

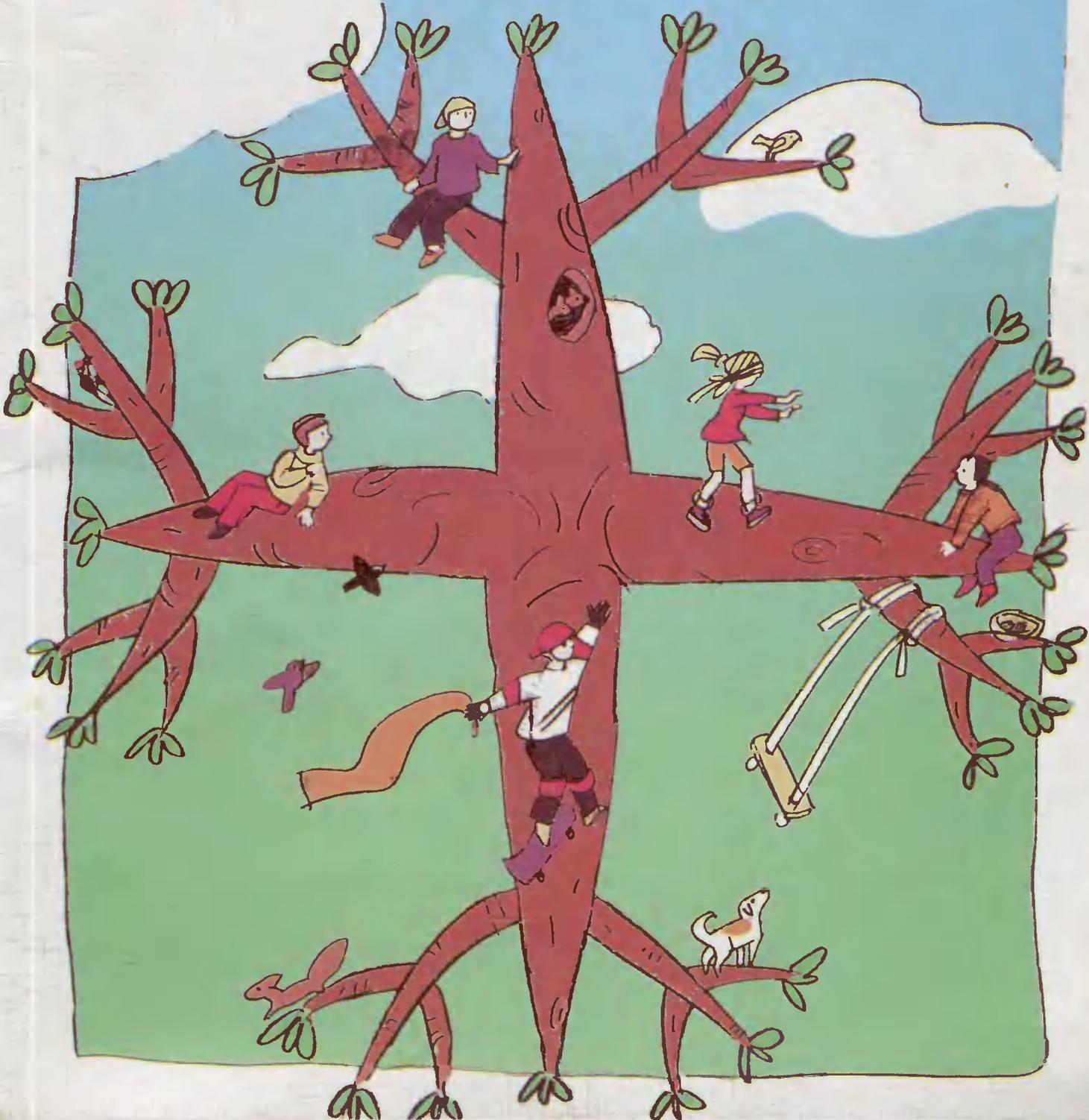
МАЙ/ИЮНЬ

ISSN 0130-2221

2000 · №3

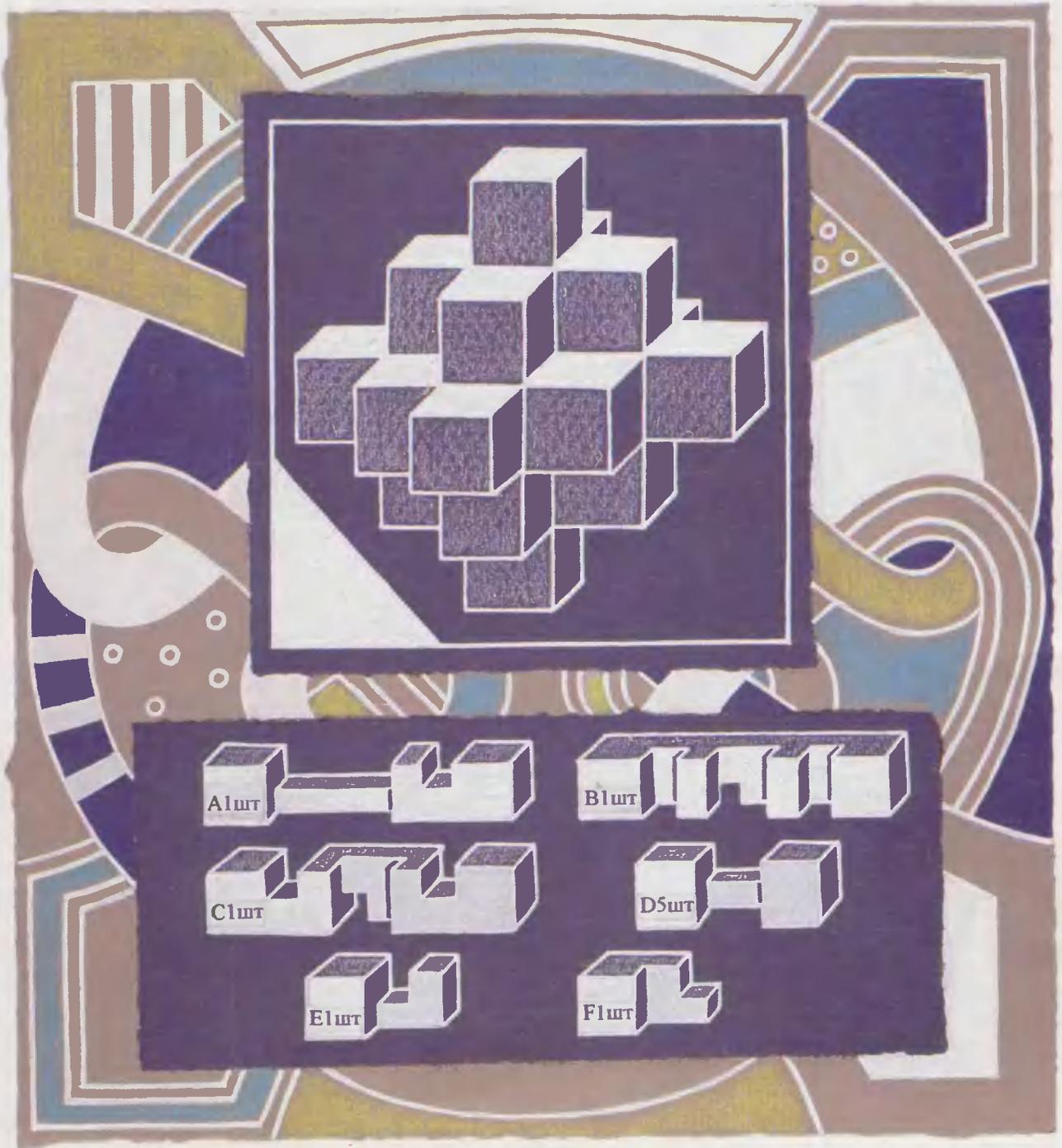
КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Пятиэтажная головоломка



Из элементов, изготовленных из брусков $10 \times 2 \times 2$ (А, В, С), $6 \times 2 \times 2$ (D), $4 \times 2 \times 2$ (Е, F), Γ сложите головоломку. Элемент F является замком и закладывается последним.

Л. Мочалов

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленин, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбилин, В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.Р.Зильберман,
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаев, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров
(заместитель главного редактора),
В.А.Тихомирова, В.М.Уровев,
А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора),
И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов,
Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,
А.И.Шапиро

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

©2000, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Великие математики прошлого и их великие теоремы.
В.Тихомиров
- 5 О запутанных веревках и топологии полимерных цепей.
С.Нечаев
- 11 Малая теорема Ферма. *В.Сендеров, А.Спивак*
- 18 Лазерная указка. *С.Обухов*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 23 Волновая механика Эрвина Шредингера. *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 25 Задачи М1726–М1735, Ф1733–Ф1742
- 27 Решения задач М1706–М1710, Ф1718–Ф1727

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Взаимосвязь вещества и электрического поля

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 35 Задачи
- 36 Про мороженое. *Н.Елисеев*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 37 Почему кувьркается книга? *В.Ланге*
- 38 Еще раз о магнитной силе. *Е.Ромишевский*
- 39 Пределы зоркости приборов. *А.Стасенко*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 42 Возвращающая сила и частота колебаний системы.
П.Хаджи, Л.Глазова, В.Личман

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 45 Поляры и теорема Паппа. *Г.Багдасарян*
- 47 Прогулки короля. *И.Акулич*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 49 Закон сохранения энергии для одноатомного идеального газа.
А.Шеронов

ОЛИМПИАДЫ

- 53 Математическая регата
- 56 Всероссийская студенческая олимпиада по физике

ИНФОРМАЦИЯ

- 57 Новый прием на заочное отделение Малого мехмата
- 57 Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ
- 58 ЗИФМШ объявляет прием
- 59 Ответы, указания, решения

«Квант» улыбается (34)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье С.Нечаева*
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Физики на монетах мира*

Великие математики прошлого и их великие теоремы

В. ТИХОМИРОВ

Лагранж и его теорема о четырех квадратах

Эта теорема до сих пор входит в число величайших достижений математики.

М.Кац, С.Улам

Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) родился в Турине, а умер и похоронен в Париже. В его жилах текла французская и итальянская кровь, и поэтому обе нации могут гордиться человеком, который (по словам Талейрана) сделал своим гением честь всему человечеству.

По своим научным установкам Лагранж отличался от своего старшего великого современника — Леонарда Эйлера. Эйлер в течение своей жизни решал и решил огромное, невиданное, ни с чем не сравнимое

Окончание. Начало см. в «Кванте» №2.

число отдельных, конкретных задач, и в большинстве своем каждую задачу он решал своим, особым, индивидуальным приемом. Лагранж же старался отыскать общие закономерности у разнородных явлений, найти потаенные связи между отдельными объектами, вскрыть единство казалось бы несоединимого. Но при всем при том ему принадлежит также и множество замечательных конкретных результатов. Об одном из них — о представлении натуральных чисел в виде суммы четырех квадратов — и будет сейчас рассказано.

Лагранж остался в благодарной памяти всего человечества как светлая, благородная личность. Вот как характеризует его Фурье: «Лагранж был столько же философ, сколько математик. Он доказал это своей жизнью, умеренностью желаний зем-

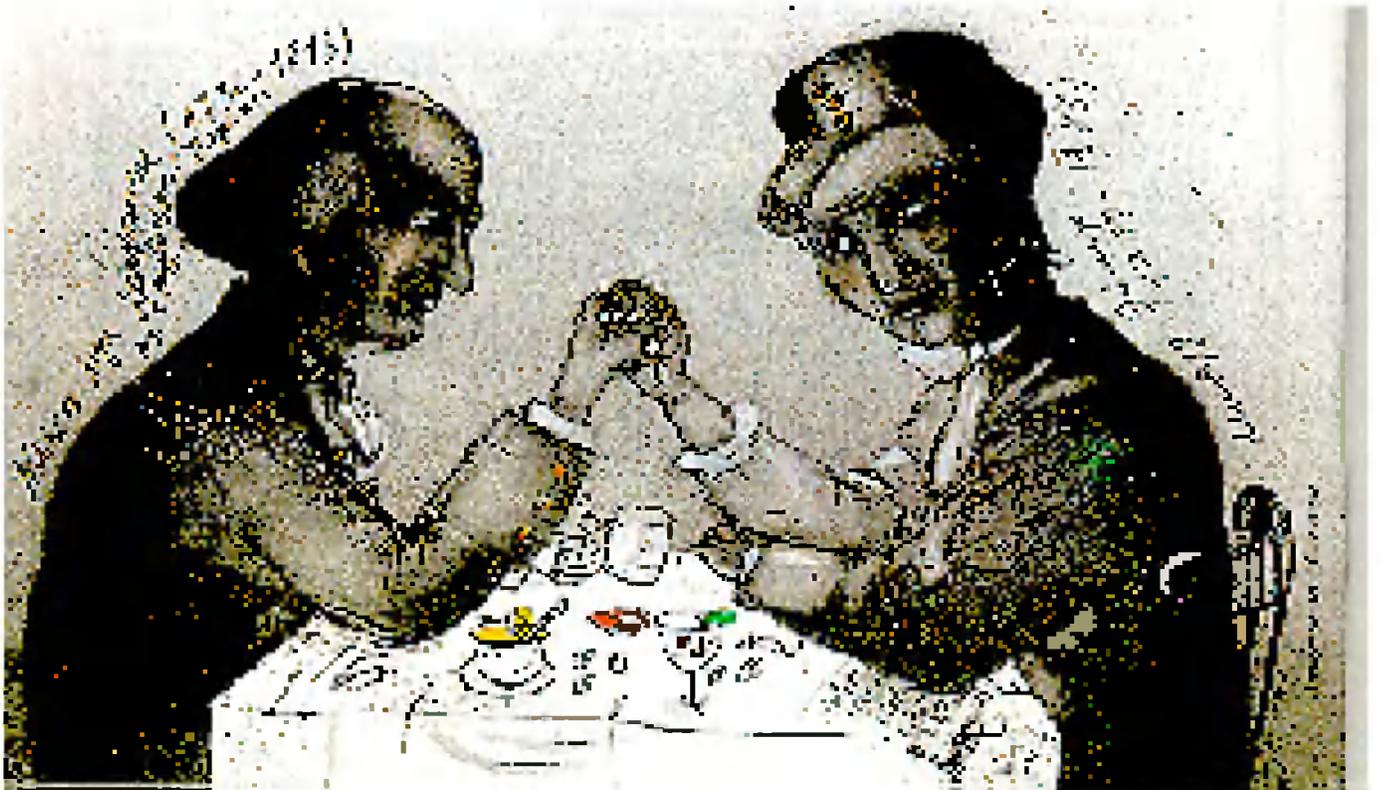
ных благ, глубокой преданностью общим интересам человечества, благородной простотой своих привычек, возвышенностью души и глубокой справедливостью в оценке трудов своих современников».

А теперь перейдем к формулировке и доказательству теоремы Лагранжа.

Теорема 4. Любое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел.

Доказательство. Формула Эйлера

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = \\ = (ax + by + cz + dt)^2 + \\ + (ay - bx + ct - dz)^2 + \\ + (az - bt - cx + dy)^2 + \\ + (at + bz - cy - dx)^2 \end{aligned}$$



показывает, что произведение чисел, представимых в виде суммы четырех квадратов, тоже представимо в этом виде. Поэтому достаточно доказать теорему 4 для простых чисел.

Очевидно, $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$. Пусть p – нечетное простое число.

Лемма. *Существуют такие целые числа x и y , что $x^2 + y^2 + 1$ кратно p .*

Доказательство леммы. Рассмотрим числа $0^2, 1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$.

Если какие-то два из них дают один и тот же остаток при делении на p , т.е. если $x^2 \equiv y^2 \pmod{p}$, где $0 \leq x < y \leq (p-1)/2$, то $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ кратно p . Но ни разность $x-y$, ни сумма $x+y$ не кратна p .

Итак, рассматриваемые числа дают *разные* остатки при делении на p . Рассмотрим теперь еще $(p+1)/2$ чисел: $-1 - 0^2, -1 - 1^2, -1 - 2^2, \dots$

$\dots, -1 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Они тоже дают *разные* остатки. Поскольку остатков от деления на p существует p штук, а в каждом из рассматриваемых нами множеств $(p+1)/2$ элементов, то хотя бы одно из чисел вида x^2 дает при делении на p такой же остаток, как и некоторое число вида $-1 - y^2$. При этом

$$x^2 \equiv -1 - y^2 \pmod{p},$$

что и требовалось доказать:

$$x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Числа x и y , как мы помним, не превосходят $(p-1)/2$; поэтому

$$x^2 + y^2 + 1 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1 < p^2.$$

При этом

$$x^2 + y^2 + 1 = pm,$$

где $m < p$.

Мы хотим доказать, что число p представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Давайте рассмотрим *наименьшее* натуральное число m , для которого существуют такие целые числа x, y, z, t , что

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = pm.$$

Как мы уже знаем, $m < p$. Докажем, что $m = 1$. Для этого применим изобретенный Пьером Ферма метод

бесконечного спуска: предположим, что $m > 1$, и докажем, что в таком случае m – не наименьшее.

Пусть для начала m четно. Тогда либо все числа x, y, z, t четны, либо все они нечетны, либо два из них (для определенности, пусть это x и y) четны, а два (z и t) нечетны. В любом случае формула

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{z+t}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-t}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{2} = \frac{pm}{2} \end{aligned}$$

показывает, что m – не наименьшее возможное.

Пусть теперь m нечетно. Рассмотрим остатки a, b, c, d от деления чисел x, y, z, t на m . Хотя бы один из них отличен от 0: в противном случае сумма квадратов $pm = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ делилась бы на m^2 и (простое!) число p делилось бы на m .

Можно считать, что числа a, b, c, d не превосходят $(m-1)/2$. (Если, например, величина a окажется равна $(m+1)/2$ или больше, то можно заменить x на противоположное ему число $-x$. При этом вместо a получим остаток $m - a \leq m - \frac{m+1}{2} = \frac{m-1}{2}$.)

Обозначим $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Так как

$$\begin{aligned} n &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv \\ &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = pm \equiv 0 \pmod{m}, \end{aligned}$$

то $n \equiv 0 \pmod{m}$, так что $n = ml$, где l – натуральное число. Поскольку все числа a, b, c, d меньше $m/2$, имеем

$$\begin{aligned} ml = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < \\ < 4(m/2)^2 = m^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $l < m$.

Применим формулу Эйлера:

$$\begin{aligned} &(ax + by + cz + dt)^2 + \\ &+ (ay - bx + ct - dz)^2 + \\ &+ (az - bt - cx + dy)^2 + \\ &+ (at + bz - cy - dx)^2 = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = \\ &= npm = m^2 pl. \end{aligned}$$

Как мы помним, $x \equiv a, y \equiv b, z \equiv c$ и $t \equiv d \pmod{m}$. Поэтому

$$\begin{aligned} ax + by + cz + dt &\equiv \\ &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = pm \equiv 0, \\ ay - bx + ct - dz &\equiv \\ &\equiv xy - yx + zt - tz = 0, \\ az - bt - cx + dy &\equiv \\ &\equiv xz - yt - zx + ty = 0, \\ at + bz - cy - dx &\equiv \\ &\equiv xt + yz - zy - tx = 0. \end{aligned}$$

Итак, все числа $ax + by + cz + dt, ay - bx + ct - dz, az - bt - cx + dy$ и $at + bz - cy - dx$ кратны m ; формула

$$\begin{aligned} pl = &\left(\frac{ax + by + cz + dt}{m}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{ay - bx + ct - dz}{m}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{az - bt - cx + dy}{m}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{at + bz - cy - dx}{m}\right)^2 \end{aligned}$$

представляет число pl в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Таким образом, число m не является наименьшим возможным. Теорема Лагранжа доказана.

Гаусс и его теорема о семнадцатигульнике

Подобно Архимеду Гаусс выразил желание, чтобы на его могиле был увековечен семнадцатигульник.

Г.Вебер

Так же как в литературе Гомер, Данте, Шекспир, Гете, Толстой и Достоевский, так в математическом естествознании Архимед, Ньютон, Эйлер, Гаусс, Риман и Пуанкаре – высочайшие вершины, соединение гениальности и всеохватности.

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – математик, чье имя, как и имя Архимеда, овеяно легендами. Многие его высказывания вошли в поговорку. Часто вспоминают его девиз: «Nil actum reputans si quid superesset agendum»¹. В этой личности сплелись могучий интеллект, сильный характер и любознательность естествоиспытателя. При жиз-

¹ *Что не завершено, не сделано вовсе (лат.).*

ни Гаусс был признан величайшим и коронован титулом «*Mathematicorum Princeps*»².

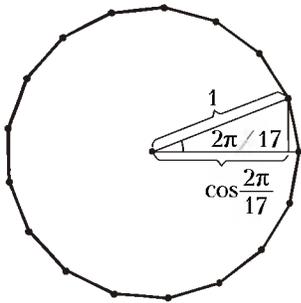
«Математическая деятельность Гаусса, — писал Феликс Клейн, — началась одним крупным открытием, которое привело его к твердому убеждению навсегда посвятить себя науке... 30 марта 1796 года ему — девятнадцатилетнему — удалось показать, что правильный семнадцатиугольник может быть построен с помощью циркуля и линейки», т.е. совершить прорыв в проблеме, где не было никакого прогресса в течение свыше 2000 лет.

Потомки постарались выполнить завещание великого ученого. Они воздвигли ему памятник (на родине, в Брауншвейге), который стоит на постаменте, являющемся правильным семнадцатиугольником. Но если не знать этого, то и не заметишь: правильный семнадцатиугольник почти неотличим от круга.

Теорема 5. *Правильный семнадцатиугольник может быть построен с помощью циркуля и линейки.*

Приводимое доказательство — лишь незначительная обработка доказательства самого Гаусса.

Доказательство. Для построения правильного семнадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса 1, достаточно построить отрезок длины $\cos \frac{2\pi}{17}$ (см. рисунок). Дальнейшая последовательность действий не вы-



зывает трудностей. Однако для этого построения нам потребуются некоторые соотношения между комплексными числами.

Обозначим через ϵ один из комплексных корней семнадцатой степени из единицы:

$$\epsilon = e^{2\pi i/17} = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17}.$$

Введем обозначения:

$$z_1 = \epsilon + \epsilon^{-1}, \quad z_2 = \epsilon^4 + \epsilon^{-4},$$

$$y_1 = z_1 + z_2,$$

$$y_2 = \epsilon^2 + \epsilon^{-2} + \epsilon^8 + \epsilon^{-8},$$

$$y_3 = z_1 z_2,$$

$$y_4 = (\epsilon^2 + \epsilon^{-2})(\epsilon^8 + \epsilon^{-8}),$$

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_3 + y_4.$$

Заметим, что все эти числа действительные. В самом деле,

$$\begin{aligned} \epsilon^k + \epsilon^{-k} &= \left(\cos \frac{2\pi k}{17} + i \sin \frac{2\pi k}{17} \right) + \\ &+ \left(\cos \frac{-2\pi k}{17} + i \sin \frac{-2\pi k}{17} \right) = 2 \cos \frac{2\pi k}{17}. \end{aligned}$$

Поскольку $z_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{17}$, нам достаточно построить отрезок длины z_1 .

Лемма 1. $\epsilon^k = \epsilon^{17+k}$ при целых k .

Действительно,

$$\begin{aligned} \epsilon^{17+k} &= \cos \frac{2\pi(17+k)}{17} + \\ &+ i \sin \frac{2\pi(17+k)}{17} = \cos \left(2\pi + \frac{2\pi k}{17} \right) + \\ &+ i \sin \left(2\pi + \frac{2\pi k}{17} \right) = \\ &= \cos \frac{2\pi k}{17} + i \sin \frac{2\pi k}{17} = \epsilon^k. \end{aligned}$$

Лемма 2. $\sum_{k=0}^{16} \epsilon^k = 0$.

По формуле суммы геометрической прогрессии (которая, конечно, верна и для комплексных чисел) получаем

$$\sum_{k=0}^{16} \epsilon^k = \frac{\epsilon^{17} - 1}{\epsilon - 1} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{16} \epsilon^k = \left(\sum_{k=0}^{16} \epsilon^k \right) - \epsilon^0 = 0 - 1 = -1,$$

т.е. $\sum_{k=1}^8 (\epsilon^k + \epsilon^{-k}) = -1$.

Лемма 3. $y_1 y_2 = y_3 y_4 = -1$.

Действительно,

$$\begin{aligned} y_1 y_2 &= (\epsilon + \epsilon^{-1} + \epsilon^4 + \epsilon^{-4}) \times \\ &\times (\epsilon^2 + \epsilon^{-2} + \epsilon^8 + \epsilon^{-8}) = \\ &= \epsilon^3 + \epsilon^{-1} + \epsilon^9 + \epsilon^{-7} + \epsilon^1 + \epsilon^{-3} + \epsilon^7 + \\ &+ \epsilon^{-9} + \epsilon^6 + \epsilon^2 + \epsilon^{12} + \epsilon^{-4} + \epsilon^{-2} + \epsilon^{-6} + \end{aligned}$$

$$+ \epsilon^4 + \epsilon^{-12} = \sum_{k=1}^8 (\epsilon^k + \epsilon^{-k}) = -1.$$

Аналогично, $y_3 y_4 = -1$.

Лемма 4. $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 x_2 = -4$. (Доказательство предоставляем читателю.)

Напомним, что если заданы отрезки длины 1, $|p|$ и $|q|$, то циркулем и линейкой можно построить отрезок, длина которого равны абсолютной величине корня квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Поскольку $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 x_2 = -4$, то по теореме Виета x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + x - 4 = 0$, а значит, мы можем построить отрезки длины $|x_1|$ и $|x_2|$.

Теперь, так как $y_1 + y_2 = x_1$ и $y_1 y_2 = -1$, можно построить отрезки длины $|y_1|$ и $|y_2|$. Из равенств $y_3 + y_4 = x_2$ и $y_3 y_4 = -1$ получаем отрезки длины $|y_3|$ и $|y_4|$. И наконец, используя равенства $z_1 + z_2 = y_1$ и $z_1 z_2 = y_3$, мы можем построить отрезок длины $|z_1|$, а следовательно, и правильный семнадцатиугольник.

Воспользовавшись этим рассуждением, можно получить следующее выражение для $\cos \frac{2\pi}{17}$:

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{17} &= \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \right. \\ &+ \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34} + 2\sqrt{17}} - \\ &\left. - 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right). \end{aligned}$$

Впоследствии было доказано, что правильный n -угольник можно построить циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $n = 2^k F_1 F_2 \dots F_r$, где все F_i — различные простые числа вида $2^{2^s} + 1$ (числа Ферма). У Ферма было подозрение, что все числа вида $2^{2^s} + 1$ — простые. Эйлер опроверг это утверждение, указав, что число

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297$$

имеет простым делителем 641. В наш компьютерный век стало возможным исследовать на простоту достаточно большие числа, но пока ни одного простого числа Ферма, кроме 3, 5, 17, 257 и 65537, не найдено.

² Король математиков (лат.).

О запутанных веревках и топологии полимерных цепей

С. НЕЧАЕВ

КАК ОЧИСТИТЬ АПЕЛЬСИН, не снимая с него кожу? Можно ли приготовить омлет из неразбитых яиц? Удастся ли гладко (без макушек) причесать волосатый бильярдный шар или тор (бублик), на котором вдруг выросли волосы? Почему нельзя завязать узел на телеграфном проводе, тянущемся вдоль линии железной дороги? Эти и подобные, часто занимательные, а иногда кажущиеся наивными, вопросы имеют непосредственное отношение к топологии. Нас же будет интересовать довольно узкий круг проблем, связанных с так называемой низкоразмерной топологией, т.е. с топологией систем, содержащих длинные перепутанные линейные нити совершенно различной физической природы. В качестве таких объектов могут выступать полимерные цепи, вихревые линии в жидком гелии и сверхпроводниках, струны в квантовой теории поля и т.п.

Одной из классических проблем низкоразмерной топологии является проблема классификации узлов и зацеплений, а также задача построения топологических инвариантов узлов, т.е. таких характеристик линейных объектов (нитей), которые не зависят от формы нити, на которой этот узел завязан, и не меняются при непрерывных деформациях. Вообще, о настоящих узлах или зацеплениях можно говорить только в том случае, если концы нити отсутствуют – либо нить замкнута, либо концы уведены на бесконечность. Действительно, при наличии свободных концов мы всегда можем с помощью непрерывной деформации нити совместить любые две произвольные конфигурации друг с другом. Поэтому для незамкнутых нитей правильнее было бы говорить о квазиузлах, представляющих собой

узлы, завязанные на замкнутой кривой, составленной из самой нити и, скажем, отрезка, соединяющего концы нити. Однако в случае, когда узел имеет размер, существенно меньший, чем длина нити, разница между узлами и квазиузлами незначительна.

История донесла до нас имя одного из первых топологов-экспериментаторов Гордия, узел которого, по преданию, Александр Македонский, будучи не в силах развязать, просто разрубил. Как это ни удивительно, современная алгебраическая топология отчасти позаимствовала идею Александра Македонского для построения топологических инвариантов узлов. (В качестве введения в эту проблему полезно прочесть статью [1].) Впрочем, знание топологических инвариантов и умение классифицировать узлы и зацепления, увы, не помогает нам развязывать туго затянутые узлы на шнурках ботинок. Расплетая перепутавшиеся веревки, мы даже не удивляемся тому, что длинные нити, предоставленные самим себе, имеют особенность запутываться наиболее неприятным образом из всех возможных. Мы только горько вздыхаем, когда уже почти распутанный моток пряжи случайно падает на пол и попадает в лапы любопытному котенку, потому что прекрасно понимаем, что наш труд пошел насмарку и нужно заново начинать кропотливую работу.

Как правило, мы не задумываемся об истинных причинах такой «несправедливости», считая, что это одно из проявлений общего жизненного закона: неприятные вещи происходят чаще, чем приятные, и бутерброд обычно падает маслом вниз. И мы совершенно не отдаем себе отчета в том, что самопроизвольное запутывание длинных нитей управляется

законами теории вероятностей и является следствием неевклидовой геометрии *фазового пространства узлов*, т.е. такого гипотетического пространства, которое содержит все возможные узлы и в котором есть понятие *метрики*, или расстояния между соседними по сложности узлами: чем более различаются по топологическому типу узлы, тем больше между ними расстояние в этом пространстве. В топологии такое пространство называют *универсальной накрывающей*. В общем случае построение этого пространства и описание его свойств является исключительно сложной задачей. Тем не менее, для некоторых специальных случаев, к которым мы и перейдем чуть позже, это пространство может быть описано в наглядных геометрических терминах.

Итак, выясняется, что, для того чтобы строго по-научному распутать клубок веревок, необходимо сначала изучить теорию вероятностей, а затем еще и разобраться в том, что такое неевклидова геометрия Лобачевского – Римана.

Прежде чем двигаться дальше, отвлекусь ненадолго и обсудим некоторые физические системы, в которых топологические взаимодействия играют существенную роль. В самом начале уже упоминались полимеры – длинные цепи, состоящие из десятков и сотен тысяч последовательно соединенных элементарных блоков – *мономеров*. Объединение мономеров в цепные молекулы принципиальным образом меняет все статистические и динамические свойства рассматриваемых систем, в результате чего полимерные молекулы под влиянием случайных сил, действующих со стороны среды, могут флуктуировать, принимая весьма причудливые конфигурации в про-



странстве, в том числе и завязываясь в узлы. Наличие цепной структуры порождает целый ряд особенностей физического поведения макромолекулярных систем: так называемую *линейную память* (т.е. строго установленное положение каждого мономера вдоль цепи); ограничения на независимое перемещение мономеров благодаря наличию химических связей; большие пространственные флуктуации (т.е. даже отдельная макромолекула может рассматриваться как статистическая система с большим количеством степеней свободы). (Подробнее о физике полимеров можно прочитать в книжке [2].)

Наличие линейной памяти ведет к тому, что различные части полимерной молекулы, флуктуирующие в пространстве, не могут «проходить сквозь друг друга» непрерывным образом (без разрыва цепи). Для системы кольцевых цепей это означает, что топологически доступными друг для друга являются лишь те конфигурации, которые могут быть совмещены друг с другом с помощью непрерывного преобразования (рис.1).

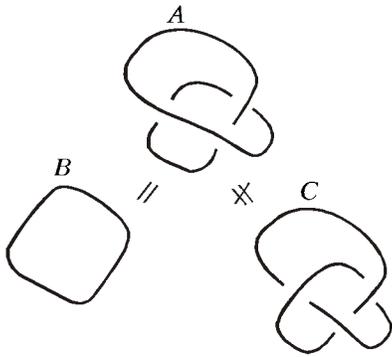


Рис.1. Непрерывной деформацией нити узел А можно совместить с узлом В, но нельзя совместить с узлом С

Очень часто полимеры моделируют траекториями случайного блуждания, при котором каждый следующий шаг случаен и совершенно независим от всех предыдущих. Такое движение часто также называют броуновским – в честь биолога Броуна, впервые наблюдавшего хаотическое движение микроскопических частичек цветочной пыльцы в жидкости. Наглядное представление о движении броуновских частиц дает игра в жмурки: водящий, у которого завязаны глаза, – это частица пыльцы, а приятели водящего, которых он хо-

чет догнать, играют роль случайных сил, действующих со стороны среды на частицу. Если допустить, что водящий каждый шаг делает в случайном направлении, нетрудно оценить, как далеко в среднем водящий отойдет от исходной точки за N шагов.

Пусть \vec{R}_N – вектор перемещения водящего за N шагов и пусть он делает шаги $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$ равной длины a случайно в любом из направлений на юг, север, запад, восток (без предпочтения какого-либо направления). Представим \vec{R}_N (считая $\vec{R}_0 = 0$) в виде

$$\vec{R}_N = \overbrace{(\vec{R}_N - \vec{R}_{N-1})}^{\vec{a}_N} + \overbrace{(\vec{R}_{N-1} - \vec{R}_{N-2})}^{\vec{a}_{N-1}} + \dots + \overbrace{(\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}^{\vec{a}_2} + \overbrace{(\vec{R}_1 - \vec{R}_0)}^{\vec{a}_1}.$$

Возводя в квадрат, получим

$$\vec{R}_N^2 = \vec{a}_N^2 + \vec{a}_{N-1}^2 + \dots + \vec{a}_1^2 + 2 \times$$

\times (все члены вида $\vec{a}_j \vec{a}_k$ с $j \neq k$).

Учитывая, что $a_j = a$, а значение всех перекрестных членов в среднем равно нулю, получаем, что водящий удалится от начальной точки за N шагов в среднем на расстояние

$$R_N \equiv \sqrt{R_N^2} = a\sqrt{N}.$$

Нетрудно прикинуть, сколько это: считая длину шага равной примерно одному метру, а число сделанных шагов равным, скажем, 100, получается, что расстояние по прямой между начальной и конечной точками в среднем составит всего $a\sqrt{N} = 10$ м, в то время как общая длина пройденного пути $aN = 100$ м.

Теперь мы можем оценить вероятность P_N того, что после N случайных шагов водящий окажется на расстоянии не более одного шага от той точки, откуда начал двигаться. Считая (очень грубо), что в пределах круга радиусом $R_N = a\sqrt{N}$ можно с равной вероятностью оказаться в любой точке (в том числе и в той, откуда вышел), вероятность P_N оценим как $P_N \approx a^2/S$, где $S = \pi R_N^2 = \pi a^2 N$ – площадь круга радиусом R_N . Для приведенных

выше значений $a = 1$ м и $N = 100$ получаем $P_N \approx 1/314$. Этот ответ надо понимать так: если играть в жмурки каждый день в течение 314 дней (т.е. около 10 месяцев) и водящий будет в каждой игре делать 100 шагов, то примерно 1 раз за все это время он *случайно* на последнем шаге окажется вблизи той точки, в которой он начал водить. Мало это или много? Все зависит от того, что с чем сравнивать...

Итак, возвращаясь от игры в жмурки к случайным блужданиям, нетрудно понять, что приведенные вычисления для P_N дают оценку вероятности того, что случайное блуждание из N шагов с длиной шага a , без учета каких-либо топологических взаимодействий, на плоскости образует замкнутую петлю (кольцо). Если случайное блуждание может располагаться во всем трехмерном пространстве, вероятность образования кольца после N шагов есть $P_N \approx a^3/V$, где $V = 4\pi R_N^3/3 = 4\pi(a\sqrt{N})^3/3$ – объем шара радиусом R_N .

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы попытаться ответить на набравший вопрос: почему моток веревок, если его трясти и дергать концы веревок случайно в произвольные стороны, с гораздо большей вероятностью запутается, чем распутается?

Воспользуемся вновь геометрически наглядной аналогией с игрой в жмурки, но пусть теперь игра происходит в густом лесу и играющие бегают между деревьями. (*Предупреждение:* автор статьи не несет ответственности за последствия столкновений игроков с деревьями.) Нас будет интересовать вероятность того, что водящий после N шагов вернется в исходную точку *при условии, что траектория, по которой он двигался между деревьями, не зацепилась ни за одно дерево*. Уточним, что следует понимать под «незацепленными» за деревья траекториями. Если вдоль пути водящего (с момента выхода из начальной точки до момента возвращения в нее же) положить натянутую резиновую нить, то незацепленным к деревья траекториям отвечают такие конфигурации резинки, которые можно непрерывной деформацией (т.е. не разрывая нити) стянуть в точку (рис.2). Если этого сделать нельзя, то соответству-

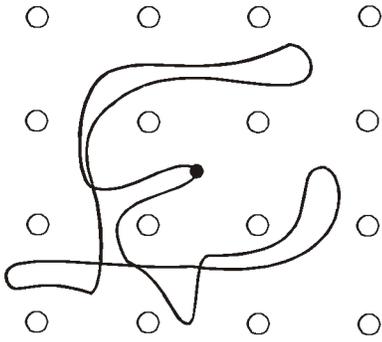


Рис.2. Пример траектории, не зацепленной за деревья

ющие траектории считаются зацепленными за деревья.

Откроем секрет: физики часто решают сходные геометрические задачи и даже используют в работе наглядные образы, подсмотренные в повседневной жизни, но при этом почему-то стесняются публиковать в серьезных научных журналах статьи, которые, скажем, назывались бы так: «О топологии игры в жмурки в лесу» или «О вероятности развязывания шнурков при быстрой ходьбе». Вместо этого ученые с серьезным видом предпочитают говорить и писать об узлах в полимерных системах или о топологии вихревых линий в сверхпроводниках.

Ну что ж, раз так принято, не будем нарушать традицию и скажем, что модель ИЖЛ – Игра в Жмурки в Лесу – является в настоящее время общепризнанной моделью, описывающей термодинамические свойства системы большого числа полимерных цепей с топологическими ограничениями. При этом обычно предполагается, что решетка препятствий (лес) моделирует зацепления «пробной» цепи (траектории водящего) за другие цепи системы («внешней среды»). Пренебрегая флуктуациями среды (т.е. считая, что деревья стоят на месте), а также топологическими ограничениями, которые пробная цепь создает сама для себя (водящий может спокойно несколько раз проходить по одному и тому же месту), мы теряем информацию о том, как влияет пробная цепь на среду, однако даже в этом случае можем сделать интересные выводы о статистике пробной цепи.

Трехмерную модель ИЖЛ можно определить следующим образом. Пусть случайное блуждание из N шагов помещено между ребрами кубической решетки и траектория не

может пересекать («проходить сквозь») никакое ребро решетки. Эта система уже содержит основные черты клубка перепутанных веревок: ребра решетки – это участки различных нитей, создающих топологические ограничения, а случайное блуждание – это нить, которую мы хотим выпутать из клубка, хаотически держа ее в разные стороны. Таким образом, для того чтобы ответить на вопрос о вероятности случайного выпутывания нити, необходимо вычислить вероятность того, что нить, флуктуируя, случайно образует замкнутое кольцо, не зацепленное за ребра решетки.

Начнем с двумерного решеточного варианта модели ИЖЛ. В этом случае траектория водящего – это случайное блуждание по ребрам квадратной решетки, а деревья (препятствия) расположены на решетке, сдвинутой на половину периода (рис. 3,а). На каждом шаге у водящего есть 4 одинаковые возможности пойти в разные стороны, но если мы хотим, чтобы после N шагов траектория была замкнута и не зацеплена за деревья, необходимо, чтобы водящий сделал столько же шагов на юг, сколько на север, и столько же шагов на запад, сколько на восток, и чтобы траектория полностью состояла из «шпильек», т.е. сложенных вдвое, четверо и т.д. кусков – только в этом случае траектория не будет зацеплена за деревья. Иными словами, траектория водящего должна иметь структуру случайно ветвящегося дерева, составленного из участков, пройденных «туда и обратно». Будем постепенно «стягивать» траекторию, считая ее резиновой. Тогда, последовательно сокращая шпильки, получим траекторию, которая может быть полностью стянута в точку.

Таким образом, мы показали, что

древесная структура *достаточно* для стягиваемости траектории. Доказательство же *необходимости* того, что траекторию водящего можно стянуть в точку непрерывной деформацией, если соответствующая траектория может быть представлена в виде пути на дереве, мы представим читателю провести самостоятельно.

Итак, у нас есть два условия: а) траектория должна быть замкнутой и б) траектория должна иметь вид случайно ветвящегося дерева. Оба эти условия выполняются, если считать, что случайное блуждание происходит на графе, имеющем структуру дерева с четырьмя ветвями (рис. 3,б). В самом деле, на таком графе, имеющем название дерева Кейли, нет другой возможности после N шагов вернуться в исходную точку, как пройти по каждой ветви дерева вперед-назад, сделав шпильку. Нетрудно подсчитать, как далеко мы уйдем по дереву Кейли от некоторой начальной точки («корня») за N случайных шагов. На каждом шаге у нас имеется 3 возможности из 4 пойти от корня (в направлении «+») и к корню (в направлении «-»). Соответственно, среднее расстояние $\langle K_N \rangle$, на которое можно уйти за N шагов, есть

$$\langle K_N \rangle = \left(\frac{3}{4} \cdot (+1) + \frac{1}{4} \cdot (-1) \right) N = \frac{1}{2} N.$$

Теперь, для того чтобы грубо оценить вероятность возвращения при случайном блуждании по дереву Кейли в исходную точку (в корень дерева), вновь воспользуемся оценкой $P_N \approx 1/S$, где S – число всех вершин дерева Кейли внутри радиуса $K = \langle K_N \rangle$. Величину S можно вычислить по геометрической прогрессии: в точке $K = 0$ имеется одна вершина (корень дерева), на рассто-

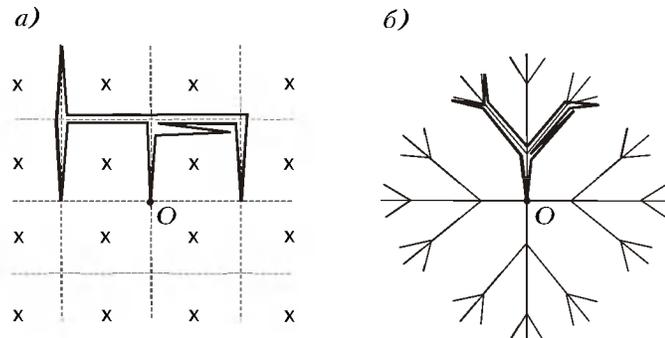


Рис.3. а) Решеточная версия модели ИЖЛ; б) соответствующая траектория на дереве Кейли

янии $K = 1$ от корня имеется 4 вершины, на расстоянии $K = 2$ от корня имеется $4 \cdot 3$ вершин, ..., на произвольном расстоянии K от корня имеется $4 \cdot 3^{K-1}$ вершин. Суммируя, получаем

$$S = 1 + 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + \dots + 4 \cdot 3^{K-1} = 1 + 4 \frac{3^K - 1}{3 - 1} = 2 \cdot 3^K - 1,$$

что при $K = \langle K_N \rangle = \frac{1}{2} N$ ($N \gg 1$) дает

$$S = 2(\sqrt{3})^N - 1 \approx 2(\sqrt{3})^N.$$

Следовательно, вероятность возвращения в исходную точку можно оценить как $P_N \approx 1 / (2(\sqrt{3})^N)$, что при $N = 100$ составляет примерно $P_N \approx 1 / (1,43 \cdot 10^{24})$. Это означает, что если играть в жмурки в лесу каждый день, то примерно 1 раз в $4 \cdot 10^{21}$ лет водящий не только случайно вернется в начальную точку, но и его траектория из 100 шагов случайно окажется незацепленной за деревья!

Соответственно, в трехмерном пространстве вероятность случайного самопроизвольного выпутывания нити из решетки топологических препятствий оценивается как $P_N \approx 1/V$, где V — «объем» дерева Кейли, отвечающего блужданию на кубической решетке. В этом случае в каждой вершине дерева есть 6 возможностей пойти по разным направлениям, так как дерево Кейли имеет 6 ветвей. Вычисляя V точно так же, как это делалось для площади S , получим

$$V = 1 + 6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 + \dots + 6 \cdot 5^{(K_N)-1} = 1 + 6 \frac{5^{(K_N)} - 1}{5 - 1} = \frac{3}{2} \cdot 5^{(K_N)} - \frac{1}{2},$$

где

$$\langle K_N \rangle = \left(\frac{5}{6} \cdot (+1) + \frac{1}{6} \cdot (-1) \right) N = \frac{2}{3} N,$$

откуда

$$P_N \approx \frac{2}{3(\sqrt[3]{25})^N}.$$

Этот результат и даст ответ на вопрос, почему, случайно дергая верев-

ку, находящуюся в плотном клубке, ее практически невозможно выпутать — *вероятность такого события чрезвычайно мала!*

Таким образом, практический вопрос о распутывании веревок разрешен, и теперь можно подумать, откуда взялось дерево Кейли и каким образом удалось незаметно подменить задачу о случайном блуждании среди топологических препятствий задачей о блуждании без каких-либо ограничений на дереве, имеющем структуру дерева Кейли.

Дерево Кейли — это аналог фазового пространства узлов, мимоходом упомянутого в начале статьи. Хотя в данном случае правильнее говорить о пространстве зацеплений, каждая точка которого (т.е. каждая вершина дерева Кейли) отвечает вполне определенному типу зацепления траектории случайного блуждания за решетку препятствий. Внимательный читатель сразу же заметит, что многие вершины дерева Кейли соответствуют одной и той же точке на плоскости с топологическими препятствиями, но при этом разные вершины дерева отвечают разным топологическим состояниям. Тем самым, каждая точка дерева Кейли несет информацию как о геометрическом положении конца траектории случайного блуждания, так и о топологии пути в модели ИЖЛ.

Попробуем нарисовать дерево Кейли на листе бумаги. Выберем точку и будем считать ее корнем дерева. С 1-ым поколением проблем нет — мы всегда можем нарисовать 4 ветви, выходящие из корня так, что соседние ветви образуют прямые углы друг с другом. А вот что делать дальше, если мы хотим, чтобы все ветви имели одну и ту же длину, чтобы угол между соседни-

ми ветвями, выходящими из одной точки, был один и тот же и чтобы никакие ветви не касались, не накладывались и не пересекались? Ну хорошо, выбрав в следующем поколении угол поменьше, мы продвинемся дальше и сможем нарисовать без пересечений еще 2—4 поколения. А потом? После нескольких (возможно, и нескольких десятков) не очень удачных попыток нам придется смириться с тем фактом, что на листе бумаги построить дерево Кейли без наложений, самопересечений, с одной и той же длиной ветви и одинаковыми углами между соседними ветвями, т.е. *изометрически*, нельзя.

Все это означает, что дерево Кейли не вкладывается в евклидову плоскость, и возникает вопрос о том, как должна быть устроена поверхность, в которой можно изометрически (т.е. без пересечений и наложений) уложить дерево Кейли. Подсчитаем, как растут периметр и площадь дерева Кейли. Периметром P назовем число вершин дерева Кейли, находящихся на расстоянии K шагов от корня (где K играет роль радиуса), тогда $P = 4 \cdot 3^{K-1}$. Площадь мы уже вычисляли — это количество всех вершин дерева Кейли, лежащих от корня на расстоянии не большем чем K : $S = 2 \cdot 3^K - 1$. Таким образом, при $K \rightarrow \infty$

$$\frac{P}{S} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

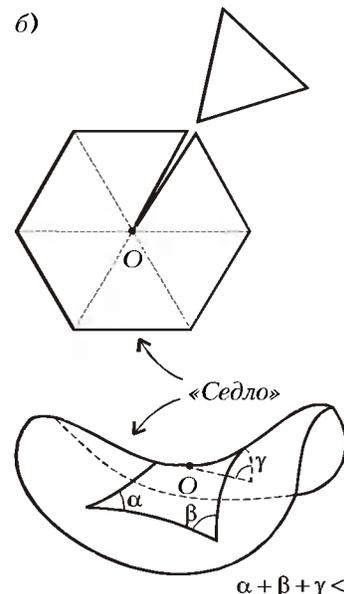
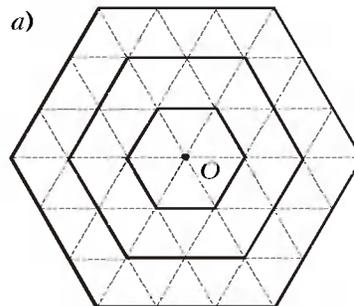


Рис.4. а) Плоскость, замощенная ячейками — равносторонними треугольниками; б) начальный этап построения плоскости Лобачевского, которую нельзя изометрически вложить в плоскость

Напомним, что в любом обычном (евклидовом) пространстве, например на плоскости, отношение периметра круга радиусом R к его площади есть

$$\frac{P}{S} = \frac{2\pi R}{\pi R^2} = \frac{2}{R},$$

и при $R \rightarrow \infty$ $\frac{P}{S} \rightarrow 0$.

В дискретном случае, если плоскость замощена ячейками – равносторонними треугольниками со стороны, равной 1 (рис.4,а), нетрудно подсчитать отношение числа P_K вершин треугольников, лежащих на границе равностороннего шестиугольника с центром в точке O и вписанного в окружность радиусом K , к числу S_K всех вершин треугольников, принадлежащих данному равностороннему шестиугольнику. В зависимости от K ($K = 0, 1, 2, \dots$) величина P_K растет так: 1, 6, $6 \cdot 2$, $6 \cdot 3$, $6 \cdot 4$, ..., $6 \cdot K$, в то время как S_K можно вычислить по формуле

$$S_K = 1 + \sum_{j=1}^K P_j, \text{ что дает } S = 1 + 3(K+1)K. \text{ Следовательно, при } K \rightarrow \infty$$

$$\frac{P_K}{S_K} \rightarrow 0.$$

Обратимся теперь к бумаге, ножницам и клею. Вырежем из бумаги равносторонний шестиугольник, разрежем его по радиусу, как показано на рисунке 4,б, и вклеим между разрезами «выточку» в виде равностороннего треугольника. В результате получим «равносторонний се-

миугольник», который, однако, не является плоским. Имея в наличии достаточное количество равносторонних треугольников, будем приклеивать их по периметру семиугольника таким образом, чтобы в каждой новой вершине сходились ровно семь треугольников. Как и в предыдущем случае, подсчитаем отношение числа \tilde{P}_K вершин треугольников, лежащих на границе семиугольника с центром в точке O , к числу \tilde{S}_K всех вершин треугольников, принадлежащих данному семиугольнику, нарисованному на неплоской(!) поверхности. Получим, что, в зависимости от удаления от центра, \tilde{P}_K удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению (докажите это самостоятельно):

$$\tilde{P}_K = 3\tilde{P}_{K-1} - \tilde{P}_{K-2},$$

$$\tilde{P}_1 = 7, \tilde{P}_2 = 21$$

и растет так:

$$\tilde{P}_K = \frac{7}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^K - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^K \right).$$

Вычисляя \tilde{S}_K по формуле, приведенной выше, убедимся в том, что отношение \tilde{P}_K/\tilde{S}_K стремится к отличной от нуля константе: при $K \rightarrow \infty$

$$\frac{\tilde{P}_K}{\tilde{S}_K} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \approx 0.618.$$

Это означает, что на полученной поверхности уже почти хватает места для того, чтобы нарисовать дерево Кейли без наложений и самопересечений так, что всем веточкам хватит места. Если бы мы вклеивали в шестиугольник не один, а два треугольника и вычисляли бы отношение \tilde{P}_K/\tilde{S}_K для «восьмиугольников», то места для всех веточек дерева Кейли хватило бы с избытком!

Поверхность, склеенная таким образом, вблизи каждой вершины по структуре напоминает седло и является геометрическим образом поверхности постоянной отрицательной кривизны, называемой также *плоскостью Лобачевского*. Она обладает многими удивительными свойствами – например, сумма углов равностороннего треугольника, нарисованного на такой поверхности, меньше

180° , а отношение длины окружности, нарисованной на такой поверхности, к площади соответствующего круга всегда стремится к отличной от нуля константе.

Если же мы все-таки захотим нарисовать дерево Кейли на плоскости, то единственный способ сделать это заключается не в использовании тяжелого уголка для пригладивания упрямо топорщащихся веточек, а в том, чтобы последовательно от поколения к поколению в геометрической прогрессии уменьшать длину ветвей, как показано на рисунке 5. (Наверное, многие из читателей обратили внимание на то, что при этом получилась картинка, схематически напоминающая известную гравюру Мориса Эшера «Предел на круге IV». И это совершенно не случайно. Рисунок голландского художника, построенный по принципу инверсии точек относительно окружности, является прекрасным геометрическим образом неевклидовой плоскости (плоскости Лобачевского) в модели, предложенной Анри Пуанкаре.)

(Множество интересных геометрически наглядных иллюстраций весьма непростых тополого-алгебраических понятий можно найти в книге [3]. Тем, кого более глубоко заинтересовали физические проблемы топологии, можно посоветовать прочитать статью [4].)

Вот и все. Хотя не совсем. Однажды сороконожка задумалась над тем, как ей удастся так ловко переставлять все 40 ног, что они не переплетаются. Подумав об этом, она немедленно сбилась и упала, так как 27 из 40 ее ног безнадежно запутались... Я бы не хотел, чтобы читатели этой статьи, почувствовав математическую сложность и глубину топологических проблем, разучились завязывать шнурки на ботинках. Не бойтесь ничего и дерзайте!

Рекомендуемая литература

- [1] А.Б.Сосинский. *Узлы, зацепления и их полиномы*. – Квант, 1989, №4.
- [2] А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов. *Физика в мире полимеров*. – М.: Наука, 1989. (Серия: Библиотечка «Квант», вып.74.)
- [3] К.Б.Левитин. *Геометрическая рhapsодия*. – М.: Знание, 1984.
- [4] С.К.Нечаев. *Проблемы вероятностной топологии: статистика узлов и некомутативных случайных блужданий*. – УФН, 168 (1998).

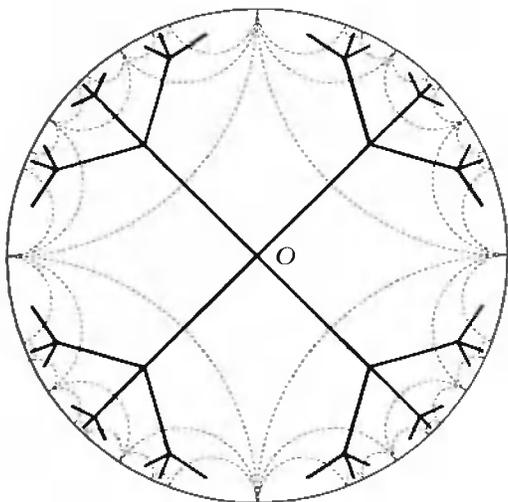


Рис.5. Плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре

Малая теорема Ферма

В. СЕНДЕРОВ, А. СПИВАК

МЫ РАССКАЖЕМ О ПЕРИОДИЧНОСТИ ОСТАТКОВ (заново доказав малую теорему Ферма и теорему Эйлера в формулировках, которые позволят решить многие интересные задачи), о первообразных корнях, функции Кармайкла, числах Мерсенна и о многом другом.

Статья насыщена интересными задачами. Вряд ли возможно при первом чтении решить их все. Но мы уверены: многие из них настолько заинтеригуют вас, что рано или поздно все они будут решены – самостоятельно или с помощью раздела «Ответы, указания, решения».

Напоминание

Как помнит читатель первой части статьи, числа a и b сравнимы по модулю n , если $a - b$ кратно n , т.е. $a - b = kn$, где k – целое число.

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №1

Малая теорема Ферма гласит: $a^p \equiv a \pmod{p}$ для любого целого числа a и простого числа p . В частности, если a не кратно p , то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Функция Эйлера $\varphi(n)$ – это количество взаимно простых с числом n и не превосходящих n натуральных чисел. Например, $\varphi(p) = p - 1$ для любого простого p . В первой части для $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$, где p_1, p_2, \dots, p_s – различные простые числа, m_1, m_2, \dots, m_s – натуральные числа, доказана общая формула

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \varphi(p_1^{m_1}) \varphi(p_2^{m_2}) \dots \varphi(p_s^{m_s}) = \\ &= (p_1^{m_1} - p_1^{m_1-1}) (p_2^{m_2} - p_2^{m_2-1}) \dots (p_s^{m_s} - p_s^{m_s-1}). \end{aligned}$$

Теорема Эйлера – это обобщение малой теоремы Ферма на случай составного модуля: $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, где a – целое число, взаимно простое с натуральным числом n .

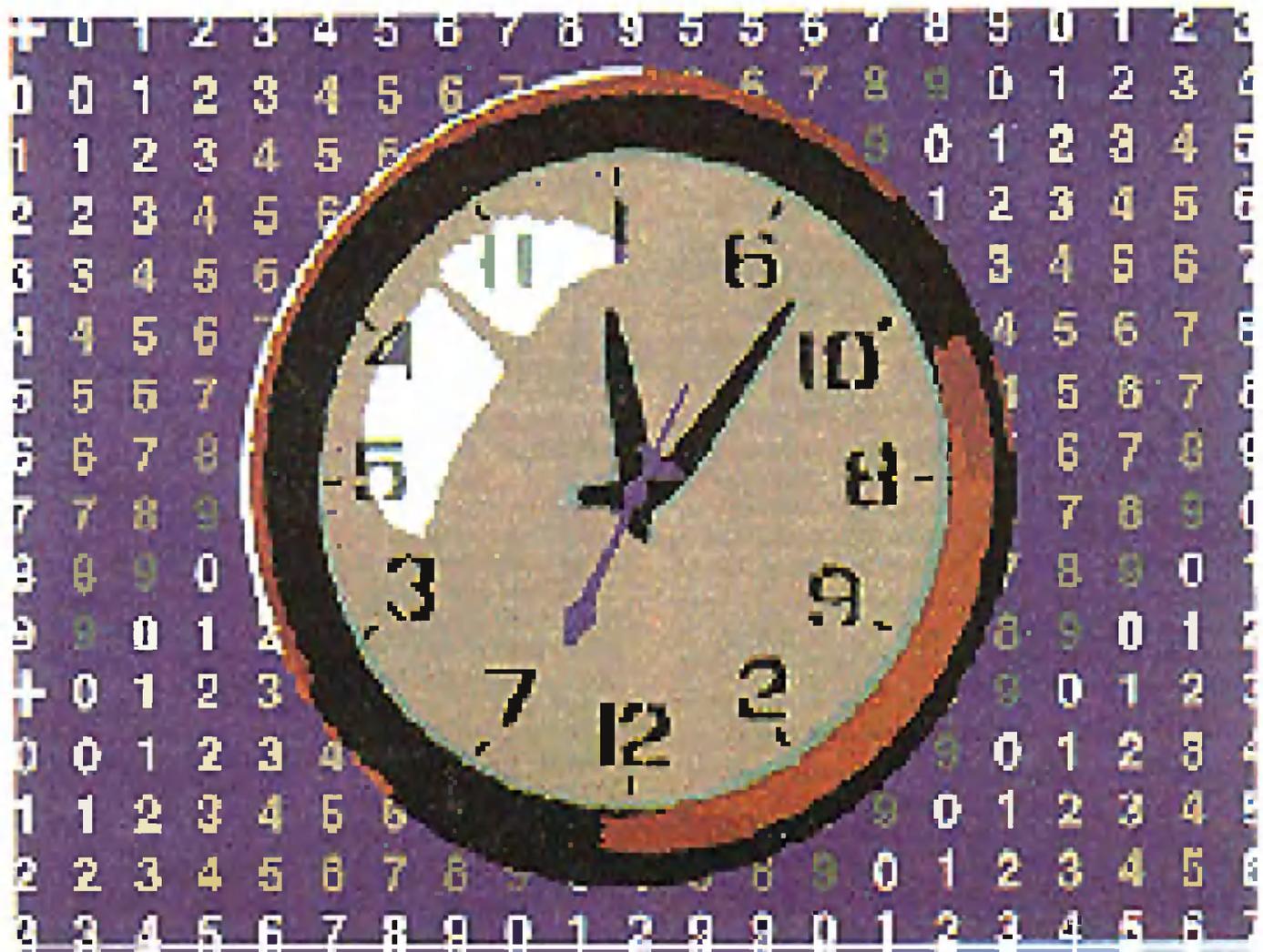


Иллюстрация М. Суминой

Периодичность остатков

*Мы заняты делом,
отвлечься не можем:
мы числа в тетради
все множим и множим.*
А.Котова

Остатки от деления на 11

Какие остатки дают степени двойки при делении на 11? Посмотрите на таблицу 1.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
$2^n \pmod{11}$	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1	2	4

Дальше можно не продолжать: $2^{10+n} = 2^{10} \cdot 2^n \equiv 1 \cdot 2^n = 2^n \pmod{11}$, остатки будут повторяться с периодом 10. Между прочим, средняя строка таблицы излишняя: в нижней строке каждое следующее число – это остаток от деления на 11 удвоенного предыдущего числа.

Как бы то ни было, $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Ничего удивительного в этом нет, это всего лишь частный случай малой теоремы Ферма. Интереснее другое: в нижней строке таблицы 1 присутствуют все ненулевые остатки от деления на 11. Например, $3 \equiv 2^8$, $5 \equiv 2^4$, $7 \equiv 2^7$, $10 \equiv 2^5 \pmod{11}$.

Другими словами, для любого целого числа a , не кратного 11, существует такое s , что

$$a \equiv 2^s \pmod{11}.$$

А сейчас – внимание:

$$a^{10} \equiv (2^s)^{10} = (2^{10})^s \equiv 1^s = 1 \pmod{11}.$$

Таким образом, при $p = 11$ мы проверили малую теорему Ферма не только для $a = 2$, но для любого ненулевого остатка a . Красиво и неожиданно, не правда ли?

Упражнение 1. Рассматривая степени двойки, докажите малую теорему Ферма для а) $p = 13$; б) $p = 19$.

Что такое первообразный корень?

Число g называют *первообразным корнем* по простому модулю p , если числа g, g^2, \dots, g^{p-1} дают разные (ненулевые) остатки при делении на p . Другими словами, g – первообразный корень, если для любого целого числа a , не кратного числу p , существует такое s , что $a \equiv g^s \pmod{p}$.

Упражнение 2. а) Какие из чисел 1, 2, 3, 4 являются первообразными корнями по модулю 5? б) Какие целые числа являются первообразными корнями по модулю 7?

Число 2 – первообразный корень по модулю 11

В разделе «Таблицы умножения» первой части статьи, как помните, мы составили таблицу умножения по модулю 11. Тот факт, что 2 – первообразный корень, позволяет нам так переставить ее столбцы и строки, что таблица приобретет гораздо более вычурный вид (табл.2).

Если $a \equiv g^s$ и $b \equiv g^t$, то $ab \equiv g^s g^t = g^{s+t} \pmod{11}$. Это

Таблица 2

\times	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6
1	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6
2	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
4	4	8	5	10	9	7	3	6	1	2
8	8	5	10	9	7	3	6	1	2	4
5	5	10	9	7	3	6	1	2	4	8
10	10	9	7	3	6	1	2	4	8	5
9	9	7	3	6	1	2	4	8	5	10
7	7	3	6	1	2	4	8	5	10	9
3	3	6	1	2	4	8	5	10	9	7
6	6	1	2	4	8	5	10	9	7	3

Таблица 3

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

сводит умножение по модулю 11 к сложению по модулю 10 (именно по этому модулю рассматриваются числа s и t). Давайте рассмотрим таблицу сложения по модулю 10 (табл.3).

Таблицы 2 и 3 очень похожи! Математик сказал бы, что мультипликативная¹ группа вычетов \mathbf{Z}_{11}^* (ее элементы – ненулевые классы вычетов по модулю 11) *изоморфна* аддитивной² группе \mathbf{Z}_{10} вычетов по модулю 10. Наивно говоря, изоморфизм – это взаимно однозначное отображение, сохраняющее операцию.³ Например, изоморфизм между \mathbf{Z}_{10} и \mathbf{Z}_{11}^* можно установить, сопоставив каждому из чисел $s = 0, 1, \dots, 9$ число 2^s . При этом сумме $s + t \pmod{10}$ будет, как мы уже говорили, сопоставлено произведение $2^s \cdot 2^t \pmod{11}$.

¹ От латинского «умножать».

² От латинского «складывать».

³ Точное определение изоморфизма можно найти, например, в «Алгебре» Ван дер Вардена (М.: Наука, 1976).

Числа на окружности

Для любых трех стоящих подряд чисел a, b, c рисунка 1 разность $b^2 - ac$ кратна 11. И это не случайный курьез, а частный случай общей конструкции: взяв первообразный корень g по простому модулю p , рассмотрим геометрическую прогрессию $g, g^2, \dots, g^{p-2}, g^{p-1}$ и выпишем вдоль окружности остатки от деления ее членов на p . (Рисунок 1 иллюстрирует случай $g = 2$ и $p = 11$,

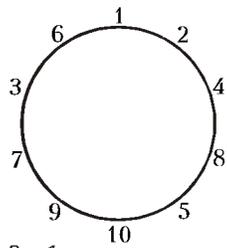


Рис.1

заставка к статье – случай $g = 6$ и $p = 13$.)

Дело вот в чем: если числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, то выполнено равенство $b^2 = ac$. (А поскольку мы заменяли числа на их остатки от деления на p , то вместо равенств получаем сравнения по модулю p .)

Итак, когда мы докажем, что по простому модулю p существует первообразный корень g , то одновременно докажем и возможность такого расположения чисел $1, 2, \dots, p - 1$ вдоль окружности, при котором для любых трех стоящих подряд чисел a, b, c разность $b^2 - ac$ кратна p .

Упражнение 3. Пусть n – составное. Можно ли так расположить числа $1, 2, \dots, n - 1$ вдоль окружности, чтобы для любых трех стоящих подряд чисел a, b, c разность $b^2 - ac$ была кратна n ?

Степени двойки по модулю 17

Рассмотрим остатки от деления степеней двойки на 17 (табл.4).

Таблица 4

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$2^n \pmod{17}$	2	4	8	16	15	13	9	1

Зацикливание произошло слишком рано: $2^8 \equiv 1 \pmod{17}$. Поэтому не все ненулевые остатки от деления на 17 – остатки от деления степеней двойки. Например, в нижней строке таблицы 4 нет числа 5, так что разность $2^n - 5$ не кратна 17 ни при каком натуральном n .

Упражнения

- 4. Докажите, что ни при каком натуральном n число $1719^n - 3$ не кратно 17.
- 5. Среди чисел вида $2^n - 3$ бесконечно много чисел, кратных 5, и бесконечно много чисел, кратных 13, но нет ни одного числа, кратного 65 ($= 5 \cdot 13$). Докажите это.

Степени тройки по модулю 17

Давайте начнем не с двойки, а с тройки и, не забывая переходить к остатку от деления на 17, будем умножать, умножать и умножать на три: 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6, 1. Мы получили все 16 возможных ненулевых остатков от деления на 17. Значит, 3 – первообразный корень по модулю 17.

Не для каждого простого числа p в качестве первообразного корня годятся 2 или 3. Например, легко проверить, что

$$2^{11} \equiv 1 \equiv 3^{11} \pmod{23},$$

так что ни 2, ни 3 не являются первообразными корнями

по модулю 23. (А вот -2 и -3 , как можно убедиться, являются.)

Упражнение 6. Найдите наименьшее простое число p , для которого существует a , не сравнимое по модулю p ни с одним из чисел $-1, 0, 1$ и такое, что ни a , ни $-a$ не являются первообразными корнями по модулю p .

Когда $a^m - 1$ делится на $a^k - 1$?

От числовых примеров перейдем к более абстрактным рассуждениям. Прежде всего напомним формулы сокращенного умножения:

$$a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1),$$

$$a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1),$$

и вообще,

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$

Теорема 1. Если a, k, m – натуральные числа, $a > 1$, то $a^m - 1$ делится на $a^k - 1$ в том и только том случае, когда m делится на k .

Доказательство. Если $m = kn$, то

$$a^m - 1 = (a^k - 1)(a^{k(n-1)} + a^{k(n-2)} + \dots + a^k + 1).$$

Обратно, если m не делится на k , то разделим m на k с остатком:

$$m = kn + r,$$

где $0 < r < k$, и рассмотрим равенство

$$a^{kn+r} - 1 = a^{kn+r} - a^r + a^r - 1 = a^r(a^{kn} - 1) + (a^r - 1).$$

Число $a^r - 1$ не делится на $a^k - 1$, поскольку $0 < a^r - 1 < a^k - 1$. Теорема доказана.

Упражнения

- 7. Если число $a^n - 1$ простое, $a > 1$ и $n > 1$, то $a = 2$ и $n - 1$ простое. Докажите это. (Не при всяком простом p число $2^p - 1$ простое: например, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$. Простые числа вида $2^p - 1$ называют *числами Мерсенна*⁵. В настоящий момент известно 38 чисел Мерсенна и неизвестно, конечно или бесконечно их множество. В 1997 году было найдено число Мерсенна $2^{2976221} - 1$, а 1 июня 1999 года нашли наибольшее из известных на сегодняшний день: $2^{26872593} - 1$.)
- 8. Если $a^n + 1$ – простое число, a, n – натуральные числа, $a > 1$, то a четно и n – степень числа 2. Докажите это. (Простые числа вида $2^{2^n} + 1$ называют *числами Ферма*. Их известно всего пять: $2^{2^0} + 1 = 3, 2^{2^1} + 1 = 5, 2^{2^2} + 1 = 17, 2^{2^3} + 1 = 257$ и $2^{2^4} + 1 = 65537$. Существуют ли другие, неизвестно. Неизвестно и то, конечно или бесконечно множество простых чисел вида $p = a^2 + 1$.)
- 9. а) Число $2^n - 1$ делится на $2^m + 1$ тогда и только тогда, когда n делится на $2m$. Докажите это. б) Для каких натуральных чисел m существует такое натуральное n , что $2^n + 1$ делится на $2^m - 1$?

⁵ Марен Мерсенн (1588–1648) занимался математикой, теорией музыки, физикой и философией. Он был товарищем Р. Декарта по учебе в иезуитском колледже и членом монашеского ордена минимов. Мерсенн сыграл выдающуюся роль как организатор науки. Он состоял в переписке с Р. Декартом, Ж. Робервалем, Б. Паскалем, Х.Гюйгенсом, Б.Кавальери, Б.Френиклем де Бесси, Дж.Валлисом и др. Вокруг него образовался кружок ученых, который стал основой для создания Парижской Академии наук (1666 год).

⁴ А мы это докажем, хотя и не в этом номере журнала.

10. Натуральные числа a, b, n таковы, что $a - k^n$ кратно $k - b$ для любого натурального числа $k \neq b$. Докажите, что $a = b^n$.

Степени числа a по модулю p

Для любого целого числа a , не кратного простому p , рассмотрим числа $1, a, a^2, \dots, a^{p-1}$. Ни одно из них не кратно p . Поскольку ненулевых остатков от деления на p существует всего $p - 1$ штук, а мы рассматриваем p чисел, то какие-то два из них дают один и тот же остаток:

$$a^r \equiv a^s \pmod{p},$$

где $0 \leq r < s < p$. Сокращая на a^r , получаем:

$$a^{s-r} \equiv 1 \pmod{p},$$

т. е. остаток от деления числа a^{s-r} на p равен 1. Значит, последовательность остатков от деления степеней числа a на p — периодическая.

Упражнения

11. а) Пусть число n нечетно и не кратно 5. Докажите, что существует кратное n число, записываемое одними единицами. б) Если целое число a и натуральное n взаимно просты, то существует такое k , что сумма $1 + a + a^2 + \dots + a^k$ кратна n . Докажите это.

12. а) Докажите, что для любого натурального n числа $8^n + 1$ и $5 \cdot 4^n + 1$ — составные. б) Существует бесконечно много составных чисел вида $10^n + 3$. Докажите это. (Неизвестно, существует ли бесконечно много простых чисел вида $10^n + 3$.) в) Пусть a, b, c — натуральные числа, $b > 1$. Докажите, что среди чисел вида $ab^n + c$ бесконечно много составных.

Что такое порядок?

Наименьшее натуральное число k , для которого $a^k \equiv 1 \pmod{p}$, называют *порядком* (не кратного p) числа a по модулю p .

Очевидно, числа $a, a^2, \dots, a^k (\equiv 1)$ дают при делении на p разные остатки, а дальше последовательность периодична: $a^{k+1} \equiv a, a^{k+2} \equiv a^2, \dots$ При этом

$$a^k \equiv a^{2k} \equiv a^{3k} \equiv \dots \equiv 1 \pmod{p},$$

а другие степени числа a не сравнимы с 1 по модулю p .

Если вместо простого числа p вы рассмотрите любое натуральное число n , то аналогичным образом сможете доказать следующую важную теорему.

Теорема 2. Если целое число a взаимно просто с натуральным числом n , то существует бесконечно много таких натуральных m , что $a^m - 1$ кратно n . Все они являются кратными наименьшего из них (которое называют *порядком* числа a по модулю n).

Упражнения

13. Если целое число a взаимно просто с натуральным n и если $a^r \equiv a^s \equiv 1 \pmod{n}$, то $a^{\text{НОД}(r,s)} \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите это.

14. Зная, что порядок числа $a = 10$ по модулю $p = 19$ равен 18, выясните, при каких k число $\underbrace{11\dots1}_k$ кратно 19.

15. Если число $1000\dots01$ кратно 19, то оно кратно 13. Докажите это.

Разбиение на циклы

Пусть целое число a не кратно простому p и пусть k — порядок числа a по модулю p . Как при помощи k сформулировать малую теорему Ферма? А вот как: $p - 1$ кратно k . (Т.е. $p - 1 = kt$ для некоторого натурального

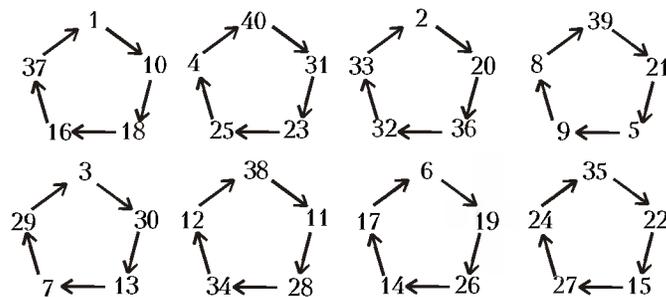


Рис.2

m ; сравнение $a^{p-1} \equiv 1$ получается из сравнения $a^k \equiv 1$ возведением в m -ю степень.)

Теорема 3. Порядок k не кратного простому p целого числа a является делителем числа $p - 1$.

Доказательство. Идея в том, что все $p - 1$ ненулевых остатков от деления на p мы разобьем на циклы вида $\{x, ax, \dots, a^{k-1}x\}$. Каждый такой цикл состоит из k остатков. Например, при $p = 41$ и $a = 10$ разбиение изображено на рисунке 2, на котором стрелочкой показано действие операции умножения на 10 («по модулю 41», т.е. мы каждый раз не только умножаем на 10, но и берем остаток от деления на 41).⁶

В общем случае, проведя от каждого ненулевого остатка x стрелочку к остатку от деления на p числа ax , мы получим рисунок, на котором из каждого ненулевого остатка выходит одна стрелочка и к каждому ненулевому остатку ведет тоже одна стрелочка (если бы к какому-то остатку y вели стрелочки от x_1 и x_2 , то выполнялись бы сравнения $ax_1 \equiv y \equiv ax_2 \pmod{p}$, откуда $x_1 \equiv x_2 \pmod{p}$, так что $x_1 = x_2$).

Теорема 3 доказана.

Теорема Эйлера

Рассмотрев вместо простого p любое натуральное число n , аналогичным образом можно доказать, что порядок (по модулю n) взаимно простого с n целого числа a — делитель числа $\varphi(n)$. При этом $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Последнее утверждение, как вы помните, носит имя Леонарда Эйлера.

Упражнения

16. Существует ли такое натуральное число k , что сто последних цифр десятичной записи числа 3^k совпадают со ста последними цифрами числа 7^k ?

17. Если a и b — взаимно простые натуральные числа, то $a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}$. Докажите это.

18. Существует бесконечно много натуральных чисел n , для которых $2^n + n^2$ кратно 100. Докажите это.

19. Для любого простого числа p существует бесконечно много чисел вида $2^n - n$, кратных p . Докажите это.

20. а) Последние две цифры квадрата любого натурального числа и его 22-й степени совпадают: $n^2 \equiv n^{22} \pmod{100}$. Докажите это. б) Докажите, что $n^{103} \equiv n^3 \pmod{1000}$ для любого целого числа n .

21. Докажите, что последние цифры чисел вида а) n^n ; б) n^{n^n} (n — натуральное) образуют периодическую последовательность, и найдите длину ее наименьшего периода.

22. Найдите четыре последние цифры числа а) 3^{1999} ; б) 2^{1999} ; в) 2^{2000} .

⁶ Эти циклы тесно связаны с разложениями обыкновенных дробей со знаменателем 41 в периодические десятичные дроби (см. статью Л. Семеновской «Периодические дроби» в «Кванте» №2).

23*. Докажите, что уравнение $x^7 + y^7 = 1998^z$ не имеет решений в натуральных числах.

24*. Для любого целого числа $k \neq 1$ существует бесконечно много натуральных чисел n , для которых число $2^{2^n} + k$ – составное. Докажите это. (Аналогичное утверждение для $k = 1$ мы доказать не умеем: существует или нет бесконечно много составных чисел вида $2^{2^n} + 1$, неизвестно.)

Усиление теоремы Эйлера

Рассмотрим утверждение теоремы Эйлера при $n = 360$. Очевидно, $\varphi(360) = \varphi(2^3 \cdot 5 \cdot 9) = 4 \cdot 4 \cdot 6 = 96$. Значит, для любого целого числа a , взаимно простого с 360, выполнено сравнение

$$a^{96} \equiv 1 \pmod{360}.$$

А на самом деле верно даже сравнение

$$a^{12} \equiv 1 \pmod{360}.$$

Для доказательства достаточно применить теорему Эйлера к каждому из модулей 8, 5 и 9:

$$a^4 \equiv 1 \pmod{8},$$

$$a^4 \equiv 1 \pmod{5},$$

$$a^6 \equiv 1 \pmod{9},$$

и заключить, что $a^{12} \equiv 1$ по каждому из модулей 8, 5 и 9, а значит, и по модулю 360.

В общем виде это можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим разложение

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$$

числа n в произведение степеней различных простых множителей. Обозначим через $f(n)$ наименьшее общее кратное чисел $\varphi(p_i^{m_i})$, где $i = 1, 2, \dots, s$. (Например, $f(360) = \text{НОК}[\varphi(2^3), \varphi(3^2), \varphi(5)] = \text{НОК}[4, 6, 4] = 12$.) Тогда при любом целом a , взаимно простом с n , справедливы сравнения

$$a^{f(n)} \equiv 1 \pmod{p_i^{m_i}},$$

где $i = 1, 2, \dots, s$; следовательно,

$$a^{f(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Упражнение 25. а) Для каких натуральных n верно равенство $f(n) = \varphi(n)$?

б) Пусть $n > 4$ и n не представимо ни в виде p^m , ни в виде $2p^m$, где p – нечетное простое, m – натуральное. Докажите, что невозможно так расположить все $\varphi(n)$ меньших n и взаимно простых с ним натуральных чисел вдоль окружности, чтобы для любых трех стоящих подряд чисел a, b, c разность $b^2 - ac$ делилась на n . (Другими словами, для этих n нет первообразного корня, т.е. нет числа g , порядок которого по модулю n равен $\varphi(n)$.)

Сравнения по модулю 2^m

Пусть m – натуральное число, $m \geq 3$. Теорема Эйлера утверждает, что $a^{2^{m-1}} \equiv 1 \pmod{2^m}$ для любого нечетного числа a . На самом деле верно более сильное утверждение:

$$a^{2^{m-2}} \equiv 1 \pmod{2^m}.$$

Его легко доказать по индукции.

База – случай $m = 3$. Число $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ кратно 8, поскольку одно из соседних четных чисел $a - 1$ и $a + 1$ кратно 4.

Переход. Пусть утверждение верно для некоторого $m \geq 3$. Рассмотрим разложение на множители:

$$a^{2^{m-1}} - 1 = \left(a^{2^{m-2}} - 1\right) \left(a^{2^{m-2}} + 1\right).$$

Поскольку первый множитель правой части делится на 2^m , а второй множитель четен, произведение делится на 2^{m+1} , что и требовалось доказать.

Упражнение 26. Пусть a нечетно, $m \geq 3$. а) Решите сравнение $x^2 \equiv a^2 \pmod{2^m}$. б) Докажите, что сравнение $x^2 \equiv a \pmod{2^m}$ разрешимо для тех и только тех a , для которых $a \equiv 1 \pmod{8}$.

Функция Кармайкла

Через $\lambda(n)$ обозначим такое наименьшее натуральное число k , что $a^k - 1$ кратно n для любого числа a , взаимно простого с n . Функцию λ называют *функцией Кармайкла*.

Легко понять, что для любого натурального числа l , не кратного $\lambda(n)$, существует такое взаимно простое с n целое число a , что $a^l \not\equiv 1 \pmod{n}$. Чтобы это доказать, разделим l с остатком на $\lambda(n)$. Имеем:

$$l = \lambda(n)q + r,$$

где q – целое неотрицательное, $0 < r < \lambda(n)$. При этом

$$a^l = \left(a^{\lambda(n)}\right)^q \cdot a^r.$$

Поскольку $r < \lambda(n)$, хотя бы для одного взаимно простого с n числа a сравнение $a^r \equiv 1 \pmod{n}$ не выполнено. Это и требовалось доказать.

Функция Кармайкла обладает еще одним интересным свойством: $\lambda(mn) = \text{НОК}[\lambda(m), \lambda(n)]$ для любых взаимно простых натуральных чисел m и n . В самом деле, если целое число a взаимно просто с числами m и n , то по определению

$$a^{\lambda(m)} \equiv 1 \pmod{m},$$

$$a^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n},$$

откуда для числа $k = \text{НОК}[\lambda(m), \lambda(n)]$ имеем

$$a^k \equiv 1 \pmod{m},$$

$$a^k \equiv 1 \pmod{n},$$

так что $a^k \equiv 1 \pmod{mn}$. Таким образом, $\lambda(mn) \leq k$.

Осталось доказать, что $\lambda(mn)$ делится как на $\lambda(m)$, так и на $\lambda(n)$. Сделаем это «от противного». Пусть, например, $l = \lambda(mn)$ не делится на $\lambda(m)$. Тогда существует такое число b , взаимно простое с m , что $b^l \not\equiv 1 \pmod{m}$.

Рассмотрим число a , для которого $a \equiv b \pmod{m}$ и a взаимно просто с n .⁷ Очевидно, $a^l \equiv b^l \not\equiv 1 \pmod{m}$, что и требовалось доказать.

⁷ Почему такое a существует? Например, можно рассмотреть числа вида $b + mx$, где $x = 1, 2, \dots, n$. Они дают разные остатки при делении на n . Поскольку этих чисел n – столько же, сколько классов вычетов по модулю n , – то среди них найдется и нужное нам a .

Функция Кармайкла от степеней простых чисел такова: $\lambda(2) = 1$, $\lambda(4) = 2$, $\lambda(2^m) = 2^{m-2}$ при $m \geq 3$, $\lambda(p^m) = p^{m-1}(p-1)$ для любых нечетного простого p и натурального m .

Упражнение 27*. Докажите это, считая известным, что если p – нечетное простое, то для любого $k < p-1$ существует такое не кратное p число g , что $g^k \not\equiv 1 \pmod{p}$.

Следствия из малой теоремы Ферма

Теорема 3 позволяет легко решать многие задачи, которые без нее или очень трудны, или вообще недоступны. Рассмотрим букет таких задач, начав с одной из тех пяти, которые сформулированы в конце первой части статьи.

Простые делители чисел вида $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$

Если сумма $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ кратна простому числу p , то число

$$a^5 - 1 = (a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$$

тоже кратно p . Рассмотрим два случая.

Пусть $a \equiv 1 \pmod{p}$. Тогда $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 \equiv 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 5 \pmod{p}$, так что число p должно быть делителем числа 5. Попросту говоря, $p = 5$.

Пусть теперь $a \not\equiv 1 \pmod{p}$. Тогда порядок числа a по модулю p равен 5. Поскольку порядок является делителем числа $p-1$, то $p-1$ делится на 5.

Итак, если простое число p является делителем числа вида $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$, то $p = 5$ или $p \equiv 1 \pmod{5}$.

Когда мы докажем теорему о существовании первообразного корня, то поймем, что верно и обратное утверждение. А именно, для $p = 5$ годится $a = 1$, а для простого числа $p = 5k + 1$ годится $a = g^k$, где g – первообразный корень по модулю p . В самом деле, $g^{5k} = g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Следовательно, произведение $(a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) = a^5 - 1$ кратно p . Поскольку первый множитель не делится на p , второй должен делиться, что и требовалось доказать.

Упражнения

28 (M1324). Ни при каком целом a число $a^2 + a + 1$ не кратно а) 5; б) 11; в) 17; г) $6m-1$, где m – натуральное число. Докажите это.

29. Докажите, что всякий положительный делитель числа $a^4 - a^2 + 1$ дает остаток 1 при делении на 12.

30. Докажите, что если порядок числа a по простому модулю p равен

а) 3, то число $a^2 + a + 1$;

б) 4, то число $a^2 + 1$;

в) 15, то число $a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1$

кратно p . (Тот, кто знаком с многочленами деления круга, скажет, что это упражнение – частный случай общего утверждения: число a имеет порядок k тогда и только тогда, когда k – делитель числа $p-1$ и $\Phi_k(a) \equiv 0 \pmod{p}$.)

31. Если по простому модулю p число a имеет порядок а) 3, то порядок числа $a+1$ равен 6; б) 10, то порядок числа $a^3 - a^2 + a - 1$ равен 5. Докажите это.

32. а) Пусть a – натуральное число, $a > 1$, p – простое, $p > 2$. Докажите, что всякий простой делитель q числа $a^p \pm 1$ является делителем числа $a \pm 1$ или имеет вид $q = 2pt + 1$, где t – натуральное.

б) Пусть a, b – взаимно простые целые числа, n – натуральное, q – простое, $a^n - b^n$ делится на q , и пусть ни для одного отличного от n делителя m числа n разность $a^m - b^m$ не делится

на q . Докажите, что $q \equiv 1 \pmod{n}$. (Биркгоф и Вандивер, используя свойства многочленов деления круга, доказали в 1902 году, что для любых (кроме одного исключительного случая, о котором сказано ниже) натуральных взаимно простых чисел a и b , где $a > b$, и для любого натурального числа $n > 2$ существует простой делитель q разности $a^n - b^n$, не являющийся делителем ни одной разности $a^m - b^m$, где $m < n$. Единственное исключение: $a = 2, b = 1, n = 6$.)

Простые делители чисел вида $a^{2^n} + 1$

Если $a^2 + 1$ делится на простое число p , $p \neq 2$, то

$$a^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

откуда

$$a^4 = (a^2)^2 \equiv (-1)^2 = 1 \pmod{p}.$$

Значит, порядок числа a равен одному из чисел 1, 2 и 4.

Первый и второй случаи невозможны, поскольку сравнение $a^2 \equiv 1$ противоречит сравнению $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

В третьем случае в силу теоремы 3 имеем: $p-1$ делится на 4. Мы доказали довольно общее и часто используемое утверждение: *любой нечетный простой делитель числа $a^2 + 1$ имеет вид $p = 4k + 1$ (a не $4k + 3$).*

Рассуждая аналогично, можно доказать, что если p – нечетный простой делитель числа $a^{2^n} + 1$, то $p-1$ делится на 2^{n+1} .

Верно и обратное: для любого простого числа $p = 2^{n+1}k + 1$ существует кратное ему число вида $a^{2^n} + 1$. Доказать это очень легко, если знать теорему о существовании первообразного корня g . В самом деле, пусть $a = g^k$. Тогда

$$a^{2^n} = g^{2^n k} = g^{(p-1)/2}.$$

Число $g^{(p-1)/2}$ не сравнимо с единицей по модулю p , но квадрат этого числа есть $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Поэтому

$$a^{2^n} = g^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p},$$

что и требовалось.

Упражнения

33. Если числа a и b взаимно просты, то всякий нечетный простой делитель p числа $a^{2^n} + b^{2^n}$ дает остаток 1 при делении на 2^{n+1} . Докажите это.

34. Пусть a, n – натуральные числа, причем a четно. Докажите, что числа n и $a^{2^n} + 1$ взаимно просты.

35. Пусть a, n – натуральные числа. Докажите, что

а) если $a^n + 1$ делится на $n + 1$, то a и n нечетны;

б) если a нечетно и $a > 1$, то существует бесконечно много натуральных n , для которых $a^n + 1$ делится на $n + 1$.

36. а) Пусть $n > 1$ и $2^n + 2$ делится на n . Докажите, что n четно.

б) Существует бесконечно много таких натуральных n , что $2^n + 2$ кратно n . Докажите это.

37 (Международная математическая олимпиада, 1996 г.).

Пусть a, b – такие натуральные числа, что $15a + 16b$ и $16a - 15b$ – квадраты натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное значение меньшего из этих квадратов.

Когда $2^n + 1$ делится на n ?

Этот вопрос один из нас задал себе скорее в шутку, чем всерьез. И очень долго мы оба не понимали, что закономерности, обнаруживаемые в вычислениях, производимых следующей программой⁸, имеют самое непосредственное отношение к малой теореме Ферма.

⁸ Программу для нас написал В.Иофик – тогда абитуриент, а сейчас – студент мех.мата МГУ.

Лазерная указка

С. ОБУХОВ

ЭТА ИГРУШКА РАЗМЕРОМ С авторучку или даже меньше, сделанная, например, в форме брелка для ключей, вызывает необъяснимое восхищение. Я знаю взрослых уважаемых людей, которые, увидев эту игрушку в первый раз, немедленно купили ее и теперь не могут с ней расстаться.

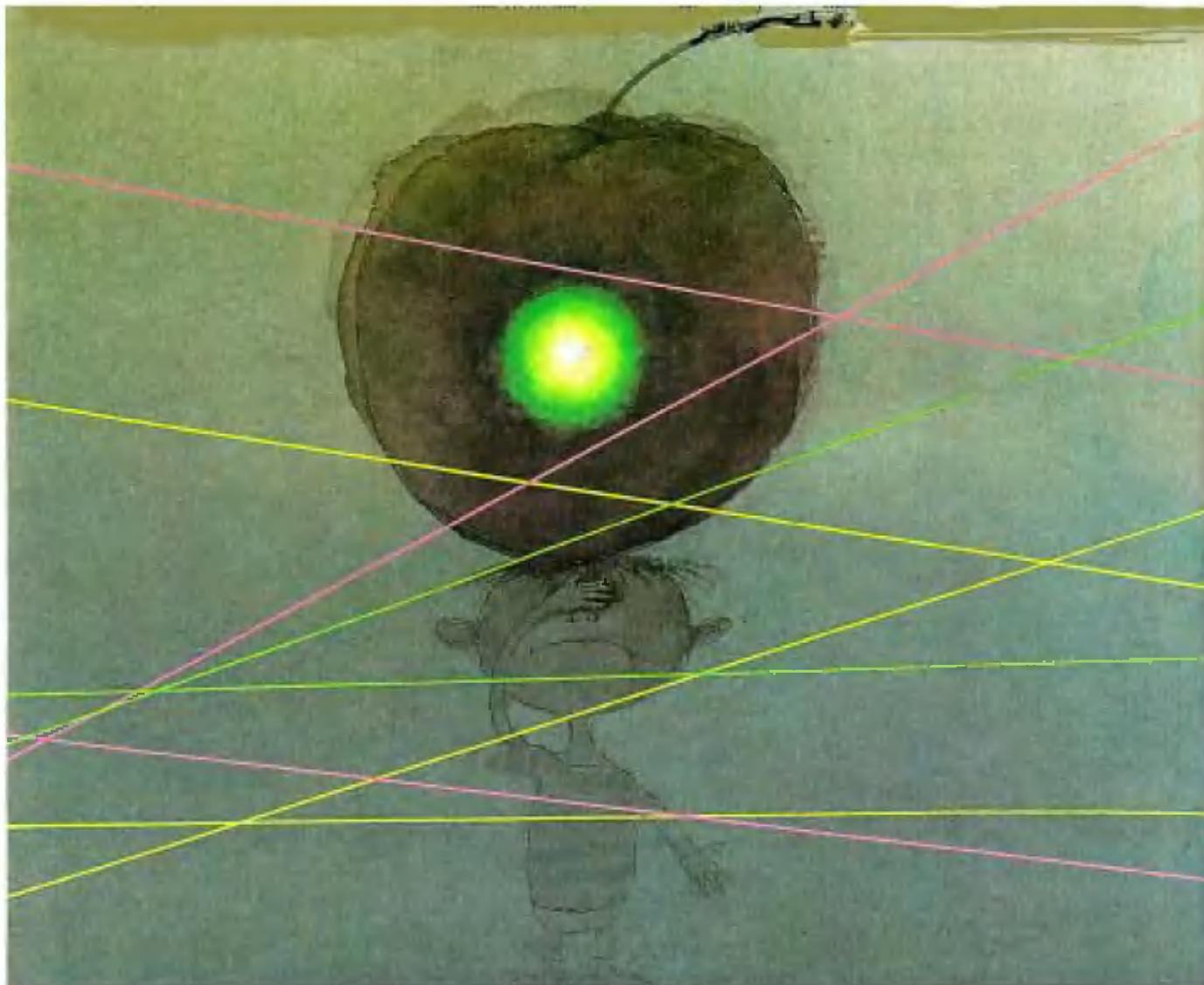
Фонарик

Все мы знаем, что фонарик может осветить предметы, находящиеся в 5–20 метрах от нас. Результат во многом зависит от того, насколько

хорошо фонарик сфокусирован. В идеально сфокусированном фонарике светящаяся вольфрамовая нить электрической лампочки должна находиться в фокусе параболического отражателя. Чтобы этого добиться, мы подкручиваем отражатель, двигая его туда-сюда, или, сняв отражатель, слегка подкручиваем лампочку в гнезде и, надев отражатель, проверяем, стало ли лучше. Размер нити электрической лампочки – несколько миллиметров, и если только одна какая-то точка ее находится в фокусе, все остальное будет не в фокусе,

поэтому луч фонарика всегда расходится. Угол расходимости луча фонарика, измеренный в радианах, примерно равен отношению размера нити накаливания к диаметру отражателя (несколько сантиметров): $\alpha \approx 4 \text{ мм} / 4 \text{ см} = 0,1 \text{ рад}$, что составляет примерно 5 угловых градусов.

В обычной жизни мы редко сталкиваемся с необходимостью определять угол «на глаз», за исключением быть может прямого угла, угла в 45° и т.п. Как представить себе угол в 5° ? Астрономы-любители пользуются для этого прибором, который всегда с собой, – соб-



ственной рукой. Выдвинем прямую руку перед собой и, раздвинув указательный и средний пальцы, изобразим ими знак победы — латинскую букву V. Теперь, прищурившись, посмотрим одним глазом на эту букву V. Угол, под которым вы увидите раздвинутые пальцы вытянутой руки, и будет углом примерно в 5°, или в 1/10 рад.

Я часто пользуюсь этим способом, измеряя угол между Солнцем и горизонтом, чтобы определить время, оставшееся до захода Солнца. Кстати, угловой размер Солнца — примерно 0,5° (или 30'), такой же, как и угловой размер Луны. Угол, под которым вы увидите ноготь указательного пальца вытянутой руки, будет примерно в три раза больше — 1,5°.

Можно найти фонарик с большим отражателем — сантиметров 10–12. Угол расхождения луча у такого фонарика будет, соответственно, примерно в 3 раза меньше. На Западе распространены фонарики с маленькими лампочками большой мощности. Они позволяют еще лучше сфокусировать пучок.

А на каком расстоянии можно увидеть луч фонарика? Обычный фонарик потребляет мощность примерно 1 Вт. Только 1/20 часть этой мощности излучается как видимый свет — остальное теряется на нагрев и тепловое излучение. Мощность W , излучаемая фонариком, сконцентрирована внутри телесного угла $\Omega = \pi\alpha^2$. На расстоянии R от фонарика мощность излучения, приходящаяся на единицу площади поверхности, равна $W/(S_{\text{гл}}\Omega^2)$. Мощность w света, попадающего в глаз с расстояния R , равна $WS_{\text{гл}}/(S_{\text{кл}}\Omega^2)$, где $S_{\text{гл}}$ — площадь зрачка глаза. Зрачок глаза человека в темноте имеет диаметр около 7 мм, т.е. площадь зрачка $S_{\text{гл}} \approx 0,5 \text{ см}^2$. Если мощность w превышает некоторый порог $w_{\text{мин}}$, мы видим свет. Минимальная пороговая мощность $w_{\text{мин}}$ глаза человека может быть очень мала — около 10^{-18} Вт, что соответствует нескольким фотонам в секунду. Такая чувствительность возможна только после длительной адаптации глаза к темноте — если бы можно было поставить эксперимент в полной темноте и при отсутствии рассеяния света в атмосфере, мы смогли бы увидеть свет фонарика на расстоянии в десять тысяч километров. Реальная пороговая мощность глаза на много порядков выше, в

основном это связано с присутствием ярких посторонних объектов, находящихся в поле зрения глаза, — уличных фонарей, ночных огней, звезд, Луны и т.д. В дальнейшем для обсуждения экспериментов, проводимых на открытом воздухе в безлунную ночь, мы будем использовать значение $w_{\text{мин}} = 10^{-13}$ Вт. Подставляя числовые значения в формулу

$$R = \sqrt{\frac{WS_{\text{гл}}}{w_{\text{мин}}\Omega}}, \quad (1)$$

получим $R = 27$ км.

А как далеко можно осветить что-нибудь с помощью фонарика? Оказывается, это расстояние не превышает нескольких десятков метров. Когда мы освещаем предмет (например, кошку), мы хотим увидеть свет, отраженный от этого предмета. Полная мощность света, который попадает на предмет, находящийся на расстоянии R , описывается формулой $WS/(S_{\text{кл}}\Omega^2)$, где S — это площадь поверхности предмета (для кошки $S_{\text{кл}} \approx 200 \text{ см}^2$). Мы будем считать, что кошка белая (не серая и не черная), т.е. большая часть света рассеивается, а не поглощается. Если этот свет рассеивается во все стороны, то нам в глаз попадает только незначительная часть рассеянного света. Эта доля равна отношению площади поверхности глаза к 1/4 площади сферы радиусом R , т.е. отношению $S_{\text{гл}}/(\pi R^2)$. (Множитель 1/4 получается для случая, если рассеивающая поверхность перпендикулярна к направлению пучка и к наблюдателю. При его получении было учтено, что полный поток света от рассеивающей поверхности пропорционален телесному углу, под которым эта поверхность видна наблюдателю.) Мощность света, попадающего в глаз наблюдателю, равна $WS_{\text{кл}}S_{\text{гл}}/(\pi\Omega R^4)$. Приравнивая эту величину к $w_{\text{мин}}$, получим

$$R = \sqrt[4]{\frac{WS_{\text{кл}}S_{\text{гл}}}{w_{\text{мин}}\pi\Omega}} = 45 \text{ м}. \quad (2)$$

Получается, что кошка может увидеть луч фонарика за десятки километров, а мы можем осветить ее, только подойдя на 45 метров. (Похожая ситуация возникает с полицейскими радарам для измерения скорости автомобилей. Полицейский сидит в засаде и, используя радиоло-

катор, пытается получить сигнал, отраженный от машин на шоссе. Если у вас в машине есть прибор, который обнаруживает излучение полицейского радара, вы можете узнать о засаде гораздо раньше, чем попадете в зону действия радара.) Из формулы (2) видно, что если вы хотите увеличить вдвое радиус обнаружения кошки, вам придется увеличить мощность фонарика в $2^4 = 16$ раз. При этом кошка сможет заметить ваш более мощный фонарик с расстояния, в 4 раза большего, чем прежде.

Лазерная указка

Самая дешевая лазерная указка (ЛУ) может спроектировать «зайчик» на предметы, отстоящие от нас в темноте на сотни метров. На упаковке может быть указано, например, 200, 500, 800 или даже 1200 м. Причем мощность ЛУ ничтожна. В Америке разрешены ЛУ мощностью 5 мВт, в Европе — мощностью 1 мВт. Обычно указывается мощность, которую лазер потребляет. Мощность же, которую он излучает, составляет примерно 60% от входной мощности.

Фантастическая способность такого маломощного прибора «ставить точку» почти на любом доме на слабо освещенной улице вызывает искреннее изумление. Причина такой способности связана, конечно, с необычайно малой расходимостью лазерного пучка. Теоретически угол расходимости α определяется только диаметром начального пучка D и длиной волны λ :

$$\alpha = \lambda/D. \quad (3)$$

Для ЛУ красного цвета (длина волны 600–700 нм) можно пользоваться формулой

$$\alpha \text{ (в миллирадианах)} = 1/D \text{ (в миллиметрах)}. \quad (4)$$

Примечательно, что эта же формула определяет и теоретическое угловое разрешение человеческого глаза, только под D надо понимать диаметр зрачка глаза. Поскольку и диаметр лазерного пучка, и размер зрачка составляют несколько миллиметров и примерно равны, угол расходимости пучка примерно равен углу разрешения глаза. Практически лазерный пучок расходится несколько сильнее — примерно на 1 см каждые

10 м пути. На расстоянии 1 км пучок будет иметь размер 1 м. Тем не менее, для человеческого глаза на любом расстоянии «зайчик» выглядит как точечный объект, угловой размер которого примерно такой же, как угловой размер планеты Юпитер на ночном небе.

Теперь мы можем объяснить, почему формулу (2) нельзя применять для лазера. При выводе этой формулы мы предполагали, что размер пучка от фонарика больше размера предмета, который мы освещаем, и что только малая доля света, излучаемого фонариком, попадает на предмет. Если же мы освещаем удаленный предмет, угловой размер которого больше угла разрешения нашего глаза с помощью ЛУ, все излучение лазера попадает на предмет и рассеивается. Таким образом, множитель $S_k / (\Omega R^2)$ надо заменить на единицу, и мы получим

$$ze = \frac{WS_{\text{гл}}}{\pi R^2}. \quad (5)$$

Эту формулу можно понять таким образом. Представим, что на конце лазерного луча «прикреплена» маленькая лампочка мощностью $W = 0,003$ Вт. На какой бы предмет мы ни направили луч ЛУ, лампочка, «прикрепленная» к концу луча, оказывается на этом предмете и светит в нашу сторону. Если мы видим свет этой лампочки, мы считаем, что видим отраженный луч ЛУ. Формула для предельного расстояния, на котором можно увидеть отраженный луч, будет такой же, как и формула для предельного расстояния, на котором можно увидеть лампочку, «прикрепленную» к концу луча:

$$R = \sqrt{\frac{WS_{\text{гл}}}{\pi ze_{\text{min}}}}. \quad (6)$$

Подставляя численные значения, получим $R = 700$ м.

Эта формула отличается от формулы (2) тем, что для удвоения расстояния достаточно увеличить мощность в 4 раза, а не в 16.

Яркость луча

Как мы уже знаем, мощность свободного продаваемых лазеров жестко ограничена. Почему же некоторые из них кажутся более яркими, чем другие? Дело в том, что чувствительность глаза сильно зависит от длины

волны света, а она для имеющихся в продаже ЛУ может быть 680, 670, 650 или 633 нм. Луч ЛУ с длиной волны 650 нм кажется в 5–10 раз ярче, чем луч с длиной волны 670–680 нм, а луч с длиной волны 633 нм кажется еще в 2 раза ярче. Чувствительность глаза максимальна к зеленому свету с длиной волны 555 нм — лазеры с такой длиной волны были бы самыми яркими. И действительно, наиболее яркие ЛУ, появившиеся недавно в продаже, дают зеленый луч с длиной волны 532 нм и имеют яркость примерно в 8 раз больше, чем при 650 нм. Зависимость видимой яркости от длины волны можно учесть в оценках для расстояния, на котором виден луч лазера, считая, что чувствительность w_{min} меняется в зависимости от длины волны излучения. Рекламные утверждения, что такой-то лазер дает луч, видимый на расстоянии X сотен метров ($X = 2, 5, 8, 12\dots$), являются, мягко говоря, условными, поскольку w_{min} сильно зависит также от яркости фонового света от звезд, Луны, уличных фонарей и т.п.

Очень многое зависит также от свойств отражающей поверхности. Мы предполагали, что облучаемая поверхность рассеивает отраженный свет во все стороны. Есть специальные краски, которые используются для покрытия дорожных знаков, одежды дорожных рабочих, пожарных машин и т.п. Поверхность, покрытая такой краской, отражает свет почти в том же направлении, откуда свет пришел (с углом между этими направлениями, не превышающим 3°). Яркость отраженного света в этом случае примерно в $\pi / (\pi\alpha^2) \approx 400$ раз больше, чем яркость света, отраженного от рассеивающей поверхности. При отражении от такой поверхности пучка мощностью 3 мВт мы увидим столько же света, как если бы на конце лазерного пучка находился хорошо сфокусированный фонарик с углом расхождения 3° , направленный на нас. К сожалению, на больших расстояниях диаметр пучка может стать больше, чем размер поверхности, покрытой отражающей краской. Если на расстоянии 1 км размер пучка 1 м, а размер отражающей мишени, дорожного знака например, всего 0,5 м, то только одна четверть всего светового пучка отразится в нашем направле-

нии. Для оценки расстояния, на котором будет виден отраженный свет, можно воспользоваться формулой, похожей на формулу для фонарика:

$$R = \sqrt[4]{\frac{WS_k S_{\text{гл}}}{w_{\text{min}} \pi \Omega \Omega'}}. \quad (7)$$

В этой формуле для телесного угла $\Omega = \pi\alpha^2$ надо взять $\alpha = d/\lambda = 0,0005$, в знаменатель формулы ввести дополнительный множитель $\Omega' = 1/400$, описывающий фокусировку отраженного пучка, а вместо S_k подставить площадь поверхности дорожного знака, равную приблизительно $0,2$ м². Получим $R \approx 3,5$ км.

ЛУ и прибор ночного видения

Замечательный результат получается, если наблюдать за отраженным светом с помощью прибора ночного видения. Для этого лучше всего прикрепить ЛУ эластичной резинкой к корпусу прибора так, чтобы их оптические оси были примерно параллельны.

Прибор ночного видения является комбинацией из бинокля и катодной трубки, усиливающей интенсивность попадающего в нее света.

Бинокль сам по себе может существенно увеличить дальность обзора в условиях слабой освещенности: весь свет, собираемый входной апертурой бинокля, попадает нам в глаз.

Например, если мы пользуемся биноклем с диаметром входной линзы 50 мм, а диаметр зрачка глаза 7 мм, то собирающая поверхность увеличивается в $(50/7)^2 \approx 50$ раз. Для ночных наблюдений лучше всего подходят бинокли с большими входными линзами, но увеличение бинокля лучше выбрать минимальным. Например, бинокль с семикратным приближением 50×7 лучше, чем двенадцатикратный бинокль 50×12 . Световые потоки, улавливаемые обоими биноклями, одинаковы, но в двенадцатикратном бинокле дрожание изображения более сильное, чем в семикратном. (Первая цифра в характеристике бинокля всегда указывает размер входной апертуры бинокля, вторая цифра — его кратность.) Размер выходной апертуры бинокля можно определить, если разделить входной диаметр бинокля на его кратность. Так, для бинокля с семикратным приближением 50×7 размер выходной апертуры равен $50 \text{ мм} / 7 = 7,1$ мм. Это примерно равно диаметру зрачка человека в темноте. Семикратный бинокль 35×7 имеет диаметр выходной апертуры $35 \text{ мм} / 7 = 5$ мм и дает, соот-

ветственно, меньше света. Днем разница между этими двумя биноклями незначительна, потому что размер зрачка глаза днем всего 2 — 3 мм, что меньше апертуры обоих биноклей.

Если невооруженным глазом мы видим ночью какой-то объект на максимальном расстоянии Z , то с помощью бинокля 50×7 можно наблюдать объекты, удаленные на расстояние $7Z$. Так например, если бы все звезды были одинаковой яркости и невооруженным глазом были бы видны все звезды в радиусе Z световых лет, то с помощью бинокля 50×7 мы смогли бы увидеть звезды в радиусе $7Z$. Объем Вселенной, доступный для наблюдения, при этом увеличился бы в $7^3 = 343$ раз. И во столько же раз увеличилось бы число наблюдаемых звезд! В действительности звезды распределены во Вселенной неравномерно и имеют разную яркость, но предыдущий вывод об увеличении числа наблюдаемых объектов в триста с лишним раз при использовании бинокля остается в силе.

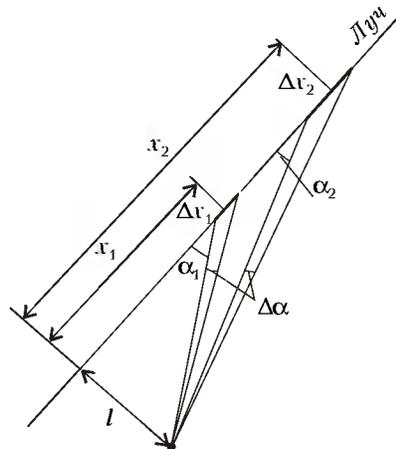
Катодная трубка прибора ночного видения увеличивает собранный световой поток в несколько тысяч или даже десятков тысяч раз. Максимум чувствительности у катодной трубки находится в области красного и ближнего инфракрасного спектра, что очень удобно для наблюдения красного света ЛУ. Если пользоваться прибором ночного видения, то все ЛУ от самых дешевых до самых дорогих, дающие разные оттенки красного света, практически неразличимы по яркости. Наблюдатель, вооруженный прибором ночного видения, способен заметить свет от точечного источника, если всего несколько фотонов в секунду попадут на входную поверхность прибора. Полная адаптация глаза к темноте при этом не обязательна. Реальный порог чувствительности может быть в десятки раз ниже за счет того, что собирающая поверхность прибора больше собирающей поверхности глаза человека. Используя прибор ночного видения, мне удавалось наблюдать свет ЛУ, отраженный от низколежащих облаков.

Можно ли точно нацелить луч ЛУ на очень далекий предмет, например на спутник на орбите или на корабль в ночном море, настолько далекий, что не видно отраженного света? Оказывается, да. И сделать это можно с помощью прибора ночного видения — чувствительность прибора такова, что становится виден сам луч лазера в воздухе. Это и не очень

удивительно. Мы все наблюдали лучи мощных прожекторов в ночном небе. Иногда в условиях тумана можно видеть и луч фонарика. То, что мы видим луч, означает, что часть энергии луча рассеивается на флуктуациях плотности воздуха или на микроскопических частицах, плавающих в воздухе.

Протяженность участка пути, на котором луч прожектора или фонарика виден со стороны, всегда ограничена — мы видим луч только там, где он достаточно концентрированный, а на большом расстоянии интенсивность луча падает из-за его расходимости и луч как бы терется. Для лазерного луча это не так. Из-за того что угловая расходимость луча примерно равна угловому разрешению глаза, на больших расстояниях луч виден как очень тонкая линия. И эта линия видна на любом расстоянии от наблюдателя! Даже если мы не видим свет, отраженный от далекого корабля, мы увидим луч нашей ЛУ, упирающийся в корабль или в спутник.

Для того чтобы понять, почему яркость траектории лазерного луча не зависит от расстояния, посмотрим на рисунок. На нем показаны два участка пути луча Δx_1 и Δx_2 , длины которых подобраны так, чтобы они были видны наблюдателю под одним и тем же углом $\Delta\alpha$. Расстояния, на которых находятся эти участки, равны примерно $x_1 = l/\alpha_1$ и $x_2 = l/\alpha_2$, откуда имеем $\Delta x_1 = l\Delta\alpha/\alpha_1^2$ и $\Delta x_2 = l\Delta\alpha/\alpha_2^2$, или $\Delta x_1 = \Delta\alpha x_1^2/l$ и $\Delta x_2 = \Delta\alpha x_2^2/l$. Будем считать, что мощность рассеиваемого света на единицу длины пробега луча не зависит от расстояния x . Тогда мощности $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ света, рассеянного на



участках 1 и 2, пропорциональны их протяженностям, или квадратам расстояний до них: $\Delta\omega_1 \sim \Delta\alpha x_1^2$ и $\Delta\omega_2 \sim \Delta\alpha x_2^2$. Но мощности света, приходящего к наблюдателю от участков 1 и 2, обратно пропорциональны квадратам расстояний до них. Таким образом, мощности света, приходящего к наблюдателю от участков 1 и 2 траектории луча, имеющих с точки зрения наблюдателя одинаковую угловую протяженность, не зависят от расстояния до этих участков. Это означает, что траектория луча имеет равномерную яркость!

На расстояниях порядка десяти километров приближения, с помощью которых мы пришли к этим выводам, неизбежно нарушаются. Это связано с тем, что на таком расстоянии интенсивность луча уменьшается из-за рассеяния и он становится менее ярким. Кроме того, если луч света направлен вертикально, ослабление яркости луча усугубляется и уменьшением плотности воздуха, а вместе с ней и интенсивности рассеивания. Если считать, что длина пути, на которой луч виден наблюдателю, равна 10 км, можно оценить, что для наблюдателя, находящегося в стороне от ЛУ на 1 м, угловая погрешность лазерной указки составляет 10^{-4} рад, что меньше угловой расходимости лазерного луча.

Можно ли со спутника увидеть свет от ЛУ, направленный с Земли? По-видимому, можно. Оценка с использованием формулы (7) дает дальность видимости около двух тысяч километров. Околоземные спутники летают гораздо ниже, на высотах порядка сотен километров. Рассеяние луча на флуктуациях плотности воздуха существенно только в нижних слоях атмосферы и не может повлиять на эту оценку.

Зададимся вопросом: если мы видим спутник в ночном небе, значит ли это, что и со спутника можно увидеть свет нашего ЛУ? Чтобы ответить на этот вопрос, сравним мощности света, получаемого наблюдателем с Земли и наблюдателем со спутника. Если мы видим спутник, это значит, что солнечный свет, отраженный спутником и рассеянный во все стороны, попадает нам в глаз в достаточном количестве. Пусть размер спутника 3 м. Интенсивность солнечного света у поверхности спутника $1 - 2$ мВт/мм². Наша мало-

мощная ЛУ производит столько же света, сколько отражается с 1 мм^2 поверхности спутника, т.е. $(1/300)^2 \approx 10^{-5}$ долю его излучения. Но это излучение сконцентрировано в телесном угле, в 10^6 раз меньше, чем излучение спутника. Поэтому, если мы смогли заметить спутник, то и со спутника можно заметить луч ЛУ.

«Не смотри в лазер оставшимся глазом»

Эту надпись можно увидеть практически в любой лаборатории, в которой есть лазеры. Все знают, что лазерное излучение может нанести необратимые повреждения глазу. Для того чтобы понять, насколько может быть опасен для здоровья луч ЛУ, оценим сначала его интенсивность, т.е. мощность, приходящуюся на квадратный миллиметр поверхности, освещенной лазерным

лучом. Считая диаметр пучка равным 3 мм, а мощность 3 мВт, для интенсивности получим $I_{\text{ЛУ}} = 0,3 \text{ мВт}/\text{мм}^2$. Для сравнения вспомним, что интенсивность солнечного излучения составляет примерно 1 кВт на квадратный метр поверхности Земли, или $I_{\text{С}} = 1 \text{ мВт}/\text{мм}^2$. Таким образом, наблюдать за зайчиком лазерной указки не опаснее, чем наблюдать за солнечным зайчиком. По-видимому, это соображение и послужило основой для установления верхнего предела мощности бытовых лазеров. Напомним, что лазерная указка существует для того, чтобы направлять ее как обычную деревянную указку на предметы. Ни при каких обстоятельствах нельзя направлять ее в глаза. Точно так же, как обычной деревянной указкой можно поранить глаз при неосторожном обращении, можно серьезно повредить глаз и лазерной указкой. Дело в том, что хрусталик нашего глаза — это оптическая линза с переменным фокусным расстоянием, которая, так же, как линза фотоаппарата, создает изображение на сетчатке глаза. Если пучок света, приходящий в глаз, является строго параллельным, а линза сфокусирована «на бесконечность», то весь свет пучка фокусируется линзой хрусталика на какое-то одно место сетчатки, размер которого около одного микрона (порядка длины волны света). Если хрусталик в этот момент сфокусирован на предмете, находящемся на расстоянии 1 м, то точной фокусировки пучка на сетчатке не произойдет и размер размытого пятна на сетчатке будет около 30 микрон. Посчитаем интенсивность света, попадающего на сетчатку глаза. В случае точной фокусировки $I_{\text{F}} = 3 \text{ кВт}/\text{мм}^2$, в случае несфокусированного, размытого пятна $I = 3 \text{ Вт}/\text{мм}^2$. Для сравнения можно рассчитать, какой будет интенсивность света на сетчатке, если глаз смотрит прямо на Солнце. Угловой размер Солнца примерно $1/100$ рад, фокусное расстояние хрусталика около 1 мм, поэтому размер изображения Солнца на сетчатке примерно 0.1 мм. Считая, что весь свет от Солнца, попадающий в зрачок глаза (размер 2 мм), концентрируется в круге диаметром 0,1 мм, получим интенсивность света на сетчатке глаза $I_{\text{С}} =$

$= 0,4 \text{ Вт}/\text{мм}^2$. Эти цифры убедительно показывают, что смотреть прямо в лазер, даже слабomощный, не стоит — интенсивность света на сетчатке может быть в 10^4 раз выше, чем максимальная интенсивность, которая возможна в естественных условиях (при прямом наблюдении Солнца). С другой стороны, если луч случайно «мазнул» по глазам, которые сфокусированы на какой-то другой предмет, то возможно кратковременное ослепление без необратимого повреждения глаза.

Искать границу между этими предельными случаями не стоит. Лучше всего взять за правило ни в коем случае не направлять ЛУ в сторону людей. В течение предыдущего десятилетия, когда ЛУ были очень дорогие, они в основном использовались как целеуказатели для огнестрельного оружия. Поэтому человек, увидевший, что на него направлен луч лазера, может подумать, что на него направлено оружие, и повести себя соответственно — например, направить на вас ствол собственного оружия (автор этой статьи живет в штате Флорида, где многие жители имеют разрешение на скрытое ношение оружия). В последнее время законодательства многих американских штатов рассматривают злоупотребление ЛУ как хулиганство. Так, в Калифорнии попытка направить ЛУ на людей «в угрожающей манере» наказывается тюремным сроком до 30 дней.

Вопрос для обдумывания

Что ярче: 5-милливаттная ЛУ, Солнце или 1000-ваттная лампочка? По определению, яркость — это световой поток, излучаемый в единичный телесный угол с единицы поверхности излучающего тела. Возьмите листок бумаги и направьте на него поочередно луч ЛУ, луч Солнца или свет мощной лампы с рефлектором с расстояния 10 см, рассчитайте мощность, приходящуюся на единицу площади освещенной поверхности, и сравните полученные величины. Теперь представьте себе, что вместо листа бумаги находится маленькая фокусирующая линза. Оцените отношение освещенностей в фокусе линзы для всех трех случаев и покажите, что вы получили отношение яркостей трех источников. Так почему же яркость лазера в десятки тысяч раз больше яркости Солнца?



Волновая механика Эрвина Шредингера

А. ВАСИЛЬЕВ

ИМЯ ВЫДАЮЩЕГОСЯ ФИЗИКА Эрвина Шредингера неразрывно связано со становлением и развитием квантовой теории. Его волновое уравнение занимает центральное место в этой теории и ставит Шредингера в ряд величайших ученых современности.

Поразителен творческий диапазон Шредингера. Он внес заметный или определяющий вклад в квантовую механику и электродинамику, физику элементарных частиц и космических лучей, статистическую механику и термодинамику, общую теорию относительности, космологию и теорию поля. Им выполнены пионерские работы на стыке физики и биологии и написаны труды по философским проблемам естествознания.

Круг интересов Шредингера выходил далеко за пределы физики и естествознания вообще. Он был знатоком античной и восточной философии, великолепно знал мировую литературу, владел многими языками, в том числе древнегреческим и латынью, и предпочитал читать великие произведения мировой литературы в оригинале. Наконец, Шредингер занимался лепкой, писал стихи и даже издал книгу своих стихотворений. Современники поражались его энциклопедичности и универсализму.

Бурные события XX века, и прежде всего мировые войны, заметно повлияли на жизнь Шредингера — ему пришлось много раз переезжать из одной европейской страны в другую, а на родину, в Австрию, он вернулся лишь на склоне лет.

Эрвин Шредингер родился в 1887 году в Вене и там же закончил престижную Академическую гимназию. После блестяще сданных выпускных экзаменов он поступил в Венский университет, выбрав своей специальностью физику и математику.

Будучи учеником выдающегося представителя венской физической школы Фрица Газенорля, Шредингер основательно изучил математические методы физики и уже в студенческие годы сочетал блестящую физическую эрудицию с мастерским владением этими методами. Научную деятельность он начал в Венском университете, занимаясь классической механикой, броуновским движением и теорией ошибок. Вскоре, однако, его внимание привлекла квантовая теория, достигшая к тому времени уже значительных успехов.

В 1920 году Шредингер переехал в Германию, а через короткое время получил предложение из Цюрихского университета возглавить кафедру теоретической физики. В эти годы французский физик Луи де Бройль развивал идеи о переносе корпускулярно-волнового дуализма света, постулированного Эйнштейном для объяснения фотоэффекта, на частицы вещества. Согласно представлениям де Бройля, всякой частице, характеризующейся импульсом и энергией, можно было приписать также некоторую частоту колебаний и длину волны. Шредингер познакомился с этой теорией в 1925 году, и она вдохновила его на разработку волновой механики для описания физических свойств атома. Уже в следующем году он начал публикацию серии работ под общим названием «Квантование как задача о собственных значениях», которые стали со временем классикой науки и поставили на солидную основу казавшуюся до тех пор таинственной волновую механику.

Использовавшиеся в те годы представления квантовой физики оставались во многом несогласованными и противоречивыми. Например, в атомной модели Бора для расчета электронных орбит и процессов излуче-

ния использовались законы классической механики и электродинамики, тогда как для объяснения устойчивости электронных орбит привлекались квантовые условия. Важный шаг в преодолении этих противоречий был сделан в 1925 году Вернером Гейзенбергом, в работах которого были заложены основы созданной им впоследствии (совместно с М. Борном и П. Иорданом) матричной механики.

Гейзенберг исходил из предположения, что в физике микромира следует интересоваться не наблюдаемыми величинами (такими, как электронные орбиты или периоды обращения электронов в атоме), а теми величинами, которые можно измерить (например, частотой излучения и интенсивностью спектральных линий). Целью Гейзенберга было создание строгой квантовой теории, в которую, по аналогии с классической механикой, входили бы лишь соотношения между наблюдаемыми величинами. Введенный им формализм матричной механики уже через короткое время был усовершенствован настолько, что позволял получать точные решения многих физических задач.

Шредингер был осведомлен о новых веяниях в квантовой теории, однако сложные методы матричной механики и недостаток наглядности «отпугивали» его. Работая в Цюрихе, он находился довольно далеко от тогдашних центров атомной физики да и с их лидерами не поддерживал личных контактов. К тому же независимая натура Шредингера не позволяла ему в своих исследованиях примыкать к той или иной доктрине. В результате к созданию волновой механики Шредингер пришел своим собственным путем, рассматривая атом как колебательную систему и отождествляя возможные собствен-

ные колебания этой системы с устойчивыми энергетическими состояниями в атоме. Близкое знакомство с теорией колебаний помогло Шредингеру сформулировать основную физическую идею в рамках задачи о собственных значениях дифференциального уравнения.

Стремясь осмыслить гипотезу де Бройля и построить на ее основе новую атомную теорию, Шредингер опирался на глубокое знание аналитической механики Гамильтона. Еще в середине XIX века этот ирландский математик придал законченный вид теоретической механике и установил формальную связь между классической механикой и геометрической оптикой. Оптико-механическая аналогия позволила ему представить основные закономерности этих, на первый взгляд различных, дисциплин в одном и том же математическом виде. Так, в рамках оптико-механической аналогии закон движения материальной точки с заданной энергией в статическом силовом поле имеет тот же вид, что и закон распространения монохроматического светового пучка в среде с меняющимся показателем преломления. При этом постоянное значение энергии материальной точки соответствует постоянной частоте колебаний световой волны, а скорость точки соответствует групповой скорости распространения света в среде.

Шредингер решил распространить математическую аналогию между оптикой и механикой на волновые свойства света и материи. Преодолев на этом пути многочисленные математические трудности, он получил знаменитое волновое уравнение для атома водорода

$$\Delta\psi + (2m/h^2)(E + e^2/r)\psi = 0,$$

где ψ – волновая функция, m – масса электрона, e – его заряд, r – расстояние между электроном и ядром, E – полная энергия системы, h – постоянная Планка, Δ – математический символ (оператор Лапласа), который в декартовой системе координат имеет вид

$$\Delta = d^2/dx^2 + d^2/dy^2 + d^2/dz^2.$$

Это соотношение, выражающее обобщение гипотезы де Бройля о волновых свойствах вещества, с математической точки зрения представляет собой линейное дифференци-

альное уравнение, решения которого имеют смысл стоячих волн. Теперь стационарные электронные орбиты в атоме Бора могли рассматриваться как собственные колебания – по аналогии с тем, как натянутая струна колеблется лишь с некоторыми дискретными частотами, зависящими от ее длины и граничных условий. С помощью полученного им волнового уравнения Шредингер рассчитал энергетические уровни такого гармонического осциллятора и показал на примере атома водорода, что теоретически рассчитанные энергетические уровни либо совпадают со значениями, полученными в рамках матричной механики Гейзенберга, либо хорошо согласуются с экспериментом. Использование хорошо известных методов математической физики сделало теорию Шредингера более привлекательной для физиков, чем матричная механика Гейзенберга. Более того, в своей третьей статье о квантовании Шредингер показал полную математическую эквивалентность матричной и волновой механики – из собственных волновых функций Шредингера можно было построить матрицы Гейзенберга и наоборот.

Итак, единая квантовая теория была создана, однако дискуссия о ее физическом содержании продолжалась. Главным предметом этой дискуссии стал вопрос о природе волновой функции. По отношению к этой проблеме физики разделились на два лагеря. Сам Шредингер, для которого авторитет классической концепции движения был непререкаем, трактовал волновую функцию самым наглядным образом и говорил в этой связи о колебательном движении в трехмерном пространстве. Квантовый скачок при переходе атома из одного состояния в другое интерпретировался как постепенный переход из состояния, соответствующего собственному колебанию с энергией E_m , в состояние с энергией E_n , при этом излишек энергии излучался в виде электромагнитной волны. Электрон представлялся электрически заряженным облаком, обволакивающим атом, и преобразовывался в пространственно распределенную электромагнитную волну, движущуюся непрерывно, без всякого квантового скачка. Квантовая механика, таким образом, естественно примыкала к классической, что

особенно импонировало как самому Шредингеру, так и воспитанным в традициях классической физики де Бройлю, Эйнштейну, фон Лауэ, Планку.

Другой точки зрения придерживались Паули, Гейзенберг и Бор. Напряженная работа по прояснению поставленных проблем показала, что полуклассическая интерпретация волновой механики неправомерна и что построить теорию на базе только волновых представлений, отказавшись от концепции корпускулярно-волнового дуализма, невозможно.

Выход из затруднения подсказали исследования процессов атомных столкновений, проведенные в 1926 году Максом Борном. Анализ рассеяния электронов и α -частиц на ядрах дал ключ к пониманию смысла волновой функции Шредингера: квадрат ее амплитуды соответствовал вероятности, с которой частица могла быть обнаружена в данной точке пространства. Это означало, что волновая функция описывает отдельные события (например, акт излучения кванта света) лишь с точки зрения вероятности их осуществления. Такая интерпретация поставила волновую механику на прочную физическую основу и вскоре получила относительно замкнутый и непротиворечивый вид. В настоящее время статистическое истолкование квантовой теории является общепринятым.

Хотя надежды Шредингера на создание своего рода классической теории поля для атомных явлений не оправдались, его волновая механика стала важным шагом в разработке математических методов квантовой механики и в развитии теоретико-познавательного содержания квантовой физики. В последующие годы Шредингер много занимался детальной проработкой разнообразных аспектов волновой механики и ее практическими приложениями. Особое место заняли здесь его работы по теории возмущений.

Как создатель волновой механики Эрвин Шредингер выдвинулся в первые ряды физиков своего времени. В 1933 году ему вместе с Полем Дираком была присуждена Нобелевская премия по физике «за открытие новых форм атомной теории».

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M1726» или «Ф1733». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M1726–M1728 предлагались на осеннем Турнире городов.

Задачи Ф1733–Ф1735, Ф1739, Ф1740 и Ф1742 предлагались на очном туре VI Соросовской олимпиады по физике.

Задачи M1726–M1735, Ф1733–Ф1742

M1726. На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите все возможные значения n .

Р.Женодаров

M1727. Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в последовательности есть одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа: Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема – вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 10 раз.

А.Шановалов

M1728. Точки K, L на сторонах AC, CB треугольника ABC – это точки, в которых вневписанные окружности касаются сторон. Докажите, что прямая, соединяющая середины KL и AB ,

- делит периметр треугольника ABC пополам;
- параллельна биссектрисе угла ACB .

Л.Емельянов

M1729. Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части так, что любая тройка чисел из какой-либо части дает в сумме число, принадлежащее той же части. Докажите, что нечетные числа принадлежат одной части, а четные – другой.

В.Произволов

M1730*. Продолжения противоположных сторон произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках M и K (рис.1). Через точку O пересечения

его диагоналей проводится прямая, параллельная MK . Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой O пополам.

М.Волчкевич

M1731. Нарисовано 60 звездочек, и двое поочередно заменяют любую звездочку на цифру. Докажите, что второй может сделать так, чтобы полученное число делилось на 13.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

M1732. а) Множества A и B на прямой содержат по n точек. Если все троеточия из множества A занумеровать в каком-либо порядке, то все троеточия из множества B можно занумеровать в таком порядке, что всякие два троеточия из A и B , имеющие одинаковые номера, будут равны (при наложении совпадут). Докажите, что множества A и B равны.

б*) Сохранит ли утверждение силу, если в нем «троеточия» заменить на «двоеточия»?

В.Произволов

M1733. Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f = f^{-1}$ и $f(0) = 1$. Докажите равенство

$$\int_0^1 |x - f(x)| dx = \frac{1}{2}.$$

К.Каибханов

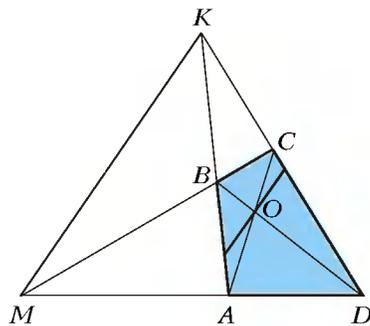


Рис.1

M1734. Докажите, что уравнение $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta = \cos x$ на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ не имеет решений при $\beta \leq 3$, но имеет единственное решение при $\beta > 3$.

В. Сендеров

M1735*. Выпуклый многогранник имеет шесть вершин – по одной на каждой из полуосей прямоугольной системы координат. Докажите, что восемь проекций начала координат на грани многогранника принадлежат одной сфере.

В. Произволов

Ф1733. Корабль злобных пришельцев из космоса представляет собой цилиндр высотой 100 м и диаметром 100 м, стоящий вертикально на плоской поверхности. Единственной уязвимой точкой корабля является маленький люк, находящийся в центре верхнего круга, да и то только в том случае, если попавший в него снаряд имеет скорость не меньше 20 м/с и прилетает под углом к вертикали не больше 45° (данные получены из источников, заслуживающих полного доверия). В нашем распоряжении имеется маленькая пушка, находящаяся на уровне земли. При какой минимальной скорости вылета снаряда из ствола пушки мы сможем поразить корабль? Стрелять можно под любым углом и из любой точки поверхности земли.

З. Рафаилов

Ф1734. Через неподвижный блок переброшена легкая нерастяжимая нить, к концам нити прикреплены два одинаковых груза массой M каждый. К боковой поверхности одного из грузов прицепился таракан массой m . Вначале грузы удерживали, причем «тяжелый» груз находился на H выше легкого. Грузы отпустили. В тот момент когда они поравнялись, таракан прыгнул перпендикулярно боковой поверхности своего груза и уцепился за двигавшийся вверх второй груз. Через какое время грузы снова поравняются? На какую максимальную высоту поднимется груз с тараканом?

Р. Тараканов

Ф1735. В высоком вертикальном цилиндрическом сосуде диаметром D , заполненном водой плотностью ρ , находится толстый тяжелый поршень массой M (рис.2), плотно прилегающий к боковым стенкам (вода через просвет между поршнем и стенками не протекает). По оси поршня сделано отверстие малого диаметра d ($d \ll D$), через которое вода может перетекать из одной части сосуда в другую. Поршень отпускают, и через некоторое время его движение становится равномерным. Найдите скорость установившегося движения поршня. Вязкость жидкости невелика. Толщина поршня h .

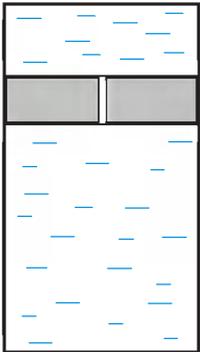


Рис.2

А. Зильберман

Ф1736. Две тележки, массы которых M и $3M$, соединены легкой пружинкой жесткостью k . Они находятся на гладком горизонтальном столе. Толкнем легкую тележку в направлении более тяжелой, вдоль соединяющей их пружинки, сообщив ей скорость v_0 . Через какое время

скорость легкой тележки снова станет равной начальному значению? Найдите ее смещение за этот интервал времени.

Р. Александров

Ф1737. На диаграмме $V-T$ процесс, который проводят с молем разреженного гелия, представляет отрезок прямой $V = V_0 + aT$, причем температура газа в процессе увеличивается от T_0 до $3T_0$ (постоянные V_0 , T_0 и a считаются известными). Найдите максимальную и минимальную теплоемкости газа в этом процессе.

А. Простов

Ф1738. Большой уединенный проводник при помощи резистора сопротивлением R все время поочередно подключают на время τ_1 к проводнику, потенциал которого поддерживается равным ϕ_1 , и на время τ_2 – к другому проводнику, потенциал которого поддерживается равным ϕ_2 . Считая τ_1 и τ_2 малыми, определите тепловую мощность, рассеиваемую в резисторе.

А. Повторов

Ф1739. В схеме, изображенной на рисунке 3, все три батарейки одинаковые, напряжение каждой составляет 3 В, два резистора имеют сопротивления по 100 Ом, сопротивление третьего 200 Ом. Какими могут быть токи

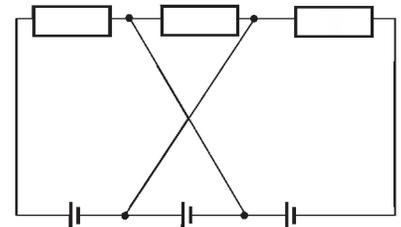


Рис.3

через каждую из батареек? Провода в точке пересечения не соединены.

М. Учителев

Ф1740. Электромагнит представляет собой катушку, намотанную на цилиндрический сердечник. На оси электромагнита найдем точку, в которой магнитная индукция равна 10^{-3} Тл (это намного меньше поля у торца сердечника), принесем в эту точку небольшой сверхпроводящий круговой виток и расположим его перпендикулярно оси магнита так, чтобы ось проходила через центр витка. При этом в витке возникнет ток 10 А. Отодвинем виток параллельно самому себе вдоль оси на 1 см – ток витка уменьшится на 1%. С какой силой магнит действовал на виток в первой точке? Диаметр витка 3 см. Вначале, на большом расстоянии от электромагнита, тока в витке не было.

А. Витков

Ф1741. К источнику переменного напряжения подключены последовательно резистор сопротивлением 200 Ом и катушка индуктивностью 2 Гн, а параллельно этой цепочке включен конденсатор емкостью 10 мкФ. Ток через резистор и катушку имеет амплитуду 0,2 А, ток через конденсатор имеет амплитуду 0,3 А. Найдите по этим данным частоту переменного тока, амплитуду тока, протекающего через источник, и сдвиг фаз между напряжением источника и током через него.

А. Старов

Ф1742. Резистор сопротивлением 200 Ом подключен к сети 220 В, 50 Гц необычным образом – через трансформатор с одинаковыми обмотками (рис.4). Индуктивность каждой обмотки составляет 5 Гн. Найдите ток через резистор и сдвиг фаз между этим током и напряжением

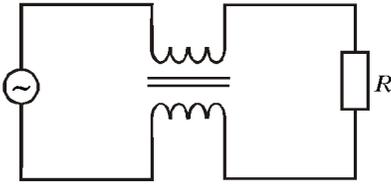


Рис.4

сети. Сопротивлением проводов и обмоток трансформатора пренебречь, рассеяние магнитного потока считать малым.

А.Зильберман

Решения задач М1706—М1710, Ф1718—Ф1727

М1706. Пусть AL и BM – биссектрисы треугольника ABC . Известно, что одна из точек пересечения описанных окружностей треугольников ACL и BCM лежит на отрезке AB . Докажите, что $\angle ACB = 60^\circ$.

Пусть K – точка пересечения окружностей на стороне AB , $\angle BAL = \angle LAC = \alpha$, $\angle ABM = \angle MBC = \beta$. Тогда $\angle MCK = \angle MBK = \beta$, $\angle LCK = \angle LAK = \alpha$, как опирающиеся на равные дуги. Как видим, $\angle ACB = \alpha + \beta$, а сумма углов треугольника ABC равна $3(\alpha + \beta)$. Значит, $\angle ACB = 60^\circ$.

Е.Сопкина

М1707*. Квадрат клетчатой бумаги, состоящий из $n \times n$ клеток, разрезан на $2n$ прямоугольников. При этом каждый прямоугольник расположен либо целиком ниже, либо выше ступенчатой ломаной, разделяющей квадрат (рис.1). Докажите, что найдется клетка клетчатой бумаги, являющаяся одним из названных прямоугольников.

Ступенчатая ломаная разрезает квадрат на два ступенчатых треугольника T_1 и T_2 , при этом основание T_1 состоит из n клеток, а основание T_2 – из $n - 1$ клетки. В силу условия задачи, один из них разрезан на m , а другой – на k прямоугольников, причем $m + k = 2n$.

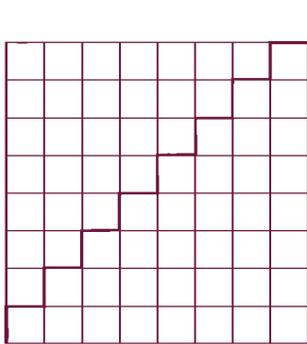


Рис.1

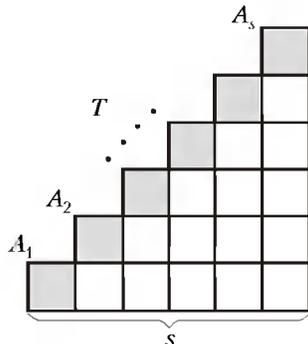


Рис.2

Пока что фиксируем внимание на отдельно взятом ступенчатом треугольнике T , в основании которого s клеток (рис.2). Так как при разрезании T на прямоугольники любые две точки из набора A_1, A_2, \dots, A_s должны принадлежать разным прямоугольникам, можно заключить, что T нельзя разрезать на менее чем s прямоугольников.

Разберем далее тот случай, когда T разрезан в точности на s прямоугольников; тогда каждая из точек A_1, A_2, \dots, A_s принадлежит только одному из них и, более того, каждая из s закрашенных клеток принадлежит целиком только одному из s прямоугольников. Незакрашенных клеток, примыкающих по сторонам к закрашенным, на единицу меньше, чем закрашенных, поэтому хотя бы один из s

прямоугольников не выйдет за пределы своей заштрихованной клетки, т.е. будет с ней совпадать.

Возвращаясь к ступенчатым треугольникам T_1 и T_2 , можно сказать, что $m \geq n$, а $k \geq n - 1$. Но так как $m + k = 2n$, то либо $m = n$, либо $k = n - 1$. Значит, либо в T_1 , либо в T_2 найдется прямоугольник, совпадающий с клеткой клетчатой бумаги.

В.Произволов

М1708. Игроют двое. Они по очереди пишут на доске делители числа $100!$, отличные от 1 (без повторений). Проигрывает тот игрок, после хода которого числа на доске окажутся в совокупности взаимно просты. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его противник?

Ответ: выигрывает второй игрок.

Предположим, что кто-то не может сделать ход. Поскольку перед последним ходом все числа на доске имели общий делитель, больший единицы, то они имели общий простой делитель p . Так как следующий ход сделать невозможно, на доску должны быть уже выписаны все делители $100!$, делящиеся на p . Очевидно, количество таких делителей равно количеству делителей числа $100!/p$. Как известно, количество делителей натурального числа нечетно тогда и только тогда, когда это число является точным квадратом. Следовательно, если число не представляется в виде pm^2 , где p – простое число, то количество его делителей, делящихся на любой простой делитель p , четно, т.е. выигрывает второй.

Осталось заметить, что число $100!$ делится на простые числа 97 и 89, но не делится на их квадраты, поэтому число $100!$ не представляется в виде pm^2 , где p – простое число.

Д.Карпов

М1709. Окружность пересекает стороны прямоугольника в восьми точках, которые последовательно занумерованы. Докажите, что площадь четырехугольника с вершинами в точках с нечетными номерами равна площади четырехугольника с вершинами в точках с четными номерами (рис.1).

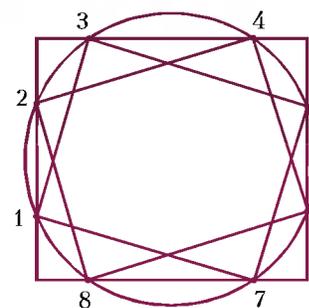


Рис.1

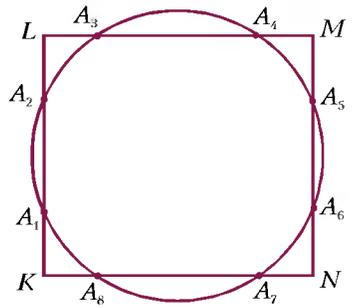


Рис.2

Сначала запишем вспомогательное равенство для отрезков горизонтальных сторон прямоугольника $KLMN$, выступающих за пределы окружности (рис.2):

$$LA_3 + NA_7 = MA_4 + KA_8.$$

Это равенство следует хотя бы из того, что трапеция $A_8A_3A_4A_7$ – равнобочная. Аналогично получаем другое вспомогательное равенство для отрезков вертикальных сторон: $KA_1 + MA_5 = LA_2 + NA_6$. Третье вспомогательное равенство получим, если приравняем произведения ле-

вых и произведения правых частей первых двух. Обозначив через a длину горизонтальной стороны прямоугольника $KLMN$, а через b — длину его вертикальной стороны, запишем основное равенство:

$$LA_3(b - KA_1) + NA_7(b - MA_5) + KA_1(a - NA_7) + MA_5(a - LA_3) = MA_4(b - NA_6) + KA_8(b - MA_5) + LA_2(a - MA_4) + NA_6(a - KA_8).$$

Это равенство непосредственно следует из трех вспомогательных равенств. Оно означает, что сумма площадей четырех прямоугольных треугольников LA_1A_3 , NA_5A_7 , KA_7A_1 и MA_3A_5 равна сумме площадей треугольников MA_6A_4 , KA_2A_8 , LA_4A_2 и NA_8A_6 . Но в таком случае площади четырехугольников $A_1A_3A_5A_7$ и $A_2A_4A_6A_8$ равны.

В.Произволов

M1710*. Пусть x, y, z, p, q, r — положительные числа такие, что $p + q + r = 1, x^p y^q z^r = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{p^2 x^2}{qy + rz} + \frac{q^2 y^2}{px + rz} + \frac{r^2 z^2}{px + qy} \geq \frac{1}{2}.$$

Докажем вначале некоторые вспомогательные неравенства.

Лемма 1.

$$x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha, \tag{1}$$

где $x > 0, 0 < \alpha < 1$.

Доказательство. При $x > 0$ рассмотрим функцию

$$f(x) = x^\alpha - \alpha x,$$

где $0 < \alpha < 1$. Имеем

$$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) \begin{cases} > 0 & \text{при } 0 < x < 1, \\ < 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Следовательно, функция возрастает, пока x изменяется в промежутке $(0; 1]$, и убывает в промежутке $[1; +\infty)$. Отсюда ясно, что $f(1) = 1 - \alpha$ будет наибольшим значением функции в промежутке $(0; +\infty)$.

Лемма 2.

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b, \tag{2}$$

где $a, b, \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$.

Для доказательства достаточно положить в (1) $x = \frac{a}{b}$ и обозначить $1 - \alpha$ через β .

Лемма 3.

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \leq \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

где $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = 1$.

Для доказательства достаточно применить дважды неравенство (2):

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma = a^\alpha \left(b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}} \right)^{\beta+\gamma} \leq \alpha a + (\beta + \gamma) b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}} \leq \alpha a + (\beta + \gamma) \left(\frac{\beta}{\beta+\gamma} b + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} c \right) = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно было бы совершить и переход от n к $n + 1$ и доказать — по методу математической индукции — общее неравенство, которое (в измененных обозначениях) имеет вид

$$a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_n^{q_n} \leq q_1 a_1 + q_2 a_2 + \dots + q_n a_n \tag{3}$$

(где $a_1, \dots, a_n, q_1, \dots, q_n > 0, q_1 + \dots + q_n = 1$).

Равенство достигается лишь тогда, когда $a_1 = \dots = a_n$.

Перейдем теперь к доказательству неравенства задачи.

Вспользуемся неравенством Коши — Буняковского

$$(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)^2 \leq (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2),$$

где $u_i, v_i, w_i (i = 1, 2)$ — действительные числа. Полагая

$$u_1 = \frac{px}{\sqrt{qy + rz}}, v_1 = \frac{qy}{\sqrt{px + rz}}, w_1 = \frac{rz}{\sqrt{px + qy}},$$

$$u_2 = \sqrt{qy + rz}, v_2 = \sqrt{px + rz}, w_2 = \sqrt{px + qy},$$

будем иметь неравенство

$$(px + qy + rz)^2 \leq \left(\frac{p^2 x^2}{qy + rz} + \frac{q^2 y^2}{px + rz} + \frac{r^2 z^2}{px + qy} \right) \times 2(px + qy + rz),$$

из которого следует, что

$$\frac{p^2 x^2}{qy + rz} + \frac{q^2 y^2}{px + rz} + \frac{r^2 z^2}{px + qy} \geq \frac{1}{2}(px + qy + rz).$$

Так как $p + q + r = 1$, то для оценки суммы $px + qy + rz$ снизу можно применить неравенство леммы 3:

$$px + qy + rz \geq x^p y^q z^r = 1.$$

Неравенство задачи доказано.

Замечание 1. Полагая в неравенстве (3) $q_1 = \dots = q_n = \frac{1}{n}$, получим

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Из неравенства (3) нетрудно вывести также и некоторые другие классические утверждения. Например, легко получить так называемое неравенство Коши — Гёльдера:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^{k'} \right\}^{\frac{1}{k'}}$$

(где $a_i, b_i > 0; k, k' > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$),

а также неравенство, носящее имя Минковского:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k \right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^k \right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{ \sum_{i=1}^n b_i^k \right\}^{\frac{1}{k}}$$

(где $a_i, b_i > 0, k > 1$).

Замечание 2. Положим в неравенстве задачи $p = q = r = \frac{1}{3}$:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Теперь положим $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$. Получим

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2},$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $abc = 1$.

Эта задача предлагалась в 1995 году на Международной математической олимпиаде (см. задачу M1526).

С.Калинин, В.Сендеров

Ф1718. Заяц бежит по прямой с постоянной скоростью 5 м/с. В некоторый момент его замечает лиса и начинает погоню. Скорость лисы постоянна по величине и равна 4 м/с, а движется она тоже не самым лучшим образом – скорость ее в каждый момент направлена точно в ту точку, где находится заяц. Вначале расстояние между ними уменьшается, затем начинает возрастать. Минимальное расстояние составляет 30 м. Какое ускорение было у лисы в тот момент, когда расстояние стало минимальным?

В неподвижной системе отсчета скорость лисы по модулю постоянна; значит, ускорение лисы связано с поворотом вектора ее скорости. Пусть в некоторый момент скорость лисы составляет угол α с направлением скорости зайца, тогда скорость сближения лисы и зайца равна

$$v_{\text{отн}} = v_{\text{л}} - v_{\text{з}} \cos \alpha.$$

Минимальное расстояние между участниками забега получается в тот момент, когда относительная скорость становится нулевой; значение угла при этом определяется соотношением

$$\cos \alpha_0 = \frac{v_{\text{з}}}{v_{\text{л}}} = 0,8.$$

Теперь мы можем задать очень малый интервал времени τ , найти малый угол поворота вектора скорости лисы:

$$\varphi = \frac{\tau v_{\text{з}} \sin \alpha}{L}$$

и ускорение лисы:

$$a = \frac{v_{\text{л}} \varphi}{\tau} = \frac{v_{\text{л}} v_{\text{з}} \sin \alpha}{L} = 0,4 \text{ м/с}^2.$$

Можно решать задачу и в системе отсчета, которая связана с зайцем, – но при этом придется учитывать и изменение модуля скорости лисы!

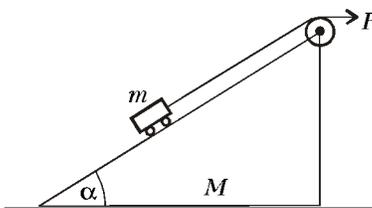
М.Учителев

Ф1719. В системе, показанной на рисунке, силы трения отсутствуют. При каком значении силы F клин и тележка могут двигаться вместе, без проскальзывания? Угол при основании клина α .

Клин и тележка могут двигаться вместе (без проскальзывания) только в том случае, когда их ускорения одинаковы, т.е. направлены горизонтально и равны

$$a = \frac{F}{M + m}.$$

Теперь можно записать уравнения движения тележки по горизонта-



ли и вертикали:

$$F \cos \alpha - N \sin \alpha = ma = \frac{mF}{M + m},$$

$$F \sin \alpha + N \cos \alpha - mg = 0.$$

Отсюда легко найти выражение для необходимой силы:

$$F = \frac{mg \sin \alpha}{1 - \frac{m \cos \alpha}{M + m}}.$$

А.Клинов

Ф1720. Кусок мела лежит на горизонтальной доске с коэффициентом трения μ . Доску резко начинают двигать в горизонтальном направлении со скоростью v_0 , а через время τ резко останавливают. Найдите длину меловой черты на доске.

Если за время τ кусок мела успеет набрать скорость, которую придают доске, то он переместится по доске на

$$L_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Если теперь доску резко остановить, кусок мела проедет столько же в обратную сторону, остановится в начальной точке, и длина меловой черты будет равна L_1 .

Если же отрезок времени τ мал и мел не успеет остановиться относительно доски, то решение выглядит по-другому. Длина меловой черты до момента остановки доски равна

$$L_2 = v_0 \tau - \frac{\mu g \tau^2}{2}.$$

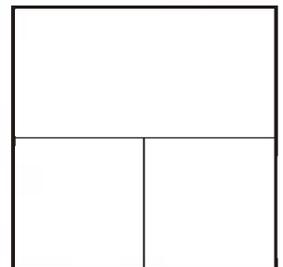
К моменту остановки доски мел приобретет скорость (относительно неподвижной системы отсчета) $v = \mu g \tau$. После остановки доски скорость куска мела начнет убывать – до полной остановки, а длина пройденного при этом пути составит

$$L_3 = 0,5v \cdot \frac{v}{\mu g} = \frac{v^2}{2\mu g}.$$

Легко видеть, что эта величина меньше L_2 , следовательно, длина меловой черты в этом случае равна L_2 .

К.Чертов

Ф1721. В высокий вертикальный сосуд квадратного сечения, разделенный вертикальными перегородками на три части (см. рисунок), налили до одной и той же высоты горячий суп с температурой $+65^\circ\text{C}$ – в большое отделение, теплый компот при $+35^\circ\text{C}$ и холодный квас при $+20^\circ\text{C}$. Наружные стенки сосуда очень хорошо теплоизолированы, внутренние перегородки имеют одинаковую толщину и сделаны из одного материала, не очень хорошо проводящего тепло. Через некоторое время суп остыл на 1 градус. Считая, что все эти жидкости – практически одна вода, определите, на сколько изменились за это время температуры остальных двух жидкостей. Кваса в сосуде столько же, сколько компота, супа – вдвое больше.



При расчетах мы будем пренебрегать теплоемкостью самого сосуда – это разумно, если стенки его тонкие и

масса невелика по сравнению с массой жидкости, да и удельные теплоемкости у металлов существенно меньше, чем у воды (и вообще, эта теплоемкость в условии не задана и вычислить ее мы не можем...). Количество теплоты, передаваемое через перегородку за единицу времени, как известно, пропорционально площади контакта и разности температур с двух сторон перегородки. Площади контакта каждой пары жидкостей в нашем случае одинаковы, поэтому можно записать, что от супа к компоту передается количество теплоты

$$Q_1 = k(65^\circ - 35^\circ),$$

от супа к квасу –

$$Q_2 = k(65^\circ - 20^\circ),$$

от компота к квасу –

$$Q_3 = k(35^\circ - 20^\circ)$$

(здесь k – постоянный коэффициент пропорциональности). Тогда суп потерял

$$Q_1 + Q_2 = k \cdot 75^\circ,$$

компот приобрел

$$Q_1 - Q_3 = k \cdot 15^\circ,$$

квас приобрел

$$Q_2 + Q_3 = k \cdot 60^\circ.$$

Учитывая двойную массу супа и сравнивая полученные энергии с отданной, найдем приращение температуры компота:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta t_1 \cdot 15 \cdot 2}{75} = 0,4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

и приращение температуры кваса:

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta t_1 \cdot 60 \cdot 2}{75} = 1,6 \text{ } ^\circ\text{C},$$

где $\Delta t_1 = 1 \text{ } ^\circ\text{C}$ – уменьшение температуры супа.

Можно провести расчет и поточнее – все же в процессе передачи тепла менялись температуры и, главное, разности температур жидкостей, но поправки получатся не очень существенными – во всяком случае, их неучет меньше влияет на результат, чем сделанные нами упрощения модели теплопередачи.

А. Колотов

Ф1722. В закрытом сосуде кроме воздуха содержится некоторое количество воды. Температура внутри сосуда поддерживается равной $+100 \text{ } ^\circ\text{C}$. Начальный объем сосуда 10 л, жидкость при этом занимает очень небольшую часть объема сосуда, а давление составляет ровно 2 атм. При увеличении объема сосуда до 20 л давление в нем упало до 1,4 атм. Считая эти значения точными, найдите массу воздуха в сосуде. А сколько молекул воды содержится в сосуде?

Давление насыщенных паров воды при указанной температуре составляет 1 атм, тогда парциальное давление воздуха также получается равным 1 атм. Это дает возможность найти массу воздуха в сосуде (молярную массу воздуха примем, как обычно, равной $M_B = 29 \text{ г/моль}$):

$$m_B = \frac{M_B p_B V}{RT} = 9,4 \text{ г.}$$

После увеличения объема сосуда в два раза парциальное давление воздуха снизится в два раза и составит 0,5 атм; следовательно, давление водяных паров окажется

равным

$$p_n = 1,4 \text{ атм} - 0,5 \text{ атм} = 0,9 \text{ атм.}$$

Это меньше давления насыщенных паров при $+100 \text{ } ^\circ\text{C}$; значит, испарилась вся вода. Тогда количество молекул воды (водяного пара) в сосуде равно

$$N = \frac{N_A p_n \cdot 2V}{RT} = 3,5 \cdot 10^{23},$$

где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

З. Рафаилов

Ф1723. Высокий вертикальный сосуд содержит небольшое количество гелия под поршнем массой M , на который поставлена гиря массой $49M$. В состоянии равновесия поршень «висит» над дном сосуда на высоте h . Гирю снимают с поршня, и он начинает движение вверх. Оцените максимальную высоту подъема поршня. На какой высоте над дном сосуда поршень в конце концов остановится? Считайте при расчете, что трения в системе нет, стенки и поршень совершенно не проводят тепло, а теплоемкость стенок и поршня сосуда очень мала.

Газ совершает работу по подъему поршня за счет своей внутренней энергии – температура газа падает. Если объем газа увеличивается во много раз (а в нашем случае, похоже, так и есть), то он отдает практически всю свою энергию. Воспользуемся этим для оценки максимальной высоты подъема поршня. Запишем уравнение равновесия поршня в начальном состоянии и «энергетическое» уравнение:

$$\frac{50Mg}{S} Sh = \nu RT_0,$$

$$Mg(H - h) = 1,5\nu RT_0,$$

откуда получаем максимальную высоту подъема поршня:

$$H = 76h.$$

Найдем теперь высоту H_1 , на которой поршень окончательно остановится. Для этого запишем уравнения равновесия в начальном и в конечном состояниях и уравнение энергетического баланса (пусть T_1 – конечная температура):

$$\frac{50Mg}{S} Sh = \nu RT_0, \quad \frac{Mg}{S} SH_1 = \nu RT_1,$$

$$Mg(H_1 - h) = 1,5\nu R(T_0 - T_1).$$

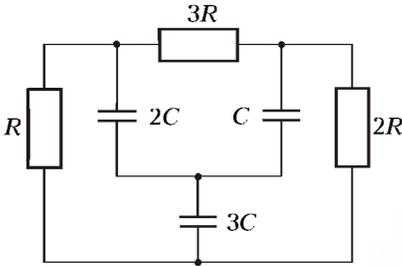
Отсюда находим

$$H_1 = 30,4h.$$

А. Повторов

Ф1724. Конденсаторы, емкости которых C , $2C$ и $3C$, соединены друг с другом, как показано на рисунке. Конденсатор емкостью $2C$ заряжен до напряжения U_0 , остальные два не заряжены. К свободным выводам конденсаторов одновременно подключают резисторы сопротивлением R , $2R$ и $3R$. Какое количество теплоты выделится за большое время на каждом из этих резисторов?

В начальный момент разность потенциалов между выводами резистора $2R$ (для краткости в решении будем



опускать слова «сопротивлением» и «емкостью») равна нулю (конденсаторы C и $3C$ не заряжены). Легко сообразить, что эта разность потенциалов так и останется нулевой. Действительно,

отключим резистор $2R$ и посмотрим на разность потенциалов между точками его бывшего подключения: отношение токов, заряжающих конденсаторы C и $3C$, вначале равно $I_C : I_{3C} = 1 : 3$, значит, конденсаторы C и $3C$ заряжаются токами, пропорциональными их емкостям, а напряжения на резисторах R и $3R$ остаются одинаковыми. Если мы поставим на место выброшенный резистор, то ничего не изменится – ток через него течь не будет.

Понятно, что не вся начальная энергия перейдет в тепло – конденсатор $2C$ разряжается (кстати, суммарным током $I_C + I_{3C}$), а конденсаторы C и $3C$ заряжаются, причем процесс этот никогда формально не закончится, хотя все идет к выравниванию всех трех напряжений. В результате конденсаторы оказываются соединенными параллельно – заряд получившегося конденсатора $6C$ равен исходному заряду $2CU_0$.

Итак, емкость возросла в 3 раза, при фиксированном заряде энергия уменьшилась в 3 раза – две трети ее перешли в тепло, что составило $2CU_0^2/3$. Ток через резистор R все время втрое больше, чем через $3R$, мощность на нем получается в $9/3 = 3$ раза больше, т.е. на меньшем резисторе рассеивается $3/4$ общего тепла, а на большем $1/4$. Тогда в резисторе R выделится $W_R = CU_0^2/2$ тепла, а в резисторе $3R$ – $W_{3R} = CU_0^2/6$.

А.Зильберман

Ф1725. Катушка индуктивности содержит много витков и намотана из проволоки с высоким удельным сопротивлением. Выводы катушки замкнуты между собой, около катушки расположен сильный постоянный магнит. Магнит очень быстро убирают, при этом в цепи появляется ток. За первые 100 мс выделяется 0,01 Дж тепла, за следующие 100 мс – еще 0,006 Дж. Какое общее количество теплоты выделится в цепи за большое время?

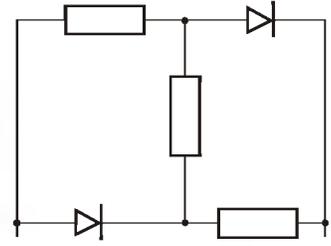
По мере уменьшения тока в цепи уменьшается и скорость спада этого тока – ЭДС индукции оказывается равной произведению тока в цепи на сопротивление проволоки, из которой сделана катушка. Запишем соответствующее уравнение и преобразуем его:

$$-L \frac{\Delta I}{\Delta t} = RI, \text{ или } -L \frac{\Delta I}{I} = R\Delta t.$$

Видно, что за равные интервалы времени ток уменьшается в одно и то же число раз – ясно, что это же относится и к рассеиваемой мощности. Следовательно, за следующие 100 мс выделится $0,01 \cdot 0,6^2$ Дж тепла, и полное количество теплоты можно найти в виде суммы:

$$W_{\text{полн}} = 0,01(1 + 0,6 + 0,6^2 + 0,6^3 + \dots) \text{ Дж} = \frac{0,01}{1 - 0,6} \text{ Дж} = 0,025 \text{ Дж}.$$

Ф1726. Цепочку из трех одинаковых резисторов сопротивлением R каждый и двух идеальных диодов подключили к источнику переменного напряжения с амплитудой U_0 (см. рисунок). Найдите среднюю тепловую мощность, выделяющуюся на каждом из резисторов.



Если диоды считать идеальными, то при одной полярности приложенного напряжения такой диод можно заменить куском провода, а при другой он представляет собой разрыв цепи. В нашем случае это означает, что в течение одной половины периода переменного напряжения, когда слева «плюс» и диоды открыты, резисторы соединены параллельно, а следующие полпериода, когда диоды закрыты (разрыв цепи диода), резисторы соединены последовательно, причем на каждом из них напряжение составляет треть приложенного к цепи напряжения. Теперь можно найти мощность, одинаковую на каждом резисторе:

$$P = 0,5 \cdot \frac{U_0^2}{2R} + 0,5 \cdot \frac{(U_0/3)^2}{2R} = \frac{5U_0^2}{18R}$$

(не забудьте – в условии задана амплитуда напряжения).
Р.Старов

Ф1727. В большом спортивном зале стены, пол и потолок оклеены звукопоглощающими (полностью поглощающими звук) покрытиями. На высоте $h = 5$ см от пола находится мощный точечный источник звука частоты $f = 2000$ Гц, излучающий звуковые волны равномерно во все стороны. Микрофон малых размеров находится на высоте $H = 3$ м от пола на расстоянии $L = 4$ м по горизонтали от источника. Подключенный к микрофону чувствительный вольтметр показывает амплитуду переменного напряжения $U = 0,01$ В. Как изменятся показания этого вольтметра, если удалить звукопоглощающее покрытие на полу под микрофоном? Считайте, что от пола звуковые волны отражаются без потерь энергии. Какими будут показания вольтметра в том случае, когда покрытие на полу будет восстановлено, но оно окажется очень тонким, качеством хуже и будет поглощать только половину падающей энергии волны, а ослабленная волна будет отражаться от пола зеркально?

В точке, где мы поместили микрофон, могут складываться несколько волн. Когда звукопоглощающее покрытие выполняло свою задачу, к микрофону приходила только прямая волна, она раскачивала мембрану микрофона и амплитуда переменного напряжения была пропорциональна амплитуде звуковых колебаний. Когда мы испортили покрытие, к микрофону дополнительно стала приходиться отраженная от пола волна, когерентная с прямой волной (рис.1). Найдем разность хода прямой и отраженной волн:

$$\sqrt{(H+h)^2 + L^2} - \sqrt{(H-h)^2 + L^2} = \frac{2Hh}{\sqrt{H^2 + L^2}} = 6 \text{ см}$$

(Окончание см. на с. 34)

...обыкновенная материя по отношению к электрической жидкости является как бы своеобразной губкой...

Бенджамин Франклин

...тело благодаря одному лишь приближению к другому но-электризованному телу само может стать ноэлектризованным.

Франц Эпинус

В диэлектрике, находящемся под действием электродвижущей силы, мы можем представлять, что электричество в каждой молекуле так смещено, что одно стороны молекулы делается положительно наэлектризованной, а другая – отрицательно.

Джеймс Клерк Максвелл

А так ли хорошо знакома вам взаимосвязь вещества и электрического поля?

На этот раз разговор о взаимодействии двух видов материи, как ясно из эпиграфов, коснется электричества. Из этой необъятной области физики сегодня мы выберем прежде всего вопросы, связанные с поведением в электрических полях непроводящих тел – изоляторов, или диэлектриков. Кстати, именно их движение во внешнем неоднородном поле было первым в истории отмеченным людьми электрическим явлением.

За тысячи лет наблюдений и экспериментов были изучены свойства множества диэлектриков, открыты такие необычные эффекты, как пьезоэлектричество – электризация кристаллов при нагреве, сегнетоэлектричество – самопроизвольная электрическая поляризация, пьезоэлектричество – электризация под действием механического напряжения. Каждое из этих явлений со временем нашло свое применение в науке, технике или быту – в чувствительнейших приборах для обнаружения дефектов в деталях машин и для прослушивания сердца; в производстве малогабаритных конденсаторов и сенсорных устройств; в микрофонах и телефонах; в получении теплового изображения объектов и изготовлении зажигалок. С диэлектриками связывают развитие акусто- и оптоэлектроники – элементной базы будущих компьютеров. В науке даже возник термин «умные диэлектрики».

Однако важно подчеркнуть, что успешное исследование свойств

разнообразных диэлектриков было бы невозможно без глубоких знаний о структуре вещества. В свою очередь, понимание особенностей электрических процессов, протекающих на микроуровне, дает ключ для получения новых сведений о строении атомов и молекул.

Присоединяйтесь, пусть пока и на школьных примерах, к этому увлекательному поиску.

Вопросы и задачи

1. Почему маленькие кусочки бумаги притягиваются к заряженной пластмассовой расческе, но не притягиваются ни к одной из параллельных пластин заряженного конденсатора?

2. Отчего заканчиваются неудачей попытки «отвести» в землю заряд диэлектрика?

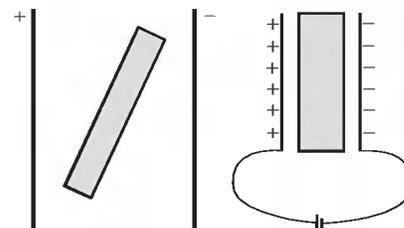
3. Обкладки вертикального воздушного конденсатора, заряженного и отключенного от источника, частично погружают в жидкий диэлектрик. Где напряженность электрического поля между обкладками оказывается больше: в воздухе или в диэлектрике?

4. Почему электролитические конденсаторы обладают большой емкостью?

5. В пространство между разноименно заряженными обкладками конденсатора вставляется металлическая пластина. Изменяются ли заряды, наведенные на пластине, если пространство внутри конденсатора заполнить керосином?

6. В пространстве между обкладками плоского заряженного

конденсатора расположена пластина из диэлектрика, как изображено на рисунке слева. Нарисуйте силовые линии электрического поля, пренебрегая его искажением у краев пластин.



7. Металлический заряженный шар окружен толстым сферическим слоем диэлектрика. Изобразите картину силовых линий внутри и вне диэлектрика. Почему электрическое поле меняется на границе диэлектрика?

8. Два небольших металлических шарика подключены к удаленному источнику напряжения. Как изменится сила притяжения между шариками, если их погрузить в жидкий диэлектрик, не меняя расстояния между ними?

9. Когда обкладки плоского воздушного конденсатора присоединили к электрической батарее, они стали притягиваться друг к другу. Как изменится сила их притяжения, если ввести в конденсатор пластинку из диэлектрика, как показано на рисунке справа?

10. Почему из двух конденсаторов одинаковой емкости и с одинаковыми диэлектриками больший размер имеет тот, который рассчитан на большее напряжение?

11. Разность потенциалов заряженного и отсоединенного от батареи конденсатора удвоилась, когда вытек наполнивший его диэлектрик. Чему равна диэлектрическая проницаемость диэлектрика?

12. Плоский воздушный конденсатор после зарядки отключают от источника напряжения и погружают в керосин. Как изменится энергия, накопленная в конденсаторе?

13. Обкладки заполненного диэлектриком и заряженного конденсатора соединяют друг с другом на очень короткое время. Когда разность потенциалов между обкладками уменьшается в три раза, их разъединяют. После этого разность потенциалов медленно возрастает до $2/3$ своего первоначального значения. Почему?

14. Какие вещества лучше отражают электромагнитные волны: металлы или диэлектрики?

15. Будет ли электрон взаимодействовать с нейтральным атомом?

16. Какой должна быть структура молекулы: а) двуокиси углерода, если известно, что она не имеет дипольного момента, т.е. является неполярной; б) воды, если известно, что она обладает дипольным моментом, т.е. является полярной молекулой?

Микроопыт

Наэлектризуйте пластмассовую расческу трением и наблюдайте, как она притягивает маленькие кусочки бумаги. Однако, если вы поместите те же кусочки вблизи клемм заряженного аккумулятора или полюсов электрической батарейки, то никакого притяжения не обнаружится. Почему?

Любопытно, что...

...английский физик Стефан Грей в начале XVIII века установил, что электризация тел трением происходит лучше, если их предварительно нагреть. Это было связано с испарением с них влаги, т.е. ухудшением проводимости, что внешне проявлялось как усиление их диэлектрических свойств.

...первое упоминание о пьезоэлектричестве относится к 300-м годам до новой эры. Особенности же этого явления подробно исследовал в середине XVIII века немецкий физик Франц Эпинус. Он

показал, что электризация кристаллов турмалина, возникающая при нагреве, принципиально отличается от общеизвестной тогда электризации трением.

...понятие диэлектрической проницаемости, характеризующей ослабление электрического поля в диэлектрике, было введено Майклом Фарадеем в 1837 году под названием «удельной индуктивной способности».

...Фарадей способствовал распространению теории магнетизма Кулона и Пуассона на теорию диэлектриков. А позже, обосновав теорию диэлектриков, Джеймс Максвелл перенес ее понятия на магнетизм.

...по всей видимости, Фарадею принадлежит предсказание электростатических аналогов постоянных магнитов. Такие диэлектрики, обладающие неизменным внешним электрическим полем, были названы в конце прошлого века английским физиком Оливером Хевисайдом «электретами». Первый искусственный электрет был получен примерно 80 лет назад из смеси пальмовой смолы с канифолью.

...в начале XIX века французский минералог Рене Аюи обнаружил, что пьезоэлектрические кристаллы способны электризоваться и под действием давления, что позволило ему создать чувствительный электроскоп. Этот эффект, присущий многим кристаллам, впоследствии стал именоваться пьезоэлектрическим.

...достижение предельно возможной поляризации диэлектрика было открыто в 1918 году на кристаллах сегнетовой соли, давшей название сегнетоэлектрическому эффекту. Сегодня в некоторых специально изготовленных керамиках величина диэлектрической проницаемости может достигать огромных значений – до 20000.

...наведенная поляризация неполярного диэлектрика значительно менее интенсивна, чем ориентационная поляризация диэлектрика, обладающего дипольным моментом. Дело в том, что даже самые сильные постоянные электрические поля, получаемые в лабораториях, в сотни тысяч раз уступают полю ядра атома в области электронной оболочки, из-за

чего смещение зарядов в атоме незначительно по сравнению с его размерами.

...в постоянных и низкочастотных полях диэлектрическая проницаемость воды равна 81. Но при частотах оптического диапазона она падает примерно до 2. Дело в том, что при высоких частотах молекулы диэлектрика «не успевают» поворачиваться вслед за полем.

...чувствительность современных пьезоэлектрических термометров достигает одной миллионной кельвина.

...благодаря использованию пьезоэлектриков удалось построить телескопы с управляемой геометрией поверхности зеркала, что позволяет легко изменять его фокусное расстояние.

...большинство диэлектриков не способны длительное время находиться в электретоном состоянии, однако некоторые виды керамики или полимерных пленок способны сохранять его десятки и даже сотни лет.

...многие ткани живого организма, например кровеносные сосуды, являются электретами. Учитывать это необходимо при использовании искусственных сосудов – если их не обработать в электрическом поле, они вызовут повышенную свертываемость крови, что создает опасность появления тромбов.

Что читать в «Кванте» о взаимосвязи вещества и электрического поля

(публикации последних лет)

1. «Энергия электрического поля» – 1994, Приложение №5, 23;

2. «Электрический диполь и его электрический момент» – 1995, Приложение №4, с.77;

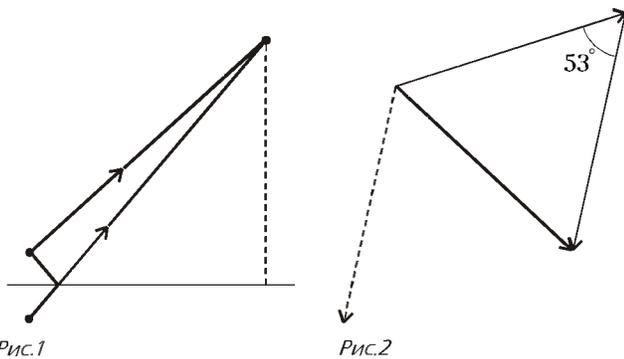
3. «Зачем погружать конденсатор в воду?» – 1996, №1, с. 39;

4. «Диэлектрики, полупроводники, полуметаллы, металлы» – 1996, Приложение №4, с.65;

5. «Электризация капель жидкости – от истории до практического использования» – 1996, №5, с. 44;

6. «Поляризованный диэлектрик и его энергия» – 1999, №1, с. 37.

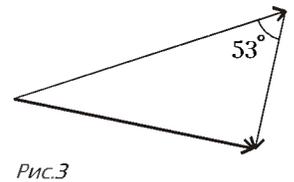
Материал подготовил
А.Леонович



(мы воспользовались при расчете тем, что высота источника звука относительно пола комнаты h во много раз меньше высоты микрофона относительно пола H). Для частоты звука $f = 2000$ Гц и скорости звука в воздухе $v = 340$ м/с длина волны составляет $\lambda = v/f = 0,17$ м. При этом отраженная волна отстает на $6,7/17$ периода и сдвиг

фаз составляет 127° . Проще всего найти сумму векторов, нарисовав вектор, изображающий запаздывающую волну, из конца основного вектора – в получившемся треугольнике угол между соответствующими сторонами равен 53° (рис.2). Если считать векторы, изображающие прямую и отраженную волны единичными, то результирующий вектор будет иметь длину $0,89$ – вольтметр при этом покажет амплитуду переменного напряжения $0,01 \text{ В} \cdot 0,89 \approx 0,009 \text{ В}$.

Во втором случае амплитуда отраженной волны в $\sqrt{2}$ раз меньше (энергия меньше вдвое), и на картинке второй вектор покороче (рис.3). При этом амплитуда суммарной волны составит приблизительно $0,81$, а показания вольтметра уменьшатся до $0,08 \text{ В}$.



Р.Александров

« К В А Н Т » У Л Ы Б А Е Т С Я

Красивые опечатки

Есть те, кто **отрыл** наш журнал сравнительно недавно
 Исторический **мат**
 Камень будет **свершать** колебания
 Сделать **шкатулку**
 Из соображений, связанных с **размеренностью**
Туфельный эффект
 В непрерывном **резюме**
 Бесконечно **удавленная** точка
Поверенная соль
 Капли оказываются **зараженными**
 До **конченного** объема
 Насыщение **ядренных** сил
 График зависимости **протыкаемого** тока
 Разреженные **частики**
Бояровская формула
 Упругая **реформация**
 Может принимать **любимые** положительные значения
Коечное число
 С **диалектическими** проницаемостями
 Идеальный **двухтомный** газ
 Фотоэлемент **проглотил** энергию
 Так **нарываемый** метод

Ток осуществляется **выбываемыми** электронами
 Опыт с **похождением** тока
 Свободный **побег** частицы
 Интер**венционная** картина
 Попер**ченного** сечения
 Напряженность характеризует **пустоту** силовых линий
 Дуга является **честью** окружности
 Функция, очевидно, **возрастная**
 Атомный **редактор** расходует
 Существование **экстремизма** мы доказывать не будем
 В **клубе А В С Д**
Геометрически закрытая банка
Магический поток
 Два гладких **жлоба**
 Мод**ное** поле



Молярная **мама**
 Система испытывает **процессию**
 Математически **выращены** уравнениями
 Термояд**ренный** синтез
 Лампочка **можностью** 40 Вт
 Последний абзац выглядит **паукообразно**
Математическая иглолка
Красивые углы
 Перел**етные** звезды
Острофизические наблюдения
 Спут**анные** волны корабля
 Трапеция – **несчастный** случай четырехугольника

Задачи

1. Алеша на 3 года старше Бори и на 6 лет старше Вовы. Произведение возрастов Гриши и Бори на 9 больше произведения возрастов Алеша и Вовы. На сколько лет Алеша старше Гриши?

А.Шевкин



2. «Будьте взаимно просты», – сказал Умный Портняжка и разрезал показанную на рисунке ленту на несколько частей так, что числа на любых двух отрезанных кусках оказались взаимно простыми. Какое наибольшее количество кусков ленты могло при этом получиться?

И.Акулич



3. Найдется ли такое натуральное число n , при котором $n^2 + n + 1$ делится на 9?

В.Сендеров



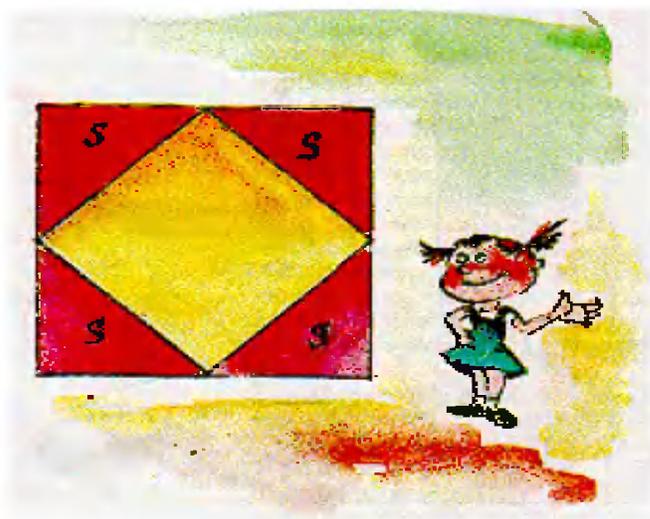
4. На острове Рыцарей и Лжецов живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В Думе острова 101 депутат. В целях сокращения бюджета было решено сократить Думу на одного депутата. Но каждый из депутатов заявил, что если его выведут из состава Думы, то среди оставшихся 100 депутатов большинство будет лжецами. Сколько рыцарей и сколько лжецов в Думе?

Д.Калинин



5. Стороны вписанного в квадрат четырехугольника отсекают от квадрата 4 треугольника равной площади. Докажите, что вписанный четырехугольник – тоже квадрат.

В.Произволов



Про мороженое

Н.ЕЛИСЕЕВ

НАВЕРНОЕ, САМЫМ ЛЮБИМЫМ НАШИМ ЛАКОМСТВОМ на всю жизнь остается мороженое. Что же представляет собой мороженое с точки зрения физики? Попробуем ответить на этот вопрос.

Сам факт изобретения мороженого очень интересен. Ведь по сути мороженое — это застывшее молоко. Однако если вы поставите в морозильник молоко и заморозите его, у вас получится кусок льда, абсолютно не похожий на мороженое. Замороженное молоко достаточно твердое, его сложно откусить — можно повредить зубы.

Оказывается, все дело в технологии приготовления мороженого. На заводе по производству мороженого молоко, специальным образом подготовленное и охлажденное до температуры застывания, подают на устройство, которое распыляет его внутри морозильной камеры. При этом образуется множество мелких кристалликов молока, которые тут же смерзаются между собой (температура-то в морозильнике низкая). Эта полученная масса и представляет собой любимое нами мороженое.

Теперь попробуем разобраться, чем же отличается мороженое от просто заморозшего молока. Мороженое — это множество мелких кристалликов, по структуре очень похожих либо на мелкий сахарный песок, либо на мелкую-мелкую пену и поэтому представляющих как бы сплошную массу. Такие системы, состоящие из множества частиц какого-либо вещества, распределенных в однородной среде, физики называют дисперсными (от латинского *dispersio* — рассеяние). Свойства

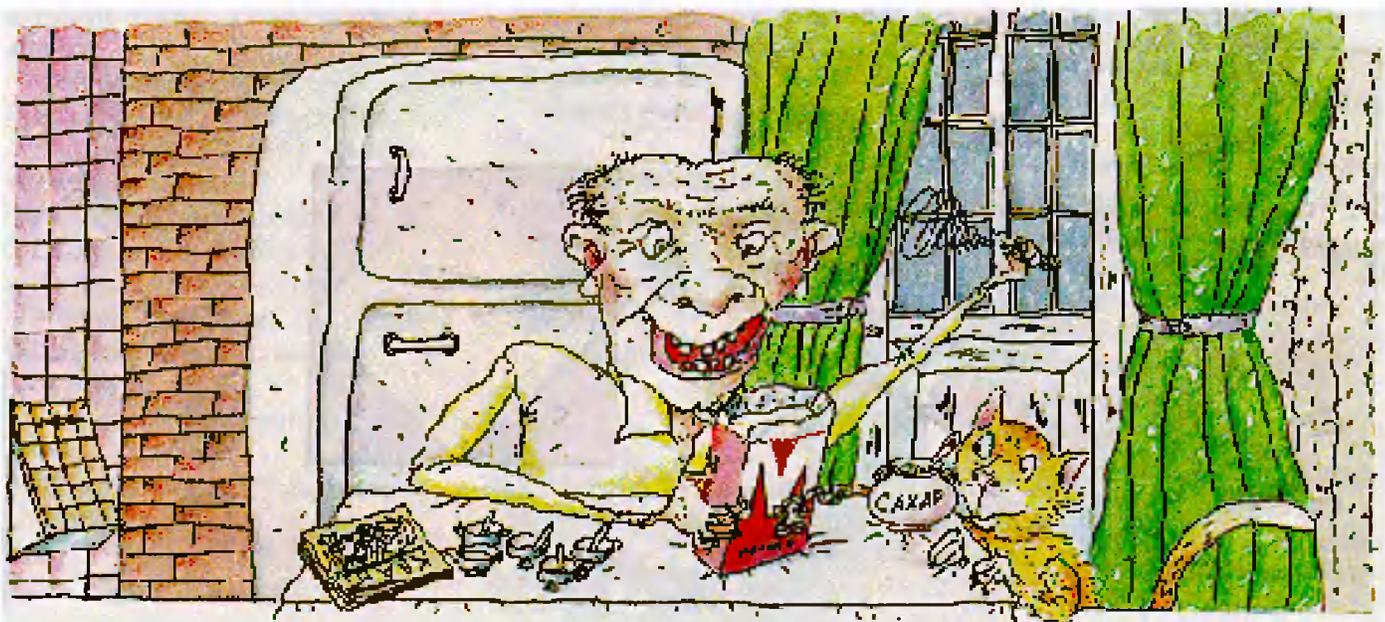
дисперсного вещества отличаются от свойств тех веществ, из которых такая масса образована. Это вы сможете и сами заметить, если попробуете мороженое и обычное заморозшее молоко — они будут сильно различаться по вкусу.

А можно ли приготовить мороженое дома? При определенном старании и терпении, конечно, можно.

Предлагаем простой рецепт изготовления мороженого в домашних условиях. Сначала приготовим молоко: для этого его нагреем и растворим в нем одну-две ложки сахарного песка. Подождем, пока молоко остынет, и поставим в холодильник — желательнее охладить до температуры, как можно более близкой к температуре застывания молока. Далее взобьем охлажденную массу, лучше миксером, и быстро поставим в морозильник для ускоренной заморозки. Заморзшая масса по вкусу будет напоминать молочное мороженое. (Для проведения настоящего физического эксперимента одновременно просто заморозьте подслащенное молоко и сравните вкус этих двух продуктов.) А если перед взбиванием молочной смеси в нее добавить желток куриного яйца, то получится мороженое-пломбир.

Внимание! Ни в коем случае не замораживайте молоко в стеклянной посуде — она может лопнуть. Надежнее использовать пластиковые или бумажные стаканы.

Кто захочет подробнее познакомиться с различными рецептами приготовления мороженого, загляните в кулинарные книги, лучше — в старинные.



Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Почему кувырывается книга?» предназначена девятиклассникам, заметка «Еще раз о магнитной силе» — десятиклассникам и «Пределы зоркости приборов» — одиннадцатиклассникам.

Почему кувырывается книга?

В. ЛАНГЕ

ДЛЯ НАЧАЛА ПРЕДЛАГАЕМ ВАМ провести такой нехитрый опыт. Возьмите в руки книгу, обвязав ее шнурком, чтобы не раскрывалась при движении, или прямоугольную картонную коробку. Если вы подбросите книгу (или коробку), сообщив ей одновременно вращательное движение вокруг короткого или длинного ребра, то во время подъема и падения ось вращения будет оставаться параллельной первоначальному направлению. Однако все попытки сохранить ось вращения неизменной у книги, подброшенной с вращением вокруг среднего ребра, окажутся тщетными — в этом случае книга во время движения будет беспорядочно кувыркаться.

Этот опыт всегда удается и неизменно вызывает интерес у зрителей. Можно даже поспорить со зрителями, что никому не удастся бросить книгу без кувыркания, и объявить приз (который так и останется невостребованным). А вот если вас заинтересует объяснение такого поведения книги, вам придется проявить терпение и внимание, знакомясь со следующим далее текстом.

Назовем оси вращения, сохраняющие в отсутствие внешних сил свое направление в пространстве, *свободными*. Возможность их существования вытекает из несложных, но несколько громоздких рассуждений. Пусть два точечных тела с массами m_1 и m_2 находятся на концах весьма легкого (чтобы не учитывать его массу) стержня, скрепленного в точке O с осью, способной вращаться в подшипниках Π_1 и Π_2 (см. рисунок). При вращении системы с угловой скоростью ω , с точки зрения наблюдателя во вращающейся системе координат, на концы стержня будут действовать *центро-*

бежные силы инерции, равные

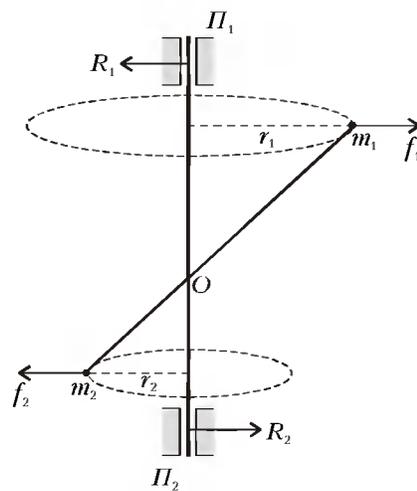
$$f_1 = m_1 \omega^2 r_1 \text{ и } f_2 = m_2 \omega^2 r_2.$$

Эти силы стремятся, во-первых, повернуть ось вращения в направлении, указанном стрелками, и, во-вторых, переместить систему в сторону большей по модулю силы. Разумеется, этому препятствуют подшипники, действующие на ось с силами \vec{R}_1 и \vec{R}_2 , уравновешивающими силы \vec{f}_1 и \vec{f}_2 .

Однако ось вращения не будет менять своего направления и без подшипников, если алгебраическая сумма моментов сил \vec{f}_1 и \vec{f}_2 относительно точки O окажется равной нулю и при этом будет равна нулю алгебраическая сумма самих этих сил. Первое условие реализуется, когда ось вращения перпендикулярна оси стержня, так как в этом случае плечи обеих сил относительно точки O равны нулю. Второе условие выполняется, если

$$m_1 \omega^2 r_1 = m_2 \omega^2 r_2, \text{ или } m_1 / m_2 = r_2 / r_1.$$

Стало быть, любая ось, проходящая



через центр масс системы двух точечных тел перпендикулярно соединяющему их невесомому стержню, окажется свободной.

Рассмотрим далее систему из шести масс m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 и m_6 , укрепленных на концах трех чрезвычайно легких стержней, которые пересекаются попарно под прямыми углами в такой точке O , что расстояния тел от нее удовлетворяют условиям

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad m_3 r_3 = m_4 r_4, \quad m_5 r_5 = m_6 r_6,$$

т.е. центр масс системы совпадает с точкой O . При вращении вокруг любого стержня алгебраическая сумма центростремительных сил инерции и их моментов будут равны нулю, так что эти оси являются свободными. А вот любая другая ось уже не будет свободной.

Можно показать, что в каждом теле существует *только три* взаимно перпендикулярные свободные оси, проходящие через центр масс тела. Их называют *главными осями инерции*. У однородного прямоугольного параллелепипеда (как наша книга или коробка) они проходят через центры противоположных граней.

Если тело приведено во вращение вокруг одной из главных осей и внешние воздействия отсутствуют, то направление оси вращения в пространстве должно оставаться неизменным. Однако закрутить тело абсолютно точно вокруг главной оси практически невозможно, к тому же неизбежные случайные толчки сразу же нарушают это движение. Поэтому длительное вращение вокруг свободной оси можно наблюдать только в том случае, когда при небольших отклонениях от этого движения появляются силы, возвращающие тело к вращению вокруг главной оси.

В отсутствие внешних сил устойчивым оказывается вращение лишь вокруг осей, которым соответствуют наибольшее или наименьшее значения момента инерции. Главная же ось, соответствующая промежуточному моменту инерции, является неустойчивой, поскольку при любом случайном отклонении от заданного вращения возникают силы, увеличивающие это отклонение. Именно это явление и наблюдается в опытах с кувыркающей книгой.

Если вращение не абсолютно свободно (существуют силы трения или оказывает влияние сила тяжести), то устойчивой обычно оказывается одна главная ось, которой соответствует наибольший момент инерции. Это мож-

но продемонстрировать, например, с помощью палочки, подвешенной на нити к оси центробежной машины: при постепенном увеличении скорости вращения наступает момент, когда палочка поднимается, переходя из вертикального положения (которому соответствует наименьший момент инерции) практически в горизонтальную

плоскость (т.е. вращается вокруг главной оси с наибольшим моментом инерции).

«Предпочтение», оказываемое вращающимся телом свободным осям с наибольшим моментом инерции, используется в технике. Чтобы нагрузки на подшипники были минимальными, нужно, как мы видели, возможно точ-

нее совместить ось вращения со свободной осью тела. Однако абсолютно точно сделать это нельзя. Поэтому в машинах с большой частотой вращения применяются гибкие, или самоцентрирующиеся, валы. В нормальном режиме они изгибаются так, чтобы вращение происходило как раз вокруг свободной оси.

Еще раз о магнитной силе

Е. РОМИШЕВСКИЙ

В СТАТЬЕ «ЭТА ЗАГАДОЧНАЯ МАГНИТНАЯ СИЛА» (см. «Квант» №3 за 1999 г.) говорилось о свойствах электромагнитной силы Лоренца. Здесь же мы обсудим, как взаимодействуют между собой ее электрическая и магнитная составляющие и какова природа магнитной силы Ампера, действующей на проводник с током в магнитном поле.

Рассмотрим сначала взаимодействие магнитной и электрической сил на примере поступательного движения проводящего бруска в однородном магнитном поле (рис.1). Пусть магнитное поле \vec{B} направлено перпендикулярно вектору постоянной скорости \vec{v} и плоской грани ad прямоугольного бруска со сторонами a , b , d . Будем считать, что брусок имеет форму «плоского конденсатора»: сторона d много меньше сторон a и b .

Как известно, в узлах жесткой кристаллической решетки металла расположены положительные ионы, а свободные электроны равномерно рас-

пределены по его объему. При движении бруска в магнитном поле на положительные заряды бруска e^+ и отрицательные заряды e^- действуют магнитные силы, равные по величине $F_m = evB$ и направленные в противоположные стороны. Под действием магнитной силы свободные электроны смещаются вниз и создают на верхней и нижней поверхностях бруска избыточные заряды с поверхностными плотностями σ^+ и σ^- . Это приводит к тому, что внутри бруска, как в плоском конденсаторе, возникает однородное электрическое кулоновское поле \vec{E}_\perp , вызывающее электрическую силу, которая компенсирует действие магнитной силы в объеме бруска. Магнитная сила как бы вызывает электрическую силу, чтобы себя уравновесить:

$$F_m = F_\perp, \quad evB = eE_\perp,$$

и

$$E_\perp = vB.$$

В результате такой «плоский конденсатор» оказывается заряженным до разности потенциалов

$$\Delta\phi = E_\perp d = vBd.$$

В целом брусок остается электрически нейтральным, электрические заряды возникают только на поверхностях бруска и в равных количествах ($\sigma^+ = -\sigma^-$).

При равномерном движении бруска в однородном магнитном поле полная сила, действующая на брусок, естественно, равна нулю. Однако при ускорении бруска, т.е. при увеличении скорости \vec{v} , или при вхождении в

область увеличивающегося магнитного поля \vec{B} брусок будет испытывать со стороны магнитного поля силу торможения. При этом будут, соответственно, увеличиваться и напряженность электрического поля \vec{E}_\perp , и поверхностные плотности зарядов σ^+ и σ^- .

Заметим, что равномерно движущийся в магнитном поле проводящий брусок представляет собой прообраз главного элемента самых мощных и самых распространенных источников электрической энергии, электродвижущая сила E которых определяется именно магнитной силой: $E = vBd$.

Пусть теперь наш металлический брусок abd неподвижен и имеет омическое сопротивление R . Подключим к его граням bd (рис.2) батарею с электродвижущей силой E_0 так, чтобы обеспечить в бруске постоянный ток $I = E_0/R$. Поскольку разность потенциалов между сечениями bd равна E_0 , в объеме бруска установится однородное электрическое поле \vec{E} , параллельное сторонам a . Под влиянием этого поля свободные электроны металла будут дрейфовать вправо со средней скоростью v_d , создавая электрический ток

$$I = \frac{E_0}{R} = nev_d bd = nev_d S,$$

где n – плотность свободных электронов, e – их заряд, а $S = bd$ – площадь сечения. Нужно отметить, что направление движения электронов со скоростью v_d противоположно направлению электрического поля \vec{E} и направлению электрического тока I . Положительно заряженные ионы, образу-

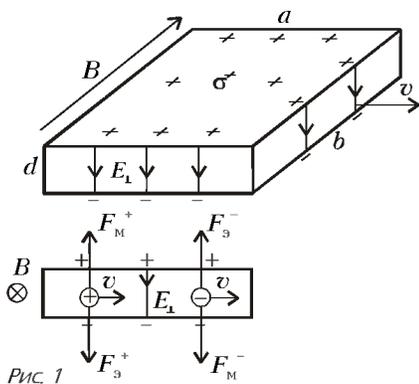


Рис. 1

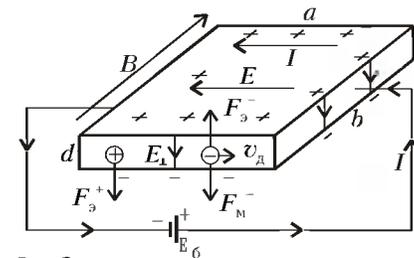


Рис. 2

щие жесткую кристаллическую решетку, естественно, при этом покоятся.

Если внешнее магнитное поле отсутствует, то единственным магнитным полем будет собственное магнитное поле \vec{B}_c , возникающее при движении свободных электронов, которым мы можем пренебречь. Теперь включим внешнее магнитное поле \vec{B} , точно такое же, как и в предыдущем случае. Под действием возникшей магнитной силы, равной $F_M = ev_d B$, движущиеся со скоростью v_d электроны будут отклоняться вниз и создавать избыток отрицательных зарядов на нижней поверхности бруска и положительных на его верхней поверхности. Так будет продолжаться до тех пор, пока не возникнет поперечное электрическое поле \vec{E}_\perp , направленное вниз и компенсирующее действие магнитной силы, — точно так же, как это было в случае равномерного движения бруска в однородном магнитном поле. Принципиальное отличие заключается в том, что при наличии электрического тока в движении участвуют только свободные электроны. В стац-

нарном состоянии, которое достигается очень быстро после включения внешнего магнитного поля, электроны в среднем снова движутся горизонтально вдоль сторон a , а внутри металлического бруска появляется поперечное электрическое поле $E_\perp = \sigma/\epsilon_0$, наблюдаемое в системе отсчета, связанной с кристаллической решеткой металла. Это поле своим действием уравновешивает магнитную силу, действующую на движущиеся электроны, и создает электрическую силу F_e^+ , направленную вниз и действующую на неподвижные положительные ионы (на кристаллическую решетку металла).

Вот таким образом магнитная сила, действующая на электроны, передается сплошному металлическому бруску. Величину этой воспринимаемой бруском силы можно записать так:

на один положительный ион действует сила, равная

$$F_\perp = eE_\perp = ev_d B,$$

на все же ионы бруска, а их $N = nabd$, где n — число ионов в единице объема (равное плотности свободных

электронов), будет действовать сила, равная

$$F_N = ev_d B \cdot nabd = nev_d bd \cdot B \cdot a = I Ba.$$

Как и следовало ожидать, эта сила в точности равна сумме всех сил Лоренца, действующих со стороны магнитного поля на движущиеся электроны. Силу, действующую на проводник длиной a , по которому течет ток I и который помещен в однородное магнитное поле B , называют силой Ампера. А физическое явление возникновения разности потенциалов между поверхностями проводника (нашего бруска), когда по нему течет электрический ток и проводник находится в магнитном поле, называется *эффектом Холла*. Эту разность потенциалов

$$\Delta\varphi = E_\perp d = v_d B d = \frac{1}{neS} IBd$$

можно измерить непосредственно с помощью вольтметра. Заметим, что эффект Холла был открыт в 1879 году, за много лет до открытия электрона Томсоном (1897 г.).

Пределы зоркости приборов

А. СТАСЕНКО

«МИСТЕР ЛУНД ПОДОШЕЛ К ТЕЛЕСКОПУ и начал смотреть на луну...

— А не видите ли вы бледных пятен, движущихся возле луны?..

— Черт возьми, сэр! Называйте меня ослом, если я не вижу этих пятен! Что это за пятна?

— Это пятна, которые видны в один только мой телескоп. Довольно! Оставьте телескоп!

...Через полчаса мистер Вильям Болваниус, Джон Лунд и шотландец Том Бекас летели уже к таинственным пятнам на восемнадцати аэростатах.

...Кто из читателей вспыхивает желанием ближе познакомиться с мистером Вильямом Болваниусом, тот пусть прочтет его замечательное сочинение «Существовала ли луна до потопа? Если существовала, то почему же и

она не утонула?»... Между прочим, там описывается, как он прожил два года в австралийских камышах, где питался раками, тинной, яйцами крокодилов и ... изобрел микроскоп, совер-

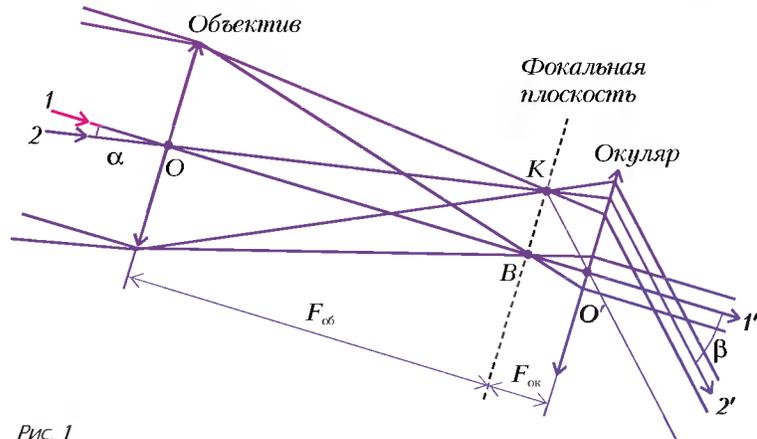


Рис 1

шенно сходный с нашим обыкновенным микроскопом...» (А.Чехов. «Летающие острова»).

Действительно, среди многочисленных приборов, изобретенных физиками, широкую известность получили телескоп и микроскоп. Один из них устремлен в глубины Вселенной, другой позволяет рассматривать всякую мелочь буквально «под носом». Обсудим вкратце, как они работают.

С точки зрения геометрической оптики, с *телескопом* все просто. Есть две соосные линзы с фокусными расстояниями $F_{об}$ у объектива и $F_{ок}$ у окуляра (рис.1). Лучи, идущие от каждой из двух рассматриваемых звезд —

направления 1 и 2, – почти параллельны и, по определению фокусного расстояния, после объектива они должны собраться в двух точках B и K , лежащих в фокальной плоскости объектива. Но в телескопической системе это одновременно и фокальная плоскость окуляра, поэтому, пройдя через окуляр, лучи должны выйти тоже двумя параллельными пучками с осями 1' и 2'. Угол между входящими лучами 1 и 2 (направлениями на две звезды) обозначим через α , а угол между выходящими лучами – через β . Легко видеть, в чем «фокус» такой телескопической системы. Из прямоугольных треугольников OBK и $O'BK$ видно, что их общий катет равен

$$BK = F_{об} \operatorname{tg} \alpha = F_{ок} \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{F_{об}}{F_{ок}} \approx \frac{\beta}{\alpha} \quad (1)$$

(последнее приближенное равенство записано для случая малых углов, который обычно и реализуется на практике).

Полученное соотношение открывает, казалось бы, неограниченные возможности для увеличения телескопа: нужно брать как можно более длиннофокусный объектив (вот почему оптические телескопы-рефракторы такие длинные) и как можно более короткофокусный окуляр. Но тут вмешивается еще один характерный размер – длина волны λ . Как же иначе? Ведь свет – это электромагнитные волны в диапазоне $0,4 \text{ мкм} \lesssim \lambda \lesssim 0,8 \text{ мкм}$. А любая волна, проходя около препятствия, дифрагирует. Более того, любой участок *первичной волны* (например, в плоскости объектива), согласно принципу Гюйгенса–Френеля, можно считать источником *вторичных* волн, которые затем интерферируют друг с другом всюду, где встретятся, например – в фокальной плоскости объектива.

Проведем при помощи этого принципа приближенное рассмотрение дифракции света (от одной звезды) на объективе телескопа. Разобьем объектив условно на две половины (рис. 2, а) и будем считать, что обе они являются источниками вторичных волн. Если принять расстояние между точками C и C' равным половине диаметра D объектива, то разность хода волн, пришедших от них в точку M , будет приблизительно равна (см. выделенный треугольник на рисунке 2, б)

$$\Delta = \frac{D}{2} \sin \theta.$$

И результат их интерференции будет определяться значением этой разности. Например, в точке B (да и на всей оптической оси OB) имеем $\theta = 0$ и $\Delta = 0$; значит, эти две волны будут усиливать друг друга, так что в фокусе объектива (если туда поставить пластинку, перпендикулярную оптической оси) будет светлое пятно.

Можно уточнить этот результат, считая, что точки C и C' соответствуют центрам тяжести каждой из половин объектива. Нетрудно показать (например, сделав полукруг из картона и уравновесив его на лезвии ножа) или посмотреть в справочнике, что центр масс полукруга находится на высоте $y_C = \frac{4D}{3\pi}$ над его диаметром. Значит, разность хода Δ двух сферических волн, исходящих из точек C и C' под углом θ к оптической оси, будет равна

$$\Delta = 2y_C \sin \theta = \frac{8D}{3\pi} \sin \theta. \quad (2)$$

Будем теперь перемещать вверх (или вниз) точку наблюдения в фокальной плоскости. Тогда угол θ будет расти, а вместе с ним будет расти разность хода Δ . Очень важно найти, при каком значении угла $\theta_{1\min}$ эта разность хода станет равной $\Delta_{1\min} = \frac{\lambda}{2}$, так что

волны погасят друг друга. Из выражения (2) имеем

$$\sin \theta_{1\min} = \frac{3\pi}{8} \frac{\lambda}{D} = 1,18 \frac{\lambda}{D} \approx \theta_{1\min}.$$

Конечно, принцип Гюйгенса–Френеля предписывает складывать элементарные возмущения от малых площадок первичной волны (т.е. интегрировать). При этом нам пришлось бы иметь дело с так называемыми функциями Бесселя, которые в случае осевой симметрии являются аналогами «обычных» синусов и косинусов, характерных для одномерных задач (например, струны гитары). И тогда получился бы более точный результат:

$$\sin \theta_{1\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (3)$$

Видно, что наше грубое рассмотрение всего лишь на четыре процента отличается от более точного – не так уж и плохо. Но почему для нас так важен этот угол? Потому что он дает радиус первого темного кольца $BM = F_{об} \cdot \theta_{1\min}$, окружающего светлое пятнышко – изображение звезды в фокальной плоскости объектива. Получается, что это вовсе не точка, как утверждает геометрическая оптика. Значит, вторая звезда с угловым расстоянием α от оптической оси тоже даст светлое пятнышко в фокальной плоскости, и теперь все дело в том, насколько далеко оно окажется от изображения первой звезды. Великий Рэлей предложил простой критерий: должно быть

$$\alpha \gtrsim \theta_{1\min}, \quad (4)$$

иначе изображения двух звезд наложатся друг на друга уже в фокальной плоскости объектива и далее никакими ухищрениями их не разделить.

Но оторвемся от звезд и заглянем в *микроскоп*. Обычное построение изображений предмета в объективе и окуляре (в приближении тонких линз) дано на рисунке 3. Тут существенно,

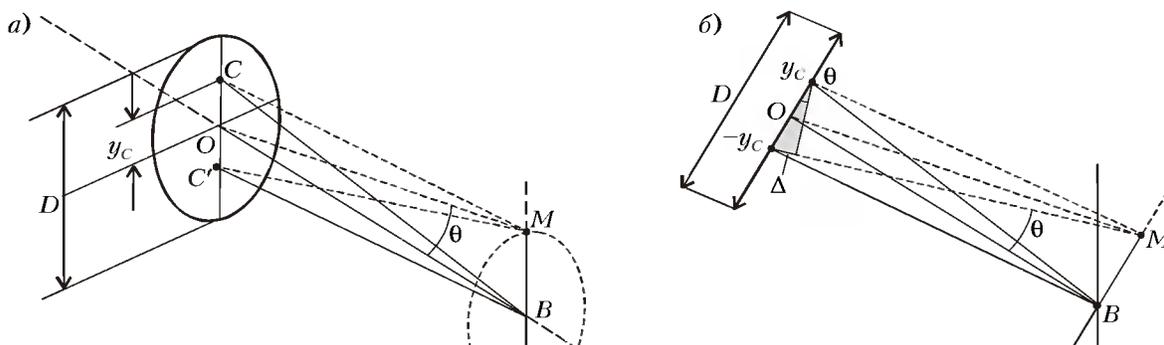


Рис. 2

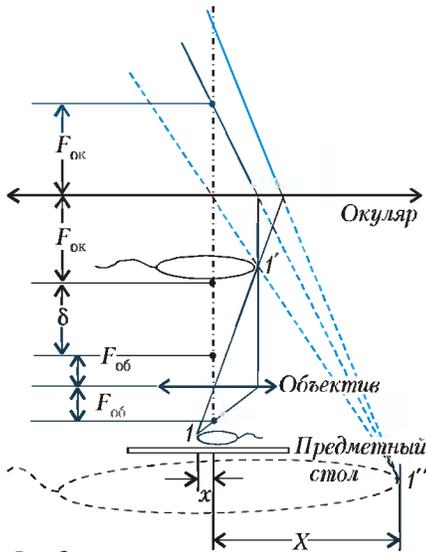


Рис. 3

чтобы предмет находился за фокусом объектива – тогда изображение $1'$ будет действительным, а это изображение чтобы находилось между окуляром и его фокусом – тогда окончательное изображение $1''$ будет мнимым.

Геометрическая оптика дает для увеличения микроскопа следующее выражение (см. рис.3):

$$\frac{X}{x} = \frac{D_0 \delta}{F_{ок} F_{об}}$$

где δ – расстояние между фокусами объектива и окуляра, D_0 – так называемое расстояние наилучшего зрения. Увеличение микроскопа может быть значительным. Например, для характерных значений $F_{об} = 2$ мм, $F_{ок} = 15$ мм, $\delta = 160$ мм и $D_0 = 250$ мм получим $X/x = 1335$.

Казалось бы, это не предел – надо лишь делать линзы все более совершенными геометрически (шлифовать), устранять их недостатки (апланатизм, астигматизм, хроматическую и сферическую абберации, дисторсию...) и все

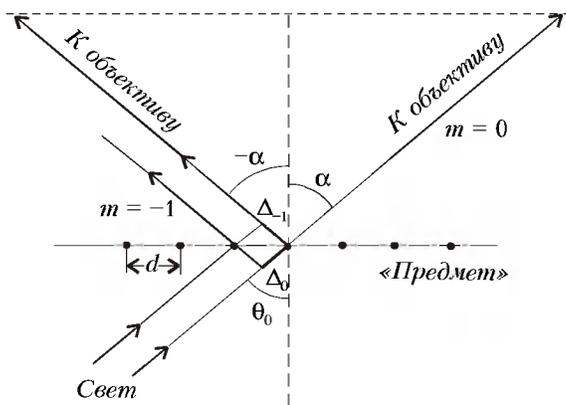


Рис. 4

будет в порядке. Но и тут вмешалась все та же λ !

Теорию разрешающей способности микроскопа разработал Аббе (о нем совсем недавно рассказывалось в «Кванте» – см. №1 за 2000 г.). Он предложил рассмотреть в микроскоп дифракционную решетку (рис.4). Какую минимальную информацию можно получить об этой решетке? Конечно, прежде всего можно узнать ее период d .

Как известно, при прохождении через решетку света с длиной волны λ должен получиться набор дифракционных максимумов. Если свет падает на решетку под углом θ_0 , то направление на эти максимумы определяется условием

$$\Delta_m - \Delta_0 = d \sin \theta_{m \max} - d \sin \theta_0 = m\lambda \quad (5)$$

Чтобы микроскоп дал информацию о периоде d , в его объектив должны прийти по крайней мере два луча, соответствующих двум соседним максимумам дифракционной картины, например $m = 0$ и $m = -1$. Именно такой предельный случай $\alpha = \theta_0$ и $-\alpha = \theta_{-1 \max}$ изображен на рисунке 4. Заметим, что период решетки d , который мы стремимся рассмотреть, конечно, очень мал – порядка микрометров. В этом масштабе объектив микроскопа и его фокусное расстояние (порядка миллиметров) таковы, что сам объектив нужно было бы изобразить далеко за пределами рисунка (порядка метров); поэтому он показан штриховой линией лишь условно (а идущие к нему от узлов решетки лучи почти параллельны).

Итак, из условия (5) получим $2d \sin \alpha = \lambda$ (α называется апертурным углом). Значит, при заданной длине волны подсветки наименьший период решетки, который можно «рассмотреть» в микроскоп, равен $d_{\min} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$. Можно еще облег-

чить дело: если между решеткой и объективом поместить среду с коэффициентом преломления n (например, капнуть какую-либо жидкость), то увеличится *оптическая разность хода* (ведь в этой среде скорость света и длина волны станут в n раз меньше). В результате получим

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2n \sin \alpha} \quad (6)$$

Теперь сравним разрешающие способности телескопа и микроскопа. Получается, что мы выдвигаем прямо противоположные требования:

$$\text{для телескопа } \frac{\lambda}{D} \approx \alpha_{\min} \text{ желательно}$$

делать как можно меньше;

$$\text{для микроскопа } \frac{\lambda}{d} \approx 2n \sin \alpha \text{ желательно}$$

делать как можно больше.

Отсюда понятно стремление строить телескопы с возможно большим диаметром входного «зрачка», а микроскопы – с возможно меньшим фокусным расстоянием объектива (чтобы $\sin \alpha$ был как можно ближе к единице) и при этом пространство между объективом и предметом наблюдения следует заполнить жидкостью с возможно большим показателем преломления n (так называемая *иммерсионная техника*).

Что же достигнуто человечеством?

Самый большой диаметр объектива оптического телескопа $D \sim 6$ м. Для «средней» длины волны света $\lambda \sim 0,6$ мкм из выражений (3) и (4) будем иметь $\alpha_{\min} \sim 10^{-7}$. Принимая радиус Вселенной $R \sim 10^{26}$ м, для двух разрешимых точек на ее «границе» получим

$$l_{\min} \sim R \alpha_{\min} \sim 10^{19} \text{ м.}$$

В случае микроскопа положим $\sin \alpha \leq 1$, $n \approx 1,6$ (коэффициент преломления анилина). Тогда из равенства (6) найдем

$$d_{\min} \geq \frac{\lambda}{4} \sim 0,1 \text{ мкм} = 10^{-7} \text{ м.}$$

Таковы характерные пределы возможностей этих замечательных оптических приборов.

Возвращающая сила и частота колебаний системы

П. ХАДЖИ, Л. ГЛАЗОВА, В. ЛИЧМАН

КАК ИЗВЕСТНО, СОБСТВЕННЫЕ частоты колебаний различных колебательных систем можно вычислять с помощью закона сохранения энергии. Но это не единственный метод, приводящий к успеху. В ряде случаев более приемлемым может оказаться другой метод – с использованием возвращающей силы, действующей на колебательную систему. Идея здесь состоит в следующем.

Простейшие гармонические колебания совершаются под действием упругой силы, т.е. силы, величина которой пропорциональна смещению x из положения равновесия: $F = kx$, где k – так называемый коэффициент упругости (жесткость) системы, и направлена в сторону, противоположную направлению смещения. Однако часто, рассматривая малые колебания более сложных систем, тоже удается представить возвращающую силу в виде $F = kx$, т.е. пропорциональной смещению из положения равновесия и имеющей вид квазиупругой силы с коэффициентом k , величина которого зависит от параметров системы. Зная коэффициент k и массу m колеблющегося тела, легко найти частоту ω собственных колебаний системы, пользуясь хорошо известной формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Колебания заряженного шарика вдоль вертикальной направляющей

Пусть вдоль непроводящей вертикальной направляющей может двигаться без трения маленький (точечный) шарик массой m , несущий заряд q . В нижнем конце направляющей неподвижно закреплен второй шарик, имеющий заряд Q (рис.1). Определим

частоту малых колебаний первого шарика вдоль направляющей.

Случай, когда заряды q и Q являются разноименными, не представляет

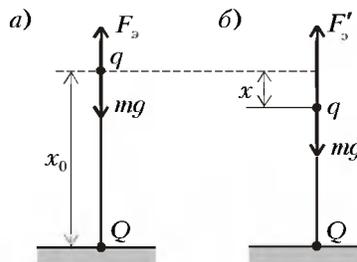


Рис. 1

интереса, поэтому будем считать заряды одноименными. На подвижный шарик действует сила тяжести mg , направленная вниз, и сила электростатического взаимодействия F_3 со стороны нижнего шарика, направленная вертикально вверх (см. рис.1,а). Видимо, под действием этих сил шарик может находиться в равновесии. Условие равновесия имеет вид

$$F_3 = mg.$$

Найдем положение равновесия подвижного шарика, отсчитывая расстояние x_0 от нижнего шарика. В соответствии с законом Кулона сила электростатического отталкивания равна

$$F_3 = qQ / (4\pi\epsilon_0 x_0^2).$$

Тогда из условия равновесия получаем

$$x_0 = \sqrt{qQ / (4\pi\epsilon_0 mg)}.$$

Как видно, x_0 тем больше, чем больше величины зарядов Q и q и чем меньше масса подвижного шарика m .

Легко показать, что это равновесие является устойчивым. В самом деле, при смещении шарика вниз сила электростатического отталкивания возрас-

тает, так как уменьшается расстояние между шариками, а сила тяжести не изменяется. Поэтому возникает возвращающая сила, направленная вверх, т.е. против смещения. Если же шарик сместить вверх, то сила отталкивания уменьшается, поэтому возникает возвращающая сила, направленная вниз.

Таким образом, шарик, выведенный из положения равновесия и предоставленный самому себе, будет совершать колебания относительно положения равновесия. Определим частоту ω этих колебаний, считая их малыми. Критерием малости колебаний является малость смещения x относительно положения равновесия по сравнению с характерной длиной в системе, какой является расстояние x_0 :

$$x \ll x_0.$$

Сместим подвижный шарик, например вниз, на расстояние x (см. рис.1,б). В этом случае на него действует сила отталкивания F'_3 , которая по величине больше F_3 , и неизменная сила тяжести mg , поэтому возвращающая сила, равная разности сил отталкивания и тяжести, будет равна

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(x_0 - x)^2} - mg.$$

Приводя к общему знаменателю и расписывая в числителе квадрат разности, получаем

$$F = \frac{qQ / (4\pi\epsilon_0) - mg(x_0^2 - 2x_0x + x^2)}{(x_0 - x)^2}.$$

Первые два члена в числителе дают в сумме точный ноль, а четвертым слагаемым можно пренебречь по сравнению с третьим. Кроме того, в знаменателе можно пренебречь x по сравнению с x_0 . Тогда остается

$$F = \frac{2mg}{x_0} \cdot x.$$

Выражение для возвращающей силы F имеет такой же вид, что и выражение для упругой силы, где роль коэффициента «упругости» играет величина

$$k = \frac{2mg}{x_0} = 4mg \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mg}{qQ}}.$$

Используя формулу для частоты малых колебаний, находим

$$\omega = 2 \sqrt{g \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mg}{qQ}}}.$$

Частота колебаний заряженного ша-

рика тем меньше, чем больше величины зарядов и чем меньше масса шарика.

Колебания заряженного шарика в поле двух других точечных зарядов

Рассмотрим два маленьких шарика с зарядами q_1 и q_2 , закрепленные в точках A и B на расстоянии l друг от друга (рис.2). Вдоль направляющей, соединяющей оба шарика, может двигаться без трения третий шарик массой

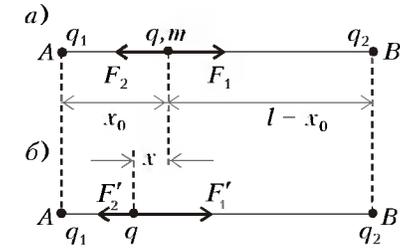


Рис. 2

m и зарядом q . Предполагая все заряды одноименными, определим частоту колебаний среднего шарика.

Так как все заряды одноименные, на средний (подвижный) шарик будут действовать силы отталкивания \vec{F}_1 и \vec{F}_2 со стороны зарядов q_1 и q_2 соответственно, направленные в противоположные стороны (см. рис.2,а). По видимому, в этом случае возможно такое расположение среднего шарика, когда обе силы равны по величине и компенсируют друг друга. Точка, в которой при этом располагается средний шарик, и будет положением равновесия.

Выясним, является ли это равновесие устойчивым. Для этого будем смещать шарик относительно положения равновесия вправо или влево. При небольшом смещении влево (см. рис.2,б) сила отталкивания \vec{F}'_1 со стороны заряда q_1 возрастает, так как расстояние между зарядами q_1 и q уменьшается, а сила отталкивания \vec{F}'_2 со стороны заряда q_2 уменьшается, поэтому возникает действующая на средний шарик разность сил, направленная к положению равновесия. Если отпустить шарик, то он начнет перемещаться в направлении положения равновесия. Аналогичная ситуация возникает и при смещении шарика вправо.

Таким образом, можно утверждать, что при продольных смещениях шарика относительно положения равновесия всегда возникает возвращающая сила, направленная в сторону, противоположную смещению. Если шарик

предоставить самому себе, то он будет совершать колебания вдоль направляющей. Определим положение равновесия x_0 , отсчитывая его от точки A . Используя выражение для закона Кулона, запишем условие равновесия

$$\frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 x_0^2} = \frac{qq_2}{4\pi\epsilon_0 (l - x_0)^2},$$

откуда найдем

$$x_0 = \frac{l}{(1 + \sqrt{q_2/q_1})}.$$

Видно, что расстояние x_0 от точки A до положения равновесия подвижного шарика пропорционально расстоянию l между двумя крайними (закрепленными) шариками и зависит только от отношения величин зарядов q_2/q_1 этих шариков.

Найдем теперь частоту малых колебаний среднего шарика. Под малыми будем понимать такие колебания, при которых смещение из положения равновесия намного меньше характерного расстояния в системе. В качестве такого здесь следует принять x_0 либо $l - x_0$ (меньшее из них). Таким образом, критерий малости колебаний имеет вид

$$x \ll x_0, l - x_0.$$

Предположим, что подвижный шарик сместился влево на расстояние x от положения равновесия (см. рис.2,б). Тогда силы отталкивания со стороны зарядов q_1 и q_2 будут равны соответственно

$$F'_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{(x_0 - x)^2}$$

и

$$F'_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_2}{(l - x_0 + x)^2},$$

а возвращающая сила, равная их разности и направленная к положению равновесия, будет равна

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{(x_0 - x)^2} - \frac{q_2}{(l - x_0 + x)^2} \right).$$

Из этого выражения явно не видно, что возвращающая сила имеет квазиупругий характер, тем не менее при малых значениях отклонения x (в рамках критерия малости) она действительно является квазиупругой. Для того чтобы это показать, приведем выражение для F к общему знаменателю, распишем подробнее выражение в числителе, воспользуемся условием равновесия и критерием малости коле-

баний. В результате получим

$$F = \frac{q(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^4}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{q_1 q_2} l^3} \cdot x.$$

Эта формула уже похожа на выражение для квазиупругой силы. Коэффициент пропорциональности перед x выполняет роль коэффициента «упругости» k . Тогда для частоты малых колебаний находим

$$\omega = \frac{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}{l} \sqrt{\frac{q}{2\pi\epsilon_0 m l \sqrt{q_1 q_2}}}.$$

Частота колебаний симметрично, но сложным образом, зависит от величин зарядов q_1 и q_2 .

Колебания шара в жидкости

Определим частоту малых вертикальных колебаний шара, погруженного в жидкость (рис.3), пренебрегая сопротивлением жидкости и присоединенной массой.

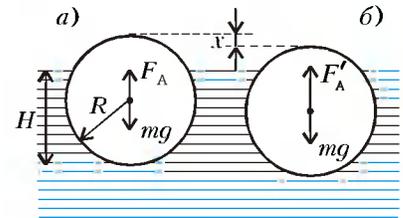


Рис. 3

В положении равновесия на шар действуют две силы: сила тяжести mg и выталкивающая, или архимедова, сила \vec{F}_A со стороны жидкости (см. рис.3,а). Они равны по величине и противоположны по направлению. В проекции на вертикальную ось условие равновесия выражается формулой

$$mg = F_A.$$

Поскольку

$$m = 4/3 \pi \rho R^3$$

и

$$F_A = \pi \rho_1 g H^2 (3R - H)/3,$$

где ρ – плотность шара и ρ_1 – плотность жидкости, получаем

$$4\rho R^3 = \rho_1 H^2 (3R - H).$$

Отсюда при заданных R и H можно определить отношение плотностей ρ/ρ_1 .

Выведем шар из положения равновесия, дополнительно погрузив его в жидкость на глубину x (см. рис.3,б). В этом случае выталкивающая сила увеличивается по сравнению с равновесной, за счет чего возникает

возвращающая сила, равная

$$F = F'_A - mg.$$

Так как полная глубина погружения шарового сегмента теперь равна $H + x$, то

$$F'_A = \pi \rho_1 (H + x)^2 (3R - H - x) / 3,$$

и

$$F = \pi \rho_1 g x (H(2R - H) + (R - H)x - 1/3 x^2).$$

Критерием малости колебаний здесь является неравенство $x \ll H$. Тогда вторым и третьим слагаемыми можно пренебречь в силу их малости, и для возвращающей силы получаем

$$F = \pi \rho_1 g H (2R - H) \cdot x.$$

Следовательно, возвращающая сила пропорциональна смещению из положения равновесия x и, как отмечалось, направлена в сторону, противоположную этому смещению.¹ Под действием этой силы шар совершает колебательное движение: то погружаясь, то всплывая. Коэффициент перед x играет роль коэффициента «упругости» k , поэтому частота колебаний шара в жидкости будет равна

$$\omega = \sqrt{3 \frac{2R - H}{3R - H} \frac{g}{H}}.$$

Частота колебаний полностью определяется радиусом шара и глубиной его погружения в условиях равновесия.

В принципе можно выразить частоту колебаний и через отношение плотностей ρ и ρ_1 .

¹ Легко увидеть, что возвращающая сила равна $\rho_1 g S x$, где $S = \pi H(2R - H)$ — площадь сечения шара поверхностью жидкости (в положении равновесия). Именно на столько изменяется вес вытесненной жидкости при дополнительной погружении шара на малую глубину x . (Прим. ред.)

Комбинированный маятник

Представим себе жесткий невесомый стержень длиной L , к нижнему концу которого подвешено точечное тело массой m , а на расстоянии l от оси вращения к стержню прикреплен пружинка

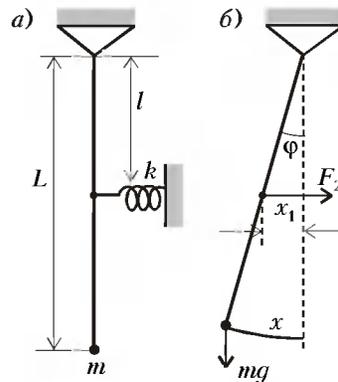


Рис. 4

с коэффициентом упругости k , которая в положении равновесия маятника не деформирована (рис. 4). Определим частоту малых колебаний такого маятника.

В положении равновесия стержень маятника располагается вдоль вертикали (см. рис. 4, а). Отклоним стержень относительно вертикали на небольшой угол φ , такой, что $\varphi \ll 1$ (критерий малых колебаний). В этом положении на грузик маятника действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, а на стержень в точке крепления пружинки действует сила упругости, равная $F_2 = kx_1$, где $x_1 = \varphi l$ — линейное смещение этой точки стержня относительно положения равновесия. При малых углах отклонения сила \vec{F}_2 направлена практически горизонтально. Возвращающая сила, действующая непосредственно на грузик, направлена по касательной к его траектории

движения (окружности) и определяется выражением

$$F_1 = mg \sin \varphi \approx mg\varphi = mgx/L,$$

где x — смещение грузика вдоль дуги окружности. Из рисунка 4, б видно, что $x_1/x = l/L$.

Поскольку силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 приложены к разным точкам системы, ясно, что ни одна из них не является результирующей возвращающей силой. Чтобы определить эту силу, поступим следующим образом. Найдем полный момент сил M , действующий на систему и возвращающий ее в положение равновесия:

$$M = F_1 L + F_2 l = (mgx/L)L + (klx/L)l.$$

Считая теперь, что этот момент сил действует непосредственно на колеблющийся грузик маятника, найдем результирующую возвращающую силу F , деля момент сил M на плечо этой силы L :

$$F = \left(\frac{mg}{L} + \frac{kl^2}{L^2} \right) \cdot x.$$

Роль коэффициента упругости здесь играет весь множитель в скобках перед x , поэтому для частоты колебаний находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k l^2}{m L^2}}.$$

Видно, что частота колебаний комбинированного маятника определяется как геометрией маятника, т.е. длинами L и l , так и массой грузика m . Если положить $k = 0$ (пружинка отсутствует) либо $l = 0$ (пружинка прикреплена к оси маятника и не действует на стержень), то получаем известное выражение для частоты колебаний математического маятника $\omega = \sqrt{g/L}$.

Поляры и теорема Паппа

Г.БАГДАСАРЯН

От редакции. Студент Ереванского университета Григорий Багдасарян, призер международных математических олимпиад 1996 и 1997 годов, самостоятельно придумал любопытное геометрическое преобразование. Он не успел узнать, что оно известно науке под названием полярного преобразования, — погиб в озере Севан, спасая тонувшего брата.

Для удобства читателей оригинальная терминология автора приведена в соответствии с общепринятой.

Для решения многих задач полезны параллельные переносы, повороты, осевые симметрии и другие геометрические преобразования. Они переводят точки в точки. Но иногда оказывается полезным преобразование, переводящее точки в прямые, а прямые — в точки.

Чтобы перейти к точным формулировкам, зафиксируем на плоскости окружность ω с центром O и радиусом r . Полярной точки A , где $A \neq O$, назовем прямую, перпендикулярную прямой AO и проходящую на расстоянии r^2/OA от точки O .

Полярной прямой l , не проходящей через точку O , будем называть такую точку A , полярной которой является прямая l . (Другими словами, $OA \perp l$ и $OA = r^2/d$, где d — расстояние от точки O до прямой l .)

Например, полярной точки, лежащей на окружности ω , является проходящая через эту точку касательная.¹

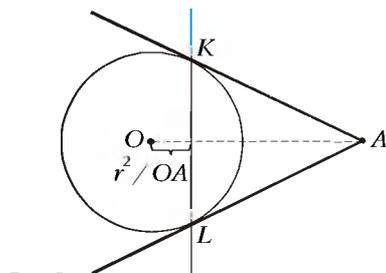


Рис. 1

¹Для доказательства достаточно заметить, что $r^2/r = r$ и касательная перпендикулярна радиусу.

Столь же легко убедиться, что если $OA < r$, т.е. $r^2/OA > r$, то полярная точка, лежащая внутри окружности ω , не пересекает ω .

Если $OA > r$, то полярная точка A пересекает окружность ω в некоторых двух точках K и L (рис. 1). Оказывается, прямые AK и AL — касательные к окружности! Это легко доказать непосредственно, но мы выведем это утверждение из еще более важного свойства полярного преобразования:

если точка B лежит на поляре точки A , то и точка A лежит на поляре точки B .

Действительно, по определению, полярная точка A перпендикулярна лучу OA и проходит через такую точку A' этого луча, что $OA' = r^2/OA$ (рис.2).

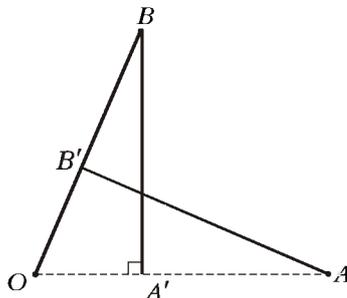


Рис. 2

Рассмотрим такую точку B' луча OB , для которой $OB' = r^2/OB$. Соединим B' и A отрезком.

Поскольку

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{r^2/OB}{r^2/OA} = \frac{OA}{OB}$$

и поскольку угол O треугольников $OB'A$ и $OA'B$ общий, то эти два треугольника подобны. Соответственные углы подобных треугольников равны:

$$\angle OA'B = \angle OB'A = 90^\circ,$$

что и требовалось.

Как вы помните, мы обещали доказать, что прямые AK и AL (см. рис. 1) касаются окружности ω . Это теперь легко сделать: поскольку точка K ле-

жит на поляре точки A , то точка A лежит на поляре точки K , а эта полярная как раз и является касательной к окружности.²

Теорема Паппа

Рассмотрим вписанный в окружность шестиугольник $AB_1CA_1BC_1$ (рис.3). Пусть продолжения его противоположных сторон AB_1 и A_1B пересекаются в точке M , продолжения сторон AC_1 и A_1C — в точке L , а продолжения BC_1 и B_1C — в точке K . Известная

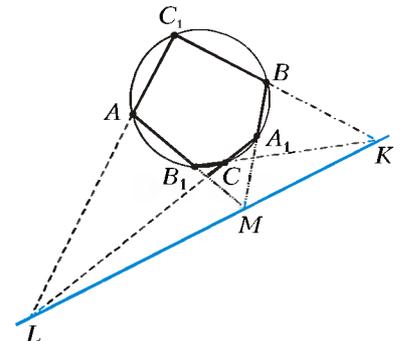


Рис. 3

теорема Паскаля гласит: точки K, L, M лежат на одной прямой.

Утверждение теоремы Паскаля верно и для самопересекающихся шестиугольников (рис.4), а также для шестиугольников, вписанных в эллипс и гиперболу. Оно верно даже для шести-

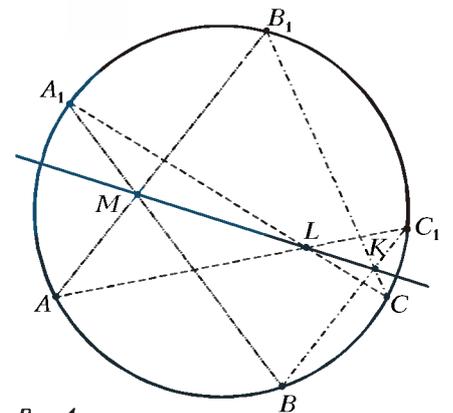


Рис. 4

угольников, «вписанных в две прямые». Мы не будем доказывать теорему Паскаля и сформулировали ее здесь лишь для того, чтобы менее неожиданной стала формулировка теоремы Паппа, которая наряду с теоремой Паскаля является одной из важнейших теорем проективной геометрии.

Теорема Паппа. Пусть точки A, B, C лежат на одной стороне угла, а

²Для точки L рассуждение аналогично.

точки A_1, B_1, C_1 – на другой (рис. 5). Если прямые AB_1 и A_1B пересекаются в точке M , AC_1 и A_1C – в точке L , а BC_1 и B_1C – в точке K ,

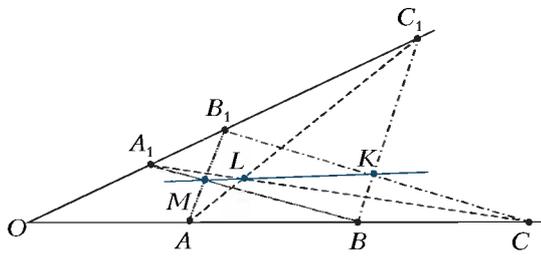


Рис. 5

то точки K, L, M лежат на одной прямой.³

Доказательство. Выполним полярное преобразование относительно окружности, центр которой – вершина O угла. Поляры a, b и c точек A, B и C перпендикулярны одной и той же стороне угла и потому параллельны между собой (рис. 6). Аналогично, параллельны поляры a_1, b_1 и c_1 точек A_1, B_1 и C_1 .

Поскольку точка M принадлежит прямой AB_1 , то поляра точки M проходит через поляру прямой AB_1 , т. е. через точку Z_1 пересечения прямых a и b_1 . Аналогично, M принадлежит прямой A_1B , и, значит, поляра ее проходит через поляру прямой A_1B – точку Z_2 пересечения прямых a_1 и b .

Итак, поляра точки M – это прямая Z_1Z_2 . Аналогично, поляры точек L и K – прямые Y_1Y_2 и X_1X_2 , где $Y_1 = a \cap c_1, Y_2 = a_1 \cap c, X_1 = b \cap c_1$ и $X_2 = b_1 \cap c$.

Давайте докажем, что поляры точек K, L и M – прямые X_1X_2, Y_1Y_2 и Z_1Z_2 – пересекаются в одной точке или параллельны. Этого достаточно для доказательства теоремы Паппа: если три прямые пересекаются в некоторой точке, то поляра их точки пересечения проходит через все три точки K, L, M ; если же прямые X_1X_2, Y_1Y_2 и Z_1Z_2 параллельны, то точки K, L и M лежат на перпендикуляре, проведенном к этим прямым из точки O .

Предположим для начала, что прямые X_1X_2 и Y_1Y_2 пересекаются в некоторой точке P , а прямые Y_1Y_2 и Z_1Z_2 – в точке P^* (возможно, отличной от P ; цель дальнейших вычислений – доказать, что $P = P^*$). Тогда, обозначив $W = c \cap c_1, X_3 = a \cap X_1X_2$ и обозначив расстояния между прямыми a и b че-

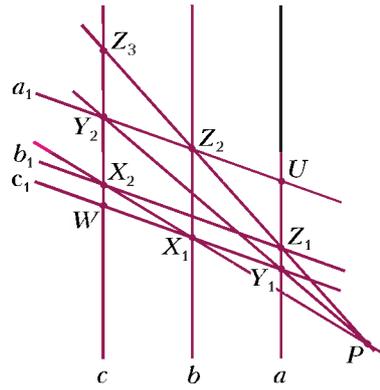


Рис. 6

рез h , а расстояние между прямыми b и c через H , из подобия треугольников PX_2Y_2 и PX_3Y_1 имеем

$$\frac{PY_2}{PY_1} = \frac{X_2Y_2}{X_3Y_1},$$

а из подобия треугольников $X_3X_1Y_1$ и X_2X_1W имеем

$$\frac{X_3Y_1}{h} = \frac{X_2W}{H}.$$

Следовательно,

$$\frac{PY_2}{PY_1} = \frac{X_2Y_2}{X_3Y_1} = \frac{X_2Y_2 \cdot H}{X_2W \cdot h}.$$

Теперь выполним аналогичные вычисления для точки P^* . Обозначив $U = a \cap a_1$ и $Z_3 = c \cap Z_1Z_2$, из подобия треугольников $P^*Y_2Z_3$ и $P^*Y_1Z_1$ имеем

$$\frac{P^*Y_2}{P^*Y_1} = \frac{Y_2Z_3}{Y_1Z_1},$$

а из подобия треугольников $Y_2Z_3Z_2$ и UZ_1Z_2 имеем

$$\frac{Y_2Z_3}{H} = \frac{UZ_1}{h}.$$

Следовательно,

$$\frac{P^*Y_2}{P^*Y_1} = \frac{UZ_1 \cdot H}{Y_1Z_1 \cdot h} = \frac{X_2Y_2 \cdot H}{X_2W \cdot h}.$$

Таким образом,

$$\frac{PY_2}{PY_1} = \frac{P^*Y_2}{P^*Y_1},$$

откуда заключаем, что $P = P^*$.⁴

Разберем теперь случай, когда прямые X_1X_2 и Y_1Y_2 параллельны. В этом случае $X_3Y_1 = X_2Y_2$. Применяя уже доказанные нами формулы $Y_2Z_3 =$

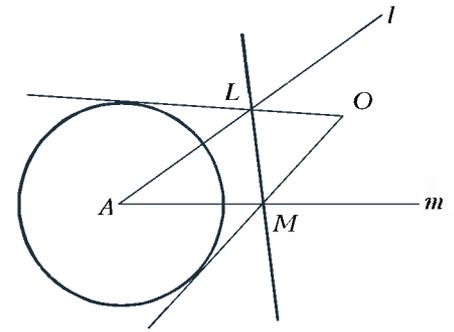


Рис. 7

$= UZ_1 \cdot H/h$ и $X_2W = X_3Y_1 \cdot H/h$, получаем

$$\begin{aligned} Y_2Z_3 &= \frac{X_2Y_2 \cdot H}{h} = \\ &= \frac{X_3Y_1 \cdot H}{h} = X_2W = Y_1Z_1. \end{aligned}$$

Таким образом, $Y_2Z_3 = Y_1Z_1$, что и означает параллельность прямых Y_1Y_2 и Z_1Z_2 .

Теорема Паппа доказана. Пришла пора признаться, что при помощи методов проективной геометрии (т. е. при помощи центральной проекции, переводящей некоторые точки в так называемые бесконечно удаленные точки) можно было доказать теорему Паппа проще, чем это только что было сделано, причем не только для рассмотренного выше случая угла, но и для случая произвольных двух прямых. Но согласитесь: полярное преобразование превратило утверждение теоремы Паппа в (на первый взгляд) совершенно другое утверждение!

Упражнения

1. Дан угол с вершиной A и со сторонами l и m , а также точка O внутри этого угла. Рассмотрим всевозможные окружности с центром в точке A , к которым можно провести касательные из точки O так, чтобы эти касательные пересекали прямые l и m в некоторых точках L и M соответственно (рис. 7). Докажите, что все такие прямые LM пройдут через некоторую точку, не зависящую от радиуса окружности,

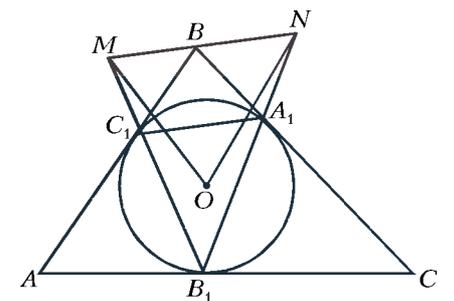


Рис. 8

³ Попросту говоря, теорема Паппа – это теорема Паскаля для шестиугольника, «вписанного в две прямые».

⁴ Последний вывод может показаться (и является на самом деле) не вполне строгим. Но если бы мы чуть усложнили обозначения и следили не только за отношениями длин, но и за направлениями отрезков, то рассуждение стало бы чуть более тяжеловесным, но зато абсолютно строгим.

а зависящую лишь от данной точки O и данного угла.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается сторон BC , CA

и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно (рис.8). Через вершину B параллельно A_1C_1 проведена прямая, пересекающаяся с прямыми B_1C_1 и B_1A_1 в точках M и N

соответственно. Докажите, что угол MON острый. (Эта задача предлагалась на Международной математической олимпиаде 1998 года.)

Прогулки короля

И.АКУЛИЧ

В 1973 ГОДУ, БУДУЧИ ДЕВЯТИклассником и участником Всесоюзной математической олимпиады, я боролся с одной задачей (автор ее – А.Ходулев). За прошедшие годы условия и решения остальных задач олимпиады постепенно потускнели и стерлись из моей памяти, а она – сохранилась. Это настоящий шедевр: изящное условие, очень естественное, «этидное» решение. Такое не забывается!

Впрочем, судите сами.

Задача. Король обошел шахматную доску, побывав на каждом поле. Когда соединили отрезками центры полей, которые он последовательно проходил, получили замкнутую ломаную без самопересечений. Какое наибольшее и какое наименьшее число диагональных ходов мог иметь путь короля?

Насчет наименьшего числа все ясно: оно равно нулю, и пример построить проще простого (рис.1). Эту часть задачи я осилил.

А вот найти наибольшее – не смог. Точнее, я нарисовал маршрут, в котором 36 диагональных ходов (рис.2), но не сумел доказать, что этот маршрут наилучший. Так и написал: «У меня больше не получилось». Жюри поставило за это оценку «+» (что-то вроде двойки с плюсом).

Как же доказать, что замкнутый несамопересекающийся маршрут короля содержит не более 36 диагональ-

ных ходов? Оказывается, надо рассмотреть последовательные выходы A и B короля на границу доски. Если поля A и B не соседние (рис.3), то путь от A до B разбивает поле на две части. Всякая ломаная, соединяющая клетки из разных частей, пересекает путь AB , что ведет к самопересечению пути короля. Поэтому A и B – соседние поля. Поскольку цвета этих полей разные, а при ходах по диагонали цвет не меняется, то между двумя соседними выходами на границу должен быть и «прямой» ход. Поскольку граничных полей 28, выходов на границу тоже 28, и «прямых» ходов не меньше 28. Тогда диагональных – не больше чем $64 - 28 = 36$. Задача решена!¹

Вторым по силе чувством после очарования была досада: как же не додумался до такого естественного и короткого решения! А через четверть века вдруг возникли следующие вопросы (и опять непонятно, почему не рань-

¹ Между прочим, из формулы Пика

$$S = i + b/2 - 1$$

для площади S многоугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги, где i – количество узлов, расположенных строго внутри многоугольника, а b – количество узлов, расположенных на границе, следует, что любой замкнутый несамопересекающийся путь короля ограничивает площадь (в клетках) $S = 0 + 64/2 - 1 = 31$. (Подробности – в статье Н.Васильева «Вокруг формулы Пика», Приложение к журналу «Квант» №2 за 1998 год.)

ше): в задаче рассмотрен замкнутый самопересекающийся путь короля, который по одному разу побывал на всех клетках доски. А что будет, если путь незамкнутый? Или самопересекающийся?

Так задача Ходулева породила еще несколько новых. Первой из них поддалась задача, в которой путь короля несамопересекающийся и незамкнутый (пример такого маршрута – на рисунке 4, где король сделал 49 диагональных ходов).

Как доказать, что число 49 максимально возможное? Очень просто. Назовем *узлом* общую точку четырех клеток шахматной доски. Всего узлов, очевидно, 49. Каждый диагональный ход проходит через узел, а два раза пройти через узел без самопересечения пути невозможно. Все!

Дальше я занялся самопересекающимся незамкнутым маршрутом. Помучиться пришлось изрядно. Краткостью и красотой найденное мною решение не обладает. Поэтому изложу его мелким шрифтом.

Король сделал всего 63 хода. Очевидно, диагональные ходы не меняют цвет поля, на котором находится король, а каждый «прямой» (т.е. вертикальный или горизонтальный) ход приводит к переходу с одного цвета на другой. Таким образом, весь путь короля состоит из нескольких цепочек полей одного цвета, соединенных между собой «прямыми» ходами. (Цепочка может состоять из единственного поля; все ходы внутри одной цепочки – диагональные.)

Докажем, что число белых цепочек не меньше чем 4. Для этого разобьем все возможные ходы, соединяющие белые поля, на группы, как показано на рисунке 5. Из этих девяти групп шесть имеют вид креста, две расположены в левом нижнем и в правом верхнем углах доски и одна – в центре.

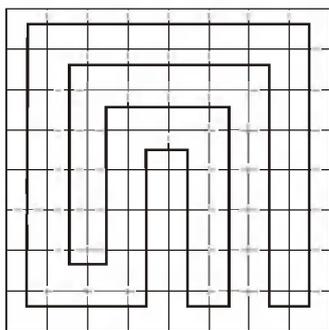


Рис. 1

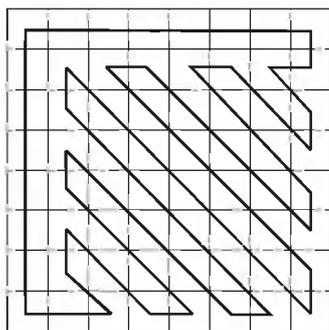


Рис. 2

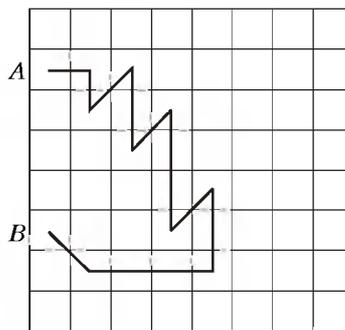


Рис. 3

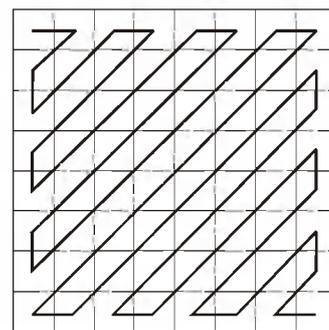


Рис. 4

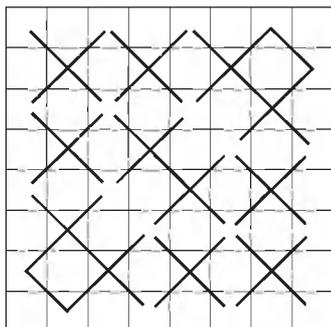


Рис. 5

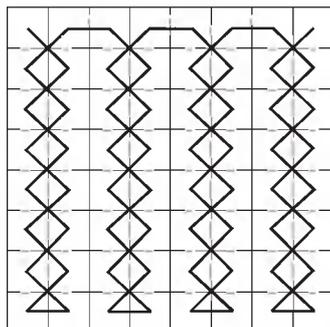


Рис. 6

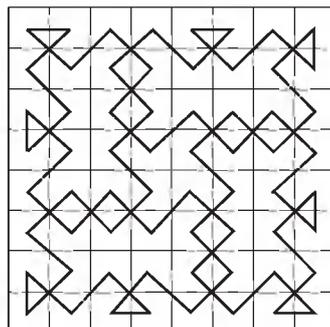


Рис. 7

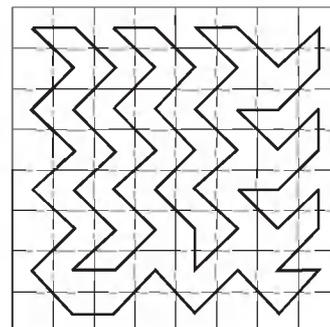


Рис. 8

Очевидно, путь короля не может пройти более чем по двум отрезкам любого креста. Не может пройти он и более чем по пяти отрезкам любой из угловых групп, как и более чем по шести отрезкам центральной группы.² Значит, всего в путь короля входит самое большее $6 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 6 = 28$ белых диагональных ходов.

Если путь короля состоит из k белых цепочек, состоящих, соответственно, из n_1, n_2, \dots, n_k клеток, то $n_1 + n_2 + \dots + n_k = 32$ (общее число белых полей). При прохождении этих цепочек король делает, соответственно, $n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_k - 1$ диагональных ходов. Поэтому общее число белых диагональных ходов короля равно

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = n_1 + n_2 + \dots + n_k - k = 32 - k.$$

Как мы уже знаем, это число не превосходит 28. Значит, $32 - k \leq 28$, откуда $k \geq 4$.

Итак, белых цепочек не менее чем 4. Аналогично, черных цепочек тоже не менее чем 4. Значит, общее число цепочек не меньше 8 и число объединяющих их воедино «прямых» ходов не меньше $8 - 1 = 7$. Следовательно, число диагональных ходов не превосходит $63 - 7 = 56$. Путь, содержащий ровно 56 диагональных ходов, легко предъявить (рис.6). Долго ли, коротко ли, но и эта задача решена.

Теперь на очереди – замкнутый самопересекающийся маршрут. Ясно, что наши рассуждения о цепочках применимы и здесь, так что число диагональных ходов не превышает того же числа 56 (с той лишь разницей, что «прямых» ходов здесь не менее 8, а не 7, а всех ходов – 64, а не 63).

Но существует ли такой маршрут, в котором 56 диагональных ходов? В поисках его, изрисовав много бумаги, я обнаружил замысловатый «орнамент» (рис.7). В нем (подсчитайте,

если не верите на слово) ровно столько же 56 диагональных ходов. Ура?

Как бы не так! На самом деле это не один, а два замкнутых маршрута. Правда, их легко «сцепить», заменив в одном месте пару пересекающихся диагоналей парой «прямых» ходов, но тогда получится маршрут всего лишь с 54 диагональными ходами.³

Итак, мне не удалось найти маршрут с 56 диагональными ходами, но не удалось и доказать, что его нет. Вся надежда – на читателей. Может быть, удастся применить компьютер, может быть, найдете какое-то ускользнувшее от меня соображение? (Если что-то придумаете – не забудьте сообщить об успехе в редакцию «Кванта»!)

Неожиданное развитие темы предложил А.Спивак. Давайте откажемся от необходимости обхода королем всех полей доски. Приведет ли это к увеличению максимально возможного числа диагональных ходов? Казалось бы, не должно: ведь чем меньше обойдено полей, тем меньше сделано ходов, а чем меньше ходов, тем меньше, казалось бы, и диагональных ходов.

Но давайте разбираться по порядку. В случае незамкнутого самопересекающегося маршрута мы доказали, что число диагональных ходов не превосходит 49, причем в доказательстве нигде не использовалось требование о непременно обходе всех полей доски. Так что ответ здесь остается тем же: 49. Аналогично и для самопересекающихся маршрутов: мы убедились, что диагональных ходов каждого цвета (белых и черных) не более 28, так что всего их не более $28 \cdot 2 = 56$, чего мы успешно достигли для незамкнутого маршрута и почти достигли для замкнутого.

Однако совсем иной результат по-

лучается, если отказаться от обхода всех полей в исходной задаче Ходулева – для замкнутого самопересекающегося пути короля. Здесь идея решения (о граничных полях) исчезает совершенно и потому число диагональных ходов может значительно превзойти 36. На рисунке 8 показан маршрут с 44 диагональными ходами. Но доказательства максимальности этого значения (как и уверенности в такой максимальной) у нас нет. Так что и здесь надеюсь на помощь читателей.

А вот еще одна задача о королевских прогулках.

На некотором поле шахматной доски стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске. Тот, после хода которого король окажется на поле, где уже побывал, проигрывает. Кто выиграет в такой игре, если оба играют наилучшим образом?

Оказывается, выигрывает начинающий, причем при любом исходном положении короля. Для этого ему надо мысленно разбить доску на прямоугольники, состоящие из двух соседних клеток (это можно сделать многими способами). Далее первым своим ходом он ставит короля на клетку, парную с той, на которой король находился изначально (т.е. на вторую клетку того же прямоугольника). Затем в ответ на каждый ход соперника он всегда ставит короля на клетку, парную той, на которой король в тот момент находится. Таким образом, после каждой пары ходов один прямоугольник окажется «использованным». Ясно, что рано или поздно соперник будет вынужден поставить короля на клетку, принадлежащую уже использованному прямоугольнику, и, таким образом, дважды посетить одно и то же поле.

* * *

Вот что такое по-настоящему хорошая задача. Она живет своей жизнью, порождая другие задачи, заставляет нас размышлять над ней долгие годы.

² Убедиться в этом чуть сложнее. Можете рассуждать так: в противном случае в маршрут не вошли бы самое большее два из всех диагональных ходов соответствующей группы, что явно (см. рис.5) приводит к повторному посещению королем одного и того же поля.

³ Шахматная раскраска делает очевидным то, что невозможен замкнутый маршрут с 55 диагональными ходами (как невозможен и никакой замкнутый маршрут с нечетным числом диагональных ходов).

Закон сохранения энергии для одноатомного идеального газа

А. ШЕРОНОВ

Во всех тепловых процессах выполняется закон сохранения энергии, или первый закон (первое начало) термодинамики, который удобно записывать в виде

$$Q = \Delta U + A.$$

Здесь Q – подведенное количество теплоты, A – совершенная термодинамической системой работа и ΔU – изменение внутренней энергии системы.

Внутренняя энергия является функцией состояния термодинамической системы и для идеального газа зависит только от его температуры T . Для одного моля одноатомного газа она равна $U = 3/2 RT$ (где R – универсальная газовая постоянная). Любое (как бесконечно малое, так и конечное по величине) изменение внутренней энергии определяется лишь разностью температур конечного и начального состояний:

$$\Delta U = \frac{3}{2} R \Delta T$$

и не зависит от способа перехода из начального состояния в конечное. Это остается справедливым и в том случае, когда газ переводится из начального равновесного состояния в конечное равновесное состояние в результате неравновесного необратимого процесса.

Напротив, работа A , которая совершается газом за счет подведенного тепла или изменения его внутренней энергии, зависит от пути перехода между двумя равновесными состояниями. Элементарная работа ΔA в любом обратимом процессе по определению равна произведению давления p на малое изменение объема газа ΔV в двух соседних равновесных состояниях этого процесса: $\Delta A = p \Delta V$.

При конечном изменении объема от V_1 до V_2 в обратимом процессе работа газа численно равна площади под кривой зависимости его давления от объема $p(V)$, ограниченной изохорами V_1 и V_2 , т.е.

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV.$$

В задачах на расчет тепловых процессов с идеальным газом полезным оказывается введение понятия теплоемкости C газа в данном процессе:

$$\Delta Q = C \Delta T,$$

где ΔT – малое изменение температуры газа при подведении к нему малого количества теплоты ΔQ . Заметим, что введенная таким образом теплоемкость зависит от вида процесса $p(V)$ и может менять свою величину и даже знак в ходе этого процесса.

Напомним теперь основные характеристики часто встречающихся процессов.

В изохорическом процессе нагрева или охлаждения газа работа газом (или внешними силами) не производится. Поэтому подведенное (или отведенное) количество теплоты Q равно изменению внутренней энергии газа: $Q = \Delta U = 3/2 R \Delta T$ (для одного моля газа). Это соотношение оказывается верным для любого изменения температуры газа – как малого, так и конечного, поэтому соответствующая изохорическому процессу теплоемкость оказывается постоянной и для одного моля газа равной $3/2 R$. Она называется молярной теплоемкостью при постоянном объеме и обозначается C_V . Таким образом,

$$C_V = \frac{3}{2} R,$$

а внутренняя энергия идеального одноатомного газа оказывается равной

$$U = \frac{3}{2} RT = C_V T.$$

В адиабатическом процессе тепло к газу не подводится и не отводится от него. Работа газом (или над ним) совершается за счет изменения его внутренней энергии: $A = -\Delta U = -3/2 R(T_2 - T_1)$, где T_2 и T_1 – температуры в конечном и начальном состояниях. Это оказывается верным как для малого, так и для конечного изменения температуры газа, поэтому в адиабатическом процессе для элементарной работы имеет место равенство

$$\Delta A = p \Delta V = -C_V \Delta T,$$

где ΔV и ΔT – малые, по сравнению с первоначальными значениями, изменения объема и температуры газа. Теплоемкость в адиабатическом процессе, очевидно, равна нулю ($\Delta Q = C \Delta T = 0$).

В изотермическом процессе подвода или отвода тепла внутренняя энергия газа не изменяется. При расширении одного моля газа от объема V_1 до объема V_2 газ совершает работу, которую можно найти, воспользовавшись уравнением состояния газа $pV = RT$:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

По закону сохранения энергии, подведенное к газу количество теплоты равно совершенной газом работе:

$$Q = A.$$

При расширении газа $A > 0$, при сжатии $A < 0$ (работа совершается внешними силами, тепло от газа отводится). Так как температура газа не изменяется ($\Delta T = 0$), теплоемкость газа в изотермическом процессе оказывается бесконечно большой.

В изобарическом процессе нагрева с постоянным давлением $p = p_0$ работа одного моля газа при расширении от объема V_1 до объема V_2 равна

$$A = p_0 (V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1).$$

Подведенное количество теплоты Q идет на совершение работы и на увеличение $\Delta U = C_V (T_2 - T_1)$ внутренней энергии газа. Для нахождения теплоемкости C_p в изобарическом процессе воспользуемся уравнением процесса $p = p_0$ и уравнением состояния $pV = RT$:

$$\begin{aligned} \Delta Q = C_p \Delta T = \Delta U + p \Delta V = \\ = C_V \Delta T + R \Delta T = (C_V + R) \Delta T. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что теплоемкость при постоянном давлении постоянна и для одного моля газа равна

$$C_p = C_v + R = \frac{5}{2}R.$$

Напомним также определение КПД тепловой машины, работающей по замкнутому циклу, в результате которого внутренняя энергия газа (рабочего тела) не изменяется. По закону сохранения энергии, работа газа в замкнутом цикле A равна разности количества теплоты Q_1 , подведенного к газу, и количества теплоты Q_2 , отведенного от него. КПД цикла называется отношением

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}.$$

Еще раз подчеркнем, что для нахождения правильного значения КПД необходимо подсчитать тепло, подведенное на *всех* участках процессов, составляющих цикл. Так например, в изохорических процессах работа газом не производится, однако тепло подводится или отводится. В задачах могут также встречаться внешне простые участки зависимости $p(V)$, в ходе которых тепло как отводится, так и подводится. Если для такого участка найти «итоговое» подведенное или отведенное тепло, то при подсчете КПД может возникнуть ошибка. Отметим, наконец, что только для цикла Карно, состоящего из двух изотерм с температурами нагревателя T_1 и холодильника T_2 , на которых, соответственно, подводится количество теплоты Q_1 и отводится Q_2 , и двух адиабат, КПД может быть записан в виде

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Разберем теперь некоторые конкретные задачи на тепловые процессы с участием одноатомного идеального газа.

Задача 1. Сравните работы, количества теплоты и теплоемкости 1 моля идеального газа при переходе между двумя изотермами с температурами T_1 и T_2 в изобарическом про-

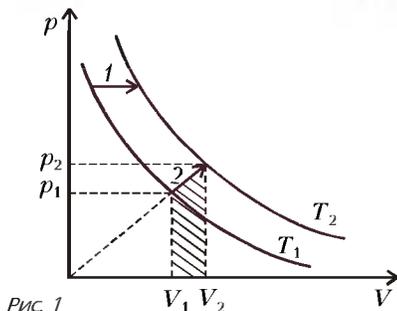


Рис. 1

цессе 1 и в процессе 2 с прямой пропорциональной зависимостью давления от объема (рис. 1).

Для изобары 1 мы имеем:

$$A_1 = R(T_2 - T_1),$$

$$\Delta U_1 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1),$$

$$Q_1 = \Delta U_1 + A = \frac{5}{2}R(T_2 - T_1).$$

Для процесса 2 (на диаграмме p - V прямая проходит через начало координат) работа равна площади заштрихованной трапеции:

$$\begin{aligned} A &= \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \\ &= \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{2} = \frac{R}{2}(T_2 - T_1). \end{aligned}$$

Изменение внутренней энергии в этом процессе такое же, как в предыдущем:

$$\Delta U_2 = \Delta U_1 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1),$$

а количество теплоты, подведенное на участке 2, равно

$$Q_2 = A_2 + \Delta U_2 = 2R(T_2 - T_1).$$

Как видно, в обоих процессах работа и подведенное количество теплоты определяются лишь разностью температур конечного и начального состояний газа. Следовательно, теплоемкости в процессах остаются постоянными и равными, соответственно,

$$C_1 = \frac{5}{2}R, \quad C_2 = 2R.$$

При этом, независимо от начального давления для изобары и от наклона прямой в переходе с прямой пропорциональной зависимостью давления от объема, работы перехода между двумя изотермами отличаются в 2 раза, а теплоемкости – в $5/4$ раза.

Задача 2. Сравните работы и количества теплоты, подведенные к 1 молю газа, в процессе 1 изотермического расширения газа от объема V_1 до V_2 и в процессе 2 перехода между этими состояниями с линейной зависимостью давления от объема (рис. 2).

Для процесса 1 имеем:

$$A_1 = RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

$$Q_1 = A_1.$$

Для процесса 2 работа равна площади соответствующей трапеции:

$$A_2 = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1),$$

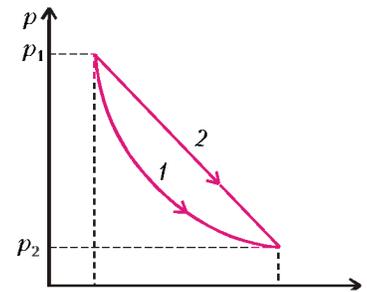


Рис. 2

или, если ввести обозначение $V_2/V_1 = \alpha$ и воспользоваться уравнением изотермы $p_1 V_1 = p_2 V_2 = RT$,

$$A_2 = \frac{p_1 V_2 - p_2 V_1}{2} = RT \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}.$$

Внутренняя энергия в процессе 2, как и в процессе 1, не изменилась, поэтому по закону сохранения энергии можно утверждать, что газу было передано количество теплоты

$$Q_2 = A_2.$$

Итак, для обоих процессов работа определяется отношением конечного и начального объемов.

Отметим, что для процесса 2 теплоемкость не остается постоянной, более того – она меняет знак в ходе процесса от положительного к отрицательному. Это означает, что сначала тепло подводится, а затем отводится.

Задача 3. Вершины замкнутого цикла, состоящего из четырех участков линейной зависимости давления от объема, лежат на двух изотермах с известными температурами T_1 и T_2

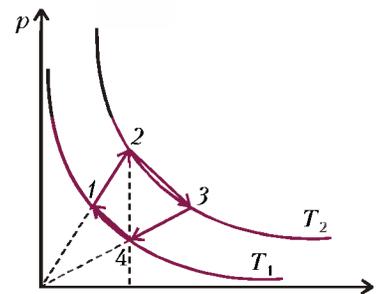


Рис. 3

(рис. 3). Прямые 1–2 и 3–4 проходят через начало координат, объемы V_2 и V_4 равны. Найдите работу одного моля газа в замкнутом цикле.

Работы на участках 1–2 и 3–4 одинаковы по величине (см., например, задачу 1). Поэтому работа в цикле равна

$$A = A_{23} - A_{41}.$$

При этом

$$A_{23} = RT_2 \frac{(V_3/V_2)^2 - 1}{2V_3/V_2} =$$

$$= RT_2 \frac{(V_3/V_4)^2 - 1}{2V_3/V_4} = RT_2 \frac{T_2/T_1 - 1}{2\sqrt{T_2}/\sqrt{T_1}}$$

(по условию $p_3/V_3 = p_4/V_4$, следовательно, $T_1/V_4^2 = T_2/V_3^2$) и, аналогично,

$$A_{41} = RT_1 \frac{T_2/T_1 - 1}{2\sqrt{T_2}/\sqrt{T_1}}$$

Окончательно работа в цикле 1–2–3–4–1 равна

$$A = \frac{R(T_2 - T_1)^2}{2\sqrt{T_2T_1}}$$

Задача 4. Моль гелия из начального состояния с температурой $T = 300$ К расширяется в адиабатическом процессе так, что относительное изменение его давления составило $\Delta p/p = 1/120$. Найдите работу, совершенную газом, если относительные изменения его температуры и объема оказались также малыми.

По условию, изменение объема газа мало, поэтому для адиабатического процесса элементарная работа равна

$$A = p\Delta V = -C_V \Delta T$$

Изменения давления Δp , объема ΔV и температуры ΔT связаны уравнением состояния

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = R(T + \Delta T)$$

Пренебрегая произведением малых величин $\Delta p\Delta V$, находим

$$p\Delta V + V\Delta p = R\Delta T$$

Исключим из последнего равенства $V\Delta p$ с помощью уравнения состояния:

$$V\Delta p = \frac{pV}{p} \Delta p = RT \frac{\Delta p}{p}$$

и воспользуемся выражением для работы:

$$A + RT \frac{\Delta p}{p} = \frac{R}{C_V} C_V \Delta T = -\frac{R}{C_V} A$$

Окончательно получаем

$$A = \frac{C_V}{C_V + R} RT \frac{\Delta p}{p} = 12,5 \text{ Дж.}$$

(Читатель, знакомый с уравнением адиабаты для идеального газа, результат может получить с помощью этого уравнения и уравнения состояния.)

Задача 5. Один моль одноатомного газа расширяется в изотермическом процессе 1–2, совершая работу A_{12} . Затем газ охлаждается в изобарическом процессе 2–3 и, наконец, в адиа-

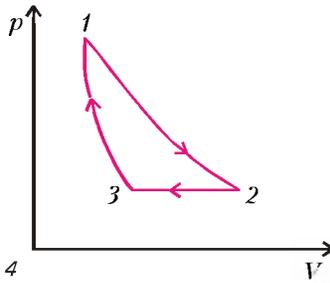


Рис. 4

батическом процессе 3–1 возвращается в исходное состояние (рис.4). Какую работу совершил газ в замкнутом цикле, если разность максимальной и минимальной температур в нем составила ΔT ?

Максимальная и минимальная температуры газа в цикле достигаются в адиабатическом процессе, так что $\Delta T = T_1 - T_3$. В адиабатическом процессе тепло к газу не подводится и не отводится от него, поэтому работа в цикле равна разности подведенного количества теплоты Q_{12} и отведенного Q_{23} . В изотермическом процессе подведенное количество теплоты равно совершенной газом работе:

$$Q_{12} = A_{12}$$

в изобарическом процессе отведенное количество теплоты составляет

$$Q_{23} = (C_V + R)(T_2 - T_3) = (C_V + R)\Delta T$$

Итак, работа в цикле равна

$$A = A_{12} - (C_V + R)\Delta T = A_{12} - \frac{5}{2} R \Delta T$$

Этот же результат можно получить, подсчитав алгебраическую сумму работ газа на всех трех участках цикла (в чем читатель может убедиться самостоятельно).

Задача 6. Моль гелия из начального состояния 1 с температурой $T_1 = 100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в равновесное состояние 2. Этот процесс происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в процессе 2–3 линейной зависимости давления от объема и, наконец, по изохоре 3–1 возвращают в исходное состояние

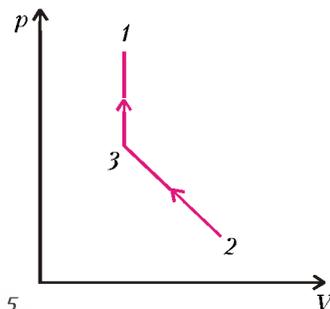


Рис. 5

(рис.5). Найдите работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе 1–2, если в процессах 2–3 и 3–1 к газу в итоге было подведено количество теплоты $Q = 72$ Дж. Известно, что $T_2 = T_3$ и $V_2/V_3 = 3$.

Хотя процесс расширения 1–2 через турбину необратим, но, если начальное и конечное состояния равновесны, по закону сохранения энергии можно утверждать, что работа, совершенная в этом процессе, равна изменению внутренней энергии газа:

$$A_{12} = -C_V(T_2 - T_1) = C_V(T_1 - T_2)$$

На участке сжатия 2–3 теплоемкость не остается постоянной, однако внутренняя энергия газа не изменяется ($T_2 = T_3$). Поэтому итоговое отведенное на этом участке количество теплоты численно равно работе сжатия:

$$Q_{23} = RT_2 \frac{(V_2/V_3)^2 - 1}{2V_2/V_3}$$

(см., например, задачу 2). Чтобы упростить дальнейшие выкладки, подставим отношение объемов $V_2/V_3 = 3$:

$$Q_{23} = \frac{4}{3} RT_2$$

На участке изохорического нагрева 3–1 к газу подводится количество теплоты

$$Q_{31} = C_V(T_1 - T_3) = C_V(T_1 - T_2)$$

По условию,

$$Q = Q_{31} - Q_{23} = \frac{3}{2} R(T_1 - T_2) - \frac{4}{3} RT_2$$

откуда находим

$$RT_2 = \frac{9}{17} RT_1 - \frac{6}{17} Q$$

Окончательно для работы расширения через турбину имеем

$$A_{12} = \frac{3}{2} R(T_1 - T_2) =$$

$$= \frac{12}{17} RT_1 + \frac{9}{17} Q \approx 625 \text{ Дж.}$$

Задача 7. Найдите КПД цикла 1–2–3–1, проведенного с одним молем одноатомного газа и состоящего из участка линейной зависимости давления от объема (прямая 1–2 проходит через начало координат диаграммы p - V), изохоры 2–3 и изобары 3–1 (рис.6). Известно, что $p_2 = 2p_1 = 2p_0$, $V_3 = V_2 = 2V_1 = 2V_0$.

Тепло подводится на участке 1–2, где теплоемкость постоянна и равна $2R$ (см., например, задачу 1):

$$Q_1 = Q_{12} = 2R(T_2 - T_1) = 6p_0V_0$$

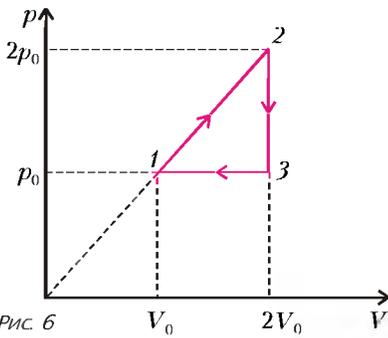


Рис. 6

Тепло отводится на изохоре 2–3:

$$Q_{23} = C_V(T_2 - T_3) = 3p_0V_0$$

и на изобаре 3–1:

$$Q_{31} = (C_V + R)(T_3 - T_1) = \frac{5}{2}p_0V_0.$$

Суммарное отведенное тепло равно

$$Q_2 = Q_{23} + Q_{31} = \frac{11}{2}p_0V_0,$$

работа в цикле составляет

$$A = Q_1 - Q_2 = \frac{1}{2}p_0V_0$$

(этот результат очевиден, так как работа в цикле – это площадь прямоугольного треугольника 1 2 3 с катетами p_0 и V_0), а КПД цикла равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1} = \frac{1}{12}.$$

Отметим, что при решении этой задачи (и других подобных) абитуриенты часто приводят «очевидный» ответ $\eta = 1/3$. Трактуются это как отношение «полезной» работы в цикле $A = p_0V_0/2$ к «затраченной» на участке 1–2 работе $A_{12} = 3/2 p_0V_0$. При таком «решении», очевидно, неверно подсчитано подведенное в цикле тепло Q_1 .

Задача 8. В замкнутом цикле, состоящем из изотермы 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1 (рис.7), КПД равен η , а разность максимальной и минимальной температур равна ΔT . Найдите работу расширения в изотермическом процессе, если рабочее тело – моль гелия.

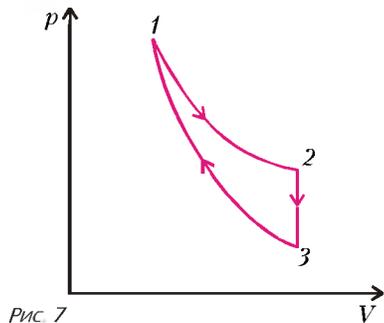


Рис. 7

Тепло в цикле подводится на изотерме:

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12},$$

а отводится на изохоре:

$$Q_2 = Q_{23} = C_V(T_2 - T_3) = C_V\Delta T.$$

КПД цикла равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_V\Delta T}{A_{12}},$$

откуда

$$A_{12} = \frac{3/2 R\Delta T}{1 - \eta}.$$

Заметим, что это один из немногих примеров, когда КПД равен отношению работы в цикле (полезной работы, равной площади фигуры внутри кривых, образующих цикл) к работе на изотерме (затраченной работе, равной площади под кривой изотермического процесса). Читателю предоставляется самостоятельно понять, почему при неправильном определении КПД получается правильный результат, а также придумать хотя бы еще один цикл, обладающий таким же свойством.

Задача 9. КПД цикла 1–2–3–1 (рис.8), где 1–2 – изохора, 2–3 – изобара и 3–1 – участок линейной зависимости давления от объема (на диаграмме p – V – это прямая с произвольным положительным наклоном), равен η_1 . Найдите КПД цикла 1–3–4–1, в котором 3–4 – изохора, 4–1

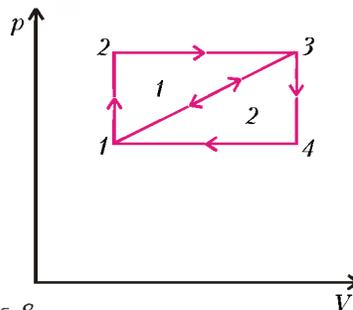


Рис. 8

– изобара. Рабочее тело в обоих случаях – моль гелия.

В цикле 1–2–3–1 тепло Q_2 отводится на участке 3–1. Хотя теплоемкость в этом процессе и не остается постоянной, но можно показать, что она не меняет знака. С другой стороны, температура в этом процессе является монотонной функцией объема. Поэтому для цикла 1–2–3–1 тепло на участке 3–1 только отводится, а, соответственно, для цикла 1–3–4–1 – только подводится. Работа в рассматриваемых циклах одна и та же. Обозначив ее через A , для первого цикла имеем

$$\eta_1 = \frac{A}{Q_1} = \frac{A}{A + Q_2},$$

где Q_1 – количество теплоты, подведенное на изохоре 1–2 и на изобаре 2–3. Аналогично, для второго цикла тепло подводится на участке 1–3 в количестве Q_2 , поэтому

$$\eta_2 = \frac{A}{Q_2} = \frac{\eta_1}{1 - \eta_1}.$$

Упражнения

1. Моль гелия расширяется в процессе $p^2V = \text{const}$ так, что изменение его температуры равно $\Delta T = 0,3$ К. Какую работу совершил газ, если известно, что относительные изменения его давления $\Delta p/p$, объема $\Delta V/V$ и температуры $\Delta T/T$ оказались малыми.

2. Моль гелия совершает работу A в замкнутом цикле, состоящем из изобары 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1 (рис.9). Сколько тепла было подведено к газу в изобарическом процессе, если

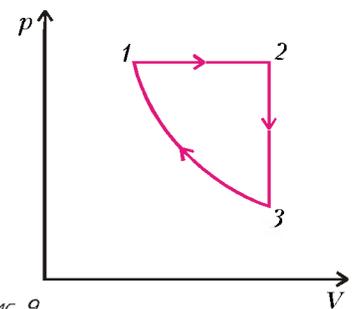


Рис. 9

разность максимальной и минимальной температур газа в цикле составила ΔT ?

3. Моль гелия из начального состояния 1 с температурой $T_1 = 100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в состояние 2. Этот переход происходит без подвода или отвода тепла. Затем газ сжимают в двух процессах, возвращая его в исходное состояние. Сначала сжатие происходит в процессе 2–3 с линейной зависимостью давления от объема, а затем – в адиабатическом процессе 3–1 (рис.10). Найдите работу, совершенную газом при расширении через

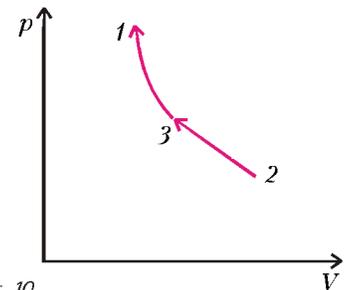


Рис. 10

турбину в переходе 1–2, если в процессе сжатия 2–3–1 над газом была совершена работа $A = 1090$ Дж. Известно, что $T_2 = T_3$, $V_2/V_3 = 2$.

4. В цикле 1–3–4–1 (см. рис.8) КПД равен η . Чему равен КПД цикла 1–2–3–4–1?

Математическая регата

Регата – это командное соревнование по решению задач. Не привычная олимпиада и даже не математический бай, а что-то вроде шахматного блица. Каждая команда состоит из четырех человек, которые делают одну общую работу. В каждом из пяти туров команда сдает по три листочка – по одному на каждую задачу.

Для регат пригодны только те задачи, решение которых может быть изложено сравнительно кратко; времени на обдумывание очень мало! Из-за цейтнота возникает спортивный азарт, который захватывает всех – и тех, у кого мало что получается, и тех, кто барется за первые места (результаты каждого очередного тура жюри объявляет перед следующим туром, так что все время все видят, как идет борьба). Палезен ли этот азарт? Конечно, да. Особенно замечательно, что борьба идет не между участниками, а между командами; во время регаты все думают только о командном результате, учатся взаимодействовать, помогать друг другу.

В регате есть не только развлекательно-спортивная, но и учебная сторона. После каждого тура, когда уже собраны листочки и жюри занялось проверкой, ведущий рассказывает решения задач этого тура. Участники слушают рассказ решений с ограмным интересом, поскольку несколько минут назад сами решали эти задачи. И воспринимают это не как работу, а скорее как отдых перед очередным туром!

А теперь – устройте себе регату. Перед вами задания, предлагавшиеся в прошлом году десятиклассником нескольких московских школ.

Заготовьте пятнадцать листочков, прочитайте условия первого тура и заметьте по часам время (в зависимости от возраста и подготовки можете увеличить время, но не более чем в четыре раза!). Скорее всего, задач, которые удастся решить и аккуратно оформить, окажется неожиданно мало, особенно после того, как вы сверите свои решения с нашими. Потом прочитайте задачи второго тура, и так дальше – до пятого тура.

Первый тур

(10 минут; каждая задача – 6 баллов)

1.1. В зависимости от значений параметра b определите количество корней уравнения $\sqrt{3x-5} = b - \sqrt{3x+11}$.

1.2. Окружность, построенная на основании AB трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается основания CD . Найдите величины углов этой трапеции.

1.3. Решите неравенство

$$x^2 - (\sin 4 + \sin 5)x + \sin 4 \sin 5 < 0.$$

В задаче 1.1 можно записать условие в виде

$$b = \sqrt{3x-5} + \sqrt{3x+11}$$

и заметить, что функция в правой части непрерывна и возрастает, стремясь к бесконечности, на всей своей области определения – луче $[5/3; +\infty)$. Значит, при

$b \geq \sqrt{3 \cdot \frac{5}{3} + 11} = 4$ уравнение имеет одно решение, а при $b < 4$ решений нет.

Для тех, кому эта задача кажется слишком простой, заметим, что на Санкт-Петербургской олимпиаде 1999 года одиннадцатиклассники искали наибольшее значение функции

$$\sqrt[4]{1-a} + \sqrt[4]{a+1} - \sqrt[4]{a},$$

которую можно представить в виде суммы двух функций: $\sqrt[4]{1-a}$ и $\sqrt[4]{a+1} - \sqrt[4]{a}$. Убывание первой из них очевидно, а убывание второй следует из тождества

$$\sqrt[4]{1+a} - \sqrt[4]{a} = \frac{1}{\sqrt[4]{(1+a)^3} + \sqrt[4]{a(1+a)^2} + \sqrt[4]{a^2(1+a)} + \sqrt[4]{a^3}}.$$

Так что не только на регате, но и на вполне уважаемых олимпиадах встречаются задачи о том, что сумма двух убывающих функций убывает!

Задача 1.2 не была решена ни одной командой. Между тем величина угла $\angle AOM$ (рис. 1) равна 30° , ибо именно такова вели-

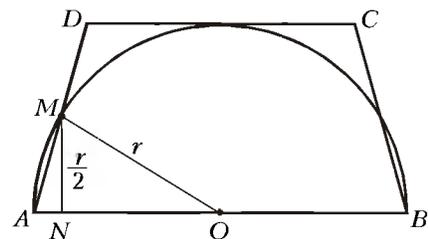


Рис. 1

чина угла в прямоугольном треугольнике, катет MN которого вдвое меньше гипотенузы MO . Далее, зная $\angle AOM = 30^\circ$, легко найти величину угла $\angle MAO$ равнобедренного треугольника MAO по формуле

$$(180^\circ - 30^\circ) / 2 = 75^\circ.$$

В чем же причина такой недодумчивости десятиклассников? Уже несколько лет подряд экзамен по геометрии в конце девятого класса в школах Москвы не проводился. А когда в 1999 году его решили-таки провести, то во многих школах экзаменовали по так называемым открытым билетам, т.е. задолго до экзамена сообщили условия экзаменационных задач.

В задаче 1.3 практически все смогли разложить многочлен на множители:

$$(x - \sin 4)(x - \sin 5) < 0,$$

но многие не заметили, что $\sin 4 > \sin 5$, и поэтому записали ответ в виде $(\sin 4; \sin 5)$ вместо правильного $(\sin 5; \sin 4)$.

Второй тур

(15 минут; каждая задача – 7 баллов)

2.1. При какой комбинации знаков верно равенство

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \pm \sqrt{1 - \sin \alpha},$$

где $\alpha = 19\pi/11$?

2.2. Точки A, B и C являются вершинами неравностороннего треугольника. Сколько существует таких точек D , что множество точек $\{A, B, C, D\}$ имеет хотя бы одну ось симметрии?

2.3. Дано несколько ненулевых чисел. Вместо любых двух чисел a и b можно записать числа $a + \frac{b}{2}$ и $b - \frac{a}{2}$. Докажите, что после нескольких таких операций нельзя вновь получить исходный набор чисел.

Задача 2.1 не очень интересна, поэтому ограничимся ответом:

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}.$$

Кроме внимания, ничего особенного не

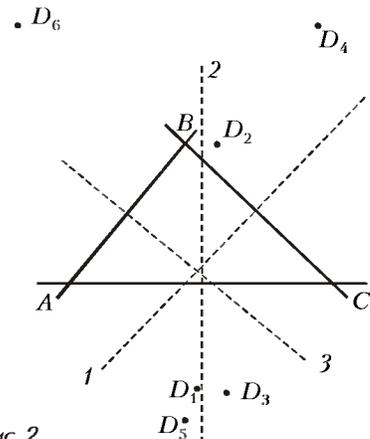


Рис. 2

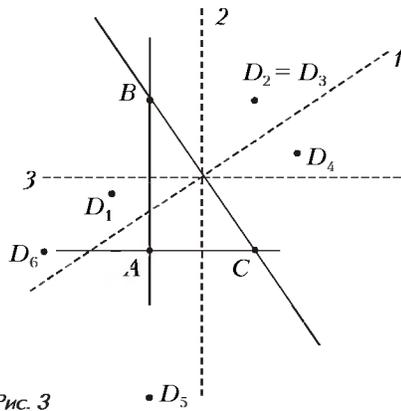


Рис. 3

требует и задача 2.2: ось симметрии – либо одна из прямых AB , AC и BC , либо серединный перпендикуляр к одной из сторон треугольника ABC . Поэтому если треугольник ABC непрямоугольный, то возможно шесть вариантов расположения точки D (рис.2), а если прямоугольный, то только пять вариантов (рис.3).

По-настоящему элегантна задача 2.3. Хотя ее никто не решил, всем очень понравилась, что

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) > a^2 + b^2.$$

Увеличиваясь, сумма квадратов никогда не вернется к своему первоначальному значению!

Третий тур

(15 минут; каждая задача – 7 баллов)

3.1. К параболам, заданным уравнениями $y = x^2 + 4$ и $y = 2x - x^2$, проведены две общие касательные. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках касания – параллелограмм.

3.2. Стороны a, b, c треугольника удовлетворяют неравенствам $a \leq 2 \leq b \leq 3 \leq c \leq 4$. Найдите наибольшее возможное значение площади этого треугольника.

3.3. Первые 1511 натуральных чисел расставлены по порядку вдоль окружности. Затем последовательно вычеркнули каждое второе число, т.е. 2, 4, ..., 1510, 1, 5, 9, ..., и так до тех пор, пока не осталось только одно число. Какое число осталось?

Задача 3.1 не требовала нахождения координат точек касания (хотя найти их не так уж сложно). Суть в том, что уравнения парабол имеют равные по модулю и противоположные по знаку коэффициенты при x^2 , поэтому параболы симметричны относительно некоторой точки. Эта точка – центр симметрии четырехугольника с вершинами в точках касания – является сере-

диной отрезка, соединяющего вершину параболы $y = x^2 + 4$ – точку $(0; 4)$ – с вершиной параболы $y = -x^2 + 2x$ – точкой $(1; 1)$. Середину найти легко:

$$\left(\frac{0+1}{2}; \frac{4+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Задача 3.2 тоже легкая: площадь треугольника не может быть больше половины произведения его сторон (объяснять это можно по-разному, например можно сослаться на формулу $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \leq \frac{1}{2}ab$, поскольку синус никогда не бывает больше 1). Следовательно,

$$S \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3.$$

Наибольшее значения площадь достигает в случае, когда рассматриваемый треугольник прямоугольный с катетами 2 и 3. Тогда гипотенуза равна $\sqrt{4+9} < 4$. Итак, треугольник со сторонами 2, 3 и $\sqrt{13}$ удовлетворяет неравенствам задачи; наибольшее возможное значение площади равно 3.

Задачу 3.3 никто не решил. А она весьма любопытна: в книге Р.Грэхема, Д.Кнута и О.Пагашника «Конкретная математика» ей посвящен целый параграф и присвоено имя древнего историка Иосифа Флавия, участвовавшего в практическом решении похожей задачи.

Давайте рассмотрим общий случай. Пусть первоначально вдоль окружности расположено n чисел. Искомое число обозначим через $f(n)$. Тогда

$$f(2n) = 2f(n) - 1$$

и

$$f(2n+1) = 2f(n) + 1.$$

(На рисунках 4 и 5 эти формулы проиллюстрированы при $n = 6$.) Применяя эти рекуррентные соотношения, последователь-

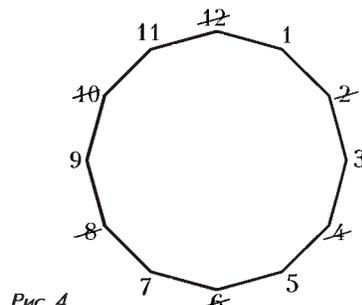


Рис. 4

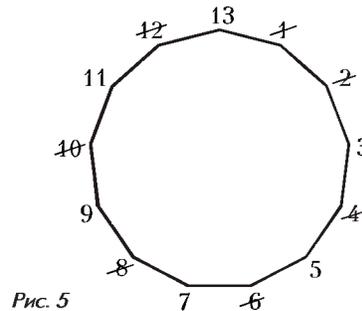


Рис. 5

но получаем: $f(1511) = 2f(755) + 1$; $f(755) = 2f(377) + 1$; $f(377) = 2f(188) + 1$; $f(188) = 2f(94) - 1$; $f(94) = 2f(47) - 1$; $f(47) = 2f(23) + 1$; $f(23) = 2f(11) + 1$; $f(11) = 2f(5) + 1$; $f(5) = 2f(2) + 1$; $f(2) = 2f(1) - 1$.

Очевидно, $f(1) = 1$. Теперь легко находим: $f(2) = 1$; $f(5) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$; $f(11) = 2 \cdot 3 + 1 = 5$; ...; $f(1511) = 975$. Мы получили ответ!

В общем случае, если $n = 2^k + m$, где $m < 2^k$, то останется число

$$f(n) = 2m + 1.$$

(Например, $1511 = 1024 + 487 = 2^{10} + 487$, и в нашем случае останется число $2 \cdot 487 + 1 = 975$. Все правильно!) Ключевой момент доказательства состоит в том, что $f(2^k) = 1$, а это непосредственно вытекает из соотношения $f(2n) = 2f(n) - 1$. В общем случае, когда $n = 2^k + m$, количество чисел сокращается до степени двойки после m вычеркиваний. Очередным числом в этот момент является $2m + 1$, оно и уцелеет!

Четвертый тур

(20 минут; каждая задача – 8 баллов)

4.1. Докажите, что ни при каких действительных a, b и c числа $(a-b)(ab-c^2)$, $(b-c)(bc-a^2)$, $(c-a)(ac-b^2)$ не могут быть одновременно положительными.

4.2. Длины некоторых шести сторон вписанного в окружность двенадцатиугольника равны $\sqrt{2}$, а длины каждой из шести других его сторон равны $\sqrt{24}$. Найдите радиус окружности.

4.3. Каким наибольшим количеством нулей может оканчиваться значение выражения $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, где n – натуральное число?

В задаче 4.1 можно разбирать случаи (рискуя не успеть!), а можно заметить, что сумма рассматриваемых чисел $(a^2b - ab^2 - ac^2 + bc^2) + (b^2c - bc^2 - a^2b + a^2c) + (ac^2 - a^2c - b^2c + ab^2)$ равна нулю, а сумма положительных чисел нулю равняться не может.

В задаче 4.2 независимо от способа чередования сторон многоугольника найдутся две стороны разной длины, имеющие общую вершину, например AB и BC (рис.6).

Соединим центр окружности с вершинами двенадцатиугольника. Возникнут два типа равнобедренных треугольников: бо-

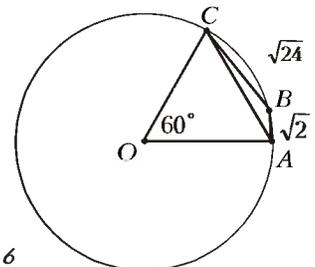


Рис. 6

ковые стороны у всех них одинаковы, а основания разные, у некоторых длиной $\sqrt{2}$, у других $-\sqrt{24}$. Поскольку треугольников разных типов поровну, то $\angle AOC = 360^\circ : 6 = 60^\circ$. Применяя свойство вписанного угла, находим

$$\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle AOC = 150^\circ.$$

Теперь применим теорему косинусов:

$$AC^2 = 2 + 24 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{24} \cos 150^\circ = 38.$$

Поскольку треугольник AOC равносторонний, $AO = AC = \sqrt{38}$; задача решена.

В задаче 4.3 при $n = 1, 2$ и 3 значение выражения равно 10, 30 и 100 соответственно. Значит, двумя нулями сумма оканчиваться может.

Докажем, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не может оканчиваться тремя нулями. Для этого достаточно доказать, что при $n > 2$ эта сумма не кратна 8. Разумеется, $1^n = 1$; каждое из чисел 2^n и 4^n кратно 8, а число 3^n при делении на 8 дает либо остаток 3 (при нечетных n), либо остаток 1 (при четных n). Следовательно, сумма $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ при делении на 8 дает остаток 4 или 2 и поэтому не кратна 8.

Пятый тур

(25 минут; каждая задача – 9 баллов)

5.1. Найдите множество возможных значений выражения $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$, где α, β и γ – величины углов треугольника.

5.2. В тетраэдре $PABC$ проведены биссектрисы PA_1, PB_1 и PC_1 треугольников PBC, PAC и PAB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

5.3. Сколько раз в последовательности a_1, a_2, a_3, \dots , заданной формулой

$$a_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right], \text{ присутствует число } 1511?$$

Первое, что приходит в голову, когда видишь задачу 5.1 – тригонометрические преобразования:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \\ &= \cos \alpha + \cos \beta + \cos(180^\circ - \alpha - \beta) = \\ &= \cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + 1 = \\ &= 4 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + 1. \end{aligned}$$

Синусы половин углов треугольника – положительные числа, поэтому $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > 1$.

Оценку снизу мы получили. Труднее

получить оценку сверху. Оказывается,

$$\sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \leq \frac{1}{8},$$

так что $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{4}$. (Равенство выполнено для равностороннего треугольника.) Для знатока геометрии это не представляет труда:

$$\sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = r/(4R) \leq 1/8,$$

где r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника. Впрочем, знаков и преобразованиями заниматься не стал бы, а сразу вспомнил бы формулу задачи 38 из 12-й главы «Задач по планиметрии» В.Прасолова:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = (r + R)/R,$$

после чего остается лишь заметить, что $0 < r < R/2$.

Разумеется, жюри не рассчитывало на такое решение. Надеялись, что кто-то догадается рассмотреть неравенство

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \\ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned}$$

и, поскольку

$$\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta) = -2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1,$$

записать:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &\leq \\ &\leq 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(1 - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + 1 \leq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

так как $x(1-x) \leq 1/4$ при любом значении x , в частности при $x = \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$. После

регат выяснилось, что несколько команд успели придумать это решение, но слишком поздно: ни одна не успела его оформить.

Тем более никто не нашел способ, использующий скалярное произведение векторов. В этом замечательном решении главное – построить векторы единичной длины, перпендикулярные сторонам рассматриваемого треугольника. Если обозначить эти векторы буквами \vec{x}, \vec{y} и \vec{z} (рис.7), то

$$0 \leq \left(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \right)^2 =$$

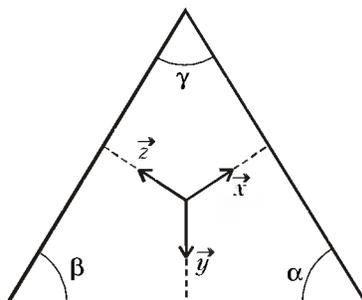


Рис. 7

$$\begin{aligned} &= \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2 + 2\vec{x}\vec{y} + 2\vec{y}\vec{z} + 2\vec{z}\vec{x} = \\ &= 1 + 1 + 1 - 2 \cos \gamma - 2 \cos \alpha - 2 \cos \beta, \end{aligned}$$

откуда и получаем требуемое неравенство $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 3/2$.

Задачу 5.2 почти все команды решили, применив обратную теорему Чебы. А именно, они записали для каждого из треугольников PBC, PAC и PAB свойство биссектрисы:

$$\begin{aligned} BA_1/A_1C &= BP/PC, \quad CB_1/B_1A = CP/PA, \\ AC_1/C_1B &= AP/PB \end{aligned}$$

и вычислили:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.$$

Жюри знало и другое решение. Если отложить на лучах PA, PB и PC от точки P отрезки PA_2, PB_2 и PC_2 равной длины, то получим тетраэдр $PA_2B_2C_2$. Лучи PA_1, PB_1 и PC_1 пересекают ребра его основания в серединах. Осталось заметить, что медианы треугольника $A_2B_2C_2$ пересекаются в одной точке, а отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 являются образами этих медиан при проектировании треугольника $A_2B_2C_2$ из центра P на треугольник ABC .

Задачу 5.3 решили почти все команды, раскрыв знак целой части:

$$1511 \leq \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < 1512,$$

а затем не убоившись вычислений:

$$1510,5 \leq \sqrt{2n} < 1511,5,$$

$$2281610,25 \leq 2n < 2284632,25,$$

$$1140805,125 < n < 1142316,125.$$

Учитывая, что n – натуральное число, имеем $1140805 < n \leq 1142316$. Этому неравенству удовлетворяют $1142316 - 1140805 = 1511$ натуральных чисел. Значит, ровно 1511 членов последовательности a_n равны 1511.

На обобщения времени на регате нет, но как только работы были сданы, все поняли, что последовательность, заданная в условии, – это последовательность 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; ... Каждое натуральное число n встречается в ней n раз.

Поскольку $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$, для доказательства этого замечательного свойства последовательности достаточно проверить, что ее член с номером $n(n+1)/2$ не превышает n , а следующий член уже не меньше чем $n+1$. Проверка проста:

$$\begin{aligned} \sqrt{n(n+1)} + \frac{1}{2} &< \sqrt{n^2 + n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \\ &= n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = n + 1 \end{aligned}$$

и

$$\sqrt{n(n+1)} + 2 + \frac{1}{2} > \sqrt{n^2 + n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = n + 1.$$

Публикацию подготовили
А.Блинков, В.Спиров

Всероссийская студенческая олимпиада по физике

9 и 10 декабря 1999 года силами кафедры общей физики Московского государственного института электронной техники впервые после длительного перерыва была проведена Всероссийская студенческая олимпиада по физике. В олимпиаде приняли участие 8 вузов России: Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина (РГУНГ), Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана (МГТУ), Московский государственный авиационный институт (МГАИ), Московский государственный институт электронной техники (технический университет) (МИЭТ (ТУ)), Уральский государственный технический университет (УГТУ), Таганрогский государственный технический университет (ТГТУ), Уфимский государственный авиационно-технологический университет (УГАТУ), Южно-Российский государственный технический университет (ЮРГТУ). Каждый вуз был представлен командой из трех студентов. Участником олимпиады был предложен вариант из восьми задач и разрешалась пользоваться любой справочной литературой.

В личном первенстве победителями стали: С.Ефименко (РГУНГ) – I места; В.Дмитриев (УГАТУ) – II места; Н.Журавлев (МГАИ) – III места. Дипломами были также отмечены А.Киславский (УГТУ), В.Краснов (УГАТУ), А.Садым (УГТУ), Р.Залесский (МГТУ), А.Красовин (МИЭТ (ТУ)), А.Влашицкий (ЮРГТУ), О.Балабанова (МГТУ).

В неофициальном командном зачете победили: УГТУ – I места; РГУНГ – II места; УГАТУ – III места.

Задачи

1. Спутник запускают с полюса Земли так, что после непродолжительной работы двигателей он поднимается на высоту, равную радиусу Земли $R = 6400$ км, и возвращается на Землю в район старта. Найдите продолжительность τ полета спутника. Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 9,8$ м/с².

2. Длинный цилиндр радиусом R_1 , вращающийся вокруг оси 1 с угловой скоростью ω_1 , прижат к диску радиусом R_2 так, что давление равномерно распределено вдоль линии касания (рис.1). Диск может свободно вра-

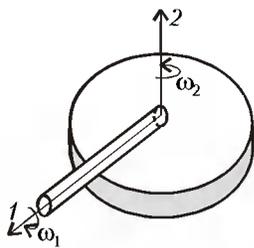


Рис. 1

щаться вокруг оси 2. Линия касания цилиндра и диска совпадает с радиусом диска. Найдите угловую скорость ω_2 вращения диска.

3. Однородный горизонтальный диск массой m и радиусом r совершает малые крутильные колебания на проволоке, висящей вертикально и закрепленной в центре диска. Проволочное

кольцо массой m и радиусом $r/2$ опускают соосно на диск, после чего кольцо сразу приклеивается к диску. Как изменится период, амплитуда и энергия колебаний в следующих двух случаях:

а) кольцо приклеивается к диску в тот момент времени, когда он максимально закручен и неподвижен;

б) диск в момент приклеивания движется с максимальной скоростью?

4. В сферическом сосуде радиусом R с тонкими теплоизолированными стенками имеется очень маленькое отверстие, на которое перпендикулярно его плоскости направлен параллельный пучок одноатомных молекул, имеющих одинаковые скорость v_0 и массу m . Концентрация молекул в пучке n_0 . Найдите установившиеся значения температуры T и числа молекул в сосуде N .

5. Пластины плоского конденсатора расположены горизонтально (рис.2). На нижней пластине лежит тонкий равномерно заряженный листок бумаги. Напряжение между обкладками

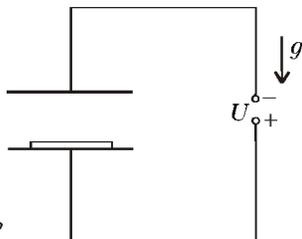


Рис. 2

начинают медленно увеличивать. Когда оно становится равным $U_1 = 750$ В, листок отрывается от нижней обкладки и прилипает к верхней. Затем напряжение начинают уменьшать. Листок отрывается от верхней обкладки и начинает падать при напряжении $U_2 = 220$ В. Найдите заряд σ и массу m_1 , приходящиеся на единицу площади листка. Расстояние между обкладками конденсатора $d = 5$ мм значительно меньше размеров листка, ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с², электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

6. Муха-Цокотуха с помощью компаса летает по линиям индукции длинного тонкого однослойного соленоида длиной L . На какое максимальное расстояние d удалится Муха-Цокотуха от оси соленоида, если наименьшее расстояние в $\alpha = 10$ раз меньше радиуса соленоида?

7. Частицы с одинаковыми зарядами q и различными массами инжектируются из источника с различными скоростями вдоль одного направления в вязкую среду, в которой создано однородное поперечное магнитное поле. Сила вязкого трения $\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v}$. Какой величины должно быть поле B , чтобы вектор перемещения всех частиц из начальной точки в точку остановки составил угол θ с направлением первоначального движения?

8. Монохроматическая плоская световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на тонкую собирающую идеальную линзу, которая перекрывает полторы зоны Френеля для фокус-

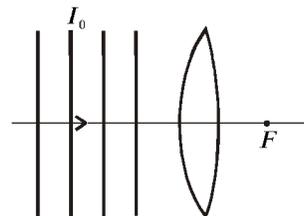


Рис. 3

ной точки линзы (рис.3). Какова интенсивность света I в фокусе линзы?

Публикацию подготовили А.Абрамов, А.Берестов, Г.Гайдук, И.Горбатый, А.Овчинников, В.Плис

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет (МММФ) – математическая школа при механико-математическом факультете МГУ – объявляет прием учащихся на заочное отделение. На трехгодичное обучение принимаются учащиеся, оканчивающие в 1999 / 2000 учебном году восьмые классы одиннадцатилетних общеобразовательных школ, на четырехгодичное обучение – учащиеся, заканчивающие седьмые классы. Зачисление на МММФ производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основные цели МММФ – приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, расширение математического кругозора учащихся средних школ, а также знакомство с механико-математическим факультетом МГУ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и сотрудники механико-математического факультета МГУ. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета МГУ.

Зачисление на заочное отделение МММФ происходит в октябре. Занятия начинаются в ноябре. Обучение платное. Для хорошо успевающих учащихся из малообеспеченных семей возможно снижение оплаты. Учащиеся, особо успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ.

Возможно обучение коллективных учеников (не более 15 человек в одной группе), а также возможно поступление на МММФ учащихся, заканчивающих 9 (10) класс, на основании заявления с приложением итоговых оце-

нок за 9 (10) класс.

Желающие поступить на МММФ должны не позднее 1 октября 2000 года выслать в наш адрес решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Поступающим в восьмой класс решать задачи 10, 11 не нужно.

Вступительную работу необходимо выполнить в *школьной тетради в клетку*. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

- 1) Республика, край, область
- 2) Фамилия, имя учащегося (для коллективных учеников – Ф.И.О. руководителя и полный список учащихся)
- 3) Школа, класс (в 1999 / 2000 учебном году)
- 4) Полный домашний адрес с указанием индекса почтового отделения
- 5) Фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность (только для индивидуальных учеников).

В работу вложите листок бумаги размером 10 × 12 см, на котором напишите *полный домашний адрес и индекс*. Наш адрес:

119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, Малый мехмат.

Для школьников 6–11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону 939-39-43.

Вступительная работа

1. Сравните, какое из чисел больше:

$$\frac{2000^{2000} + 1}{2001^{2001} + 1} \quad \text{или} \quad \frac{1999^{1999} + 1}{2000^{2000} + 1}$$

2. Петя хочет написать на доске 55 двузначных чисел, чтобы среди них не было чисел, дающих в сумме 100. Сможет ли он это сделать?

3. Две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольни-

ка. Обязательно ли эти треугольники равны?

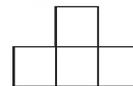
ка. Обязательно ли эти треугольники равны?

4. Сумма двух чисел равна сумме их квадратов. Докажите, что сумма этих чисел не больше 2.

5. Является ли число 66...6 (2000 шестерок) квадратом целого числа?

6. Леспромхоз решил вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил, сказав: «В вашем лесу 99% сосен. Мы будем рубить только сосны. После рубки их останется 98% от всех деревьев». Какую часть леса собирается вырубить леспромхоз?

7. Таблица 20 × 20 клеток заполнена числами так, что в каждой из четырех клеток, которые можно покрывать фигурой, изображенной на рисунке, сумма чисел равна 100. Найдите все числа, заполняющие таблицу.



8. К приходу подружек Маша испекла круглый торт. Но она не знает, сколько подружек придет в гости – две или три. Она хочет заранее разрезать торт на куски так, чтобы, независимо от того, сколько придет подружек, можно было разделить весь торт поровну на всех (включая саму Машу), причем дополнительных разрезов делать не придется. Каково минимальное число кусков, на которое придется разрезать торт?

9. Внутри выпуклого четырехугольника ABCD взята точка O. Докажите, что выполняется хотя бы одно из неравенств: OA < AB, OB < BC, OC < CD, OD < DA.

10. Корни квадратного трехчлена ax² + bx – 5 с целыми коэффициентами a и b – различные целые числа. Найдите a и b.

11. Найдите численное значение суммы

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

щимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, прежде всего – на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до 1 октября по адресу:

119899 Москва, ГСП, Воробьевы горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.

Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ

Физический факультет МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы Заочной физической школы (ЗФШ) при факультете на очередной учебный год.

Физический факультет МГУ готовит физиков – теоретиков и экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фунда-

В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7×12 см по приведенному здесь образцу, и конверт с Вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по соответствующим разделам физики. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет удостоверения об окончании ЗФШ учитываются приемной комиссией).

Для проживающих в Москве и Московской области имеется вечерняя физическая школа.

Справки по телефону
(095)939-54-95

с 14 до 16 часов по рабочим дням.

ЗИФМШ объявляет прием

Заочная инженерная физико-математическая школа (ЗИФМШ) объявляет прием учащихся в 9, 10 и 11 классы на 2000/01 учебный год. Главная цель школы – помочь обучающимся глубже изучить математику и физику, развить инженерный склад мышления и лучше подготовиться к поступлению в высшие учебные заведения.

Прием в ЗИФМШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Рядом с номером задачи указывается, для какого класса она предназначена. Например, 4 (9, 10 кл.) означает, что задача 4 входит в конкурсное задание для 9 и 10 классов. Задание для каждого класса состоит из шести задач.

Решение вступительного задания необходимо прислать по адресу:

**190031 Санкт-Петербург,
Московский проспект, д.9,
ИГУПС, ЗИФМШ, на конкурс.**

Фамилия, имя, отчество

Класс (указывается по состоянию на 1 сентября 2000 г.)

Подробный домашний адрес

Номер и адрес школы

Фамилия, имя, отчество

Класс ЗФШ

Профессия родителей

Подробный домашний адрес

Номер и адрес школы

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1–4, поступающим в 11 класс – задачи 3–6.

1. Приборы, установленные на берегу, показывают, что ветер дует с юго-запада, а величина скорости ветра составляет $v = 5$ м/с. Что покажут аналогичные приборы, установленные на корабле, идущем на запад со скоростью $u = 36$ км/ч?

2. На пути тела массой m , скользящего по гладкой плоскости, находится горка высотой H и массой M . При какой минимальной скорости u тела оно сможет преодолеть горку? Горка может скользить без трения по плоскости, не отрываясь от нее.

3. Однородный стержень согнут в

В письмо вложите анкету, заполненную печатными буквами по приведенному здесь образцу.

Зачисленным в ЗИФМШ в течение года высылаются учебные пособия и контрольные задания; решенные задания оцениваются и рецензируются. Успешно закончившие ЗИФМШ получают удостоверение об окончании.

Вступительное задание

1 (9 кл.). Определите давление жидкости на нижнюю поверхность плавающей цилиндрической шайбы сечением S и массой m .

2 (9 кл.). Вася и Петя поделили между собой 39 орехов. Число орехов, доставшихся одному (любому) из них, меньше удвоенного числа орехов, доставшихся другому. Квадрат трети числа орехов, доставшихся Пете, меньше увеличенного на единицу числа орехов, доставшихся Васе. Сколько орехов у каждого мальчика?

3 (9, 10 кл.). В схему включены два амперметра и два одинаковых вольтметра (рис.1). Показания амперметров $I_1 = 0,1$ А и $I_2 = 0,099$ А; показание

СИДОРОВ ИВАН ПЕТРОВИЧ

ДЕСЯТЫЙ

524806 г.ТВЕРЬ,

ул.САДОВАЯ, д.55, кв.77

ШКОЛА №5, ул.ЗЕЛЕНАЯ, д.7

Пирогов Юрий Андреевич

10

мать – врач,

отец – инженер

120713 Москва, ул.Столетова, д.3, кв.13

школа 564, Севастопольский просп., 5а

виде прямого угла со сторонами a и b и подвешен на гвоздь, вбитый в вертикальную стенку. Какой угол образует сторона a с вертикалью?

4. Придумайте качественную задачу по любому разделу физики (и приведите ее решение).

5. Смешали объем V_1 воздуха с относительной влажностью ϕ_1 и объем V_2 воздуха с влажностью ϕ_2 . При этом обе порции были взяты при одной и той же температуре. Смесь занимает объем $V_1 + V_2$. Определите ее относительную влажность.

6. Чему равен заряд заземленной металлической сферы радиусом R , если на расстоянии a ($a > R$) от ее центра находится точечный заряд $q > 0$?

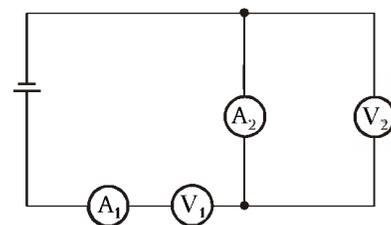


Рис. 1

первого вольтметра $U_1 = 10$ В. Найдите показание U_2 второго вольтметра. Сопротивлением проводов пренебречь. Учтите, что любой вольтметр показывает напряжение на самом себе.

4 (9, 10 кл.). Пассажир поезда, движущегося со скоростью 40 км/ч, замерил по секундомеру, что встречный поезд проходил мимо его окна в течение трех секунд. Определите скорость встречного поезда, если известно, что его длина 75 м.

5 (9, 10, 11 кл.). В теплоизолированной колбе находилась вода при 0°C . Откачиванием паров воду в колбе заморозили. Какая часть воды испарилась? Удельная теплота парообразования воды равна $2,5 \cdot 10^6$ Дж/кг при 0°C .

6 (9, 10, 11 кл.). Из бака, наполненного спиртом, отлили часть спирта и долили до прежнего объема водой, затем из бака отлили столько же литров смеси, сколько в первый раз отлили спирта, после чего в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров чистого спирта отлили из бака в пер-

вый и во второй раз, если объем бака 64 л?

7 (10, 11 кл.). Угол наклона ленты подъемника к горизонту 5° . Коэффициент трения между грузом и лентой 0,2. При каком максимальном ускорении ленты поднимаемый ящик не будет скользить по ленте подъемника? Лента подъемника не прогибается, ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

8 (10, 11 кл.). При каких значениях параметра a квадратное уравнение

$$4x^2 - 2x + a = 0$$

имеет два различных корня?

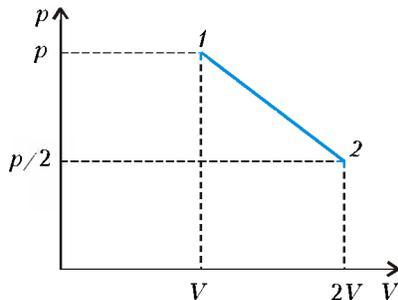


Рис. 2

9 (11 кл.). На рисунке 2 изображен график процесса расширения идеального газа, при котором он переходит из состояния 1 с давлением p и объемом V в состояние 2 с давлением $p/2$ и объемом $2V$. Найдите количество теплоты, которое сообщили этому газу. Линия 1–2 – отрезок прямой.

10 (11 кл.). Решите уравнение

$$4 \cos x + \sin x = 4$$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Очевидно, что $A = 0$, $L = 1$. Далее, перебирая различные M (2, 3, ..., 9), приходим к выводу, что имеет место единственный случай $M = 6$. A значит, зашифрованная запись имеет вид

$$\begin{array}{r} + 70660 \\ + 35760 \\ \hline 106420 \end{array}$$

2. Исходное число делится на 23 (в этом можно убедиться, например, разделив $255...53$ на 23 «уголком»).

3. Пусть Валера собрал x мешков. Тогда, согласно условию, Саша собрал в 5 раз больше, т.е. $5x$ мешков. Андрей же собрал на 10 мешков меньше Саши, т.е. $(5x - 10)$ мешков. Опять же по условию, Саша собрал больше половины всех мешков, т.е. больше, чем Валера вместе с Андреем. Поэтому

$$5x > x + (5x - 10),$$

откуда $x < 10$.

Всего «Егорушки» собрали $x + 5x + (5x - 10) = 11x - 10$ мешков. Так как Валере удалось поделить эти мешки поровну между всеми тремя членами группы, то $(11x - 10)$ делится на 3. Среди всех целых неотрицательных x , меньших 10, этому требованию удовлетворяют лишь $x = 2, 5$ и 8. Какое же из них верное?

Вспомним малозаметную, но немаловажную часть условия: Валера с целью уравнивать число мешков отобрал несколько мешков y каждого из приятелей, т.е. и у Саши, и у Андрея. Отсюда следует, что и Саша, и Андрей собрали *более чем по трети* всех мешков (иначе им пришлось бы, наоборот, добавить мешков). С Сашей все это и без того очевидно (он, как мы знаем, собрал больше всех, т.е. заведомо больше трети всех мешков). Что же касается Андрея, то данное требование может привести к дополнительным ограничениям. Итак, всего было собрано $(11x - 10)$ мешков, и третья их часть, т.е. $(11x - 10)/3$ мешков, должна быть меньше, чем собрал Андрей, т.е. $(5x - 10)$. Получаем еще одно неравенство:

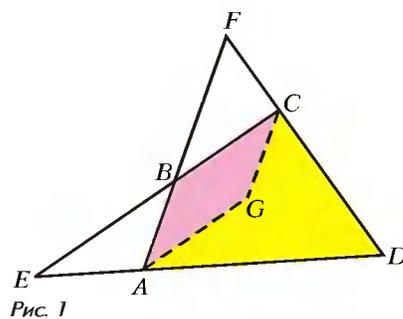
$$(11x - 10)/3 < (5x - 10).$$

откуда $x > 5$. Этому неравенству удовлетворяет лишь одна из трех найденных выше кандидатур, а именно $x = 8$.

Остальное не представляет затруднений. Итак, Валера собрал $x = 8$ мешков, Саша – $5x = 40$ мешков, а Андрей – $5x - 10 = 30$ мешков. Всего же «Егорушки» собрали $8 + 40 +$

$+ 30 = 78$ мешков пуха. На клип должно хватить!

3. Закрасим клетки поля в шахматном порядке двумя цветами. В силу того что клеток поля нечетное количество, клеток одного цвета будет на 1 больше, чем клеток другого цвета. Каж-



дый же танцор в хороводе должен иметь возможность переместиться на клетку своего соседа, сменив цвет клетки, на которой он пребывает. Но это сделать невозможно.

5. Даша права. Если четырехугольник является трапецией, то очевидно, что параллелограмм вырезать можно. Если четырехугольник $ABCD$ не имеет параллельных сторон, то продолжим противоположные стороны AB, CD и AD, BC до пересечения: получим точки F и E (рис.1). Концы сторон, с которыми пересеклись прямые – в нашем случае это A, B, C , – и будут вершинами исходного параллелограмма. Действительно, луч AG , параллельный BC , будет находиться внутри угла CED ; луч CG , параллельный AB , – внутри угла AFD . Т.е. точка пересечения лучей G будет находиться в пересечении этих углов, а значит, в четырехугольнике $ABCD$.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №6 за 1999 г.)

11. Поскольку значения $x = 0, y = 0, y = -1$ и $y = 1$ не входят

в область допустимых значений выражения $\frac{x - \frac{1}{x}}{y - \frac{1}{y}}$, то примем в дальнейшем, что $xy \neq 0, |y| \neq 1$, и запишем исходное

$$\text{тождество в виде } k = \frac{(x^2 - 1)y}{(y^2 - 1)x}.$$

В случае $|x| = 1$ получаем одно из возможных решений: $k = 0$. Рассмотрим случай $|x| \neq 1$. Числа $y^2 - 1$ и $|y|$, как и числа $x^2 - 1$ и $|x|$, взаимно просты. Отсюда $x^2 - 1 = a(y^2 - 1)$, $y = bx$, где числа a и b целые, причем $a \geq 1, |b| \geq 1$. Из неравенства $a \geq 1$ следует $|x| \geq |y|$, а из неравенства $|b| \geq 1$ – неравенство $|y| \geq |x|$, поэтому $|x| = |y|$. Следовательно, $k = -1$

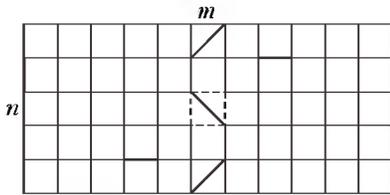


Рис. 2

для доски $m \times n$ клеток, где m и n – нечетные натуральные числа. Первый ход первого игрока должен быть «несимметричным»: выберем на доске центральную клетку и проведем в ней одну из диагоналей. Все последующие ходы первого игрока должны быть симметричными ходам второго игрока относительно центра доски (рис.2). Ясно, что первый игрок не нарушит условие игры ранее второго игрока.

Если число клеток по одной стороне чётно, а по другой – нечётно, то начинающему следует провести центральную отрезок на оси прямоугольника и далее играть аналогично, как в случае нечетных m и n .

Рассмотрим случай четных m и n . Пусть $m = 2k$, $n = 2d$. Тогда число клеток в прямоугольнике $m \times n$ чётно и число всех отрезков, проходящих по сторонам клеток (не по диагоналям клеток), равное $2k(2d + 1) + 2d(2k + 1)$, тоже чётно. Учитывая то, что в каждой клетке может быть проведена только одна диагональ и дважды проводить один и тот же отрезок нельзя, второй игрок должен придерживаться следующей стратегии: если начинающий игрок проводит отрезок по некоторой стороне квадрата, то второй игрок тоже должен провести любой отрезок по свободной стороне квадрата; если начинающий игрок проводит отрезок по диагонали квадрата, то второй игрок тоже проводит любой свободный диагональный отрезок и т.д. Очевидно, второй игрок может всегда обеспечить себе ход и, следовательно, в этом случае он выигрывает. **Ответ:** при правильной игре выигрывает первый игрок, если хотя бы одно из значений m и n нечётное, и второй игрок – если m и n чётные.

13. Преобразуем алгебраическую сумму

$$y^4 x^3 + z^4 y^3 + x^4 z^3 - x^4 y^3 - y^4 z^3 - z^4 x^3$$

к виду

$$(x - y)(z - y)(x - z) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[x^2 z^2 + x^2 y^2 + y^2 z^2 + xyz(x + y + z) \right] = \\ & = \frac{1}{2} (x - y)(z - y)(x - z) \times \\ & \times \left[x^2 (y + z)^2 + y^2 (x + z)^2 + z^2 (x + y)^2 \right]. \end{aligned}$$

Это выражение равно нулю только тогда, когда среди чисел x , y , z есть два равных (выражение в квадратных скобках равно нулю лишь тогда, когда по крайней мере два из трех чисел x , y , z равны нулю).

14. Заметим, что число, дающее при делении на 6 остаток 5, во-первых, должно быть нечётным, во-вторых, – при делении на 3 давать остаток 2.

Попытаемся сконструировать такое число, приписывая к числу 1 справа последовательные натуральные числа. Поскольку искомое число должно быть нечётным, то каждый раз нам придется приписывать по 2 очередных натуральных числа, старшее из которых – число нечётное. Остаток от деления на 3 полученного числа оценим по сумме его цифр. Несложно показать, что остатки от деления на 3 сцепки из каждой пары натуральных чисел, начиная с 2, образуют периодическую последовательность: 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, ... Таким образом, после приписывания каждой такой пары сумма цифр полученного числа при делении на 3 будет давать остатки 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, ... В этой периодической последовательности нет числа 2. Следовательно, среди вводимых чисел не найдется числа, дающего при делении на 6 остаток 5, и Гадалка

или $k = 1$. Оба значения реализуются, например, $k = -1$ при $(2, -2)$ и $k = 1$ при $(2, 2)$.

Ответ: число k равно одному из чисел -1 , 0 , 1 .

12. Приведем решение

никогда не предскажет «к черту пошлет».

15. Покажем, что испытуемых «пятерок» должно быть не менее 18. Пронумеруем всех игроков от 1 до 18. Игрока с номером 1 нужно испытать в паре с 17 другими игроками. Поскольку в каждой «пятерке» он может образовать только 4 различных пары, то для этого его нужно включить в состав не менее чем 5 «пятерок». Точно так же любой из 18 игроков должен выходить на игровое поле не менее 5 раз. Это возможно лишь в том случае, когда количество «пятерок» не менее 18.

Один из возможных наборов из 18 «пятерок» показан в таблице:

№ «пятерки»	Состав игроков																	
1					6	7			10						15	17		
2					6	8						12	13				18	
3					6			9	11					14	16			
4					5			9	10					14			18	
5					5	7						12			15	16		
6					5		8			11	13						17	
7					4			8			12	14					17	
8					4		7			10		13			16			
9					4			9	11						15		18	
10					3			8	10						15	16		
11					3			9			12	13					17	
12					3		7				11		14				18	
13	1	2														16	17	18
14	1	2											13	14	15			
15	1	2								10	11	12						
16	1	2					7	8	9									
17	2	3	4	5	6													
18	1	3	4	5	6													

Малая теорема Ферма

- а) В последовательности 2, 4, 8, 16 $\equiv 3$, 6, 12, 24 $\equiv 11$, 22 $\equiv 9$, 18 $\equiv 5$, 10, 20 $\equiv 7$, 14 $\equiv 1$ встречаются все остатки от 1 до 12.
- а) 2 и 3; б) числа вида $3 + 7k$ и числа вида $5 + 7k$, где k – целое.
- Нельзя. Составное число n делится на некоторое простое число $q < n$. Рассмотрим то место на окружности, где находится q , и возьмем q в качестве первого из трех чисел a , b , c . Имеем:

$$b^2 \equiv ac \equiv 0 \pmod{q},$$

так что b делится на q . Двигаясь далее вдоль окружности и рассуждая аналогично, придем к абсурду: все числа 1, 2,, $n - 1$ должны делиться на q .

- Указание.** Во-первых, $2^n \equiv 3 \pmod{5}$ при $n \equiv 3 \pmod{4}$. Во-вторых, $2^n \equiv 3 \pmod{13}$ при $n \equiv 4 \pmod{12}$. В первом случае n должно быть нечётным числом, а во втором – чётным.
- Ответ:** $p = 13$.
- б) $m = 1$ или 2.

10. Поскольку $a - b^n = (a - k^n) + (k^n - b^n)$ кратно $k - b$, то $a - b^n$ делится на любое натуральное число. Следовательно, $a - b^n = 0$, что и требовалось доказать.

11. а) Рассмотрим остатки от деления чисел 1, 11, 111, ... на n . Какие-то два из них равны; разность соответствующих чисел кратна n ; эта разность оканчивается на несколько нулей, которые можно отбросить, поскольку n взаимно просто с 10.

12. а) $8^n + 1 = (2^n)^3 + 1^3$ кратно числу $2^n + 1$; $5 \cdot 4^n + 1 = 5 \cdot (3+1)^n + 1 \equiv 5 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$. б) Таковы, например, числа вида $10^{12k+1} + 3 \equiv 10 + 3 \equiv 0 \pmod{13}$. Составными являются и все числа вида $10^{6k+4} + 3$, поскольку $10^{6k+4} + 3 =$

$$= (10^6)^k \cdot 10^4 + 3 \equiv 1 \cdot 3^4 + 3 = 84 \equiv 0 \pmod{7}. \text{ в) Указание.}$$

Пусть p – простой делитель числа $ab + c$. Существует бесконечно много таких натуральных n , что $b^n \equiv b \pmod{p}$.

13. Порядок числа a является делителем чисел r и s и потому является делителем числа НОД(r, s).

14. При k , кратных 18.

16. Например, $k = \varphi(10^{100})$.

18. Указание. $2^6 + 6^2 = 100$. Докажите, что если число n обладает нужным свойством, то число $n + 100$ тоже обладает им.

19. При $p = 2$ годится любое четное n . Пусть $p > 2$ и $n = (p - 1)m$. Тогда $2^n \equiv 1$ и $n \equiv -m \pmod{p}$, так что в качестве m можно взять любое натуральное число вида $m = ps - 1$, где $s = 1, 2, 3, \dots$

21. а) 20; б) 20.

22. а) Указание. Поскольку 2000 делится и на $\varphi(2^4) = 8$, и на $\varphi(5^4) = 4 \cdot 5^3$, имеем: $3^{2000} \equiv 1$ и по модулю 2^4 , и по модулю 5^4 . Следовательно, $3^{2000} \equiv 1 \pmod{10000}$. Ответ: $3^{1999} = \dots 6667$.

б) Поскольку $\varphi(5^4) = 5^3 \cdot (5 - 1) = 500$, то $2^{2000} = (2^{500})^4 \equiv 1 \equiv -624 \pmod{5^4}$, так что $2^{1999} \equiv -624/2 = -312 \equiv 313 \pmod{5^4}$. Осталось подобрать такое целое x , что $313 + 625x$ делится на 16. Это легко: $313 = 320 - 7 \equiv -7$ и $625 = 624 + 1 \equiv 1 \pmod{16}$, так что годится $x = 7$. Значит, 2^{1999} оканчивается теми же четырьмя цифрами, что и число $313 + 625 \cdot 7 = 4688$.

в) Указание. $10000 = 16 \cdot 625$. Число 2^{2000} кратно 16. В силу теоремы Эйлера, остаток от деления 3^{2000} на 500 равен 1; поскольку $\varphi(625) = 500$, имеем: $2^{2000} \equiv 2 \pmod{625}$. Осталось подобрать такое целое x , что $2 + 625x$ делится на 16. Ответ: 8752.

23. Достаточно разобрать случай $x \neq y$. Поскольку $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$, достаточно доказать отсутствие решений в натуральных взаимно простых числах x, y , где $x \neq y$, и целых неотрицательных числах a, b, c уравнения $x^7 + y^7 = 2^a \cdot 3^b \cdot 37^c$. Обозначим $N = 2^a \cdot 3^b \cdot 37^c$ и $f = \varphi(N)$. Поскольку f не делится на 7, существует такое натуральное число t , что $7t \equiv 1 \pmod{f}$.

Возводя сравнение $x^7 \equiv -y^7 \pmod{N}$ в t -ю степень, получаем: $x^{7t} \equiv (-y^7)^t$. Очевидно, число t нечетно (ибо f четно).

Поэтому $x \equiv x^{7t} \equiv (-y^7)^t = -y^{7t} \equiv -y \pmod{N}$, так что $x + y$ делится на $N = x^7 + y^7$, что невозможно из-за неравенства $x + y < x^7 + y^7$.

24. Пусть $k - 1$ делится на 2^s и не делится на 2^{s+1} . Предположим, что при всех достаточно больших натуральных l число $p = 2^{2^l} + k$ простое. Очевидно, если $2^l > s$, то $p - 1 = 2^{2^l} + k - 1 = 2^s h$, где h нечетно.

В силу теоремы Эйлера, $2^{\varphi(h)} \equiv 1 \pmod{h}$. Поэтому $2^{s+\varphi(h)} \equiv 2^s \pmod{2^s h}$. Следовательно, при $l \geq s$ имеем $2^{l+\varphi(h)} \equiv 2^l \pmod{p-1}$.

В силу малой теоремы Ферма,

$$2^{2^{l+\varphi(h)}} + k \equiv 2^{2^l} + k \equiv 0 \pmod{p}.$$

Поскольку $2^{2^{l+\varphi(h)}} + k > 2^{2^l} + k = p$, то число $2^{2^{l+\varphi(h)}} + k$ составное. Задача решена.

25. а) $n = 1$, p^m или $2p^m$, где p – простое, m – натуральное.

26. а) Ответ: $x \equiv \pm a$ или $2^{m-1} \pm a \pmod{2^m}$. Указание. Поскольку $(x+a) - (x-a) = 2a$, числа $x-a$ и $x+a$ не могут оба делиться на 4. Значит, либо одно из них делится на 2^m , либо одно делится на 2^{m-1} , а другое четно.

27. Указание. Докажите по индукции сравнения

$$5^{2^{m-3}} \equiv 1 + 2^{m-1} \pmod{2^m}, \text{ где } m \geq 3, \text{ и}$$

$$(1+p)^{p^{m-2}} \equiv 1 + p^{m-1} \pmod{p^m}, \text{ где } p - \text{нечетное простое, } m \geq 2.$$

28. г) Всякое натуральное число вида $6m - 1$ имеет хотя бы один простой делитель вида $p = 6k - 1$. Пусть $a^2 + a + 1$ кратно p . Тогда $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$ тоже кратно p .

Если $a \equiv 1 \pmod{p}$, то $a^2 + a + 1 \equiv 1^2 + 1 + 1 = 3$, что невозможно, ибо $p \neq 3$. Значит, порядок числа a по модулю p равен 3, откуда $p - 1$ кратно 3. Но $p - 1 = 6k - 2$ не кратно 3.

29. Указание. $a^{12} - 1 = (a^6 - 1)(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$.

30. в) Указание. $a^{15} - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \times (a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$.

31. Указания. а) В силу предыдущего упражнения $a + 1 \equiv -a^2 \pmod{p}$. б) Докажите, что $a^3 - a^2 + a - 1 \equiv a^4 \pmod{p}$.

33. Указание. Существует такое целое c , что $bc \equiv 1 \pmod{p}$.

Число $(ac)^{2^n} + 1$ кратно p .

34. Указание. Если p – простой общий делитель чисел n и $a^{2^n} + 1$, то $p \leq n$ и $p = 2^{n+1}k + 1 > 2^{n+1} > n$.

35. а) Пусть n четно и $a^n + 1$ делится на $n + 1$. Записав $n = 2^m k$, где k – нечетное, имеем: любой простой делитель числа $a^n + 1 = (a^k)^{2^m} + 1$ сравним с 1 по модулю 2^{m+1} .

Поскольку произведение чисел, сравнимых с 1 по модулю 2^{m+1} , тоже сравнимо с 1 по этому модулю и поскольку $n + 1 = 2^m k + 1 \not\equiv 1 \pmod{2^{m+1}}$, получаем противоречие.

Итак, n нечетно. Теперь очевидно, что a тоже нечетно.

б) Указание. Рассмотрите $n = a^{2^m}$.

36. а) Следует из предыдущего упражнения. б) Убедитесь, что если $2^n + 2$ кратно n и если $2^n + 1$ кратно $n - 1$ (это верно, например, для $n = 2$), то $2^{2^n+2} + 2$ кратно $2^n + 2$ и $2^{2^n+2} + 1$ кратно $2^n + 1$.

37. Пусть $15a + 16b = r^2$ и $16a - 15b = s^2$, где r, s – натуральные числа. Тогда $r^4 + s^4 = (15a + 16b)^2 + (16a - 15b)^2 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 13 \cdot 37 \cdot (a^2 + b^2)$. Поскольку число 13 не имеет вида $8k + 1$, а $r^4 + s^4$ делится на 13, то $r \equiv s \equiv 0 \pmod{13}$.

Аналогично, $r \equiv s \equiv 0 \pmod{37}$.

Ответ: $13^2 \cdot 37^2$ (при $a = 13 \cdot 37 \cdot 31$, $b = 13 \cdot 37$).

39. Примените утверждение предыдущего упражнения: а) при $a = 8$; б) при $a = 512$.

40. Достаточно разобрать случай $a \neq b$. Числа a и b нечетны. Обозначим буквой n их наименьшее общее кратное. Тогда $2^n + 1$ кратно числу $2^a + 1$, которое кратно числу b . Аналогично, $2^n + 1$ кратно $2^b + 1$, которое кратно a . Значит, $2^n + 1$ кратно как a , так и b , а следовательно, и их наименьшему общему кратному n . Поскольку $n > 3$, то, в силу пункта а) предыдущего упражнения, n кратно 9.

Предположим для определенности, что a не кратно 3. Тогда легко проверить, что $2^a + 1$ не делится на 9. Это противоречит тому, что b делится на 9.

41. Указание. Пусть $n > 3$ и $2^n + 1$ кратно n^2 . Представим n в виде $n = 3^a m$, где m не кратно 3. Тогда $a > 1$. Индукцией

по a при помощи формулы суммы кубов можно доказать, что $(2m)^{3^a} + 1$ не делится на 3^{a+2} . Число n^2 делится на 3^{2a} . Очевидно, $2a \geq a + 2$. Значит, $2^n + 1$ не делится на n^2 при $n > 3$.
Ответ: $n = 1$ или 3 .

42. а) Пусть $2^n - 1$ кратно n , причем $n > 1$. Тогда n нечетно. Рассмотрим наименьший простой делитель p числа n . Порядок числа 2 по модулю p не превосходит $p - 1$ и является делителем числа n . Поскольку этот порядок больше 1, мы получили противоречие.

б) Например, числа вида $n = 6k$.

в) Рассмотрим последовательность, заданную своим первым членом $n_1 = 1$ и соотношением $n_{k+1} = a^{n_k} - 1$.

43. а) Указание. Если a четно, то $a^{a+1} + 1$ делится на $a + 1$. Если же a нечетно, то $a^2 + 1$ четно, но не делится на 4, так что $a^{a^2+1} + 1$ делится на $a^2 + 1$. Значит, хотя бы одно n , для которого $a^n + 1$ кратно n , существует.

б) Ответ: при всех a , кроме чисел $3, 7, 15, \dots, 2^k - 1, \dots$

Указание. Если $a + 1$ делится на простое нечетное число p , то $a^p + 1$ делится на p^2 . Если же $a + 1 -$ степень двойки, $n > 1$ и $a^n + 1$ делится на n^2 , то, в силу упражнения 38, n четно; а при четном n число $a^n + 1$ не делится на 4.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. На кусочке бумаги, являющейся диэлектриком, возникают поляризационные заряды. Электрическое поле вблизи расчески сильнее, чем вдали от нее, поэтому сила притяжения к расческе больше, чем сила отталкивания (рис.3). В однородном же поле плоского конденсатора на поляризованный диэлектрик действуют равные по величине и противоположно направленные силы.

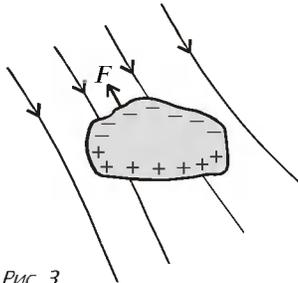


Рис. 3

друг другу. Ослабление поля внутри диэлектрика из-за его поляризации компенсируется увеличением плотности заряда на нижней части обкладок конденсатора.

4. Пленка диэлектрического окисла, образующегося на поверхности обкладки, имеет очень маленькую толщину.

5. Не изменятся.

6. Из-за поляризации диэлектрика внутри пластины изменятся направление и густота силовых линий (рис.4).

7. См. рис.5. При переходе границы диэлектрика число силовых линий изменяется скачком из-за действия поляризационных зарядов.

8. При погружении в диэлектрик разность потенциалов, а следовательно, и напряженность электрического поля между шариками не изменяется. Это достигается увеличением зарядов шариков в ϵ раз, где ϵ — диэлектрическая проницаемость жидкости. Значит, сила притяжения между шариками возрастет в ϵ раз.

9. Заряд каждой обкладки увеличится в ϵ раз (см., например, решение предыдущей

Рис. 4

задачи), во столько же раз возрастет напряженность поля, порождаемого в воздухе каждой из обкладок. Поэтому сила притяжения между обкладками увеличится в ϵ^2 раз.

10. Более высокое пробивное напряжение требует более толстого слоя диэлектрика, а это вызовет уменьшение емкости. Чтобы сохранить заданную емкость, требуется увеличить площадь обкладок.

Обе причины ведут к увеличению объема конденсатора.

11. $\epsilon = 2$.

12. Уменьшится в ϵ раз.

13. Дипольные моменты в диэлектрике ориентируются в электрическом поле с запаздыванием.

14. Металлы.

15. Да, так как в поле электрона ядро атома и его электронная оболочка изменяют свое взаимное положение. Электроны, отталкиваясь, смещаются против поля, а ядро, притягиваясь, смещается в направлении внешнего поля, в результате у атома появляется дипольный момент.

16. См. рис.6.

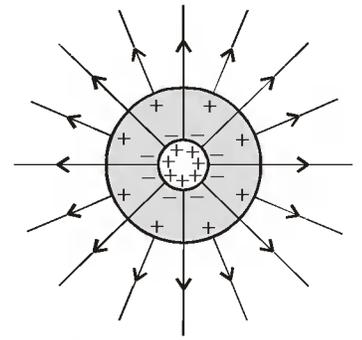


Рис. 5

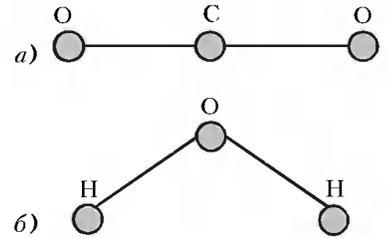


Рис. 6

Микроопыт

Электрическое поле вблизи клемм аккумулятора или полюсов батарейки слишком слабо для заметной поляризации диэлектрика.

Поляры и теорема Паппа

1. Выберем за центр полярного преобразования точку O . Обозначим поляры прямых l и m буквами B и C . Тогда полярной точки A является прямая BC .

Обозначим через N полярю прямой LM . Тогда полярами точек L и M будут прямые BN и CN соответственно.

Поскольку OL и OM — касательные к окружности, то

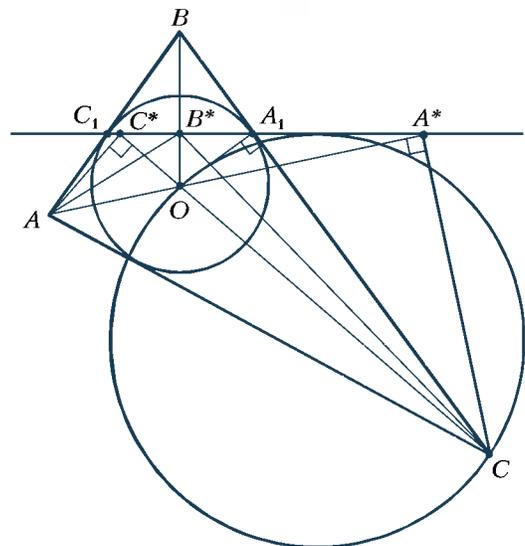


Рис. 7

$\angle LOA = \angle AOM$. Следовательно, полярны точек L и M образуют равные углы с полярной точки A (обдумайте это!).
Вспомнив, что чья полярна, получаем: прямые BN и CN образуют равные углы с прямой BC . Попросту говоря, треугольник BNC равнобедренный. $BN = NC$.
Значит, точка N лежит на серединном перпендикуляре к прямой BC . Полярна к этому перпендикуляру как раз и является той точкой, через которую проходят всевозможные прямые LM .

2. Выполним полярное преобразование относительно вписанной в треугольник ABC окружности. Полярными точек A_1 и C_1 являются прямые BC и AB . Полярна прямой MN лежит на полярной точки B , т. е. на прямой A_1C_1 .

Поскольку прямая MN параллельна A_1C_1 , то полярны этих двух прямых и точка O лежат на одной прямой. Следовательно, полярна прямой MN — это точка B^* пересечения OB и A_1C_1 (рис.7).

Полярны точек M и N — это прямые AB^* и CB^* . Поэтому

$$\angle AB^*C = 180^\circ - \angle MON,$$

так что задача свелась к доказательству того, что угол AB^*C тупой.

Проведем биссектрисы AO и CO до пересечения с прямой A_1C_1 в точках A^* и C^* соответственно.

Лемма. $\angle AA^*C = 90^\circ$.

Доказательство. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle A^*OC = \angle OAC + \angle OCA$. По теореме об угле между хордой и касательной $\angle C_1A_1C = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle C_1OA_1)$. Следовательно,

$$\angle A^*OC + \angle C_1A_1C = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \beta),$$

где для краткости введены обозначения α, β, γ для углов треугольника ABC . Упростив полученное выражение, находим

$$\angle A^*OC + \angle C_1A_1C = 180^\circ.$$

Значит, четырехугольник OA_1A^*C вписанный и по теореме о вписанном угле $\angle OA^*C = \angle OA_1C = 90^\circ$.

Лемма доказана. Аналогичным образом можно доказать равенство $\angle OC^*A = 90^\circ$.

Теперь решение упражнения не составляет труда: как мы только что доказали, точки A^* и C^* лежат на окружности с диаметром AC . Точка B^* лежит между ними и потому находится внутри окружности с диаметром AC . Последнее как раз и означает, что угол AB^*C тупой.

Закон сохранения энергии для одноатомного идеального газа

1. $A = 2R\Delta T \approx 5$ Дж. 2. $Q = A + 3/2 R\Delta T$.
3. $A_{12} = 2A - 3/2 RT_1 = 935$ Дж. 4. $\eta_1 = 2\eta/(1 + \eta)$.

Всероссийская студенческая олимпиада по физике

1. $\tau = (\pi + 2)\sqrt{R/g} \approx 69$ мин. 2. $\omega_2 = \omega_1 R_1 / (\sqrt{2} R_2)$.
3. а) $T_1 = \sqrt{3/2} T_0, \varphi_1 = \varphi_0, E_1 = E_0$;
б) $T_1 = \sqrt{3/2} T_0, \varphi_1 = \sqrt{2/3} \varphi_0, E_1 = 2/3 E_0$.
4. $T = mv_0^2 / (4k)$, где k — постоянная Больцмана;
 $N = 8\sqrt{2\pi} \pi R^3 n_0 / 3$.
5. $\sigma = \epsilon_0 (U_1 - U_2) / d \approx 9,4 \cdot 10^{-7}$ Кл/м²;
 $m_1 = \epsilon_0 (U_1^2 - U_2^2) / (2gd^2) \approx 9,3 \cdot 10^{-3}$ кг/м².
6. $d = 50L$. 7. $B = (rtg\theta) / q$. 8. $I = I_0(1 + 9\pi^2/4)$.

Периодические дроби

(с.м. «Квант» №2)

2. Длина периода равна 6. При делении на 6 число 100 дает остаток 4. Поэтому сотая после запятой цифра такая же, как четвертая. **Ответ:** 5.

4. б) **Указание.** $0,(845) + 0,(49) = 0,(845845) + 0,(494949)$. Поскольку сумма $845845 + 494949 = 1\,340\,794$ — семизначное число, возникают переносы «в предыдущий период».

в) Очевидно, $2,70(584) = 2,705(845)$. Расширив периоды до длины, равной наименьшему общему кратному периодов слагаемых, получим: $2,705(845) + 6,917(49) = 2,705(845845) + 6,917(494949) = 9,623(340795)$.

5. а) $0,(23)$; б) $0,(001234)$.

6. а) $0,(012) = 12/999 = 4/333$; б) $3,1(3) = 3 + 0,1 + 0,0(3) = 3,1 + \frac{1}{10} \cdot 0,(3) = 3,1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{47}{15}$; в) $1,93(173) = 1,93 + \frac{1}{10} \cdot 0,(173) = 1,93 + \frac{1}{10} \cdot \frac{173}{999} = 9649/4995$.

7. **Указание.** Сумма (произведение, разность) двух обыкновенных дробей (рациональных чисел) — обыкновенная дробь.

8. **Указание.** Сначала напишите все те цифры, которые входят в запись конечное число раз. А затем — те, которых бесконечно много (составив из них период).

9. $0,(692307) = 7,(692307) - 7 = \frac{100}{13} - 7 = \frac{9}{13}$.

10. а) $\frac{12}{85} = \frac{24}{170} = \left(1 + \frac{7}{17}\right) : 10 = 0,1(4117647058823529)$;

б) $\frac{3}{68} = \frac{75}{1700} = \left(4 + \frac{7}{17}\right) : 100 = 0,04(4117647058823529)$.

11. в) **Указание.** Поскольку $k \geq 3$, то $n \geq 3 \cdot 2^c$.

12. Предположим противное: пусть $n \leq 100$ и дробь m/n содержит цифры 167 в своей десятичной записи. Тогда, домножив дробь на степень десятки и вычтя образовавшуюся целую часть, получим дробь, в которой цифры 167 идут сразу после запятой. Домножим такую дробь на 6. Поскольку $167 \cdot 6 = 1002$ и $168 \cdot 6 = 1008$, получим число, которое больше 1 и меньше 1,008 $< 1,01$. При умножении на n получаем (целое!) число, которое больше n и меньше $n + 0,01n \leq n + 1$. Но такого целого числа не существует. Противоречие.

13. $\left[\frac{100}{6}\right] = 16$.

14. Число $\overline{11\dots1}$ кратно 7 тогда и только тогда, когда n кратно 6. Число $\overline{111111}$ кратно и 11, и 13, и 15873 ($=111111/7$).

15. При k , кратных 6.

16. **Указание.** Подумайте, что происходит при делении «уголком». **Ответ:** $n = 2$, а m — четное число.

17. а) По условию, $10^n - 1$ не кратно числу p , а $10^{2n} - 1 = (10^n - 1)(10^n + 1)$ кратно p . Следовательно, $10^n + 1$ кратно p .

Пусть $1/p = (10^n a + b) / (10^{2n} - 1)$, где $0 \leq a, b < 10^n$. Тогда $(10^n a + b) / (10^n - 1) = (10^n + 1) / p$ — целое число. Поскольку

$10^n a + b = (10^n - 1)a + (a + b)$ кратно числу $10^n - 1$, то сумма $a + b$ тоже кратна числу $10^n - 1$. Заметив, что $0 < a + b < 2(10^n - 1)$, заключаем: $a + b = 10^n - 1$.

18. а) 15.

19. а) Поскольку $1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$, число $A = \frac{11\dots1}{1986}$ имеет кроме числа 1 и самого A еще шесть делителей из одних единиц: 11, 111, 111111, $\frac{11\dots1}{31}$, $\frac{11\dots1}{662}$ и $\frac{11\dots1}{993}$.

б) Поскольку $111111 = 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ и поскольку $10^{993} + 1$ кратно числу $10^3 + 1 = 1001$, а $10^{993} - 1$ кратно $10^3 - 1 = 999$, то, обозначив $a = 10^{331}$, получаем:

$$A = \frac{(a^6 - 1)/9}{(a^3 + 1)(a^3 - 1)/9} = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \frac{a^3 + 1}{1001} \cdot \frac{a^3 - 1}{999}.$$

Произведение любого набора из этих семи множителей является делителем числа A («пустому набору» соответствует 1). Таким образом, мы нашли $2^7 = 128$ делителей. Все они различны, поскольку семь выписанных множителей попарно взаимно просты. (В самом деле, остаток от деления a на $m = 10^6 - 1$ равен 10, поскольку $10^{331} - 10 = 10(10^{655} - 1)$ кратно m ; поэтому $a^3 \pm 1$ при делении на m дает остаток $10^3 \pm 1$, так что числа $(a^3 + 1)/1001$ и $(a^3 - 1)/999$ взаимно просты с m и, очевидно, взаимно просты друг с другом.)

в) Продолжим разложение:

$$A = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \frac{a+1}{11} \cdot \frac{a^2 - a + 1}{91} \cdot \frac{a-1}{9} \cdot \frac{a^2 + a + 1}{111}.$$

Отсюда видно, что A имеет не менее $2^9 = 512$ делителей. В силу малой теоремы Ферма число $9A = 10^{1986} - 1$ кратно простому числу 1987. Таким образом, один из четырех последних сомножителей разложения кратен 1987, а значит, A имеет не менее $2^{10} = 1024$ делителей.

20. а) 6; б) 6.

21. а) 4 или 12; б) 15, 30 или 60.

22. а) Обозначим ПЛОМБ = x . Тогда $(10x + A) \cdot 5 = 100000 \cdot A + x$, откуда $49x = 99995A$.

Ответ: ПЛОМБА = 142857.

б) 714285. в) $6000x + 6y = 1000y + x$, $5999x = 994y$, $859x = 142y$, откуда $x = 142$ и $y = 859$.

г) Да, таково число 142857.

д) 102564, 128205, 142857, 153846, 179487, 205128 и 230769.

23. Указание. Если $10000a + b$ кратно 41, то $10(10000a + b) = 99999a + a + 10b = 41 \cdot 2439a + (10b + a)$ тоже кратно 41.

24. 105263157894736842.

25. Указание. Записав числители в системе счисления с основанием a и «прокрутив» их, разбейте дроби на циклы по n дробей в каждом.

26. Указание. Это — переформулировка того факта, что $L(3^{n+2}) = 3^n$.

27. а) 81; б) 9^9 ; в) $2 \cdot 11^{10}$; г) $2 \cdot 3^k \cdot 7^{l-1}$.

28. На 2^6 .

31. При делении «уголком» 1 на 3^{100} получаем периодическую десятичную дробь с периодом длины $M = 3^{98}$. Поэтому в процессе деления встретятся M различных остатков. Первый из остатков равен 1, а каждый следующий получается из пре-

дыдущего умножением на $10 (= 9 + 1)$ и вычитанием числа, кратного 3^{100} . Эти процедуры не меняют остаток от деления на 9. Поэтому появляющиеся в процессе деления остатки имеют вид $9q + 1$, где $0 \leq q < M$. Поскольку чисел такого вида ровно M штук, все они встретятся в качестве остатков. Остальное просто. Пусть $a = 0, a_1 a_2 \dots a_{46}$ — десятичная дробь, $b = a + 10^{-46}$. Поскольку $3^{100} > 10^{47}$, разность чисел $3^{100} b$ и $3^{100} a$ больше 10. Следовательно, между ними найдется число вида $9q + 1$. В процессе деления, начиная с остатка $9q + 1$, будут получены все 46 цифр $a_1 a_2 \dots a_{46}$: ведь $a < (9q + 1)/3^{100} < b$.

32. Известны два таких простых числа 487 и 56598313.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
<http://www.courier.com.ru>

Vivos Voco!
<http://www.accessnet.ru/vivovoco>
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова,
А.И.Пацхверия, М.А.Сумнина, В.М.Хлебникова,
П.И.Чернуцкий**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

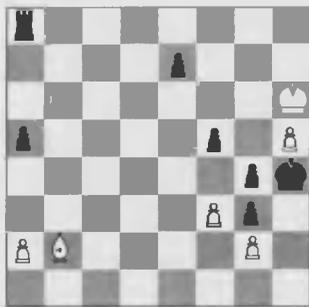
Адресредакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
ГУП Чеховский полиграфический комбинат
Министерства Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
142300, г. Чехов Московской области,
Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536
Заказ №

КОРОЛЕВСКИЕ

ЭТЮДЫ-IV



В.Смыслов, 1938

Ничья

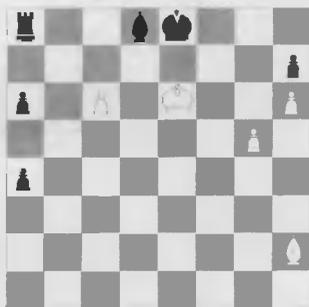
Один из самых популярных этюдов гроссмейстера.

1. ♔f6+! еf 2. f4 ♚h8+ 3. ♖g7! Недостаточно 3. ♖g6 ♚:h5. 4. ♖g7 ♚g5+ 5. ♖h8 ♚h5 6. ♖h7 ♚g6 7. a3 ♚h6+ 8. ♖g7! a4!, и черные бьют верх.

3... ♚:h5 4. a4 ♚g5+ 5. ♖h8! На 5. ♖h7? следует ответ 5... ♚h5!, и вновь выигрывают черные.

5... ♚g6 6. ♖h7 ♚h5 7. ♖h8 ♚h6+ 8. ♖g7 ♚g6+ 9. ♖h8. Ладья не в состоянии вырваться на свободу. 9... ♚h6 пат.

Теперь два образца этюдного творчества Смыслова 80-х годов.



В.Смыслов, 1986

Выигрыш

1. g6! hg 2. h7 ♔f6 3. ♔b8! Препятствуя длинной рокировке: после 3. ♖:f6 0-0-0 на доске ничья.

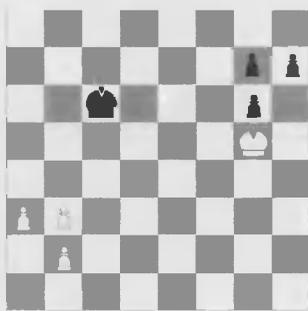
3... ♚:b8 4. ♖:f6 ♚d8 5. h8 ♚+ ♚c7 6. ♖h2+! с победой.

Интересен и так называемый эхо-вариант: 1... ♔b6 2. ♔b8! И здесь нельзя допускать рокировку: 2. g7 0-0-0 3. ♔d6 ♚g8 4. ♖f7 ♔e3! Черные успевают отдать слона за пешки «g» и «h», при помощи a4-a3 отвлечь белого слона от пункта c7 и забрать последнюю белую пешку.

В.Смыслов, Г.Надареишвили, 1986

Выигрыш

Это произведение авторы образно назвали «шахматные часы». Правда, на-



В.Смыслов, 1998

Выигрыш

1. ♔b8. На 1. ♔:b6 или 1. ♚d2 следует 1... ♚g5.

1... a1 ♚ 2. ♔:e5! ♚:e5 3. ♚d2 ♚e4+ 4. ♔:e4 fe 5. c5 bc 6. b5 a3 7. b6 a2 8. b7 a1 ♚ 9. b8 ♚g5 10. ♖f4×.

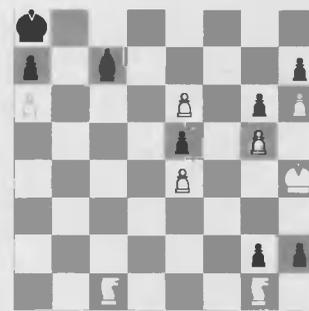
Другой вариант: 3... ♚g5 4. f4+ ♚:f4 5. ef+ ♚:f4 6. c5 bc 7. b5 ♚e5 8. ♚c4+ ♚d5 9. ♚b6+ ♚d6 10. h4! a3 11. ♚c4+ и 12. ♔:a3 с победой.

В.Смыслов, 1998

Выигрыш

1. e7 h1 ♚+ 2. ♖g3 ♔b8 3. ♚ce2 ♚h5 4. ♚f3 ♚h1 5. ♚eg1 ♚h5 6. ♚h3 g1 ♚+ 7. ♚h:g1 ♚h1 8. e8 ♚! ♚h5 9. ♚h3, и черные остались у разбитого корыта.

Михаил таль свой единственный этюд составил в соавторстве с шахматным композитором.



М.Таль, Э.Погосянц, 1969

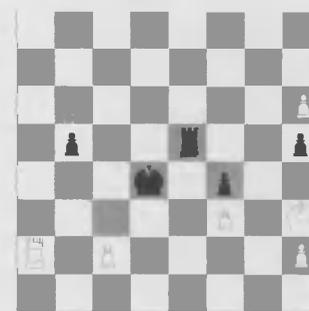
Выигрыш

1. ♚d4++ ♚e1 2. ♖h2! ♚d1! Менее упорно 2... ♚f2 3. ♚c2+ ♚e2 4. ♖h5+ ♚f1 5. ♖h1+ ♚g1 6. ♖f3+ ♚f2 7. ♚:e3+ ♚g1 8. ♖d1+ ♚h2 9. ♚g4+, или 2...e2 3. ♚c2+ ♚d1 4. ♖d6+.

3. ♖h7! ♚e1. На 3... ♚e1+ решает 4. ♖b3 ♖f2 5. ♖b1+ ♚d2 6. ♖c2+ ♚e1 7. ♖c1×, или 4... ♚d2 5. ♖h1+ ♚e1 6. ♖h5+ e2 7. ♚f3.

4. ♖h4+. Но не 4. ♖e4? ♚f2 5. ♖f3+ ♚g1 6. ♚e2+ ♚h2 7. ♖:f1 пат. Теперь же возникают знакомые варианты: 4... ♚f2 5. ♚c2+ ♚e2 6. ♖h5+, 4... ♚d1 5. ♖e4! ♚e1+ 6. ♖b3 ♖f2 7. ♖b1+, 6... ♚d2 7. ♖h1+ с выигрышем.

Единственный этюд Тиграна Петросяна получился в результате анализа одной отложенной партии.



Т.Петросян, 171

Ничья

Фигуры черных заметно активнее, но у белых находится эффектное спасение.

1. ♚a5! ♚c3. Плохо 1... ♚e3 из-за 2. c4. 2. ♖h4 ♚:c2 3. h3!!!, и выясняется, что нет защиты от 4. ♚:b5! С патом.

Е.Гук

Физики на монетах мира

Портрет великого физика современности ЭРВИНА ШРЕДИНГЕРА представлен на банкноте самого высокого достоинства Австрийской Республики в 1000 австрийских шиллингов. Символ в центре декоративного изображения атома представляет собой общепринятое обозначение волновой функции – главной характеристики состояния любой квантово-механической системы. На обратной стороне банкноты изображено здание Венского университета, в котором учился и начал свою творческую деятельность создатель волновой механики.

(Подробнее о волновой механике Эрвина Шредингера – внутри журнала.)

