



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин,
С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин,
В.Н.Дубровский, А.А.Егоров,
А.Р.Зильберман,
С.С.Кротов (*директор «Бюро Квантум»*),
А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаев, Н.Х.Розов, Ю.П.Соловьев,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров
(*заместитель главного редактора*),
В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан
(*заместитель главного редактора*),
И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,
А.И.Шапиро

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро Квантум

©1999, Президиум РАН,
Фонд Осипяна, «Квант»

- 2 От капли до землетрясения. *Г.Голицын*
8 Сложность алгоритмов. *А.Белов, В.Тихомиров*
12 Камера-обскура. *В.Сурдин, М.Карташев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 16 Задачи М1676–М1680, Ф1683–Ф1687
17 Решения задач М1651–М1660, Ф1668–Ф1672

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 23 Задачи
24 Задача для мистера Холмса. *А.Жуков*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 26 Палочка продолжает падать... *А.Черноуцан*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 28 Великолепная десятка. *Л.Курляндчик*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Паркеты и разрезания

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 35 Законы Паскаля и Архимеда. *А.Шеронов*

ВАРИАНТЫ

- 38 Материалы вступительных экзаменов 1998 года

ОЛИМПИАДЫ

- 49 XXXIX Международная математическая олимпиада
50 XXIX Международная олимпиада школьников по физике
53 Московская олимпиада студентов по физике

ИНФОРМАЦИЯ

- 54 V Вышеградская конференция молодых ученых
54 Международный турнир «Компьютерная физика»
56 «Диалог» готов к сотрудничеству

- 57 Ответы, указания, решения
«Квант» улыбается (7)

НА ОБЛОЖКЕ

- II Коллекция головоломок
III Шахматная страничка
IV Игрушки по физике

От капли до землетрясения

Г. ГОЛИЦЫН



КРУЖАЮЩИЙ НАС МИР многообразен и сложен, особенно в деталях, которые переменны в пространстве и времени, распределены зачастую практически случайным образом. Наша жизнь во многом зависит от внешнего мира: погоды, климата и их изменений, от осадков и вызываемых ими наводнений, от засух. Во многих регионах бывают землетрясения, сильные бури, ураганы и тайфуны. Для всех этих явлений есть одна общая черта, которую все знают по опыту: чем интенсивней событие (чем больше оно отклоняется от нормы), тем оно реже. Очевидно, это связано со *статистической* природой нашего мира, где господствует случайность, однако за этим стоит и своя физика — ведь *законы сохранения* энергии, импульса и его момента действуют всегда и всюду. Надо лишь понимать, где и как их можно использовать. В этом и состоит главная цель научного исследования, призванного углубить понимание окружающего мира.

Знание закономерностей течений жидкостей и газов нужно для разнообразных технических приложений, например для исследования движения тел в воде или атмосфере, течений в трубах и т.п. Что и как опреде-

ляет основные черты потоков, их интенсивность и изменчивость во времени и пространстве, почему чем значительнее событие, тем дольше его надо ждать (и сколько, в среднем, ждать) — этому и посвящена данная статья.

Капли и трубы

Пусть тело находится в какой-то среде, например в воздухе или в воде.

Согласно закону Архимеда, на тело действует сила, равная весу объема среды в объеме тела. Можно считать, что ускорение силы тяжести изменяется в $(\rho_1 - \rho_c)/\rho_1$ раз, где ρ — плотность, а индексы «т» и «с» обозначают «тело» и «среда», т.е.

$$g' = g \frac{\rho_1 - \rho_c}{\rho_1}.$$

Кроме того, всякая среда оказывает сопротивление движению в ней посторонних тел. Рассмотрим движение «малых» и «больших» тел в воздухе, например — падение капельки тумана и парашютиста.

Легко показать при помощи соображений размерностей, что сила сопротивления большого тела размером r , движущегося со скоростью u в среде плотностью ρ_c , должна следующим образом зависеть от перечис-

ленных величин:

$$F_a \sim \rho_c u^2 r^2.$$

(Действительно, $(\text{кг}/\text{м}^3) \cdot (\text{м}^2/\text{с}^2) \cdot \text{м}^2 = \text{Н}$.) Это так называемая *аэродинамическая сила*. Она связана с инертностью среды, так как в нее входит массовая плотность ρ_c .

Для малых тел сила сопротивления обусловлена трением слоев окружающей среды друг о друга и оказывается пропорциональной первой степени скорости u и размера r тела, причем коэффициент пропорциональности, как легко видеть, должен иметь размерность $\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$. Он называется *коэффициентом вязкости* среды и обозначается через μ . Таким образом, для силы вязкого сопротивления (силы Стокса) можно записать

$$F_\mu \sim \mu ur.$$

Отношение этих двух сил сопротивления называется числом Рейнольдса:

$$Re = \frac{F_a}{F_\mu} \sim \frac{ur}{\mu/\rho_c} = \frac{ur}{\nu}.$$

Здесь для краткости введена так называемая *кинематическая вязкость* среды ν . Например, для воздуха при обычных условиях $\nu \sim 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Теперь видно, что преобладание той или другой силы (инертной или вязкой) связано не только с тем, велико или мало тело, а еще и со скоростью его движения и с кинематической вязкостью среды; короче, оно определяется тем, каково число Рейнольдса: много больше или много меньше единицы. Интересно, что число Рейнольдса можно представить и как отношение двух характерных времен — так называемого вязкого $\tau_v = r^2/\nu$ и динамического или инерционного $\tau_i = r/u$:

$$Re = \frac{ur}{\nu} = \frac{r^2/\nu}{r/u} = \frac{\tau_v}{\tau_i}.$$

Эта статья написана для нашего журнала известным ученым, геофизиком, академиком Георгием Сергеевичем Голицыным, который в течение многих лет размышлял как над самыми обыденными явлениями (падение капелек дождя, движение воды в трубопроводах), так и над катастрофическими событиями глобального масштаба. Первоначальный текст статьи (она называлась «Принцип скорейшей реакции среды на внешнее воздействие») содержал выражения, известные гидродинамикам, но, по-видимому, малопонятные для предполагаемых читателей «Кванта». Поэтому статья была слегка упрощена, хотя стиль изложения автора по возможности был сохранен. Оставлена основная идея, демонстрирующая прекрасные возможности метода размерностей и предложенного принципа, применимых к самым разнородным физическим явлениям. Многочисленные ключевые понятия выделены в тексте курсивом.

Обе величины τ_v и τ_i являются оценками характерного времени, за которое тело достигает постоянной скорости под действием соответствующей силы.

Итак, рассмотрим тело, падающее в некоторой среде. Скорость установившегося движения тела найдем, приравнявая эффективную «силу тяжести» (с учетом силы Архимеда) mg' , где $m = 4\pi r^3 \rho_t / 3$ и $g' = g(\rho_t - \rho_c) / \rho_t$, силе сопротивления F_μ или F_a .

Чем больше по абсолютной величине ускорение, сообщаемое силой, тем меньше время установления равновесия между телом и средой. Если действуют несколько сил, то главную роль будет играть та, которой соответствует наименьшее время установления равновесия τ . Небольшие значения числа Рейнольдса ($Re \lesssim 1$) соответствуют тому, что вязкое время τ_v много меньше инерционного τ_i . Поэтому для падающего тела можно записать

$$mg' \sim \mu ur \sim \nu \rho_c ur,$$

откуда

$$u \sim g' \tau_v \frac{\rho_t}{\rho_c}.$$

Аналогично, для больших значений числа Рейнольдса ($Re \gg 1$) запишем

$$mg' \sim \rho_c u^2 r^2,$$

откуда

$$u \sim g' \frac{r}{u} \frac{\rho_t}{\rho_c} = g' \tau_i \frac{\rho_t}{\rho_c}.$$

Рассмотрим еще течение вязкой жидкости плотностью ρ в трубе радиусом r и длиной l под действием разности давлений на ее концах Δp . На единицу объема жидкости будет действовать сила $\Delta p/l$, а ускорение жидкости будет равно $a = \Delta p / (\rho l)$. В результате для средней по сечению трубы скорости жидкости для малых чисел Рейнольдса ($Re \lesssim 1$) получаем

$$u_{cp} \sim a \tau_v \sim \frac{\Delta p}{\rho l} \frac{r^2}{\nu}.$$

Для тонких труб эта задача была решена в середине XIX века французским ученым Пуазейлем. Его решение отличается от нашего лишь множителем порядка 1.

Наоборот, при $Re \gg 1$ найдем

$$u \sim a \tau_i \sim \frac{\Delta p}{\rho l} \frac{r}{u},$$

откуда следует, что сопротивление

снова пропорционально квадрату скорости, а средняя скорость определяется как

$$u_{cp} \sim \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho l}} r.$$

Эта зависимость прекрасно подтверждается многочисленными экспериментами и изучена давно ввиду важности трубопроводного транспорта в жизни современного общества.

Отметим разные зависимости расхода массы в двух рассмотренных режимах при заданном значении напора, т.е. отношения $\Delta p/l$. В вязком режиме расход составляет

$$G = \rho \pi r^2 u_{cp} \sim \frac{\Delta p}{l} r^4,$$

а в нелинейном режиме –

$$G = \rho \pi r^2 u_{cp} \sim \sqrt{\frac{\Delta p}{l}} r^{5/2},$$

т.е. относительная эффективность транспортировки во втором случае заметно падает с ростом напора и радиуса трубы по сравнению с первым случаем.

Турбулентность

В нашем мире имеются разнообразные источники энергии, мощность которых меняется лишь за времена, сопоставимые со временем жизни нашей планеты (порядка $4,5 \cdot 10^{17}$ секунд). Так, солнечная энергия является не только источником жизни на Земле (путем образования хлорофилла), но и «топливом» для всех движений в атмосфере и океане. Источником всевозможных процессов в земной коре и внутри Земли служит тепло, образующееся в земных недрах при радиоактивном распаде различных элементов. Разогрев мантии (вещества, простирающегося на глубины до 3000 км и подходящего к земной коре, толщина которой от 20 до 70 км под континентами и всего 5 км вблизи срединно-океанических хребтов, из которых кора и образуется) приводит к движению вещества мантии – к *конвекции*. Эта конвекция перемещает неравномерным образом литосферные плиты, составляющие кору, со скоростями в несколько сантиметров в год, на границах плит растут упругие напряжения, которые частично сбрасываются в процессе землетрясений.

Для процессов изменения энергии системы в зависимости от времени можно написать уравнение, получающееся умножением уравнения движения на скорость. Как известно из школьного курса физики, произведение силы на скорость есть мощность этой силы. Если мощность системы уравнивается (в среднем по времени и пространству) мощностью внешнего источника энергии (например, солнечного тепла), то кинетическая энергия системы в среднем сохраняется. Процесс уравнивания имеет характерные времена, связанные с силами (как и при оценке скоростей падающих тел, проведенной в предыдущем разделе).

Начнем с описания средней пространственной структуры *турбулентного*, т.е. нерегулярного, потока в небольших масштабах, где структура не зависит от выбранного направления и положения в пространстве.

Более 70 лет назад английский ученый Ричардсон задался вопросом: обладает ли ветер скоростью? Он имел в виду, что ветер случайным образом меняется в пространстве и во времени в любых точках земного шара. Ему же принадлежит качественное описание турбулентности как процесса, в котором основной поток неустойчив и разбивается на крупные вихри, последние тоже неустойчивы и порождают более мелкие вихри, из которых рождаются еще более мелкие и так далее вплоть до самых мелких размеров. Последние вихри *диссипируют*, т.е. затухают вследствие вязкости, так как число Рейнольдса для них уже малое.

В 1941 году вышла работа Андрея Николаевича Колмогорова, посвященная описанию структуры турбулентного потока. Почти одновременно появилась и работа его аспиранта Александра Михайловича Обухова, в которой был получен так называемый пространственный спектр турбулентности (и ряд других замечательных результатов). Колмогоров не знал тогда о Ричардсоне, но понимал трудности в создании теории турбулентности и дал количественные методы их преодоления. Чтобы обойти проблему скорости ветра, он предложил в качестве параметра рассматривать средний квадрат разности компонент скоростей, взятых в двух точках, разделенных расстоянием r . Тогда медленные изменения на больших масштабах, связанные с *анизотроп-*

ными крупными вихрями, возникающими из-за неустойчивости основного потока, просто вычитаются, т.е. не рассматриваются совсем. Он дал количественное описание и процесса дробления вихрей, о котором писал Ричардсон.

Если процесс развития неустойчивости основного потока все время поддерживается (в случае атмосферы ее общая циркуляция поддерживается приходом энергии от Солнца и неравномерным ее распределением по поверхности планеты), то должен существовать постоянный поток энергии от вихрей больших масштабов к малым, где энергия турбулентности переходит в тепло вследствие вязкости. Этот поток энергии, т.е. скорость изменения кинетической энергии единицы массы жидкости в единицу времени, обозначается обычно через ϵ (и измеряется в Дж/(кг·с). Средний квадрат разности, например, модулей скорости в двух точках, разделенных расстоянием r , можно считать относительной кинетической энергией жидких частиц единичной массы, отстоящих друг от друга на r . Рассмотрим два случая: больших и малых значений r .

Пусть r велико по сравнению с расстоянием, где действует вязкость. Это расстояние называется *колмогоровским микромасштабом* и равно $l_k = (v^3/\epsilon)^{1/4}$. (Разумность этой формулы можно проверить анализом размерностей.) Тогда велико и число Рейнольдса, и, проведя аналогии между силовыми и энергетическими характеристиками системы, мы можем использовать соответствующую формулу с динамическим временем $\tau_i = r/u$ и получить знаменитый «закон 2/3» Колмогорова:

$$u^2 \sim (\epsilon r)^{2/3}.$$

Обухов нашел формулу для пространственной спектральной плотности кинетической энергии турбулентности. Дело в том, что случайное поле скорости можно представить в виде совокупности пространственных гармоник (синусоид) разных амплитуд и разных длин волн точно так же, как электрический сигнал произвольной формы можно представить в виде синусоид разных амплитуд и частот. Функция, показывающая, с каким «весом» входят разные гармоники, и называется *спектром*. Спектр очень удобен для практических измерений.

Обухов получил, что для турбулентности пространственный спектр выглядит так:

$$E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad k = 2\pi/\lambda,$$

где λ – длина волны пространственной гармоники. Эта формула «действует» и в атмосфере, и в океане, и в больших аэродинамических трубах, и в атмосферах звезд, и даже в межзвездном газе в нашей галактике, что подтверждено прямыми измерениями многих ученых разных специальностей и разных стран. Недаром эта теория считается одним из самых выдающихся научных достижений гидродинамики XX века.

Для малых масштабов, когда $r < l_k = (v^3/\epsilon)^{1/4}$, число Рейнольдса уже невелико, и мы должны использовать вязкое время τ_v (так как $\tau_v \ll \tau_i$). Тогда получим

$$u^2 \sim \epsilon r^2 / \nu.$$

(Для этих масштабов можно произвести точные расчеты, в результате справа появится множитель 1/3.)

Важным классом движений в природе и в технике являются *конвективные движения*, образующиеся, когда более легкая жидкость находится под более тяжелой. Такая ситуация возникает при нагреве жидкости снизу, например в кастрюле с водой на плите, или при охлаждении жидкости сверху. Первый процесс реализуется при нагреве почвы солнечным излучением, и эту конвекцию мы видим как дрожание воздуха, например, над распаханном полем. Последний процесс реализуется во всех природных водоемах, где при испарении с поверхности теплота фазового перехода забирается из самого верхнего слоя жидкости, который при этом охлаждается. Поток тепла q_t , уходящий из жидкости (или подводимый к ней), связан со скоростью диссипации кинетической энергии формулой

$$\epsilon = \frac{\alpha g q_t}{\rho c_p},$$

где α – коэффициент объемного теплового расширения жидкости, g – ускорение силы тяжести, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Конечно, конвекция имеет свои особенности по сравнению со случаем локально однородной и изотропной турбулентности, так как в ней выделено вертикальное направление (свя-

занное с вектором \vec{g}), но для грубых оценок скоростей конвективных движений можно использовать формулы, полученные для турбулентности. (Правда, при этом численные коэффициенты в них приходится определять заново.)

Ввиду важности знания скоростей при конвекции вязкой жидкости, соответствующая формула проверялась многочисленными экспериментами, а также численными и аналитическими исследованиями. Для средней скорости было получено выражение

$$u \sim 0,1 \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}} r = 0,1 \sqrt{\frac{\alpha g q_t}{\rho \nu c_p}} r.$$

Для вещества земной мантии геофизики дают следующие значения: $\alpha \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$, $\rho \approx 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c_p \approx 3 \cdot 10^2 \text{ Дж/(кг·К)}$, $\nu \approx 10^{19} \text{ м}^2/\text{с}$. Тогда при средней величине геотермического потока $q_t = 0,08 \text{ Вт·м}^{-2}$ и толщине мантии $r \approx 3000 \text{ км}$ для скорости получим примерно 5 см/год . Реально движение литосферных плит, измеряемое с помощью системы навигационных спутников, происходит со скоростями от 1 до 10 см/год.

Найденное нами значение 5 см/год кажется невероятно малым, однако, вспомнив, что в году 52 недели, получим уже 1 мм в неделю. А это – скорость роста наших ногтей, и мы имеем дело с такой скоростью всю нашу жизнь. (По-видимому, первый на это совпадение обратил внимание современный английский геофизик Д.Мак-Кензи.)

Наличие вращения Земли существенно меняет характер конвективных движений в связи с действием *силы Кориолиса*, но не влияет на энергетику конвекции (так как эта сила не производит работы), поэтому формула для скорости диссипации энергии остается верной. Сила Кориолиса вводит новый масштаб времени $\tau_\omega = (2\Omega \sin \theta)^{-1}$, где Ω – угловая скорость вращения, θ – угол между осью вращения и местной горизонталью, т.е. для Земли – это широта. Для средних широт имеем $1/\tau_\omega = 2\Omega \sin \theta \approx 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

Отношение силы инерции к силе Кориолиса определяется *числом Россби*, по имени шведского метеоролога, введшего его в рассмотрение в 1940 году, у нас оно называется *числом Кибеля*, по имени советского ученого, предложившего его тогда

же: $Ki = \tau_\omega / \tau_i$. Для крупномасштабных движений атмосферы и океана это число много меньше единицы. Так, при скорости $u \approx 10$ м/с и масштабе $r \approx 1000$ км имеем $Ki \approx 0,1$. При этом сила Кориолиса уравновешивается градиентом сил давления, что объясняет давно известное метеорологам правило: если стать спиной к ветру, то область низкого давления будет слева, а высокого – справа (в южном полушарии – наоборот).

Важно то, что время τ_ω оказывается существенно меньше инерционного. Тогда для конвекции вращающейся жидкости можно сразу написать

$$u^2 \sim \epsilon \tau_\omega, \text{ или } u \sim \sqrt{\epsilon \tau_\omega}.$$

(Согласно многочисленным измерениям – в том числе и самого автора – коэффициент пропорциональности в последней формуле составляет приблизительно 1,7.) Эта формула в применении к жидкому ядру Земли дает скорости порядка 5 см/год, что вполне достаточно для возбуждения и поддержания *геомагнитного поля*. Для ураганов и тайфунов скорости получаются порядка 40–50 м/с, что соответствует наблюдениям. В последние годы конвекция с учетом вращения усиленно изучается океанографами при описании опускания вод у границ ледового покрова в высоких широтах (главного процесса в вентилиции вод глубокого океана).

В середине 1960-х годов А.М.Обухов, тогда директор Института физики атмосферы АН СССР, предложил автору посмотреть, что известно о движениях в атмосферах других планет. После нескольких лет знакомства с материалами наблюдений и первыми попытками описать отдельные черты динамики на Марсе, автор предложил теорию подобия для общей циркуляции планетных атмосфер. Эта теория давала разумные оценки скоростей ветра и вызывающей их разности температур для земной атмосферы, а именно – примерно 12 м/с и 45°, а также давала предсказания для Венеры, Марса и Титана (спутника Сатурна, у которого масса атмосферного столба в 11 раз больше, чем у Земли). Полученная формула для средней скорости ветра имела следующий нетривиальный вид:

$$u = a \sigma^{1/16} q^{7/16} c_p^{-1/4} r^{1/2} m^{-1/2},$$

где a – безразмерный множитель, для

Земли равный $a \approx 0,6$; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴) – постоянная Стефана – Больцмана, входящая в формулу $q = \sigma T^4$; m – масса столба атмосферы, равная для Земли $m = 10^4$ кг/м²; $q = q_\odot (1 - A)/4$ – среднее по поверхности значение плотности потока солнечной радиации, приходящей к планете, имеющей коэффициент отражения A , q_\odot – солнечная постоянная, для Земли $A = 0,3$ и $q_\odot \approx 1368 \pm 4$ Вт/м², так что $q \approx 240$ Вт/м².

Эта формула для скорости слишком сложна даже для простого обзора. Прошло несколько лет, прежде чем автор догадался, что для полной кинетической энергии атмосферы можно записать такое выражение:

$$E = \frac{1}{2} m \cdot 4\pi r^2 u^2 = 2\pi a^2 Q \tau_e \approx 2Q \tau_e,$$

где Q – полная энергия излучения Солнца, приходящая к планетному диску, а $\tau_e = r/c_e$ – отношение радиуса планеты к скорости звука, представляющее собой время затухания возмущений давления или плотности в масштабе планеты. Отношение времени τ_e к инерционному времени τ_i есть *число Маха* $Ma = u/c_e$, и, поскольку в данном случае $Ma \ll 1$, время τ_e является наименьшим.

Вообще, ветры вызываются тем, что все планеты – сферы (или близки к сферам), так что есть день и ночь, высокие и низкие широты, в результате чего различные части планеты разогреваются неравномерно, что и служит причиной ветров. Для Венеры по формуле для средней скорости получается $u \approx 1$ м/с. (Это значение подтвердилось и прямыми измерениями для нижней половины атмосферы планеты.) Для Марса теоретическая оценка скорости ветра оказалась раза в три завышенной, что впоследствии было объяснено автором тонкостью и прозрачностью его атмосферы. В таких условиях основную роль в обмене теплом между поверхностью планеты и ее атмосферой играют радиационные процессы, а не динамика.

Неожиданным (для автора) оказалось то, что по существу тот же ход рассуждений, который привел к формуле для энергии E , описывает статистику событий или объектов, а именно – определяет их число за какой-то промежуток времени в зависимости от их интенсивности.

Землетрясения

Изучим число землетрясений – сокращенно ЗТ – в масштабе всего земного шара, поскольку очень сильные ЗТ, к счастью для нас, происходят очень редко. ЗТ – очень сложный процесс и по физике, и по своей пространственной структуре. Лишь около 30 лет назад были разработаны методы более или менее точной (порядка 20%) количественной характеристики силы ЗТ по энергии излучаемых волн, принимаемых на многих станциях мировой сейсмометрической сети, существующей уже около 20 лет. Такой характеристикой является величина *сейсмического момента* $M = \mu_c S s$, где μ_c – модуль сдвига пород, разрываемых при ЗТ, S – площадь разрыва хрупкой коры, s – среднее смещение соседних блоков коры при ЗТ. Величина M измеряется в Н · м (ньютон на метр), т.е. имеет размерность работы или энергии. В процессе ЗТ высвобождается накопленное при движении литосферных плит напряжение $\Delta \sigma$. Характерно, что величина $\Delta \sigma$ несущественно меняется вокруг своего среднего значения (≈ 40 атм = 4 МПа = $4 \cdot 10^6$ Н/м² = $4 \cdot 10^6$ Дж/м³), хотя величина M при этом может различаться на много порядков. Это обстоятельство позволяет каждому ЗТ приписать свой пространственный масштаб длины L_m , площади $S_m = L_m^2$ или объема $V_m = L_m^3$:

$$L_m = \left(\frac{M}{\Delta \sigma} \right)^{1/3}, \quad S_m = \left(\frac{M}{\Delta \sigma} \right)^{2/3}, \\ V_m = \frac{M}{\Delta \sigma}.$$

Выясняется, что величины L_m и S_m являются разумной мерой длины и площади образующегося в процессе ЗТ разрыва, а знание модуля сдвига позволяет определить и среднее смещение s . Так, при сильнейшем в нашем веке ЗТ (май 1960 г., Чили) длина разрыва коры достигала 800 км, а смещение было более 20 м!

Из соображений размерностей можно записать

$$M = a_s P \tau (\geq M),$$

где a_s – постоянный множитель, P – вводимая в систему мощность (в нашем случае глобальной статистики это полное значение геотермической мощности $P = 4 \cdot 10^{13}$ Вт при среднем значении потока $0,08$ Вт/м²), а

$\tau(\geq M)$ – среднее время ожидания события с сейсмическим моментом, равным или большим M . Именно такой вид имеет распределение для ЗТ в тонкой коре вблизи срединно-океанических хребтов, где она зарождается и имеет толщину около 5 км.

Сейсмологи обычно записывают закон распределения для средних частот повторения ЗТ:

$$N(\geq M) \sim \frac{P}{M^n},$$

где $N(\geq M) = 1/(\tau(\geq M))$, а показатель n , согласно тщательно проверенной статистике событий, по одним данным равен 1,05, а по другим 0,94, т.е. очень близок к 1. Отметим, что в данном случае мы знаем лишь возбуждение и стараемся понять связь между событиями заданной интенсивности и их временем ожидания (или частотой).

Однако подавляющее число ЗТ происходит вдали от срединных хребтов в океане, и лишь небольшая часть из них (всего около 50 событий с 1977 по 1992 г.) подчиняются приведенному закону распределения. Для подавляющего числа ЗТ, имеющих момент $M \lesssim 10^{21}$ Н·м, значение пока-

зателя n меньше 1. Данные разных авторов (наших и зарубежных) несколько различаются, но их все можно описать значением $n = 0,66 \pm 0,03$.

Вспомним теперь наши масштабы длины, площади и объема, задаваемые приведенными здесь формулами. Последняя из них, введенная в 1956 году японским сейсмологом Цубои, определяет объем пространства, в котором происходит разгрузка напряжений. Поток же тепла – первопричина создания напряжений в коре толщиной h – подается на площадь S_m , т.е. действует на объем $hS_m = h(M/\Delta\sigma)^{2/3}$, что можно записать в виде

$$\frac{MN(\geq M)}{V_m} \approx a_s \frac{P}{hS_m}.$$

Отсюда можно получить

$$N(\geq M) \approx 0,4PM^{-2/3}h^{-1}(\Delta\sigma)^{-1/3},$$

где коэффициент $a_s \approx 0,4$ был найден путем сравнения с данными каталога глобальных землетрясений.

Эта формула, опубликованная автором в 1996 году, не только объясняет природу показателя $0,66 \pm 0,03 \approx 2/3$, но и выявляет факторы, способствующие ЗТ. Например, чем тонь-

ше кора, тем меньше среднее время ожидания ЗТ заданной силы. Различие между двумя показателями связано с тем, что в первом случае, при $n = 1$, рвется вся кора толщиной h , а во втором случае, при $n \approx 2/3$, этого не происходит, и образуется лишь частичный разрыв в коре с площадью S такой, что $\sqrt{S} < h$. Поэтому ЗТ, регистрируемые в тонкой океанической коре, имеют распределение с $n \approx 1$, а подавляющее большинство их в толстой коре соответствуют $n \approx 2/3$. Степенную зависимость частоты ЗТ от их интенсивности с показателем, близким к $2/3$, установили в 1941 году американские сейсмологи Гутенберг и Рихтер, поэтому соответствующее распределение называется их именем.



Можно было бы привести еще много примеров эффективного использования теории размерностей и подобия, выделения характерных времен процессов, поиска аналогий в событиях совершенно различной физической природы, но ... «нельзя объять необъятного» в короткой статье.

Про ученого кота

Однажды некий юный кот
Решил ловить мышей — и вот
Подготавливать он начал сразу
Теоретическую базу.
Достал по крысам реферат:
Год тридцать первый, «Котиздат»,
Мышиных нор каталог краткий,
Конспектов чьих-то две тетрадки,
Курс «Грызуны жилиго дома»
И «Мышеведенья» три тома,
А также русский перевод
Английской книжки

«Мышь и кот»,

Написанной по русской книжке
Под заголовком «Кошки-мышки».

Тянулись дни недосыпаний...
Кот над теорией корпел.
И в области научных знаний
Весьма солидно преуспел.
Два года не прошли бесплодно,
И очевидцы говорят:
Кот интегрировал свободно
И знал неплохо сопромат.
Он мог с успехом похвалиться
Расчетом тонкостенных нор...

Ну, словом, кот, как говорится,
Имел широкий кругозор.

Все знал ученый кот — да лишь
Не видел он живую мышь,
Что, впрочем, чрезвычайно мало
Героя нашего смущало.
Он рассуждал примерно так:
«Живой объект — какой пустяк!
Такая мелочь не помеха
Для достижения успеха,
А главный фактор — это наш
Теоретический багаж.
Солидный кот с солидной базой,
Я всех мышей поймаю сразу!»

Во всеоружье юный кот
На первую охоту вышел
И перед норкой типа J (йот)
Ждет появленья первой мыши.
С ним готовальня, карандаш,
Два треугольника, тетрадка,
Конспект, для шкурки саквояж...
Все на местах и все в порядке.

Коту недолго было ждать:
Вдруг слабый писк
и шорох слышен —
Из темной норки погулять

Неопытный мышонок вышел.
Ученый кот промолвил: «Так-с...
Определяем параллакс...
И для дальнейшего запишем
Полярные координаты мыши.»

Определив легко и тонко
Спектральный класс и тип
мышонка,
Затем, по найденному классу,
Определил объем и массу,
А плотность и удельный вес
Нашел в системе CGS.
Путем изящных вычислений
Решил систему уравнений,
Нашел усилие — ΔQ —
И приготовился к прыжку.

Кот шепчет: «Не уйдешь,
малыш...»
Но что такое? Где же мышь?
Пока расчет производился,
Объект расчета в норке скрылся!

Таков итог печальных дел.
Сорвалась у кота атака.
В науках он собаку съел,
На практике же — кот заплакал...
Фольклор

Сложность алгоритмов

А. БЕЛОВ, В. ТИХОМИРОВ

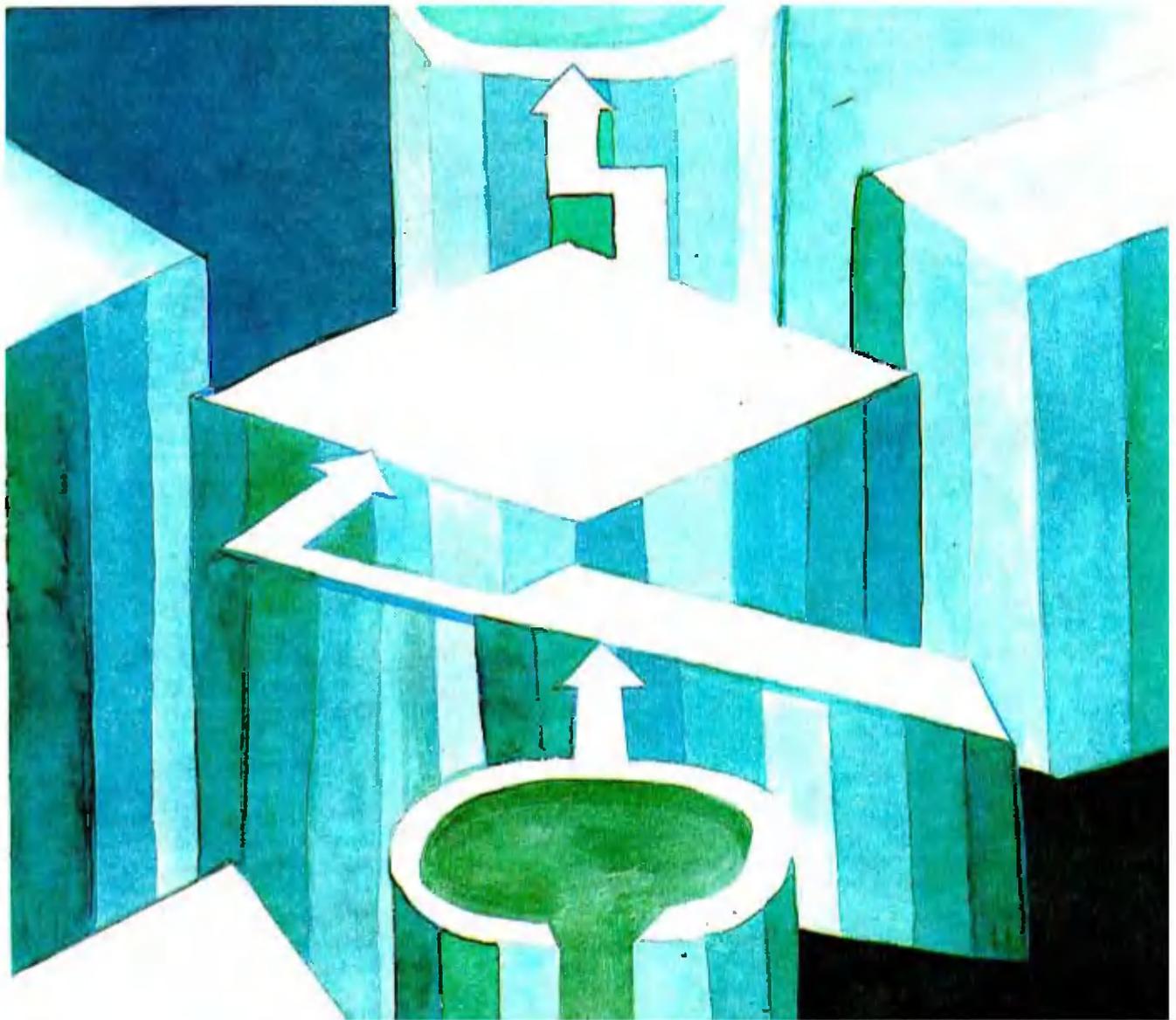


НАВЕРНОЕ, ВСЕ ПОНИМАЮТ сейчас, что такое программа, и что скорость решения задачи на компьютере зависит от того, как оно написано. В одном случае компьютер будет работать долго, выполняя большой объем вычислений, в другом – объем вычислений окажется меньше, и работа будет эффективней.

Чтобы организовать вычислительный процесс, необходимо иметь точное предписание, приводящее от исходных данных к конечному результату. Такое предписание называется *алгоритмом*. (Само слово «алгоритм» происходит от латинского написания имени великого арабского математика аль-Хорезми, жившего в VIII – IX веке.)

Время работы компьютера зависит

от количества «элементарных операций», которые ему предстоит выполнить при реализации алгоритма. И *сложность алгоритма* определяется как необходимое число таких операций. Тема «сложность алгоритмов» стала одной из самых актуальных в современной математике. В этой статье мы обсудим вопрос о сложности алгоритмов сложения и умножения чисел.



Сложение и умножение

Рассмотрим простейший алгоритм сложения двух чисел столбиком. При применении этого алгоритма, например, к числам 1018 и 1105 – когда требуется сложить тысячу восемнадцать и тысячу сто пять в десятичной системе – на вход подается пара (1018, 1105) и мы поступаем так:

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1018 \\ + 1105 \\ \hline 2123 \end{array}$$

Произведено шесть элементарных операций по сложению однозначных чисел: $8 + 5 = 13$ (три пишем, один «в уме»), $1 + 1 + 0 = 2$, $0 + 1 = 1$, и, наконец, $1 + 1 = 2$. А меньше четырех и нельзя: ведь хоть по разу необходимо было употребить каждую цифру чисел.

А теперь умножим друг на друга два числа (в десятичной системе):

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times 1101 \\ \hline 1011 \\ 0000 \\ 1011 \\ 1011 \\ \hline 1113111 \end{array}$$

Сколько операций мы совершили здесь? Элементарных умножений $4 \times 4 = 16$, и еще некоторое количество сложений. Из этого примера вытекает, что при умножении двух n -значных чисел столбиком нужно произвести n^2 элементарных умножений (n^2 раз заглянуть в таблицу умножения и заведомо не больше по порядку n^2 раз произвести элементарные сложения.)

Упражнение 1. Покажите, что алгоритм деления в столбик n -значного числа на m -значное требует по порядку величины mn элементарных операций (не менее mn и не более $10mn$).

А какова сложность процедуры умножения? Каково минимальное необходимое число элементарных операций?

Умножение столбиком известно многие столетия, едва ли еще не со времени выхода в свет «Алгебры» аль-Хорезми. Эта процедура, которую все изучали еще в начальных классах средней школы, выглядит как самый быстрый алгоритм: ведь каждая цифра одного числа должна вроде бы провзаимодействовать с каждой цифрой другого.

Тем не менее, всего тридцать семь лет назад московским математиком Анатолием Александровичем Карацубой (тогда 25-летним молодым ассистентом, а ныне он профессор МГУ, известный специалист по теории чисел) было совершено открытие, которого трудно было ожидать. Он обнаружил метод, куда более эффективный, чем умножение в столбик!

Метод Карацубы

Пусть x и y – два $2n$ -значных десятичных числа:

$$x = (x_{2n-1}, \dots, x_0), \quad y = (y_{2n-1}, \dots, y_0), \\ x_i, y_i = 0, 1, \dots, 9.$$

Представим их в виде

$$x = 10^n \xi_1 + \xi_0, \quad y = 10^n \eta_1 + \eta_0, \quad (i)$$

где ξ_i, η_i – n -значные числа. Воспользовавшись тождеством

$$(\xi_1 - \xi_0)(\eta_0 - \eta_1) = \\ = -\xi_1 \eta_1 - \xi_0 \eta_0 + \xi_1 \eta_0 + \xi_0 \eta_1, \quad (ii)$$

получаем:

$$xy = \overset{(i)}{(10^n \xi_1 + \xi_0)} \overset{(ii)}{(10^n \eta_1 + \eta_0)} = \\ = (10^{2n} + 10^n) \xi_1 \eta_1 + \\ + 10^n (\xi_1 - \xi_0)(\eta_0 - \eta_1) + (10^n + 1) \xi_0 \eta_0.$$

Мы свели задачу умножения $2n$ -разрядных чисел к трем операциям для n -разрядных чисел $\xi_1 \eta_1$, $(\xi_1 - \xi_0)(\eta_0 - \eta_1)$, $\xi_0 \eta_0$ и еще к операциям сложения и сдвига.

На первый взгляд может показаться, что выигрыш по сравнению с обычным умножением незначителен – только $3/4$. Но ведь и сами n -значные числа мы будем умножать таким же образом! Поэтому множитель $3/4$ будет возникать при каждом удвоении числа разрядов. И, например, при умножении 1024-значных чисел накопится более чем десятикратный выигрыш.

Умножение Карацубы на n -значных числах будет эффективнее умножения в столбик по порядку величины в $C \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n}$ раз. Это дает оценку порядка $n^{\log_2 3} \approx n^{1.6}$ на число операций. В самом деле, пусть $2^k < n < 2^{k+1}$. Тогда $T(n)$ – число необходимых операций для умножения n -значных чисел – оценивается по порядку как $3^k = (2^k)^{\log_2 3} \approx n^{\log_2 3}$. Можно рас-

суждать и так. Из нашего построения вытекает рекуррентное неравенство

$$T(2n) \leq 3T(n) + cn,$$

из которого легко выводится асимптотическое неравенство

$$T(n) \ll n^{\log_2 3}.$$

Упражнение 2. Проведите соответствующие рассуждения аккуратно.

Продемонстрируем метод Карацубы на примере умножения чисел, с которыми мы оперировали: $1101 \cdot 1011$.

Воспользовавшись тождеством $(a_1 - a_0)(b_0 - b_1) = -a_1 b_1 - a_0 b_0 + a_1 b_0 + a_0 b_1$, представим четырехзначные числа A и B в виде $A = 10^2 a_1 + a_0$ и $B = 10^2 b_1 + b_0$, где a_0, a_1, b_0, b_1 – двузначные числа. Тогда

$$AB = (10^2 a_1 + a_0)(10^2 b_1 + b_0) = \\ = (10^4 + 10^2) a_1 b_1 + \\ + 10^2 (a_1 - a_0)(b_0 - b_1) + (10^2 + 1) a_0 b_0.$$

Видно, что достаточно произвести всего три умножения двузначных чисел $a_1 \times b_1$, $(a_1 - a_0) \times (b_0 - b_1)$ и $a_0 \times b_0$, на каждое из которых мы затратим не больше четырех элементарных умножений, т.е. всего мы затратим 12 умножений вместо 16 (и некоторое количество сложений).

В нашем случае

$$a_1 = 11, \quad a_0 = 1, \quad b_1 = 10, \quad b_0 = 11,$$

откуда

$$1101 \cdot 1011 = \\ = (10^2 \cdot 11 + 1) \cdot (10^2 \cdot 10 + 11) = \\ = (10^4 + 10^2) \cdot 11 \cdot 10 + 10^2 \cdot 10 \cdot 1 + \\ + (10^2 + 1) \cdot 1 \cdot 11 = 1113111.$$

Числа и многочлены

Первоначально метод Карацубы выглядел трюком. Но в следующем, 1963 году студент механико-математического факультета МГУ Андрей Тоом (он был участником первой международной математической олимпиады 1959 года, где получил третью премию) осознал природу этого метода и нашел его замечательное обобщение.

В чем идея метода Карацубы и Тоома? Известно, что многие свойства чисел и многочленов очень похожи. Многие проблемы, связанные с уравнениями, сперва решались для многочленов. Посмотрим на десятич-

ную запись некоторого числа x :

$$x = x_0 + x_1 10^1 + x_2 10^2 + \dots + x_n 10^n,$$

где x_i – цифры. Не правда ли, это очень похоже на запись многочлена? Да и умножению в столбик чисел соответствует умножение в столбик многочленов. (Разница только в отсутствии переноса разрядов у многочленов.)

А нельзя ли два многочлена умножить быстрее, чем в столбик, используя меньшее число умножений коэффициентов? Оказывается, можно! Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ – два многочлена степеней m и n соответственно. Тогда их произведение $P(t)Q(t)$ есть многочлен степени $m + n$. А он определяется своими значениями в $m + n + 1$ точке. Например, в точках $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(m + n)$. Поэтому, чтобы найти многочлен PQ , ищем значения P и Q в этих точках и перемножаем (получается $m + n + 1$ умножение). Тем самым мы найдем значения PQ в $m + n + 1$ точке, по которым восстанавливается PQ и находятся все его коэффициенты.

Например, пусть $P(t) = At + B$, $Q(t) = Ct + D$ – линейные двучлены. Их произведение – квадратный трехчлен $PQ(t) = (AC)t^2 + (BC + AD)t + (BD)$. Найдем его коэффициенты.

1. Находим $BD = P(0)Q(0)$ – первое умножение.

2. Находим $(A + B)(C + D) = P(1)Q(1)$ – второе умножение.

3. Находим $(B - A)(D - C) = P(-1)Q(-1)$ – третье умножение.

Беря полуразность выражений $(A + B)(C + D)$ и $(B - A)(D - C)$, находим второй коэффициент PQ , т.е. $BC + AD$, а вычитая BD из полусуммы $(A + B)(C + D)$ и $(B - A)(D - C)$, находим AC . И мы пришли почти что к формулам Карацубы!¹

Идея метода Карацубы – Тоома заключается в том, чтобы разбить запись $2n$ -значных чисел $X = AB$, $Y = CD$ на блоки по n разрядов. Тем самым числа X и Y представляются в виде $At + B$ и $Ct + D$, где $t = 10^n$ для десятичной системы счисления (в общем случае $t = q^n$, q – основание системы счисления). А после этого можно перемножить полученные (линейные) многочлены.

Теперь ясно, как обобщить этот метод. Попробуем разбивать числа не

¹ Разница только в том, что мы брали $(B - A)(D - C)$ – значение в (-1) , а Карацуба вместо этого брал AC – коэффициент при главном члене на бесконечности.

на два, а на большее число блоков. Например, на три. Пусть $x_1 = \overline{A_1 B_1 C_1}$, $x_2 = \overline{A_2 B_2 C_2}$ – разбиение $3n$ -значных чисел x_1, x_2 на блоки по n разрядов. Пусть $t = 10^n$. Тогда числа x_1, x_2 можно представить в виде $P(t) = A_1 t^2 + B_1 t + C_1$ и $Q(t) = A_2 t^2 + B_2 t + C_2$ соответственно. Будем действовать, как в предыдущем случае. Найдем произведение многочленов P и Q . Для этого найдем их значения в точках $0, \pm 1, \pm 2$ и перемножим. Получится 5 умножений k -значных чисел (и еще несколько сложений и умножений на 2 и 4). Далее, зная значения многочлена PQ в этих точках, найдем его коэффициенты. Они получаются путем умножения и деления на небольшие числа. Это требует не более 40 сложений (см. упражнение 1).

Таким образом, мы свели задачу умножения $3n$ -разрядных чисел к пяти операциям для n -разрядных чисел и еще к операциям сложения, деления на маленькие числа и сдвига. Это дает оценку порядка $n^{\log_3 5}$ на число операций. В самом деле, пусть $3^k < n < 3^{k+1}$. Тогда $T(n)$ (число необходимых операций для умножения n -значных чисел) оценивается по порядку как

$$5^k = (3^k)^{\log_3 5} \approx n^{\log_3 5} \approx n^{1.3}.$$

Упражнения

3. Выведите формулы для коэффициентов многочлена $R(t)$ четвертой степени по его значениям в точках $0, \pm 1, \pm 2$.

4. Пусть e – фиксированное натуральное число.

а) Докажите, что алгоритм «умножения в столбик» n -значных чисел на число e имеет сложность порядка n . Его сложность можно оценить величиной $10k \cdot n$, где k – число разрядов в числе e .

б) Докажите, что алгоритм «деления в столбик» n -значных чисел на число e имеет сложность порядка n . Его сложность можно оценить величиной $10k \cdot n$, где k – число разрядов в числе e .

5. Покажите, что для нахождения произведения двух квадратных трехчленов с n -значными коэффициентами достаточно ограничиться $5n$ -значными умножениями и $30n$ элементарными операциями.

6. Докажите рекуррентное неравенство

$$T(3n) \leq 5T(n) + 30n.$$

Выведите из него асимптотическое неравенство

$$T(n) \ll n^{\log_3 5}.$$

Естественно, десятичную запись чисел можно разбивать не на три, а на большее число блоков. Проведем об-

щее рассуждение. Пусть x и y – два $n(r + 1)$ -значных числа. Представим их в виде

$$x = 10^{rn} \xi_r + \dots + 10^n \xi_1 + \xi_0,$$

$$y = 10^{rm} \eta_r + \dots + 10^n \eta_1 + \eta_0$$

и положим

$$p(t) = \sum_{k=0}^r \xi_k t^k, \quad q(t) = \sum_{k=0}^r \eta_k t^k,$$

$$s(t) = \sum_{k=0}^{2r} \zeta_k t^k \Rightarrow xy = s(10^n).$$

В следующем пункте будет показано, что

Коэффициенты полинома $s(\cdot)$ вычисляются через линейные выражения от $2r + 1$ чисел $\{p(k)q(k)\}_{k=0}^{2r}$, и это требует $C(r)n$ операций.

Таким образом, нахождение произведения $n(r + 1)$ -значных чисел требует $2r + 1$ «больших умножений» $(n + D_r)$ -значных чисел, где D_r – некоторая константа, зависящая от r , и $C(r)n$ элементарных операций.

Упражнение 7. Докажите, что константу D_r можно положить равной числу знаков в числе $r^{r+1} = r \cdot t^r$, $t = r$.

В итоге приходим к оценке

$$T((r + 1)n) \leq (2r + 1)T(n + D_r) + cn.$$

Пусть

$$(r + 1)^s \leq n \leq (r + 1)^{s+1}.$$

Тогда легко видеть, что при некотором α_r имеет место неравенство

$$T(n) \leq \alpha_r (2r + 1)^s,$$

из которого вытекают асимптотические соотношения

$$T(n) \ll n^{\log_{r+1}(2r+1)} \ll n^{1 + \log_{r+1} 2}.$$

Поскольку для любого наперед заданного ϵ при достаточно большом r верно неравенство $r^\epsilon > 3$, то $r^{1+\epsilon} > 3r$. Теперь ясно, что можно выбрать такое r , что при достаточно больших n выполняется неравенство

$$T(n) < n^{1+\epsilon}.$$

Мы получили такой результат:

Теорема (А.Тоом). Для любого $\epsilon > 0$ существует такая постоянная $c(\epsilon)$ и такой метод умножения, что число элементарных операций $T(n)$, которые необходимо выполнить, чтобы умножить два n -разрядных числа, удовлетворяет оценке

$$T(n) \leq c(\epsilon)n^{1+\epsilon}.$$

Чтобы доказать теорему Тоома и построить алгоритм быстрого умно-

жения, нам надо решить задачу *интерполяции*, т.е. восстановления коэффициентов многочлена по его значениям.

Интерполяционные полиномы

Каждый многочлен степени k однозначно определяется своими значениями в $k + 1$ точке. В самом деле, пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – два многочлена степени k , совпадающие в $k + 1$ точке. Тогда их разность $P - Q$ обращается в ноль в этих точках и является многочленом степени не выше k . Но если многочлен степени не выше k имеет k нулей, то он тождественно равен нулю. Поэтому $P(x) \equiv Q(x)$. Однако нам нужно не просто доказать однозначность, а явно осуществить построение.

Построим многочлен k -й степени $R(x)$, принимающий в точках x_1, \dots, x_{k+1} значения y_1, \dots, y_{k+1} . Для этого достаточно уметь строить элементарные многочлены $R_i(x)$, принимающие значения 1 в точке x_i и 0 в остальных точках. Тогда многочлен $R(x)$ находится как сумма

$$\sum_{i=1}^{k+1} y_i R_i(x).$$

Чтобы обеспечить равенство нулю в точках $x_i, i \neq j$, рассмотрим произведение

$$q_i(x) = (x - x_1)(x - x_2) \times \dots \times \left(\overset{\wedge}{x - x_i} \right) \dots (x - x_{k+1}),$$

где $\left(\overset{\wedge}{x - x_i} \right)$ означает, что соответствующий множитель опускается.

Разделив многочлен $q_i(x)$ на его значение в точке x_i , мы получим многочлен

$$R_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)} \times \dots \times \frac{\left(\overset{\wedge}{x - x_i} \right) \dots (x - x_{k+1})}{\left(\overset{\wedge}{x_i - x_i} \right) \dots (x_i - x_{k+1})}.$$

Окончательно имеем:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{k+1} y_i \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)} \times \dots \times \frac{\left(\overset{\wedge}{x - x_i} \right) \dots (x - x_{k+1})}{\left(\overset{\wedge}{x_i - x_i} \right) \dots (x_i - x_{k+1})}.$$

Мы получили *интерполяционную формулу Лагранжа* для многочлена.

Найдем коэффициенты a_s многочлена R и коэффициенты a_{si} многочленов R_i . Воспользовавшись формулой Виета, получим

$$\sum_{j_1 < \dots < j_s; j_\alpha \neq i} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_s} / \left((x_i - x_1) \times \dots \times (x_i - x_2) \dots (x_i - x_i) \dots (x_i - x_{k+1}) \right).$$

Тогда

$$a_s = \sum_i y_i \cdot a_{si}.$$

Итак, мы получили формулы для коэффициентов интерполяционного полинома. Они быстро усложняются с ростом k – числа блоков, на которые разбивается запись числа. Это приводит к быстрому увеличению числа «малых» умножений. С другой стороны, только увеличение k позволяет экономить «большие» умножения. Компромисс зависит от числа разрядов умножаемых чисел.

Посмотрим на это чуть более подробно. В нашем случае x_i суть числа $0, \pm 1, \dots, \pm k$ – число блоков, на которые разбивается запись числа, степень многочлена PQ равна $2k$, $y_i = P(x_i)Q(x_i)$ имеют примерно $2 \cdot n/k$ разрядов. Поэтому формулы для восстановления коэффициентов PQ можно записать в виде

$$a_s = \left(\sum_{i=1}^{2k+1} y_i a_{is} \right) / \beta,$$

где β – общее кратное чисел

$$\tau_i = (x_i - x_1)(x_i - x_2) \times \dots \times \left(\overset{\wedge}{x_i - x_i} \right) \dots (x_i - x_n).$$

Несложно убедиться в том, что все τ_i делят $(2k + 1)!$ и что числа a_{is} имеют порядок $(2k + 1)!$. Таким образом, в качестве β можно взять $(2k + 1)!$, и количество разрядов в числах a_{is} и β примерно равно $2k \cdot \log_{10}(2k)$. (Это следует из формулы Стирлинга: $n! \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$ при больших n .) Итак, после осуществления $2k + 1$ «большого» умножения и нахождения y_i остается найти $2k + 1$ коэффициент многочлена PQ . Каждый такой коэффициент находится как сумма $2k + 1$ слагаемого $y_i a_{is}$. Одно-единственное деление на $\beta = (2k + 1)!$ можно произвести в самом конце. Последняя операция имеет сложность порядка $2k \cdot \log_{10}(2k)$. (Деление мы осуществляем в столбик.)

Если «малые» умножения осуществлять в столбик, то получается оценка

$$T(n) \leq (2k + 1)T(n/k) + (2k + 1)^2 2n/k \cdot 2k \log_{10} k + 2nk \log_{10} k.$$

Можно действовать оптимальнее, разбив десятичную запись y_i на блоки по $2k \log_{10}(2k)$ разрядов и умножая блоки с помощью быстрого умножения. Можно получить такую оценку:

$$T(n) \leq (2k + 1)T(n/k) + (2k + 1)^2 n/k^2 \cdot T(2k \log_{10} 2k) + 2nk \log_{10} k.$$

Конечно, процедуру вычисления коэффициентов a_{is} можно оптимизировать. Вель промежуточные вычисления для одного коэффициента можно использовать для другого.

Хотя вопросы оптимизации алгоритмов умножения весьма интересны, их более подробное обсуждение выходит за рамки данной статьи, главная цель которой – рассказать о самом факте быстрого умножения. А разработка и оптимизация соответствующих алгоритмов, вместе с их программной реализацией, может послужить темой хорошего доклада на научной конференции учащихся (впрочем, на «взрослой» конференции тоже). Поэтому мы предлагаем читателю следующую задачу:

Задача на исследование. *Разработайте алгоритмы умножения многозначных чисел. Исследуйте вопрос о числе блоков разбиения для каждого шага.*

Впоследствии были найдены более совершенные схемы (А.Тоом, С.Кук, А.Шенхаге). А.Шенхаге и Ф.Штрассен построили эффективно работающий алгоритм умножения с числом элементарных операций $\leq Cn \log n \log \log n$. Эти схемы помимо интерполяционных полиномов использовали так называемое *быстрое преобразование Фурье*. Если читатель хочет заняться предложенной задачей, то мы советуем ему обратиться к замечательной книге Д.Кнута «Искусство программирования» или написать нам по адресу kanel@mccme.ru или kanel@dnttm.ru.

Нет ничего элементарнее задачи нахождения произведения двух чисел. Этой задачей занимаются в начальной школе. Но компьютер в школе не учился! И оказалось, что для эффективного решения элементарной задачи умножения необходимы интерполяционные полиномы и довольно тонкие не вполне элементарные комбинаторные методы. Вероятно, в этом заключается одна из причин, по которым быстрое умножение было открыто сравнительно недавно.

Камера-обскура

В. СУРДИН, М. КАРТАШЕВ

История

На латинском языке «камера-обскура» означает просто «темная комната». Эта забава известна с античных времен: закрывшись в солнечный день в темной комнате и проделав в шторе окна маленькую дырочку, вы можете увидеть на противоположной, желательно белой, стене изображение улицы и прохожих... вверх ногами (рис.1). Принцип действия камеры-обскуры, по-видимому, был известен еще древним грекам, ею пользовались арабские ученые, а в Европе ее впервые подробно описал Леонардо да Винчи (конец XV века). Однако широкого применения классическая камера-обскура не находила: если отверстие для света сделать большим, то изображение получается размазанным, а крохотное отверстие дает резкое, но очень тусклое изображение; кроме того, для наблюдений необходимы абсолютно темное помещение и адаптированные к мраку глаза.

Но уже к середине XVI века камеру-обскуру оснастили линзовым объективом и зеркалом, в результате чего изображение в ней стало ярким и прямым, и она приобрела большую популярность, в особенности среди

не очень умелых художников, использовавших ее для точной зарисовки пейзажей. Существовали крупные обскуры – в человеческий рост, а были и портативные. Сегодня мы называем этот нехитрый оптический прибор прототипом фотоаппарата (рис.2 и 3).

К сожалению, после введения линзового объектива камера-обскура не изменила своего названия. Поэтому некоторые исторические сообщения вызывают недоумение. Так, можно прочесть, что для первых опытов по фотографии в 20–30 годах XIX века использовались камеры-обскуры. Ну, тут уж совершенно очевидно, что речь идет о линзовых камерах. Однако встречаются и более туманные сообщения. Известно, например, что независимо от Галилея пятна на Солнце открыл в 1611 году немецкий астроном Й.Фабрициус, используя для наблюдений телескоп и камеру-обскуру. Если с телескопом все более или менее ясно, то как Фабрициус мог заметить солнечные пятна с помощью простой обскуры – непонятно. Впрочем, еще в 1609 году Кеплер опубликовал сообщение о наблюдении 18 мая 1607 года на изображении солнечного диска в камере-обскуре маленького темного пятна, принято-

го им по ошибке за Меркурий. Такая ошибка простительна: диаметр центральной темной части (так называемой тени) типичного солнечного пятна составляет около 15 тыс. км, т.е. немногим больше диаметра такой планеты, как Земля или Венера. Меркурий вдвое меньше Земли, но и располагается к нам (проходя перед Солнцем) почти вдвое ближе солнечной поверхности, так что угловой размер Меркурия в этот момент близок к размеру солнечного пятна, и оба они составляют около $0,3'$. Вопрос в том, можно ли вообще заметить объект столь малого углового размера при помощи обыкновенной обскуры?

Конечно, простую обскуру можно использовать для наблюдения частных фаз солнечного затмения (рис.4). Тут и труда большого не нужно: даже щелки между листьями дерева успешно работают как настоящая обскура. Как-то раз одному из авторов этой статьи пришлось в утренние часы наблюдать затмение Солнца с помощью дырочки, проделанной кончиком карандаша в тетрадной обложке, – изображение было отличное. Но темные пятна – это довольно мелкая деталь на диске Солнца. Скорее всего, Фабрициус использовал линзовую обскуру. Иначе почему пятна на Солнце не были открыты задолго до появления телескопа? Линзовая обскура – это почти телескоп, это результат высоких технологий эпохи Возрождения. Ее необходимо отличать от простой, или классической, камеры-обскуры с объективом-дырочкой, изготовление которой было доступно людям во все века. Попробуем выяснить, на что способен именно такой, простейший прибор.

Практика

Сделайте обскуру и увидите сами, как это просто. Берете любую коробку сантиметров 15–30 в длину (годится жестянка от кофе или плотный пакет от молока). В доньшке делаете

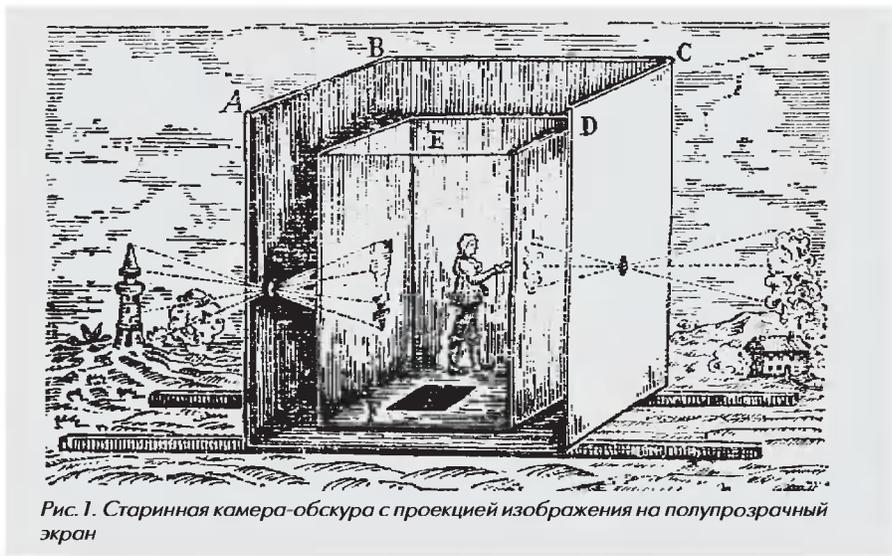


Рис. 1. Старинная камера-обскура с проекцией изображения на полупрозрачный экран

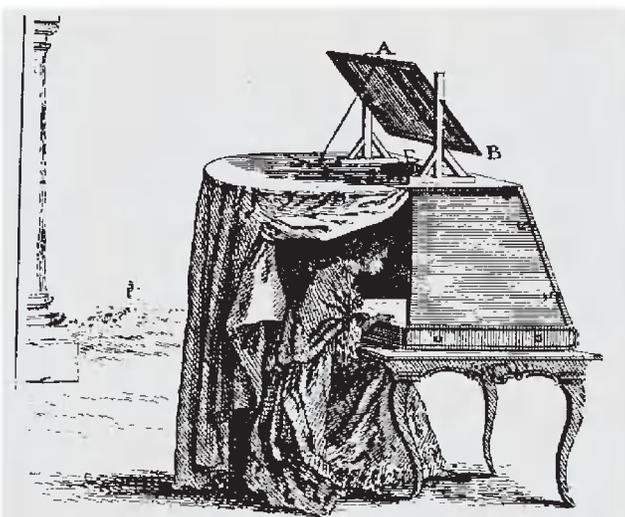


Рис.2. Камера-обскура с зеркалом (АВ) и линзовым объективом (Е), которую не изобрел, но подробно описал в своих книгах неаполитанский естествоиспытатель Дж.Порта

дырочку тонким шилом или толстой иглой (недаром американцы называют этот прибор не только «camera obscura», но и «pinhole camera»), а верхнее отверстие затягиваете промасленной бумагой. Идеально для этой цели подойдет круглая и длинная коробка от чипсов с белой матовой крышечкой – вам нужно только съесть чипсы и легким ударом шила проделать дырочку в доньшке.

Теперь, внимание: для наблюдений требуется яркий свет снаружи и темнота со стороны экрана. Поэтому лучше проводить опыт в солнечный день, находясь в помещении и тщательно изолировав экран от постороннего света. Для этого можно использовать трубу из плотной бумаги длиной 30–40 см, приставив ее одним концом к экрану, а другим – к лицу. Однако, если ваша камера круглая, лучше использовать пальто, накинув его на голову и вставив камеру в рукав. Для сравнения «объективов» сделайте в передней стенке несколько отверстий разных диаметров; каждый раз можно наблюдать с одним, закрывая остальные старой жевательной резинкой.

Итак, поэкспериментировав с обскурой, можно убедиться, что дырочка – неплохой объектив: все предметы, независимо от расстояния, получаются одинаково резкими, причем чем меньше отверстие, тем резче изображение. Правда, с совсем маленькой дырочкой трудно наблюдать: яркости не хватает. Но фотопленки сейчас очень чувствительные, уж они-то с этим справятся.

ры весьма ограничены. И вот почему.

Теория

Будем рассуждать так. От каждой светящейся точки удаленного объекта на нашу камеру падает пучок практически параллельных лучей света. Проходя сквозь отверстие диаметром D , пучок рисует на экране кружок такого же диаметра. Пусть расстояние до экрана F . Если угловое расстояние между двумя соседними точками объекта меньше чем D/F (в радианах, разумеется), то их кружки на экране будут частично перекрываться. При каком перекрытии кружков мы еще сможем различить соседние точки изображения – вопрос не простой. Многие зависит от контраста деталей исходного объекта, от яркости его изображения и т.п. Раз-

личить детали слабо контрастной картины удастся в том случае, если световые кружки совсем не перекрываются. Но поскольку пятна на Солнце выглядят весьма контрастно, будем считать картину различимой, если центры кружков раздвинуты на величину их радиуса. Тогда легко определить минимальный угловой размер различных деталей объекта, или, как говорят оптики, *пределный угол разрешения*, обусловленный конечным размером пучка:

$$\alpha_1 = \frac{D}{2F} \quad (1)$$

До сих пор мы рассматривали свет как поток прямолинейно распространяющихся лучей. Такой подход характерен для геометрической оптики. Однако известно, что свет – это разновидность электромагнитных волн, и, как любая волна, он подвержен явлениям дифракции и интерференции. Если на входное отверстие инструмента падает волна с плоским фронтом (т.е. пучок параллельных лучей), то за отверстием фронт становится немного изогнутым (а пучок – расходящимся). Это – дифракция; именно она ограничивает применимость законов геометрической оптики. Пройдя сквозь малое отверстие

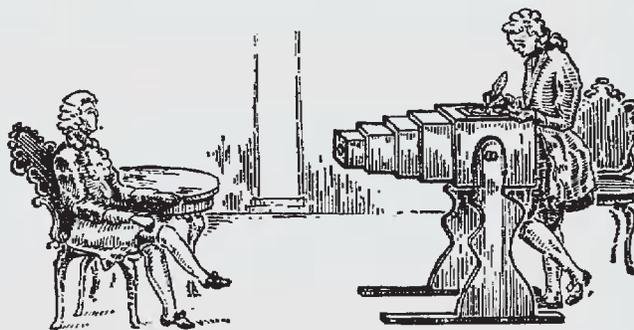


Рис.3. Старинная линзовая портативная обскура

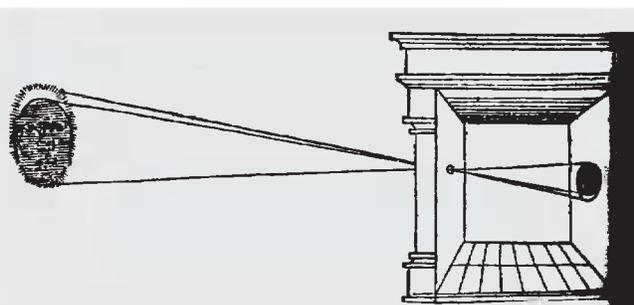


Рис.4. Первое опубликованное изображение классической камеры-обскуры из книги голландского врача и математика Р.Фрициуса: наблюдение солнечного затмения в Европе в январе 1544 года

камеры-обскуры, пучки света становятся расходящимися, картинка на экране – размытой. А чтобы узнать, насколько размытой, необходимо вспомнить способность света к интерференции, т.е. к взаимному сложению волн, приходящих в одну точку экрана от разных источников.

В нашем случае независимыми источниками света можно считать бесчисленное множество точек входной апертуры, ведь каждая из них из-за дифракции посылает свет во всех направлениях (принцип Гюйгенса – Френеля). Падающие на экран волны складываются друг с другом в соответствии со своими фазами, в некоторых точках усиливая друг дру-

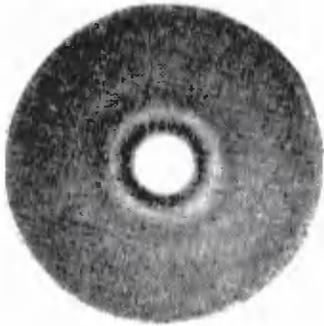


Рис. 5. Дифракционная картина изображения точечного источника круглым объективом

га, а в некоторых ослабляя. В результате получается следующая картина: пройдя сквозь маленькое круглое отверстие, пучок параллельных (вначале) лучей даст на экране светлое пятнышко, окруженное concentricкими темными и светлыми кольцами спадающей яркости (рис.5). Можно считать, что камера-обскура отображает на экране каждую точку светящегося объекта в виде такого светлого пятна, окруженного «зеброй» колечек. Обычно считается, что изображения двух соседних точек объекта можно различить на экране, если центры их светлых пятен раздвинуты не менее чем на радиус первого темного кольца (критерий Рэлея). Угол α_2 , под которым этот радиус виден от входного отверстия, можно оценить из тех соображений, что разность путей света от ближайшей и наиболее удаленной точек объектива до любой из точек на темном кольце должна быть порядка длины волны света λ . Тогда мы получим $\alpha_2 \approx \lambda/D$. А точный расчет дает следующее значение предельного угла разрешения, обуслов-

ленного дифракцией:

$$\alpha_2 = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (2)$$

Поскольку оба указанных эффекта – геометрический размер пучка и дифракция – накладываются друг на друга, можно считать, что полный предельный угол разрешения камеры составляет $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. В зависимости от размера отверстия он изменяется так, как показано на рисунке 6. Очевидно, что при некотором оптимальном диаметре отверстия ($D_{\text{опт}}$) достигается наилучшая разрешающая способность камеры данного размера (F), которую характеризует минимальное значение угла разрешения ($\alpha_{\text{мин}}$). Найти эти параметры нетрудно. Тем, кто знаком с производной, ясно, что своего минимального значения α достигает в точке, соответствующей условию $\alpha' = 0$. А для остальных тоже вполне очевидно из рисунка 6, что минимум достигается в той точке, где $\alpha_1 = \alpha_2$. Оба эти условия тождественны. Из них мы получим

$$D_{\text{опт}} = \sqrt{2,4\lambda F} \text{ и } \alpha_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{2,4\lambda}{F}}. \quad (3)$$

На что же способна оптимальная классическая камера-обскура? Для визуальных наблюдений примем длину волны видимого света $\lambda = 5500 \text{ \AA}$. Тогда можно представить наш результат в удобном для оценок виде:

$$D_{\text{опт}} = 1,2 \text{ мм} \cdot \sqrt{\frac{F}{1\text{м}}} \text{ и } \alpha_{\text{мин}} = 4' \cdot \sqrt{\frac{1\text{м}}{F}}, \quad (4)$$

где F измеряется в метрах. Как видим, у камеры «человеческого» размера ($F = 2-5 \text{ м}$) предельный угол разрешения больше, чем у здорового глаза (около $1'$). Значит, с ее помощью мы не увидим на поверхности Солнца более мелких деталей, чем позволяет видеть наш невооруженный глаз – разумеется, защищенный плотным светофильтром. В прежние времена роль такого светофильтра с успехом выполняли облака, дым пожара или просто толстый слой воздуха, сквозь который мы видим Солнце на восходе и на закате. В летописях некоторых народов упоминается о пятнах на Солнце, наблюдавшихся сквозь облака или дым и выглядевших «аки гвозди». В принципе, это возможно: хотя среднее солнечное

пятно имеет угловой размер около $0,3'$, изредка на Солнце появляются очень крупные пятна или их группы. Например, в марте 1947 года наблюдалась группа пятен размером около 200 тыс. км; похожие группы пятен наблюдались в 1957 и 1968 годах. Их угловой размер – $4'$ – без труда ощутим даже для не очень зоркого глаза, что и было доказано наблюдениями сквозь плотный светофильтр.

Внимание! Мы не зря уже второй раз упомянули о светофильтре – без него на Солнце смотреть нельзя! При этом должен быть очень темный фильтр, а вовсе не солнечные очки. Подойдет стекло сварщика или алюминированный целлофан, в который заворачивают букеты цветов.

Итак, хотя в древние времена люди изредка могли наблюдать солнечные пятна невооруженным глазом, научным фактом эти эпизодические наблюдения не стали: мало ли что может привидеться! Надежных и систематических наблюдений поверхности Солнца в древности не проводили (или сведения об этом не дошли до нас). Ну а в принципе могли бы астрономы, например, Древней Греции систематически наблюдать солнечные пятна при помощи классической обскуры? Как видно из формул 4, сделав камеру длиной 20–30 метров, можно получить прибор более зоркий, чем человеческий глаз. А со 100-метровой камерой можно было бы наблюдать солнечные пятна систематически. Уж не упустили ли древние греки свой шанс?

Вспомним, что с удалением экрана от объектива возрастает угловой размер изображения и, следовательно,

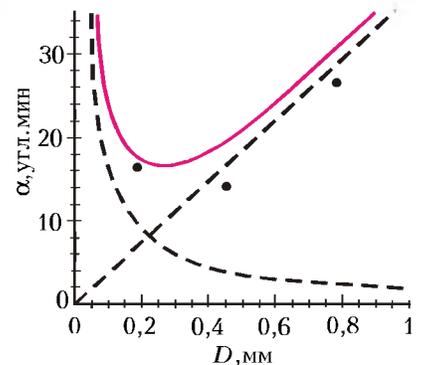


Рис. 6. Предельный угол разрешения α камеры-обскуры в зависимости от диаметра ее отверстия D . Расстояние от экрана до отверстия $4,6 \text{ см}$; длина световой волны $\lambda = 4300 \text{ \AA}$. Пунктирные линии соответствуют уравнениям (1) и (2), сплошная линия – их сумма, черные точки – экспериментальные значения

падает яркость. Видимый диаметр солнечного диска около $0,5^\circ$, точнее – $32'$, диаметр его изображения на экране простой камеры-обскуры составит $F/107$. При размере камеры в 100 м диаметр изображения солнечного диска будет около 1 м. Сюда придет свет, прошедший сквозь отверстие объектива диаметром 1,2 см, значит, освещенность ослабнет почти в 10 тысяч раз. Не слишком ли тусклым будет изображение? Как известно, освещенность земной поверхности Солнцем составляет 10^5 лк; следовательно, освещенность нашего изображения будет около 10 лк. Это в десятки раз больше, чем когда Луна освещает Землю в полнолуние. Без особого труда можно различать буквы в тексте, а ведь размер солнечных пятен на метровом изображении его диска будет около 1 см – такие детали трудно будет не заметить.

Итог: теоретически древние греки могли бы использовать классическую обскуру для изучения поверхности Солнца!

Опыт

Для проверки наших теоретических представлений о качестве изображения в камере-обскуре мы поставили опыт: заменили объектив у фотоаппарата «Зенит» кусочком фольги с булавочным отверстием и сфотографировали с помощью этого «объектива» специально изготовленную таб-

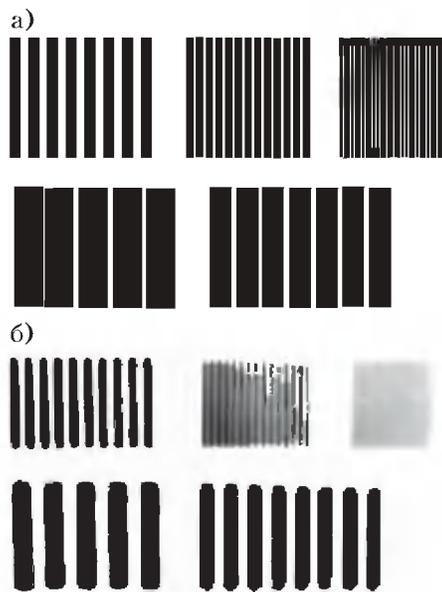


Рис. 7. Тестовая таблица (а) и ее изображение (б), сфотографированное камерой-обскурой на основе фотоаппарата «Зенит» ($D = 0,42$ мм, $F = 4,6$ см)

лицу (рис. 7). Расстояние от таблицы до отверстия было 30 см, а от отверстия до пленки – 4,6 см. Мы испытали три отверстия с диаметрами 170, 420 и 840 мкм. Таблица освещалась настольной лампой, чувствительность фотопленки была 64 ед., а экспозиции составляли от нескольких секунд до нескольких минут в зависимости от диаметра отверстия. Сделав отпечатки с негативов, мы определили по видимости линий таблицы на фотографиях предельный угол разрешения камеры. Он оказался даже немного меньше расчетного, что, по-видимому, объясняется очень высокой контрастностью исходного изображения и его линейным характером: прямые линии легче выявляются среди шумов изображения, чем точки. В целом же наша простая теория, как видим, вполне согласуется с экспериментом.

Убедившись в этом, мы решили, что пора наблюдать Солнце и попытаться с помощью камеры-обскуры увидеть на нем пятна. Эксперимент был поставлен 19 мая 1998 года в Астрономическом институте им. П.К.Штернберга (МГУ) при любезном содействии старшего научного сотрудника отдела исследования Солнца И.Ф.Никулина. Создать камеру длиной 100 и даже 50 метров нам, к сожалению, не удалось. Мы использовали в качестве корпуса обскуры трубу вертикального солнечного телескопа длиной 17 м. Зеркальный объектив этого инструмента находится в его нижней части, поэтому труба до объектива представляет просто светозащищенный объем без оптических элементов. Удобно и то, что система плоских зеркал (целостат) перед трубой телескопа постоянно поддерживает направление его оптической оси на Солнце. Входное отверстие трубы мы закрыли плотной крышкой с круглой дырочкой диаметром 5 мм. В нижней части трубы на листе белой бумаги мы увидели яркое изображение Солнца диаметром 16 см с хорошо различимой группой из двух пятен. Это был момент торжества – солнечный телескоп-обскура действует!

Последующее изучение Солнца в нормальный оптический инструмент показало, что в этот день на поверхности нашего светила действительно были пятна: группа из двух больших пятен с размерами $15''$ и $17''$, разделенных расстоянием в $1'$, а также

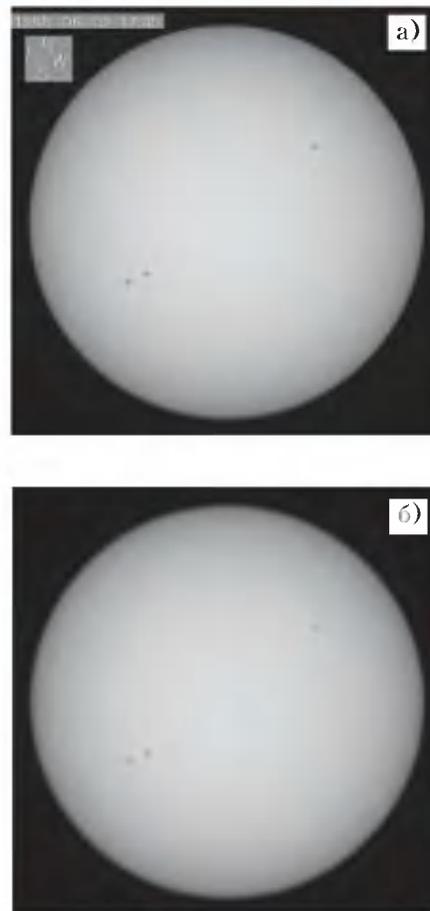


Рис. 8. Изображения поверхности Солнца, полученные 2 июня 1998 года с помощью оптического телескопа (а) и камеры-обскуры (б)

несколько маленьких с размерами $3 - 5''$. Маленьких пятен с помощью обскуры мы не заметили, а два больших пятна (впрочем, вполне рядовых для Солнца) были весьма отчетливо видны по отдельности. Мы продолжили наблюдения и в последующие дни, отмечая по движению пятен вращение Солнца. На фото на рисунке 8 показана поверхность Солнца в день 2 июня 1998 года, сфотографированная с помощью солнечного телескопа (а) и полученная на экране нашего телескопа-обскуры (б).

Галилей и Фабрициус открыли солнечные пятна лишь после изобретения оптического телескопа, хотя, как мы теперь видим, такая возможность существовала еще во время египетских пирамид. Быть может, эта мысль натолкнет читателей «Кванта» на размышления о неиспользованных возможностях нашего времени? Кстати, Фабрициусу, когда он открыл солнечные пятна, было немногим более 20 лет.



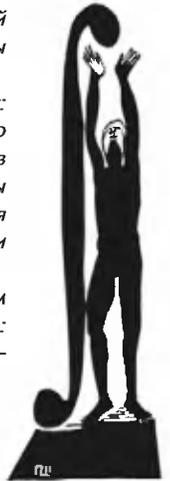
Задачи

по математике и физике



Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1999 года по адресу: 7296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала и по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. Но конверте в афе «Кому» напишите: «Задочник «Кванта» №2 — 99» и номер задачи, решения которых Вы высылаете, например «М1676» или «Ф1683». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя можно писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (но конверте пометьте: «Задочник «Кванта», новая задача по физике» или «Задочник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь. Задача М1677 предлагалась на Московской городской олимпиаде по математике этого года. Задача Ф1685 предлагалась на втором (очном) туре V Соросовской олимпиады по физике.



Задачи М1676 — М1680, Ф1683 — Ф1687

М1676. Отрезок AB разбит на черные и белые отрезки так, что сумма длин черных равна сумме длин белых отрезков. Для каждого черного отрезка берем произведение его длины на расстояние от точки A до его середины и все такие произведения суммируем. Для каждого белого отрезка берем произведение его длины на расстояние от точки B до его середины и все такие произведения тоже суммируем. Докажите, что обе суммы равны.

В.Произволов

М1677. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Окружность, проходящая через точки A , O и B , касается прямой BC . Докажите, что окружность, проходящая через точки B , O и C , касается прямой CD .

А.Заславский

М1678. В таблице из $n \times n$ клеток ($n \geq 3$) в каждой строке и в каждом столбце ровно в трех клетках записаны какие-либо числа, остальные клетки пустые. При этом сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце одна и та же. Докажите, что сумма произведений чисел, стоящих в каждой строке, равна сумме произведений чисел, стоящих в каждом столбце.

В.Произволов

М1679. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ задаются следующим образом. Выбираются два произвольных числа $a_0 > 0$ и $b_0 < 0$. Числа a_{n+1} и b_{n+1} принимаются равными, соответственно, положительному и отрицательному кор-

ням уравнения $x^2 + a_n x + b_n = 0$. Найдите пределы обеих последовательностей.

А.Заславский, А.Поспелов

М1680. Числовая последовательность задается равенством $x_n = n^3 + C$, где n принадлежит натуральному ряду.

а) Пусть C — натуральное число. Докажите, что любые три идущие подряд члена последовательности не имеют общего делителя (отличного от 1).

б) Пусть C является кубом натурального числа. Докажите, что существуют соседние члены последовательности, не являющиеся взаимно простыми числами.

в)* Существует ли такое натуральное число C , что любые соседние члены последовательности взаимно просты?

В.Сеидеров

Ф1683. Мотор на берегу равномерно наматывает на вал веревку, с помощью которой подтягивается к берегу лодка. В данный момент веревка составляет угол α с горизонтом, а скорость лодки равна v . На веревке завязан небольшой узелок — в указанный момент он вдвое ближе к носу лодки, чем к валу, на который наматывается веревка. Найдите скорость и ускорение узелка в данный момент времени.

С.Варламов

Ф1684. Для снабжения небольшого дома горячей водой применено не самое удачное устройство. Оно состоит из очень большого бака с теплоизоляцией, от которого потребители получают маленькими порциями горячую воду, и автоматического устройства, которое сразу же пополняет бак крутым кипятком. Оказалось, что при

стандартном количестве потребляемой воды температура воды в баке составляет $+60^\circ\text{C}$ при температуре окружающего воздуха $+20^\circ\text{C}$. Какая температура установится в баке при увеличении расхода воды вдвое? Теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур.

А.Зильберман

Ф1685. Оцените, на какой высоте над Землей находится центр тяжести столба воздуха, нависающего над стадионом «Лужники». Когда он расположен выше – летом или зимой? При расчете можно считать, что температура воздуха на любой высоте равна температуре земной поверхности.

А.Чувилов

Ф1686. Сто батареек с одинаковыми параметрами соединили последовательно, при этом двадцать из них оказались подключены с противоположной к остальным полярностью. Концы получившейся цепочки соединили, получив замкнутое кольцо. Параллельно одной из батареек подключили вольтметр (его сопротивление во много раз больше внутреннего сопротивления батареек), и он показал напряжение 1,6 В. Что покажет вольтметр, если его подключить к какой-нибудь другой батарейке?

М.Учителев

Ф1687. Точечный источник света движется с постоянной скоростью v_0 по прямой, составляющей небольшой угол α с главной оптической осью собирающей линзы. Траектория источника пересекается с упомянутой осью на двойном фокусном расстоянии от линзы. Найдите минимальную скорость изображения в линзе относительно движущегося источника.

А.Повторов

Решения задач М1651 – М1660, Ф1668 – Ф1672

М1651. Найдите а) наименьшую, б) наибольшую возможную площадь выпуклой фигуры, все проекции которой на оси Ox , Oy и прямую $x = y$ суть отрезки единичной длины.

Ответ: а) $\sqrt{2} - 1$; б) $\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}$.

Для обоих случаев а) и б) фигура F , о которой идет речь в задаче, заключается внутри шестиугольника, являющегося пересечением трех полос (шириной 1 каждая) (рис. 1). Назовем такой шестиугольник накрывающим. В случае

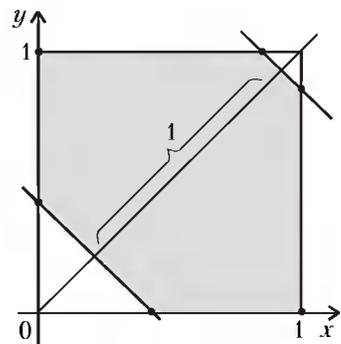


Рис. 1

б) фигура F совпадает с накрывающим шестиугольником, достигая наибольшей площади тогда, когда накрывающий шестиугольник симметричен относительно обеих диагоналей квадрата. Эта наибольшая площадь равна $\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}$, как показывают элементарные вычисления.

Минимальная площадь фигуры F (случай а)) ре-

ализуется на многоугольнике, который на каждой стороне накрывающего шестиугольника имеет по крайней мере одну вершину. Таким многоугольником будет четырехугольник $ABCD$ (рис. 2), который во всех разновидностях накрывающих шестиугольников имеет одну и ту же площадь $\sqrt{2} - 1$.

В.Тиморин

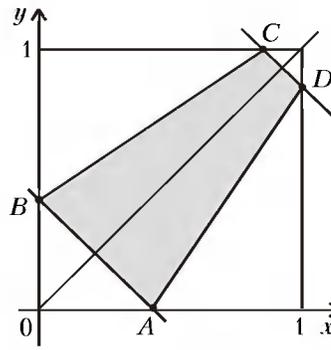


Рис. 2

М1652. Внутри параболы $y = x^2$ расположены окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ так, что каждая окружность ω_{n+1} касается ветвей параболы и внешним образом – окружности ω_n . Найдите радиус окружности ω_{1998} , если известно, что диаметр окружности ω_1 равен 1 и она касается параболы в ее вершине.

Ответ: $r_{1998} = 1997,5$. Обозначим радиус n -й окружности через r_n . Тогда уравнение $(n+1)$ -й окружности имеет вид

$$x^2 + (y - (2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_n + r_{n+1}))^2 = r_{n+1}^2.$$

Поскольку эта окружность касается параболы $y = x^2$, уравнение

$$y + (y - (2S_n + r_{n+1}))^2 = r_{n+1}^2,$$

где

$$S_n = r_1 + r_2 + \dots + r_n,$$

имеет только один корень. Раскрыв скобки, получаем уравнение

$$y^2 - (4S_n + 2r_{n+1} - 1)y + 4S_n^2 + 4S_n r_{n+1} = 0.$$

Приравняв его дискриминант $(4S_n + 2r_{n+1} - 1)^2 - 4(4S_n^2 + 4S_n r_{n+1}) = (2r_{n+1} - 1)^2 - 8S_n$ нулю, находим (ибо $r_{n+1} \geq 1/2$) величину $r_{n+1} = (\sqrt{8S_n} + 1)/2$.

По условию задачи, $r_1 = 1/2$. Легко найти $r_2 = 3/2$, $r_3 = 5/2$. Возникает гипотеза, что

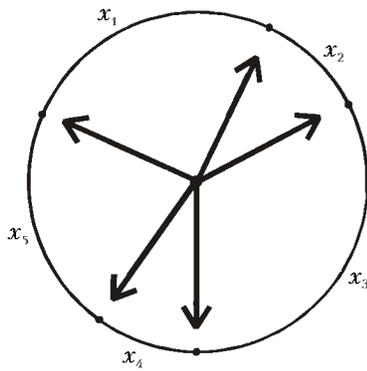
$$r_{n+1} = n + \frac{1}{2}.$$

Ее легко доказать по индукции: если $r_n = n - \frac{1}{2}$ при некотором натуральном n , то

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{\sqrt{8\left(\frac{1}{2} + \dots + \left(n - \frac{1}{2}\right)\right)} + 1}{2} = \\ &= \sqrt{1 + 3 + \dots + (2n - 1)} + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

М.Евдокимов

М1653. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые из них перевести вперед. Для каждого часа время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?



Ответ: за 24 часа. Отметим на циферблате положения часовых стрелок всех пяти часов (см. рисунок). Циферблат разобьется на пять секторов. Занумеруем их по кругу. Пусть часовая стрелка пройдет секторы за x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 часов соответственно. (Некоторые из этих чисел, возможно, нулевые; сумма $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ равна 12 часам.)

Чтобы перевести все часы на начало первого сектора, необходимо затратить $S_1 = (x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + (x_3 + x_4 + x_5) + (x_4 + x_5) + x_5 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5$ часов. Аналогично можно посчитать величины S_2, S_3, S_4 и S_5 , где S_i – время, необходимое для установки всех часов на начало i -го сектора. Следовательно, $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = (1 + 2 + 3 + 4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 10 \cdot 12 = 120$ часов; наименьшая из величин S_i не превосходит $120 : 5 = 24$ часа.

С другой стороны, если $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ (например, если часы показывают 12 ч, 2 ч 24 мин, 4 ч 48 мин, 7 ч 12 мин и 9 ч 36 мин), то все S_i равны 24 часам. Менее чем 24 часами в такой ситуации не обойтись.

О.Подлипский

M1654. Через основания L и M биссектрисы BL и медианы BM неравностороннего треугольника ABC провели прямые параллельно, соответственно, сторонам BC и BA до пересечения с прямыми BM и BL в точках D и E . Докажите, что угол BED прямой.

Первое решение. Обозначим $O = LD \cap ME$, и пусть точка O лежит внутри треугольника ABC (именно такое

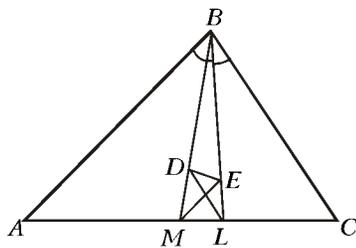


Рис. 1

расположение было предложено рассмотреть на олимпиаде). ME – медиана треугольника MBC (рис.1), а значит, и треугольника MDL , т.е. $OL = OD$. Далее, $\angle DLB = \angle LBC$, $\angle MEL = \angle ABL = \angle LBC$. Получили: $\angle MEL = \angle DLB$, $OL = OE$.

Итак, в треугольнике LED медиана EO равна половине стороны LD . Следовательно, угол DEL прямой, откуда сразу следует утверждение задачи.

Случай внешнего расположения точки O рассматривается аналогично. А можно и не рассматривать этот случай, а просто сослаться на такое почти очевидное предложение.

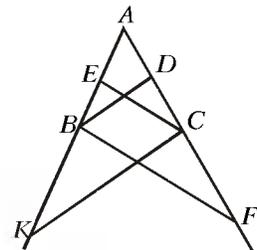


Рис. 2

Лемма. Пусть B и C – произвольные точки на выходящих из A лучах (рис.2), $BD \parallel CK$, $CE \parallel BF$. Тогда и $ED \parallel KF$. Доказательство следует из теоремы Фалеса; легко получить его и с помощью векторов.

С помощью векторов нетрудно получить и естественное решение исходной задачи.

Второе решение. Ниже мы будем рассматривать векторы в базисе $\{\vec{a}, \vec{c}\}$, где $\vec{a} = \vec{BC}$, $\vec{c} = \vec{BA}$, длины этих векторов обозначим через a и c соответственно.

Имеем: $\vec{BL} = \vec{c} + \frac{c}{a+c}(\vec{a} - \vec{c}) = \frac{1}{a+c}(a\vec{c} + c\vec{a})$.

Обозначим $\vec{BE} = \alpha \vec{BL}$, тогда

$$\alpha \vec{BL} + \vec{EM} = \vec{BM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}).$$

Приравняем проекции левой и правой частей этого равенства на вектор \vec{a} : $\frac{\alpha c}{a+c} = \frac{1}{2}$, откуда $\alpha = \frac{a+c}{2c}$.

Аналогично, положив $\vec{BD} = \beta \vec{BM}$, получим $\beta \vec{BM} + \vec{DL} = \vec{BL}$; проектируя обе части этого равенства на \vec{c} , находим $\frac{\beta}{2} = \frac{a}{a+c}$.

Получили $\vec{BE} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{a}{2c}\vec{c}$, $\vec{BD} = \frac{a}{a+c}(\vec{a} + \vec{c})$. Таким

образом, $\frac{\vec{BE}}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{c}}{c}\right)$ – это высота треугольника,

построенного на единичных векторах $\frac{\vec{a}}{a}$ и $\frac{\vec{c}}{c}$. Далее,

$\frac{\vec{BD}}{a} = \frac{1}{a+c}\left(a \cdot \frac{\vec{a}}{a} + c \cdot \frac{\vec{c}}{c}\right)$ – (внутренняя) точка основа-

ния этого треугольника, отличная от основания высоты.

Поэтому очевидно (рис.3), что $\frac{\vec{BD}}{a} - \frac{\vec{BE}}{a} \perp \vec{BE}$ – и утверждение задачи доказано.

Разумеется, к этому решению можно было подойти более формально: вектор $\vec{BD} - \vec{BE} = \frac{a(a-c)}{2(a+c)}\left(\frac{\vec{a}}{a} - \frac{\vec{c}}{c}\right)$ параллелен

основанию треугольника. А можно было и воспользоваться понятием скалярного произведения:

$$\left(\vec{BD}, \vec{BE}\right) = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{(\vec{a}, \vec{c})}{ac}\right),$$

$$\left(\vec{BE}, \vec{BE}\right) = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{(\vec{a}, \vec{c})}{ac}\right).$$

А.Акопян, В.Сендеров

M1655. Существуют ли 1998 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на квадрат их разности?

Ответ: да, существуют. Скажем, что набор чисел удовлетворяет условию U , если произведение любых двух чисел набора делится нацело на квадрат их разности.

Пусть набор $N = \{a_1, \dots, a_n\}$ состоит из чисел, удовлетворяющих данному условию U . Тогда набор $N_1 = \{b_1, \dots, b_n, b_{n+1}\}$, где $b_1 = a_1, \dots, b_n = a_n, b_{n+1} = 0$, также удовлетворяет U . Прибавим к каждому b_i число $c = (b_2 - b_1)^2 \cdot (b_3 - b_2)^2 \cdot (b_3 - b_1)^2 \cdot \dots \cdot (b_{n+1} - b_n)^2$. Получим набор N_2 , состоящий из натуральных чисел и также удовлетворяющий U , так как $((b_i + c) - (b_j + c))^2 = (b_i - b_j)^2$ и $(b_i + c)(b_j + c) = b_i b_j + c(b_j + b_i + c)$ – делится на $(b_i - b_j)^2$.

Поэтому, взяв в качестве исходного набора $N_1 = \{1, 2\}$, последовательным применением указанной процедуры мы сможем получить набор из 1998 натуральных чисел, удовлетворяющий условию U .

Г.Гальперин

M1656. Даны два выпуклых многоугольника. Известно, что расстояние между любыми двумя вершинами первого не больше 1, расстояние между любыми двумя вершинами второго также не больше 1, а расстояние между любыми двумя вершинами разных многоугольников больше чем $1/\sqrt{2}$. Докажите, что многоугольники не пересекаются.

Обозначим через F_1 и F_2 данные многоугольники. Предположим, что они имеют общую внутреннюю точку. Возможны два случая.

1) Один многоугольник содержится внутри другого, скажем, F_1 лежит внутри F_2 . Пусть A – одна из вершин F_1 . Тогда, как легко видеть, найдутся три вершины P, Q, R многоугольника F_2 такие, что треугольник PQR содержит A (случай, когда A лежит на стороне треугольника PQR , легко приводит к противоречию). При этом хотя бы один из углов PAQ, QAR, RAP больше 90° . Пусть для определенности $\angle PAQ \geq 90^\circ$. Тогда имеем: $1 \geq PQ^2 \geq AP^2 + AQ^2$. Получаем, что, вопреки условию,

один из отрезков AP и AQ не больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$ – противоречие.

2) Сторона одного многоугольника пересекает сторону другого. Пусть, например, сторона AB многоугольника F_1 пересекает сторону PQ многоугольника F_2 . Пусть $APBQ$ – выпуклый четырехугольник (случай, когда среди точек A, B, P, Q найдутся три, лежащие на одной прямой, легко рассматривается). Хотя бы один из его углов, скажем PAQ , не меньше 90° . Тогда $1 \geq PQ^2 \geq AP^2 + AQ^2$, следовательно, один из отрезков

AP и AQ не больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Получаем противоречие.

В.Дольников

M1657. Назовем лабиринтом шахматную доску 8×8 , на которой между некоторыми полями поставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа находится край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Марья Ивановна пишет программу – конечную последовательность указанных команд – и дает ее Вовочке,

после чего Вовочка выбирает лабиринт и помещает ладью на любое поле. Верно ли, что Марья Ивановна может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе Вовочки?

Ответ: верно. Чтобы написать такую универсальную программу, Марья Ивановна может рассуждать таким образом.

Занумеруем возможные начальные положения, т.е. пары (лабиринт, положение ладьи). Их конечное число. Составим программу P_1 обхода всех полей для первого начального положения. Предположим теперь, что начальным было положение номер 2. Применим программу P_1 . Если ладья обошла не все поля, допишем в конце несколько команд, чтобы обойти оставшиеся поля. Получим программу P_2 . Применим программу P_2 к ладье в третьем начальном положении, снова допишем программу и так далее.

В.Уфнарковский, А.Шаповалов

M1658. Обозначим через $S(x)$ сумму цифр числа x . Существуют ли такие натуральные числа a, b и c , что $S(a + b) < 5$, $S(a + c) < 5$ и $S(b + c) < 5$, но $S(a + b + c) > 50$?

Подойдут, например, числа $a = 5555554445$, $b = 5554445555$, $c = 4445555555$. Убедимся в этом: $S(a + b) = S(11110000000) = 4$, $S(a + c) = S(10001110000) = 4$, $S(b + c) = S(10000001110) = 4$, $S(a + b + c) = S(15555555555) = 51 > 50$.

Как можно придумать такие числа? Заметим, что $S(2(a + b + c)) = S((a + b) + (a + c) + (b + c)) \leq S(a + b) + S(a + c) + S(b + c) \leq 12$. Значит, число $n = 2(a + b + c)$ при делении на 2 должно резко увеличить свою сумму цифр. Такое возможно, если в числе много единиц, а в частном много пятерок. Возьмем, например, $n = 3111111110$, тогда $S(n) = 12$ и $S(n/2) = 51$. Разложим n на три слагаемых с суммой цифр 4 и меньших $\frac{n}{2}$: $n = 1111000000 + 1000111000 + 10000001110$, а затем решим систему уравнений $a + b = 1111000000$, $a + c = 1000111000$, $b + c = 10000001110$. Получим искомым пример.

С.Волченков, Л.Медников

M1659*. Фигура Φ , составленная из клеток 1×1 , обладает следующим свойством: при любом заполнении клеток прямоугольника $m \times n$ числами, сумма которых положительна, фигуру Φ можно так расположить в прямоугольнике, чтобы сумма чисел в клетках прямоугольника под фигурой Φ была положительна (фигуру Φ можно поворачивать). Докажите, что данный прямоугольник может быть покрыт фигурой Φ в несколько слоев.

Пусть Φ_1, \dots, Φ_k – все возможные расположения фигуры Φ в прямоугольнике. Утверждение задачи можно переформулировать так: можно взять фигуры Φ_i такой толщины d_i , $i = 1, \dots, k$ (d_i рационально, возможно $d_i = 0$), что суммарная толщина всех фигур Φ_i над каждой клеткой прямоугольника будет равна 1.

Возможность такой переформулировки усматривается из того, что найдется такое натуральное число N , что все Nd_i станут целыми неотрицательными числами.

Предположим, что переформулированное утверждение

неверно. Покажем, что тогда существует такое заполнение клеток прямоугольника числами, при котором сумма всех чисел положительна, а сумма чисел в клетках, закрываемых фигурой при любом ее положении, – неположительна.

Введем обозначения: индексом j , $j = 1, \dots, m \times n$, будем нумеровать клетки прямоугольника, индексом i , $i = 1, \dots, k$, – положения фигуры Φ на прямоугольнике.

Положим $P_{ij} = 1$, если j -я клетка закрыта фигурой Φ_i , $P_{ij} = 0$, если не закрыта. Тогда набору чисел $\{d_i\}$ соответствует заполнение клеток прямоугольника числами

$\theta_j = 1 - \sum_i d_i P_{ij}$, характеризующими уклонение покрытия прямоугольника фигурами от равномерного.

По нашему предположению все числа θ_j не могут быть равными нулю.

Выберем числа $d_j \geq 0$ так, чтобы величина $|\theta|$ уклонения

была минимальна, где $|\theta|^2 = \sum_j \theta_j^2$. Покажем, что полу-

чившиеся числа θ_j образуют искомое заполнение клеток прямоугольника. При этом обоснование существования набора $\{d_i\}$, который минимизирует $|\theta|$, читатель без большого труда проведет самостоятельно.

Заменим одно число d_i на $d'_i = d_i + x$, $x \geq -d_i$. Тогда

$$\theta'_j = \theta_j - x P_{ij}, \text{ следовательно, } |\theta'|^2 = \sum_j \theta_j'^2 = \sum_j \theta_j^2 - 2x \sum_j \theta_j P_{ij} + x^2 \sum_j P_{ij}^2, \text{ т.е. } |\theta'|^2 = y(x) = ax^2 - 2b_j x +$$

$+c$. Здесь $a = \sum_j P_{ij}^2 = \sum_j P_{ij} = N$, где N – число клеток

в фигуре, $c = |\theta|^2$. Квадратный трехчлен $y = y(x)$, заданный на множестве $x \geq -d_i$, принимает наименьшее значение при $x = 0$ в случае $b_j = 0$, если $d_i > 0$, и в случае $b_j \leq 0$, если $d_i = 0$. Таким образом, предположив, что $|\theta|$ минимален на наборе $\{d_i\}$, мы получаем, что если $d_i > 0$,

то $b_i = \sum_j \theta_j P_{ij} = 0$, а если $d_i = 0$, то $b_i \leq 0$. Значит, сумма чисел, закрываемых фигурой Φ_i , а это $\sum_j \theta_j P_{ij}$, – неположительна; с другой стороны, сумма всех чисел в

прямоугольнике положительна, так как она равна $\sum_j \theta_j$,

а $\sum_j \theta_j = \sum_j \theta_j^2$. Действительно,

$$\sum_j \theta_j^2 = \sum_j \theta_j \left(1 - \sum_i d_i P_{ij} \right) = \sum_j \left(\theta_j - \sum_i d_i (\theta_j P_{ij}) \right) =$$

$$= \sum_j \theta_j - \sum_{i, d_i > 0} \sum_j \theta_j P_{ij} = \sum_j \theta_j,$$

так как $b_i = 0$ при $d_i > 0$.
Этим завершается решение задачи.

А.Белов

M1660*. В стране 1998 городов. Из каждого осуществляются беспосадочные авиарейсы в три других города (все рейсы двусторонние). Известно, что из любого города, сделав несколько пересадок, можно долететь до любого другого. Министерство Безопасности хочет

объявить закрытыми 200 городов, никакие два из которых не соединены авиалинией. Докажите, что это можно сделать так, чтобы можно было долететь из любого незакрытого города в любой другой, не делая пересадок в закрытых городах.

Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, ребрами – авиалинии. По условию получится связный граф, степени вершин которого равны трем.

Предположим, что в графе есть два пересекающихся (по вершине) цикла. Тогда рассмотрим вершину O , в которой они «разветвляются». Эта вершина, очевидно, имеет степень три. Удалим эту вершину и три выходящих из нее ребра OA , OB , OC . Нетрудно заметить, что граф сохранил связность, так как существует путь, соединяющий вершины A , B и C .

Рассмотрим полученный граф. Если в нем есть два пересекающихся цикла, то повторим операцию, и так далее. Очевидно, что никакие две удаленные вершины не соединены ребром в исходном графе, так как мы удаляли только вершины степени три, а после каждой операции степени вершин, соседних с удаленными, уменьшались, т.е. они не могут стать равны трем.

Предположим, что в связном графе n вершин и не менее

чем $\frac{4}{3} \cdot n$ ребер. Докажем, что в таком графе обязательно есть два пересекающихся цикла. Предположим, что это не так. В силу связности графа в нем можно выделить дерево с n вершинами. Будем «возвращать» в граф оставшиеся после выделения дерева ребра. Добавление каждого ребра увеличивает количество циклов по крайней мере на один. Однако, если какое-либо ребро добавит не менее двух циклов, они будут пересекающимися, что противоречит нашему предположению. С другой стороны, каждый цикл содержит не менее чем три вершины, и никакая вершина не входит в два цикла. Кроме того, дерево с n вершинами содержит ровно $n - 1$ ребро.

Следовательно, ребер не более чем $(n - 1) + \frac{n}{3} < \frac{4n}{3}$.

Противоречие.

Пусть $N = 1998$ – исходное количество вершин, тогда исходное количество ребер равно $\frac{3}{2} N$. За каждую операцию выкидывания вершины количество вершин уменьшается на одну, а количество ребер уменьшается на три. Предположим, что было сделано x операций. Тогда стало

$N - x$ вершин и $\frac{3}{2} N - 3x$ ребер. До тех пор, пока выполняется неравенство $\frac{3}{2} N - 3x \geq \frac{4}{3} (N - x)$, вершины

удалять можно. Решив это неравенство, получаем $x \leq \frac{N}{10}$,

т.е. можно удалить $\left[\frac{1998}{10} \right] + 1 = 200$ вершин. Отсюда и следует утверждение задачи.

Д.Картов, Р.Карасев

Ф1668. Автомобиль выезжает из города A и приезжает, двигаясь без остановок по прямому шоссе, в город B . Оказалось, что в течение первой половины времени поездки его скорость была 40 км/ч, половину оставшегося пути он проехал со скоростью 60 км/ч, а остаток пути – со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля за все время путешествия.

Пусть «половина оставшегося пути» составляет x . Тогда вторая половина времени поездки равна $x/v_2 + x/v_3$, а все расстояние между городами равно $2x + v_1(x/v_2 + x/v_3)$. Осталось разделить эту величину на полное время поездки $2(x/v_2 + x/v_3)$ и сократить на x . В результате для искомой средней скорости получаем

$$v_{cp} = \frac{v_2 v_3}{v_2 + v_3} + \frac{v_1}{2} \approx 54,3 \text{ км/ч.}$$

З.Рафаилов

Ф1669. На горизонтальной поверхности покоится гладкий клин массой M с углом α при основании. Куб такой же массы лежит на столе, касаясь клина (рис.1). Коэффициент трения между кубом и столом μ . На клин ставят тележку массой m , которая может скользить по клину без трения, и отпускают. Какую скорость приобретет тележка, опустившись на высоту h (при этом она все еще находится на поверхности клина)?

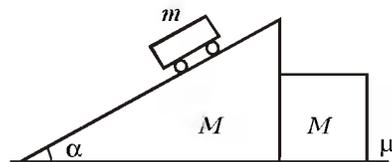


Рис.1

Если сила трения достаточна для удержания системы на месте, то скорость тележки будет равна $v = \sqrt{2gh}$. При этом справедливы соотношения

$$N = mg \cos \alpha \text{ и } N \sin \alpha = F_{тр} \leq \mu Mg,$$

где N – сила реакции, действующая на тележку со стороны клина.

Если же сила трения недостаточная, в движение придут все тела системы. Представим ускорение тележки в виде суммы (векторной) двух ускорений (рис.2): ускорения

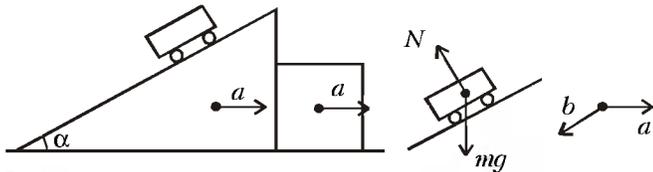


Рис.2

\vec{a} , с которым тележка движется вместе с клином, и ускорения \vec{b} относительно клина. Запишем уравнения второго закона Ньютона для тележки, в проекциях на направления вдоль клина и перпендикулярно ему, и для клина вместе с кубом, в проекциях на горизонтальное направление:

$$mg \sin \alpha = m(b - a \cos \alpha), \quad mg \cos \alpha - N = ma \sin \alpha,$$

$$N \sin \alpha - \mu Mg = 2Ma.$$

Исключая N , находим

$$a = g \frac{m \sin \alpha \cos \alpha - \mu M}{2M + m \sin^2 \alpha},$$

$$b = g \sin \alpha \cdot \frac{2M + m - \mu M \operatorname{ctg} \alpha}{2M + m \sin^2 \alpha}.$$

Время движения тележки вниз равно

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{b \sin \alpha}}.$$

Удобно теперь ускорение тележки представить в виде суммы двух перпендикулярных составляющих вдоль и поперек наклонной плоскости, равных

$$a_1 = b - a \cos \alpha = g \sin \alpha \text{ и } a_2 = a \sin \alpha.$$

Тогда для скорости тележки получаем

$$v = \sqrt{(a_1 \tau)^2 + (a_2 \tau)^2} = \tau \sqrt{(g \sin \alpha)^2 + (a \sin \alpha)^2} = \sqrt{\frac{2h \sin \alpha}{b}} \sqrt{g^2 + a^2},$$

или, после подстановки значений для a и b ,

$$v = \frac{\sqrt{2gh}(m \sin \alpha \cos \alpha - \mu M)}{\sqrt{(2M + m - \mu M \operatorname{ctg} \alpha)(2M + m \sin^2 \alpha)}}.$$

А.Клинов

Ф1670. Комната площадью $S = 20 \text{ м}^2$ с высотой потолка $H = 3 \text{ м}$ заполнена воздухом при нормальных условиях. Оцените число ударов молекул о потолок за время $\tau = 1 \text{ ч}$. Куда чаще ударяют молекулы – в пол или в потолок комнаты? Оцените разность чисел ударов молекул о пол и о потолок за время τ . Считайте температуру воздуха в комнате повсюду одинаковой.

Пусть v_z – «средняя» проекция скорости молекулы на направление «к потолку», n – концентрация молекул. Тогда число ударов молекул о потолок за время τ будет $N_{уд} = 0,5n v_z S \tau$. Оценим v_z по среднему квадрату скорости молекулы (не забывая взять от этого значения одну треть):

$$v_z = \sqrt{\frac{RT}{M}} \approx 3 \cdot 10^2 \text{ м/с,}$$

где температура воздуха $T \approx 300 \text{ К}$, а средняя молярная масса воздуха $M = 0,029 \text{ кг/моль}$. Концентрацию найдем из соотношения

$$n = \frac{p}{kT} \approx 2,5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3},$$

где давление воздуха $p \approx 10^5 \text{ Па}$, а постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$.

Таким образом,

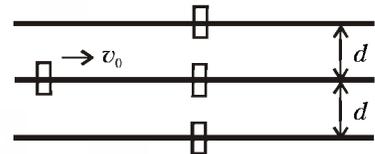
$$N_{уд} = 0,5n v_z S \tau \approx 2,5 \cdot 10^{32}.$$

Разность чисел ударов о пол и потолок при неизменной температуре определяется разностью концентраций молекул (у пола давление выше на $\Delta p = \rho g H = p M g H / (RT)$):

$$\Delta N_{уд} = \frac{N_{уд} \Delta p}{p} = \frac{N_{уд} M g H}{RT} \approx 10^{29} \approx \frac{1}{4000} N_{уд}.$$

Р.Александров

Ф1671. Три параллельных тонких непроводящих стержня находятся в горизонтальной плоскости; расстояние между соседними стержнями d (см. рисунок). На стержни насажены тяжелые шайбы массой M каждая, заряженные одинаковыми зарядами Q . В начальный момент три из них неподвижны и находятся на прямой, перпендикулярной стержням, а четвертая движется издалека по средней стержню со скоростью



→ v_0

v_0 . Найдите скорости шайб через большой промежуток времени. Трения нет.

Три расположенные рядом шайбы находятся в состоянии неустойчивого равновесия. Будем считать, что именно налетающая шайба из этого равновесия их выведет. Разлет трех шайб будем рассчитывать без учета импульса и энергии налетающей шайбы – она находится далеко и только нарушает равновесие. Для начала нужно посчитать энергию взаимодействия средней и двух крайних шайб – она равна

$$W = \frac{2kQ^2}{d}$$

(расчет простой – перенесем по очереди три шайбы из бесконечности в заданные точки и просуммируем совершенные работы). На среднюю шайбу со стороны налетающей шайбы действует чуть большая сила, чем на две другие, поэтому предположим, что вначале она смещается чуть вправо относительно других двух шайб (строго говоря, неустойчивое равновесие вещь деликатная, нужно было бы рассмотреть все возможные варианты, но это сделало бы решение чересчур громоздким). Таким образом, после разлета крайние шайбы полетят влево, а средняя – вправо. Обозначим скорости крайних шайб u , тогда скорость средней будет $2u$ (закон сохранения импульса). Из закона сохранения энергии

$$W = \frac{2Mu^2}{2} + \frac{M(2u)^2}{2} = 3Mu^2$$

находим

$$u = \sqrt{\frac{2kQ^2}{3Md}}$$

Теперь рассмотрим взаимодействие налетающей (движущейся по среднему стержню) шайбы и движущихся навстречу двух крайних шайб. После их взаимодействия и разлета на большие расстояния электрическим взаимодействием между ними можно пренебречь (крайние шайбы по-прежнему летят дуэтом), а сумма кинетических энергий остается неизменной. Скорости теперь можно найти из законов сохранения импульса и энергии, нужно только определить, пролетит ли шайба между парой крайних или отразится. Найдем граничное значение скорости налетающей шайбы $v_{гр}$, при котором она отразится. Для этого учтем, что в граничном случае скорости выстроившихся в линию шайб будут равны между собой, и найдем их из закона сохранения импульса:

$$Mv_{гр} - 2Mu = 3Mv, \text{ и } v = \frac{v_{гр} - 2u}{3}.$$

Разность начальной и конечной кинетических энергий будет равна уже вычисленной величине W :

$$\frac{1}{2}Mv_{гр}^2 + Mu^2 - \frac{3}{2}Mv^2 = W.$$

Отсюда получаем $v_{гр} = 2u$.

Если скорость налетающей шайбы будет больше граничного значения $v_{гр}$, после разлета скорости шайб сохраняются (они как бы пролетают друг сквозь друга) и нужно будет рассчитывать и взаимодействие между улетевшей со скоростью $2u$ средней шайбой и налетающей. Впрочем, это совсем простая задача – при равенстве масс взаимодействующих тел шайбы просто обменяются скоростями, как будто налетающая шайба пролетела насквозь.

Если же скорость налетающей шайбы меньше вычислен-

ного значения $v_{гр}$, нужно будет решать простую задачу про упругий удар налетающей шайбы и дулета. Обозначив скорости через v_1 и v_2 , запишем законы сохранения импульса и энергии:

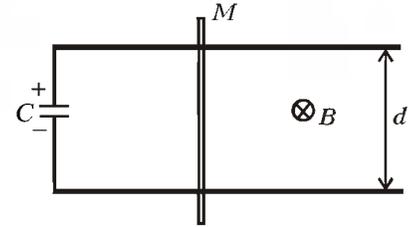
$$Mv_0 - 2Mu = Mv_1 + 2Mv_2, \quad Mv_0^2 + 2Mu^2 = Mv_1^2 + 2Mv_2^2$$

и получим

$$v_1 = -\frac{v_0 + 4u}{3} \text{ и } v_2 = \frac{2v_0 - u}{3}.$$

Р. Сашии

Ф1672. Тяжелый проводящий брусок массой $M = 1$ кг лежит на горизонтально расположенных рельсах перпендикулярно им (см. рисунок). Вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна $B = 0,1$ Тл. Заряженный до напряжения $U = 100$ В конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ подключают к рельсам. Считая сопротивление цепи $R = 1$ кОм достаточно большим, определите установившуюся скорость движения бруска. Расстояние между рельсами $d = 1$ м. Брусок движется по-ступательно.



Для определенности будем считать полярность конденсатора такой, что сила Ампера действует на брусок вправо. По мере разряда конденсатора ток будет уменьшаться, будет уменьшаться и сила, действующая на брусок. Установившееся равномерное движение соответствует нулевой силе; значит, при этой скорости ЭДС индукции будет равна по величине остаточному напряжению конденсатора.

Рассмотрим маленький интервал времени Δt в процессе еще не установившегося движения. Пусть в начале этого интервала скорость бруска равна v , ток в цепи I , сила $F = IBd$, ускорение $a = F/M$. За время Δt изменение скорости составит

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{IBd}{M}\Delta t,$$

а заряд конденсатора изменится на величину

$$\Delta Q = -I\Delta t.$$

Отсюда

$$\Delta v = -\frac{Bd}{M}\Delta Q.$$

Сумма приращений скорости стержня дает установившуюся скорость. С другой стороны, сумма протекших по цепи зарядов определяется разностью начального и конечного (остаточного) зарядов конденсатора. Для установившейся скорости v_y величина ЭДС индукции составляет $Bv_y d$, а суммарный протекший заряд равен $-C(U - Bv_y d)$. Подставляя соответствующие значения, получим равенство

$$v_y = \left(-\frac{Bd}{M}\right)\left(-C(U - Bv_y d)\right),$$

откуда найдем искомую скорость:

$$v_y = \frac{BdCU}{M + CB^2d^2} \approx 10^{-4} \text{ м/с.}$$

М. Учителев

Задачи

1. Докажите, что любые четыре цифры можно так расположить по четырем клеткам диаграммы



что получатся верные неравенства.

2. – Я задумала такое число, – объявила Синеглазка, – что если к нему прибавить сумму его цифр, то получится 2000.

– А я задумал такое число, – похвастался Незнайка, – что если от него отнять сумму его цифр, то, представь себе, тоже получится 2000.

– А вот и неправда! – возразила Синеглазка. Какое число задумала Синеглазка и почему она так ответила Незнайке?

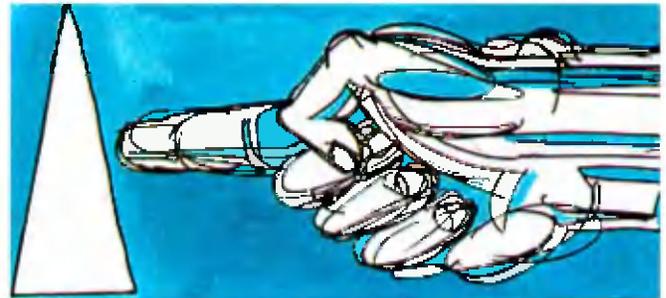
В.Климкин

Шпунтик

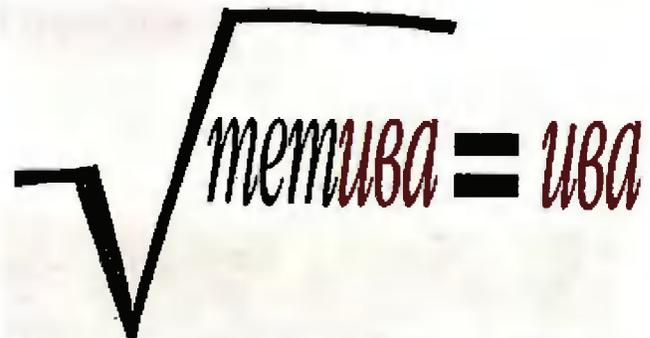


3. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин треугольника и всех его сторон наименьшая.

Н.Акулич



4. Расшифруйте ребус:

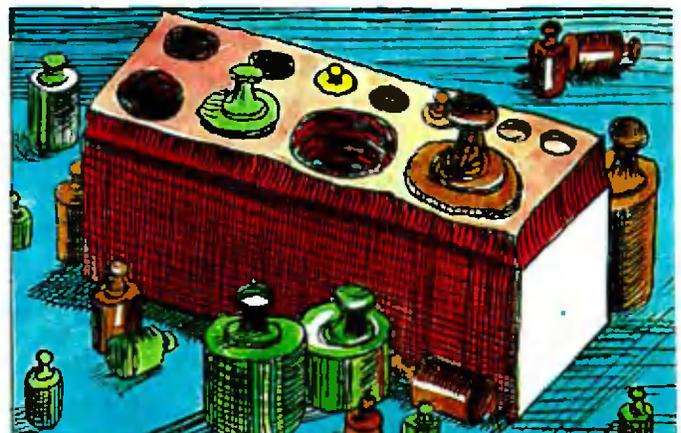


Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

А.Артюхов

5. Имеется набор из 19 гирек с массами 1 г, 2 г,, 19 г. Девять из них железные, еще девять – бронзовые и одна золотая. Общая масса железных гирек отличается от общей массы бронзовых гирек на 90 г. Какова масса золотой гирьки?

В.Произолов



Задача для мистера Холмса

А. Жуков



ОХ, МИСТЕР ХОЛМС, – ДОКТОР ВАТСОН потряс в воздухе бумажкой, испещренной многочисленными знаками. – Я всегда удивлялся вашей необыкновенной способности находить решения в самых, казалось бы, безвыходных ситуациях, но боюсь, что в данном случае все ваше волшебное искусство окажется бес-
сильным.

– Мой дорогой Ватсон, – Холмс не спеша отвел в сторону трубку и выпустил сизое колечко дыма, – право же, не стоит впадать в излишнее возбуждение от пустякового ребуса, в котором вместо букв следует подобрать всего лишь парочку-другую цифр из ограниченного набора. Жизнь нам преподносит гораздо более содержа-

тельные загадки, достойные сопереживания и беспокойства истинного джентльмена.

– Но Холмс, здесь встречаются не только буквы, но и звездочки! Впрочем, вы опять меня поражаете – как же вы догадались, что речь идет именно о числовом ребусе?

– Это элементарно, Ватсон. Вы же целый час сосредоточенно читаете журнал «Квант», на странице которого помещен предмет вашего пристального внимания, а именно: расшифровать пример на умножение

$$\begin{array}{r} \text{*}, \text{*****} \\ \times \quad \quad \text{OX} \\ \hline \text{AX} \end{array}$$





И что же в этом примере — прямо скажем, для младших школьников — вызвало у вас столь непреодолимые трудности?

— Видите ли, Холмс, в ребусе на месте звездочек могут стоять произвольные ненулевые цифры. Мне ли вам объяснять, что в данном случае мы сталкиваемся с задачей огромного числового перебора? Похоже, здесь нужно рассмотреть в общей сложности где-то около полумиллиарда вариантов. Бедные детишки!

— Хм, Ватсон, кто много перебирает, тот мало думает. — Холмс окутал себя еще одной порцией табачного дыма. — Совсем нет необходимости рассматривать все мыслимые варианты. Например, со всей определенностью можно утверждать, что двухзначное число OX (буква O кодирует цифру десятков, а буква X — цифру единиц) кратно числу 32.

— Холмс, вы хотите сказать, что число OX может принимать всего лишь одно из трех значений: 32, 64 и 96? Простите, но я не пойму, на чем основана столь смелая догадка.

— Это не догадка, а непреложный математический факт. Запишем первый множитель в виде $a + 10^{-5} \cdot B$, где a — ненулевая цифра, а B — целое пятизначное число. Из условия задачи следует, что среди делителей B не могут одновременно присутствовать цифры 2 и 5. Несложно догадаться, что число B должно быть нечетным, тогда число OX должно делиться на $2^5 = 32$.

— В таком случае число B должно быть кратно $5^5 = 3125$.

— Bravo, Ватсон. Ваше утверждение я бы сформулировал несколько точнее: $B = 3125 \cdot k$, где k — некий нечетный множитель. Кстати, что следует из того, что B — число пятизначное?

— Это условие накладывает дополнительные ограничения на множитель k . В частности, поскольку $3125 \cdot 3 < 10^4$ и $3125 \cdot 4 > 10^4$, то $k > 4$.

— Теперь вам должно быть понятно, почему ненулевая цифра a в первом множителе меньше тройки.

— А что, это действительно так?

— Посудите сами, Ватсон: $OX \cdot (a + 10^{-5} \cdot B) > 2^5 (a + 10^{-5} \cdot 5^5 \cdot k) = 32a + k$. При $k > 4$ последнее выражение может быть двухзначным числом лишь когда $a = 1$ или $a = 2$.

— Ох, это великолепно, Холмс! Я думаю, что с дальнейшим перебором уже несложно справиться в течение одного вечера.

— Если только вам нечем заняться, Ватсон. Вечернее время все же лучше посвящать более содержательным занятиям.

— Чем решать головоломки?

— Чем осуществлять бездумный перебор.

— Холмс, неужели вам еще что-то известно о числах этого ребуса?

— Да. Например, число OX равно в точности 64.

— Хм, вполне может быть, но, по правде говоря, я не представляю, на основании чего сделан такой вывод.

— Что вы можете сказать о четности числа AH ?

— Сейчас подумаю. Оно заканчивается цифрой X , которая может быть либо 2, либо 4, либо 6 (как последняя цифра числа OX). Следовательно, AH — число четное.

— А теперь заметьте, что произведение $OX \cdot (a + 10^{-5} \cdot B)$ в случае $OX = 32$ равно $32a + k$, а в случае $OX = 96$ равно $96 + 3k$. И в том, и в другом случае при нечетном k результат получается...

— Нечетным! Следовательно, ни один из этих случаев не подходит. Ох, Холмс!

— Может быть, вы теперь скажете, чему равна цифра a ?

— Попробую: $OX \cdot (a + 10^{-5} \cdot B) = 64a + 2k$. Ну конечно же, a не может равняться 2, поскольку иначе в ответе получилось бы трехзначное число. Итак, цифра a может быть равной только единице.

— Ну, и какие же варианты вам теперь осталось рассмотреть? Обратите внимание на то, что число AH должно быть не меньше, чем число OX .

— AH может быть равно либо 74, либо 84, либо 94. Поскольку $AH = 64 + 2k$, то в каждом из этих трех случаев соответственно получаем $k = 5$, либо $k = 10$ (невозможно, так как k должно быть нечетным), либо $k = 15$. Итак, всего возможно два решения: $1,15625 \cdot 64 = 74$ и $1,46875 \cdot 64 = 94$. Ах, Холмс! Я не могу удержаться, чтобы не употребить слова ребуса для оценки вашего метода. Это действительно великолепно!

— Благодарю вас, Ватсон. А я, с вашего позволения, не могу удержаться, чтобы не употребить освободившееся вечернее время для игры на любимом музыкальном инструменте. Будьте добры, подайте мне, пожалуйста, футляр со скрипкой.

Палочка продолжает падать ...

А. ЧЕРНОУЦАН



В ОДНОМ ИЗ ПРЕДЫДУЩИХ номеров «Кванта» (№4 за 1998 г.) в разделе «Физический факультатив» была напечатана заметка «Куда проскользнет палочка?». В ней рассматривалась задача о тонкой палочке, падающей из вертикального положения на горизонтальную плоскость. А именно, обсуждался вопрос, куда проскользнет нижний конец палочки: в сторону падения или в противоположную сторону?

Эта задача заинтересовала меня довольно давно, более десяти лет назад, когда я решал со своими студентами олимпиадные задачи. Задача выглядела новой и интересной, при этом интуитивно чувствовалось, что ответ должен зависеть от коэффициента трения. Действительно, при очень слабом трении проскальзывание должно начаться почти сразу, причем в сторону, противоположную падению (как на гладкой плоскости). При сильном трении палочка к моменту проскальзывания успевает приобрести горизонтальный импульс и может «потащить» нижний конец в сторону падения.

К радости моей и студентов выяснилось, что задача эта решается точно, а полученное решение полностью подтвердило все предположения. «Критический» коэффициент трения, при котором меняется направление проскальзывания, оказался равным $\mu = 15\sqrt{10}/128 \approx 0,37$. Обнаружились и другие, достаточно неожиданные, свойства падающей палочки. Например, что при любом сколь угодно большом коэффициенте трения палочка начнет обязательно проскальзывать, причем при угле отклонения от вертикали, меньшем $\arccos(1/3) \approx 70,5^\circ$. Обо всем этом и рассказывалось в упомянутой статье.

Однако возникли новые обстоятельства, которые заставили меня взяться за вторую статью о падающей палочке. Во-первых, пришел из США очередной номер журнала-побратима «Кванта» — американского «Квантума» (март/апрель 1998 г.). Большая часть журнала состояла, как обычно, из переведенных на английский язык статей из «Кванта», но были там и новые статьи. Среди них — статья, написанная американским физиком-теоретиком Лифом Тернером и его ученицей Джейн Пратт и посвященная... падающей палочке! (Недаром говорят, что физика не знает границ.) Оказывается, некоторое время назад они придумали задачу о палочке, решили ее и сразу же написали об этом в «Квантум». Правда, во главу угла авторы поставили вопрос не о направлении проскальзывания (на этот вопрос они тоже ответили), а о возможности отрыва от пола нижнего конца палочки, и очень красивым способом доказали, что конец палочки будет скользить без отрыва до самого ее падения. Мне так понравились их рассуждения, что захотелось рассказать (с некоторыми упрощениями) об этом нашим читателям. Тем более, что сам я даже не брался за рассмотрение движения после начала скольжения, так как считал его очень сложным (в частности, потому, что механическая энергия больше не сохраняется).

Во-вторых, просматривая мой любимый «Задачник Буховцева» («Сборник задач по элементарной физике», авторы Б.Б.Буховцев, В.Д.Кривченков, Г.Я.Мякишев, И.М.Сараева; М.: Наука, 1987), я натолкнулся на давно забытую задачу:

196. На конце легкого стержня, поставленного вертикально на пол, закреплен массивный шар. Стержень начинает падать без начальной скорости. При каком значении угла между стержнем и вертикалью конец стержня перестанет давить на пол? При каком значении коэффициента трения стержень не проскользнет до этого момента?

Решение этой задачи опирается на интуитивное предположение, что полная сила реакции пола R направлена вдоль стержня (рис.1). Правда, это утверждение является точным только в

том случае, если на конце стержня закреплен не шар конечного радиуса, а материальная точка, но для маленького шара эта неточность кажется несущей

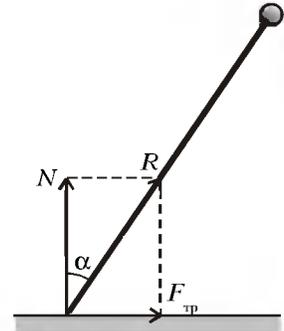


Рис. 1

существенной. Движение шара описывается уравнениями

$$mg \cos \alpha - R = \frac{mv^2}{l},$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos \alpha),$$

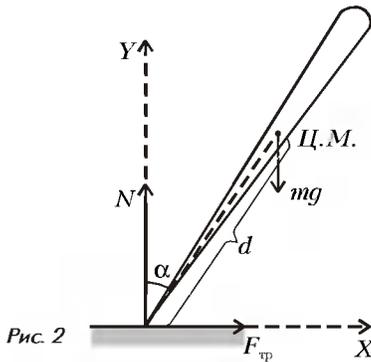
где m — масса шара, v — его линейная скорость, l — длина стержня. Если положить $R = 0$, то получим $\cos \alpha_1 = 2/3$. Чтобы стержень до этого момента не начал проскальзывать, при $\alpha < \alpha_1$ должно выполняться неравенство $F_{\text{тр}} < \mu N$. Иными словами, проскальзывания не будет, если $\mu > \text{tg}(\arccos(2/3)) = \sqrt{5}/2$.

Получается, что судьба падающего стержня существенно зависит от распределения массы вдоль его длины. Однородная палочка обязательно начнет проскальзывать, но никогда не оторвется от пола, а невесомый стержень с точечной массой на конце от пола оторвется. Чтобы разобраться подробнее, запишем уравнения динамики для тонкого падающего стержня с произвольным распределением массы вдоль его длины и изучим вопрос о начале проскальзывания. Следующим пунктом нашей программы будет изучение падения такой «обобщенной» палочки после начала скольжения (следуя идеям Лифа и Джейн).

С точки зрения динамики, свойства такого линейного объекта полностью определяются его массой m , расстоянием d от нижнего конца до центра масс и моментом инерции I_0 относительно центра масс. Однако можно вместо этих параметров ввести один безразмерный параметр: $\gamma = \frac{I_0}{md^2}$, который будет полностью определять свойства нашего стержня. Момент инерции стержня относительно точки касания равен

$I = I_0 + md^2 = (\gamma + 1)md^2$. Для точечной массы на конце стержня $\gamma = 0$, а для однородного стержня $\gamma = 1/3$.

А в каких пределах может изменяться параметр γ ? Рассмотрим невесомый стержень с точечными массами на его концах. Меняя величины масс m_1 (внизу), m_2 (вверху) и длину стержня l , можно получить все возможные значения параметров m , d , I_0 и γ (для данного случая $\gamma = m_1/m_2$, проверьте это самостоятельно). Например, гантелька с массой $m/4$ внизу и $3m/4$ наверху будет полностью эквивалентна однородной палочке. Видно, что параметр γ может принимать любые положительные значения.



Итак, запишем закон динамики вращательного движения стержня относительно нижней точки (рис.2):

$$mgd \sin \alpha = (I_0 + md^2)\epsilon,$$

или

$$g \sin \alpha = (\gamma + 1)\epsilon d,$$

и закон сохранения энергии:

$$mgd(1 - \cos \alpha) = (I_0 + md^2) \frac{\omega^2}{2},$$

или

$$g(1 - \cos \alpha) = (\gamma + 1) \frac{\omega^2 d}{2},$$

где $\epsilon = d\omega/dt$ — угловое ускорение. Выразим проекции ускорения центра масс a_x и a_y на горизонтальную и вертикальную оси через линейное ускорение ϵd и центростремительное ускорение $\omega^2 d$:

$$a_x = d(\epsilon \cos \alpha - \omega^2 \sin \alpha), \quad (1)$$

$$a_y = -d(\epsilon \sin \alpha + \omega^2 \cos \alpha).$$

Теперь с помощью законов Ньютона

$$F_{\text{тр}} = ma_x, N - mg = ma_y \quad (2)$$

найдем зависимости $F_{\text{тр}}$ и N от угла α :

$$F_{\text{тр}} = \frac{3mg}{\gamma + 1} \sin \alpha \cdot \left(\cos \alpha - \frac{2}{3} \right),$$

$$N = \frac{3mg}{\gamma + 1} \left(\cos^2 \alpha - \frac{2}{3} \cos \alpha + \frac{\gamma}{3} \right).$$

Чтобы выяснить условия начала проскальзывания, надо исследовать поведение функции

$$\mu = \left| \frac{F_{\text{тр}}}{N} \right| = \left| \frac{\sin \alpha \cdot \left(\cos \alpha - \frac{2}{3} \right)}{\cos^2 \alpha - \frac{2}{3} \cos \alpha + \frac{\gamma}{3}} \right|.$$

Качественно поведение этой функции представлено графически на рисунке 3. (Для нахождения экстремумов функции надо приравнять к нулю производную этой функции. Убедитесь сами, что получается квадратное уравнение относительно $\cos \alpha$.) Интервалы функции, соответствующие проскальзыванию, выделены более жирными линиями, а интервалы углов — штриховкой на оси абсцисс. Левая область соответствует проскальзыванию против направления падения ($\mu < \mu_1$), а правая — проскальзыванию в сторону падения ($\mu > \mu_1$).

При $0 < \gamma < 1/3$ (рис.3,а) проскальзывание начнется при любом сколь угодно большом значении коэффициента трения μ , причем при угле, меньшем некоторого α_0 . (При $\gamma \rightarrow 0$ угол $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 = \arccos(2/3) \approx 48.2^\circ$, а при $\gamma = 1/3$ угол $\alpha_0 = \alpha_2 = \arccos(1/3) \approx 70.5^\circ$.) Поведение стержня получается качественно таким же, как и падающей палочки. При $\gamma > 1/3$ функция остается конечной при всех α (рис. 3, б, в). Значит, при достаточно большом

коэффициента трения ($\mu > \mu_2$) проскальзывания не будет вовсе.

Отметим, что при $\gamma \rightarrow 0$, что соответствует переходу к задаче, рассмотренной в «Задачнике Буховцева», проскальзывание начнется при любом μ , причем для $\mu > \sqrt{5}/2$ проскальзывание будет происходить в сторону падения и начнется при угле, чуть большем $\arccos(2/3)$. Впрочем, значения сил $F_{\text{тр}}$ и N в момент начала проскальзывания будут очень малы.

Что же будет происходить после начала скольжения? Как убедиться в том, что нижний конец стержня будет скользить, не отрываясь от пола? Смещение нижнего конца стержня не повлияет на второе из уравнений (1), и после подстановки a_y во второе из уравнений (2) получим

$$N - m(g - \omega^2 d \cos \alpha) = -m\epsilon d \sin \alpha. \quad (3)$$

Запишем теперь закон динамики вращательного движения относительно центра масс стержня:

$$Nd \sin \alpha - F_{\text{тр}} d \cos \alpha = I_0 \epsilon,$$

или

$$N \sin \alpha - F_{\text{тр}} \cos \alpha = \gamma m \epsilon d.$$

Учитывая, что $F_{\text{тр}} = \pm \mu N$ (верхний знак соответствует скольжению против направления падения), получим

$$N(\sin \alpha \mp \mu \cos \alpha) = \gamma m \epsilon d. \quad (4)$$

Отметим, что выражение в скобках в момент начала проскальзывания положительно и, значит, не может обратиться в ноль и изменить знак при увеличении α .

Из уравнений (3) и (4) выразим N :

$$N = \frac{m\gamma(g - \omega^2 d \cos \alpha)}{\gamma + \sin \alpha \cdot (\sin \alpha \mp \mu \cos \alpha)}.$$

Видно, что, для того чтобы N обратилась в ноль (произошел отрыв), должно обратиться в ноль выражение $W(\alpha) = g - \omega^2 d \cos \alpha$. Так как в начале проскальзывания это выражение положительно, при обращении в ноль оно должно убывать, т.е. $dW/d\alpha < 0$. Однако

$$\frac{dW}{d\alpha} = -\frac{d(\omega^2)}{d\alpha} d \cos \alpha + \omega^2 d \sin \alpha.$$

Поскольку $d(\omega^2)/d\alpha = 2\omega(d\omega/d\alpha) = 2(d\alpha/dt)(d\omega/d\alpha) = 2(d\omega/dt) = 2\epsilon$, а из выражения (4) следует, что ϵ обращается в ноль одновременно с N , то в момент отрыва $dW/d\alpha = \omega^2 d \sin \alpha > 0$. Из полученного противоречия следует, что N не может обратиться в ноль, т.е. отрыв невозможен!

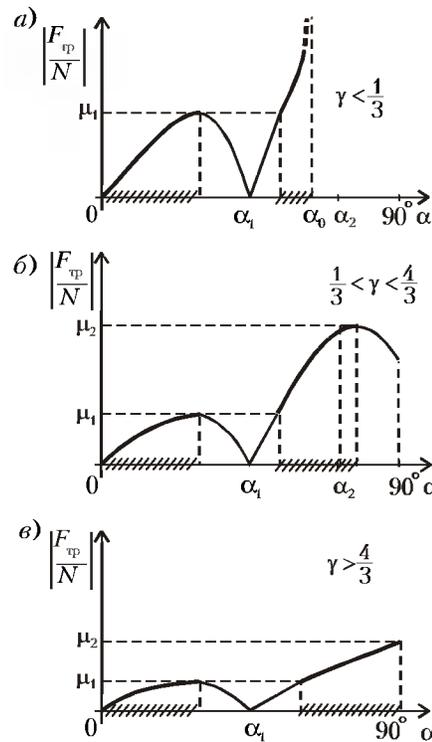


Рис. 3

Великолепная десятка

Л. КУРЛЯНДЧИК



ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАС-смотрим несколько задач, в которых изящество результатов сочетается с наличием красивых решений, по-видимому, не известных широкому читателю.

Начнем с задачи, имеющей очень красивый и неожиданный ответ.

Задача 1 (золотое сечение). Дан треугольник ABC . Точки P и Q лежат на сторонах AB и AC соответственно, T – точка пересечения отрезков CP и BQ . Где следует выбрать точки P и Q , чтобы площадь треугольника PQT была наибольшей?

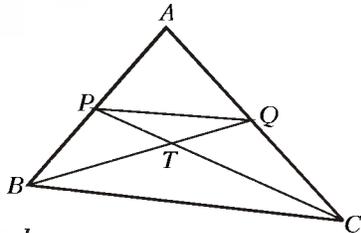


Рис. 1

Решение (векторы). Мы докажем, что площадь треугольника PQT максимальна в случае

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Положим (рис.1)

$$\vec{AB} = \vec{b}, \quad \vec{AC} = \vec{c},$$

$$\vec{AP} = p \cdot \vec{b}, \quad \vec{AQ} = q \cdot \vec{c},$$

где $0 < p, q < 1$. Тогда

$$\vec{PC} = \vec{c} - p \cdot \vec{b}, \quad \vec{QB} = \vec{b} - q \cdot \vec{c}.$$

Пусть

$$\vec{BT} = n \cdot \vec{BQ}, \quad \vec{PT} = m \cdot \vec{PC}.$$

Так как

$$\vec{BP} + \vec{PT} = \vec{BT},$$

то

$$(p-1)\vec{b} + m(\vec{c} - p \cdot \vec{b}) = n \cdot (q \cdot \vec{c} - \vec{b}),$$

или

$$(p-1-pm+n)\vec{b} + (m-qn)\vec{c} = \vec{0}.$$

Следовательно,

$$p-1-pm+n = m-qn = 0.$$

Отсюда получаем

$$m = \frac{q(1-p)}{1-pq}, \quad n = \frac{1-p}{1-pq}.$$

Поэтому

$$\vec{TP} = \frac{q(1-p)}{1-pq} (p \cdot \vec{b} - \vec{c}),$$

$$\vec{TQ} = \frac{p(1-q)}{1-pq} (q \cdot \vec{c} - \vec{b}).$$

Итак,

$$S_{PQT} = \frac{1}{2} |\vec{TP} \cdot \vec{TQ}| = \frac{1}{2} f(p, q) |\vec{b} \cdot \vec{c}|,$$

где

$$f(p, q) = \frac{pq(1-p-q+pq)}{1-pq}.$$

Так как

$$p+q \geq 2\sqrt{pq},$$

то

$$f(p, q) \leq \frac{pq(1-2\sqrt{pq}+pq)}{1-pq} = \frac{pq(1-\sqrt{pq})}{1+\sqrt{pq}},$$

равенство достигается при $p=q$. При помощи дифференцирования легко показать, что при $0 < x < 1$ функция $\frac{x^2(1-x)}{1+x}$ принимает наибольшее значение при $x^2+x-1=0$, т.е. $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Таким образом, $f(p, q)$ и, значит, S_{PQT} принимают наибольшее значение в случае $p=q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Следующая задача лишь на первый взгляд выглядит довольно мрачно. Мы приведем два красивых решения этой задачи.

Задача 2 (много корней). Докажи те, что для всякого натурального числа $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$\sqrt{2^3 3^4 4^5 \dots n^n} < 2.$$

Первое решение (обратная индукция). Докажем более сильное утверждение, а именно, что для всех натуральных чисел $n \geq m \geq 2$ справедливо неравенство

$$\sqrt[m]{m^{m+1}(m+1)\dots n} < 2.$$

Доказывать будем «обратной индукцией», т.е. сначала для $m=n$, а затем «вниз» до $m=2$.

Ясно, что $\sqrt[n]{n} < 2$.

Для $m < n$ предположим, что

$$\sqrt[m+1]{(m+1)\dots n} < 2.$$

Тогда

$$\sqrt[m]{m^{m+1}(m+1)\dots n} < \sqrt[m]{m \cdot 2} \leq 2.$$

Требуемый результат получаем, полагая $m=2$.

Второе решение (логарифм). Обозначив левую часть неравенства через p , имеем

$$\ln p = \frac{\ln 2}{2!} + \frac{\ln 3}{3!} + \dots + \frac{\ln n}{n!}.$$

Так как $\frac{\ln x}{x}$ убывает при $x \geq 3$, то

$$\begin{aligned} \ln p &= \frac{\ln 2}{2} + \\ &+ \frac{\ln 3}{3} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) < \\ &< \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} (e-2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$p < \sqrt{2} \cdot 3^{\frac{e-2}{3}} \approx 1,8397 < 2.$$

Кстати, в качестве оценки снизу имеем

$$\ln p > \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = \frac{\ln 2}{2} + e - \frac{5}{2}.$$

Значит,

$$p > \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{5}{2}} \approx 1,1423.$$

Следующая задача может быть решена при помощи интегрирования, но имеет и весьма красивое элементарное решение.

Задача 3 (проекция). На плоскости расположено конечное число отрезков общей длиной 1. Докажите, что существует такая прямая l , что сумма длин проекций этих отрезков на l меньше, чем $2/\pi$.

Решение (вписанная окружность). Мы передвинем параллельно самим себе все n отрезков так, чтобы их середины совпали в точке V (рис.2).

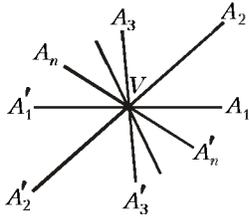


Рис. 2

Обозначим $2n$ полученных концов отрезков

$$A_1, A_2, \dots, A_n, A'_1, A'_2, \dots, A'_n.$$

Начиная от некоторой точки P'_n , нарисуем отрезок $P'_n P'_1$, равный и параллельный VA_1 , затем нарисуем отрезок $P'_1 P'_2$, равный и параллельный VA_2 , и так далее; мы получаем точки $P'_3, \dots, P'_n, P'_1, \dots, P'_{n-1}$. В итоге получится (рис.3) выпуклый $2n$ -угольник P с центром симметрии O (потому что пары

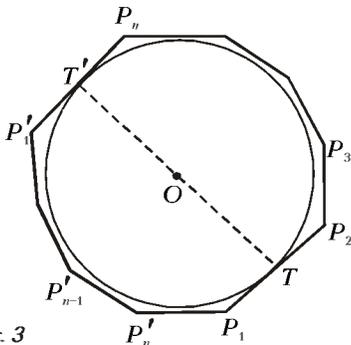


Рис. 3

противоположных сторон этого многоугольника равны и параллельны).

Выберем пару противоположных параллельных сторон, расстояние между которыми d минимально. Рассмотрим окружность с центром в точке O и диаметром d .

Эта окружность касается двух противоположных сторон во внутренних точках T и T' . Следовательно, она целиком лежит внутри многоугольника P . Поэтому

$$\pi d < \text{периметр } P = 1.$$

Значит,

$$d < \frac{1}{\pi}.$$

Следовательно, ортогональные проек-

ции всех $2n$ сторон многоугольника P на прямую TT' имеют общую длину $2d < 2/\pi$, что и требовалось доказать.

Чтобы лучше оценить следующую задачу, попробуйте сначала решить ее самостоятельно.

Задача 4 (циклическая сумма). Пусть n – натуральное число, $n \geq 4$. Найдите наилучшие оценки снизу и сверху для суммы

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}$$

(здесь, конечно, $x_0 = x_n$, $x_{n+1} = x_1$) для всех наборов n вещественных неотрицательных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) , в которых по циклу нет трех нулей подряд.

Решение (на границе нуля). Докажем, что

$$1 < \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

причем эти границы являются наилучшими.¹

Пусть S – это данная сумма и $T = \sum_{i=1}^n x_i$. Тогда

$$S > \frac{x_1}{T} + \frac{x_2}{T} + \dots + \frac{x_n}{T} = 1.$$

Для того чтобы показать, что 1 – это наилучшая оценка снизу, положим $x_i = \epsilon^{i-n}$, где $0 < \epsilon < 1$.

Имеем

$$\begin{aligned} S &= \frac{\epsilon^{i-n}}{1 + \epsilon^{1-n} + \epsilon^{2-n}} + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\epsilon^{i-n}}{\epsilon^{i-n-1} + \epsilon^{i-n} + \epsilon^{i-n+1}} + \\ &+ \frac{1}{\epsilon^{-1} + 1 + \epsilon^{1-n}} = \frac{1}{\epsilon^{-n-1} + 1 + \epsilon} + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{\epsilon^{-i} + 1 + \epsilon} + \frac{1}{\epsilon^{-1} + 1 + \epsilon^{1-n}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1. \end{aligned}$$

Теперь мы докажем, что наилучшая верхняя оценка равна m при $n = 2m$ и $n = 2m + 1$.

Пусть $n = 2m$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_{2m} + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} &\leq \\ &\leq \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2} = 1 \end{aligned}$$

(здесь, конечно же, использовано ус-

¹ Квадратными скобками обозначена целая часть числа.

ловие $x_1 + x_2 > 0$, но случай $x_1 = x_2 = 0$ очевиден). Аналогичные неравенства справедливы для всех пар последовательных слагаемых. Таким образом, получаем верхнюю оценку m ; она достигается при $x_2 = x_4 = \dots = x_{2m} = 0$ или $x_1 = x_3 = \dots = x_{2m-1} = 0$.

Пусть $n = 2m + 1$. Без ограничения общности мы можем предположить, что наименьший знаменатель – это $x_1 + x_2 + x_3$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_{2m+1} + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \\ + \frac{x_3}{x_2 + x_3 + x_4} \leq 1. \end{aligned}$$

А теперь достаточно снова воспользоваться тем, что сумма двух последовательных слагаемых не больше 1. При этом верхняя граница m достигается при $x_2 = x_4 = \dots = x_{2m} = 0$ или $x_1 = x_3 = \dots = x_{2m-1} = 0$.

Результат следующей задачи является первым шагом на пути решения весьма непростой проблемы.

Задача 5 (треугольник из бумаги). Докажите, что любой треугольный кусок бумаги площадью 1 можно согнуть так, что, положенный на стол, он будет занимать площадь меньше, чем

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Первое решение (биссектриса). Пусть ABC – данный треугольник со сторонами $a \leq b \leq c$.

Пусть точка D на стороне BC такова, что AD – это биссектриса угла A . Мы сложим треугольник ABC вдоль отрезка AD . Получившийся треугольник занимает площадь, равную

$$S_{ABD} = \frac{c}{b+c}.$$

Аналогично, если мы сложим треугольник ABC вдоль биссектрисы угла C , то площадь, покрываемая полученной фигурой, равна $\frac{b}{a+b}$.

Таким образом, остается только доказать, что

$$\min\left(\frac{b}{a+b}, \frac{c}{b+c}\right) < \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

или

$$\begin{aligned} \min\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right) < \left(\frac{2}{\sqrt{5} - 1} - 1\right)^{-1} = \\ = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = r. \end{aligned}$$

Если $\frac{b}{a} < r$, то все доказано.

Предположим, что $\frac{b}{a} \geq r$. Тогда

$$\frac{c}{b} < \frac{a+b}{b} = 1 + \frac{a}{b} \leq 1 + \frac{1}{r} = r.$$

Второе решение (высота и биссектриса). Мы рассмотрим два случая.

1) $b \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}c$.

Пусть CH – высота, опущенная из вершины C . Мы сложим кусок бумаги

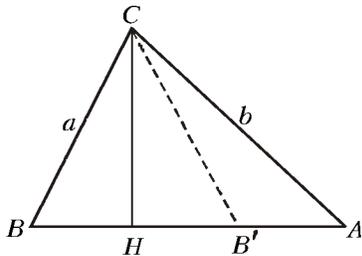


Рис. 4

вдоль CH (рис.4). Нам достаточно доказать, что

$$S_{AHC} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Так как $AB \cdot HC = 2$, то

$$S_{AHC} = \frac{HC \cdot HA}{2} < \frac{HC \cdot AC}{2} \leq \frac{HC}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2) $b > \frac{\sqrt{5}-1}{2}c$.

Пусть AD – биссектриса угла A (рис.5). Мы сложим треугольник ABC

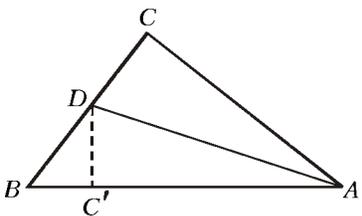


Рис. 5

вдоль AD и, так как точка C' лежит на стороне AB , нам достаточно рассмотреть треугольник ABD . Имеем

$$S_{ABD} = \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC}.$$

Так как $\frac{CD}{BD} = \frac{b}{c}$, то

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD+CD}{BD} = 1 + \frac{b}{c} > 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Значит,

$$S_{ABD} = \frac{BD}{BC} < \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Естественно возникает вопрос: а какова наилучшая оценка в этой задаче? Оказывается, она равна $2 - \sqrt{2}$.

Следующая задача интересна тем, что в ней будут переплетены алгебра и геометрия.

Задача 6 (сумма корней). Докажите, что для положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq 3\sqrt{ab + bc + ca}.$$

Первое решение (сумма трех неравенств). Во-первых,

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b).$$

Действительно, возводя неравенство в квадрат и перенося все в левую часть, получаем

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Аналогично,

$$\sqrt{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)$$

и

$$\sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(c+a).$$

Складывая эти три неравенства, получаем

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq (a+b+c)\sqrt{3}.$$

Остается доказать, что

$$\sqrt{3}(a+b+c) \geq 3\sqrt{ab+bc+ca}.$$

Возведя обе части неравенства в квадрат, сократив на 3 и умножив обе части на 2, а затем перенеся все в левую сторону, получаем

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Второе решение (среднее арифметическое и среднее геометрическое). Мы докажем, что

$$\prod (a^2 + ab + b^2) \geq (ab + bc + ca)^3. (1)$$

Из этого неравенства, в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$\left(\frac{1}{3} \sum \sqrt{a^2 + ab + b^2}\right)^3 \geq \prod \sqrt{a^2 + ab + b^2} \geq (\sqrt{ab + bc + ca})^3.$$

И сумма и произведение являются циклическими относительно a, b, c . Раскрывая скобки в неравенстве (1), получаем

$$\sum a^4bc + \sum a^4b^2 + 2\sum a^3b^2c + \sum a^3b^3 + 3a^2b^2c^2 \geq \sum a^3b^3 + 3\sum a^3b^2c + 6a^2b^2c^2,$$

или

$$\sum a^4bc + \sum a^4b^2 \geq \sum a^3b^2c + 3a^2b^2c^2.$$

Используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом еще раз, имеем

$$\sum a^4bc \geq 3\sum \sqrt{a^6b^6c^6} = 3a^2b^2c^2.$$

Тем самым, остается доказать, что

$$\sum a^4b^2 \geq \sum a^3b^2c.$$

Но

$$2(\sum a^4b^2 - \sum a^3b^2c) = \sum (a^2b - b^2c)^2 \geq 0.$$

Примечание для знатоков. Неравенство (1) можно доказать короче, используя неравенство Гёльдера.

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &= (ab)^{1/3}(b^2)^{1/3}(a^2)^{1/3} + \\ &+ (b^2)^{1/3}(bc)^{1/3}(c^2)^{1/3} + \\ &+ (a^2)^{1/3}(c^2)^{1/3}(ac)^{1/3} \leq (ab + b^2 + a^2)^{1/3} \times \\ &\times (b^2 + bc + c^2)^{1/3} \cdot (a^2 + c^2 + ac)^{1/3} = \\ &= \prod (a^2 + ab + b^2)^{1/3}. \end{aligned}$$

Третье решение (площадь треугольника). Докажем более общее неравенство.

Если $\alpha, \beta, \gamma > 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то

$$\sum \sqrt{a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2} \geq \sqrt{6\sqrt{3} \left| \sum ab \sin \gamma \right|}. (2)$$

Пусть P – точка на плоскости. Рассмотрим треугольник ABC , вершины которого находятся на расстояниях a, b, c от точки P , с углами α, β, γ между отрезками PA, PB, PC – так, как это показано на рисунке 6.

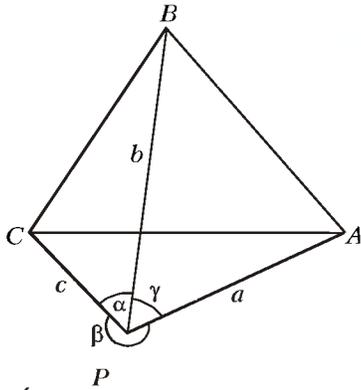


Рис. 6

Тогда

$$AB = \sqrt{a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2},$$

и так далее.

Известно, что среди всех треугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет правильный треугольник. Поэтому

$$P \geq 2\sqrt{3\sqrt{3}S}, \quad (3)$$

где P – периметр, а S – площадь треугольника ABC .

Так как

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum ab \sin \gamma \right|,$$

то неравенство (2) следует из неравенства (3).

В следующей задаче красивый факт сочетается с изящным решением.

Задача 7 (касательные к двум окружностям). Проведем четыре общие касательные к двум окружностям и точки касания соединим хордами, как показано на рисунке 7. (Эти хорды

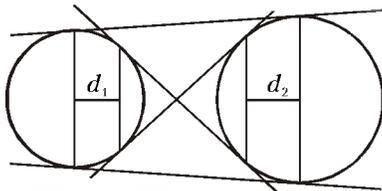


Рис. 7

параллельны, так как они все перпендикулярны линии, соединяющей центры окружностей). Докажите, что $d_1 = d_2$.

Решение (отрезки касательных). Из рисунка 8 имеем

$$\begin{aligned} 2BC + CD &= AB + BD = AB + BH = \\ &= GE + EF = EC + EF = 2ED + CD. \end{aligned}$$

Следовательно, $BC = ED$, и значит, $AB = EF = IH$. Из этих равенств следует, что $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Поэтому

$$d_1 = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = d_2.$$

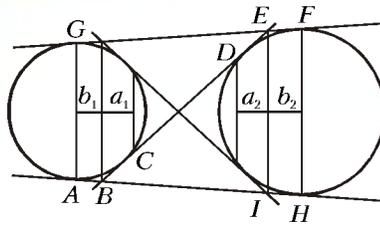


Рис. 8

Следующую задачу, конечно же, нельзя назвать малоизвестной, но я не могу удержаться, чтобы не привести ее красивое решение.

Задача 8 (двойная сумма). Докажите, что для любых вещественных чисел a_1, a_2, \dots, a_n справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0.$$

Решение (интеграл). Рассмотрим многочлен

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j x^{i+j-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} xp(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j x^{i+j} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j x^j \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

для всех вещественных x .

В частности, $p(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^1 p(x) dx &= \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j} x^{i+j} \Big|_0^1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j}. \end{aligned}$$

Неравенство строгое, за исключением случая $xp(x) \equiv 0$, т.е. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Задача 9 (четыре окружности).

На рисунке 9 точки A и B – центры больших окружностей. Из точек C и D проведены касательные. Докажите, что маленькие вписанные окружности имеют одинаковые радиусы.

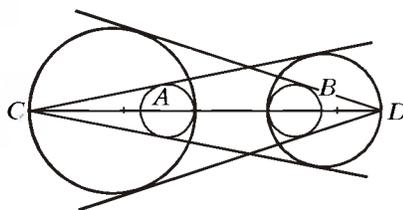


Рис. 9

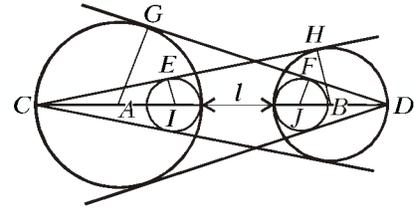


Рис. 10

Первое решение (подобие). Пусть R_a и R_b – радиусы больших окружностей, r_a и r_b – радиусы маленьких окружностей. Так как $\triangle CEI \sim \triangle CHB$ (рис.10), то отсюда

$$r_a = \frac{2R_a R_b}{2R_a + 2R_b + l}.$$

Так как

$$\triangle DFI \sim \triangle DGA,$$

то аналогично получаем, что

$$r_b = \frac{2R_a R_b}{2R_a + 2R_b + l}.$$

Второе решение (подобие). Так как в подобных треугольниках CC_1C_2 и $CC_1'C_2'$ (рис.11) радиусы вписанных

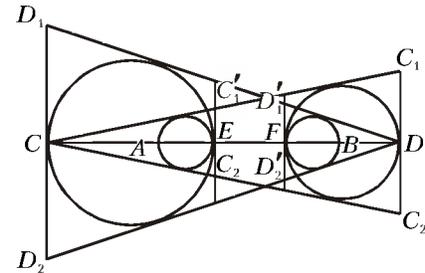


Рис. 11

окружностей пропорциональны высотам, то

$$\frac{R_b}{r_a} = \frac{CD}{CE},$$

или

$$r_a = \frac{CE \cdot R_b}{CD} = \frac{2R_b R_a}{CD}.$$

Аналогично, для треугольников DD_1D_2 и $DD_1'D_2'$ имеем

$$r_b = \frac{DF \cdot R_a}{CD} = \frac{2R_b R_a}{CD}.$$

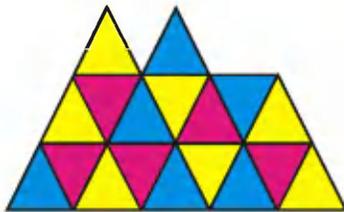
Следующая задача тоже довольно известная, но наличие у нее большого числа симпатичных решений позволяет ей занять место в десятке.

Задача 10 (равные углы). В треугольнике ABC точки N, L, M , в данном порядке лежащие на стороне AC , являются, соответственно, основаниями

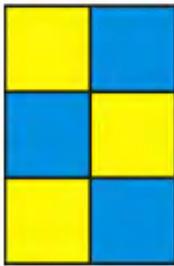
[Окончание см. на с. 34]

Паркетты и разрезания

Наверное, каждому читателю «Кванта» известны паркетты из правильных треугольников, квадратов и правильных шестиугольников (рис. 1). А можно ли составить паркет из каких-нибудь других многоугольников?



а



б

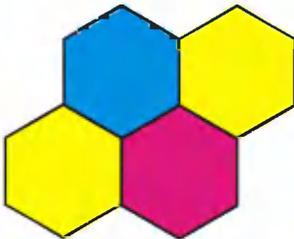


Рис. 1

Еще раз поглядев на рисунок 1, нетрудно догадаться, что правильный треугольник можно заменить произвольным, а квадрат – любым параллелограммом. Труднее пове-

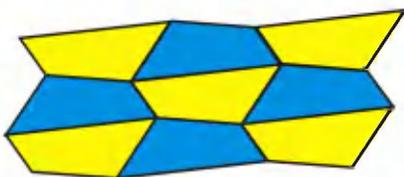


Рис. 2

рить, что паркет можно составить из любого четырехугольника, но, тем не менее, это так (рис. 2). Существует довольно много выпуклых пяти- и шестиугольников, из которых составляется паркет (подробнее об этом можно прочитать в книге М.Гарднера «Путешествие во времени и другие задачи»), однако никакой выпуклый многоугольник с числом сторон, большим шести, для этой цели не подходит. Вместе с тем существуют составляющие паркет невыпуклые многоугольники с произвольным числом сторон, причем среди получающихся паркетов есть довольно любопытные. Один из примеров приведен на рисунке 3.

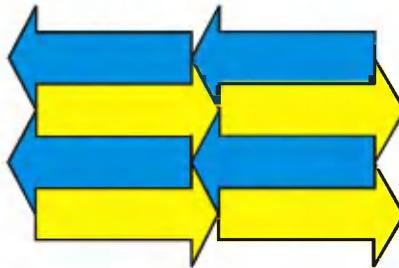


Рис. 3

Отметим теперь одну особенность паркетов на рисунках 1, а и 1, б. На них можно выделить группы из 4, 9 и т.д. исходных многоугольников, образующие подобные им многоугольники большего размера. Фигуры, которые можно разрезать на подобные им и равные между собой, называются делящимися или самоподобными. Таким образом, треугольник и параллелограмм являются делящимися фигурами.

Из рисунка 4 видно, что параллелограмм с отношением сторон $1 : \sqrt{n}$ можно разрезать на n равных между собой и подобных ему параллелограммов. Следовательно, для любого n существуют многоугольники, делящиеся на n подоб-

ных. Однако, количество таких многоугольников сильно зависит от n . Так, способность делиться на



Рис. 4

4, 9 и т.д. частей распространена достаточно широко. На рисунке 5 показано несколько многоугольников, разрезанных на 4 подобные части. Каждый из них может быть разрезан также на 9, 25 и т.д. частей. С другой стороны, много-

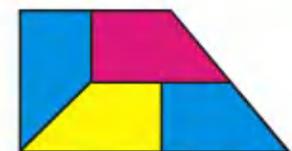
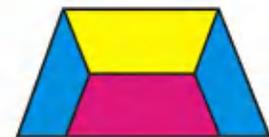
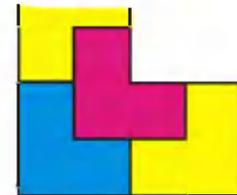


Рис. 5

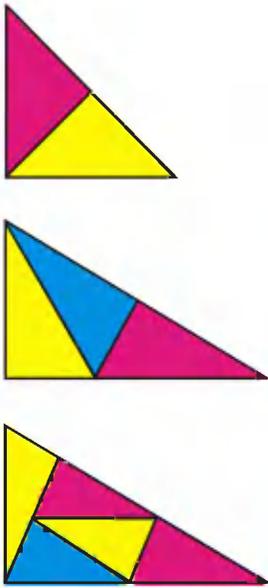


Рис. 6

угольников, делящихся на p частей, где p – простое число, и отличных от приведенных на рисунке 4 параллелограммов, крайне мало. Например, для p , равного 2, 3 или 5, такими многоугольниками являются только треугольники, приведенные на рисунке 6.

Надо сказать, что пространственные аналоги рассмотренных задач представляют крайне сложные проблемы. В частности, неизвестно, какое максимальное число граней может быть у заполняющего пространство выпуклого многогран-

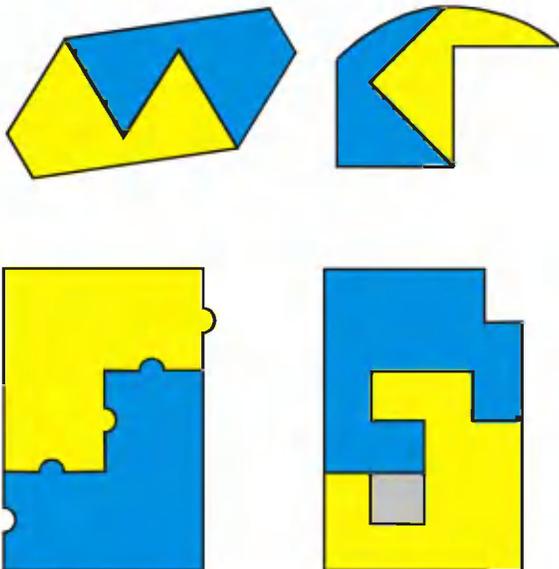


Рис. 7

ника. Вопрос о разрезании многогранников на подобные не решен даже для тетраэдров. Известны 4 тетраэдра, которые можно разрезать на 8 подобных им и равных между собой частей, но не доказано, что список ими исчерпывается.

Попробуем теперь разрезать фигуры на равные, но не обязательно подобные исходной фигуре части. Как ни странно, общего способа определить, может ли данная фигура быть разрезана таким образом, не существует даже для двух частей. Впрочем, попытавшись разрезать на две равные части фигуры на рисунке 7, можно поверить, что эта задача может быть весьма нетривиальной.

Откажемся, наконец, и от требования равенства частей, заменив его требованием равенства их площадей. Очевидно, что любую фигуру можно разрезать по прямой на две равновеликие части. Значительно интереснее, что для любых двух фигур существует прямая, разрезающая каждую из них на две равновеликие части (рис.8). Верен также пространственный аналог этой теоремы: любые три тела можно разрезать одной плоскостью на части равного объема.

Вообще говоря, прямая, делящая пополам площадь фигуры, не обязательно делит пополам ее периметр. Тем не менее для любой фигуры можно найти прямую, делящую ее площадь и периметр на равные части. Попробуйте решить эту задачу для треугольника (подсказка: искомая прямая должна проходить через центр вписанной в треугольник окружности, а «отрезать» нужно средний по величине угол треугольника, как на рисунке 9).

И последний вопрос: какая из всех линий, делящих пополам площадь правильного треугольника, имеет наименьшую длину? Составив из шести тре-

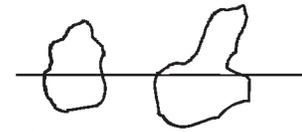


Рис. 8

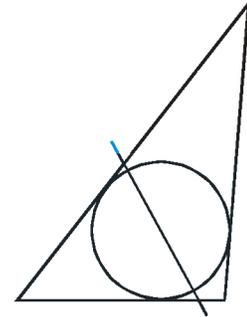


Рис. 9

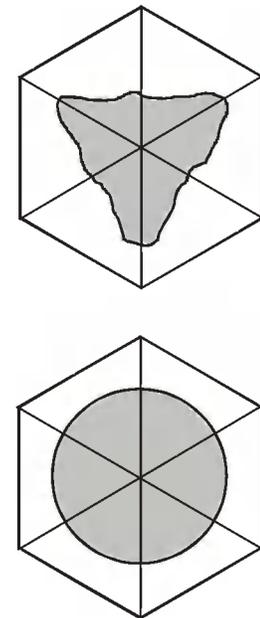


Рис. 10

угольников правильный шестиугольник (рис.10), убеждаемся, что искомой линией будет дуга окружности с центром в вершине треугольника (заштрихованные фигуры имеют одинаковую площадь, а из всех фигур данной площади круг имеет наименьший периметр). Правда, построить эту дугу с помощью циркуля и линейки невозможно (эта задача эквивалентна квадратуре круга).

А.Заславский

(Начало см. на с.28)

высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершины B . Известно, что углы $\angle ABN$, $\angle NBL$, $\angle LBM$, $\angle MBC$ равны. Найдите углы треугольника ABC .

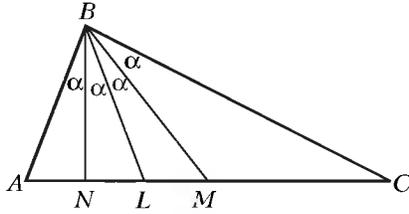


Рис. 12

Первое решение (теорема синусов).

Положим $\alpha = \angle ABN$ (рис.12). Тогда

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

и

$$\angle BCA = \frac{\pi}{2} - 3\alpha.$$

По теореме синусов имеем

$$BM = \frac{AM \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin 3\alpha} = \frac{AM \cos \alpha}{\sin 3\alpha},$$

$$BM = \frac{CM \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)}{\sin \alpha} = \frac{CM \cos 3\alpha}{\sin \alpha}.$$

Так как $AM = CM$, то

$$\frac{\cos \alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\sin \alpha}.$$

Отсюда $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha$, или $\sin 2\alpha = \sin 6\alpha$.

Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, то получаем, что

$$\alpha = \frac{\pi}{8}. \text{ Поэтому } \angle A = \frac{3\pi}{8}, \angle B = \frac{\pi}{2}, \angle C = \frac{\pi}{8}.$$

Второе решение (описанная окружность). Пусть O – центр описанной около треугольника ABC окружности и BD – диаметр этой окружности. Так как $\angle BAC = \angle BDC$, то $\angle ABN = \angle CBO$. Следовательно, лучи BM и BO совпадают. Если $O \neq M$, то, так как отрезок OM перпендикулярен AC , медиана BM в этом случае совпадает с высотой BN , в противоречии с условием задачи. Итак, $O = M$ и угол B – прямой. Но тогда $\angle ABN = \frac{\pi}{8}$, $\angle BAC = \frac{3\pi}{8}$ и $\angle BCA = \frac{\pi}{8}$.

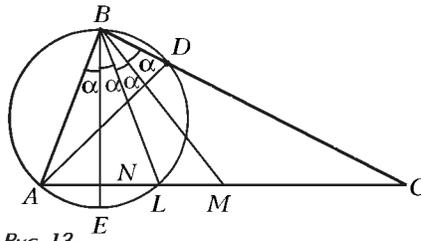


Рис. 13

Третье решение (два диаметра). Проведем окружность через точки A, B, L (рис.13). Центр этой окружности O лежит на луче BN . Пусть BE – диаметр этой окружности, D – точка пересечения окружности со стороной BC . Так как

$$\angle BAD = \angle BED = \frac{\pi}{2} - 3\alpha = \angle BCA,$$

то треугольники DBA и ABC подобны. Следовательно, они делятся одинаковым образом тремя линиями, исходящими из вершины B . Поэтому точка X пересечения отрезков BE и AD должна быть серединой отрезка AD . Итак, диаметр BE делит хорду AD пополам. А это возможно лишь в следующих двух случаях: либо диаметр и хорда перпендикулярны (что явно не выполняется в нашей ситуации), либо хорда сама является диаметром и точка пересечения – центр окружности. Итак, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

Четвертое решение (описанная окружность). Пусть P – точка пересече-

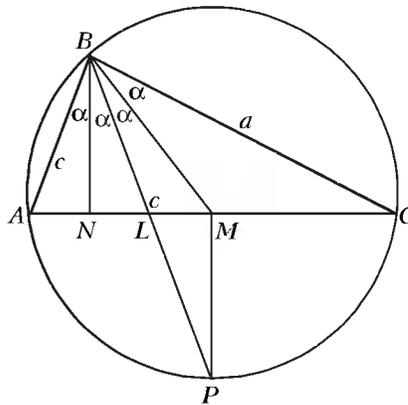


Рис. 14

ния луча BL с окружностью, описанной около треугольника ABC (рис.14). Следовательно, точка P – середина дуги AC . Поэтому $MP \perp AC$ и, значит, $BN \parallel MP$. Следовательно,

$$\angle MBP = \angle NBL = \angle MPB.$$

Поэтому $MB = MP$. Тем самым, M – точка пересечения серединных перпен-

дикулярных отрезков BP и AC и, значит, M – центр описанной около треугольника ABC окружности. Поэтому AC – это диаметр и угол ABC равен $\frac{\pi}{2}$.

Пятое решение (площадь). Применяя теорему синусов к треугольнику BML , имеем

$$\frac{BM}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{BL}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{c}{\cos 2\alpha}.$$

Поэтому

$$BM = \frac{c \cos \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Таким образом,

$$S_{ABC} = 2 \cdot S_{BMC} = BM \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{c \cos \alpha}{\cos 2\alpha} a \sin \alpha = \frac{ac \operatorname{tg} 2\alpha}{2}.$$

С другой стороны,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 4\alpha = \frac{ac \sin 4\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha = \sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha.$$

Отсюда $\cos^2 2\alpha = \frac{1}{2}$ и, значит,

$$\cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 0.$$

Поэтому $4\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

В заключение я хочу принести свою искреннюю благодарность математику из Эссена (Германия) Йоахиму Зукку – благодаря ему я имел возможность ознакомиться с материалами, при помощи которых была написана эта статья.



Законы Паскаля и Архимеда

А. ШЕРОНОВ



О ЗАКОНУ ПАСКАЛЯ, ДАВЛЕНИЕ в окрестности некоторой точки, находящейся в жидкости или газе, передается во все стороны без изменений. В соответствии с законом Архимеда, на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости или газа, вытесненного этим телом. В поле тяжести в жидкостях или газах давление в точках, отличающихся по высоте на h , изменяется на ρgh , где ρ – плотность жидкости или газа, g – ускорение свободного падения.

Рассмотрим теперь некоторые характерные примеры использования законов Паскаля и Архимеда при решении задач.

Задача 1. Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа (CO_2), температура которого вблизи поверхности планеты $T = 800 \text{ К}$, а плотность $\rho = 6,6 \text{ г/л}$. Оцените запасы CO_2 на Венере, считая, что толщина атмосферы много меньше радиуса планеты $r = 6300 \text{ км}$. Какой толщины была бы атмосфера Венеры, если бы она была равноплотной с давлением и температурой газа, равными их значениям у поверхности планеты? Ускорение свободного падения на Венере $g = 8,2 \text{ м/с}^2$, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$, молярная масса углекислого газа $M = 44 \text{ г/моль}$.

По уравнению состояния идеального газа, давление у поверхности Венеры равно $p = \rho RT/M$. Это же давление равно весу атмосферы, деленному на площадь поверхности планеты: $p = mg/(4\pi r^2)$. Отсюда находим массу углекислого газа:

$$m = \frac{4\pi r^2 \rho RT}{Mg} \approx 6 \cdot 10^{19} \text{ кг.}$$

В равноплотной атмосфере толщиной h давление у поверхности (на глубине h) равно ρgh . Сравнивая это

выражение с уравнением состояния, находим толщину равноплотной атмосферы:

$$h = \frac{RT}{Mg} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ м.}$$

Задача 2. Мыльный пузырь надуют азотом. При какой величине диаметра пузыря он начнет всплывать в атмосферном воздухе той же температуры? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 45 \text{ мН/м}$, молярная масса воздуха $M_B = 29 \text{ г/моль}$, азота $M_A = 28 \text{ г/моль}$, атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, массой пленки пренебречь.

Азот внутри мыльного пузыря находится под избыточным, по сравнению с атмосферным, давлением $\Delta p = 8\sigma/d$, где d – диаметр пузыря. Этот результат проще всего получить, если мысленно разрезать пузырь на две равные половинки плоскостью, проходящей через его центр, и рассмотреть условие равновесия этих половинок. Если избыточное давление в пузыре равно Δp , то половинки отрываются друг от друга с силой $\Delta p \pi d^2/4$. С другой стороны, они притягиваются друг к другу силами поверхностного натяжения мыльной пленки, действующими на длине окружности πd и равными $2\sigma \pi d$ (коэффициент «2» учитывает наличие двух поверхностей у пленки). Сравнение этих двух сил и дает величину избыточного давления под пленкой: $\Delta p = 8\sigma/d$.

Пузырь всплывает при условии, что выталкивающая сила, равная весу вытесненного пузыря воздуха при атмосферном давлении p_0 , больше веса азота, находящегося внутри пузыря под давлением $p_0 + \Delta p$. По уравнению состояния газа,

$$\frac{M_B p_0 \pi d^3}{6RT} \geq \frac{M_A (p_0 + \Delta p) \pi d^3}{6RT},$$

откуда находим

$$d \geq \frac{8\sigma M_A}{p_0 (M_B - M_A)} \approx 10^{-4} \text{ м.}$$

Задача 3. Батискаф представляет собой шар радиусом $r = 2 \text{ м}$. При испытаниях в море в нижней части батискафа образовалась течь, и он затонул, а в его верхней части образовалась воздушная прослойка в виде шарового сегмента толщиной $h = 1 \text{ м}$. Чему равна глубина моря H , на которой затонул батискаф? Какая масса воздуха понадобится для того, чтобы вытеснить из батискафа всю воду? Начальное (атмосферное) давление воздуха в батискафе равно давлению, которое создает слой воды толщиной $H_0 = 10 \text{ м}$. Указание: объем шарового сегмента толщиной h равен $\Delta V = \pi h^2 (3r - h)/3$.

Свободная поверхность воды внутри батискафа горизонтальна. Давление вблизи нее, равное давлению воздуха в батискафе, меньше давления в нижней части батискафа (точка А на рисунке 1) на величину $\rho g(2r - h)$, где $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды. В свою очередь, давление в точке А (дно

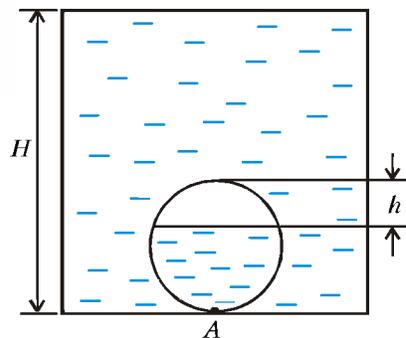


Рис. 1

водоема) складывается из атмосферного давления и давления слоя воды толщиной H . Чтобы найти глубину водоема, необходимо для воздуха, находящегося внутри батискафа (его масса по условию не изменилась), записать закон Бойля – Мариотта:

$$\begin{aligned} \rho g (H_0 + H - (2r - h)) \cdot \Delta V &= \\ &= \rho g H_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

По условию, $h = r/2$, поэтому окончательно находим

$$H = \frac{27}{5} H_0 + \frac{3}{2} r = 57 \text{ м.}$$

Чтобы найти массу воздуха, необходимую для вытеснения из батискафа воды, учтем, что в конце, когда воздух заполняет весь объем батискафа, его давление превышает атмосферное на ρgH . Из уравнения состояния нахо-

дим искомую массу воздуха:

$$m = \frac{M\rho gH \cdot 4\pi r^3/3}{RT} \approx 225 \text{ кг},$$

где $M = 29 \text{ г/моль}$ – молярная масса воздуха, $T = 290 \text{ К}$ – его температура. Можно отметить, что в стандартном баллоне объемом 40 литров под давлением 200 атмосфер при комнатной температуре содержится приблизительно 10 кг воздуха.

Задача 4. Свая в виде двух соосных цилиндров забита в грунт дна водоема глубиной H (рис.2). Какая сила действует на сваю со стороны воды?

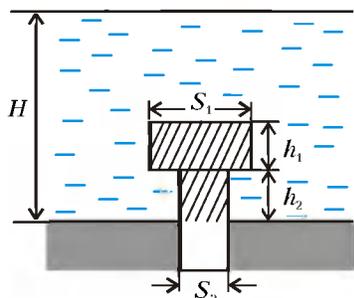


Рис. 2

Сечение верхнего цилиндра S_1 , его высота h_1 , сечение нижнего цилиндра S_2 , высота его части, находящейся в воде, h_2 .

Силы давления воды на боковые поверхности сваи компенсируют друг друга. Выталкивающая сила, действующая на нижнюю часть верхнего цилиндра сваи сечением $S_1 - S_2$, равна $\rho g(H - h_2)(S_1 - S_2)$, где ρ – плотность воды. Сила, прижимающая сваю к грунту, действует на верхнее основание сваи сечением S_1 и равна $\rho g(H - h_1 - h_2)S_1$. Результирующая сила равна

$$F = \rho g(h_1 S_1 + h_2 S_2) - \rho g H S_2.$$

Как видно, структура ответа простая: от обычной выталкивающей силы, найденной по закону Архимеда (соответствующий объем сваи на рисунке заштрихован), отнимается сила давления воды на нижнее основание сваи, как бы находящееся на уровне дна водоема. В зависимости от соотношения между h_1 , h_2 , S_1 , S_2 , H результирующая сила может быть как выталкивающей, так и прижимающей сваю ко дну водоема. В приведенных формулах отсутствует также атмосферное давление. Вопрос о том, проникает ли воздух через грунт и тем самым передает свое давление на нижнее основание сваи, забитой в грунт, мы оставляем на суд читателя.

Задача 5. В стратифицированной жидкости плотность увеличивается с глубиной h по линейному закону $\rho(h) = \rho(0)(1 + \alpha h)$, где $\rho(0)$ – извест-

ная плотность на поверхности. Для измерения константы α в жидкость на нити, прикрепленной к динамометру, опускают цилиндрическое тело длиной L и сечением S . Когда тело перемещается по вертикали на H , оставаясь целиком погруженным в жидкость, показания динамометра изменяются на ΔF . Чему равна константа α ?

Вспользуемся законом Архимеда и найдем разность выталкивающих сил при перемещении тела по вертикали на H . Очевидно, что если тело опускается, выталкивающая сила увеличивается, а показания динамометра, равные разности веса тела и силы Архимеда, уменьшаются. Пусть в начале верхняя грань цилиндра находится на глубине h_1 , нижняя на глубине $h_1 + L$, а в конце – верхняя на глубине $h_1 + H$, нижняя на глубине $h_1 + H + L$. Так как плотность жидкости меняется по линейному закону, вес воды, вытесненной телом в начале, пропорционален площади трапеции, заштрихованной на рисунке 3:

$$F_1 = gSL \frac{\rho(h_1) + \rho(h_1 + L)}{2}.$$

Аналогично, вес воды, вытесненной

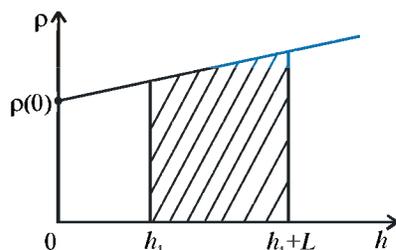


Рис. 3

телом в конце, равен

$$F_2 = gSL \frac{\rho(h_1 + H) + \rho(h_1 + H + L)}{2}.$$

При этом разность показаний динамометра составляет

$$\Delta F = F_2 - F_1 = gSL\rho(0)\alpha H,$$

откуда и находим константу α :

$$\alpha = \frac{\Delta F}{gSL\rho(0)H}.$$

Эту константу можно найти и из разности давлений на верхнее и нижнее основания цилиндра длиной L при его перемещении по вертикали на H (убедитесь в этом самостоятельно).

Задача 6. Трубка, запаянная с одного конца, опускается в жидкость сначала открытым концом вниз, а затем вверх и плавает, находясь в вертикальном положении. Длина погруженной в жидкость части трубки в первом случае на $\Delta L = 5 \text{ см}$ больше,

чем во втором. Найдите высоту H слоя жидкости, зашедшей в трубку в первом случае. Отношение внутреннего сечения трубки S_1 к внешнему S_2 равно 0,5.

Сила тяжести трубки остается неизменной, поэтому и выталкивающая сила в обоих случаях одна и та же. В первом

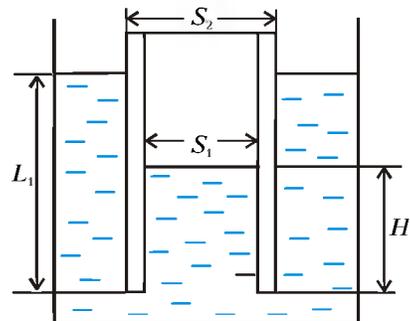


Рис. 4

случае (рис.4), по закону Архимеда, она равна $\rho g L_1 S_2 - \rho g H S_1$, во втором $\rho g L_2 S_2$, где ρ – плотность воды. Приравняв эти силы, получим

$$H = (L_1 - L_2) \frac{S_2}{S_1} = \Delta L \frac{S_2}{S_1} = 10 \text{ см}.$$

Приведем второй вариант решения – с использованием закона Паскаля, хотя в данном примере он и более громоздкий. В первом случае сила тяжести трубки mg и сила атмосферного давления p_0 на дно сечением S_2 уравновешены силой давления воздуха, находящегося внутри трубки при давлении p_1 , на внутреннюю поверхность дна S_1 и силой давления воздуха и воды на поверхность боковых стенок пробирки площадью $S_2 - S_1$:

$$mg + p_0 S_2 = p_1 S_1 + (p_0 + \rho g L_1)(S_2 - S_1).$$

При этом имеет место очевидное равенство

$$p_1 = p_0 + \rho g(L_1 - H).$$

Во втором случае сила тяжести трубки уравновешена силой давления воды на дно сечением S_2 :

$$mg = \rho g L_2 S_2.$$

Силы давления атмосферы на поверхность трубки в этом случае скомпенсированы. Из приведенных равенств находим искомую высоту H .

Задача 7. На дне лунки кубической формы размером $10 \times 10 \times 10 \text{ см}$ лежит шар, диаметр которого немного меньше 10 см. В лунку наливают воду плотностью $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ до тех пор, пока шар не начнет плавать, касаясь дна лунки. После этого в лунку долили еще $m = 250 \text{ г}$ воды так, что лунка оказалась заполненной водой до

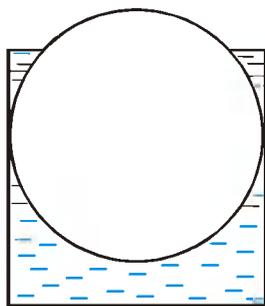


Рис. 5

верха (рис. 5). Какую массу воды налили в лунку вначале? Чему равна плотность материала шара? Указание: объем шарового сегмента высотой h равен $\Delta V = \pi h^2 (3d/2 - h)/3$, где d — диаметр шара.

По условию, сначала шар касается дна, а затем плавает в лунке, заполненной водой. Очевидно, что он всплывает при этом на высоту $h = m/(\rho d^2) = 2,5 \text{ см} = d/4$. Значит, именно такова высота части шара объемом ΔV , находящейся над водой. Плотность материала шара $\rho_{\text{ш}}$ определим из закона Архимеда:

$$\rho \left(\frac{\pi d^3}{6} - \Delta V \right) = \rho_{\text{ш}} \frac{\pi d^3}{6},$$

откуда

$$\rho_{\text{ш}} = \rho \left(1 - \frac{2}{d^3} h^2 \left(\frac{3}{2} d - h \right) \right) = \frac{27}{32} \rho = 0,84 \text{ г/см}^3.$$

Далее, когда шар плавает в лунке, заполненной водой, в ней находится объем воды, равный $d^3 - (\pi d^3/6 - \Delta V)$, поэтому масса воды, налитая в лунку вначале, равна

$$m_0 = \rho \left(d^3 - \left(\frac{\pi d^3}{6} - \Delta V \right) \right) - m = \rho \left(d^3 - \frac{27 \pi d^3}{32 \cdot 6} \right) - m = 310 \text{ г}.$$

Задача 8. В сосуд с водой (боковые стенки сосуда вертикальны) опустили кусок льда, в который был в заморожен осколок стекла. В результате уровень воды в сосуде поднялся на $h_1 = 11 \text{ мм}$, а лед стал плавать, целиком погружившись в воду. На сколько опустился уровень воды в сосуде за время таяния льда? Плотность стекла $\rho_c = 2,0 \text{ г/см}^3$, воды $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, льда $\rho_l = 0,9 \text{ г/см}^3$.

Пусть объем стекла V_c , льда V_l , а сечение сосуда S . Увеличение уровня воды в сосуде в начале равно $h_1 =$

$= (V_c + V_l)/S$. Когда лед растает, вода, получившаяся из него, займет объем $V = V_l \rho_l / \rho$. Следовательно, в конце увеличение уровня воды в сосуде будет равно $h_2 = (V_c + V)/S$, а искомое понижение составит $\Delta h = h_1 - h_2$. Связь между объемом льда и стекла найдем из условия плавания:

$$\rho(V_l + V_c) = \rho_c V_c + \rho_l V_l,$$

откуда

$$V_c = V_l \frac{\rho - \rho_l}{\rho_c - \rho}.$$

Подставив это соотношение в формулы для h_1 и h_2 , найдем окончательно Δh :

$$\Delta h = h_1 \frac{\rho - \rho_l}{\rho} \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c - \rho_l} = 1 \text{ мм}.$$

Задача 9. Тройник с двумя открытыми в атмосферу и одной закрытой вертикальными трубками целиком заполнен водой. Когда тройник стали двигать по горизонтальной рисунку 6) с некоторым ускорением, из него вылилась $1/8$ часть всей массы содержавшейся в нем воды. Чему равно давление в нижней части (точка А) закрытой трубки во время движения с ускорением? Внутренние сечения всех трубок одинаковы, длины трубок L .

При движении с ускорением a вправо вода из правого открытого в атмосферу колена перетекает в левое колено и оттуда выливается наружу. По условию, вылилась половина воды, находящейся в правом колене (длина всех трубок $4L$, вылилась $1/8$ часть всей массы воды). Запишем уравнения движения для воды, находящейся в каких-либо двух горизонтальных участках трубки. Для участка BC имеем

$$(p_B - p_C)S = \rho S \frac{L}{2},$$

где $p_B = \rho g L + p_0$ — давление в точке B , p_C — давление в точке C , p_0 — атмосферное давление, S — сечение трубки, ρ — плотность воды. На участке BD жидкость движется под действием разности давлений $\rho g L/2$, так как атмосферные давления в точках B и D скомпенсированы:

$$\rho g \frac{L}{2} S = \rho S L.$$

Разделив эти два уравнения друг на друга, находим

$$p_C = \frac{3}{4} \rho g L + p_0.$$

Давление в искомой точке A отличается от найденной величины на $\rho g L$, поэтому давление в нижней части закрытой трубки равно

$$p_A = \frac{7}{4} \rho g L + p_0.$$

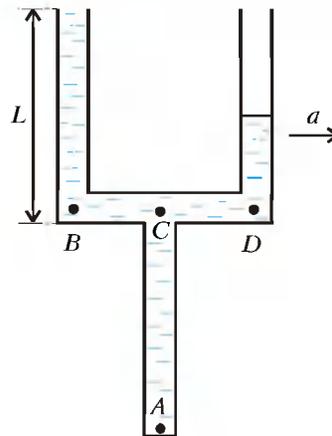


Рис. 6

Упражнения

1. Оцените массу кислорода, содержащегося в атмосфере Земли. Температура воздуха у поверхности $T = 290 \text{ К}$, радиус Земли $r = 6370 \text{ км}$. Масса кислорода, содержащегося в одном литре воздуха у поверхности Земли, равна $\rho = 0,26 \text{ г/л}$, процентное содержание кислорода (по массе) в атмосфере постоянное, толщина атмосферы много меньше радиуса планеты. Слой какой толщины занял бы кислород у поверхности, если бы его температура и давление были равны соответствующим значениям температуры и давления у поверхности Земли?

2. Герметично закрытая с одного конца трубка опускается в воду закрытым концом сверху и плавает в вертикальном положении, что обеспечивается незначительными внешними боковыми усилиями. Длина части трубки, погруженной в воду, $H = 1,75 \text{ м}$, длина всей трубки $L = 2 \text{ м}$. Найдите высоту слоя воды, зашедшей в трубку. Атмосферное давление принять равным давлению, слоя воды высотой $H_0 = 10,5 \text{ м}$.

3. Мыльный пузырь надувается воздухом, температура которого выше комнатной. При диаметре пузыря $d = 0,3 \text{ мм}$ он начинает всплывать (в комнате). На сколько процентов температура воздуха в пузыре выше комнатной? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 40 \text{ мН/м}$. Атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$. Массой пленки пренебречь.

4. В лунку кубической формы размером $10 \times 10 \times 10 \text{ см}$, целиком заполненную водой, опускают цилиндрическое тело (ось цилиндра вертикальна). В результате часть воды из лунки выливается, а тело начинает плавать в ней. После этого из лунки отлили еще $m = 250 \text{ г}$ воды так, что тело стало плавать, касаясь дна лунки. Какая масса воды осталась в лунке? Чему равна плотность материала цилиндра? Диаметр цилиндра d немного меньше 10 см , высота цилиндра равна его диаметру, плотность воды $\rho = 1 \text{ г/см}^3$.

Материалы ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ 1998 года

Московский государственный
институт электронной техники

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(технический факультет)

1. Решите уравнение

$$3\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} = 2.$$

2. Расставьте числа в порядке возрастания: $\log_5 4$, $\log_{0,2} 10$, $\log_{25} 2$.

3. Вычислите при $b = \sqrt[3]{3}$ значение выражения

$$\frac{3b^2 - 3}{b^4 + 3b^3} \cdot \left(\frac{4b + 3}{b^2 - b} - \frac{(1,5b + 3)^2 - 2,25b^2}{3b^2 - 3} \right) - \frac{3}{b^4}.$$

4. Решите уравнение

$$4 - 18 \sin 3x \cos 3x = \cos \frac{4\pi}{3}.$$

5. Решите неравенство

$$3^{2-x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > \frac{26}{3}.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2|x| + y = 4, \\ y - 8x = 10. \end{cases}$$

7. Для получения смеси было взято 18 г одной жидкости и 30 см³ другой, в 4/3 раза более плотной. Определите плотности этих жидкостей, если известно, что 22,5 г полученного раствора занимают такой же объем, как вся первая жидкость.

8. Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 1, а сумма их попарных произведений равна $\frac{11}{36}$. Найдите эти числа.

9. Боковые ребра наклонной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны 5 см, а сечение плоскостью, пересекающей все боковые ребра призмы и перпендикулярной им, представляет

собой ромб с острым углом 30°. Определите площадь боковой поверхности этой призмы, если объем пирамиды $A_1 ABCD$ равен 160 см³.

10. В параллелограмме $ABCD$ около треугольника BCD описана окружность радиуса 2. Найдите длину диагонали AC , если известно, что дуги BD и DC , не содержащие других вершин треугольника BCD , равны 150° и 90° соответственно.

11. При каких значениях параметра a будет существовать единственное значение x , являющееся решением неравенства

$$\sqrt{2a + 1 + 2ax - x^2} \geq a - x?$$

Вариант 2

(экономический факультет)

1. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,8$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

2. Решите неравенство

$$x + \sqrt{x} - 12 > 0.$$

3. Решите уравнение

$$2 \cdot 9^x + 6^x = 3 \cdot 4^x.$$

4. Три бригады укладывают рельсы. Первая и третья бригады совместно укладывают в месяц 15 км путей. Три бригады вместе укладывают в месяц путей в два раза больше, чем первая и вторая при их совместной работе. Сколько километров путей укладывает в месяц первая бригада, если известно, что вторая бригада совместно с третьей уложили некоторый участок пути в четыре раза быстрее, чем его уложила бы одна вторая бригада?

5. Известно, что первый, третий и седьмой члены некоторой возрастающей арифметической прогрессии являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите знаменатель этой прогрессии.

6. Решите неравенство

$$\log_2^2 4 + \log_2 x - 5 \geq 0.$$

7. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = a$ и $BC = 2a$ из вершин A и D радиусом a проведены две дуги, точку касания которых обозначим че-

рез M . Найдите радиус окружности, вписанной в криволинейный треугольник BMC .

8. Решите уравнение

$$5 \sin 2x + \sin x + \cos x = \frac{31}{5}.$$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x - \arccos y = 1, \\ \cos(\pi y) - \arcsin x = -1. \end{cases}$$

10. Постройте график функции $y = f(f(x))$, если

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \leq 1, \\ 5 - 2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

11. При каждом значении параметра a найдите все решения неравенства

$$x + 2a - 2\sqrt{3ax + a^2} > 0.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Автоколонна движется со скоростью $v_1 = 36$ км/ч, растянувшись вдоль дороги на расстояние $L = 600$ м. Из хвоста колонны в голову посылается машина сопровождения, которая затем возвращается обратно. Сколько времени ушло на поездку, если скорость машины $v_2 = 72$ км/ч?

2. Льдина в форме параллелепипеда с площадью основания $S = 0,5$ м² и высотой $H = 80$ см плавает в озере. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду? Плотность воды $\rho_1 = 1000$ кг/м³, плотность льда $\rho_2 = 900$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

3. Сосуд, содержащий атмосферный воздух при температуре $t_1 = 27$ °С, закрывают и начинают медленно охлаждать. При температуре $t_2 = 7$ °С на стенках сосуда появляется роса. Найдите относительную влажность атмосферного воздуха, если давления насыщенных паров при температурах t_1 и t_2 равны, соответственно, $p_1 = 3,6$ кПа и $p_2 = 1,0$ кПа.

4. В вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 30$ см расположены точечные положительные заряды в следующей последовательности: $+q, +2q, +3q, +4q, +5q, +6q$, где $q = 10^{-9}$ Кл. Определите направление и величину вектора напряженности электростатического поля в центре шестиугольника. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл².

5. Электрон влетает в однородное постоянное магнитное поле перпендикулярно вектору магнитной индукции. Через какое время вектор скорости электрона изменит свое направление на противоположное, если индукция магнитного поля $B = 1$ мТл, удельный заряд электрона $e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг?

6. Определите наибольшую скорость электронов, вылетающих из цезия при освещении его светом с длиной волны $\lambda = 331$ нм. Работа выхода электронов из цезия $A_{\text{вых}} = 3,02 \cdot 10^{-19}$ Дж, масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Вариант 2

1. Первую секунду равноускоренного движения по прямой с нулевой начальной скоростью тело двигалось со средней скоростью $v_{\text{ср1}} = 2$ м/с, а последнюю секунду — с $v_{\text{ср2}} = 22$ м/с. Определите среднюю скорость тела на всем пути.

2. Монета соскальзывает с нулевой начальной скоростью с вершины мяча диаметром $D = 40$ см и отрывается от него на высоте $h = 30$ см. Определите работу силы трения при соскальзывании монеты, если ее масса $m = 3$ г. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

3. При изохорном повышении давления идеального газа на $\Delta p_1 = 5 \cdot 10^4$ Па средняя квадратичная скорость его молекул возросла с $v_1 = 500$ м/с до $v_2 = 600$ м/с. На какую величину Δp_2 надо изохорно повысить давление, чтобы увеличить среднюю квадратичную скорость молекул от $v_2 = 600$ м/с до $v_3 = 700$ м/с?

4. Определите силу, действующую со стороны электрического поля на точечный заряд $q = 5$ нКл, помещенный внутрь плоского заряженного конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ. Энергия электрического поля конденсатора $W = 2$ мкДж, расстояние между обкладками $d = 1$ мм.

5. Источник тока сначала присоединяют к двум соседним вершинам проводочной рамки в форме правильного n -

угольника, а затем — к двум вершинам, расположенным через одну. При этом ток через источник уменьшается в $k = 1,5$ раза. Определите число сторон n -угольника. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

6. Собирающая и рассеивающая линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 30$ см и $F_2 = 10$ см расположены на расстоянии $b = 20$ см друг от друга. На собирающую линзу падает параллельный главной оптической оси пучок лучей диаметром $D_1 = 12$ мм. Каков диаметр пучка за рассеивающей линзой?

*Публикацию подготовили
А. Берестов, С. Кальней, А. Ключин,
С. Ку克林, Д. Ничеговский,
А. Прокофьев, Г. Сафонова,
Ю. Тыжнов*

*Московский государственный
технический университет
им. Н.Э. Баумана*

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Из пункта A в пункт B одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 км. Найдите расстояние между пунктами A и B .

2. Найдите все корни уравнения $\cos 2x + \cos 6x = \cos 4x$,

принадлежащие промежутку $[\pi/2; \pi]$.

3. Решите уравнение $\frac{\lg(5x^2 - 6x + 2)}{\lg x} = 2$.

4. Решите неравенство $2^{x+1} + 3 < 2^{1-x}$.

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольного треугольника, одна вершина которого совпадает с точкой $M(5; 0)$, другая лежит на графике функции $y = x^3(5-x)$, $0 \leq x \leq 5$, а вершина прямого угла — на оси Ox ?

6. Найдите все значения p , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2y = 1 + p(x + 3), \\ y = \sqrt{x + 1} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC с углом A , равным 60° . Боковое ребро TA совпадает с высотой пирамиды и равно h ; ребро TC перпендикулярно стороне основания

BC , а угол между ребром TB и биссектрисой основания AD равен 60° . Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD и пересекающей ребро TB ?

Вариант 2

1. Завод выпустил две партии изделий, при этом затраты на изготовление первой партии оказались на 20%, а второй партии — на 25% больше, чем планировалось. Таким образом, общие затраты превысили планируемые на 24% и составили 186 тыс. рублей. Какие затраты планировались на изготовление каждой партии?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2} \cos^2 \sqrt{x} = \sin \sqrt{x}.$$

3. Решите уравнение

$$4^{x+\frac{1}{x}} - 5 \cdot 2^{x+\frac{1}{x}} + 4 = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_2(x^2 + 3x) \leq 2.$$

5. Какой наибольший периметр может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси Ox , а две другие — на графике функции $y = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos x$, $|x| \leq \frac{\pi}{2}$?

6. Укажите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\log_3\left(2 + \frac{|x|}{x}\right) = (x+2)^2 + a$$

имеет два различных корня. Найдите эти корни при каждом a .

7. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с диагоналями его основания углы 45° и 60° , а расстояние между диагональю параллелепипеда и не пересекающей ее диагональю основания равно l . Найдите площадь сферы, описанной около параллелепипеда.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Как изменится положение уровня воды в стакане, где плавает кусок льда, когда лед растает?

2. На рисунке 1 изображено преломление луча света на границе двух

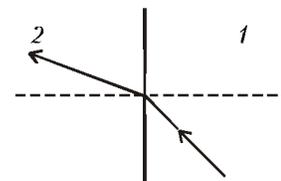


Рис. 1

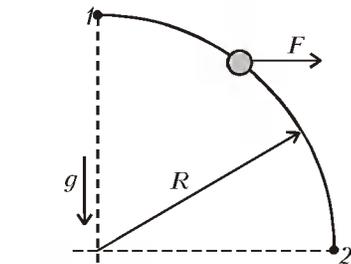


Рис. 2

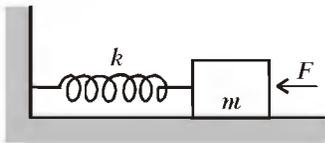


Рис. 3

сред. Какая среда оптически более плотная?

3. Найдите концентрацию молекул кислорода, если его давление $p = 0,2$ МПа, а средняя квадратичная скорость молекул $v = 700$ м/с.

4. Небольшая муфта массой $m = 0,15$ кг движется в вертикальной плоскости по гладкому ободу радиусом $R = 50$ см (рис.2). В точке 1, где скорость муфты была $v_0 = 7,5$ м/с, на нее начала действовать постоянная горизонтальная сила $F = 30$ Н. Найдите скорость муфты в точке 2.

5. На неподвижный груз массой $m = 1$ кг, лежащий на горизонтальном столе и прикрепленный к стенке пружиной жесткостью $k = 9 \cdot 10^2$ Н/м, начинает действовать постоянная горизонтальная сила $F = 1$ Н (рис.3). Через некоторое время t действие силы прекращается. При каком значении t скорость груза будет максимальной в момент прекращения действия силы?

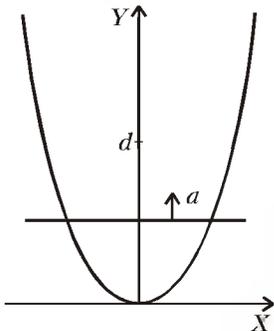


Рис. 4

6. Проводник, имеющий форму параболы $y = kv^2$, находится в однородном магнитном поле \vec{B} , перпендикулярном плоскости XY (рис.4). Из вершины параболы перемещают поступательно и без начальной скорости перемычку с постоянным ускорением a . Найдите ЭДС индукции в образовавшемся контуре при значении координаты $y = d$.

7. В вертикальном закрытом цилиндрическом сосуде, высота которого $h = 2$ м, а площадь основания $S = 300$ см², находится тонкий тяжелый поршень массой $M = 100$ кг. Первоначально поршень, делящий объем сосуда пополам, уравновешен. При этом над поршнем находится гелий массой $m = 1$ г, под поршнем – кислород. Поршень проницаем для гелия и непроницаем для кислорода. Через некоторое время поршень занимает новое равновесное положение, смещенное вверх. Найдите, на какую величину Δh сместился поршень. Процесс протекает при постоянной температуре $T = 300$ К. Трением пренебречь.

Вариант 2

1. Видны ли космонавтам звезды, когда космическая станция пролетает над освещенной Солнцем поверхностью Земли?

2. На брусок массой $m = 40$ кг, находящийся на горизонтальной плоскости, действует сила, равная $F = 200$ Н и направленная под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту (рис.5). Определите величину

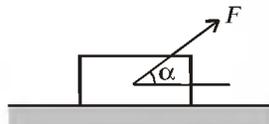


Рис. 5

ну силы трения, действующей на брусок, если коэффициент трения скольжения $\mu = 0,5$.

3. Свет какой частоты следует направить на поверхность платины, чтобы максимальная скорость фотоэлектронов была $v = 3000$ км/с? Работа выхода электронов из платины $A = 10^{-18}$ Дж.

4. Два шарика одной и той же массы m соединены невесомой пружиной жесткостью k и длиной L и лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе. Третий шарик массой m движется со скоростью v_0 по линии, соединяющей центры первых двух

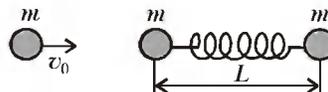


Рис. 6

(рис.6), и упруго соударяется с одним из них. Определите максимальное и минимальное расстояния между шариками, соединенными пружиной, при их дальнейшем движении.

5. В горизонтальной трубе между двумя поршнями, массой M каждый, находится 1 моль идеального одно-

атомного газа, масса которого много меньше массы поршней. В начальный момент температура газа равна T_0 , а поршни имеют равные по величине скорости, направленные навстречу друг другу. При дальнейшем движении поршней по инерции максимальная температура газа оказалась равной T_1 . Определите начальные скорости поршней, считая, что система теплоизолирована. Теплоемкостями поршней и трубы, а также внешним давлением и трением пренебречь.

6. В электрической цепи, показанной на рисунке 7, $E = 22$ В, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 2$ Ом. Пренебрегая

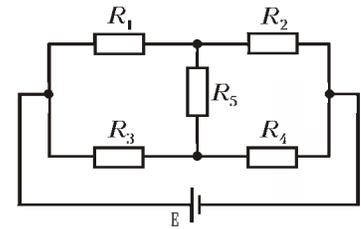


Рис. 7

внутренним сопротивлением источника тока, определите величину тока в резисторе сопротивлением R_1 .

7. Цистерна диаметром $D = 1,2$ м и длиной $L = 2,5$ м, наполненная до высоты $b = 1,6$ м нефтью, плотность которой $\rho = 0,9 \cdot 10^3$ кг/м³ (рис.8), начинает двигаться горизонтально с постоянным ускорением $a = 2$ м/с².

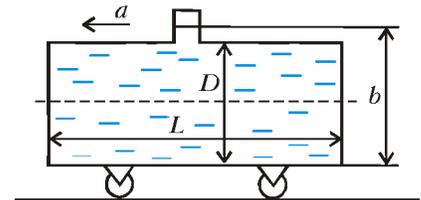


Рис. 8

Определите силу давления нефти на переднюю по направлению движения стенку цистерны.

Публикацию подготовили
Л.Паршев, Ю.Струков

Московский энергетический
институт
МАТЕМАТИКА

Задачи письменного экзамена

1. Упростите выражение

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} - \frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2} - (ab - 2^{1+2\log_2 a})(a - b)^{-1}.$$

2. Предварительно упростив выра-

жение для функции

$$f(x) = \frac{2x^{-1/3}}{x^{2/3} - 3x^{-1/3}} - \frac{x^{2/3}}{x^{5/3} - x^{2/3}} - \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3} + 4^{\log_2(x-1)},$$

найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению

$$f'(x)f(x) - 4[f'(x) + 2f(x)] + 32 = 0.$$

3. Предварительно упростив выражение для функции

$$f(x) = \left(\frac{(x+1)^3 - 3x^2 - 1}{x^2 + 3} + \frac{(x-1)^2 - 1}{x-2} \right)^3 - 8^{\log_2 x},$$

найдите $f'(x)$ и решите уравнение $x^2(\lg^2 x - \sqrt{3}\lg x + 21) = f'(x)$.

4. Предварительно упростив выражение для функции

$$f(x) = \left(\frac{1}{x - \sqrt{2}} - \frac{x^2 + 4}{x^3 - \sqrt{8}} \right) \times \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{x} + 1 \right) 100^{\lg x},$$

найдите $f'(x)$ и для каждого значения параметра a решите неравенство

$$0,5(a+1)f'(x) > af(x) + 1.$$

5. Решите неравенство

$$\lg(x+3) \leq 1 - \lg x.$$

6. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$\lg^2(16 + x^2) - \lg(4 + 3a^2)\lg(16 + x^2) \leq 0.$$

7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$a \cdot 25^{x^2} - (2a+3) \cdot 5^{x^2} + 6a = 0$$

имеет четыре различных решения.

8. Произведение первых трех членов геометрической прогрессии равно 216, а их сумма равна 31,5. Найдите знаменатель и первый член геометрической прогрессии.

9. Две трубы, работая совместно, заполняют бассейн за 3 ч. Одна вторая труба заполняет бассейн в три раза быстрее, чем одна первая. Найдите время, за которое заполняет бассейн каждая труба, работая отдельно.

10. В 10 часов из пункта A выехал велосипедист; в 12 часов из пункта A в том же направлении выехал мотоциклист, который догнал велосипедиста в 80 км от пункта A . Найдите скорость

велосипедиста, если известно, что она в два раза меньше скорости мотоциклиста.

11. Найдите все корни уравнения

$$11 \sin\left(\frac{13\pi}{2} + 2x\right) + \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 x = 14 \sin^2\left(\frac{15\pi}{2} - x\right),$$

удовлетворяющие неравенству

$$(x - \pi)^2 + 2\pi x \leq 2\pi^2.$$

12. Для каждого значения параметра a найдите все корни уравнения

$$(3 - 4a) \sin^2 x + (2a - 1) \sin x = \sin x \cos 2x,$$

лежащие на промежутке $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, и укажите наименьший и наибольший из этих корней.

13. Точка F делит меньшее основание трапеции пополам, точка E делит большее основание трапеции в отношении 4 : 1. Найдите отношение, в котором прямая EF делит площадь трапеции, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого ее основания.

14. Длина стороны ромба равна 12 см, острый угол ромба равен полусумме наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения

$$2 \sin x \cos \frac{3x - 1260^\circ}{2} = \sqrt{3} \sin \frac{3x}{2}.$$

Найдите площадь круга, вписанного в ромб.

15. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ (D – вершина) на ребре AD взята точка E так, что $AE : ED = 2 : 1$. Площадь треугольника BCE равна S . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен 2α .

16. Периметр основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен p , центр сферы, описанной около пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 9 : 7 (считая от вершины S). Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

ФИЗИКА

Задачи тьюменского экзамена

1. По наклонной плоскости пустили снизу вверх небольшой шарик. На расстоянии $l = 0,3$ м от начала пути шарик побывал дважды: через $t_1 = 1$ с и через $t_2 = 2$ с после начала движения. Определите начальную скорость и ускорение шарика, считая его постоянным.

2. Магнит массой $m = 5$ кг движется вниз по вертикальной железной стенке,

к которой он притягивается с силой $F_1 = 5$ Н. К магниту приложена сила, равная $F_2 = 20$ Н, линия действия которой составляет угол $\alpha = 30^\circ$ со стенкой (рис.1). Коэффициент трения между магнитом и стенкой $\mu = 0,2$.

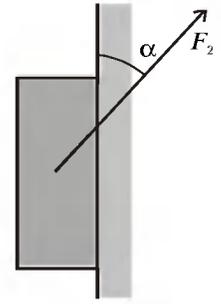


Рис. 1

Определите ускорение магнита.

3. Человек массой $m_1 = 80$ кг стоит на краю тележки массой $m_2 = 120$ кг и длиной $l = 3$ м. Определите, на какое расстояние сместится тележка, если человек перейдет на другой ее край. Трение между тележкой и полом, на котором она стоит, пренебрежимо мало.

4. На горизонтальной поверхности лежат два тела массами m_1 и m_2 . Между ними находится ненапряженная пружина. Найдите минимальную горизонтальную постоянную силу, которую надо приложить ко второму телу, чтобы сдвинуть первое тело. Коэффициент трения между телами и горизонтальной поверхностью μ .

5. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде находится газ массой m с молярной массой M . Газ отделен от атмосферы поршнем, соединенным с дном сосуда пружиной жесткостью k . При температуре T поршень расположен на расстоянии h от дна сосуда. До какой температуры надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты $2h$? Поршень считать невесомым. Атмосферное давление равно p_0 .

6. Какое количество теплоты выделится при изобарном охлаждении $m = 0,1$ кг гелия от температуры $t_1 = 200$ °C до $t_2 = 27$ °C? Молярная масса гелия $M = 0,004$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К).

7. В пространство между обкладками плоского незаряженного конденсатора вносят металлическую пластину, имеющую заряд Q , так, что между пластиной и обкладками конденсатора остаются зазоры шириной l_1 и l_2 . Площади пластины и обкладок конденсатора одинаковы и равны S . Определите разность потенциалов между обкладками конденсатора. Электрическое поле между обкладками считать однородным.

8. От поверхности металлического шара массой M и радиусом R , заряженного зарядом Q , отрывается одноименно заряженный точечный заряд q массой m . Какой будет скорость точечного заряда на большом расстоянии от шара?

9. К концам медного проводника длиной $l = 300$ м приложено напряжение $U = 36$ В. Найдите среднюю скорость упорядоченного движения электронов в проводнике, если концентрация электронов проводимости в меди $n = 8,5 \cdot 10^{28}$ $1/\text{м}^3$. Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, удельное сопротивление меди $\rho = 1,8 \cdot 10^{-8}$ Ом \cdot м.

10. Пластины плоского конденсатора присоединены к батарее, ЭДС которой $E = 100$ В. Определите работу, которую необходимо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами от $d_1 = 1$ мм до $d_2 = 2$ мм. Площадь пластин $S = 100$ см^2 . Выделением тепла в батарее и в подводящих проводах пренебречь.

11. К источнику тока подключены два резистора. На первом резисторе выделяется мощность $P_1 = 1$ Вт, на втором $P_2 = 2$ Вт. Какая мощность будет выделяться на втором резисторе, если первый резистор замкнуть с помощью ключа K (рис.2)? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

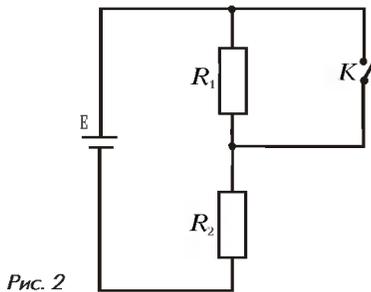


Рис. 2

12. В цепи (рис.3) все вольтметры одинаковые. ЭДС батареи $E = 9$ В, ее внутреннее сопротивление мало. Вольтметр V_1 показывает $U_1 = 4$ В. Что показывают остальные вольтметры?

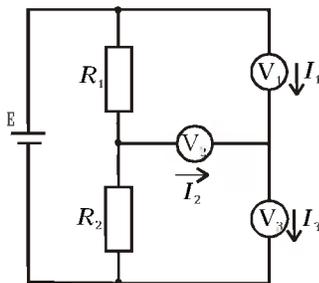


Рис. 3

13. Протон, летящий по направлению к ядру двукратно ионизированного неподвижного атома гелия, в некоторой точке поля с напряженностью $E = 10$ кВ/см имеет скорость $v = 1,0$ км/с. На какое расстояние протон сможет приблизиться к ядру? Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, масса протона

$m_p = 1,67 \cdot 10^{-28}$ кг, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

14. Колебательный контур, содержащий конденсатор емкостью $C = 20$ пФ, настроен на длину волны $\lambda = 5$ м. Найдите индуктивность катушки контура. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

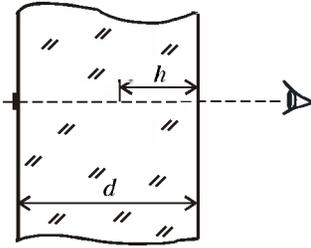


Рис. 4

15. На какой глубине h увидит изображение чернильного пятна, находящегося на стеклянной пластине толщиной d , человек, смотрящий прямо с противоположной стороны пластины (рис.4)? Показатель преломления стекла n .

Публикацию подготовили
В. Прохоренко, А. Седов

Новосибирский
государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический
и экономический факультеты)

1. Боб подарил другу Биллу несколько акций нефтяной компании. Часть акций Билл продал в тот же день, а остальные — через неделю, когда их стоимость на бирже уменьшилась из-за финансового кризиса, выручив в итоге этих операций некоторую сумму денег. Если бы Билл продал все акции сразу, то выручил бы в 1,25 раза больше, а если бы, наоборот, продал все акции через неделю, то выручил бы за них в 1,6 раза меньше, чем ему удалось получить на самом деле. Определите, во сколько раз уменьшилась стоимость каждой акции за неделю.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5|y - 2| = 11, \\ |x| + 2y = 5. \end{cases}$$

3. В прямоугольнике $ABCD$ через вершину B перпендикулярно диагонали AC проведена прямая, которая пересекает продолжение стороны AD в точке M и диагональ AC в точке K . Известно, что радиусы окружностей, впи-

санных в треугольники ABM и AMK , равны 12 и 9 соответственно. Определите радиус окружности, вписанной в треугольник BCK .

4. Решите уравнение

$$\frac{\cos 6x}{\cos 2x} = 2 \sin 2x + 1.$$

5. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, высота SH пирамиды равна $\sqrt{22}/3$. Через вершину S проведена плоскость, которая касается вписанной в пирамиду $SABC$ сферы и пересекает ребра AB и AC в точках M и N . Известно, что площадь треугольника SMN равна $7/12$. Определите:

- длину отрезка MN ;
- объем пирамиды $SAMN$.

Вариант 2

(факультеты естественных наук
и геолого-геофизический)

1. В стране объявили деноминацию и выпустили в обращение одновременно со старыми сольдо новые, которые было трудно отличить от старых. Прожив весь день с шарманкой по городу, папа Карло заработал некоторое количество денег, среди которых наряду со старыми впервые попались и новые сольдо. Если он при подсчете этого не заметит и посчитает все сольдо за старые, то получится, что он заработал в 5 раз меньше, чем сумму, которую выручил на день раньше. Если же, наоборот, подсчитать собранные деньги так, как будто все сольдо новые, то получится, будто он заработал в 200 раз больше, чем на день раньше. Определите, сколько стоит новый сольдо по отношению к старому.

2. Решите уравнение

$$\log_5 |x - 3| = \log_5 (x^2 - 3x) + 1.$$

3. Хорды AC и BD некоторой окружности перпендикулярны и пересекаются в точке K . Известно, что $AK = 11$, $BK = 2$, $CD = 10\sqrt{5}$. Определите периметр четырехугольника $ABCD$.

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = 1 + 2 \cos x.$$

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые ребра пирамиды равны $\sqrt{10}$. В плоскости основания проведена прямая, которая касается вписанной в квадрат $ABCD$ окружности и пересекает ребра BC и CD в точках M и N . Известно, что $MN = 5/6$. Найдите объем пирамиды $SMNC$.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите неравенство

$$2x - 6 \leq \sqrt{x^2 - 3x + 6}$$

2. Решите уравнение

$$\log_{2/5} x + \log_5 x = \log_x (1/2)$$

3. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC . На стороне AB выбрана точка M так, что $BM = BC$. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника AMC , равен $2\sqrt{5}$, $AC = 5\sqrt{3}$. Определите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

4. Решите уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin 7x$$

5. В кубе $ABCD A' B' C' D'$, ребра которого имеют длину 1, точка M – середина ребра BC . Точка P на прямой $A' C'$ и точка Q на прямой $B' M$ выбираются так, что прямая PQ параллельна плоскости $AA' B' B$. Определите длину наименьшего из всех возможных отрезков PQ .

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи – расчетные различной трудности от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – эта задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь необходимо понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

Вариант 1

1. В сосуде под массивным подвижным поршнем находится жидкость, которая занимает объем V_1 . Когда жидкость полностью испарилась, объем пара под поршнем достиг значения V_2 . Какая

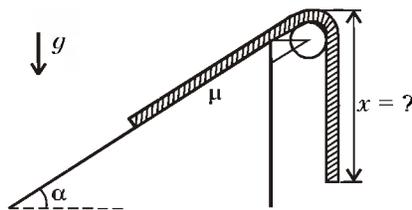


Рис. 1

доля вещества (по массе) находилась в сосуде в виде жидкости, когда объем под поршнем равнялся V ? Температура в процессе не изменялась.

2. Часть однородного каната лежит на клине, образующем с горизонтально угол α ; другая часть, перекинута через прикрепленный к вершине клина блок, свисает вертикально (рис.1). Коэффициент трения каната о плоскость μ ($\mu < \tan \alpha$). При какой длине x свисающей части канат будет находиться в покое? Длина всего каната l . Размером блока пренебречь.

3. На вход электрической цепи с первоначально незаряженными конденсаторами емкостями C_1 и C_2 подано с источника постоянное напряжение U , полярность которого указана на рисунке 2. Какие заряды окажутся на конденсаторах после изменения полярности напряжения? Диоды D_1 и D_2 идеальные. Стрелка в изображении диода показывает направление, в котором он пропускает ток.

4. На какую глубину надо погрузить в водоем детский резиновый мячик, чтобы он начал тонуть?

5. Пластинку из сырого картофеля толщиной примерно 10 мм протыкают стеклянной трубкой. Образовавшуюся пробку заталкивают в трубку на 10–15 мм. Вторую пробку формируют, протыкая картофельную пластинку другим концом трубки. Затем эту пробку начинают медленно толкать внутрь трубки. Первая пробка вначале движется медленно, а у конца трубки характер ее движения резко меняется. Объясните наблюдаемое явление.

Вариант 2

1. Тело на пружине, второй конец которой прикреплен шарниром к оси, движется по окружности. При скорости тела v_1 длина пружины l_1 , а при скорости

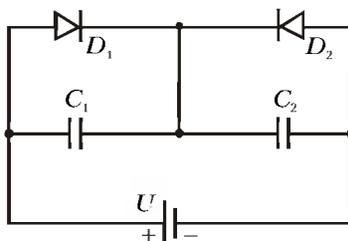


Рис. 2

сти v_2 длина пружины l_2 . Чему равна длина ненапряженной пружины? Влиянием силы тяжести пренебречь.

2. На горизонтальную пластинку площадью S с отрицательным зарядом $-Q$ оседают из воздуха пылинки, масса каждой из которых m , а заряд $+q$. Какова наибольшая масса слоя пыли, осевшей на пластинку? Ускорение свободного падения g .

3. В вертикально стоящем цилиндре сечением S находится одноатомный газ. Расстояние между дном и нижним поршнем h , а между поршнями $2h$. Массы поршней одинаковы и равны m каждая. Нижний поршень, теплоемкостью которого можно пренебречь, является теплопроводящим. На какое расстояние сместится каждый из поршней после того, как к газу подвели количество теплоты Q ? Внешнее давление постоянно и равно p_0 , ускорение свободного падения g .

4. Оцените, сколько воды должно испариться при кипении, чтобы заполненный образовавшимся при этом паром детский воздушный шарик начал подниматься в воздухе. Считать, что пар не успевает остыть.

5. В цилиндрический стакан с водой вставляют непроницаемую для воды прозрачную воронку. При этом свет от лампы, находящейся далеко под дном стакана, почти не попадает на экран, расположенный над стаканом. А когда воронку заполняют водой, экран освещается прошедшим через систему светом. Объясните явление.

Вариант 3

1. Вертикальная стенка движется горизонтально с ускорением a , толкая перед собой прямоугольный брусок. Определите величину минимально возможного коэффициента трения между бруском и стенкой, при котором брусок не падает. Ускорение свободного падения g .

2. Вертикально стоящий сосуд с газом разделен тонким подвижным поршнем массой m и сечением S на две части высотой H каждая. Вначале температуры в них были одинаковы. После того как температуру в обеих частях увеличили вдвое, поршень поднялся на высоту h . Определите начальное давление в верхней части сосуда. Ускорение свободного падения g .

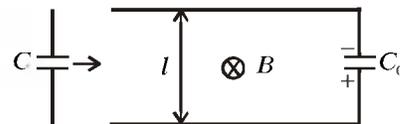


Рис. 3

3. Два длинных рельса, имеющих конечные сопротивления, расположены на расстоянии l друг от друга и соединены конденсатором емкостью C_0 с зарядом q_0 (рис.3). Перпендикулярно плоскости рельсов создано однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} . К рельсам подлетает незаряженный конденсатор емкостью C и массой m , выводы которого начинают без трения скользить по рельсам. Найдите начальную скорость «перемычки», если она в процессе движения приходит в состояние покоя.

4. Оцените разницу показаний пружинных весов при взвешивании килограммовой гири в самолете, летящем вначале по маршруту Москва—Новосибирск, а потом Новосибирск—Москва.

5. См. задачу 5 варианта 2.

*Публикацию подготовили
Г.Меледин, М.Фокин*

*Российский государственный
педагогический университет
им. А.И.Герцена*

МАТЕМАТИКА

*Письменный экзамен
(математический факультет)*

Вариант 1

- Дана функция $f(x) = \sqrt{|x-3|} - 1$.
 - Найдите область определения этой функции.
 - Нарисуйте график функции $g(x) = x \cdot f^2(x)$.
 - Пересекаются ли графики функций $f(x)$ и $h(x) = \sqrt{2|x-3|} - 1$?
- Решите неравенство

$$\log_{1/2}(9^x - 3^{x+1}) \geq -2.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} = 2 \operatorname{ctg}^2 x,$$

содержащиеся в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 8\right]$.

4. Найдите площадь равнобокой трапеции, у которой основания имеют длины 12 и 20, а диагонали взаимно перпендикулярны.

5. Радиус круга, описанного около основания правильной треугольной пирамиды, равен R , а плоский угол при ее вершине равен α . Определите ребро куба, площадь полной поверхности которого равна площади полной поверхности пирамиды.

Вариант 2

- Дана функция $f(x) = \frac{3}{\log_2(x+3)}$.

а) Найдите область определения этой функции.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = (1+x) \cdot 8^{\frac{f(x)}{1}}.$$

в) Решите уравнение

$$f(x) \cdot \log_2(x^2 - 9) = 3.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3x}{3x+1}} > \frac{64}{27}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sin 6x + \sin 2x}{1 - \cos 2x} = 0, \text{ принадлежащие промежутку } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{9}{4}\right].$$

4. Два круга с радиусами R и r касаются внешним образом. Из центра одного круга проведена касательная к другому кругу, а из полученной точки касания проведена касательная к первому кругу. Найдите длину последней касательной.

5. Основанием прямой призмы служит равнобокая трапеция, основания которой равны a и b ($a > b$), а острый угол равен α . Плоскость, проходящая через большее основание верхней трапеции и меньшее основание нижней трапеции, составляет с плоскостью нижнего основания угол, равный β . Найдите объем призмы.

*Публикацию подготовили
О.Корсакова, Г.Хамов*

*Российский государственный
университет нефти и газа
им. И.М.Губкина*

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите и вычислите при $a = \sqrt{2,5}$

$$\frac{a^3 + 0,4\sqrt{0,4}}{a + \sqrt{0,4}} - \frac{a^3 - 0,4\sqrt{0,4}}{a - \sqrt{0,4}}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{2} - \sqrt{2}}.$$

3. Отношение девятого члена геометрической прогрессии к ее шестому члену равно $1/8$. Найдите первый член прогрессии, если ее пятый член равен 3.

4. Решите неравенство

$$0,6|x - 0,6| \geq x^2 + 0,45.$$

5. Решите неравенство

$$7^{\sqrt{x-12}} \geq 10^{6\sqrt{x-12}}.$$

6. Вычислите

$$\log_{16} 121 - \log_4(11/16).$$

7. Вычислите

$$\sin^2 13^\circ + \cos 47^\circ \cos 73^\circ.$$

8. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin(x + 20^\circ) - \sin(x + 10^\circ) = \sin 5^\circ.$$

9. Найдите значение параметра a , при котором наибольшее значение функции

$$y = -x^2 + (12a + 12)x - 31a^2 - 87a + 35$$

минимально.

10. Найдите произведение корней уравнения $x^{6 \log_{27} x} = 243x^4$.

11. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены биссектриса AP и высота CQ , точка их пересечения обозначена через M . Площади треугольников AMC и ABC относятся как 9 : 20. Найдите $\sin \angle BAC$.

12. В правильной треугольной пирамиде радиус вписанного шара равен 6, а радиус шара с центром на основании пирамиды, касающегося всех боковых граней пирамиды, равен 9. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

Вариант 2

1. Вычислите при $a = \sqrt{3} - 6$

$$\frac{3\sqrt{3} - 9a + 3\sqrt{3}a^2 - a^3}{(\sqrt{3} - a)^2}.$$

2. Найдите наименьшее целое значение x , входящее в область определения функции

$$y = \log_3 \frac{9-x}{5x+43}.$$

3. Найдите девятнадцатый член арифметической прогрессии, если известно, что ее девятый член равен 22, а разность прогрессии равна 4.

4. Решите уравнение

$$|x - 9| = |x - 11|.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{64^{4-2x}} = \sqrt[3]{16^{2-4x}}.$$

6. Считая, что $\lg 2 = 0,301$, найдите $\lg 0,08$.

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6} \sin 10x\right).$$

8. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} 22,5x}{1 - \operatorname{tg}^2 22,5x} = \frac{1}{2}.$$

9. График функции

$$y = -x^3 + ax^2 + bx + c$$

пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = -1$ и касается оси Ox в точке с абсциссой $x = 5$. Найдите абсциссу точки локального минимума этой функции.

10. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x 0,5\sqrt{x}} \cdot \log_{0,25} x = -1,$$

11. В окружности с центром O проведен диаметр AB . Вторая окружность касается первой в точке M и диаметра AB в точке N , лежащей между O и B . Найдите отношение $MA : MB$, если $ON : AB = 1 : 4$.

12. В правильной треугольной пирамиде радиус описанного шара равен 9. Найдите радиус вписанного шара, если известно, что центры этих шаров совпадают.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 .

Вариант 1

1. С самолета, летящего на высоте 550 м со скоростью 180 км/ч, выпал груз. На какой высоте скорость груза будет направлена под углом 60° к горизонту?

2. Тело брошено под углом к горизонту с высоты 10 м над поверхностью земли со скоростью 20 м/с. На какой высоте его скорость будет равна 10 м/с?

3. Рабочий удерживает за один конец доску массой 30 кг так, что она образует угол 60° с горизонтом. С какой силой удерживает рабочий доску, если эта сила перпендикулярна доске?

4. Баллон емкостью 16,6 л содержит 550 г углекислого газа. Баллон выдерживает давление не выше $4 \cdot 10^6$ Па. При какой температуре (в кельвинах) баллон может разорваться? Молярная масса углекислого газа 44 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль · К).

5. Два конденсатора, емкости которых 2 мкФ и 8 мкФ, соединены последовательно, а к внешним их концам подсоединен параллельно третий конденсатор емкостью 1,4 мкФ. Какова емкость (в мкФ) всей системы конденсаторов?

6. Вольтметр, рассчитанный на измерение напряжений до 10 В, необходимо включить в сеть с напряжением 120 В. Какое для этого потребуется дополни-

тельное сопротивление, если сила тока в вольтметре не должна превышать 2 А?

7. В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью $0,001 \text{ м}^2$, расположенный перпендикулярно линиям поля. Какой величины ток (в мкА) потечет по витку, если индукция поля будет убывать с постоянной скоростью $0,05 \text{ Тл/с}$? Сопротивление витка 2 Ом.

8. Шарик массой 50 г, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания с амплитудой 10 см. Чему равна максимальная величина возвращающей силы (в мН), действующей на шарик, если циклическая частота колебаний 4 с^{-1} ?

9. Тело массой 1 кг вращается в вертикальной плоскости на нити длиной 2 м. Когда тело при подъеме проходит точку, расположенную на 1 м выше точки подвеса нити, она обрывается. На сколько выше точки подвеса поднимется тело, если натяжение нити перед обрывом было равно 35 Н?

10. Мячик массой 300 г летел со скоростью 20 м/с. После удара о стенку он отскочил под прямым углом к прежнему направлению движения со скоростью 15 м/с. Какова средняя сила взаимодействия мячика и стенки во время удара, если продолжительность удара $0,05 \text{ с}$?

11. Генератор излучает импульсы сверхвысокой частоты с энергией в каждом импульсе 6 Дж. Частота повторения импульсов 700 Гц. КПД генератора 60%. Сколько литров воды в час надо пропускать через охлаждающую систему генератора, чтобы вода нагрелась не больше чем на 5 К? Удельная теплоемкость воды $4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, плотность воды 1000 кг/м^3 .

12. Два плоских зеркала располагаются под углом друг к другу и между ними помещается точечный источник света. Расстояние от этого источника до одного зеркала 3 см, до другого 8 см. Расстояние между изображениями 14 см. Найдите угол (в градусах) между зеркалами.

Вариант 2

1. Тело массой 5 кг передвигают вдоль гладкой горизонтальной поверхности, действуя на него силой 30 Н под углом 60° к горизонту. Найдите ускорение тела.

2. Шар массой 100 г, двигавшийся со скоростью 5 м/с, сталкивается абсолютно неупруго с шаром массой 150 г, двигавшимся в том же направлении со скоростью 4 м/с. Найдите скорость шаров после удара. Ответ дайте в м/с.

3. Один конец нити закреплен на дне, а второй прикреплен к пробковому поплавку. При этом половина поплавок погружена в воду. Определите силу натяжения нити, если масса поплавок 300 г. Плотность пробки 300 кг/м^3 , плотность воды 1000 кг/м^3 .

4. На какой глубине объем пузырька воздуха, поднимающегося со дна водоема, в 6 раз меньше, чем на поверхности? Атмосферное давление 100 кПа, плотность воды 1000 кг/м^3 . Температура воды в толще и на поверхности одна и та же.

5. Начальная внутренняя энергия газа была равна 450 Дж. Чему была равна его внутренняя энергия после передачи ему 300 Дж тепла, если он совершил при этом работу 500 Дж?

6. На сколько градусов изменится температура воды в калориметре, если через нагреватель пройдет 300 Кл электричества? Напряжение на нагревателе 210 В, масса воды 5 кг, удельная теплоемкость воды $4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$. Теплотери не учитывать.

7. Определите первоначальную длину (в см) математического маятника, если известно, что при уменьшении длины маятника на 15 см частота колебаний увеличивается в 1,5 раза.

8. В некотором прозрачном веществе свет распространяется со скоростью, вдвое меньшей скорости этого света в вакууме. Чему будет равен предельный угол (в градусах) полного отражения для поверхности раздела этого вещества с вакуумом?

9. В течение 20 с ракета поднимается с постоянным ускорением $0,8g$, после чего двигатели ракеты выключаются. Через какое время после этого ракета упадет на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

10. Два шара с массами 400 г каждый покоятся на гладкой горизонтальной поверхности, касаясь друг друга. Третий шар налетает на них, двигаясь по прямой, проходящей через точку касания неподвижных шаров и перпендикулярной линии, соединяющей их центры. Чему равна масса третьего шара (в г), если после абсолютно упругого удара с неподвижными шарами он остановился? Все шары гладкие и имеют одинаковые радиусы.

11. Расстояние между двумя точечными зарядами 8 нКл и 6 нКл равно 5 см. Определите напряженность поля (в кВ/м) в точке, удаленной на 4 см от первого заряда и на 3 см от второго заряда. Коэффициент в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$.

12. Три стороны проволочного квадрата жестко скреплены друг с другом,

а четвертая может скользить по ним. Квадрат расположен на горизонтальной поверхности и находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией 200 мТл. Какой ток надо пропустить по контуру, чтобы сдвинуть подвижную сторону, если ее масса 60 г, а коэффициент трения в контактах 0,1? Сторона квадрата 5 см.

Публикацию подготовили
Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский
государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты математико-механический, прикладной математики – процессов управления; дневное отделение)

1. При каких значениях параметра a существует такое k , что уравнение

$$|x - 2| - 2x + 1 = kx + a$$

имеет ровно три решения?

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+3-2x^2}}{x+1} \geq \frac{\sqrt{2x+6-4x^2}}{3x-1}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2} + \sin x.$$

4. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна S . Длины его сторон AB , BC , CD и DA в указанном порядке образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите ее разность, если известно, что острый угол между диагоналями четырехугольника равен φ и $AB = a$.

5. Найдите угол между гранями ABC и ABD треугольной пирамиды $ABCD$, если известно, что $\angle ABD = \angle BAC = \alpha$, $\angle BAD = \angle ABC = \beta$ и $AB = CD$.

Вариант 2

(факультет менеджмента; дневное отделение)

1. При каких значениях параметра a уравнение $\log_{x+1}(4|x| - a) = 2$ имеет ровно одно решение?

2. Решите неравенство

$$\sqrt{7-3x} > 2 + 2x.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = \frac{1}{12}, \\ \sin x \cdot \sin y = \frac{2}{3}, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

4. Найдите все значения x , при кото-

рых числа $|x - 1|$, $3 - x$, $3x - 5$, расположенные в каком-либо порядке, образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше 1.

5. Окружность радиуса R касается трех сторон параллелограмма $ABCD$ и отрезка BM , где M – точка на стороне CD , отличная от C и D . Найдите, в каком отношении отрезок BM делит площадь параллелограмма, если известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник BCM , равен r .

Вариант 3

(факультеты психологии и экономический; вечернее и заочное отделения)

1. Геометрическая прогрессия с отрицательной суммой состоит из четырех членов. Выбросив из нее второй член и сохранив порядок, мы получим возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель исходной геометрической прогрессии.

2. Изобразите на плоскости Oxy множество всех тех точек, координаты которых удовлетворяют равенству

$$|y^2 - y| - |y - x^2| = x^2 + y^2 - 2y.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(3^{2x+1} - 16 \cdot 3^x + 16)}{x+1} \leq 1.$$

4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\cos \sqrt{ax - x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

имеет не менее семи решений.

5. Окружность проходит через вершину C прямоугольника $ABCD$, касается стороны AB , пересекает сторону CD в точке M и касается луча AD . Найдите сторону AB , если известно, что $AD = a$, $DM = c$.

Публикацию подготовили
О.Иванов, Н.Нецветаев, Ю.Чурин

Санкт-Петербургский
государственный технический
университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен¹

Вариант 1

(радиофизический факультет)

1. Упростите выражение

$$A = (\sqrt{a-4})^2 - \sqrt{(2-a)^2}.$$

¹ На выполнение задания давалось 120 минут.

2. Сколько процентов от числа 0,5 составляет его куб?

3. Известно, что многочлен $x^2 + px + q$ имеет корень $x = -2$ и достигает своего наименьшего значения при $x = 2$. Найдите его второй корень.

4. Вычислите без помощи калькулятора и таблиц

$$\frac{1 - 2 \cos^2 14^\circ}{\sin 62^\circ}.$$

5. Напишите уравнения асимптот графика функции

$$y = \frac{2x + 4}{x^2 + 3x + 2}.$$

6. Упростите выражение $9^{1/\log_{\sqrt{7}} 3}$.

7. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{7x - 3 - 2x^2}.$$

8. Вычислите

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} \right).$$

9. Решите уравнение

$$\log_4(x^2) + 2 = 0.$$

10. Найдите наименьший положительный период функции

$$y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{5}.$$

11. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$5x < \frac{1}{0,4x}.$$

12. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 9^x - 3^x.$$

13. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = 1.$$

14. Найдите $\lg 24$, если известно, что $\lg 2 = a$, $a \log_2 3 = b$.

15. Представьте в виде периодической десятичной дроби сумму периодических десятичных дробей $0,3(4)$ и $0,(3)$.

16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 2 + xy, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

17. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{1 - |x|}{1 + x}.$$

18. В прямоугольном треугольнике с длиной гипотенузы равной 3, биссектриса, проведенная к катету, разбивает его в отношении 1 : 3. Найдите площадь треугольника.

19. При каких целых числах n число $\sin \frac{(5n-1)\pi}{6}$ является иррациональным?

20. В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник, сторона которого равна $2\sqrt{2}$. Найдите объем призмы, если радиус описанной около нее сферы равен $\sqrt{3}$.

Вариант 2

(факультет экономики и менеджмента)

1. Упростите выражение $\sqrt{x} - \sqrt{x+2\sqrt{x}+1}$.

2. Разделите число 120 на две части в пропорции 12 : 3.

3. Упростите выражение $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{2 - \operatorname{tg} \alpha}$.

4. Вычислите без помощи калькулятора и таблиц

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{2}{3} + \log_9^{-1} 2.$$

5. Решите уравнение $2^{2x} + 4^{x-1} = 5$.

6. Решите уравнение $\operatorname{Ig}\left(x - \frac{8}{3}\right) = -\operatorname{Ig} x$.

7. Найдите координаты середины отрезка, ограниченного точками $A(1; -2)$ и $B(-3; 4)$.

8. Найдите сумму всех натуральных чисел n , для которых выражение $\frac{6}{n-1}$ является целым числом.

9. Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{2+x}}{x-|x|}.$$

10. Решите уравнение $\sqrt{x+4} + 2 = \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$.

11. Решите уравнение $\cos x + \sin 3x = 0$.

12. Вычислите без помощи калькулятора и таблиц $\arcsin\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right)$.

13. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 6$ на отрезке $[1; 3]$.

14. Решите неравенство $\operatorname{Ig}(5x - 4x^2) > 0$.

15. Решите неравенство $\frac{x}{(x+2)^2} < 0$.

16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - \sqrt{x+1} = 1, \\ 2y + x = 4. \end{cases}$$

17. Площадь равнобедренной трапеции равна 1. Какое наименьшее значение может принимать сумма $a + b + 2h$, где a, b – основания трапеции, а h – ее высота?

18. Решите уравнение $\sin 3x \cdot \cos^2 2x = 1$.

19. Найдите наибольшее значение параметра a , для которого функция $f(x) = ax^2 + 2ax + 1$ на отрезке $[-3; 0]$ удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leq 1$.

20. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в конус, если длина высоты конуса равна 2, а угол между образующей конуса и его высотой равен 30° .

Публикацию подготовили
Е.Подсыпанин, С.Преображенский,
С.Тихомиров

Физико-математический
колледж при
«Курчатовском институте»
МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение $(x+4) \cdot 3^{1-|x-1|} - x = (x+1) \cdot |3^x - 1| + 3^{x+1} + 1$.

2. В окружности единичного радиуса с центром O проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD . Из конца D одного из диаметров проведена хорда DM , образующая с CD угол α , причем точка C лежит внутри угла AOM . Пусть N – точка пересечения хорды DM и диаметра AB . При каком значении угла α площадь треугольника ONM будет наибольшей? Чему равна эта наибольшая площадь?

3. При каких значениях α неравенство $x^2 + 4y - 2x + y^2 - \cos \alpha - \sin \alpha + 5 \leq 0$ имеет решение и из него следует неравенство $1 > x^2 - y - 3x$?

4. В каких пределах меняется величина $3 \arccos x + \arccos y$, если

$$(\arcsin x)^2 + (\arccos y)^2 = \frac{9\pi^2}{16}$$

5. В треугольнике ABC даны радиусы описанной и вписанной окружностей, равные R и r соответственно. Пусть A_1, B_1, C_1 – точки пересечения биссектрис треугольника ABC с описанной окружностью. Найдите отно-

шение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

6. Основанием пирамиды является трапеция, в которой боковые стороны и меньшее основание равны между собой, большее основание равно a и тупой угол трапеции равен α . Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол β . Определите объем пирамиды.

7. Выражение $x^7 + \frac{1}{x^7}$ представьте в виде полинома от a , где $a = x + \frac{1}{x}$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два тела, связанные жесткой нитью, находятся в равновесии на клине (рис.1) даже при условии, что коэффициент трения μ между телом B и плоскостью

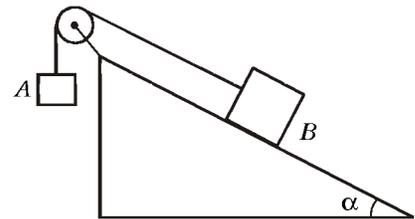


Рис. 1

равен нулю. Систему помещают на тележку, которая начинает двигаться вправо с ускорением a . При каком минимальном значении μ оба тела останутся неподвижными относительно клина? Угол наклона клина α , ускорение свободного падения g .

2. В цилиндре объемом $V_1 = 30$ л находятся в равновесии воздух, вода и насыщенный водяной пар. После изотермического сжатия до объема $V_1/3$ из цилиндра сливается содержащаяся в нем вода. Затем смесь пара и воздуха изотермически расширяется до объема $2V_1$. Найдите полную работу, совершенную внешними силами в этом цикле, если в процессе изотермического сжатия давление в цилиндре возросло от начального значения $p_1 = 3$ атм до $p_2 = 5$ атм. Объемом воды в цилиндре можно пренебречь, площадь под изотермой $pV = \text{const}$ при изменении объема от V_1 до V_2 равна $p_1 V_1 \ln(V_2/V_1)$.

3. Длинные вертикальные проводящие рейки расположены в плоскости, перпендикулярной линиям однородного магнитного поля с индукцией B . По рейкам, расстояние между которыми l , может скользить без трения проводник массой m (рис.2). Верхние концы реек замкнуты на резистор с сопротивлением R , а нижние концы – на конденсатор емкостью C . В началь-

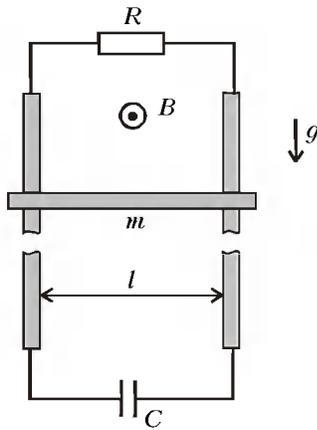


Рис. 2

ный момент времени проводник покоится, затем его отпускают, и он начинает падать. 1) Определите установившуюся скорость проводника и заряд конденсатора через достаточно большой промежуток времени. 2) Найдите ускорение проводника в начальный момент времени.

4. В колебательном контуре, состоящем из двух параллельно соединенных конденсаторов емкостями C_1 и C_2 и катушки индуктивностью L , происходят свободные колебания (рис.3). Амплитуда колебаний тока в катушке

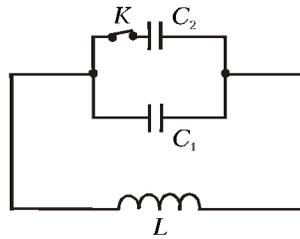


Рис. 3

равна I_0 . В тот момент, когда ток в катушке был равен нулю, ключ K в схеме размыкают. 1) Во сколько раз изменится период колебаний в контуре? 2) Определите амплитуду колебаний заряда в конденсаторе емкостью C_1 .

5. При определенных погодных условиях температура воздуха в узком слое толщиной h вблизи морской поверхности отличается на Δt градусов от температуры окружающей среды. Наблюдатель находится на обрыве высотой H_1 на берегу пролива шириной L , на другом берегу которого находится старинный замок с башнями высотой $H_2 = H_1$ (рис.4). Другой берег пролива находится за горизонтом, так что в обычную погоду наблюдатель вершин башен не видит. 1) Качественно объясните, какой знак должно иметь

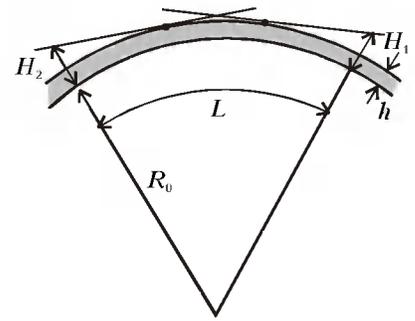


Рис. 4

Δt , чтобы данное явление наблюдалось, и нарисуйте траекторию лучей света. 2) При каком Δt наблюдатель впервые увидит вершины башен на другом берегу пролива? 3) При какой максимальной ширине пролива возможно данное явление при любой возможной величине Δt ? Считать, что показатель преломления воздуха линейно зависит от температуры: $n(t) = n_0 + D\Delta t$, где величины n_0 и D известны ($D\Delta t \leq n_0$), радиус Земли равен R_0 , а при малых углах α выполняется приближенное равенство $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$.

Публикацию подготовил
С.Фомичев

Дифракционные ореолы вокруг источников света

(Начало см. на 4-й с. обложки)

Фотографии, приведенные на обложке, были получены с помощью фотоаппарата «Зенит» с «нормальным» объективом ($F = 50$ мм). Источник фотографировался на просвет через разные «маски» с отверстиями, которые устанавливались перед фотообъективом. В качестве масок использовались и хаотически перфорированные экраны (с отверстиями диаметром порядка $10-20$ мкм), и системы параллельных щелей ($d \sim 20-50$ мкм) и сетки ($d \sim 50$ мкм) с различными коэффициентами пропускания света.

Такие картинки (или, по крайней мере, некоторые из них) первым наблюдал немецкий физик Йозеф Фраунгофер (1787–1826), изучавший дифракцию в параллельных лучах сначала от одной щели, а потом и от многих.

Гримальди описал свои опыты в книге «Физическое учение о свете, цвете и радуге», которая была опубликована в 1665 году, т.е. уже после смерти великого монаха. На эту работу ссылался и Исаак Ньютон, который продолжил исследования Гримальди и выполнил

ряд тончайших для того времени экспериментов по дифракции света. Они описаны в третьей книге его «Оптики». Нельзя не вспомнить имена и других ученых, внесших свой вклад в изучение и объяснение явления дифракции света. Это Роберт Гук, Томас Юнг, Огюст Жан Френель, Джордж Эри, Доминик Франсуа Араго, Симеон Дени Пуассон. И список этот, как вы догадываетесь, отнюдь не полный.

В заключение – несколько вопросов для самостоятельных исследований (ответы на них будут приведены позже).

1. Можно ли восстановить геометрические параметры объекта-преграды по наблюдениям его дифракционной картины? Попробуйте это сделать по приведенным здесь фотографиям.

2. Правильно ли утверждать, что для наблюдения дифракции света на некотором объекте его характерные размеры должны быть порядка длины световой волны?

3. В чем различие дифракционных спектров, полученных с помощью одной щели и дифракционной решетки с периодом, равным ширине щели?

4. Повторите опыт Гримальди по наблюдению дифракционных полос в теневой картине какого-либо предмета,

освещаемого точечным источником света. Пользуясь фотоаппаратом, запечатлейте наблюдаемую картину и объясните результаты эксперимента.

5. Томас Юнг показал, что интерференция играет важную роль в образовании дифракционных полос. Обсудите этот вопрос на примере дифракции света на щели или решетке.

6. На чем основана теория Френеля, объясняющая явление дифракции света? В чем суть этой теории?

7. Какое практическое применение имеет дифракция рентгеновских лучей и электронов?

8. Что помешало Ньютону, знакомому с явлением дифракции, обратиться к волновым представлениям о природе света?

А.Митрофанов

XXXIX Международная МАТЕМАТИЧЕСКАЯ олимпиада

С 10 по 21 июля 1998 года на Тайване прошла XXXIX Международная математическая олимпиада (ММО), собравшая 419 школьников из 76 стран мира.

Подбор заданий XXXIX ММО оказался достаточно сложным: в первый день олимпиады 12, а во второй 10 школьников сумели набрать по 21 баллу, а максимальное число баллов – 42 – набрал лишь один участник – Омид Амини из команды Ирана.

Россию представляли одиннадцатиклассники Николай Дуров (Санкт-Петербург, школа 239), Евгений Черепанов (Рыбинск, школа 17), Ирина Анно (Москва, школа 57), Данил Шаповалов (Иваново, школа 33), Антон Розенберг (Санкт-Петербург, школа 419) и девятиклассник Владимир Дремов (Волгодонск, школа 24), показавшие на олимпиаде следующие результаты:

	1	2	3	4	5	6	Σ	
Н.Дуров	7	7	7	7	7	4	39	золотая медаль
В.Дремов	5	7	7	7	0	7	33	золотая медаль
Е.Черепанов	2	7	2	7	4	7	29	серебряная медаль
И.Анно	6	7	3	5	7	0	28	серебряная медаль
А.Розенберг	7	7	2	7	3	0	26	серебряная медаль
Д.Шаповалов	4	7	2	7	0	0	20	бронзовая медаль

На этот раз результаты участников команды России были легко предсказуемы, так как у большинства из них оказались любимые и нелюбимые темы в школьном курсе математики. Поэтому за исключением Е.Черепанова, золотого медалиста предыдущей Международной олимпиады, наши школьники показали приблизительно те результаты, которых от них можно было ожидать. Следует поздравить Н.Дурова, в третий раз ставшего золотым медалистом олимпиады, и В.Дремова, продолжившего традицию «золотых дебютов» наших девятиклассников на ММО.

В неофициальном командном зачете места распределились следующим образом:

1. Иран – 211 баллов (5з + 1с);	11. Румыния – 155 баллов (3з + 2б);
2. Болгария – 195 баллов (3з + 3с);	12. Ю.Корея – 154 балла (2з + 2с + 2б);
3–4. Венгрия – 186 баллов (4з + 3с);	13. Австралия – 146 баллов (4с + 2б);
США – 186 баллов (3з + 3с);	14. Япония – 139 баллов (1з + 1с + 3б);
5. Тайвань – 184 балла (3з + 2с + 1б);	15. Чехия – 135 баллов (3с + 3б);
6. Россия – 175 баллов (2з + 3с + 1б);	16. ФРГ – 129 баллов (3с + 2б);
7. Индия – 174 балла (3з + 3с);	17–18. Турция – 122 балла (2с + 4б);
8. Украина – 166 баллов (1з + 3с + 2б);	Великобритания – 122 балла (1с + 4б);
9. Вьетнам – 158 баллов (1з + 3с + 2б);	19. Белоруссия – 118 баллов (1с + 4б);
10. Югославия – 156 баллов (5с);	20. Канада – 113 баллов (1з + 1с + 2б).

А вот результаты выступления команд бывших советских республик, не попавших в первую двадцатку:

Армения – 100 баллов (2с + 2б);	Эстония – 63 балла (1с + 1б);
Казахстан – 81 балл (2б);	Молдавия – 45 баллов (1с + 1б; 2 участника);
Грузия – 78 баллов (3б);	Азербайджан – 41 балл (1б);
Латвия – 74 балла (1с + 3б);	Литва – 40 баллов (1б).

Отметим успешное выступление второй год подряд Украины (золотая медаль досталась Павло Пилявскому) и стабильность выступлений на ММО России, занимающей по итогам выступлений в 93–98 гг. 2–3 места по числу завоеванных золотых медалей (после Китая, пропустившего в этом году ММО).

Задачи первого дня олимпиады включены в «Задачник «Кванта»».

Предлагаем вашему вниманию задачи второго дня.

Задача 1 (Великобритания). Найдите пары (a, b) натуральных чисел такие, что $a^2b + a + b$ делится на $ab^2 + b + 7$.

Задача 2 (Украина). Пусть I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Обозначим через K, L, M точки, в которых эта окружность касается сторон BC, CA, AB соответственно. Прямая, проходящая через точку B параллельно прямой MK , пересекает прямые LM и LK в точках R и S соответственно. Докажите, что угол RIS – острый.

Задача 3 (Болгария). Рассмотрим все функции $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, удовлетворяющие условию

$$f(t^2 \cdot f(s)) = s \cdot (f(t))^2$$

для любых натуральных s и t . Найдите наименьшее возможное значение $f(1998)$.

Публикацию подготовил
Д.Терешин

XXIX Международная олимпиада школьников по физике

Со 2 по 10 июля 1998 года в городе Рейкьявике, столице Исландии, состоялась очередная международная физическая олимпиада школьников. В ней приняли участие 266 школьников из 56 стран мира.

В команду России входили:

Абанин Дмитрий – г. Ростов-на-Дону, средняя школа 56;

Барыгин Илья – г. Санкт-Петербург, лицей «Физико-техническая школа»;

Имомбеков Адилет – г. Москва, СУНЦ МГУ;

Рубцов Григорий – п. Черноголовка Московской обл., экспериментальная средняя школа 82 РАО;

Турицын Константин – г. Новосибирск, средняя школа 130.

Участникам олимпиады были предложены три теоретические задачи и одна экспериментальная. Правильно решенная теоретическая задача оценивалась в 10 баллов, экспериментальная – в 20; таким образом, максимальная общая оценка для каждого участника составляла 50 баллов.

По итогам олимпиады награды получили 133 школьника. Им было вручено 11 золотых медалей, 15 серебряных, 43 бронзовых, 55 почетных грамот и 9 специальных призов. Очень хорошо выступила команда России, завоевав 5 медалей, из них 3 золотых и 2 серебряных. Золотые медали получили Абанин Дмитрий (44,7 балла), Имомбеков Адилет (44,4) и Рубцов Григорий (43,1), серебряные – Барыгин Илья (40,1) и Турицын Константин (37,0).

В сумме российские школьники набрали 209,3 балла (83,6% от максимального), из них за задачи теоретического тура 122,3 балла (82%), а экспериментального – 87,0 балла (87%). Это очень высокие результаты. Особенно хочется отметить успехи наших школьников в экспериментальном туре.

Команда России заняла (в неофициальном командном зачете) второе место, уступив лишь команде Китая, завоевавшей 5 золотых медалей. Приведем результаты стран, все школьники которых получили медали или грамоты:

Страна	Число медалей			Число почетных грамот	Сумма баллов
	золотых	серебр.	бронз.		
1. Китай	5	–	–	–	226,4
2. Россия	3	2	–	–	209,3
3. Иран	1	3	1	–	185,8
4. Корея	1	–	2	2	169,9
5. Польша	1	1	–	3	155,5
6. Индия	–	1	1	3	153,6
7. Австралия	–	1	2	2	152,3
8. Тайвань	–	1	2	2	152,1

Заметим, что уровень заданий олимпиады был высоким, о чем свидетельствует, например, малое число золотых и серебряных медалей. Важной особенностью теоретических задач была их оригинальность, приближенность к жизни. Так, задача 3 основывалась на новейшем научном открытии, совершенном в астрофизике в 1994 году, задача 2 – на реальном событии: извержении вулкана в Исландии в 1996 году. Задача экспериментального тура также была оригинальной. В первой ее части предлагалось исследовать магнитную экранировку с помощью вихревых токов; во второй части исследовался трансформатор на ферритовом сердечнике с частичным рассеиванием магнитного потока.

Российские школьники наиболее успешно справились со 2-й и 3-й задачами теоретического тура и экспериментальным заданием. Двое из них получили специальные призы: Абанин Дмитрий – за лучшее решение 3-й задачи теоретического тура; Барыгин Илья – за лучшее решение первой части экспериментального задания.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

Задача 1. Качение шестигранной призмы

Рассмотрим длинную твердую жесткую правильную шестигранную призму, напоминающую формой обычный карандаш. Масса призмы M распределена равномерно. Поперечное сечение призмы имеет форму шестиугольника с длиной стороны a . Момент инерции шестигранной призмы относительно ее центральной оси равен $I = 5Ma^2/12$, а относительно ее ребра – $I' = 17Ma^2/12$.

а) (3,5 балла) Призма, ось которой горизонтальна, вначале покоится на наклонной плоскости, расположенной под небольшим углом θ к горизонтали (рис.1). Допустим, что поверхности

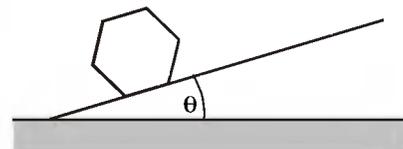


Рис. 1. Шестигранная призма, покоящаяся на наклонной плоскости

призмы немного вогнуты, так что она соприкасается с плоскостью только ребрами. Влияние этой вогнутости на момент инерции не принимается во внимание. Затем призму выводят из состояния покоя, и она начинает неравномерное качение вниз по плоскости. Допустим, что трение полностью исключает скольжение призмы и что призма не теряет контакта с наклонной плоскостью. Пусть угловая скорость непосредственно перед тем, как данное ребро ударится о плоскость, будет ω_i , а сразу после удара – ω_j . Покажите, что $\omega_j = s\omega_i$, и найдите численное значение коэффициента s .

б) (1 балл) Кинетическую энергию призмы непосредственно перед ударом и после него обозначим, соответственно, K_i и K_j . Покажите, что $K_j = rK_i$, и найдите численное значение коэффициента r .

с) (1,5 балла) Для того чтобы произошел следующий удар, значение K_i должно превысить некоторое минимальное значение $K_{i\min}$, которое может быть

представлено в виде $K_{i\min} = \delta Mga$, где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения. Найдите коэффициент δ , выразив его через угол наклона θ и коэффициент r .

д) (2 балла) Если выполнено условие пункта с), то кинетическая энергия K_i будет приближаться к постоянной величине K_{i0} по мере того, как призма катится вниз по наклонной плоскости. Приняв, что этот предел существует, покажите, что K_{i0} можно записать в виде $K_{i0} = kMga$, и найдите коэффициент k , выразив его через θ и r .

е) (2 балла) Вычислите с точностью до $0,1^\circ$ значение минимального угла наклона θ_0 , при котором неравномерное качение, начавшись, будет продолжаться бесконечно.

Задача 2. Вода под ледяным щитом

Ледяной щит – это толстый слой льда (толщиной до нескольких километров), который покоится на поверхности земли, простираясь горизонтально на десятки и сотни километров. В данной задаче рассматривается таяние льда и поведение воды под слоем льда, находящимся при температуре, близкой к точке плавления. Будем считать, что в таких условиях лед создает давление как вязкая жидкость, но деформируется как хрупкий материал, главным образом – путем вертикального смещения. Для решения данной задачи вам известны следующие данные: плотность воды $\rho_v = 1,000 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, плотность льда $\rho_l = 0,917 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоемкость льда $c_l = 2,1 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, удельная теплота плавления льда $L_l = 3,4 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, плотность пород и магмы $\rho = 2,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоемкость пород и магмы $c = 700 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, удельная теплота плавления пород и магмы $L = 4,2 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, температура плавления льда $t_l = 0^\circ \text{C}$ (она постоянна), средняя мощность теплового потока через поверхность земли $J = 0,06 \text{ Вт/м}^2$.

а) (0,5 балла) Рассмотрите толстый слой льда, расположенный на поверхности земли, через которую поступает средний поток тепла. Пользуясь данными, вычислите толщину d тающего за год слоя льда.

б) (3,5 балла) Рассмотрим теперь верхнюю поверхность щита. Пусть поверхность земли наклонена под углом α к горизонту, а верхняя поверхность щита образует угол β с горизонтом, как показано на рисунке 2. Толщина льда в точке $x = 0$ равна h_0 . Таким образом, нижняя и верхняя поверхности щита могут быть описаны уравне-

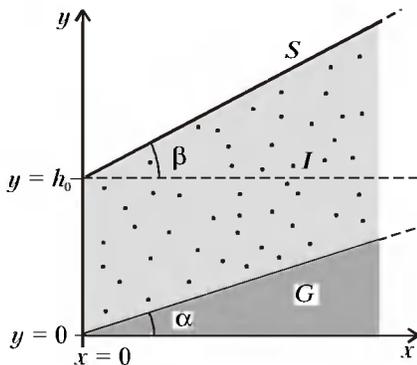


Рис. 2. Поперечное сечение ледяного щита над наклонной земной поверхностью; S – поверхность льда, G – земля, I – ледяной щит

ниями $y_1 = x \text{tg}\alpha$, $y_2 = h_0 + x \text{tg}\beta$. Получите формулу для давления p у нижней кромки щита в зависимости от горизонтальной координаты x . Найдите соотношение между углами β и α , при котором вода в слое между льдом и землей не будет двигаться ни в одном направлении. Покажите, что это условие имеет вид $\text{tg}\beta = s \text{tg}\alpha$, и найдите коэффициент s .

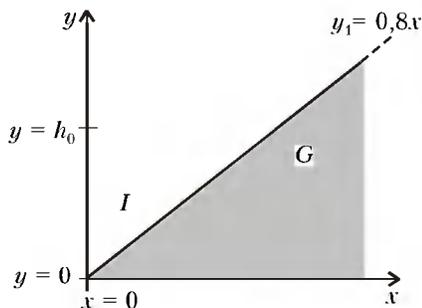


Рис. 3. Поперечное сечение ледяного щита, покоящегося на наклонной поверхности земли; вода под щитом находится в состоянии равновесия; G – земля, I – ледяной щит

Линия, описываемая уравнением $y_1 = 0,8x$ на рисунке 3, показывает поверхность земли под ледяным щитом. Толщина льда при $x = 0$ равна $h_0 = 2 \text{ км}$. Полагая, что вода под щитом находится в равновесии, изобразите на графике линию y_1 и добавьте линию y_2 , показывающую верхнюю поверхность льда.

с) (1 балл) Внутри толстого слоя льда, находящегося на горизонтальной поверхности земли, первоначально имевшем постоянную толщину $D = 2,0 \text{ км}$, в результате таяния льда внезапно формируется коническая полость высотой $H = 1,0 \text{ км}$ и радиусом $r = 1,0 \text{ км}$, полностью заполненная водой (рис. 4). Будем считать, что остальной лед реагирует на образование этой полости только вертикальным смещением. Запишите аналитическое вы-

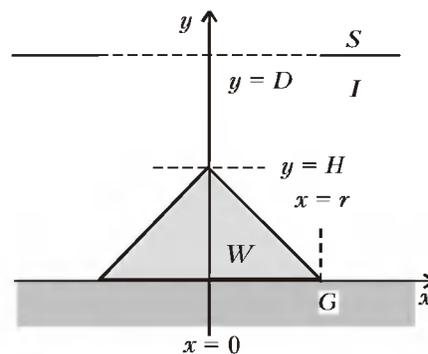


Рис. 4. Вертикальный разрез по средней плоскости водяного конуса внутри ледяного щита; S – поверхность льда, W – вода, G – земля, I – ледяной щит

ражение для формы верхней поверхности ледяного щита после установления гидростатического равновесия и изобразите эту поверхность.

д) (5 баллов) Ежегодная экспедиция международной группы ученых исследует ледовый щит в одном из районов Антарктики. Обычно этот район представляет из себя обширное плато, но в

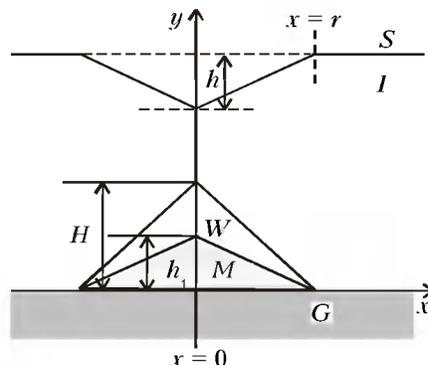


Рис. 5. Вертикальное центральное сечение конической впадины в ледяном щите; S – поверхность льда, G – земля, I – ледяной щит, M – магма, W – вода

этом раз ученые обнаружили глубокую кратерообразную впадину в форме перевернутого конуса глубиной $h = 100 \text{ м}$ и радиусом $r = 500 \text{ м}$ (рис. 5). Толщина льда в этом месте 2000 м . После дискуссии ученые пришли к выводу, что скорее всего под щитом произошло небольшое вулканическое извержение. Небольшой объем магмы (расплавленной породы) проник через нижнюю кромку ледяного щита, затвердел и остыл, растопив некоторое количество льда. Ученые пытаются оценить объем этого «вторжения» (проникновение магмы под ледяной щит) и объяснить, что произошло с растопленной водой, следующим образом.

Предположим, что лед двигался только вертикально. Будем считать также, что вначале магма была в полностью расплавленном состоянии при темпера-

туре 1200°C , что соответствует температуре плавления магмы. Для упрощения будем считать, что вторжение магмы под ледяной щит имело форму вертикального конуса с круглым основанием, расположенным вертикально под конической воронкой на поверхности. Время поднятия магмы было малым по сравнению со временем теплообмена. Предположим, что тепло распространяется главным образом по вертикали, так что объем воды, образующейся при плавлении льда, все время ограничен конической поверхностью льда, расположенной над центром вторжения магмы. В этих условиях таяние льда происходит в две стадии. Вначале расплавленная вода не находилась в состоянии гидростатического равновесия на поверхности магмы и поэтому утекала. Можно считать, что эта вода имела температуру 0°C . Затем было достигнуто равновесие, вода перестала течь и стала накапливаться над проникшей магмой.

Найдите следующие величины после достижения теплового равновесия: 1) высоту H вершины конуса воды, сформировавшегося под ледяным щитом, относительно первоначальной поверхности нижнего основания ледяного щита; 2) высоту h_1 вторжения магмы; 3) общую массу образовавшейся воды m и массу m^* воды, которая утекла. Начертите в масштабе на миллиметровой бумаге поверхность вторжения магмы и поверхность образовавшейся воды. Используйте такую же систему координат, как на рисунке 5.

Задача 3. Быстрее света?

В этой задаче мы анализируем и интерпретируем измерения радиоизлучений от составного источника в нашей галактике, выполненные в 1994 году. Приемник был настроен на широкий диапазон радиоволн длиной в несколько сантиметров. На рисунке 6 показана серия изображений, записанных в разное время. Линии постоянной интенсивности обозначены контурами – примерно так же, как контуры высот на географической карте. Два максимума интенсивности понимаются как два объекта, удаляющиеся от общего центра, который обозначен на рисунке крестом. (Центр, который считается зафиксированным неподвижно в пространстве, также является мощным источником излучения, но преимущественно другой длины волны.) Измерения в разные дни были сделаны в одно время суток.

Масштаб рисунка дается в виде отрезка в одну угловую секунду ($1'' = 1/3600^\circ$). Расстояние до небесного тела в центре рисунка, показанного

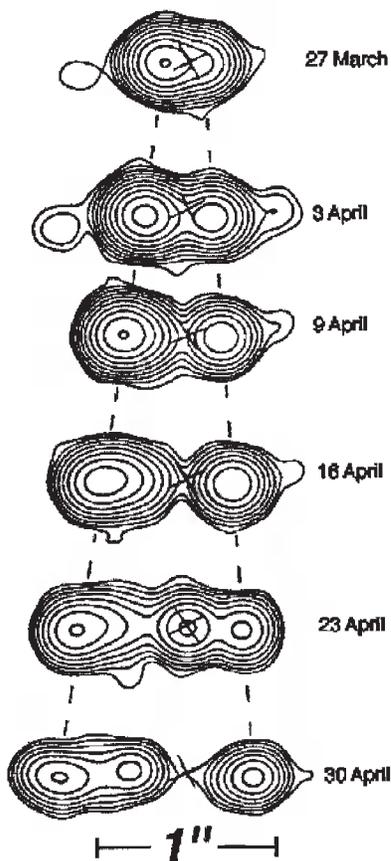


Рис. 6. Радиоизлучение от источника в нашей галактике

крестом, оценивается в $R = 12.5$ кпс ($1 \text{ кпс} = 3,09 \cdot 10^{19} \text{ м}$). Скорость света $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Оценка ошибок при решении не требуется.

а) (2 балла) Обозначим угловые положения двух удаляющихся источников радиоизлучения по отношению к общему центру через $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$, где индекс 1 указывает на положение левого источника, 2 – правого, t – время наблюдения. Угловые скорости источников, наблюдаемых с Земли, будем обозначать ω_1 и ω_2 . Соответствующие кажущиеся поперечные линейные скорости двух источников обозначим $v'_{1\perp}$ и $v'_{2\perp}$. С помощью рисунка 6 постройте графики зависимостей $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ для определения численных значений ω_1 и ω_2 в угловых миллисекундах в день (мс/день). Найдите также численные значения $v'_{1\perp}$ и $v'_{2\perp}$ (некоторые результаты могут Вас удивить).

б) (3 балла) Чтобы разрешить возникшее в части а) недоумение, рассмотрите источник света, движущийся со скоростью \vec{v} под углом φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) к направлению на удаленного наблюдателя О. Скорость можно записать как $v = \beta c$, где c – скорость света. Расстояние до источника, измеренное

наблюдателем, обозначим через R , угловую скорость источника с позиции наблюдателя – через ω , а кажущуюся линейную скорость, перпендикулярную линии наблюдения, – через v'_{\perp} . Определите ω и v'_{\perp} , выраженные через β , R и φ .

с) (1 балл) Допустим, что два разлетающихся объекта, описанные во введении и в части а), движутся в противоположных направлениях с одной и той же скоростью $v = \beta c$. Тогда результаты части б) позволяют получить β и φ из угловых скоростей ω_1 и ω_2 и расстояния R . Здесь φ – угол, определенный в части б) для левого объекта, соответствующего индексу 1 в части а). Выведите формулы для β и φ через известные величины и определите их численные значения из данных части а).

д) (2 балла) Для модели только с одним объектом, описанной в части б), найдите условие, при котором кажущаяся перпендикулярная скорость v'_{\perp} будет больше скорости света c . Запишите это условие в виде $\beta > f(\varphi)$ и дайте аналитическое выражение функции f . На листе в клетку выделите область плоскости (β, φ) , в которой выполняется условие $v'_{\perp} > c$.

е) (1 балл) Для этой же модели только с одним объектом части б) найдите выражение для максимального значения кажущейся перпендикулярной скорости для заданного β . Обратите внимание, что эта скорость стремится к бесконечности при $\beta \rightarrow 1$.

ф) (1 балл) Оценка значения R , приведенная во введении, не очень надежна. Поэтому ученые начали искать более надежный и прямой метод определения значения R . Вот как, например, это можно сделать. Допустим, что мы можем найти и измерить смещенные по эффекту Доплера длины волн λ_1 и λ_2 для излучений двух разлетающихся объектов, соответствующей известной первичной длине волны λ_0 для этих объектов в состоянии покоя. Используя уравнение для релятивистского эффекта Доплера $\lambda = \lambda_0(1 - \beta \cos \varphi) / \sqrt{1 - \beta^2}$ и приняв, как ранее, что оба объекта движутся с одной и той же скоростью v , покажите, что неизвестное $\beta = v/c$ может быть выражено через λ_0 , λ_1 и λ_2 следующим образом: $\beta = \sqrt{1 - \alpha \lambda_0^2 / (\lambda_1 + \lambda_2)^2}$. Найдите численное значение коэффициента α . Вы можете заметить, что предложенный способ измерения длины волн на практике позволит получить новую оценку расстояния.

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Коровин

Московская олимпиада студентов по физике

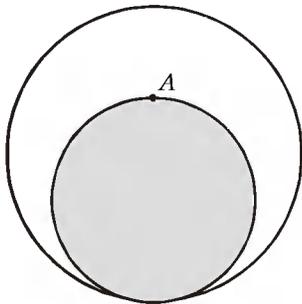
В мае 1998 года на базе кафедры физики Московского государственного технического университета им. Н.Э.Баумана (МГТУ) прошла очередная городская физическая олимпиада среди студентов. В олимпиаде приняли участие десять технических вузов Москвы. Каждая команда состояла из пяти студентов (до третьего курса включительно). Участникам олимпиады был предложен вариант из десяти задач (в зависимости от сложности задачи оценивались от 6 до 10 баллов) и разрешалось пользоваться любой литературой.

По результатам олимпиады в коллективном зачете первое место заняла команда МГТУ, второе – команда Российского государственного университета нефти и газа им. И.М.Губкина (РГУ), третье – команда Московского государственного института электронной техники.

В индивидуальном зачете первое место завоевал А.Шуст (МГТУ), второе – В.Муравьев (МГТУ), третье – А.Повилиякин (РГУ).

Ниже приводятся условия олимпиадных задач.

1. По внутренней цилиндрической поверхности, радиус которой R , катится диск радиусом $2R/3$. Определите радиус кривизны траектории точки A (см. рисунок).



2. Математический маятник длиной L , движущийся в вязкой среде, вывели из положения равновесия, придав шарик начальную скорость v_0 . На движение из положения равновесия до точки максимального отклонения маятник затратил на 10% меньше времени, чем на движение в обратную сторону. Определите скорость, с которой маятник пройдет точку равновесия при обратном движении.

3. Гигантский абсолютно жесткий стержень вращается вокруг Земли по стационарной орбите таким образом, что он все время ориентирован на центр Земли. На концах стержня закреплены две одинаковые точечные массы m . Длина стержня равна радиусу Земли R . Определите период малых

колебаний стержня в поле силы тяжести, если ближайшая к Земле точечная масса находится на расстоянии $R/2$ от ее поверхности. (Считать, что колебания происходят в плоскости движения стержня.)

4. Космический корабль массой m движется по стационарной круговой орбите радиусом r_0 вокруг Земли. В начальный момент времени включается двигатель, сила тяги которого всегда направлена от центра Земли и равна F . Определите, при каком значении r_0 космический корабль покинет пределы поля тяготения Земли. Радиус Земли R .

5. Два точечных заряда $+q$ и $-q$ находятся на расстоянии $4L$ друг от друга. Посередине между ними поместили незаряженную металлическую сферу радиусом L . Определите силу притяжения между зарядами.

6. Конденсатор представляет из себя две длинные полосы металлической фольги длиной L и две такой же длины полосы диэлектрической пленки, сложенные поочередно друг с другом и свернутые в рулон с большим числом слоев. Какую работу необходимо совершить, чтобы развернуть этот конденсатор в плоский, если первоначально он был заряжен до напряжения U_0 и отключен от источника питания? Ширина полос конденсатора a , толщина диэлектрической пленки d , а диэлектрическая проницаемость материала пленки ϵ .

7. Переключатель в виде круглого про-

водника радиусом r , концентрация электронов в котором n , а удельная проводимость σ , скользит по двум параллельным проводникам. При этом в переключке течет ток I . Вся система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого \vec{B} перпендикулярен плоскости, образованной проводниками системы. Определите среднюю величину силы Лоренца, действующей на электрон, находящийся в переключке.

8. В теплоизолированной полости с зеркальными стенками объемом V_0 находится равновесное тепловое излучение с температурой T_0 . Определите работу, которую совершит равновесное тепловое излучение при расширении полости до объема $2V_0$, и конечную равновесную температуру.

9. Кондиционер, работая в режиме нагревателя, закачивает в помещение 3 кВт тепла. Определите минимально возможный расход электроэнергии, если температура в помещении 20°C , а на улице -10°C .

10. Плоская световая волна интенсивностью I_0 падает на выпуклую линзу диаметром d и фокусным расстоянием F ($F \gg d$). В фокальной плоскости на оси линзы расположена маленькая круглая диафрагма, радиус которой r порядка длины волны света λ . Определите, какая часть светового потока, падающего на линзу, пройдет через диафрагму.

Публикацию подготовил
М.Яковлев

Внимание!

Московское издательство «ЭКСМО-Пресс» выпустило в свет учебно-справочное пособие для подготовки выпускников и вступительным экзаменам «СДАЕМ ЭКЗАМЕНЫ. ФИЗИКА».

Автор — заместитель главного редактора журнала «Квант»
А.И.Черноуцан.

Телефоны отдела реализации:
378-82-61, 378-84-74,
378-81-11.

V Вышеградская конференция молодых ученых

С 26 апреля по 2 мая 1998 года в Вышеграде (Венгрия, 40 км от Будапешта) проходила V Международная конференция молодых ученых (ICYS-98) по физике, математике, информатике и экологии для учеников средней школы. Конференция проводится ежегодно, начиная с 1994 года, и называется Вышеградской, несмотря на то, что II и IV конференции проводились в Белоруссии (в Барановичах). Организаторами конференции являются Университет Этвоша (Будапешт) и Белорусский государственный университет (Минск).

В V Вышеградской конференции приняли участие школьники из России, Белоруссии, Грузии, Венгрии, Югославии, Румынии, Македонии, Голландии. Каждый участник представил 10-минутный научный доклад по теме одной из секций на английском языке. Всего было сделано 32 доклада в секции физики, 21 доклад в секции математики, 11 докладов в секции экологии и 10 докладов в секции информатики. Международное жюри оценивало качество доклада, оригинальность и новизну полученных результатов, от-

веты на вопросы в дискуссии и выбирало победителей конкурса по каждой секции.

В секции математики отдельно оценивались доклады по высшей и по элементарной математике. В категории высшей математики были присуждены две первые премии — их получили Мищенко Сергей и Парилев Дмитрий (Санкт-Петербург, Россия) — и одна третья премия, ее завоевал Вольфсон Максим (Санкт-Петербург, Россия). В категории элементарной математики первую премию получила Гамбург Татьяна (Могилев, Белоруссия), вторую — Лосев Иван (Минск, Белоруссия), а третью — Митин Дмитрий (Киев, Украина); была также присуждена специальная премия, ее получил Тарасенко Павел (Москва).

В секции физики первую премию поделили Донов Александр (Македония) и Казийн Эрик (Голландия), вторую — Балинт Имре и Киспал Иштван (Венгрия), третью премию разделили Миронов Дмитрий с соавтором Блетко Кириллом, Толочко Андрей (Минск, Белоруссия) и Баур Эдина (Венгрия). Кроме того, специальными дипломами были отмечены работы Клдиашвили Александра (Москва) и группы авторов из Македонии.

В секции информатики первую пре-

мию получили Гайдук Александр (Барановичи, Белоруссия) и Шольтен Джерон (Голландия), вторую — Глебов Сергей (Минск, Белоруссия), а третью — Максимец Сергей (Черновцы, Украина). Специальную премию жюри присудило Митреа Делю (Румыния).

В секции экологии первую премию получили Баколни Миколт и Жегл Иболя (Венгрия), вторую — Брайка Тибериу Стефан (Румыния), третью — Андрашек Виктория и Папп Гергели (Венгрия). Специальная премия была присуждена Чанкошвили Николошу (Тбилиси, Грузия).

Доклады призеров конференции были выполнены на высоком научном уровне и представляли собой цельные работы по определенной проблеме, теме, эффекту, явлению.

В заключение хочется отметить прекрасную организацию конференции, доброту и гостеприимство членов оргкомитета (председатель оргкомитета — Жужа Райкович). Участники конференции провели неделю в тихом уютном городке Вышеграде, познакомились с Будапештом и некоторыми старинными городами в его окрестностях.

В.Родин

Международный турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках своей программы «Новые информационные технологии и интеллектуально одаренные дети» проводит международный турнир «Компьютерная физика». Цель турнира — привлечение школьников к научному творчеству через активное внедрение новых компьютерных технологий в физическое образование. Использование возможностей современных компьютерных систем позволяет расширить спектр исследовательских проблем и выйти за узкие рамки аналитически решаемых задач. Моделирование физических процессов в реальном времени помогает глубже понять реальные физические явления, сформировать образы для понимания сложных динамических процессов.

Предлагаемые на турнире «Компьютерная физика» задачи предполагается решать с помощью численного моделирования на компьютере. Для участия в турнире приглашаются команды школьников, обладающих знаниями физики и навыками программирования на IBM

PC. Турнир проводится в виде соревнования между командами и проходит в два тура — заочный и очный. Заочное задание рассылается по компьютерным сетям за месяц до встречи. Лучшие команды приглашаются на финал, где происходит представление и защита результатов выполнения задания. Каждой команде предлагается выступить с докладом, который оппонируется и рецензируется другими командами. После подведения итогов заочного тура объявляется задание очного тура. На его выполнение дается 24 часа, и через сутки проходит защита. Все выступления оцениваются жюри.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает все заинтересованные школы, лицеи и компьютерные центры принять участие в международном турнире «Компьютерная физика».

Заявки присылайте по адресу:

115522 Россия, Москва, Пролетарский пр., д.15/6, корп.2, МИК «Глюон».

Факс: (095) 324-8479, (095) 396-8227; e-mail: olga@mics.msu.su.

А теперь расскажем немного о втором международном турнире «Компьютерная физика», который был прове-

ден с 25 по 30 января 1998 года в г.Протвино Московской области. Активную поддержку оказал Государственный научный центр Российской Федерации «Институт физики высоких энергий». Заявки на участие в турнире подали 32 команды из различных городов и областей России, а также представители Белоруссии, Грузии, Македонии и Греции.

Абсолютным победителем турнира стала команда лицея 1511 при Московском инженерно-физическом институте (команда МИФИ-2), диплом первой степени получила команда МИФИ-1 этого же лицея, диплом второй степени — школа-комплекс «Царицыно» 548, третьей степени — Протвинский лицей 1.

Один из дней турнира был посвящен встрече с научными сотрудниками Института физики высоких энергий, которые показали уникальный ускоритель протонов и рассказали о современных экспериментах по изучению основ строения материи. В день отдыха состоялась обзорная экскурсия по историческим местам г.Серпухова с посещением Кремля, Высотского монастыря и знаменитой картинной галереи.

Заочный тур

Задание. Физический мир и виртуальная реальность

В соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона, сферически симметричное тело массой m создает гравитационный ньютонов потенциал

$$\varphi = -G \frac{m}{r},$$

где G – гравитационная постоянная, r – расстояние от тела ($r > R$, где R – размер тела). Строение Вселенной в значительной степени определяется силами гравитационного взаимодействия, определяемыми ньютоновым потенциалом.

Как была бы устроена Солнечная система, если бы гравитационное взаимодействие описывалось неньютоновым потенциалом вида

$$\varphi = -G \frac{mR^{n-1}}{r^n},$$

где n – любое?

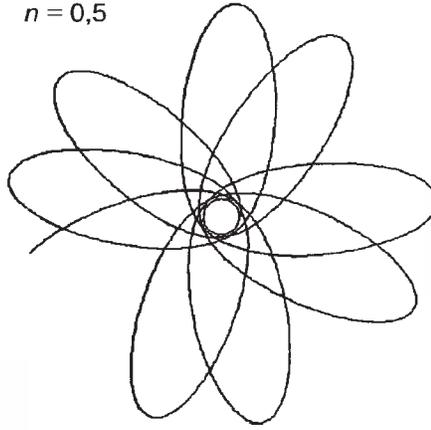
1) Рассмотрите движение планеты.
2) Рассмотрите движение кометы (эллиптическую траекторию с большим эксцентриситетом). 3) Рассмотрите движение астероида (гиперболическую траекторию).

Предлагаемая задача включает в себя известную задачу Кеплера о движении тела в поле, описываемом ньютоновым потенциалом. Известно, что в этом случае траекторией движения является одна из кривых второго порядка: эллипс, гипербола или парабола в зависимости от значения полной энергии E . В частности, возможно движение по круговой орбите, при этом скорость тела связана с радиусом орбиты соотношением $v = \sqrt{Gm/r}$. Очевидно, что круговая орбита существует при любом значении n , а полная энергии системы определяется выражением

$$E = \frac{mv^2}{2} \left(1 - \frac{2}{n} \right).$$

Случай $n = 1$ соответствует задаче Кеплера, поэтому интересно исследовать изменения траектории движения при отклонении величины n от единицы. При незначительном отклонении наблюдаются прецессирующие эллиптические орбиты. По мере увеличения n характеристики орбит меняются, в частности – наблюдается резкое изменение удаления планеты со временем. Однако в случае $n < 2$ полная энергия движения отрицательна, и траектория движения финитна. Точка $n = 2$ – критическая точка. При $n > 2$ значение E положительно. Это означает, что круговые орбиты в области $n > 2$ оказы-

$n = 0,5$



$n = 1,5$

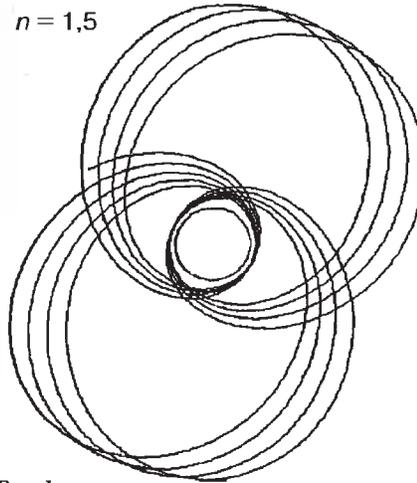


Рис 1

ваются неустойчивыми, и небольшое отклонение орбиты от круговой приводит к уходу тела от притягивающего центра на бесконечно большое расстояние.

Наиболее полное решение задания заочного тура было представлено командой Протвинского лица 1 в составе: В.Евдокимов, К.Саломатин, А.Казак, Д.Алехин, А.Хныкин, Ю.Астахов, Д.Лабин (руководитель – С.Астахов). Результаты расчетов, полученные этой командой для траекторий планет при $n = 0,5$ и $n = 1,5$, представлены на рисунке 1.

Проведенное исследование позволяет сделать интересные выводы о возможном устройстве Солнечной системы, если бы гравитационное взаимодействие описывалось неньютоновым потенциалом. При $n > 2$ устойчивого движения планет вокруг Солнца не существовало бы – планеты упали бы на Солнце или улетели на бесконечность. Даже при небольшом отклонении скорости от указанного значения расстояние до Солнца было бы резкой функцией времени. В результате поток лучистой энергии на поверхность планеты сильно изменялся бы во времени, что сделало бы жизнь нереальной.

Очный тур

Задание. Задача Улама

Известно, что в системе с большим числом степеней свободы движение отдельной частицы носит случайный (стохастический) характер. Примером является броуновское движение частицы. Однако оказывается, что случайные движения могут наблюдаться и в системе с малым числом степеней свободы. Такое движение происходит, в частности, под действием периодического возмущения. Пример – движение частицы в сосуде с дрожжащими стенками.

Рассмотрим движение шарика между двумя вертикальными бесконечно тяжелыми стенками, одна из которых колеблется по гармоническому закону

$$x = a \sin \omega t$$

с частотой ω и амплитудой a . В начальный момент времени ($t = 0$) расстояние между стенками равно L , скорость шарика v . Начальное направление движения и положение шарика произвольны. Характер движения шарика между стенками определяется величиной изменения фазы $\varphi = \omega t_n$ от столкновения к столкновению, где t_n – момент n -го столкновения.

Опишите характер движения, проанализировав изменение фазы $\Delta\varphi$ от столкновения к столкновению. Исследуйте зависимость энергии шарика от времени. Предположите $L = 1$ см, $a = 0,1$ см и $a = 0,5$ см.

1) Исследуйте движение в диапазоне $v = 10^5 - 10^9$ см/с при постоянной частоте $\omega = 10^7$ с⁻¹. Опишите полученные результаты. 2) Исследуйте движение в диапазоне $\omega = 10^5 - 10^9$ с⁻¹ при постоянной скорости $v = 10^7$ см/с. Опишите полученные результаты. 3) Исследуйте возможную зависимость от начального положения шарика и направления движения.

Традиционно считается, что движение одной частицы определено (детерминировано). Но в общем случае это не так. Если есть нелинейный гармонический осциллятор, то под действием вынуждающей периодической силы в зависимости от соотношения параметров в системе может наступать хаос.

При $a \ll L$ области регулярного и стохастического движений определяются изменением фазы от столкновения к столкновению, т.е. величиной

$$\Delta\varphi = \varphi_{n+1} - \varphi_n = 2L\omega/v_n,$$

где v_n – скорость шарика в момент n -

го столкновения. Изменение скорости шарика определяется соотношением

$$v_{n+1} = v_n + 2v_c \cos \omega t,$$

где $v_c = a\omega$ — скорость стенки. Если $\Delta\phi$ изменяется плавно, движение носит регулярный характер. Если $\Delta\phi$ изменяется от столкновения к столкновению сильно (на величину порядка π), в системе начинается хаос.

Части 1 и 2 задания посвящены поиску режимов регулярного и стохастического движений. Перестройка между ними идет через понижение v или увеличение ω . Возможная зависимость от начального положения шарика, исследовать которую предложено в части 3, может наступать только в режиме стохастического движения.

Наиболее полное решение задания очного тура было представлено командой МИФИ-2 лица 1511 в составе: А.Бадиков, М.Чмыхов, А.Анисимов, А.Ветошников, С.Хныкин.

Результаты расчетов, полученные этой командой для режимов регулярного и хаотичного движений, представлены на рисунке 2. Кривая 1 описывает энергию шарика (в процентах от заданной), кривая 2 — изменение фазы со временем, 3 — положение подвижной стенки и 4 — положение шарика.

В.Альминдеров, О.Поповичева

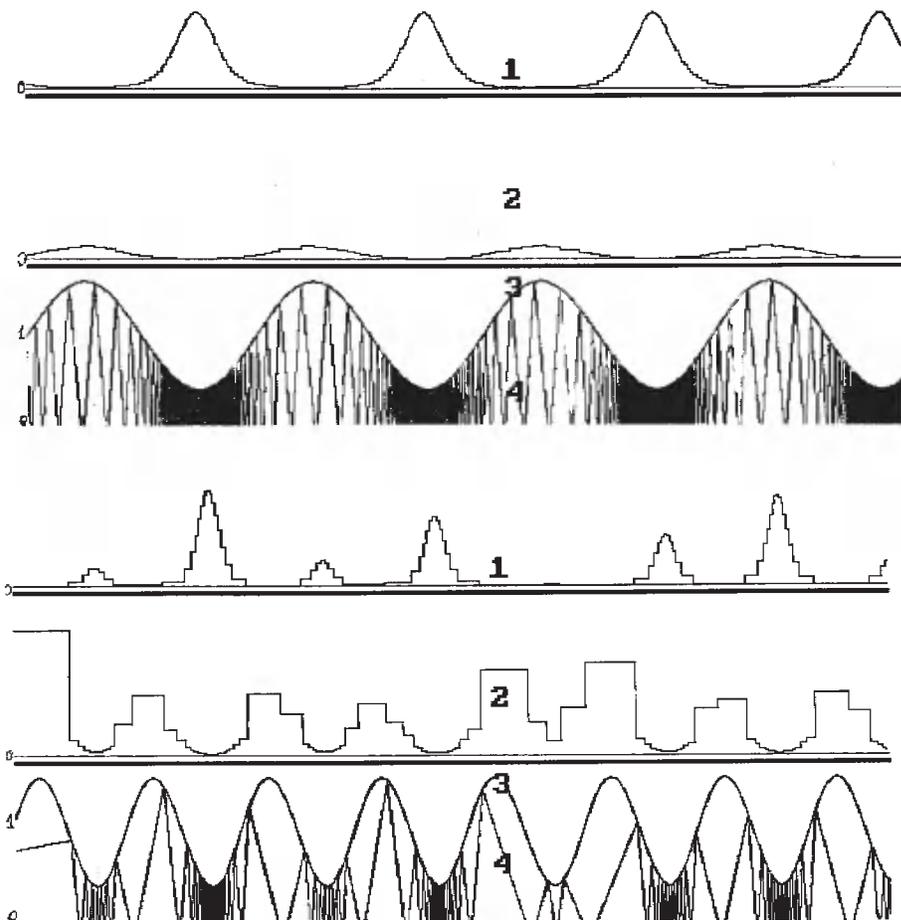


Рис. 2

«Диалог» готов к сотрудничеству

Международная школа юных исследователей «Диалог» была создана в 1991 году группой энтузиастов — педагогов и научных сотрудников Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ, г.Дубна). Первым руководителем научной программы Школы был профессор Я.А.Сморodinский. Крупный ученый, популяризатор науки (в том числе — один из старейших членов редколлегии журнала «Квант»), Яков Абрамович всегда находил время для работы с подростками, щедро даря им свои идеи и зажигая в их сердцах огонь познания.

Сегодня «Диалог» — это специальная учебно-исследовательская программа, направленная на раскрытие и развитие творческого потенциала интеллектуально одаренных школьников путем применения нетрадиционных методов обучения и воспитания.

Одним из инициаторов и бессменным руководителем программы является директор лицея «Дубна» Ю.П.Курлапов, благодаря творческой энергии ко-

торого прошлым летом состоялась уже 20-я юбилейная сессия Школы.

В разное время в Школе преподавали сотрудники Объединенного института ядерных исследований, Института атомной энергии им.И.В.Курчатова, журнала «Квант», физико-математического интерната при МГУ. Сейчас среди преподавателей — молодые сотрудники и аспиранты Учебно-научного центра ОИЯИ, а также преподаватели и студенты Международного университета «Дубна» и Московского инженерно-физического института.

Школа проводится два раза в год — в дни зимних и летних каникул. Зимняя сессия короткая, обычно четыре-пять дней, она посвящена отбору участников летней сессии по результатам олимпиад и творческих работ по физике, математике, информатике, биологии, химии, литературе и истории. Продолжительность летних сессий (конец июня — июль) составляет три недели, и проводятся они в живописных окрестностях Дубны на берегу Волги и Ивановского водохранилища.

География Школы довольно обширна — в летних сессиях принимали уча-

стие делегации из Болгарии, Польши, Германии, США, школьники из Латвии, Казахстана и многих российских городов: Москвы, Санкт-Петербурга, Новосибирска, Благовещенска, Екатеринбурга, Рязани, Воронежа, Самары и др.

Основной формой деятельности участников Школы является работа в составе различных научных проектов. Учебно-исследовательская программа каждого проекта базируется на следующих принципах: а) выполнение конкретного научного исследования; б) расширение и углубление знаний в конкретной предметной области с выходом за рамки общеобразовательной программы; в) систематический анализ хода работы и достижение на его основе конечного результата каждым участником проекта; г) формирование исследовательских групп на основе принципа добровольности. Помимо проектов, в Школе действуют творческие мастерские, нацеленные на развитие творческих дарований. Это могут быть занятия иностранными языками, театр, видеомастерские, школа винсерфинга, катамараны и др.

С 1993 года в рамках «Диалога» успешно осуществляется программа «Выживем вместе», целью которой является социально-психологическая реабилитация интеллектуально одаренных детей и подростков с особенностями психологического и физического развития. Главным средством достижения поставленной цели является включение детей и подростков, страдающих тем или иным видом заболевания, в исследовательскую, трудовую и творческую деятельность в коллективе здоровых сверстников. Указанная программа реализуется под наблюдением специалистов – медиков и педагогов.

Важную роль в исследовательской программе «Диалога» играют физические проекты. Практически с момента организации Школы в рамках физической секции сложился и функционирует своеобразный физический практикум – «Клуб любителей физики на кухне». В основе предлагаемых проектов, как правило, лежат задачи и явления из окружающего нас мира. Их цель – спровоцировать вдумчивого школьника на глубокие размышления, поскольку порой самые обыденные явления могут предстать в весьма необычной трактовке и далеко не всегда допускают простое и однозначное решение. Можно сказать, что рассматриваемые задачи являются по своему смыслу задачами-оценками, для решения которых необходимо сформулировать соответствующую физическую модель, отражающую основные черты рассматриваемого явления.

В качестве примеров приведем краткие аннотации некоторых физических проектов последних лет.

«Вокруг куриного яйца». Исследовательская цель проекта заключалась в том, чтобы в рамках наглядной модели объяснить удивительную прочность куриного яйца при его сжатии с торцов. Для решения задачи участниками проекта была изготовлена соответствующая

экспериментальная установка и проведены необходимые измерения. Полученные на основе опыта некоторые физические характеристики скорлупы (предельное механическое напряжение, модуль Юнга) показывают, что по своим прочностным свойствам скорлупа яйца может вполне конкурировать с такими материалами, как кирпич или бетон.

«Зеленое движение». В этом проекте изучались конкретные виды движений ряда насекомых: кузнечика, бабочки, гусеницы. На основе результатов опытов была сформулирована механическая модель движения насекомого и рассчитана (оценена) удельная мощность, развиваемая тем или иным насекомым. Заметим, что этот проект представляет собой пример так называемого интеграционного проекта, рассчитанного на школьников, интересующихся как физикой, так и биологией.

«Жизнь мыльного пузыря». Оказывается, обычный мыльный пузырь может не просто служить детской забавой, но и быть предметом серьезного исследования. Одной из задач этого проекта было моделирование процесса сдувания пузыря (выдутого через трубочку) в режиме реального времени. При решении этой задачи участникам проекта пришлось не только более глубоко изучить свойства поверхности жидкой пленки, но и освоить методы решения физических задач с помощью компьютера. В качестве дополнения исследовалось также влияние, которое оказывает поверхностный электрический заряд на время сдувания пузыря.

Другая задача проекта заключалась в изучении зависимости времени жизни пузыря – пузырь уже не может сдуваться, поскольку свободный конец трубочки залеплен пластилином – от влажности окружающего воздуха. Как показало теоретическое рассмотрение, проведенное в рамках упрощенной модели, эта зависимость является весьма

сильной. Результаты наблюдений действительно подтверждают, что с увеличением влажности воздуха время жизни пузыря существенно возрастает. Например, один из пузырей, помещенных в герметичную стеклянную банку, в которую было налито небольшое количество воды (100-процентная влажность воздуха), прожил около 59 часов! Однако более любопытно другое: при близких к идеальным условиям (100-процентная влажность, практически постоянная температура, отсутствие воздушных потоков, пылинок и т.п.) мыльный пузырь не может жить вечно! Как показали наблюдения, по истечении длительного времени пузырь съеживается и превращается в маленький белесый шарик. Причина этого явления – так называемое диффузионное увядание пузыря. Нечто похожее происходит и с детским воздушным шариком, оставленным в комнате на длительный срок.

Может быть, у читателей появятся идеи, как еще больше увеличить время жизни пузыря? Что же, «Диалог» готов к сотрудничеству.

Мы рассмотрим любые предложения, которые могут способствовать расширению географии «Диалога» и совершенствованию его исследовательских программ.

Наш почтовый адрес: 141980 г. Дубна Московской обл., ул. Университетская, д. 19, корп. 7, лицей «Дубна».

Электронный адрес:

kurlapov@liceum.cntc.dubna.su.

Более подробную информацию о проектах школы «Диалог» можно получить через Интернет по адресам:

<http://www.dubna.ru/dialogue>,

<http://dialogue.df.ru>.

Предложения и замечания по физическим проектам Школы можно направлять по электронному адресу:

Iomach@nfsunl.jinr.ru.

Руководитель физической секции школы «Диалог» И. Ломаченков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Пусть Пятачок поглощает p , а Винни-Пух – kp горшков меда в минуту. Тогда два одинаковых Пятачка, подкрепляясь одновременно и не отвлекаясь на разговоры, управятся с одним горшком меда за $\frac{1}{2p}$ минут, два одинаковых Винни-Пуха – за $\frac{1}{2kp}$ минут, а Пятачок с Винни-Пухом справятся за $\frac{1}{p(1+k)}$

минут. По условию

$$\begin{cases} \frac{1}{p(1+k)} = \frac{1}{2p} - 4, \\ \frac{1}{p(1+k)} = \frac{1}{2kp} + 1. \end{cases}$$

Вычтя из второго уравнения первое и избавившись от знаменателей, находим $1 - k + 10kp = 0$, откуда $p = \frac{k-1}{10k}$.

Замечаем, что значение $k = 1$ не удовлетворяет второму уравнению системы, поэтому в дальнейшем полагаем $k \neq 1$. Подставив выражение $p = \frac{k-1}{10k}$ во второе уравнение системы, получаем $\frac{10k}{k^2-1} = \frac{5}{k-1} + 1$. Решение этого уравнения: $k = 4$. Следовательно, $p = \frac{3}{40}$, и горшок меда был съеден Пятачком с Винни-Пухом за $\frac{1}{p(1+k)} = \frac{8}{3}$ минуты.

2. Пусть Иван купил x больших и x маленьких раков. Это стоит $5x + 3x = 8x$ рублей. Пусть Степан купил y больших и $2y$ маленьких раков. Это стоит $5y + 3 \cdot 2y = 11y$ рублей. Так как затраченные суммы одинаковы, то $8x = 11y$. Отсюда следует, что x делится на 11, т.е. $x = 11k$. Подставляя это значение в приведенное выше равенство, получаем $88k = 11y$, откуда $y = 8k$. В общем, каждый приятель затратил $88k$ рублей, где k – некоторое натуральное число. Однако Иван расплатился одной сторублевкой, и этого хватило, поэтому $88k \leq 100$, и $k = 1$. Итак, раки стоили 88 рублей, поэтому $8x = 11y = 88$, откуда $x = 11$, $y = 8$, $2y = 16$. Таким образом, Иван купил 11 больших и 11 маленьких раков, а Степан – 8 больших и 16 маленьких.

Разберемся со сдачей. Ивану полагается $100 - 88 = 12$ рублей сдачи, которая была выдана натурой, т.е. раками. Такая сумма может быть представлена в ракообразном виде единственным образом – 4 маленьких рака. Степан платил десятками, и, естественно, дал ближайшее значение, большее 88 и кратное 10, т.е. 90 рублей. Ему полагается $90 - 88 = 2$ рубля сдачи, что в жабьем эквиваленте представляет ровно 2 жабы.

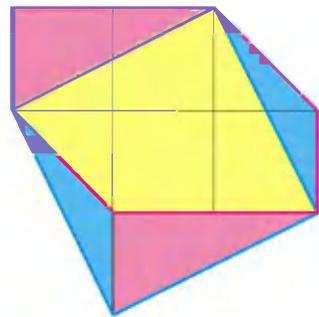


Рис. 1

Итак, приятели унесли с рынка (с учетом покупки и сдачи) всего $11 + 11 + 8 + 16 + 4 + 2 = 52$ животных.

3. См. рис. 1.

4. Так как любое натуральное

число a в системе счисления с основанием a записывается как 10, то я задумал число 10.

5. Повернуться должны Джо, Смит и Сэм.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №5 за 1998 г.)

6. Пусть n – количество журналистов, тогда между собой они совершили $\frac{n(n-1)}{2}$ рукопожатий. Действительно, каждый из них совершил $(n-1)$ рукопожатие, но число $n(n-1)$ следует разделить на 2, так как при таком способе подсчета мы каждое рукопожатие посчитали дважды: за одного участника и за другого. Так как было совершено 80 рукопожатий, то $\frac{n(n-1)}{2} \leq 80$. Наибольшее n , при котором выполняется это неравенство, равно 13, так как $\frac{13(13-1)}{2} = 78$; в этом случае президент совершил $80 - 78 = 2$ рукопожатия, т.е. он знаком с двумя журналистами. Меньше 13 журналистов быть не может: если 4х меньше 13, то между собой они совершат не больше чем $\frac{12(12-1)}{2} \approx 66$ рукопожатий, и президент должен пожать руки не менее чем $80 - 66 = 14$ журналистам, а их не более 12.

7. Поскольку точка R делит пополам отрезки CE и BD , то $CBED$ – параллелограмм (рис.2). Отрезок QS – средняя линия треугольника CAD , он параллелен CD и равен его половине. А так как CD равен и параллелен BE , то QS – средняя линия и в треугольнике BRE . Значит, $RQ = QB$ и $RS = SE$. Из подобия треугольников CQD и PQB следует, что $BP = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}BE$, аналогично $ET = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}BE$. Следовательно, точки P и T делят отрезок BE на три равные части.

8. Заменяем в первой скобке c на $-(a+b)$ и z на $-(x+y)$.

$$\begin{aligned} & \text{Получим } -a^2y(x+y) - b^2x(x+y) + (a+b)^2xy = -a^2xy - \\ & -a^2y^2 - b^2x^2 - b^2xy + a^2xy + b^2xy + 2abxy = -a^2y^2 + \\ & + 2abxy - b^2x^2 = -(ay-bx)^2. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что вторая скобка получается из первой заменой a на x , b на y , c на z , поэтому вторая скобка равна $-(xb-ya)^2$.

Произведение обеих скобок равно $(ay-bx)^4$, что является четвертой степенью целого числа, в силу целочисленности чисел a, b, x и y .

9. Попробуем определить момент времени, в который были включены «зверьки». Так как они были включены одновременно и одновременно достигли трехлетнего возраста, то для

первого зверька можно написать уравнение $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 3$.

Здесь x – продолжительность «дневного» времени, т.е. времени от 7 до 22 часов, а y – продолжительность «ночного» времени за период достижения «трехлетнего» возраста. Для

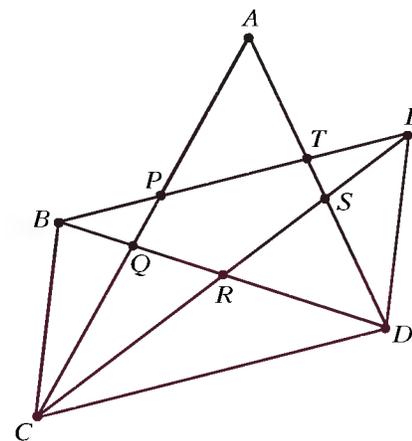


Рис. 2

второго зверька уравнение будет проще: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 3$, или $x + y = 12$. Первое уравнение можно переписать в виде $2x + y = 18$. Если из этого уравнения вычесть второе, то мы получим $x = 6$. Очевидно, что и $y = 6$. Поскольку продолжительность как ночного, так и дневного времени в сутках больше 6 часов, то включение зверьков могло произойти только в два момента времени: или за 6 часов до начала «ночного» времени, т.е. в 16 часов, или за 6 часов до начала «дневного» времени, т.е. в 1 час ночи.

Теперь рассмотрим моменты «пятилетия» наших зверьков. Для второго зверька «пятилетие» наступает через $5 \cdot 4 = 20$ часов независимо от времени включения.

Найдем момент «пятилетия» для первого зверька в случае, если он был включен в 16 часов. За 6 «дневных» часов от 16 до 22 он повзрослеет на $6/3 = 2$ года. За 9 «ночных» часов от 22 до 7 он повзрослеет еще на $9/6 = 1,5$ года. Итого на 3,5 года. Осталось ему повзрослеть в «дневные» часы на 1,5 года, на что ему понадобится $1,5 \cdot 3 = 4,5$ часа. Суммарное время $6 + 9 + 4,5 = 19,5$ часов, что меньше 20 часов для второго зверька.

Если же зверьки были включены в 1 час ночи, то первый

зверек за 6 «ночных» часов повзрослеет на 1 год. А для повзросления на 4 года в дневные часы ему понадобится $4 \cdot 3 = 12$ часов. Общее время равно $6 + 12 = 18$ часов, что тоже меньше 20 часов у второго зверька.

Итак, первый зверек достигнет пятилетия раньше, чем второй, в обоих случаях.

10. 16 вопросов.

Коля может спросить, например, о числах в каждом из 16 квадратов размером 5×5 , центры которых отмечены на рисунке 3,а. Легко убедиться, что любые две клетки таблицы будут входить в разные наборы обведенных Колей квадратов.

Для доказательства того, что меньше чем за 16 вопросов восстановить таблицу нельзя, рассмотрим рисунок 3,б, где отмечены 32 граничных узла таблицы. Каждый такой узел дол-

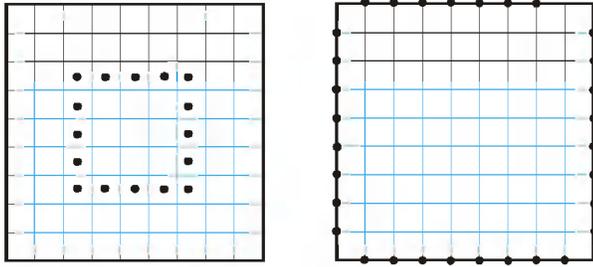


Рис. 3

жен служить вершиной хотя бы одного из обведенных Колей квадратов (иначе две клетки, общей вершиной которых этот узел является, будут входить в один набор обведенных квадратов). Но любой обведенный квадрат (если это не сам квадрат 9×9 , спрашивать про который нет смысла) может иметь своими вершинами не более двух из этих 32 узлов. Поэтому потребуется задать не менее чем $32 : 2 = 16$ вопросов.

Законы Паскаля и Архимеда

- $m = 4\pi r^2 \rho RT / (Mg) \approx 10^{18}$ кг, где $M = 32$ г/моль – молярная масса кислорода; $h = RT / (Mg) \approx 7,7$ км.
- $x = 0,25$ м.
- $\Delta T / T = 8\sigma / (dp_0) = 0,01 = 1\%$.
- $M = \rho d^3 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \left(1 - \frac{m}{\rho d^3}\right) = 160$ г;
 $\rho_{ц} = \rho - m/d^3 = 0,75$ г/см³.

Московский государственный институт электронной техники

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

16. 2. $\log_{0,2} 10, \log_{25} 2, \log_3 4$. 3. 1.
- $(-1)^k \frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbf{Z}$. 5. $(-\infty; 0)$. 6. $(-1; 2)$.
- 1,8 г/см³, 2,4 г/см³. 8. $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$.
- $160\sqrt{3}$ см². 10. $2\sqrt{8-\sqrt{3}}$. 11. $a = -1$.

Вариант 2

- 0,96. 2. $(9; +\infty)$. 3. 0. 4. 6 км. 5. 2.
- $[2^{-4/5}; 1) \cup (1; 2]$. 7. $a/4$.

8. $-\frac{\pi}{4} + (-1)^k \cdot \arcsin \frac{7}{5\sqrt{2}} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 9. $(0; 1)$.

$$10. f(f(x)) = \begin{cases} x+4, & \text{если } x \leq -1; \\ 1-2x, & \text{если } -1 < x \leq 1; \\ 4x-5, & \text{если } 1 < x \leq 2; \\ 7-2x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

11. \emptyset , если $a < 0$; $(0; +\infty)$, если $a = 0$;
 $[-a/3; 0) \cup (8a; +\infty)$, если $a > 0$.

ФИЗИКА

Вариант 1

- $t = 2v_2 L / (v_2^2 - v_1^2) = 80$ с.
- $A_{\min} = SH^2 g (\rho_1 - \rho_2) / (2\rho_1) = 16$ Дж.
- $\varphi = \frac{p_2 (273 + t_1)}{p_1 (273 + t_2)} 100\% \approx 30\%$.
- Напряженность направлена из центра в сторону заряда $+2q$ и равна $E = 6kq/a^2 = 600$ В/м.
- $t = \pi m / (eB) \approx 0,02$ мкс.
- $v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}} \right)} \approx 8 \cdot 10^5$ м/с.

Вариант 2

- $v_{\text{ср}} = (v_{\text{ср1}} + v_{\text{ср2}}) / 2 = 12$ м/с.
- $A_{\text{ср}} = mg(5D/2 - 3h) / 2 = 1,5 \cdot 10^{-3}$ Дж.
- $\Delta p_2 = \Delta p_1 (v_3^2 - v_2^2) / (v_2^2 - v_1^2) \approx 6 \cdot 10^4$ Па.
- $F = q\sqrt{2W/C} / d = 10^{-5}$ Н.
- $n = (4 - k) / (2 - k) = 5$. 6. $D_2 = D_1 F_2 / F_1 = 4$ мм.

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

- 40 км. 2. $\frac{5\pi}{8}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{8}$. 3. $1/2$. 4. $(-\infty; -1)$.
54. Указание. Площадь треугольника из условия равна $S(x) = \frac{1}{2}(5-x)^2 \cdot x^3$. Исследуйте эту функцию на максимум с помощью производной.
- $p \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Указание. Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение $py^2 - 2y + 2p + 1 = 0$ имеет ровно один неотрицательный корень.
- $h^2/6\sqrt{6}$. Указание. Поскольку $TC \perp BC$, то $BC \perp AC$. Пусть M – точка на ребре BT . Площадь треугольника AMD будет наименьшей, если его высота MN – общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым AD и BD .

Вариант 2

- 30 тыс. рублей, 120 тыс. рублей.
- $\left[(-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi\right]^2, k \in \mathbf{Z}, k \geq 0$. 3. 1.
- $[-4; -3) \cup (0; 1]$. 5. $4(\pi + \sqrt{3})/3$.
- $x_1 = -2 - \sqrt{a}, x_2 = -2 + \sqrt{1-a}$ при $a \in (-\infty; -4]$;
 $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-a}$ при $a \in [-3; 0)$. 7. $24\pi l^2$.

ФИЗИКА

Вариант 1

- Уровень воды не изменится.
- Вторая.
- $n = 3\rho/(M/N_A)v^2 = 2,3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$, где $M = 32 \text{ г/моль}$ – молярная масса кислорода, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – постоянная Авогадро.
- $v = \sqrt{v_0^2 + 2gR + 2FR/m} \approx 16,3 \text{ м/с}$.
- $t = T/4 + nT/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 0,21 \text{ с}$ – период колебаний.
- $E_i = 2Bd\sqrt{2a/k}$.
- $\Delta h = \frac{m RT}{M Mg} \approx 0,64 \text{ м}$, где $M = 4 \text{ г/моль}$ – молярная масса гелия.

Вариант 2

- Видны.
- $F_{\text{тр}} = F \cos \alpha = 100 \text{ Н}$, при этом брусок неподвижен.
- $v = (A + mv^2/2)/h \approx 7,6 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$, где $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ – масса электрона.
- $l_{\text{max}} = L + v_0\sqrt{m/(2k)}$, $l_{\text{min}} = L - v_0\sqrt{m/(2k)}$.
- $v = \sqrt{3R(T_1 - T_0)/(2M)}$. 6. $I = 8 \text{ А}$.
- $F = \rho \left(\left(b - \frac{D}{2} \right) g - \frac{L}{2} a \right) \frac{\pi D^2}{4} \approx 7,6 \cdot 10^3 \text{ Н}$.

Московский энергетический институт

МАТЕМАТИКА

- 2a при $a > 0$, $b \neq \pm a$.
- $f(x) = (x-1)^2$ при $x > 1$, $x \neq 3$; $x = 5$ – корень уравнения.
- $f(x) = 7x^3$, $f'(x) = 21x^2$ при $x > 0$, $x \neq 2$;
 $x = \pi n$, $n \in \mathbf{N}$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \geq 0$.
- $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ при $x > 0$, $x \neq \sqrt{2}$.
Если $a \leq 0$, то $x \in (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$;
если $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $x \in (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \frac{1}{a})$;
если $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a < 1$, то $x \in (1; \frac{1}{a})$;
если $a = 1$, то неравенство решений не имеет;
если $a > 1$, то $x \in (\frac{1}{a}; 1)$.
- (0; 2]. 6. Если $|a| > 2$, то $-\sqrt{3a^2 - 12} \leq x \leq \sqrt{3a^2 - 12}$;
если $|a| = 2$, то $x = 0$; если $|a| < 2$, то решений нет.
- $a \in \left(\frac{3}{5}; \frac{3+3\sqrt{6}}{10} \right)$.
- Знаменатель прогрессии равен 4 или $\frac{3}{2}$; первый член прогрессии равен $\frac{1}{4}$ или 24 соответственно.

9. За 12 ч и 4 ч. 10. 20 км/ч. 11. $\left\{ -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$.

12. Если $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty \right) \cup \left\{ 1; \frac{5}{4} \right\}$, то $x \in \left\{ 0; \frac{\pi}{6} \right\}$;

$x_{\text{min}} = 0$, $x_{\text{max}} = \frac{\pi}{6}$.

Если $a \in \left(1; \frac{5}{4} \right) \cup \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2} \right)$, то $x \in \left\{ 0; \frac{\pi}{6}; \arcsin(2a-2) \right\}$;

если $a \in \left(1; \frac{5}{4} \right)$, то $x_{\text{min}} = 0$, $x_{\text{max}} = \frac{\pi}{6}$;

если $a \in \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2} \right)$, то $x_{\text{min}} = 0$, $x_{\text{max}} = \arcsin(2a-2)$.

Если $a \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right)$, то

$x \in \left\{ 0; \frac{\pi}{6}; \arcsin(2a-2); -\pi - \arcsin(2a-2) \right\}$;

$x_{\text{min}} = -\pi - \arcsin(2a-2)$, $x_{\text{max}} = \frac{\pi}{6}$.

13. 7 : 3.

14. Острый угол ромба равен 30° ; площадь круга равна $9\pi \text{ см}^2$.

15. $\frac{9S \cos \alpha}{\sqrt{4+3\sin^2 \alpha}}$. 16. $\frac{\rho(\sqrt{17}-1)}{32}$.

ФИЗИКА

1. $v_0 = \frac{l(t_2 + t_1)}{t_1 t_2} = 0,45 \text{ м/с}$, $a = \frac{2l}{t_1 t_2} = 0,3 \text{ м/с}^2$.

2. $a = g - \frac{F_2 \cos \alpha + \mu(F_1 + F_2 \sin \alpha)}{m} = 6 \text{ м/с}^2$.

3. $x = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} = 1,2 \text{ м}$. 4. $F_{\text{min}} = \mu g(m_2 + m_1/2)$.

5. $T_1 = 2T \left(1 + \frac{kh^2 M}{mRT} \right)$. 6. $Q = \frac{5m}{2M} R(T_1 - T_2) = 90 \cdot 10^3 \text{ Дж}$.

7. $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q(l_2 - l_1)}{2\epsilon_0 S}$. 8. $v = \sqrt{\frac{q(Q-q)(M-m)}{2\pi\epsilon_0 RmM}}$.

9. $v_{\text{ср}} = \frac{U}{\rho l n e} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$.

10. $A = \frac{\epsilon_0 E^2 S(d_2 - d_1)}{d_1 d_2} = 4,43 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$.

11. $P_3 = (P_1 + P_2)^2 / P_2 = 4,5 \text{ Вт}$.

12. $U_2 = E - 2U_1 = 1 \text{ В}$, $U_3 = E - U_1 = 5 \text{ В}$.

13. $r = \frac{e^2}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 e^3 E + \pi\epsilon_0 m v^2}} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ м}$.

14. $L = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 C} = 0,35 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$. 15. $h = d/n$.

Новосибирский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. В 2 раза. 2. (3; 1), (-27; -11).

3. 7. Указание. Воспользуйтесь тем, что прямоугольные треугольники ABC , AKM и BKC подобны, а отношение радиусов вписанных в них окружностей равно отношению соответственных сторон.

4. $\frac{\pi k}{2}$; $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5. а) $\frac{7}{10}$; б) $\frac{\sqrt{66}}{90}$. Указание. Покажите, что прямая MN касается окружности, вписанной в основание ABC пирамиды. Если K – точка их касания, то SK – высота треугольника SMN , длина которой равна апофеме пирамиды.

Вариант 2

1. 1000. 2. $-1/5$. 3. $28\sqrt{5}$.
 4. $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$. 5. $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

Вариант 3

1. $(-\infty, 5]$. 2. $5^{\sqrt{1-\log_5 2}}$. 3. $4\sqrt{5}$.
 4. $-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{5}$; $\frac{4\pi}{27} + \frac{2\pi k}{9}$, $k \in \mathbf{Z}$.
 5. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. *Указание.* Введите систему координат с началом в точке B' , оси Ox , Oy , Oz которой направлены вдоль лучей $B'C'$, $B'A'$. $B'B$ соответственно. Тогда координаты заданных точек имеют вид $P = (x; 1-x; 0)$, $Q = (x; 0; 2x)$, а квадрат расстояния между ними равен $5x^2 - 2x + 1$. Расстояние достигает минимума при $x = 1/5$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. При неизменных температуре и давлении плотность насыщенного пара не изменяется. Согласно закону сохранения массы, $\rho_{\text{ж}} V_1 = \rho_{\text{н}} V_2 = m$. Полный объем сосуда равен $V = V_{\text{н}} + V_{\text{ж}} = (1-\eta)m/\rho_{\text{н}} + \eta m/\rho_{\text{ж}}$. Отсюда получаем $\eta = \frac{V - V_2}{V_2 - V_1}$.

2. Запишем условия равновесия для случая максимальной длины свисающей части каната:

$$x_{\text{max}} mg = (l-x)mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

и для минимальной длины:

$$x_{\text{min}} mg = (l-x)mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

где m – масса единицы длины каната.

Отсюда находим

$$l \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{1 + \sin \alpha - \mu \cos \alpha} < x < l \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha}.$$

3. До смены полярности через диод D_1 идет ток, а диод D_2 ток не пропускает. Поэтому конденсатор емкостью C_1 не будет заряжен, а на конденсаторе емкостью C_2 установится заряд $q_2 = UC_2$. После смены полярности возможны два варианта.

а) Если $C_1 > C_2$, второй конденсатор разрядится полностью, т.е.

$$q'_2 = 0, q'_1 = UC_1.$$

б) Если $C_1 < C_2$, подтока заряда через перемычку, соединяющую диоды, не будет. Тогда имеем два конденсатора с суммарным зарядом на соединенных обкладках $q'_1 + q'_2 = UC_2$, причем $U = q'_1/C_1 - q'_2/C_2$. Отсюда

$$q'_1 = 2U \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, q'_2 = UC_2 \frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2}.$$

4. Пусть на глубине h мячик, имеющий первоначально объем $V_0 = 4\pi R^3/3$ при давлении внутри порядка $p_0 = 1,5p_a = 1,5 \cdot 10^5$ Па, деформируется, уменьшив свой объем до V и увеличив давление внутри до $p = \rho gh \gg p_a$, где ρ – плотность воды. Если пренебречь объемом резины при сжатии, то условие затопления мячика можно записать в виде $mg \geq \rho gV$, где m – его масса. По закону Бойля–Мариотта, $p_0 V_0 = \rho ghV$, откуда $h \sim p_0 V_0 / (\rho g)$. Положив радиус мячика $R = 0,1$ м, массу $m = 0,3$ кг, $g = 10$ м/с², получим $h \sim 200$ м. Это – большая глубина, при которой объемом резины $V_{\text{рез}}$ в сжатом мячике пренебрегать нельзя. Поэтому внесем поправку в выражение выталкивающей силы и запишем условие затопления: $mg = \rho g(V_{\text{рез}} + V)$. Масса мячика определяется массой резины: $m \approx \rho_{\text{рез}} V_{\text{рез}}$. Учитывая, что $V = p_0 V_0 / (\rho gh)$,

получаем

$$h = \frac{p_0 V_0}{mg(1 - \rho/\rho_{\text{рез}})} \sim 100 \text{ м}$$

при $\rho_{\text{рез}} \sim 2 \cdot 10^3$ кг/м³. (Заметим, что резина, как все видели, в воде тонет, ее плотность больше, чем у воды, но не очень существенно.)

5. Вначале сила трения первой пробки о стенки трубки почти полностью компенсируется избыточным давлением между пробками. По мере выхода пробки из трубки площадь ее соприкосновения с трубкой и, соответственно, сила трения убывают практически по линейному закону. Ускорение пробки на всем пути, равное ее длине l , нарастает. И пробка, как показывает грубая оценка ее энергии: $mv^2/2 \sim \Delta pSl/2$, вылетает из трубки со скоростью v порядка нескольких метров в секунду.

Вариант 2

1. $l = \frac{(l_1 v_2)^2 - (l_2 v_1)^2}{l_1 v_2^2 - l_2 v_1^2}.$

2. Пусть M – искомая масса пыли. После того как вся пыль осядет, суммарный заряд пластинки, равный $qM/m - Q$, создаст электрическое поле напряженностью $E = (qM/m - Q)/(2\epsilon_0 S)$. Сила, действующая на каждую пылинку со стороны электрического поля и равная qE , будет уравновешена силой тяжести mg . Отсюда находим

$$M = m \left(\frac{Q}{q} + \frac{2\epsilon_0 S mg}{q^2} \right).$$

3. Давления в обеих частях цилиндра постоянны и равны

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{S} \text{ и } p_2 = p_1 + \frac{mg}{S} = p_0 + \frac{2mg}{S}$$

соответственно. Из уравнений Клапейрона–Менделеева получаем связь между приращениями объемов частей цилиндра и приращением температуры:

$$p_1 \Delta V_1 = v_1 R \Delta T, p_2 \Delta V_2 = v_2 R \Delta T.$$

Число молей определяется из начальных условий:

$$v_1 = \frac{p_1 \cdot 2hS}{RT_0}, v_2 = \frac{p_2 hS}{RT_0}.$$

Отсюда получаем

$$\Delta V_1 = \frac{2hS \Delta T}{T_0} = 2\Delta V_2.$$

Смещение нижнего поршня $x_2 = \Delta V_2/S$, а верхнего $x_1 = (\Delta V_2 + \Delta V_1)/S = 3x_2$. Тепло идет на повышение внутренней энергии и совершение работы:

$$Q = \Delta U + A.$$

Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}(v_1 + v_2)R \Delta T = \frac{3}{2}(p_1 \Delta V_1 + p_2 \Delta V_2) = \frac{3}{2}(3p_0 S x_2 + 4mgx_2).$$

Вся работа состоит из работы против внешнего давления и работы против сил тяжести, действующих на поршни:

$$A = p_1(\Delta V_1 + \Delta V_2) + mgx_1 + mgx_2 = 3p_0 S x_2 + 4mgx_2.$$

Окончательно находим

$$x_2 = \frac{2Q}{5(3p_0 S + 4mg)}, x_1 = \frac{6Q}{5(3p_0 S + 4mg)}.$$

4. Условие начала подъема – равенство силы Архимеда со стороны вытесненного воздуха и суммы сил тяжести оболочки и пара: $m_b g = (m + m_n)g$. Массы воздуха m_b и пара m_n

определяются из уравнений Клапейрона–Менделеева:

$$m_b = \frac{M_b p_a V}{RT_b}, \quad m_n = \frac{M_n p_a V}{RT_n}.$$

Отсюда

$$m_b = m_n \frac{M_b T_n}{M_n T_b} \quad \text{и} \quad m = m_b - m_n = m_n \left(\frac{M_b T_n}{M_n T_b} - 1 \right).$$

Учтем, что давление пара при кипении равно атмосферному $p_a = 10^5$ Па, температура $T_n = 373$ К, $M_n = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $M_b = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $T_b = 300$ К. Таким образом, $\frac{M_b T_n}{M_n T_b} \approx 2$, и в результате игры чисел масса пара определяется массой шарика: $m \approx m_n \sim 5$ г.

5. Свет от удаленного источника идет на воронку почти параллельным пучком. При отсутствии воды в воронке свет на экран не попадает по двум возможным причинам. Первая: не исключено полное внутреннее отражение (точное утверждение зависит от соотношения между углом воронки и показателем преломления воды). Вторая: свет, попадая из воды, точнее из пластмассы воронки, в воздух, выходит под большим углом преломления и распределяется по экрану на большой площади. Когда наливают воду, пучок света проходит сквозь воронку, как через очень тонкую плоскопараллельную пластинку, и снова попадает в воду. Из-за этого происходит лишь незначительное увеличение границы светового пятна на экране по сравнению с отсутствием воронки.

Вариант 3

1. $\mu_{\min} = g/a$.

2. Разница давлений в верхней и в нижней частях сосуда во всех случаях равна mg/S . Из объединенного газового закона $pV/T = \text{const}$ получаем систему уравнений

$$2p_1 H = p_2 (H - h),$$

$$2 \left(p_1 + \frac{mg}{S} \right) H = \left(p_2 + \frac{mg}{S} \right) (H + h).$$

Отсюда находим

$$p_1 = \frac{mg}{4S} \frac{H}{h} \left(1 - \frac{h}{H} \right)^2.$$

3. На влетающий конденсатор действует сила Ампера, которая сообщает ему ускорение: $ma = |BI|$. Умножив на небольшой интервал времени Δt , получим $ma\Delta t = m\Delta v = I\Delta t BI = \Delta q BI$, где $I\Delta t = \Delta q$ – приращение заряда на конденсаторе. Применим выражение для конечных приращений с учетом того, что начальная скорость и начальный заряд конденсатора равны нулю: $mv_0 = qBI$. Суммарный заряд на обкладках конденсаторов сохраняется, и к моменту остановки напряжения на них будут одинаковыми (ЭДС индукции равна нулю): $q/C = (q_0 - q)/C_0$. Отсюда получаем

$$v_0 = \frac{BIq_0}{m} \frac{C}{C + C_0}.$$

4. Москва и Новосибирск находятся примерно на одной широте $\varphi \approx 55^\circ$. При радиусе параллели R центростремительные ускорения в обоих случаях различны из-за суточного вращения Земли:

$$a_1 = \frac{(v - \omega R)^2}{R}, \quad a_2 = \frac{(v + \omega R)^2}{R}.$$

Пусть P , F_1 , F_2 – сила веса и упругие силы, развиваемые пружиной для обоих случаев. Тогда

$$m\vec{a}_1 = \vec{P} + \vec{F}_1, \quad m\vec{a}_2 = \vec{P} + \vec{F}_2.$$

Поскольку углы между векторами \vec{P} и \vec{F}_1 , \vec{P} и \vec{F}_2 малы, на-

ходим

$$F_1 - F_2 = m(a_2 - a_1) \cos \varphi = 4m\omega v \cos \varphi = \frac{8\pi m v \cos \varphi}{T}.$$

При скорости полета $v \sim 2500$ км/ч и периоде вращения Земли $T = 24$ ч разность показаний весов составит $\Delta F \approx 0,06$ Н.

Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$;

б) $g(x) = \begin{cases} x(2-x), & x \in (-\infty; 2), \\ x(x-4), & x \in [4; +\infty) \end{cases}$ (рис.4);

в) графики функций не пересекаются.

2. $x \in (1; \log_3 4]$. 3. $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$. 4. 256.

5. $\frac{R}{4} \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{2(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha/2)}$.

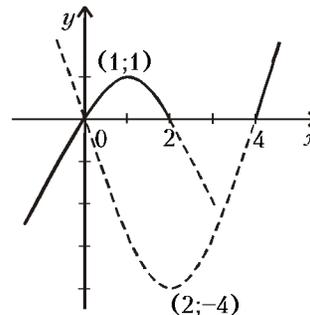


Рис. 4

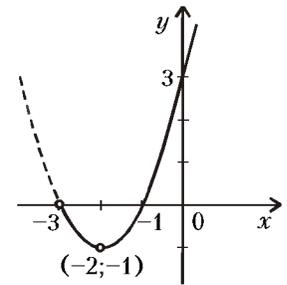


Рис. 5

Вариант 2

1. а) $x \in (-3; -2) \cup (-2; +\infty)$;

б) $g(x) = (x+1)(x+3)$,

$x \in (-3; -2) \cup (-2; +\infty)$ (рис.5);

в) $x = 4$.

2. $x \in (-1/3; -1/4)$. 3. $-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$.

4. $\sqrt{2Rr}$. 5. $\frac{(a-b)^2(a+b)}{8} \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta$.

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -2. 2. 3. 3. 48. 4. -0,3. 5. 12. 6. 2. 7. 0,25. 8. -75. 9. 1,5. 10. 9. 11. 0,8. 12. 21.

Вариант 2

1. 6. 2. -8. 3. 62. 4. 10. 5. 14. 6. -1,097. 7. -5. 8. 1. 9. 1. 10. 16. 11. 3. 12. 3.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $h = 175$ м. 2. $h = 25$ м. 3. $F = 75$ Н. 4. $T = 640$ К. 5. $C = 3$ мкФ. 6. $R = 55$ Ом. 7. $I = 25$ мкА.

8. $F_{\max} = 80$ мН. 9. $\Delta h = 4$ м. 10. $F_{\text{ср}} = 150$ Н.
11. $V = 480$ л. 12. $\alpha = 120^\circ$.

Вариант 2

1. $a = 3$ м/с². 2. $v = 440$ см/с. 3. $F_{\text{н}} = 2$ Н.
4. $h = 50$ м. 5. $U = 250$ Дж. 6. $\Delta T = 3$ К. 7. $l = 27$ см.
8. $\alpha_{\text{ср}} = 30^\circ$. 9. $\Delta t = 40$ с. 10. $m_3 = 600$ г.
11. $E = 75$ кВ/м. 12. $I = 6$ А.

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-3 < a < 1$. *Указание.* График функции $f(x) = \lceil |x-2| - 2x + 1 \rceil$ (рис.6) состоит из трех прямолинейных участков. Для того чтобы данное уравнение имело ровно три решения, необходимо и достаточно, чтобы прямая, заданная уравнением $y = kx + a$, пересекала его правую и среднюю части в их внутренних точках. Ясно, что точка пересечения такой прямой с осью ординат находится между точками $A(0, -3)$ и $B(0, 1)$.

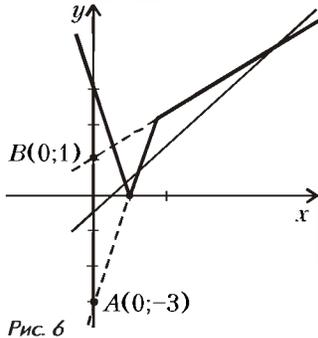


Рис. 6

2. $\left(-1; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{3}{2}; \infty\right)$.

3. $(-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k + \frac{\pi}{4}; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Указание. Воспользуйтесь разложением на множители:

$$\sin 2x - \cos 2x - \frac{1}{2} - \sin x = \frac{1}{2}(2\cos x - 1)(2\sin x - 2\cos x - 1).$$

4. $d = \frac{1}{3}(-a + \sqrt{a^2 + 6S \operatorname{ctg} \varphi})$. Пусть d – разность арифметической прогрессии, $OA = x_1, OB = x_2, OC = x_3, OD = x_4, \angle AOB = \alpha$, где O – точка пересечения диагоналей. По теореме косинусов $a^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \alpha, (a+d)^2 = x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \cos \alpha, (a+2d)^2 = x_3^2 + x_4^2 - 2x_3x_4 \cos \alpha, (a+3d)^2 = x_4^2 + x_1^2 + 2x_4x_1 \cos \alpha$.

Отсюда получаем, что $(a+3d)^2 - (a+2d)^2 + (a+d)^2 - a^2 = 2\cos \alpha \cdot (x_4x_1 + x_3x_4 + x_2x_3 + x_1x_2) = 2\cos \alpha \cdot AC \cdot BD$, т.е. $d(2a+5d) + d(2a+d) = 4S \operatorname{ctg} \alpha$, или $d(2a+3d) = 2S \operatorname{ctg} \alpha$.

Так как $\operatorname{ctg} \alpha > 0$, то α – острый угол, $\alpha = \varphi$. Остается найти положительный корень уравнения $3d^2 + 2ad - 2S \operatorname{ctg} \varphi = 0$.

5. $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}$.

Вариант 2

1. $a \in (-\infty; -1] \cup (0; 4)$. *Указание.* Условию удовлетворяют значения a , при которых прямая $y = a$ пересекает график функции $y = 4|x| - (x+1)^2, x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ ровно в одной точке.

2. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

3. $x = \pm \frac{\pi}{3} \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{5}{6} + (k+l)\pi,$

$y = \pm \frac{\pi}{3} \mp \frac{1}{2} \arccos \frac{5}{8} + (k-l)\pi, z = \mp \frac{2\pi}{3} + \pi - 2\pi k, k, l \in \mathbf{Z}$.

Подставив $z = \pi - x - y$, получим систему

$$\begin{cases} \cos x \cos y \cos(x+y) = -\frac{1}{12}, \\ \sin x \sin y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Замена $t = \cos x \cos y$ приводит к уравнению $t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{12} = 0$, откуда $t = \frac{1}{6}$ или $t = \frac{1}{2}$. Второй случай невозможен, поскольку тогда мы имели бы, что

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} > 1.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{6}, \\ \sin x \sin y = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{5}{6}, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

4. $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. *Указание.* Следует рассмотреть три случая, в зависимости от того, какое из указанных чисел является средним членом прогрессии. Решения, удовлетворяющие условиям, существуют лишь в том случае, когда средним членом является $|x-1|$. Осталось решить систему

$$\begin{cases} 2|x-1| = 2(x-1), \\ |2x-4| > 1. \end{cases}$$

5. $\frac{S_{BMC}}{S_{BMDA}} = \frac{r}{2R-r}$. Положим $AB = a, AD = b, CM = x,$

$BM = y$. Поскольку окружность радиуса R вписана в трапецию $ABMN$, то $b+y = a+(a-x)$, откуда $y = 2a-b-x$. Поэтому периметр треугольника BMC равен $b+y+x = 2a$. Таким образом, $S_{BMC} = a \cdot r$. Далее $S_{ABCD} = 2R \cdot a$, значит, $S_{BMDA} = a(2R-r)$.

Вариант 3

1. $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2. Искомое множество является объединением части плоскости, заданной неравенством $y \geq \max\{x^2, 1\}$, и нижней половины окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

3. $(-\infty; -1) \cup \left[0; \log_3 \frac{4}{3}\right) \cup \left(\log_3 4; \log_3 \frac{16}{3}\right)$.

4. $|a| \geq \frac{15}{2}\pi$. 5. $AB = (\sqrt{2a} + \sqrt{c})^2$.

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -2. 2. 25%. 3. 6. 4. -1. 5. $y = 0, x = -1$. 6. 7. 7. $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$.

8. $-\frac{15}{8}$. 9. $\pm \frac{1}{4}$. 10. 20π . 11. -1. 12. $-\frac{1}{4}$.

13. $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 14. $3a + ab$. 15. $0.6(7)$.

16. $\{(0; -2); (2; 0)\}$. 17. $(-1; 1]$. 18. $\sqrt{2}$.

19. $n = 6k + 1; n = 6k + 3, k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Представляя n в виде $n = 6k + q$, где $k \in \mathbf{Z}$, а $q \in M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, име-

$$\text{ем: } \sin \frac{(5n-1)\pi}{6} = \sin \left[5k\pi + \frac{(5q-1)\pi}{6} \right] = (-1)^k \sin \frac{(5q-1)\pi}{6}.$$

Последовательным перебором элементов M находим, что это выражение является иррациональным числом только при $q = 1$ или $q = 3$. Отсюда следует, что n должно иметь вид: $n = 6k + 1$ или $n = 6k + 3$. **20.** 4.

Вариант 2

1. -1. 2. 96; 24. 3. $-\cos\alpha$. 4. 2. 5. 1. 6. 3. 7. $(-1; 1)$.

8. 16. 9. $[-2; 0)$. 10. $[-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

11. $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 12. $-\frac{\pi}{6}$. 13. 6.

14. $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. 15. $(-\infty; -2) \cup (-2; 0)$. 16. $(0; 2)$. 17. 4.

18. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos^2 2x = 1. \end{cases}$$

19. $\frac{8}{9}$. *Указание.* При любых значениях a имеем $f(-3) = f(0)$, так что все параболы проходят через точки $(-3; 1)$ и $(0; 1)$ и абсциссы их вершин одинаковы: $x_0 = -\frac{3}{2}$. **20.** $\frac{16}{9}\pi$.

Физико-математический колледж при «Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

1. $x = -1$ и $0 \leq x \leq 1$.

2. $\alpha = \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $S_{\max} = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}-22}}{5}$.

3. $2\pi n - \frac{\pi}{4} \leq \alpha < 2\pi n - \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{4}{16\sqrt{2}}$;

$\pi(2n+1) - \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{4}{16\sqrt{2}} < \alpha \leq \pi(2n+1) - \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. $\left[\frac{\pi\sqrt{5}}{4}; 3\pi + \frac{\pi\sqrt{5}}{4}\right]$. 5. $\frac{S}{S_1} = \frac{2r}{R}$. 6. $V = -\frac{a^3 \sin^3 \alpha \operatorname{tg} \beta}{12 \cos^3 \frac{3\alpha}{2}}$.

7. $x^7 + \frac{1}{x^7} = a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a$.

ФИЗИКА

1. $\mu = \frac{\sqrt{g^2 + a^2} \sin \alpha + a \cos \alpha - g \sin \alpha}{a \sin \alpha + g \cos \alpha}$.

2. $A = -\frac{V_1(p_2 - p_1) \ln 2}{2} + \frac{V_1(3p_1 - p_2)}{3} \left(1 - \frac{\ln 6}{2}\right) = -1,7 \cdot 10^3$ Дж.

3. 1) $v = \frac{mgR}{(BL)^2}$, $q = \frac{mgRC}{Bl}$; 2) $a_0 = \frac{mg}{m + C(Bl)^2}$.

4. 1) $\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{C_1}{C_1 + C_2}}$; 2) $q_{10} = C_1 I_0 \sqrt{\frac{L}{C_1 + C_2}}$.

5. 1) $\Delta t < 0$; 2) $\Delta t = \frac{n_0}{2D} \left(\frac{L-2l}{R_0}\right)^2$, где $l = \sqrt{2(H_1 - h)R_0}$;

3) $L_{\max} = 2l + \sqrt{2R_0 h}$.

XXIX Международная олимпиада школьников по физике

Задача 1. а) $s = 11/17$; б) $r = 121/289$;

с) $\delta = (1 - \cos(30^\circ - \theta))/r$; д) $k = (\sin \theta)/(1 - r)$; е) $\theta_0 \approx 6,58^\circ$.

Задача 2. а) $d = 6,1 \cdot 10^{-3}$ м;

б) $p = \rho_n g x (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) + \rho_n g h_0 + p_a$, где p_a – постоянное атмосферное давление, $s = -0,091$, $y_2 = 2 - 0,073 x$; в) коническое понижение имеет радиус 1 км и глубину 91 м;

д) $H = 1,1 \cdot 10^3$ м, $h_1 = 103$ м, $m = 2,9 \cdot 10^{11}$ кг, $m^* = 2,7 \cdot 10^{10}$ кг.

Задача 3. а) $v'_{1,1} = 3,68 \cdot 10^8$ м/с $\approx 1,23 c$, $v'_{2,1} = 1,89 \cdot 10^8$ м/с $\approx 0,63 c$; б) $v'_1 = (c\beta \sin \varphi)/(1 - \beta \cos \varphi)$,

$\omega = v'_1/R$; в) $\varphi = \arctg \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 - \omega_2)} \approx 68,8^\circ$,

$\beta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\cos \varphi \cdot (\omega_1 + \omega_2)} \approx 0,892$; д) $\beta > f(\varphi) =$

$= 1/(\sqrt{2} \sin(\varphi + \pi/4))$; е) $v'_{1,\max} = \beta c / \sqrt{1 - \beta^2}$; ф) $\alpha = 4$.

Московская олимпиада студентов по физике

1. $r = 8R/3$. 2. $v = v_0 e^{-\eta/\operatorname{tg}(\pi/2)}$. 3. $T = \frac{15\pi}{14} \sqrt{\frac{15R}{2g}}$.

4. $r_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{mg}{2F}}$. 5. $F = \frac{737}{3600} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}$.

6. $A = \epsilon_0 \epsilon a L U^2 / (4d)$. 7. $F_{\text{эл}} = \frac{eBI}{\pi r^2} \sqrt{\frac{1}{(en)^2} + \frac{1}{(\sigma B^2)}}$.

8. $T = T_0 / 2^{1/3}$; $A = 4\sigma V_0 T_0^4 (1 - 2^{-1/3}) / c$, где σ – постоянная Стефана – Больцмана, c – скорость света.

9. $W_{\min} = Q_1 (T_1 - T_2) / T_1 = 307$ Дж. 10. $\delta = \frac{\pi^2 r^2 d^2}{4F^2 \lambda^2}$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.А.Васин, В.А.Иванюк, В.М.Митурич-Хлебникова, А.В.Родионова, В.В.Полякова, П.И.Шевелев

АРТ-ДИРЕКТОР

П.И.Шевелев

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г. Чехов Московской области
Заказ №