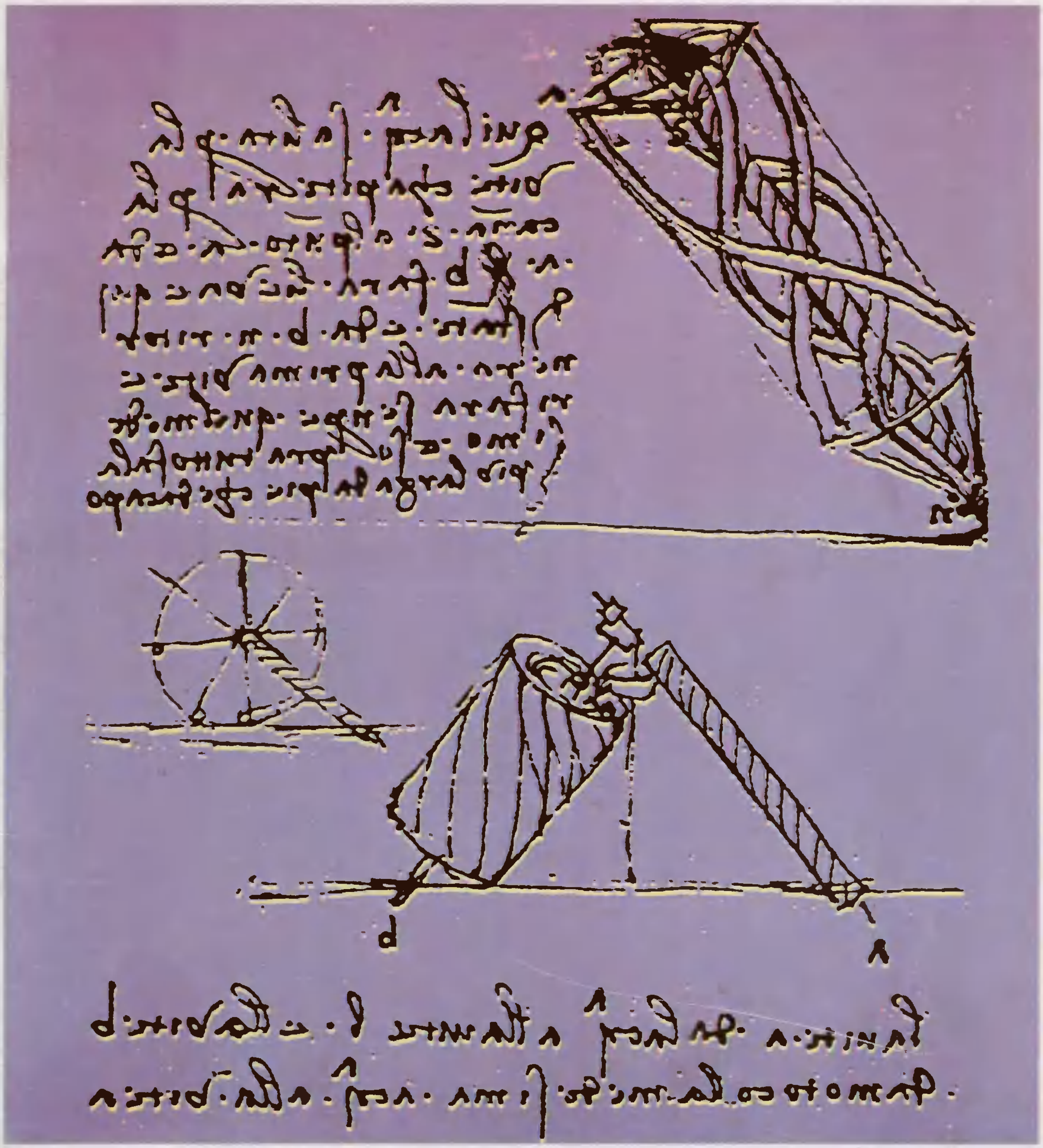
ISSN 0130-2221

СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ 1999 · №5

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



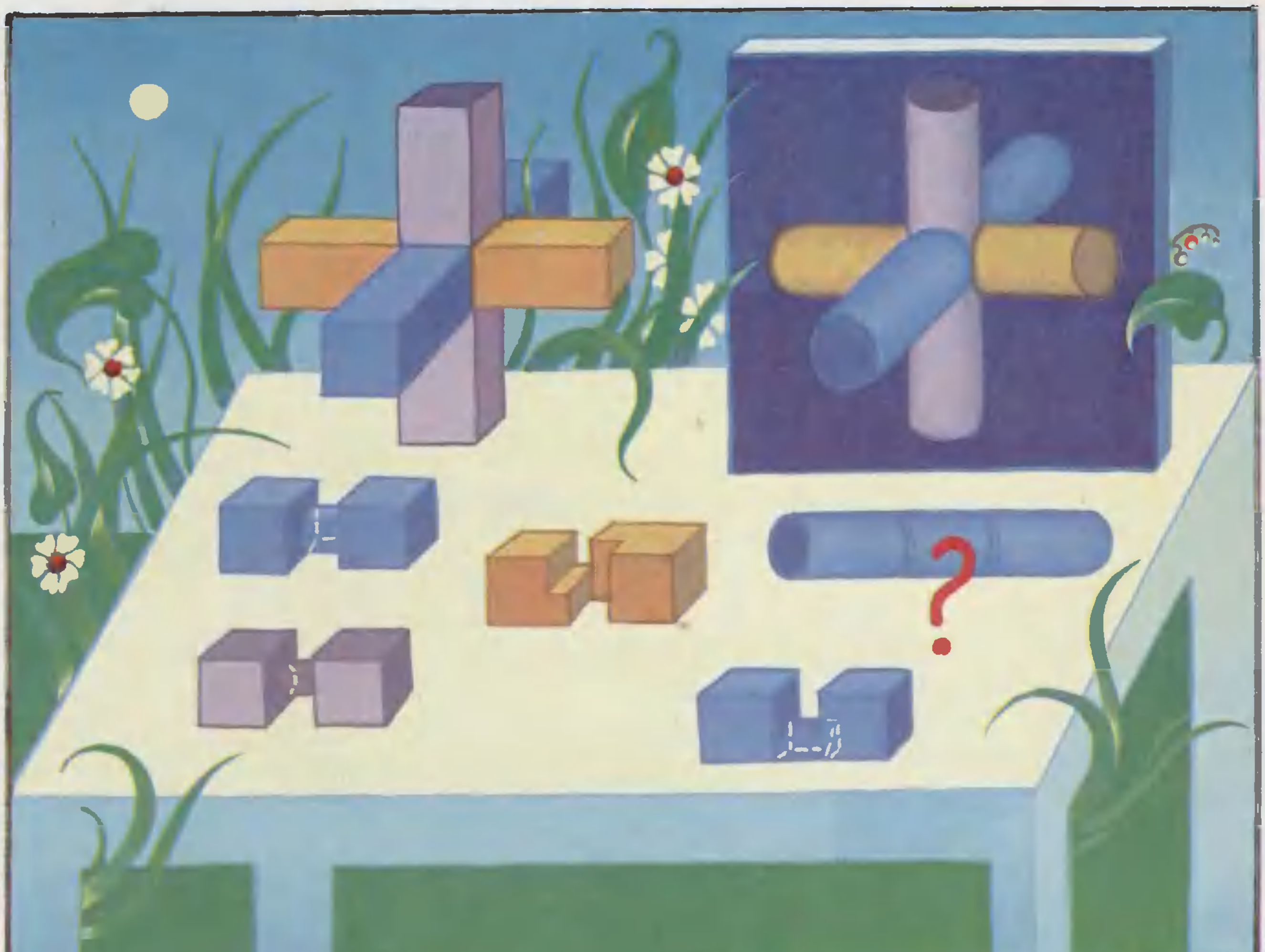
КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Деревянные узлы

Как соединить крест-накрест три бруска? Задачу эту приходилось решать нашим предкам еще в глубокой древности, когда они начинали строить первые жилища. С тех пор изобретены сотни различных способов: бруски связывают, зацепляют, сколачивают, свинчивают, склеивают, сваривают. Некоторые соединения, придуманные давно, так оригинальны и остроумны, что превратились в занимательные головоломки. Две из них мы предлагаем читателям.

В первом варианте крест собирается из трех брусков с различной конфигурацией вырезов. Секрет в том, что один из брусков может поворачиваться вокруг продольной оси. За счет этого и удается собирать и разбирать узел. Во втором варианте крест составляется из трех одинаковых брусков (один из них показан справа). Но как бы мы ни складывали два из них, третий к ним присоединить невозможно. Поэтому надо одновременно сдвигать все три бруска к центру узла. Элементы головоломок нетрудно сделать самим из деревянных брусков квадратного сечения. Вырезы в брусках нужно выполнить точно и аккуратно — только в этом случае собранный узел будет прочным.

Попробуйте придумать способ крестообразного соединения трех круглых брусков с вырезами. Предложенные выше конструкции вырезов для этого не годятся. Узел должен быть сборно-разборным и состоять из трех элементов.



КВАНТ СЕНТЯБРЬ ОКТЯБРЬ 1999 №5

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Что такое комбинаторика

А.ЛЕВИН

КОМБИНАТОРИКА – ЭТО раздел математики, связанный с методами подсчета числа объектов определенной природы. По смыслу задачи обычно очевидно, что существует лишь конечное число интересующих нас объектов; все дело в том, чтобы найти это число.

Рассматриваемые объекты, как правило, являются определенными комбинациями других объектов (чисел, букв и т.д.). Отсюда и название – комбинаторика. В более широком понимании комбинаторика – это теория конечных множеств; мы здесь будем рассматривать только задачи подсчета, так что такое расширенное толкование нам не потребуется.

Из сказанного ясно, что комбинаторика имеет дело лишь с натуральными числами. Может показаться, что она поэтому более «элементарна», чем другие разделы математики, оперирующие с богатым числовым материалом (отрицательные числа, дробные, иррациональные, комплексные...). Но такое суждение было бы поспешным. Практика показывает, что многие, впервые сталкиваясь с комбинаторикой, с трудом привыкают к комбинаторным рассуждениям (более близким к программированию, чем, скажем, к геометрии). Наша цель состоит в том, чтобы помочь преодолеть эти трудности. Лучший способ освоения комбинаторики – решение задач. Начинать, естественно, надо с простейших. Именно о простых, типовых (и в то же время важнейших) задачах и пойдет речь ниже.

Интересная сама по себе, комбинаторика важна и для многих других разделов математики. Ее связи с алгеброй и теорией вероятностей будут вкратце затронуты позднее.

Иллюстрация В.Власова

Нельзя ли просто пересчитать?

Этот вопрос напрашивается. Если интересующих нас объектов конечное число, почему бы не составить полный их перечень и попросту пересчитать безо всяких там «комбинаторных рассуждений»?

Рассмотрим пример.

Задача 1. *Сколько существует различных двоичных (т.е. состоящих только из нулей и единиц) последовательностей длины $m = 2$?*

Перечень составляется без всякого труда:

$$(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1).$$

Задача, как видим, оказалась проста, как дважды два – четыре (в данном случае буквально).

Но если тем же методом решать задачу при $m = 10$, уйдет куда больше времени (в перечень войдет свыше тысячи последовательностей). При $m = 20$ осилить такой перечень сможет лишь компьютер. Ну а при $m = 1000$ окажутся бессильными все компьютеры мира, вместе взятые. Правда, в принципе такой перебор все же возможен (если отвлечься от таких «мелочей», как миллиарды лет машинного времени). А как быть, если надо найти число двоичных последовательностей произвольной длины m?

Здесь перебор невозможен в принципе. А между тем очень простые соображения общего характера позволяют мгновенно дать ответ: искомое число есть 2^m. Это сразу вытекает из принципа умножения (см. ниже). Читатель, знакомый с двоичной системой счисления, может здесь обойтись и без этого принципа: все наши последовательности – это записи в двоичной системе чисел $0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1$ (записи, содержащие менее m разрядов, дополняются нулями впереди).

Данный пример ясно показывает мощь общих комбинаторных соображений по сравнению с примитивным перебором. Не следует, конечно, думать, что все комбинаторные задачи можно решить так же мгновенно. Рассмотренная задача относилась к числу простейших. В комбинаторике много трудных задач, а есть и такие, решения которых еще никому не удалось найти.

Сколько вариантов у понятия «вариант»

Теперь мы хотим предупредить об одной особенности комбинаторики: в ней исключительно большую роль играет точная формулировка (и точное понимание) задачи. Именно с этим связано большинство ошибок начинающих, да и не только начинающих; в некоторых задачниках можно встретить задачи, некорректные ввиду неопределенности формулировки.

Разумеется, никакой неопределенности не возникает, когда речь идет о том, чтобы подсчитать число учеников в классе или число окон в комнате. Но когда речь идет о числе различных вариантов (или способов), ситуация бывает куда менее определенной. Приведем пример.

Задача 2. *Сколькими способами можно распределить три конфеты между тремя лицами?*

Тут впору искать ответ на другой вопрос: сколькими способами можно понимать эту задачу. В зависимости от ответа на него возможны шесть разных ответов на поставленный вопрос – 1, 3, 5, 6, 10, 27!

Первый источник неопределенности – термин «распределить». Можно ли сказать, что конфеты распределены между тремя лицами, если, скажем, все они отданы одному? Примем, так сказать, социально-справедливый вариант распределения. Если же понимать распределение в широком смысле слова, по-прежнему считая конфеты тождественными, получаем 10 вариантов – 3 варианта типа (3,0,0) (когда все конфеты отдаются кому-либо из трех) + 6 вариантов типа (2,1,0) + 1 вариант типа (1,1,1). Если же вдобавок и все конфеты различны, получаем максимальное число $3^3 = 27$ вариантов. Другие ответы предоставляем читателю получить самостоятельно. Отметим лишь, что цифры 3 и 5 получаются, если считать неразличимыми людей, что не особенно естественно (но становится вполне естественным при замене людей тремя одинаковыми коробками).

Некоторая расплывчатость понятия о числе вариантов связана с тем, что варианты – умозрительные понятия, их нельзя увидеть непосредственно (если нет перечня). Полезно поэтому мысленно представить себе полный перечень различных вариантов (закодированных каким-либо образом). Число вариантов при этом превращается в число записей. А это уже нечто материальное и может интерпретироваться, например, как количество ячеек машинной памяти. Такая мысленная «материализация» не имеет, конечно, ничего общего с решением задачи прямым подсчетом, требующим отнюдь не мысленного, а реального составления перечня. Да и речь идет не о решении, а лишь о лучшем понимании постановки задачи.

Итак, Главное Правило Комбинаторики:

прежде чем подсчитывать число различных вариантов, необходимо точно выяснить смысл слов «различные варианты».

Само по себе это правило не позволит решить ни одной задачи, зато поможет избежать путаницы и недоразумений при решении множества задач.

Принцип сложения

Мы обсудили некоторые общие особенности комбинаторики. Теперь можно переходить к конкретным способам подсчета. Начнем с простейшего.

Если все варианты делятся на k взаимоисключающих типов, причем имеется n_1 вариантов 1-го типа, n_2 вариантов 2-го типа, …, n_k вариантов k-го типа, то общее число вариантов есть $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Мы фактически уже применяли этот «принцип сложения». Он совершенно очевиден и выделен, главным образом, для того, чтобы читатель мог сопоставить его с «принципом умножения» (см. ниже).

Кортежи, или упорядоченные наборы

Кортеж длины m

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \qquad (1)$$

– это просто *упорядоченный набор* (или, что то же, конечная последовательность) *m элементов произвольной природы, при этом a_k называется k-й компонентой кортежа* (1). Если все компоненты – числа, то кортеж длины m называется также m-мерным вектором. Если все компоненты – буквы некоторого алфавита, то кортеж длины m называется также m-буквенным словом в этом алфавите. Лингвистическая сторона дела здесь не учитывается; так, ЙЙЬЪ – 4-буквенное слово в русском алфавите (хотя с его произношением и истолкованием не все ясно).

Обозначение шахматных полей (например, e4) или номеров автомобилей (например, МЯУ 1999) – примеры кортежей, где одни компоненты – буквы, другие – цифры.

Как видим, кортеж — весьма общее понятие. Главным характерным признаком кортежей является их упорядоченность. Кортежи $a_1, \ldots, a_m$ и $a_1', \ldots, a_{m'}'$ считаются совпадающими (равными) в том и только в том случае, если $m = m'$ и $a_1 = a_1'$, $a_2 = a_2'$, ..., $a_m = a_m'$; в противном случае кортежи, естественно, считаются различными. В частности, a,b и b,a – различные кортежи (при $a \neq b$). Итак, равенство кортежей – такое же, как у векторов или слов (никто ведь не считает слова БАР и БРА совпадающими). Иначе обстоит дело с неупорядоченными наборами, о которых речь будет идти позднее.

Принцип умножения

Большое число задач комбинаторики (среди них есть и трудные) связано с подсчетом количества кортежей определенного вида. Однако удивительно часто приходится иметь дело с множествами кортежей, имеющими особо простую структуру, позволяющую определить число кортежей в множестве без труда. Суть дела такова.

Пусть множество S кортежей длины m порождается следующим образом: компонента a_1 пробегает n_1 различных значений, при любой фиксированной a_1 компонента a_2 пробегает n_2 различных значений и т.д., вплоть до a_m, которая при любых фиксированных $a_1, \ldots, a_{m-1}$ пробегает n_m различных значений. Тогда общее число кортежей в множестве S есть

$$n = n_1 n_2 \ldots n_m. \qquad (2)$$

Отметим, что значения a_1 (но не их число) могут зависеть от a_2, то же относится и к другим компонентам.

Например, для множества m-мерных двоичных векторов, о которых шла речь в начале, имеем $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 2$. Отсюда по принципу умножения получаем, что их число равно 2^m.

Другой ранее рассмотренный пример – задача о распределении трех конфет между тремя лицами. Пусть все конфеты различны (как и лица), распределения допускаются любые. Обозначая лиц через A, B, C и нумеруя конфеты, можем каждый способ распределения кодировать кортежем $a_1a_2a_3$, где a_k – лицо, получившее k-ю конфету (например, код CAA отвечает варианту, когда первую конфету получил C, а обе остальные A). Так как $n_1 = n_2 = n_3 = 3$, то всего получаем 3^3 вариантов.

Далее, число всех m-буквенных слов в английском алфавите есть 26^m, а в русском – 33^m. Число всех семизначных телефонных номеров есть 10^7 (что, очевидно, вполне достаточно для Москвы; для небольших городов можно обойтись и четырехзначными номерами, количество которых равно 10^4). Число всех автомобильных номеров, образованных тремя русскими буквами и следующими за ними четырьмя цифрами, равно $33^3 \cdot 10^4$.

Дальнейшие примеры, связанные с принципом умножения, будут приведены позднее.

Принцип умножения достаточно очевиден, хотя и не в такой степени, как принцип сложения. Для тех, кому он не кажется очевидным, приведем доказательство с помощью индукции по m. При $m = 1$ утверждение верно. Пусть оно доказано для кортежей длины $m-1$, т.е. последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ может быть выбрана $n_1n_2\ldots n_{m-1}$ способами. Каждому из них соответствует n_m кортежей длины m, получающихся добавлением того или иного значения a_m. Все полученные кортежи различны (любые два, у которых совпадают первые $m-1$ компонент, отличаются значением m-й компоненты). Поэтому общее число кортежей в множестве S есть $(n_1n_2\ldots n_{m-1})n_m = n_1n_2\ldots n_m$.

Если читатель незнаком с математической индукцией, можно обойтись и без педантичного доказательства. По правде говоря, принцип умножения мало отличается от арифметических задач типа: «сколько всего листов в 10 стопках тетрадей, если в каждой стопке по 20 тетрадей, а в каждой тетради по 12 листов?». Всякий школьник даст ответ $10 \cdot 20 \cdot 12 = 2400$, без упоминаний комбинаторики или индукции. Но ведь листов столько, сколько кортежей a_1, a_2, a_3, где a_1 – значения от 1 до 10 (номер стопки), a_2 – значения от 1 до 20 (номер тетради в стопке), a_3 – значения от 1 до 12 (номер листа в тетради). Таким образом, решая эту простенькую задачу, мы неявно пользуемся принципом умножения.

Складывать или умножать – вот в чем вопрос

В такой гамлетовской ситуации иногда оказываются начинающие. В условиях принципа умножения проводится примерно следующее рассуждение: «Для первой компоненты имеется n_1 вариантов, да для второй компоненты n_2 вариантов, ..., да для последней n_m вариантов. Итого получаем n_1, да n_2, ..., да n_m, т.е. $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ вариантов». Обращаем внимание на коварное слово «да» (с этим словом и вообще, как известно, надо обращаться осторожно).

Ошибка в том, что n_1 вариантов для a_1 – это отнюдь не те варианты, общее число которых надо найти. Нужные нам варианты даются ведь кортежами длины m (а не 1, 2...). Варьируя a_1, затем a_2 и т.д., мы получаем (пока не дойдем до a_m) как бы «заготовки», каждая из которых в дальнейшем, после разветвлений, породит много кортежей длины m (т.е. нужных нам вариантов). В «предметных» задачах такая ошибка практически исключена, никто ведь не станет подсчитывать число листов так: «10 стоп, да в каждой по 20 тетрадей, да в каждой по 12 листов – итого 10 + 20 + + 12 листов». Но с абстрактными вариантами такое, увы, бывает.

Число подмножеств

Задача 3. *Сколько различных подмножеств имеется у n-элементного множества?*

Может показаться, что принцип умножения не имеет отношения к этой задаче. Подмножества ведь неупорядоченные наборы (например, $\{a,b\}$ и $\{b,a\}$ – одно и то же), к тому же они могут содержать разное число элементов, а в принципе умножения речь идет о кортежах одинаковой длины. Все дело, оказывается, в том, чтобы удачно закодировать подмножества. Именно, нумеруем элементы исходного множества $M = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ и ставим в соответствие каждому его подмножеству M' двоичный n-мерный вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i = 1$, если $S_i \in M'$, и $x_i = 0$ в противоположном случае. (Например, если $M = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, то подмножеству $\{S_2, S_5\}$ отвечает вектор $(0,1,0,0,1)$; пустому подмножеству будет отвечать нулевой вектор.) Так как соответствие между подмножествами и векторами взаимно однозначно, то подмножеств столько же, сколько n-мерных двоичных векторов, т.е. 2^n.

О кодировании

Рассмотренная задача показывает, какую роль играет удачное кодирование объектов; часто оно является основным звеном решения вопроса. Наоборот, неудачное кодирование обычно заводит в тупик. Вернемся к нашей простенькой задаче о распределениях (произвольных) трех различных конфет между тремя лицами. Выше мы кодировали распределение кортежами (a_1, a_2, a_3), где a_k – лицо, получившее k-ю конфету. Нельзя ли кодировать не «по конфетам», а «по лицам», обозначая через a_k то, что получает k-е лицо (k = 1, 2, 3)?

Каждая компонента при этом будет подмножеством (множества из 3 конфет) и может сама по себе принимать $2^3 = 8$ значений. Как уже говорилось, компоненты кортежей могут иметь любую природу, им не возбраняется быть и подмножествами. Хуже другое: при таком кодировании нельзя применить принцип умножения, так как не выполняется его основное условие. Например, если $a_1 = \varnothing$ (пустое множество), т.е. первому не досталось ничего, то для a_2 остаются те же 8 вариантов, если же первый получает все, то для a_2 возможен лишь один вариант ($\varnothing$). Так что кодирование по лицам является неудачным; это различие между двумя способами кодирования исчезает при «справедливых» распределениях (каждому по конфете), когда лица и конфеты входят в задачу равноправно.

Разумеется, всегда надо следить за взаимно однозначным соответствием между объектами и кодами – каждому объекту (из нашего множества) должен отвечать ровно один код, и обратно. Только в этом случае подсчет числа объектов можно заменить подсчетом числа кодов.

Размещения

Далее речь будет часто идти о кортежах, все компоненты которых принимают значения из одного и того же непустого конечного множества. Иначе говоря, мы будем иметь дело со словами в некотором алфавите. Разумеется, в качестве «букв» алфавита могут выступать и числа – например, 1, 2, ..., n. Так как элементы конечного множества всегда можно занумеровать, то удобная алфавитно-буквенная терминология не меняет сути дела.

Как уже говорилось, число m-буквенных слов в n-буквенном алфавите равно n^m. Иногда это число называют числом размещений из n по m с повторениями. Обычно же термин «размещение» связывается с требованием, чтобы все буквы слова были различны (не повторялись).

Задача 4. *Сколько существует в n-буквенном алфавите m-буквенных слов, состоящих из различных букв?*

Задача представляет интерес лишь при $m \le n$ (иначе ответ, очевидно, нуль). Можно представить себе, что имеется n карточек с изображением всех букв алфавита (по одной карточке на букву) и мы формируем слова, размещая друг за другом те или иные m карточек в том или ином порядке.

Задача легко решается с помощью принципа умножения, первая буква a_1 может пробегать n значений, при любой фиксированной a_1 для a_2 остается $n-1$ значений (все буквы алфавита, кроме a_1) и т.д., вплоть до последней буквы, для которой остается $n-m+1$ значений. Итак, искомое число равно

$$n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$
$$(m \le n). \qquad (3)$$

Здесь, как и всегда в математических выражениях, $k!$ (читается «ка факториал») есть сокращенная запись произведения $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$, где k – любое натуральное число (например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$). По определению полагается также $0! = 1$.

Величина (3) называется числом размещений из n элементов по m и часто обозначается через A_n^m. Если нет специальной оговорки о повторениях, то под числом размещений из n по m всегда подразумевается величина (3).

Пример: если в турнире участвуют 20 команд и дележ мест исключен, то первые 3 места (т.е. золотая, серебряная, бронзовая медали) могут распределяться

$$A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

способами. Повторения здесь, очевидно, невозможны, так как одна команда не может занять сразу два места.

Перестановки

Это просто частный случай размещений при $m = n$. Итак, число перестановок из n элементов есть $n!$. Например, в алфавите $\{a, b, c\}$ имеется $3! = 6$ перестановок: *abc, acb, bac, bca, cab, cba*. С ростом n величина $n!$ быстро растет. В отличие от размещений (при $m < n$), перестановки отличаются друг от друга только порядком букв, но не «буквенным составом». Мы просто переставляем те же самые n карточек в том или ином порядке, отсюда и название.

Вернемся к турниру 20 команд из предыдущего пункта. Если интересоваться распределением всех мест (а не только трех первых), то число возможных вариантов становится равным 20! ($> 2 \cdot 10^{18}$). Любопытно, что перебор всех этих вариантов мощным компьютером, обрабатывающим миллиард вариантов в секунду, займет больше времени, чем реальное проведение турнира – даже если проводить по одному туру в год!

В теории дискретной оптимизации хорошо известна так называемая *задача коммивояжера*. Речь в ней идет о городах $T_1, T_2, \ldots, T_n$, расстояние между которыми заданы; требуется выбрать такой порядок объезда этих городов, начиная с T_1, чтобы суммарная длина маршрута была минимальной. Поскольку число маршрутов конечно, казалось бы, тут нет проблемы – просто перебрать все варианты и выбрать наилучший, тем более если под рукой хороший компьютер. После всего сказанного ранее читатель, несомненно, догадывается, в чем тут загвоздка. Перебирать ведь придется $(n-1)!$ маршрутов – число, хотя и конечное, но с ростом n быстро становящееся «практически бесконечным». При $n = 5$ компьютер выдаст кратчайший маршрут мгновенно, при $n = 15$ провозится куда больше, чем хотелось бы, а при $n = 20$ до получения ответа можно и не дожить...

Мы говорим о гигантских, мучительно долгих вычислениях, а сами, между прочим, подсчитываем все очень легко, можно сказать, на пальцах. Нет ли здесь противоречия? Нет, конечно. Мы ведь только находим число вариантов, применяя при этом «сверхскоростные» (по сравнению с примитивным перебором) приемы комбинаторики. Вместо самого перебора мы лишь прикидываем, сколько времени он бы занял. Чтобы пройти пешком 1000 километров, нужно примерно 200 часов. А чтобы это подсчитать, достаточно секунды.

А как же все-таки решать задачу коммивояжера? Ну, во-первых, это уже относится к оптимизации, а не к элементарной комбинаторике. А во-вторых, на сегодня никто не знает по-настоящему быстрого алгоритма решения этой знаменитой и важной (к ней сводятся многие другие) задачи. Вполне возможно, что такого алгоритма вообще не существует.

Помимо прочего, комбинаторика обычно позволяет быстро оценить, что реально, а что нет, – особенно, когда речь идет об алгоритмах переборного типа. Жизнь, как известно, дается только раз, и не стоит тратить ее, сидя перед компьютером, перебирающим 19! маршрутов.

Когда нужно заниматься ненужным

Пусть имеется известное число N объектов и требуется выяснить, сколько из них обладает определенным свойством. Искомое число «нужных» объектов обозначим через $N_1 (\le N)$. Как видно из предыдущего, множество нужных объектов часто имеет простую структуру, позволяющую применить принцип умножения. А если это не так – как в таком случае искать N_1?

Как правило, полезно проверить множество «ненужных» (т.е. не обладающих требуемым свойством) объектов – не имеет ли оно простой структуры. Если для него удастся применить принцип умножения, то будет найдено число N_2 ненужных объектов, после чего легко определяется и $N_1 = N - N_2$. Приведем пример.

Задача 5. *Сколько существует m-буквенных слов в русском алфавите, содержащих букву A?*

Всего m-буквенных слов, как мы знаем, $N = 33^m$. Попробуем подсчитать, сколько среди них нужных (содержащих A), принципом умножения. Сначала все идет хорошо: на 1-м, 2-м, ..., $(m-1)$-м месте могут стоять по 33 буквы, независимо от предыдущих. Увы, на последнем шаге рушится все: если среди предыдущих была буква A, то для m-й буквы имеем опять-таки 33 варианта, если нет – всего 1 вариант (буква A).

Зато простой структурой обладает множество ненужных (не содержащих A) слов – ведь это всевозможные m-буквенные слова в 32-буквенном алфавите! Всего их $N_2 = 32^m$, стало быть, искомое число $N_1 = 33^m - 32^m$.

Изложенный прием перехода к дополнительному множеству (к множеству «ненужных» объектов) по идее очень прост и не понять его невозможно. А вот забыть про него очень легко, все внимание часто сосредотачивается на «нужных» объектах. В рассмотренной задаче, например, напрашивается такой путь: разбить все нужные слова на m типов – содержащие ровно одну букву A, ровно две и т.д., попытаться подсчитать число слов каждого типа, а затем сложить результаты. Можно и на этом пути получить решение, правда в громоздком виде. Но это значило бы ломиться в открытую дверь – ведь переход к дополнительному множеству дает ответ сразу и в простейшем виде.

К сожалению, довольно часто оказывается, что ни множество нужных объектов, ни дополнительное к нему не обладают простой структурой. Это значит, что задача не сводится к простому применению принципа умножения и нужны новые идеи. Одна из них излагается в следующем пункте.

«Растождествление» и перестановки с повторениями

Слово «растождествление» вряд ли есть в словарях, но оно точно передает суть дела. Воспользуемся тем, что комбинаторика позволяет считать словом любую комбинацию букв...

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – различные буквы некоторого алфавита. Рассматривается следующая задача.

Задача 6. *Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – заданные натуральные числа, сумма которых равна n. Сколько существует n-буквенных слов, содержащих n_1 букв A_1, n_2 букв A_2, ..., n_k букв A_k?*

В частном случае $n_1 = \ldots = n_k = 1$, $k = n$ это знакомая нам задача о числе перестановок. Но если хотя бы одно из чисел n_k больше 1, возникает нечто новое – перестановки с повторениями. Как и в обычных перестановках, «буквенный состав» слов здесь заранее определен, так что варьируется лишь порядок. Но теперь среди букв есть тождественные (совпадающие, идентичные, неразличимые – все это одно и то же). Можно считать, что у нас есть n_i карточек с буквой A_i, $i = 1, \ldots, k$, и надо выяснить, сколько различных n-буквенных слов можно из них составить.

Задача эта несколько труднее предыдущих, решить ее уже знакомыми приемами не удастся. Основную идею решения лучше всего пояснить на конкретном примере.

Задача 7. *Сколько 7-буквенных слов можно составить из букв К,К,Л,Л,О,О,О?*

В данном случае число вариантов не слишком велико, и ответ можно получить прямым перебором. Все это потребовало бы времени и внимания – дабы ни одно слово не пропустить и ни одно не засчитать дважды (Сцилла и Харибда всех комбинаторных подсчетов!). Главное же – для решения общей задачи такой подсчет ничего не даст и будет, как сказал бы К.Прутков, «пустою забавою».

Вообще-то от перечня мы не отказываемся; более того, у нас их будет даже два – основной (куда входят нужные слова) и вспомогательный. Вот только реально составлять их мы не собираемся, «работать» с ними будем с помощью воображения. Что ж, не впервой.

Говорят, математики больше всего на свете любят сводить новые задачи к уже решенным. Здесь, к примеру – как хорошо бы применить знакомые способы подсчета числа перестановок! Жаль, не получается – тождественные буквы мешают, путаются друг с другом... А нельзя ли их «растождествить» – хотя бы временно – и посмотреть, что получится? В случае с карточками это особенно естественно – ведь наши 7 карточек действительно физически различны (мы отождествили их, так сказать, искусственно).

Сказано – сделано. После индексации получаем 7 различных букв $К_1$, $К_2$, $Л_1$, $Л_2$, $О_1$, $О_2$, $О_3$. Из них, как мы знаем, можно составить 7! различных 7-буквенных слов. Они и образуют вспомогательный перечень.

Он, очевидно, «раздут» по сравнению с основным: если взять какое-нибудь слово основного перечня – например *КОЛОКОЛ*, то ему будет соответствовать много слов вспомогательного перечня:

$$К_1О_1Л_1О_2К_2О_3Л_2,\ К_2О_1Л_2О_3К_1О_2Л_1$$

и т.д.

Оказывается, нетрудно вычислить, во сколько раз вспомогательный перечень больше основного. Каждое слово вспомогательного перечня закодируем кортежем длины 4, где первая компонента – соответствующее слово основного перечня (число таких слов обозначим через x), а остальные определяют порядок следования индексов. Так, слово $O_2K_2K_1O_1Л_1Л_2O_3$ получит код

$$ОККОЛЛО,\ K_2K_1,\ Л_1Л_2,\ O_2O_1O_3$$

(для определенности выбираем алфавитный порядок букв). Такие коды образуют множество простой структуры. Действительно, компоненты пробегают возможные значения независимо одна от другой, причем первая пробегает x значений, а остальные 2!, 2!, 3! значений соответственно (это обычные числа перестановок). Итак, по принципу умножения число слов вспомогательного перечня (т.е. 7!) равно в то же время $x\cdot 2!\cdot 2!\cdot 3!$, откуда

$$x = \frac{7!}{2!2!3!} = 210.$$

Данные рассуждения переносятся на общий случай практически без изменений. Новый индекс можно ставить, например, вверху: получаем n различных букв $A_1^1, \ldots, A_1^{n_1}, \ldots, A_k^1, \ldots$ $\ldots, A_k^{n_k}$.

Из них можно составить $n!$ слов вспомогательного перечня. Кодируя их, как выше, и пересчитывая вторым способом с помощью принципа умножения, получаем равенство (x – искомое число)

$$x\cdot n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k! = n!,$$

поэтому число слов основного перечня равно

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}. \qquad (4)$$

Из доказанного следует, между прочим, что эта дробь всегда является целым числом. Полученное выражение для числа перестановок с повторениями – центральный результат элементарной комбинаторики. Как частные случаи, оно содержит выражения для числа обычных перестановок (при $k = n$) и для числа сочетаний (при $k = 2$, см. ниже). Стоит еще упомянуть, что в знаменитой работе физика Л.Больцмана, где впервые был выяснен статистический смысл второго начала термодинамики, также не обошлось без выражения (4). Речь там шла не о буквах и словах, а о молекулах, энергетических уровнях и состояниях физической системы, но формула от этого, конечно, не меняется.

Помимо принципа умножения – этого излюбленного орудия элементарной комбинаторики – выше был применен новый для нас прием «растождествления». Он показывает, как с пользой для дела можно переходить от одного понятия тождества (или различия) к другому. Если при нечеткости формулировок в связи с этим возникали путаница и недоразумения, то при точном понимании терминов – т.е. при соблюдении Главного Правила Комбинаторики – здесь открываются новые возможности решения задач.

Сочетания

В задаче 3 мы подсчитывали число всех подмножеств у n-множества. Поставим теперь вопрос иначе.

Задача 8. *Сколько существует m-подмножеств у n-множества?*

Естественно, имеются в виду различные m-подмножества (эта оговорка ради краткости обычно опускается). Подразумевается, конечно, что $m \le n$.

Неискушенного человека могло бы удивить, что ответ на этот вопрос по существу дан в предыдущем пункте. Там ведь речь шла об упорядоченных наборах с повторениями, а подмножества – неупорядоченные наборы без повторений. Но наш читатель, надеемся, не забыл, как удачно кодируются подмножества двоичными векторами. А двоичный вектор – это ведь слово в алфавите из двух «букв» 0 и 1. При таком кодировании каждому m-подмножеству n-множества отвечает слово, содержащее m «букв» 1 и $n - m$ «букв» 0. Итак, искомое число равно

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}. \qquad (5)$$

Величина (5) обозначается обычно C_n^m или $\binom{n}{m}$ и называется *числом сочетаний* из n по m; часто эти числа называются также *биномиальными коэффициентами* (причина такого названия станет ясной чуть позже). Встречаются эти величины очень часто. Вот несколько примеров.

Задача 9. *Сколько встреч будет проведено в турнире 20 команд по круговой системе (в 1 круг)?*

Очевидно, столько же, сколько 2-подможеств у 20-элементного множества, т.е.

$$\binom{20}{2} = \frac{20\cdot 19}{1\cdot 2} = 190.$$

К тому же результату легко прийти и непосредственно: каждая из 20 команд проводит по 19 встреч; всего вроде бы получается $20\cdot 19$ встреч, при этом каждая встреча засчитывается дважды, так что надо еще поделить на 2. Фактически это повторение общего рассуждения для очень простого частного случая.

Столько же рукопожатий при встрече 20 человек – если все здороваются друг с другом.

Задача 10. *Сколькими способами можно выбрать 3 дежурных в классе из 25 человек?*

Ответ очевиден:

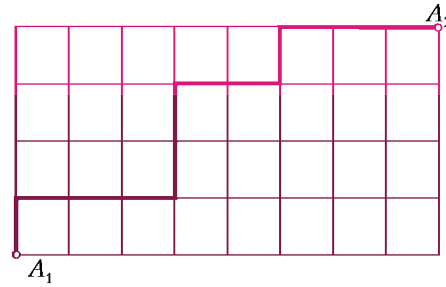
$$\binom{25}{3} = \frac{25\cdot 24\cdot 23}{1\cdot 2\cdot 3} = 2300.$$

Тут важно, что все трое дежурных равноправны, и, значит, от порядка, в котором названы 3 фамилии, выбор не зависит. Иное дело, если бы речь шла о трех разных поручениях – допустим, выбираются староста, кассир и физорг. Это были бы уже не сочетания, а размещения, и способов было бы в 3! = 6 раз больше (предполагается, что школьнику дается не более одного поручения).

Рассмотрим теперь прямоугольную сетку, образованную равноотстоящими прямыми (см. рисунок).

Можно считать, например, что это уличная сеть (чересчур правильная для реального города). Сколько существует кратчайших путей из A_1 в A_2, проходящих по этой сетке?

Если расстояния между соседними прямыми равны 1, то все кратчайшие пути имеют, очевидно, длину 12. Один из них выделен на рисунке.



Основной момент в решении – кодирование путей. Каждый из 12 единичных этапов кратчайшего пути направлен либо вверх, либо вправо. Обозначая эти возможности буквами В и П соответственно, получаем код в виде 12-буквенного слова, содержащего 4 В и 8 П. Например, для выделенного пути он имеет вид

В П П П В В П П В П П П.

Остается воспользоваться числом перестановок с повторениями, либо, поскольку букв всего две, числом сочетаний. Так как для букв В надо выбрать 4 места из 12, то ответ равен $\binom{12}{4} = 495$.

Вместо выбора 4 мест для букв В можно, конечно, выбирать 8 мест для букв П. На ответ это не повлияет, так как

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Данное равенство можно доказывать двумя методами – комбинаторным и аналитическим. Комбинаторный таков: каждому m-подмножеству отвечает дополнительное к нему $(n - m)$-подмножество, поэтому число тех и других совпадает. Аналитический же метод сводится к тому, чтобы посмотреть на выражение (5).

Существует целый ряд других, не столь очевидных, соотношений для чисел $\binom{n}{m}$. Некоторые из них будут упомянуты позднее. Расчет, проведенный выше для прямоугольника 4×8, читателю предлагается самостоятельно провести для прямоугольника общего вида $m_1 \times m_2$. А что будет, если перейти от плоского случая к пространственному?

Диофантово уравнение $x_1 + \ldots + x_n = m$

Давно уже мы не занимались распределением материальных благ – с тех пор, как делили три конфеты между тремя лицами. Теперь, вооружившись формулой для числа сочетаний, вернемся к этому увлекательному занятию. Для разнообразия пусть пираты делят между собой золотые монеты (добытые, естественно, специфическими методами).

Задача 11. *Сколькими способами могут 5 пиратов разделить между собой 10 монет?*

Блеск золота не должен ослеплять нас настолько, чтобы мы забыли о Главном Правиле. Итак, уточняем: пираты все различны (ярко выраженные индивидуальности!); монеты все одинаковы; допускается любой способ дележа, при котором каждый получает хотя бы одну монету. Теперь задачу можно решать.

На первый взгляд неясно, при чем тут число сочетаний. Но мы уже убедились, что первый взгляд часто обманчив. Перейдем сразу ко второму и направим его на 10 монет

OOO|O|OOO|OO|O,

разделенных «перегородками», указывающими конкретный способ дележа. В данном случае, например, расположение перегородок означает, что первый пират получает 3 монеты, второй – 1, третий – 3, четвертый – 2, пятый – 1.

Теперь ситуация проясняется. Ввиду правил дележа перегородки должны находиться в промежутках между монетами (а не слева или справа от монет) и в каждом промежутке должно быть не более одной перегородки. Итак, речь идет о выборе 4 мест из 9. Стало быть, способов дележа столько, сколько 4-подмножеств у 9-множества, т.е. $\binom{9}{4} = 126$.

Заметим, что фактически найдено число решений в натуральных числах «уравнения дележа»

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10.$$

Здесь x_i – число монет, получаемых i-м пиратом ($i = 1, \ldots, 5$).

Переходя к общему случаю n пиратов и $m (\geq n)$ монет,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m, \qquad (6)$$

имеем $\binom{m-1}{n-1}$ различных решений в натуральных числах. (Этот ответ остается в силе для любых натуральных m и n, если принять, что $\binom{k}{l} = 0$ при $k < l$.)

Рассмотрим теперь случай совершенно аморальных пиратов, которые допускают любые способы дележа (вплоть до того, что все монеты достанутся одному). Итак, речь теперь идет о числе решений уравнения (6) в целых неотрицательных числах (для x_i допускается и значение 0). Неравенство $m > n$ при такой постановке излишне, т.е. m, n – произвольные натуральные числа.

Если снова вернуться к геометрической иллюстрации, то теперь возможны любые расположения m кружков и $n - 1$ перегородок. Например, для 5 пиратов и 10 монет расположение

|OOOOO|||OOOOO

отвечает случаю, когда первый, третий и четвертый пираты не получают ничего, а второй и пятый – по пять монет каждый. Итак, для перегородок надо выбрать 4 места из 14, а это можно сделать $\binom{14}{4} = 1001$ способом.

Для общего случая находим, что уравнение (6) имеет

$$\binom{m+n-1}{n-1} = \binom{m+n-1}{m} \qquad (7)$$

решений в целых неотрицательных числах.

Пожалуй, более простое доказательство состоит в замене переменных $y_i = x_i + 1$, $i = 1, \ldots, n$. Каждому решению уравнения (6) в целых неотрицательных числах взаимно однозначно соответствует решение уравнения

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = m + n$$

в натуральных числах. Таких решений, как показано ранее, $\binom{m+n-1}{n-1}$, т.е. опять приходим к (7).

Уравнения в целых числах обычно называют *диофантовыми* по имени много занимавшегося ими древнегреческого математика Диофанта. Итак, мы нашли число решений диофантова уравнения (6) при любом из предположений: а) все $x_i > 0$; б) все $x_i \geq 0$. А что будет с числом решений, если на целые x_i не накладывается никаких дополнительных ограничений?

Величину (7) часто называют числом сочетаний с повторениями из n по m. Такое название связано с классом задач, типичным представителем которых является следующая.

Задача 12. *Имеется n сортов пирожных, требуется купить m пирожных. Сколькими способами это можно сделать?*

Пирожные одного сорта, естественно, считаются неразличимыми. Данная совсем простенькая на вид задача сама по себе не так уж проста. Но после того как найдено число решений уравнения (6) в целых $x_i \geq 0$, тут и в самом деле почти нечего делать – разве что обозначить через x_i количество покупаемых пирожных i-го сорта ($i = 1, \ldots, n$). Искомое число равно (7).

Конечно, речь могла идти не о пирожных, а о чем-либо другом. Важно лишь, что ищется число неупорядоченных наборов из m элементов, причем каждый элемент принадлежит какому-либо из n типов. Так как элементы одного типа считаются неразличимыми, то допускаются, таким образом, «повторения» элементов в наборе.

«Повторения с повторениями»

Размещения, перестановки, сочетания – и сразу, как грибы после дождя, размещения с повторениями, перестановки с повторениями, сочетания с повторениями… С непривычки можно растеряться, тем более, что повторения не всегда понимаются одинаково. Стоит, пожалуй, вернуться к этим терминам и еще немного о них поговорить. Так сказать, повторение на тему повторений.

Вот, к примеру, такой вопрос. Перестановки – частный случай размещений, и формула для числа перестановок – частный случай формулы для числа размещений. С другой стороны, перестановки с повторениями – вроде бы частный случай размещений с повторениями, но формула для числа перестановок с повторениями отнюдь не является частным случаем формулы для числа размещений с повторениями. В чем тут дело?

Когда речь идет о повторениях элементов в наборе (упорядоченном или нет), возможны две противоположные ситуации:

а) нет никаких ограничений на число повторений элементов (кроме того, что общее число элементов набора равно заданному числу);

б) каждый элемент должен повторяться в наборе заданное число раз.

Встречаются и варианты, промежуточные между этими двумя, но сейчас они нам не нужны.

Размещения с повторениями и сочетания с повторениями объединяет то, что имеется в виду а), тогда как число перестановок с повторениями определяется в ситуации б). Конечно, размещения и перестановки (с повторениями или без) близки в другом отношении – как упорядоченные наборы, тогда как сочетания (с повторениями или без) – наборы неупорядоченные. Кстати, для неупорядоченных наборов постановка б) бессодержательна (ответ, очевидно, равен 1).

Насколько полезна и удобна вся эта «повторительная» терминология?

Для очень простого (по виду и смыслу) выражения n^m название «число размещений с повторениями из n по m» является, пожалуй, излишне длинным и торжественным. Но в ясности ему не откажешь.

Перестановки с повторениями – термин ясный и удачный.

В случае сочетаний с повторениями с ясностью не все благополучно. Вернемся к задачам из предыдущего пункта. При покупке пирожных проблем не возникает (кроме финансовой); ясно, что здесь повторяются пирожные одного сорта. Задача дележа рассматривалась в двух постановках – I (пираты с признаками морали) и II (аморальные пираты). В случае I возникали сочетания, в случае II – сочетания с повторениями. А что, собственно, повторяется в варианте II?

Монеты? Они, естественно, «повторяются», поскольку идентичны. Но они ведь были идентичными и в варианте I.

Пираты? Но каждый из них у нас в единственном экземпляре. Правда, можно кодировать дележ, сопоставляя каждой монете имя владельца; тогда пираты (вернее, их имена) будут повторяться. Но, опять-таки, в этом смысле они «повторялись» и в I постановке – однако там были сочетания без повторений.

Если исходить из метода решения, следует признать, что повторяются промежутки между монетами – как места для перегородок. При II постановке, в отличие от I, один промежуток может повториться для нескольких перегородок.

Прямо скажем, промежуток между монетами – вещь куда менее ощутимая, чем монета или пирожное. Два пирата, которым при дележе достались лишь «промежутки между монетами», вряд ли станут выяснять, один и тот же у них промежуток или разные – скорее, они станут выяснять отношения с другими членами шайки.

Для тех, кто еще не устал, можно добавить следующее. Если забыть о способе решения и думать лишь об аналогии с задачей о покупке пирожных, то придется, пожалуй, принять – несмотря на все сказанное ранее, – что «повторяются» все-таки пираты!

В общем, неразбериха что надо.

Мораль проста: начинающим не рекомендуется связываться с термином «сочетания с повторениями» без особой надобности. Можно ведь говорить о числе решений уравнения (6) в целых $x_i \geq 0$. Это кристально ясное выражение, не дающее повода для «кривотолков». Задачи о дележе (II постановка) и о покупке пирожных внешне различны. Но стоит написать уравнение (6), как сразу становится очевидным, что это одна и та же задача.

Иногда вместо количества решений уравнения (6) в целых $x_i \geq 0$ говорят о количестве разбиений числа m на n неотрицательных слагаемых. Это хуже. При наличии нулевых слагаемых не очень уместно говорить о разбиениях (можно ли считать, что $3 = 3 + 0 + 0 + 0$ означает «разбиение» числа 3 на 4 слагаемых?), но главное в другом. Разбиения $8 = 5 + 3$ и $8 = 3 + 5$ – это два разных разбиения или это по существу одно и то же разбиение? Можно понимать и так и этак, стало быть, нарушается Главное Правило Комбинаторики.

В то же время вряд ли кто-нибудь усомнится в том, что $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ и $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ – это разные решения уравнения $x_1 + x_2 = 8$. На сей счет в математике устойчивые традиции.

Стоит ли уделять столько внимания терминологии – ведь в конечном счете она несущественна? В конечном, пожалуй, и впрямь несущественна. Но для начинающих «начальный счет» куда важнее «конечного».

(Окончание следует)

Закон Ома для разомкнутой цепи и... туннельный микроскоп

И.ЯМИНСКИЙ

В 1826 ГОДУ НЕМЕЦКИЙ ФИзик Георг Симон Ом установил закон (получивший впоследствии его имя), который определяет связь между электрическим током, текущим через проводник, сопротивлением проводника и напряжением на нем. Из этого закона, в частности, следует, что в разомкнутой электрической цепи, когда сопротивление бесконечно велико, ток всегда равен нулю. Иными словами, если между проводниками имеется зазор, то тока нет, а если нет зазора – ток есть (рис.1). И вот здесь возникает закономерный вопрос. Как появляется ток по мере сближения проводников: резким скачком или есть область плавного изменения тока?

Казалось бы, ответ можно получить из опыта. Однако провести эксперимент для случая с плоскими параллельными поверхностями достаточно сложно. Во-первых, трудно обеспечить параллельность двух плоскостей при сближении на малые расстояния. Во-вторых, реальные плоскости шероховаты, и первоначальное касание все равно произойдет в какой-то одной точке. Эта неопределенность запутает трактовку измерений, и, как говорится, чистота эксперимента будет нарушена.

Но раз плоскости все равно касаются сначала в одной точке, можно поступить иначе – вместо двух плоскостей взять одну, а в качестве второго электрода взять острую иглу. Так и сделал в 1971 году Рассель Янг (с коллегами) и обнаружил переходную область плавного изменения тока при сближении двух электродов. В своих экспериментах он использовал вольфрамовую иглу и платиновый электрод с плоской поверхностью.

Таким образом, Янгом были осуществлены первые прямые эксперименты по регистрации электрического тока, проходящего через зазор между проводниками. Обнаруженное им явление есть одно из проявлений так

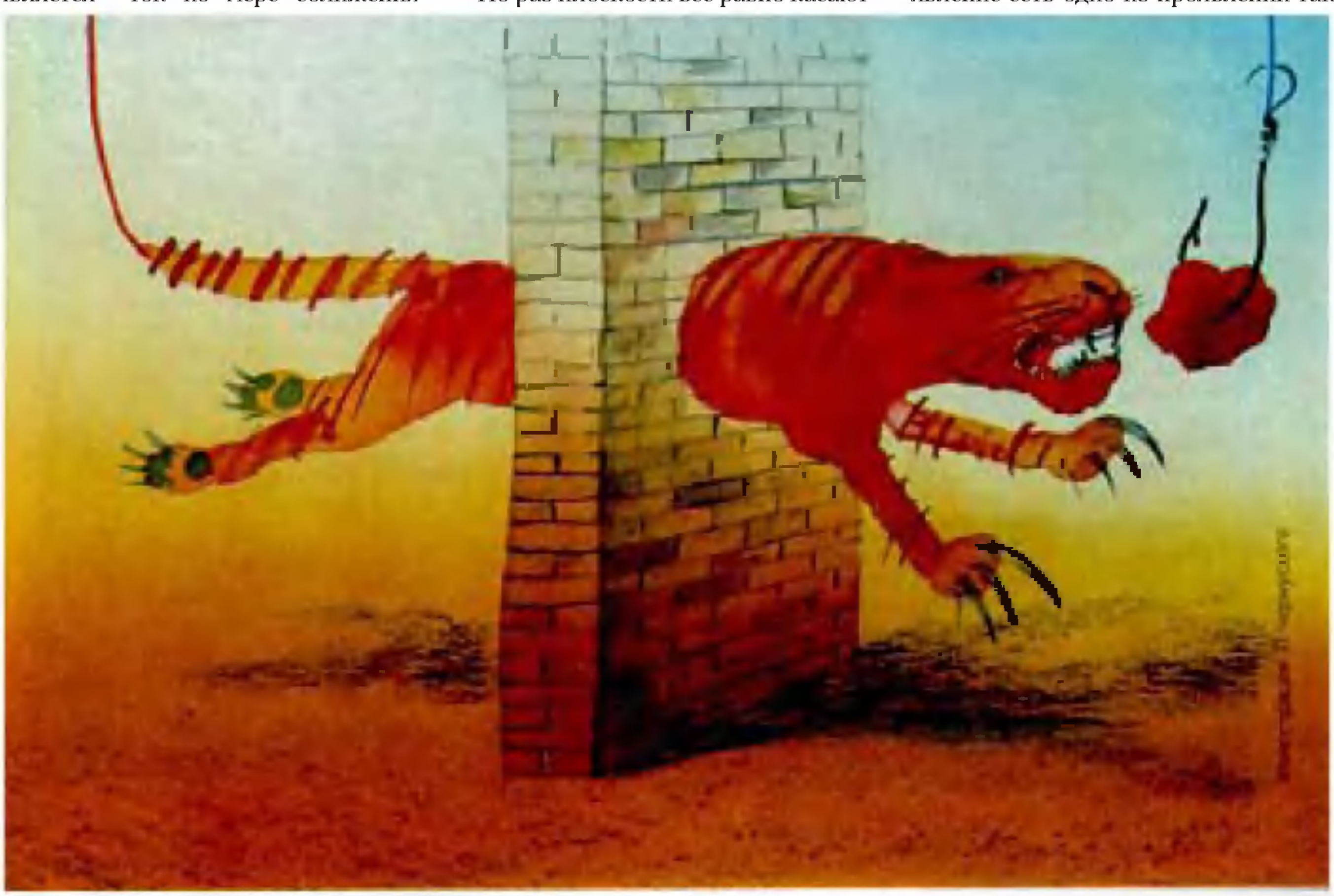


Иллюстрация П.Чернуского

Рис.1. При большом зазоре между проводниками ток равен нулю, при контакте проводников в цепи течет ток, например 1 А. До какого расстояния δ нужно сблизить два проводника, чтобы появился заметный электрический ток?

называемого *туннельного эффекта*. Туннельный эффект — это прохождение через *потенциальный барьер* микрочастицы, энергия которой меньше, чем высота барьера. В эксперименте Янга электроны находятся в потенциальной яме, и их энергия меньше высоты потенциального барьера, образуемого воздушным зазором. Однако часть электронов проходят сквозь барьер — туннелируют. Строгое объяснение этого эффекта дает квантовая механика (исходя из неопределенности импульса микрочастицы в области барьера). Туннельный эффект проявляется в различных системах; например, спонтанное излучение ядром электрона — β-распад — происходит также вследствие туннельного эффекта.

Неожиданное применение туннельного эффекта нашло себя в приборе, сконструированном в 1981 году сотрудниками исследовательского центра фирмы IBM в Швейцарии Гердом Биннигом и Генрихом Рорером. Швейцарские ученые поставили цель создать установку для спектроскопических исследований сверхпроводников. Они предполагали, что с ее помощью смогут увидеть отдельные участки поверхности размером порядка 10 нанометров (одной стомиллионной метра). Созданный ими прибор превзошел все ожидания – 4 марта 1981 года Бинниг и Рорер (совместно с коллегами) увидели отдельные атомы (!) на поверхности кремния. Этот день можно считать днем рождения нового прибора — *сканирующего туннельного микроскопа* (СТМ).

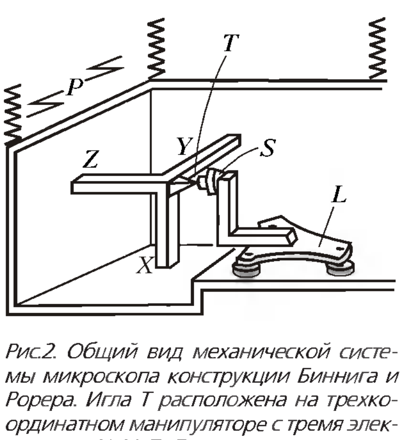


Рис.2. Общий вид механической системы микроскопа конструкции Биннига и Рорера. Игла T расположена на трехкоординатном манипуляторе с тремя электродами X, Y, Z. Для осуществления начального сближения образец S установлен на «трехногой ходилке» – манипуляторе грубых перемещений L. С целью виброизоляции механика микроскопа подвешена на мягких пружинах P

«Глазами» микроскопа является его механическая часть (рис.2). В туннельном микроскопе изучают проводящие образцы. Для наблюдения поверхности образца его закрепляют на столике микроскопа, а заостренную иглу устанавливают на специальном манипуляторе — пьезосканере. Как сделать иглы для микроскопа, мы поговорим позже, а сейчас — об устройстве пьезосканера.

Пьезосканер первого микроскопа имел вид треноги, изображенной на рисунке 2. Каждую из «ног» такого манипулятора изготавливали из пьезокерамики в форме удлиненного бруска квадратного сечения. На противоположные грани брусков были нанесены металлические электроды. Прикладывая электрическое напряжение к электродам, можно было управлять длиной брусков — укорачивать или удлинять. (Такое свойство пьезокерамики используется не только в туннельном микроскопе, но и, например, в будильнике электронных часов. Пьезодиск в часах под действием переменного напряжения меняет свои размеры, тем самым возбуждая в воздухе звуковые колебания, которые нас и будят по утрам.)

Если приложить электрическое напряжение к каждой из трех «ног» манипулятора, то можно осуществить перемещение иглы по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Такие манипуляторы обеспечивают перемещение иглы на расстояния до 10 микрон.

В современных туннельных микроскопах используются манипуляторы в виде монолитной трубки с системой электродов (рис.3). Если приложить напряжение к Z-электродам, то верхняя часть трубки изменит длину, обеспечивая перемещение иглы вдоль Z-координаты. Перемещение иглы по другим координатам осуществляется за счет изгиба трубки. Достигается это следующим образом. В нижней части трубки имеется система X- и Y-электродов. Если к одному из X-электродов приложено положительное напряжение, а к другому отрицательное, то одна сторона трубки укоротится, а другая удлинится, в результате трубка изогнется, а игла переместится практически вдоль X-координаты. Аналогично можно осуществить перемещение иглы и по координате Y. При длине трубки 5 см, наружном диаметре 1 см и толщине стенок 0,3 мм перемещение по координатам X и Y может достигать 250 мкм, а по координате Z – до 10 мкм. При этом точность поддержания размеров трубки — сотые доли нанометра.

Для того чтобы получить высокое разрешение в туннельном микроскопе, необходимо применять иглы с острым кончиком. Желательно, чтобы на конце острия находился всего лишь один атом. К счастью, на момент изобретения туннельного микроскопа такие иглы уже умели делать (подобные иглы использовались в ионном проекторе). Иглы изготавливались из тонкой вольфрамовой проволоки, острие иглы имело форму

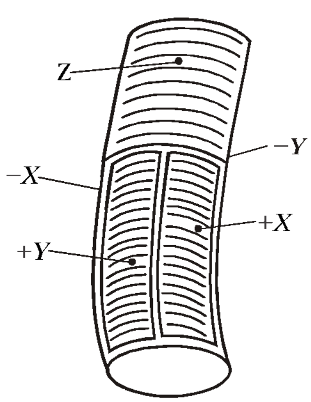


Рис.3. Тонкостенная трубка из пьезокерамики обеспечивает перемещение иглы по трем координатам. Для этого на трубке нанесены металлические электроды. При приложении напряжения к парам электродов –X,+X или –Y,+Y трубка изгибается, и игла перемещается по координатам X и Y. Подача напряжения к Z-электроду приводит к изменению общей длины трубки — игла перемещается по координате Z

пирамиды с одним атомом вольфрама в вершине. Делать это научились методом электрохимического травления – острие формировалось в растворе электролита при пропускании электрического тока. Этот достаточно сложный метод давал хорошие результаты в туннельной микроскопии, но вскоре обнаружилось, что столь же качественные изображения можно получить, изготавливая иглы другим, удивительно простым способом. Оказалось, что иглу можно сделать из платино-иридиевой проволоки с помощью обычных ножниц. Для этого достаточно всего лишь выполнить срез проволоки под углом примерно 45°. Качества образованной при этом вершины достаточно для того, чтобы увидеть отдельные атомы на поверхности различных образцов. Так, на рисунке 4 представлено изображение поверхности графита, полученное с помощью иглы, приготовленной именно таким образом. Выступы на поверхности соответствуют отдельным атомам углерода, расположенным на расстоянии 0,24 нм друг от друга.

Почему же туннельный микроскоп дает такое высокое разрешение? Чтобы понять это, обратимся к рисунку 5, на котором изображена игла с одним атомом в ее вершине вблизи проводящей поверхности. Как уже говорилось в начале статьи, туннельный ток появляется только в том случае, если оба электрода находятся близко друг от друга и при этом возникает непротяженная область изменения этого тока. Другими словами, величина туннельного тока сильно зависит от расстояния между электродами. Оказывается, что при уменьшении расстояния на величину, соответствующую размеру одного атома, ток может увеличиться в 10 и более раз. Поэтому основная часть электронов и в этом случае слетает с одного-единственного атома, расположенного на выступающей части иглы с одним атомом в вершине, в узком коридоре, диаметр которого может быть даже меньше размера самого атома.

Если с иглой с одним атомом все более или менее понятно, то пока не ясно, почему те же самые атомы можно увидеть с помощью иглы из обычной платино-иридиевой проволоки, срезанной кухонными ножницами. Секрет успеха очень прост. Срезая ножницами проволоку, мы формируем острие скорее всего неправильной формы – вроде того, что изображено на рисунке 6. Однако и для этого острия может оказаться, что из всех атомов один будет чуть ближе к поверхности, чем все остальные. А это значит, что туннелирование электронов будет происходить в основном с этого атома. Если окажется, что на острие есть две вершины равной вы-

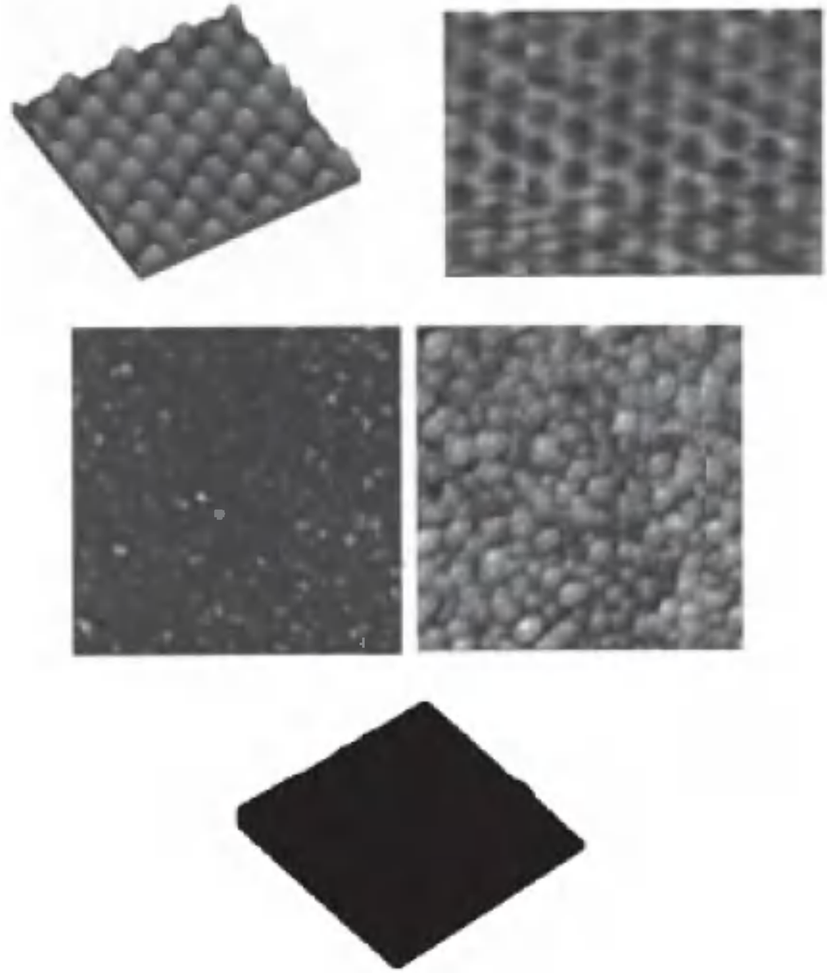


Рис.4. СТМ позволяет увидеть отдельные атомы на различных проводящих поверхностях. На рисунке сверху изображены поверхности графита (площадью 1,7× 1,7 нм) – слева, и сульфида молибдена (2,4× 2,4 нм) – справа.

С помощью термического напыления металлов на ровную поверхность можно приготовить отражающие плоскости высокого качества. Такие идеальные зеркала имеют зернистую структуру, что и видит СТМ. В средней части рисунка изображены зеркальные пленки золота (слева) и никеля (справа). Размер участков поверхности 500× 500 нм и 360× 360 нм соответственно.

СТМ дает возможность наблюдать органические и биологические объекты. На рисунке внизу изображены липосомы – бислойные биологические мембраны в форме шариков. Диаметр одной липосомы около 300 нм. В косметике используются кремы, в состав которых входят липосомы. Липосомы служат в качестве контейнеров для направленной доставки лечебных веществ на участки кожи

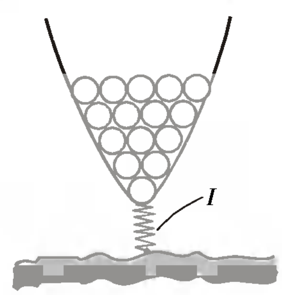


Рис.5. Когда в вершине иглы один атом, туннелирование происходит именно через этот атом

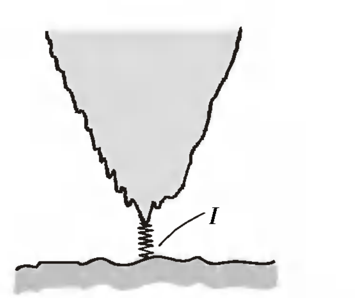


Рис.6. Игла неправильной формы – обычно один из атомов находится к поверхности чуть ближе, чем все остальные

соты, изображение в туннельном микроскопе будет двоиться — туннелирование будет происходить с обеих вершин в равной степени.

Итак, как же получается изображение поверхности в сканирующем туннельном микроскопе? Между иглой и исследуемым образцом прикладывается небольшая разность потенциалов, например 50 мВ. Игла микроскопа, помещенная на пьезосканере, совершает над образцом движение, подобное лучу в телевизоре — движется последовательно по линиям-строчкам, образуя полный кадр. Это движение обеспечивается напряжением, прикладываемым к X- и Y-электродам пьезосканера. При этом (что очень важно) игла движется и по третьей координате — Z, причем так, чтобы величина туннельного тока была постоянной. Движение иглы подобно полету крылатой ракеты над поверхностью земли – ракета летит над местностью, отслеживая ее рельеф таким образом, что высота полета поддерживается постоянной. В микроскопе поддерживается постоянной величина туннельного тока, а для однородного по составу образца это соответствует и постоянному зазору между иглой и поверхностью образца.

(Аналогия между полетом крылатой ракеты и движением иглы оказалась настолько близкой, что в микроскопе удалось применить электронную систему, аналогичную той, что использовалась в крылатых ракетах. Так в 1987 году и поступили американские ученые из Санты-Барбары, построив электронику микроскопа на специальном и очень умном процессоре, предназначенном для обработки аналоговых сигналов и построения следящих систем. В то время в американской промышленности, так же, как и в российской, были ярко выражены конверсионные тенденции, заключающиеся в применении военных технологий для мирных целей. Созданный таким образом туннельный микроскоп, получивший название «Nanoscope-2», является удачным примером конверсии.)

Изображение поверхности в микроскопе отображают на экране монитора в ярких красках и специально подобранной цветовой палитре – при этом искусство графики и умение физики идут рядом.

Современный туннельный микроскоп для научных, прикладных или учебных целей — это небольшой и компактный прибор (размером с лабораторный оптический микроскоп). Вся его управляющая электроника занимает места не больше обычного вольтметра. А вот мониторы лучше использовать с большим экраном и высокого качества. Быстродействующий компьютер позволяет оперативно осуществлять обработку изображений — например, строить трехмерные образы поверхностей, поворачивая их под разными углами, меняя цвета изображения и используя различные графические эффекты.

Мы начали статью с закона Ома. Так что же, справедлив этот закон для туннельного перехода или нет? Ответ — да! Особенность в том, что зависимость сопротивления туннельного перехода от расстояния обратна соответствующей зависимости туннельного тока: $R(z) = U/I(z)$, где z — расстояние между проводниками (величина зазора туннельного перехода).

Сканирующий туннельный микроскоп применяют не только для того, чтобы визуализировать поверхность образца, увидеть отдельные атомы или молекулы. Туннельный микроскоп стал тем прибором, с помощью которого можно модифицировать поверхность, «перекатывая» по ней с помощью иглы отдельные атомы. (Эти эксперименты, правда, необходимо проводить при температурах около абсолютного нуля.) Швейцарский ученый Энгл, например, таким образом «написал» название фирмы, на которой был изобретен туннельный микроскоп, — слово IBM, составив его из отдельных атомов ксенона на поверхности никеля. При этом для буквы I он использовал всего девять атомов ксенона, а для букв B и M – по тринадцать.

Примечание 1

Первоначальная формулировка закона, установленного Омом, существенно отличалась от привычной современной. В своих экспериментах немецкий ученый применял оригинальную конструкцию гальванометра: две термопары, поддерживаемые при разных температурах, и набор проволочек одинакового поперечного сечения. Он определил, что угол поворота ϑ стрелки гальванометра зависит от длины выбранной проволочки X следующим образом:

$$\vartheta = \frac{\psi}{X + \delta}.$$

Константа δ зависела от длины подводящих проводов и типа термопар, а величина ψ определялась разницей в нагреве термопар и была названа ученым «возбуждающей силой».

Благодаря последовательным усилиям Джоуля, Фарадея и Кирхгофа, величины в законе Ома получили новую интерпретацию. Стало ясно, что вместо угла поворота стрелки гальванометра должна фигурировать величина электрического тока I и что «возбуждающая сила» – это по сути дела разность электрических потенциалов $\Delta\varphi$. А в знаменателе нужно записывать полное сопротивление цепи, состоящей из сопротивления выбранной проволоки, соединительных проводов и внутреннего сопротивления термопар:

$$I = \frac{\Delta\varphi}{R_X + R_\delta}.$$

Как часто бывает, первый шаг в развитии физической идеи является определяющим, и поэтому мы знаем не закон Ома–Джоуля–Фарадея–Кирхгофа, а закон, носящий имя одного ученого. Искусство экспериментатора и мастерство теоретика позволили Ому установить новый физический закон, а 155 лет спустя те же качества, присущие Биннигу и Рореру, позволили увидеть атомы с помощью созданного ими сложного прибора, который в упрощенной аналогии состоит из источника напряжения, измерителя тока и двух проводников – образца и иглы.

Примечание 2

За эффекты, связанные с появлением туннельного тока, неоднократно присуждались различные премии, в том числе и Нобелевские.

В 1973 году Нобелевская премия по физике была присуждена Лео Эсаки за открытие явления туннелирования в твердых телах и Айвару Живеру за экспериментальное исследование явления туннелирования в полупроводниках и сверхпроводниках. Вторую половину премии присудили Брайану Джозефсону за теоретические исследования по сверхпроводимости и туннелированию, в частности — за открытие явления, получившего название эффекта Джозефсона.

В 1986 году Нобелевскую премию по физике получили Герд Бинниг и Генрих Рорер за изобретение сканирующего туннельного микроскопа.

На основании своего открытия Эсаки изобрел туннельный диод, который применяется вместо радиоламп в высокочастотных генераторах. На основе эффекта Джозефсона построены стандарты частоты и чувствительные измерители магнитного поля. Сканирующие туннельные микроскопы, изобретенные Биннигом и Рорером, работают в научных и производственных лабораториях всего мира.

Леонардо да Винчи и принцип невозможности вечного двигателя

М.МОГИЛЕВСКИЙ

Представление о невозможности вечного двигателя является одним из самых важных положений физики, которые школа надежно вкладывает в учащихся. И у многих создается внутренняя убежденность, что тот, кто пытается построить вечный двигатель, – или неграмотный, или сумасшедший. При таком подходе мы незаслуженно принижаем роль в развитии науки и техники многих поколений средневековых ученых.

Между тем мотивы попыток построения вечного двигателя вполне понятны. Во-первых, создание эффективных и недорогих машин и источников энергии есть одна из важнейших задач общества. (Интересно отметить, что идей и попыток разработки вечного двигателя не было в Античном мире, несмотря на существование развитых научных школ. Причина проста: широкое использование дешевой рабочей силы – рабов.) Первые изобретения в этой области отмечаются в различных странах в XII – XIII веках в связи с потребностями ремесленного производства. Во-вторых, имеется очень сильный психологический фактор – тот, кому удастся решить эту проблему, облагодетельствует человечество, и его имя останется в веках. И наконец, в-третьих, каждый может наблюдать вечные, безостановочные движения в природе: движение Луны, планет, течение рек. Если такое движение имеет место в природе, неужели же человек с техническим опытом и научными знаниями не сможет создать искусственный, рукотворный вечный двигатель? Если твоя модель не работает, попытайся внести усовершенствования. Такие мысли, возможно, подвигали многих людей, связанных с наукой и техникой, к активным поискам конструкции вечного двигателя.

Предшественники

Считается, что первая схема вечного двигателя была предложена индийцем Бхаскара около 1150 года. Как показано на рисунке 1,*а*, устройство должно было представлять колесо с набором трубок с тяжелой жидкостью (ртутью), закрепленных под некоторым углом к радиусу. По мнению изобретателя, перетекание жидкости в трубках должно было создать несимметрию в распределении грузов, которая и обеспечивала бы вечное вращение. Известный французский архитектор и инженер Виллар д'Оннекур примерно через сто лет предложил аналогичную схему вечного двигателя, показанную на рисунке 1,*б*. Предполагалось, что нечетное число грузов на колесе обеспечит несимметрию и будет причиной вечного движения. По-видимому, попытки сделать двигатель именно в виде «вечного колеса» опирались на наиболее распространенный в средневековой Европе двигатель – водяное колесо. Одна из модификаций схемы (рис.1, *в*) была предложена в 1438 году Мариано ди Жакопо из Сиены (город недалеко от Флоренции – родины Леонардо да Винчи).

Работа Леонардо над проблемой вечного двигателя

Было бы удивительно, если бы Леонардо да Винчи (1452 – 1519) оказался в стороне от такой важнейшей проблемы, как создание вечного двигателя. И он, неизменно добивавшийся успешного понимания практически любых явлений, за которые брался, действительно неоднократно обращался к ней. Сохранившиеся трактаты и записные книжки Леонардо позволяют увидеть последовательное нарастание уровня его проникновения в эту сложнейшую проблему.

Первый уровень – изучение известных или слегка измененных схем вечного двигателя типа колеса с

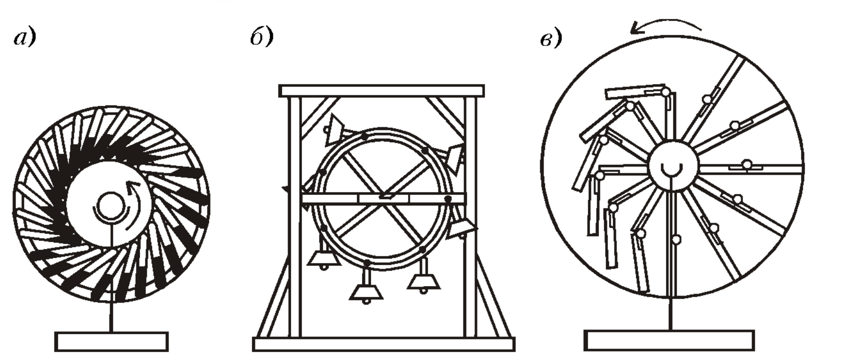


Рис. 1. Различные схемы «вечного колеса»

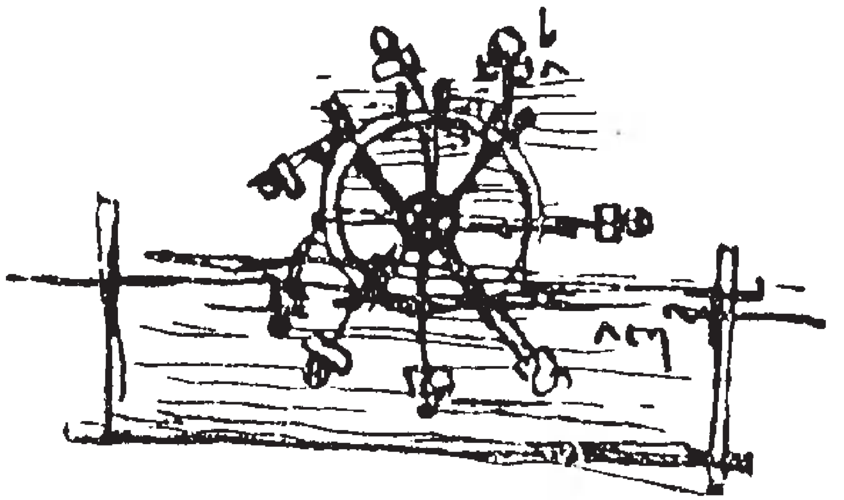


Рис.2. Схема вечного двигателя с дополнительной несимметрией за счет выталкивающей силы

грузами. Леонардо неоднократно бывал в крупнейших университетских центрах Италии – Болонье, Парме, Пизе, Риме, работал в библиотеках, активно общался с коллегами. Не исключено, что он изготавливал и исследовал модели различных известных двигателей. Однако ни один из них почему-то не работал. *«Препятствия не могут согнуть меня. Любое препятствие вызывает усилие»,* — и Леонардо пошел дальше.

Второй уровень – существенные изменения в схеме колеса. Внутренняя убежденность в возможности разработки конструкции для получения вечного движения заставила Леонардо да Винчи попытаться добиться положительного результата посредством разумных существенных модификаций известных схем «вечного колеса». «Следы» таких попыток можно найти в его записях, из которых легко понять общую идею – добиться несимметрии вращающего момента с помощью введения дополнительного физического эффекта. Так, в схеме, изображенной на рисунке 2, нижняя часть колеса погружалась в воду, и выталкивающие силы, действующие на полые коробки, должны были бы создать дополнительные усилия, обеспечивающие вращение колеса.

Третий уровень – разработка принципиально новых схем для получения вечного движения. На рисунке 3 показана страница из записной книжки Леонардо, датируемой 1487 годом, — здесь предложены модификации вечного двигателя с винтом Архимеда. Предполагалось, что вода будет подниматься первым винтом малого диаметра на некоторую высоту, сливаться в чашу, а затем возвращаться по второму винту (или вращая колесо, как показано на нижней схеме слева) на исходный уровень. Существенной особенностью этих модификаций двигателя является больший радиус возвращающего воду винта (что действительно должно было создать больший вращающий момент, чем на первом колесе, но отнюдь не бо́льшую работу за цикл). Комментарий к чертежу – *«вода по винту... возвращается на первый винт и повторяет этот процесс неограниченно долго»* – свидетельствует, что в то время Леонардо не сомневался в возможности осуществления вечного двигателя.

Четвертый уровень – анализ распределения нагрузок в схеме «вечного колеса». Многочисленные неудачи в попытках получения вечного движения, несмотря на различные способы усовершенствования схемы, заставили Леонардо да Винчи остановиться и попытаться найти причину неудач. Трудность решения такой задачи современному читателю станет более ясной, если напомнить, что на рубеже XIV – XV веков еще даже не было таких физических понятий, как работа и энергия. И все же Леонардо смог показать, почему не может работать наиболее популярный вечный двигатель в виде колеса с

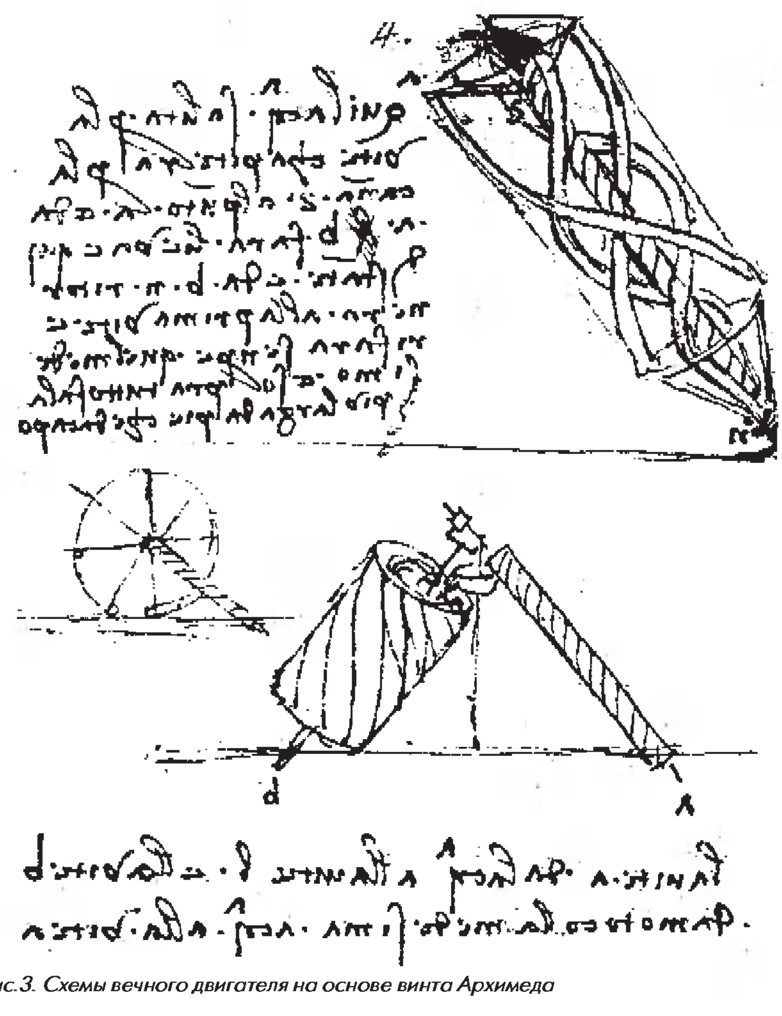


Рис.3. Схемы вечного двигателя на основе винта Архимеда

несимметричным распределением грузов. В его записных книжках сохранились рисунки, свидетельствующие, что для анализа поведения колеса при повороте Леонардо внимательно изучил, как изменяется причина вращения – несимметрия распределения грузов относительно оси (т.е. вращающий момент) в более простых для анализа системах из небольшого числа грузов для разных вариантов колеса. В таких упрощенных схемах ученый смог заметить, что определяющим является не избыток числа грузов с одной стороны относительно оси, а их расстояние до оси, т.е. положение центра масс.

На рисунке 4 представлен знаменитый чертеж колеса с вычислениями положения центра масс. Здесь показано, что горизонтальная координата центра масс системы грузов совпадает с положением оси (справа от оси центр масс 4 грузов находится на расстоянии 7 интервалов, слева – центр масс 7 грузов на расстоянии 4 интервалов от оси). Следовательно, вместо ожидавшегося *perpetuum mobile* схема представляет собой *perpetuum stabile*.

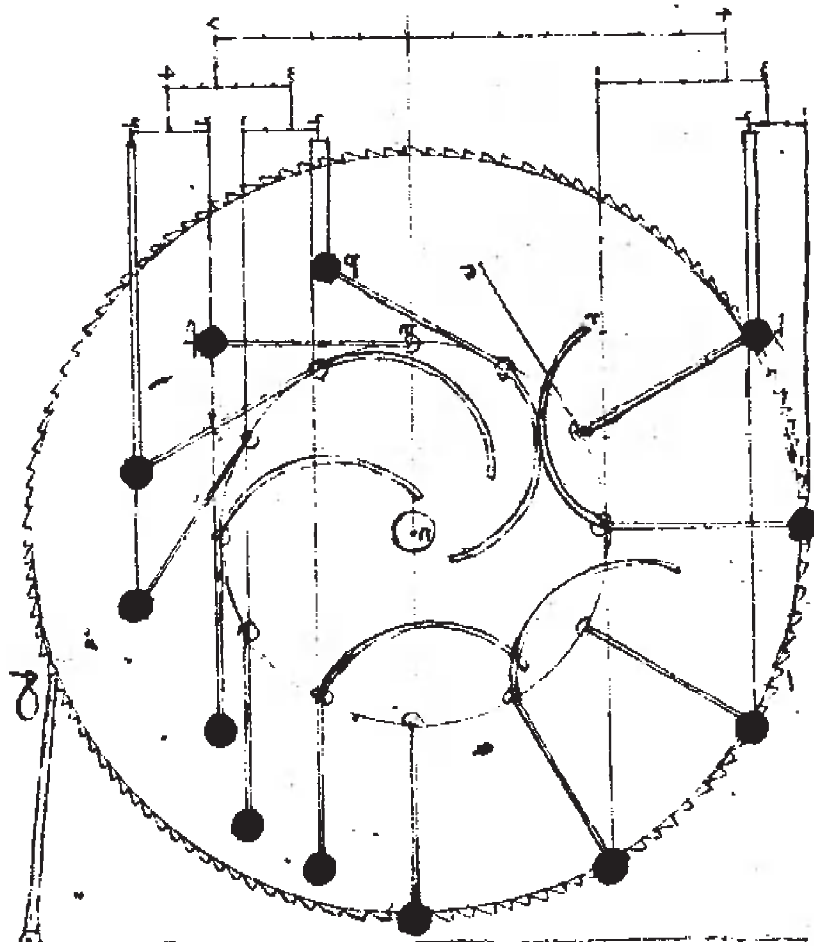


Рис.4. Расчет положения центра масс колеса с откидывающимися грузами

Пятый уровень – заключение о невозможности вечного двигателя. Итак, Леонардо да Винчи в течение нескольких лет пытался создать непрерывно работающий двигатель, проводя существенные улучшения известных конструкций и изобретая принципиально новые схемы. Затем он детально разобрался во внутренних причинах, запрещающих работу наиболее типичного двигателя в форме колеса с откидывающимися грузами (возможно также и с некоторыми другими схемами с использованием воды). И вот теперь он, не считая более необходимым детально разбираться в причинах, мешающих работе других двигателей, формулирует в жесткой форме заключение о невозможности реализации непрерывного движения в схеме любого типа, т.е. впервые формулирует принцип невозможности создания вечного двигателя:

«Я пришел к выводу о невозможности нахождения непрерывного движения, а также вечного колеса. Поиск конструкции вечного колеса – источника вечного движения – можно назвать одним из наиболее бессмысленных заблуждений человека. В течение веков все, кто имел дело с гидравликой, военными машинами и прочим, тратили много времени и денег на поиски вечного двигателя. Но со всеми ними случалось то же, что с искателями золота <алхимиками>: всегда находилась какая-либо мелочь, которая мешала успеху. Моя небольшая работа принесет им пользу: им не придется больше спасаться бегством от королей и правителей, не выполнив обещания».

Далее следует довольно пространное упоминание о, по-видимому, хорошо известном в то время скандале, связанном с попыткой построить в Венеции установку, работающую на неподвижной воде. В комментарии по тому же поводу, написанном позднее сбоку мелким почерком, вода названа дословно *«спокойной, на уровне моря»*. В основном тексте и в других местах Леонардо употребляет образный термин *«мертвая вода»* (*«aqua morta»*).

Запись о неработающем двигателе на *«мертвой воде»* неупомянутой схемы (поскольку теперь уже для Леонардо это не имеет значения) есть свидетельство его убежденности в общности сделанного вывода.

«Какая-либо мелочь (!)*»* – этими словами Леонардо да Винчи декларирует, что в любой известной схеме вечного двигателя и в любой схеме, которая может быть предложена в будущем, существуют некоторые внутренне присущие эффекты, накладывающие вето на вечный двигатель. На современном языке физики слова «какая-либо мелочь» могут означать разные виды неучтенных потерь или превращений энергии – таких, как тепловая энергия (нагревание, плавление, испарение), возбуждение механических и электромагнитных волн и т.п. вплоть до излучения нейтрино в ядерных процессах.

Комментарий 1

Как сам Леонардо оценивал значение вывода о невозможности вечного двигателя

Карло Педретти – крупнейший специалист по работам Леонардо да

Винчи – считает, что запись о невозможности построения вечного двигателя, находящаяся в составленном Леонардо Мадридском кодексе[1], датируется 1493 годом. К этому же времени относится заметка из другого сборника, аналогичная по силе утверждения, но с менее общим утверждением об обязательном присутствии эффектов, мешающих успеху:

«Какие бы грузы ни были приложены к колесу, когда они приведут к вращению, вне всякого сомнения центр тяжести окажется ниже оси вращения; и ни в каком инструменте, придуманном человеком для вращения, этот эффект не может быть устранен».

Применял ли Леонардо да Винчи сформулированный им важнейший закон природы – принцип невозможности вечного двигателя – в своих исследованиях? Многочисленные сохранившиеся записи позволяют дать утвердительный ответ:

«Невозможно, чтобы груз, который опускается, мог поднять в течение какого бы то ни было времени другой, ему равный, на ту высоту, с какой он ушел».

«Если колесо движет машину, невозможно ему приводить в движение две, не употребляя вдвое больше времени, то есть сделать столько же в час, сколько делает оно двумя машинами тоже в час. Таким образом, одно колесо может вращать бесконечное число машин, но в течение бесконечно долгого времени они сделают не более, чем одна в час».

Следует отметить также запись Леонардо о создании *работающей модели* вечного двигателя. Вернемся к рисунку 2, на котором показана схема с нижней частью колеса, погруженной в воду. Любопытен комментарий к этому рисунку: *«сделай модель под большим секретом и широко объяви об ее демонстрации».* В чем же состоит секрет модели? Из последующих пояснений становится ясно, что поскольку *«мертвая вода»* не может заставить машину работать, Леонардо намеревается организовать незаметный поток *«живой воды» («aqua viva»)*, который закрутит колесо. На рисунке показан один из возможных вариантов секретного решения: наличие отверстия в стенке сосуда (справа). Осуществил ли Леонардо да Винчи этот замысел? Видимо, да, поскольку в круг служебных обязанностей Леонардо при княжеском дворе входила организация различных празднеств и развлечений, к тому же это соответствовало бы его репутации талантливого ученого и инженера. Но какова была цель демонстрации? Попытка показать свое всемогущество? Исключено, ему не нужна была мистическая поддержка репутации ученого. Но тогда остается лишь альтернативное объяснение: привлечение внимания к модели работающего вечного двигателя, а затем объяснение секрета и пропаганда крупного научного достижения – вывода о невозможности построения вечного двигателя.

1 Кодекс (лат. codex) – в Древнем Риме форма книги из скрепленных вместе вощеных дощечек или папирусных листов; современная книга сохраняет форму кодекса в виде книжного блока. (Прим. ред.)

Комментарий 2

Последователи

Из ближайших после Леонардо да Винчи ученых, выступавших против возможности создания вечного двигателя, называют обычно итальянского математика и врача Джероламо Кардано (1516–1576), нидерландского математика и инженера Симона Стевина (1548–1620) и Галилео Галилея (1564–1642). Кардано заявил о невозможности сделать часы, которые заводились бы сами собою и сами поднимали бы гири, двигающие механизм. Стевин получил на основании аргумента о невозможности вечного двигателя условие равновесия тел на гладких наклонных плоскостях: тело удерживается в равновесии силой, которая действует в направлении наклонной плоскости и во столько раз меньше его веса, во сколько длина наклонной плоскости больше ее высоты. Галилео заявлял: «Машины не создают силу; они только ее превращают. Кто надеется на противоположное, тот ничего не понимает в механике».

Следует отметить существенное различие между отношением Леонардо да Винчи и его ближайших последователей к обсуждаемой проблеме. Леонардо пытается понять, почему двигатели различных систем не работают, утверждает неотвратимость существования каких-либо внутренне присущих и мешающих работе эффектов. Кардано, Стевин и Галилей используют принцип невозможности вечного двигателя, уже как твердо установленный закон природы, при анализе частных проблем.

Можно с достаточным основанием говорить о влиянии Леонардо да Винчи по крайней мере в отношении Кардано. Его дядя Фацио Кардано – миланский юрист и естествоиспытатель – был другом Леонардо и, конечно же, был информирован о важнейших результатах ученого. После смерти Леонардо его рукописи по завещанию перешли Франческо Мельци, который в 1523 году вернулся в Милан и посвятил долгие годы (умер Мельци около 1570 г.) систематизации работ учителя и, в частности, подготовил к печати Трактат о живописи. Джероламо Кардано сам мог изучать рукописи Леонардо да Винчи в собрании Мельци, тем более что среди них находились известные трактаты по анатомии и физиологии, представлявшие профессиональный интерес для врача Кардано.

В 1775 году Французская Академия приняла решение не рассматривать предложения вечных двигателей:

«(1*) Построение вечного двигателя абсолютно невозможно: (2*) если даже трение и сопротивление среды не уменьшат длительность воздействия действующей силы, она не сможет произвести равный эффект. Причина следующая: если мы хотим получить эффект конечной силы за бесконечное время, эффект должен быть бесконечно мал. Предположим, что тело, которому сообщили движение, при отсутствии трения и сопротивления способно сохранить это движение постоянно; но при этом не идет речь о других телах. Это вечное движение… было бы совершенно бесполезно по отношению к другим объектам, предлагаемым обычно творцами вечного движения… (3*) Такие работы слишком расточительны: они уже разрушили очень много семей. Часты случаи, когда механик, который мог бы занять достойное место, растрачивал на это свою славу, время и талант.

Таковы принципы, на которых основано решение Академии: постановляя, что она больше не будет заниматься этими вопросами, Академия заявляет о своем мнении об их бесполезности... (4*) Часто говорят, что, занимаясь химерическими проблемами, люди открывали полезные истины. Такая точка зрения была бы обоснована в те времена, когда метод поиска истины был неизвестен во всех областях. В настоящее время, когда он известен, наиболее верный способ поиска истины – искать ее».

Сравнение этого текста с приведенной выше формулировкой Леонардо принципа невозможности вечного двигателя позволяет отметить поразительную близость между ними по существу и порядку акцентов: сначала дается жесткая формулировка невозможности построения вечного двигателя (1*); затем (2*) – попытка «обоснования» (наличие в любой схеме какой-либо мелочи, т.е. каких-то потерь, – у Леонардо и более ограниченная по существу формулировка Академии, сводящая возможные потери лишь к трению и сопротивлению среды); и наконец, (3*) – тезис о незавидной судьбе изобретателей (не очень обязательный в научном документе) и (4*) – тезис о том, что верный путь поиска истины известен (кажется не очень убедительным).

Такое совпадение едва ли можно считать случайным. Французские академики, несомненно, имели возможность познакомиться с работами Леонардо да Винчи, которые ценились высоко и с начала XVII века уже имелись в крупных и вполне доступных библиотеках. Можно отметить, что через 20 лет после того решения Французской Академии, в 1795 году, когда Наполеон ненадолго стал королем Италии, 12 кодексов Леонардо были вывезены из Милана в Париж и лишь Атлантический кодекс был позднее, в 1815 году, возвращен в Миланскую библиотеку Амброзиана. Что касается Мадридского кодекса, он с начала XVIII века находился в дворцовой библиотеке Испанских королей, затем был утерян в 1830 году, т.е. значительно позже даты заседания Французской Академии, и вновь найден лишь через 135 лет.

По-видимому, именно выпадением из поля зрения ученых Мадридского кодекса, с четкой формулировкой невозможности вечного двигателя, и доступностью лишь кратких заявлений, типа цитированных выше, объясняется недооценка роли Леонардо да Винчи в обосновании фундаментального закона природы – принципа сохранения энергии.

Комментарий 3

Закон сохранения энергии и его эквивалентность принципу невозможности построения вечного двигателя

Окончательное утверждение закона сохранения энергии в сороковые – семидесятые годы XIX века произошло на основе работ Сади Карно, Роберта Майера, Джеймса Джоуля и Германа Гельмгольца, которые показали связь между различными формами энергии (механической, тепловой, электрической и др.). Закон сохранения энергии формулируется обычно в следующем виде: «Энергия не исчезает и не возникает из ничего. В изолированной системе энергия может переходить из одной формы в другую, но общее количество ее остается постоянным».

Тезис об эквивалентности принципа невозможности вечного двигателя (первого рода) и закона сохранения энергии требует небольшого комментария. Современные учебники представляют, как правило, невозможность вечного двигателя как следствие закона сохранения энергии. Но имеется существенное различие между следствием и эквивалентностью. Да, закон сохранения энергии относится к святыням современной науки, число которых ограничено. Закон сохранения энергии и утверждение Леонардо да Винчи о невозможности построения вечного двигателя не принадлежат к числу обычных законов, полученных из эксперимента, таких, например, как закон Кулона для трения (открытый, кстати, за 30 лет до него Леонардо), закон Ома или закон Бойля – Мариотта. Оба они относятся к разряду *начал*, или *принципов*, т.е. к самым общим законам природы, которые согласуются со всеми имеющимися экспериментальными данными, из которых нет исключений и в которых нет приближенности. Будучи сформулированным на основании ограниченного числа экспериментальных данных, принцип становится эффективным инструментом для новых научных исследований. Принцип невозможности вечного двигателя был положен Майером и Гельмгольцем в основу анализа различных превращений энергии.

Макс Планк в работе «Принцип сохранения энергии», написанной в 1887 году (отметим, что в то время он назывался еще не законом, а принципом, что, как отмечено выше, более соответствует его происхождению и роли), сделал специальный акцент на эквивалентности принципа невозможности вечного двигателя и принципа сохранения энергии.

* * *

В заключение отметим, что в работе над проблемой вечного двигателя проявились основные особенности творческого метода Леонардо да Винчи, позволявшие ему добиваться выдающихся результатов в самых разных областях исследований. Можно выделить несколько наиболее важных моментов:

в происхождении задач – из наблюдений, из потребностей практики (а не только из задачника или от учителя); при этом использовался подход к явлению в целом (*«в природе существует неограниченное множество связей, чего никогда не бывает в эксперименте»*), рассматривалось явление в большом и малом масштабах;

в формулировке проблем – системность, стремление выявить суть явления и причины, обеспечивающие его протекание именно таким образом;

в решении проблем – активный поиск новых подходов, новых методов, логическое выделение составных элементов из изучаемой системы;

в проверке – неоднократный возврат к интересующей проблеме, притом, как правило, с новыми подходами.

Автор выражает глубокую благодарность за помощь в работе Карло Педретти (отделение Истории искусства Калифорнийского Университета, Лос-Анжелес) и сотрудникам Научной библиотеки Кастелло Сфорческо (Милан).

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 — 99» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1696» или «Ф1703». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1696, М1697, М1699, М1701, М1702 и М1704 предлагались на XXV Всероссийской математической олимпиаде.

Задачи Ф1703—Ф1712 предлагались на финальном туре V Соросовской олимпиады по физике.

Задачи М1696—М1705, Ф1703—Ф1712

М1696. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N-1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.

Д.Карпов

М1697. Сумма цифр в десятичной записи натурального числа n равна 100, а сумма цифр числа $44n$ равна 800. Чему равна сумма цифр числа $3n$?

А.Голованов

М1698. На сторонах треугольника ABC расположены точки A_1, B_1 и C_1 (рис.1). При этом известно, что

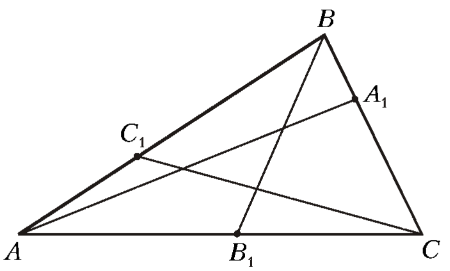


Рис.1

$AA_1 \le 1$, $BB_1 \le 1$ и $CC_1 \le 1$. Докажите, что площадь треугольника не превосходит $1/\sqrt{3}$.

В.Сендеров

М1699. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство

$$\left\{\sqrt{1}\right\}+\left\{\sqrt{2}\right\}+\ldots+\left\{\sqrt{n^2}\right\} \le \frac{n^2-1}{2}.$$

(Здесь $\{k\}$ — дробная часть числа k.)

А.Храбров

М1700*. На числовой прямой отмечены точки с координатами 1, 2, 3, ..., $2n$. Блоха начинает прыгать из точки 1 и через $2n$ прыжков, побывав во всех отмеченных точках, возвращается в исходный пункт. Известно, что сумма длин всех прыжков за исключением последнего равна $n(2n-1)$. Докажите, что длина последнего прыжка блохи равна n.

В.Произволов

М1701. Для некоторых положительных чисел x и y выполняется неравенство $x^2+y^3 \ge x^3+y^4$. Докажите, что $x^3+y^3 \le 2$.

С.Злобин

М1702*. В некоторой группе из 12 человек среди каждых 9 найдутся 5 попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся 6 попарно знакомых.

В.Дольников

М1703. Для чисел a, b и c нашлись два неравных натуральных числа m и n такие, что $a^m+b^m+c^m=0$ и $a^n+b^n+c^n=0$. Докажите, что $abc=0$.

В.Произволов, В.Сендеров

М1704*. В квадрате $n \times n$ клеток бесконечной шахматной доски расположены n^2 фишек, по одной фишке в каждой клетке. Ходом называется перепрыгивание любой фишкой через соседнюю по стороне фишку, непосредственно за которой следует свободная клетка. При этом фишка, через которую перепрыгнули, с доски снимается. Докажите, что позиция, в которой дальнейшие ходы невозможны, возникнет не ранее чем через $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ ходов (здесь $[k]$ – целая часть числа k).

С.Токарев

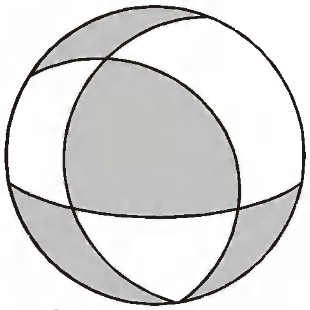


Рис.2

М1705. Через точку внутри сферы проведены три попарно перпендикулярные плоскости, которые рассекли сферу на 8 криволинейных треугольников. Эти треугольники закрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета (рис.2). Докажите, что площадь черной части сферы равна площади ее белой части.

В.Произволов

Ф1703. В компьютерной игре все движется в одной плоскости. Меткий стрелок должен поразить двух злодеев одной пулей. Злодеи двигаются с одинаковыми постоянными скоростями v параллельно друг другу, находясь на расстоянии d один от другого, как показано на рисунке 3. Соединяющая их прямая перпендикулярна направлению скорости v. В данный момент стрелок находится на продолжении этой прямой – на расстоянии L от ближнего злодея. Пуля после выстрела летит по прямой со скоростью $3v$. Пронзая злодея, пуля не меняет ни направления движения, ни величины своей скорости. В какой момент нужно стрелять и под каким углом к направлению движения злодеев нужно выпустить пулю? На сколько дольше ближнего проживет дальний злодей?

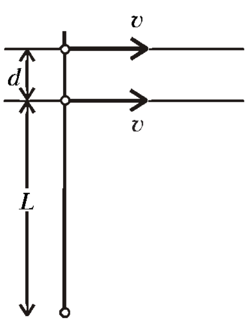


Рис.3

Я.Злодеев

Ф1704. По прямому горизонтальному стержню может скользить без трения бусинка массой M (рис.4). К бусинке привязана легкая нерастяжимая нитка длиной L. Нитку мы тянем за свободный конец так, что скорость этого конца все время направлена вдоль нити и равна по величине v_0. С какой силой нужно тянуть в тот момент, когда нить направлена под углом α к стержню? Нить все время находится в горизонтальной плоскости.

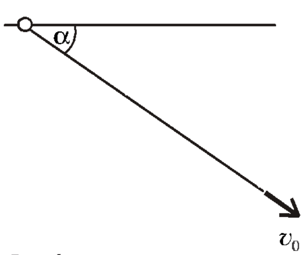


Рис.4

А.Зильберман

Ф1705. В показанной на рисунке 5 системе трение есть между большим телом и горизонтальной поверхностью стола, а также между большим телом и верхним грузом. Обозначим коэффициент трения наверху μ_1, а внизу μ_2. При каких значениях коэффициентов трения большое тело может оставаться неподвижным?

Р.Александров

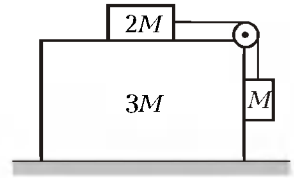


Рис.5

Ф1706. В тонкостенный стакан налили 200 г воды и при помощи опущенного в воду нагревателя постоянной мощности 50 Вт стараются вскипятить воду. Ничего не получается – вода никак не нагревается выше 60 °С. Выключим нагреватель и накроем стакан листком бумаги – вода при этом остынет от 60 °С до 59 °С за 20 секунд. Если бы мы не накрывали стакан листком бумаги, а вместо этого поставили его на теплоизолирующую пробковую подставку, то вода в стакане остыла бы от 60 °С до 59 °С за 30 секунд. Повторим теперь нагревание, но стакан установим на подставку и накроем его листком бумаги. Сколько времени займет в этом случае нагрев воды от 59 °С до 60 °С?

А.Простов

Ф1707. Вертикальный цилиндрический сосуд содержит две порции газа, отделенные друг от друга и от окружающего пространства двумя одинаковыми массивными поршнями массой M каждый (рис.6). В верхней части сосуда находится кислород, в нижней – гелий. Вначале объемы порций одинаковы и расстояние между поршнями составляет H. Нижнюю часть газа медленно нагревают. Какое количество теплоты нужно сообщить гелию в нижней части сосуда, чтобы увеличить его объем в два раза? Каким станет расстояние между поршнями через большой интервал времени – когда температуры порций газа снова сравняются? Теплоемкостью стенок и поршней пренебречь. Снаружи воздух откачан, теплоотдача в окружающее пространство пренебрежимо мала. Теплопроводность поршня, разделяющего порции газа, достаточно мала – за время нагрева тепло в верхнюю полость практически не поступает.

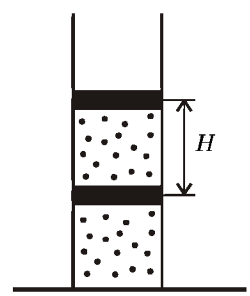


Рис.6

З.Рафаилов

Ф1708. Плоский конденсатор емкостью C составлен из двух больших проводящих пластин, каждая из которых сделана двухслойной – из соединенных друг с другом листов тонкой фольги. Пластины несут одноименные заряды Q и $2Q$. Наружный слой фольги пластины с большим зарядом аккуратно отсоединяют, относят в сторону параллельно другим пластинам и приносят на другое место – третьим слоем снаружи к пластине с зарядом Q. При этом не допускают электрического контакта с этой пластиной – оставляют очень узкий зазор. Какую работу необходимо при этом совершить? Все действия мы производим издали, стараясь не влиять на распределение зарядов пластин.

З.Рафаилов

Ф1709. Два одинаковых вольтметра соединены последовательно и подключены к батарейке (рис.7). Параллель-

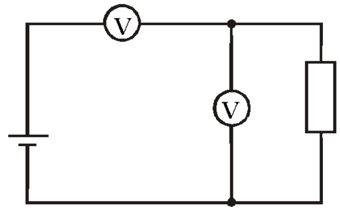


Рис.7

но одному из вольтметров подключают резистор, при этом показания вольтметров составляют 1,4 В и 3,1 В. Отключим теперь один из вольтметров. Что будет показывать оставшийся прибор? Напряжение батарейки можно считать неизменным.

Р.Схемов

Ф1710. В приведенной на рисунке 8 схеме использованы одинаковые вольтметры. Сопротивления двух резисторов одинаковы и равны каждый по R, двух других – по $3R$. Показания приборов составляют 2 мА, 3 В и 0,5 В. Найдите по этим данным величину R.

Р.Схемов

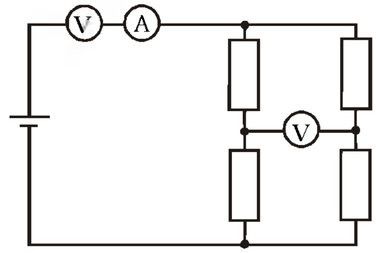


Рис.8

Ф1711. Резистор сопротивлением 100 Ом подключен к сети переменного напряжения 220 В, 50 Гц последовательно с диодом (идеальный диод имеет нулевое сопротивление при пропускании через него тока одной полярности и бесконечное сопротивление при попытке пропустить ток другой полярности). Найдите среднюю мощность, выделяющуюся в резисторе в виде тепла. Во сколько раз изменится эта мощность при подключении параллельно резистору конденсатора емкостью 1 мкФ? А при подключении конденсатора емкостью 1000 мкФ?

А.Теплов

Ф1712. Плосковыпуклая линза сделана из стекла с коэффициентом преломления $n = 1{,}5$ и имеет диаметр $D = 5$ см. Радиус выпуклой сферической поверхности $R = 5$ см. На плоскую поверхность линзы вдоль ее главной оптической оси падает широкий параллельный пучок лучей. Определите размер пятна на экране, расположенном за линзой перпендикулярно падающему пучку. Положение экрана было выбрано по минимальному размеру светлого пятна при узком (ограниченном диафрагмой) пучке лучей вдоль главной оптической оси.

А.Стеклов

Решения задач М1676–М1680, Ф1688–Ф1697

М1676. *Отрезок AB разбит на черные и белые отрезки так, что сумма длин черных равна сумме длин белых отрезков. Для каждого черного отрезка берем произведение его длины на расстояние от точки A до его середины и все такие произведения суммируем. Для каждого белого отрезка берем произведение его длины на расстояние от точки B до его середины и все такие произведения тоже суммируем. Докажите, что обе суммы равны.*

Нужно доказать, что «черная» сумма равна «белой» сумме. Построим параллелограмм $PAQB$ такой, что его стороны PA и QB равны и перпендикулярны диагонали

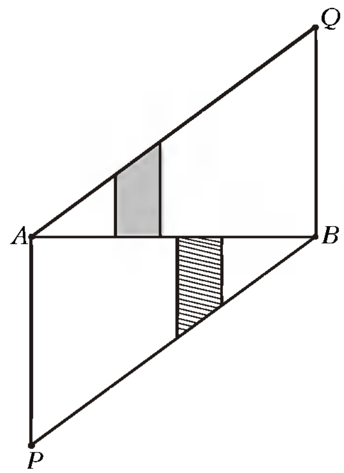


Рис.1

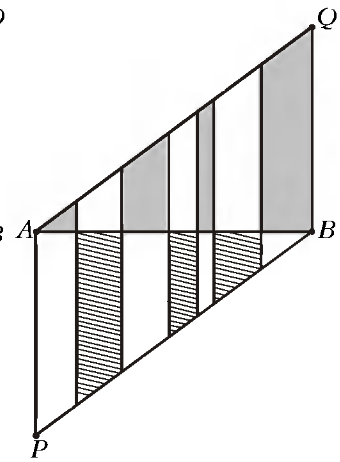


Рис.2

AB (рис.1). Каждое слагаемое черной суммы равно площади черной трапеции, построенной над соответствующим черным отрезком, а каждое слагаемое белой суммы равно площади белой трапеции (на рисунке она заштрихована), построенной под соответствующим белым отрезком.

Значит, нужно доказать, что сумма площадей черных трапеций равна сумме площадей белых трапеций.

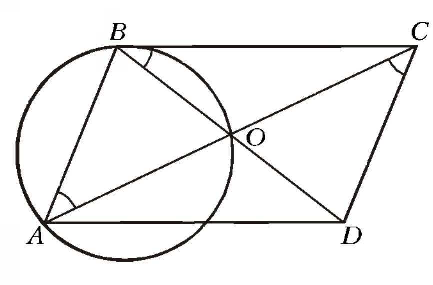
Разрежем параллелограмм $PAQB$ на вертикальные полосы, одни из которых содержат черные трапеции, а другие – белые (рис.2). Объединение полос (параллелограммов), содержащих черные трапеции, назовем фигурой F. В силу условия задачи площадь фигуры F равна половине площади параллелограмма $PAQB$. Площадь треугольника ABQ тоже равна половине площади $PAQB$. Значит, та часть площади параллелограмма $PAQB$, которая покрыта треугольником ABQ и фигурой F дважды (это все черные трапеции) равна той части площади параллелограмма $PAQB$, которая не покрыта ими вовсе (это все белые трапеции).

В.Произволов

М1677. *Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. Окружность, проходящая через точки A, O и B, касается прямой BC. Докажите, что окружность, проходящая через точки B, O и C, касается прямой CD.*

Углы OAB и OBC равны, так как первый вписан в окружность AOB, а второй образован касательной BC и хордой BO этой окружности (см. рисунок). Следовательно, углы OBC и OCD также равны, что эквивалентно утверждению задачи. Отметим, что параллелограмм, вершинами которого являются середины сторон данного, подобен исходному, поэтому задача допускает другую формулировку: в параллелограмме $ABCD$ углы CAB и DBC равны, $AD = 1$, найти AC.

А.Заславский



М1678. *В таблице из $n \times n$ клеток ($n \geq 3$) в каждой строке и в каждом столбце ровно в трех клетках* *строке и в каждом столбце ровно в трех клетках записаны какие-либо числа, остальные клетки пустые. При этом сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце одна и та же. Докажите, что сумма произведений чисел, стоящих в каждой строке, равна сумме произведений чисел, стоящих в каждом столбце.*

Нашу таблицу из $3n$ чисел будем называть матрицей M. Нужно доказать, что оговоренные в условии суммы S_1 и S_2 равны.

Каждая из этих сумм состоит из n слагаемых вида xyz, где $x+y+z=h$; при этом h постоянно для всех слагаемых. Можно записать $xyz=(h-y-z)(h-x-z)(h-x-y)$. Совершив элементарные преобразования с этим равенством, мы получим новое равенство, которое позволит нам решить задачу:

$$6xyz=h^3-3h\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\left(x^3+y^3+z^3\right). \quad (*)$$

Обозначим через A сумму квадратов всех чисел матрицы M, а через B – сумму кубов этих чисел. В силу $(*)$ можно записать

$$6S_1=nh^3-3hA+2B,$$

а также

$$6S_2=nh^3-3hA+2B,$$

т.е. окончательно – требуемое равенство:

$$S_1=S_2.$$

В.Произволов

М1679. *Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ задаются следующим образом. Выбираются два произвольных числа $a_0>0$ и $b_0<0$. Числа a_{n+1} и b_{n+1} принимаются равными, соответственно, положительному и отрицательному корням уравнения $x^2+a_nx+b_n=0$. Найдите пределы обеих последовательностей.*

Воспользовавшись теоремой Виета, получаем

$$a_n=-\left(a_{n+1}+b_{n+1}\right)=a_{n+2}+b_{n+2}\left(1-a_{n+2}\right).$$

Так как $b_{n+2}<0$, отсюда следует, что либо $1<a_{n+2}<a_n$, либо $1>a_{n+2}>a_n$, и, значит, последовательности, составленные из четных и нечетных членов a_n, монотонны и ограничены. Обозначим их пределы, соответственно, A_0, A_1. Теперь, поскольку $b_n=-\left(a_n+a_{n+1}\right)$, последовательность b_n имеет предел, равный $B=-\left(A_0+A_1\right)$. Переходя к пределу в равенстве $b_n=a_{n+1}b_{n+1}$, получаем $B=B\cdot A_0=B\cdot A_1$.

Если $B=0$, то $\left(A_0+A_1\right)=0$, что невозможно, так как A_0, A_1 положительны. Следовательно, $A_0=A_1=1$, $B=-2$.

А.Заславский, А.Поспелов

М1680. *Числовая последовательность задается равенством $x_n=n^3+C$, где n принадлежит натуральному ряду.*

а) Пусть C – натуральное число. Докажите, что любые три идущие подряд члена последовательности не имеют общего делителя (отличного от 1).

б) Пусть C является кубом натурального числа. Докажите, что существуют соседние члены последовательности, не являющиеся взаимно простыми числами.

в) Существует ли такое натуральное число C, что любые соседние члены последовательности взаимно просты?*

а) Предположим противное, и пусть p – простой общий делитель некоторых трех чисел x_n, x_{n+1}, x_{n+2}. Число p делит и числа $x_{n+1}-x_n$ и $x_{n+2}-x_{n+1}$, а значит, и число

$$\left(x_{n+2}-x_{n+1}\right)-\left(x_{n+1}-x_n\right)=\left(3(n+1)^2+3(n+1)+1\right)-$$
$$-\left(3n^2+3n+1\right)=6(n+1).$$

Но из трех чисел x_n, x_{n+1} и x_{n+2} ровно одно делится на 3 и хотя бы одно нечетно; значит, p делит $n+1$. С другой стороны, p делит $x_{n+1}=(n+1)^3+C$, откуда p делит C. Далее, поскольку число p делит $x_n=n^3+C$, то оно делит и n. Но НОД$(n+1,\ n)=1$. Противоречие.

б) Решение этого пункта содержится в решении пункта в).

в) Нет, не существует. Докажем это.

Любой общий простой делитель чисел n^3+C и $(n+1)^3+C$ делит также и число $27C^2+1$. Это доказывается непосредственно, с помощью алгоритма Евклида.

Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, при нечетном C число $27C^2+1$ четно. В то же время разность $x_{n+1}-x_n=3n(n+1)+1$ – число всегда нечетное.

Разберемся теперь, как обстоит дело с нечетными делителями; докажем вначале, что у любого числа $27C^2+1$, где C – натуральное, нечетный простой делитель есть.

Лемма. Уравнение $27C^2+1=2^k$ не имеет решений в натуральных числах.

Доказательство леммы. Очевидно, число C не может быть четным. При нечетном C воспользуемся следующим очевидным преобразованием:

$$27C^2+1=28C^2-(C-1)(C+1).$$

Число $(C-1)(C+1)$ делится на 8, а число $28C^2$ – не делится. Следовательно, $2^k\le 4$; но $27C^2+1\ge 28$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Покажем теперь, что любой нечетный простой делитель p числа $27C^2+1$ годится: существует такое $n(p)$, что и x_n, и x_{n+1} делятся на p. Чтобы показать это, нам будет удобнее оперировать не с самими числами, а с остатками, которые они дают при делении на p. При таком подходе числа, дающие один и тот же остаток при делении на фиксированное натуральное число m ($m\ge 2$), обычно отождествляют: их объединяют в единый «класс вычетов по модулю m». Обозначают это так: $a\equiv b \pmod m$. Очевидно, множество Z_m классов вычетов по модулю m содержит m элементов; в качестве представителей этих классов часто бывает удобно рассматривать остатки $0, 1, \ldots, m-1$.

При любом $m>1$ во множестве Z_m естественным образом вводятся операции сложения, умножения и вычитания. А в Z_p (p – простое) можно также и делить. Именно, любое сравнение $x\cdot a\equiv b \pmod p$, где $a\not\equiv 0 \pmod p$, имеет, и притом единственное, решение x; его и обозначают как $\frac{b}{a} \pmod p$.

Подробнее обо всем этом можно прочесть в статье А.Егорова и А.Котовой «Необыкновенные арифметики» (Приложение к журналу «Квант» №2 за 1994 год).

Как мы уже говорили, все вычисления мы будем проводить в Z_p, где p – нечетный простой делитель числа $27C^2+1$. Для сокращения записи мы будем сравнения заменять равенствами: вместо $a\equiv b \pmod p$ мы будем писать просто $a=b$. В частности, при такой записи будет

$27C^2 + 1 = 0.$
Заметим сразу, что $p > 3$.
Положим

$$n = -\frac{3C}{2} - \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Тогда

$$n(n+1) = \frac{9C^2}{4} - \frac{1}{4},$$

$$3n^2 + 3n + 1 = \frac{27C^2}{4} + \frac{1}{4} = 0. \qquad (2)$$

Далее,

$$3n^3 + 3n^2 + n = 0.$$

Из (2) и (1) следует, что

$$3n^2 + n = -2n - 1 = (3C + 1) - 1 = 3C.$$

Получили:

$$3n^3 + 3C = 0,$$

или

$$n^3 + C = 0. \qquad (3)$$

Последнее равенство означает, что x_n делится на p; сложив (3) с (2), получим, что на p делится и x_{n+1} – следующий член последовательности задачи.

В.Сендеров

Ф1688. *Автомобиль на прямой передаче (на четвертой скорости коробки передач) может на прямом шоссе развивать скорость от 50 км/ч до 140 км/ч. При скорости 70 км/ч расход бензина составляет 7 л на 100 км пробега; КПД двигателя не зависит от скорости. Сопротивление движению пропорционально квадрату скорости автомобиля. Емкость бензобака автомобиля 40 л, других емкостей для топлива в автомобиле нет. Два водителя (чтобы можно было ехать без перерывов) должны перегнать автомобиль на расстояние 2000 км; заправочные станции по пути расположены на расстояниях 200 км или 300 км друг от друга; перегоны разной длины строго чередуются. За какое минимальное время водители смогут проделать весь путь? Какое минимальное количество бензина можно потратить, если ехать помедленнее? Езда на пониженной передаче приводит к увеличению расхода бензина.*

Каждый из перегонов нужно проехать с максимально возможной скоростью, насколько позволит запас бензина. Для перегона длиной 200 км можно потратить 20 л на 100 км. Расход бензина пропорционален силе сопротивления движению; следовательно, на этом участке скорость будет равна $v_1 = \sqrt{20/7} \cdot 70$ км/ч ≈ 118 км/ч и время прохождения составит $T_1 = 200/118$ ч $\approx 1{,}7$ ч. Для участка длиной 300 км расход топлива на 100 км составит $40/3$ л $\approx 13{,}3$ л; значит, $v_2 = \sqrt{13{,}3/7} \cdot 70$ км/ч $\approx$ ≈ 97 км/ч и $T_2 \approx 3{,}1$ ч. Полное время путешествия (четыре участка по 200 км и четыре по 300 км) составит

$$T_{\text{общ}} = 4(T_1 + T_2) \approx 19{,}2 \text{ ч}.$$

Более точный расчет не имеет смысла делать – слишком много явных упрощений в условии задачи.

Для второго случая все ясно – ехать нужно на наименьшей возможной скорости, т.е. на 50 км/ч. Расход бензина при этом составит $7 \text{ л} \cdot 50^2/70^2 \approx 3{,}5$ л на 100 км, и всего понадобится

$$3{,}5 \text{ л} \cdot \frac{2000}{100} = 70 \text{ л}.$$

С.Варламов

Ф1689. *По гладкому горизонтальному столу свободно скользит прямая однородная палочка длиной L. В данный момент скорость одного из концов палочки равна v и составляет угол α с палочкой, а скорость другого конца по величине равна 2v. Найдите скорость центра палочки и ускорения ее концов.*

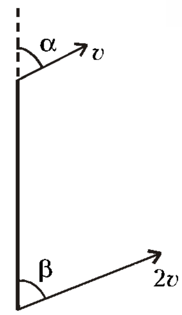


Рис.1

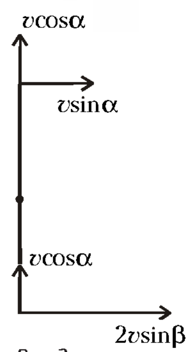


Рис.2

Из условия задачи ясно, что силы трения на палочку не действуют. Значит, центр масс (для однородной палочки – ее середина) движется с постоянной по величине и направлению скоростью и угловая скорость вращения палочки также неизменна.

Проекции скоростей концов палочки на ее направление должны быть равны друг другу в любой момент, поэтому (рис.1)

$$v\cos\alpha = 2v\cos\beta, \text{ и } \cos\beta = \frac{1}{2}\cos\alpha.$$

На рисунке 2 скорости концов палочки разложены на удобные направления – вдоль палочки и перпендикулярно ей. Скорость центра тоже выразим через ее проекции. Вдоль палочки это $v\cos\alpha$, а перпендикулярно ей –

$$\frac{v\sin\alpha + 2v\sin\beta}{2} = v\left(\frac{1}{2}\sin\alpha + \sqrt{1 - \frac{1}{4}\cos^2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}v\left(\sin\alpha + \sqrt{4 - \cos^2\alpha}\right).$$

Теперь легко найти угловую скорость вращения палочки. Поскольку скорость «верхнего» конца относительно центра равна $\frac{1}{2}v\left(\sqrt{4 - \cos^2\alpha} - \sin\alpha\right)$, угловая скорость равна

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}v\left(\sqrt{4 - \cos^2\alpha} - \sin\alpha\right)}{\frac{1}{2}L} = \frac{v\left(\sqrt{4 - \cos^2\alpha} - \sin\alpha\right)}{L}.$$

Ускорения концов одинаковы и составляют

$$\omega^2\frac{L}{2} = \frac{v^2\left(\sqrt{4 - \cos^2\alpha} - \sin\alpha\right)^2}{2L}.$$

А.Палочкин

Ф1690. *Небольшое тело бросают параллельно поверхности Земли с высоты 1 км. Определите, где находится точка падения тела на Землю, если его скорость на 1%*

меньше первой космической скорости. Можно считать Землю идеальным шаром, на котором нет атмосферы.

Пусть тело движется по круговой орбите с практически неизменной скоростью – это разумное упрощение, учитывая очень малое изменение расстояния до центра Земли. Выберем малый интервал времени τ и вычислим уменьшение расстояния от тела до центра Земли за это время. Тело «падает» с ускорением g и смещается «вбок» со скоростью $v = 0{,}99v_1$, где v_1 – первая космическая скорость. Если бы мы бросили тело, придав ему первую космическую скорость, то в результате оно вовсе не приближалось бы к центру и не удалялось от него. В нашем случае квадрат нового расстояния до центра составит

$$\left(R - 0{,}5g\tau^2\right)^2 + (v\tau)^2 = R^2 - Rg\tau^2 + 0{,}25g^2\tau^4 + \left(0{,}99v_1\tau\right)^2.$$

С учетом малости интервала времени τ, а также используя известное соотношение для первой космической скорости $v_1^2 = gR$, получим изменение расстояния до центра Земли:

$$\Delta R = 0{,}5g\tau^2\left(1 - 0{,}99^2\right).$$

Видно, что движение «вниз» – это просто равноускоренное движение с ускорением $a = 0{,}02g$. Время падения с этим ускорением с высоты $H = 1000$ м составит $\sqrt{2H/a} \approx$ ≈ 100 с, при этом тело пролетит вдоль окружности примерно 800 км.

З.Рафаилов

Ф1691. *Динамометр состоит из подставки и прикрепленной к ней однородной пружинки втрое меньшей массы. Один крючок динамометра соединен с подставкой, другой – со свободным концом пружинки. Два таких динамометра соединены «последовательно» – сцеплены двумя крючками, а внешние силы приложены к свободным крючкам. Приложим к этим крючкам противоположно направленные силы $\vec{F}$ и $\vec{f}$ – динамометры поедут по гладкой горизонтальной плоскости, вытянувшись вдоль линии действия сил. Считая, что пружинки не касаются витками оснований динамометров, определите показания приборов.*

Разберем вначале хорошо известную задачу о растяжении массивной пружинки, которую тянут за концы в противоположные стороны силами F_1 и F_2. При равенстве этих сил, т.е. когда $F_1 = F_2 = F$, удлинение пружинки жесткостью k равно $x = F/k$. При неравных силах – пусть для определенности $F_2 > F_1$ – найти растяжение сложнее, так как разные части пружинки будут растянуты неодинаково. Разобьем (мысленно) пружинку на большое число N одинаковых кусочков (можно было бы рассмотреть в качестве этих кусочков отдельные витки, но если число витков невелико, то подойдут и части витков). Жесткость каждого такого кусочка будет kN. Для части пружинки, содержащей n кусочков (рис.1) запишем

$$F_2 - T_n = nma = n\frac{M}{N}\frac{F_2 - F_1}{M} = n\frac{F_2 - F_1}{N},$$

$$T_n = F_2 - n\frac{F_2 - F_1}{N}.$$

Суммируя удлинения кусочков, для всей пружинки

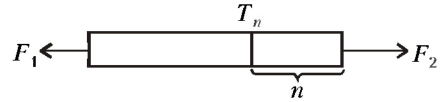


Рис.1

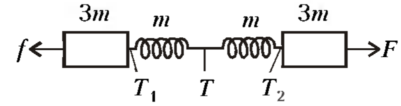


Рис.2

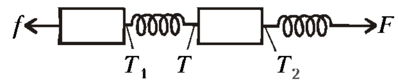


Рис.3

Рис.4

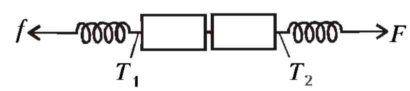


Рис.5

получим

$$x = \sum_1^N x_i = \sum_1^N \frac{T_i}{kN} = \frac{1}{kN}\left(\sum_1^N F_2 - \sum_1^N n\frac{F_2 - F_1}{N}\right) =$$

$$= \frac{1}{kN}\left(NF_2 - \frac{F_2 - F_1}{N}\frac{N(N+1)}{2}\right) = \frac{F_1 + F_2}{2k}$$

(мы учли, что $N \gg 1$ и $N(N+1)/2 \approx N^2/2$). Видно, что растяжение массивной пружинки определяется полусуммой растягивающих сил. Динамометр с такой пружинкой может двигаться и с ускорением, но его показания определяются именно деформацией пружинки.

Теперь рассмотрим различные варианты соединения динамометров (обозначения ясны из соответствующих рисунков).

1) Для схемы на рисунке 2 запишем

$$T - f = (3m + m)a = 4m\frac{F - f}{8m},\quad T = \frac{F + f}{2},$$

$$T_1 - f = 3m\frac{F - f}{8m},\quad T_1 = \frac{3}{8}F + \frac{5}{8}f.$$

Растяжение первой (левой) пружинки равно

$$\frac{T_1 + T}{2k} = \frac{1}{k}\left(\frac{9}{16}f + \frac{7}{16}F\right),$$

показания первого динамометра –

$$\frac{T_1 + T}{2} = \frac{9}{16}f + \frac{7}{16}F.$$

Аналогично,

$$T_2 = \frac{3}{8}f + \frac{5}{8}F,\quad \frac{T_2 + T}{2k} = \frac{1}{k}\left(\frac{7}{16}f + \frac{9}{16}F\right),$$

показания второго (правого) динамометра –

$$\frac{T_2 + T}{2} = \frac{7}{16}f + \frac{9}{16}F.$$

2) Для схемы на рисунке 3 –

$$T = \frac{f + F}{2},\quad T_1 - f = \frac{3}{8}(F - f),\quad T_1 = \frac{5}{8}f + \frac{3}{8}F,$$

$$F - T_2 = \frac{1}{8}(F - f),\quad T_2 = \frac{7}{8}F + \frac{1}{8}f.$$

Показания первого динамометра –

$$\frac{T_1+T}{2}=\frac{9}{16}f+\frac{7}{16}F,$$

второго –

$$\frac{T_2+F}{2}=\frac{1}{16}f+\frac{15}{16}F.$$

3) Для схемы на рисунке 4 можно использовать ответы случая 2), поменяв местами силы F и f.

4) Наконец, для схемы на рисунке 5 получаем

$$T_1-f=\frac{1}{8}(F-f),\ T_1=\frac{1}{8}F+\frac{7}{8}f,$$

$$F-T_2=\frac{1}{8}(F-f),\ T_2=\frac{7}{8}F+\frac{1}{8}f.$$

Показания первого динамометра –

$$\frac{f+T_1}{2}=\frac{15}{16}f+\frac{1}{16}F,$$

второго –

$$\frac{F+T_2}{2}=\frac{1}{16}f+\frac{15}{16}F.$$

С.Варлберман

Ф1692. *Поверхность планеты, имеющей такие же размеры, массу и состав атмосферы, как Земля, была полностью покрыта океаном с одинаковыми повсюду глубиной 230 м и температурой +10 °С. В результате внутренних процессов температура поднялась повсюду до +100 °С, однако глубина океана осталась прежней. Считая, что размеры твердой части планеты совершенно не изменились при нагревании, определите средний коэффициент объемного расширения воды в указанном диапазоне температур.*

При температуре +100 °С давление насыщенных паров воды равно 1 атм $\approx 10^5$ Па – такое давление создает столб воды высотой 10 метров. При начальной температуре +10 °С давление насыщенных паров во много раз меньше 1 атм. Будем считать, что испарившееся количество воды создает давление 1 атм, т.е. испарился слой воды, занимавший до нагревания «верхние» 10 метров океана (толщина атмосферы во много раз меньше радиуса планеты, поэтому при испарении вес этого количества воды не изменился).

Итак, при нагревании оставшийся слой воды толщиной 220 м расширился и скомпенсировал испарившийся объем. Коэффициент теплового расширения определяется отношением приращения объема к начальному объему при увеличении температуры на один градус. Средний коэффициент теплового объемного расширения воды в указанном диапазоне температур будет равен

$$\alpha=\frac{\Delta V}{V\Delta T}=\frac{10}{230\cdot 90}\frac{1}{\text{град}}\approx 5\cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\text{град}}.$$

С.Варламов

Ф1693. *Лампочка для фонаря рассчитана на напряжение 2,5 В, ток при этом составляет 0,2 А. В нашем распоряжении имеются мощный источник напряжением 6 В и реостат на 10 Ом (у реостата сделаны выводы от краев обмотки и от движка, который может контактировать с любым витком, – такой прибор часто называют потенциометром). Как присоединить лампочку к источнику, чтобы она горела нормально? Где должен находиться движок реостата?*

Не получится просто соединить последовательно лампочку и реостат – максимальное его сопротивление 10 Ом и при токе 0,2 А он «погасит» только $10\cdot 0{,}2$ В = 2 В, а нужно «погасить» не менее 6 В – 2,5 В = 3,5 В. Ясно, что часть потенциометра должна быть подключена параллельно лампочке, чтобы ток в цепи увеличился и оставшаяся часть потенциометра смогла «погасить» необходимые 3,5 В.

Обозначим сопротивление параллельной части x, тогда последовательная составит $10-x$. Ток через параллельную часть при напряжении 2,5 В составляет $2{,}5/x$, вместе с током лампочки будет $0{,}2+2{,}5/x$. Получим простое уравнение

$$\left(0{,}2+\frac{2{,}5}{x}\right)(10-x)=3{,}5,$$

или, после преобразований,

$$0{,}2x^2+4x-25=0.$$

Положительный корень этого уравнения равен $x=5$. Это означает, что движок потенциометра установлен как раз посередине реостата.

М.Учителев

Ф1694. *В компьютерной модели атома водорода все размеры и заряды частиц увеличили в N раз. Считая, что плотность «вещества» частиц в модели сохранена, определите, во сколько раз изменится период обращения «электрона» вокруг «ядра». И еще: известно, что в атоме Резерфорда электрон излучает электромагнитные волны и, теряя энергию, должен упасть на ядро через малое время τ. Оцените время падения «электрона» на «ядро» в увеличенной модели.*

Масса «электрона» (и «ядра» атома) в этой модели увеличится в N^3 раз. Запишем уравнение второго закона Ньютона для электрона, который вращается вокруг ядра по круговой орбите радиусом R:

$$\frac{mv^2}{R}=k\frac{Qq}{R^2}.$$

Отсюда

$$v=\sqrt{\frac{kQq}{mR}}\ \text{ и }\ T=\frac{2\pi R}{v}=2\pi\sqrt{\frac{mR^3}{kQq}}.$$

При увеличении всех размеров и зарядов в N раз получим

$$T^*=2\pi\sqrt{\frac{\left(mN^3\right)\left(RN\right)^3}{kQqN^2}}=TN^2,$$

т.е. период обращения «электрона» увеличится в N^2 раз. Легко видеть, что кинетическая энергия «электрона» в увеличенной модели будет равна

$$\frac{m^*v^{*2}}{2}=k\frac{Q^*q^*}{2R^*}=k\frac{Qq}{2R}N,$$

т.е. возрастет в N раз, а его ускорение будет

$$a^*=\frac{v^{*2}}{R^*}=\frac{kQ^*q^*}{m^*R^{*2}}=k\frac{Qq}{mR^2}\frac{N^2}{N^3N^2}=a\frac{1}{N^3},$$

т.е. уменьшится в N^3 раз. Излучаемая при ускоренном движении заряда мощность пропорциональна величине этого заряда и квадрату его ускорения (если это вам не известно, то можно воспользоваться методом размерностей и проверить сказанное). Итак, излучаемая в модели мощность будет равна

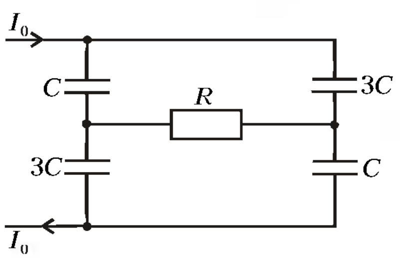
$$P^* = P\frac{N}{N^6} = \frac{P}{N^5}$$

и энергия «электрона» будет израсходована за время

$$\tau^* = \tau\frac{N^5}{N} = \tau N^4.$$

А.Зильберман

Ф1695. *В схеме на рисунке конденсаторы вначале не заряжены. Напряжение во внешней цепи непрерывно изменяют так, чтобы ток в этой цепи оставался равным I_0. Какое количество теплоты выделяется в резисторе за время T?*



Вначале решим задачу приближенно. Если с момента включения прошло немного времени, конденсаторы зарядились до небольших напряжений и ток через резистор мал. Тогда этим током можно просто пренебречь, а цепочки конденсаторов считать разделенными. При этом в каждую цепочку течет половинный ток, т.е. $0{,}5I_0$, и напряжение каждой цепочки, а значит и напряжение источника, растет со временем по закону

$$U(t) = \frac{0{,}5I_0 t}{C_{\text{общ}}} = \frac{2I_0 t}{3C}.$$

Это соотношение остается справедливым при малом токе через резистор, а ток определяется напряжением в диагонали «мостика» из конденсаторов – при малом токе напряжение составляет половину приложенного к схеме напряжения $U(t)$ (напряжение конденсатора емкостью C составляет три четверти этого напряжения, а конденсатора емкостью $3C$ – одну четверть). Тогда условие для малости тока резистора запишется в виде

$$\frac{0{,}5U(t)}{R} = \frac{I_0 t}{3RC} \ll I_0,$$

а для времени –

$$t \ll 3RC,$$

где R – сопротивление резистора.

Через достаточно большое время после включения цепи (т.е. при $t \gg RC$) ток через резистор практически перестанет увеличиваться (его величина монотонно возрастает, но ограничена сверху). Это означает, что напряжения конденсаторов емкостями C и $3C$ за одинаковые интервалы увеличиваются одинаково и отношение токов равно отношению емкостей. Следовательно, ток зарядки конденсатора емкостью C (точнее, двух таких конденсаторов – ясно, что в данной симметричной схеме одинаковые конденсаторы заряжаются одинаково) равен $0{,}25I_0$, а ток конденсатора емкостью $3C$ составляет $0{,}75I_0$. За время Δt напряжение схемы увеличится на $2\cdot 0{,}25I_0\,\Delta t/C$. Если начальным напряжением схемы пренебречь – вначале напряжение нарастало примерно с такой же скоростью, но в течение короткого времени, – то можно считать

$$U(t) = \frac{0{,}5I_0 t}{C}.$$

Ток через резистор при этом составит $0{,}5I_0$, и за большой интервал времени T на резисторе выделится в виде тепла энергия

$$W = 0{,}25I_0^2RT.$$

Получим теперь точное решение задачи. Введем обозначения: q – заряд конденсатора емкостью C, J – ток зарядки этого конденсатора, Q – заряд конденсатора емкостью $3C$, $(I_0 - J)$ – его ток зарядки. Ток I резистора определяется разностью напряжений «нижних» конденсаторов:

$$\frac{q}{C} - \frac{Q}{3C} = IR = (I_0 - 2J)R.$$

Приравняем производные левой и правой частей этого уравнения и учтем при этом, что $q' = J$, $Q' = I_0 - J$:

$$\frac{J}{C} - \frac{I_0 - J}{3C} = -2J'R.$$

После простых преобразований получим

$$-1{,}5RCJ' = J - 0{,}25I_0.$$

Избавимся от постоянной добавки в правой части уравнения – вместо переменной величины J возьмем $J_1 = J - 0{,}25I_0$ (производная при этом не изменится, но уравнение станет проще, а потом мы эту поправку «учтем назад»):

$$J_1' = \frac{J_1}{-1{,}5RC}.$$

Если вы умеете решать такие уравнения, то очень хорошо, а если нет – будем решать его вместе.

Итак, что это за функция времени, которая при взятии от нее производной остается самою собой, но появляется множитель $1/(-1{,}5RC)$? Таким свойством, как известно, обладает экспонента:

$$J_1(t) = A\exp\left(\frac{t}{-1{,}5RC}\right).$$

Величину множителя A найдем, пользуясь начальным значением найденной функции. В «приближенном» решении мы установили, что сразу после включения цепи ток зарядки конденсатора меньшей емкости $J(0)$ равен половине тока I_0, тогда

$$A = 0{,}5I_0 - 0{,}25I_0 = 0{,}25I_0.$$

Теперь запишем полученное выражение для тока зарядки конденсатора:

$$J(t) = 0{,}25I_0\left(1 + \exp\left(\frac{t}{-1{,}5RC}\right)\right).$$

Дальше мы найдем заряд конденсатора емкостью C как функцию времени – для этого достаточно проинтегрировать по времени полученное выражение для тока:

$$q(t) = \frac{0{,}25I_0 t}{C} + 0{,}25I_0\left(1{,}5RC - 1{,}5RC\exp\left(\frac{t}{-1{,}5RC}\right)\right).$$

Легко проверить, что это выражение «превращается» при малых временах в половину тока I_0, а при больших – в четверть этого тока. Для получения окончательного ответа не нужно проделывать те же операции для большого конденсатора – суммарный ток мы знаем, а заряд конденсатора емкостью $3C$ найдем по формуле

$$Q(t) = I_0 t - q(t).$$

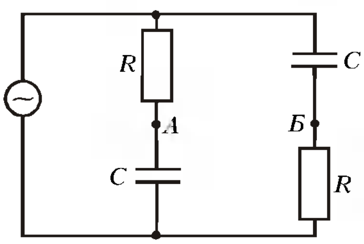
Напряжение источника равно сумме напряжений двух разных конденсаторов:

$$U(t) = \frac{q(t)}{C} + \frac{Q(t)}{3C} = \frac{q(t)}{C} + \frac{I_0 t - q(t)}{3C} = \frac{I_0 t}{3C} + \frac{2q(t)}{3C}.$$

Подставив в эту формулу выражение для заряда конденсатора C, мы получим окончательный вид зависимости $U(t)$. Для нахождения точного ответа на вопрос о выделившемся количестве теплоты можно записать выражение для мгновенной тепловой мощности $P(t) = \left(I_0 - 2J(t)\right)^2 R$ и проинтегрировать его на интервале $(0 - T)$ – это не очень сложно, но мы все же ограничимся приближенным ответом...

А.Теплов

Ф1696. *Цепь из двух конденсаторов емкостью по 10 мкФ и двух резисторов сопротивлением по 1 кОм (см. рисунок) подсоединена к источнику переменного напряжения 220 В, 50 Гц. Что покажет вольтметр, включенный между точками А и Б? А если вместо вольтметра подключить амперметр – какой ток он покажет? А если включить в цепь ваттметр, подсоединив высокоомную его обмотку (обмотку напряжения) непосредственно к источнику, а низкоомную (токовую) к точкам А и Б, – что он покажет?*



Вольтметр, подключенный к точкам A и $Б$ цепи, покажет 220 В. Действительно, его показания равны разности напряжений конденсатора и резистора – с учетом фазового сдвига 90°. Сумма этих двух напряжений равна напряжению сети 220 В, а при таком фазовом сдвиге сумма и разность векторов равны по величине (это получается только при одинаковых парах элементов в цепи – мы прибавляем к напряжению на резисторе напряжение одного из конденсаторов, а вычитаем напряжение другого конденсатора).

С амперметром немного сложнее. Считая его сопротивление очень малым, получаем два одинаковых блока «резистор – конденсатор», соединенных последовательно. Напряжение на каждом из блоков равно половине напряжения сети, тогда ток любого резистора равен I_R = 110 В/1000 Ом = 0,11 А. Ток конденсатора найдем, воспользовавшись величиной его реактивного сопротивления $X = 2\pi fC$ = 318 Ом, – он составит 110 В/318 Ом ≈ 0,35 А. С учетом сдвига фаз найдем ток через амперметр:

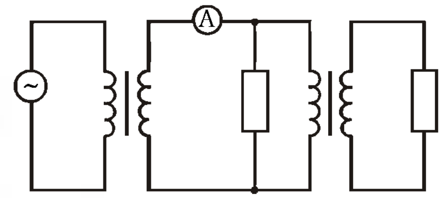
$$I_A = \sqrt{0{,}11^2 + 0{,}35^2}\ \text{А} \approx 0{,}36\ \text{А}.$$

Показания ваттметра определяются средним по времени значением произведения тока низкоомной обмотки, включенной как амперметр (действующее значение этого тока $I_A \approx 0{,}36$ А), и напряжения высокоомной обмотки (действующее значение U = 220 В). В нашем случае токи резисторов совпадают по фазе с напряжением сети, ток низкоомной обмотки сдвинут по фазе на угол $\varphi = \arccos\left(I_R/I_A\right)$. Тогда среднее значение произведения напряжения и тока составит

$$UI_A \cos\varphi = UI_A I_R/I_A = UI_R = 220\ \text{В} \cdot 0{,}11\ \text{А} = 24{,}2\ \text{Вт}.$$

З.Рафаилов

Ф1697. *Каждый из двух одинаковых трансформаторов имеет две многовитковые обмотки, в одной из которых витков вдвое больше, чем в другой. Трансформаторы соединены между собой так, как показано на рисунке (никаких дополнительных подробностей нет!), и подключены к сети переменного напряжения 220 В. Что может показывать в этой схеме амперметр? Сердечники трансформаторов сделаны из материала с очень большой магнитной проницаемостью, потерь энергии в трансформаторах нет. Сопротивления резисторов – по 1 кОм каждое.*



Тут возможны четыре различные схемы подключения обмоток трансформаторов: 1) оба трансформатора понижающие, 2) оба повышающие, 3) первый понижающий, второй повышающий и 4) первый повышающий, второй понижающий. В случае 1) напряжение на первом резисторе 110 В, на втором 55 В. Ток через амперметр совсем просто найти из энергетических соображений:

$$\frac{U}{2} I_1 = \frac{(U/2)^2}{R} + \frac{(U/4)^2}{R},$$

откуда

$$I_1 = \frac{220}{1000} \cdot \frac{5}{8}\ \text{А} = \frac{11}{80}\ \text{А} = 131{,}5\ \text{мА}.$$

В случае 2) получаем уравнение

$$2UI_2 = \frac{(2U)^2}{R} + \frac{(4U)^2}{R},$$

откуда

$$I_2 = \frac{440}{1000}\ \text{А} + \frac{1760}{1000}\ \text{А} = 2{,}2\ \text{А}.$$

В случае 3)

$$\frac{U}{2} I_3 = \frac{(U/2)^2}{R} + \frac{U^2}{R},\ \text{и}\ I_3 = \frac{110}{1000}\ \text{А} + \frac{440}{1000}\ \text{А} = 0{,}55\ \text{А}.$$

В случае 4)

$$2UI_4 = \frac{(2U)^2}{R} + \frac{U^2}{R},\ \text{и}\ I_4 = \frac{440}{1000}\ \text{А} + \frac{110}{1000}\ \text{А} = 0{,}55\ \text{А}.$$

Р.Александров

Задачи

1. Имеются две деревянные палочки. Разрешается прикладывать палочки друг к другу и делать засечки на любой из них. Как узнать – что больше: длина первой палочки или $\frac{2}{3}$ длины второй?

О.Червяков

2. 5 вершин правильного 110-угольника покрасили в красный цвет, а 11 его вершин – в синий цвет так, что красные точки оказались вершинами правильного

5-угольника, а синие – вершинами правильного 11-угольника. Докажите, что у 110-угольника есть сторона, концы которой окрашены в красный и синий цвета.

В.Произволов

3. В ознаменование окончания учебного года Миша решил вырвать из своего учебника математики все листы, сумма номеров страниц на обеих сторонах каждого из которых является квадратом целого числа, а Гриша собрался удалить все листы, для которых эта

сумма является кубом целого числа. Кто из них нанесет учебнику больший ущерб?

И.Акулич

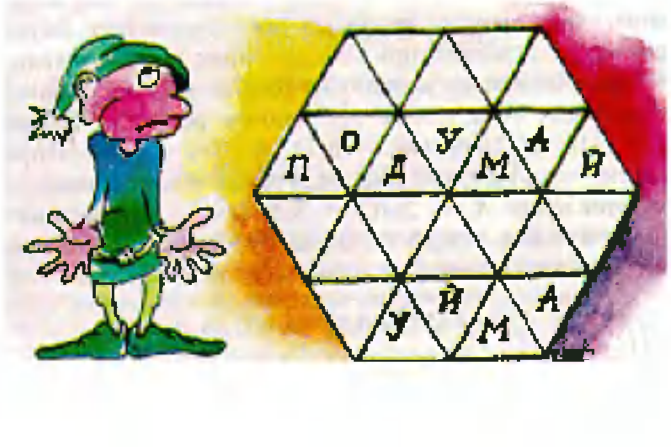
4. а) Существует ли такая развертка куба $1\times1\times1$, четырьмя экземплярами которой можно оклеить куб $2\times2\times2$?

б) А такая, двумя экземплярами которой можно оклеить куб $\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$?

С.Токарев

5. Расставьте в пустые треугольные ячейки шестиугольника буквы П, О, Д, У, М, А, Й так, чтобы ни в одной полоске каждого из трех направлений не было одинаковых букв.

Н.Авилов



Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Победители конкурса будут награждены грамотами и призами журнала.

6. Иногда на обложках тетрадей взамен таблицы умножения печатают «Таблицу Пифагора» – квадратную таблицу размером 8×8, строкам и столбцам которой присвоены номера от 2 до 9, а на пересечении каждой строки и столбца стоит произведение их номеров. Можно ли вычеркнуть из этой таблицы несколько строк и столбцов так, чтобы сумма оставшихся незачеркнутыми чисел была простым числом? А сумма зачеркнутых чисел?

И.Акулич

7. В треугольнике ABC с длинами сторон $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $a \ge b \ge c$, взята точка O. Докажите, что существует вершина треугольника, расстояние от которой до точки O не превосходит $\frac{b}{\sqrt{2}}$.

В.Сендеров

8. Числа a, b, $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ рациональные, а число $\sqrt[3]{a}$ иррациональное. Докажите, что $a + b = 0$.

В.Сендеров

9. По кругу записаны n натуральных чисел, при этом каждые два соседних числа различаются на 1. Назовем число значительным, если оба соседа меньше его; сумма всех значительных чисел равна M. Назовем число незначительным, если оба соседа больше его; сумма всех незначительных чисел равна m. Докажите равенство $n = 2(M - m)$.

В.Произволов

10. Найдите все такие натуральные числа, каждое из которых ровно в 100 раз превышает количество своих делителей.

А.Жуков

Победители конкурса «Математика 6–8» 1998 года

Лучших результатов в конкурсе добились следующие школьники:

Штомпель Андрей – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Томин Дмитрий – Иваново, лицей «Гармония», 7 кл.,
Голубов Алексей – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Клапчук Мария – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Аввакумов Сергей – Севастополь, гимназия 7, 7 кл.,
Грук Андрей – Набережные Челны, школа 15, 8 кл.,
Жданов Роман – Краснодар, школа 3, 8 кл.,
Дятлов Семен – Новосибирск, гимназия 3, 6 кл.,
Белов Дмитрий – Иваново, школа-лицей 33, 7 кл.,
Гордон Дмитрий – Харьков, гимназия 452, 7 кл.,
Ляхов Федор – Нижний Новгород, школа 140, 8 кл.,
Гайфуллин Сергей –Жуковский, школа 10, 7 кл.,
Калитка Владислав – Краснодар, школа 39, 8 кл.,
Смирнов Илья – Королев Московской обл., лицей научно-инженерного профиля, 8 кл.,
Ятченко Артем – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Красильников Павел – Краснодар, школа 2, 8 кл.

и кружки:

школы «Поиск» при Центре дополнительного образования, Чебоксары, руководитель *С.А.Иванов*,
«Эврика», ФМЛ 27, Харьков, руководители *Е.Л.Аринкина, А.Л.Берштейн, В.Я.Крупчицкий*,
гимназии 26, Набережные Челны, руководитель *Л.В.Баева*,
группы продленного дня школы 27, Чебоксары, руководитель *А.В.Монов*,
при Ивановском энергетическом университете, Иваново, руководитель *С.И.Токарев*,
школы-лицея 90, Краснодар, руководитель *З.А.Дегтярева*,
школы 1 п. Кузоватово Ульяновской обл., руководитель *Н.К.Ермолаев*,
Вихаревской школы Кильмезского р-на Кировской обл., руководитель *О.М.Мальцева*,
гимназии 10, Тобольск, руководитель *А.А.Кугаевский*,
школы 51, Комсомольск-на-Амуре, руководители *Р.В.Голобонова, М.А.Зенкова*,
«Эрудит», ФМШ 32, Астрахань, руководитель *А.В.Забалуева*,
Четверговой математической школы при ОмГУ, Омск, руководитель *А.Н.Перцева*,
школы 33, Самара, руководитель *А.А.Гусев*,
«Пифагор», школа-гимназия 1, Петровск-Забайкальский Читинской обл., руководитель *И.О.Путинцева*.

Жюри конкурса отмечает также хорошие работы следующих школьников:

Халявина Андрея – Киров, ФМЛ, 8 кл.,
Кощеева Михаила – Мегион Тюменской обл., школа 4, 8 кл.,
Медового Александра – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Зинченко Дмитрия – Санкт-Петербург, ФМГ 30, 7 кл.,
Цимбалюка Александра – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Вершининой Анны – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Деркач Марии – Калуга, школа-гимназия 24, 8 кл.

и кружков:

при Самарском муниципальном университете Наяновой, руководители *В.С.Исаханова, А.Н.Савин*;
ФМШ-Л 64, Омск, руководитель *Т.А.Углирж*;
«Айсберг», школа 44, Норильск, руководитель *Р.Д.Мирзоев*.

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Как подпрыгнуть выше крыши» предназначена девятиклассникам, заметка «Паровой скалолаз, или Термодинамика для альпиниста» – десятиклассникам, «Зачем закрывать отверстие, или Открытие линзы» — одиннадцатиклассникам.

Как подпрыгнуть выше крыши

А.СТАСЕНКО

Выше носа не прыгнешь.

Устаревший экспериментальный факт

Что значит подпрыгнуть? Это сложнейший процесс, сопровождающийся приседанием, распрямлением, отталкиванием носками... и в конце концов приземлением – по возможности «мягким». О прыгании написаны, вероятно, сотни или даже тысячи диссертаций учеными медицинских и физкультурных наук. А сколько рекордов!

У нас более скромная цель: всего лишь подпрыгнуть выше крыши; поэтому нужна простая физическая модель.

Слово «подпрыгнуть» означает, очевидно, отсутствие разбега. Предположим, мы можем в прыжке поднять свой центр масс на высоту $y_m \sim 1$ м над обычным положением (стоя). Поскольку движение происходит в постоянном поле тяготения Земли, легко найти начальную скорость (в момент отрыва):

$$v_0 = \sqrt{2gy_m} \sim 4{,}5 \text{ м/с}$$

и время полета (от отрыва до касания земли):

$$t_0 = 2\sqrt{\frac{2y_m}{g}} \sim 1 \text{ с}.$$

Здесь мы применили хорошо известные законы для движения точечной массы с постоянным ускорением и, конечно, воспользовались очень приятным упрощающим предположением: «сопротивлением воздуха пренебречь».

Но как наш центр масс приобретает скорость v_0? Присев, мы затем распрямляемся в течение некоторого времени τ за счет энергетических затрат собственного организма, так что к моменту отрыва от земли наше тело массой m_0 приобретает кинетическую энергию $m_0 v_0^2/2$. Этот процесс можно изобразить качественно в виде штриховых кривых на рисунке 1.

Но этак слишком высоко не прыгнешь. И тут приходит мысль о Винни-Пухе, который догадался использовать воздушный шарик, чтобы добраться до меда на дереве. Последуем его примеру.

Наполним шар легким газом – водородом плотностью $\rho_V = \frac{2}{29}\rho_0$, где ρ_0 – плотность воздуха. Масса газа в объеме шара равна $m_V = V\rho_V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_V$, где r – радиус шара. Но и оболочка шара обладает какой-то массой, а именно $m_S = 4\pi r^2 \sigma$, где σ – поверхностная плотность оболочки. Поэтому теперь при распрямлении придется разгонять не только собственную массу, но еще и массу оболочки m_S, и массу водорода в оболочке m_V. И это еще не все. Оказывается, при ускорении любого тела в воздухе (любом другом газе или жидкости) приходится приводить в ускоренное движение и определенную массу окружающей среды – так называемую присоединенную массу. Этот факт качественно отражен на рисунке 2: при перемещении шара вверх закращенный вверху объем воздуха должен как-то очутиться внизу. Если предположить,

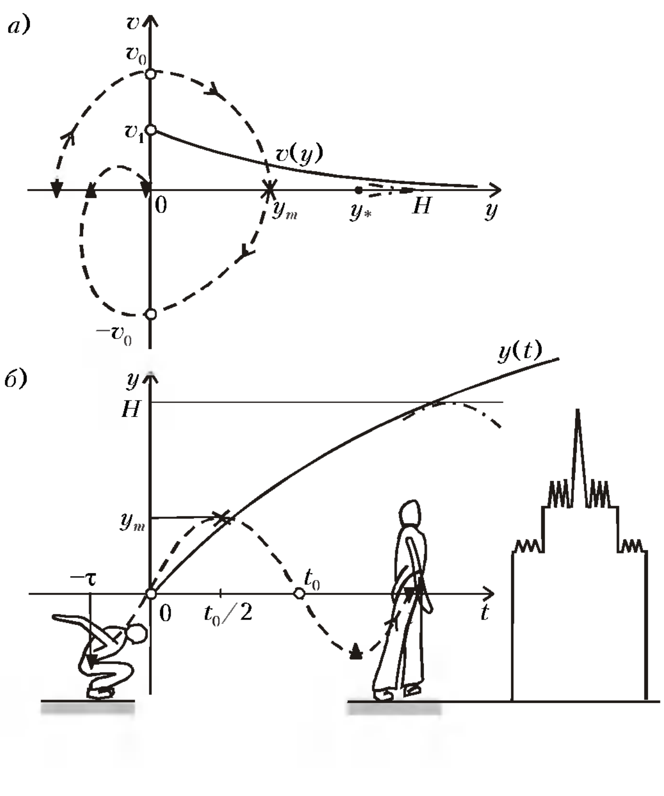


Рис. 1

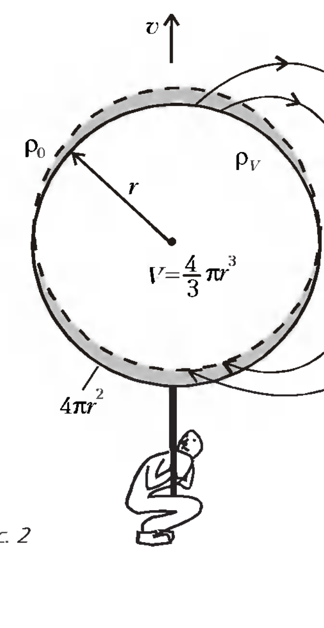


Рис. 2

что наш шарик не деформируется, эта присоединенная масса оказывается в точности равной половине массы воздуха в объеме шарика: $m_* = \rho_0 V/2$.

Таким образом, желающему подпрыгнуть вместе со всем этим устройством нужно будет ускорить суммарную массу $m = m_0 + m_V + m_S + m_*$. Это явно не легче. Да еще придется преодолевать силу сопротивления воздуха шарику, которой теперь уже никак пренебречь нельзя. Эта сила сопротивления пропорциональна площади поперечного сечения шарика, плотности воздуха и квадрату скорости движения. Это легко устанавливается из соображений размерности, а безразмерный коэффициент пропорциональности можно измерить экспериментально. В результате получим

$$F_c = \frac{\pi}{4}\rho_0 r^2 v^2$$

(проверьте, по крайней мере, размерность). И конечно, надо добавить еще подъемную силу Архимеда, равную $\rho_0 V g$.

Итак, запишем закон движения (второй закон Ньютона) прыгуна в воздухе:

$$ma = -(m_0 + m_V + m_S)g + \rho_0 V g - \frac{\pi}{4}\rho_0 r^2 v^2 . \quad (1)$$

Но, подобно ситуации с Винни-Пухом, в состоянии покоя, когда скорость и ускорение равны нулю, сила Архимеда должна уравновешивать силу притяжения Земли, так что уравнение (1) примет вид

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_0 - \rho_V) = m_0 + 4\pi r^2 \sigma$$

(любопытно, что при этом условии суммарная инертная масса, которая будет играть роль при ускоренном движении, становится равной $3m_*$).

Если заданы m_0 и σ, получаем кубическое уравнение для определения радиуса шара (желающий да решит его). В частности, отсюда легко найти наименьшее значение этого радиуса. Предположим, что оболочка невесома: $\sigma = 0$. Тогда

$$r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi(\rho_0 - \rho_V)}} .$$

Принимая массу школьника или студента (перед обедом) $m_0 = 50$ кг, а плотность воздуха $\rho_0 = 1$ кг/м^3, получим

$$r_{\min} \approx 2{,}3 \text{ м} .$$

Очевидно, что для подъема весомой оболочки придется увеличить объем шара, добавив еще легкого газа.

Если предположить, что в любом случае прыгун располагает одним и тем же запасом энергии

$$\frac{1}{2}m_0 v_0^2 = \frac{1}{2}m v_1^2 ,$$

то в момент отрыва от земли будет достигнута явно меньшая скорость (см. рис.1,*а*):

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{m_0}{m}} < v_0 .$$

И даже меньшая этой, если учесть еще и затраты энергии на преодоление сопротивления воздуха в процессе распрямления.

И вот мы оттолкнулись от земли и движемся вверх. В уравнении движения осталась только сила сопротивления воздуха:

$$ma = -\frac{\pi}{4}\rho_0 r^2 v^2 . \quad (2)$$

Но что такое ускорение? Это изменение скорости со временем: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. А что такое скорость? Это изменение перемещения со временем: $v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$. Отсюда для ускорения получим выражение

$$a = v\frac{\Delta v}{\Delta y} .$$

Подставим его в уравнение (2) и сократим на v:

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} = -\frac{\pi}{4}\frac{\rho_0 r^2}{m} v .$$

Можно переписать это уравнение так, чтобы обе его части стали безразмерными:

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta y}{y_*} , \quad (3)$$

где величина $y_* = \frac{4m}{\pi\rho_0 r^2}$ имеет, очевидно, размерность длины. И очевидно, что это не случайный масштаб: он характеризует *темп* изменения скорости с расстоянием. На этом расстоянии скорость заметно изменяется – например, в два раза; точнее, в три раза; еще точнее, в 2,7 раза. Но сейчас это не столь важно. Можно проанализировать уравнение (3) и не решая его.

Прежде всего видно, что скорость убывает с высотой: об этом говорит знак «минус». Далее видно, что эта убыль скорости тем меньше, чем меньше сама скорость. Когда же скорость стремится к нулю, то и ее «приращение» (отрицательное) тоже стремится к нулю. Значит, график $v(y)$ подходит к оси y все ближе, никогда не достигая ее при любом конечном значении y (см. сплошную кривую на рисунке 1,*а*). Получается, что мы все время будем двигаться вверх, правда все медленнее, но нигде не останавливаясь. В итоге зависимость высоты от времени будет иметь вид сплошной кривой на рисунке 1,*б*.

Вспомним, однако, что плотность атмосферы уменьшается с высотой; значит, будет уменьшаться и сила Архимеда, так что рано или поздно мы вернемся на землю. Кроме того, при очень малых скоростях изменится закон сопротивления воздуха. Сила станет пропорциональной уже первой степени скорости и так называемой *вязкости* воздуха, которой мы до сих пор пренебрегали. Но это произойдет при скоростях движения порядка микрометров в секунду. Эта численная оценка получается в предположении абсолютно спокойной атмосферы, а так не бывает. Воздух постоянно находится в движении (горизонтальный ветер, вертикальные перемещения теплого воздуха вверх и холодного вниз – так называемая конвекция). Эти крупномасштабные движения сопровождаются мелкими завихрениями (турбулентностью), в результате чего вязкость движущегося воздуха гораздо больше, чем спокойного, и к тому же непостоянна в пространстве и во времени. Все эти явления наши вдумчивые читатели смогут учесть в дальнейшем – в своих научных работах.

А сейчас, чтобы нам уверенно вернуться вниз, надо отказаться от точного уравновешивания силой Архимеда суммарной силы тяжести своего тела и шара и положить в карман хотя бы спичечный коробок или лучше бутерброд (водород горюч!). Этот небольшой перегрузок позволит кривой $v(y)$ пересечь ось y на некоторой высоте H, превосходящей заданную высоту (например, здания МГУ на Воробьевых горах); значит, начнется движение вниз (штрих-пунктирные линии на рисунке 1). А легкий ветерок перенесет нас через дом, реку, лес... Это уже похоже на приятный прыжок во сне. Так что прыгайте на здоровье!

**На атомы Вселенная крошится.
Все связи рвутся, все в куски дробится.**

Джон Донн

Почему снаряд, ...удаляющийся навеки от Солнечной системы в бездны вселенной, одолевающий силу тяготения Земли, Солнца и всей его системы, должен повергать нас в ужас?!

Константин Циолковский

...когда электрон находится в атоме, у него энергия меньше, чем когда он свободен. Иначе говоря, в атоме он связан. И нужна энергия, чтобы вырвать его из атома...

Ричард Фейнман

В молекуле валентные электроны сплошным облаком охватывают и связывают отдельные атомы.

Абрам Иоффе

...несколько сотен различного рода атомов, составляющих нашу планету, ...существуют не вечно... Некоторые существуют еще и сейчас. Другие же, менее устойчивые, атомы уже исчезли.

Фредерик Жолио-Кюри

Но в чистом виде кварки не рождались. Наблюдались только их связанные состояния.

Яков Зельдович

А так ли хорошо знакома вам энергия связи?

Если между физическими понятиями устроить соревнование за право именоваться самым важным, то одним из активных претендентов на это звание, несомненно, будет энергия связи.

В явном виде она появляется в самом конце школьного курса физики – когда разговор заходит о силах, связывающих ядерные частицы. Однако попробуем взглянуть на дело шире и будем понимать энергию связи как работу, необходимую для «растаскивания» притягивающих друг друга тел на расстояние, где они перестают взаимодействовать. Вот тогда выяснится, что в огромном числе случаев нам просто без нее не обойтись.

И впрямь, разве не энергия связи «отвечает» за устойчивость планетных систем, молекул, атомов и их ядер? Внимательно присмотревшись к таким, казалось бы, несхожим явлениям и процессам, как плавление и испарение, ионизация и фотоэффект, полет космического корабля и радиоактивный распад, мы заметим, что это понятие позволяет в разнородном обнаружить много общего. Иначе говоря, энергия связи – одно из удивительно универсальных понятий, связывающих воедино физические взаимодействия.

Надеемся, что, прочитав этот «Калейдоскоп», вы сможете увидеть физический мир не в столь пессимистическом свете, как английский поэт начала XVII века Дж. Донн. Ведь он еще не был знаком с энергией связи, не так ли?

Вопросы и задачи

1. Космонавт находится в корабле, движущемся вокруг Земли. Свидетельствует ли испытываемое им состояние невесомости о потере связи с Землей?

2. Кинетическая энергия спутника на круговой орбите положительна. А какова по знаку его полная механическая энергия?

3. В каком случае требуется больше затрат энергии для вывода ракеты за пределы тяготения планеты – при запуске ракеты с поверхности планеты или с круговой орбиты?

4. Почему испарение жидкости в сосуде приводит к ее охлаждению в отсутствие притока тепла?

5. Отчего из сухого песка нельзя слепить фигурку, а из мокрого – можно?

6. Диссоциация молекул при растворении в воде кристаллов поваренной соли ведет к росту потенциальной энергии взаимодействия ионов. За счет чего это происходит?

7. Каковы причины резкого увеличения числа пар «электрон – дырка» в полупроводниках?

8. Пусть у двух незаряженных пластин из разнородных металлов концентрации свободных электронов одинаковы. Какая пластина наэлектризуется отрицательно, если их привести в соприкосновение?

9. В чем сходство процессов термоэлектронной эмиссии и испарения жидкости?

10. Как можно изменить ток насыщения в вакуумном диоде?

11. Почему для поддержания электрического тока в горящей дуге достаточно сравнительно невысокого напряжения?

12. При возникновении самостоятельного газового разряда определяющую роль в ионизации столкновениями играют электроны, а не тяжелые ионы, хотя те тоже ускоряются электрическим полем. Почему?

13. Может ли атом водорода поглотить фотон, энергия которого превосходит энергию связи атома?

14. Когда нужно затратить большую энергию – при удалении за пределы атома гелия первого электрона или второго?

15. Возможен ли захват свободным протоном электрона (образование атома водорода) без излучения?

16. В какой части атома – ядре или электронной оболочке – происходят процессы, приводящие к испусканию β-лучей?

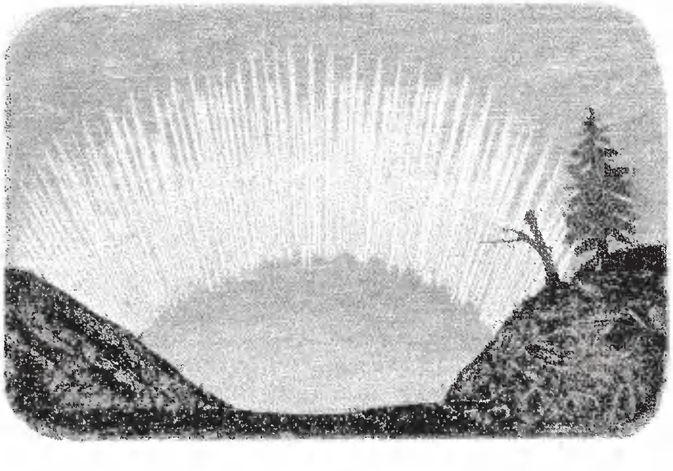
17. Свет, испускаемый с поверхности звезды, приходит к наблюдателю с меньшей, чем при излучении, частотой. Чем объясняется этот эффект?

Микроопыт

Капните немного растительного масла в воду, налитую в широкую кастрюлю. Какую форму примут капельки жира? Что связывает их частицы и не позволяет равномерно разбегаться по поверхности воды?

Любопытно, что...

...противники теории Коперника полагали, что Земля слишком тяжела, инертна и неповоротлива, что-



Северное сияние

бы вращаться вокруг своей оси, иначе она, по их разумению, должна была бы разлететься на куски, подобно сильно раскрученному маховику. Позже Кеплеру пришлось даже придумывать невидимые спицы, которые связывали планеты с Солнцем и заставляли их двигаться по орбитам.

...для удаления тела массой один килограмм за пределы действия земного тяготения требуется энергия, выделяющаяся при сгорании примерно полутора литров бензина, – конечно, без учета потерь.

...стабильность большинства окружающих нас тел определяется тем, что энергии теплового движения молекул недостаточно для разрушения химических связей, удерживающих молекулы друг около друга.

...в двадцатые годы нашего столетия для объяснения природы химической связи была применена квантовая механика. Многолетние трудоемкие вычисления в конце концов привели с ее помощью к полному согласию с опытными данными. Так родилась квантовая химия, использующая сегодня для расчетов мощные компьютеры.

...анализ состава света полярных сияний заставил сделать вывод, что в высоких слоях атмосферы под действием ультрафиолетового излучения Солнца молекулы кислорода расщепляются на атомы, высвечивающие затем поодиночке.

...при температурах, превышающих пять-шесть тысяч градусов, происходит термическая ионизация газов – отрыв электронов от атомов, и вещество переходит в плазменное состояние. Его изучение позволяет не только лучше узнать устройство звезд, ионосферы, газового разряда, но, возможно, даст ключ к решению загадки шаровой молнии.

...Нильс Бор, автор знаменитой модели строения атома, вошедшей в историю под его именем, одну из своих статей об этой модели назвал «Связывание электрона положительным ядром».

...крайняя химическая инертность благородных газов нашла свое объяснение при исследовании внешних электронных оболочек их атомов. Когда эти оболочки заполнены целиком, связь электронов с ядром атома наиболее прочна. При этом у гелия энергия такой связи наивысшая по сравнению со всеми остальными химическими элементами.

...ровно сто лет назад молодому физику Эрнесту Резерфорду удалось разобраться в явлении ионизации газов только что открытыми радиоактивными веществами. В его опытах в качестве электроскопа, моментально разряжавшегося при ионизации воздуха, служила...шелковая кисточка. А в рабочее состояние она приводилась путем поглаживания ее основания «теплым сухим кисетом» для табака. Оцените уровень экспериментальной техники всего лишь вековой давности!

...причины неудач алхимиков в попытках превратить один химический элемент в другой, т.е. преобразовать ядра атомов, кроются в том, что энергия связи в ядрах (в расчете на одну частицу) примерно в миллион раз (!) превышает химическую энергию связи атомов между собой.

...первым, кто предположил, за счет какой энергии обеспечивается устойчивость атомных ядер, был в 1915 году американский физик Уильям Харкинс, введший понятие «дефект масс», которому и соответствует энергия связи ядра. Английский же ученый Фрэнсис Астон, проведя ряд точнейших измерений на сконструированном им масс-спектрографе, в 1927 году впервые построил кривую, описывающую энергию связи атомных ядер и вошедшую затем в школьные учебники.

...ядра атомов, содержащие определенные, так называемые магические, числа протонов и нейтронов, обладают повышенными значениями энергии связи и большей устойчивостью к распаду. Поиски подобных ядер, образующих как бы «острова» стабильности за пределами таблицы Менделеева, недавно привели к успеху – в подмосковной Дубне был синтезирован 114-й химический элемент.

...кварки – мельчайшие образования, входящие в состав внутриядерных частиц, – в свободном состоянии не существуют, хотя эксперименты твердо убедили ученых в их реальности. Силы, «склеивающие» их, носят настолько необычный характер, что проблема невылетания кварков даже получила специальное название – «конфайнмент» (тюремное заключение).

Что читать в «Кванте» об энергии связи

(публикации последних лет)

1. «Ядерная физика в задачах» – 1995, №5, с.43;
2. «Вторая космическая скорость» – 1995, Приложение №5, с.28;
3. «Сколько состояний бывает у вещества?» – 1995, Приложение №5, с.42;
4. «Ядерные спектры» – 1995, Приложение №5, с.119;
5. «А атомные ядра тоже колеблются!» – 1996, №4, с.2;
6. «Капельная модель ядра» – 1996, Приложение №4, с.123;
7. «Движение тел в гравитационных полях» – 1997, №1, с.45;
8. «Как устроены металлы?» – 1997, №2, с.2;
9. «Планетарная модель атома и теория Бора» – 1997, №2, с.18;
10. «Из истории науки» – 1998, №3, с.16; №4, с.23; №5, с.16; №6, с.17;
11. «Хаос молекул и звезд» – 1998, №5, с.36;
12. «Как зависит U от p?» – 1998, №5, с.39;
13. «Поляризованный диэлектрик и его энергия» – 1999, №1, с.37.

Паровой скалолаз, или Термодинамика для альпиниста

А.СТАСЕНКО

Вот что может произойти, если кто-то начнет размышлять.

В.Черномырдин

Не слыхали о таком устройстве? А вот послушайте...

Однажды Способныйнавсеученик читал перед сном книгу Дж.Тиндаля «Теплота, рассматриваемая как род движения»: «Хоры Бристольского собора были покрыты свинцовыми листами. Длина крыши 60 футов, ширина 19 футов 4 дюйма. Свинец был положен в 1851 году, и два года спустя он всей массой подвинулся вниз на 18 дюймов. Понижение свинца происходило постоянно с тех самых пор, как им были покрыты хоры. Попытка остановить его движение вколачиванием гвоздей в стропила не удалась, потому что сила, с которой опускался свинец, вырывала гвозди. Крыша была некрутая, и свинец мог бы оставаться на ней, не скользя вниз из-за действия тяжести».

Нашлось и объяснение этого явления: «Свинец был подвержен перемене температур дня и ночи. Теплота, сообщаемая ему днем, заставляла его расширяться. Если бы он лежал на горизонтальной плоскости, то он расширялся бы во все стороны одинаково; но, лежа на наклонной поверхности, он расширялся книзу свободнее, чем вверх. Напротив, ночью, когда свинец сжимается, его верхняя часть легче опускается вниз, чем нижняя поднимается вверх. Движение свинца, следовательно, совершенно походило на движение земляного червяка. Днем он подвигал вперед свою нижнюю часть, а ночью верхнюю, и таким образом в два года он подвинулся на расстояние 18 дюймов.[1] Каждое временно́е изменение температуры дня и ночи способствовало такому движению, и Канон Мозели нашел впоследствии, что сильнейшее опускание свинца происходило при быстрых изменениях температур».

И тут Способногонавсеученика осенила благородная мысль: что если сделать «червяка», который полз бы вверх, а не вниз. Ведь это очень помогло бы альпинистам – они так стараются, забираясь на отвесные скалы. Да и для МЧС пригодилось бы. Твердые тела для этого явно не подходили: уж очень немного они расширяются при нагревании, да к тому же их тянет вниз, а не вверх, как это видно на примере бристольской свинцовой крыши. Конечно, лучше подогревать газ. А из газов лучше всего взять водяной пар, самый дешевый из паров, ибо воды в горах немало. Его легко и расширить, и снова превратить в жидкость при охлаждении (в горах ведь не жарко), уменьшив при этом объем на три порядка.

В конце концов оформилась такая идея конструкции «Скалолаза». Возьмем цилиндр (знакомый Сантехник пообещал нашему герою Абсолютно Нетеплопроводящую Трубу), пружину (знакомый Математик обещал достать Абсолютно Невесомую Пружину), поршень со штоком, небольшое количество воды, или спирта, или эфира, или... (это количество, т.е. массу Δm_l, еще придется рассчитать) и соберем устройство, изображенное на рисунке 1. Воздух выкачаем из цилиндра (причем как из-под поршня, так и над ним), а давлением насыщенных паров будем пренебрегать, когда цилиндр холодный. Действительно, давление насыщенных паров воды при температуре 100 °С (373 К) равно атмосферному, т.е. 10^5 Па (не случайно ведь при этом бурно кипит чайник на плите), а при 0 °С (273 К), когда вода еще не замерзла, давление почти в двести раз меньше. Стоит ли учитывать?!

Как же работает это устройство? При испарении жидкости поршень будет двигаться вверх, поднимая альпиниста

[1] *Это значит, что при каждом таком движении на нижней поверхности листа возникала неподвижная точка (вернее, линия, параллельная срезу крыши), определяемая равновесием всех сил. Описание этих движений представляет собой самостоятельную задачу, которую Читатель при желании может рассмотреть. (А.С.)*

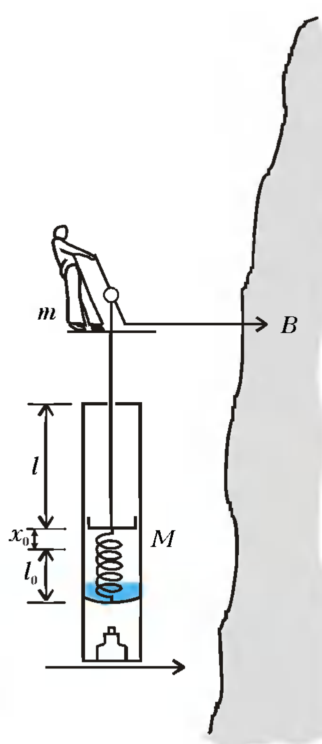


Рис. 1

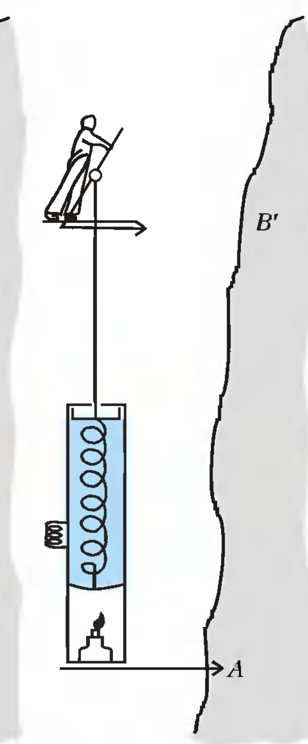


Рис. 2

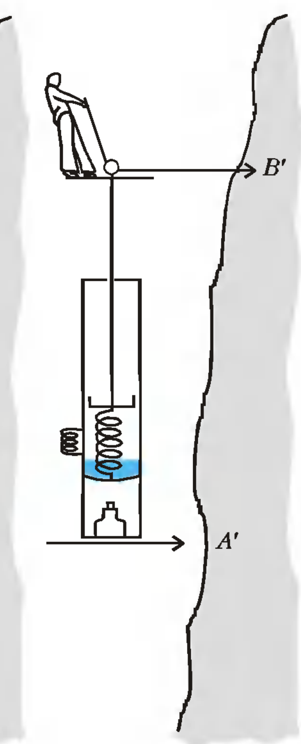


Рис. 3

и растягивая пружину (рис.2). По достижении максимальной точки подъема (ход поршня l) альпинист «зарубается» в точке B', нижнее крепление цилиндра в точке A освобождается, и пружина подтягивает цилиндр на высоту l (рис.3); при этом ее растяжение остается равным x_0, таким, что $kx_0 = Mg$. А пар пусть вытесняется поршнем в наружный змеевик-конденсатор, где превращается в жидкость и сливается на дно цилиндра.

Предполагается, что значение координаты поршня $x = 0$ соответствует нерастянутой пружине (обозначим ее длину через l_0); значит, при растяжении на x возникает возвращающая сила $-kx$. В этих терминах работа пара по перемещению массы m альпиниста на высоту l (относительно x_0) запишется в виде

$$A_{\uparrow} = \int\limits_{x_0}^{x_0+l}(mg + kx)dx = mgl + \frac{k}{2}\left((x_0 + l)^2 - x_0^2\right).$$

Но тепло подогревателя расходуется не только на совершение работы по подъему альпиниста, но и на испарение жидкости и увеличение внутренней энергии образовавшегося пара. На испарение жидкости нужно затратить тепловую энергию (эта энергия выбрасывается в окружающее пространство при конденсации пара в змеевике), равную $r\Delta m_l$, где r – удельная теплота испарения, Δm_l – масса пара в конце подъема, которую легко найти из уравнения Клапейрона–Менделеева:

$$\Delta m_l = \frac{p_l \mathrm{M}}{RT_l} S\left(l + l_0 + x_0\right).$$

Тут все величины известны. Для увеличения внутренней энергии пара понадобится количество теплоты, равное

$$\Delta U = c_V \Delta T \Delta m_l .$$

Здесь $c_V = \frac{j}{2}\frac{R}{\mathrm{M}}$ – удельная теплоемкость пара при постоянном объеме, R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса пара, j – число степеней свободы его молекул (например, для одноатомного газа $j = 3$, а для трехатомного газа – типа водяного пара – $j = 6$). Ясно, что в конце подъема (при $x = x_0 + l$) давление поршня на пар (и значит, давление пара на поршень) больше, чем в начале, на величину

$$p_l - p_0 = \frac{kl}{S},$$

где S – площадь сечения цилиндра. Предположим, что пар насыщенный, т.е. капелька рабочей жидкости еще остается на дне цилиндра, когда поршень достигает высшей точки подъема. Значит, конечная температура пара T_l будет несколько больше начальной T_0. Слово «несколько» отражает тот факт, что зависимость давления насыщенного пара от температуры очень резкая, так что малому изменению $\Delta T = T_l - T_0$ соответствует существенно большее приращение $\Delta p = p_l - p_0$. Эту связь давления насыщенных паров с температурой для любого вещества можно найти в соответствующих справочниках. (А можно использовать так называемый закон Клапейрона–Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{TV},$$

где V – объем пара. Для численной оценки можно малые приращения в уравнении заменить конечными Δp и ΔT, тогда $V = lS$ – объем, занимаемый паром в конце расширения. При большом желании можно проинтегрировать уравнение (по температуре) и получить зависимость $p = p_0 e^{-\frac{r\mathrm{M}}{RT}}$.)

Что же общего в движениях свинцовой крыши и «Скалолаза»? То, что оба движения периодические, в обоих важную роль играет тяготение, оба связаны с тепловыми процессами. А что различного? То, что в случае крыши существенное значение имеет сила трения, а в случае вертикального движения «Скалолаза» ее вообще нет. Но не будем сейчас увлекаться подробностями о том, как поехала крыша. Нам ведь нужно двигаться вверх, а не вниз.

Итак, сделан первый набросок теории. Наш Способныйнавсеученик понимал, что принято много упрощающих предположений – например, о полном отсутствии воздуха в цилиндре, об идеальной теплоизоляции, идеальной пружине (к тому же Сантехник и Математик стали намекать, что не так уж просто достать Абсолютно Нетеплопроводящую Трубу и Абсолютно Невесомую Пружину – самим надо). В общем, как во всяком большом деле, тут-то и надо начинать работать. И от крышки кипящего чайника, которую, согласно легенде, наблюдал в детстве Джеймс Уатт, до изобретенной им паровой машины утекло немало воды. Значит, стоит делать численные оценки, решать уравнения, оптимизировать конструкцию (минимум веса и расхода топлива, максимум скорости подъема), затем создать работающую модель, наладить производство, сбыт, получение прибыли (и не забыть при этом отчислять 10% от нее на издание «Кванта»).

Зачем закрывать отверстие, или Открытие линзы

А.СТАСЕНКО

Рассмотрим такую ситуацию: на непрозрачный экран с круглым отверстием нормально падает параллельный пучок света, или, что то же самое, плоская световая волна. Теперь предлагается часть площади отверстия перекрыть непрозрачным препятствием – шариком, шайбой или кольцом. Вопрос: как изменится освещенность в некоторой точке за экраном, лежащей на оси отверстия? Скорее всего, любой прохожий ответит: конечно, уменьшится! И будет прав, но… не всегда и не совсем.

Конечно, бытовая практика убеждает в том, что уменьшение площади отверстия, пропускающего свет внутрь некоторого объема, уменьшает и освещенность этого объема: ведь для того и служат плотные шторы на окнах, для того и щурят глаза при ярком свете, а зрачки и помимо нашей воли уменьшают свой диаметр.

Но принципиально важен и встречный вопрос: а каково соотношение между длиной волны λ, радиусом отверстия r и расстоянием до точки наблюдения x (рис.1)? Этот вопрос связан с пониманием роли интерференции, суть которой заключается во взаимодействии двух волн, пришедших в точку наблюдения (рис.2): если эти волны пришли в одной фазе (или со сдвигом фаз, кратным 2π, что соответствует разности хода волн, равной целому числу длин волн), то их «горбы» и «впадины» складываются; если же волны придут в противофазе (или с разностью хода, равной нечетному числу полуволн), то результатом их взаимодействия в данной точке может стать взаимное уничтожение.

Чтобы понять суть дела, повторим геометрические построения, которые до нас догадался сделать Огюстен Френель еще в начале прошлого века. Проведем из точки наблюдения P (рис.3) несколько лучей: один из них пусть пройдет через центр отверстия, другой будет ровно на $\lambda/2$ длиннее, следующий на $\lambda/2$ длиннее предыдущего, ..., и опишем, как ножкой циркуля, каждым из этих лучей окружности в плоскости отверстия с радиусами r_1, r_2, ... Далее, разобьем первый круг на кольца ($a_1, \text{б}_1, \ldots, \text{э}_1, \text{ю}_1, \text{я}_1$) одной и той же площади. Согласно Гюйгенсу и Френелю, каждое из этих колец посылает в точку P вторичные волны (первичная волна пришла в плоскость самого отверстия), причем их амплитуды пропорциональны площадям колец (они, по построению, одинаковы), а сдвиг фаз нарастает с удалением от центра и достигает величины, соответствующей разности хода $\lambda/2$ у края зоны радиусом r_1 (так называемой первой зоны Френеля). Этот набор слов иллюстрируется на рисунке 3 справа в виде малых векторов $\vec{a}_1$, $\vec{\text{б}}_1$, ..., $\vec{\text{ю}}_1$, $\vec{\text{я}}_1$, имеющих (почти) одинаковую длину, но повернутых друг относительно друга на упомянутую разность фаз, причем последний вектор $\vec{\text{я}}_1$ по договору повернут относительно $\vec{a}_1$ на 180° (или π), что и свидетельствует о разности хода $\lambda/2$ между соответствующими волнами. Сумма всех этих малых векторов равна $\vec{A}_1$. А почему упомянуто слово «почти»? Да потому что кольцо я_1 все-таки дальше от точки наблюдения, чем центральный диск a_1; следовательно, пришедший от него в точку P сигнал будет чуть слабее.

Проделаем аналогичные построения для кольца, лежащего между окружностями с радиусами r_1 и r_2 (вторая зона Френеля). В результате сумма возмущений $\vec{a}_2$, $\vec{\text{б}}_2$, ..., $\vec{\text{ю}}_2$, $\vec{\text{я}}_2$, приходящих от элементов этого кольца, даст вектор $\vec{A}_2$, противоположно направленный по отношению к вектору $\vec{A}_1$ (и несколько меньший по модулю). Таким образом, вторичные волны, пришедшие от второй зоны Френеля, почти полностью погасят те, которые пришли от первой зоны.

Уже на этом этапе почти все понятно: из отверстия радиусом r_1 в точку P придет света гораздо больше, чем из отверстия радиусом $r_2 > r_1$. Значит, уменьшив площадь отверстия, мы увеличили освещенность в точке наблюдения! Но продолжим увеличивать радиус отверстия. Достигнув трех зон Френеля, увидим, что вектор $\vec{A}_3$ будет почти равен вектору $\vec{A}_1$, и, следовательно, освещенность в точке P возрастет. Открыв четвертую зону, мы вновь почти погасим свет в точке наблюдения; пятая зона приведет опять к росту освещенности и т.д. Когда непрозрачное препятствие полностью исчезнет, спираль (так называемая спираль Френеля) свернется в центр окружности диаметром A_1, а в точке P останется первичная волна с амплитудой A_0, приблизительно вдвое меньшей A_1.

Но пора бы сделать и численные оценки. Из прямоугольного треугольника $O\text{я}_1P$ (см. рис.3) можно найти радиус первой зоны Френеля:

$$r_1 = \sqrt{\left(x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - x^2} = \sqrt{\lambda x + \frac{\lambda^2}{4}} \approx \sqrt{\lambda x} \qquad (1)$$

(здесь мы пренебрегли малой величиной $\lambda^2/4$, считая, что расстояние от отверстия до точки наблюдения много больше длины волны, т.е. $x \gg \lambda$). Аналогично найдем

$$r_2 = \sqrt{2\lambda x}, \; r_3 = \sqrt{3\lambda x}, \; \ldots, \; r_m = \sqrt{m\lambda x}. \qquad (2)$$

(Отметим здесь замечательный факт: площадь круга, лежащего в плоскости отверстия, пропорциональна разности длин лучей, проведенных из точки P к окружности и к центру. Причем это верно не только для дискретных значений этой разности ($\frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \ldots$ ..., $m\frac{\lambda}{2}$), но и для любых значений. Этот факт и был использован выше при построении элементарных возмущений $\vec{a}_1$, $\vec{\text{б}}_1$, ..., $\vec{\text{я}}_1$: именно благодаря тому, что одинаковым приращениям площади соответствуют одинаковые приращения длины луча, векторы возмуще-

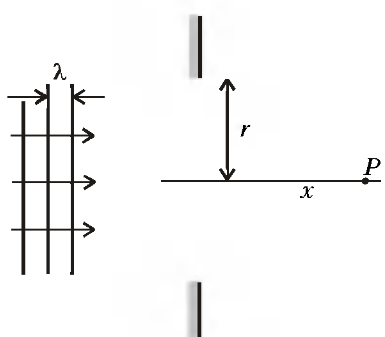


Рис. 1

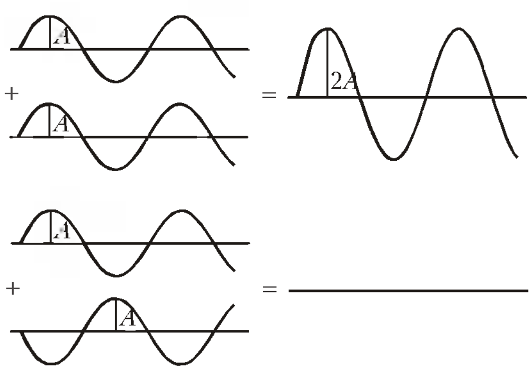


Рис. 2

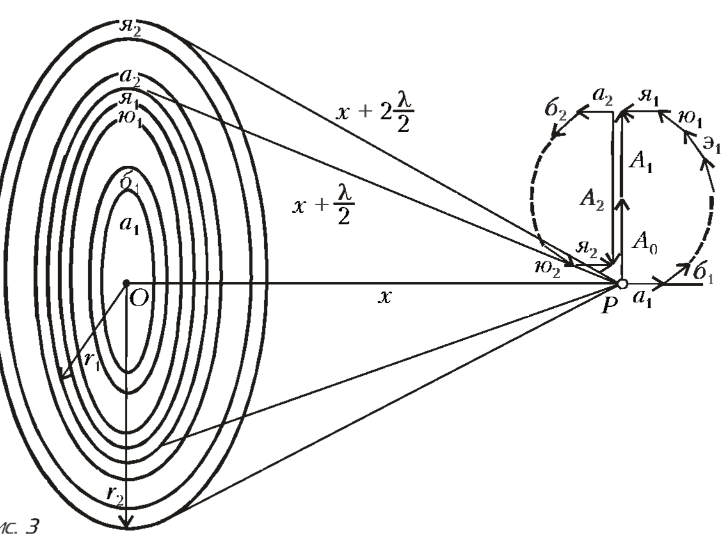


Рис. 3

ний на рисунке 3 образуют полуокружность.)

Пусть отверстие в непрозрачном экране имеет, например, радиус $r = 1$ мм, а длина волны, падающей на него, равна $\lambda = 0{,}5$ мкм. Тогда, согласно формуле (1), заданное отверстие представляет собою одну первую зону Френеля ($r_1 \equiv r$) для точки с координатой

$$x_1 = \frac{r^2}{\lambda} = 2\ \text{м}$$

– в этой точке будет наибольшая амплитуда (и интенсивность) волны. Теперь, отправившись от точки с координатой x_1, будем приближаться к отверстию вдоль оси. На некотором расстоянии

$$x_2 = \frac{r^2}{2\lambda} = \frac{x_1}{2} = 1\ \text{м}$$

это фиксированное отверстие будет представлять собой уже две зоны Френеля; следовательно, в этой точке почти не будет света. Чем ближе к отверстию, тем большему числу зон Френеля оно будет соответствовать. Таким образом, для всех точек с координатой $x < x_1$ суммарная амплитуда всех вторичных волн будет изображаться вектором $\vec{A}$, начало которого закреплено, а конец движется по спирали Френеля против часовой стрелки (см. рис.3). Значит, свет и тьма будут сменять друг друга, а вблизи отверстия освещенность станет равной I_0 (соответствующей амплитуде A_0). Это изменение освещенности вдоль оси качественно изображено на рисунке 4.

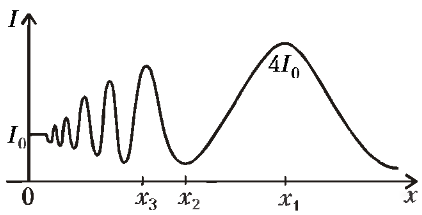


Рис. 4

А что если мы отправимся в другую сторону? Для точек с координатой $x > x_1$ амплитуда волны будет изображаться вектором, конец которого скользит по спирали Френеля по часовой стрелке. Интенсивность света будет монотонно падать, причем можно сказать, по какому закону: $I \sim 1/x^2$, так как с большого расстояния отверстие будет казаться точкой.

Только что мы рассмотрели случай отверстия фиксированного радиуса. А если, наоборот, зафиксировать точку на оси и открывать отверстие, увеличивая его радиус по некоторому временнóму закону $r(t)$? Тогда, начиная от полной темноты (при $r = 0$), мы сначала откроем первую зону Френеля (при этом будет самый яркий свет с интенсивностью $I_1 = 4I_0$), затем вторую (тьма), третью (свет) и так далее, вплоть до полностью открытого фронта с интенсивностью первичной волны I_0. Иными словами, при открывании отверстия наблюдатель в фиксированной точке зарегистрирует целую последовательность вспышек.

Но вернемся к самой спирали Френеля и обсудим, что будет, если как-то избавиться от всех четных зон, которые создают в точке P возмущения, гасящие те, которые приходят от нечетных зон. Действительно, закроем четные зоны *непрозрачными* кольцами (рис.5). Тогда все векторы $\vec{A}_1$, $\vec{A}_3$, $\vec{A}_5$, … выстроятся друг другу «в затылок», и

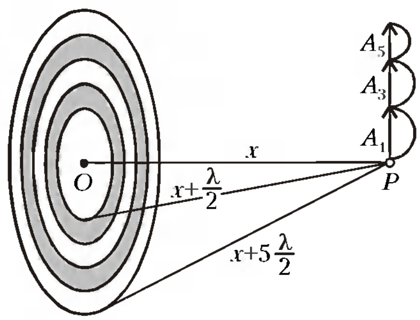


Рис. 5

их сумма даст гораздо более сильный сигнал, чем одна зона.

Но зачем же так просто терять свет от четных зон? Лучше прикроем их *прозрачными* (стеклянными) кольцами (рис.6), подобрав их толщину так, чтобы они «подтормаживали» свет, но не просто как-нибудь, а внося разность фаз, в точности равную нечетному числу π. А именно, пусть их толщина h такова, что

$$h(n-1) = (2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где n – показатель преломления этих

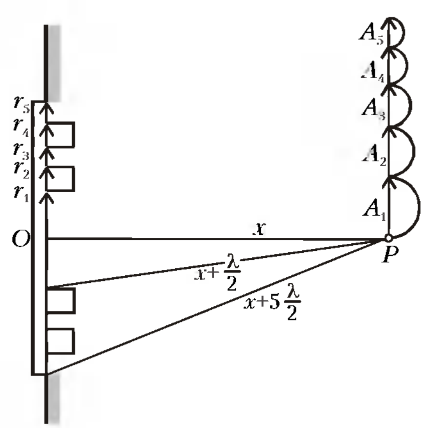


Рис. 6

стеклышек, а $m = 0, 1, \ldots$ При этом векторы $\vec{A}_2$, $\vec{A}_4$, … «станут в строй», развернувшись в том же направлении, что и возмущения от нечетных зон. Очевидно, что суммарный сигнал в точке P еще увеличится.

А нужно ли так грубо обращаться с фазой? Мы ведь можем так отшлифовать эти стеклянные кольца, чтобы в пределах каждой зоны они плавно изменяли фазы проходящего через них света, компенсируя геометрическое запаздывание (рис.7; сплошная ступенчатая линия слева). В результате полуокружность диаметром A_1 развернется в отрезок длиной $\frac{\pi}{2}A_1$. То же самое произойдет в каждой зоне Френеля, так что вся спираль развернется в один отрезок прямой – и в точке P будет достигнута максимально возможная освещенность.

Но зачем же изготавливать из стекла такое ступенчатое тело? Ведь это даже и неудобно. Поэтому добавим в каждой зоне такую толщину стекла, которая вносила бы разность хода в целое число длин волн, обеспечивая при этом плав-

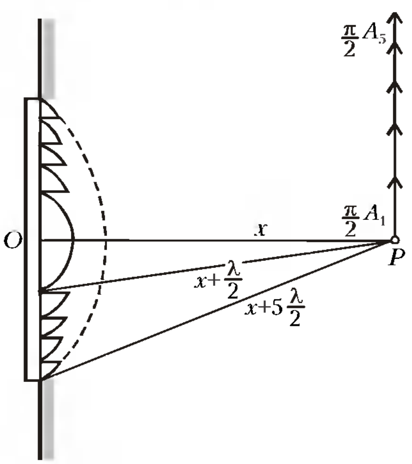


Рис. 7

ные обводы (рис.7; штриховая линия слева). Ба! Да ведь это же линза! А точка P, о которой мы так заботились, – ее фокус.

Так ради чего старались? А ради того, чтобы понять, что и просто круглое отверстие обладает свойствами линзы. Причем у этой «линзы» много «фокусов» (см. рис.4), между которыми расположены точки минимальной интенсивности. А куда же делась энергия из этих точек? Никуда, просто она перераспределилась в плоскости, перпендикулярной оси, так что каждая «темная» точка оказалась окруженной системой светлых колец.

«Пентиум» хорошо, а ум лучше

А.БААБАБОВ

Решето и $\pi/4$

По одной колее навстречу друг другу вышли два поезда. И не встретились.
— Почему?
— Не судьба...

Анекдот

Как известно, для нахождения простых чисел можно использовать решето Эратосфена: выписываем подряд натуральные числа 1, 2, 3, 4, … (чем больше, тем лучше), а затем зачеркиваем сначала числа 4, 6, 8, 10, …, затем числа 6, 9, 12, 15, …, на следующем шаге – числа 10, 15, 20, 25, … В конце концов незачеркнутыми останутся только простые числа и число 1.

Решето Акулича устроено иначе. Он не *за*черкивает, а *вы*черкивает числа. Точнее говоря, сначала вычеркивает из натурального ряда каждое второе число (2, 4, 6, …), затем вычеркивает каждое третье из оставшихся чисел, затем – каждое четвертое из оставшихся, и так далее. Что останется? Останется довольно-таки странная последовательность: 1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91, 109, 133, 147, … Вычислять ее вручную – весьма утомительное и неблагодарное дело.

Программа

Мой ученик одиннадцатиклассник В.Иофик написал на Borland C++ 3.1 программу, которая позволяет найти многие тысячи членов последовательности Акулича.

```
#include<alloc.h>
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
main(int argc, char *argv[])
{
 if(argc<3){printf("\nНаберите в командной строке:\n\
   %s <имя_файла> <натуральное_число>",argv[0]); return 1;}
 FILE *f=fopen(argv[1],"w");
 if(!f){printf("\n\nНе могу открыть файл \'%s\'\a",argv[1]);
        return 2;}
 long k, n=(atol(argv[2])+1)/2, m=n;
register long i,j;
char huge *arr=(char huge *)farcalloc(m,sizeof(char));
if(!arr){printf("\n\nНе хватает памяти.\a");
         fclose(f);return 3;}
printf("\nВыделено %ld байт памяти \n",m);
for(i=0;i<m;i++)arr[i]=1;
for(k=3;k<=n;k++)
 {printf("\rВычеркиваю каждое %ld из %ld чисел      ",k,n);
  for(i=0,j=0;i<m;i++)
   {if(arr[i])j++; if(j==k){j=0;arr[i]=0;n--;} }
 }
printf("\rЗаписываю результаты в файл \'%s\'         ",argv[1]);
double d;
for(i=0,j=0;i<m;i++)if(arr[i])
 {j++; d=(double)(8*i+4)/(j*j);
  if((fprintf(f,"%9ld      %lf\n",2*i+1,d))==EOF)
  {printf("\n\nОшибка записи.\a");
   fclose(f); farfree(arr); return 4;}
 }
fclose(f); farfree(arr); return 0;
}
```

Окончание. Начало см. в «Квант» №4

В этой программе в каждый момент вычислений n обозначает количество уцелевших чисел, а k пробегает значения 2, 3, 4, 5, … до тех пор, пока не окажется $k > n$, что и является сигналом к окончанию вычислений. Ради экономии времени и памяти все четные числа вычеркнуты до начала вычислений, так что программа во время вывода результатов применяет формулу $2i + 1$ для нечетного числа и формулу $(8*i+4)/(j*j)$ – для учетверенного отношения j-го члена последовательности к квадрату его номера.

Применив списки вместо массивов и некоторые другие программистские хитрости (компилятор GNU C), Иофик затем написал программу, которая справилась с первыми ста миллионами чисел (и даже больше!). Например, 3826-й член последовательности оказался равен 11499769. При этом $4 \cdot 11499769 / \left(3826^2\right) \approx 3{,}1423$.

Число $\pi/4$ и формула Валлиса

Результаты вычислений убедительно свидетельствуют: при $j \to \infty$ отношение величины j-го члена изучаемой последовательности к j^2 стремится к $\pi/4$. Значит, решето Акулича позволяет вычислять длину окружности! Как он сам пишет, «такой результат способен свалить с ног даже нормального человека, не говоря уже о любителе математики».

Да, результат удивительный. Но давайте не будем падать в обморок. Число π встречается не только в геометрии, но и в математическом анализе. Например,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots$$

Известны и другие соотношения с участием π. Нам потребуется только одно из них – опубликованная в 1665 году английским математиком Джоном Валлисом (1616–1703) формула

$$\lim_{m\to\infty} m\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m+1}\right)^2 = \frac{\pi}{4}. \qquad (2)$$

Чтобы понять, как она связана с решетом Акулича, давайте проанализируем процесс вычеркивания. Поклонники «Пентиума» при этом могут смотреть на экран компьютера, на котором работает программа Иофика.

Что происходит в начале вычислений?

Для вычислений мы берем не весь натуральный ряд, а лишь первые N натуральных чисел и вычеркиваем сначала каждое второе из них, оставляя в точности $N - [N/2]$ чисел, т. е. приблизительно $N/2$. Затем вычеркиваем каждое третье число из оставшихся, так что останется примерно $2/3$ остатка, т.е. приблизительно $N/3$. (Точную формулу все еще несложно написать: $N - [N/2] - \left[\frac{N - [N/2]}{3}\right]$. Но чем дальше, тем больше понадобится знаков целой части, так что лучше уж писать простые приближенные формулы, чем нагромождать квадратные скобки.) Когда вычеркнем каждое четвертое из оставшихся чисел, останется примерно $3/4$ предыдущего количества, т.е. $\frac{3}{4}N/3 = N/4$. И вообще, после вычеркивания каждого k-го числа останется примерно $n = N/k$ чисел.

Казалось бы, все уже сделано: мы помним, что вычисления заканчиваются в момент, когда $k > n$, т.е. $k^2 > N$. Значит, k-й член последовательности должен быть *примерно* равен k^2. Только вот правильного ответа $\pi k^2/4$ такое простое рассуждение никак не дает!

Почему не дает? Из-за многократно повторенных слов «примерно» и «приблизительно». Заменяя целую часть числа самим этим числом, мы делаем не очень большую – не больше 1 – ошибку. Но за k шагов ошибки накапливаются и оказываются по величине сравнимы с самой исследуемой величиной.

Обратите внимание: в начале вычислений k невелико, а N/k огромно, так что относительная ошибка невелика, а с ростом k и соответственным уменьшением величины N/k относительная ошибка возрастает!

Что происходит в конце вычислений?

В самый последний момент число k оказывается равно количеству n уцелевших к этому моменту чисел. Перед этим довольно продолжительное время k приблизительно равно n и потому на каждом таком k-м шаге вычеркиваем по одному числу. Перед этим несколько более короткое, но тоже продолжительное время вычеркиваем по два числа, перед этим – по три числа, и так далее.

Давайте придадим этому более точную форму. Пусть самый последний шаг – вычеркивание j-го числа из j уцелевших к этому моменту. Тогда перед ним вычеркнули $(j-1)$-е число из $j+1$, при этом было $k = j-1$ и $n = j+1$. Чуть раньше $k = j-2$ и $n = j+2$, еще раньше $k = j-3$ и $n = j+3$. Вообще, если идти с конца к началу, то до тех пор, пока вычеркивали по одному числу, выполнялись равенства $k = j-a$ и $n = j+a$. Переход на другой режим происходит в момент, когда $2(j-a) \approx j+a$, т.е. когда $a \approx j/3$. При этом $k \approx \frac{2}{3}j$ и $n \approx 2k$. (Разумеется, можно было бы получить не приближенные, а точные формулы. Но дальнейшие рассуждения все равно потребуют приближенных формул, так что мы обойдемся без лишних квадратных скобок.)

Теперь ясно, что формулы $k \approx \frac{2}{3}j - b$ и $n \approx \frac{4}{3}j + 2b$ описывают процесс на той стадии, когда вычеркиваем по два числа. Переход на режим вычеркивания по три числа соответствует равенству $3\left(\frac{2}{3}j - b\right) \approx \frac{4}{3}j + 2b$, из которого находим $b \approx \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}j$, откуда $k \approx \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}j$ и $n \approx 3k$.

Продолжая рассуждать в том же духе и обозначая для краткости $c_m = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m+1}$, находим, что переход между режимами вычеркивания по m и по $m+1$ чисел происходит при $k \approx c_m j$ и $n \approx (m+1)k$.

Сознательно сделав несколько вычислительных ошибок, Акулич смог из этих формул получить число $\pi/4$. Будучи честным человеком, он сам обратил внимание читателей на эти передергивания и признал, что «рассуждения имеют немало огрехов, но искоренять их как-то не поднимается рука: не навредить бы!». В общем, он поступил как инженер, которому некогда разбираться с тонкостями математических формул и который поэтому не постесняется умножить или разделить полученный ответ на 2 или на что-нибудь другое, если после этого ответ будет лучше соответствовать экспериментальным данным.

А дело в том, что формулы $k \approx c_m j$ и $n \approx (m+1)k$ довольно точны при маленьких m и теряют точность при возрастании m. Эффект такой же, какой мы уже наблюдали, когда рассматривали процесс от начала к концу: ошибка накапливается и оказывается при больших m сопоставимой с самой исследуемой величиной.

Стыковка

Что же делать, если и при рассмотрении от начала к концу, и при рассмотрении от конца к началу успевает накопиться ошибка? Любой строитель подземного тоннеля знает ответ: надо пустить их навстречу друг другу! В момент стыковки $k \approx c_m j$ и $N/k \approx (m+1)c_m j$, откуда $N \approx (m+1)c_m^2 j^2$. В силу формулы Валлиса, $(m+1)c_m^2 \to \pi/4$, так что мы получили в точности то, что требовалось. И заметьте: никакого обмана и обсчета читателей!

Доказательство формулы Валлиса

Использовать формулу Стирлинга $m! \approx (m/e)^m\sqrt{2\pi m}$ для доказательства формулы Валлиса я не буду, поскольку самое известное и простое доказательство формулы Стирлинга состоит именно в том, что сначала доказывают соотношение $m! \approx k\sqrt{m}(m/e)^m$ с некоторым неизвестным коэффициентом k, а затем из формулы Валлиса находят $k = \sqrt{2\pi}$.

Я сделаю проще: как рекомендуют с давних пор по этому поводу учебники математического анализа, рассмотрю

$$a_m = \int_0^\pi \sin^m x\,dx.$$

Тогда $a_0 = \pi$ и $a_1 = 2$. Далее – интегрирование по частям в стиле вытягивающего себя за волосы из болота Мюнхгаузена:

$$a_{m+1} = \int_0^\pi \sin^{m+1}x\,dx = -\int_0^\pi \sin^m x\,d\cos x = -\sin^m x\cos x\Big|_0^\pi +$$

$$+\,m\int_0^\pi \cos^2 x\sin^{m-1}x\,dx = m\int_0^\pi\left(1-\sin^2 x\right)\sin^{m-1}x\,dx =$$

$$= ma_{m-1} - ma_{m+1},$$

откуда

$$a_{m+1} = \frac{m}{m+1}a_{m-1}.$$

Теперь легко находим $a_2 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}a_1 = 2\cdot\frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{4}a_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi$, и вообще

$$a_{2m} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2m-1}{2m}\pi,\quad a_{2m+1} = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m+1}.$$

Какое отношение все эти интегралы имеют к формуле Валлиса? Самое прямое: из неравенств

$$a_{2m-1} > a_{2m} > a_{2m+1}$$

следуют неравенства

$$1 > \frac{a_{2m}}{a_{2m-1}} > \frac{2m}{2m+1},$$

из которых легко получить формулу (2).

Упражнение 11. а) Обычно в учебниках формула Валлиса имеет вид

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}\cdots$$

Выведите ее из формулы (2).

б) Проверьте, что формула Валлиса может быть записана также в виде

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^2\cdot 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}}.$$

Чудеса в решете

Давайте чуть изменим правила решета Акулича и будем вычеркивать из натурального ряда сначала каждое второе число, потом каждое четвертое из оставшихся чисел, затем каждое шестое, и так далее. Получится последовательность 1, 3, 5, 9, 11, 17, 19, 25, 27, 35, 37, 43, 51, 57, 59, 69, 75, 83, 85, 97, 101, 113, 117, 129, ... Угадали закономерность? Наверное, еще нет. На компьютере можно вычислить огромное число членов этой последовательности. Например, ее 6700-й член оказался равен 589459. По-прежнему ничего не понятно? Ну тогда я признаюсь, что $589459/\left(6700\cdot\sqrt{6700}\right) \approx$ $\approx 1{,}0748$. И вообще, эта последовательность растет не как n^2, а как $n\sqrt{n}$.

Аналогичный порядок роста появляется, если вычеркивать из натурального ряда сначала каждое третье число, потом каждое пятое из оставшихся, потом каждое седьмое, и так далее. Невычеркнутыми при этом останутся числа 1, 2, 4, 5, 8, 10, 13, 16, 19, 20, 26, 28, 32, 34, 41, 43, 47, 53, 58, 61, 68, 70, 73, 80, 86, 88, 94, 101, ... Хотите знать, почему n-й член последовательности приблизительно равен $0{,}684n\sqrt{n}$? Тогда есть два пути: либо обзавестить суперкомпьютером и вычислять, вычислять, вычислять, ничего строго так и не доказав, ибо натуральный ряд целиком невозможно поместить в память никакого компьютера, либо подумать, как рассуждения предыдущих разделов переносятся на эти и другие случаи.

Оказывается, теоретические рассуждения позволяют найти ответ в общем случае. К сожалению, в этот ответ входит изобретенная Л.Эйлером гамма-функция Γ. Ее определение слишком сложно, чтобы излагать его здесь. Поверьте на слово: истинная причина возникновения числа π в решете Акулича — в том, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Палиндромы

– Абба а?
– Абба аббабба.
– Бааб?
– Аа. Абба аббабба баабааб.

Палиндром (по-русски, *перевертыш*) – это слово, которое выглядит одинаково при чтении как слева направо, так и справа налево (например, ШАЛАШ, РОТОР или АААББАББАББААА).

Через $f(n)$ обозначим такое наименьшее число, что всякое слово длиной n, составленное из букв А и Б, может быть разбито не более чем на $f(n)$ палиндромов. Чтобы привыкнуть к функции f, давайте найдем $f(6)$. Всего шестибуквенных слов $2^6 = 64$, но поскольку буквы А и Б равноправны, достаточно рассмотреть только слова, начинающиеся на букву А:

АААААА	ААБАА+А	АБА+ААА	АББА+АА
ААААА+Б	АА+БААБ	А+БАААБ	АА+БААБ
ААА+АБА	А+АБАБА	АБА+АБА	АББА+Б+А !
АААА+ББ	АА+БАБ+Б !	АБА+А+ББ !	АББА+ББ
А+ААБАА	ААББАА	АБАБА+А	АБББА+А
ААА+БАБ	А+АББА+Б !	АБАБА+Б	АБББА+Б
АА+АББА	А+АБББА	АБА+ББ+А !	АББББА
ААА+БББ	АА+ББББ	АБА+БББ	А+БББББ

Восклицательными знаками отмечены слова, которые нельзя разбить менее чем на три палиндрома. Мы видим, что всякое шестибуквенное слово можно разбить не более чем на три палиндрома[4]; $f(6) = 3$.

В статье «Ум хорошо, а пять – лучше» приведены первые 19 значений функции f:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	1	2	2	2	2	3	3	4	4	4
$n/f(n)$	1	1	1,5	2	2,5	2	2,33	2	2,25	2,5
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
$f(n)$	5	5	5	6	6	6	6	7	7	
$n/f(n)$	2,2	2,4	2,6	2,33	2,5	2,66	2,83	2,57	2,71	

Одиннадцатиклассники В.Иофик и В.Лемпицкий составили программу, которая вычислила несколько следующих значений функции f:

n	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$f(n)$	8	8	8	8	9	9	10	10	10	10
$n/f(n)$	2,5	2,62	2.75	2,87	2,66	2,77	2,6	2,7	2,8	2,9

Величину $f(28)$ эта программа вычисляла более 30 часов, а $f(29)$ – трое суток. Дальше я ей считать не дал – выключил компьютер. Потом они усовершенствовали свою программу, но все равно даже $f(60)$ вычислить перебором абсолютно невозможно: $2^{60} = 1024^6 > 10^{18}$. Если перебирать каждую секунду сто миллионов ($=10^8$) слов, то потребуется более 10^{10} секунд. Это значительно превышает гарантийный срок работы «Пентиума»!

Величина $n/f(n)$ – это средняя длина палиндромов, на которые разбито самое трудно разбиваемое n-буквенное слово. Как видно из таблицы, эта величина имеет тенденцию к росту. «Может ли величина $n/f(n)$ быть сколь угодно большой?» – спрашивает Акулич и, поскольку на этот вопрос не могут ответить ни счетные палочки, ни абак, ни «Пентиум», взывает: «Одна надежда – на читателей. Возможно, кто-нибудь сумеет составить такую программу, которая вычислит значения $f(n)$ для нескольких сотен первых n, анализируя которые, удастся правильно спрогнозировать ее поведение и найти предел (если он существует, конечно). А может, есть и чисто теоретический путь?»

Есть чистый путь! Давайте рассмотрим слово абвабвабв ... ... абв, состоящее из многократно повторенного слова абв. Оно может быть разбито на палиндромы единственным образом – рассыпано на отдельные буквы. Теперь заменим

[4] *Здесь я должен просить прощения у ревнителей чистоты русского языка: конечно, не очень складно говорить, что всякий палиндром можно разбить на один палиндром, ибо никакого разбиения при этом на деле не происходит. Но такова уж привычка математиков – стараться одной фразой охватить все случаи.*

каждую букву а на АА, б – на ББ, в – на АБ. Получим слово

ААББАБААББАБААББАБ ... ААББАБ ...

Самые длинные палиндромы в этом слове – АББА и БААБ – имеют длину 4. Рассмотрев любое n-буквенное подслово этого слова, получаем неравенство $f(n) \geq n/4$. Значит, отношение $n/f(n)$ ограничено сверху числом 4.

А теперь – самое интересное. По-видимому, верна следующая теорема.

Теорема 2. *При любом натуральном n имеем $f(3n) = n + 1$, $f(3n + 1) = n + 1$, $f(6n + 2) = 2n + 2$. При любом натуральном $n > 1$ имеем $f(6n + 5) = 2n + 2$, исключительное значение $f(11) = 5$.*

Следствие. *Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{f(n)}$ существует и равен 3.*

К сожалению, доказательство этой теоремы требует довольно большого перебора. Но главная идея может быть изложена довольно-таки коротко: *каждое слово из n букв А и Б может быть разбито не более чем на $[(n + 4)/3]$ палиндромов.*

Это легко доказать по индукции: база очевидна, а переход состоит в следующем. Если мы от слова сумеем отрезать начало длиной $3s$ или более, которое можно разбить на s палиндромов, то мы победили. Поэтому будем рассматривать только слова, в которых этого сделать нельзя. Довольно скучный перебор показывает, что есть всего одна неприятная возможность – это

АБААББ(БААБАБ)(БААБАБ)...,

где БААБАБ'ы бесконтрольно размножаются. С этим словом надо разобраться индивидуально. (Проделайте эту работу!)

К сожалению, неравенства

$$f(n) \leq [(n + 4)/3] \tag{3}$$

недостаточно для доказательства теоремы 2. Нужно еще убедиться, что при $n = 6k + 5$, где $k > 1$, неравенство строгое.

При $n \leq 17$ это верно. Если $n > 17$, то рассмотрим начало n-буквенного слова – первые его 6 букв. Будем считать, что слово начинается на букву А. Если начало можно разбить не более чем на 2 палиндрома, то все в порядке. Значит, осталось рассмотреть только те начала, которые в таблице были отмечены восклицательными знаками: 1) ААБАББ, 2) ААББАБ, 3) АБААББ, 4) АБАББА и 5) АББАБА.

Начнем с третьего случая: АБА–АББ. Знак «–» указывает место для разбиения во всех ситуациях, кроме той, когда после этого начала идут одни только буквы Б. (Это очень важное соображение, и потому я прошу задержаться взглядом на этом месте и хорошо все обдумать.) Поскольку слово АБААББ...ББ можно разбить на 3 палиндрома, что прекрасно согласуется с неравенством (3), третий случай разобран.

Аналогично, в пятом случае: АББА–БА. Знак «–» указывает место для разбиения во всех ситуациях, кроме той, когда после этого начала идут только буквы А. Слово АББАБА...АА можно разбить на 3 палиндрома, и это согласуется с неравенством (3).

В четвертом случае припишем к началу АБАББА всевозможными способами шестибуквенные слова:

АБА+ББ+ААААААА
А+БАБ+БААААААБ
А+БАБ+БААААБ+А
. . . .
АБА+ББ+АББББА
А+Б+АББА+ББББББ

Многоточия стоят потому, что в журнале никак нельзя привести все слова, хотя для доказательства я перебирал все подряд!

Аналогично рассматриваем второй случай:

А+АББА+Б+АААААА
А+АББА+БААААБ
АА+ББ+АБААААБА
. . . .
АА+ББ+АББББББА
А+АББА+ББББББ

Осталось рассмотреть первый случай:

АА+БАБ+Б+АААААА
АА+БАБ+БААААБ
АА+БАБ+БААААБ+А
А+АБА+ББААААББ
АА+Б+АББА+ААБАА
АА+БАБ+БАААБ–АБ
АА+БАБ+БАААБ–БА
. . . .
АА+Б+АББББББА
АА+БАБ+ББББББ

При этом обнаруживается, что все слова поддаются разбиению, кроме двух: ААБАБББАААБА и ААБАБББААБАБ. Если приписать к первому из них букву А, то получаем АА+Б+АББА+ААБАА. Если же приписать букву Б, то получим слово ААБАБББАААБАБ, с которым надо разбираться всерьез:

АА+БАБ+ББ+АААБАБААА+АА
АА+БАБ+ББ+АААБАБААА–АБ
. . . .
АА+БАБ+Б+БАААБ+АББББА
АА+БАБ+Б+БАААБ–АББББББ

Мы победили слово ААБАБББАААБА! Осталось (непобедимое!) слово ААБАБББААБАБ. Справиться с ним мешает периодически продолжаемое слово ААБАБББААБАБББААБАББААБАББААБАБ... Как с ним быть — не знаю.

Но если удастся разобраться с этим, останется выписать для каждого натурального n слово длиной n, которое нельзя разбить менее чем на указанное в теореме 2 число палиндромов – и доказательство будет закончено! К сожалению, я не представляб, как завершить это доказательство без крайне утомительного перебора.

Упражнения

12. Придумайте слово из букв А и Б, которое нельзя разбить менее чем на 3 палиндрома, но которое после приписывания к нему справа или слева любой из букв А и Б можно разбить на два палиндрома.

13. Для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots, 21$ укажите слово длиной n из букв А и Б, которое нельзя разбить менее чем на $f(n)$ палиндромов.

Примечание. Познакомившись с рукописью этой статьи, И.Акулич чистосердечно раскаялся в своих заблуждениях и поклялся в дальнейшем и близко не подходить к компьютерам. Он признал удивительную интуицию учителя физики В. Боева, который, едва ознакомившись с третьей задачей, сразу заявил, хотя и бездоказательно: «Предел равен трем».

В заключение неисправимый грешник добавил: «Представляете, чего мог бы достичь лорд Рэлей, если бы у него был «Пентиум»?!»

Послесловие

Понятно, что цель «компьютеризации» школьного образования — поручить компьютеру решение скучных и трудоемких задач, сохраняя время для более важных дел. При этом открывается путь — «изучать (науку), обучая (компьютер)», – который до сих пор был возможен только для научных работников.

Готовы ли школьные науки к такому подходу? Стихия учебного процесса веками отбирала темы, которые безболезненно усваиваются при помощи доски, мела и голоса. Сейчас становится возможным иной подход, но он изменит преподавание математики не раньше, чем изменится структура самой науки. Такой переворот, если он вообще случится, потребует многих десятилетий. А пока слияния математики с информатикой не получилось.

Многие ученые охотно пользуются компьютерами, храня свои статьи на магнитных дисках и рассылая их по электронной почте, так что срок публикации статей измеряется днями, а не месяцами, как в обычном журнале. Возможножно, что эпоха печатных статей в науке кончается навсегда, а типографии вновьограничатся изготовлением книгдлительного пользования. Однако в практике математического творчества персональные компьютеры пока малочто изменили. В математике есть ряд областей, постоянно или часто нуждающихся в трудоемких вычислениях: теория чисел, функциональный анализ, теория вероятностей. Здесь компьютеры успешно применяют с пятидесятых годов. Но математика всегда стремится к тому, чтобы заменить переборы и вычисления логическими рассуждениями, сводя к минимуму необходимость чисто технической работы.

Итак, хотя в умелых руках компьютери может дать обильную пищу для размышлений, машина все же в состоянии полностью заменить живого математика. И хотя математическая логика много делает для формализации доказательств, а системы искусственного интеллекта становятся все мощнее, в мире (пока?) есть место не только для роботов, но и для людей.

НАША ОБЛОЖКА

Капельки росы, стеклянные шарики и микроскоп Левенгука

(Начало см. на 4-й с. обложки)

Левенгук владел многими тайнами техники микроскопии. Например, в литературе высказывается предположение, что он первым применил темнопольное освещение, существенно улучшающее контраст микроскопического изображения и облегчающее наблюдения прозрачных объектов и препаратов. Но среди секретов Левенгука был главный, который состоял в том, что человек может сделать многое, если посвятит своей работе всю жизнь. Не случайно Левенгук стал членом Лондоновского Королевского общества и одним из самых знаменитых людей своей эпохи.

Для своих микроскопических наблюдений Левенгук обычно пользовался придуманным и сконструированным им самим простым микроскопом, т.е. лупой, снабженной механическим устройством для фиксирования и фокусировки объекта. Единственная более или менее короткофокусная линза этого микроскопа была наглухо закреплена между двумя металлическими пластинками, каждая с точечным круглым отверстием, служившим для прохождения света. При помощи подвижной скобы к пластинкам прикреплялся вертикальный винт (ручка) с небольшим столиком на верхнем конце. Столик нес вращающуюся иглу для фиксирования объекта; горизонтальный винт, проходивший сквозь столик и упиравшийся в пластинку, позволял менять расстояние столика от пластинки и вместе с тем – расстояние объекта от линзы, т.е. фокусировать объект

Приведем отрывок из книги ученого-бактериолога Поля де Крюи «Охотники за микробами», описывающий, как работал Левенгук:

«Замечательно забавно смотреть через линзу и видеть предметы увеличенными во много раз. Что ж, покупать для этого линзы? Ну, нет! Не таков был Левенгук. В течение двадцати лет неизвестности он ходил к оптикам и обучался у них искусству обтачивать и шлифовать стекла. Он посещал алхимиков и аптекарей, совал свой нос в их тайные способы выплавлять металлы из руд и понемногу научился обращаться с золотом и серебром. Это был чрезмерно упорный и настойчивый человек; он не довольствовался тем, что его линзы были так же хороши, как у лучших мастеров Голландии, – нет, они должны быть лучше самых лучших! И добившись этого, он все еще сидел и возился с ними много часов подряд. Затем он вставлял эти линзы в небольшие оправы из меди, серебра или золота, которые он сам вытягивал на огне, среди адского дыма и чада. В наше время исследователь покупает за сравнительно небольшие деньги изящный блестящий микроскоп, поворачивает винт, заглядывает в окуляр и делает свои открытия, мало задумываясь о том, как устроен микроскоп. Но Левенгук сам делал свои инструменты.

Конечно, его соседи думали, что он немного «тронулся», но он упорно продолжал жечь и калечить свои пальцы. Он весь ушел в работу, забывая о семье и друзьях, просиживая целые ночи напролет в своей тихой странной лаборатории. И в то время как добрые соседи над ним исподтишка посмеивались, этот человек научился делать мельчайшие линзы, размером меньше 1/8 дюйма в диаметре, и притом настолько симметричные, настолько точные, что они ему показывали самые мелкие предметы в сказочно огромном и ясном виде.

Да, он был совершенно некультурный человек, но только он один во всей Голландии умел делать такие линзы и при этом говорил о своих соседях:

– Не стоит на них сердиться: они ведь ничего лучшего не знают...

Затем этот самодовольный торговец мануфактурой стал наводить свои линзы на все, что попадалось ему под руку. Он смотрел через них на мышечные волокна кита и на чешуйки своей собственной кожи. Он отправлялся к мяснику, выпрашивал или покупал у него бычьи глаза и восторгался тонким устройством хрусталика внутри глаза. Он часами изучал строение овечьих, бобовых и лосиных волосков, которые под его стеклышком превращались в толстые мохнатые бревна... Он исследовал поперечные срезы разных пород деревьев и, прищурившись, любовался семенами растений. «Невероятно!» – ворчал он, увидев большое грубое жало блохи или ножки вши.

Этот чудной парень Левенгук был похож на молодого щенка, который, пренебрегая всеми правилами приличия и учтивости, с любопытством обнюхивает каждый новый предмет в окружающем его мире».

Де Крюи назвал Левенгука первым охотником за микробами.

А.Митрофанов

Посадка НЛО на лед, или Чаепитие с Эйнштейном

В.СУРДИН

Не проходит интерес у любознательных граждан к визитам пришельцев на Землю. Множество «таинственных» явлений собрано в коллекциях любителей НЛО. А ведь, если вдуматься, эти коллекции – интереснейший задачник для любителей физики, астрономии и вообще природы и техники. Каждому непридуманному случаю, связанному с «необъяснимым феноменом НЛО», в конце-концов можно найти объяснение, хотя порой это сделать совсем не просто. Разумеется, мы снисходительно отнесемся к неспециалисту, который не всегда отличает Луну или Венеру от «летающей тарелки», не знает, что в объективе фотокамеры часто возникают блики, или не помнит, каковы истинные расстояния до звезд и сколько времени требуется для преодоления таких расстояний. Но юный естествоиспытатель знает все это и стремится к полному пониманию даже самых «необъяснимых» явлений.

Много интересных случаев связано с наблюдениями необычных явлений в воздухе и в космическом пространстве. Не меньше захватывающих историй, любопытнейших находок и разоблачений в области истории, археологии, метеорологии и физики связано и с сообщениями о посадках НЛО на Землю. Это и «космодромы пришельцев», оказавшиеся древними храмами, и «примятые площадки» на месте убранных стогов сена, и «круги на полях» – следы атмосферных вихрей или тривиальных мистификаций. Сегодня же речь пойдет о «посадках НЛО на лед».

Загадка ледяных кругов

Весной 1990 года Харьковский планетарий пригласил меня прочитать несколько лекций на разные темы, в том числе и об НЛО. Планетарий в Харькове небольшой: в его круглом зале, где демонстрируется звездное небо, помещается человек сто. Но и этот скромный зал не всегда был заполнен слушателями, если предстояла лекция о космических исследованиях или астрономических открытиях. Однако лекции об НЛО неизменно проходили при полном аншлаге.

Гуляя по городу, я увидел объявление о серии лекций «Загадки НЛО» и решил отправиться на лекцию в ближайший же вечер. Правда, подойдя вечером к Лекторию харьковского общества «Знание», я обнаружил такой ажиотаж, что тут же оставил мысль о посещении в этот день уфологического мероприятия. Лишь на следующий вечер, благодаря любезной помощи сотрудников планетария, я попал на сбор любителей НЛО и, честное слово, не пожалел об этом.

Огромный зал человек на 600–700 был полон; за дверьми осталось множество обиженных безбилетников (а билеты были недешевы!). Скептических лиц в зале я почти не видел. Все были возбуждены, многие записывали в свои блокноты мельчайшие подробности встреч с НЛО, о которых рассказывали ведущие. Первая половина программы состояла из пересказа истории исследования НЛО начиная с 1947 года, когда американский пилот-любитель К.Арнольд поведал о встрече над Скалистыми горами с «эскадрильей летающих блюдечек», и до последних НЛО-событий в нашей стране (Хабаровск, Воронеж, Пермь, ...). Вторая половина вечера посвящалась местным чудесам.

Один из ведущих вечер рассказал, что зимой на льду небольшой реки группа энтузиастов обнаружила... место посадки НЛО. Точнее говоря, круг диаметром в несколько метров, выделяющийся более тонким подтаявшим льдом, в сравнении с толстым льдом, покрывающим реку в остальных местах. Уфологи подошли к делу серьезно: взяли пробы льда, измерили профиль дна реки, сделали магнитную съемку, изготовили слайды и кинофильм, даже, кажется, лозоходцев к «объекту» приглашали. Поскольку никакого разумного объяснения найденному чуду дать не смогли, решили, что перед ними место, оплавленное при посадке и взлете НЛО.

Выслушав этот рассказ, я попросил разрешения задать вопрос и обратился к тому из двух ведущих, который назвался физиком (второй был журналистом). Я спросил, не было ли на дне реки под загадочным кругом ямы. Оказалось, что была: промеры дна выявили глубокую яму как раз под этим кругом. (Кстати, у самих уфологов это еще больше укрепило подозрение в необычности их находки.) Удовлетворенный ответом относительно глубокой ямы, я спросил у «физика», не видит ли он здесь аналогии с известной задачей Эйнштейна о чашке чая. Вопроса он не понял: вероятно, не был знаком с этой известной задачей.

Помешивая ложечкой в чашке, наблюдай чаинки, в ней пребывающие

Существует легенда, что Альберт Эйнштейн, помешивая ложечкой чай, любил спрашивать друзей-физиков, почему чаинки на дне чашки собираются в центре в виде курганчика. Так ли было на самом деле, я не знаю, но есть документальный факт – в 1926 году Эйнштейн сделал в Прусской Академии доклад «Причины образования извилин в руслах рек и так называемый закон Бэра», где в качестве примера обсудил поведение чаинок в стакане:

«Представим себе чашку с плоским дном, полную чая. Пусть на дне ее имеется несколько чаинок, которые остаются там, так как оказываются тяжелее вытесняемой ими жидкости. Если с помощью ложки привести во вращение жидкость в чашке, то чаинки быстро соберутся в центре дна чашки. Объяснение этого явления заключается в следующем. Вращение жидкости приводит к появлению центробежных сил. Эти силы сами по себе не могли бы привести к изменению потока жидкости, если бы последняя вращалась как твердое тело. Но слои жидкости, находящиеся по соседству со стенками чашки, задерживаются благодаря трению, так что угловая скорость, с которой они вращаются, оказывается меньше, чем в других местах, более близких к центру. В частности, угловая скорость вращения, а следовательно, и центробежная сила будут вблизи дна меньше, чем вдали от него. Результатом этого явится круговое движение жидкости, ...которое возрастает до тех пор, пока под влиянием трения не станет стационарным. Чаинки сносятся в центр круговым движением, чем и доказывают его существование».

Позволю себе пояснить слова великого физика. Эйнштейн утверждает, что вращение жидкости в *неподвижной* чашке возбуждает циркуляцию, поднимающую жидкость вдоль оси вращения и опускающую вдоль стенок, – так называемую меридианальную циркуляцию. Поэтому вблизи дна жидкость движется от стенок к середине и собирает там осевшие на дно чаинки.

Нетрудно понять причину возникновения меридианальной циркуляции. Когда мы раскручиваем ложечкой чай, центробежная сила инерции пытается отодвинуть жидкость от оси вращения к краю чашки. Избыток несжимаемой жидкости поднимается вдоль краев сосуда, и ее свободная поверхность принимает вогнутую форму. От этого давление вдоль горизонтальных слоев жидкости перестает быть постоянным: оно возрастает с удалением от оси вращения, поскольку в этом направлении возрастает высота столба жидкости над слоем. Возникшая разность давлений как раз и является той причиной, которая обеспечивает жидкости движение по кругу.

Нетрудно найти форму свободной поверхности вращающейся жидкости. Свяжем центростремительное ускорение линейного элемента жидкости массой m с разностью действующих на него давлений (рис.1):

$$m\omega^2 R = p_1 - p_2 .$$

Но давление связано с высотой столба жидкости:

$$p = \rho g h ,$$

где ρ – плотность жидкости, а g – ускорение свободного падения, поэтому для несжимаемой жидкости ($\rho = \mathrm{const}$) разность давлений выразится через разность высот столбов:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g \Delta h .$$

Массу линейного элемента жидкости запишем как $m = \rho \Delta R$. Тогда из уравнения движения следует

$$\rho \Delta R \omega^2 R = \rho g \Delta h .$$

Отсюда получаем производную для формы поверхности жидкости:

$$\frac{\Delta h}{\Delta R} = \frac{\omega^2 R}{g} ,$$

а затем и уравнение самой поверхности:

$$h = \frac{(\omega R)^2}{2g} .$$

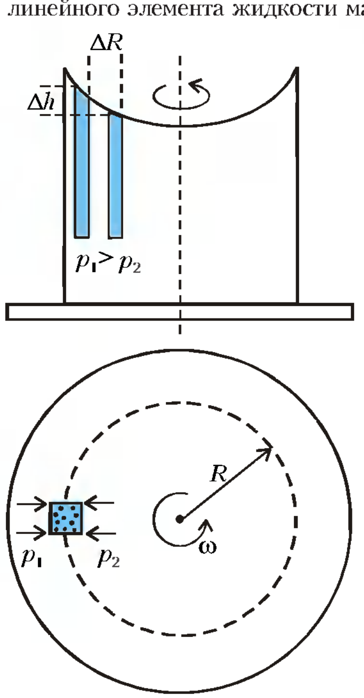


Рис.1. Рост давления с удалением от центра вращения играет роль центростремительной силы

Как видим, у жидкости, вращающейся «целиком» (как твердое тело) с постоянной во всех точках угловой скоростью ($\omega = \mathrm{const}$), свободная поверхность имеет форму параболоида ($h \sim R^2$). Кстати, именно это свойство использовал знаменитый американский оптик Роберт Вуд, чтобы сделать параболическое зеркало своего экспериментального телескопа из вращающейся чашки с ртутью. Но, обратите внимание, с помощью мотора Вуд равномерно вращал саму чашку, а не помешивал в ней ртуть ложечкой.

Мы можем сделать то же самое, поставив чашку чая в центр вращающегося диска проигрывателя. При этом мы увидим, что в установившемся режиме (т.е. спустя некоторое время после начала опыта) никаких потоков жидкости в чашке не наблюдается: система приходит в стационарное состояние.

Опыт Вуда получил в наши дни неожиданное продолжение: гигантские зеркала диаметром 8,2 метра для новых телескопов Европейской южной обсерватории в Чили изготовили недавно, выливая расплавленное стекло во вращающуюся посудину, – остывая и затвердевая, стекло приобрело нужную для фокусирующего зеркала форму вогнутого параболоида. Осталось лишь чуть-чуть отполировать его и покрыть тонким зеркальным слоем. Весьма удачно, что форма свободной поверхности

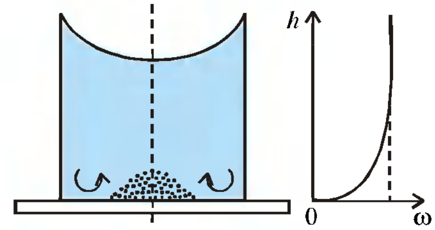


Рис.2. Угловая скорость вращения жидкости у самого дна уменьшается из-за трения. Баланс сил нарушается – возникает вертикальная циркуляция жидкости

вращающейся жидкости точно соответствует требованиям оптики.

Но мы немного отвлеклись. Что же происходит, когда жидкость раскручена в неподвижной чашке? Возникают так называемые краевые эффекты, вызванные трением жидкости о стенки и дно чашки. Нас сейчас особенно интересует дно, на котором лежат чаинки. Вблизи дна жидкость тормозится; распределение ее угловой скорости становится таким, как показано на рисунке 2 справа. Поэтому горизонтальная разность давлений (радиальный градиент давления) превышает там центробежную силу инерции и перемещает жидкость вдоль дна от краев к середине чашки. Вместе с жидкостью переезжают к середине и чаинки. Встретившись у оси вращения, потоки жидкости устремляются вверх (поскольку вниз пути нет), и *возникает циркуляция*. Жидкость поднимается, а тяжелые чаинки образуют в центре донышка курганчик.

В этом и заключается решение задачи Эйнштейна. Но какое отношение она имеет к загадочным кругам на льду?

Разгадка ледяных кругов

Вспомните – под кругом на дне реки была глубокая яма. Течение реки неравномерно: чем ближе к середине потока, тем интенсивнее (краевой эффект берегов). Поэтому с одной стороны ямы вода движется чуть быстрее, чем с другой, и в яме возникает круговое движение воды. (Хорошо помню, как в детстве мы боялись водоворотов, когда купались на маленьком притоке реки Миасс. Лет 100 назад, во время Уральской золотой лихорадки вся речушка была изрыта ямами, и над ними до сих пор существуют водяные воронки, затягивающие пловцов.) Но вот вопрос, возникнет ли при этом вертикальная циркуляция: ведь поверхность воды прижата льдом и не может принять вогнутую форму.

Я думаю, что циркуляция подо льдом возникает. Дело в том, что слои воды различаются по плотности: внизу – более плотные, наверху – менее. Вращение придает вогнутую форму не сво-

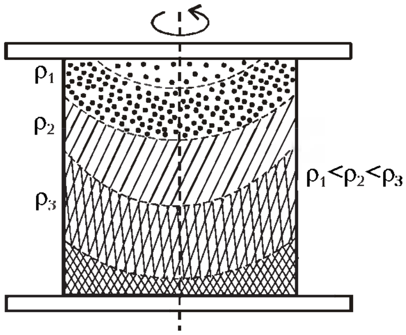


Рис.3. Если жидкость лишена свободной поверхности, ее роль играют условные поверхности, разделяющие слои разной плотности

бодной поверхности жидкости, а границам между слоями разной плотности (рис.3). Возникновение циркуляции легко доказать экспериментально. Поставьте стакан с водой в середину диска проигрывателя, бросьте в воду ложку поваренной соли (для создания градиента плотности) и несколько кристалликов марганцовокислого калия (чтобы проследить за потоками). Теперь плотно закройте стакан сверху, рраскрутите и резко остановите — вы увидите меридиональную циркуляцию. Значит, «эффект Эйнштейна» подхватит плотную воду со дна ямы и выбросит ее наверх, к нижней кромке льда.

И вот тут нужно вспомнить самое главное. Зимой температура воды близка к нулю, а вблизи нуля максимальная плотность воды достигается при температуре +4 °С. Именно эта вода будет подниматься со дна ямы наверх и омывать нижнюю поверхность льда. Вот почему лед над ямой будет таять.

Такое объяснение можно дать загадочным кругам на льду рек, если вспомнить законы физики. Разумеется, в тот памятный вечер в Харькове мне не позволили рассказать все это аудитории — наиболее активные слушатели негодующе зашипели, и я вынужден был сесть на место.

НАМ ПИШУТ

Автомобиль и... кубическое уравнение

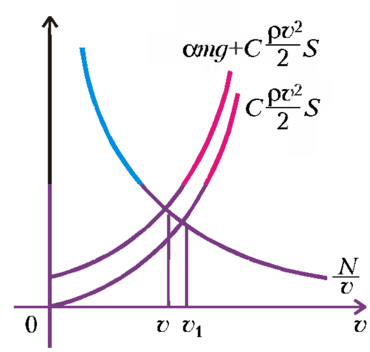
В замечательном «Справочнике по физике» — автор А.С.Енохович, издание 2-е, М.: Просвещение, 1990 — на страницах 293 – 294 есть таблица «Технические данные легковых автомобилей». Приведенный здесь фрагмент таблицы наводит на вопрос: как (хотя бы приблизительно) вычислить максимальную скорость v автомобиля массой m с двигателем наибольшей мощности N? Ведь конструкторы, проектируя машину, наверняка хотят заранее знать ее максимальную скорость.

Ясно, что при достижении автомобилем наибольшей скорости его ускорение обращается в ноль и сила тяги двигателя, равная N/v, уравновешивается противоположно направленными ей силами трения качения αmg и сопротивления воздуха $C\rho v^2 S/2$ (совершенно незначительной силой вязкого трения пренебрегаем). Здесь $\alpha = 0{,}018$ — коэффициент трения качения для асфальтового шоссе (с.78 вышеупомянутого «Справочника»), C — безразмерный коэффициент, зависящий от обтекаемости автомобиля, S — площадь его лобового сечения, $\rho = 1{,}29$ кг/м^3 — плотность воздуха. К сожалению, в таблицах не удалось найти значения C для автомобиля, к тому же у разных машин разная обтекаемость, поэтому мы посчитали разумным взять среднее арифметическое коэффициентов для диска (1,10) и тела обтекаемой формы (0,05). Тогда $C/2 = 0{,}2875$. Было бы странно при столь простом усреднении сохранять после запятой более одной цифры, поэтому будем считать $C/2 = 0{,}3$.

Итак, имеем уравнение

$$\frac{N}{v} = \alpha mg + C\frac{\rho v^2}{2}S,$$

которое после избавления от знаменателя станет кубическим. На рисунке дано его графическое решение, однако уравнение несложно решить и аналитически. Легко видеть, что второе слагаемое в правой части нашего уравнения в 5 – 6 раз больше первого. Значит, пренебрегая величиной αmg, в первом приближении получаем несколько завышенный результат:



$$v_1 = \sqrt[3]{\frac{10N}{3\rho S}}.$$

Для ЗИЛа, например, $v_1 = 57{,}5$ м/с= = 207 км/ч, при этом левая и правая части уравнения равны, соответственно, 4024 Н и 4628 Н. А при скорости $v = 54{,}5$ м/с = 196 км/ч имеет место приближенное с точностью до 1% равенство: 4253 Н ≈ 4206 Н. Это очень хорошее совпадение, учитывая характер расчета. Результаты аналогичных вычислений для двух других типов автомобилей таковы:

«Волга» — $v_1 = 150$ км/ч, $v = 143$ км/ч;

«Запорожец» — $v_1 = 121$ км/ч, $v = 114$ км/ч.

Отметим, что к массе автомобиля везде прибавлялась масса шофера, равная 100 кг.

В.Дроздов

Показатели	«Запорожец» (ЗАЗ-968М)	«Волга» (ГАЗ-3102)	ЗИЛ-4104
Максимальная скорость, км/ч	118	152	190
Собственная масса, кг	840	1470	3335
Максимальная мощность двигателя, кВт	30,2	77,2	231,8
Ширина автомобиля, мм	1490	1846	2088
Высота автомобиля, мм	1370	1476	1500

Задачи по атомной и ядерной физике

В.МОЖАЕВ

В НАЧАЛЕ НАШЕГО (УЖЕ УХОДЯщего) века было установлено, что атом любого химического элемента состоит из положительно заряженного ядра и окружающей его электронной оболочки, электроны которой обращаются вокруг ядра под действием электрических сил. Линейные размеры ядер порядка $10^{-13}-10^{-12}$ см, а размеры самих атомов, определяемые электронными оболочками, примерно в 10^5 раз больше. Несмотря на малый относительный размер ядра, почти вся масса атома (99,95%) сосредоточена именно в нем. Это связано с тем, что электронная оболочка состоит только из электронов (e), а в состав ядра входят значительно более тяжелые протоны (p) и нейтроны (n): $m_p = 1836{,}15\ m_e$, $m_n = 1836{,}68\ m_e$.

Если строение и свойства электронной оболочки определяются электрическим полем ядра атома, то внутри ядра между нуклонами (протонами и нейтронами) действуют так называемые ядерные силы, которые в сотни раз более сильные, чем электромагнитные.

Атом является чисто квантово-механической системой. Однако и для таких систем выполняются фундаментальные законы сохранения полной энергии и импульса.

А теперь – несколько конкретных задач, в основе которых лежат именно законы сохранения.

Задача 1. *На какое минимальное расстояние r могут сблизиться при лобовом столкновении центры* α*-частицы с кинетической энергией* $T = 6$ *МэВ и неподвижного ядра золота? Порядковый номер золота* $Z_{Au} = 79$, *а его массовое число* $A_{Au} = 197$.

Будем рассматривать процесс лобового столкновения α-частицы с ядром золота в системе координат, в которой ядро золото первоначально покоилось. Очевидно, что при максимальном сближении α-частицы и ядра в этой системе координат они будут двигаться как единое целое с некоторой скоростью v. Запишем законы сохранения полной энергии и импульса для данной системы частиц. Поскольку кинетическая энергия α-частицы много меньше ее энергии покоя ($m_\alpha c^2 = 3730$ МэВ), полную энергию α-частицы (а тем более ядра золота) можно записать в нерелятивистском виде: как сумму энергии покоя и кинетической энергии.

Полная энергия системы наших частиц, когда они были на большом удалении друг от друга, равна

$$E_1 = m_\alpha c^2 + T + M_{Au} c^2,$$

а импульс этой системы равен

$$p_1 = \sqrt{2 m_\alpha T},$$

где m_α – масса α-частицы (т.е. ядра атома гелия), M_{Au} – масса ядра золота, c – скорость света. В момент максимального сближения полная энергия системы составляет

$$E_2 = m_\alpha c^2 + M_{Au} c^2 + \frac{1}{2}\left(m_\alpha + M_{Au}\right) v^2 + \frac{Z_{He} Z_{Au} e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где e – заряд электрона, r – расстояние между частицами. Импульс же составляет

$$p_2 = \left(m_\alpha + M_{Au}\right) v.$$

Законы сохранения энергии и импульса будут иметь вид

$$T = \frac{1}{2}\left(m_\alpha + M_{Au}\right) v^2 + \frac{Z_{He} Z_{Au} e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

$$\sqrt{2 m_\alpha T} = \left(m_\alpha + M_{Au}\right) v.$$

Из совместного решения этих уравнений найдем минимальное расстояние между частицами:

$$r = \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_{Au}}\right) \frac{Z_{He} Z_{Au} e^2}{4\pi\varepsilon_0 T} = \left(1 + \frac{A_{He}}{A_{Au}}\right) \frac{Z_{He} Z_{Au} e^2}{4\pi\varepsilon_0 T} \approx 3{,}9 \cdot 10^{-12}\ \text{см}.$$

Задача 2. *Используя модель Бора для атома водорода, найдите дискретные уровни энергий и классические радиусы орбит электрона для водородоподобного атома (водородоподобным атомом называют ион с зарядом ядра Ze, вокруг которого вращается один электрон). Вычислите потенциал ионизации для атома водорода и радиус первой боровской орбиты.*

Пусть масса ядра иона $M_я$, а масса электрона m_e. Между ионом и электроном действует электростатическая сила, и они вращаются по круговым орбитам относительно их общего центра масс. Если радиус орбиты ядра $r_я$, а радиус орбиты электрона r_e, то эти радиусы связаны между собой соотношением

$$M_я r_я = m_e r_e. \qquad (1)$$

Уравнение движения электрона в системе центра масс имеет вид

$$\frac{m_e v_e^2}{r_e} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \left(r_e + r_я\right)^2}, \qquad (2)$$

где v_e – скорость электрона. Отсюда следует, что кинетическая энергия электрона равна

$$T_e = \frac{m_e v_e^2}{2} = \frac{Ze^2 r_e}{8\pi\varepsilon_0 \left(r_e + r_я\right)^2}.$$

Аналогично, для ядра получаем

$$T_я = \frac{M_я v_я^2}{2} = \frac{Ze^2 r_я}{8\pi\varepsilon_0 \left(r_e + r_я\right)^2}.$$

Тогда суммарная кинетическая энергия иона составляет

$$T = T_e + T_я = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 \left(r_e + r_я\right)}.$$

Потенциальная энергия электростатического взаимодействия между ядром и электроном равна

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \left(r_e + r_я\right)},$$

а полная энергия иона –

$$E = T + U = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 \left(r_e + r_я\right)}. \qquad (3)$$

До сих пор мы пользовались чисто классическими представлениями. Теперь воспользуемся правилом квантования момента импульса для нашего иона: суммарный момент импульса системы электрон–ядро кратен постоянной Планка $\hbar$, т.е.

$$m_e v_e r_e + M_я v_я r_я = n\hbar,$$

где n = 1, 2, 3... Поскольку импульс иона равен нулю, $m_e v_e = M_я v_я$ и, следовательно,

$$m_e v_e \left(r_e + r_я\right) = n\hbar. \qquad (4)$$

Исключая скорость электрона v_e из уравнений (2) и (4), найдем возможные значения радиусов орбит электрона:

$$r_{en} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Ze^2 m_e} n^2, \qquad (5)$$

а из уравнений (1) и (5) найдем возможные радиусы орбит ядра:

$$r_{яn} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Ze^2 M_я} n^2.$$

Если говорить об орбитах электрона в системе координат, связанной с ядром, то

$$r_n = r_{en} + r_{яn} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Ze^2 \dfrac{m_e M_я}{m_e + M_я}} n^2 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Ze^2\mu} n^2, \qquad (6)$$

где $\mu = \dfrac{m_e M_я}{m_e + M_я}$ – так называемая приведенная масса. Подставляя полученное выражение (6) в формулу (3), получим дискретные значения полной энергии стационарных состояний иона:

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Потенциалом ионизации атома называют минимальную энергию, необходимую для перевода атома из нормального состояния (n = 1) в несвязанное состояние ($n \to \infty$). Для атома водорода Z = 1, $\mu = \dfrac{m_e m_p}{m_e + m_p}$, где m_p – масса протона, поэтому потенциал ионизации атома водорода равен

$$E_i = \frac{m_e m_p e^4}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \left(m_e + m_p\right)\hbar^2} \approx 13{,}55 \text{ эВ},$$

а радиус первой боровской орбиты (боровский радиус) –

$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2\left(m_e + m_p\right)}{e^2 m_e m_p} \approx 0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Заметим, что боровский радиус и потенциал ионизации атома водорода являются характерными масштабами длины и энергии в атомных системах.

Задача 3. *Позитроний представляет собой связанную систему из электрона и позитрона, вращающихся вокруг их центра масс. (Позитроний образуется при столкновении медленных нейтронов с атомами вещества и захвате позитроном атомного электрона.) Найдите уровни энергии, энергию ионизации и минимальное расстояние между электроном и позитроном для позитрония.*

Будем рассматривать позитроний как водородоподобный атом и воспользуемся результатами, полученными в предыдущей задаче. Для позитрония Z = 1, а приведенная масса $\mu = m_e/2$ (масса позитрона равна массе электрона), поэтому выражение для энергетических уровней позитрония примет вид

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{4\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда для энергии ионизации позитрония (при $n \to \infty$) получим

$$E_i = \frac{m_e e^4}{4\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2} \approx 6{,}77 \text{ эВ}.$$

Минимальное расстояние между электроном и позитроном найдем из выражения (6) для радиусов боровских орбит (при n = 1):

$$r_{\min} = \frac{8\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \approx 1{,}0 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Задача 4. *Термоядерная реакция* ${}^2_1\text{H} + {}^3_2\text{He} \to {}^4_2\text{He} + {}^1_1p$ *идет с выделением энергии* Q_1 = *18,4 МэВ (кинетическая энергия образовавшихся частиц на величину* Q_1 *больше кинетической энергии исходных). Какая энергия* Q_2 *выделится в реакции* ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \to {}^4_2\text{He} + 2{}^1_1p$*, если дефект масс ядра* ${}^3_2\text{He}$ *на* ΔM = *0,006 а.е.м. больше, чем у ядра* ${}^2_1\text{H}$*?*

Масса покоя любого ядра всегда меньше суммы масс покоя входящих в его состав нуклонов (протонов и нейтронов). Для количественной характеристики этого эффекта вводится специальная величина, называемая дефектом масс, – разность между суммой масс нуклонов, входящих в состав ядра, и массой самого ядра. В ядерной физике массы частиц принято измерять в энергетических единицах. Заданная в условии задачи величина ΔM = 0,006 а.е.м. соответствует энергии ΔMc^2 = 5,589 МэВ.

Дефект масс ядра гелия-3 (${}^3_2\text{He}$) равен

$$\Delta M_3 = 2m_p + m_n - M_3,$$

где m_p – масса протона, m_n – масса нейтрона, а M_3 – масса ядра гелия-3. Аналогично запишем дефект масс ядра дейтерия с массой M_2:

$$\Delta M_2 = m_p + m_n - M_2.$$

Из этих уравнений получим

$$\Delta M_3 - \Delta M_2 = \Delta M = m_p + M_2 - M_3.$$

Теперь рассмотрим данные термоядерные реакции. Так как число нуклонов в обеих реакциях не изменяется, энерговыделение в реакциях обусловлено изменением дефектов масс участвующих в реакции ядер. Закон сохранения энергии запишем в виде

$$M_2c^2 + M_3c^2 = M_4c^2 + m_pc^2 + Q_1,$$

$$M_3c^2 + M_3c^2 = M_4c^2 + 2m_pc^2 + Q_2,$$

где M_4 – масса ядра гелия-4. Вычитая уравнения одно из другого, найдем искомую энергию:

$$Q_2 = Q_1 - \left(m_pc^2 + M_2c^2 - M_3c^2\right) = Q_1 - \Delta Mc^2 \approx 12{,}8 \text{ МэВ}.$$

Задача 5. *Ядерная реакция* ${}^4\text{He} + {}^{14}\text{N} \to {}^{17}\text{O} + p$ *может идти, если налетающие на неподвижные ядра азота* α*-частицы имеют энергию, превышающую пороговую энергию* $E_п$ = *1,45 МэВ. На сколько энергия* α*-частиц должна быть больше пороговой, чтобы кинетическая энергия образующихся протонов могла быть равной нулю? Рассмотрите нерелятивистский случай.*

Поскольку данная реакция может идти только при энергиях, превышающих пороговую, это означает, что реакция идет с поглощением энергии (такие реакции называются эндотермическими). Очевидно, что в этом случае энергия покоя продуктов реакции больше энергии покоя исходных частиц. Обозначим эту разность через Q и назовем энергией реакции.

Рассмотрим случай, когда налетающая α-частица обладает кинетической энергией, равной пороговой энергии $E_п$, т.е. когда $p_\alpha^2/\left(2m_\alpha\right) = E_п$, где p_α – импульс α-частицы, а m_α – ее масса. В этом случае продукты реакции будут двигаться как единое целое, т.е. с одной и той же скоростью, которую обозначим через u. Запишем закон сохранения энергии:

$$E_п = \frac{M_O u^2}{2} + \frac{m_p u^2}{2} + Q$$

и закон сохранения импульса:

$$\sqrt{2m_\alpha E_\text{п}} = \left(M_\text{O} + m_p\right)u,$$

где M_O – масса ядра атома кислорода, а m_p – масса протона. Исключая из уравнений скорость u, получим

$$Q = E_\text{п}\left(1 - \frac{m_\alpha}{M_\text{O} + m_p}\right).$$

Пусть теперь кинетическая энергия α-частицы T_α больше $E_\text{п}$, а образовавшийся в результате реакции протон неподвижен. Законы сохранения энергии и импульса в этом случае будут иметь вид

$$T_\alpha = \frac{M_\text{O}v^2}{2} + Q, \quad \sqrt{2m_\alpha T_\alpha} = M_\text{O}v,$$

где v – скорость ядра атома кислорода. После исключения из этих уравнений скорости v, получим

$$T_\alpha = Q\frac{M_\text{O}}{M_\text{O} - m_\alpha} = E_\text{п}\frac{M_\text{O}\left(M_\text{O} + m_p - m_\alpha\right)}{\left(M_\text{O} - m_\alpha\right)\left(M_\text{O} + m_p\right)}.$$

Энергия α-частицы будет больше пороговой энергии на величину

$$T_\alpha - E_\text{п} = E_\text{п}\frac{m_\alpha m_p}{\left(M_\text{O} - m_\alpha\right)\left(M_\text{O} + m_p\right)} \approx 0{,}025 \text{ МэВ}.$$

Задача 6. *В настоящее время в природном уране содержится $\eta_1 = 99{,}28\%$ урана-238 и $\eta_2 = 0{,}72\%$ урана-235. Вычислите возраст Земли в предположении, что в момент ее образования количества обоих изотопов урана были одинаковыми. Периоды полураспадов ядер ^{238}U и ^{235}U равны, соответственно $\tau_1 = 4{,}56\cdot 10^9$ лет и $\tau_2 = 0{,}71\cdot 10^9$ лет.*

Воспользуемся основным законом радиоактивного распада

$$N(t) = N_0\cdot 2^{-t/\tau},$$

где $N(t)$ – число нераспавшихся ядер через произвольное время t после начала отсчета, N_0 – число нераспавшихся ядер в момент начала отсчета, τ – период полураспада данных ядер. В нашем случае за начало отсчета времени мы выбираем момент образования Земли. Пусть N_0 – число ядер каждого изотопа в природном уране на момент образования Земли, тогда число этих ядер в настоящий момент t равно

$$N_1(t) = N_0\cdot 2^{-t/\tau_1} \text{ и } N_2(t) = N_0\cdot 2^{-t/\tau_2}.$$

Поделив одно равенство на другое, получим

$$\frac{N_1(t)}{N_2(t)} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = 2^{t\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)}.$$

Прологарифмировав обе части данного уравнения, найдем возраст Земли:

$$t = \frac{\ln(\eta_1/\eta_2)}{\ln 2}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \approx 6\cdot 10^9 \text{ лет}.$$

Упражнения

1. В 1989 году впервые наблюдалось образование протониума – атома, состоящего из протона и антипротона (частица с массой протона и зарядом, равным по величине и по знаку заряду электрона). Определите энергию излучения, соответствующую переходу протониума из состояния с $n = 2$ в состояние с $n = 1$.

2. При слиянии протона и ядра трития образуются α-частица (ядро атома гелия) и γ-квант: ${}^1_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \to {}^4_2\text{He} + \gamma$. Дефект масс ядра ${}^4_2\text{He}$ составляет 0,0304 а.е.м. (1 а.е.м. соответствует энергии 931,5 МэВ). Кинетическая энергия частиц, образующихся в реакции ${}^3_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \to {}^4_2\text{H} + 2{}^1_0n$, на 11,3 МэВ больше кинетической энергии исходных частиц. Определите энергию, уносимую γ-квантом в первой реакции. Кинетическими энергиями протона, ядра трития и α-частицы можно пренебречь.

3. При захвате нейтрона ядром лития происходит ядерная реакция ${}^6\text{Li} + n = {}^3\text{H} + {}^4\text{He}$, в которой выделяется энергия $Q = 4{,}8$ МэВ. Найдите распределение кинетической энергии между продуктами реакции. Кинетическую энергию исходных частиц считайте пренебрежимо малой.

4. Определите энергию, уносимую за 1 час α-частицами, получающимися при распаде 1 г радия (^{226}Rd), если скорость α-частиц равна $1{,}51\cdot 10^9$ см/с, а период полураспада радия составляет 1602 года.

ОЛИМПИАДЫ

XXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

Зональный этап

По традиции, зональный (четвертый) этап математической олимпиады 1998/99 учебного года проходил в дни весенних школьных каникул. В этом году олимпиаду принимали Иваново, Курск, Пермь и Барнаул. В олимпиаде участвовали около 350 учащихся 8, 9, 10 и 11 классов – победителей областных олимпиад. Соревнования проводились в два дня. В каждый из этих дней участникам было предложено решить по четыре задачи в течение четырех часов.

По просьбе членов жюри олимпиады школьники каждой параллели назвали лучшие с их точки зрения задачи. Таковыми стали задачи: 7 для 8 класса («домино»), 4 для 9 и 10 классов («лабиринт»), 3 для 11 класса («болтуны и молчуны») и 4 для 11 класса («большие грани»).

Задачи

8 класс

1. Отец с двумя сыновьями отправились навестить бабушку, которая живет в 33 км от города. У отца есть мотороллер, скорость которого 25 км/ч, а с пассажиром – 20 км/ч (двух пассажиров на мотороллере перевозить нельзя). Каждый из братьев идет по дороге со скоростью 5 км/ч. Докажите, что все трое доберутся до бабушки за 3 часа.

2. К натуральному числу A приписали справа три цифры. Получившееся число оказалось равным сумме всех натуральных чисел от 1 до A. Найдите A.

И.Акулич

3. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что медианы A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны прямым AB, BC, CA. Определите, в каком отношении точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника ABC.

А.Шаповалов

4. Имеется 40 газовых баллонов, значения давления газа в которых нам неизвестны и могут быть различны. Разрешается соединять любые баллоны друг с другом в количестве, не превосходящем заданного натурального числа k, а затем разъединять их; при этом давление газа в соединяемых баллонах устанавливается равным среднему арифметическому давлений в них до соединения. При каком наименьшем k существует способ уравнивания давлений во всех 40 баллонах независимо от первоначального распределения давлений в баллонах?

И.Акулич

5. Докажите, что числа от 1 до 15 нельзя разбить на две группы: A из 2 чисел и B из 13 чисел так, чтобы сумма чисел в группе B была равна произведению чисел в группе A.

Н.Агаханов

6. Дан нетупоугольный треугольник ABC. Точка A_1 симметрична вершине A относительно прямой BC, а точка C_1 симметрична вершине C относительно прямой AB. Докажите, что если точки A_1, B и C_1 лежат на одной прямой и $C_1B = 2A_1B$, то угол CA_1B – прямой.

Н.Агаханов

7. В коробке лежит полный набор костей домино. Два игрока по очереди выбирают из коробки по одной кости и выкладывают их на стол, прикладывая к уже выложенной цепочке с любой из двух сторон по правилам домино. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре?

Д.Храмцов

8. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов полностью закрыть поверхность куба $3\times3\times3$?

А.Шаповалов

9 класс

1. По кругу выписаны в некотором порядке все натуральные числа от 1 до N, $N \ge 2$. При этом для любой пары соседних чисел имеется хотя бы одна цифра, встречающаяся в десятичной записи каждого их них. Найдите наименьшее возможное значение N.

Д.Кузнецов

2. В треугольнике ABC на стороне AC нашлись такие точки D и E, что $AB = AD$ и $BE = EC$ (E между A и D). Точка F – середина дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что точки B, E, D, F лежат на одной окружности.

С.Берлов

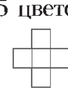
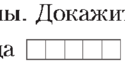
3. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что если $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge x + y + z$, то для натурального k выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \ge x^k + y^k + z^k.$$

С.Злобин

4. Лабиринт представляет собой квадрат 8×8, в каждой клетке 1×1 которого нарисована одна из четырех стрелок (вверх, вниз, вправо, влево). Верхняя сторона правой верхней клетки – выход из лабиринта. В левой нижней клетке находится фишка, которая каждым своим ходом перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелкой. После каждого хода стрелка в клетке, в которой только что была фишка, поворачивается на 90° по часовой стрелке. Если фишка должна сделать ход, выводящий ее за пределы квадрата 8×8, она остается на месте, а стрелка также поворачивается на 90° по часовой стрелке. Докажите, что рано или поздно фишка выйдет из лабиринта.

М.Антонов

5. Все клетки клетчатой плоскости окрашены в 5 цветов так, что в любой фигуре вида  все цвета различны. Докажите, что в любой фигуре вида  все цвета различны.

С.Берлов

6. См. задачу 7 для 8 класса.

7. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается 1 раз. Например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)

8. В треугольнике ABC ($AB > BC$) K и M – середины сторон AB и AC, O – точка пересечения биссектрис. Пусть P – точка пересечения прямых KM и CO, а точка Q такова, что $QP \perp KM$ и $QM \parallel BO$. Докажите, что $QO \perp AC$.

М.Сонкин

10 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω, и точка B ($B \ne A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой.

П.Кожевников

3. В пространстве даны n точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой, никакие четыре не лежат в одной плоскости). Через каждые три из них проведена плоскость. Докажите, что какие бы $n - 3$ точки в пространстве ни взять, найдется плоскость из проведенных, не содержащая ни одной из этих $n - 3$ точек.

В.Дольников, С.Игонин

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. Существуют ли 10 различных целых чисел таких, что все суммы, составленные из 9 из них, – точные квадраты?

Р.Садыков, Е.Черепанов

6. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB, AC и BC в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Пусть K – точка на окружности, диаметрально противоположная точке C_1, D – точка пересечения прямых B_1C_1 и A_1K. Докажите, что $CD = CB_1$.

М.Евдокимов

7. Каждый голосующий на выборах вносит в избирательный бюллетень фамилии n кандидатов. На избирательном участке находится $n + 1$ урна. После выборов выяснилось, что в каждой урне лежит по крайней мере один бюллетень и при всяком выборе $(n+1)$-го бюллетеня по одному из каждой урны найдется кандидат, фамилия которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат фамилию одного и того же кандидата.

В.Дольников

8. Некоторые натуральные числа отмечены. Известно, что на каждом отрезке числовой прямой длины 1999 есть отмеченное число. Докажите, что найдется пара отмеченных чисел, одно из которых делится на другое.

С.Берлов

11 класс

1. О функции $f(x)$, заданной на всей вещественной прямой, известно, что при любом $a > 1$ функция $f(x) + f(ax)$ непрерывна на всей прямой. Докажите, что $f(x)$ также непрерывна на всей прямой.

А.Голованов

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей-молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали.

С.Берлов

4. Многогранник описан около сферы. Назовем его грань *большой*, если проекция сферы на плоскость грани целиком попадает в грань. Докажите, что *больших* граней не больше 6.

М.Евдокимов

5. Существуют ли действительные числа a, b и c такие, что при всех действительных x и y выполняется неравенство

$$|x+a| + |x+y+b| + |y+c| > |x| + |x+y| + |y|?$$

В.Сендеров

6. Клетки квадрата 50×50 раскрашены в четыре цвета. Докажите, что существует клетка, с четырех сторон от которой (т.е. сверху, снизу, слева и справа) имеются клетки одного с ней цвета.

А.Голованов, Е.Сопкина

7. См. задачу 8 для 9 класса.

8. Для бесконечного множества значений многочлена существует более одной целой точки, в которой принимаются эти значения. Докажите, что существует не более одного целого значения многочлена, принимаемого ровно в одной целой точке.

А.Голованов

Заключительный этап

Пятый (заключительный) этап олимпиады был проведен с 14 по 21 апреля в столице Республики Адыгея Майкопе.

16 и 17 апреля участников олимпиады ожидали сложные испытания, им предстояло за 5 часов решить 4 задачи. По мнению жюри, в этом году конкурсные задания были в целом труднее, чем в предыдущие несколько лет. Оказалось, что никто из участников не сумел решить всех задач, хотя каждая задача была кем-нибудь решена.

Традиционный опрос участников олимпиады выявил наиболее интересные для них задачи: 8 для 9 и 11 классов («кусачки») и 3 для 10 класса (впервые за последние годы участники назвали лучшей задачу по геометрии!).

Школьники предложили немало интересных и оригинальных решений, иногда даже неизвестных членам жюри. Самым сильным творческим достижением жюри признало решение задачи 4 учеником 9 класса Московской государственной Пятьдесят седьмой школы Ильей Межировым. Илья оказался единственным участником, решившим эту задачу. Интересно, что это выяснилось лишь при показе работ, а до этого момента жюри не верило в правильность решения.

Интересно также отметить, что два лучших результата по параллели 11 классов были показаны десятиклассниками В.Дремовым и А.Поярковым, а второй результат по параллели 10 классов – восьмиклассником А.Халявиным.

Диплом II степени по 11 классу получил 12-летний Р.Травкин («Квант» уже рассказывал об этом талантливом мальчике из Липецка в №5 за 1997 год). Самым юным участником олимпиады оказался 11-летний краснодарец Е.Молчанов.

Жюри определило состав команды России на Международной математической олимпиаде 1999 года. В нее вошли В.Дремов, А.Евсеев, А.Лебедев, Ю.Лифшиц, Ф.Петров, А.Поярков, запасные – М.Карвонен и А.Халявин.

Задачи

9 класс

1. В числе A цифры идут в возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9 \cdot A$?

С.Волченков

2. См. задачу М1696 «Задачника «Кванта».

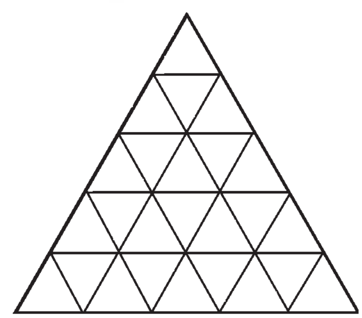
3. Треугольник ABC вписан в окружность S. Пусть A_0 – середина дуги BC окружности S, не содержащей A; C_0 – середина дуги AB, не содержащей C. Окружность S_1 с центром A_0 касается BC, окружность S_2 с центром C_0 касается AB. Докажите, что центр I вписанной в треугольник ABC окружности лежит на одной из общих внешних касательных к окружностям S_1 и S_2.

М.Сонкин

4. Числа от 1 до 1000000 покрашены в два цвета – черный и белый. За ход разрешается выбрать любое число от 1 до 1000000 и перекрасить его и все числа, не взаимно простые с ним, в противоположный цвет. Вначале все числа были черными. Можно ли за несколько ходов добиться того, что все числа станут белыми?

С.Берлов

5. Правильный треугольник разбит на правильные треугольники со стороной 1 линиями, параллельными его сторонам и делящими каждую сторону на n частей (на рисунке $n = 5$).



Какое наибольшее число отрезков длины 1 с концами в вершинах этих треугольников можно отметить так, чтобы не нашлось треугольника, все стороны которого состоят из отмеченных отрезков?

М.Антонов

6. См. задачу М1699 «Задачника «Кванта».

7. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O. Докажите, что угол BFO – прямой.

С.Берлов

8. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя – либо один, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре?

Д.Карпов

10 класс

1. На столе стоят три пустые банки из-под меда. Винни-Пух, Кролик и Пятачок по очереди кладут по одному ореху в одну из банок. Их порядковые номера до начала игры определяются жребием. При этом Винни может добавлять орех только в первую или вторую банку, Кролик – только во вторую или третью, а Пятачок – в первую или третью. Тот, после чьего хода в какой-нибудь банке оказалось ровно 1999 орехов, проигрывает. Докажите, что Винни-Пух и Пятачок могут, договорившись, играть так, чтобы Кролик проиграл.

Ф.Бахарев

2. Найдите все бесконечные ограниченные последовательности натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ..., для всех членов которых, начиная с третьего, выполнено условие

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{\text{НОД}(a_{n-1}, a_{n-2})}.$$

С.Волченков

3. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. К окружностям, вписанным в треугольники BKL, CLM и AKM, проведены попарно общие внешние касательные, отличные от сторон треугольника ABC. Докажите, что эти касательные пересекаются в одной точке.

М.Сонкин

4. См. задачу М1704 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1697 «Задачника «Кванта».

6. В треугольнике ABC окружность, проходящая через вершины A и B, касается прямой BC, а окружность, проходящая через вершины B и C, касается прямой AB и пересекает первую окружность в точке K, $K \neq B$. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что угол BKO – прямой.

С.Берлов

7. См. задачу М1701 «Задачника «Кванта».

8. См. задачу М1702 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Существуют ли 19 попарно различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр таких, что их сумма равна 1999?

О.Подлипский

2. Во всех рациональных точках вещественной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдется такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.

С.Берлов

3. Окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$, касается его сторон DA, AB, BC, CD в точках K, L, M, N соответственно. Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 – соответственно окружности, вписанные в треугольника AKL, BLM, CMN, DNK. К окружностям S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 проведены общие внешние касательные, отличные от сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четырехугольник, образованный этими четырьмя касательными, – ромб.

М.Сонкин

4. См. задачу М1704 «Задачника «Кванта».

5. Четыре натуральных числа таковы, что квадрат суммы любых двух из них делится на произведение двух оставшихся. Докажите, что по крайней мере три из этих чисел равны между собой.

С.Берлов

6. Докажите, что три выпуклых многоугольника на плоскости нельзя пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда каждый многоугольник можно отделить от двух других прямой (т.е. существует прямая такая, что этот многоугольник и два остальных лежат по ее разные стороны).

В.Дольников

7. Через вершину A тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, касательная к описанной около него сфере. Докажите, что линии пересечения этой плоскости с плоскостями граней ABC, ACD и ABD образуют шесть равных углов тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

Д.Терешин

8. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя – либо два, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре?

Д.Карпов

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Воробьев Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Гусев Глеб – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Волков Сергей – Мурманск, Мурманский политехнический лицей,
Деветьяров Дмитрий – Кирово-Чепецк, гимназия,
Межиров Илья – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Смирнов Филипп – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Глазырин Алексей – Челябинск, лицей 11;

по 10 классам –

Лифшиц Юрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Халявин Андрей – Киров, ФМЛ;

по 11 классам –

Дремов Владимир – Волгодонск, школа 24.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Соколов Сергей – Рыбинск, школа 30,
Прудова Нина – Саров, гимназия 15,
Гарбер Михаил – Ярославль, школа 33,
Медвинский Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 366,
Горский Евгений – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Мусатов Данил – Москва, гимназия 1543,
Ицыксон Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кузнецов Андрей – Киров, ФМЛ,
Акопян Арсений – Москва, лицей «Вторая школа»,
Спиридонов Сергей – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей;

по 10 классам –

Крамаренко Денис – Краснодар, школа 42,
Горелов Сергей – Челябинск, ФМЛ 31,
Тихомиров Сергей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Скопенков Михаил – Саратов, ФТЛ 1,

Исмагилов Ильнур – Саров, муниципальный лицей 3,
Красненко Екатерина – Омск, лицей 64,
Карвонен Максим – Рыбинск, многопрофильный лицей 2,
Зильберман Роман – Челябинск, ФМЛ 31,
Федотов Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Теннова Наталия – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Агапов Андрей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Гайфуллин Александр – Раменское, Многопрофильная гимназия,
Зинин Евгений – Краснодар, школа-гимназия 87;

по 11 классам –

Поярков Алексей – Рыбинск, многопрофильный лицей 2,
Фарутин Александр – Санкт-Петербург, Классическая гимназия,
Петров Федор – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зуев Владимир – Санкт-Петербург, ФМГ 30,
Евсеев Антон – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Трушин Борис – Долгопрудный, ФМШ 5,
Лебедев Алексей – Нижний Новгород, лицей 40,
Гаас Валерий – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей,
Травкин Роман – Липецк, школа 5,
Черников Алексей – Королев, лицей научно-инженерного профиля,
Лузгарев Александр – Киров, ФМЛ.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Гольберг Олег – Ростов-на-Дону, школа 8,
Тарасов Никита – Нижний Тагил, Политехническая гимназия,
Мясников Родион – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Каленков Максим – Набережные Челны, гимназия 26,
Жданов Роман – Краснодар, школа 3,
Стырт Олег – Омск, ФМЛ 64,
Юдкин Дмитрий – Краснодар, школа 63,
Шаталов Игорь – Краснодар, школа-гимназия 87;

по 10 классам –

Воронов Всеволод – Иркутск, лицей 2,
Грибов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кислицын Александр – Саров, гимназия 15,
Фролов Сергей – Нижний Новгород, Нижегородская техническая гимназия,
Петров Илья – Ижевск, Естественно-гуманитарный лицей «Школа-30»,
Щербаков Станислав – Ижевск, Естественно-гумантираный лицей «Школа-30»,
Сальников Сергей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Колесников Андрей – Нижний Новгород, Нижегородская педагогическая гимназия,
Жгун Владимир – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Миронов Денис – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа;

по 11 классам –

Бейлин Андрей – Ростов-на-Дону, школа 58,
Ершов Денис – Москва, лицей «Вторая школа»,
Рачков Роман – Нижний Тагил, Политехническая гимназия,
Резников Виталий – Ангарск, школа-гимназия 10,
Филатов Евгений – Иваново, школа-лицей 22,
Певзнер Игорь – Киров, ФМЛ,
Муханов Иван – п.Афипский Краснодарского края, Афипский технический лицей,
Шишкин Сергей – Челябинск, ФМЛ 31,
Галкин Сергей – Москва, лицей «Вторая школа»,
Баяндин Константин – Пермь, ФМШ 146,
Зиновьев Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Яковенко Дмитрий – Нижневартовск, муниципальная общеобразовательная школа 13,
Мовчан Игорь – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, Д.Терешин

XXXIII Всероссийская олимпиада школьников по физике

В апреле этого года в городе Ульяновске проходил заключительный тур очередной Всероссийской физической олимпиады школьников. В соревнованиях приняли участие 158 учащихся 9 – 11 классов из всех регионов Российской Федерации.

Ниже приводятся условия теоретических и экспериментальных задач заключительного этапа и список призеров олимпиады.

Задачи олимпиады

Теоретический тур

9 класс

1. Кот Леопольд сидел у края крыши. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, упал у ног кота (рис.1) через время $\tau = 1$ с. На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд, если известно, что векторы скоростей камня в момент выстрела и в момент падения были взаимно перпендикулярны?

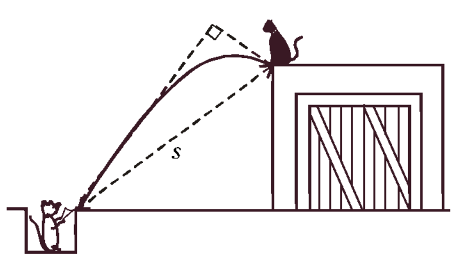


Рис. 1

Д.Александров

2. На гладком горизонтальном столе стоит клин массой M с углом наклона α при основании (рис.2). На поверхности клина находится брусок массой m, привязанный легкой нитью к стене. Нить перекинута через невесомый блок, укрепленный на вершине клина. Отрезок нити AB параллелен горизонтальной поверхности стола. Вначале систему удерживают, а затем отпускают.

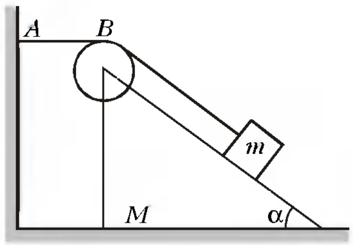


Рис. 2

При этом брусок начинает скользить по наклонной поверхности клина. Силы трения отсутствуют. 1) Найдите ускорение клина в этом случае. 2) Полагая α заданным, найдите, при каком отношении масс клина и бруска такое скольжение возможно.

А.Пушнов

3. На рисунке 3 изображена цепочка, состоящая из шести одинаковых звеньев. Все резисторы в цепочке одинаковы и имеют сопротивление r. В первое и

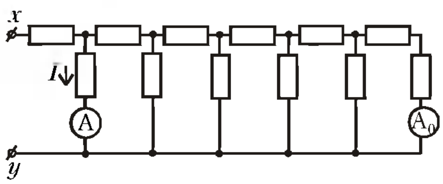


Рис. 3

последнее звенья цепочки включены амперметры А и $А_0$. На входные клеммы x и y цепочки подано некоторое постоянное напряжение U_{xy}, при этом амперметр А показывает ток $I = 8{,}9$ А. 1) Какой ток I_0 показывает амперметр $А_0$? 2) Определите напряжение U_{xy}, поданное на входные клеммы цепочки, при условии $r = 1$ Ом. 3) Определите для этого случая электрическое сопротивление R_{xy} между клеммами x и y.

С.Козел

4. В архиве Снеллиуса нашли чертеж, на котором были изображены два плоских зеркала M_1 и M_2, образующих двугранный угол величиной в 70°, и точечный источник света S_0 (рис.4). От времени чернила выцвели, и невоз-

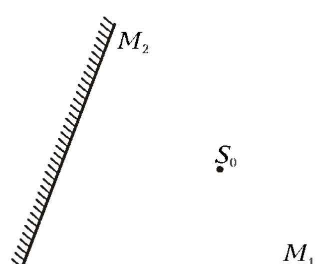


Рис. 4

можно было разглядеть, сколько изображений источника давала такая система зеркал. Попробуйте восстановить все изображения источника S_0. Сколько изображений источника S_0 можно было увидеть в такой системе зеркал?

В.Слободянин

10 класс

1. По двум кольцевым дорогам радиуса R, лежащим в одной плоскости, движутся автомобили A_1 и A_2 со скоростями $v_1 = v = 20$ км/ч и $v_2 = 2v$ (рис.5). В некоторый момент автомобили находились в точках M и C на

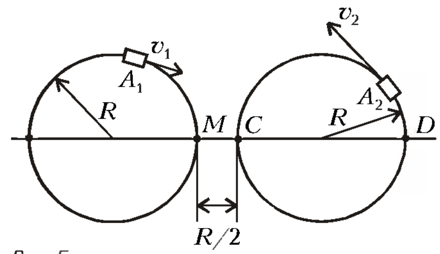


Рис. 5

расстоянии $R/2$ друг от друга. Размеры автомобилей малы по сравнению с R. 1) Найдите скорость автомобиля A_2 в системе отсчета, связанной с автомобилем A_1 в этот момент. 2) Найдите скорость автомобиля A_2 в системе отсчета, связанной с автомобилем A_1, когда A_2 окажется в точке D.

В.Чивилёв

2. В герметично закрытом сосуде находится влажный воздух, температура которого $t_1 = 75$ °С, а относительная влажность $\varphi_1 = 25\%$ Воздух в сосуде начинают охлаждать. При какой температуре t_2 внутренние стенки сосуда запотеют? График зависимости давления насыщенного водяного пара от температуры приведен на рисунке 6.

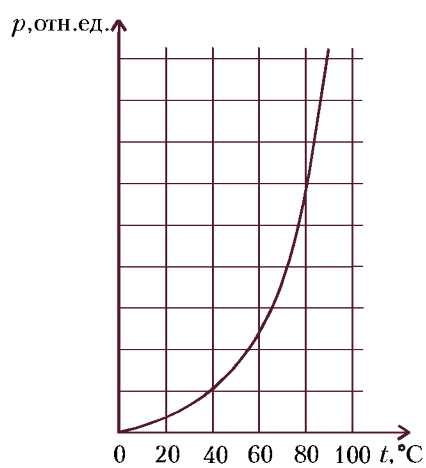


Рис. 6

Давление насыщенного пара дано в относительных единицах.

А.Пушнов

3. На миллиметровой бумаге изображена p–V-диаграмма некоторого процесса 1–2, проведенного над идеаль-

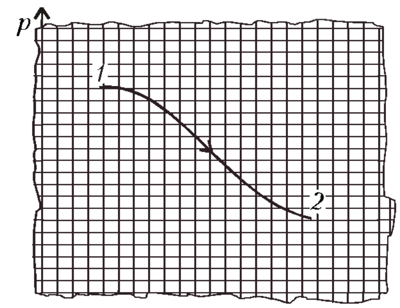


Рис. 7

ным одноатомным газом (рис.7). Известно, что в этом процессе количества теплоты, отданное и поглощенное газом, одинаковы. К сожалению, ось V диаграммы утеряна. Постройте по данным задачи эту ось.

С.Жак

4. На рисунке 8 представлена электрическая схема, состоящая из батареи с ЭДС $\mathcal{E}$, конденсаторов емкостями C_1 и C_2, резисторов сопротивлениями R_1 и R_2, ключа K и идеального вольтметра. После замыкания ключа оказалось, что

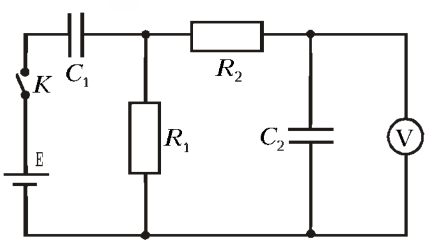


Рис. 8

максимальное напряжение на конденсаторе C_2, измеренное вольтметром, равно $\mathcal{E}/2$. 1) Определите разность потенциалов на конденсаторе C_1 в этот момент. 2) Найдите ток через резистор R_1 в этот же момент. 3) Определите максимальный заряд конденсатора C_1. 4) Вычислите полное количество теплоты, выделившееся в цепи после замыкания ключа.

Ю.Чешев

5. В случае несамостоятельного газового разряда идеализированная зависимость тока I через газоразрядную

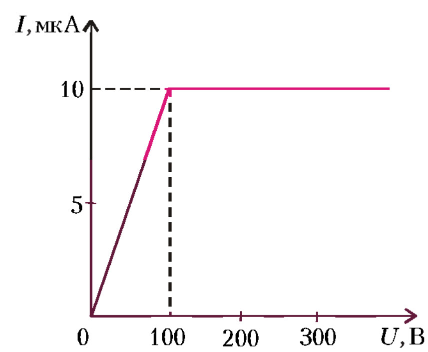


Рис. 9

трубку от напряжения U между электродами имеет вид, показанный на рисунке 9. Трубка с последовательно соединенным балластным сопротивлением $R = 10^7$ Ом подключается к конденсатору емкостью $C = 10^{-3}$ Ф, заряженному до напряжения $U_0 = 300$ В. Какое количество теплоты выделится в трубке за время полного разряда конденсатора?

В.Можаев

11 класс

1. Тонкостенная цилиндрическая трубка массой M катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности неподвижной плиты $П$ со скоростью v_0 и попадает на ленту горизонтального транспортера, движущуюся в том же направлении со скоростью u (рис.10). Коэффициент трения скольжения между трубкой и лентой равен

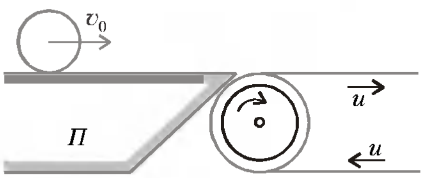


Рис. 10

μ. 1) Через какое время t_1 после вкатывания на ленту трубка начнет катиться по ней без проскальзывания? 2) Определите изменение кинетической энергии трубки за время t_1. 3) Чему равно количество теплоты, выделившееся за время t_1?

В.Можаев

2. Представим себе, что в безбрежных просторах космоса обнаружена галактика X, в которой силы взаимодействия между телами не подчиняются закону всемирного тяготения. В этой галактике любые два точечных тела притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам m_1 и m_2 и расстоянию r между ними: $F = \alpha m_1 m_2 r$. Астрономам удалось определить полную массу галактики $M = 10^{40}$ кг и коэффициент пропорциональности $\alpha = 2{,}5 \cdot 10^{-59}$ $\text{Н}/\left(\text{м} \cdot \text{кг}^2\right)$. Предполагая, что в момент открытия галактики X ее масса была распределена произвольно и несимметрично, а в галактике отсутствовали относительные движения тел, оцените время жизни этого объекта.

С.Жак

3. Идеальный холодильник, потребляющий во время работы из электросети мощность $N = 100$ Вт, находится в комнате, которую можно рассматривать как замкнутую теплоизолированную камеру объемом $V = 100$ м^3. Начальные параметры воздуха в комнате: температура $T_0 = 300$ К, давление $p_0 = 1$ атм. В холодильную камеру устанавливается ванночка с водой при температуре $T_x = 273$ К. Масса воды $m_0 = 4$ кг. 1) Какое минимальное время должен проработать холодильник, чтобы вода в ванночке замерзла? 2) Чему будет равна температура воздуха в комнате в этот момент? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}34 \cdot 10^5$ Дж/кг. Теплоемкость стен комнаты и стенок холодильника не учитывать. Считать относительное изменение температуры в комнате в результате работы холодильника малым. Воздух считать двухатомным идеальным газом.

В.Можаев

4. Бесконечная цепочка составлена из одинаковых нелинейных элементов Z и резисторов сопротивлением $R =$

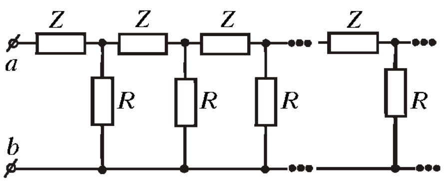


Рис. 11

$= 4$ Ом (рис.11). Вольт-амперная характеристика цепочки, измеренная между входными клеммами a и b, изображена на рисунке 12. Определите графическим построением вольт-амперную характеристику нелинейного элемента Z.

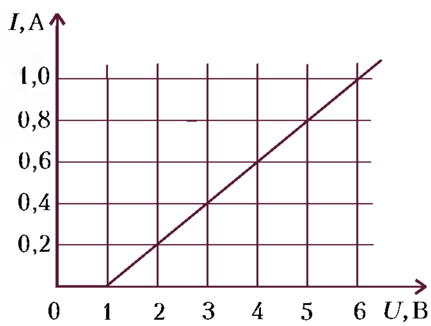


Рис. 12

С.Козел

5. Лазерный луч распространяется в сферически симметричной среде с показателем преломления $n(R) = n_0 R/R_0$, где $n_0 = 1$, $R_0 = 30$ см, $R_0 \le R \le \infty$. Траектория луча лежит в плоскости, проходящей через центр C симметрии среды. Известно, что на расстоянии $R_1 = 80$ см от точки C лазерный луч образует с радиусом-вектором, проведенным из этого центра, угол $\varphi = 30°$ (рис.13). На какое

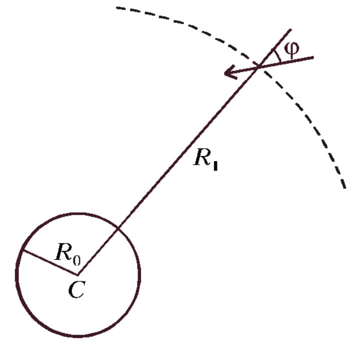


Рис. 13

минимальное расстояние приблизится лазерный луч к центру симметрии среды?

В.Слободянин

Экспериментальный тур

9 класс

1. Определите сопротивления милливольтметра и миллиамперметра, на двух пределах для каждого прибора.

Принадлежности: медная и цинковая пластины, соленый огурец, милливольтметр 50/250 мВ, миллиамперметр 5/50 мА, соединительные провода – 2 шт.

2. Определите плотность тела.

Принадлежности: тело неправильной формы, прочный стержень, линейка, штатив с муфтой и лапкой, сосуд с водой, прочная нить.

10 класс

1. Установите электрическую схему цепи, находящейся внутри «черного ящика». Постройте вольт-амперные характеристики ее элементов. По возможности оцените параметры элементов схемы.

Принадлежности: «черный ящик», плата на пружинах для монтирования схем, переменный резистор 1 кОм, миллиамперметр 5/50 мА, источник постоянного тока (элемент) 1,5 В, вольтметр 6 В.

2. Определите коэффициент трения графитового стержня карандаша о лист бумаги, на котором выполняется задание олимпиады.

Принадлежности: линейка, прямоугольный треугольник, карандаш, инструмент для заточки карандаша, лист бумаги.

11 класс

1. «Черный ящик» включает в себя три элемента. 1) Определите электрическую схему соединения этих элементов. 2) Определите параметры этих элементов.

Принадлежности: «черный ящик»,

миллиамперметр переменного тока (диапазон измерений 50 мА), звуковой генератор школьный (диапазон изменения частоты 50 – 5000 Гц, выходное сопротивление 5 Ом), осциллограф лабораторный ОМШ (работать с нажатой кнопкой 1 В/дел или 3 В/дел), соединительные провода, миллиметровая бумага.

2. Используя предложенное оборудование, проведите измерения коэффициента трения дерева по дереву разными способами и оцените погрешности полученных результатов.

Принадлежности: штангенциркуль, деревянная катушка из-под ниток, деревянный брусок, нить, булавка.

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Калинин Вячеслав – Клин, школа 1,
Манаков Андрей – Озерск Челябинской обл., ФМЛ 39,
Клименко Алексей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Гатанов Тимур – Санкт-Петербург, ФМГ 30;

по 10 классам –

Вавилов Виталий – Набережные Челны, Классический лицей 78,
Многолетний Владимир – Северодвинск, школа-лицей 17,
Шутович Андрей – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Салтыков Петр – Дубна, лицей «Дубна»,
Попов Илья – Москва, лицей «Вторая школа»;

по 11 классам –

Панов Евгений – Челябинск, ФМЛ 31,
Хегай Александр – Новосибирск, школа-колледж 130,
Матвеев Артур – Белорецк, компьютерная школа,
Сырицын Сергей – Саратов, ФТЛ 1,
Мартьянов Владимир – Нижний Новгород, лицей 40,
Акимов Владимир – Тула, муниципальный лицей 2.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Нестеренко Александр – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Карманов Максим – Челябинск, ФМЛ 31,
Четвериков Денис – Вологда, Естественно-математический лицей;

по 10 классам –

Жук Сергей – Вологда, Естественно-математический лицей,
Кузьмин Денис – Киров, ФМЛ,
Алферов Роман – Челябинск, ФМЛ 31,
Шварц Осип – Новосибирск, гимназия 3,
Чепель Владислав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Ибрагимов Адиль – Чебоксары, ФМЛ 27,
Ващенко Андрей – Брянск, лицей 1,
Иванов Михаил – Нижний Новгород, лицей 40,
Лукьянов Михаил – Барнаул, гимназия 123,
Харитонов Александр – Дубна, лицей «Дубна»,
Вахов Алексей – Пермь, ФМШ 146;

по 11 классам –

Каган Григорий – Нижний Новгород, ФМЛ 40,
Канделаки Вахтанг – Вологда, школа 32,
Вергелес Сергей – п.Черноголовка Московской обл., экспериментальная школа 75,
Дельцов Василий – Чебоксары, учебно-воспитательный комплекс 54,
Гонтаренко Константин – Москва, СУНЦ МГУ,
Агафонцев Дмитрий – Киров, ФМЛ,
Черемухин Антон – Сергиев Посад, ФМШ 2,
Чудновский Александр – Челябинск, Лингво-гуманитарная гимназия 96,
Матушкин Тимофей – Ноябрьск, школа-лицей 10,
Кравцов Константин – Москва, лицей «Вторая школа»,
Малиновский Юрий – Дубна, лицей «Дубна».

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Дзябур Василий – Сергиев Посад, ФМШ 2,
Меньшиков Игорь – Пермь, ФМШ 146,
Головченко Константин – Брянск, лицей 1,
Терентьев Евгений – Чебоксары, школа-гимназия 34,
Страбыкин Александр – Киров, ФМЛ,
Шемятихин Дмитрий – Ульяновск, школа-гимназия 1,
Королев Кирилл – Челябинск, ФМЛ 31,
Нургалиев Данияр – Казань, ФМЛ 131,
Колотилин Антон – Барнаул, Инженерно-технический лицей,
Сажин Виктор – Москва, экспериментальная гимназия «Дорогомилово» школы 710,
Трубин Кирилл – Санкт-Петербург, Академическая гимназия,
Семенов Дмитрий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Муравьев Вячеслав – Смоленск, гимназия им. Пржевальского,
Горбунов Ярослав – Москва, лицей «Вторая школа»,
Ефремов Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Красин Иван – Калуга, школа 48,
Сызранов Сергей – Москва, экспериментальная школа 91;

по 10 классам –

Емелин Михаил – Нижний Новгород, лицей 40,
Ульянов Андрей – Снежинск, многопрофильная гимназия 127,
Нестеров Константин – Краснодар, школа 89,
Мусиенко Дмитрий – Киров, ФМЛ,
Прокопьев Максим – Ноябрьск, школа-лицей 10,
Полтаский Ярослав – Ноябрьск, школа-лицей 10,
Лемаренко Михаил – Санкт-Петербург, Академическая гимназия,
Ротаев Михаил – Новосибирск, школа-колледж 130,
Шукшин Иван – Волгодонск, профильная школа 24,
Рогутов Владимир – Юбилейный Пермской обл., гимназия 3;

по 11 классам –

Курасов Александр – Санкт-Петербург, Аничков лицей,
Власов Михаил – Москва, лицей «Вторая школа»,
Полянский Юрий – Радужный Кировской обл., школа 2,
Шамгунов Артем – Москва, СУНГ МГУ,
Шапиро Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Нарышкин Юрий – Чебоксары, Чувашско-турецкий лицей.

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Коровин

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском государственном университете работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9—11 классов общеобразовательных школ России и государств, входивших ранее в состав СССР.

В ЗШ пять отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9—11 классов, на биологическое – только учащиеся 10 классов, на экономическое – только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителя. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ и дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяются в ЗШ, а работы членов кружка проверяет руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 10—11 классов ЗШ (тех, кто будут учиться в этих классах в следующем учебном году) приглашаются в Летнюю школу при НГУ. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно-исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо прислать на имя директора ЗШ заявление, оформленное по приведенному здесь образцу.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Для получения ответа вложите конверт с маркой и с написанным на нем Вашим домашним адресом.

Заявление о приеме на математическое или физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решением соответствующего первого задания, публикуемого ниже.

Решения задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работу отошлите вместе с заявлением, причем только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте, не сворачивайте в трубочку, тетрадь должна быть тонкой). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем Вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Для поступления в ЗШ достаточно решить две-три задачи из предложенных для того класса, в котором Вы будете учиться в новом учебном году (или для старшего класса). Даже если какую-то задачу Вы не смогли решить до конца, не расстраивайтесь и напишите нам свои соображения, часть решения, решение в частном случае.

Сообщение о размере оплаты за обучение Вам будет выслано вместе с проверенным первым заданием. Бесплатное обучение ЗШ сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах и детей из многодетных семей (в которых пять и более детей до 18 лет, находящихся на иждивении родителей).

Наш адрес: 630090 Новосибирск-90, ул.Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Телефон: (383-2) 39-78-89.

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	*НЕДЛИН ИГОРЬ ИВАНОВИЧ*
Класс, в котором Вы учитесь в своей школе	*9 «а»*
Отделение ЗШ, на котором Вы желаете учиться (можно указать два отделения)	*математическое (математическое и физическое)*
Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	*632149 Новосибирская обл., с.Мезениха, ул.Андрианова, д.28 «а», кв.5*

Первое задание по физике

9 класс

1. Автобус выехал из пункта A в пункт B. После того как он преодолел 5 км, один пассажир, что-то забыв дома, сошел и возвратился обратно пешком. Дойдя до пункта A, он сразу повернул обратно и встретил уже возвращающийся из B автобус на том же месте, где расстался с ним. Каково расстояние между пунктами, если известно, что автобус не задерживался в пункте B? Скорость автобуса в 10 раз больше скорости пешехода.

2. Шарик объемом V с полостью внутри плавал на поверхности жидкости, погрузившись на половину своего объема. После проникновения и заполнения жидкостью полости шарик затонул, но уровень жидкости в сосуде не изменился. Определите объем полости и плотность материала шарика, если плотность жидкости ρ.

3. Лампочка и два одинаковых резистора сопротивлением R каждое подсоединили к источнику напряжения двумя способами, как показано на рисунке 1. В обоих случаях накал лампочки одинаков. Чему равно сопротивление включенной лампочки?

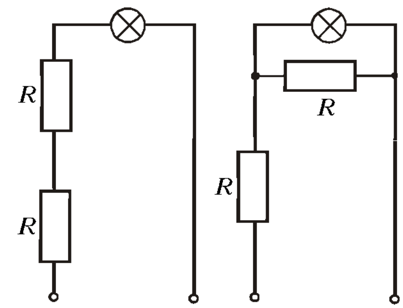


Рис. 1

4. В калориметр поместили 1 кг воды при температуре $t = 20°$ С. После того как в него добавили некую массу горячей воды, температура увеличилась до $t_1 = 50$ °С. При повторном добавлении такого же количества воды температура увеличилась до $t_2 = 60$ °С. Какова была температура горячей воды и какую массу воды добавили в калориметр?

10 класс

1. Контролер проходит с постоянной скоростью v вдоль всей линии конвейера, по которой движутся банки компота. При этом, двигаясь по направлению движения ленты конвейера, он насчитывает N_1 банок, а двигаясь обратно с той же скоростью, насчитывает N_2 банок. Длина линии L. Какое количество банок проходит через линию за смену длительностью T?

2. Тело массой m удерживается в покое на горке силой $\vec{F}$, направленной под углом β к поверхности горки (рис.2). С каким ускорением будет двигаться тело, если на него будет действовать такая же по величине сила,

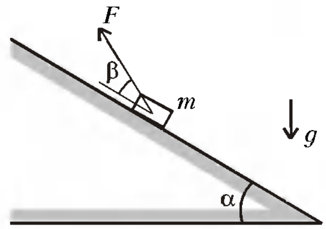


Рис. 2

но направленная вверх вдоль поверхности горки? Угол между поверхностью горки и горизонтом α. Трения нет.

3. В лифте, поднимающимся с постоянной скоростью v, подвешен на пружине жесткостью k груз массой M. Определите величину минимальной силы натяжения пружины после резкой остановки лифта.

4. После удара по шайбе она, скользя по льду, упруго ударилась о бортик и, вернувшись на прежнее место, остановилась. На каком расстоянии от бортика шайба находилась во время удара, если ее начальная скорость равнялась v? Коэффициент трения скольжения шайбы о лед μ.

5. Два одинаковых бруска лежат на плоскости. Пуля, летящая горизонтально, пробивает последовательно оба бруска навылет. Какой брусок пройдет большее расстояние до остановки при наличии трения? Сила сопротивления пули в древесине не зависит от скорости.

11 класс

1. Решите задачу 3 для 9 класса.

2. Решите задачу 1 для 10 класса.

3. Решите задачу 5 для 10 класса.

4. В герметичном сосуде объемом V, заполненном воздухом при давлении p_0, половину объема занимал надутый тоже воздухом резиновый шарик. После того как шарик лопнул и в сосуде установилась прежняя температура, давление там увеличилось на 10%. Каково было давление воздуха в шарике до его разрыва?

5. Конденсатор емкостью C, имеющий вначале разность потенциалов на

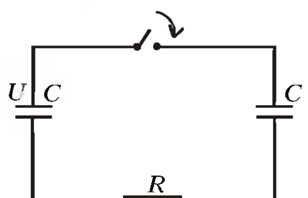


Рис. 3

обкладках U (рис.3), после замыкания ключа разряжается через резистор сопротивлением R на незаряженный вначале такой же конденсатор. Каков будет ток в цепи в момент, когда напряжение на первом конденсаторе уменьшится до $2U/3$?

Первое задание по математике

9 класс

1. У бойца имелось не более 400 патронов, из которых 68,4% он выпустил по врагу во время перестрелки. Сколько патронов у него осталось?

2. Три окружности, проходящие через точку M, попарно пересекаются в точках A, B, C. Через точку A проведена прямая, пересекающая две из этих окружностей в точках D и E. Докажите, что точка F пересечения прямых BD и CE лежит на третьей окружности.

3. Внутри треугольника ABC выбрана точка O такая, что площади треугольников AOB, BOC, COA равны. Докажите, что точка O совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

4. Докажите, что при любом нечетном n, большем 1, произведение

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)\times 2\times 3\ldots\times(n-1)$$

делится на n.

5. Внутри квадрата со стороной 1 произвольно выбраны 5 точек. Докажите, что обязательно найдутся такие две из данных точек, что расстояние между ними не больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{1}{y}\right), \\ y=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right), \\ z=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right). \end{cases}$$

10 класс

1. Из одного города в другой вниз по реке корабль плывет сутки, а обратно двое. За какое время можно добраться из верхнего города в нижний на плоту?

2. В треугольнике ABC, вписанном в окружность с центром O, проведены высоты AF и BG. Докажите, что отрезки OC и FG перпендикулярны.

3. Прямоугольник, у которого одна из сторон в два раза длиннее другой, несколькими сквозными разрезами, параллельными его сторонам, разделили на прямоугольники. Оказалось, что сумма периметров этих прямоугольников в 101 раз больше периметра исходного прямоугольника. Какое наибольшее число прямоугольников могло при этом получиться? Приведите обоснование ответа.

4. В 400 коробках лежат 1999 шариков. Из любой коробки разрешается взять ровно 5 или 13 шариков и переложить их в любую другую коробку. Докажите, что с помощью таких операций можно собрать все шарики в одной коробке.

5. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC точки A_1, B_1, C_1 расположены так, что $AC_1 = 2C_1B$, $BA_1 = 2A_1C$, $CB_1 = 2B_1A$. Докажите, что площадь треугольника, образованного при пересечении отрезков AA_1, BB_1, CC_1, составляет $\frac{1}{7}$ от площади треугольника ABC.

6. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1x_2x_3\ldots x_n}=1$$

всегда имеет решение в целых положительных числах.

11 класс

1. Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что если выпустить на луг 20 коров, то они съедят траву полностью за 8 часов, а если выпустить на тот же луг 26 коров – то за 6 дней. Какое наибольшее число коров может кормиться на этом лугу все лето? Аппетит у всех коров в течение лета одинаков и неизменен. Скорость роста травы постоянна.

2. На координатной плоскости определите координаты точки, симметричной точке (7; 3) относительно прямой, заданной уравнением $5x + 13y = 1$.

3. Пусть x и y – действительные числа. Докажите, что равенство

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1$$

выполняется тогда и только тогда, когда $x + y = 0$.

4. Найдите отношение объемов правильного тетраэдра и правильного октаэдра, ребра которых равны 1.

5. Имеется квадратная таблица 8×8. Докажите, что невозможно расставить в ее клетках числа 1, 2, 3, 4, ..., 63, 64 так, чтобы числа в соседних клетках отличались не больше чем на 4.

6. Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos x\cdot\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cdot\cos 3x}+\ldots+\frac{1}{\cos 100x\cdot\cos 101x}=0.$$

Школа «АВАНГАРД» – ШКОЛА ДЛЯ ВСЕХ

(10-летний опыт заочного обучения)

Как подготовиться в вуз, в физико-математическую школу или лицей, если ограничен в средствах или живешь в небольшом городке или деревне? Конечно же, поступить во Всероссийскую школу математики и физики (ВШМФ) «АВАНГАРД». Эта школа, учрежденная Министерством образования РФ, имеет уже десятилетний практический опыт ЗАОЧНОГО обучения школьников:

по физике – с 8 по 11 класс (включая двухлетний углубленный курс);

по математике – с 7 по 11 класс.

В этом году ВШМФ проводит дополнительный набор учащихся на курс «Математика для будущих экономистов», а во втором полугодии в школе впервые будет проводиться тестирование по математике для учащихся 11 классов.

В школе «АВАНГАРД», в зависимости от знаний, Вы можете выбрать программу обучения, доступную Вам. Всего программ три: «*A*», «*B*» и «*C*». Освоил программу «*A*» или «*B*» – открыта дорога в большинство областных вузов, а прошел полный курс по программе «*C*» – и можешь смело идти в МИФИ, МГТУ и т.п. Плата за обучение – самая доступная. Существует возможность занятий сразу по двум программам: «*A*» + «*B*» или «*B*» + «*C*».

За последние пять лет 90% наших выпускников поступили в вузы! И это закономерно, так как методики и задачи разработаны лучшими преподавателями МИФИ и МФТИ.

Учебный год в школе – с 1 сентября по 30 июня. Прием в школу ведется круглогодично. Достаточно прислать личное заявление на адрес школы и оплатить обучение. Стоимость обучения зависит не от сложности программы («*A*», «*B*» и «*C*»), а только от класса и не превышает 2–3 минимальных месячных зарплат за полный годичный курс обучения по данному предмету.

Школа «АВАНГАРД» совместно с Министерством образования РФ и при участии журнала «Квант» ежегодно проводит:

– межобластную олимпиаду по математике и физике (заочный тур; результаты олимпиады 1998 года см. в «Кванте» №4);

– межгосударственную конференцию одаренных школьников и очный тур олимпиады.

Ниже приводятся тестовые вступительные задания по математике и физике по программе «*C*».

Вам нужно:

– выбрать предмет, класс, программу и написать заявление о приеме в школу (в произвольной форме);

– решить выбранный вариант задания (не обязательно весь!);

– выслать нам заявление и решенный вариант (с пометкой «Квант»), а получив наш ответ, заполнить учетную карточку и прислать ее нам вместе с копией чека об оплате.

На курс «Математика для будущих экономистов» принимаются:

– учащиеся 10 и 11 классов школы «АВАНГАРД» из числа занимающихся по математике по программам «*B*» или «*C*» (или «*B*» + «*C*»);

– все желающие, успешно решившие вступительные задания для 10 и 11 классов и прошедшие конкурсный отбор.

Тестирование по математике проводится для всех желающих и имеет целью показать учащемуся уровень его знаний, обратить внимание на возможные пробелы и недостатки в знаниях курса математики перед экзаменами на аттестат зрелости и вступительными экзаменами в вуз. Для участия в тестировании достаточно прислать заявку (в произвольной форме) и маркированный конверт с адресом учащегося.

Наш адрес:

115551 Москва, Ореховый бульвар, д.11, кор.3, ВШМФ «АВАНГАРД».

Тестовое вступительное задание по математике

Программа «*C*»

7 класс

1. Вычислите

$$4{,}07-5{,}49+8{,}93-1{,}51+\frac{4{,}2:6-3\frac{1}{3}\cdot 0{,}3}{7{,}5:0{,}5}.$$

2. Докажите, что число 123456789 является составным.

3. Запишите число 1000 с помощью восьми одинаковых цифр и знаков арифметических действий.

4. Число содержит 4 сотни, b десятков и c единиц. При каких значениях b и c данное число кратно 30?

5. Три класса школьников сажали деревья. Первый класс посадил a деревьев, второй – 70% того, что посадил первый, а третий класс – на 5 деревьев больше второго. Сколько деревьев посадили все три класса?

8 класс

1. Упростите выражение

$$(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)$$

и вычислите его значение при $x=-0{,}4$.

2. Решите уравнение

$$\frac{8(x+10)}{15}-24\frac{1}{2}=7\frac{x}{10}-\frac{2(11x-5)}{5}.$$

3. Известно, что $x+\frac{1}{x}=3$. Найдите значение выражения $x^2+\frac{1}{x^2}$.

4. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, на 54 больше данного числа. Найдите это число.

5. Постройте график функции

$$\frac{y-x}{x-1}=-2.$$

9 класс

1. Натуральное пятизначное число A имеет в разряде десятков цифру 8. Если эту цифру десятков переставить в начало числа A, сохранив порядок остальных цифр, то вновь полученное пятизначное число будет больше A на 69570. Определите число A, если известно, что оно кратно 6.

2. Решите неравенство

$$ax+1>0.$$

3. Постройте график функции

$$|x|+|y|=2.$$

4. Произведение двух целых чисел равно 216, а их наименьшее общее кратное равно 36. Найдите эти числа.

5. Смешали p%-й и 10%-й растворы соляной кислоты и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько грамм каждого раствора было взято?

10 класс

1. Решите уравнение

$$\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6.$$

2. Определите, при каких значениях параметра a оба корня уравнения

$$x^2+2(a-4)x+a^2+6a=0$$

положительны.

3. Длины сторон треугольника равны 4, 5 и 7 см. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

4. Решите уравнение

$$\left|x^2-9\right|+\left|x^2-4\right|=5.$$

5. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{1-ax}{-2x^2+6x-7}}.$$

11 класс

1. Решите неравенство

$$x(x+1)(x+2)(x+3)<48.$$

2. Найдите площадь наибольшего прямоугольника, который можно вписать в правильный треугольник со стороной a.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+4}=a-\sqrt{x^2+6x+9}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x+\left(0{,}04c^2+1{,}2c\right)\cos\dfrac{y}{5}=c+8,\\ \sin x+20\cos\dfrac{y}{5}=-21. \end{cases}$$

5. Сторона равностороннего треугольника равна a. На высоте этого треугольника построен новый равносторонний треугольник. На высоте нового треугольника построен еще один равносторонний треугольник и т.д. до бесконечности. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех этих треугольников.

Тестовое вступительное задание по физике

Программа «С»

8 класс

1. На рисунке 1 изображены четыре тела одной и той же массы. На тела *2* и *4* поставлены гири, тела *3* и *4* помещены на катки. При равномерном движении какого из тел по горизонтальной поверхности сила трения наибольшая?

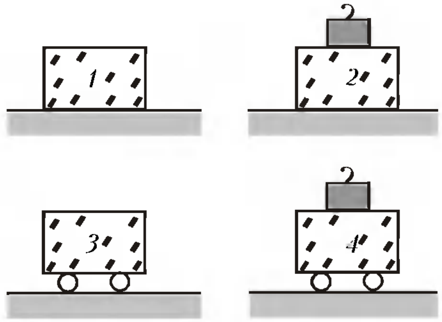


Рис. 1

2. Тело A массой 40 г соединили с телом B массой 80 г и объемом 40 см^3. Оба тела вместе поместили в измерительный цилиндр с водой. При полном погружении в воду тела вытеснили 140 см^3 воды. Определите плотность тела A.

3. Площадь большого поршня гидравлического пресса 1000 см^2, малого 2 см^2. Какая сила действует на большой поршень, если малый испытывает действие силы 200 Н? Трение не учитывать.

4. Почему при открывании крана в трубке (рис.2), из которой откачан воздух, образуется водяной фонтан?

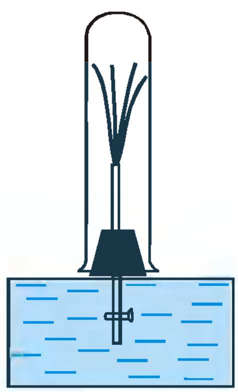


Рис. 2

5. Какую работу нужно совершить, чтобы переместить груз массой 100 кг на расстояние 2 м по совершенно гладкой горизонтальной поверхности?

6. Резиновый шар надули воздухом и завязали. Как изменится объем шара и давление внутри него при повышении атмосферного давления?

9 класс[1]

1. Человек бежит по эскалатору. В первый раз он насчитал $n_1=50$ ступеней, во второй раз, двигаясь в том же направлении со скоростью втрое большей, он насчитал $n_2=75$ ступеней. Сколько ступеней он насчитал бы на неподвижном эскалаторе?

2. Первую половину пути поезд шел со скоростью в $n=1{,}5$ раза большей, чем вторую половину пути. Средняя скорость поезда на всем пути равна $v_{ср}=43{,}2$ км/ч. Каковы скорости поезда на первой и второй половинах пути?

3. В железном калориметре массой $m=0{,}1$ кг находится $m_1=0{,}5$ кг воды при температуре $t_1=15$ °C. В калориметр бросают свинец и алюминий общей массой $m_2=0{,}15$ г и температурой $t_2=100$ °C. В результате температура воды поднимается до $t=17$ °C. Определите массы свинца и алюминия. Удельная теплоемкость свинца равна $c_1=125{,}7$ Дж/(кг·К), алюминия — $c_2=836$ Дж/(кг·К), железа — $c_3=460$ Дж/(кг·К).

4. Вычислите сопротивление проволочного куба, к противоположным вершинам которого подано напряжение. Сопротивления всех ребер одинаковы и равны $R=1$ Ом.

[1] *Задачи по физике для 10 и 11 классов можно получить по почте, прислав заявку в адрес школы «АВАНГАРД».*

Дорогие читатели!

Мы надеемся, что вы не забудете подписаться на наш журнал на первое полугодие 2000 года. Наш подписной индекс 70465.

Оформить подписку можно и в помещении редакции — это избавит вас от возможных недоразумений, связанных с доставкой через почту.

В редакции можно также приобрести журналы «Квант» и Приложения к ним за прошлые годы.

Наш адрес: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, редакция журнала «Квант». Телефон: 930-56-48.

Мы ждем вас ежедневно с понедельника по пятницу с 11 до 16 часов. Звоните и приходите!

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №4)

1. При решении сразу же возникает неясный момент – был ли упомянутый год високосным или обычным, т.е. содержал 365 или 366 дней? Пока ясности в этом вопросе нет, будем считать, что в году было $Д$ дней, а конкретное значение $Д$ попробуем определить позже.

Если Балда отработал в году P дней, то прогулял он, очевидно, $(Д - P)$ дней. Тогда по варианту Балды поп должен был получить от него $1 \times P - 10 \times (Д - P)$ щелков (у Пушкина именно так: *щелков*, а не *щелчков* – должно быть, чтобы звучало поувесистей). По варианту же попа число щелков равняется $12 \times P - 121 \times (Д - P)$. Так как эти значения равны, то

$$1 \times P - 10 \times (Д - P) = 12 \times P - 121 \times (Д - P),$$

откуда $P = Д \times 111/122$.

Так как числа 111 и 122 взаимно просты, значение $Д$ должно делиться на 122. Из двух возможных значений $Д$ лишь одно – 366 – делится на 122. Таким образом, год был високосный и содержал 366 дней, а число отработанных Балдой дней равнялось $P = 366 \times 111/122 = 333$ (неплохой работник, как видно!).

Осталось определить число щелков, выданных Балдой попу. Оно равно

$$1 \times P - 10 \times (Д - P) = 1 \times 333 - 10 \times (366 - 333) = 3.$$

Всего лишь три щелка получил поп от Балды – в полном соответствии с первоисточником (а как же могло быть иначе?). Однако этого вполне хватило: поп, как мы помним, сначала подпрыгнул, затем онемел и, наконец, лишился разума. Не гонялся бы за дешевизною!

2. Произведение двузначных чисел номера не больше чем 99^3. Так как $99^3 < 7^7$, то $x \le 6$. Легко проверить, что двузначные числа номера могут быть различными только при $x = 4$ или $x = 6$, но в случае $x = 4$ среди возможных разложений числа $4^4 = 256$ на множители: $256 = 32 \cdot (08) \cdot (01) = 16 \cdot (08) \cdot (02)$ нет таких цифр, которые составляли бы четыре последовательных натуральных числа. Итак, $x = 6$. В номере наверняка есть цифры 2, 3, 4. Только одно двузначное число содержит цифру 3, не содержит цифру 6, а при разложении на простые множители имеет либо двойки, либо тройки – это число 32. Следовательно, произведение двух других чисел имеет при разложении на простые множители одну двойку и шесть троек, причем одно из чисел является степенью тройки. Среди двузначных чисел степеней тройки только две: 27, 81. Тогда номерами телефона с учетом порядка убывания в нем двузначных чисел могут быть: 81-32-18, 54-32-27 – из них лишь второй содержит четыре последовательные цифры 2, 3, 4, 5.

Ответ: 54-32-27.

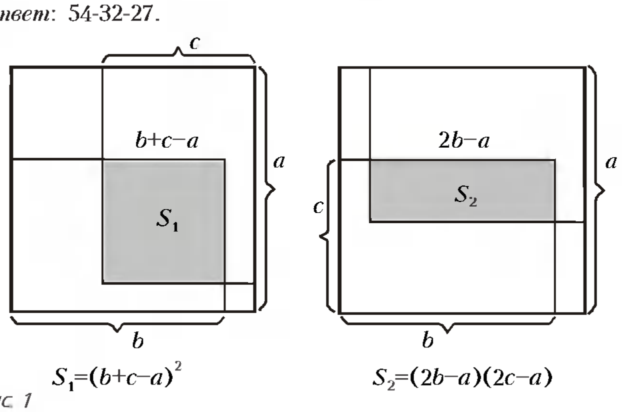


Рис. 1

3. Рассмотрим два варианта возможного расположения ковриков на полу комнаты и введем обозначения, показанные на рисунке 1 (b – длина коврика, c – его ширина, $b \ge c$). Получаем

$$S_1 - S_2 = (b + c - a)^2 - (2b - a) \cdot (2c - a) = b^2 + c^2 + 2bc - 4bc = (b - c)^2.$$

Поскольку неизвестно, какому варианту на рисунке отвечают условные обозначения задачи A и B, то $S_1 - S_2 = |A - B|$, откуда $b - c = \sqrt{|A - B|}$.

4. Каждый набор из 9 горизонтальных или 9 вертикальных прямых разбивает квадрат на 10 полос. Предположим, все 9 квадратов имеют разные размеры. Тогда они могут располагаться лишь в 9 различных вертикальных и 9 различных горизонтальных полосах. В этом случае оставшиеся десятые горизонтальная и вертикальная полосы будут иметь одну и ту же ширину. В их пересечении получится десятый квадрат, чего не может быть по условию. Итак, среди 9 квадратов обязательно найдутся два одинаковых.

5. *Ответ*: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8 (решение единственное).

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Нет, на космонавта продолжает действовать удерживающая его на орбите сила тяготения к Земле.

2. Отрицательная.

3. При запуске с поверхности планеты, поскольку для вывода на круговую орбиту ракете уже была сообщена часть необходимой для ухода на бесконечность энергии.

4. В пар могут вырваться молекулы, кинетическая энергия которых больше работы выхода за поверхность жидкости. Значит, среднее значение кинетической энергии оставшихся молекул уменьшится, а температура понизится.

5. Жидкая пленка охватывает песчинки и стягивает их силами поверхностного натяжения.

6. За счет уменьшения кинетической энергии теплового движения молекул, т.е. понижения температуры.

7. Нагревание полупроводника и/или его освещение.

8. Та, у которой работа выхода электронов больше.

9. Подобно молекулам жидкости при испарении, за пределы нагреваемого металла могут вылетать только самые быстрые электроны, энергия которых превышает работу выхода.

10. Изменяя температуру накала катода.

11. Электроны, образуемые за счет интенсивной термоэлектронной эмиссии раскаленного катода, производят ударную ионизацию молекул газа, что уменьшает электрическое сопротивление газового промежутка.

12. Чем легче налетающая частица, тем меньше ее энергия, необходимая для ионизации атома.

13. Да, при этом происходит ионизация атома.

14. При удалении второго электрона – энергия связи этого электрона больше, поскольку его необходимо удалить уже от двухзарядного иона гелия.

15. Нет, так как должна выделиться энергия, равная энергии связи атома водорода.

16. Энергия испускаемых β-частиц столь велика, что никакие переходы в электронной оболочке атома сообщить ее не в состоянии.

17. Фотоны притягиваются к звезде и, «выбираясь» из потенциальной ямы ее гравитационного поля, теряют энергию.

Микроопыт

Молекулы жира связываются в кружки силами поверхностного натяжения.

Задачи по атомной и ядерной физике

1. $\Delta E = \dfrac{3m_p e^4}{16(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} \approx 9{,}36$ кэВ. **2.** $E_\gamma \approx 19{,}81$ МэВ.

3. $T_\text{т} = \dfrac{m_\alpha Q}{m_\alpha + M_\text{т}} \approx 2{,}74$ МэВ, $T_\alpha = \dfrac{M_\text{т} Q}{m_\alpha M_\text{т}} \approx 2{,}06$ МэВ.

4. $T = 100$ Дж.

XXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

9 класс

1. *Ответ*: 9.

Заметим, что $9A = 10A - A$. При вычитании этих чисел столбиком ни в одном разряде, кроме младшего, не приходится занимать единицу из следующего разряда. Таким образом, сумма цифр разности равна разности сумм цифр чисел $10A$ и A (которые равны) плюс 9.

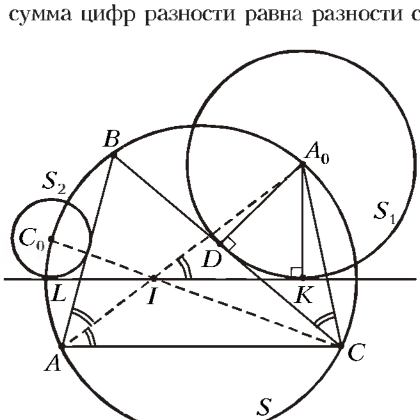


Рис. 2

3. Из точки I проведем касательную IK к окружности S_1 так, чтобы луч IK пересекал меньшую дугу A_0C (рис.2). Аналогичным образом проведем касательную IL к окружности S_2. Биссектриса AI угла BAC делит дугу BC на 2 равные дуги. Поэтому точки A, I, A_0 лежат на одной прямой. Аналогично, на одной прямой лежат точки C, I и C_0. Из равенств

$$\angle ICA_0 = \angle C_0CA_0 = \frac{1}{2}C_0\overset{\smile}{B}A_0 = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{C_0B} + \overset{\smile}{BA_0}\right),$$

$$\angle A_0IC = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AC_0} + \overset{\smile}{A_0C}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{C_0B} + \overset{\smile}{BA_0}\right)$$

следует, что $\angle A_0IC = \angle ICA_0$ и $A_0I = A_0C$.

Далее, пусть D – середина отрезка BC, тогда S_1 касается BC в точке D.

В прямоугольных ΔA_0KI и ΔA_0DC катеты A_0K и A_0D равны и $A_0I = A_0C$ по доказанному выше. Следовательно, $\Delta A_0KI = \Delta A_0DC$. Отсюда $\angle A_0IK = \angle A_0CD = \angle A_0CB$. Но $\angle A_0CB = \angle A_0AB$ (теорема о вписанном угле), и $\angle A_0AB = \angle A_0AC$. Значит, $\angle A_0IK = \angle A_0AC$, следовательно, прямая IK параллельна AC. Аналогично, $IL \parallel AC$, следовательно, L, I, K лежат на одной прямой, параллельной AC.

4. *Ответ*: можно. Приведем решение Ильи Межирова.

Рассмотрим граф, n вершин которого – n натуральных чисел, а ребро соединяет числа a и b тогда и только тогда, когда a и b не взаимно просты. Докажем индукцией по n, что перекрасить числа в белый цвет можно при любых числах в вершинах. База индукции ($n = 1$) очевидна.

Пусть перекрасить n чисел можно; докажем, что это можно сделать для $n + 1$. Для любых n вершин данного графа по предположению индукции существует способ, перекрашивающий эти n вершин; что при этом происходит с $(n + 1)$-й вершиной, неизвестно. Если для некоторых n вершин после применения этого способа $(n + 1)$-я вершина тоже перекрашивается, то требуемое доказано: применяя этот способ, перекрашиваем все вершины. Рассмотрим оставшийся случай: для любых n вершин графа мы можем перекрасить их, не перекрашивая $(n + 1)$-ю.

Заметим, что если добиться нечетного числа белых вершин, то требуемое будет доказано. В самом деле, для каждой из этих белых вершин по очереди произведем перекрашивание всех вершин, кроме нее. Белые вершины перекрасятся четное число раз и останутся белыми, а черные вершины перекрасятся нечетное число раз и станут белыми.

Рассмотрим два случая:

1) Вершин четное число. Перекрасим все, кроме одной, и получим нечетное число вершин.

2) Вершин нечетное число. Так как в любом графе количество вершин, из которых выходит нечетное число ребер, четно, то в данном графе существует вершина, из которой выходит четное число ребер. Перекрасим эту вершину и соединенные с ней и получим нечетное число белых вершин.

Требуемое доказано.

5. *Ответ*: $n(n + 1)$.

Общее количество отрезков длины 1 равно $3 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$. Все отрезки, параллельные двум сторонам большого треугольника, не образуют треугольников, так как любой треугольник состоит из отрезков, параллельных всем трем сторонам. Следовательно, $\dfrac{2}{3}\cdot\left(3\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1)$ отрезков длины 1 отметить можно.

Докажем, что большее количество отрезков отметить нельзя. Закрасим треугольники со стороной 1, как показано на рисунке 3. Треугольники содержат все отрезки длины 1, причем каждый отрезок принадлежит ровно одному треугольнику. Для того чтобы не образовался ни один из закрашенных треугольников, в каждом из них можно отметить не более двух отрезков. Значит, количество выделенных отрезков не превышает $\dfrac{2}{3}$ от их общего числа.

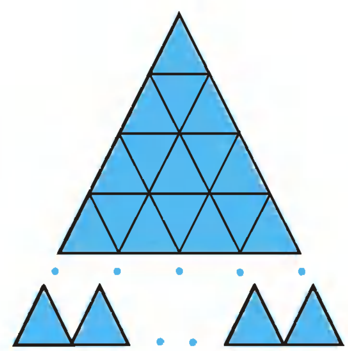


Рис. 3

7. Заметим, что $\angle BCF = 180^\circ - \angle BEF = \angle AEF$. аналогично, $\angle EAF = \angle FDC$, значит, $\Delta AEF \sim \Delta DCF$ (рис.4). Пусть K и L – середины отрезков AE и CD соответственно. Тогда $\angle AKF = \angle FLB$ как углы между медианой и основанием в подобных треугольниках, поэтому точки B, K, F, L лежат на одной окружности. Но так как серединные перпендикуляры к отрезкам AE и CD пересекаются в точке O, то точки K и L лежат на окружности с диаметром BO. Но тогда и точка F лежит на этой окружности, и $\angle BFO$ – прямой.

8. Докажем, что выигрывает Петя. Мысленно разобьем контакты на четыре одинаковые группы A, B, C и D. В каждой группе пронумеруем контакты числами от 1 до 500. Петя будет отвечать на любой ход Васи

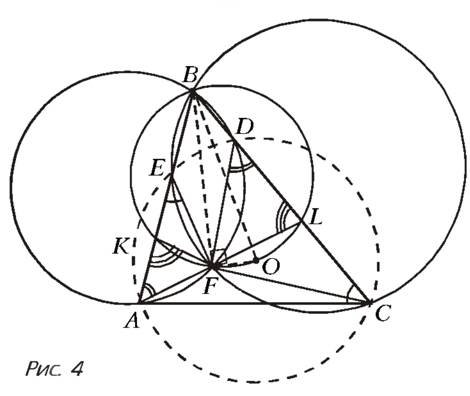


Рис. 4

так, чтобы для каждого номера k от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходило поровну проводов. До начала игры это условие, очевидно, выполняется. Именно благодаря этому условию у Пети всегда будет возможность ответить на ход Васи.
Теперь подробнее опишем Петину стратегию. Если Вася перерезает провод между контактами одной группы, например провод A_iA_j, то Петя перережет провода B_iB_j, C_iC_j и D_iD_j. Если Вася перерезает провод между контактами из разных групп и с разными номерами, например провод A_iB_j, то Петя в ответ перережет провода A_jB_i, C_iD_j и C_jD_i. Если же Вася перерезал провод между контактами из разных групп с одинаковыми номерами, например провод A_kB_k, то Петя перережет провод C_kD_k. Заметим, что из описанной стратегии Пети следует, что провода, которые он собирается резать, не будут отрезаны до его хода.
Такие ходы Петя может сделать, так как из возможности отрезать *один* провод от некоторого контакта следует возможность отрезать по одному проводу от контактов с таким же номером. Отметим, что каждый раз после хода Пети от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходит поровну проводов. Значит, Петя всегда сможет сделать ход, и, так как количество проводов конечно, проиграет Вася.

10 класс

1. Пусть Винни и Пятачок вначале кладут свои орехи во II и III банки, несмотря на ходы Кролика, до тех пор, пока в одной из банок не станет 1998 орехов. После этого тот, кто должен класть орехи в эту банку (пусть, например, это Винни), начинает класть их в I. При этом он уже положил во II банку не менее 999 орехов, значит, в III банке орехов тоже не менее 999 (туда их клал Пятачок). После этого Пятачок продолжает класть в III банку орехи, пока их там не станет 1998 – это произойдет не более чем через 500 ходов, так как в III банку также приходится класть орехи Кролику, чтобы не проиграть. После этого Пятачок также может класть орехи в I банку, так как там не более 500 орехов, положенных Винни, а Кролик вынужден будет положить орех во II или III банку, где их уже по 1998.

2. *Ответ*: $a_1 = a_2 = \ldots = 2$.
Пусть для каких-то двух членов последовательности a_k и a_{k+1} их НОД равен 1. Тогда $\text{НОД}(a_k, a_{k+1}) =$
$= \text{НОД}(a_k + a_{k+1}, a_{k+1}) = \text{НОД}(a_{k+2}, a_{k+1})$, т.е. для всех последующих членов последовательности НОД тоже будет равен 1. При этом, начиная с k-го члена, последовательность превращается в последовательность $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, которая неограниченно возрастает.
Итак, НОД всегда должен быть не меньше 2. Если какие-то члены последовательности a_k и a_{k+1} не равны друг другу, то $a_{k+2} < \max\{a_k, a_{k+1}\}$ и $a_{k+1} \neq a_{k+2}$.
Аналогично, $a_{k+3} < \max\{a_{k+1}, a_{k+2}\} < \max\{a_k, a_{k+1}\}$.
Мы получили, что максимальное число в парах идущих подряд членов последовательности монотонно убывает, т.е. когда-то станет равным 1, и тогда НОД у каких-то членов тоже станет равен 1, чего не должно случиться.
Итак, все члены последовательности должны равняться друг другу и их НОД = 2, т.е. $a_n = 2$.

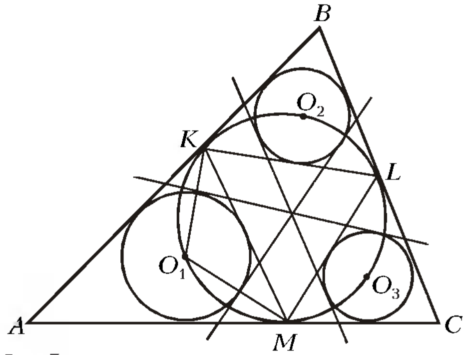


Рис. 5

3. Пусть K, L, M – точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, AC соответственно, O_1, O_2, O_3 – центры малых окружностей (рис.5). Так как $\angle KO_1M = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$, а $\angle KLM = 90° - \dfrac{\angle A}{2}$, то $\angle KO_1M + \angle KLM = 180°$, и O_1 лежит на вписанной в треугольник ABC окружности. Аналогично, O_2 и O_3 лежат на этой окружности и являются серединами дуг KL и LM. Используя результат задачи 3 для 9 класса, заключаем, что построенные касательные проходят через центр окружности, вписанной в треугольник KLM, что и требовалось доказать.

6. Задача является частным случаем задачи 7 для 9 класса, когда точки E и D совпадают с точкой B.

11 класс

1. *Ответ*: нет.
Пусть сумма цифр каждого из чисел равна $S = 9k + n$, $n = 0, 1, \ldots, 8$. Тогда все эти числа имеют остаток n при делении на 9, и имеет место сравнение $19n = 18n + n \equiv 1999 \pmod 9$, откуда $n \equiv 1 \pmod 9$, т.е. $n = 1$.
1) Пусть $k = 0$, т.е. $S = 1$. Рассмотрим 5 наименьших натуральных чисел с суммой цифр, равной 1. Это числа 1, 10, 100, 1000 и 10000. Но даже их сумма больше 1999.
2) Пусть $k = 1$, т.е. $S = 10$. Рассмотрим 19 наименьших натуральных чисел с суммой цифр, равной 10. Это числа 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 109, 118, 127, 136, 145, 154, 163, 172, 181, 190. Их сумма равна 1990 < 1999. Следующее натуральное число с суммой цифр, равной 10, есть 208, что по крайней мере на 18 больше любого из первых 19 чисел, и, значит, сумма будет не менее 1990 + 18 = 2008 > 1999.
3) Пусть $k \geq 2$, т.е. $S \geq 19$. Но наименьшее число с суммой цифр не меньше 19 есть 199, а сумма любых 19 таких чисел будет заведомо больше 1999.
Таким образом, мы получили, что 19 чисел, удовлетворяющих условию, не существуют.

2. Предположим противное, т.е. пусть существует такая расстановка целых чисел, что для любого отрезка AB с серединой C выполняется неравенство $c < \dfrac{a+b}{2}$, где a, b, c – соответственно числа, стоящие в точках A, B и C. Пусть A, B, C, A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$, – соответственно точки -1, 1, 0, $-\dfrac{1}{2^n}$, $\dfrac{1}{2^n}$ числовой прямой, a, b, c, a_n, b_n – целые числа, записанные в этих точках. Тогда, по предположению, $c < \dfrac{a+b}{2}$, $a_1 < \dfrac{a+c}{2}$, $a_2 < \dfrac{a_1+c}{2}$ и т.д. Отсюда следует, что $\max\{a,c\} > \max\{a_1,a_2\}$, так как $a_1 < \dfrac{a+c}{2} \leq \dfrac{\max\{a,c\}+\max\{a,c\}}{2} = \max\{a,c\}$, $a_2 < \dfrac{a_1+c}{2} \leq \dfrac{\max\{a,c\}+c}{2} \leq \max\{a,c\}$. Аналогично, $\max\{a_1,a_2\} > \max\{a_3,a_4\} > \max\{a_5,a_6\} > \ldots$ и $\max\{b,c\} > \max\{b_1,b_2\} > \max\{b_3,b_4\} > \ldots$ Таким образом, $a_{2m} < \max\{a,c\} - m$, $b_{2m} < \max\{b,c\} - m$, и, значит, при некотором m будет выполнено неравенство $a_{2m} + b_{2m} \leq 2c$. Противоречие, так как число c записано в середине отрезка $A_{2m}B_{2m}$.

3. Введем обозначения (рис.6). Как было показано в решении задачи 3 для 9 класса, $RQ \| KM \| EF$, $RE \| LN \| QF$. Значит, образовавшийся четырехугольник – параллелограмм. Используя то, что касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны и $AB + CD = AD + BC$, получаем $RQ + EF = RE + QF$, так как $(RQ + EF) - (RE + QF) = (a_{12} + a_{34}) - (a_{23} + a_{41})$, где a_{ij} – длина общей внешней касательной к окружностям S_i и S_j.
Значит, $RQFE$ – ромб.

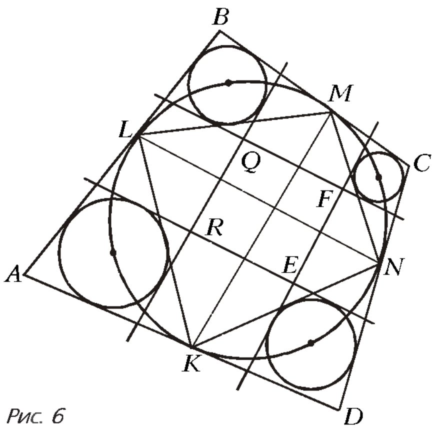


Рис. 6

5. Набор натуральных чисел, удовлетворяющий условию задачи, условимся называть *хорошим*. Пусть существует хороший набор. Ясно, что если (a, b, c, d) – хороший набор, то и $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \frac{d}{k}\right)$ – тоже хороший набор, где $k = $ НОД(a, b, c, d). Поэтому в дальнейшем считаем, что

$$\text{НОД}(a, b, c, d) = 1. \qquad (*)$$

Пусть одно из данных чисел, например a, имеет нечетный простой делитель p. Тогда суммы $b + c$, $c + d$, $b + d$ и, следовательно, сами числа b, c и d делятся на p (ибо, например, $2d = (b + d) + (c + d) - (b + c)$), что противоречит условию $(*)$. Значит, числа a, b, c, d – степени двойки. Упорядочив данные числа в порядке возрастания, получим $a = 2^m$, $b = 2^n$, $c = 2^r$, $d = 2^s$, где $0 = m \le n \le r \le s$, $r \ge 1$ (иначе $m = n = r = 0$, значит, $a = b = c$).

Тогда число $(a+c)^2 = \left(1+2^r\right)^2$ нечетно и не может делиться на четное число bd.

6. Пусть каждый из многоугольников A, B, C можно отделить от двух других. Докажем, что их нельзя пересечь одной прямой. Предположим противное: X, Y, Z – соответственно точки многоугольников A, B, C, лежащие на одной прямой. Тогда одна из точек, например Y, лежит на прямой между X и Z. Следовательно, B нельзя отделить от A и C, так как в противном случае точку Y, лежащую между двумя другими X и Z, нужно отделить от этих точек одной прямой, что невозможно.

В обратную сторону утверждение можно доказать двумя способами.

1) Рассмотрим треугольники с вершинами $X \in A$, $Y \in B$, $Z \in C$. Пусть из всех таких треугольников наименьшую высоту имеет треугольник $X_0Y_0Z_0$ и эта высота проведена из вершины Y_0. Тогда прямая, перпендикулярная высоте и проходящая через середину высоты, не пересекает многоугольники B, A и C, так как, в противном случае, существовал бы треугольник с меньшей высотой, выходящей из Y_0.

2) Рассмотрим две внешние касательные к многоугольникам A и C. Тогда они не могут пересекать B. Если мы сдвинем немного ту, которая лежит ближе к B, в направлении к многоугольнику B, то получим прямую, отделяющую B от A и C.

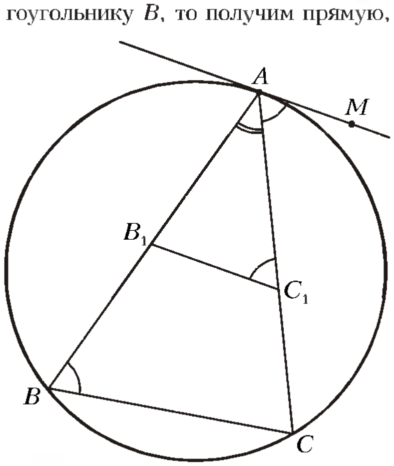


Рис. 7

7. Проведем плоскость, параллельную касательной плоскости, пересекающую ребра AB, AC и AD в точках B_1, C_1 и D_1 соответственно. В плоскости ABC получим конфигурацию, изображенную на рисунке 7. Заметим, что $\angle ABC = \angle CAM$ (по теореме об угле между касательной и хордой), а $\angle CAM = \angle AC_1B_1$ (как накрест лежащие при параллельных и секущей), т.е. $\angle ABC = \angle AC_1B_1$. Следовательно,

$$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ACB.$$

Откуда

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AC} = \frac{AC_1}{AB}.$$

Аналогично,

$$\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{AC_1}{AD} = \frac{AD_1}{AC}$$

и

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{AD_1}{AB} = \frac{AB_1}{AD}.$$

Из этих равенств вытекает, что

$$\frac{C_1D_1}{AB\cdot CD} = \frac{AD_1}{AB\cdot AC} = \frac{B_1D_1}{AC\cdot BD} = \frac{AB_1}{AD\cdot AC} = \frac{B_1C_1}{AD\cdot BC}.$$

Значит, $\Delta D_1B_1C_1$ равносторонний тогда и только тогда, когда $AB\cdot CD = AC\cdot BD = AD\cdot BC$.

Осталось заметить, что углы, образуемые указанными в условии линиями пересечения, соответственно равны углам треугольника $D_1B_1C_1$.

8. Докажем, что выигрывает Петя. Разобьем контакты на четыре одинаковые группы A, B, C и D. В каждой группе пронумеруем контакты числами от 1 до 500. Мысленно покрасим в черный цвет провода между контактами с разными номерами и в белый цвет – между контактами с одинаковыми номерами.

Петя будет отвечать на любой ход Васи так, чтобы для каждого номера k от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходило поровну черных проводов, и если у одного из контактов больше нет белых проводов, то их не было бы и у других контактов с таким же номером. До начала игры это условие, очевидно, выполняется. Именно благодаря этому условию у Пети всегда будет возможность ответить на ход Васи.

Теперь подробнее опишем Петину стратегию. Сначала рассмотрим случай, когда Вася режет черный провод. Если Вася перерезает провод между контактами одной группы, например провод A_iA_j, то Петя перережет провода B_iB_j, C_iC_j и D_iD_j. Если Вася перерезает провод между контактами из разных групп и с разными номерами, например провод A_iB_j, то Петя в ответ перережет провода A_jB_i, C_iD_j и C_jD_i. Такие ходы Петя может сделать, так как из возможности отрезать *один* провод от некоторого контакта следует возможность отрезать по одному проводу от вершин с таким же номером.

Остается рассмотреть случай, когда Вася перерезал белый провод, т.е. провод между контактами из разных групп, но с одинаковыми номерами. Рассмотрим четыре контакта A_k, B_k, C_k и D_k. Первоначально любые два из них соединены проводом. После того как Вася перерезал первый из этих проводов, например провод A_kB_k, Петя перережет два провода так, чтобы между этими контактами осталось три провода, имеющие один общий конец (например, Петя может перерезать провода B_kC_k и C_kA_k, после чего останутся провода A_kD_k, B_kD_k и C_kD_k, что подтверждает возможность такого хода). Если же Вася когда-нибудь перережет один из этих трех проводов, то от одного из контактов A_k, B_k или C_k он отрежет последний провод к контактам с этим же номером k, следовательно, от того контакта будет отходить провод к контакту с *другим* номером. Значит, и от трех других контактов с номером k будут отходить провода к контактам с другим номером, следовательно, Петя может перерезать два оставшихся провода между контактами с номером k, что он и сделает.

Отметим, что каждый раз после хода Пети описанное выше условие выполняется. Следовательно, Петя всегда сможет сделать ход, и, так как количество проводов конечно, проиграет Вася.

XXXIII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

1. $s = g\tau^2/2 \approx 5$ м.

2. 1) $a_к = g\dfrac{m\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)}$; 2) $\dfrac{M}{m} > \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\cos\alpha}$.

3. 1) $I_0 = I/89 = 0{,}1$ А; 2) $U_{xy} = 233rI_0 = 23{,}3$ В;
3) $R_{xy} = U_{xy}/(144I_0) = 1{,}62$ Ом.

4. См. рис.8; можно увидеть 5 изображений источника S_0. *Указание.* Все изображения лежат на окружности, проведенной из точки O через точку S_0; изображение, оказавшееся в секторе AOB, не может более отразиться в зеркалах M_1 и M_2.

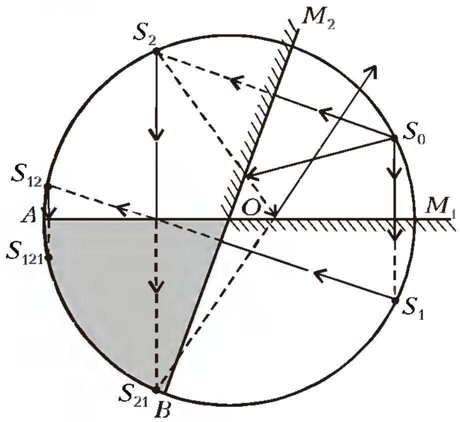


Рис. 8

10 класс

1. 1) $v_{2отн} = 0{,}5v = 10$ км/ч; 2) $v_{2отн} = 5{,}5v = 110$ км/ч.

2. $T_2 = 313$ К (см. рис.9), $t_2 = 40$ °С.

3. *Указание.* Воспользуйтесь данной диаграммой, уравнением Клапейрона – Менделеева и первым началом термодинамики.

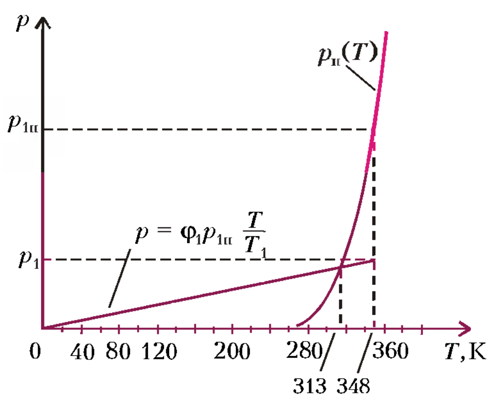


Рис. 9

4. 1) $U_1 = \mathcal{E}/2$; 2) $I_1 = \mathcal{E}/(2R_1)$; 3) $q_{1\max} = C_1\mathcal{E}$;
4) $Q = C_1\mathcal{E}^2/2$.

5. $Q = 25$ Дж.

11 класс

1. 1) $t_1 = u/(2\mu g)$; 2) кинетическая энергия трубки увеличилась на $\Delta E_k = Mu^2/4$; 3) $Q = Mu^2/4$ (выделившееся количество теплоты равно изменению кинетической энергии трубки в системе координат, связанной с движущейся лентой).

2. $\tau = \pi/\left(2\sqrt{\alpha M}\right) \approx 3{,}14\cdot 10^9$ с $\approx$ 100 лет.

3. 1) $t_{\min} = \dfrac{\lambda m_0}{N}\left(\dfrac{T_0}{T_x} - 1\right) \approx 22$ мин;

2) $T_к = T_0\left(1 + \dfrac{2}{5}\dfrac{\lambda m_0 T_0}{p_0 V T_x}\right) \approx 318$ К.

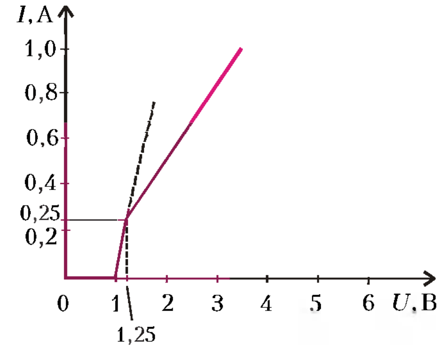


Рис. 10

4. См. рис.10.

5. $R_{\min} = R_1\sqrt{\sin\varphi} \approx 71$ см (заметим, что $R_{\min} > R_0 = 30$ см).

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://www.techno.ru/vivovoco
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, М.А.Сумнина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

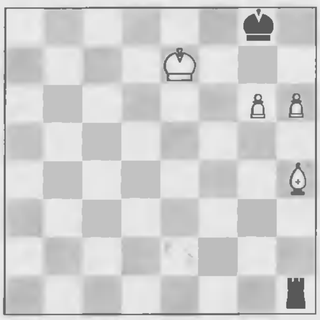
Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №

КоролевскиЕ ЭТЮДЫ

Этюды, принадлежащие чемпионам мира, часто возникали при анализе сыгранной партии или отложенной позиции, при исследовании эндшпиля. Некоторые шахматные короли – Ласкер, Эйве, Ботвинник, Смыслов – уделяли составлению этюдов немало времени, и в результате им удалось создать истинные произведения искусства.

Первый чемпион мира Вильгельм Стейниц в начале своей карьеры опубликовал несколько интересных этюдов, вот самый известный из них.

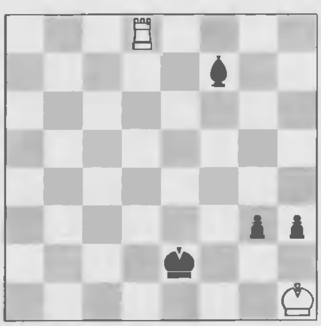


В.Стейниц, 1862

Выигрыш

1. h7+ ♚g7 2. h8♕+! ♚:h8 3. ♔f7 ♜f1+ 4. ♗f6+ ♜:f6+ 5. ♔:f6 ♚g8 6. g7, и пешка проскакивает в ферзи.

Забавно, что спустя 120 лет этот этюд усовершенствовал другой практик, американский гроссмейстер Бенко.



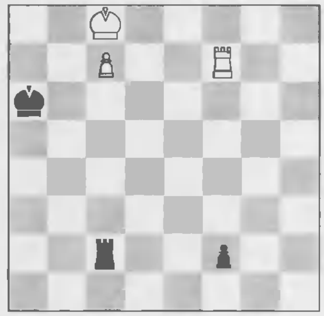
П.Бенко, 1982

Ничья

1. ♖d4! Единственный ход, но почему не 1. ♔g1? А потому, что в этом случае черные берут верх, пользуясь методом Стейница: 1...h2+ 2. ♔g2 (2. ♔h1 ♝g6 3. ♖d4 ♚e3) 2...♝h5 3. ♖h8 h1♛+! 4. ♔:h1 ♚f2! 5. ♖f8+ ♝f3+ 6. ♖:f3+ ♚:f3. или 3. ♖f8 ♝f3+ 4. ♖:f3 h1♛+ 5. ♔:h1 ♚:f3 6. ♔g1 g2. А вот при ладье на d4 белым удается спастись.

1...♝h5 2. ♖h4 ♚f2! 3. ♖g4! На этом строится вся защита – на доске, как говорят, позиция взаимного цугцванга. **3...g2+ 4. ♔h2 ♝:g4 пат**.

А вот классическое произведение второго чемпиона мира Эмануила Ласкера, которое входит во все учебники по ладейному эндшпилю, высока и его художественная ценность.



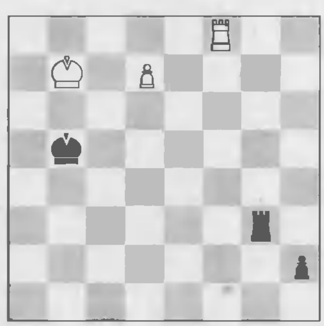
Эм.Ласкер, 1895

Выигрыш

1. ♔b8 ♜b2+ 2. ♔a8 ♜c2 3. ♖f6+ ♚a5. Нельзя загораживать линию «b», она нужна для шахов ладьей. **4. ♔b7 ♜b2+ 5. ♔a7 ♜c2 6. ♖f5+ ♚a4 7. ♔b7 ♜b2+ 8. ♔a6 ♜c2 9. ♖f4+ ♚a3 10. ♔b6 ♜b2+ 11. ♔a5.** Короли перемещаются с одной горизонтали на другую, но бесконечно это продолжаться не может. **11...♜c2 12. ♖f3+ ♚a2.** Предводителя черных фигур удалось увлечь на одну линию с ладьей, что и решает дело. **13. ♖:f2! ♜:f2 14. c8♕**, и белые берут верх.

Идея такого систематического движения фигур, нескольких одновременно, получила серьезное развитие лишь в XX веке, причем известны и этюдные, и практические примеры.

Из многочисленных усовершенствований этюда ограничимся таким.



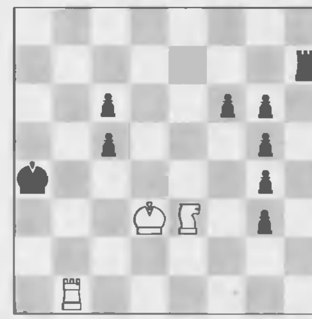
Н.Копаев, 1953

Выигрыш

Сейчас ничего не дает 1. d8♕ h1♛+ 2. ♔b8 ♜b3!, 1. ♖h8 ♜d3 2. ♖h5+ ♚a4! 3. ♔c6 ♜c3+ 4. ♔b6 ♜b3+ 5. ♔a6 ♜f3 или 1. ♖f1 ♜d3 2. ♔c7 ♜c3+ 3. ♔d8 ♜g3 с ничьей. Но белые сначала вынуждают соперника расставить фигуры неудачным образом и лишь затем приступают к оттеснению короля.

1. ♖f5+ ♚a4 2. ♖a5+! Завлекая короля на вертикаль «b», чтобы было прикрытие от шахов. **2... ♚b4.** Если 2... ♚:a5, то 3. d8♕+ ♚b5 4. ♕d5+ ♚a4 (4... ♚b4 5. ♕d2+) 5. ♕a2+, забирая пешку. **3. ♖h5 ♜d3 4. ♔c6 ♜c3+ 5. ♔b6 ♜d3 6. ♖h4+ ♚a3 7. ♔c7 ♜c3+ 8. ♔d8 ♜c2.** Ладья спустилась на вторую горизонталь, и только теперь, через восемь ходов, фигуры начинают перемещаться по траекториям Ласкера... **9. ♔e7 ♜e2+ 10. ♔d6 ♜d2+ 11. ♔c6 ♜c2+ 12. ♔b5 ♜b2+ 13. ♔a5 ♜d2 14. ♖h3+ ♚b2 15. ♖:h2** с выигрышем.

Хосе Рауль Капабланка придумал в своей жизни всего один этюд.



Х.Р.Капабланка, 1908

Выигрыш

Вот главный вариант решения, указанный автором этюда.

1. ♔c4 ♚a5 2. ♔:c5 ♚a6 3. ♔:c6 ♚a7 4. ♘d5 ♜h2 5. ♘c3 f5 6. ♖b7+ ♚a6 7. ♖b6+ ♚a5 8. ♖b5+ ♚a6 9. ♖b4 ♚a7 10. ♘b5+ ♚b8 11. ♘d6+ ♚a8 12. ♘c4 ♜a2 13. ♔c7 ♜a7+ 14. ♔c8 ♜a6 15. ♖b8+ ♚a7 16. ♖b7+ ♚a8 17. ♘b6+ ♜:b6 18. ♖:b6 ♚a7 19. ♖b1 f4 20. ♔c7 ♚a6 21. ♔c6 ♚a5 22. ♔d5 f3 23. ♔e4 ♚a4 24. ♔e3, и белые забирают все оставшиеся пешки.

Однажды Капабланку спросили: почему он – такой виртуоз эндшпиля – не составляет этюдов? «Когда я был молод, то придумал один этюд, – ответил шахматный король, имея в виду рассмотренную позицию. – Но с ним никто не мог справиться. С тех пор я бросил это занятие: зачем сочинять этюды, если они никому не под силу!»

Спустя 60 лет гроссмейстер по композиции Г.Каспарян обнаружил, что в позиции Капабланки вместо 13...♜a7+ к ничьей ведет 13...g2, а еще позднее мастер Н.Новотельнов доказал, что черные могли сыграть сильнее и раньше – 6...♚a8, после чего выигрыша нет. Таким образом, этюд великого кубинца вообще не решается, и, значит, трудно было ожидать, что его кто-то одолеет...

Е.Гик

Индекс 70465

ИГРУШКИ ПО ФИЗИКЕ

Капельки росы, стеклянные шарики и микроскоп Левенгука

Обычная капелька росы, размером чуть больше миллиметра, — это короткофокусная прозрачная линза с очень гладкой поверхностью и почти сферической формой. Помещенная между рассматриваемым предметом и глазом, такая линза дает увеличение $\Gamma \approx d_0/F$, где $d_0 = 250$ мм — расстояние наилучшего зрения, F — фокусное расстояние линзы. Чем меньше линза-росинка, тем меньше ее фокусное расстояние и тем большее достигается увеличение. Наверное, вы и сами не раз наблюдали сильно увеличенное изображение ворсинок или прожилок листьев через каплю росы ясным летним утром.

По сути дела, росинка — это аналог первой линзы объектива современного оптического микроскопа.

Но экспериментировать с росинками не очень удобно — они легко стекают с листа растения или испаряются. Надежнее проводить наблюдения с искусственными, стеклянными «росинками».

Удивительных результатов в этом направлении достиг голландский торговец мануфактурой Антони ван Левенгук (1632—1723), всю жизнь посвятивший изготовлению и совершенствованию однолинзовых микроскопов и наблюдениям с помощью этих чудесных приборов. Основой заготовки каждого объектива Левенгуку служил, видимо, маленький стеклянный шарик, который он выплавлял над пламенем горелки из стеклянной нити.

Короткофокусную линзу высокого качества самостоятельно изготовить довольно трудно, но можно воспользоваться готовым стеклянным шариком. Например, такие шарики (две штуки) диаметром порядка 10 мм используются при сборке сложной пробки для бутылки (для улучшения характеристик вытекающей из бутылки струи). Фокусное расстояние такого шарика около 3 мм, что позволяет использовать его в качестве объектива с увеличением $\Gamma \sim 10^2$. Можно сошлифовать донышко шарика на наждачном бруске, а затем отполировать стеклянную плоскость с помощью полировочной пасты (паста ГОИ). Это увеличит так называемое рабочее расстояние микроскопа, т.е. допустимое расстояние между объектом и линзой-объективом, и обеспечит лучшее качество изображения.

Попробуйте самостоятельно разобраться, как лучше и удобнее проводить наблюдения с помощью изготовленного вами микрообъектива.

(Продолжение — внутри журнала, в рубрике «Наша обложка».)