теории относительности и геометрии Лобачевского посвящена книга В. Н. Дубровского, Я. А. Сморodinского и Е. Л. Суркова «Релятивистский мир» (М.: Наука, 1984, серия «Библиотечка «Квант», вып. 34).

из важнейших понятий геометрии – *связность*, которая определяет параллельное перенесение на искривленных поверхностях. Это понятие было предметом изучения геометров итальянской школы начала века (Леви-Чивита и др.).

Все это повлекло за собой интенсивнейшее развитие геометрии в двадцатые и тридцатые годы (и топологии – в наше время).

В двадцатые годы человечество ожидал еще один шок – рождение квантовой механики. Рушился один из незыблемейших бастионов научного мирознания прошлого – предсказуемость будущего по прошлому. Выяснилось, что микромир принципиально непредсказуем, что можно определить лишь *вероятность* появления электрона на определенном месте экрана, расположенного за отверстием, через которое этот электрон пропускается. Это казалось невероятным даже для такого величайшего ученого и одного из основоположников квантовой теории, как Эйнштейн. «Я не верю в Бога, играющего в кости», – не уставал повторять он.

Постараемся пояснить, какая математика стоит за всем этим. В классической механике движение материальной частицы характеризуется ее координатой x и значением ее импульса p . Считается, что их можно вычислить одновременно и дальнейшее движение однозначно определяется дифференциальным уравнением.

В квантовой механике положение материальной частицы определяется волновой (комплексной) функцией $X(x)$, принадлежащей гильбертову пространству L_2 на прямой. Эта функция удовлетворяет условию

$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(x)|^2 dx = 1$ и определяет вероятность $P_X([a, b])$ нахождения частицы (в данный момент времени) в промежутке $[a, b]$ по формуле

$$P_X([a, b]) = \int_a^b |X(x)|^2 dx.$$

Импульс характеризуется другой функцией $P(p)$. Она также определена на всей прямой и удовлетворяет

условию $\int_{-\infty}^{+\infty} |P(p)|^2 dp = 1$. Вероятность

$P_P([\alpha, \beta])$ того, что импульс частицы находится в пределах $\alpha \leq p \leq \beta$, за-

дается равенством

$$P_P([\alpha, \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} |P(p)|^2 dp.$$

Движение частицы определяется уравнением с частными производными – *уравнением Шредингера*.

Одним из важнейших положений квантовой механики является связь волновой функции и функции импульса посредством *преобразования Фурье*, что выражается формулой

$$P(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} X(x) e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx \quad (3)$$

(\hbar – постоянная Планка). Наиболее вероятные значения положения частиц и величины импульса (их средние значения) задаются формулами

$$\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x |X(x)|^2 dx, \quad \eta = \int_{-\infty}^{+\infty} p |P(p)|^2 dp,$$

а если считать, что эти средние равны нулю, то разброс координаты и импульса задается равенствами

$$D_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |X(x)|^2 dx, \\ D_P^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 |P(p)|^2 dp.$$

Из соотношения (3) выводится неравенство $D_X^2 D_P^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$, называемое *принципом неопределенности Гейзенберга* и выражающее тот факт, что мы не можем точно знать одновременно и положение материальной частицы, и ее импульс. С этим рухнула надежда на детерминизм и познаваемость микромира.

(Так случилось, что математические основания квантовой механики были созданы Гильбертом и его последователями незадолго до рождения самой науки. В частности, равносильность двух подходов к описанию микромира Гейзенберга и Шредингера была достаточно быстро установлена благодаря тому, что один из активных участников построения новой науки, Макс Борн, незадолго до того слушал лекции Гильберга по основам функционального анализа и теории бесконечномерных квадратичных форм.)

А вот еще один сюжет.

Когда английский ботаник Броун обнаружил под микроскопом хаоти-

ческое движение малых частиц в жидкости, ни математики, ни физики поначалу не придали этому особого значения. Теорию броуновского движения на физическом уровне дали Эйнштейн (все в том же 1905 году, когда он заложил основания специальной теории относительности и сделал едва ли не решающий вклад в создание будущей квантовой теории) и польский физик Смолуховский. Начала математической теории были построены Норбертом Винером. При этом, в частности, обнаружилось, что траектории броуновских частиц – непрерывные функции, не имеющие производных.

(Первый пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции построил Вейерштрасс в 1872 году. Математический мир воспринял это открытие со скептицизмом: многим казалось, что это монстр, не имеющий никакого отношения к действительности. Один из наиболее известных математиков XIX века Шарль Эрмит восклицал: «Я с ужасом отворачиваюсь от этих чудовищ – непрерывных функций без производных». И снова рухнуло привычное воззрение о том, что в мире все «гладко», оказалось, что мир населен «монстрами» и «чудовищами».)

Полная математическая теория броуновского движения была построена А.Н.Колмогоровым, и это также явилось одним из крупнейших завоеваний математики в рассматриваемый нами период времени.

Развитие абстрактных разделов математики

Однако и стремление прославить человеческий разум, не привязываясь к какой-либо практической цели, стимулировало усилия многих и многих ученых, нередко, впрочем, увводя их в такие дебри, которые имели мало соприкосновений хоть с какой-либо реальностью.

В первой половине нашего века возникла концепция аксиоматического построения всей математики. Согласно этой концепции, по словам А.Н.Колмогорова, «в основе всей математики лежит чистая теория множеств» – духовное детище Георга Кантора. Эта теория оставила глубокий след в истории математики. Многим казалось, что Кантору суждено было найти такое место для математики, которое Гильберт назвал «раем».

(Когда обнаружили противоречия в теории множеств и многие стали выражать сомнения в ее основаниях, Гильберт воскликнул: «Никому не дано изгнать из нас канторовского рая».)

Развитие аксиоматического метода было связано с критическим пересмотром оснований, на которых зиждилась математика.

В двадцатые годы необыкновенного развития достигла алгебра, произошла алгебраизация всей математики. Среди тех, кто в значительной мере способствовал этому процессу, надо назвать Эмми Нётер и ее ученика Ван-дер-Вардена. Была аксиоматизирована элементарная геометрия (Гильберт) и теория вероятностей (Колмогоров). Об общей топологии и теории меры уже говорилось. Стали развиваться и многие другие аксиоматические теории.

В конце тридцатых годов группа французских математиков объединилась в желании построить всю математику на аксиоматической основе. Результатом их деятельности стал многотомный трактат «Элементы математики», изданный под псевдонимом уроженца Нанси генерала Никола Бурбаки. Фундаментом являлась теория множеств. Затем строился первый этаж: упорядоченные структуры, алгебра, общая топология, теория меры; затем должен был быть построен второй этаж, где смешивались алгебраические и геометрические структуры с топологией, порядком и т.п. Эта попытка осталась незавершенной, сама же цель, по-видимому, утопична (ибо невозможно поспеть за развитием науки), но нельзя отрицать значения усилий, приведших, в частности, к созданию языка, на котором математики понимают друг друга.

Математика и военно-промышленный комплекс

Математика участвовала во многих деяниях века, некоторые из которых едва не подвели человечество к грани всемирной катастрофы.

В частности, огромное число математиков «по обе стороны баррикад» приняли участие в разнообразных программах по созданию новейших средств вооружения и ведения военных действий.

Лучи Рентгена и радиоактивность Беккереля постепенно подвели уче-

ных к мысли о «раскрепошении» атомной энергии. Первоначально физики обходились без математиков. Но создание атомного, а тем более – водородного оружия потребовало построения сложнейших математических моделей и больших расчетов. В создании бомбы в той или иной мере приняли участие многие выдающиеся математики. В итоге были пересмыслены принципы вычислительной математики и созданы мощнейшие вычислительные машины. По-видимому, не настало еще время (во всяком случае в нашей стране) для объективного анализа вклада математиков в создание атомного и ядерного оружия, но невозможно сомневаться в том, что этот вклад был очень велик.

Братья Райт взлетели без математики, но в дальнейшем потребности развития авиации стали стимулом к рождению аэродинамики, которая в начале века создала теорию полета. Среди классиков этой науки – «отец русской авиации» Николай Егорович Жуковский и его последователи (С.А.Чаплыгин, В.В.Голубев и другие). Они применяли в теории полета (и при этом интенсивно развивали) теорию функций комплексного переменного. В сороковые годы была создана сверхзвуковая аэродинамика.

Рождение радио также стимулировало развитие новых областей математики – теорию нелинейных колебаний. Среди создателей этой теории – наши выдающиеся ученые: Л.И.Мандельштам и его ученики и сотрудники – Н.Д.Папалекси, А.А.Андронов и другие.

Управление артиллерийским огнем и проблемы бомбометания оказали влияние на развитие многих разделов теории вероятностей (фон Нейман, Винер, Колмогоров).

Проблемы шифровки секретных сообщений и эффективной передачи их по каналам связи привели к рождению нового раздела в математике – теории информации (К.Шеннон) – и развитию теории кодирования.

Проблемы автоматического управления в промышленности и космической навигации стимулировали развитие оптимального управления (Л.С.Понтрягин, Р.Беллман). То же можно сказать и о многих других разделах прикладной и чистой математики.

Многое из свершенного под покровом тайны потом раскрывалось и становилось достоянием всего человечества.

Противостояние двух систем привело к невиданному развитию техники и (уже в наше время) к невероятному информационному взрыву, вызванному компьютеризацией. Создание первых компьютеров относится к концу того периода, который мы обозреваем, и роль математиков в их разработке весьма велика. (Американцы обычно подчеркивают выдающуюся роль фон Неймана в создании идеологии конструирования компьютеров и программирования.)

Математика, разумеется, участвовала и в гражданском строительстве, и в развитии инженерии, экономики, биологии – всего не назовешь. Среди выдающихся механиков и инженеров, внесших значительный вклад в развитие математики, назовем имена И.Г.Бубнова, Б.Г.Галеркина, А.Н.Крылова, С.П.Тимошенко, Дж.Тейлора, Т. фон Кармана... Этот список можно очень долго продолжать.

Математика и философия

Величие нашего века, в частности, можно усмотреть в том, что он нарушил, изменил, преобразовал почти все представления человечества об окружающем нас мире. И здесь математика сыграла выдающуюся роль.

Поколение, вступавшее в жизнь в начале века, взирало на мир иными глазами, чем мы. Тогда казалось, что наука близка к объяснению картины мироздания. Рационалистически мыслящие люди могли быть уверены, что мир познаваем, что Вселенная существует вечно, что она не имеет ни начала, ни конца (ни во времени, ни в пространстве); что Земля образовалась естественным путем; что естественным путем возникла жизнь на Земле и естественное развитие привело ко всему тому, что открыто перед нашими глазами.

И все это было подвержено в нашем веке тягчайшему испытанию.

Общая теория относительности Эйнштейна привела к развитию космологии, к теории Большого Взрыва, существованию начальной точки отсчета жизни Вселенной. (Она существует – согласно современным воззрениям – не больше 10^{14} лет.) Пространство «заполненной» Вселенной ока-

залось ограниченным, хотя и расширяющимся. Вопрос о «схлопывании Вселенной в точку» и тем самым о «конце света» остается открытым. Выдающуюся роль в создании космогонических теорий сыграл наш замечательный ученый А.А.Фридман. (А в самое последнее время появились фантастические теории множественности областей Вселенной, отличающихся направлением времени и т.п. (А.Д.Сахаров).)

В большинстве теорий о происхождении нашей Солнечной системы обнаружилось глубокие изъяны. (Еще более таинственным представляется происхождение Земли, жизни, их эволюция, происхождение человека.)

Были подвергнуты сомнению и многие основополагающие философские концепции.

Основной тезис постньютоновской научной философии состоял в том, что мир управляется дифференциальными уравнениями, иначе говоря, он полностью предсказуем. И только на ничтожном клочке этого упорядоченного мира находилась «противоправная» область, где царил Хаос: он утверждал себя лишь в азартных играх, где все-таки не все можно было предсказать. Паскаль, Ферма, Я.Бернулли и Лаплас описали первые законы Случая.

Но область Хаоса все росла и росла. Наука о случайном – теория вероятностей – развивалась и крепла. В двадцатом веке (во многом благодаря усилиям наших великих соотечественников – Чебышёва, Ляпунова, Маркова, Бернштейна и Колмогорова) она приобрела оформленные очертания и стала занимать все большее и большее место в толковании Царства Природы. Еще полвека назад казалось, что Царство Хаоса и Царство Порядка соизмеримы по занимаемым ими территориям. И лишь в наше время и этот бастион рухнул.

Многие ученые ныне исповедуют воззрение прямо противоположное ньютоново-лапласовскому, утверждая, что *все есть Хаос*. И они имеют много оснований для такого утверждения.

Была подвергнута сомнению идея «безграничных возможностей человека». Уже говорилось о новом направлении в математике, родившемся в сороковые годы, – теории информации. Норберт Винер включил теорию информации в более общую

научную дисциплину, которую он назвал словом «кибернетика». Рождение этой науки также связано с осмыслением многих философских концепций, и прежде всего с понятием сознания. Большинству людей казалось, что лишь человек наделен способностью мыслить. Но вот в сороковые годы Тьюрингом и Винером была декларирована идея *моделирования человеческого сознания*. Еще недавно мысль о том, что машина может выиграть у чемпиона мира по шахматам, многим казалась кощунственной. Но это ведь произошло! Обсуждение возможности создания искусственных существ, обладающих мышлением, также относится к новой философии, возникшей в наше время.

В начале века у многих (в частности, у Гильберта) была иллюзия возможности «разрешения всех проблем» (имеющая также большую философски-познавательную значимость, в частности, в связи с проблемой познаваемости). Казалось осуществимым записать аксиоматическую теорию в виде текста, прочитываемого машиной, и затем придумать алгоритм, с помощью которого машина сможет доказать любую теорему в рамках теории. Для элементарной геометрии это оказалось возможным (правда, «построенный» автомат должен трудиться неслышанно долго, чуть ли не до конца Света, прежде чем разберется в элементарной геометрии). Но по отношению к большинству теорий (в частности, к арифметике) это оказалось невозможным. Этот великий результат был доказан Гёделем (1931).

Кроме всего этого, необходимо сказать о проблемах, поставленных и решенных в нашем веке, о роли проблем в истории науки и т.п. Этому будут посвящены отдельные статьи, так что мы ограничимся лишь беглым обзором.

Проблемы

Всё в совокупности – и участие в постижении законов природы, и развитие абстрактной математики, и достижения в математике прикладной и размышления о философских началах мироздания – привело к зарождению новых областей и разделов, выдвиганию фундаментальных концепций, получению выдающихся результатов, развитию новых теорий и разработке эффективных методов.

«Невозможно отрицать глубокое значение, которое имеют определенные проблемы для продвижения математической науки вообще, и важную роль, которую они играют в работе отдельного исследования», — эти слова были сказаны Гильбертом во вступительной части его доклада, посвященного формулировкам математических проблем.

Нашему веку досталось от прошлых времен несколько великих проблем.

Самая старая из них — проблема Ферма — о неразрешимости в натуральных числах диофантова уравнения $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$. Она была поставлена в XVII веке. Две знаменитые проблемы в теории чисел — Гольдбаха и Эйлера — пришли из XVIII века. *Верно ли, что каждое нечетное число, большее 6, есть сумма трех простых?* С этим вопросом в 1742 году обратился к Эйлеру Христиан Гольдбах. Эйлер в ответ заметил, что для ответа на поставленный вопрос достаточно доказать, что *каждое четное число является суммой двух простых*.

Из проблем XIX века наиболее известны проблемы Римана о нулях дзета-функции и проблема континуума, поставленная Кантором.

В XX веке наиболее известен цикл проблем Гильберта, о котором мы упоминали. На первом месте в списке гильбертовских проблем стояла проблема континуума: *существует ли такое несчетное множество, которое можно однозначно отобразить в единичный отрезок, но при этом единичный отрезок нельзя отобразить однозначно в это множество? Иными словами, существует ли множество, большее по мощности, чем счетное, но меньшее, чем отрезок?*

Проблема Ферма оказалась разрешенной в нашем веке, правда в самом конце его. Проблема Гольдбаха оказалась «почти» решенной И.М.Виноградовым, доказавшим (1937), что любое *достаточно большое* нечетное число представимо суммой трех простых. Проблемы Эйлера и Римана стоят и по сей день.

Расскажем о решении нескольких проблем Гильберта. В значительной доле Гильберт оказался хорошим проводником, но в нескольких случаях интуиция изменила ему. Как правило, это оказалось напрямую связанным с тем оптимистическим взглядом на мир, который был свойствен лю-

дям, родившимся в прошлом столетии.

Заостряя вновь внимание на проблеме континуума, Гильберт исходил из возможности ее разрешения в ту или иную сторону: да или нет. Но выяснилось, что она не может быть ни доказанной, ни опровергнутой методами математической логики и одной общепринятой аксиоматической теорией множеств. То, что она не может быть опровергнута, доказал Гёдель (1936), обратную теорему доказал Коэн (1963).

Убежденность Гильберта в неограниченных возможностях человеческого разума, нашедшая свое выражение в его крылатом афоризме: «мы хотим знать, мы будем знать», придавая определенной математической проблеме непременно должна иметь решение», и это побудило его поставить 10-ю проблему: «указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли данное уравнение в целых рациональных числах» (или иначе: доказать, что существует алгоритм, который по данному многочлену P от n переменных с целыми коэффициентами распознавал бы, имеет ли уравнение $P = 0$ решение в целых числах или нет). Решение этой проблемы также оказалось отрицательным (Матиясевич, 1970).

Гильберт был настолько уверен, что функции трех переменных устроены сложнее, чем функции двух переменных, что высказал гипотезу, что некоторая конкретная функция трех переменных не представима в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных (13-я проблема). Гипотеза Гильберта оказалась опровергнутой весьма радикально: оказалось, что с помощью только одной и притом простейшей функции двух переменных — сложения $(x, y) \rightarrow x + y$ — и непрерывных функций одной переменной можно восстановить любую функцию n переменных (Колмогоров, Арнольд, 1957).

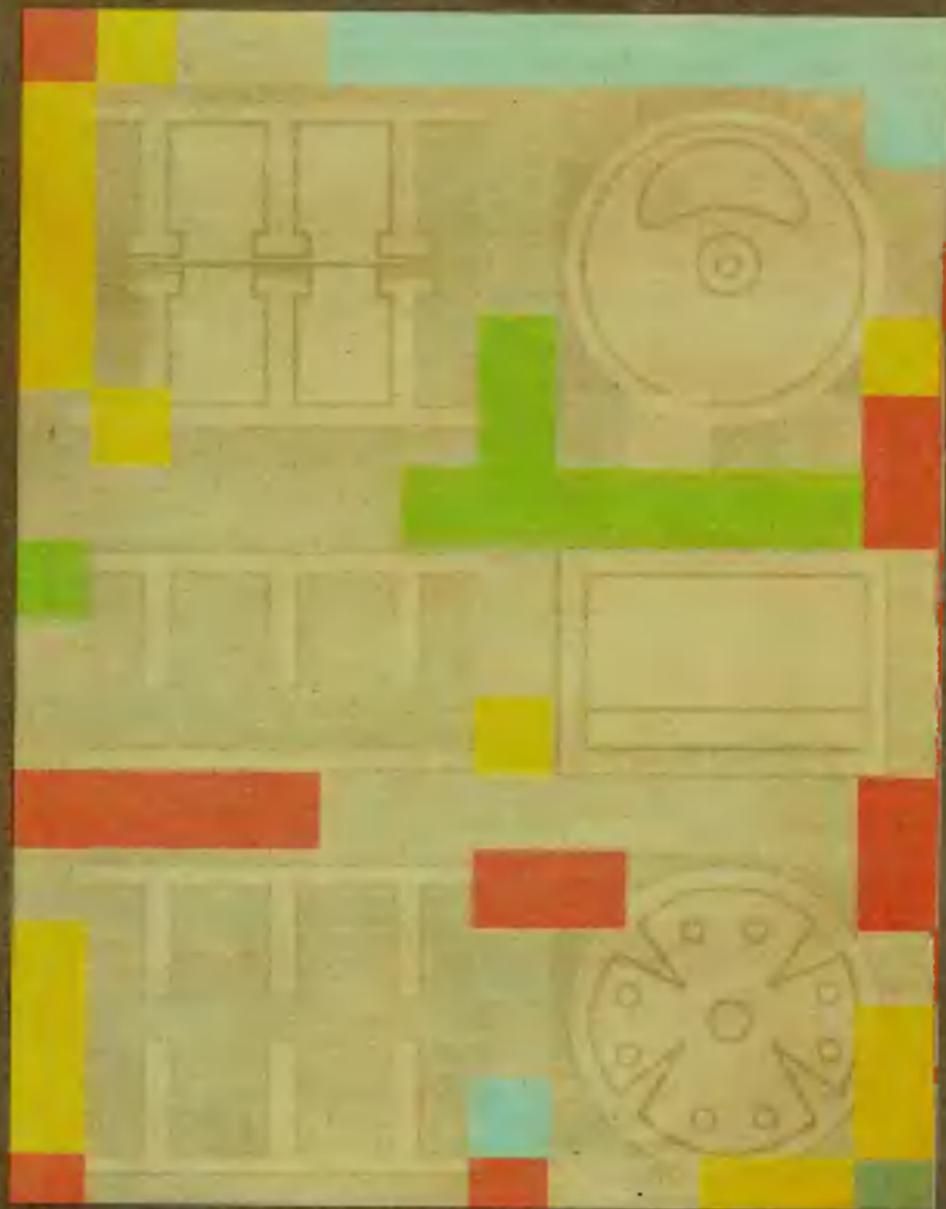
Рождение топологии сопровождалось великими свершениями. Вот несколько примеров. Окружность делит плоскость на две части: нельзя точку, лежащую вне круга, соединить с его центром и не пересечь окружность. Французский математик Жордан в XIX веке доказал, что

гомеоморфный (т.е. непрерывный и взаимно однозначный) образ окружности также делит плоскость на две части. Голландский математик Брауэр обобщил этот результат на случай гомеоморфного образа многомерной сферы. При этом он использовал и развил исходные идеи Пуанкаре. В частности, он доказал замечательный результат, называемый *теоремой Брауэра о неподвижной точке*, который в простейшем случае выглядит так: *при непрерывном отображении плоского круга в себя есть неподвижная точка*. Дальнейшее развитие топологии привело к замечательным обобщениям этих результатов в трудах американского ученого Александера, П.Александрова, Колмогорова, Понтрягина и других.

Несколько ярких топологических проблем поставил Пуанкаре. Такова, например, проблема о трех замкнутых геодезических. Если взять гладкий камешек и попытаться надеть на него аптечную резиночку, то в случае удачи (если резиночка не соскочит) это будет означать, что вы нашли замкнутую геодезическую. Для любого гладкого овалоподобного тела обязательно найдутся три замкнутые геодезические — в этом состояла гипотеза Пуанкаре, — причем это число не может быть увеличено (в частности, для эллипсоида с разными осями оно в точности равно трем). Эта проблема была решена советскими математиками Люстерником и Шнирельманом.

* * *

Мы рассказали лишь о некоторых событиях первой половины нашего великого и многострадального века, в которых математике было суждено сыграть большую роль; коснулись также и некоторых тем из нашего «внутреннего мира». Хотелось бы надеяться на то, что читатель ощутил грандиозность свершенного в этот незначительный по меркам Истории отрезок времени. Мы надеемся опубликовать в нашем журнале статьи, посвященные открытиям, сделанным в недавнее время, чтобы у юного читателя возникло чувство гордости за тот отрезок времени, в котором протекает его жизнь. Автор этой статьи много раз испытывал это чувство, когда осознавал себя современником Эйнштейна, Колмогорова, Сахарова и других гениев нашего века.



Длинная дорога от ВХОДА К ВЫХОДУ

Л. АШКИНАЗИ

Наперегонки с лифтом

Вполне возможно, что изобретатель лампы бегущей волны Р.Компфнер придумал ее в 1944 году, поднимаясь по какой-нибудь лестнице. Особенно удобно было бы сделать это изобретение, если бы в середине лестничного проема медленно двигался лифт, а человек, быстро поднимающийся по лестнице, мог бы заглядывать в кабину. Или, скажем, чуть-чуть от нее отставать...

Конечно, восстановить, как именно было сделано изобретение, трудно. Можно иногда выявить ход рассуждений изобретателя, но как уловить движение ощущений, предчувствий, интуиции? Технический детектив в чем-то, по-видимому, сильно отличается от просто детектива, ибо хороших детективов много, а хороших технических детективов почти нет.

Представьте себе, что лифт движется чуть быстрее человека и из него подталкивают бегущего по винтовой лестнице человека – быстрее, быстрее! Согласно третьему закону Ньютона, на лифт будет действовать сила, направленная против движения, он будет тормозиться и отдавать свою энергию человеку, бегущему по лестнице. В итоге их скорости уравниваются. Не обвивайся лестница вокруг шахты лифта, ничего бы не получилось – человек движется по прямой лестнице быстрее лифта. А если она обвивается, длина ее увеличивается.

Аналогично, можно подобрать угол

наклона витков спирали («лестницы») и скорость электронов («лифта») так, чтобы электромагнитная волна, бегущая по спирали, имела почти ту же скорость перемещения вдоль оси спирали, что и электроны.

Чем выше частота, тем ближе к поверхности металла сосредотачивается ток. Это явление называется скин-эффектом (skin по-английски – кожа). На частотах СВЧ-диапазона толщина скин-слоя составляет единицы микрон. Так же, прижимаясь к проводу, распространяется вдоль него и электромагнитная волна, отдаляясь от поверхности не далее чем на расстояние порядка длины волны. Однако бежит эта волна «по и около» проводника быстро, ее скорость сравнима со скоростью света. И хотя разогнать до такой скорости электроны можно, для этого нужны напряжения в сотни киловольт, а это неудобно. Но ничего, мы уже знаем, как «замедлить» волну, – надо заставить ее бегать по спирали (по «лестнице»).

Итак, возьмем проволоку, свернем ее в спираль и запустим в один ее конец электромагнитную волну. По оси же пропустим электронный пучок и начнем варьировать энергию электронов. Когда энергия электронов будет такая, что скорость их станет чуть больше скорости волны («осевой» скорости), начнется «перекачка» энергии от электронов к волне, и с выходного конца спирали мы получим более мощную

волну и «хилые» – с уменьшенной энергией – электроны.

Длиннохвостыми интегралами, взволнованно повествующими о судьбе электронов и волн в лампе бегущей волны, заполнены тома. И в этом смысле – в смысле интегралов – первым изобретателям было легче. Сейчас техника ушла в плане насыщенности физикой так далеко, а физика ушла так далеко в плане насыщенности математикой, что среди людей выделяются два подвида – люди знающие и люди делающие. Единственный путь борьбы с этой небиологической эволюцией это знать математику – язык физики и знать физику – язык техники. Тогда вы будете делать, зная.

Реальная ситуация в лампе бегущей волны, конечно, сложнее. В спирали, а точнее в «спиральной замедляющей системе», могут распространяться не одна, а несколько волн. Не все они двигаются чуть медленнее пучка, не все они усиливаются... Но об этом уже «на пальцах» рассказать нельзя. А о том, о чем можно рассказать просто, удобнее рассказывать, опираясь на то, что мы уже знаем.

Танцуем от печки, т.е. от клистрона

В конце концов, клистрон был изобретен раньше, да и «идеология» его проще. Так вот, в лампе бегущей волны, как и в клистроне, происходит преобразование модуляции по скорости в модуляцию по плотности. Только напряженность поля у спирали меньше, чем в резонаторе (в резонаторе есть резонанс). Поэтому нужен большой путь – и электронам и волне надо пройти много витков спирали, чтобы возникла заметная модуляция, а потом, по мере преобразования модуляции, волна начинает усиливаться, отбирая энергию от собирающихся в сгустки электронов (рис.1). Собираются электроны в те

Эта статья является органичным продолжением двух предыдущих статей того же автора: «113 лет ошибке Эдисона» («Квант» №5 за 1996 г.) и «Электронный прибор» («Квант» №4 за 1997 г.).

Серия статей Л.Ашкинази посвящена современной вакуумной электронике, ее физическим основаниям и историческим истокам.

Разумеется, каждую статью можно читать и независимо, но для более полного и глубокого восприятия и получения цельной картины мы рекомендуем заинтересованному читателю изучать эти статьи в указанной последовательности.

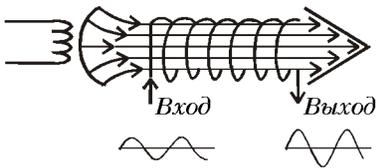


Рис. 1. Лампа бегущей волны

места волны, где поле меняет знак – сзади оно ускоряющее, спереди тормозящее, – как люди перед входом в метро в час пик.

Что объединяет и что отличает лампу бегущей волны (ЛБВ) и клистрон? Первое и важнейшее отличие: у клистрона – резонаторы, у ЛБВ – спираль, нерезонансная замедляющая система. Поэтому клистрон – прибор узкополосный, а ЛБВ – широкополосный. Это свойство важно для систем передачи информации. Правда, замедляющая система может быть не только спиральная. Если мы поставим вдоль электронного пучка просто резонаторы и надлежащим образом возбудим в них колебания, то такая ЛБВ тоже будет работать. Надлежащим образом – это так, чтобы разность фаз между колебаниями в соседних резонаторах была такой, чтобы подлетающие электроны встречали волну в нужной фазе. Такие замедляющие системы называются системами со связанными резонаторами. Связь – это как раз то, что нужно для организации «нужных фаз».

(Ясно, что можно взять один конец от одного прибора, а другой – от другого. Если создавать исходную модуляцию, как в ЛБВ, потом давать электронам подрейфовать, а снимать сигнал с пучка резонатором, как в клистроне, получится один гибридный прибор. Если же создавать исходную модуляцию, как в клистроне, а снимать сигнал с пучка, как в ЛБВ, получится другой гибридный прибор. Этот прибор сочетает (в некоторой мере) сильные стороны ЛБВ и клистрона и называется твистроном.)

Мы можем провести границу между замедляющими системами на связанных резонаторах и многорезонаторными клистрономы именно здесь: в клистроне резонаторы связаны только электронным пучком, в лампах бегущей волны – еще и электромагнитной волной. Эта связь имеет важное следствие – в ЛБВ электромагнитная волна может бегать и туда и обратно. По пути «туда» ее усиливает электронный поток, а на обратном пути она только затухает,

и если усиление окажется больше затухания, лампа возбуждается, превратится в генератор. Для защиты от возбуждения в ЛБВ вводится так называемая поглощающая вставка – деталь из вещества, сильно поглощающего электромагнитное излучение. Она устанавливается в середине ЛБВ и сильно ослабляет электромагнитную волну (как бегущую «туда», так и бегущую «обратно»). Усиление при этом, конечно, уменьшается, но – как это ни странно – не очень сильно, так как через участок с поглощающей вставкой энергию пронесет электронный пучок. Зато возможность возбуждения исчезает – ведь обратно электронный пучок энергию не переносит. Конечно, каждая из половинок ЛБВ – это тоже ЛБВ, и она тоже может возбуждаться... Одним словом, реальная ситуация всегда будет сложнее, сколько ни рассказывай.

Из чего делать поглощающую вставку? В диэлектрик электромагнитная волна проникает, но в металл она почти не проникает. Так что поглощающие вставки должны делаться из «плохого проводника» – чего-то такого, во что электромагнитная волна проникает и в чем она поглощается. Часто вставки делают из углерода, точнее – из тонких углеродных пленок, нанесенных на диэлектрик.

Архитектура лампы бегущей волны

Мы начали с аналогии между лестницей и спиральной замедляющей системой. Раньше всех в ЛБВ была использована в качестве замедляющей системы спираль. Конструктивно простая, технологичная и позволяющая создавать широкополосные ЛБВ, она стала символом ЛБВ. Но время шло, требования к мощности и рабочей частоте ЛБВ увеличивались. А спираль трудно охлаждать – она закрепляется на диэлектрических опорах, которые проводят тепло плохо. Далее, при длине волны меньше 5 мм сделать спираль становится трудно. Для работы в области больших мощностей и малых длин волн применяются другие замедляющие системы. На рисунке 2 показаны несколько таких систем, состоящих из отдельных резонаторов, связанных отверстиями, через которые электромагнитное поле проникает из одного в другой.

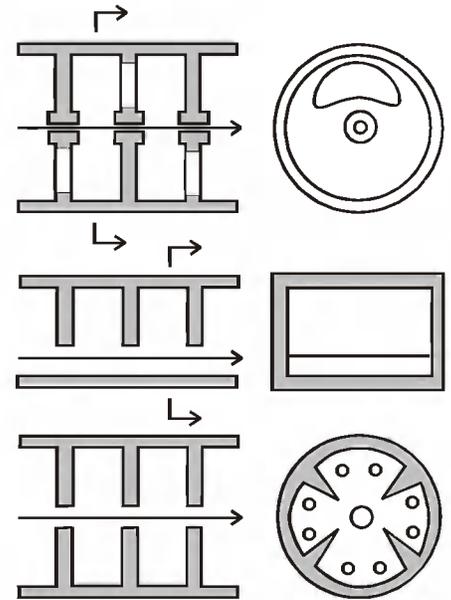


Рис. 2. Замедляющие системы. Горизонтальная стрелка – электронный пучок. Нижняя замедляющая система имеет поэтическое название «клеверный лист»

Энергия, подводимая к ЛБВ, превращается в кинетическую энергию электронов. И вот она начала передаваться электромагнитной волне. Энергия электронов уменьшается, летят они все медленнее, и, наконец, скорости их уравниваются со скоростью волны. Передача энергии прекращается. Как сделать, чтобы то, что у электронов осталось, было поменьше? Как выкачать из электронов побольше? Один из путей – сделать так, чтобы скорость волны уменьшалась при ее движении вдоль ЛБВ. Например, можно изготовить спираль с переменным шагом. Таким способом можно уменьшить энергию, остающуюся у электронов. Ну, а с ней что делать? Ведь вся энергия, с которой электроны долетают до коллектора, во-первых, нагревает его, порождая свой круг проблем (охлаждение, перегрев и т.д.), а во-вторых, теряется зря.

Решение этой задачи – так называемая рекуперация. На коллектор подается потенциал ниже, чем у замедляющей системы, и поэтому электроны, прежде чем поглотиться металлом коллектора, подтормаживаются. Расход энергии на питание лампы уменьшается. Рост КПД при использовании рекуперации порядка 10%. Это немало. Бывает, что удастся получить и больше, в частности, если применен многоступенчатый коллек-

тор. В нем более быстрые электроны добираются до более глубоких участков, находящихся под более низким потенциалом. Каждый электрон тормозится в таком коллекторе почти до полной остановки.

Одна волна сменить спешит дружку

А куда спешит волна? В ЛБВ, например, она могла спешить в обе стороны. Только в одну сторону она усиливалась, подкачиваясь от пучка, а в другую бежала сама по себе, понемногу затухая. За счет этой обратной, отраженной от конца замедляющей системы, волны ЛБВ возбуждалась, поэтому обратную волну подавляли поглощающей вставкой.

Нельзя ли сделать некое подобие ЛБВ, в которой будет усиливаться обратная волна? Тогда замыкание цепи обратной связи будет автоматическим, даже без учета отражений на концах: в одну сторону энергия будет переноситься электронами, в обратную — волной. Возникать колебания будут от случайных флуктуаций, а поддерживаться — за счет возбуждения колебаний в электронном пучке усиленной волной (в начале пучка) и за счет возбуждения волны тормозящимся при этом пучком (в конце пучка). При малом токе пучка колебания возникать не будут, и такой прибор можно будет использовать как усилитель, а в генераторном режиме его можно будет использовать, если синхронизовать маломощным высокостабильным генератором.

Все это очень увлекательно. Непонятно только, как сделать, чтобы электроны отдавали энергию волне, спешащей навстречу им. Нам кажется, и не без причин, что это невозможно. Зная, как работает ЛБВ, мы прямо видим, как летят слева направо волна и электронный сгусток (рис.3), как сгусток чуть-чуть обгоняет волну, попадая в область тормозящего поля, и начинает тормозиться, отдавая свою энергию волне (боль-

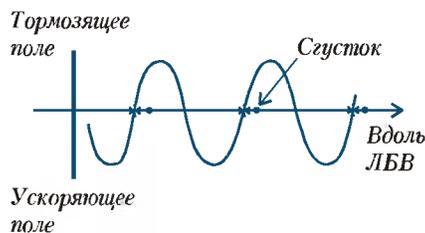


Рис. 3. Волна и электронные сгустки

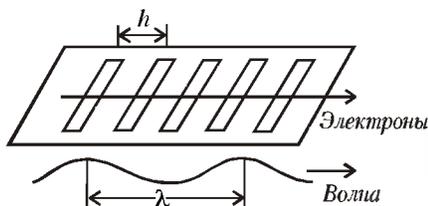


Рис. 4. Электроны заглядывают в окна

ше некому). Если же волна бежит навстречу электронам, электроны не будут отдавать ей энергию потому, что они не будут долго лететь рядом с нужным для отдачи энергии местом (изображенном звездочкой на рисунке 3). А обязательно ли лететь рядом с этим местом долго? Собственно, нет...

Представьте себе, что электронный пучок летит с одной стороны от металлического экрана с окнами, а волна бежит с другой — рисунок 4. Пусть электронный сгусток, пролетая мимо окна, увидел там тормозящее поле, притормозился, отдал часть энергии и полетел дальше. У следующего окна он опять увидел тормозящее поле и опять пострадал. Вы сразу же видите, что таким способом можно усиливать волну, не обязательно имеющую ту же скорость, что и электронный сгусток. Важно лишь, чтобы электрон, пробегая мимо окон, видел в них одинаковые фазы колебаний.

Обозначим скорость электронов v , скорость волны w , шаг окон h , длину волны λ . Тогда за время h/v электрон может пробежать не одну длину волны λ , а $n\lambda + h$ длин волн, т.е. скорость волны может быть не h/w , а $(n\lambda + h)/w$. Итак, условие работоспособности: $(n\lambda + h)/w = h/v$. При этом сгусток будет в следующем окне видеть не то место волны, с которым взаимодействовал в предыдущем окне, а другое. Но что с того? Он будет отдавать энергию, а волна будет усиливаться.

Теперь сделаем последний шаг в наших рассуждениях — скажем, что n может быть и отрицательным. Тогда электрон будет взаимодействовать в следующем окне не с «тем местом» волны, с которым взаимодействовал в прошлом окне, и не с «местом», лежащим сзади него (как при $n = 1$), а с «местом», лежащим впереди него. Волна будет бежать навстречу и ... усиливаться!

Помните, как в кино вертится назад винт самолета или колесо у телеги? Попробуйте ответить на вопрос:

как видимое направление вращения зависит от истинной угловой скорости колеса при частоте кадров 24 кадра в секунду? Вот нечто подобное и «видит» электрон, заглядывая в окошки. Только видит он не 24 кадра в секунду, а существенно больше. Вот такое кино...

Алмаз не для прикрас

Конструирование — всегда компромисс. Если больше мощность — то меньше диапазон частот, а если нет — то короче срок службы или дороже прибор. И так одно за другое, то за третье, пятое и девяносто девятое...

Заказчики, как правило, желают улучшения одних параметров, но вовсе не согласны допустить ухудшения других. Посмотрим, к чему это приводит в технике электровакуумных приборов.

При определенной длине волны резонаторы в клистроне и спираль в ЛБВ имеют определенные размеры. Какая-то доля электронного пучка перехватывается сеткой в зазоре резонатора или спиралью. Пучок перехватывается — мощность выделяется. Раз размеры определенные, то и плотность мощности (измеряется обычно в Вт/см²) определенная. Мощность выделяется — деталь нагревается. Плотность мощности определенная — температура определенная. Деталь нагревается — металл испаряется или плавится. Если плавится, то все ясно. А если испаряется, то пары оседают или на изоляторах, превращая их в проводники, или на катоде, изменяя его состав до потери работоспособности. Чем короче длина волны и больше мощность, тем быстрее испаряется и плавится деталь.

Что делать? Во-первых, можно искать конструкции, в которых меньше плотность мощности, выделяющейся на поверхностях электровакуумных приборов. Ну конечно, электронный пучок не должен перехватываться тем, чем не должен. Но при попытке сжать пучок сильнее он теряет ламинарность. Такой пучок не удастся сильно затормозить (рекуперировать) на коллекторе, КПД прибора падает. Вот это и есть «одно за другое»...

Не будем разматывать эти клубки до девяносто девятого, но поверьте — эта цифра не преувеличена. В лампе бегущей волны все связано одно с другим. Жизнь вообще так устроена.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1999 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванто» №1 — 99» и номера задачи, решения которых Вы посылаете, например «М1666» или «Ф1673». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1670—М1672 предлагались на XXXIX Международной математической олимпиаде.

Задачи Ф1673—Ф1682 (кроме Ф1674) предлагались на первом (заочном) туре V Соросовской олимпиады по физике.

Задачи М1666 — М1675, Ф1673 — Ф1682

М1666. Три плоскости разрезали куб с ребром 1 на 8 параллелепипедов. Докажите, что среди них найдутся 4 параллелепипеда, объем каждого из которых не превосходит $1/8$.

Д.Кузнецов

М1667. Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части. Докажите, что в каждой части можно взять по 100 чисел с равными суммами.

В.Произволов

М1668. Имеется n бочек, содержащих 1, 2, ..., n литров воды соответственно. Разрешается доливать в бочку столько воды, сколько в ней уже есть, из любой другой бочки, в которой воды достаточно для такой операции. Какое наибольшее количество воды можно собрать в одной бочке, если а) $n = 10$; б) n — любое число?

Р.Женюдаров, Г.Челюков

М1669. Натуральные числа a , b и c таковы, что $ab + bc = ca$. Докажите равенства

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(b, c) = \text{НОК}(c, a)$$

(НОК — наименьшее общее кратное).

В.Произволов

М1670. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны, а стороны AB и CD не параллельны. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P , лежащей внутри $ABCD$. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно

описать окружность тогда и только тогда, когда площади треугольников ABP и CDP равны.

(Люксембург)

М1671. На соревновании выступили a участников, их оценивали b судей, где b — нечетное число, не меньшее 3. За выступление участника каждый судья ставил оценку «плюс» или «минус». Число k таково, что для любых двух судей имеется не более k участников, получивших у них одинаковые оценки. Докажите неравенство

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

(Индия)

М1672. Пусть $d(n)$ — количество всевозможных натуральных делителей числа n , включая 1 и само n . Найдите

все натуральные числа k такие, что $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ при каком-либо n .

(Белоруссия)

М1673*. Точка равностороннего треугольника соединена отрезками с его вершинами и из нее опущены перпендикуляры на его стороны (рис.1). Названные отрезки разрезали равносторонний треугольник на шесть прямоугольных треугольников — красные и синие через один. Докажите, что сумма радиусов окружностей, впи-

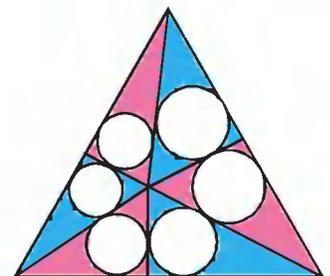


Рис.1

санных в красные треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в синие треугольники.

В.Произолов

M1674. Функция $f(n)$ определена на множестве натуральных чисел и удовлетворяет условиям

$$f(f(n)) + f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{если } n \text{ четное;} \\ 2n + 1, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Найдите значение $f(1999)$.

В.Куриак

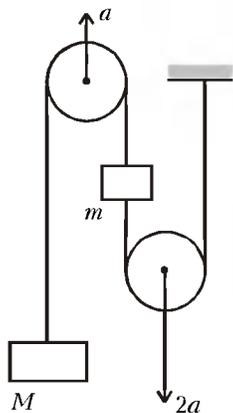
M1675*. В тетраэдре $ABCD$: $AB = CD = 2$, $AC = BC = AD = BD = \sqrt{3}$. Докажите, что его можно разрезать а) на 8; б) на 27 подобных ему и равных между собой тетраэдров.

А.Заславский

Ф1673. На гладком клине с углом α при основании находится небольшое тело. С каким вертикальным ускорением нужно двигать клин, чтобы тело оставалось на одной и той же высоте?

А.Клинов

Ф1674. В системе, изображенной на рисунке 2, ускорения блоков направлены по вертикали, куски нитей также вертикальны. С какими силами приходится при этом действовать на блоки? Массы блоков и нитей пренебрежимо малы, нити нерастяжимы.



М
Рис.2

М.Учителев

Ф1675. Для съемок очередного фильма Спилберга был изготовлен макет Земли – в натуральную величину и с той же массой – внутри большого очень легкого пластмассового шара находится тяжелый шар из очень плотного вещества. В результате неточностей при сборке центр масс тяжелого шара оказался смещенным в плоскости экватора на расстояние $d = 100$ км от центра большого шара. Найдите минимальное время оборота спутника, который движется в экваториальной плоскости.

З.Рафаилов

Ф1676. При изучении падения тел в воздухе были получены любопытные результаты. Металлический шарик падал с установившейся скоростью 100 м/с, шарик вдвое большего диаметра из того же металла падал с установившейся скоростью 140 м/с. К маленькому шару прикрепили длинную нить, и с таким «хвостом» он падал с установившейся скоростью 15 м/с. Когда длину «хвоста» увеличили в два раза, скорость установившегося падения уменьшилась до 9 м/с. Попробуйте оценить скорость падения этого шарика при очень большой длине «хвоста». Считайте, что «хвост» при движении не изгибается, а остается вертикальным.

Р.Шариков

Ф1677. В жестком закрытом литровом сосуде находится 900 г воды; воздуха в сосуде нет. Температура внутри сосуда $+100$ °С. Содержимому сосуда сообщили 1000 Дж тепла. Оцените количество испарившейся при этом воды.

Считайте, что при повышении температуры до $+101$ °С давление насыщенных паров воды увеличивается от 1 атм до 1,04 атм.

Р.Александров

Ф1678. К выводам источника подключают последовательно амперметр и вольтметр, который показывает при этом напряжение 6 В. Когда параллельно ему подключили еще один такой же вольтметр, они в сумме показали 10 В. Подключим параллельно еще очень много таких же вольтметров. Сколько они в сумме покажут? Во сколько раз при этом возрастут показания амперметра?

А.Простов

Ф1679. В вашем распоряжении есть незаряженный конденсатор емкостью C , заряженный до напряжения U конденсатор емкостью $100C$, катушка индуктивности и полупроводниковый диод (никаких других элементов у вас нет). До какого максимального напряжения можно было бы зарядить конденсатор малой емкости, если бы все эти элементы были идеальными? Как для этого нужно было бы действовать? Можете ли вы придумать больше одного способа?

А.Зильберман

Ф1680. В схеме на рисунке 3 поочередно замыкают переключатели (перед замыканием одного из них другой размыкают). Найдите напряжение «среднего» конденсатора после большого числа переключений. Элементы цепи считайте идеальными. Конденсаторы вначале не заряжены.

А.Зильберман

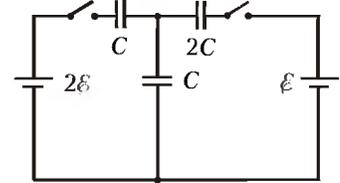


Рис.3

Ф1681. На ферромагнитный кольцевой сердечник с очень большой магнитной проницаемостью намотаны две совершенно одинаковые обмотки – катушки индуктивностью L каждая. Последовательно с одной из обмоток включаем конденсатор емкостью C , к получившейся последовательной цепочке подключаем параллельно вторую обмотку. При помощи генератора синусоидального напряжения и лампочки накаливания исследуем свойства получившейся схемы (рис.4). Как меняется накал лампочки при изменении частоты генератора? Что изменится, если поменять местами выводы одной из обмоток?

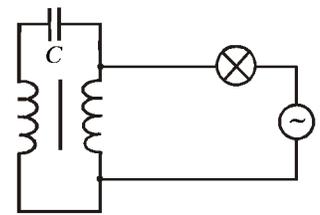


Рис.4

При помощи генератора синусоидального напряжения и лампочки накаливания исследуем свойства получившейся схемы (рис.4). Как меняется накал лампочки при изменении частоты генератора? Что изменится, если поменять местами выводы одной из обмоток?

З.Рафаилов

Ф1682. В половине шара радиусом R из прозрачного стекла с коэффициентом преломления $n = 2$ сделано симметричное сферическое углубление так, что толщина стекла на линии центров сфер составляет $R/2$ (рис.5). Точечный источник света помещен в точке A (в центре внешней сферической поверхности). Где его видит наблюдатель, глаз кото-

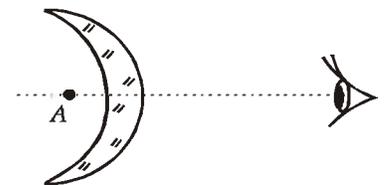


Рис.5

рого находится вдали на линии центров сферических поверхностей?

А. Очков

Решения задач M1641, M1646 — M1650, F1658 — F1667

M1641. *Есть полубесконечная полоска бумаги, разделенная на клеточки с номерами 1, 2, 3, ..., и n камней. На первой клеточке камень лежит всегда. Разрешается положить в клетку камень или убрать камень из клетки, если на предыдущей клетке лежит камень. Как далеко от начала полоски можно положить камень, действуя в соответствии с этим правилом? Докажите, например, что на клетку с номером 2^{n-1} камень положить можно.*

Докажем, что на клетку с номером 2^{n-1} камень положить можно. Доказательство будет индуктивным. Индукция проводится по числу камней.

Случай $n = 1$ очевиден — на первой клетке камень лежит по условию.

Пусть можно положить камень на клетку 2^{n-1} , используя n камней. Покажем: как добраться до клетки 2^n , используя на один камень больше. Все требуемые для этого действия разбиваются на четыре этапа.

Этап 1. Без использования дополнительного камня поместим камень на клетку 2^{n-1} .

Этап 2. Дополнительный камень поместим на клетку $2^{n-1} + 1$.

Этап 3. Теперь уберем с полоски все камни, кроме самого первого (лежащего на первой клетке) и самого последнего (лежащего на клетке $2^{n-1} + 1$). Это можно сделать, повторяя в обратном порядке действия, совершенные на этапе 1 (разрешенные действия симметричны относительно постановки и снятия камней).

Этап 4. Теперь забудем о первых 2^{n-1} клетках полоски. Повторим все действия этапа 1, считая начальным камень, лежащий на клетке $2^{n-1} + 1$. При этом мы ставим и снимаем камни, освободившиеся на этапе 3.

Последним действием этапа 4 на клетку $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ кладется камень, что и требовалось показать.

Дальше клетки с номером 2^{n-1} камень положить нельзя. Доказательство также использует индукцию по числу камней. И в этом случае база индукции очевидна (при $n = 1$ единственный камень остается на первой клетке по условию).

Теперь предположим, что для всех $k < n$ доказываемое утверждение верно, т.е. для того, чтобы положить камень на клетку с номером большим 2^{k-1} , нам нужно использовать более k камней.

Пусть N — максимальный номер клетки, на которую можно положить камень при использовании n камней. Обозначим количество требуемых для этого действий T , состояние полоски (положения камней, лежащих на ней) после t действий обозначим $A(t)$, наибольший номер клетки, в которой лежит камень после t действий, обозначим $N(t)$ (в этих обозначениях $N = N(T)$). Из правил, по которым кладутся и снимаются камни, следует, что $N(t) - 1 \leq N(t + 1) \leq N(t) + 1$. Поэтому среди чисел $N(t)$ обязательно встретятся все числа от 1 до N , быть может, не один раз.

Разобьем полоску на две части: клетки от 1 до $2^{n-2} + 1$

образуют левую часть, а клетки с номерами, большими $2^{n-2} + 1$, образуют правую часть.

Если $N \leq 2^{n-2} + 1$ (все камни в левой части), то предположение индукции доказано и для n камней.

В противном случае найдется такое t_0 , что выполнено $N(t_0) = 2^{n-2} + 1$ и $N(t) > 2^{n-2} + 1$ при $t > t_0$. Другими словами, начиная с момента t_0 , в правой части находится хотя бы один камень.

Лемма. При $t > t_0$ в левой части находятся по крайней мере два камня.

Доказательство. Камень, стоящий на первой клетке, находится в левой части всегда. Предположим, что в некоторый момент t' в левой части не осталось никаких камней за исключением первого. Для $t_0 \leq t \leq t'$ обозначим через $B(t' - t)$ такое состояние полоски, которое отличается от состояния $A(t)$ тем, что сняты все камни из правой части (а в левой части $A(t)$ совпадает с $B(t' - t)$). В состоянии $B(0)$ есть ровно один камень на первой клетке. Переход от состояния $B(\tau)$ к состоянию $B(\tau + 1)$ совершается разрешенным действием (правила обратимы — если можно поставить камень, то его можно следующим действием снять, и наоборот). В состоянии $B(t' - t_0)$ на клетке $2^{n-2} + 1$ лежит камень. В любом состоянии $B(t)$, $0 \leq t \leq t' - t_0$, на полоске лежит не более $n - 1$ камня. Действительно, момент t_0 был выбран так, что в любой момент после него в правой части полоски есть хотя бы один камень. При переходе от $A(t' - t)$ к $B(t)$ теряются все камни, оказавшиеся в правой части. Так что в состоянии $B(t)$ по крайней мере на один камень меньше, чем в состоянии $A(t' - t)$. Таким образом, состояния $B(t)$ описывают способ положить камень на $2^{n-2} + 1$ клетку, начиная от одного камня на первой клетке и используя не более $n - 1$ камня. Это противоречит предположению индукции.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Теперь забудем о всей левой части полоски, кроме клетки $2^{n-2} + 1$. Как следует из доказанной леммы, от момента t_0 до T в правой части полоски используется не более $n - 2$ камней. Обозначим через $C(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, такое состояние полоски, которое получается из $A(t)$ сдвигом влево на 2^{n-2} и добавлением камня на первую клетку, если его там нет. Состояния от $C(t_0)$ до $C(T)$ описывают способ положить камень на клетку с номером $N - 2^{n-2}$, начиная от одного камня на первой клетке и используя не более $n - 1$ камня.

В силу предположения индукции $N - 2^{n-2} \leq 2^{n-2}$, поэтому $N \leq 2^{n-1}$. Применение принципа математической индукции завершает доказательство.

М. Вялый

M1646. *У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то из них оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берет себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них. Произошло 7 раскулачиваний. Докажите, что в результате все овцы собрались у одного крестьянина.*

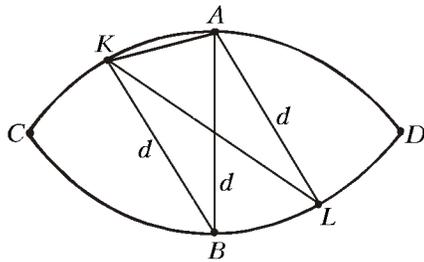
На простых примерах проверяется, что ситуация 7 раскулачиваний в принципе возможна.

Теперь докажем непосредственно утверждение задачи. После первого раскулачивания у всех, кроме раскулаченного, число овец делится на 2, общее число овец тоже делится на 2, значит, и остаток у раскулаченного тоже делится на 2. Аналогично, после второго раскулачивания у каждого число овец делится на 4, ..., после седьмого – на $2^7 = 128$. Это значит, что у одного из крестьян – 128 овец, а у остальных – по 0 овец, что и требовалось доказать.

А.Шаповалов

M1647. Докажите, что из любого конечного множества точек на плоскости можно так удалить одну точку, что оставшееся множество можно разбить на два множества, диаметры которых меньше диаметра первоначального множества. (Диаметр – это максимальное расстояние между точками множества.)

Пусть A и B – любые две точки данного множества M , расстояние между которыми равно диаметру d этого множества. Тогда из определения диаметра следует, что если $P \in M$, то P лежит внутри или на границе «линзы», образованной пересечением кругов радиуса d с центрами A и B (см. рисунок)



Докажем, что на одной из дуг AKC и BLD нет точек множества M , т.е. что если $K \neq A$, $L \neq B$, то $KL > d$.

Действительно, если $\angle BAK = \alpha$, $\angle LAK = \beta$, то $\beta > \alpha$ и из теоремы косинусов получаем

$$KL^2 = AK^2 + d^2 - 2AK d \cos \beta > d^2,$$

так как $AK = 2d \cos \alpha > 2d \cos \beta$.

Пусть, например, на дуге AC нет точек множества M за исключением точки A . Тогда, выбросив точку A и разделив оставшееся множество точек на части по прямой AB , получим искомое разбиение, добавив точки прямой AB к левой части.

Легко видеть, что в каждой из двух полученных таким образом частей нет точек на расстоянии d .

В.Дольников

M1649¹. На конференцию приехали 300 участников. Каждый участник знает три языка из пяти, официально принятых на конференции. Докажите, что всех участников можно разбить на три группы по 100 человек так, чтобы для каждой группы нашелся язык, общий для ее членов.

Каждый человек не владеет ровно двумя языками. Изобразим языки точками – вершинами графа, а пары языков отрезками – ребрами графа. На каждом ребре напишем, сколько человек не владеют соответствующими двумя языками. Сумма всех написанных чисел равна 300.

Если участники конференции распределены требуемым в задаче образом на три группы, то выполнены два усло-

вия. Во-первых, на соединяющих эти языки ребрах написаны числа, не превосходящие 100 (поскольку люди, не владеющие двумя из трех рассматриваемых языков, должны войти в третью группу).

Во-вторых, количество людей, не владеющих некоторым языком, – это сумма чисел, написанных на четырех ребрах, выходящих из соответствующей вершины. Значит, такая сумма не должна превосходить числа 200 (иначе этим языком будут владеть менее 100 человек).

План решения таков: мы докажем существование трех языков, удовлетворяющих двум последним условиям, и докажем затем, что эти условия не только необходимы, но и достаточны.

Назовем вершину плохой, если сумма чисел, написанных на выходящих из нее ребрах, больше 200. Назовем ребро плохим, если написанное на нем число больше 100. Если бы нашлись три плохие вершины, то мы сложили бы три соответствующие суммы и получили число больше 600, что противоречило бы условию задачи. Значит, в графе не более двух плохих вершин.

Если в графе есть хотя бы одна плохая вершина, то все плохие ребра выходят из нее (иначе сумма чисел на плохом ребре и на ребрах, выходящих из плохой вершины, была бы больше 300). Следовательно, если в графе есть плохая вершина, то все неплохие его вершины (их число, как мы уже говорили, не меньше 3) соединены между собой неплохими ребрами. Если же в графе нет ни одной плохой вершины, то мы воспользуемся тем, что количество плохих ребер не превосходит двух и потому найдется треугольник из неплохих ребер (убедитесь в этом!).

Доказательство достаточности состоит в том, что если языки A, B, C удовлетворяют условиям, то мы будем по очереди распределять людей в три группы так, чтобы в одной все говорили на языке A , в другой – на языке B , в третьей – на C . На каждом этапе будем рисовать ориентированный граф, вершины которого – наши три группы и очередной человек X , которого мы должны куда-то поместить. От X стрелки проведем во все вершины, соответствующие группам, на языке которых X говорит. Из одного из языков A, B, C к другому проведем стрелку, если в соответствующей этому языку группе есть человек, владеющий языком другой группы.

Мы хотим поместить X в одну из трех групп. Очевидно, X знает хотя бы один из языков A, B, C . Для определенности, пусть X знает язык группы A . Если группа A не заполнена до конца, то поместим X в нее, если нет, но из группы A можно пройти по стрелке в незаполненную группу B , то поместим X в группу A и одного человека из группы A переместим в группу B .

Рассуждая в таком духе, можно понять, что мы можем легко разместить очередного человека во всех случаях, кроме того, когда все группы, в которые можно от него дойти, двигаясь по стрелкам, уже заполнены.

Этих заполненных групп одна или две. Если одна, то X и все люди группы A не знают языков B и C . Тогда парой языков B и C владеет менее 200 человек, что противоречит условию. Если же доступных групп две, то X и все люди этих двух групп не говорят на третьем языке, так что третьим языком владеет недопустимо малое число участников конференции.

А.Берзиньш, А.Спивак, Г.Челюков

¹Решение задачи M1648 приведено в заметке «Гауссовы суммы».

M1650*. На плоскости нарисован граф без циклов Γ . Известно, что граф Γ' , полученный из Γ параллельным переносом на вектор $(1, 0)$, не пересекается с Γ . На графе Γ отмечены две различные точки A и B , в которых в начальный момент времени сидели два жука. Ползая по графу, жуки через некоторое время снова оказались в точках A и B , но при этом поменялись местами. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между жуками было меньше 1.

Итак, пусть жуки образуют пару (x, y) , т.е. первый находится в точке x , второй – в точке y . Нам надо доказать, что, двигая жуков, как указано в задаче, мы не можем из пары (x, y) получить пару (y, x) . Для этого мы придумаем такую функцию от x, y , что она непрерывна по x и y , для всех разрешенных положений x и y она не равна нулю, и если для пары (x, y) она больше нуля, то для пары (y, x) – меньше. Тогда, очевидно, из пары (x, y) нельзя получить пару (y, x) .

Построим требуемую функцию. Нарисуем на плоскости графы Γ и Γ' (перенос графа Γ на вектор \vec{a}). Представим себе, что из x в y по графу Γ проползла жужелица, а из y' в x' по графу Γ' одновременно с жужелицей прополз таракан. Посмотрим, на какой угол при этом повернулся вектор $\vec{ЖТ}$ (угол считаем ориентированным: угол поворота корректно определен, поскольку вектор $\vec{ЖТ}$ всегда не ноль). Можно показать, что величина этого угла зависит только от точек x и y , т.е. не зависит от конкретного способа, которым ползли жужелица и таракан.

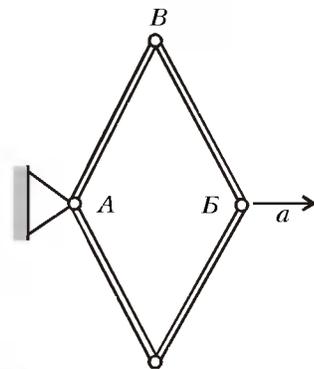
Докажем, что указанный угол непрерывно зависит от x и y . В самом деле, возьмем точку x_1 и представим себе, что жужелица сначала проползла из x_1 в x , таракан при этом стоял, а потом жужелица проползла из x в y , а таракан – из y' в x' . Поворот вектора $\vec{ЖТ}$ на первом этапе непрерывно зависит от x_1 . Аналогичное рассуждение подходит и для y .

Теперь докажем, что если расстояние между x и y больше 1, то поворот вектора не равен нулю. В самом деле, точки x, y, y', x' образуют параллелограмм, следовательно, если векторы $\vec{xu'}$ и $\vec{yx'}$ сонаправлены, имеем $\vec{xu'} = \vec{xu} + \vec{a}$, $\vec{yx'} = -\vec{xy} + \vec{a}$, значит, \vec{xu} должен быть коллинеарен с \vec{a} и меньше \vec{a} по модулю.

Доказательство завершено.

А. Скопенков, Г. Челноков

Ф1658. Из четырех одинаковых тонких стержней длиной L каждый сделали ромб, скрепив их концы шарнирно (см. рисунок). Шарнир A закреплен, противоположный шарнир B двигают вдоль диагонали ромба с постоянным ускорением a . Вначале упомянутые противоположные вершины находятся близко друг к другу, а скорость точки B равна нулю. Какое ускорение будет иметь шарнир V в тот момент, когда стержни AB и VB составят угол 2α ? Считайте движение всех точек плоским.



Ускорение точки B по горизонтали – в направлении движения шарнира B – равно половине ускорения этого шарнира, т.е. $0,5a$. Обозначим вертикальную составляющую ускорения шарнира B буквой b . Если мы найдем эту величину, задача будет практически решена. Для нахождения величины b заметим, что точка B движется по окружности радиусом L , и мы можем воспользоваться формулой для центростремительного ускорения. Но для этого нужно знать скорость точки B в интересующий нас момент времени. Найдем вначале скорость точки B : длина пройденного этой точкой пути равна $2L \sin \alpha = a\tau^2/2$, откуда $v_B = a\tau = \sqrt{4aL \sin \alpha}$. Скорость точки B – обозначим ее величину через u – перпендикулярна стержню AB , а ее горизонтальная составляющая ($u \cos \alpha$) равна $0,5v_B = 0,5\sqrt{4aL \sin \alpha} = \sqrt{aL \sin \alpha}$. Отсюда получаем

$$u = \frac{\sqrt{aL \sin \alpha}}{\cos \alpha}.$$

Для нахождения величины b используем центростремительную составляющую ускорения точки B :

$$b \cos \alpha - \frac{1}{2}a \sin \alpha = \frac{u^2}{L} = \frac{aL \sin \alpha}{L \cos^2 \alpha},$$

откуда

$$b = a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \operatorname{tg} \alpha = a \left(\frac{3}{2} + \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \operatorname{tg} \alpha.$$

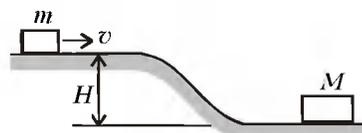
Мы нашли обе составляющие ускорения шарнира B . Его полное ускорение равно

$$a_B = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

З. Рафаилов

Ф1659. Тележка массой m движется по горизонтально расположенным рельсам со скоростью v (см. рисунок).

Рельсы дальше идут вниз и плавно переходят в новый горизонтальный участок, находящийся на H ниже. Тележка наезжает на неподвижный вагон массой M , стоящий на нижнем горизонтальном участке, и между тележкой и вагоном происходит абсолютно упругий удар. При какой начальной скорости v тележка после удара вновь сможет подняться на верхний горизонтальный участок? Трение отсутствует.



Скорость спустившейся тележки найдем из закона сохранения энергии: $u_1 = \sqrt{v^2 + 2gH}$. Для того чтобы подняться обратно на горку, тележка должна иметь в направлении горки скорость не меньшую чем $u_2 = \sqrt{2gH}$. Это возможно только в том случае, когда масса налетающей тележки меньше массы неподвижного вагона, – в противном случае оба тела после упругого удара будут удаляться от горки.

Рассмотрим граничный случай – скорость тележки наверху равна минимально необходимой для выполнения условия задачи. Тогда скорость тележки после удара в точности равна u_2 . Из закона сохранения импульса найдем

импульс вагона:

$$Mu_3 = mu_1 - (-mu_2) = m(\sqrt{v^2 + 2gH} + \sqrt{2gH}).$$

Еще одно уравнение получим, используя закон сохранения энергии для упругого удара:

$$\frac{mu_1^2}{2} = \frac{mu_2^2}{2} + \frac{Mu_3^2}{2}.$$

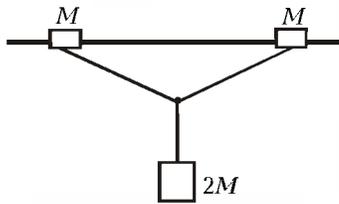
Из этих уравнений найдем минимальную скорость тележки наверху:

$$v = \frac{\sqrt{8MmgH}}{M - m}.$$

В знаменателе дроби стоит неприятное выражение $M - m$, но мы уже говорили о том, что масса налетающей тележки должна быть меньше массы стоящего вагона.

А.Зильберман

Ф1660. На гладкий горизонтально расположенный стержень надеты две одинаковые шайбы массой M каждая,



связанные легкой нерастяжимой нитью длиной $2L$ (см. рисунок). К середине нити привязан груз массой $2M$, который вначале удерживают так, что нить не натянута, но практически не провисает. Груз отпускают, и система приходит в движение без рывка. Найдите максимальные значения скоростей шайб и груза в процессе движения. Ускорение свободного падения g .

Легко связать скорости тел (нить нерастяжима):

$$v \sin \alpha = u \cos \alpha, \text{ или } v = u \operatorname{ctg} \alpha,$$

где v – скорость каждой шайбы, u – скорость груза, α – угол между стержнем и вертикалью. Ясно, что шайбы все время ускоряются (проекция силы натяжения нити на направление движения шайбы все время положительна), и максимальную скорость v_m шайбы будут иметь непосредственно перед ударом. Скорость груза перед ударом шайб падает до нуля; тогда из закона сохранения энергии

$$2 \frac{Mv_m^2}{2} = 2M \cdot gL$$

можно получить

$$v_m = \sqrt{2gL}.$$

Определим теперь максимальную скорость груза u_m во время движения. Выразим эту скорость в виде функции угла α и найдем максимум этой функции. Согласно закону сохранения энергии,

$$2 \frac{Mv^2}{2} + \frac{2M \cdot u^2}{2} = 2M \cdot gL \cos \alpha,$$

или

$$u^2 = \frac{2gL \cos \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 2gL \cos \alpha \sin^2 \alpha.$$

Тут можно сразу найти максимум, например через производную, но можно это обойти при помощи простого приема – рассматривая движение шайбы в системе отсчета, связанной с грузом (в районе максимума скорости груза его ускорение практически равно нулю, и система

получается «хорошей» – инерциальной). В этой системе отсчета шайба движется по окружности радиусом L со скоростью $V = u/\sin \alpha$. Ускорение шайбы направлено вдоль стержня, поэтому сумма проекций сил в перпендикулярном стержню направлении равна нулю:

$$Mg + T \cos \alpha - N = 0,$$

где T – натяжение нити, N – реакция опоры стержня. В направлении вдоль нити получим

$$T + Mg \cos \alpha - N \cos \alpha = \frac{MV^2}{L}.$$

Кроме того, при максимуме скорости груза должны быть уравновешены действующие на него силы:

$$2T \cos \alpha = 2Mg.$$

Отсюда получим

$$T \sin^2 \alpha = \frac{Mu^2}{L \sin^2 \alpha}.$$

Приравняв два полученных выражения для u^2 , найдем

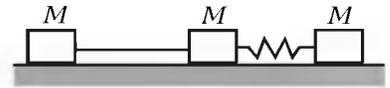
$$\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}.$$

Подставляя это значение в выражение для квадрата искомой скорости груза, получим

$$u_m = \sqrt{\frac{4gL}{3\sqrt{3}}} = 2\sqrt{\frac{gL}{3\sqrt{3}}}.$$

А.Зильберман

Ф1661. На гладком горизонтальном столе находятся три одинаковые тележки, масса каждой тележки M (см. рисунок). Средняя тележка связана с одной из крайних легкой нитью, а с другой – легкой пружинкой жесткостью k . Вначале систему удерживают так, что пружинка не деформирована, а нить не натянута, но практически не провисает. Толчком придадим «подпружиненной» крайней тележке скорость v_0 вдоль прямой, соединяющей тележки, в направлении от средней. При какой длине нити удар тележек, которые были связаны этой нитью, получится громче всего? Тележки все время движутся вдоль прямой, пружинка при деформациях подчиняется закону Гука.



До некоторого момента нить остается натянутой, и связанные ею тележки едут вместе. После того как скорость этой пары достигнет максимума, нить перестанет быть натянутой и не будет действовать на тележки. В этом случае крайняя левая тележка продолжит движение с постоянной скоростью и до самого удара будет двигаться равномерно. «Самый громкий» удар получится в том случае, когда относительная скорость тележек непосредственно перед ударом будет самой большой. Скорость одной из тележек постоянна; значит, максимальная относительная скорость получается в те моменты, когда вторая тележка имеет максимальную скорость навстречу первой.

Вначале проведем расчет первого этапа – найдем максимальную скорость тележек при натянутой нити. Скорость максимальна (или минимальна) в те моменты, когда пружина не деформирована. Запишем уравнения законов сохранения импульса и энергии всей системы без учета

энергии пружины:

$$2Mu + Mv = Mv_0, \quad 2\frac{Mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2},$$

откуда найдем скорость u связанных нитью тележек и скорость v правой тележки:

$$u = \frac{2v_0}{3}, \quad v = -\frac{v_0}{3}.$$

Дальше крайняя левая тележка едет со скоростью u , а тележки с пружиной между ними – отдельно от нее. Скорость центра масс тележек с пружиной составляет $v_0/6$, относительно него скорости этих тележек направлены навстречу друг другу и равны по $v_0/2$. Ясно, что условие задачи будет выполнено, если удар произойдет в тот момент, когда относительные скорости связанных пружиной тележек равны $v_0/2$ и направлены друг от друга. Это произойдет ровно через половину периода колебаний (точнее – через целое число периодов плюс полпериода) тележек с пружиной:

$$\tau = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

Удобно вести вычисления в системе отсчета, которая движется вправо со скоростью $v_0/6$ (система центра масс тележек с пружиной). В этой системе свободная левая тележка едет вправо со скоростью $v_0/2$, тогда минимальная длина нити (возможны и другие решения – вместо τ нужно подставлять $nT + \tau$) составляет

$$L = \frac{1}{2}v_0\tau = \frac{\pi v_0}{2}\sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

Р.Александров

Ф1662. В вертикальном теплоизолированном сосуде под тяжёлым поршнем находится порция азота. На поршне сверху лежит гряда песка, система находится в равновесии, начальный объем газа V_1 , начальное давление p_1 . Начнем медленно, по одной песчинке, убирать песок и уменьшим давление до p_2 ; при этом объем газа увеличится до V_2 (конечно, можно было этот объем вычислить, но будем считать, что это уже сделали и вам сообщили результат). Теперь проведем эксперимент иначе – снимем всю порцию песка сразу. Какую кинетическую энергию имел бы в этом случае поршень в тот момент, когда объем газа составил бы V_2 ? Считайте газ достаточно разреженным.

При медленном расширении газа без подвода тепла работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа. Тогда в первом случае работа газа равна разности его энергий в начале и в конце процесса расширения:

$$A = U_1 - U_2 = 2,5(vRT_1 - vRT_2) = 2,5(p_1V_1 - p_2V_2).$$

По условию задачи поршень массивный; следовательно, он будет двигаться медленно даже тогда, когда мы снимаем всю порцию песка сразу. Поэтому работа газа во втором случае получится такой же, как и в первом (медленное расширение газа без подвода тепла).

Во втором случае работа газа идет на увеличение потенциальной и кинетической энергии поршня. Потенциальная энергия поршня увеличилась на

$$\Delta E_p = Mg(H_2 - H_1) = \frac{Mg(V_2 - V_1)}{S} = p_2(V_2 - V_1).$$

Тогда кинетическая энергия поршня получится равной

$$\Delta E_k = A - \Delta E_p = 2,5(p_1V_1 - p_2V_2) - p_2(V_2 - V_1).$$

М.Учителев

Ф1663. На закрепленную тонкостенную непроводящую сферу радиусом R нанесен распределенный равномерно по поверхности заряд Q . В стенке сделано маленькое круглое отверстие площадью S . В центре сферы вначале удерживают очень маленькое по размерам массивное тело, на которое помещен заряд q того же знака, что и заряд сферы. Тело отпускают, и оно начинает двигаться под действием только электростатических сил (сила тяжести отсутствует). Объясните, почему тело будет двигаться в сторону дырки. Найдите кинетическую энергию тела, когда оно окажется в центре дырки. Точно вычислить эту энергию трудно – постарайтесь найти не слишком грубое приближение.

«Заполним» дырку такими же зарядами, что и на остальной части сферы, получив равномерно заряженную сферу, которая не создает поля внутри, и одновременно добавим туда же заряды противоположного знака, которые на поверхности дырки дадут в сумме нулевой заряд. Именно эти заряды противоположного знака, находящиеся на площади S , и создают поле внутри сферы, именно это поле и будет разгонять тело, несущее заряд q . Ясно теперь, что тело действительно будет двигаться в сторону дырки, а его кинетическая энергия определится разностью потенциалов между центром сферы и центром дырки. Поскольку поле равномерно заряженной сферы можно не учитывать, задача сводится к расчету разности потенциалов, создаваемой маленьким практически плоским участком площадью S , заряженным с плотностью $\sigma = Q/(4\pi R^2)$.

Вдали от «дырки» поле похоже на поле точечного заряда, вблизи – на поле заряженной плоскости. Расчет можно провести, нарисовав кривые напряженностей этих полей на одном графике и плавно перейдя от одного к другому (например, от бесконечности до точки пересечения кривых взять поле точечного заряда, а дальше до самого центра дырки – однородное поле плоскости). В этом случае разность потенциалов найти будет несложно.

Но можно сделать расчет немного проще. Найти потенциал поля дырки в центре сферы совсем просто:

$$\varphi_{\text{ц}} = \frac{\sigma S}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{QS}{16\pi^2\epsilon_0 R^3}.$$

Для того чтобы найти потенциал в центре дырки, разобьем кружок на тонкие кольца и посчитаем сумму вкладов этих колец в потенциал центра (пусть радиус кольца x , его ширина dx):

$$d\varphi_{\text{д}} = \frac{\sigma \cdot 2\pi x dx}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\sigma dx}{2\epsilon_0},$$

$$\varphi_{\text{д}} = \frac{\sigma r}{2\epsilon_0} = \frac{Q\sqrt{S/\pi}}{8\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Видно, что при малых размерах дырки $\varphi_{\text{ц}} \ll \varphi_{\text{д}}$, и кинетическая энергия тела равна

$$E_k = q\varphi_{\text{д}} = \frac{qQ\sqrt{S/\pi}}{8\pi\epsilon_0 R^2}.$$

(Кстати, расчет по способу «сшивания» графиков дает почти тот же ответ – он больше в $\sqrt{2}$ раз.)

А.Зильберман

Ф1664. В цепи, изображенной на рисунке 1, все резисторы имеют одно и то же сопротивление. Во сколько

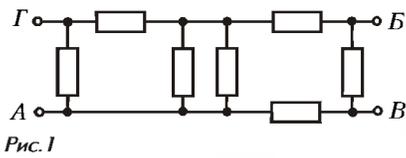


Рис.1

раз изменится сопротивление цепи, измеряемое между точками А и В, если замкнуть проводником точки В и Г?

Для удобства вычислений обозначим на чертеже еще точку Д (рис.2). Видно, что резисторы АГ и ГД соединены последовательно, так что их можно заменить резистором сопротивлением $2R$. После замены получаем три параллельно соединенных резистора – этот резистор сопротивлением $2R$ и два резистора сопротивлением по R каждый, включенные между точками А и Д. Заменяем эту тройку резистором сопротивлением $0,4R$ – в сумме с последовательно подключенным резистором ДБ получим $1,4R$. Резисторы АВ и ВБ соединены последовательно, заменим их резистором сопротивлением $2R$. После расчета параллельного соединения этого резистора и резистора сопротивлением $1,4R$ получим $14R/17$.

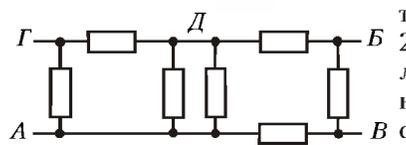


Рис.2

Теперь замкнем точки В и Г. Перерисуем схему так, чтобы была ясна получившаяся симметрия (рис.3). Видно, что точка Д и точка В, Г совершенно равноправны – к той и к другой подходят одинаковые цепочки от точки А и от точки Б. Это означает, что ток через резистор, включенный между точками Д и В, равен нулю и этот резистор можно просто удалить из схемы – ничего при этом не изменится, а схема будет выглядеть проще. После «выбрасывания» получим две простые цепочки сопротивлением по $1,5R$, соединенные параллельно. Полное сопротивление при этом составит $3R/4$. Таким образом, после замыкания точек В и Г полное сопротивление между точками А и Б уменьшилось в $56/51 \approx 1,1$ раза.

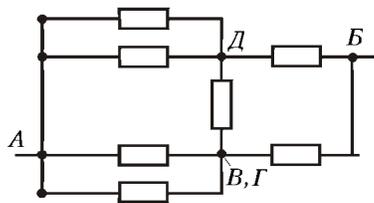
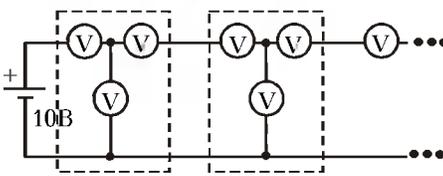


Рис.3

А.Простов

Ф1665. К батарейке напряжением 10 В подключена схема, содержащая очень большое число одинаковых ячеек. Каждая ячейка состоит из трех одинаковых вольтметров, как показано на рисунке. Найдите показания вольтметров в первой ячейке. Что показывают вольтметры в ячейке номер пять?



Найдем обычным способом сопротивление бес-

конечной цепочки Z – добавим одно звено и потребуем, чтобы сопротивление осталось равным Z :

$$R + \frac{R(R+Z)}{R+Z+R} = Z,$$

откуда

$$Z = R\sqrt{3}.$$

Теперь приступим к расчету напряжений. Пусть нижний вольтметр в первом звене показывает U , тогда левый покажет $E - U$, где E – напряжение батарейки, а правый (ток через него равен разности токов первых двух приборов) покажет $E - 2U$. Напряжение на входе второго звена определяется произведением тока правого вольтметра (такой же ток втекает во второе звено) на сопротивление бесконечной цепи Z . Значит, это напряжение больше напряжения правого вольтметра в $\sqrt{3}$ раз, т.е. равно $\sqrt{3}(E - 2U)$. Сумма последних двух напряжений равна напряжению нижнего вольтметра:

$$U = (E - 2U) + \sqrt{3}(E - 2U).$$

Отсюда

$$U = E \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx 4,23 \text{ В.}$$

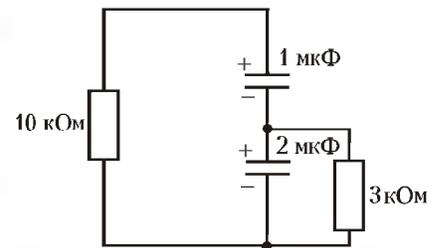
Итак, левый вольтметр показывает $E - U \approx 5,77 \text{ В}$, правый вольтметр показывает $E - 2U \approx 1,54 \text{ В}$.

Напряжение на входе второй ячейки составляет $E(2 - \sqrt{3})$. Тогда показания приборов в пятой ячейке будут меньше показаний соответствующих приборов первой ячейки в $1/(2 - \sqrt{3})^4 \approx 194$ раза.

Р.Повторов

Ф1666. Конденсатор емкостью 1 мкФ заряжен до напряжения 4 В и подключен «минусом» к «плюсу» конденсатора емкостью 2 мкФ, заряженного до напряжения 6 В (см. рисунок). Параллельно конденсатору

подключают резистор сопротивлением 3 кОм, а к свободным выводам конденсаторов одновременно подключают резистор сопротивлением 10 кОм. Какое количество теплоты выделится в каждом из резисторов за большой интервал времени?



Численные данные в этой задаче аккуратно подобраны. Сразу после подключения через резистор сопротивлением 10 кОм потечет ток

$$I_1 = \frac{U_1 + U_2}{R_1} = 1 \text{ мА,}$$

а через резистор сопротивлением 3 кОм –

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 2 \text{ мА.}$$

Верхний конденсатор разряжается током 1 мА, а нижний – суммой токов 1 мА + 2 мА, т.е. в 3 раза большим током. Но при заданных в задаче напряжениях и емкостях отношение зарядов конденсаторов также равно 1:3, поэтому они будут разряжаться, все время сохраняя это отношение зарядов. Значит, соотношение между токами резисторов сохранится равным

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2},$$

а отношение мощностей составит

$$\frac{I_1^2 R_1}{I_2^2 R_2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Полное количество теплоты равно сумме начальных энергий конденсаторов, распределение же энергии между резисторами определяется отношением мощностей. Окончательно получим

$$W_1 = \frac{5}{11} W = \frac{5}{11} \left(\frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2} \right) = 20 \text{ мкДж},$$

$$W_2 = \frac{6}{11} W = 24 \text{ мкДж}.$$

З.Рафаилов

Ф1667. К сети переменного напряжения частоты 50 Гц подключены последовательно конденсатор емкостью 10 мкФ и амперметр переменного тока. Последовательно с ними включают катушку. При какой индуктивности катушки показания амперметра увеличатся в два раза? При какой индуктивности показания уменьшатся в два раза? Как изменятся токи, если катушки с вычисленными вами параметрами подсоединять не последовательно, а параллельно конденсатору? Элементы цепи считать идеальными.

Это – несложная задача. Ток в цепи с конденсатором равен

$$I_1 = \frac{U}{X_C} = U\omega C.$$

Если последовательно с конденсатором включить катушку индуктивностью L , амперметр покажет ток

$$I_2 = \frac{U}{|X_C - X_L|} = \frac{U}{|1/(\omega C) - \omega L|}.$$

Для удвоенного тока есть две возможности. В первом случае

$$\frac{1}{\omega C} - \omega L_1 = \frac{1}{2\omega C},$$

откуда получаем

$$\omega^2 L_1 C = 0,5, \text{ и } L_1 = \frac{1}{2\omega^2 C} \approx 0,5 \text{ Гн}.$$

Во втором случае

$$\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\omega C},$$

откуда

$$\omega^2 L_2 C = 1,5, \text{ и } L_2 = 3L_1 \approx 1,5 \text{ Гн}.$$

Для половинного тока есть только один вариант:

$$\omega L_3 - \frac{1}{\omega C} = \frac{2}{\omega C},$$

откуда находим

$$\omega^2 L_3 C = 3, \text{ } L_3 = 6L_1 \approx 3 \text{ Гн}.$$

В случае параллельного включения катушек проведем расчет в общем случае, а затем подставим вычисленные значения индуктивностей. Ток в цепи будет равен

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{X_L} - \frac{U}{X_C} = \frac{U}{\omega L} - U\omega C = \\ &= U\omega C \left(\frac{1}{\omega^2 LC} - 1 \right) = I_1 \left(\frac{1}{\omega^2 LC} - 1 \right). \end{aligned}$$

Для индуктивности L_1 получится ток $I_1(1/(\omega^2 L_1 C) - 1) = I_1$, для L_2 получится ток $I_1/3$, для L_3 – ток $2I_1/3$.

М.Учителев

Гауссовы суммы

В.СЕНДЕРОВ, А. СПИВАК

Правильные многоугольники

Проведем векторы из центра O правильного n -угольника во все его вершины A_1, A_2, \dots, A_n (на рисунке 1 $n = 7$). Получим систему векторов, сумма которых равна нулю:

$$\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n = \vec{0}. \quad (1)$$

Доказательство равенства (1) очень простое: если бы сумма не равнялась нулю, то при повороте каждого из векторов на угол $360^\circ/n$ сумма должна была бы одновременно и повернуться на угол $360^\circ/n$, и остаться неизменной, поскольку при повороте векторы переходят «по циклу» друг в друга.

Неудивительно, что равенство (1) используется во многих задачах планиметрии (см., например, статью «Вписанные многоугольники», в этом номере журнала). Немецкий математик К.Ф.Гаусс (1777–1855) в трактате «Арифметические исследования», опубликованном в 1801 году, рассмотрел более сложные, чем (1), формулы. Неожиданным образом они оказались очень важны для теории чисел. Соответствующие суммы векторов получили название «гауссовых сумм». Рассказу о них и посвящена статья.

Задача М1648

Начнем с задачи «Задачника «Кванта».

М1648. Из центра правильного многоугольника, вписанного в ок-

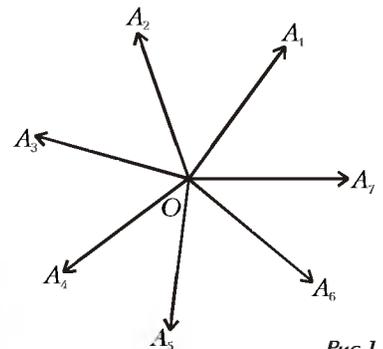


Рис.1

ружность радиусом 1, в некоторые вершины этого многоугольника проведены векторы. Может ли длина суммы этих векторов равняться а) 1998; б) $\sqrt{1998}$?

Ответ на оба вопроса задачи утвердительный. Начнем построение примера к пункту а). Длина суммы $\vec{OB}_2 + \vec{OB}_3 + \vec{OB}_4$ векторов рисунка 2 равна 2. Чтобы построить систему векторов, длина суммы которых равна 3, помимо шестиугольника рассмотрим пятиугольник (рис.3).

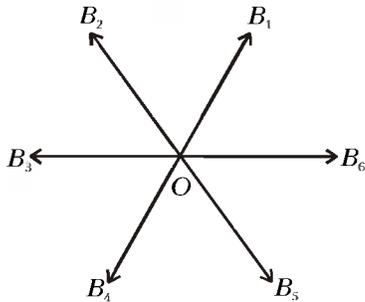


Рис.2

Аналогично, чтобы построить систему векторов, длина суммы которых равна 4, добавим еще 6 векторов \vec{OA}_1, \dots

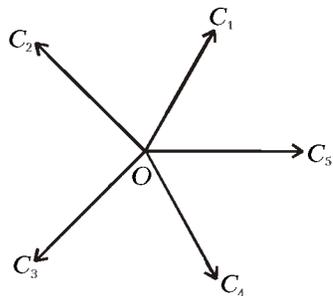


Рис.3

\dots, \vec{OA}_6 , соединяющих центр с вершинами семиугольника (см. рис.1). Продолжая в таком же духе, мы и получим пример к пункту а).
Формальное описание изложенной конструкции таково. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_{1998}$ — попарно взаимно простые числа. Рассмотрим правильный $n_1 n_2 \dots n_{1998}$ -угольник. Зафиксируем некоторую его вершину A. Назовем «выделенным» n_i -угольником ($i = 1, \dots, 1998$) правильный n_i -угольник, одной из вершин которого является точка A, а другие вершины являются вершинами $n_1 n_2 \dots n_{1998}$ -угольника. Выделенные n_i -угольник и n_j -угольник ($i \neq j$) имеют, благодаря взаимной простоте чисел n_i и n_j , единственную общую вершину A. Рассмотрим векторы, идущие из центра O многоугольника во все вершины всех выделенных n_i -угольников, кроме A. Их сумма равна $1998 \vec{OA}$, что и требовалось.

б) В следующем разделе статьи мы построим с привлечением комплексных чисел сумму длиной \sqrt{n} при любом натуральном n , а пока предлагаем ряд упражнений. Тот, кто справится с ними, получит решение пункта б), не используя никаких выходящих за рамки школьной программы понятий (но, к сожалению, существенно использующее специфику числа $\sqrt{1998}$).

Упражнение 1. Воспользовавшись приемом решения пункта а), докажите, что если можно представить в искомом виде (т.е. в виде суммы векторов, проведенных из центра вписанного в единичную окружность правильного многоугольника в его вершины) некоторый вектор \vec{v} , то можно представить в таком виде и вектор $a\vec{v}$, где a — натуральное число.

Упражнение 2. Докажите, что если можно представить в искомом виде вектор длиной x , то можно представить в таком виде и вектор длиной а) $x\sqrt{a^2 + b^2}$, б) $x\sqrt{a^2 + 2b^2}$, где a и b — натуральные числа.

Замечание. Если в искомом виде можно представить некоторый вектор длиной \sqrt{m} , то можно представить и вектор длиной $\sqrt{2m}$. Поэтому в дальнейшем мы можем искать вектор длиной \sqrt{n} только для нечетных n .

Упражнение 3. Решите пункт б) задачи M1648.

Указание. $\sqrt{1998} = \sqrt{3^2 + 18^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2 \cdot 1^2}$.

Корни из единицы

Сейчас мы запишем равенство (1) в довольно неожиданном виде. Для этого рассмотрим уравнение $z^n - 1 = 0$ и разложим его левую часть на множители:

$$(z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1) = 0.$$

Значит, если $z^n = 1$ и $z \neq 1$, то

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0. \quad (2)$$

В статье «Многочлены деления круга» («Квант» №1 за 1998 год) рассказано о том, что уравнение $z^n = 1$ имеет n решений — «корней из единицы». Они являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в единичную окружность, и имеют вид

$$\zeta^k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n},$$

где $\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, $k = 1, \dots, n$. Сумма всех корней n -й степени из единицы (при $n > 1$) равна 0:

$$1 + \zeta + \dots + \zeta^{n-2} + \zeta^{n-1} = 0.$$

Это, по сути, и есть равенство (1)!

Зная все n корней $\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n (=1)$ многочлена $z^n - 1$, мы можем разложить его на множители:

$$z^n - 1 = (z - \zeta)(z - \zeta^2) \dots (z - \zeta^{n-1})(z - 1). \quad (3)$$

Сократив обе части на $z - 1$, получим

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = (z - \zeta)(z - \zeta^2) \dots (z - \zeta^{n-1}). \quad (4)$$

Подставим в последнее равенство вместо z число 1:

$$n = (1 - \zeta)(1 - \zeta^2) \dots (1 - \zeta^{n-1}). \quad (5)$$

Упражнение 4. Чтобы получить равенство (5), мы подставили $z = 1$ в равенство (4), которое получилось делением на $z - 1$ обеих частей равенства (3). Объясните, почему так делать можно, хотя «на ноль делить нельзя».

Пусть n — нечетное число. Тогда все множители правой части (5) можно разбить на комплексно сопряженные (т.е. симметричные относительно оси абсцисс) пары чисел $1 - \zeta^k = 1 - \cos \frac{2\pi k}{n} - i \sin \frac{2\pi k}{n}$ и $1 - \zeta^{n-k} = 1 - \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ (рис. 4). Взяв из каждой пары сопряженных множителей только один множитель, мы получим число, модуль которого — квадратный корень из

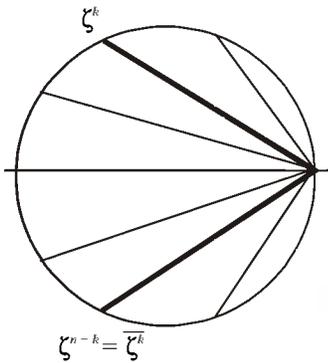


Рис. А

модуля произведения:

$$\sqrt{n} = \left| (1-\zeta)(1-\zeta^2)\dots(1-\zeta)^{(n-1)/2} \right| \quad (6)$$
 Раскрыв скобки в произведении, стоящем в формуле (6) под знаком модуля, мы получим вектор, длина которого равна \sqrt{n} . Он называется суммой корней из единицы. (Знаки вычитания нас не смущают, поскольку корень из единицы, взятый со знаком минус, все равно является корнем некоторой степени из единицы.) Если некоторые корни из единицы встретятся в этой сумме неоднократно, то можно применить прием пункта а) и по одному, вводя все новые простые числа, заменять такие корни.

Упражнение 5. Выпишите равенство, аналогичное равенству (6), для четного n .

Упражнение 6. а) Найдите произведение $A_1A_n \cdot A_2A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_{n-1}A_2$ длин сторон и диагоналей, выходящих из вершины A_n правильного n -угольника $A_1A_2\dots A_n$, вписанного в окружность единичного радиуса. б) Найдите произведение длин всех сторон и диагоналей правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R .

Упражнение 7. Пусть $ABCDE$ – правильный пятиугольник, вписанный в окружность с центром O . Если $AO = 1$ и если точка P симметрична точке O относительно точки A , докажите, что $PB \cdot PC = \sqrt{31}$.

Упражнение 8. а) Выведите из равенства (6), что если n нечетное, то

$$2^{(n-1)/2} \sin(\pi/n) \sin(2\pi/n) \dots \sin\left(\frac{n-1}{2} \pi/n\right) = \sqrt{n}.$$

б) Найдите произведение

$$\sin(\pi/n) \sin(2\pi/n) \dots \sin\left(\frac{n-2}{2} \pi/n\right),$$

где n – четное число.

К сожалению, формула (6) дает только длину, а не направление вектора. Получить вектор длиной \sqrt{n} известного направления проще всего при помощи формул для гауссовых сумм (см. следующий раздел). Можно обойтись и более простыми (но, к сожалению, менее естественными) средствами – применив к формуле упражнения 8 а) формулу $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ преобразования произведения синусов в разность косинусов и аналогичные формулы для произведения синуса и косинуса и для произведения косинусов, можно получить формулу вида

$$\sum_k 2 \cos \frac{m_k}{2n} \pi = \sqrt{n},$$

где m_k – целые числа. Далее можно воспользоваться тем, что удвоенный косинус любой рациональной доли угла π есть сумма сопряженных корней из единицы (а именно, $2 \cos \frac{m_k}{2n} \pi = \eta^{m_k} + \eta^{-m_k}$, где $\eta = \cos(\pi/n) + i \sin(\pi/n)$ – корень $2n$ -степени из единицы).

Упражнение 9. Представьте в виде суммы корней из единицы числа а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$.

Гауссовы суммы

Обозначим

$$S_n = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^9 + \dots + \zeta^{(n-1)^2}.$$

Упражнение 10. Вычислите S_n при а) $n = 1, 2, \dots, 6$; б*) $n = 7$; в) $n = 8, 9, 10$.

После ряда безуспешных попыток Гаусс в 1811 году доказал, что

$$S_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \equiv 1 \pmod{4}, \\ 0, & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ i\sqrt{n}, & n \equiv 3 \pmod{4}, \\ (1+i)\sqrt{n}, & n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

В 1835 году Дирихле при помощи рядов Фурье получил другое доказательство этого факта. К сожалению, оно тоже слишком сложное и не может здесь обсуждаться.

Абсолютную величину S_n , в отличие от точного значения этого числа, найти легко. Мы сделаем это в случае, когда n – нечетное число. Поскольку модуль числа равен корню из произведения числа и его сопряженного, достаточно доказать формулу

$$S_n \overline{S_n} = n, \quad (7)$$

т. е.

$$\left(1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^9 + \dots + \zeta^{(n-1)^2}\right) \times \left(1 + \bar{\zeta} + \bar{\zeta}^4 + \bar{\zeta}^9 + \dots + \bar{\zeta}^{(n-1)^2}\right) = n.$$

Как известно, $\bar{\zeta} = \zeta^{-1}$. Раскроем скобки. При умножении взятого из первой скобки числа ζ^{k^2} , где $k = 0, \dots, n-1$, на взятое из второй скобки слагаемое ζ^{-m^2} , где $m = 0, \dots, n-1$, получаем $\zeta^{k^2 - m^2}$. Обозначим через a и b остатки от деления на n чисел $k - m$ и $k + m$. Очевидно, $\zeta^{k^2 - m^2} = \zeta^{ab}$. Любой паре остатков $(a; b)$ соответствует единственная пара $(k; m)$. (Докажите!) Поэтому при суммировании встретятся по одному разу все n^2 разных пар $(a; b)$ и, следовательно,

$$S_n \overline{S_n} = \sum_{b=0}^{n-1} \sum_{a=0}^{n-1} \zeta^{ab}.$$

При $b = 0$ все n слагаемых вида ζ^{ab} равны 1. При $1 \leq b < n$ сумма $\sum_{a=0}^{n-1} \zeta^{ab}$ равна 0. Равенство (7) доказано.

Упражнение 11. Докажите, что а) если $n = 4k + 2$, где $k \in \mathbf{N}$, то $S_n = 0$; б) если $n = 4k$, где $k \in \mathbf{N}$, то $|S_n| = \sqrt{2n}$.

Упражнение 12*. Докажите, что если p – нечетное простое число, то $S_p^2 = (-1)^{(p-1)/2} p$.

Задачи

1. Винни-Пух и Пятачок сели за стол немного подкрепиться и начали одновременно есть мед из одного горшка, не отвлекаясь на разговоры. Если бы Винни-Пух ел со скоростью Пятачка, то процесс еды длился бы на 4 минуты дольше, а если бы, наоборот, Пятачок ел со скоростью Винни-Пуха – то сократился бы на 1 минуту. За какое время мед был полностью съеден?

А.Большот



2. На рынке продавали раков: больших – по 5 рублей, маленьких – по 3 рубля, а также жаб – по рублю. Иван и Степан купили себе раков на одинаковые суммы денег, причем Иван купил больших и маленьких раков поровну, а Степан – вдвое меньше больших раков, чем маленьких. Иван расплатился одной сторублевой купюрой, а Степан – несколькими десятирублевыми. У продавца не оказалось мелких денег, поэтому он выдал сдачу Ивану опять же раками, а Степану – жабами. Сколько всего животных унесли приятели с рынка?

И.Акулич

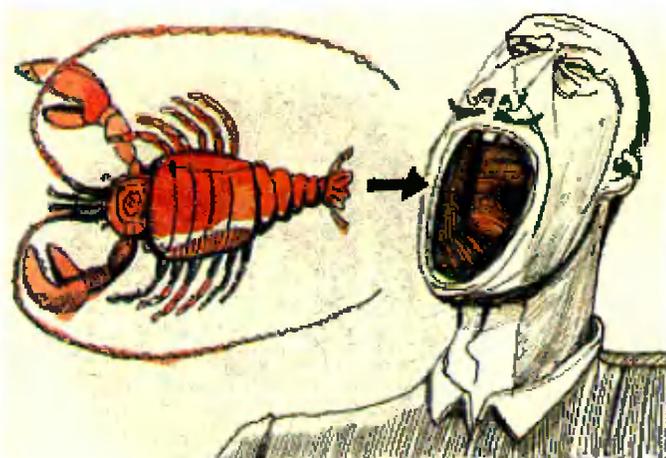
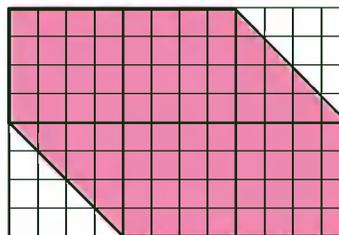


Иллюстрация А.Васина

3. Шестиугольник на клетчатой бумаге разрежьте на 3 части, из которых можно сложить квадрат.

В.Произволов



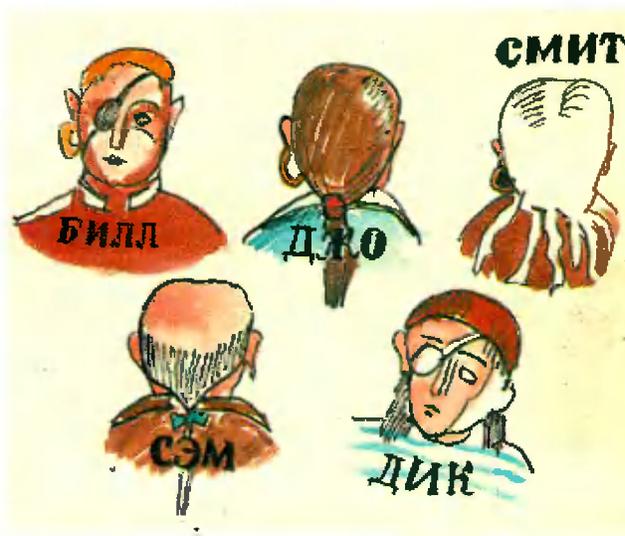
4. Я задумал натуральное число, которое записывается так же, как и число, которое я задумал, в системе счисления с основанием, равным числу, которое я задумал. Какое число я задумал?

А.Жуков



5. Кто из пиратов должен вернуться, чтобы узнать, верно ли утверждение: «Если у пирата есть серьга или косичка, то у него выбит глаз»?

В.Роджер



Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6—8»

Мы заканчиваем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков.

Победители конкурса будут награждены грамотами и призами журнала.

16. Известно, что существует факториал, оканчивающийся ровно m нулями, но не существует факториала, оканчивающегося ровно $m - 1$ нулями. Существует ли факториал, оканчивающийся ровно $m + 1$ нулями?

(Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n , обозначается: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.)

И.Акулич

17. В таблице

x_1	x_2	x_3
y_1	y_2	y_3
z_1	z_2	z_3

суммы чисел, стоящих в строках, одинаковы. Суммы чисел, стоящих в столбцах, тоже одинаковы. Докажите равенство

$$x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3 = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3.$$

В.Произволов

18. Докажите, что если для натуральных чисел a и b справедливо неравенство $\sqrt{5} - \frac{a}{b} > 0$, то $\sqrt{5} - \frac{a}{b} > \frac{1}{4ab}$.

В.Кириак

19. Обезьянки Чи-Чи и Чита нашли в джунглях кучу из 25 кокосовых орехов.

– Давай вытаскивать орехи по-очереди, – предложила Чи-Чи, – причем каждый раз из кучи можно вытаскивать такое количество орехов, которое является делителем имеющегося количества орехов в куче. Разумеется, всю кучу хватать нельзя, если только в ней не остался последний орех. Последний орех забирать можно.

– Чур, я первая! – засуетилась Чита.

Кому из обезьянок при правильной игре достанется больше орехов?

А.Жуков

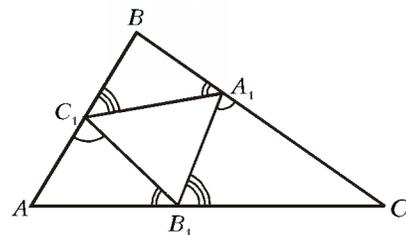
20. На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что

$$\angle AC_1B_1 = \angle B_1A_1C,$$

$$\angle BA_1C_1 = \angle C_1B_1A,$$

$$\angle CB_1A_1 = \angle A_1C_1B.$$

Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон треугольника ABC .



В.Произволов

Заключительный этап конкурса «Математика 6—8»

Светлой памяти Анатолия Павловича Савина, организатора и председателя жюри всех предыдущих конкурсов «Математика 6–8», были посвящены соревнования, проходившие, как и в прошлом году, под Рыбинском. Дело, в которое Анатолий Павлович вкладывал душу и талант, было продолжено: 60 школьников из Астрахани, Иванова, Костромы, Минска, Рыбинска, Самары, Харькова, Чебоксар и Ярославля, а также их руководители и жюри собрались в конце июня, чтобы порешать задачи, поучиться, познакомиться друг с другом, обменяться мнениями и впечатлениями.

Вот список лауреатов личной олимпиады, состоявшейся 28 июня:



дипломы I степени получили

Берштейн Михаил – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Гарбер Михаил – Ярославль, школа 33, 8 кл.,
Голубов Алексей – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Соколов Сергей – Рыбинск, школа 30, 8 кл.,
Темкин Михаил – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Шаповалова Валентина – Иваново, лицей «Гармония»,
 6 кл.;

дипломы II степени получили

Гарбер Алексей – Ярославль, школа 33, 8 кл.,
Григорев Сергей – Астрахань, ФМШ, 8 кл.,
Жежерун Андрей – Самара, университет Наяновой, 8 кл.,
Куликов Егор – Ярославль, школа 84, 7 кл.,
Моисеев Игорь – Иваново, лицей «Гармония», 8 кл.,
Николаев Артем – Кострома, школа 32, 8 кл.,
Овчинников Андрей – Самара, университет Наяновой, 8 кл.,
Ульянов Федор – Иваново, школа 33, 8 кл.;

дипломы III степени получили

Бондарев Василий – Минск, школа 50, 8 кл.,
Геллер Игорь – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Горский Дмитрий – Кострома, школа 32, 8 кл.,
Кийков Илья – Самара, университет Наяновой, 8 кл.,
Колбун Владимир – Минск, политехническая гимназия,
 7 кл.,
Марковский Сергей – Минск, школа 41, 8 кл.,
Масликов Игорь – Кострома, школа 34, 7 кл.,
Меркулов Михаил – Самара, университет Наяновой, 7 кл.,
Никитова Анна – Иваново, школа 33, 8 кл.,
Стройнов Евгений – Иваново, школа 33, 8 кл.

10 команд, две из которых представляли Рыбинск, по одной – Астрахань, Иваново, Самару, Харьков, Чебоксары и Ярославль, одна («МиРы») – Минск и Рыбинск, и еще одна («АсКо») – Астрахань и Кострому, участвовали в интереснейшем турнире, финал которого состоялся 2 июля.

Бой Харьков–Ярославль показал незаурядные способности и выучку его участников; подготовили эти команды Е.Л.Аринкина, А.Л.Берштейн и С.Г.Волченков.

Первое место досталось харьковчанам, второе – ярославцам, третье – команде «АсКо» и ивановцам. Непосредственно за призерами в итоговой таблице расположилась команда Астрахани (что, несомненно, свидетельствует о прогрессе учащихся ФМШ Астрахани, ведь на предыдущем турнире они были («закрывающими»). Не повезло со жребием самарцам, но выглядели они очень достойно – сыграли с Харьковом вничью.

Как всегда, на конкурсе было много свежих и интересных задач. Приведем условия некоторых из них. Задачи 3–6 предлагались на устной олимпиаде, 1, 2, 7, 8 и 9 – на предварительных боях, 10 – в полуфинале, 11–13 – в финале. Авторами этих задач являются И.Акулич (3, 11), В.Произволов (4, 5), С.Токарев (7, 9, 13), А.Шаповалов (2, 6), В.Мищенко (8), Л.Курляндчик (10), С.Волченков (1, 12).

1. Торг имеет форму выпуклого пятиугольника со свечами в вершинах. Обязательно ли на торте найдется точка, начиная от которой прямыми разрезами торг можно разделить на 5 частей одинаковой площади, в каждой из которых есть свеча?

2. Концы каждого из 51 отрезков расположены на двух противоположных сторонах прямоугольника и делят каждую на 50 равных частей (вершины прямоугольника – тоже концы отрезков). Докажите, что среди отрезков есть равные.

3. Однажды в понедельник Петя принес в школу и дал почитать Коле сборник фантастических рассказов. Во вторник Коля отдал его Грише, Гриша в четверг отдал его Саше, Саша в следующий понедельник отдал его Володе, и так далее, причем каждый держал у себя книгу вдвое больше предыдущего. В результате книга вернулась к Пете опять в понедельник, но лишь в следующей учебной четверти. Сколько ребят успели ее прочесть?

4. В каждом из трех трехзначных чисел, сумма которых равна 1998, первую цифру поменяли местами с последней. Докажите, что сумма получившихся чисел также равна 1998, если известно, что в записи этих чисел никакие цифры, кроме 1, 8 и 9, не участвуют.

5. Сто гирек стоят в ряд, при этом массы любых соседних гирек различаются на 1 грамм. Докажите, что гирьки можно так разложить на две чашки весов, что весы будут в равновесии.

6. В клетчатом квадрате 6×6 , вначале пустом, Саша закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую только что закрашенную клетку число граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел в них будет равна 60.

7. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$ при $n = 1, 2, \dots$ Найдите a_{1998} .

8. AD и BC – основания равнобедренной трапеции $ABCD$, O – точка пересечения ее диагоналей. Докажите, что окружности, описанные около треугольника ABO и CDO , пересекаются в центре окружности, описанной около трапеции $ABCD$.

9. Можно ли, используя каждую из 10 цифр ровно один раз, записать натуральное число и его квадрат?

10. Натуральные числа m и n таковы, что $m^2 + n^2 + m$ делится на mn . Докажите, что m – точный квадрат.

11. В неравностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса угла A , пересекающая серединный перпендикуляр к стороне BC в точке A_1 . Аналогично определяются точки B_1 и C_1 . Как по точкам A_1 , B_1 и C_1 восстановить треугольник ABC ?

12. Тысяче солдат присвоили порядковые номера от 1 до 1000, а затем каждый ответил на вопрос, пойдет ли он в разведку. Солдат с номером i , где $i = 1, \dots, 1000$, согласился идти в разведку, если в отряде будет не менее $i^2/1000$ человек и не более i человек. Какую наибольшую численность может иметь разведотряд?

13. В стране, где 25 городов, три авиакомпании хотят, чтобы для любой пары городов все беспосадочные авиарейсы между этими городами осуществлялись только одной из авиакомпаний, однако любая авиакомпания могла бы доставлять пассажиров из любого города в любой другой с посадкой не более чем в одном промежуточном городе. Докажите, что это осуществимо.

Отметим, что второй год подряд успешным своим проведением конкурс обязан Управлению по делам образования и молодежи Рыбинска; особой же благодарности заслуживают Н.А.Брянкина (заместитель начальника Управления) и А.Н.Морозов (руководитель Рыбинского филиала Ярославской областной заочной математической школы). Радужные хозяева турнира наградили членов команды-победительницы ценными подарками; были установлены и два специальных приза: «лучшему игроку» (его получил Михаил Берштейн) и «лучшему шестикласснику» (Валентина Шаповалова). Жюри также выражает благодарность Московскому институту развития образовательных систем (МИРОС, директор – А.М.Абрамов) за предоставление книг для призов победителям.

С.Токарев

Мои ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

(из путевых заметок Лемюэля Гулливера)

ШТОРМ РАЗБИЛ МОЕ СУДНО, И МНЕ ПРИШЛОСЬ, ухватившись за обломок мачты, положиться на волю волн. Долго носило меня по бушующему океану, я страдал от голода, холода и жажды и очень опасался прожорливых акул, которые встречаются в этих широтах повсеместно. Все силы мои были исчерпаны, и сознание мутилось; но судьба была благосклонна ко мне: я не утонул, не умер от жажды и не попал в утробу акулы; на третий день вынесло меня на песчаный берег. Долго лежал я на песке, не в силах двинуться с места; я только и сумел, что перерезать ремень, которым привязал себя к мачте. К счастью, пришло время отлива, и море отступило от берега; иначе меня могло вновь смыть волной, и я наверное бы утонул.

Не знаю, сколько я так пролежал; вероятно, я был без сознания. Помню только, что через какое-то время возле моего лица оказались босые черные ноги. Я повернул голову и не сдержал стога: все тело мое болело, как избитое. Мышцы, одеревеневшие от отчаянного усилия удерживать бревно, протестовали...

На меня смотрело круглое черное лицо, вполне добродушное, хотя и слегка озадаченное. Впоследствии, обжившись на архипелаге Трокототту, я узнал, что аборигены никогда прежде не видели белого человека, и нашедший меня туземец не сразу решил, принадлежу ли я к людскому роду и можно ли ко мне прикасаться без опасных для себя последствий. Вдруг я – морское божество и обижуся на него, чем навлеку бедствия на него самого, всю семью, а то и всю деревню? Но, к счастью для меня, туземец по некотором размышлении все же счел меня человеком и позвал на подмогу односельчан. Меня перенесли в плетеную хижину, крытую банановыми листьями, и выхаживали столь нежно и заботливо, что до конца дней своих я буду вспоминать это простодушное дикое племя с благодарностью.

Я понемногу выздоравливал и очень подружился с островитянами. Объяснялись мы большей частью знаками, но постепенно я стал понимать отдельные слова, и мы часами беседовали с моим спасителем, отчаянно жестикулируя. Звали его Доддо, а племя его называлось ододо. Меня удивило, что в их языке нет других звуков, кроме О и Д; никогда прежде мне не

приходилось встречать подобного. Заинтересовавшись, я попытался составить словарик местного наречия. Каково же было мое изумление, когда оказалось, что при всей бедности фонетики, т.е. звукового устройства, некоторые по-разному звучащие слова означают в точности одно и то же! Размахивая руками и даже вспотев от усердия, Доддо втолковывал мне, что два слова значат одно и то же в следующих случаях. Если из слова выбросить сочетание ДО или ООДД, его значение не изменится; оно не изменится и в том случае, если в любое место слова добавить сочетание ОД. Это очень удобно для стихотворцев: слово всегда можно подогнать под нужный размер, удлинив или укоротив его, потому-то на острове оказалось очень развито ритуальное пение. Я объяснил, как устроен классический европейский сонет, и Доддо мгновенно сымпровизировал мне сонет на местном языке. Я ничего не понял, ибо для моего непривычного слуха это звучало как «ододо – додо – доодо» и так далее. В конце концов я оставил попытки разобраться в этом удивительном языке, так и не сумев выяснить, значат ли слова ОДД и ДОО одно и то же. Быть может, кто-нибудь из читателей моих заметок когда-нибудь разберется в этом вопросе...

Вы спросите, почему архипелаг называется Трокототту – ведь в этом слове есть и «т», и «р», и «у»? Разумеется, Доддо выговаривал это как Ддодододдо; но на соседних островах обитали племена с более богатой речью. Трокототту – так звучит имя архипелага на островах Ронго-Рунга, о которых я расскажу как-нибудь в другой раз.

Через некоторое время, когда я совсем оправился, Доддо взял меня с собой на ярмарку на соседний остров. Он назывался Икнатсо; как видите, там язык был несколько разнообразнее. Так что Доддо объяснялся с соседями при помощи жестов, как и со мной.

Жители острова пришли в восторг при виде моей белой кожи и светлых волос; каждый хотел меня пограть. Остров был довольно велик, и далеко не все его обитатели были на ярмарке; но каждому хотелось, чтобы его родичи из дальних деревень посмотрели на такого удивительного человека. Поэтому местный вождь принялся упрашивать меня погостить на его острове – чтобы удовлетворить любопытство соплеменников. Не очень-то приятно осознавать себя таким ярмарочным уродцем, вроде бородатой дамы, на которую любуются

за деньги на английских ярмарках. Но вождь был так добросен и так меня уговаривал, что я согласился. Меня с великим почетом проводили в лучшую хижину местной столицы (деревушки в три десятка хижин), натаскали целую гору местных плодов, вкуснее которых я не ел прежде, и даже предложили в жены местную первую красавицу. Но я отказался, будучи добропорядочным христианином, и объяснил, что в далекой Англии меня ждет семья, так что здесь я жениться никак не могу. Красавица огорчилась, но, к счастью, ненадолго. Еще до моего отъезда с Икитасо она вышла замуж за сына вождя и, надеюсь, будет с ним счастлива.

Мне жилище было и привольно, но довольно скучно. Все мои обязанности сводились к тому, чтобы несколько часов в день сидеть на столичной площади под навесом, дабы туземцы, прибывавшие со всех концов острова, могли посмотреть на меня вволю. От нечего делать я стал изучать местный язык и обнаружил, что название острова и племени — Икитасо — содержит все звуки, которые известны туземцам. В отличие от одоод, они умели писать, хотя весь их алфавит содержал лишь семь букв: И, А, С, Т, Н, О, К.

Я стал записывать слова местного языка; вождь заметил это и спросил, что я делаю. Я объяснил ему, что хочу составить словарь его племени. Вождь чрезвычайно заинтересовался и принялся расспрашивать меня, что же такое словарь; разобравшись, он пришел в восторг и захотел иметь полный словарь языка икитасо.

Наутро мне доставили стопку банановых листьев, названных на стембе лланы — так здесь делают книги, — и острый шип колючего кустарника тонкие вместо пера. Курьер низко поклонился мне и сообщил, что это — для словаря.

Я выписал на первом листе подряд буквы И, К, Н, А, Т, С, О и принялся систематизировать слова.

Надо вам сказать, что в языке племени икитасо любое сочетание всех этих букв — слово, а двух слов нет. Так что словарь обещал быть не слишком большим. Из уважения к вождю я нервно поставил слово Икитасо и стал ускоренно писать мой словарь в соответствии с именным порядком букв в алфавите.

Работа подвигалась медленно, ибо мне все время приходилось прерывать ее: то необходимо было мое присутствие на праздничном обеде — их давали по два-три в день, и все в мою честь; то жители какой-нибудь дальней деревни непременно хотели связаться для меня и поднимали такой шум, что невозможно было сосредоточиться; то маленькие туземные ребяташки доносили на мне, дергая меня за волосы — каждый по-своему — как-то так во-

досок на память, — и мне приходилось осторожно стирать их с себя, дабы не остаться лысым; словом, через неделю я добрался только до СКОАТНИ, что значит «доблестный воин, всегда попадающий в цель острым копьем».

Но тут работа моя оказалась прервана: с острова Перра-Терра приплыла широга возмешенных карабас, и главный карабас по имени Бас потребовал от вождя икитасо поделиться с соседями диковинкой, т. е. мной. Карабасы были раскрашены белыми и красными полосами, в носу у каждого красовалась куриная кость, в ушах висели разноцветные раковины, на руках и ногах звенели медные браслеты, и вооружены они были до зубов.

Вождь племени икитасо обнял меня со слезами и объяснил, что ссориться с карабасами очень опасно, так что придется мне ехать на Перру-Терру. Больше всего его огорчало, что словарь остался незаконченным. Я, как мог, утешил его, объяснил еще раз принципы составления словарей и вручил ему книгу и шип со словами: «Не сомневайтесь, что столь мудрый вождь сам сможет завершить сей труд».

Тут карабасы потерли терпение, подхватили меня за руки и за ноги и усадили в пирогу. Мы отчалили. Некоторые время я еще размышлял, какое слово должно идти за СКОАТНИ и каким словом закончится словарь, но тут поднялся ветер, пирогу начали швырять волны, и мне стало не до словарей. Ответы на эти вопросы я оставляю читателям; меня же ждала ответственная работа на острове Перра-Терра...



Физика 9–11

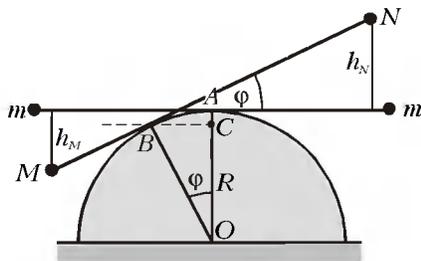
Публикуемая ниже заметка «Такие простые качели» предназначена девятиклассникам, заметка «Горки, электрические токи и Кулон» — десятиклассникам, «Физическая оптика и два верблюда» — одиннадцатиклассникам.

Такие простые качели

П. ХАДЖИ, Л. ГЛАЗОВА, В. ЛИЧМАН

ТО ЖЕ НЕ ЗНАЕТ С ДЕТСТВА качелей?! Самое простое — качаться, ухватившись за веревку (в физике это называется: грузик массой m на невесомой нерастяжимой нити длиной l совершает колебания). Но одному скучно. А вот если у вас есть друг, легкая доска и бревно...

Рассмотрим такую модель качелей. Пусть жесткий невесомый стержень (легкая доска) длиной $2L$ расположен на полуцилиндре (бревне) с радиусом R перпендикулярно его образующей. К обоим концам стержня прикреплены точечные грузики массой m каждый (изобратательные, но очень маленькие мальчики). Стержень с грузиками может совершать малые колебания в вертикальной плоскости, перекачиваясь без проскальзывания по поверхности полуцилиндра (см. рисунок). Определим частоту этих колебаний.



В положении равновесия, когда стержень располагается горизонтально, моменты сил тяжести грузиков относительно оси вращения A уравновешены. При отклонении от положения равновесия плечо тяжести правого грузика относительно новой оси вращения B увеличивается, а левого — уменьшается. В результате вращающие моменты этих сил не урав-

новешивают друг друга, и возникает нескомпенсированный вращающий момент, закручивающий стержень по часовой стрелке. Пройдя по инерции положение равновесия, стержень начинает вращаться в обратную сторону, т.е. против часовой стрелки, перекачиваясь без проскальзывания по поверхности полуцилиндра, снова возвращается в положение равновесия, затем отклоняется в другую сторону и т.д. Возникают периодические колебания стержня с грузиками, которые характеризуются конкретной частотой (периодом) колебаний. Для определения этой частоты воспользуемся законом сохранения энергии.

Отклоним стержень от положения равновесия на небольшой угол φ , перекачивая его по поверхности полуцилиндра от точки A до точки B . Перпендикуляр OB к стержню в этом случае также поворачивается относительно своего первоначального положения на угол φ . Будем говорить о малых колебаниях. Критерием малости здесь является неравенство $\varphi \ll 1$ (разумеется, если угол выражать в радианах).

Найдем потенциальную энергию грузиков относительно равновесного положения.

При показанном на рисунке отклонении стержня левый грузик опускается на высоту h_M , а правый поднимается на высоту h_N , где

$$\begin{aligned} h_M &= BM \sin \varphi + AC, \\ h_N &= BN \sin \varphi - AC. \end{aligned}$$

Из рисунка видно, что

$$\begin{aligned} AC &= R - R \cos \varphi = \\ &= 2R \sin^2(\varphi/2) = R\varphi^2/2. \end{aligned}$$

Длина участка стержня от точки B до точки N равна первоначальной длине L плюс длина дуги окружности AB ,

вдоль которой перекачивается стержень при колебаниях:

$$BN = L + R\varphi.$$

Соответственно,

$$BM = L - R\varphi.$$

Тогда высоты h_N и h_M можно выразить формулами

$$\begin{aligned} h_N &= (L + R\varphi)\varphi - R\varphi^2/2 = (L + R\varphi/2)\varphi, \\ h_M &= (L - R\varphi)\varphi + R\varphi^2/2 = \\ &= (L - R\varphi/2)\varphi. \end{aligned}$$

Следовательно, потенциальная энергия обоих грузиков при повороте стержня на угол φ относительно положения равновесия равна

$$E_p = mgh_N - mgh_M = mgR\varphi^2.$$

Если отклоненный от положения равновесия стержень предоставить самому себе, то благодаря возвращающему моменту сил он снова придет в положение равновесия, при этом грузики будут иметь некоторую скорость. Определим кинетическую энергию системы при прохождении ею положения равновесия.

Пусть стержень в этот момент вращается вокруг точки A с угловой скоростью Ω . Поскольку стержень относительно оси вращения располагается симметрично, линейные скорости v грузиков одинаковы и равны $v = \Omega L$, а кинетическая энергия обоих грузиков определяется выражением

$$E_k = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 = m\Omega^2 L^2.$$

При качаниях стержня, имеющих гармонический характер, максимальная угловая скорость стержня Ω выражается формулой $\Omega = \omega\varphi$, где ω — частота колебаний стержня. Поэтому

$$E_k = m\omega^2 L^2 \varphi^2.$$

Полагая, что потенциальная энергия, запасенная стержнем при отклонении от положения равновесия, превращается полностью в кинетическую энергию, которую имеют грузики при прохождении ими положения равновесия (закон сохранения энергии), для частоты колебаний стержня с грузиками получаем следующее выражение:

$$\omega = \frac{\sqrt{gR}}{L}.$$

Отсюда следует, что частота колебаний наших качелей пропорциональна корню квадратному из радиуса полуцилиндра и обратно пропорциональна длине стержня.

В частности, если радиус полуци-

линдра равен нулю, частота колебаний также равна нулю. Действительно, в этом случае полуцилиндр представляет собой просто ось, на которую насажен стержень с грузиками одной и той же массы. Такая система

находится в состоянии безразличного равновесия – поворот стержня в этих условиях на любой угол не приводит к изменению потенциальной энергии системы, и колебания возникнуть не могут.

Горки, электрические токи и Кулон

Е. РОМИШЕВСКИЙ



РЕДМЕТОМ НАШЕГО РАССМОТРЕНИЯ БУДУТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ПРОВОДНИКИ И ИСТОЧНИКИ ТОКА. Но начнем мы с конденсатора.

Если подключить к заряженным пластинам конденсатора вольтметр, то цепь, составленная из конденсатора и вольтметра, образует замкнутый контур. А значит, работа по переносу электрического заряда по этому контуру в кулоновском электрическом поле будет равна нулю. Предположим, что вольтметр – идеальный, например электростатический, у которого омическое сопротивление бесконечно большое, а емкость бесконечно малая. Двигаясь от положительной пластины 1 к отрицательной 2 (по часовой стрелке – см. рис.1), мы зафиксируем падение (понижение) потенциала на величину $U_0 = Q_0/C$, где Q_0 – заряд, C – емкость конденсатора. В соединительных проводниках уровень

потенциала остается неизменным, а на измерительном элементе вольтметра потенциал поднимается на величину U_0 . Вот это значение U_0 и будет регистрировать идеальный вольтметр – например, по силе притяжения его пластин 3 и 4.

Теперь подключим к пластинам 1 и 2 незаряженного конденсатора источник тока – батарею с электродвижущей силой E_6 . Конденсатор зарядится до разности потенциалов $U_0 = E_6 = Q_0/C$. Рассмотрим замкнутый контур 1–2–3–4–1 и обойдем его по часовой стрелке (рис.2). Когда мы переходим от положительной пластины 1 с потенциалом φ_1 к отрицательной пластине 2 с потенциалом φ_2 , потенциал уменьшается; следовательно, разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1 = -U_0 = -Q_0/C$ отрицательна. Когда мы переходим от отрицательной пластины батареи с потенциалом φ_3 к положительной с потенциалом φ_4 , эта же разность потенциалов в кулоновском поле батареи

положительна: $\varphi_4 - \varphi_3 = U_0$, и мы выходим на тот же уровень потенциала на пластине 1 конденсатора:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_3 = -U_0 + U_0 = 0.$$

Возникает вопрос (вот так всегда бывает с физикой – сплошные вопросы): что же такое эта батарея и какова ее «физическая роль»? Как мы уже говорили, внутри батареи имеется кулоновское поле с разностью потенциалов $U_0 = E_6$; значит, там происходит разделение положительных и отрицательных зарядов. Когда мы подключили батарею к незаряженному конденсатору, через нее прошел электрический заряд Q_0 (внутри батареи – против кулоновского поля) и потенциал поднялся на более высокий уровень. Какие же силы перемещают заряды против действия кулоновского поля?

Воспользуемся тем, что электрическое кулоновское поле схоже по своим свойствам с ньютоновским полем тяготения. Допустим, что мы (заряды) подошли на первом этаже к лифту (отрицательной пластине батареи). На кабину лифта действует сила тяготения (сила со стороны кулоновского поля действует на перемещающиеся заряды). Если лифт поднимается равномерно, на него вверх действуют упругие силы натяжения канатов, равные по величине силе тяжести (силе со стороны кулоновского поля). А какой аналог имеют упругие силы канатов лифта, совершающие работу против сил тяжести? Это – силы химической активности, возникающие между металлом пластин батареи и электролитом, ее заполняющим. Эти силы называют сторонними, подчеркивая тем самым их неэлектростатическую природу. Можно ввести напряженность таких сил: $E_{ст}$ – это сторонние силы, действующие на единицу положительного заряда. Поскольку при прохождении зарядов через батарею сторонние силы равны по величине, но противоположны по направлению кулоновским силам, для разности потенциалов можно записать

$$E_{ст} l_6 = U_6 = -E_{кул} l_6 = -E_6,$$

где l_6 – расстояние, на котором дей-

(Продолжение см. на с. 34)

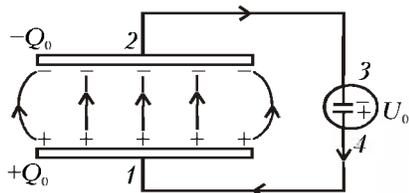


Рис. 1

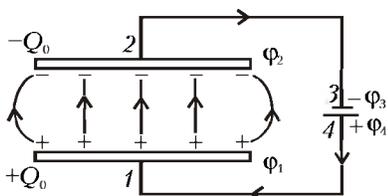
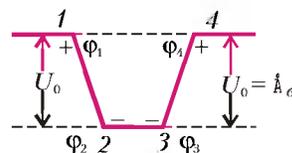
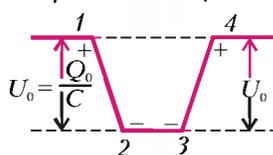


Рис. 2

Уровни потенциала



А что такое время и какова его природа, одинаково неясно как из того, что нам передано от других, так и из того, что нам пришлось разобрать раньше.

Аристотель

Абсолютное, истинное и математическое время течет само по себе и является по собственной природе неизменно равномерным, безотносительно к чему-либо внешнему.

Исаак Ньютон

С этого момента понятия пространства самого по себе и времени самого по себе должны отойти в тень; право на самостоятельное существование получает лишь определенная форма их союза.

Герман Минковский

Быть может, следует признать тот факт, что время — это одно из понятий, которое определить невозможно, и просто сказать, что это нечто известное нам: это то, что отделяет два последовательных события!

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомо вам время?

«Вопрос, конечно, интересный, — может сказать читатель, взглянув на эпиграфы. — Как до новой эры, так и в XX веке даже выдающиеся ученые не могли толком на него ответить. Если полистать научно-популярные книги, то натолкнешься на «четырёхмерное пространство — время», «стрелу времени», «волны времени», «необратимость времени», «машину времени» и тому подобное. Или встретишь такое «определение»: «время — это то, что меняется, когда больше ничего не изменяется». Голову сломаешь, прежде чем разберешься. Чего ж вы от нас, бедных школьников, хотите?»

Признаемся, и мы приступали к этой теме с замиранием сердца, настолько она может показаться сложной и бескрайней. Но выход подсказывают сами ученые. Так, Ньютон от абсолютного, данного «свыше» времени отделял понятие «времени относительного, кажущегося и обыденного», под которым подразумевал время, измеряемое приборами. И Фейнман предлагает не мучиться над поисками определений времени, а научиться как следует его измерять.

Изобрели же люди часы, да еще какие! Водяные, солнечные, песочные, механические, кварцевые, атомные... Обнаружили подходящие периодические процессы, ввели эталоны времени, наловчились измерять ничтожно малые его промежутки. Значит, можно быть со временем «на ты»?

Не будем торопиться с выводами — у этого понятия еще много секретов. С их раскрытием ученые связывают новый взлет науки. Пока же, не теряя нашего «обыденного» времени, поразмышляем, таким ли уж заурядным

предстает оно даже в школьных задачах. Помните у Наума Коржавина:

«Время? Время дано.

Это не подлежит обсуждению.

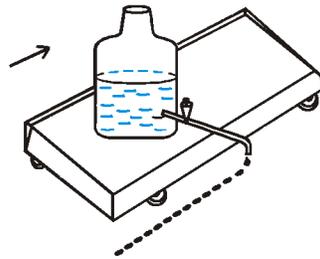
Подлежишь обсуждению ты,

Разместившийся в нём?»

Вопросы и задачи

1. Какому требованию должны отвечать солнечные часы, чтобы давать верные показания в любое время года?

2. Расположатся ли на одинаковом расстоянии друг от друга чернильные капли (вспомните известный школь-

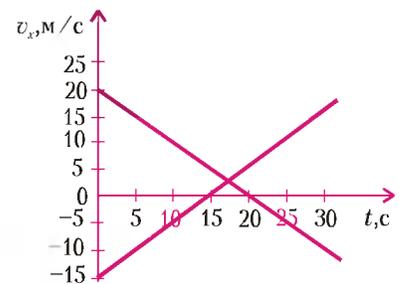


ный опыт), падающие из капельницы при равномерном движении тележки?

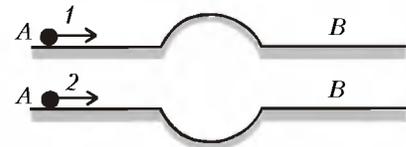
3. Два катера идут по реке в одном направлении, но с разными скоростями. Они одновременно поравнялись с плывущим по течению плотом, затем через полчаса повернули и с прежними относительно воды скоростями направились обратно. Какой из них достигнет плота раньше?

4. На рисунке приведены графики зависимости проекции скорости от времени для двух тел, движущихся вдоль оси X . Какой физический смысл имеет точка пересечения графиков? Можно ли по графикам узнать, в какой момент времени встретятся тела?

5. Два шарика начали одновремен-



но и с одинаковыми скоростями двигаться из точек A по поверхностям, изображенным на рисунке. Одновременно ли они достигнут точек B ? Трением пренебречь.



6. Из окна вагона падает тело. Будут ли равны между собой времена его свободного падения (с одной и той же высоты) для случаев: а) вагон неподвижен; б) вагон движется с постоянной скоростью; в) вагон движется с постоянным ускорением?

7. Тело брошено под углом к горизонту. Что займет больше времени — подъем или спуск, если не пренебрегать сопротивлением воздуха?

8. На дне закрытой пробирки сидит муха. Пробирка свободно падает, оставаясь в вертикальном положении. Как изменится длительность падения, если муха за это время перелетит из нижней части пробирки в верхнюю?

9. Через неподвижный блок переброшен длинный канат, на концах которого неподвижно висят на одной

высоте над землей два гимнаста с одинаковыми массами. Первый гимнаст начинает подниматься с постоянной относительно каната скоростью, второй – опускаться со скоростью в два раза меньшей. Кто из них раньше достигнет блока?

10. Зависит ли вес песочных часов от того, течет в них песок или нет?

11. Мальчики, разогнавшись до некоторой скорости, переезжали на коньках по тонкому льду с одного берега реки на другой. Когда один из них остановился, лед под ним проломился. Почему это произошло? Толщину льда считать везде одной и той же.

12. Определите период колебаний математического маятника в космическом корабле после выключения двигателей.

13. Груз совершает колебания на резиновом шнуре. Во сколько раз изменится период вертикальных колебаний груза, если его подвесить на том же шнуре, сложенном вдвое?

14. Для чего при радиолокации электромагнитные колебания излучаются короткими импульсами, а не непрерывно?

15. Отчего молнию мы видим короткое время, а гром от нее слышен долго?

Микроопыт

Перекиньте через какой-нибудь крючок в потолке шнур, привяжите к одному его концу небольшой груз и, слегка раскачав, понемногу поднимайте груз, «выбирая» другой конец шнура. Как при этом изменяется период колебаний груза?

Любопытно, что...

...еще во втором веке до новой эры древнегреческий астроном Гиппарх сумел вычислить продолжительность земного года с завидной точностью – всего на 6 минут больше, чем установлено ныне.

...на протяжении лишь первой тысячи лет новой эры в Китае 70 раз проводились реформы календаря и 13 раз менялись системы летосчисления.

...были известны солнечные часы с линзой и пушкой. Увеличительное стекло фокусировало солнечные лучи на запале пушки и поджигало его в определенный момент – к примеру, в полдень. Пушка стреляла, возвещая всем в округе время.

...в древнегреческих водяных часах (клепсидре) время отсчитывалось по уровню воды в сосуде с неболь-

шим отверстием. Чтобы вода вытекала равномерно, форма сосуда должна определяться уравнением четвертой степени.

...в одной альпийской деревне в мастерской часовщика висел плакат «Эти часы показывают точное время». Хозяин каждый день проверял часы по колоколу из обсерватории монастыря. Выяснилось, что тамошние монахи определяли время не по наблюдениям за звездами, а именно по этим часам в деревне.

...в средние века повсюду употреблялись песочные часы, а в Нюрнберге, например, местные щеголи носили их, прикрепив к колену.

...император Фридрих II получил в 1232 году в подарок от египетского султана часы «с колесами и грузами». Помимо времени, они показывали движение Солнца, Луны, планет и звезд.

...лишь в 1659 году Гюйгенсу удалось решить важную задачу создания часов, ход которых регулировался одним только изменением длины маятника. Однако не было недостатка в попытках оспорить его приоритет; так, итальянцы настаивали на том, что это изобретение принадлежит Галилею.

...в 1714 году английское правительство установило награду за создание морских часов для точного определения долготы. Размер награды зависел от достигнутой точности.

...в XVII веке важную роль в развитии оптики и механики сыграли вариационные принципы. Прежде всего, это принцип Ферма, гласивший, что свет всегда выбирает путь, требующий минимального времени, и задача И.Бернулли о брахистохроне – кривой наискорейшего спуска.

...на работу над уникальными часами в форме яйца российский изобретатель-самоучка И.Кулибин потратил два года. Часы состояли из 427 деталей, различимых только в лупу, отбивали каждые четверть часа и ежедневно «давали» представление крохотного театра с музыкой и колокольным звоном.

...расчеты, проведенные с помощью радиоактивных часов, основанных на оценке количества распавшихся атомов радиоактивного изотопа, позволяют узнать возраст Земли и всей Солнечной системы.

...пузырьковые камеры, служащие для детектирования элементарных частиц, позволили уже в пятидесятых годах нашего века определять среднюю продолжительность жизни частиц до величины порядка 10^{-11} секун-

ды.

...проверить одно из замечательных следствий теории относительности – замедление времени в поле тяготения – удалось опытным путем в 1960 году. Для подтверждения эффекта потребовалась фантастическая точность – $3 \cdot 10^{-12}$ процента, что занесло эксперимент в «золотой фонд» самых тонких и искусных измерений современной физики.

...кратчайший интервал времени, который еще как-то проявляется в экспериментальных результатах, равен $3 \cdot 10^{-27}$ секунды. Столько нужно свету для прохождения вдоль «диаметра» электрона, не превышающего, по оценкам, 10^{-18} метра.

...настоящей «машиной времени» вполне можно считать современный крупный телескоп – ведь с его помощью можно наблюдать за событиями, произошедшими миллиарды лет назад!

...до недавнего времени самыми точными атомными часами были американские – они не должны отстать или уйти вперед даже на секунду за ближайшие три миллиона лет. Однако в Германии готовы побить рекорд – погрешность новых часов составит одну секунду за миллиард лет!

Что читать в «Кванте» о времени

(публикации последних лет)

1. «Вариационные принципы» – 1992, №5, с.45;
2. «Мистер Томпкинс в стране чудес» – 1993, №1/2, с.48;
3. «Христиан Гюйгенс» – 1995, №4, с.2;
4. Калейдоскоп «Кванта» – 1998, №1, с.32;
5. «Влияние солнечной активности на частоту рождаемости умных людей» – 1998, №5, с.31.

Материал подготовил
А.Леопович

(Начало см. на с. 31)

ствуют обе эти силы внутри источника. Значит, E_6 – это работа, которую совершают силы химической активности, перемеща единицу положительного заряда с отрицательной пластины батареи на положительную против сил кулоновского поля с разностью потенциалов, по величине равной электродви-

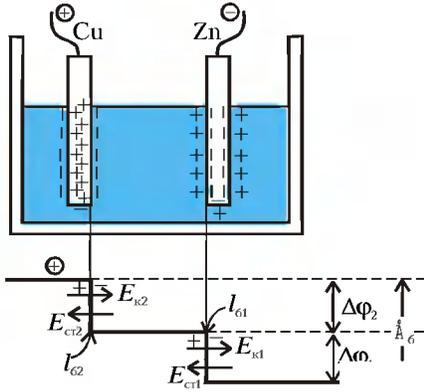


Рис. 3

жущей силе батареи, т.е. $E_6 = U_0$. Рассмотрим распределение полей и потенциалов внутри некоторой конкретной батареи (так называемом элементе Вольта – см. рис.3). В непроводящую банку, содержащую водный раствор серной кислоты, вставлены две пластины: цинковая и медная. В результате химического взаимодействия цинка с электролитом положительные ионы цинка уходят в раствор, так что поверхность металла заряжается отри-

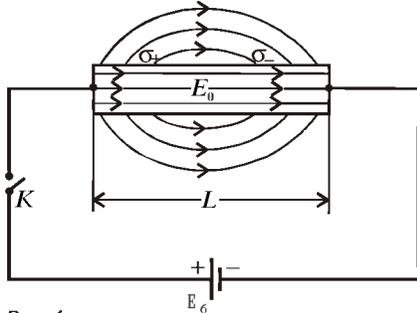


Рис. 4

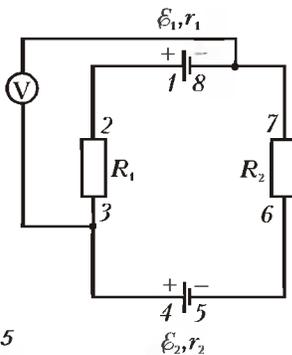
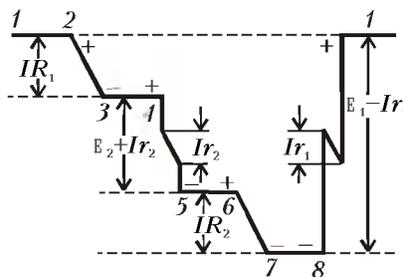


Рис. 5

цательным зарядом, а прилегающий слой электролита – положительным. Расстояние между этими слоями l_6 очень мало (порядка атомных размеров), а разность потенциалов $\Delta\phi$ – порядка одного вольт; следовательно, напряженности кулоновского электрического поля между слоями имеют величины, сравнимые с внутриатомными, и поверхностные плотности этих зарядов тоже очень велики. Точно такие же величины имеют и напряженности сторонних сил в этих слоях, поскольку $E_k = -E_{ct}$. Итак, при переходе единицы положительного заряда с отрицательной пластины в электролит сторонние силы «поднимают» потенциал на более высокий уровень: $\Delta\phi_1 = E_{k1}l_{61}$. В объеме электролита (тока пока нет) уровень потенциала не меняется. Вторая пластина выбрана медной потому, что в результате химического взаимодействия с тем же электролитом ее поверхность заряжается положительным зарядом, а прилегающий слой электролита – отрицательным. Скачок потенциала здесь $\Delta\phi_2 = E_{k2}l_{62}$ – величина того же порядка, что и $\Delta\phi_1$, а их сумма и есть электродвижущая сила этой батареи: $|\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2| = E_6$.

Подключим теперь к клеммам батареи длинный и тонкий однородный цилиндрический металлический проводник, имеющий омическое сопротивление $R = \rho L/S$, где ρ – удельное сопротивление, L – длина и S – площадь поперечного сечения проводника (рис.4). По этому проводнику потечет постоянный ток $I = E_6/R$ (если батарея не обладает внутренним сопротивлением). Опять возникает вопрос: какую роль при этом играет электрическое кулоновское поле и какова его картина внутри и вне проводника?

После замыкания ключа по цепи распространяется электромагнитный импульс, который приводит к такому распределению свободных зарядов по поверхности проводника, что внутри него создается однородное электрическое поле напряженностью \vec{E}_0 , а вне его – неоднородное поле, силовые линии которого выходят из поверхности проводника и входят обратно под некоторыми углами (см. рис.4). Оказывает-



ся, что для однородного длинного и тонкого проводника распределение поверхностной плотности заряда σ вдоль оси проводника (кроме его концов) соответствует линейному закону.

Заметим, что свободные электроны при включении источника тока начинают двигаться практически одновременно во всех участках проводника (подобно тому, как вода начинает двигаться во всех участках водопроводной трубы, когда мы открываем кран). При этом в любой части объема проводника количества положительных и отрицательных зарядов строго одинаковы.

Известно, что при прохождении электрического тока в проводнике выделяется тепло. Каков же механизм перехода химической энергии батареи в тепловую энергию проводника?

В отсутствие источника тока движение свободных электронов в проводнике носит беспорядочный характер. Если же в цепь включен источник тока, на электроны внутри проводника действуют кулоновские силы со стороны электрического поля, которые вызывают упорядоченное, направленное движение электронов. Одновременно со стороны кристаллической решетки действуют силы, тормозящие электроны.¹ Они подобны силам сопротивления движению шарика в вязкой среде (силам жидкого трения). В результате в проводнике устанавливается равномерное движение свободных электронов вдоль силовых линий электрического поля, происходящее с очень маленькой скоростью (по сравнению со скоростью хаотичного теплового движения).

Можно провести аналогию и сказать, что выделение тепла при движении электронов в проводящей среде соответствует выделению тепла при наличии сил жидкого трения, когда за счет сил тяжести (кулоновских сил) тело равномерно соскальзывает с наклонной плоскости. Направление электрического тока соответствует направлению понижения электрического потенциала, т.е. направлению вдоль силовых линий электрического поля. Можно показать (но это несколько выходит за рамки данной статьи), что разность потенциалов на концах проводника равна произведению тока в проводнике на его сопротивление: $U = IR$.

Рассмотрим теперь цепь, состоящую из последовательно соединенных двух батарей с ЭДС E_1, E_2 и внутренними сопротивлениями r_1, r_2 и двух резисто-

¹ Подробнее о том, как в металле возникает электрический ток, можно прочитать, например, в статье А.Варламова в «Кванте» № 1 за 1995 год. (Прим. ред.)

ров с сопротивлениями R_1, R_2 (рис.5). Пусть $E_1 > E_2$, тогда ток I в цепи будет течь против движения часовой стрелки. Изобразим изменение потенциала электрического кулоновского поля при обходе по замкнутому контуру.

Точка 1 имеет наивысший потенциал, а точка 8 – наименьший. Проводник 1–2 не имеет сопротивления (нет силы трения), поэтому уровень потенциала здесь не изменяется. Проводник 2–3 с сопротивлением R_1 будем считать переходим на наш цилиндрический проводник. На этом участке мы спускаемся «под горку», уровень потенциала линейно понижается от точки 2 до точки 3. При этом сила трения равна «скатывающей» силе – силе со стороны кулоновского поля – и вольтметр покажет $U_1 = IR_1$. При движении от точки 3 до точки 4 уровень потенциала не меняется. Точка 4 соответствует на-

хождению на положительной пластине второй батареи с ЭДС E_2 . Когда мы переходим от положительной пластины к электролиту, мы как бы опускаемся в лифте, уровень потенциала понижается, электрическое поле совершает работу против сторонних сил батареи. То же происходит при переходе от электролита к отрицательной пластине. В результате батарея заряжается с мощностью зарядки $-E_2 I$. Движение зарядов внутри батареи связано с преодолением сопротивления r_2 , и уровень потенциала понижается еще на величину $I r_2$. Вольтметр, подсоединенный к пластинам этой батареи, покажет $U_{45} = E_2 + I r_2$. На участке 5–6 уровень потенциала не изменяется, а на резисторе с сопротивлением R_2 потенциал упадет на IR_2 . И вот мы оказались на отрицательной пластине более сильной батареи с ЭДС E_1 в точке 8. Первый

мощный подъем, затем падение на сопротивлении r_1 и снова мощный подъем от электролита к положительной пластине 1.

Обойдя замкнутый контур, мы вернулись на начальный уровень кулоновского потенциала. При этом сумма «подъемов» равна сумме «падений» кулоновского потенциала, т.е. работа по замкнутому контуру в кулоновском поле всегда равна нулю:

$$-IR_1 - E_2 - I r_2 - IR_2 - I r_1 + E_1 = 0,$$

или

$$I(R_1 + R_2 + r_1 + r_2) = E_1 - E_2.$$

Это соотношение называют законом Ома для замкнутой цепи или вторым правилом Кирхгофа. Теперь мы понимаем, что вообще-то оно непосредственно вытекает из свойств электрического кулоновского поля.

Физическая ОПТИКА и два верблюда

А. СТАСЕНКО

На каком расстоянии можно отличить двугорбого верблюда от одногорбого?

Детский вопрос



ЧТО МОЖЕТ ПОМЕШАТЬ этой важной для народного хозяйства процедуре? Оказывается, существуют принципиальные ограничения, налагаемые *физической оптикой*.

Начнем по порядку. Пусть на непрозрачный экран (рис.1) слева падает широкий параллельный пучок света интенсивностью I_0 (это плотность потока энергии, измеряемая в Дж/(с·м²)), а в экране имеется бесконечно длинная щель шириной d . С точки зрения геометрической оптики, за щелью образуется тоже параллельный пучок света, ширина которого на любом расстоянии от щели будет одинаковой и равной d , так что если в каком-то месте поставить перпендикулярную белую пластинку, то на ней будет видна светлая полоска той же ширины d с освещенностью I_0 (как на рисунке 1 справа).

Однако надо вспомнить, что световая волна обладает определенной пространственной структурой. Самым характер-

ным масштабom этой структуры является длина волны λ . И тут Опытный Читатель «Кванта» непременно воскликнет: в таком случае важную роль должно играть безразмерное отношение λ/d ! И он будет совершенно прав.

Действительно, разобьем щель на две светящиеся полуполоски шириной $d/2$. И еще: соберем мысленно всю энергию этих двух полуполосок в две бесконечные светящиеся нити, отстоя-

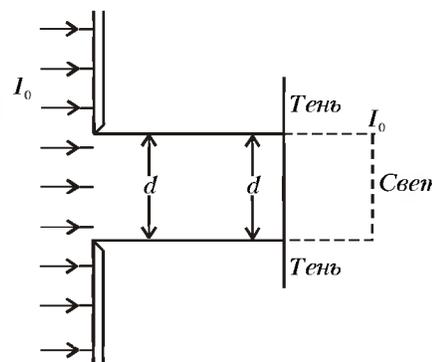


Рис. 1

щие друг от друга на $d/2$ (рис.2, слева). Тогда дело сведется к так называемой *двухлучевой интерференции* (напоминающей известный опыт Юнга). Посмотрим, какая картина возникнет на белой пластинке справа, находящейся на расстоянии x от щели в экране.

Прежде всего найдем разность хода $\Delta = r_2 - r_1$ от двух нитей A и B до точки с координатой y на пластинке. Из двух треугольников на рисунке 2, с учетом узости щели, имеем

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 - 2r \frac{d}{4} \sin \theta,$$

$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 + 2r \frac{d}{4} \sin \theta.$$

Вычитая первое равенство из второго, получим

$$r_2^2 - r_1^2 = rd \sin \theta.$$

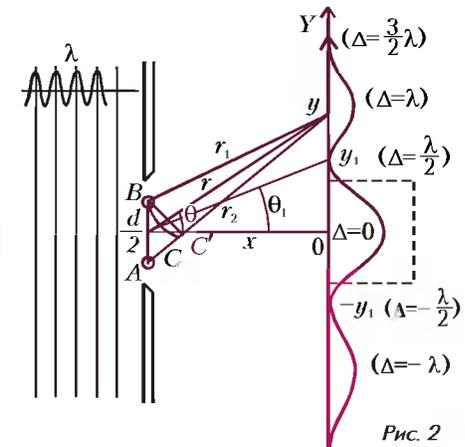


Рис. 2

Но левую часть (разность квадратов) можно представить в виде $(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)$. Первый множитель и есть искомая разность хода, а второй можно приближенно записать так: $r_2 + r_1 = 2r$. Тогда

$$\Delta = \frac{d}{2} \sin \theta,$$

что можно было бы найти и сразу, если «кривосторонний» треугольник ABC приближенно заменить прямоугольным треугольником ABC' .

А теперь вспомним основную идею интерференции: если разность хода двух волн от двух источников света до одной и той же точки равна целому числу длин волн λ , то волны усилят друг друга, а если она равна нечетному числу полуволн, то эти две интерферирующие волны ослабят друг друга. Значит, на правой пластинке должна получиться вовсе не «ступенька» освещенности, изображенная на рисунке 1 приверженцем геометрической оптики, а более сложная картина чередующихся светлых и темных полос – как на рисунке 2 справа. Самая большая освещенность будет в середине пластинки, на линии, противоположающей середине щели ($y = 0$). Яркость других полос будет убывать с удалением от середины пластинки – ведь они все дальше отстоят от светящейся щели.

Для наших целей самым интересным является положение темных полос, ограничивающих центральную светлую полосу. Из вышесказанного следует, что в этом месте

$$\frac{d}{2} \sin \theta_1 = \pm \frac{\lambda}{2},$$

или

$$\sin \theta_1 = \frac{\pm y_1}{\sqrt{y_1^2 + x^2}} = \pm \frac{\lambda}{d}.$$

Вот тут и сбылось предвидение Опытного Читателя: действительно, распределение освещенности пластинки оказалось зависящим от важнейшего параметра – безразмерного отношения длины волны света к размеру отверстия, пропускающего свет! Это распределение называют *дифракционной картиной* от щели.

Но вернемся к нашим верблюдам. В этом случае «щелью» служит зрачок глаза (который вовсе не бесконечная щель, а круглое отверстие), а роль пластинки играет задняя внутренняя поверхность глаза – сетчатка. Оказывается, на ней возникнет дифракционная картина, очень похожая на изображенную на рисунке 2 справа. Только теперь, конечно, это уже не параллельные полосы, а темные и светлые кольца, окружающие центральное светлое

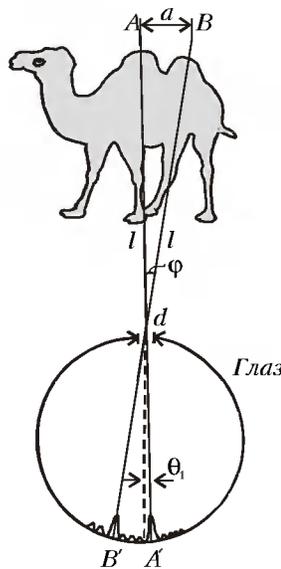


Рис. 3

пятно. И радиусу первой темной окружности соответствует несколько другой (большой) угол – такой, что

$$\sin \theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{d},$$

где d – это уже диаметр зрачка.

Итак, каждая «точка» удаленного объекта (верблюда), пославшая в глаз почти параллельный пучок рассеянного ею солнечного света, изобразится на сетчатке в виде светлого пятнышка, окруженного системой колец. (Не напоминает ли это вам картину волн от камешка, брошенного в пруд?) Но нам нужно различить – физики говорят «разрешить» – две точки. Дифракционная картина от них качественно представлена на рисунке 3. И тут сразу понятно условие их разрешимости: если максимум освещенности от второй точки (B) попадет в первый минимум от первой точки (A) или будет дальше от него, то эти две точки можно рассмотреть как отдельные. В противном случае они сольются в одну.

Заметим, что наиболее четкое изображение на сетчатке глаза получается при диаметре зрачка $d = 3$ мм. При этом угловая разрешающая способность глаза, определяемая законами физической оптики, имеет порядок

$$\varphi = \frac{1,22 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ м}} \approx 50''$$

(здесь использована характерная длина волны $\lambda = 5000 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$). Когда человек хочет хорошенько рассмотреть какой-либо объект, он поворачивает глаз так, что изображение проецируется на так называемое желтое пятно сетчатки, в котором 15000 колбочек (чувствительных клеток)

выстилают площадку с угловым размером порядка $1,5^\circ$. Таким образом, на каждую колбочку приходится угол порядка

$$\varphi_1 = \frac{1,5^\circ \cdot 3600''/\circ}{\sqrt{15000}} \sim 50''.$$

Можно сказать, что, создавая глаз, «природа знала дифракцию на отлично». Это еще один яркий пример поразительной целесообразности живых организмов.

В этой связи интересно обсудить фантастический рассказ Гулливера: «Лилипуты обладают несравненно лучшим зрением, чем мы... Природа приспособила зрение лилипутов к окружающим их предметам: они хорошо видят, но только на близком расстоянии... Мне большое удовольствие доставляло наблюдать повара, ошпыливающего жаворонка величиной не больше нашей мухи, и девушку, вдевавшую шелковинку в ушко невидимой иголки». Между тем, Гулливер утверждает: «Я в двенадцать раз выше лилипута», и все предметы в Лилипутии во столько же раз меньше наших (в том числе и зрачок глаза). Таким образом, дифракционный угол для лилипута в 12 раз больше, так что диаметр изображения точки на сетчатке маленького глаза растягивается во столько же раз больше. Целесообразно ли при этом природе создавать клетки лилипутского глаза меньше, чем у Гулливера? И будет ли при этом их зрение «несравненно лучше», даже на «близком расстоянии»?

Таким образом, для разрешимости двух точек нужно потребовать выполнения приближенного соотношения

$$\varphi \geq \theta_1, \text{ или } \frac{a}{l} \geq 1,22 \frac{\lambda}{d},$$

откуда получаем

$$l \leq \frac{ad}{1,22\lambda}. \quad (*)$$

Остается провести численные оценки. Пусть расстояние между горбами верблюда $a \sim 0,5$ м, диаметр зрачка $d \sim 1$ мм (в пустыне яркий свет!), средняя длина волны солнечного света $\lambda \sim 0,5$ мкм. Тогда

$$l \leq \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{1,22 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} \text{ м} \sim 800 \text{ м}.$$

Но разве дело только в верблюдах? А телескопы? Ведь объектив телескопа – тоже «зрачок», только очень большой. И теперь ясно, почему его стараются сделать как можно больше: наименьшее угловое расстояние на небесной сфере между двумя звездами φ , которые мы хотим разрешить, должно быть

Поляризованный диэлектрик и его энергия

Е. ВЫРОДОВ, В. СЛЕПНЕВ



ИЗИКУ, ИЗУЧАЕМУЮ В школе, иногда называют элементарной. Это действительно так – в школьной программе нет сложных, трудных для понимания законов,

решение задач не требует высшей математики. Однако и в элементарной физике можно найти немало очень глубоких вопросов, ответы на которые совсем не очевидны. Посмотрите, какая дискуссия развернулась на одном из факультативных занятий в нашей школе. Участвовали в ней учитель физики (Учитель) и два школьника (Володя и Антон). Началась она с очень простого вопроса, а закончилась...

Учитель. Тема нашего занятия – «Энергия конденсатора». Рассмотрим плоский воздушный конденсатор, площадь пластин которого S , а расстояние между ними d . Пусть этот конденсатор заряжен и заряд его равен Q . Как найти электростатическую энергию, запасенную в нем?

Это можно сделать разными способами, например так. Представим себе, что мы заряжаем конденсатор, перенося заряд маленькими порциями с одной его обкладки на другую. Работа, которую мы при этом совершаем, идет на увеличение энергии конденсатора. Давайте найдем работу, необходимую, чтобы зарядить конденсатор до заряда Q , – это и будет ответом на поставленный вопрос.

Обозначим через ΔQ_i заряд i -й порции переносимого нами заряда, а через Q_i – заряд конденсатора перед переносом i -й порции. Тогда заряд ΔQ_i , перемещаясь с одной пластины на другую, проходит разность потенциалов $U_i = Q_i/C_0$ (где $C_0 = \epsilon_0 S/d$ – емкость конденсатора), а работа, которую нужно для этого совершить, равна

$$\Delta A_i = U_i \Delta Q_i.$$

Полную работу, затраченную на пере-

нос всего заряда Q , а значит, и энергию заряженного конденсатора, мы найдем, просуммировав все ΔA_i :

$$W_0 = A = \sum_i U_i \Delta Q_i.$$

Для того чтобы вычислить эту сумму, нарисуем график зависимости U_i от Q_i . Она очень простая – это прямая

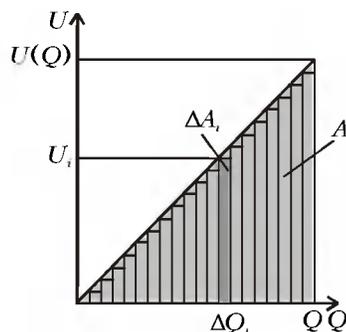


Рис. 1. График, использованный Учителем для вычисления энергии заряженного конденсатора

пропорциональность (рис. 1). Сразу заметим, что каждая элементарная работа ΔA_i численно равна площади прямоугольника, построенного на отрезке ΔQ_i и упирающегося в наш график. Понятно, что сумма площадей всех этих прямоугольников будет близка к площади под графиком функции $U(Q)$ (все ΔQ_i – очень маленькие). В пределе при $\Delta Q_i \rightarrow 0$ мы и получим эту площадь под графиком. Надеюсь, вычисление площади треугольника ни у кого проблем не вызывает? Тогда напишем ответ:

$$W_0 = \frac{1}{2} U(Q)Q = \frac{Q^2}{2C_0}.$$

Володя. Где-то подобное рассуждение уже возникло.

Учитель. Ну конечно, при вычислении перемещения при равноускоренном движении.

Антон. Вообще-то, можно было не возиться с этими детскими прямоу-

гольничками и площадями под графиком. По сути, мы просто вычислили интеграл от линейной функции.

Учитель. Что ж, не в меру образованные люди могут сказать и так – это будет чистая правда.

Володя. Интересно, а если между обкладками конденсатора находится диэлектрик – результат будет таким же?

Учитель. А в чем, собственно, разница? В нашем вычислении энергии мы вообще нигде не использовали тот факт, что конденсатор – воздушный. Нам нужна была только его емкость C_0 – она определяла связь между U_i и Q_i . Если диэлектрическая пластина заполняет все пространство между обкладками и ее диэлектрическая проницаемость равна ϵ , то емкость конденсатора будет в ϵ раз больше: $C = \epsilon C_0$. Эта емкость и войдет вместо C_0 во все формулы, в том числе и в конечный результат:

$$W = \frac{Q^2}{2\epsilon C_0}. \quad (1)$$

Володя. Сейчас... Я вижу по край-

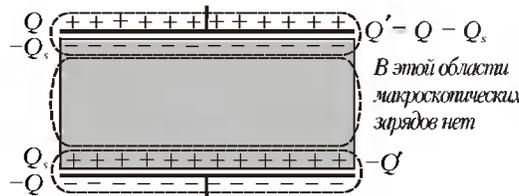


Рис. 2. Таким Володя увидел заряженный конденсатор с диэлектриком

ней мере еще один способ найти эту энергию. Может быть, он даст тот же ответ, а может и нет. Смотрите. Что происходит с диэлектрической пластиной (рис. 2), вставленной в наш конденсатор? Она поляризуется – на ее поверхностях возникают связанные заряды Q_s и $-Q_s$. Величину Q_s мы можем найти, если вспомним, что полное электрическое поле внутри пластины, создаваемое зарядами обкладок и поляризационными зарядами, должно быть в ϵ раз меньше, чем поле обкладок:

$$\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} - \frac{Q_s}{\epsilon_0 S} \quad (2)$$

(поле между двумя плоскостями с зарядами Q и $-Q$ равно $Q/(\epsilon_0 S)$). Отсюда находим

$$Q_s = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} Q. \quad (3)$$

Теперь заметим, что связанные заряды расположены вплотную к обкладкам

конденсатора. Мы можем объединить обкладку и прилегающую к ней поверхность диэлектрика в единую заряженную плоскость, заряд которой равен

$$Q' = Q - Q_s = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Но тогда вся наша система зарядов представляет собой две плоскости с зарядами Q' и $-Q'$, расположенные на расстоянии d друг от друга. А это просто воздушный конденсатор емкостью C_0 , несущий заряд Q' . Но его энергия равна

$$W = \frac{Q'^2}{2C_0} = \frac{Q^2}{2\epsilon^2 C_0}, \quad (4)$$

что в ϵ раз меньше результата (1).

Антон. Подождите, почему конденсатор оказался вдруг воздушным? В нем же диэлектрик, и его емкость не C_0 , а ϵC_0 .

Володя. Нет-нет, здесь мы должны взять именно C_0 . Наличие диэлектрика мы уже учли, когда к заряду конденсатора добавили величину Q_s . Ведь все влияние, которое диэлектрик оказывает на электростатические явления, сводится к действию его связанных зарядов. Разве не так мы считаем, когда вычисляем электрическое поле в диэлектрике? Учтя связанные заряды, мы имеем полное право про диэлектрик забыть. Более того, мы просто обязаны это сделать. Иначе один и тот же фактор – наличие диэлектрика – мы учтем два раза. Согласны?

Учитель. Гм... Звучит убедительно. Действительно, прибавив ко всем зарядам нашей системы связанные заряды, возникающие на поверхности диэлектрика, мы вычисляем их электрическое поле так, как если бы они находились в вакууме. Именно так составлено уравнение (2), из которого Володя нашел величину Q_s . Но вот можно ли поступать так же при вычислении энергии этих зарядов? Это совсем не очевидно. В любом случае из ответов (1) и (4) может быть верен только один! В своем рассуждении я абсолютно уверен – там просто негде допустить ошибку. Мы честно вычислили работу, затраченную при заряде конденсатора. Вся эта работа и пошла на изменение его энергии – куда же еще?

А вот в Володином рассуждении есть скользкий момент. Вычисляя энергию, он добавил к зарядам обкладок связанные заряды диэлектрика, после чего диэлектрик выбросил вообще, заявив, что на энергии системы это никак не отразится.

Володя. А разве это неправда? Ведь электростатическая энергия может быть связана только с зарядами. В глубине

диэлектрика макроскопических зарядов нет – они возникают только на поверхности, а эти поверхностные заряды мы учли.

Учитель. Это так. Но наш диэлектрик *поляризован*. Если это неполярный диэлектрик, то при поляризации положительные и отрицательные заряды молекул смещаются в противоположные стороны. Для того чтобы растянуть молекулы диэлектрика, требуется совершить некоторую работу, которую логично назвать энергией поляризованного диэлектрика. И совсем не факт, что эта энергия совпадает с энергией электростатического взаимодействия связанных зарядов, возникающих при этом на поверхности нашей пластины.

Володя. Разве? А мне кажется, что это ровно она и есть. Работа, совершаемая при поляризации пластины, как раз и идет на создание связанных зарядов Q_s и $-Q_s$.

Учитель. Знаете, у меня есть предложение. Поскольку корень наших разногласий – диэлектрик (его энергия), логично будет рассмотреть проблему в чистом виде, избавившись от конденсатора. Представим себе, что мы выдержали нашу пластину из конденсатора, причем сделали это настолько быстро, что заряды внутри нее не успели сместиться – состояние поляризации осталось прежним. Через некоторое (очень малое) время диэлектрик, конечно же, утратит поляризацию – ведь внешнее электрическое поле отсутствует. При этом энергия, которой он обладал, перейдет в тепло. Как найти эту энергию?

Антон. Я догадываюсь, что скажет Володя. Наша система состоит теперь из двух плоскостей связанных зарядов $\pm Q_s$, расположенных на расстоянии d друг от друга. По сути, это тот же конденсатор емкостью C_0 , только заряженный зарядом Q_s . Его энергия равна

$$W_d = \frac{Q_s^2}{2C_0}. \quad (5)$$

Володя. Да, я бы искал энергию диэлектрика именно так.

Учитель. Отлично, а теперь смотрите, как сделал бы я. Предположим, мне удалось тем или иным способом поляризовать нашу пластину, причем так, что больше никаких изменений в окружающем мире не произошло. Например, возьмусь за каждую молекулу руками и растяну ее до нужного состояния (напомню, что речь идет о неполярном диэлектрике). Работа, которую я при этом совершу, будет запасена в диэлектрике в виде энергии W_d . После этого вставлю поляризованную пластину в *незаряженный* конденсатор и нач-

ну его заряжать. Заряды диэлектрика при этом буду удерживать на месте, не позволяя поляризации измениться. Какую работу мне придется совершить, чтобы зарядить конденсатор до заряда Q ? Разность потенциалов, которую проходит каждая порция заряда ΔQ_i , теперь складывается из двух частей. Одна из них создается связанными зарядами диэлектрика $\pm Q_s$ и равна $U_s = -\frac{Q}{C_0}$. Другая создается зарядами обкладок конденсатора $\pm Q_i$, которые они имеют перед переносом порции ΔQ_i : $U_i = \frac{Q_i}{C_0}$. Полная работа при переносе заряда равна

$$A = \sum_i (U_s + U_i) \Delta Q_i = -\frac{Q_s}{C_0} \sum_i \Delta Q_i + \sum_i U_i \Delta Q_i = -\frac{Q_s Q}{C_0} + \frac{Q^2}{2C_0}.$$

Зарядив конденсатор, я могу отпустить молекулы диэлектрика – в поляризованном состоянии их будет удерживать поле обкладок. Верну теперь систему в исходное состояние, переносим порцию заряда обратно. Поляризация диэлектрика будет при этом меняться вместе с полем обкладок – ведь заряды молекул никто не держит. По сути, я буду разряжать обычный конденсатор с диэлектриком, емкость которого ϵC_0 . Энергию, выделившуюся при разряде, легко найти. Для этого нужно сделать такой же расчет, как при вычислении W_0 , но только вместо емкости C_0 надо взять ϵC_0 . Можно сразу сказать, каким будет результат?

Антон. Конечно, его дает формула (1).

Учитель. Совершенно верно. Но, поскольку все вернулось в начальное состояние, эта энергия должна быть равна суммарной работе, затраченной при зарядке: $W_d + A = W$, откуда мы и найдем энергию диэлектрика:

$$W_d = W - A = \frac{\epsilon Q_s^2}{2(\epsilon - 1)C_0}. \quad (6)$$

Володя. Ну вот, опять два разных ответа – (5) и (6). И непонятно, какой из них правильный.

Антон. Послушайте, я, кажется, понял, как разрешить наши сомнения! Энергию W_d мы сможем найти, если вычислим работу по растяжению одной молекулы диэлектрика, а потом умножим на число молекул.

Володя. Ну, это очень сложно. Нужно представлять себе внутреннее устройство молекулы, ее электронных оболочек, а для этого, говорят, нужна квантовая механика. Вряд ли нам это

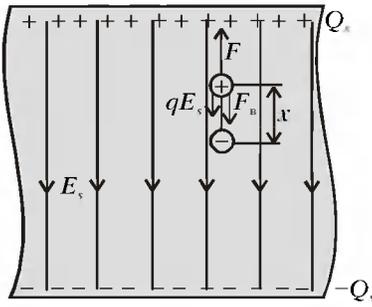


Рис.3. Силы, действующие на молекулярные заряды в поляризованном диэлектрике (модель Антона)

удастся.

Антон. Нет-нет, смотрите. Возьмем простейшую модель молекулы нашего неполярного диэлектрика – два заряда q и $-q$, центры которых в нормальном состоянии совпадают. Если же их раздвинуть на расстояние x («растянуть» молекулу), то возникает внутримолекулярная сила $F_b(x)$, возвращающая заряды в исходное положение (рис.3). Растягивая молекулу, мы совершаем работу против этой силы. Работа эта идет на увеличение потенциальной энергии деформации молекулы.

Володя. Ну и как же мы найдем эту работу? Ведь для этого нужно знать $F_b(x)$.

Антон. Она нам не понадобится! Если мы начнем растягивать все молекулы диэлектрика в отсутствие внешнего электрического поля, нам придется преодолеть не только внутримолекулярные силы, но и поле E_s возникающих при этом связанных зарядов. Сила, которую нужно приложить к каждой молекуле, будет равна

$$F(x) = F_b + qE_s, \quad (7)$$

С другой стороны, если ту же самую

поляризацию диэлектрика создало внешнее поле E , то на каждый молекулярный заряд действует электростатическая сила $q(E - E_s)$. Она должна быть уравновешена внутримолекулярной силой, следовательно, $F_b = q(E - E_s)$. Таким образом,

$$F(x) = qE = \frac{q\epsilon}{\epsilon - 1} E_s$$

(здесь я воспользовался тем, что разность $E - E_s$ равна E/ϵ).

Заметим теперь, что при смещении молекулярных зарядов на x на поверхностях пластины возникают области нескомпенсированного заряда толщиной x . А значит, величину связанных зарядов Q_s мы найдем, если умножим молекулярный заряд q на число молекул в этой области: $Q_s = qnSx$, где n – концентрация молекул в диэлектрике. Электрическое поле, создаваемое этими связанными зарядами, равно

$$E_s = \frac{Q_s}{\epsilon_0 S} = \frac{qnSx}{\epsilon_0}$$

Подставив этот результат в формулу для $F(x)$, получаем

$$F(x) = \frac{\epsilon q^2 n}{(\epsilon - 1)\epsilon_0} x.$$

Как видим, в этих условиях каждая молекула ведет себя как пружинка жесткостью $k = \frac{\epsilon q^2 n}{(\epsilon - 1)\epsilon_0}$.

Володя. Здорово! И никакой квантовой механики. Теперь, зная зависимость $F(x)$, мы можем найти работу, затраченную на растяжение молекулы.

Антон. Конечно. Осталось только заметить, что для создания на поверхностях пластины связанных зарядов Q_s каждую молекулу нужно растянуть на

$$x = \frac{Q_s}{qnS}.$$

Работа, совершенная над одной молекулой, будет равна

$$A_0 = \frac{kx^2}{2} = \frac{\epsilon Q_s^2}{2(\epsilon - 1)\epsilon_0 nS^2}.$$

Чтобы найти полную работу, т.е. энергию поляризованного диэлектрика, нужно умножить A_0 на число молекул в пластине:

$$W_d = ndSA_0 = \frac{\epsilon Q_s^2 d}{2(\epsilon - 1)\epsilon_0 S}.$$

Володя. Но ведь это в точности результат (6)!

Антон. Конечно, ведь $\epsilon_0 S/d$ равно C_0 – емкости конденсатора, из которого мы выдергивали нашу пластину.

Учитель. И теперь понятно, почему именно этот ответ, а также ответ (1) для энергии конденсатора, являются верными, а Володины результаты (4) и (5) – нет. Из решения Антона видно, где у Володи возникает ошибка. Заменяя диэлектрик связанными зарядами, возникающими на его поверхностях, и вычисляя энергию так, как если бы эти заряды находились в вакууме, мы не учитываем работу против внутримолекулярных сил, затрачиваемую на увеличение потенциальной энергии деформации молекул. Учитывается только работа по преодолению сил электрического поля, в котором находятся молекулы. Или, другими словами, только второе слагаемое в формуле (7).

Володя. Но тогда, если мы оставим только это слагаемое, решение Антона должно дать ответ (5).

Учитель. Совершенно верно. Попробуйте сами в этом убедиться.

Физическая оптика и два верблюда

(Начало см. на с. 35)

сфере между двумя звездами ϕ , которые мы хотим разрешить, должно быть не меньше чем θ_1 . (Ясно также, почему у орла должен быть большой зрачок, если он хочет с высоты полета разглядеть мышшь на земле.)

А что если привинтить к телескопу микроскоп? Казалось бы, если каждый из этих приборов увеличивает в тысячу раз, то такое устройство могло бы увеличивать в миллион раз, так что можно

было бы рассматривать камешки на Марсе? Увы, дифракция света на объективе телескопа уже безнадежно испортит дело, так что информация об объектах более мелких, чем определяемые условием Рэлея (*), будет навсегда потеряна. А дифракция на объективе микроскопа? Она ведь тоже приводит к тому, что не удастся разрешить две точки, если расстояние между ними меньше длины волны излучения, освещающего наблюдаемый объект (например, микроб).

Что же получается? Выходит, эти замечательные приборы созданы для того, чтобы на их входных зрачках происходила дифракция света? Конечно, нет. Когда человечество изобретало

эти приборы, оно совсем не думало о волновой природе света. Казалось, картины хода лучей, нарисованные по законам геометрической оптики, открывают неограниченные возможности для увеличения микроскопов и телескопов – подберите лишь нужные отношения фокусов объектива и окуляра и расположите их должным образом. Но, как всегда случалось в истории физики, более развитая теория (физическая оптика) указала пределы возможностей, скрытые от более простой теории (геометрической оптики).

А верблюды – это просто для интереса.

Вписанные многоугольники

М. ПАНОВ, А. СПИВАК



БЫ РАССКАЖЕМ О ЗАДАЧЕ из «Задачника «Кванта» – объясним, откуда она возникла, покажем ее разнообразие связи с другими задачами.

М1624. *Внутри вписанного в окружность вуглового n угольника $A_1A_2\dots A_n$ найдется отличная от центра окружности точка P , из которой все стороны видны под равными углами. Могут ли длины всех отрезков A_1P, A_2P, \dots, A_nP быть рациональными числами? Разберите случаи: а) $n = 4$; б) $n = 8$; в) $n = 6$; г) $n = 5$ или 7 ; д) $n > 8$.*

Поскольку «связи» даже более красивы и интересны, чем сама задача, кому-то покажется, что она – только повод для разговора. Наверное, так оно и есть. Но один из нас узнал обо всем этом, будучи школьником и заинтересовавшись этой задачей. Приглашаем повторить этот путь.

Свойство правильного треугольника

Если есть ради чего стараться, то не грех и перестараться.

Начнем с классической задачи. Она столь замечательна, что вошла в «Задачник «Кванта» одной из первых.

Задача 1 (М18, а). *На дуге АВ описанной окружности равностороннего треугольника ABC взята точка X. Докажите, что $AX + BX = CX$ (рис. 1).*

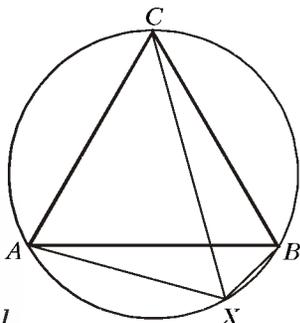


Рис. 1

Первое решение (для восьмиклассников – с равными треугольниками и теоремой о вписанном угле). Отложим на XC отрезок XU , равный отрезку XB (рис. 2).

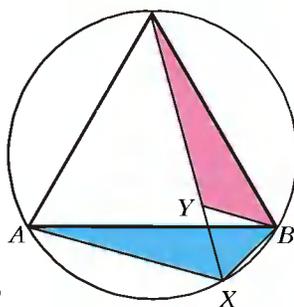


Рис. 2

По теореме о вписанном угле, $\angle CXB = \angle CAB = 60^\circ$. Поэтому $\triangle XBU$ правильный. При повороте вокруг B на 60° точка C переходит в A , точка U – в X . Поэтому треугольники CBU и ABX равны, $CY = AX$. Следовательно,

$$CX = CY + YX = AX + BX.$$

Второе решение (для десятиклассников – с тригонометрическими формулами). Проведем диаметр XX' (рис. 3). Обозначим $\angle CXX' = \varphi$. Тогда треугольники $XX'A$, $XX'B$, $XX'C$ – прямоугольные с гипотенузой XX' . Следовательно,

$$AX = XX' \cos(60^\circ - \varphi),$$

$$BX = XX' \cos(60^\circ + \varphi),$$

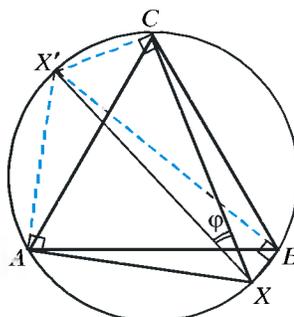


Рис. 3

откуда

$$\begin{aligned} AX + BX &= \\ &= XX'(\cos(60^\circ - \varphi) + \cos(60^\circ + \varphi)) = \\ &= XX' \cdot 2 \cos 60^\circ \cos \varphi = XX' \cos \varphi = CX. \end{aligned}$$

Третье решение (для учеников математических классов – с теоремой Птолемея). Для вписанного четырехугольника $AXBC$ запишем теорему Птолемея:

$$AX \cdot BC + BX \cdot AC = CX \cdot AB.$$

Разделив на длину стороны треугольника ABC , получим требуемое.

Упражнение 1. На дуге CD описанной окружности квадрата $ABCD$ взята точка P . Докажите, что $AP + CP = \sqrt{2}BP$.

Свойство шестиугольника

Мы решили задачу 1. А сейчас переформулируем ее, изменив до неузнаваемости.

Задача 2. *Если диагонали AD, BE и CF вписанного шестиугольника ABCDEF пересекаются в точке P под*

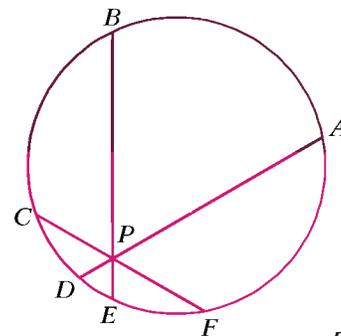


Рис. 4

углом 60° друг к другу (рис. 4), то $AP + CP + EP = BP + DP + FP$. (1)

Решение. Проведем через точку P окружность, concentрическую описанной окружности шестиугольника (рис. 5). Тогда

$$\begin{aligned} AP + CP + EP &= \\ &= AX + XP + CP + EP, \\ BP + DP + FP &= \\ &= BY + YP + DP + FZ + ZP. \end{aligned}$$

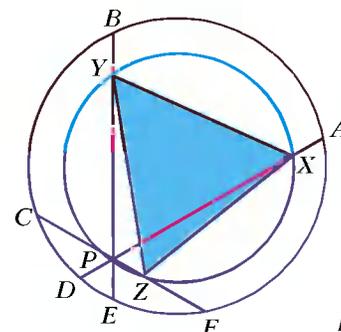


Рис. 5

Поскольку $AX = DP$, $BY = EP$, $CP = FZ$, задача 2 сводится к проверке равенства $XP = YP + ZP$. Оно обеспечено задачей 1, поскольку треугольник XYZ равносторонний (по теореме о вписанном угле, $\angle YZX = \angle YPX = 60^\circ$ и $\angle XYZ = \angle XPZ = 60^\circ$).

Аналогичное задаче 2 утверждение можно сформулировать и в случае, когда точка P лежит вне шестиугольника. А именно, если под углом 60° друг к другу провели три прямые, которые пересекли некоторую окружность, как

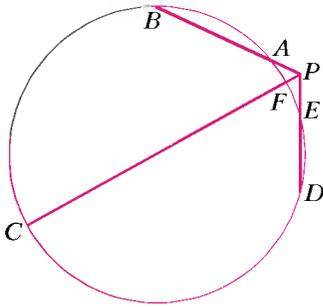


Рис. 6

показано на рисунке 6, то легко доказать равенство

$$-AP + CP - EP = BP + DP - FP.$$

Оно аналогично равенству (1), только некоторые отрезки «взяты со знаком минус».

Упражнения

2. Через точку проведены три прямые под углом 60° друг к другу. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой другой точки плоскости на эти прямые, являются вершинами равностороннего треугольника.

3. а) Через точку провели четыре пря-

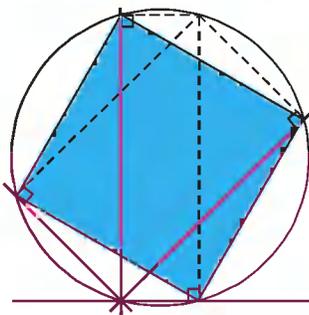


Рис. 7

мые под углом 45° друг к другу (рис. 7). Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой другой точки плоскости на эти прямые, являются вершинами квадрата.

б) Окружность разделили диаметрами на равные дуги и из произвольной точки опустили перпендикуляры на эти диаметры. Докажите, что основания этих перпендикуляров – вершины правильного многоугольника (который вырождается в точку, если «опускать перпендикуляры» из центра ок-

ружности, и вырождается в «двуугольник», если окружность разделили двумя диаметрами на четыре равные дуги).

Случай $n = 4$

Займемся пунктом а) задачи М1624. Напомним, что если хорды KM и LN окружности пересекаются в точке S , то $KS \cdot MS = LS \cdot NS$. Более того, легко доказать следующую лемму.

Лемма 1. Если отрезки KM и LN пересекаются в точке S , то необходимым и достаточным условием принадлежности точек K, L, M и N одной окружности является равенство $KS \cdot MS = LS \cdot NS$.

В силу леммы, для построения примера к пункту а) достаточно взять любые два перпендикулярных отрезка,

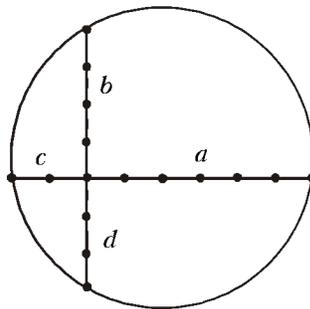


Рис. 8

которые делятся точкой пересечения на такие отрезочки длин a, b, c, d , что $ac = bd$. Годятся, например, $a = 4, b = 2, c = 1, d = 2$ (или $a = 6, b = 4, c = 2, d = 3$, как на рисунке 8).

Случай $n = 6$

Для вписанного шестиугольника $ABCDEF$, диагонали AD, BE, CF которого под равными углами пересекаются в точке P , как мы доказали, выполняются равенства

$$\begin{cases} a + c + e = b + d + f, \\ ad = be = cf, \end{cases} \quad (2)$$

где $a = PA, b = PB, c = PC, d = PD, e = PE, f = PF$.

В пункте в) задачи М1624 мы должны выяснить, могут или нет все длины a, b, \dots, f быть рациональными, если точка P не является центром окружности.

Лемма 2. Если на пересекающихся под углом 60° друг к другу прямых от точки их пересечения P отложить отрезки $PA = a, PB = b, \dots, PF = f$, для которых выполнены равенства (2), то получится вписанный шестиугольник $ABCDEF$.

Доказательство. Отложим сначала на двух прямых отрезки $PA = a, PB =$

$= b, PD = d, PE = e$. В силу леммы 1, точки A, B, D, E попадут на одну окружность. Рассмотрим точки C' и F' пересечения этой окружности с третьей прямой и обозначим $c' = PC', f' = PF'$. Тогда

$$\begin{cases} a + c' + e = b + d + f', \\ ad = be = c'f', \end{cases} \quad (3)$$

где c' и f' – это вовсе не производные, а всего лишь длины отрезков PC' и PF' .

Из систем (2) и (3) имеем

$$\begin{cases} c - c' = f - f', \\ cf = c'f'. \end{cases}$$

Запишем первое уравнение в виде $c - f = c' - f'$, возведем в квадрат и прибавим к результату учетверенное второе уравнение:

$$(c + f)^2 = (c' + f')^2.$$

Значит, $c + f = c' + f'$. Вспомнив уравнение $c - f = c' - f'$, получаем $c = c', f = f'$. Лемма 2 доказана.

Упражнение 4. Придумайте другой способ доказательства равенств $c = c', f = f'$, основанный на том, что числа c и $-f$ являются корнями квадратного уравнения $x^2 - (c - f)x = cf$, а «другими» корнями того же самого уравнения являются числа c' и $-f'$.

Чтобы построить пример к пункту в), осталось предъявить решение системы (2) в натуральных числах $a, b, c, d, e,$

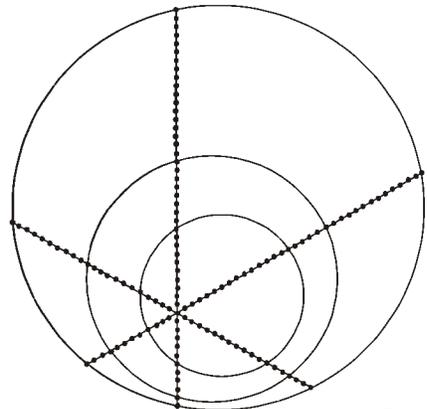


Рис. 9

f , не все из которых равны друг другу. На рисунке 9 приведено даже три примера. Хотите узнать, как их придумали? Решите следующие три упражнения!

Упражнения

5. Придумайте натуральные числа, не все из которых равны друг другу, удовлетворяющие уравнениям $ad = be = cf$.

6. Придумайте решение системы (2) в натуральных числах, не все из которых равны друг другу.

Указание. Воспользуйтесь числами, найденными в предыдущем упражнении, и домыслийте их разумным образом.

7. Придумайте бесконечную серию решений системы (2), отличную от $a = b = c = d = e = f$.

Свойство пятиугольника

Задача 3. На дуге AE описанной окружности правильного пятиугольника $ABCDE$ отмечена точка X . Докажите, что $AX + CX + EX = BX + DX$.

Первое решение (тригонометрическое). Проведем диаметр XX' (рис. 10). Обозначим $\angle CXX' = \varphi$, $XX' = d$.

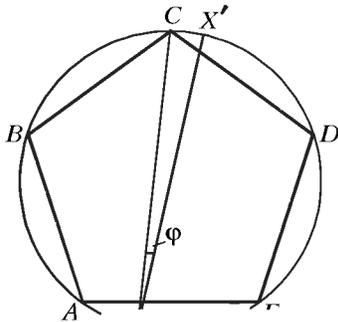


Рис. 10

Тогда треугольник AXX' прямоугольный, откуда $AX = XX' \cos \angle AXX' = d \cos(72^\circ + \varphi)$. Аналогично, $BX = d \cos(36^\circ + \varphi)$, $CX = d \cos \varphi$, $DX = d \cos(36^\circ - \varphi)$, $EX = d \cos(72^\circ - \varphi)$. Значит, осталось проверить тождество $\cos(72^\circ + \varphi) + \cos \varphi + \cos(72^\circ - \varphi) = \cos(36^\circ + \varphi) + \cos(36^\circ - \varphi)$.

Поскольку

$$\begin{aligned} \cos(72^\circ + \varphi) + \cos(72^\circ - \varphi) &= 2 \cos 72^\circ \cos \varphi, \\ \cos(36^\circ + \varphi) + \cos(36^\circ - \varphi) &= 2 \cos 36^\circ \cos \varphi. \end{aligned}$$

достаточно доказать равенство $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 1/2$.

$$\begin{aligned} \text{Домножим его левую часть на } \sin 36^\circ: \\ \cos 36^\circ \sin 36^\circ - \cos 72^\circ \sin 36^\circ &= \\ = \frac{1}{2} \sin 72^\circ - \frac{1}{2} (\sin 108^\circ - \sin 36^\circ) &= \\ = \frac{1}{2} \sin 36^\circ, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Замечание. Равенство $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 1/2$ можно доказать проще, проведя биссектрису KN угла K равнобедренного треугольника KLM с углом при вершине $\angle M = 36^\circ$ и основанием $KL = 1$ (рис. 11). Возникнут равнобедренные треугольники LKN и KNM . Значит, $MN = NK = KL = 1$. Опустив перпендикуляры MM_1 и NN_1 на основание треугольника, получим: $KN_1 =$

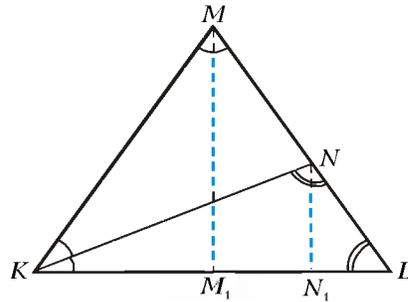


Рис. 11

$$\begin{aligned} &= \cos 36^\circ, \quad M_1N_1 = MN \cos 72^\circ = \cos 72^\circ, \\ \cos 36^\circ - \cos 72^\circ &= KN_1 - M_1N_1 = \\ &= KM_1 = 1/2. \end{aligned}$$

Второе решение (со скалярными произведениями). Отложим векторы $\vec{a}, \vec{c}, \vec{e}$ единичной длины вдоль лучей XA, XC, XE , а векторы \vec{b}, \vec{d} — вдоль

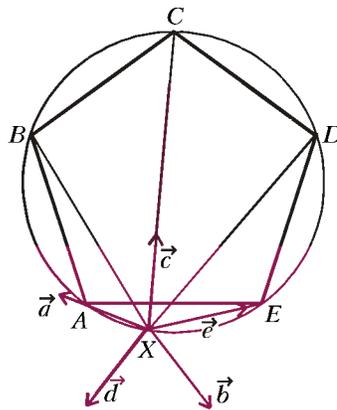


Рис. 12

лучей BX и DX (рис. 12). Тогда $AX = \vec{a} \cdot \vec{XX}'$, $CX = \vec{c} \cdot \vec{XX}'$, $EX = \vec{e} \cdot \vec{XX}'$, $BX = -\vec{b} \cdot \vec{XX}'$, $DX = -\vec{d} \cdot \vec{XX}'$. Значит,

$$\begin{aligned} AX + CX + EX - BX - DX &= \\ = (\vec{a} + \vec{c} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{d}) \vec{XX}'. \end{aligned}$$

Проверим равенство $\vec{a} + \vec{c} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{d} = 0$. Для этого заметим, что по теореме о вписанном угле прямые AX, BX, CX, DX и EX пересекаются под равными углами. Если бы сумма $\vec{s} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{d}$ была отлична от $\vec{0}$, то вектор \vec{s} изменялся бы при повороте на 72° . Но при этом повороте слагаемые $\vec{a}, \vec{d}, \vec{b}, \vec{e}, \vec{c}$ всего лишь переставляются местами, переходя в $\vec{d}, \vec{b}, \vec{e}, \vec{c}, \vec{a}$ соответственно.

Упражнения

8. Докажите, что для любого правильного многоугольника сумма векторов, проведенных в его вершины из центра описанной окружности, равна нулю.

9. 999 непересекающихся отрезков с концами в вершинах правильного 1998-угольника разбивают эти вершины на пары. Докажите, что на отрезках можно так расставить стрелки, что сумма полученных векторов будет равна нулю. (Санкт-Петербургская математическая олимпиада 1998 года, С. Берлов)

10. Правильный n -угольник $A_1A_2\dots A_n$ вписан в окружность с радиусом R и центром O . Пусть P — произвольная точка этой окружности. Докажите, что сумма проекций на прямую OP всех n векторов, соединяющих точку P с вершинами n -угольника, равна nR .

11. Вычислите суммы косинусов

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos 0 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \\ + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}, \end{aligned}$$

$$\text{б) } \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5},$$

$$\text{в) } \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7},$$

$$\text{г) } \sum_{j=1}^k \cos \frac{2\pi j}{2k+1}, \text{ где } k \text{ — натуральное}$$

число,

$$\text{д) } \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7},$$

$$\text{е) } \sum_{j=1}^k \cos \frac{(2j-1)\pi}{2k+1}, \text{ где } k \text{ — натуральное}$$

число.

Указание. Прочитайте статью Н. Васильева и В. Сендерова «Про угол $\pi/7$ и $\sqrt{7}$ » в «Кванте» №2 за 1996 год или статью «Гауссовы суммы» в этом номере.

12. а) Докажите, что для любой точки X дуги A_1A_7 описанной окружности правильного семиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ верно равенство

$$\begin{aligned} A_1X + A_3X + A_5X + A_7X &= \\ = A_2X + A_4X + A_6X. \end{aligned}$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для любого правильного многоугольника с нечетным числом сторон.

13. а) Докажите, что если диагонали $A_1A_6, A_2A_7, A_3A_8, A_4A_9, A_5A_{10}$ вписанного десятиугольника пересекаются под равными углами в точке P , то

$$\begin{aligned} PA_1 + PA_3 + PA_5 + PA_7 + PA_9 &= \\ = PA_2 + PA_4 + PA_6 + PA_8 + PA_{10}. \end{aligned}$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для многоугольника с четным числом сторон, не делимым на 4.

в) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для 12-угольника.

14. Решите задачу 3 третьим способом, применив теорему Птолемея к четырехугольникам $ABCX, BCDX, CDEX, DEXA$ и $EXAB$.

Случай $n = 8$

Обратимся к пункту б) задачи M1624. Пусть диагонали вписанного восьмиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ пересекаются под равными углами в точке P (рис. 13). Опустим из центра O описанной окружности перпендикуля-

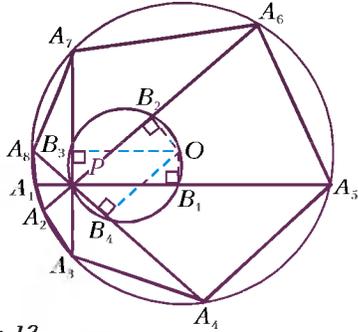


Рис. 13

ры OB_1, OB_2, OB_3 и OB_4 на диагонали A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7 и A_4A_8 . Получим, в силу упражнения 3, квадрат $B_1B_2B_3B_4$, на описанной окружности которого лежит точка P . Если бы длины всех отрезков PA_i ($i = 1, \dots, 8$) были рациональными, то и длины отрезков $PB_1 = (PA_5 - PA_1)/2, \dots, PB_4 = (PA_4 - PA_8)/2$ были бы рациональны, что противоречит равенству $PB_1 + PB_3 = \sqrt{2}PB_2$ упражнения 1.

Случай четного $n > 8$

Займемся пунктом д) для четных n . Пусть, для определенности, центр O окружности лежит внутри угла A_2PA_3 . Обозначим $\angle OPA_2 = \theta$. Опустим перпендикуляры PB_1, PB_2 и PB_3 на прямые PA_1, PA_2 и PA_3 . Тогда

$$PB_1 = OP \cos\left(\frac{\pi}{n} + \theta\right),$$

$$PB_2 = OP \cos \theta,$$

$$PB_3 = OP \cos\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right),$$

откуда

$$PB_1 + PB_3 = 2OP \cos \theta \cos(\pi/n) = 2PB_2 \cos(\pi/n),$$

т. е. $\cos(\pi/n) = (PB_1 + PB_3)/(2PB_2)$.

Если бы длины всех отрезков PA_i были рациональными, то и длины

$$PB_1 = (PA_1 - PA_{n+1})/2,$$

$$PB_2 = (PA_2 - PA_{n+2})/2,$$

$$PB_3 = (PA_3 - PA_{n+3})/2$$

были бы рациональными. Но при $n > 3$ число $\cos(\pi/n)$ иррационально (доказательство см. в Приложении).

Случай нечетного $n > 3$

Продолжим каждый из лучей A_iP , где $i = 1, \dots, n$, до пересечения с окружностью в точке B_i . В силу упражнения 13,

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n = PB_1 + PB_2 + \dots + PB_n. \quad (4)$$

По свойству хорд,

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2 = \dots = PA_n \cdot PB_n.$$

Значит, величина $PA_i \cdot PB_i = c$ одна и та же для всех $i = 1, \dots, n$.

Предположим, что все длины PA_i рациональны. Подставив выражения $PB_i = c/PA_i$ в формулу (4), получим равенство

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n = c \left(\frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PA_2} + \frac{1}{PA_n} \right),$$

из которого следует, что c — рациональное число. Значит, рациональны и все выражения $PB_i = c/PA_i$. В предыдущем разделе доказано, что такого не бывает.

Приложение

В заключение докажем иррациональность чисел вида $\cos(\pi/n)$, где n — натуральное число, $n > 3$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Существуют многочлены с целыми коэффициентами T_n и Q_{n-1} степени n и $n-1$, для которых*

$$\begin{cases} \cos n\alpha = T_n(\cos \alpha), \\ \sin n\alpha = \sin \alpha Q_{n-1}(\cos \alpha). \end{cases}$$

Следствие из леммы 3. *Если число $\cos \alpha$ рационально, то рациональны и все числа вида $\cos k\alpha$, где $k = 1, 2, \dots$*

Доказательство леммы 3. Применим индукцию. База очевидна: при $n = 1$ имеем $T_1(x) = x$ и $Q_0(x) = 1$.

Переход тоже не сложен:

$$\begin{cases} \cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha \cos \alpha - \sin n\alpha \sin \alpha = \\ = T_n(\cos \alpha) \cos \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) Q_{n-1}(\cos \alpha), \\ \sin(n+1)\alpha = \cos n\alpha \sin \alpha + \sin n\alpha \cos \alpha = \\ = T_n(\cos \alpha) \sin \alpha + \sin \alpha Q_{n-1}(\cos \alpha). \end{cases} \quad (5)$$

Лемма доказана. По индукции из формул

(5) легко вывести утверждение следующей леммы.

Лемма 4. *Старшие коэффициенты многочленов T_n и Q_{n-1} равны 2^{n-1} .*

Подготовка закончена. Пора пристально взглянуть на число $x = \cos(\pi/n)$, где n — натуральное число, $n > 3$. Предположим, что число x рационально, и разберем несколько случаев.

Если n делится на 4, то противоречие очевидно:

$$1/\sqrt{2} = \cos(\pi/4) = \cos\left(\frac{\pi}{n} \cdot \frac{n}{4}\right)$$

оказывается, в силу следствия из леммы 3, рациональным числом.

Если n нечетно, воспользуемся равенством

$$-1 = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{n}\right) = T_n\left(\cos \frac{\pi}{n}\right).$$

Оно означает, что x удовлетворяет уравнению $T_n(x) + 1 = 0$. Как известно, рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами имеют вид p/q , где p — делитель свободного члена, а q — делитель старшего коэффициента. В нашем случае q оказывается степенью двойки, а p равно 1, поскольку при нечетном n свободный член многочлена $T_n(x) + 1$ равен 1 (свободный член многочлена T_n можно найти очень легко, подставив $\alpha = \pi/2$ в тождество $\cos(n\alpha) = T_n(\cos \alpha)$). Значит, $x = 1/2^k$ для некоторого целого неотрицательного k . Осталось вспомнить, что $x = \cos(\pi/n) > \cos(\pi/3) = 1/2$ — и противоречие получено.

Случай, когда n обладает нечетным делителем $m > 3$, тоже легко привести к противоречию:

$$\cos \frac{\pi}{m} = \cos\left(\frac{n}{m} \cdot \frac{\pi}{n}\right).$$

А больше никаких случаев рассматривать не надо — любое натуральное число $n > 3$ делится на 4 или имеет нечетный делитель, больший числа 3.

Волшебная линза

А. МИТРОФАНОВ



ЛИНЗУ-ИГРУШКУ, О КОТОРОЙ пойдет речь в статье, подарил мне когда-то Н.И.Милюков – фотограф и личный лаборант академика П.Л.Капицы. А ему линза досталась как сувенир от академика А.П.Александрова, тогдашнего Президента Академии наук. Дело было так.

Капица пригласил Александрова в свою Физическую лабораторию, чтобы познакомиться с новыми и интересными результатами экспериментов с газовыми разрядами высокого давления в сильном сверхвысокочастотном поле. Визит, как говорится, удался. После осмотра и теплой беседы с персоналом плазменной установки этот сувенир и был подарен гостем Н.И.Милюкову.

Мне не известно, кто первым придумал опыт с «волшебной» линзой, но с той поры я точно знаю, что забавные игрушки и опыты-фокусы любят не только дети, но и студенты, лаборанты, доктора наук и почетные академики...

Рассмотрим опыт с линзой, изготов-

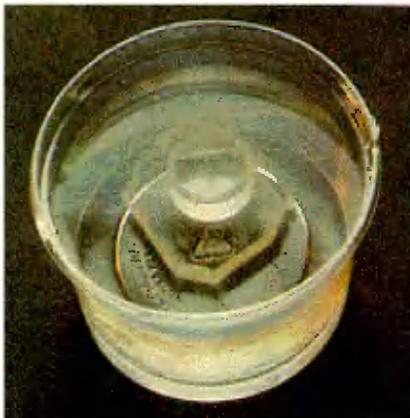


Рис. 2

ленной из оргстекла на токарном станке. Этот опыт очень простой и напоминает фокус.

Линза представляет собой сильно выпуклое тело, похожее на половинку сливы, с толстым цилиндрическим ободком, который крепится к пластинке-подставке, также выполненной из оргстекла (рис.1). Для крепления в пластинке сделано цилиндрическое углубление, куда плотно вставляется основание линзы.

Внешне линза с пластинкой ничем не примечательна – выпуклое тело с гладкой поверхностью, да и только. Но давайте поместим линзу в чашку, стакан или любую другую емкость, в которую нальем воду (рис.2). Как только уровень воды достигнет вершины линзы, в чашке под линзой неожиданно появляется четкое изображение лица (рис.3), предмета или еще чего-либо. А до тех пор, пока линза не окажется в прозрачной жидкости (в нашем опыте – в воде), изображения нет, как бы мы не старались его увидеть...

Вы, наверное, уже догадались, в чем секрет этого опыта. В углублении подставки под самой линзой спрятана маленькая фотография (или рисунок), изображение которой и появляется в чашке с водой под линзой. Но какова роль воды в опыте, и почему без воды в чашке фотография не видна? Ведь

если мы возьмем обычную собирающую линзу, например очковое стекло или конденсорную линзу фотоувеличителя, и положим ее на плоский предмет или фотографию, то через линзу этот предмет хорошо виден. Точнее, мы видим увеличенное мнимое изображение предмета (рис.4,а). Даже если линза имеет большую угловую апертуру, например если это стеклянное полушарие или даже шар, предмет все равно виден через линзу (подумайте, почему), хотя и с измененными формами.

Будем теперь плавно увеличивать расстояние от предмета до линзы. Изображение тоже станет увеличиваться, но начнет разрушаться и пропадать, когда предмет окажется вблизи фокальной плоскости линзы и увеличение, даваемое линзой, будет стремиться к бесконечности. Далее, когда расстояние от линзы до предмета окажется больше фокусного расстояния линзы F , линза даст действительное, но уже перевернутое изображение предмета (рис.4,б).

Таким образом, чтобы предмет не был виден под собирающей линзой, он должен обязательно находиться вблизи ее фокальной плоскости. Именно так устроена наша «волшебная» линза из оргстекла, при этом толщины линзы, ободка и углубления в пластинке подобраны соответствующим образом, а фотография находится практически в фокусе линзы.

Оценим теперь, чему равно это фокусное расстояние. Пусть линза в области вершины аппроксимируется сферой



Рис. 1



Рис. 3

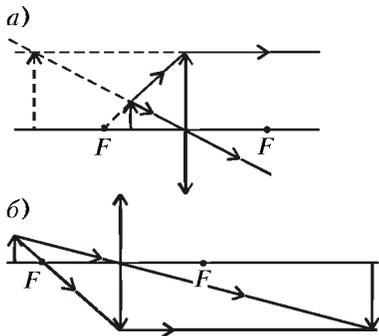


Рис. 4

с известным радиусом кривизны R . На рисунке 5 показано центральное сечение линзы, CC' – ее ось, O – центр кривизны линзы в области вершины. Пусть n – показатель преломления материала линзы, для оргстекла $n = 1,47$ (для длин волн света $0,5 - 0,6$ мкм), а $n_0 \approx 1$ – показатель преломления воздуха. Вдоль оси на линзу падает параллельный пучок света. Рассмотрим ход одного из лучей, падающих на линзу в произвольную точку P , которая находится вблизи оси CC' (параксиальное приближение). Здесь α – угол падения этого луча, β – угол преломления, F – точка пересечения луча с осью линзы, т.е. фокус линзы для лучей, близких к оптической оси. Полагая углы α и β малыми, т.е. считая $\sin \alpha = \alpha$ и $\sin \beta = \beta$, имеем $\alpha = n\beta$ (закон преломления света) и $OF/R = \beta/(\alpha - \beta)$ (теорема синусов для треугольника OPF), откуда получаем $OF = R/(n-1)$. Фокусное расстояние линзы, измеренное от ее вершины, равно

$$CF = R + \frac{R}{n-1} = R \frac{n}{n-1} \approx 3,1R.$$

У нашей линзы $F = 2,6$ см, что соответствует радиусу кривизны линзы $R = 0,83$ см. Именно на расстоянии чуть

больше дюйма от вершины линзы под ней и была спрятана фотография, которая «проявилась», когда мы поместили линзу в воду.

Каким образом оказалось возможным увидеть фотографию под линзой в воде? Дело в том, что в воде преломляющая способность линзы уменьшилась и из короткофокусной линза превратилась в длиннофокусную. Действительно, коэффициент преломления воды в видимой области спектра составляет $n_{\text{в}} = 1,33 - 1,34$, а относительный коэффициент преломления оргстекла в воде равен $n_{\text{отн}} = n/n_{\text{в}} = 1,10 \pm 0,01$. Поэтому нижнее фокусное расстояние нашей линзы, залитой сверху водой, оказалось равным

$$F_{\text{в}} = R \frac{n_{\text{отн}}}{n_{\text{отн}} - 1} = \frac{1,1}{0,1} R = 11R,$$

если считать, что полупространство под линзой состоит из оргстекла и фокусное расстояние измеряется от вершины линзы. Таким образом, вода увеличивает фокусное расстояние линзы более чем в 3,5 раза, что оказывается вполне достаточным для наблюдения спрятанного под линзой объекта.

Идея рассмотренного опыта очень проста и может быть использована в других случаях. Так, линзу можно сделать матовой, ступенчатой (со ступеньками от резца) или даже гофрированной. Или еще проще – в качестве маскировочного покрытия некоторого плоского объекта можно взять матированную сверху пластинку из прозрачного материала, которая в воде или другой специальной жидкости станет на вид почти гладкой, что позволит наблюдать спрятанный под пластинкой объект. Такая оптическая маскировка и декодировка объекта с помощью изменения показателя преломления среды

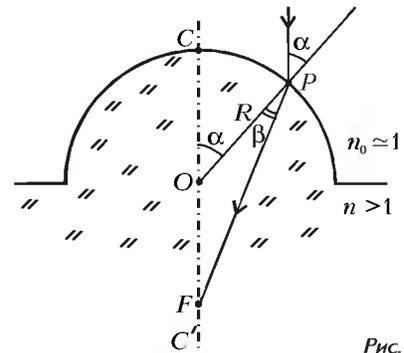


Рис. 5

представляет определенный практический интерес.

В заключение – несколько задач для самостоятельного решения.

1. У линзы, изображенной на рисунке 5, определите фокусное расстояние для лучей, распространяющихся вдоль оптической оси в направлении вверх (верхний фокус).

2. Покажите, что фокусное расстояние однородного шара радиусом R , сделанного из прозрачного диэлектрика с коэффициентом преломления n ($1 < n < 2$), равно $F = \frac{R(2-n)}{2(n-1)}$.

3. Шар радиусом R с коэффициентом преломления n_1 находится в пластинке толщиной $2R$ с коэффициентом преломления n_2 ($n_2 < n_1$). Определите фокусное расстояние шара с пластинкой при нормальном падении света на пластинку.

4. Придумайте, какими еще оптическими способами можно сделать видимым объект, «спрятанный» в фокальной плоскости линзы.

5. Почему вода не проникает в зазор между линзой и подставкой (благодаря чему в нашем опыте фотография остается всегда сухой)?

Заряженная капля

Пусть заряженная капля находится в поле тяжести на горизонтальной поверхности, не смачиваемой водой. Очевидно, что если сила тяжести стремится «расплющить» каплю, то силы поверхностного натяжения и электростатического отталкивания стремятся, наоборот, «распрямить» ее, сделать сферической. Как оценить вклад каждой из сил? При каком радиусе капля будет мало отличаться от шарика?

Используем энергетический подход и запишем условие сферичности капли в виде $W_{\text{п}} + W_{\text{э}} \geq W_{\text{т}}$, где $W_{\text{п}} = \sigma S = 4\pi\sigma R^2$ – так называемая поверхностная энергия (связанная с силами поверхностного натяжения),

$$W_{\text{э}} = q^2 / (8\pi\epsilon_0 R) = 2\pi\epsilon_0 E^2 R^3$$

– электростатическая энергия,

$$W_{\text{т}} = mgR = 4\pi\rho g R^4 / 3$$

– энергия тяготения. Здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения воды, R – радиус капли, E – напряженность электростатического поля на поверхности капли, ρ – плотность воды.

Получили фактически квадратное

неравенство

$$4\pi\sigma R^2 + 2\pi\epsilon_0 E^2 R^3 \geq \frac{4}{3}\pi\rho g R^4,$$

откуда находим радиус капли

$$R \leq \frac{3\epsilon_0 E^2 + \sqrt{9\epsilon_0^2 E^4 + 48\sigma\rho g}}{4\rho g}.$$

Подставляя максимально возможное значение напряженности электростатического поля $E = 3 \cdot 10^6$ В/м (при большей напряженности произойдет пробой воздуха), имеем $R \leq 1,38$ см. Для незаряженной ($E = 0$) капли $R \leq 0,47$ см. Значит, заряженная капля сохраняет сферическую форму при вдвое большем радиусе.

В. Дроздов

Об амплитудах колеблющихся величин

А. ОВЧИННИКОВ, В. ПЛИС



АРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ – важнейший вид механического движения. Поэтому полезно обратить внимание на некоторые особые свойства этого движения.

Известно, что при гармонических колебаниях смещение x тела от положения равновесия зависит от времени t по закону

$$x = X \cos(\omega t + \delta).$$

Здесь X – величина максимального смещения, т.е. амплитуда смещения тела от положения равновесия, $(\omega t + \delta)$ – фаза колебаний, ω – циклическая (круговая) частота колебаний, δ – начальная фаза колебаний.

Дифференцирование смещения x по времени t позволяет найти проекцию скорости v_x колеблющегося тела на координатную ось OX :

$$v_x = -X\omega \sin(\omega t + \delta).$$

Произведение величин X и ω в правой части этого равенства имеет смысл величины максимальной скорости V , т.е. амплитуды скорости колеблющегося тела. Таким образом, амплитуды скорости и смещения связаны соотношением

$$V = X\omega. \quad (1)$$

Дифференцируя проекцию v_x скорости по времени t , находим проекцию a_x ускорения колеблющегося тела на ось OX :

$$a_x = -X\omega^2 \cos(\omega t + \delta).$$

Произведение величин X и ω^2 в правой части равенства – это величина максимального ускорения A , т.е. амплитуды ускорения колеблющегося тела. Иными словами, амплитуды ускорения и смещения связывает выражение

$$A = X\omega^2. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно получить по-другому. Их вывод основан на том, что если точка C равномерно с линейной скоростью V и угловой скоростью ω движется по окружности радиусом X (рис.1), то ее проекция B на координатную ось OX совершает гармоничес-

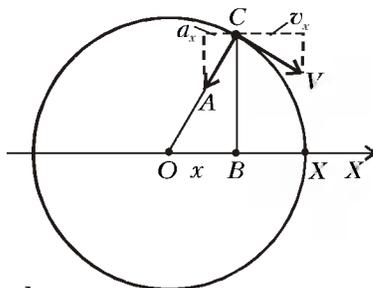


Рис. 1

кие колебания с циклической частотой ω . Из кинематики движения по окружности известно, что линейная скорость V , угловая скорость ω и радиус вращения X связаны соотношением, совпадающим с соотношением (1), а центростремительное ускорение A выражается через радиус X и квадрат угловой скорости ω формулой, совпадающей с выражением (2).

Обратим внимание еще на одно важное свойство гармонических колебаний. При рассмотрении колебаний в механике часто удобнее их описывать не на языке сил, а на языке энергий. Допустим, исследуемая система такова, что ее потенциальная и кинетическая энергии описываются формулами

$$E_p = \frac{\alpha x^2}{2}, \quad E_k = \frac{\beta (x')^2}{2},$$

где α и β – положительные постоянные величины (параметры системы), x и x' – смещение от положения равновесия и его первая производная по времени, т.е. проекция скорости v_x . Закон сохранения энергии записыва-

ется в виде

$$\frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta (x')^2}{2} = \text{const}. \quad (3)$$

Продифференцировав это равенство по времени, получим дифференциальное уравнение

$$x'' + \frac{\alpha}{\beta} x = 0,$$

где x'' – вторая производная от x по времени, т.е. проекция ускорения a_x . Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением этого уравнения является функция

$$x = X \cos(\omega t + \delta),$$

причем для циклической частоты находим

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (4)$$

Таким образом, приходим к выводу, что если энергия исследуемой системы описывается формулой (3), то движение является гармоническим колебанием с циклической частотой, определяемой соотношением (4).

Теперь обсудим несколько конкретных задач.

Задача 1. К пружине жесткостью k , один конец которой закреплен, подве-

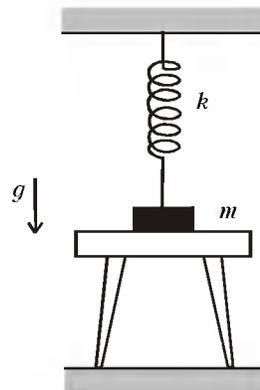


Рис. 2

шен груз массой m , лежащий на подставке так, что пружина не растянута (рис.2). Подставку быстро убирают. Найдите величины максимальной скорости и максимальной силы упругости пружины при дальнейшем движении груза.

Положение равновесия находится ниже начального положения груза на $X = mg/k$. Колебания смещения x груза относительно положения равновесия будут происходить по закону $x(t) = X \cos \omega t$ (ось OX направлена по вер-

тикали вверх), где $\omega = \sqrt{k/m}$ – круговая частота колебаний.

В начальный момент пружина не деформирована; следовательно, в этот момент ускорение груза равно ускорению свободно падающего тела: $a_x = -g$ и максимально по величине. Максимальная скорость достигается при прохождении грузом положения равновесия. Амплитуда V колебаний скорости связана с амплитудой A колебаний ускорения соотношением $V = A/\omega$. Отсюда

$$V = g\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

После прохождения положения равновесия ускорение груза направлено вверх, растет по величине и достигает при остановке максимального значения $a_x = g$. Из второго закона Ньютона $ma_x = F_x + mg_x$ находим максимальную величину силы упругости пружины:

$$F = mg - (-mg) = 2mg.$$

Задача 2. В известном опыте академик А.Ф.Иоффе для определения амплитуды колебаний ножки камертона подносил к ней стальной шарик на нити вплоть до соприкосновения шарика с ножкой (рис.3). Найдите амплитуду X колебаний ножки камертона,

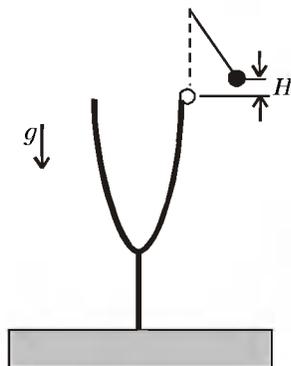


Рис. 3

на, если максимальная высота подъема шарика после одного отскока (точнее – ее среднее значение при многочисленных опытах) равна H . Частота колебаний ножки камертона ν . Масса шарика мала по сравнению с массой ножки камертона.

Найдем величину скорости, которую приобретает легкий неподвижный шарик в результате абсолютно упругого соударения с массивной ножкой камертона, движущейся со скоростью \vec{V} . Покоящийся относительно неподвижной (лабораторной) системы отсчета шарик движется относительно такой ножки со скоростью $-\vec{V}$. В результате

абсолютно упругого соударения относительная скорость шарика меняет знак и становится равной \vec{V} . Тогда скорость шарика в неподвижной системе отсчета, равная векторной сумме скорости ножки и относительной скорости шарика, будет равна $2\vec{V}$. Максимальная высота подъема шарика достигается при максимальной начальной скорости, которая для ножки камертона равна $X\omega$, а для шарика – соответственно, $2X\omega$. По закону сохранения полной механической энергии,

$$\frac{m(2X\omega)^2}{2} = mgH,$$

где m – масса шарика. Отсюда, с учетом соотношения $\omega = 2\pi\nu$, находим искомую амплитуду колебаний:

$$X = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

Задача 3. На массивной чашке пружинных весов лежит маленький грузик. Масса чашки m_1 , масса грузика

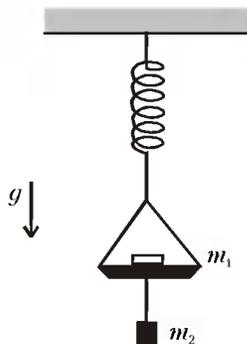


Рис. 4

пренебрежимо мала. К дну чашки подвешен груз массой m_2 (рис.4). Вся система находится в равновесии. Нить, на которой подвешен груз, перегибают. При каком соотношении между m_1 и m_2 грузик на чашке начнет подскакивать?

После отрыва груза массой m_2 положение равновесия системы сместится вверх на $X = m_2g/k$, где k – жесткость пружины. Колебания смещения x чашки относительно нового положения равновесия будут происходить по гармоническому закону $x(t) = X \cos \omega t$ с круговой частотой $\omega = \sqrt{k/m_1}$ (ось Ox направлена по вертикали вниз). В процессе подъема чашки с грузом после прохождения положения равновесия ускорение направлено вниз, растет по величине и достигает наибольшего значения

$$A = \omega^2 X = \frac{kX}{m_1} = \frac{m_2g}{m_1}.$$

Если $A < g$, т.е. $m_2 < m_1$, при движении чашки вниз грузик будет оставаться на ней. Если $A > g$, т.е. $m_2 > m_1$, грузик оторвется от чашки (до того, как чашка остановится).

Задача 4. Математический маятник длиной L совершает колебания в вертикальной плоскости с малой угловой амплитудой. Для увеличения амплитуды колебаний нить при каждом прохождении положения равновесия укорачивают на малую величину

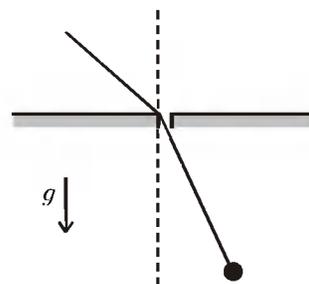


Рис. 5

ΔL , вытягивая ее через узкое отверстие в месте подвеса (рис.5), а в каждом крайнем положении нить удлиняют на ту же величину ΔL . Нить удлиняют и укорачивают таким образом, что за время одного изменения длины сила натяжения остается постоянной по величине. Найдите относительное увеличение амплитуды колебаний угла отклонения нити от вертикали за один период.

При прохождении маятником положения равновесия внешняя сила поднимает грузик на ΔL и совершает при этом работу

$$\left(\frac{mV^2}{L} + mg \right) \Delta L,$$

где m – масса грузика, V – его максимальная скорость. В крайних положениях, при которых угол отклонения нити от вертикали равен $\pm A$, длина маятника увеличивается на ΔL . В этом случае работа внешней силы равна $-mg\Delta L \cos A$. В течение каждого периода длина маятника дважды увеличивается и уменьшается. Таким образом, приращение энергии маятника за период колебаний составляет

$$\Delta W = 2 \left(\frac{mV^2}{L} + mg(1 - \cos A) \right) \Delta L,$$

или, поскольку рассматриваются малые колебания, т.е. угол A мал и $\cos A = 1 - A^2/2$,

$$\Delta W = 2 \left(mg\Delta L \frac{A^2}{2} + \frac{mV^2}{L} \Delta L \right).$$

Амплитуда колебаний скорости V свя-

зана с амплитудой колебаний смещения LA соотношением $V = \omega LA$, где $\omega = \sqrt{g/L}$ – круговая частота колебаний маятника. Тогда

$$\Delta W = 6 \frac{\Delta L}{L} \frac{mV^2}{2} = 6 \frac{\Delta L}{L} \frac{mgL}{2} \frac{A^2}{2}.$$

Энергия маятника равна

$$W = \frac{mV^2}{2} = mgL \frac{A^2}{2},$$

поэтому формула для ΔW принимает вид

$$\Delta W = 6 \frac{\Delta L}{L} W.$$

Таким образом, энергия маятника будет систематически возрастать, получая за каждый период небольшое приращение, пропорциональное самой этой энергии W и величине $\Delta L/L$. Отсюда для относительного увеличения энергии получаем

$$\frac{\Delta W}{W} = 6 \frac{\Delta L}{L}.$$

Теперь, принимая во внимание выражение для энергии маятника

$$W = mgL \frac{A^2}{2},$$

найдем

$$\Delta W = \frac{mgL}{2} 2A\Delta A \text{ и } \frac{\Delta W}{W} = 2 \frac{\Delta A}{A}.$$

Сравнивая между собой два выражения для $\Delta W/W$, для относительного увеличения амплитуды угла за период получим

$$\frac{\Delta A}{A} = 3 \frac{\Delta L}{L}.$$

Задача 5. Вдали от всех тяготеющих масс в космосе находится тонкая однородная спица длиной $L = 10$ м и массой $M = 1$ кг. По ней без трения может скользить бусинка массой $m = 0,1$ кг. В начальный момент бусинка смещена относительно центра спицы на $d = 1$ см и система неподвижна. С какой по величине скоростью V (в системе спицы) и через какое время τ бусинка достигнет центра спицы? Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг².

В процессе колебаний центр масс системы тел будет оставаться неподвижным. Начало неподвижной системы отсчета OX поместим в центр масс, а подвижную систему отсчета Ox_1 свяжем со спицей. Ускорение бусинки при малом ее смещении x_1 (в системе спицы) определяется силой притяжения

концевого отрезка спицы, имеющего вдвое большую длину и расположенного на расстоянии $L/2$ от бусинки:

$$a_{6x} = \frac{F_x}{m} = -\frac{Gm(M/L)2x_1}{m(L/2)^2} = -\frac{8GM}{L^3} x_1.$$

Ускорение стержня при этом смещении бусинки равно

$$a_{cx} = -\frac{F_x}{M} = -\frac{Gm(M/L)2x_1}{M(L/2)^2} = \frac{8Gm}{L^3} x_1.$$

Для сложения ускорений справедливо то же правило, что и для сложения скоростей (в этом легко убедиться, например, путем дифференцирования). Тогда ускорение бусинки относительно стержня будет

$$a_{6x_1} = x_1'' = a_{6x} - a_{cx} = -\frac{8G(M+m)}{L^3} x_1.$$

Получено уравнение гармонических колебаний бусинки относительно спицы. Круговая частота этих колебаний равна

$$\omega = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{2G(M+m)}{L}} \approx 0,77 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}.$$

Бусинка вернется в центр спицы через четверть периода колебаний

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ с}$$

с относительной скоростью

$$V = \omega d \approx 0,77 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}.$$

Задача 6. Потенциальная энергия атома в некотором кристалле описывается формулой $U(r) = U_0 \left((r_0/r)^{12} - 2(r/r_0)^6 \right)$, где $U_0 = 8,8 \cdot 10^{-4}$ эВ, а $r_0 = 0,287$ нм соответствует равновесному положению атома. При малых отклонениях от положения равновесия происходят колебания. Согласно квантовым представлениям, энергия колебаний с частотой $\omega = 2\pi\nu$ может принимать значения $E_n = h\nu(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка. Оцените наименьшую амплитуду X_0 колебаний смещения атома в таком кристалле. Масса атома $m = 6,4 \cdot 10^{-24}$ г; $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Для определения круговой частоты ω колебаний атома обратимся к гармоническим колебаниям груза массой m на пружине жесткостью k , находящегося на гладкой горизонтальной плоскости. При смещении на x от положения равновесия приращение потенциальной энергии груза составляет $kx^2/2$, приращение его кинетической энергии со-

ставляет $mv_x^2/2$, а круговая частота колебаний равна $\omega = \sqrt{k/m}$. Вернемся к нашей задаче и проанализируем выражение для потенциальной энергии атома в кристалле. Отметим, что при $r = r_0$ потенциальная энергия достигает минимума (проверьте это самостоятельно). Тогда при малых смещениях δr ($\delta r \ll r_0$) от положения равновесия приращение потенциальной энергии можно приближенно считать пропорциональным квадрату смещения:

$$\Delta U = U(r_0 + \delta r) - U(r_0) = k(\delta r)^2/2.$$

Найдем коэффициент пропорциональности k . При малых x справедливы приближенные равенства

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2,$$

$$1/(1+x) = 1 - x,$$

и приращение потенциальной энергии при малых смещениях δr от положения равновесия принимает вид

$$\Delta U = U(r_0 + \delta r) - U(r_0) = (36U_0/r_0^2)(\delta r)^2.$$

Отсюда получаем

$$k = \frac{72U_0}{r_0^2} \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{6}{r_0} \sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

Искомую амплитуду X_0 найдем из условия квантования колебаний:

$$E_0 = h\nu/2 = kX_0^2/2,$$

откуда

$$X_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h}{m\nu}} = \sqrt{\frac{hr_0}{12\pi\sqrt{2mU_0}}} = 0,06 \text{ нм}.$$

Упражнения

1. На неподвижный груз массой $m = 10$ кг, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности и прикрепленный пружиной жесткостью $k = 4 \cdot 10^3$ Н/м к вертикальной стенке (рис.6), в течение некоторого времени τ действует постоянная по величине и направлению сила F . При каких значениях τ амплитуда колебаний скорости после прекращения действия силы будет максимальной?

2. Брусок массой m_1 под действием пружины совершает на гладком столе гармонические колебания с амплитудой X и периодом T . Пуля массой m_2 , летящая вдоль направления движения бруска, попадает в него. В результате колебания прекращаются. Определите величину V скорости пули.

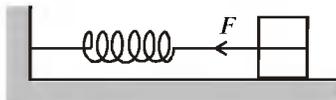


Рис. 6
колебаний.

3. Чашка пружинных весов с гирями (рис.7) совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой X и периодом T . Масса чашки и гирь m_1 . Гирию какой массы m_2 следует снять с чашки весов в момент нахождения ее в крайнем верхнем положении, чтобы колебания прекратились?

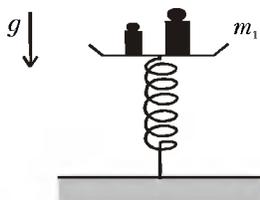


Рис. 7

4. Небольшой шарик на нити длиной L совершает колебания в вертикальной плоскости с малой угловой амплитудой. Для увеличения амплитуды колебаний нить при каждом прохождении положения равновесия укорачивают на малую по сравнению с L величину

$\Delta L = 3$ мм, вытягивая ее через узкое отверстие в месте подвеса (см. рис.5), а в каждом крайнем положении нить удлиняют на ту же величину ΔL , отпуская ее. Нить удлиняют и укорачивают таким образом, что за время одного изменения длины сила натяжения остается постоянной по величине. Найдите период T колебаний, если за каждый период амплитуда колебаний скорости увеличивается на $\delta = 0,5\%$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

5. На тележке массой m_1 , покоящейся на горизонтальных рельсах, укреплен маятник — шарик массой m_2 на нити длиной L . Найдите период T малых колебаний маятника, которые он будет совершать, если отклонить его вдоль рельсов на небольшой угол и затем отпустить одновременно с тележкой, не сообщив им начальной скорости.

6. На рисунке 8 изображена часть графика зависимости энергии взаимодействия U (эВ) атомов в молекуле азота от межатомного расстояния r (нм). Считая, что эта зависимость приближенно описывается формулой $U(r) = U_0 + k(r - r_0)^2 / 2$, найдите частоту ω малых колебаний атомов в молекуле азота. Согласно квантовым представлениям, энергия колебаний с частотой $\omega = 2\pi\nu$ может принимать значения $E_n = h\nu(n + 1/2)$, $n = 0,$

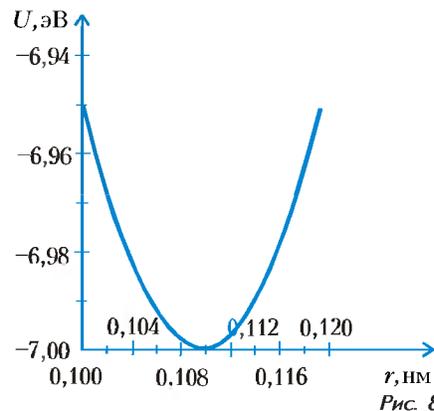


Рис. 8

$1, 2, \dots$, где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. Невозбужденная молекула азота поглощает квант света частотой ω и переходит из состояния с $n = 0$ в возбужденное состояние с $n = 1$. Оцените амплитуду X_1 колебаний смещения атомов в молекуле в этом состоянии. Масса атома азота $m = 2,3 \cdot 10^{-23}$ г.

ВАРИАНТЫ

Материалы вступительных экзаменов 1998 года

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{\sin 2x + (\sqrt{3} + 1) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}} + 3 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+4} + \log_{1/2} (13-x)}{|x^2 + 2x - 3| - |2x^2 - 10x + 8|} \geq 0.$$

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно, $\angle A = 35^\circ$, $\angle D = 145^\circ$, а площадь треугольника BCE равна 11. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

4. Найдите все значения k , при которых хотя бы одна общая точка графиков функций

$$y = -\frac{2}{3} - \arcsin x$$

и

$$y = -\frac{2}{3} - 2 \arctg kx$$

имеет положительную ординату.

5. Четырехугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке H , причем SH — высота пирамиды. Найдите ребра CS и CD , если $CH = 4$, $AS = 3\frac{3}{4}$, $AD = 3$ и $AB = BS$.

6. Фигура задана на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} (y^2 - x^2) + 6(y^2 - x^2) - (y + x)^2 + 5y + 7x + 1 > 0, \\ y > 1 - x. \end{cases}$$

Сколько интервалов на прямой $y = 2 - x$ образует ортогональная проекция этой фигуры на указанную прямую?

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$3 \cdot \sqrt{|x+1|} - 3 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{2x+2}^{5x-1} (10x^2 + x - 2) \leq 0.$$

3. Решите уравнение

$$3 \cdot 2^{\cos x + 3\sqrt{1-\sin^2 x}} + 11 \cdot 2^{2 \cos x} - 34 = 0.$$

4. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC , касается основания AC в точке D и боковой стороны AB в точке E . Точка F — середина стороны AB , а точка G — точка пересечения окружности и отрезка FD , отличная от D . Касательная к окружности, проходящая через точку G , пересекает сторону AB в точке H . Найдите угол BCA , если известно, что $FH:HE = 2:3$.

5. При каких значениях параметра α система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2 \sin^2(\pi x) - 3 \sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi \alpha) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \frac{3}{2} \sin^2(\pi x) - 2 \sin^2(\pi y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\pi \alpha) = 0, \\ \log_2 \left(1 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi \alpha}{4} - \frac{\pi}{16} \right) - x^2 - y^2 \right) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

6. Дана пирамида $ABCD$. Сфера касается плоскостей DAB , DAC и DBC в точках K , L и M соответственно. При этом точка K находится на стороне AB , точка L — на стороне AC , точка M — на стороне BC . Известно, что радиус сферы равен 3, $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle BDC = 105^\circ$, $\angle ADC = 75^\circ$. Найдите объем пирамиды.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$2x > \frac{5x+3}{|x+2|}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2(5-x) \cdot \log_{(x+1)} \frac{1}{8} \geq -6.$$

3. Решите уравнение

$$|\sin^3 x| + 13 \cos^3 x - \cos x = 0.$$

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD . На отрезке SD взята точка K так, что $SK:KD = 1:2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\frac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $\frac{4}{\sqrt{13}}$. Найдите объем пирамиды.

5. Найдите все значения параметра a , при которых существуют $(x; y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \max(2 - 3y, y + 2) \leq 5, \\ \left(a^2 + \frac{6}{\pi} \arccos \sqrt{1 - x^2} - 16 - \frac{2}{\pi^2} \arcsin x \cdot (\pi + 2 \arcsin x) \right)^{1/2} \geq y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

6. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD делит пополам отрезок OH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $AC = 2$, $AD = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Вариант 4

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x = \sin 2x.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3(x-2) - \log_9(x^2 - 10x + 25) = \log_3 2.$$

3. Решите неравенство

$$9^x - 2^{\frac{2x+1}{2}} < 2^{\frac{2x+7}{2}} - 3^{2x-1}.$$

4. Медианы AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке O . Известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $AC = b$. Найдите расстояние от точки O до прямой AC .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + |x + y - 1| = 0, \\ y - 3 + \sqrt{x - y + 6} = 0. \end{cases}$$

6. На отрезке AB взята точка C , отрезки AB и CB служат диаметрами окружностей. Хорда AM касается меньшей окружности в точке D . Прямая BD пересекает большую окружность в точке N , $\angle DAB = \alpha$, $AB = 2R$. Найдите площадь четырехугольника $ABMN$.

7. Для любых допустимых значений a решите неравенство

$$\log_a(3a^x - 5) < x + 1.$$

8. В правильной треугольной призме $ABC_1A_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) угол между прямыми AC_1 и A_1B равен α , $AA_1 = 2$. Найдите AB .

Вариант 5

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$4^x + 2^x - 2 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x+3} > x + 1.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$\sin x(\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 x = 2.$$

5. Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E , причем $CE = DE$. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке K . Отрезки AK и CE пересекаются в точке M . Найдите площадь треугольника CKM , если $AB = 10$, $AE = 1$.

6. Решите уравнение

$$\begin{aligned} \log_2(4x+1) \log_5(4x+4) + \\ + \log_3(4x+2) \log_4(4x+3) = \\ = 2 \log_3(4x+2) \log_5(4x+4). \end{aligned}$$

Вариант 6

(биологический факультет)

1. Вычислите

$$\log_{\left(b^3 \sqrt[3]{a^5} \right)} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{b \cdot \sqrt{b}} \right),$$

если $\log_b a = \sqrt{3}$.

2. Решите неравенство

$$|x^2 + x - 2| + |x + 4| \leq x^2 + 2x + 6.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \left(\cos x - \frac{2}{3} \right).$$

4. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC (C — вершина прямого угла). Все боковые грани пирамиды наклонены к ее основанию под одинаковым углом, равным $\arcsin \frac{5}{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если SO — высота пирамиды, $AO = 1$, $BO = 3\sqrt{2}$.

5. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} \cos 10x - 2 \sin 5x \geq 3 \cdot 4^t - \\ - 3 \cdot 2^{t+2} + \frac{27}{2}, \\ \sqrt{(2-\sqrt{3})^{4t} + (2+\sqrt{3})^{4t} + 2 +} \\ + 141 \log_2(\cos 10x) + 6 \cos 5x \geq (2t+1)^{1.5}. \end{cases}$$

Вариант 7

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1.$$

2. Найдите $\cos \frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ и что $\pi < \alpha < 2\pi$. Установите без помощи таблиц и калькулятора, какое из чисел больше: $\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|$ или $\frac{2}{7}$.

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{|x+1|-1} \geq \frac{2}{|x+1|-2}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2 \log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$$

5. На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены соответственно точки E и F такие, что $AE = 2A_1E$, $CF = 2C_1F$. Через точки B , E и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношение объема части, содержащей точку B_1 , к объему всего куба.

6. Определите а) при каких значениях a существует такое число b , что уравнение

$$5 \cos x + \sin x + \cos(x-b) = a$$

имеет решения; б) при каких значениях a это уравнение имеет решения при любом значении b .

Вариант 8

(геологический факультет)

1. Найдите численное значение выражения

$$\left(\frac{9a^2 - 16b^2}{4b + 3a} - \frac{a^2b - 3ab^2}{ab} \right)^2 : \left(6ab - \frac{8a^3 - b^3}{2a - b} \right).$$

2. Решите уравнение

$$\left| 4 - x^2 \right| - x^2 = 1.$$

3. Решите уравнение

$$5 + \frac{1}{\sin^2(3x)} = 7 \operatorname{ctg}(3x).$$

4. Из цистерны в бассейн сначала перелили 50 % имеющейся в цистерне воды, затем еще 100 л, затем еще 5 % от остатка. При этом количество воды в бассейне возросло на 31 %. Сколько воды было в цистерне, если в бассейне первоначально было 2000 л воды?

5. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x-2)} + \frac{3}{2}.$$

6. Четырехугольник $PQRS$ вписан в окружность. Диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M . Известно, что $PS = 13$, $QM = 10$, $QR = 26$. Найдите площадь четырехугольника $PQRS$.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(1+y) = y+7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

8. При каких значениях a уравнение

$$\left| \frac{x^2 - 4ax + 4a^2 + 1}{x - 2a} \right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 9

(географический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-4x^2 + 13x - 3} + 1}{\log_{3x} 7} \geq 0.$$

2. Найдите знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если сумма первого, второго и третьего членов прогрессии равна (-7) , а пятый член прогрессии меньше второго на 14.

3. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) равна 48, а площадь треугольника AOB , где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найдите отношение оснований трапеции $AD:BC$.

4. Решите уравнение

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 + 3 \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{6} \right).$$

5. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. Точка S — вершина пирамиды, $AB = 1$, $AS = 2$, BM — медиана треугольника ABC , AD — биссектриса треугольника SAB . Найдите длину отрезка DM .

6. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$3x = 5y^2 + 4y - 1,$$

и докажите, что для каждой такой пары

сумма $x^3 + y^3$ является нечетным числом.

Вариант 10

(филологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{|1+x|} \leq 0.$$

2. Длина стороны BC треугольника ABC равна 12. Около треугольника описана окружность радиусом 10. Найдите длины сторон AB и AC треугольника, если известно, что радиус OA окружности делит сторону BC на два равных отрезка.

3. Решите уравнение

$$\frac{\log_5(-2x)}{\log_5(x+1)} = 2.$$

4. A , H , B сидели на трубе. К ним стали по очереди высаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. Оказалось, что начиная с некоторого момента буквы стали циклически повторяться.

а) Какая буква (из числа циклически повторяющихся) встречается наиболее часто?

б) Может ли циклически повторяющийся набор состоять из одной буквы? Если да, укажите эту букву.

5. Решите неравенство

$$\sqrt[4]{13 + 3^{(3^{1-\cos x})}} \leq \sqrt{5e^{-2x^2-1}}.$$

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sin^2(x+6) - (a-1) \sin(x+6) \cdot \sin \pi x + (a-1) \sin^2 \pi x = 0$$

имеет единственное решение?

Вариант 11

(экономический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{4x-1}{11}}(7x-2x^2) \leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \sin x = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{x + 8(3 - \sqrt{8+x})} < \frac{x+16}{2\sqrt{8+x}-10}.$$

4. В равнобокой трапеции $PQRS$ ($QR \parallel PS$) известны длины $QR = 1$, $PS = 4$. Точки P' , Q' , R' , S' лежат по одну сторону от плоскости трапеции, причем прямые PP' , QQ' , RR' , SS' перпендикулярны этой плоскости, $PP' = 1$, $QQ' = 7$, $RR' = 2$, $SS' = 1$. Точки K' и L' лежат на прямых $P'R'$

и $Q'S'$ соответственно. Найдите длину отрезка $K'L'$, если $P'K' : K'R' = 3:2$, $Q'L' : L'S' = 2:3$.

5. Найдите все действительные значения c , для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$

принадлежат интервалу $(-1; 2)$.

6. Вокруг треугольника MKN описана окружность с радиусом r и центром в точке O . Длина стороны NM равна a . Для сторон треугольника, выполнено соотношение $NK^2 - NM^2 = NM^2 - MK^2$. Найдите площадь треугольника OKL , где L — точка пересечения медиан треугольника MKN .

7. Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов A и B общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида A была больше цены одной акции вида B . К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый. Определите цену продажи одной акции видов A и B .

Вариант 12

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$|4x - |x - 2|| + 3| = 16.$$

2. Какое из двух чисел больше:

$$\frac{1}{2} \log_1 \left(\frac{2401}{36} \right) + 2 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \left(\frac{226\pi}{17} \right)?$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{4x+7} - 3x + 5}{16 - 3x^2 + 22x} \leq 0.$$

4. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 6x = \frac{1}{\sin 4x}$$

при $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$.

5. В треугольнике ABC длина биссектрисы AL равна l , в треугольнике ABL вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K , $BK = b$. На сторонах AB и BC в $\triangle ABC$ выбраны точки M и N соответственно, так что прямая MN проходит через центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, причем $MB + BN = c$. Найдите отношение площадей треугольников ABL и MBN .

6. Найдите все целые значения параметров a и b , при которых уравне-

ние

$$\arcsin \left(\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} \right) - b \cdot 2^{\sin(\pi bx)} - \left[\arcsin \left(\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} \right) + b \cdot 2^{\sin(\pi bx)} \right] = 2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

Вариант 13

(социологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x-3}{3x} \geq \frac{1}{2}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2(x^2 - 5) = \frac{3}{2} \log_{\sqrt{8}}(1 - x).$$

3. 9 % коренного населения города N в зимний период занято народным промыслом. Летом 36 % коренного населения уезжает из города, но общая численность населения за счет приезжающих туристов составляет $4/5$ от численности в зимний период. Определите, какая часть от общей численности населения в летний период занята народным промыслом, если среди коренного населения доля занятых народным промыслом осталась такой же, как в зимний период.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина стороны AD равна 4, длина стороны CD равна 7, косинус угла ADC равен $\frac{1}{2}$, синус угла BCA равен $\frac{1}{3}$. Найдите сторону BC , если известно, что окружность, описанная около треугольника ABC , проходит также и через точку D .

5. Найдите все натуральные значения параметра n , при каждом из которых задача «Найти арифметическую прогрессию, если известны ее семнадцатый член и сумма n первых членов» не имеет решений или ее решением является бесконечное множество арифметических прогрессий.

6. Две кривые на плоскости $(x; y)$, заданные уравнениями

$$y = x^2 - 2x \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{9} + y = 1,$$

пересекаются в четырех точках. Докажите, что

1) существуют по крайней мере две различные параболы, каждая из которых проходит через эти четыре точки;

2) эти четыре точки лежат на одной окружности, и найдите радиус этой окружности.

Вариант 14

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 6x = 1.$$

2. Решите уравнение

$$2^{-2x^2+1} - 12 \cdot 2^{-x^2} + 5 = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{3|x| - 11}{x - 3} > \frac{3x + 14}{6 - x}.$$

4. В треугольнике ABC известны стороны $BC = AC = 12$, $AB = 6$; AD — биссектриса. Найдите радиус R окружности, описанной около треугольника ADC . Выясните, что больше: R или 6,5.

5. Решите неравенство

$$\log_{2x-3}(\sqrt{x+2} + x - 3) \leq 1.$$

6. При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного (неверного) произведения на меньший сомножитель получилось в частном 90 и в остатке 29. Найдите эти числа.

7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - \\ - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Снаряд, вылетев из пушки со скоростью v под углом α к горизонту, разорвался на две равные части в верхней точке траектории. Первая часть полетела вертикально вверх, а скорость второй части оказалась в n раз больше скорости первой. Найдите расстояние между осколками через время τ после разрыва, если к этому моменту еще ни один осколок не долетел до земли.

2. Шарик массой m прикреплен двумя невесомыми нерастяжимыми нитями длиной L каждая к горизонтальной штанге, симметрично закрепленной на вертикальной оси, вращающейся с угловой скоростью ω (рис.1). Угол между нитями α . Найдите силы натяжения нитей.

3. Из листовой резины склеили трубку радиусом r и, заткнув один конец, стали надувать ее воздухом. Когда давление внутри трубки превысило атмос-

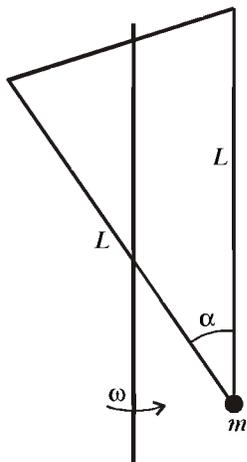


Рис. 1

ферное на Δp , ее радиус увеличился на Δr . Найдите период малых вертикальных колебаний груза массой m , подвешенного на полоске этой резины длиной L и шириной b . Считать, что при деформациях резина подчиняется закону Гука, а ее масса значительно меньше m .

4. С молекул гелия проводят циклический процесс, состоящий из четырех участков. На первом и втором участках газ охлаждают так, что его плотность остается неизменной на первом участке и увеличивается обратно пропорционально температуре на втором. Затем газ возвращают в исходное состояние, нагревая его сначала при неизменной плотности, а затем так, что его плотность изменяется обратно пропорционально температуре. Найдите количество теплоты, полученное газом на последнем участке, если на втором участке его температура уменьшилась в k раз, а в исходном состоянии была равна T_1 .

5. КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно $1-2-3-4-1$, равен η_1 . В точке 1 температура и давление рабочего вещества – идеального газа – максимальны. Если бы изменение состояния газа от точки 2 до точки 4 происходило так, что на pV -диаграмме этот участок имел бы вид отрезка прямой, а от точки 1 к точке 2 и от точки 4 к точке 1 – как и в цикле Карно, то КПД машины был бы η_2 . Найдите КПД машины при изменении состояния газа по циклу $2-3-4-2$, считая, что участок $4-2$ – такой же, как и в предыдущем цикле, а два других соответствуют участкам цикла Карно.

6. На концах невесомого непроводящего стержня длиной L закреплены два небольших шарика. Каждый шарик имеет массу m и заряд q . Стержень может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей перпендикулярно стержню на расстоянии b от его конца, и находится в положении

устойчивого равновесия в однородном горизонтальном электрическом поле с напряженностью E . Найдите скорость шарика, удаленного от оси на расстояние b , в момент прохождения положения равновесия после отклонения стержня от исходного положения на угол α .

7. Первоначально в схеме, показанной на рисунке 2, ключ K находился в положении 1, а оба конденсатора были разряжены. Ключ перевели в положение 2, потом в положение 1 и вновь вернули в положение 2. Найдите отношение количества теплоты, выделившихся

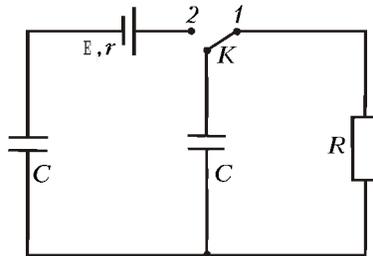


Рис. 2

внутри источника после первого и второго переключений ключа в положение 2, если в каждом положении ключ находился достаточно долго, а емкости обоих конденсаторов одинаковы.

8. При длительной зарядке аккумулятора от источника постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 5$ В скорость выделения водорода устанавливается равной $m = 0,2$ г/ч. При этом внутреннее сопротивление аккумулятора таково, что источник отдает ему максимальную мощность. Найдите внутреннее сопротивление источника, если ЭДС аккумулятора $\mathcal{E}_a < \mathcal{E} / 2$.

9. Обмотка массивного ротора электродвигателя сделана в виде прямоугольной рамки площадью S из N витков тонкого провода. Концы обмотки замкнуты между собой, а ее сопротивление равно R . Обмотки статора двигателя питаются переменным током и создают в роторе однородное магнитное поле, вектор индукции B которого перпендикулярен оси ротора и вращается вокруг нее с угловой скоростью Ω . Найдите средний тормозящий момент внешних сил, действующих на ротор, если его угловая скорость почти постоянна и равна ω , причем $\omega < \Omega$.

10. Плосковыпуклую линзу, лежащую выпуклой стороной на стеклянной пластинке, освещают нормально падающим параллельным пучком света, импульс фотона которого равен импульсу электрона, движущегося со скоростью $v = 0,5$ км/с. Найдите радиус k -го ($k = 2$) светлого кольца Ньютона

при наблюдении в отраженном свете, если радиус кривизны линзы $R = 0,5$ м.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Автомобиль, движущийся по горизонтальной дороге, попадает в полосу дождя, капли которого падают на землю вертикально с постоянной скоростью. Известно, что при скорости автомобиля $v_1 = 36$ км/ч в его наклонное лобовое стекло падает $n_1 = 200$ дождевых капель в секунду, а при скорости $v_2 = 72$ км/ч это число возрастает до $n_2 = 300$ капель в секунду. Сколько капель будет падать в лобовое стекло за 1 секунду, если автомобиль остановится?

2. Колесо катится без проскальзывания по ленте транспортера, движущейся горизонтально со скоростью $v_0 = 1$ м/с, в направлении движения ленты (рис.3). Известно, что относительно неподвижного наблюдателя скорость

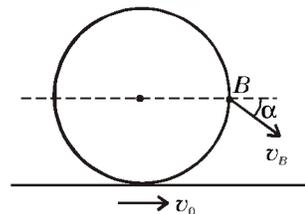


Рис. 3

\vec{v}_B точки B , находящейся на ободу колеса на его горизонтальном диаметре, составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Найдите скорость центра колеса относительно неподвижного наблюдателя.

3. Известно, что в некоторой точке траектории тела, брошенного с земли под углом α к горизонту, кинетическая энергия тела равна его потенциальной энергии, отсчитываемой от этой же поверхности. Какой угол составляет с горизонтом скорость тела в этой точке? Ответ получите в общем виде, численный расчет проведите при $\alpha = 45^\circ$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Два небольших тела, находящиеся на концах горизонтального диаметра гладкой полусферы радиусом $R = 20$ см, соскальзывают без начальных скоростей навстречу друг другу (рис.4).

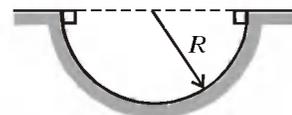


Рис. 4

При столкновении тела слипаются и далее движутся как одно целое. Найдите отношение масс тел, если максимальная высота над нижней точкой

полусферы, на которую поднимаются слипшиеся тела после столкновения, равна $h = 5$ см. Трение не учитывать.

5. Запаянная с одного конца трубка длиной $L = 110$ см погружается в воду в вертикальном положении открытым концом вниз. Определите давление воздуха внутри трубки, если ее верхний конец находится на уровне поверхности воды. Атмосферное давление $p_a = 10^5$ Па. Температуру воздуха в трубке считать постоянной, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с². Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

6. Одноатомный идеальный газ при давлении $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па и температуре $T_1 = 372$ К занимает объем $V_1 = 2$ м³. Газ сжимают без теплообмена с окружающей средой, совершая над ним работу $A = 35$ кДж. Найдите конечную температуру газа.

7. Два одинаковых маленьких шарика массами $m = 10$ г, заряженные одинаковыми зарядами $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл, закреплены на непроводящей нити, подвешенной на штативе (рис.5). При какой длине l отрезка нити между шариками оба отрезка нити (верхний и нижний) будут испытывать одинаковые натяжения? Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².

8. Две электроплитки, рассчитанные на напряжение $U = 120$ В, имеют при этом напряжении мощности $P_1 = 1$ кВт и $P_2 = 2$ кВт соответственно. Во сколько раз будут отличаться мощности, выделяющиеся в этих плитках, если их поочередно подключить к некоторому источнику с внутренним сопротивлением $r = 14,4$ Ом? Считать, что сопротивления плиток не зависят от температуры.

9. На водной поверхности бассейна глубиной $H = 2$ м плавает круглый плот радиусом $r = 1,5$ м. В центре пловта укреплен вертикальная мачта, на вершине которой подвешен фонарь. Определите высоту мачты, если известно, что радиус тени от пловта на дне бассейна равен $R = 2,1$ м. Показатель преломления воды $n = 1,33$. Фонарь считать точечным источником света.

10. Изображение предмета наблюдают на экране, расположенном на расстоянии $f = 5$ см от тонкой линзы, фокусное расстояние которой $F =$

$= 3,5$ см. Линзу смещают в направлении, перпендикулярном ее главной оптической оси, на $\Delta = 7$ мм. На какое расстояние сместится при этом изображение предмета?

Химический факультет

1. Два одинаковых алюминиевых шарика уравновешены на рычажных весах (рис.6). Расстояние от оси весов до

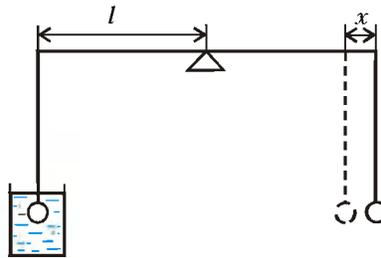


Рис. 6

точки подвеса $l = 10$ см. Один из шариков полностью погружают в воду. На какое расстояние x необходимо переместить точку подвеса другого шарика, чтобы равновесие сохранилось? Плотность алюминия $\rho_1 = 2,7$ г/см³, плотность воды $\rho_2 = 1$ г/см³.

2. Точка совершает гармонические колебания вдоль прямой линии. При движении между крайними положениями средняя скорость оказалась равной $v = 4$ м/с. Найдите максимальную скорость.

3. В узкой цилиндрической трубке, запаянной с одного конца, находится воздух, отделенной от наружного столбиком ртути. При горизонтальном положении трубки ртуть и воздух занимают по половине трубки. Если трубку осторожно повернуть открытым концом вниз, то выльется половина ртути. Найдите длину трубки. Температура постоянна. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность ртути $\rho = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м³. Поверхностное натяжение не учитывать.

4. При нагревании некоторого количества идеального газа его давление изменялось прямо пропорционально объему. На сколько градусов нагрели газ, если его объем увеличился в $k = 1,2$ раза? Начальная температура $t = 27$ °С. Масса газа постоянна.

5. Два гальванических элемента соединены по схеме, изображенной на рисунке 7, и имеют следующие характеристики: ЭДС $E_1 = 6$ В, $E_2 = 1,5$ В, внутреннее сопротивление $r_1 = 0,6$ Ом. При какой величине сопротивления R ток через второй элемент не идет?

6. Проволочное кольцо радиусом $r = 0,1$ м лежит на столе. Какой заряд протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Со-

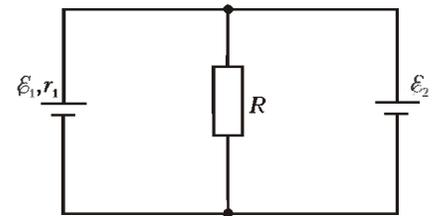


Рис. 7

противление кольца $R = 2$ Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл.

7. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0,2$ Гн и конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ. Конденсатор зарядили до напряжения $U_0 = 2$ В и замкнули цепь контура. Найдите силу тока в контуре в тот момент, когда энергия колебаний распределилась поровну между электрическим и магнитными полями. Затухание не учитывать.

8. Точечный источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 30$ см. На каком расстоянии от линзы нужно поместить плоское зеркало для того, чтобы лучи, отраженные от зеркала, вторично пройдя через линзу, стали параллельными?

9. Дифракционная решетка представляет собой пластинку шириной $l = 1$ см, на которую нанесено $N = 2500$ штрихов. На решетку падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Какое наибольшее количество максимумов может дать такая решетка (при нормальном падении света на нее)?

10. Катод фотоэлемента освещается ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda = 350$ нм. Для того чтобы фотоэлектроны не достигали анода, между анодом и катодом нужно приложить напряжение $U > 1,55$ В. Найдите работу выхода электронов из материала катода. Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Публикацию подготовили
В.Алексеев, Н.Григоренко,

Е.Григорьев, И.Ломов, Г.Медведев,
В.Папферов, В.Погожев,

А.Разгулин, И.Сергеев, В.Серов,
А.Склянкин, А.Соколин, В.Сушко,
В.Ушаков, М.Федотов,
А.Часовских, С.Чесноков, Б.Щедрин

ГАУССОВЫ СУММЫ

2. а) Сложите векторы рисунка 1, где $|\vec{OA}| = ax$, $|\vec{OB}| = bx$.
 б) Сложите векторы рисунка 2, где $|\vec{OA}| = ax$, $|\vec{OB}| = |\vec{OC}| = bx$.

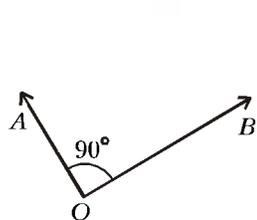


Рис. 1

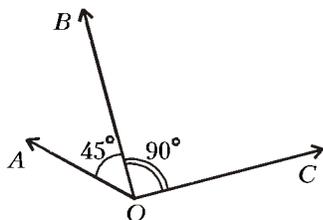


Рис. 2

5. $\sqrt{n/2} = \left| (1-\zeta)(1-\zeta^2) \dots (1-\zeta^{(n-2)/2}) \right|$.
 6. а) n ; б) $n^{n/2} \cdot R^{n(n-1)/2}$.
 7. В формулу (3) подставьте $n = 5$, $z = 2$. (Применив теорему косинусов, можно доказать, что $PB = \sqrt{6 - \sqrt{5}}$ и $PC = \sqrt{6 + \sqrt{5}}$.)
 8. а) $|1 - \zeta^k|$ — длина хорды, стягивающей дугу величиной $2\pi k/n$. Поэтому $|1 - \zeta^k| = 2 \sin(\pi k/n)$ (здесь $k = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$).
 б) $\sqrt{n}/2^{(n-1)/2}$

9. в) Поскольку $4 \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5}$, имеем $\sqrt{5} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{5} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} \right)$, откуда получаем представление

$$\sqrt{5} = \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) + \left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \right) + \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right) + \left(\cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} \right)$$

числа $\sqrt{5}$ в виде суммы корней 10-й степени из единицы.

10. а) $S_5 = 1 + 4 \cos \frac{2\pi}{5} = 1 + 4 \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}$.
 б) $S_7 = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^9 + \zeta^{16} + \zeta^{25} + \zeta^{36} = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^2 + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta = 1 + 2(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4)$. Вычислим сначала вещественную часть: $1 + 2 \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \cos \frac{8\pi}{7} = 1 + (\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7}) + (\cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7}) + (\cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}) = 0$, ибо сумма семи векторов рисунка 1 текста статьи равна нулю. Теперь вычислим мнимую часть: $2(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{6\pi}{7}) = 8 \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} \sin \frac{6\pi}{7} = \sqrt{7}$. Итак, $S_7 = i\sqrt{7}$.
 в) $S_8 = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^9 + \zeta^{16} + \zeta^{25} + \zeta^{36} + \zeta^{49} = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta + \zeta + 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta = 2 + 4\zeta + 2\zeta^4 = 4\zeta = 2\sqrt{2}(1+i)$; $S_9 = 3 + 2(\zeta + \zeta^4 + \zeta^7) = 3$; $S_{10} = 0$.

11. а) Если $n = 2m$, где m нечетно, то $\zeta^{(m+t)^2} = \zeta^{m^2 + 2mt + t^2} =$

$$= (\zeta^m)^m \cdot (\zeta^t)^t \cdot \zeta^{t^2} = (-1)^m \cdot \zeta^{t^2} = -\zeta^{t^2} \text{ при } t = 1, \dots, m.$$

- б) Обозначив $a = k - m$, получим

$$S_n \overline{S_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} \zeta^{k^2 - m^2} = \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} \zeta^{(a+m)^2 - m^2} = \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} \zeta^{a^2 + 2am} = \sum_{a=0}^{n-1} \zeta^{a^2} \sum_{m=0}^{n-1} \zeta^{2am}$$

При $a = 0$ или $a = n/2$ все n слагаемых суммы $\sum_{m=0}^{n-1} \zeta^{2am}$ равны 1. При всех остальных значениях a сумма $\sum_{m=0}^{n-1} \zeta^{2am}$ равна

0. Следовательно,

$$S_n \overline{S_n} = \left(1 + \zeta^{(n/2)^2} \right) n = 2n.$$

12. Поскольку $\bar{\zeta} = \zeta^{-1}$, сопряженное к S_p число есть сумма $\overline{S_p} = 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-4} + \dots + \zeta^{-(p-1)^2}$. Можно доказать две сформулированные ниже леммы. Из леммы 1 следует, что если простое число p имеет вид $p = 4k + 1$, где k — натуральное число, то последняя сумма отличается от суммы $S_p = 1 + \zeta + \zeta^4 + \dots + \zeta^{(p-1)^2}$ только порядком слагаемых, так что $\overline{S_p} = S_p$ и $S_p^2 = S_p \overline{S_p} = p$. А из леммы 2 следует, что если $p = 4k + 3$, то рассматриваемые суммы имеют только одно общее слагаемое — число 1. При этом $S_p + \overline{S_p} = 2(1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{p-1}) = 0$, так что $S_p^2 = S_p \cdot (-\overline{S_p}) = -p$.

Лемма 1. Для простого $p = 4k + 1$ существует такое целое число x , что $x^2 + 1$ кратно p . (Другими словами, -1 является квадратичным вычетом по простому модулю $p = 4k + 1$.)

Лемма 2. Для простого $p = 4k + 3$ сравнению $x^2 \equiv -y^2 \pmod{p}$ удовлетворяют только кратные числу p целые числа x, y . (В частности, -1 не является квадратичным вычетом по простому модулю $p = 4k + 3$.)

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6—8»

(с.м. «Квант» № 4 за 1998 г.)

1. *Ответ:* да, существует. Если $ABCDE$ — правильный пятиугольник, то требуемым свойством обладает, например, четырехугольник $ABCD$.

2. Нетрудно заметить, что точки P и Q симметричны относительно центра O параллелограмма (рис.3). Из равенства площадей треугольников PBM и QOM , а также равенства площадей треугольников QCM и QOM , с учетом равенства площадей треугольников POM и QOM , следует требуемое равенство площадей треугольников PBM и QCM .

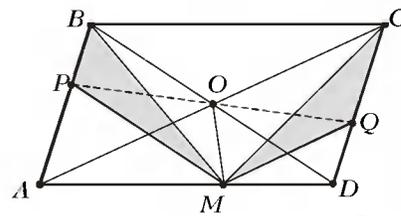


Рис. 3

3. *Ответ:* нет. Сумма двух чисел делится на 3, если либо оба числа делятся на 3, либо одно из них при делении на 3 дает остаток 1, а другое — остаток 2. Все числа, написанные на квадратах, разобьем на три группы:
 1) делящиеся на 3;
 2) дающие при делении на 3 остаток 1;
 3) дающие при делении на 3 остаток 2.
 В каждой группе по 8 чисел, и мы можем считать, что у нас имеется 8 «единиц», 8 «двоек» и 8 «троек».

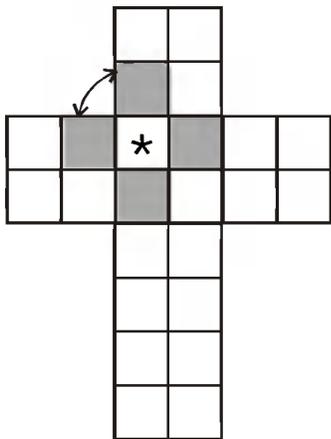


Рис. 4

Теперь рассмотрим развертку нашего куба (рис. 4). В выделенных клетках стоят числа одного типа, зависящего только от того, какого типа число стоит вместо звездочки. Но две из выделенных клеток имеют общую сторону, значит, и сумма чисел в этих клетках должна делиться на 3. Это возможно лишь в том случае, когда числа в выделенных клетках – «тройки», но тогда и звездочка – это «тройка», и, как легко видеть, вся развертка должна быть заполнена «тройками». Но «троек» не хватает – их всего 8.

4. а) Легко проверить, что числа 131052, 131053, 131054, 131055, 131056 удовлетворяют условию задачи.

б) Докажем, что каждое из $1300\dots01052$, $1300\dots01053$,

$1300\dots01054$, $1300\dots01055$, $1300\dots01056$ делится на сумму своих цифр при любом целом неотрицательном n (в частности, при $n = 332$ отсюда будет следовать утвердительный ответ на пункт б) задачи). Сумма цифр числа $1300\dots01052$ делится на 3, а само число делится на 4, следовательно, оно делится и на 12 – сумму своих цифр. Аналогично проверяется делимость числа $1300\dots01055$ на сумму своих цифр – число 15.

Из разложений

$$1300\dots01056 = 16 \cdot (13 \cdot 10^{6n} \cdot 5^4 + 66),$$

$$1300\dots01053 = 13 \cdot (13 \cdot 10^{6n+4} + 81)$$

следует, что каждое из данных чисел делится на сумму своих цифр (соответственно на 16 и 13). Четное число $1300\dots01054$ делится на 7 – в этом можно убедиться, например, применив процесс деления «уголком», – следовательно, оно делится и на сумму своих цифр (число 14).

5. Однозначные квадраты 1, 4, 9 взаимно просты, поэтому в искомом наборе не может быть более одного однозначного квадрата. Среди двузначных квадратов существует не более двух квадратов с различными цифрами, имеющих отличный от 1 общий делитель, – это числа 36 и 81. Таким образом, в искомом наборе могут быть лишь следующие комплекты чисел:

одно четырехзначное, два двузначных, одно однозначное; два трехзначных, одно двузначное, одно однозначное.

В первом случае четырехзначный квадрат должен быть образован цифрами 2, 4, 5, 7, но таких квадратов не существует (см. таблицу квадратов).

Рассмотрим второй случай. Если однозначный квадрат равен 4, то двузначное число должно выбираться среди чисел 16, 36, 64 – в любом из них присутствует цифра 6. Но среди четных трехзначных квадратов с различными цифрами 196, 256, 324, 576, 784 присутствует либо цифра 4, либо цифра 6. Следовательно, и этот случай невозможен. Если же однозначный квадрат равен 9, то двузначный квадрат может быть либо 36, либо 81. Привлекая таблицу квадратов, находим единственно возможный набор: 9, 81, 324, 576.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Стержень, отбрасывающий тень, должен быть направлен к Северному полюсу мира (в северном полушарии).
2. Нет – с понижением уровня чернил в капельнице промежуток времени между моментами падения капель увеличатся.
3. Катера подойдут к плоту одновременно.
4. Точка пересечения графиков означает, что в этот момент времени тела имеют одинаковые по модулю скорости. Определить, когда тела встретятся, по этим графикам невозможно.
5. Пути, пройденные шариками, равны, а средняя скорость у второго шарика больше; следовательно, он быстрее достигнет точки B.
6. Движение вагона не влияет на характер движения тела по вертикали, поэтому во всех трех случаях тело будет падать в течение одного и того же времени.
7. Если учесть сопротивление воздуха, то вертикальная составляющая ускорения тела на любой высоте при подъеме больше, чем при спуске. Значит, время подъема будет меньше времени спуска.
8. Когда муха перелетает вверх, дно пробирки несколько опускается относительно центра масс системы «пробирка – муха», движущегося с ускорением свободного падения. Таким образом, дно пробирки ударится о землю быстрее, чем в том случае, когда муха будет оставаться неподвижной.
9. И земля, и канат действуют на обоих гимнастов одинаковым образом; следовательно, гимнасты достигнут блока одновременно.
10. Не зависит, поскольку уменьшение веса песка компенсируется силой, с которой сыпавшийся песок ударяет о дношко.
11. Длительное действие остановившегося мальчика вызвало большую деформацию льда.
12. Период колебаний маятника станет бесконечно большим; иначе говоря, с наступлением невесомости колебания прекратятся.
13. Период колебаний груза уменьшится вдвое, так как жесткость шнура возрастет в четыре раза.
14. Чтобы измерить время между излучением и приемом отраженной от цели волны.
15. Молния имеет значительные размеры, звук от более удаленных ее участков запаздывает и растягивается во времени. Скорость же света так велика, что его запаздывание незаметно, и сверканье молнии ощущается как одна вспышка.

Микроопыт

Поскольку уменьшается длина подвеса груза, период колебаний уменьшается.

ВПИСАННЫЕ МНОГУГОЛЬНИКИ

2. Точка пересечения прямых, выбранная точка и основания перпендикуляров лежат на одной окружности.
4. У квадратного уравнения только два корня.
5. Разложите какое-нибудь число на множители разными способами.
7. Вдохновившись равенствами $1 \cdot xy = x \cdot y = y \cdot x$, домножим числа 1, x , y на сумму $xy + y + x$, а числа xy , y , x – на сумму $1 + x + y$. Получим набор чисел $a = xy + y + x$, $b = x(xy + y + x)$, $c = y(xy + y + x)$, $d = xy(1 + x + y)$, $e = y(1 + x + y)$, $f = x(1 + x + y)$, удовлетворяющий системе (2) статьи.
9. Заномеруем вершины 1998-угольника по кругу. Поскольку отрезки не пересекаются, с любой стороны от любого из них должно лежать четное число вершин. Тогда каждый отрезок соединяет вершину с четным номером с вершиной, номер которой нечетен. Нарисуем стрелки так, чтобы полученные векторы вели из нечетных вершин в четные. Каждый вектор ра-

вен разности двух векторов, ведущих из центра многоугольника в соответствующие вершины. Поэтому сумма всех 999 векторов равна разности суммы векторов, ведущих из центра в четные вершины, и аналогичной суммы для нечетных вершин. Четные и нечетные вершины по отдельности образуют правильные 999-угольники, а сумма векторов, ведущих из центра правильного многоугольника в его вершины, равна нулю (так как она не меняется при повороте на угол $2\pi/999$). Значит, сумма векторов, нарисованных на отрезках, равна нулю как разность двух нулевых векторов.

10. Сумма векторов с началом в точке P и концами в вершинах n -угольника равна

$$\begin{aligned} \vec{PA}_1 + \vec{PA}_2 + \dots + \vec{PA}_n &= (\vec{PO} + \vec{OA}_1) + \\ &+ (\vec{PO} + \vec{OA}_2) + \dots + (\vec{PO} + \vec{OA}_n) = \\ &= n\vec{PO} + (\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n) = n\vec{PO}. \end{aligned}$$

13. в) $PA_1 + PA_5 + PA_9 = PA_3 + PA_7 + PA_{11}$ и $PA_2 + PA_6 + PA_{10} = PA_4 + PA_8 + PA_{12}$.

14. Сложив равенства

$$\begin{aligned} AX \cdot BC + CX \cdot AB &= BX \cdot AC, \\ CX \cdot BD &= BX \cdot CD + DX \cdot BC, \\ CX \cdot DE + EX \cdot CD &= DX \cdot CE, \\ AX \cdot DE + EX \cdot AD &= DX \cdot AE, \\ AX \cdot BE + EX \cdot AB &= BX \cdot AE, \end{aligned}$$

получим

$$AX(2a+d) + CX(2a+d) + EX(2a+d) = BX(2a+d) + DX(2a+d)$$

где a – сторона пятиугольника, d – его диагональ. Разделив на $2a+d$, получим утверждение задачи 3.

ВОЛШЕБНАЯ ЛИНЗА

1. $CF_1 = R/(n-1)$.

3. $F = \frac{R(2n_2 - n_1)}{2(n_1 - n_2)n_2}$, при $2n_2 < n_1$ фокус находится внутри шара.

4. Многим сразу приходит на ум использовать для этой цели дополнительно сильную рассеивающую линзу, расположив ее соосно с исследуемой линзой на небольшом расстоянии от ее поверхности. Как и в случае с водой, предмет, находящийся в фокусе «волшебной» линзы, становится хорошо наблюдаемым. Это верное решение. Однако можно с успехом воспользоваться также и короткофокусной собирающей линзой. Только в этом случае изображение объекта будет перевернутым.

5. Оргстекло (плексиглас, полиметилметакрилат) – материал, плохо смачиваемый водой. Поэтому требуется создать избыточное давление порядка $\Delta p = \sigma/d$, чтобы «загнать» воду в узкий зазор со стенками из оргстекла (здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения, d – величина воздушного зазора).

ОБ АМПЛИТУДАХ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИН

1. Амплитуда колебаний скорости будет максимальной, если действие силы прекращается в момент прохождения грузом смещенного положения равновесия $\Delta L = F/k$, т.е. $\tau = T/4 + nT/2 = (0.052 + n \cdot 0.1)$ с, где $n = 1, 2, 3, \dots$ и $T = 2\pi\sqrt{m/k} \approx 0,21$ с.

2. $V = \frac{m_1 \cdot 2\pi X}{m_2 \cdot T}$. 3. $m_2 = \frac{4\pi^2 X}{T^2 g} m_1$.

4. $T = 2\pi\sqrt{\frac{100\% \cdot 3\Delta L}{\delta g}} \approx 2,6$ с. 5. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 L}{m_1 + m_2 g}}$.

6. $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \approx 1,18 \cdot 10^{14}$ с⁻¹, где $k = 2 \frac{U(r) - U(r_0)}{(r - r_0)^2}$, $r_0 = 0,11$ нм; $X_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3h\omega}{2\pi k}} \approx 0,76 \cdot 10^{-11}$ м.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\pm \frac{11\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4t^2 + 2(\sqrt{3} + 1)t + \sqrt{3} = 0, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0, \\ t = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

2. $(-4; 1) \cup (1; 5/3) \cup (5/3; 11)$. *Указание.* Поскольку выражение $|a| - |b|$ имеет тот же знак, что и $a^2 - b^2$, а знак выражения $\log_2 u - \log_2 v$ совпадает со знаком $u - v$ при $u > 0$ и $v > 0$, неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{(2x+8) - (13-x)}{(x^2+2x-3)^2 - (2x^2-10x+8)^2} \geq 0, \\ 2x+8 > 0, \\ 13-x > 0. \end{cases}$$

3. 22. *Указание.* Пусть A' – точка, симметричная точке A относительно серединного перпендикуляра к отрезку BE , а D' – точка, симметричная точке D относительно серединного перпендикуляра к отрезку CE . Четырехугольник $A'B C D'$ – параллелограмм, точка E лежит на $A'D'$, а площадь его равна площади $AB C D E$.

4. $k \in \left[\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{3}}{2}; 1 \right]$. *Указание.* Система

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3} - \arcsin x, \\ y = -\frac{2}{3} - 2\arctg kx, \\ y > 0 \end{cases}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение $k \sin \alpha = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, где $\alpha = -y - \frac{2}{3}$, имеет решение на промежутке $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < -\frac{2}{3}$.

5. 5; 16/3. *Указание.* Поскольку центр сферы лежит в плоскости ABC , а плоскости DSB и ASC перпендикулярны плоскости ABC , $\angle DSB = \angle ASC = 90^\circ$. Треугольник ASC прямоугольный, поэтому $SC^2 = HC \cdot AC$. Пусть $SC = x$.

Тогда $AC = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + x^2}$ и $x^2 = 4\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + x^2}$, откуда $SC = 5$, $AC = \frac{25}{4}$, $AH = \frac{9}{4}$.

Из равенства $AB^2 = BS^2 = BH \cdot BD$ следует, что $\frac{AB}{BH} = \frac{BD}{AB}$, а это значит, что треугольники AHB и DAB подобны. Поэтому $\angle ADB = \angle BAC$. Но $\angle BAC = \angle CDB$ как вписанные углы, поэтому BD – биссектриса угла D . По свойству биссектрисы $CD = AD \cdot \frac{CH}{AH} = 16/\sqrt{3}$.

6. 2. Указание. После введения новых координат $z = y + x$, $a = y - x$ задача сводится к исследованию проекции параллельно прямой $a = \text{const}$ на прямую $z = 2$ множества, задаваемого неравенствами

$$a^2 z^2 + 6az - z^2 + 6z - a + 1 < 0, z > 1.$$

Но это равносильно исследованию разрешимости системы неравенств $(a^2 - 1)z^2 + 6(a+1)z - (a-1) < 0$, $z > 1$ в зависимости от параметра a , что в свою очередь равносильно отысканию всех значений a , при которых квадратный трехчлен $f(z) = (a^2 - 1)z^2 + 6(a+1)z - (a-1)$ имеет хотя бы один корень, больший единицы.

Вариант 2

1. $\left[3; \frac{11 + \sqrt{61}}{2}\right]$.

2. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

3. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. $\arccos \frac{3}{4}$. **Указание.** Пусть $FH = 2x$, $\angle BCA = \alpha$, FD – средняя линия треугольника ABC . Возможны 2 случая расположения точки H : на отрезке BE и на отрезке AE . Из теоремы синусов для треугольника FGH получим уравнение $2\sin 2\alpha = 3\sin \alpha$.

5. $\frac{9}{4} + 4n$, $n \in \mathbf{Z}$. **Указание.** Вычитая из первого уравнения системы второе, получим, что

$$(\cos \pi x y - 1)^2 + \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0,$$

откуда следует, что x и y – целые числа, причем одно из них четно. Кроме того, $x^2 + y^2 < 1 + 4\sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{4} - \frac{\pi}{16}\right) < 5$.

Поэтому решениями данной системы могут быть только пары $(0; 1)$, $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $(2; 0)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$, $(0; -2)$. А так как если (x_0, y_0) – решение, то $(-x_0, -y_0)$ – тоже решение, необходимо найти все α , при которых система имеет ровно два решения из четырех: $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(2; 0)$, $(0; 2)$.

6. 48. Указание. Пусть O – центр сферы. Докажите, что DO – перпендикуляр к плоскости ABC , пересекающий ее в точке E – центре вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите затем, что треугольники ADL , KDB и MDC – прямоугольные, и найдите их углы, после чего выразите через $DK = DM = DL = h$ полупериметр p и площадь S треугольника ABC . Далее, пользуясь формулой Герона и тем, что $S = rp$, где r – радиус вписанной в треугольник ABC окружности, выразите через h величину $ER = r$, а затем и $DE = H$ – высоту пирамиды. Теперь осталось из прямоугольного треугольника DKO найти h (по условию $OK = 3$), вычислить S , а затем и искомый объем.

Вариант 3

1. $\left(-\frac{9 + \sqrt{57}}{4}; -2\right) \cup (-2; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

2. $(-1; 0) \cup [1; 5)$.

3. $\pi \pm \arctg 2 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **Указание.** Поскольку $\cos x \neq 0$, разделив левую часть на $\cos^3 x$, получаем, что

$$\tg^3 x - \tg^2 x + 12 = 0 \text{ при } \sin x \geq 0 \text{ и}$$

$$\tg^3 x + \tg^2 x - 12 = 0 \text{ при } \sin x < 0.$$

Дальнейшее ясно.

4. 216. Указание. Пусть M – середина AB , L – основание перпендикуляра, опущенного из точки K на ребро SC . В треугольнике MSC точка D – основание высоты, $\angle SMD = \frac{\pi}{6}$; пусть $MD = x$, тогда $DC = 2x$. Выразите через x отрезки SK , SD , а затем из подобия треугольников SKL и SDC найдите x .

5. $(-\infty; -\sqrt{13}] \cup \left[\frac{11}{3}; \infty\right)$. **Указание.** Решения первого

неравенства образуют отрезок $-1 \leq y \leq 3$. Поскольку второе неравенство имеет вид $f(x) \geq g(y)$ (через f и g обозначены левая и правая части соответственно), задачу можно переформулировать так: при каких a наибольшее значение функции f не меньше наименьшего значения функции g . Пусть $t = \arcsin x$, тогда

$$f(x) = \sqrt{a^2 - 16 + h(t)}, \text{ где } h(t) = -\frac{4}{\pi^2} t^2 - \frac{2}{\pi} t + \frac{6}{\pi} |t|.$$

Нетрудно найти $\max_{-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}} h(t) = h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Поэтому

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = \sqrt{a^2 - 13}.$$

Минимум правой части зависит от положения вершины параболы $y_b = -a$ относительно отрезка $[-1; 3]$. Рассмотрим три возможных случая $y_b < -1$; $-1 \leq y_b \leq 3$ и $y_b \geq 3$, получаем ответ.

6. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$. **Решение.** Пусть AK , CL – высоты $\triangle ABC$;

N , E – точки пересечения прямой AO с BC и описанной окружностью (радиусом R) соответственно. Так как $AC < AD$, то $\angle ADC < \angle ACD < \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\triangle ADC$ – остроугольный, поэтому точка K лежит между D и C . Тогда из условия следует, что N лежит между B и D . $\angle CAH = \angle OAB = \alpha$ (так как $\angle ACB = \angle AEB$ – вписанные,

опирающиеся на одну дугу, и $\angle AKC = \angle ABE = \frac{\pi}{2}$). Так как AD – биссектриса, то $\angle KAD = \angle DAO = \beta$. Таким образом,

$$\angle CAB = 2\alpha + 2\beta; \angle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha; \angle CBA = \frac{\pi}{2} - \alpha - 2\beta.$$

Пусть M – точка, симметричная H относительно AB . Тогда M лежит на описанной окружности. Действительно, $\angle AHB = \angle AMB$, а $\angle AHB + \angle ACB = \pi$. Далее, $AH = AO$ (так как AD – биссектриса и медиана в $\triangle AHO$). Но $AH = AM$, значит, $AM = AO$. Следовательно, $AM = R$. Отсюда

$\angle ACM = \frac{\pi}{6}$ (как вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу). Так как $\triangle ACL$ – прямоугольный, $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$, то $\angle CAD = \frac{\pi}{6}$. По теореме косинусов из $\triangle ACD$:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

По теореме синусов для $\triangle ACD$:

$$\frac{CD}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{AC}{\sin \angle CDA},$$

откуда

$$\sin \angle CDA = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \left(= \cos \frac{\pi}{8} \right).$$

Значит, $\beta = \angle KAD = \frac{\pi}{8}$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{24}$. Поэтому $\angle CAB = \frac{5}{24} \cdot \pi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8}$, значит, $2R = \frac{AC}{\sin \angle CBA}$ и $R = \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8} \right)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

Вариант 4

1. $\frac{\pi}{2}(2n+1), \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$. 2. 4; 8. 3. $(-\infty; 3/2)$.

4. $\frac{b \sin \alpha \sin \beta}{3 \sin(\alpha + \beta)}$. 5. $(-1; 1)$.

6. $R^2 \cos \alpha (1 + \sin \alpha)$. *Указание.* Площадь четырехугольника удобно найти по формуле: «полупроизведение диагоналей на синус угла между ними». Угол между диагоналями AM и BN легко вычисляется через α , если заметить, что $OD \parallel BM$, где OD – радиус окружности с диаметром CB .

7. $(-\infty; \log_a \frac{5}{3-a})$ при $0 < a < 1$;

$(\log_a \frac{5}{3}; \log_a \frac{5}{3-a})$ при $1 < a < 3$;

$(\log_a \frac{5}{3}; +\infty)$ при $a \geq 3$.

8. $\frac{4 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$. *Указание.* Параллельный перенос одной из

диагоналей, например A_1B в положение A_2A , дает треугольник A_2C_1A с заданным углом α , все стороны которого выражаются через $x = AB = A_2A_1 = A_1C_1$, после чего x находится по теореме косинусов.

Вариант 5

1. 0. 2. $[-3; 1)$. 3. $(-1; 1; \pm 2)$. *Указание.* Приведите первое уравнение к виду $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 0$.

4. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$t^2 - (\cos 2x + \cos 6x)t + 1 = 0,$$

где $t = \sin x$. Его дискриминант $(\cos 2x + \cos 6x)^2 - 4 \geq 0$, откуда следует, что либо $\cos 2x + \cos 6x = 2$, либо $\cos 2x + \cos 6x = -2$. В первом случае $\sin x = 1$, но тогда $\cos 2x + \cos 6x = -2$ – противоречие. Во втором случае $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $\cos 2x + \cos 6x = -2$.

5. 27/4. *Решение.* По свойству пересекающихся хорд $CE \cdot ED = AE \cdot BE$, откуда $CE = 3$. Пусть O – центр окружности, а $\angle AOC = \alpha$. Тогда $\angle ACD = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CKB = \alpha$. Прямоугольные треугольники COK и

BOK равны. Поэтому $\angle OKB = \frac{1}{2} \angle CKB = \frac{\alpha}{2}$,

$\triangle ACE \sim \triangle OKB$ и $KB = \frac{OB}{AE} \cdot CE = 15$. Так как $CD \perp AB$, то

$CD \parallel KB$ и $\triangle AME \sim \triangle AKE$, откуда $ME = KB \cdot \frac{AE}{AB} = \frac{3}{2}$ и

$$S_{\triangle CKM} = \frac{1}{2} CM \cdot BE = \frac{27}{4}.$$

6. 1/4. *Указание.* После замены $y = 4x + 1$ уравнение приводится к виду

$$\log_5(y+3)(\log_2 y - \log_3(y+1)) = \log_3(y+1)(\log_5(y+3) - \log_4(y+2)). \quad (*)$$

Нетрудно видеть, что $y = 2$ – корень уравнения (*). Функция

$$f(y) = \log_2 y - \log_3(y+1) = \frac{\log_2 y (\log_2 3 - 1) - \log_2 \left(1 + \frac{1}{y}\right)}{\log_2 3}$$

является возрастающей как сумма двух возрастающих

функций ($\log_2 y$ возрастает, $-\log_2 \left(1 + \frac{1}{y}\right)$ – тоже возрастает). Следовательно, $f(y) < 0$ при $0 < y < 2$ и $f(y) > 0$ при $y > 2$.

Аналогично, функция

$$g(y) = \log_5(y+3) - \log_4(y+2)$$

– убывающая, обращаясь в нуль при $y = 2$, поэтому $g(y) > 0$ при $0 < y < 2$ и $g(y) < 0$ при $y > 2$.

Вариант 6

1. $\frac{2-7\sqrt{3}}{14\sqrt{3}+10}$. 2. $[-6; -1] \cup [0; +\infty)$.

3. $\pi n, -\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

4. 91/25. *Указание.* Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC , $\angle AOB = 135^\circ$, откуда $AB = 5$, радиус вписанной окружности $\frac{3}{5}$, периметр треугольника ABC равен $56/5$.

5. $t = 1; x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Первое неравенство приводится к виду

$$3(2^t - 2)^2 + 2\left(\sin 5x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0,$$

откуда $t = 1, \sin 5x = -\frac{1}{2}$.

Вариант 7

1. 7/9. 2. $-1/\sqrt{10}; |\cos \alpha/2|$.

3. $(-3; -2)\{-1\} \cup (0; 1)$. *Указание.* Выполните замену $t = |x+1|$ и примените метод интервалов.

4. $(-1; 1/\sqrt{3}), (3/2; 9)$.

5. 25/72. *Указание.* Часть куба, содержащая точку B_1 , – треугольная пирамида, от которой отрезаны «угловые тетраэдры». Считая, что ребро куба равно 1, найдите объемы упомянутых пирамид.

6. а) $|a| \leq \sqrt{26} + 1$; б) $|a| \leq \sqrt{26} - 1$. *Указание.* Преобразуем уравнение к виду

$$(5 + \cos b) \cos x + (1 + \sin b) \sin x = a,$$

или

$$\sqrt{27+10 \cos b} + 2 \sin b \sin(x+\varphi) = a,$$

где φ — вспомогательный угол; поскольку

$$5 \cos b + \sin b = \sqrt{26} \sin(b + \alpha),$$

где $\alpha = \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}}$, получаем уравнение

$$\sqrt{27 + 2\sqrt{26} \sin(b + \alpha)} \sin(x + \varphi) = a. \quad (*)$$

Поскольку $\sqrt{26} - 1 \leq \sqrt{27 + 2\sqrt{26} \sin(b + \alpha)} \leq \sqrt{26} + 1$, получаем, что при любом $|a| \leq \sqrt{26} + 1$ найдется b , при котором уравнение (*) имеет корни, а при $|a| \leq \sqrt{26} - 1$ это уравнение имеет корни при всех b .

Вариант 8

1. -1. 2. $\pm \sqrt{\frac{3}{2}}$; $\pm \sqrt{\frac{5}{2}}$.
3. $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{3}$, $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 6 + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.
4. 1000 л. 5. $(2; 19/9) \cup (3; 2 + \sqrt{3})$.
6. 319. *Указание.* Воспользуйтесь подобием треугольников PMS и RQM .
7. $(3; 2)$, $(-2; -3)$, $(3 + \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10})$, $(3 - \sqrt{10}; -3 - \sqrt{10})$.
8. $a = 0$, $a = 1$. *Указание.* Уравнение преобразуется к виду

$$|x - 2a| + \frac{1}{|x - 2a|} + (x - 1)^2 = 2,$$

откуда $|x - 2a| = 1$, $x = 1$.

Вариант 9

1. $(\frac{1}{3}; 3)$. 2. 2.
3. 3. 4. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Левая часть уравнения не превосходит 2, а правая — не меньше, чем 2. Поэтому $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$, $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = 0$.
5. $\sqrt{31}/6$.
6. $(15k^2 - 6k; 3k - 1)$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Из условия следует, что $3x = (y + 1)(5y - 1)$. Поэтому либо $y + 1$, либо $5y - 1 = 5(y + 1) - 6$ делится на 3. Отсюда следует, что $y = 3k - 1$, $k \in \mathbf{Z}$.

Вариант 10

1. $[-3; 1)$. 2. $AB = AC = 2\sqrt{10}$. 3. $\sqrt{3} - 2$.
4. а) И; б) Р. *Указание.* а) Выпишите последовательность букв, удовлетворяющую указанному правилу, и подсчитайте, какая из них чаще других встречается в периоде. б) Пусть a и b — цифры, с помощью которых записывается порядковый номер ab этой буквы. Цикл состоит из одной буквы, если и только если $2(a + b) = 10a + b$, т.е. $b = 8a$, откуда $a = 1$, $b = 8$.
5. 0. *Указание.* Левая часть неравенства не меньше двух. Правая — не больше двух, причем равенство достигается лишь при $x = 0$.
6. $(1; 5)$. *Указание.* Система $\sin(x + 6) = 0$, $\sin \pi x = 0$ имеет единственное решение $x = -6$. Поэтому мы должны найти такие a , при которых уравнение не имеет других решений. Разделив уравнение на $\sin^2 \pi x$ и выполнив замену $t = \frac{\sin(x + 6)}{\sin \pi x}$, получим

$$t^2 - (a - 1)t + (a - 1) = 0. \quad (*)$$

Уравнение (*) не имеет корней при $1 < a < 5$, при этом исходное уравнение имеет единственное решение $x = -6$. При

остальных значениях a уравнение имеет бесконечно много решений (докажите это).

Вариант 11

1. $x \in (\frac{1}{4}; 3) \cup [\frac{\sqrt{41} + 7}{4}; \frac{7}{2})$.
2. $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $\pi - \arcsin \frac{\sqrt{37} - 1}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
3. $(17; 248)$. *Указание.* Выполните замену $p = \sqrt{x + 8}$.
4. Пусть $K'L' = l$. В зависимости от положения точек K' и L' возможны случаи
 а) $l = \sqrt{10}$, если $K' \in [P'R']$, $L' \in [Q'S']$;
 б) $l = \sqrt{346}$, если $K \notin [P'R']$, $L' \notin [Q'S']$;
 в) $l \in (\frac{\sqrt{634}}{5}; +\infty)$, если $K \notin [P'R']$, $L' \in [Q'S']$;
 г) $l \in (\frac{\sqrt{8194}}{5}; +\infty)$, если $K' \in [P'R']$, $L' \notin [Q'S']$.
5. $c \in (3 - 2\sqrt{3}; -6 + 2\sqrt{15})$. 6. $\frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{r^2 - a^2/3}$.
7. 426 р. и 142 р. *Решение.* Обозначим через x , y , z количества акций вида A в начале дня у первого, второго и третьего брокера соответственно, а через p и q — цены на акции видов A и B . Тогда из условия задачи следуют уравнения

$$\begin{cases} px + q(11 - x) = 4402, & (p - q)x + 11q = 4402, \\ py + q(21 - y) = 4402, & (p - q)y + 21q = 4402, \\ pz + q(29 - z) = 4402, & (p - q)z + 29q = 4402. \end{cases}$$

Вычитая третье уравнение из первого и второго, получаем

$$(p - q)(x - z) = 18q, \quad (p - q)(y - z) = 8q. \quad (**)$$

Поскольку по условию $p > q > 0$, то $x - z > 0$ и $y - z > 0$. После деления уравнений в (**) имеем

$$\frac{x - z}{y - z} = \frac{9}{4}.$$

Используя целочисленность переменных, получаем $x = z + 9n$, $y = z + 4n$, где $n \in \mathbf{N}$. Так как $11 > x = z + 9n > z > 0$, то $z = 1$, $n = 1$. Поэтому $x = 10$, $y = 5$. Обращаясь к исходной системе, находим $p = 426$, $q = 142$.

Вариант 12

1. $(-17/5; 11/3)$. 2. $\operatorname{tg} \frac{226\pi}{17}$. 3. $[-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}] \cup [\frac{17 + \sqrt{117}}{9}; 8)$.
4. $\frac{\pi}{8}(2n + 1)$, $n = -1, 0, 1, 2$; $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{10}k$, $k = 1, 2, 3, 4$.
5. $\frac{2b + l}{c}$. *Указание.* Пусть BO — биссектриса угла B в треугольнике ABL , а $\angle ABO = \angle LBO = \beta$. Тогда

$$\frac{1}{2} AB \cdot BL \sin 2\beta = S_{ABL} = S_{ABO} + S_{LBO} = \frac{1}{2} AB \cdot BO \sin \beta + \frac{1}{2} BL \cdot BO \sin \beta = \frac{1}{2} (AB + BL) \cdot BO \sin \beta,$$

откуда

$$\frac{AB \cdot BL}{AB + BL} = \frac{BO}{2 \cos \beta}.$$

Аналогично, из треугольника MBN имеем

$$\frac{MB \cdot BN}{MB + BN} = \frac{BO}{2 \cos \beta},$$

но тогда

$$\frac{S_{ABL}}{S_{MBN}} = \frac{AB \cdot BL}{MB \cdot BN} = \frac{MB + BN}{AB + BL} = \frac{c}{2b + l},$$

так как из свойств касательных к окружности, вписанной в треугольник ABL , следует равенство

$$AB + BL = 2 \cdot BK + AL = 2b + l.$$

6. $a = -1$, $b \geq 3$, $b \in \mathbf{N}$; $a = -2$, $b \geq 4$, $b \in \mathbf{N}$.

Указание. Перепишем уравнение так:

$$u + v - |u - v| = 2ab,$$

где $u = \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}$, $v = -b \cdot 2^{\sin \pi b x}$. Если $b > 0$, то $u > v$ и мы получаем уравнение

$$-b \cdot 2^{\sin \pi b x} = ab,$$

откуда либо $a = -1$, либо $a = -2$. В первом случае $\sin \pi b x = 0$, т.е. $x = \frac{n}{b}$, $n \in \mathbf{Z}$. При этом должно быть $|x| \leq b$, или $|n| \leq b^2$. Последнее неравенство имеет больше 10 решений, если $b \geq 3$, и меньше 10, если $b \leq 2$. Аналогично, при $a = -2$ получаем, что $b \geq 4$.

При $b < 0$ получается уравнение

$$\arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} = ab,$$

имеющее не больше двух решений при любых a и b .

Вариант 13

1. $[-6; 0)$. 2. -3 . 3. $7,2\%$.

4. $\frac{\sqrt{37}(2\sqrt{6} - 1)}{3\sqrt{3}}$. Указание. Докажите, что $\angle BCA$ – острый,

найдите AC из треугольника ADC , затем синус угла BAC , а затем и BC .

5. 33. Указание. Пусть a – первый член, а d – разность прогрессии. Если $a_{17} = u$, $S_n = v$, получаем систему

$$\begin{cases} a + 16d = u, \\ na + \frac{n(n-1)}{2}d = v. \end{cases}$$

Эта система неразрешима или имеет бесконечное число решений тогда и только тогда, когда

$$\frac{n(n-1)}{2} - 16n = 0.$$

6. Указание. а) Это параболы

$$x = -\frac{9}{2}y^2 - y + 9 \text{ и } y = x^2 - 2x.$$

б) Умножив первое уравнение на $8/9$ и сложив его со вторым уравнением, получим после преобразований уравнение окружности радиусом $\sqrt{161/9}$:

$$\left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{161}{81}.$$

Вариант 14

1. $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. $\pm \sqrt{\log_2 \frac{6 + \sqrt{26}}{5}}$.

3. $(-2; 2) \cup (2; 3) \cup (6; +\infty)$. 4. $8\sqrt{\frac{2}{3}} > 6,5$. 5. $\left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

6. 49 и 83. Указание. Пусть $m, n \in \mathbf{N}$ – искомые числа. По

условию задачи

$$mn + 372 = 90n + 29, \text{ т.е. } n(90 - m) = 7^3,$$

причем $29 < n < m < 90$. Поэтому числа n и $90 - m$ являются делителями числа 343, что приводит к единственной возможности:

$$\begin{cases} n = 49, \\ 90 - m = 7. \end{cases}$$

7. $a = 2$. Указание. Пусть $z = x^2$. Рассмотрим уравнение

$$z^2 - (a-1)(a+3)z + (a-1)(a+1)(a-2)(a+4) = 0.$$

Система имеет 3 решения, если это уравнение имеет корни $z_1 = 0$, $z_2 > 0$. Но тогда

$$(a-1)(a+1)(a-2)(a+4) = 0; \quad (a-1)(a+3) > 0.$$

ФИЗИКА

Физический факультет

1. При решении задачи будем, как обычно, пренебрегать влиянием воздуха на движение снаряда и его частей. Используем декартову систему координат, направив ось Ox вдоль горизонтальной составляющей начальной скорости снаряда, а ось Oy – вертикально вверх. Обозначим скорости частей снаряда сразу после взрыва \vec{u}_1 и \vec{u}_2 . Поскольку первая часть снаряда полетела вертикально, горизонтальная составляющая ее скорости сразу после взрыва равна нулю: $u_{1x} = 0$. Пренебрегая импульсом сил тяжести за время взрыва и массой створившей при взрыве части снаряда, на основании закона сохранения импульса получим, что горизонтальная составляющая второго осколка сразу после взрыва составляет $u_{2x} = 2v \cos \alpha$ (при этом было учтено, что снаряд разорвался на две равные части). Поскольку взрыв снаряда произошел в верхней точке траектории, согласно закону сохранения импульса, вертикальные составляющие скоростей осколков должны удовлетворять соотношению $u_{1y} + u_{2y} = 0$. Учитывая,

что $u_2 = m_1$, $u_1 = u_{1y}$ и $u_2 = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2}$, из составленных уравнений находим скорость первого осколка сразу после взрыва: $u_1 = (2v \cos \alpha) / \sqrt{n^2 - 1}$. После взрыва оба осколка совершают свободное падение; следовательно, один осколок относительно другого движется с неизменной скоростью, а потому искомое расстояние равно $L(\tau) = u_{\text{отн}} \tau$, где $\vec{u}_{\text{отн}} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$. После алгебраических преобразований получим

$$L(\tau) = \tau \sqrt{(2v \cos \alpha)^2 + (2u_1)^2} = 2v\tau \sqrt{\frac{n^2 + 3}{n^2 - 1}} \cos \alpha.$$

2. На рисунке 5 показаны силы, действующие на шарик: силы натяжения нитей \vec{T}_1 и \vec{T}_2 и сила тяжести $m\vec{g}$. При этом, как обычно, мы пренебрегли силами, действующими на шарик со стороны воздуха. Обозначим угол между плоскостью, в которой располагаются нити, и осью вращения через φ . Поскольку ось вращается равномерно, траектория шарика имеет вид окружности, расположенной в горизонтальной плоскости. Учитывая, что шарик подвешен на одинаковых нитях, прикрепленных симметрично к горизонтальной штанге, можно показать, что радиус этой окружности равен $r = L \cos(\alpha/2) \sin \varphi$. Поскольку нити расположены симметрично, их силы натяжения равны по модулю: $T_1 = T_2 = T$. В соответствии со вторым законом Ньютона, запишем уравнения движения шарика в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$ma = m\omega^2 r = 2T \cos(\alpha/2) \sin \varphi, \quad 0 = mg - 2T \cos(\alpha/2) \cos \varphi.$$

Сила натяжения нитей при любых угловых скоростях враще-

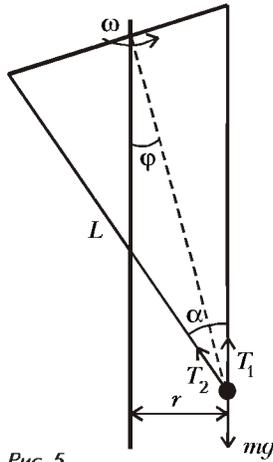


Рис. 5

ния оси должна удовлетворять неравенству

$$T \geq \frac{mg}{2 \cos(\alpha/2)},$$

поэтому при

$$\omega^2 \leq \omega_{\text{кр}}^2 = \frac{g}{L \cos(\alpha/2)}$$

отклонение от вертикали плоскости, в которой лежат нити, должно быть равно нулю и, следовательно,

$$T = \frac{mg}{2 \cos(\alpha/2)}.$$

Если же $\omega > \omega_{\text{кр}}$, то $\varphi \neq 0$ и

$$T = \frac{m\omega^2 L}{2}.$$

3. Если пренебречь затуханием, то уравнение движения груза в проекциях на ось OX, направленную вертикально вниз, можно записать в виде

$$mx'' = -k(x_0 + x) + mg,$$

где k – жесткость полоски. x_0 – деформация полоски под действием неподвижно висящего на ней груза, x – смещение груза от равновесного положения. При равновесии груза сумма сил, действующих на него, равна нулю, т.е. $mg = kx_0$, а уравнение движения груза принимает вид

$$mx'' = -kx.$$

Следовательно, малые вертикальные колебания груза будут гармоническими, причем период этих колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Определить жесткость k резиновой полоски можно, например, из следующих соображений. Действие избыточного давления Δp в трубке, изготовленной из того же листа резины, из которого вырезана полоска, должно уравниваться силами напряжения. Согласно закону Гука, линейная плотность напряжения, обусловленного увеличением радиуса трубки (т.е. напряжение в расчете на единицу длины трубки), равна

$$f = Eh \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = Eh \frac{\Delta r}{r},$$

где E – модуль Юнга, а h – толщина листа резины. С другой стороны, сила избыточного давления Δf , действующая на узкую полоску трубки единичной длины, равна $\Delta f = (r + \Delta r)\Delta\alpha\Delta p$, где $\Delta\alpha$ – центральный угол, под которым видны края этой полоски (рис.6). Написанное выражение справедливо для $\Delta\alpha \rightarrow 0$. Условие равновесия рассматриваемой полоски трубки можно записать в виде $\Delta f = 2f \sin(\Delta\alpha/2)$,

или, учитывая, что $\Delta\alpha \rightarrow 0$, $\Delta f = f\Delta\alpha$. Подставляя в это соотношение найденные ранее выражения для Δf и f , получим

$$Eh = (1 + r/\Delta r)r\Delta p.$$

Отсюда найдем жесткость полоски $k = Ebh/L$ и искомый период колебаний груза:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{(1 + r/\Delta r)rb\Delta p}}.$$

4. Поскольку гелий – одноатомный газ, его молярную массу будем считать неизменной. На пер-

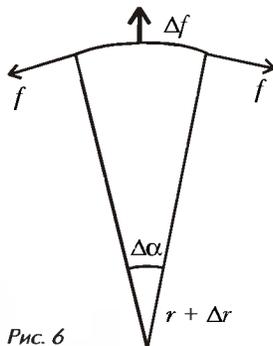


Рис. 6

вом и третьем участках цикла плотность гелия не изменяется; следовательно, объем гелия остается постоянным. На втором и четвертом участках должно оставаться неизменным давление гелия. Построенная pV -диаграмма заданного цикла показана на рисунке 7. Если считать, что давление газа на первом участке уменьшается

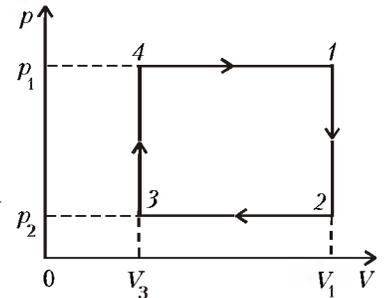


Рис. 7

в n раз, т.е. $p_1 = np_2$, и учесть, что температура гелия на втором участке уменьшается в k раз, т.е. $T_3 = T_2/k$, то, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, должны выполняться следующие соотношения:

$$p_1 V_1 = RT_1 = np_2 V_1 = nRT_2 = knRT_3 = knp_2 V_3 = kp_1 V_3 = kRT_4,$$

где R – универсальная газовая постоянная. Отсюда следует, что $T_1 = kT_4$. Учитывая, что при изобарическом нагревании молярная теплоемкость идеального одноатомного газа равна $2,5R$, определим искомое количество теплоты:

$$Q_{41} = 2,5R(T_1 - T_4) = 2,5RT_1(1 - 1/k).$$

5. Обозначим количество теплоты, которым обменивается газ с нагревателем или холодильником при переходе из точки i в точку j , через Q_{ij} и будем считать, что $Q_{ij} > 0$, если газ получает тепло, и $Q_{ij} < 0$, если он отдает тепло. На участках 2–3 и 4–1 цикла Карно изменение состояния газа происходит адиабатически, т.е. без теплообмена с окружающими телами. На участке 1–2 объем газа увеличивается изотермически; следовательно, на этом участке газ должен получать тепло от нагревателя. На участке 3–4 над газом совершается работа без изменения его внутренней энергии; следовательно, на этом участке газ должен отдавать тепло холодильнику. В первом цикле при переходе из точки 2 к точке 4 газ отдает тепло. Поэтому из первого закона термодинамики и определения КПД тепловой машины следует, что

$$\eta_1 = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{12}}, \quad \eta_2 = \frac{Q_{12} + Q_{24}}{Q_{12}}.$$

Во втором цикле при переходе из точки 4 в точку 2 газ совершает работу и его внутренняя энергия увеличивается, поэтому КПД второго цикла равен

$$\eta_3 = \frac{Q_{42} + Q_{34}}{Q_{42}}.$$

Из первых двух соотношений следует, что

$$\frac{Q_{34}}{Q_{24}} = \frac{\eta_1 - 1}{\eta_2 - 1},$$

а третье соотношение можно представить в виде

$$\frac{Q_{34}}{Q_{42}} = \eta_3 - 1.$$

Поскольку $Q_{24} = -Q_{42}$, искомый КПД равен

$$\eta_3 = \frac{\eta_1 - \eta_2}{1 - \eta_2}.$$

6. Пусть, для определенности, заряд шариков положителен ($q > 0$) и $2b < L$. Тогда в положении устойчивого равновесия стержень должен располагаться по отношению к силовым линиям электрического поля так, как показано на рисунке 8 пунктирной линией, поскольку действие сил тяжести на шарики уравнивается силами реакции стержня, а сам стержень закреплен на вертикальной оси. Сплошной линией на этом рисунке показано положение стержня после его отклонения на угол α . Будем считать, что на стержень и шарики силы трения не действуют. Если, как это обычно и делается,

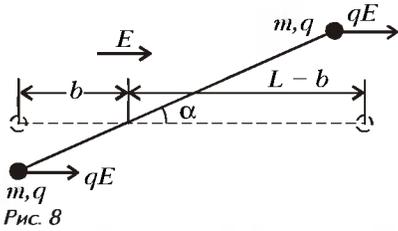


Рис. 8

не учитывать также потерь энергии, обусловленных ускоренным движением электрических зарядов, на основании закона изменения механической энергии можно утверждать, что кинетическая энергия системы при прохождении ею положения равновесия после отпущения без начальной скорости шарика равна работе электрических сил при перемещении заряженных шариков. Полагая стержень твердым телом (иное не оговорено в условии задачи), следует считать, что шарики имеют одинаковые угловые скорости. Учитывая, что стержень является невесомым, и пренебрегая размерами шариков по сравнению с их расстоянием до оси вращения, можно утверждать, что при угловой скорости ω стержень с шариками обладает кинетической энергией

$$W_k = \frac{m\omega^2(b^2 + (L-b)^2)}{2}.$$

Работа электрического поля при перемещении стержня из отклоненного положения в положение равновесия равна

$A = qE(L-2b)(1 - \cos \alpha)$. Рассуждая аналогично, можно показать, что при любом знаке заряда шариков и произвольном соотношении между L и b работу сил поля можно вычислить по формуле $A = |q|E|L-2b|(1 - \cos \alpha)$. Учитывая, наконец, что линейная скорость точки, движущейся по окружности радиусом b с угловой скоростью ω , равна $v = \omega b$, определим искомую скорость:

$$v = b \sqrt{\frac{2|q|E|L-2b|(1 - \cos \alpha)}{m(b^2 + (L-b)^2)}}.$$

7. После первого переключения ключа K в положение 2 происходит заряд конденсаторов. Поскольку емкости конденсаторов одинаковы, первоначально они были полностью разряжены, а теперь подключены к источнику последовательно, установившееся напряжение на каждом из конденсаторов будет равно $E/2$. При этом через источник пройдет заряд $q_1 = EC/2$. Выделившееся на внутреннем сопротивлении источника количество теплоты можно вычислить на основании закона сохранения энергии, если, как это обычно и делается, пренебречь потерями энергии, связанными с излучением электромагнитной энергии. Действительно, энергия электрического поля, возникшего в конденсаторах после их зарядки, равна $W_3 = 2q_1^2/(2C)$. При этом сторонние силы совершили работу $A_{ст} = Eq_1$. Часть этой работы была затрачена на создание электрического поля в конденсаторах, а другая равна количеству теплоты, выделившемуся в источнике. Таким образом, после первого переключения ключа в положение 2 на внутреннем сопротивлении источника должно выделиться количество теплоты

$$Q_1 = Eq_1 - \frac{q_1^2}{C}.$$

После переключения ключа в положение 1 начинается разряд соединенного с ним конденсатора. По истечении достаточно большого промежутка времени этот конденсатор должен полностью разрядиться через резистор R , а заряд другого конденсатора (как обычно, пренебрегаем токами утечки) должен остаться неизменным и равным q_1 . После повторного перевода ключа в положение 2 конденсаторы вновь начнут заряжаться, при этом протекающий через источник и каждый из конденсаторов заряд q_2 должен быть одним и тем же. Условие окончания заряда конденсаторов можно записать в виде

$$\frac{q_1 + q_2}{C} + \frac{q_2}{C} = E,$$

а количество теплоты Q_2 , выделившееся на внутреннем сопротивлении источника, должно удовлетворять соотношению

$$Eq_2 + \frac{q_1^2}{2C} = \frac{q_2^2}{2C} + Q_2 + \frac{(q_1 + q_2)^2}{2C}.$$

Из составленных уравнений найдем искомое отношение количеств теплоты:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = 4.$$

8. После того как аккумулятор полностью зарядился, ни его ЭДС E_a , ни его внутреннее сопротивление r_a не должны изменяться при дальнейшем пропускании зарядного тока. Поэтому можно считать, что эти характеристики аккумулятора не зависят от времени. Если внутреннее сопротивление источника обозначить r , то, в соответствии с законом Ома для полной цепи, можно найти ток, текущий через аккумулятор:

$$I = \frac{E - E_a}{r + r_a}.$$

С другой стороны, согласно закону Фарадея для электролиза, сила тока должна удовлетворять соотношению

$$I = \frac{mFz}{M},$$

где $F \approx 96,5$ кКл/моль – число Фарадея, $z = 1$ – валентность и $M = 1$ г/моль – молярная масса атомарного водорода. Считая, что мощность, отдаваемая источником, затрачивается только на совершение работы против сторонних сил в аккумуляторе и выделение тепла в нем, запишем

$$N(r_a) = I^2 r_a + IE_a, \text{ или } N(r_a) = \frac{(E - E_a)(E_a + E_a r)}{(r + r_a)^2}.$$

Отдаваемая источником мощность будет максимальной, если

$$\frac{dN(r_a)}{dr_a} = 0.$$

Учитывая, что $r + r_a \neq 0$ и $E \neq E_a$, получим

$$E(r + r_a) = 2(E_a + E_a r), \text{ или } r_a = \frac{r(E - 2E_a)}{E}.$$

Используя это выражение и сравнивая два полученных соотношения для тока I , вычислим искомое внутреннее сопротивление источника:

$$r = \frac{EM}{2mFz} \approx 0,47 \text{ Ом}.$$

9. Пренебрегая магнитным потоком, пронизывающим материал проводников ротора, начало отсчета времени можно выбрать так, чтобы модуль потока магнитного поля, создаваемого обмотками статора, сцепленного с обмоткой ротора, был равен

$$|\Phi(t)| = |BSN \cos(\Omega - \omega)t|.$$

Тогда величина ЭДС, возникающей в обмотке, равна скорости изменения сцепленного с этой обмоткой потока внешнего магнитного поля, т.е.

$$|E(t)| = |d\Phi/dt| = |BSN(\Omega - \omega) \sin(\Omega - \omega)t|.$$

Величина тока в обмотке ротора равна

$$|I(t)| = \frac{|E(t)|}{R},$$

поэтому действующий на ротор момент сил со стороны магнитного поля равен

$$|M(t)| = |I(t)BSN \sin(\Omega - \omega)t| = \frac{(\Omega - \omega)(BSN \sin(\Omega - \omega)t)^2}{R}.$$

Поскольку скорость вращения ротора практически остается

постоянной, можно утверждать, что величина искомого среднего тормозящего момента, действующего на ротор, равна

$$|M_{\text{торм}}| = \left| \langle M(t) \rangle \right| = \frac{B^2 S^2 N^2 (\Omega - \omega)}{R} \left| \langle \sin^2 (\Omega - \omega) t \rangle \right| = \frac{B^2 S^2 N^2 (\Omega - \omega)}{2R}$$

В этом соотношении угловыми скобками обозначена операция усреднения за время $2\pi/(\Omega - \omega)$ и учтено, что среднее значение квадрата гармонической функции за период равно $1/2$.

10. Согласно квантовой механике, световой пучок – это совокупность частиц, называемых фотонами. Эти частицы движутся в любой среде со скоростью света в вакууме c . Импульс фотона равен $p = \epsilon/c$, где ϵ – энергия фотона. В соответствии с гипотезой де Бройля, любой материальный объект обладает волновыми свойствами, т.е. в ряде случаев его поведение может быть описано в рамках классических волновых представлений. При этом соответствующая объекту длина волны равна $\lambda = h/p$, где $h \approx 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Поскольку скорость электронов $v = 0,5$ км/с $\ll c \approx 3 \cdot 10^5$ км/с, можно не учитывать релятивистского изменения массы и считать, что их импульс (следовательно, и импульс падающих на линзу фотонов) равен $p = mv$, где $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – масса покоя электрона. Таким образом, можно считать, что длина волны падающего на линзу света равна $\lambda = h/(mv)$.

При падении на линзу свет частично отражается от ее поверхностей и после частичного прохождения через нее и отражения от стеклянной пластинки вновь падает на линзу. Очевидно, что интерференция может наблюдаться лишь между световыми пучками, отраженными от нижней сферической поверхности линзы и верхней плоскости пластины, на кото-

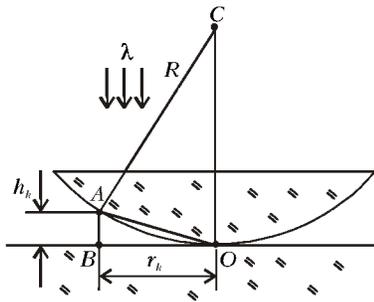


Рис. 9

рой лежит линза. Учитывая, что радиус сферической поверхности достаточно велик, а номер интересующего кольца мал, можно считать, что угол ACO , под которым видно это кольцо из центра кривизны линзы (рис.9), столь мал, что, во-первых, синус и тангенс этого угла равны самому углу, измеренному в радианах, а во-вторых,

можно пренебречь изменением направления распространения светового луча при прохождении сферической поверхности линзы. Пусть $\angle ACO = 2\alpha$, тогда $\angle AOB = \alpha$, $AO = 2R \sin(\alpha/2) = R\alpha$, $h_k = AO \sin \alpha = R\alpha^2$, $r_k = h_k / \tan \alpha = R\alpha$. Учитывая, что при отражении от более плотной среды фаза отраженной волны изменяется на противоположную, или, другими словами, происходит «потеря» половины длины волны, условие образования k -го светлого кольца имеет вид

$$\delta_k = 2h_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

Отсюда, с учетом ранее полученного соотношения для λ , находим искомый радиус k -го светлого кольца:

$$r_k = \sqrt{\frac{2k-1}{2}} R\lambda = \sqrt{\frac{2k-1}{2m\nu}} Rh \approx 1,05 \text{ мм.}$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

$$1. n_0 = \frac{n_1 v_2 - n_2 v_1}{v_2 - v_1} = 100 \text{ с}^{-1}$$

$$2. v = \frac{v_0}{1 - \tan \alpha} = \frac{3v_0}{3 - \sqrt{3}} \approx 2,36 \text{ м/с.}$$

$$3. \beta = \pm \arctg \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - 1/2}}{\cos \alpha} \right) = 0. \quad 4. \alpha = \frac{1 + \sqrt{h/R}}{1 - \sqrt{h/R}} = 3.$$

$$5. p = p_a \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\rho g L}{p_a}} \right) = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$6. T_2 = T_1 \left(1 + \frac{2A}{3p_1 V_1} \right) \approx 284 \text{ К.} \quad 7. l = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m g}} \approx 0,6 \text{ м.}$$

$$8. \alpha = \frac{P_1}{P_2} \left(\frac{U^2 + P_2 r}{U^2 + P_1 r} \right)^2 = \frac{9}{8} = 1,125.$$

$$9. h = \frac{r}{(R-r)n} \sqrt{H^2 - (n^2 - 1)(R-r)^2} \approx 3,63 \text{ м.}$$

$$10. x = \frac{f\Delta}{F} = 10 \text{ мм.}$$

Химический факультет

$$1. x = l\rho_2/\rho_1 = 3,7 \text{ см.} \quad 2. v_m = \pi\nu/2 = 6,3 \text{ м/с.}$$

$$3. L = 4\rho_0/(3\rho g) = 1 \text{ м.} \quad 4. \Delta T = (k^2 - 1)T = 132 \text{ К.}$$

$$5. R = rE_2/(E_1 - E_2) = 0,2 \text{ Ом.}$$

$$6. q = 2\pi r^2 B/R = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

$$7. l = U_0 \sqrt{C/(2L)} = 10^{-2} \text{ А.} \quad 8. x = 1,5F = 45 \text{ см.}$$

$$9. k_{\text{max}} = l/(N\lambda) = 8.$$

$$10. A = hc/\lambda - eU = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2 \text{ эВ.}$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Чернуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.А.Васин, В.А.Иванюк, В.М.Митурич-Хлебникова, А.В.Родионова, М.М.Сумнина, П.И.Шевелев

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №