СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ
ISSN 0130-2221
2000 · №5

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Поменяйте местами

В прямоугольной коробочке с размером дна 16×8 находятся 12 одинаковых Р-образных блоков. Каждый блок содержит 8 единичных квадратиков. Форма блоков, их относительные размеры и первоначальное расположение показаны на рисунке. Два блока вверху и два внизу, раскрашенные в разные цвета, образуют квадраты.

Требуется, передвигая за один раз лишь один блок, переставить их так, чтобы в конечной позиции квадраты разных цветов поменялись местами (положение остальных блоков остается таким же, как и вначале). Ни один из передвигаемых блоков нельзя поворачивать, даже если пустое пространство позволяет выполнить маневр. Блоки можно сдвигать вправо, влево, вверх и вниз, но их ориентация должна оставаться неизменной. При этом ходом считается любое перемещение одного блока, даже если его приходится передвигать не по прямой, а углом.

Какое наименьшее количество ходов потребуется для решения головоломки?

Решите эту же задачу при условии, что цветные квадраты неразъемные: блоки, из которых они состоят, можно передвигать только парами.

Л.Мочалов

КВАНТ СЕНТЯБРЬ ОКТЯБРЬ 2000 № 5

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:


Сверхтекучесть
сверхпроводимость
сверхустойчивость
сверхботиночность

Сверх...

М.КАГАНОВ

Я ЛЮБЛЮ ЧИТАТЬ СЛОВАРИ и энциклопедии. Всегда найдешь много интересного, даже когда перелистываешь энциклопедическое издание, отвечающее твоей профессии.

Два года назад произошло важное событие в научной и культурной жизни России: выходом в свет пятого тома завершилось издание «Физической энциклопедии» (гл. ред. А.М.Прохоров, М.: Большая Российская энциклопедия). На издание всех пяти томов ушло более 10 лет: первый том вышел в 1988 году. Энциклопедические издания такой полноты (пять томов!) выходят редко, предыдущее было осуществлено более 20 лет назад. Похоже, последнее издание «Физической энциклопедии» (ФЭ) будет служить и тем из моих сегодняшних читателей, кто выберет своей профессией физику. Но и сейчас, уверен, вам будет интересно прочесть многие статьи из ФЭ. Правда, придется опускать подробности – их понимание требует значительно больших знаний, чем вы имеете сейчас.

Перелистывая 4-й том ФЭ, еще до того как у меня появился 5-й, я обратил внимание на то, какому большому числу физических терминов присвоен «титул» СВЕРХ. Мне захотелось на страницах журнала «Квант» поделиться своим наблюдением и, кроме того, рассказать, что́ «скрывается» за некоторыми из терминов. Я уже было взялся за дело, но увидел, что в ряде случаев авторы статей отсылают меня к статьям, которые должны быть в 5-м томе (ничего не поделаешь, энциклопедии строятся строго по алфавитному принципу). Теперь 5-й том у меня есть, и я могу осуществить свое желание.

Итак, перечень слов, начинающихся слогом «сверх», открывает термин «сверхвысокие частоты» (т.4, с.421). Соответствующая статья занимает всего четыре строки. Приведем ее полностью:

«Сверхвысокие частоты (СВЧ) – область радиочастот от 300 МГц до 300 ГГц, охватывающая дециметровые волны, сантиметровые волны и миллиметровые волны (см. *Радиоволны*)».

Слово «*Радиоволны*» напечатано курсивом. Это означает, что в ФЭ есть статья с таким названием. Действительно, в этом же томе на странице 213 такая статья есть. Кроме исторической справки [1], она содержит две таблицы, позволяющие ознакомиться с принятой терминологией, узнать, какие волны именуют длинными, какие средними, короткими и т.д.

Я насчитал 30 статей, название которых начинается со «сверх...». Относятся они к самым разным разделам физики. Однако если человека, интересующегося физикой, попросить назвать слова, начинающиеся со слога «сверх», почти наверняка он назовет сверхпроводимость и сверхтекучесть. И действительно, сверхпроводимости в ФЭ посвящено шесть статей, а сверхтекучести – три. Это неудивительно: сверхпроводимость и сверхтекучесть, пожалуй, наиболее интересные квантовые макроскопические явления.

После открытия сверхпроводников, сверхпроводимость в которых не исчезает при повышении температуры вплоть до $T \approx 100$ К (их называют высокотемпературными сверхпроводниками [2]), появилась надежда на техническое использование сверхпроводимости: в ФЭ есть статьи «Сверхпроводниковые приемники излучения» и «Сверхпроводящий магнит». Сверхпроводящие магниты стали широко распространенными источниками магнитного поля, во всяком случае – в физических лабораториях.

Статьи-спутники основной статьи «Сверхтекучесть», уверен, у многих (и не только у начинающих физиков) вызовут удивление. Одна называется «Сверхтекучая модель ядра», а другая – «Сверхтекучесть атомных ядер». Оказывается, в атомных ядрах средних и больших размеров «движение нейтронов и протонов ... аналогично движению электронов в сверхпроводниках», а сверхпроводимость – это сверхтекучесть заряженной жидкости. Отсюда и название. По-моему, весьма любопытный факт: объяснение свойств субмикроскопических сгустков протонов и нейтронов требует привлечения представлений, используемых при изучении объектов макроскопической физики – металлов и жидкого гелия.

Многие статьи из рассматриваемого нами цикла посвящены радиофизике, в частности сверхнизкочастотным (или сверхдлинным) волнам, частоты которых от 3 до 30 кГц (длины волн от 10 до 100 км). В статье «Радиоволны» сказано, что есть также диапазон крайне низких частот (КНЧ) с частотами в тысячу раз меньше: от 3 до 30 Гц.

Статья «Сверхнизкочастотные радиоволны» привлекла мое внимание потому, что «распространение радиоволн сверхнизкочастотного (СНЧ) диапазона происходит в волноводном канале, ограниченном поверхностью Земли и нижней кромкой ионосферы, высота которой в зависимости от времени суток и геофизических условий изменяется от 60 до 90 км». Уверен, вы уже знаете о существовании ионосферы – слоя ионизованных газов в верхней части

---

[1] В исторической справке две фамилии: Г.Герц, в опытах которого впервые (1888) были получены электромагнитные волны с длиной волны λ в несколько десятков сантиметров, и А.С.Попов, который впервые (1895–99) применил электромагнитные колебания с $\lambda = 10^2 - 2 \cdot 10^4$ см для осуществления беспроволочной связи на расстоянии. Фамилии Маркони, в 1897 году получившего патент на изобретение радио, в статье нет. Попов же свое открытие не патентовал.

[2] Статья о высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП) названа в ФЭ так: «Оксидные высокотемпературные сверхпроводники». Название подчеркивает химический состав соединений, которые имеют аномально высокие критические температуры. Однако, скорее всего, такое название позволило включить в ФЭ необходимую статью уже после того, как вышел из печати 1-й том, куда она должна была попасть, если бы называлась ВТСП. Когда оксидные соединения «обнаружили» свои сверхпроводящие свойства (1986), подготовка к печати 1-го тома уже была закончена.

Иллюстрация Л.Тишкова

атмосферы. Во 2-м томе ФЭ есть большая статья «Ионосфера» и небольшая специальная статья «Ионосферный волновод», упомянутый выше. Из них можно почерпнуть много интересных сведений. И еще одну статью рекомендую посмотреть, если вас заинтересовала роль ионосферы в распространении радиоволн: «Сверхдальнее распространение радиоволн». Кстати, она тоже принадлежит к «сверх». Мне кажется, рекомендуемые статьи уже доступны вам. Правда, надо научиться читать подобные статьи: запоминать утверждения и факты и откладывать на будущее строгое их объяснение.

В большинстве статей термин «сверх» имеет смысл количественного сравнения: нечто большее чего-то обычного. Например, сверхизлучение, сверхинжекция, сверхлюминесценция и т.п. Пожалуй, только сверхтекучесть и сверхпроводимость обозначают качественно новые явления. Однако не надо забывать старую истину: количество переходит в качество. Характерные примеры: сверхзвуковое течение и сверхсветовая скорость.

Сверхзвуковому течению посвящена большая статья, что неудивительно, так как «с изучением сверхзвукового течения связан ряд важных практических проблем, возникающих при создании самолетов, ракет, снарядов со сверхзвуковой скоростью полета...». В процитированной статье много схем, позволяющих понять основные утверждения статьи и, например, усвоить, какова аэродинамически совершенная (т.е. создающая относительно малое сопротивление) форма тела при сверхзвуковой скорости его движения.

Увидев статью «Сверхсветовая скорость», я подумал, что она будет посвящена движению заряженной частицы со скоростью, превышающей скорость света в среде и равной c/n, где c – скорость света в вакууме, а n – показатель преломления среды, в широком диапазоне длин волн превышающий единицу. Как известно, такое движение сопровождается излучением света, называемым излучением Черенкова – Вавилова. В конце статьи «Сверхсветовая скорость» действительно есть ссылка на статью с названием «Черенкова – Вавилова излучение» (она опубликована в 5-м томе).

Начнем читать статью: «Сверхсветовая скорость – скорость, превышающая скорость света. Согласно *относительности теории* [3], передача любых сигналов и движение материальных тел не может происходить со скоростью, большей скорости света в вакууме c. Однако...». Разъяснению, почему могут существовать движения со скоростями, большими c, и каковы они, посвящена статья.

Вот простой пример (он взят из обсуждаемой статьи). С помощью вращающейся электронной пушки (т.е. источника электронов) можно заставить вращаться электронный луч. Если ось вращения окружить экраном, реагирующим на падающий на него электронный луч, то пятно (след луча) будет двигаться по экрану со скоростью $R\Omega$, где R – расстояние от электронной пушки до экрана, а Ω – угловая скорость вращения. Ничто не мешает пятну двигаться по экрану быстрее скорости света. Но при движении пятна по экрану не переносится ни информация о состоянии экрана, ни энергия вдоль экрана. Энергия и информация о состоянии электронной пушки переносится электронами вдоль пучка, и, естественно, скорость переноса (скорость электронов в пучке) не может превосходить скорость света в вакууме.

Пятна на экране могут быть источниками света. Это означает, что можно создать источники света, движущиеся со скоростью, большей скорости света в вакууме. Можно, конечно, обойтись без электронного пучка: расположить вдоль линии лампочки и договориться зажигать их последовательно в таком темпе, чтобы источник света (зажженная лампочка) перемещался по линии со скоростью, большей c. Интерференционная картина, возникающая при этом, очень интересна и тщательно исследована учеными.

Еще примеры движения со сверхсветовой скоростью.

Если стенки трубы не поглощают и не пропускают электромагнитные волны (например, сделаны из сверхпроводника), то такую трубу называют волноводом. Волновод – обязательный элемент СВЧ-приборов. С помощью волноводов можно электромагнитную энергию направлять куда нужно. Нам предстоит понять, чем электромагнитные волны в волноводе отличаются от электромагнитных волн в свободном пространстве и, самое главное, с какой скоростью они движутся.

Для ответа на эти вопросы придется познакомиться с характеристиками волн. Прилагательное «электромагнитных» опущено не случайно. То, что будет сказано, относится к любым волнам, или, более торжественно, к любым волновым процессам.

Вы, наверное, знаете, что любая волна характеризуется частотой, обозначим ее греческой буквой ω, и длиной волны λ (опять выбрана греческая буква). Частота описывает изменение во времени, а длина волны – в пространстве.

Если есть волна, то это волна «чего-то», т.е. «что-то» совершает волновое движение. Например, в волне на поверхности воды в водоеме движутся (волнообразно) молекулы воды. В интересующем нас случае электромагнитных волн волновое движение совершают напряженность электрического и индукция магнитного полей. В электромагнитных волнах энергия все время «перекачивается» из электрического поля в магнитное и обратно, поэтому волны и называются электромагнитными.

Для волны любой природы простейшая форма зависимости «чего-то» от координат и времени имеет вид

$$\Psi\left(\vec{r},t\right) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) \equiv A\cos\varphi, \tag{1}$$

где величина $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ (здесь функция времени t и радиуса-вектора $\vec{r}$) называется фазой. Выбрана она так, что $\varphi = 0$ при $t = 0$ и $\vec{r} = 0$ (выбор зависит от удобства). Вектор $\vec{k}$ называют волновым вектором, он направлен в сторону распространения волны (туда, куда волна бежит). Если выбрать направление оси X вдоль этого вектора, то зависимость фазы от координат заметно упростится:

$$\varphi = \omega t - kx. \tag{2}$$

[3] *Напечатаны эти слова курсивом, значит, есть статья с таким названием. Именно «относительности теория», а не «теория относительности». Слова переставлены, чтобы не было слишком много статей, начинающихся словом «теория». Кроме того, хотя порядок слов менее привычен, но зато содержательное слово стоит на первом месте.*

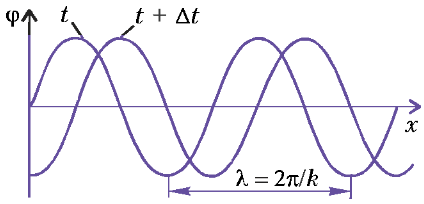


Рис.1

При изменении координаты x на длины волну λ значение «чего-то» вовсе не должно измениться (рис.1). Это значит, что фаза меняется на 2π. Следовательно, длина волнового вектора равна $k = 2\pi/\lambda$.

Заметим, формулы (1) и (2) описывают зависимость «чего-то» во всем пространстве. Простейшая волна заполняет собой все пространство. Задумайтесь, как трудно было поверить, что свет распространяется в виде волн...

Если зафиксировать время ($t = t_0$) и значение фазы ($\varphi = \varphi_0$), то получим

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\omega t_0 - \varphi_0\right)$$

при произвольных значениях координат y и z. Другими словами, во всей плоскости

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\omega t - \varphi\right)$$

фаза одна и та же. Ее так и называют плоскостью равной фазы, а волну называют плоской. Так как волна имеет вполне определенную частоту, к ее наименованию добавляют прилагательное «монохроматическая». Волны (1) и (2) – плоские монохроматические волны.

Теперь «освободим» время, а фазу будем «держать» равной φ_0 . Тогда

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\omega t - \varphi_0\right). \qquad (3)$$

Мы видим, что плоскость равной фазы перемещается со скоростью, равной $\lambda\omega/(2\pi)$. Ее называют фазовой скоростью. Итак,

$$u_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} \qquad (4)$$

есть скорость распространения фазы волны.

Задумаемся: может ли плоская монохроматическая волна переносить сигналы и/или энергию из одной точки пространства в другую? Боюсь, многим вопрос покажется странным: все знают, что основную информацию нам приносят радиоволны, а телевизор или радиоприемник их лишь расшифровывают, делая информацию доступной органам чувств – зрению, слуху.

И все же правильный ответ на заданный вопрос: нет! Плоская монохроматическая волна переносить ни энергию, ни какой-либо сигнал не может. Согласно определению, она не только заполняет все пространство, но и всегда его заполняла и будет всегда заполнять (формула (1) справедлива не только при любом значении координаты, но и при любом значении времени).

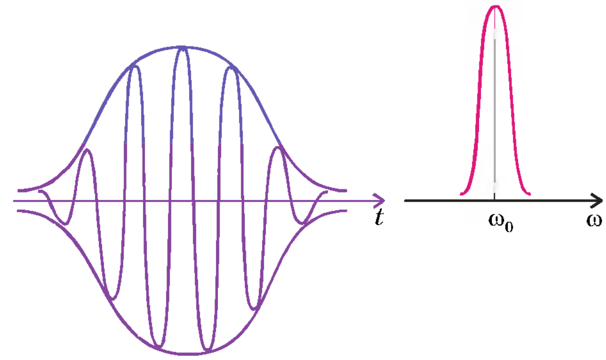


Рис.2

Переносить сигналы и энергию могут только более сложные образования из волн. Например, пакеты (группы) волн (рис.2). Пакет надо создать так, чтобы он был в пространстве ограничен. Тогда, перемещаясь в пространстве, пакет волн будет переносить информацию и энергию. Скорость распространения пакета волн не всегда совпадает с фазовой скоростью волны. Можно показать, что скорость распространения пакета, или группы, волн равна

$$u_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \qquad (5)$$

Ее так и называют групповой скоростью. Фазовая скорость может быть сколь угодно большой и, тем самым, служить примером сверхсветовой скорости. Групповая же скорость, в согласии с теорией относительности, не может превышать скорость света в пустоте ($u_{\text{гр}} \le c$).

Для электромагнитных волн в пустоте существует простое соотношение, связывающее частоту ω и волновой вектор $\vec{k}$:

$$\omega = ck, \qquad (6)$$

где, повторим, c = 299792458 м/с – скорость света в пустоте, одна из фундаментальных физических констант (значение взято из статьи «Фундаментальные физические константы»). Формулы (4)–(6) показывают, что в пустоте фазовая и групповая скорости электромагнитных волн совпадают: обе равны c.

Соотношение (6) столь привычно, что я его назвал простым соотношением. Научное открытие превращает чудо в тривиальность – эта мысль принадлежит Эйнштейну. Соотношение (6) открыл великий Дж.Максвелл, сформулировав свои знаменитые уравнения (уравнения Максвелла) электромагнитного поля. Причем константа c появилась в уравнениях Максвелла не как скорость света, а как величина, входящая в соотношения, связывающие изменение магнитного поля с изменением электрического и наоборот. Ее величину можно определить независимо от оптических измерений: например, по возникающей разности потенциалов при пересечении проводником линий магнитной индукции.

Небольшое отступление (а к волнам в волноводе мы еще вернемся).

Когда свет распространяется в прозрачной среде, соотношение (6) несколько усложняется:

$$\omega = \frac{c}{n}k. \qquad (7)$$

Величину n мы уже упоминали: это показатель преломления. Почему он так называется? Потому что от него зависит преломление света на границе двух сред. Наверное, все вы помните опыт Ньютона, показавшего, что солнечный свет представляет собой смесь разных цветов. Опыт продемонстрировал не только то, что солнечный свет состоит из различных цветов, но и то, что каждый из них преломляется по-своему. Это означает, что показатель преломления зависит от цвета, т.е. от частоты: показатель преломления n есть функция частоты ($n = n(\omega)$).

Ранее записанные формулы (4)–(7) дают возможность вычислить фазовую и групповую скорости:

$$u_{\text{фаз}} = \frac{c}{n},\ u_{\text{гр}} = \frac{c}{n + \omega\frac{dn}{d\omega}}. \qquad (8)$$

Представьте себе физика-теоретика, который знает теорию относительности и поэтому уверен, что групповая скорость не должна превосходить скорость света в пустоте ($u_{гр} \le c$). Он впервые вывел формулу (8), смотрит на нее и недоумевает: что может заставить функциональную зависимость показателя преломления любого тела от частоты удовлетворять странному неравенству

$$n + \omega \frac{dn}{d\omega} \ge 1? \qquad (9)$$

Это – один из тех вопросов, ответ на который может добавить уважения к теоретической физике.

Оказывается, не прибегая ни к каким модельным соображениям, т.е. не делая никаких предположений о строении тела, можно доказать, что неравенство (9) всегда справедливо. Достаточно опереться лишь на два фундаментальных принципа: на принцип причинности и на принцип, утверждающий невозможность создания вечного двигателя второго рода. Мы нарочно сформулировали эти принципы столь абстрактно, чтобы подчеркнуть их общность. Конечно, хотелось бы продемонстрировать, как они позволяют установить строгое математическое неравенство. К сожалению, это отвлекло бы нас от основной темы статьи, но все же чуть конкретизируем.

Принцип причинности требует, чтобы реакция физического тела в любой момент времени t зависела от воздействий на тело, производимых в момент времени t или при $t_1 < t$ (до момента t, а не после). Запрет существования вечного двигателя второго рода в данном случае означает, что электромагнитная волна, распространяющаяся в равновесной среде, затухает, т.е. теряет свою энергию, а не приобретает ее (советую подумать, как в противном случае можно было бы построить вечный двигатель).

Если показатель преломления $n > 1$, то обе скорости (и фазовая, и групповая) меньше c, а если зависимость показателя преломления от частоты несущественна (т.е. можно считать, что $n = \text{const}$), то

$$u_{фаз} = u_{гр} = \frac{c}{n} < c.$$

В статье «Сверхсветовая скорость» (о которой, я боюсь, вы уже забыли) приводится пример, когда $u_{фаз} > c$, а $u_{гр} < c$: «Пример такой среды – полностью ионизованная *плазма* [4], у которой

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}, \qquad (10)$$

где e и m – заряд и масса электрона, а N – плотность электронов в плазме». Частота ω больше величины $\omega_{пл} = \sqrt{4\pi N e^2/m}$, называемой плазменной частотой. Следовательно, $n < 1$. Заметим, что при $\omega < \omega_{пл}$ показатель преломления – мнимая величина: волна не распространяется.

Используя записанные выше формулы, легко получить (для $\omega > \omega_{пл}$) красивое соотношение

$$u_{фаз} u_{гр} = c^2. \qquad (11)$$

Подсказка: удобно исходить из выражений, пригодных при произвольной зависимости $n = n(\omega)$. Согласно формуле (8),

$$u_{фаз} u_{гр} = \frac{c^2}{n^2 + \frac{1}{2}\omega \frac{dn^2}{d\omega}}.$$

Подставив значение (10) для n^2, убедимся в справедливости формулы (11).

Теперь вернемся к волноводам.

Плоская волна в волноводе «не помещается». Можно сказать, что в попытке «поместиться» волны отражаются от стенок волновода. Интерферируя, падающие и отраженные волны создают вполне определенную структуру. В плоскости сечения волновода волна никуда не бежит. Ее так и называют – стоячей. Бежит волна вдоль оси волновода, которую мы примем за ось Z. Фаза бегущей вдоль оси волновода волны мало чем отличается от фазы плоской монохроматической волны (см. формулу (2)):

$$\varphi = \omega t - kz, \; k \equiv k_z. \qquad (12)$$

Но все же отличается. В формуле (2) k – модуль волнового вектора, т.е. его полная длина. Именно эта величина входит в формулу (7), связывающую частоту с волновым вектором. В формуле (12) k – лишь проекция волнового вектора на ось волновода. Модуль волнового вектора должен включать и поперечные (относительно оси) компоненты вектора $\vec{k}$, поэтому связь между ω и $\vec{k}$ в данном случае сложнее:

$$\omega = c\sqrt{k_\perp^2 + k^2}, \; k \equiv k_z. \qquad (13)$$

Здесь $k_\perp$ – проекция вектора $\vec{k}$ на поперечное сечение волновода, она зависит от величины и формы сечения волновода. Если волновод создан двумя параллельными идеально отражающими плоскостями, то $k_\perp = (2l+1)\pi/(2d)$, где $l = 0, 1, \ldots$ – целые числа, а $2d$ – расстояние между плоскостями, образовавшими волновод. Обратите внимание, что $k_\perp$ в ноль не обращается, и при каждой форме волновода существует набор значений $k_\perp$, которые определяют форму стоячей волны в поперечном сечении волновода. Во всех случаях в наборе отсутствует ноль ($k_\perp \ne 0$), так как плоская волна «не помещается» в волновод.

Зная зависимость частоты от волнового вектора (13), нетрудно вычислить фазовую и групповую скорости волны в волноводе:

$$u_{фаз} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{c^2 k_\perp^2}{\omega^2}}}$$

и $\qquad (14)$

$$u_{гр} = c\sqrt{1 - \frac{c^2 k_\perp^2}{\omega^2}}.$$

Фазовая скорость волны в волноводе всегда больше скорости света в пустоте c, а групповая, как ей положено, всегда меньше c. Соотношение (11) снова справедливо.

Обратите, пожалуйста, внимание на важный факт: по волноводу могут распространяться не любые волны. Волны должны иметь частоту, превышающую $ck_\perp$. Слишком длинные волны не могут «подобрать» себе необходимую стоячую волну, они буквально не помещаются в волноводе.

Еще одно (последнее) отступление.

Вы, уверен, слышали о соотношениях Луи де Бройля, связывающих корпускулярные и волновые представления:

$$\varepsilon = \hbar\omega, \; \vec{p} = \hbar\vec{k}, \qquad (15)$$

где ε – энергия частицы, $\vec{p}$ – ее

[4] *Курсив, напоминаю, означает, что в ФЭ можно прочитать статью о плазме. Статья большая, а следом за ней идут еще несколько статей, в названии которых основное слово – плазма.*

импульс (количество движения), $\hbar$ – знаменитая постоянная Планка. [5] Воспользовавшись соотношениями де Бройля, запишем зависимость (13) в корпускулярных терминах:

$$\varepsilon = \sqrt{m_\perp^2 c^4 + c^2 p^2}\ ,\ m_\perp = \frac{\hbar k_\perp}{c}. \quad (16)$$

Если волна распространяется в пустоте, то из формул (6) и (15) следует равенство

$$\varepsilon = cp. \quad (17)$$

Признаюсь: это отступление написано не для того, чтобы нечто разъяснить. Оно призвано заинтересовать. Поэтому не сердитесь, если кое-что покажется «взятым с потолка». И еще. Обратите внимание: дальше некоторые слова будут напечатаны курсивом. Вы уже знаете, что таким терминам посвящены в ФЭ отдельные статьи. Но в этом разделе курсив означает нечто большее – я советую обратиться к этим статьям. Теперь можно продолжать.

Формула (17) описывает зависимость энергии *фотона* от его импульса в пустоте. А формула (16) описывает зависимость энергии фотона не в вакууме, а в волноводе. Фотон – квант электромагнитной энергии, частица, корпускула, или, как принято говорить, *квазичастица* (почти, якобы частица). Фотон – частица в том смысле, что энергия электромагнитного поля частотой ω есть сумма порций энергии величиной $\hbar\omega$. Энергии электромагнитного поля, меньшей $\hbar\omega$, не бывает.

Заметим, у фотона в вакууме если $p = 0$, то и $\varepsilon = 0$. О частицах, обладающих таким свойством, говорят, что их масса равна нулю. Таких частиц немало: кроме фотонов, есть несколько видов *нейтрино* и различные экзотические частицы, открытые в последние десятилетия при исследовании свойств *элементарных частиц.*

У фотона в волноводе, как ни странно, масса отлична от нуля. Конечно, по сравнению с электронной массой или с массой какой-либо другой более тяжелой частицы масса фотона в волноводе очень мала. Но все же отлична от нуля!

Убедиться в том, что масса фотона в волноводе (мы ее обозначили $m_\perp$) очень мала, несложно. Из таблицы в статье «Фундаментальные физические константы» можно найти все величины, относящиеся к элементарным частицам, и постоянную Планка $\hbar$. Для расчета примем $k_\perp = 1/R$, где R – радиус волновода. Как вы видите, уточнять значение $k_\perp$ и даже указывать, чему равен радиус волновода, нет необходимости: при любом разумном значении радиуса волновода масса фотона в волноводе во много раз меньше массы электрона.

Формула (16), если в ней заменить $m_\perp$ на m, и формула (17) – обе релятивистские. Они – следствие механики Эйнштейна (теории относительности). В классической механике Ньютона нет частиц с нулевой массой. Механика Ньютона – предельный случай механики Эйнштейна. Применима она при малых импульсах, т.е. при $p \ll mc$. Чаще это неравенство формулируют как признание того, что скорость частицы v мала по сравнению со скоростью света ($v \ll c$).

В механике Ньютона кинетическую энергию $\varepsilon_{кин}$ принято отсчитывать от нуля, считая, что $\varepsilon_{кин} = 0$ при $p = 0$. Поэтому, желая произвести предельный переход к классическому выражению для кинетической энергии, надо в формуле (16) прежде всего слева и справа вычесть mc^2 – энергию покоя:

$$\varepsilon_{кин} = \varepsilon - mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} - mc^2.$$

Домножив и разделив правую часть на $\sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} + mc^2$, воспользовавшись алгебраической формулой для разности квадратов и положив в знаменателе $p = 0$ ($p \ll mc$), получим привычное выражение

$$\varepsilon_{кин} = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}.$$

Формулы (15) и (16) – предвестники *квантовой механики.* Они сыграли важную роль: помогли Э.Шредингеру сформулировать свое знаменитое уравнение (уравнение Шредингера) – математическую основу квантовой механики (раньше ее называли волновой механикой). Но это – уже совсем другая тема...

[5] *Я попытался в ФЭ найти статью о соотношениях Луи де Бройля. Я искал «де Бройля соотношения», отбросил частицу «де», добавил имя. К счастью, в 5-м томе есть Предметный указатель. Проникнитесь уважением: он занимает 65 страниц, напечатан убористым шрифтом в четыре колонки. Предметный указатель позволил не перелистывать разные тома, пытаясь безуспешно отыскать необходимое слово. Прочитать о соотношениях Луи де Бройля можно в статье «Корпускулярно-волновой дуализм». Мне кажется, недостаток ФЭ – отсутствие Именного указателя.*


Fig 1
валюта
Fig 2
акция
Fig 3
облигация

Деньги – деньги – деньги

Е. ФЕДОРОВ

– Мы не валютчики, – раздались отдельные обиженные голоса в театре, – но дело это немыслимое...

– Валютчик он! – выкрикивали в зале, – из-за таких-то и мы невинно терпим!

М.Булгаков. Мастер и Маргарита

Закон сохранения вещества в формулировке Михайлы Ломоносова звучит примерно так: «Ежели в каком-то месте чего-то убыло, то в другом месте того же самого прибыло». Решения задач, над которыми мы предлагаем вам подумать, точно указывают место, где «прибыло». Место, где «убыло», поищите сами.

Итак, речь пойдет о некоторых задачах финансового рынка. Еще точнее, мы будем говорить об элементарных математических моделях этого рынка. Несмотря на их простоту, можно даже сказать примитивность, исследование этих моделей позволяет получить качественную принципиальную картину рынка ценных бумаг и понять методы решения возникающих там проблем. Это типичный прием в математике – для изучения явления строится элементарная математическая модель, которая отражает основные принципиальные свойства реального явления. Изучив простую модель, можно попытаться распространить наработанные в ней методы на конкретную реальную ситуацию. Если модель удачная, то, как правило, это удается.

Полезно также из чисто педагогических соображений на элементарном уровне подойти к серьезной проблеме, чтобы уяснить в принципе саму проблему. Это очень важно для тех читателей журнала «Квант», которые в будущем собираются стать финансистами, экономистами, брокерами (ужасное слово). В экономике даже придуман специальный термин для той проблематики, о которой мы будем вести разговор, – *финансовая инженерия.*

Финансовый рынок

Рынок – как обмен товарами – существует давно. С тех пор как возникли деньги в качестве средства обмена товарами, появился новый товар – деньги. Если есть товар, то должны быть его разработчики, производители, продавцы и, что самое важное, покупатели. *Финансовый рынок* – это вторичный рынок, где товаром являются благородные металлы, деньги и валюты, ценные бумаги, в отличие от *основного* рынка, где товар – это продукция, услуга или работа. Мы будем говорить о *рынке ценных бумаг.* Хорошо известная формула основного рынка *«товар – деньги – товар»* на финансовом рынке принимает вид *«деньги – большие деньги – очень большие деньги».* Иногда даже справедлива такая уникальная цепочка: *«ничего – деньги – очень большие деньги».* На финансовом рынке ценных бумаг свои проблемы определения цены товара.

В дальнейшем мы будем использовать некоторые термины из финансового жаргона. Наверняка кому-то они хорошо знакомы, для остальных напомним.

Валюта – ценная бумага или другое средство обмена товарами, например дукат или гульден; менее удачный пример – доллар; совсем неудачный – евро.

Акция – ценная бумага, выпускается фирмами с целью привлечения капитала. Текущая цена акции зависит от финансовых результатов деятельности фирмы и состояния рынка ценных бумаг. Владелец акции имеет право на участие в делах фирмы (одна акция – один голос) и на получение дивидендов (части прибыли).

Облигация – ценная бумага, например кредитный договор, долговое обязательство, банковский счет и т.д. В отличие от акций, цена которых хаотично меняется, цена облигации всегда растет – это безрисковый актив в стабильной ситуации.

Акции и облигации – *основные* (первичные) ценные бумаги на финансовом рынке ценных бумаг.

Модели рынка

В зависимости от того, какие бумаги есть в активе рынка, мы будем различать три модели:

A-рынок – рынок, в активе которого одна акция, цена ее хаотично меняется. Простой пример – колебания курса валюты, скажем евро. Предположим, «сегодня» курс евро (по отношению к какой-то другой валюте) A, тогда мы будем считать, что в следующий момент времени «завтра» (интервал изменения курса) он может принять одно из двух значений: или $A(1+m)$, или $A(1+n)$, где $-1 < n < m$, причем, вообще говоря, эти возможности не обязательно равновероятны (шансы не 1 : 1). Мы будем говорить, что сегодня известен прогноз цен на завтра. «Послезавтра» курс может быть $A(1+m)^2$, $A(1+m)(1+n)$ или $A(1+n)^2$, и так далее:

$$A \to \left\langle \begin{matrix} A(1+m) \to \left\langle \begin{matrix} A(1+m)^2 \\ \\ A(1+m)(1+n) \end{matrix} \right. \\ A(1+n) \to \left\langle \begin{matrix} A(1+m)(1+n) \\ \\ A(1+n)^2 \end{matrix} \right. \end{matrix} \right. \ldots$$

Итак, в нашей модели точная цена акции завтра неизвестна сегодня, она станет определенной лишь завтра. Сегодня известно, что нас может ожидать завтра. Эта модель имеет простую биноминальную структуру, а колебания цены акции здесь напоминают хаотичное блуждание частицы на прямой, т. е. одномерное броуновское движение.

B-рынок – рынок облигации, цена которой меняется по фиксированной ставке. Пример – банковский счет: пусть сегодня на счету капитал B, тогда завтра капитал будет $B(1+r)$, где r – процентная ставка банка. Послезавтра капитал будет $B(1+r)^2$ и так далее, после k-го дня капитал будет равен $B(1+r)^k$. Цена облигации завтра известна уже сегодня.

AB-рынок – рынок с двумя акти-

Иллюстрация Е.Силиной

вами: акцией и банковским счетом. Динамика изменения банковского счета происходит по закону $B_{k+1} = B_k(1+r)$, $B_k > 0$, где $r \geq 0$ – процентная ставка банка. Динамика цены акции имеет вид $A_{k+1} = A_k(1+p)$, $A_k > 0$, где p может принимать два значения m и n (вообще говоря, с разными вероятностями) и не зависит от k. Будем считать, что $-1 < n < r < m$. Условие $n > -1$ обеспечивает положительность цен акции A_k. Эта модель AB-рынка называется моделью Кокса-Росса-Рубинштейна и в частном случае при $r = 0$ дает модель A-рынка.

На реальном финансовом рынке на биржах вращается множество различных акций и облигаций. Модель AB-рынка с двумя активами достаточно хорошо отражает принципиальное состояние реального рынка ценных бумаг и помогает понять его основные проблемы.

Игроки на бирже

Задача игрока на рынке ценных бумаг состоит в том, чтобы оптимально размещать свой капитал в ценные бумаги – активы рынка, снижать до минимума риск операции.

Задача 1. *Курсы акций компаний «Microsow» и «Macrosow» в течение недели менялись так:*

	Microsow	Macrosow
Понедельник	\$400	\$250
Вторник	\$450	\$280
Среда	\$500	\$250
Четверг	\$450	\$300
Пятница	\$400	\$250
Суббота	\$450	\$300

На сколько процентов максимально можно было увеличить за эту неделю капитал, играя на изменениях курсов этих акций?

Решение. Определим коэффициент роста курса акции как отношение «цены завтра» к «цене сегодня». Если этот коэффициент больше 1, то капитал назавтра увеличивается, если меньше, то уменьшается. Если не покупать акции, то капитал остается неизменным. Значения коэффициентов такие:

	Microsow	Macrosow
Понедельник	9 : 8	28 : 25
Вторник	10 : 9	25 : 28
Среда	9 : 10	6 : 5
Четверг	8 : 9	5 : 6
Пятница	9 : 8	6 : 5
Суббота	–	–

В понедельник выгодно вложить деньги в акции «Microsow», поскольку $9/8 > 28/25$. Назавтра капитал увеличится в $9/8$ раза. Во вторник нужно придержать эти акции, так как $10/9 > 1 > 25/28$. В среду нужно продать акции «Microsow» и купить акции «Macrosow», поскольку $6/5 > 1 > 8/9$. В четверг выгодно акции «Macrosow» продать и ничего не покупать, поскольку нет прироста в курсах акций – оба коэффициента меньше 1. Если же не вкладывать деньги в акции, то можно остаться при своих. В пятницу нужно снова вложить деньги в акции «Macrosow», потому как $6/5 > 9/8$. Итак, прирост капитала за неделю составит

$$\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{6}{5}\cdot 1\cdot\frac{6}{5}=\frac{9}{5}=1{,}8.$$

Значит, за неделю можно было увеличить капитал на 80%.

Портфели

Текущее распределение игроком капитала в активы рынка называется *инвестиционным портфелем* игрока.

Рассмотрим, например, модель AB-рынка в момент времени, когда стоимость акции равна \$100. Капитал \$1000 может быть распределен следующим образом:

$$1000 = 500 + 100\cdot 5 = x + 100y,$$

т. е. \$500 находятся на счете в банке и на другие \$500 приобретены 5 акций. Инвестиционный портфель $(x, y) = (500, 5)$. Получив информацию о динамике состояния рынка, игрок может сформировать новый портфель $(x_1, y_1) = (200, 8)$, купив 8 акций и оставив на банковском счете \$200.

Портфель (x, y): $C = x + 100y$, где $C > 0$, называется *самофинансируемым*, если изменение капитала C может происходить лишь за счет изменения цены акции и изменения на банковском счете. Заметим, что x или y при этом могут быть отрицательными, что означает взятие в долг. Если есть другое размещение капитала (перераспределенный самофинансируемый портфель) $C = x_1 + 100y_1$, то очевидно, что

$$(x - x_1) + 100(y - y_1) = 0.$$

Правильное управление портфелем приносит бóльшую прибыль.

Особенно заманчивы *арбитражные стратегии* управления портфелем, при которых прибыль может быть получена при нулевых вложениях капитала (безрисковый доход).

Пример. Доллар в Москве стоит 28 рублей, в Киеве – 5 гривен, обменный курс рубля к гривне 6.

Возможна такая стратегия:

берем в долг 2800 рублей,

покупаем в Москве на 2800 рублей \$100,

продаем в Киеве \$100 за 500 гривен,

меняем 500 гривен на 3000 рублей,

отдаем долг 2800 рублей,

имеем прибыль 200 рублей.

Стратегии

Рассмотрим модель AB-рынка с двумя активами: акцией и банковским счетом.

Пусть акция компании «Macrosow» сегодня стоит \$100. Известно, что завтра акция может стоить либо \$107, либо \$99, причем обе ситуации равновозможны (равновероятны, шансы 1 : 1). В таком случае мы будем говорить, что абсолютный прогноз по акции 107 : 99 (1 : 1), или относительный +7%–1% (1 : 1). Пусть процентная ставка банка 3% в день. Игрок хочет разместить \$400 на рынке.

Возможны такие стратегии.

1. *Робкий игрок* поместит весь капитал на банковский счет и завтра получит доход

$$D = \$400(1 + 0{,}03) = \$412,$$

а его прибыль будет

$$P = \$412 - \$400 = \$12.$$

2. *Рисковый игрок* вложит весь капитал в акции – купит 4 штуки по \$100. Если завтра цена акции будет \$107, то

$$D = 4\cdot\$107 = \$428,$$

$$P = \$428 - \$400 = \$28;$$

если же цена акции завтра будет \$99, то

$$D = 4\cdot\$99 = \$396,$$

$$P = \$396 - \$400 = -\$4.$$

Средний доход за операцию будет

$$d = (\$428 + \$396):2 = \$412,$$

а средняя прибыль

$$p = \$412 - \$400 = \$12.$$

3. *Безрисковый игрок* часть капитала x поместит на счет, часть – в

акции, т.е. сформирует портфель (x, y): $400 = x + 100y$, где y – количество акций. Напомним, что x или y могут быть отрицательными, что означает взятие в долг.

В случае удачи, если цена акции возрастет, капитал игрока завтра будет равен

$$1{,}03x + 107y = 1{,}03(400 - 100y) + 107y = 412 + 4y,$$

в противном случае –

$$1{,}03x + 99y = 1{,}03(400 - 100y) + 99y = 412 - 4y.$$

Риск исключен: в худшем случае, когда цена акции уменьшится до \$99, игрок сохранит капитал, т.е.

$$412 - 4y \geq 400, \text{ или } y \leq 3.$$

Если $y = 3$, то $x = 400 - 100y = 400 - 300 = 100$, т.е. безрисковый портфель $(x, y) = (100, 3)$. Купив 3 акции, игрок либо получит доход \$424 и прибыль \$24, либо останется при своих. Средняя прибыль \$12.

4. *Очень рисковый игрок – Джордж Сорос* – рискует всем своим капиталом, формируя портфель (x, y): $400 = x + 100y$, т.е. он готов потерять \$400, если цена акции упадет:

$$412 - 4y \geq 0, \text{ или } y \leq 103.$$

В случае успеха он получит адекватный риску доход

$$412 + 4y \leq 412 + 412 = 824.$$

Итак, портфель Дж.Сороса:

$$(x, y) = (-9900, 103).$$

Стратегия Дж.Сороса:

имея \$400, взять в долг \$9900;

на \$10300 купить 103 акции по \$100;

в случае удачи продать акции по \$107, получить \$11021;

вернуть долг с процентами \$10197;

получить доход \$11021–\$10197 = = \$824;

в случае неудачи продать акции по \$99, получить \$10197;

вернуть долг с процентами \$10197.

В случае удачи прибыль

$$P = \$824 - \$400 = \$424,$$

если неудача – убыток \$400. Средняя прибыль

$$p = (\$424 - \$400) : 2 = \$12.$$

Все стратегии дают одинаковую среднюю прибыль. Это говорит о сбалансированном состоянии рынка – средняя доходность по акции равна процентной ставке банка. Доходность игрока при удаче компенсируется риском неудачи. Стратегии наглядно иллюстрируют психологию игроков, что является очень важным фактором для успешной игры на финансовом рынке. Кто не рискует, тот...

Посмотрим, что произойдет, если состояние рынка изменится: например, ставка банка уменьшится до 1% или увеличится до 5%, а остальные условия останутся те же (см. таблицы). Рынок перестанет быть сбалансированным. В этих условиях средняя прибыль игроков разная. Мы привели результат – среднюю прибыль и портфель каждого игрока, а соответствующие выкладки и стратегии вы сможете по аналогии провести самостоятельно.

При $r = 1\%$

Игроки	p	(x, y)
Робкий	\$4	(400,0)
Рисковый	\$12	(0,4)
Безрисковый	\$8	(200,2)
Джордж Сорос	\$408	(–19800,202)

При $r = 5\%$

Игроки	p	(x, y)
Робкий	\$20	(400,0)
Рисковый	\$12	(0,4)
Безрисковый	\$40	(1400, –10)
Джордж Сорос	\$440	(21400, –210)

Согласитесь, что Дж.Сорос весьма обоснованно рискует капиталом.

Опцион

Опцион – ценная бумага, обладатель которой имеет право купить (продать) другие ценные бумаги (акции, валюту и т.д.) на оговоренных условиях. Акции, валюта, облигации относятся к *основным* (первичным) ценным бумагам; опционы – это *вторичные* (производные) ценные бумаги, они работают на уже созданном рынке основных ценных бумаг. По времени погашения опционы бывают двух типов: *европейские* – с фиксированной датой исполнения и *американские* – могут быть предъявлены к погашению в любой момент до фиксированной даты. Мы будем говорить о европейском опционе.

Рассмотрим модель A-рынка с одним активом. Вообще говоря, это частный случай модели AB-рынка, когда $r = 0$.

Пусть акция компании «Macrosow» сегодня стоит \$100. Известен прогноз на завтра 110 : 95 (1 : 1). Игрок приобретает опцион на покупку трех акций завтра по цене \$100. *Цена опциона* – это премия C продавцу, которую игрок уплачивает в день приобретения опциона. Это тот капитал, которым оперирует продавец, обслуживая опцион.

Если завтра акция будет стоить \$110, то игрок предъявляет опцион к погашению – покупает акции по \$100 и немедленно продает их по \$110 или требует выплаты разницы в ценах. Его доход в этом случае

$$D = 3(\$110 - \$100) = \$30,$$

а прибыль

$$P = \$30 - C.$$

Если же завтра акция будет стоить \$95, то он не предъявляет опцион к погашению. В этом случае игрок остается без дохода: $D = 0$, а его прибыль и вовсе отрицательна:

$$P = 0 - C = -C.$$

Средний доход за операцию

$$d = \$15,$$

а *средняя прибыль* (*прибыльность* опциона)

$$p = \$15 - C.$$

Ясно, что если цена опциона $C > \$30$, то он убыточен. Если же $C > \$15$, то можно получить прибыль в первом случае, но в среднем опцион убыточен. Чем меньше цена опциона C, тем выше для игрока прибыльность p опциона.

Минимальная премия C продавцу, при которой он сможет обслужить опцион, не рискуя дополнительным капиталом, называется *справедливой* (*рациональной*) *ценой опциона.*

В условиях нашего примера возникает

Задача 2. *Найдите справедливую цену опциона.*

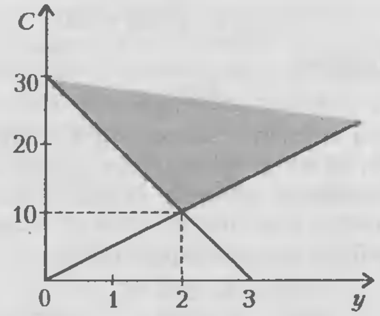
Решение. Пусть продавец, получив премию C, распределил ее следующим образом: $C = x + 100y$, т.е. часть премии $(C - x)$ вложил в акции. Завтра станет известна новая цена акции, продавец имеет новый капитал:

Цена акции	Капитал
\$100	$C = x + 100y$
\$110	$x + 110y = C + 10y$
\$95	$x + 95y = C - 5y$

Продавец выполнит опцион, если сумеет выплатить доход покупателю, не рискуя дополнительным капиталом, т.е если $C + 10y \ge 30$, $C - 5y \ge 0$.

В плоскости (y, C) этим условиям удовлетворяют все точки закрашенной области (см. рисунок). Минимальное значение $C = 10$ достигается при $y = 2$. Это и есть справедливая цена опциона.

Стратегия продавца: получив премию \$10, берет в долг (или вкладывает свои) \$190 и покупает 2 акции по \$100. Если завтра цена акции станет \$110, то продавец опциона,



реализовав 2 акции, имеет \$220; этого достаточно, чтобы вернуть долг \$190 (или свои) и выплатить доход \$30 покупателю. Если же акция будет стоить \$95, то после продажи двух акций у продавца будет ровно \$190 на возврат долга (или своих). В этой ситуации средняя прибыль покупателя \$5, а продавца \$0 – он не рисковал.

Инвестиционная цена

Рассмотрим модель AB-рынка с двумя активами – акцией и банковским счетом. Пусть процентная ставка банка $r\%$, цена акции сегодня a и прогноз на завтра $+m\% - n\%$ (1 : 1), $-1 < n < r < m$. Допустим, участнику рынка предстоят выплаты завтра (погашение опциона или выполнение условий контракта и т.д.). Пусть M и N – суммы, которые он обязан выплатить в зависимости от новой цены акции $a(1+m)$ или $a(1+n)$ соответственно. В таких случаях говорят, что игроку предъявлено *платежное поручение*.

Минимальный капитал C, который гарантирует игроку выполнение платежного поручения (получение завтра капитала M или N в зависимости от новой цены акции соответственно), называется *инвестиционной ценой проекта*.

Справедливая цена опциона – это его инвестиционная цена.

Пусть игрок распределил сегодня капитал $C = x + ay$, тогда завтра его капитал будет

$$x(1+r) + ay(1+m) = \\ = C(1+r) + ay(m-r) = \\ = x(r-m) + C(1+m) = M$$

или

$$x(1+r) + ay(1+n) = \\ = C(1+r) + ay(n-r) = \\ = x(r-n) + C(1+n) = N.$$

Отсюда находим

$$C = \frac{Mz + N(1+z)}{1+r}, \quad y = \frac{M-N}{a(m-n)},$$

$$x = C - ay = \frac{Mq + N(1-q)}{1+r},$$

где $z = \dfrac{r-n}{m-n}$, $q = \dfrac{1+n}{n-m}$.

Портфель (x, y) обеспечивает стратегию, гарантирующую получение необходимого капитала завтра, т.е. выполнение платежного поручения. Нахождение таких стратегий (хеджей) – одна из важных задач финансовой математики.

Если выполнение платежного поручения предстоит на S-й день и величина выплаты при цене акции $A_{Sk} = a(1+m)^{S-k}(1+n)^k$ равна F_{Sk}, то нетрудно показать, что инвестиционная цена будет определяться формулой

$$C = \frac{1}{(1+r)^S} \sum_{k=0}^{S} F_{Sk} C_S^k z^{S-k} (1-z)^k,$$

где $C_S^k = \dfrac{S!}{k!(S-k)!}$.

Если платежное поручение на S-й день состоит в погашении опциона на покупку акции по цене K, то величина выплаты, очевидно, равна

$$F_{Sk} = \max\{A_{Sk} - K, 0\} = \\ = \max\{a(1+m)^{S-k}(1+n)^k - K, 0\}.$$

Подставив это значение в формулу инвестиционной цены, получим формулу Кокса-Росса-Рубинштейна справедливой цены опциона для модели AB-рынка:

$$C = a\sum_{k=0}^{k_0} C_S^k q^{S-k}(1-q)^k - \\ - \frac{K}{(1+r)^S} \sum_{k=0}^{k_0} C_S^k z^{S-k}(1-z)^k,$$

где $q = \dfrac{(1+m)z}{1+r}$,

$$k_0 = \left[\ln \frac{K}{a(1+m)^S} : \ln \frac{1+n}{1+m}\right].$$

Запись $[x]$ означает целую часть числа x – наибольшее целое, не превосходящее числа x.

Ремарка. В 1973 году были опубликованы статьи Ф.Блэка и М.Шоулса «Расчеты цены опционов и обязательства корпораций» и Р.Мертона «Теория расчета рациональной цены опциона». Насколько важными оказались изложенные результаты, можно судить по тому факту, что в 1997 году Р.Мертону и М.Шоулсу была присуждена Нобелевская премия (Ф.Блэк скончался в 1995 году). Это второй случай присуждения Нобелевской премии за работы по экономике математикам. Впервые этой чести удостоился академик Л.Канторович (СССР) в 1975 году за работу по экономике 1939 года «Математические методы организации и планирования производства». Совместно с ним премию получил Т.Купманс (США), труд которого был опубликован в 1951 году.

Как долго живет комета?

С.ВАРЛАМОВ

ПЛАНЕТЫ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ обычно разделяют на две большие группы. Ближайшие к Солнцу планеты Меркурий, Венера, Земля и Марс образуют земную группу, химический состав поверхности этих планет примерно одинаков. Планеты-гиганты Юпитер, Сатурн, Нептун и Уран, по наблюдениям издалека, имеют в составе своей «поверхности» много водорода и гелия. Существует также большое количество малых планет (астероидов), которые по своему химическому составу не сильно отличаются от планет земной группы. Иногда в окрестность Солнца, занятую планетами земной группы, залетают кометы, их состав во многом отличается как от планет-гигантов, так и от планет земной группы. Существует гипотеза, согласно которой за пределами орбиты Плутона в Солнечной системе находится огромное количество малых небесных тел – так называемое облако Оорта. Тела вращаются там вместе с пылью и газом, как правило, в том же направлении вокруг Солнца, что и большие планеты. Они движутся очень медленно, но иногда, пролетая мимо друг друга на небольшом расстоянии, могут значительно изменить свою скорость по направлению. Если одно из тел в результате такой встречи передаст другому значительную часть своего момента импульса относительно Солнца, то само оно попадет на другую орбиту, которая проходит вблизи Солнца. Такое тело, как говорят, сваливается из облака Оорта в окрестность Солнца. В зависимости от величины своей скорости на большом расстоянии от Солнца, тело может стать «одноразовой» или длиннопериодической кометой. Пролетая вблизи какой-нибудь из больших планет, такое тело может снова изменить свою скорость (совершить гравитационный маневр) и стать кометой со сравнительно небольшим периодом, например как у кометы Галлея.

Комета Хейла–Боппа с очень мощными хвостами: пылевым (розовый) и газовым (голубой)

Астрономические наблюдения спектров излучения хвостов комет дают основания считать, что ядра комет составлены из летучих веществ, например воды, метана, аммиака. Самостоятельным и весьма интересным является вопрос о природе существенных различий в химическом составе планет-гигантов, планет земной группы и комет. Однако оставим его на будущее. А пока попытаемся найти ответ на другой вопрос: как долго живет ледяное ядро кометы? Велико или мало время его жизни по сравнению со временем существования Солнечной системы?

Представим себе, что на круговой орбите с радиусом, равным половине расстояния от Земли до Солнца (0,5 а.е.), появилась ледяная комета, имеющая форму шара с начальной температурой 0 К и начальным радиусом 1 км. Пусть наша комета достаточно быстро вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбиты. Будем считать, что бóльшая часть (75%) солнечной радиации отражается от поверхности кометы. Оценим время жизни такой кометы, если никаких катастрофических столкновений с ней не произойдет.

Молекулы воды, оторвавшиеся от поверхности льда, могут удерживаться собственным гравитационным полем кометы только в том случае, если скорость их теплового движения во много раз меньше второй космической скорости $v_{II} = \sqrt{2GM/R}$. Для кометы выбранных нами размеров эта скорость равна примерно 0,7 м/с, поэтому ясно, что гравитационное притяжение кометы не сможет удержать молекулы воды, оторвавшиеся от ее поверхности. Иными словами, атмосферы вокруг кометы не будет. Покинувшие поверхность кометы молекулы практически никогда не возвращаются обратно.

Ясно, что наибольший поток солнечной радиации будет приходиться на единицу поверхности кометы вблизи ее экватора. Так называемая солнечная постоянная, т.е. мощность солнечного излучения, падающего перпендикулярно на площадку в 1 $м^2$ на Земле, равна $W = 1{,}36$ кВт. Такая же мощность будет поглощаться каждым квадратным метром льда вблизи экватора кометы. Дело в том, что за счет приближения кометы к Солнцу поток излучения увеличивается в 4 раза, но 75% этого потока отражается поверхностью.

Средняя мощность, приходящаяся на 1 $м^2$ поверхности вблизи экватора кометы и усредненная за большое время, будет равна $W/\pi = 433$ Вт. Обоснование такой оценки довольно простое: выберем полосу шириной $h = 1$ м, проходящую по всему экватору. Эта полоса собирает солнечный свет с площади $h \cdot 2R$, а полная площадь этой полосы равна $h \cdot 2\pi R$.

Рассмотрим следующую ситуацию. Как только комета появляется на орбите, она освещается Солнцем, и температура ее поверхности начинает повышаться. Внешние слои льда, постепенно прогреваясь, передают тепло и внутренним слоям. По мере разогрева поверхности все большую роль начинает играть рассеяние тепла в окружающее пространство. Расход тепла льдом, нагретым на поверхности кометы, происходит по нескольким причинам. Первая из них – испарение льда, вторая – тепловое излучение, третья – прогрев внутренних областей (тепло, полученное внутренними областями кометы, в конце концов будет потрачено на то, чтобы испарять лед с ее поверхности или на тепловое излучение).

Оценим среднюю температуру, которая может установиться на поверхности кометы через некоторое достаточно большое время после ее появления на орбите. Ориентироваться будем на среднюю температуру поверхности Земли, равную примерно 290 К. Земля теряет энергию в основном за счет теплового излучения. Поверхность Земли больше чем на 70% покрыта водой, и поглощает Земля на единицу площади в среднем столько же, сколько наша комета, поэтому ясно, что выше 290 К средняя температура поверхности кометы быть не может.

Изображение ядра кометы Галлея, полученное 14 марта 1986 года европейским межпланетным зондом «Джотто» с расстояния 6500 км за 95 с до момента наибольшего сближения на расстояние 596 км. Ядро кометы имеет неправильную форму, его поверхность очень темная: она отражает всего 3% падающего на нее света. Хорошо видно, что в двух местах поверхность взломана давлением испаряющегося вещества и с нее уходят мощные газовые потоки

Лед обладает плохой теплопроводностью, поэтому поверхность кометы вблизи экватора быстро прогревается. Коэффициент теплопроводности льда равен 2,2 Вт/(м · К). Для того чтобы отводить все тепло, выделяющееся на поверхности кометы вблизи экватора, нужно, чтобы скорость изменения температуры с глубиной (градиент температуры) равнялась 200 К/м. Предположим, что прогревается только слой льда толщиной 290/200 м ~ 1,5 м. Оценим время, за которое этот слой льда может прогреться до температуры 290/2 К. При заданном градиенте температур (200 К/м) в куб изо льда с ребром $A = 1{,}5$ м перпендикулярно одной из его граней поступает мощность излучения, равная приблизительно $A^2 \cdot 430$ Вт. На нагрев этого куба требуется количество теплоты $Q = c\Delta TM$. Из справочных данных теплоемкость льда $c = 2100$ Дж/(кг · К), разность температур (средняя от 0 до 290 К) $\Delta T \approx 150$ К, а масса куба $M \approx 3000$ кг. Время, необходимое для прогрева такого куба, составляет около 10^6 с, что чуть больше 10 суток. За это время градиент температуры существенно уменьшится, и поток тепла внутрь кометы перестанет компенсировать поступление тепла на его поверхность. Известно, что время жизни кометы гораздо больше 10 суток, поэтому при оценке температуры ее поверхности можно не учитывать поток тепла внутрь кометы.

Мощность теплового излучения с поверхности площадью S равна $\alpha S\sigma T^4$. Здесь

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт}/\left(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4\right)$$

– постоянная Стефана–Больцмана, T – температура поверхности, а символом α обозначен коэффициент, характеризующий отличие излучающего тела от абсолютно черного тела. Для нашего случая этот коэффициент оказывается порядка 1: дело в том, что комета поглощает излучение Солнца в видимом диапазоне, а излучает в диапазоне инфракрасных волн. Отсюда следует, что температура была бы как раз равна 290 К!

Однако мы совсем не учли потери тепла, связанные с испарением молекул с поверхности. Количество молекул, испаряющихся с единицы поверхности за единицу времени, можно оценить, зная давление насыщенного пара данного вещества при выбранной температуре: $p = nkT$. Количество молекул, покидающих поверхность тела, граничащую с насыщенным паром, по порядку величины равно числу ударов молекул пара о поверхность. Представим себе, что каждая ударившаяся о поверхность молекула прилипает к ней. Тогда ровно такое же количество молекул должно отрываться от поверхности и покидать ее за то же время (на самом деле количество покидающих поверхность молекул в несколько раз меньше, это связано с тем, что не все молекулы сразу после удара прилипают к поверхности – большинство упруго отскакивают от поверхности). Каждая испарившаяся с поверхности нашей кометы молекула уносит с собой энергию, которая потребовалась ей для отрыва от соседок, и вдобавок среднюю тепловую энергию, соответствующую данной температуре поверхности. Над поверхностью кометы нет атмосферы, поэтому пар не совершает работы по расширению в атмосфере. С единицы поверхности кометы ежесекундно уносится количество теплоты

$$W=\left(\frac{\beta}{N_A}\right)\frac{p}{kT}\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\frac{p\beta\sqrt{3}}{\sqrt{RTM}}\approx$$

$$\approx 1{,}6\cdot10^5\frac{p}{\sqrt{T}} \quad \text{(в единицах СИ)},$$

где N_A – постоянная Авогадро, $\beta = 3{,}6\cdot10^4$ Дж/моль – молярная теплота парообразования воды (и льда тоже), M – ее молярная масса.

Воспользуемся экспериментальными данными о зависимости давления насыщенного пара от температуры:

T, К	143	152	161	171	183	197
$\lg(p/p_{атм})$	−11	−10	−9	−8	−7	−6
T, К	212	231	253	281	319	373
$\lg(p/p_{атм})$	−5	−4	−3	−2	−1	0

и проведем расчет зависимости потерь тепла, связанных с испарением воды, от температуры:

T, К	143	152	161	171
W, Вт/м^2	0,013	0,13	1,3	12,3
T, К	183	197	212	
W, Вт/м^2	120	1150	11000	

Оценки показывают, что на поверхности кометы вблизи ее экватора должна установиться температура между 183 и 197 К (интересен вопрос: как будет изменяться температура поверхности от времени «суток» на комете?). При таких температурах потери на излучение с 1 м^2 составляют от 70 Вт при 183 К до 92 Вт при 197 К. Поэтому необходимо признать, что главным механизмом расхода тепла с поверхности кометы будет испарение. Оно обеспечивает, как видно, около 80% всех потерь.

Астероид Гаспра. Вероятно, так выглядят ядра комет после испарения из них летучих веществ

Оценим время жизни ледяной кометы, если потери тепла обусловлены только испарением с ее поверхности. Очевидно, что испарение в экваториальной зоне идет значительно быстрее, чем на полюсах кометы. В результате такого неравномерного испарения она приобретает вытянутую вдоль оси вращения форму. Скорость уменьшения размеров кометы на экваторе не зависит от размеров кометы, а определяется балансом энергии, полученной от Солнца и потерянной за счет испарения, и равна

$$WM/(\pi\beta\rho)\approx 2\cdot10^{-7} \quad \text{м/с}.$$

Это означает, что радиус экваториальной зоны кометы уменьшается (в среднем) на $2\cdot10^{-7}$ м за каждую секунду. Чтобы комета полностью испарилась, требуется около $2{,}5\cdot10^9$ с. Таким образом, наша комета может прожить около 80 лет! По меркам Солнечной системы это совсем немного.

Реально существующие ледяные кометы, конечно же, не попадают на круговую орбиту вокруг Солнца. Периодические кометы бóльшую часть времени проводят на значительном удалении от нашего светила. Однако именно в то время, когда они находятся на сравнительно небольших расстояниях от Солнца, они сильно теряют в массе. Если бы комета Галлея имела ледяное ядро диаметром около 10 км и из своего 80-летнего периода находилась на расстоянии 0,5 а.е. от Солнца лишь 0,3 года, то для полного ее испарения потребовалось бы только 1300 оборотов – всего-то каких-то 100 тысяч лет, что в масштабах времени жизни Солнечной системы (5 миллиардов лет) ничтожно мало. Поэтому кометы и не появляются на небе каждую ночь (они не могут накопиться в большом количестве).

Появление кометы с периодом, сравнимым с периодами обращения больших планет вокруг Солнца, редкое событие, потому что требуется благоприятное стечение обстоятельств, при которых тело, пролетая в окрестности Солнца, должно испытать сильное воздействие одной из больших планет. Планета должна так изменить траекторию движения тела, чтобы из длиннопериодической или одноразовой кометы получилась короткопериодическая. Какова вероятность такого события? Это отдельный интересный вопрос.

Если бы сейчас на небе появлялась в среднем за десять лет одна комета, похожая по характеристикам на комету Галлея, это означало бы, что одновременно существуют около десятка тел, которые периодически появляются вблизи Солнца и видны как кометы. Поскольку время жизни одной такой кометы порядка 100 тысяч лет, отсюда следует вывод, что частота появления таких комет из облака Оорта примерно одна за десять тысяч лет и что за время существования Земли появилось и успело испариться около Солнца примерно полмиллиона комет типа кометы Галлея.

Иллюстрации к статье и подписи к ним предоставлены В.Сурдиным

Вольта, Эрстед, Фарадей

А.ВАСИЛЬЕВ

Короче, Вольта создал электрическую батарею, а Эрстед закоротил ее проволокой и увидел, что стрелка компаса отклоняется. Фарадей, наоборот, заставил ток течь по проволоке при движении магнита и открыл электромагнитную индукцию.

Из беседы студентов физфака МГУ
перед экзаменом по истории физики

«ЕСЛИ ПОХЛЕСТАТЬ КОШАЧЬЕЙ шкуркой смоляной диск и положить на него железный кружочек, то скопившийся на этом кружочке электрический заряд можно использовать для зарядки лейденской банки» – об этом результате, изобретении электрофора, Алессандро ВОЛЬТА (1745 – 1827) сообщил в письмах выдающимся ученым того времени. Электрофор явился первым прибором, позволившим, пусть небольшими порциями, накапливать электрический заряд и использовать его, например, для излечения паралича пальца или получения искры в темноте.

Главным же достижением итальянского ученого стало, однако, создание в 1799 году первого источника постоянного тока – вольтова столба. Это устройство состояло из нескольких десятков пластин меди, наложенных на такое же количество пластин цинка и отделенных друг от друга кожаными или картонными прослойками. Кожу или картон в этом устройстве следовало пропитывать щелоком или соленой водой, а весь набор пластин – сжимать механическим прессом. Электрический столб не требовал подзарядки от постороннего источника и, по выражению Вольты, «вызывал сотрясение» всякий раз, когда к нему прикасались. Развитием вольтова столба стал его чашечный вариант – прообраз современных аккумуляторов. В чашки, заполненные наполовину щелочью или соленой водой, Вольта опускал серебряные и цинковые пластины и соединял их последовательно проводами для суммирования эффекта.

С точки зрения современной науки, возникновение электрической искры при закорачивании крайних пластин вольтова столба обусловлено происходящими в нем химическими реакциями и возникающей при этом разностью потенциалов. Если, например, цинковую пластину опустить в раствор серной кислоты H_2SO_4, то цинк будет растворяться, но в раствор будут уходить не нейтральные атомы, а двукратно заряженные ионы Zn^{2+}. В результате этого раствор в непосредственной близости от пластины заряжается положительно, цинковая пластина заряжается отрицательно, и металл относительно электролита приобретает так называемый электрохимический потенциал. Знак и величина этого потенциала зависят не только от природы кислоты и металла, но и от концентрации ионов в растворе. Если в раствор погружены пластины двух различных металлов, то между ними возникает напряжение, равное разности их электрохимических потенциалов. Так, в серной кислоте, содержащей в одном литре моль ионов металла, электрохимический потенциал цинка равен –0,5 В, электрохимический потенциал меди равен +0,6 В (в отличие от цинка, медь заряжается положительно, а раствор кислоты около нее – отрицательно), и напряжение между пластинами (электродвижущая сила такой пары) составляет 1,1 В. Причем заметим, что для количественного описания эффекта используется единица, названная в честь великого физика.

Открытие Вольты уже в 1800 году позволило разложить на составляющие воду и аммиак, серебрить, меднить и цинковать электроды и, главное, положило начало новому этапу в развитии электричества – электродинамике.

В 1820 году непременный секретарь Датского королевского общества Ханс Кристиан ЭРСТЕД (1777 – 1851) прямо во время лекции обнаружил, что магнитная стрелка отклоняется, если полюса вольтовой батареи соединить проволокой. Используемая им батарея давала столь сильный ток, что соединительная проволока раскалялась докрасна. Это обстоятельство Эрстед считал существенным для успеха опыта, однако, как вскоре выяснилось, стрелка отклонялась и от более слабого тока. Автор открытия назвал наблюдаемый им процесс «электрическим конфликтом», полагая, в духе философии Шеллинга, что все в этом мире происходит благодаря столкновению полярно противоположных сущностей. Проволока действительно соединяет противоположные – положительный и отрицательный – полюсы батареи, однако особенно важно то, что «электрический конфликт» разыгрывается не только в металлической проволоке, но и во всем окружающем ее пространстве.

Действие тока на магнитную стрелку было весьма необычным. Все известные к тому времени силы приводили либо к притяжению, либо к отталкиванию, магнитная же стрелка не притягивалась и не отталкивалась проводником с током, а поворачивалась, стремясь установиться перпендикулярно проволоке. Отмечая это обстоятельство, Эрстед писал, что «...согласно изложенным фактам, электрический конфликт образует вихрь вокруг проволоки. Иначе было бы непонятно, как один и тот же участок проволоки, будучи помещен под магнитным полюсом, относит его к востоку, а находясь над полюсом – увлекает его к западу». Это замечание Эрстеда по сути является констатацией того факта, что электрический ток охвачен круговыми магнитными линиями.

Открытие датского физика вызвало колоссальный интерес в научном сообществе и особенно в среде французских ученых. Уже вскоре после его опубликования Жан Батист Био и Феликс Савар нашли выражение для силы, действующей со стороны тока на магнитный полюс, Доминик Франсуа Араго обнаружил намагничивание железных опилок проводником с током, а Андре Мари Ампер получил выражение для силы взаимодействия между электрическими токами и выявил тесную «генетическую» связь между электрическими и магнитными процессами.

Честь экспериментального открытия эффектов вращения магнита вокруг проводника с током и проводника с током вокруг магнита принадлежит, однако, не французам, а выдающемуся английскому ученому Майклу ФАРАДЕЮ (1791 – 1867). Опыты, поставленные Фарадеем в 1831 году для наблюдения электромагнитного вращения, были очень изящны. Для успешного осуществления этого опыта (и, по сути, создания первого электродвигателя) нужно было придумать такое расположение магнита и тока, при котором последний действовал бы лишь на один полюс магнита. Для этого ток пропускался через чашки со ртутью, в которые сверху был опущен металлический провод. В одной из чашек провод был установлен вдоль оси сосуда, а выступающий над ртутью полюс магнита вращался вокруг этой оси. В другой чашке, наоборот, по оси сосуда был установлен магнит, а вокруг него вращался электрический провод.

Добившись успеха в опытах с электромагнитным вращением, Фарадей поставил себе задачу «превратить магнетизм в электричество». Такую задачу ставили многие физики, пытаясь получить искру или другое известное тогда действие электрического тока, наматывая проволоку на намагниченное железо. Все эти опыты заканчивались неудачей, поскольку постоянный магнит никак не хотел создавать электрический ток. Впрочем, историческая справедливость требует отметить, что, в то время как европейские физики в очередной раз признали безуспешность своих попыток получить электричество из магнетизма, американский ученый Джозеф Генри наблюдал возникновение индукционного тока в катушке при движении магнита. Пока Генри собирался опубликовать результаты своих опытов, в печати появилось сообщение Фарадея об открытии им электромагнитной индукции.

Вот фрагменты исторических записей из рабочих тетрадей Фарадея 1831 года:

«...Взял железное кольцо, на которое намотал две катушки из изолированной хлопчатобумажной тканью медной проволоки.

Зарядил батарею из 10 пар пластин по 4 квадратных дюйма. Концы одной из обмоток замкнул медным проводом, проходящим как раз над магнитной стрелкой. Присоединил концы другой обмотки к батарее. Немедленно ощущалось заметное влияние на стрелку: она колебалась и в конце концов вернулась в исходное положение. То же самое при размыкании соединения второй обмотки с батареей».

Далее Фарадей описывает индукционное действие, полученное при помощи постоянных магнитов:

«...если магнит вдвинуть в спираль и пронести через нее одним непрерывным движением, то стрелка смещается в одну сторону, затем внезапно останавливается и, наконец, начинает двигаться в другую сторону».

И снова фрагменты записей Фарадея:

«...Результаты, которые к этому времени были мною получены с магнитами, привели меня к мысли, что ток от батареи при пропускании его через один проводник действительно индуктирует подобный же ток в другом проводнике, но что этот ток длится всего один момент и по природе своей походит скорее на электрическую волну, возникающую при разряде обыкновенной лейденской банки, чем на ток от гальванической батареи...

При сближении проводов индукционный ток имел направление, обратное направлению индуктирующего тока. При удалении проводов друг от друга индуцированный ток имел то же направление, что индуктирующий ток. Когда провода оставались неподвижными, индуцированного тока не было вовсе».

Эти записи из дневника Фарадея описывают одно из величайших открытий в истории человечества, имевшее огромные научные и технические последствия. Но та же историческая справедливость требует упоминания и о других сделанных этим ученым открытиях.

Так, Фарадей доказал тождественность известных тогда видов электричества: животного (электрические скаты и угри), магнитного, гальванического, теплового (термоэлектричество) и вызываемого трением. Стремясь выяснить природу электричества, он провел эксперименты по прохождению тока через растворы солей, кислот и щелочей и установил в результате этих опытов законы электролиза. Фарадей обнаружил влияние диэлектриков на электростатическое взаимодействие и ввел понятие диэлектрической проницаемости, а впоследствии экспериментально доказал закон сохранения электрического заряда и близко подошел к открытию закона сохранения и превращения энергии. В 1845 году он открыл диамагнетизм, как свойство вещества выталкиваться из магнитного поля, а в 1847 – парамагнетизм, как свойство вещества втягиваться в магнитное поле. Наряду с этим, Фарадей обнаружил эффект вращения плоскости поляризации света в магнитном поле, что послужило первым экспериментальным доказательством электромагнитной природы света и положило начало целому направлению в современной физике – магнитооптике.

Наконец, именно Фарадею принадлежит чрезвычайно плодотворная концепция физических полей. По мнению Альберта Эйнштейна, идея поля была самой оригинальной идеей Фарадея, самым важным открытием со времен Ньютона. У всех предшественников Фарадея пространство выступало лишь в качестве пассивного свидетеля процессов, происходящих между телами или зарядами, у Фарадея же оно активно участвует в явлениях. «Надо было иметь могучий дар научного предвидения, – писал Эйнштейн, – чтобы распознать, что в описании электрических явлений не заряды и не частицы ответственны за суть явлений, а скорее пространство между зарядами и частицами».

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1741» или «Ф1748». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1743–М1745 предлагались на XXVI Всероссийской математической олимпиаде.

Задачи Ф1750–Ф1754 и Ф1757 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М1741—М1750, Ф1748 — Ф1757

М1741. С каждым из чисел от 000000 до 999999 поступим следующим образом: умножим первую цифру на 1, вторую на 2 и так далее, последнюю – на 6. Сумму полученных шести чисел назовем *характеристикой* исходного числа. Сколько чисел имеют характеристику, делящуюся на 7?

Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1742. Таблица размером $n \times n$ заполнена натуральными числами так, что всякие два числа, соседние по горизонтали или по вертикали, различаются на 1. Докажите, что найдется натуральное число, которое присутствует либо на каждой горизонтали, либо на каждой вертикали.

В.Произволов

М1743. Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{1000}}{3}\right]$$

($[a]$ – целая часть числа a).

А.Голованов

М1744*. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты k различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые k квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2k-2$ гвоздями.

В.Дольников

М1745. В некоторых клетках доски $2n \times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-то белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2.

С.Берлов

М1746. На окружности находятся n красных и n синих точек, которые разделяют ее на $2n$ равных дуг. Каждая красная точка является серединой дуги окружности с синими концами. Докажите, что каждая синяя точка является серединой дуги окружности с красными концами.

В.Произволов

М1747*. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A', B', C'. Через точку P пересечения прямых AA', BB', CC' проведены три окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Докажите, что

а) шесть точек касания образуют вписанный шестиугольник, причем центр описанной около него окружности совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC;

б) главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в точке P;

в) вторые точки пересечения проходящих через P окружностей лежат на прямых AA', BB', CC'.

А.Заславский

М1748. На плоскости выбраны 1000 точек общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой). Рассматриваются всевозможные раскраски этих точек в два цвета. Назовем раскраску *неразделимой*, если не существует такой прямой, что точки разных цветов лежат в разных полуплоскостях. Докажите, что число неразделимых раскрасок не зависит от выбора точек.

Г.Челноков

М1749. Рассмотрим последовательность слов, первое из которых состоит из одной буквы А, второе – АБ, третье – АБА, четвертое – АБААБ, пятое – АБААБАБА, и так далее: очередное слово получаем из предыдущего, заменяя каждую букву А на АБ, а Б – на А.

а) Докажите, что каждое слово этой последовательности, начиная с третьего, получается приписыванием предпредыдущего слова к предыдущему.

(Например, АБААБАБА – это АБААБ плюс АБА.)

б) Пусть $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $b_2 = 5$, $a_4 = 6$, $b_3 = 7$, $a_5 = 8$, $a_6 = 9$, $b_4 = 10$ и, вообще, пусть a_n и b_n – номера мест, на которых стоят n-е буквы А и Б в бесконечном слове АБААБАБААБААБАБА..., начальными отрезками которого являются слова пункта а). Докажите равенство $b_n = n + a_n$.

в) Рассмотрим другую последовательность слов: А, АБ, АБАА, АБААABAБ, АБАААБАБАБАААБАА, ... (Очередное слово получается из предыдущего заменой А на АБ, а Б – на АА.) Докажите, что каждое слово этой последовательности является началом следующего ее слова и что номер места, на котором в соответствующем бесконечном слове

АБАААБАБАБАААБААБАААБАБАБАААБАБ...

стоит n-я буква Б, в два раза больше номера места, на котором стоит n-я буква А.

Л.Коганов

М1750. а) Взяли шесть бумажных квадратов, у каждого из которых длина стороны равна 1, и ими целиком оклеили поверхность куба с ребром 1. Докажите, что найдется бумажный квадрат, который целиком оклеил какую-либо грань куба.

б) Четырьмя бумажными равносторонними треугольниками, у каждого из которых длина стороны равна 1, целиком оклеили поверхность правильного тетраэдра с ребром 1. Обязательно ли найдется бумажный треугольник, который целиком оклеил какую-либо грань тетраэдра?

В.Произволов

Ф1748. На краю гладкого горизонтального стола удерживают куб массой $M = 2$ кг (рис.1). Через небольшой гладкий выступ на ребре куба переброшена длинная легкая нерастяжимая нить, к свободному концу которой привязан груз массой $M/2$. Куб отпускают. Найдите его смещение за время $\tau = 0{,}2$ с. Длина свисающего участка нити $L = 2$ м. Привязанный к стене кусок нити практически горизонтален.

Р.Блоков

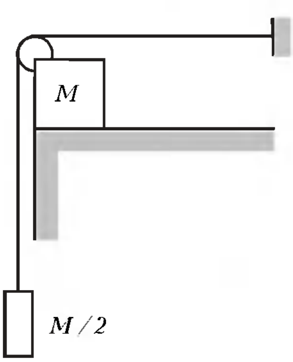


Рис.1

Ф1749. На гладком столе покоится гантелька длиной L, состоящая из невесомого жесткого стержня и маленьких одинаковых шариков массой M каждый, закрепленных на концах стержня (рис.2). В некоторый момент на гантельку начинают действовать две горизонтальные противоположно направленные силы величиной F, перпендикулярные стержню. Одна из них приложена к центру стержня, другая – к одному из шариков (силы все время остаются перпендикулярными к стержню и приложенными в упомянутых точках). Как будет двигаться стержень? За какое время стержень повернется на угол 360°? Чему будет равна сила натяжения стержня в этот момент?

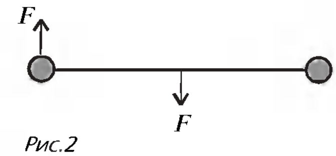


Рис.2

А.Зильберман

Ф1750. В центре днища прямоугольной баржи длиной $a = 80$ м, шириной $b = 10$ м и высотой $c = 5$ м образовалось отверстие диаметром $d = 1$ см. Оцените время, за которое баржа затонет, если не откачивать воду. Баржа открыта сверху, груза на ней нет, начальная высота бортов над уровнем воды $h = 3{,}75$ м.

С.Варламов

Ф1751. На горизонтальном столе лежит однородное кольцо массой M с насаженной на него маленькой бусинкой массой m. В начальный момент времени бусинка имеет скорость v, а кольцо покоится. Определите минимальное значение кинетической энергии бусинки в процессе дальнейшего движения. Трения нет.

Р.Компанеец

Ф1752. Газ с молярной массой М = 60 г/моль находится в герметичном сосуде с жесткими стенками и поддерживается при постоянной температуре $T = 0$ °С. Площадь поперечного сечения молекул, которые можно рассматривать как твердые шарики, равна $S = 10^{-19}$ м^2. Давление газа в начале эксперимента $p_0 = 100$ Па. При освещении газа ультрафиолетовым светом молекулы, поглотившие квант света, переходят в возбужденное состояние. Среднее время жизни молекулы в возбужденном состоянии $\tau = 10^{-3}$ с. При столкновении двух возбужденных молекул в газе происходит химическая реакция, в результате которой образуется одна новая молекула. Известно, что за 1 секунду в каждом кубическом сантиметре газа возбуждается $N = 10^{12}$ молекул. Оцените, за какое время давление в сосуде уменьшится на $\varepsilon = 1\%$ от первоначального.

С.Варламов

Ф1753. Оцените установившийся заряд на конденсаторе емкостью $1000C$ в схеме, изображенной на рисунке 3.

О.Шведов

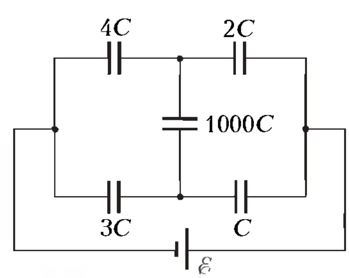


Рис.3

Ф1754. Резисторы сопротивлениями R, $2R$, $3R$, ..., $100R$ соединены последовательно. Концы этой цепи замыкают, после чего к точке их соединения подключают один из проводов, идущих от батарейки с ЭДС $\mathcal{E}$ и нулевым внутренним сопротивлением. Между какими резисторами сопротивлениями nR и $(n+1)R$ нужно подключить второй провод, идущий от батарейки, чтобы ток через батарейку был наименьшим?

О.Шведов

Ф1755. Катушка индуктивностью L подключена параллельно конденсатору емкостью C, а последовательно с получившимся колебательным контуром включен еще один конденсатор емкостью C. К выводам цепочки присоединяют батарейку напряжением U_0. Найдите максимальную величину заряда каждого из конденсаторов и максимальный ток через катушку. Какое количество теплоты выделится в системе за большое время? Сопротивление соединительных проводов невелико, элементы цепи считать идеальными.

З.Рафаилов

Ф1756. Двухпроводный кабель в пластмассовой изоляции имеет емкость 25 пФ на метр длины и индуктивность 1 мкГн на метр длины (учитываются оба провода). С какой скоростью распространяется в этом кабеле низкочастотная электромагнитная волна? Какой резистор нужно включить на конце этого кабеля, чтобы не было отражений сигнала?

З.Волнов

Ф1757. Стеклянная пластинка имеет в сечении форму равнобокой трапеции (рис.4). Основание трапеции D,

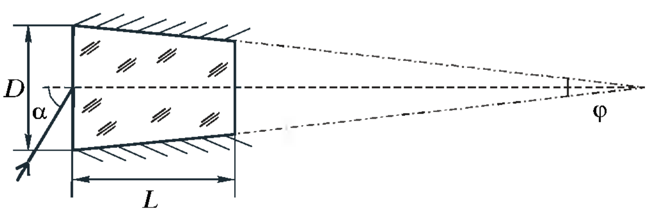


Рис.4

высота L ($D \ll L$), а угол между боковыми сторонами $\varphi \ll 1$. Боковые поверхности пластинки посеребрены, показатель преломления стекла n. При каких углах падения α луч света, падающий на основание, будет проходить через пластинку?

Ю.Старокуров

Решения задач М1721—М1725, Ф1730, Ф1733—Ф1742

М1721. *Существуют ли натуральные числа x и y, которые удовлетворяют равенству $x^2 - 3y^2 = 2000$?*

Ответ: не существуют. Число x^2 не может делиться на 3, ибо правая часть – число 2000 – не делится на 3. Значит, x^2 при делении на 3 дает в остатке 1, а вместе с этим и вся левая часть при делении на 3 дает остаток 1. Но 2000 дает в остатке 2 – противоречие.

Любопытно, что если в правой части вместо 2000 поставить 1000 и сохранить вопрос задачи, то ответ снова будет тот же: не существуют. Однако делением на 3 здесь не обойтись. Здесь поможет деление на 5, а как – подумайте сами.

В.Сендеров

М1722. *Пусть a, b – натуральные числа. Проведем через точку $(a; b)$ прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник.*

а) Докажите, что количество точек с целыми неотрицательными координатами, которые лежат внутри или на сторонах этого треугольника, превышает $2ab + a + b$.

б) Докажите, что эта оценка точная: через точку $(a; b)$ можно провести прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник, внутри и на сторонах которого всего $2ab + a + b + 1$ точек с целыми неотрицательными координатами.

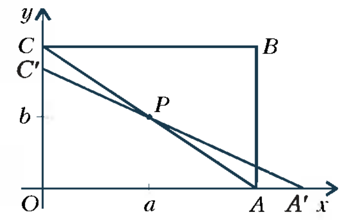


Рис.1

Рассмотрим прямоугольник $OABC$ с центром в точке $P(a; b)$ и сторонами, параллельными осям координат (рис.1). Внутри и на сторонах этого прямоугольника всего $(2a+1)(2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1$ целочисленных точек.

Чуть-чуть сдвинем точку A вправо. Через полученную точку A' и точку P проведем прямую до пересечения с осью ординат в точке C'. Если сдвиг был достаточно мал, то в треугольнике $OA'C'$ не появится ни одной точки с целыми координатами, которой не было в треугольнике OAC.

При центральной симметрии относительно P любая целочисленная точка прямоугольника $OABC$ переходит в целочисленную точку этого же прямоугольника. Поэтому все отличные от P целочисленные точки прямоугольника разбиваются на пары точек, симметричных относительно P.

Итак, если A' достаточно близка к точке A, то внутри и на границе треугольника $OA'C'$ расположена ровно половина отличных от P целочисленных точек, т.е. $2ab + a + b$ точек. Вместе с точкой P получаем всего $2ab + a + b + 1$ точек. Мы решили пункт б).

Теперь займемся пунктом а). Для определенности, пусть прямая отсекает от первого координатного угла треугольник OA_1C_1, где точка A_1 расположена правее точки A (рис.2). Чтобы получить треугольник A_1C_1O из треугольника ACO, достаточно отрезать от последнего треугольник CC_1P и добавить треугольник AA_1P.

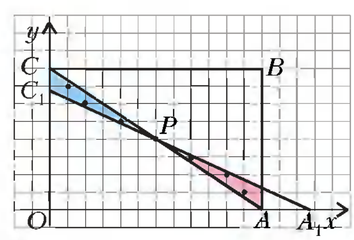


Рис.2

Но при центральной симметрии относительно точки P треугольник CC_1P переходит в (закрашенный на рисунке 2) треугольник, являющийся частью треугольника AA_1P. Целочисленные точки при этом переходят в целочисленные. Задача решена.

М.Панов, А.Спивак

М1723. *Из точки на плоскости выходят n красных и n синих векторов. Красные векторы занумерованы натуральными числами от 1 до n. В порядке нумерации каждый красный вектор поворачивается по часовой стрелке и занимает положение первого свободного синего вектора так, что в конце концов все красные векторы займут положения всех синих векторов. Докажите, что сумма углов поворотов не зависит от порядка нумерации красных векторов.*

Можно считать, что все векторы имеют единичную длину, а их концы располагаются на окружности Q единичного радиуса. Таким образом, на окружности Q имеется n синих и n красных точек, при этом красные точки как-то занумерованы числами от 1 до n.

Пусть C – синяя точка, в которую переходит n-я красная точка. Ближайшую к C по часовой стрелке точку (из отмеченных $2n$ точек) обозначим буквой K. Уясним для себя, что K – красная точка. Предположение о том, что K может быть синей точкой, приводит к противоречию с тем, что в точку C переходит n-я красная точка.

Каждая красная точка при переходе в синюю вычерчивает на окружности Q дугу поворота. Легко заметить, что дуга CK (от точки C к точке K по часовой стрелке) не является частью никакой дуги поворота при исходной нумерации красных точек. Но решающее свойство дуги CK состоит в том, что она не является частью никакой дуги поворота при всякой нумерации красных точек.

Чтобы в этом убедиться, развернем дугу KC, на которой находятся все отмеченные точки, в виде прямолинейного отрезка KC (точка K – левый конец, точка C – правый). При этом всякая дуга поворота при исходной нумерации красных точек превратится в вектор, идущий слева направо из красной точки в синюю. Так что левее всякой точки отрезка KC находится красных точек не меньше, чем синих. Из этого факта следует решающее свойство дуги CK, о котором сказано выше.

Поэтому можно заключить, что при всякой нумерации красных точек любая дуга поворота будет представляться вектором на отрезке KC, идущем слева направо из красной точки в синюю. Сумма длин таких векторов всегда равна разности суммы координат синих точек и суммы координат красных точек.

Но постоянство суммы длин векторов равносильно постоянству суммы углов поворотов.

В.Произволов

М1724. *В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, пересекающиеся в точке O. Прямая DE пересекает продолжение стороны AC в точке K. Докажите, что медиана BM треугольника ABC перпендикулярна прямой OK (рис.1).*

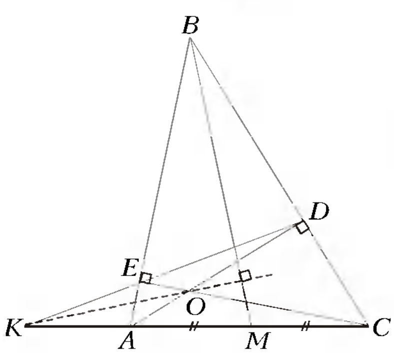


Рис.1

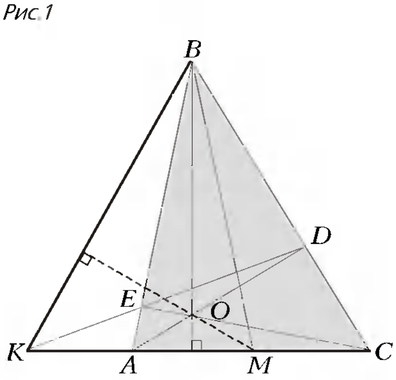


Рис.2

Докажем, что прямая OM перпендикулярна KB. Отсюда непосредственно будет следовать утверждение задачи, поскольку в этом случае O окажется ортоцентром треугольника KBM (рис.2).

Пусть основанием перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BK, служит точка N (рис.3). Поскольку точки E и N лежат на окружности с диаметром OB, то угол BND равен углу BED. Аналогично, четырехугольник $AEDC$ вписан в окружность с диаметром AC. Поэтому угол BED равен углу ACB. Таким образом, сумма углов KND и ACB равна 180°, т.е. четырехугольник $KNDC$ вписанный. Значит, угол NCK равен углу NDK. Но угол NDE равен углу NBE в силу того, что точки B, D, E и N, как мы уже отмечали, лежат на одной окружности с диаметром OB. Поэтому равны углы NBA и NCA. Т.е. точка N лежит на описанной окружности треугольника ABC.

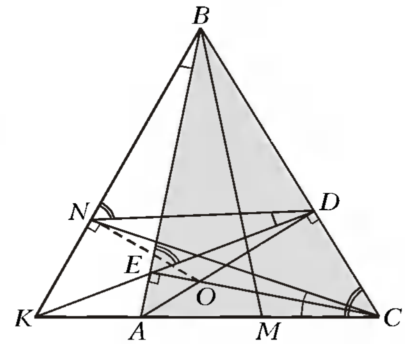


Рис.3

Нам осталось совсем немного. Продолжим прямую NO до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке P (рис.4).

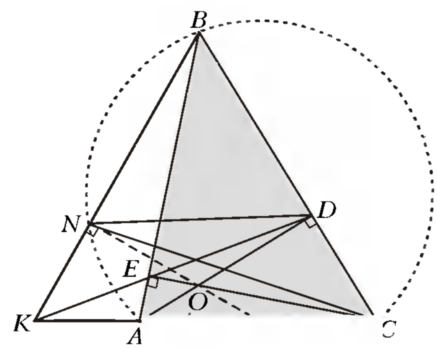


Рис.4

Так как угол BNP прямой, то BP – диаметр этой окружности. Значит, углы BAP и BCP прямые. Поэтому отрезок AP параллелен CE, а PC параллелен AD. Но отсюда $APCO$ – параллелограмм, и прямая NO делит AC пополам, что и требовалось доказать.

М.Волчкевич

М1725*. *Из квадрата $(2n+1)\times(2n+1)$ клетчатой бумаги вырезана крестообразная фигура F (рис.1). Докажите, что*

а) фигуру F нельзя разрезать на 2n выпуклых фигур;

б) если фигура F разрезана на 2n + 1 выпуклых многоугольников, то каждый из них является прямоугольником.

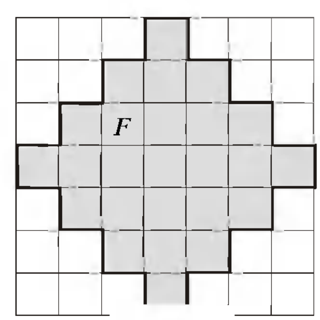


Рис.1

а) Фигура F является многоугольником, который можно заключить в квадрат $ABCD$ так, что на каждой стороне квадрата окажется ровно $n+1$ угловых вершин многоугольника F (рис.2).

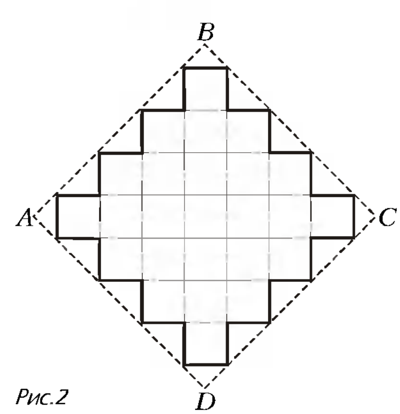


Рис.2

Допустим, что F можно разрезать на $2n$ выпуклых фигур: $F =$

$= \bigcup_{i=1}^{2n} \Phi_i$. Тогда каждая сторона квадрата пересекается ровно с $n+1$ из этих фигур, так как никакая из них по причине выпуклости не может иметь более одной точки ни на какой из сторон квадрата $ABCD$. Но всех выпуклых фигур $2n$ штук, поэтому найдутся две различные фигуры Φ_i и Φ_j такие, что каждая из них имеет по одной точке на каждой из противоположных сторон квадрата AB и CD. Точно так же найдется фигура Φ_k, которая имеет по одной точке на сторонах BC и DA. Но тогда Φ_k имеет общие внутренние точки как с Φ_i так и с Φ_j, что невозможно, так как Φ_k не может совпасть одновременно с Φ_i и с Φ_j, ибо Φ_i и Φ_j различны. Значит, начальное допущение неверно.

б) Многоугольник F разрезан на $2n+1$ выпуклых многоугольников: $F = \bigcup_{i=1}^{2n-1} M_i$. Докажем, что все они – прямоугольники, используя и развивая соображения предыдущего пункта.

Прежде всего сформулируем вспомогательное утверждение: если какой-либо выпуклый многоугольник, содержащийся в F, имеет на сторонах квадрата $ABCD$ четыре точки, то этот многоугольник – прямоугольником (со сторонами, параллельными диагоналям $ABCD$). Для доказательства утверждения нужны лишь свойства выпуклости. Убедитесь в его справедливости самостоятельно.

Далее заметим, что найдется многоугольник M_i, который имеет по одной вершине на сторонах AB и CD квадрата $ABCD$, а также найдется многоугольник M_j, который имеет по одной вершине на сторонах BC и DA. Но тогда M_i и M_j имеют общую внутреннюю точку и потому совпадают ($i=j$). Значит, M_i является прямоугольником, полупериметр которого равен $2n+2$.

Остается доказать, что остальные многоугольники разрезания (их $2n$) тоже являются прямоугольниками.

Многоугольник F за вычетом прямоугольника M_i распадается на четыре ступенчатые «пирамиды», сумма высот которых равна $2n$. Докажем (и этого будет достаточно!), что если ступенчатая пирамида T высоты k разрезана на k выпуклых многоугольников, то все они – прямоугольники (рис.3). Вершины A_1, A_2, ..., A_k принадлежат – по одной – каждому из k многоугольников. Отсюда ясно, что T нельзя разрезать на менее чем k выпуклых многоугольников. Вершины B_1, B_2, ..., B_k принадлежат – по одной – каждому из k многоугольников. Но тогда все эти вершины разбиваются на k пар, принадлежащих разным многоугольникам: $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_k, B_k)$. В силу этого каждый из отрезков A_1B_1, A_2B_2, ..., A_kB_k является стороной какого-либо из k многоугольников разрезания. Теперь можно сказать, что все доказано, так как эти отрезки как раз разрезают T на k многоугольников, из которых каждый – прямоугольник.

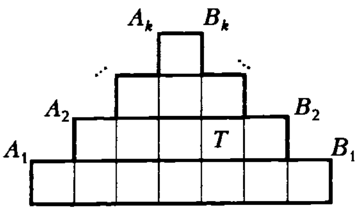


Рис.3

В.Произволов

Ф1730. *В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью $S = 1$ м^2 под поршнем, находящимся на высоте $h = 1$ м, содержится $N = 100$ одинаковых шариков диаметром $d = 0,1$ мм. Шарики хаотически двигаются, средняя квадратичная скорость шарика $v_0 = 100$ м/с. Поршень начинают двигать со скоростью $u = 1$ м/с и останавливают на высоте $2h$. Во сколько раз изменится при этом средняя энергия шариков? Потерь механической энергии при соударениях нет, сила тяжести отсутствует.*

Во время движения шарики практически не сталкиваются друг с другом, так как время между двумя последовательными столкновениями для произвольного шарика велико:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_0} = \frac{1}{\pi d^2 n v_0} = \frac{Sh}{\pi d^2 N v_0} \approx 3\cdot10^3\text{с}.$$

Тогда в процессе движения поршня изменение энергии каждого шарика связано только с его ударами о движущийся поршень и определяется изменением вертикальной составляющей скорости шарика. Найдем это изменение. Пусть расстояние от дна сосуда до поршня в некоторый момент равно l, поршень движется вверх со скоростью u, а шарик догоняет его со скоростью v, существенно большей, чем u. В этом случае изменение скорости шарика после удара равно $\Delta v = -2u$. Следующий удар о поршень произойдет через время $\Delta t = 2l/v$. Поршень за это время переместится на

$$\Delta l = u\Delta t = u\frac{2l}{v} = -\frac{\Delta v}{2}\frac{2l}{v} = -l\frac{\Delta v}{v}.$$

Таким образом,

$$v\Delta l + l\Delta v = 0,$$

т.е. произведение lv остается постоянным. Запишем это для вертикальной составляющей скорости шарика:

$$hv_{z0} = 2hv_z,$$

откуда

$$v_z = \frac{1}{2}v_{z0}.$$

Получается, что на высоте $2h$ вертикальная составляющая скорости шарика в 2 раза меньше, чем на высоте h. Вначале кинетическая энергия шарика была

$$W_0 = \frac{m}{2}\left(v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + v_{z0}^2\right),$$

где

$$\left(v_{x0}^2\right)_{\text{ср}} = \left(v_{y0}^2\right)_{\text{ср}} = \left(v_{z0}^2\right)_{\text{ср}}.$$

При перемещении поршня изменилась только вертикальная составляющая скорости шарика, следовательно, его полная энергия стала

$$W = \frac{m}{2}\left(v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + \frac{1}{4}v_{z0}^2\right) = \frac{3}{4}W_0.$$

Через большой промежуток времени, когда из-за соударений между шариками их движение вновь полностью хаотизируется, средняя квадратичная скорость шариков станет равной

$$v_{\text{ср}} = v_0\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 87 \text{ м/с}.$$

Д.Абанин

Ф1733. *Корабль злобных пришельцев из космоса представляет собой цилиндр высотой 100 м и диаметром 100 м, стоящий вертикально на плоской поверхности. Единственной уязвимой точкой корабля является маленький люк, находящийся в центре верхнего круга. да и то только в том случае, если попавший в него снаряд имеет скорость не меньше 20 м/с и прилетает под углом к вертикали не больше 45° (данные получены из источников, заслуживающих полного доверия). В нашем распоряжении имеется маленькая пушка, находящаяся на уровне земли. При какой минимальной скорости вылета снаряда из ствола пушки мы сможем поразить корабль? Стрелять можно под любым углом и из любой точки поверхности земли.*

Удобно «обратить» траекторию снаряда – стрелять из конечной точки (люк) и смотреть, куда и с какой скоростью упадет снаряд. Если при скорости 20 м/с снаряд, вылетающий под углом 45°, перелетит край корабля и упадет на землю – задача будет сразу решена. Однако простой расчет показывает, что снаряд ударится о верхнюю плоскую поверхность цилиндра на расстоянии 40 м от точки выстрела. Ясно, что скорость придется увеличить так, чтобы при том же значении угла дальность превысила 50 м – радиус цилиндра. Для этого подойдет минимальная скорость примерно 22,4 м/с (значение g приближенно принято равным 10 м/с^2). Скорость снаряда внизу, на уровне земли, найдем из закона сохранения механической энергии – она получится 50 м/с.

Можно легко найти и оптимальную точку для стрельбы с поверхности земли (точку падения снаряда при выстреле сверху), но об этом в задаче не спрашивали.

З.Рафаилов

Ф1734. *Через неподвижный блок переброшена легкая нерастяжимая нить, к концам нити прикреплены два одинаковых груза массой M каждый. К боковой поверхности одного из грузов прицепился таракан массой m. Вначале грузы удерживали, причем тяжелый груз находился на H выше легкого. Грузы отпустили. В тот момент когда они поравнялись, таракан прыгнул перпендикулярно боковой поверхности своего груза и уцепился за двигавшийся вверх второй груз. Через какое время грузы снова поравняются? На какую максимальную высоту поднимется груз с тараканом?*

К тому моменту когда грузы в первый раз поравняются, таракан опустится на $H/2$ и скорости тел (по величине они все одинаковы) можно найти из энергетических соображений:

$$\frac{mgH}{2} = \frac{(2M+m)v_1^2}{2},$$

отсюда

$$v_1 = \sqrt{\frac{mgH}{2M+m}}.$$

Прыгая перпендикулярно боковой поверхности опускающегося груза, таракан имеет вертикальную скорость, равную скорости покидаемого им груза, а прыжок не оказывает влияния на скорость этого груза. Но после того как таракан уцепится за поверхность второго груза, скорость системы изменится, и часть энергии системы перейдет в тепло. Найдем новую скорость из закона сохранения импульса (тут не все так просто – есть закрепленный блок, который может «испортить» нам полный импульс, но, достаточно долго рассуждая на эту тему, можно убедить почти всех, что этого не произойдет). Итак, грузы движутся вместе со скоростью v_1, навстречу им с такой же по величине, но противоположной по направлению скоростью летит таракан. Скорость после такого «удара»

$$v_2 = v_1\frac{2M-m}{2M+m}.$$

Ускорение движущегося с этой начальной скоростью вверх тяжелого груза направлено вниз и равно

$$a = g\frac{m}{2M+m},$$

а время движения до верхней точки равно

$$\tau = \frac{v_2}{a} = \frac{(2M-m)v_1}{mg}.$$

Поравняются грузы еще через τ, значит, искомое время составит

$$t = 2\tau = 2(2M-m)\sqrt{\frac{H}{mg(2M+m)}}.$$

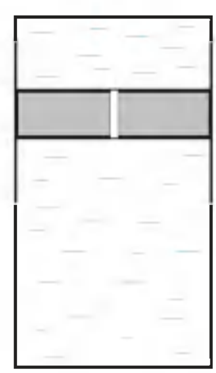
Высота подъема груза с тараканом относительно точки встречи будет

$$h = \frac{1}{2}v_2\tau = \frac{H}{2}\frac{(2M-m)^2}{(2M+m)^2}.$$

Условие этой задачи можно понять и по-другому: таракан прыгает так, что его скорость оказывается параллельной поверхности земли, т.е. он отталкивается от поверхности груза под некоторым углом, чтобы погасить свою вертикальную скорость. Этот вариант задачи для решения проще – два быстрых последовательных толчка в одну сторону и в другую оставляют скорости грузов прежними, а высота подъема относительно точки встречи получается равной $H/2$.

Р.Тараканов

Ф1735. *В высоком вертикальном цилиндрическом сосуде диаметром D, заполненном водой плотностью ρ, находится толстый тяжелый поршень массой M (см. рисунок), плотно прилегающий к боковым стенкам (вода через просвет между поршнем и стенками не протекает). По оси поршня сделано отверстие малого диаметра d ($d \ll D$), через которое вода может перетекать из одной части сосуда в другую. Поршень отпускают, и через некоторое время его движение становится равномерным. Найдите скорость установившегося движения поршня. Вязкость жидкости невелика. Толщина поршня h.*



Обозначим скорость установившегося движения поршня через v. Скорость движения воды в отверстии во много раз больше – она приблизительно равна vD^2/d^2 (мы не будем делать различий между величинами D^2 и $\left(D^2-d^2\right)$ – по условию диаметр дырки во много раз меньше диаметра поршня). Вода движется быстро только в отверстии, а во всех других местах ее скорость мала. На воду со стороны поршня действует вниз сила $F = Mg - F_A = Mg - \rho Shg$, которая за малый интервал времени τ придает большую скорость массе воды $m = \rho Sv\tau$:

$$F\tau = \frac{mvD^2}{d^2} = \frac{\rho Sv^2\tau D^2}{d^2}.$$

Отсюда мы выразим скорость движения поршня:

$$v = \frac{d}{D}\sqrt{\frac{Mg - \rho Shg}{\rho S}} = \frac{d}{D}\sqrt{gh\left(\frac{\rho_п}{\rho} - 1\right)},$$

где $\rho_п/\rho$ – отношение плотности материала поршня к плотности воды. Ответ можно записать и по-другому – через непосредственно заданные в условии задачи величины:

$$v = \frac{d}{D}\sqrt{gh\left(\frac{4M}{\rho\pi D^2 h} - 1\right)}.$$

Характер движения жидкости сильно зависит от формы «входа» отверстия и от вязкости жидкости, поэтому приведенное решение носит очень приблизительный характер.

А.Зильберман

Ф1736. *Две тележки, массы которых M и 3M, соединены легкой пружинкой жесткостью k. Они находятся на гладком горизонтальном столе. Толкнем легкую тележку в направлении более тяжелой, вдоль соединяющей их пружинки, сообщив ей скорость v_0. Через какое время скорость легкой тележки снова станет равной начальному значению? Найдите ее смещение за этот интервал времени.*

Скорость центра масс системы равна $v_0/4$. Относительно центра масс тележки будут колебаться в противофазах. Скорость легкой тележки станет равной своему начальному значению ровно через один период этих колебаний. Длина пружинки от легкой тележки до центра масс составляет $3/4$ полной длины пружинки, следовательно, период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{4/3k}} = \pi\sqrt{\frac{3M}{k}}.$$

В тот момент, когда скорость легкой тележки равна v_0, она находится на таком же расстоянии от центра масс, как и в первый момент, значит, смещение тележки равно смещению центра масс:

$$l = \frac{v_0}{4}\pi\sqrt{\frac{3M}{k}}.$$

Р.Александров

Ф1737. *На диаграмме V–T процесс, который проводят с молем разреженного гелия, представляет отрезок прямой $V = V_0 + aT$, причем температура газа в процессе увеличивается от T_0 до $3T_0$ (постоянные V_0, T_0 и a считаются известными). Найдите максимальную и минимальную теплоемкости газа в этом процессе.*

Теплоемкость в таком процессе не остается постоянной (впрочем, выбором констант можно это «поправить»: при $a = 0$ получится $V = \text{const}$, а при $V_0 = 0$ будет постоянным давление – в таких процессах $C = \text{const}$).

Передадим системе очень малое количество теплоты Q, приращение температуры обозначим ΔT. Тогда

$$Q = A + \Delta U = p\Delta V + \frac{3}{2}R\Delta T = \frac{RT}{V}a\Delta T + \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Теплоемкость равна

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = R\left(\frac{aT}{V} + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= R\left(\frac{aT}{V_0 + aT} + \frac{3}{2}\right) = R\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1 + aT/V_0}\right).$$

Видно, что мы получили монотонную функцию температуры, причем в зависимости от знака константы a эта функция с ростом температуры T или возрастает, или убывает. Нужно отметить, что отрицательным может быть и V_0 – при разумном выборе константы a объем на заданном интервале $(T_0, 3T_0)$ вполне может оказаться положительным.

Итак, максимальная и минимальная теплоемкости получаются на краях диапазона $(T_0, 3T_0)$:

$$C_1 = R\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1 + aT_0/V_0}\right),$$

$$C_2 = R\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1 + 3aT_0/V_0}\right).$$

Какая из них максимальная, а какая минимальная, зависит от знака a.

А.Простов

Ф1738. *Большой уединенный проводник при помощи резистора сопротивлением R все время поочередно подключают на время τ_1 к проводнику, потенциал которого поддерживается равным φ_1, и на время τ_2 – к другому проводнику, потенциал которого поддерживается равным φ_2. Считая τ_1 и τ_2 малыми, определите тепловую мощность, рассеиваемую в резисторе.*

Будем считать, что потенциал большого проводника φ мало изменяется за промежутки τ_1 и τ_2. Тогда

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{R}\tau_1 = \frac{\varphi - \varphi_2}{R}\tau_2,$$

откуда

$$\varphi = \frac{\varphi_1\tau_1 + \varphi_2\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}.$$

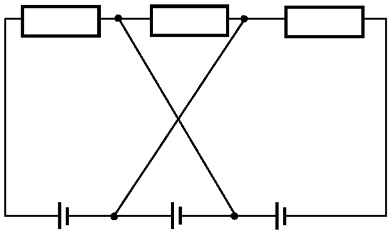
За полный период $(\tau_1 + \tau_2)$ выделяется количество теплоты

$$Q = \frac{(\varphi_1 - \varphi)^2}{R}\tau_1 + \frac{(\varphi - \varphi_2)^2}{R}\tau_2.$$

Средняя мощность равна

$$P_{ср} = \frac{Q}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{R}\frac{\tau_1\tau_2}{(\tau_1 + \tau_2)^2}.$$

А.Повторов



Ф1739. *В схеме, изображенной на рисунке, все три батарейки одинаковые, напряжение каждой составляет 3 В, два резистора имеют сопротивления по 100 Ом, сопротивление третьего 200 Ом. Какими могут быть токи через каждую из батареек? Провода в точке пересечения не соединены.*

Тут придется рассмотреть два варианта подключения резисторов – резистор сопротивлением 200 Ом находится посередине или с краю (ясно, что безразлично, с какого именно края – перестановка приводит к очевидному перераспределению токов крайних батарей).

Рассмотрим вначале первый случай. К выделенному резистору приложено напряжение 3 В, ток через него равен 3В/200 Ом = 15 мА и течет справа налево. К резисторам сопротивлением 100 Ом приложены напряжения по 6 В, по каждому из них течет ток 60 мА, направления токов – слева направо. Крайние резисторы подключены последовательно со «своими» батарейками – токи через батарейки равны токам этих резисторов. Осталось найти ток средней батарейки. В узел, соединяющий среднюю и левую батарейки, втекает суммарный ток 60 мА + 15 мА = 75 мА, значит, такой же ток вытекает через подключенный к этому узлу «наклонный» проводник. С учетом направления токов найдем ток через среднюю батарейку: 60 мА + 75 мА = 135 мА, он течет справа налево.

Во втором случае, когда резистор сопротивлением 200 Ом находится слева, ток через него течет слева направо и составляет 6В/200 Ом = 30 мА. Ток через средний резистор течет справа налево и равен 3В/100 Ом = 30 мА, через правый резистор ток равен 6В/100 Ом = 60 мА и течет слева направо. Тогда ток «наклонного» провода из левого узла составляет 60 мА, а ток средней батарейки равен 60 мА + 60 мА = 120 мА.

М.Учителев

Ф1740. *Электромагнит представляет собой катушку, намотанную на цилиндрический сердечник. На оси электромагнита найдем точку, в которой магнитная индукция равна 10^{-3} Тл (это намного меньше поля у торца сердечника), принесем в эту точку небольшой сверхпроводящий круговой виток и расположим его перпендикулярно оси магнита так, чтобы ось проходила через центр витка. При этом в витке возникнет ток 10 А. Отодвинем виток параллельно вдоль оси на 1 см – ток витка уменьшится на 1%. С какой силой магнит действовал на виток в первой точке? Диаметр витка 3 см. Вначале, на большом расстоянии от электромагнита, тока в витке не было.*

Если отойти немного вбок от оси электромагнита, то поле уже не будет направлено точно вдоль оси – появится перпендикулярная составляющая. Именно она и «отвечает» за появление силы, действующей на проводящее кольцо (силы со стороны «осевого» поля только деформируют кольцо). Найдем перпендикулярную составляющую поля там, где будет находиться кольцо, т.е. на расстоянии радиуса кольца от оси. Для этого посчитаем потоки магнитной индукции через площадь кольца в двух его положениях:

$$B_0S = LI_0,\ (B_0 - \Delta B)S = L \cdot 0{,}99I_0.$$

Разность потоков через «торцы» цилиндра равна потоку через боковую поверхность цилиндра. Считая поле меняющимся совсем слабо при таких небольших смещениях, запишем поток через боковую поверхность в виде $B_{\text{бок}}\pi Dh$. Таким образом,

$$B_{\text{бок}}\pi Dh = 0{,}01B_0S.$$

Отсюда получаем силу, действующую на виток:

$$F = \pi DI_0B_{\text{бок}} = \frac{0{,}01B_0\pi D^2I_0}{4h} = 7 \cdot 10^{-6}\ \text{Н}.$$

Можно получить ответ и иначе – приравнивая работу неизвестной силы при перемещении кольца вдоль оси к разности энергий кольца с током в этих двух позициях.

А.Витков

Ф1741. *К источнику переменного напряжения подключены последовательно резистор сопротивлением 200 Ом и катушка индуктивностью 2 Гн, а параллельно этой цепочке включен конденсатор емкостью 10 мкФ. Ток через резистор и катушку имеет амплитуду 0,2 А, ток через конденсатор имеет амплитуду 0,3 А. Найдите по этим данным частоту переменного тока, амплитуду тока, протекающего через источник, и сдвиг фаз между напряжением источника и током через него.*

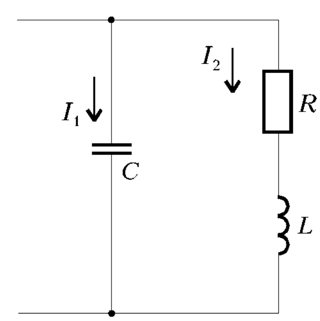


Рис.1

Отношение заданных токов равно(рис.1)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{X_C} = \frac{3}{2},$$

откуда

$$\frac{9}{4}X_C^2 = R^2 + X_L^2.$$

Подставляя $X_L = \omega L$ и $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$, получаем уравнение

$$L^2C^2\omega^4 + R^2C^2\omega^2 - 2{,}25 = 0.$$

Решая его относительно ω^2, найдем

$$\omega^2 = -\frac{R^2}{2L^2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{9L^2}{C^2R^4}}\right) \approx 7 \cdot 10^4\ \text{с}^{-2}.$$

Отсюда частота переменного тока равна

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 42\ \text{Гц}.$$

Теперь нарисуем векторную диаграмму токов и напряже-

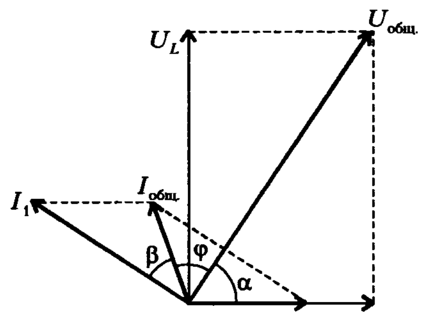


Рис.2

ний, начав с тока I_2. Из рисунка 2 находим

$$U_{общ} = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \approx 113 \text{ В}, \; \alpha = \operatorname{arctg}\frac{U_L}{U_R} \approx 69^\circ,$$

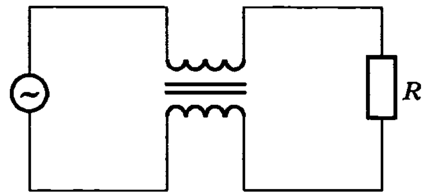
$$I_{общ} = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2\cos\left(90^\circ - \alpha\right)} \approx 0{,}13 \text{ А},$$

$$\beta = \arcsin\frac{I_2\sin\left(90^\circ - \alpha\right)}{I_{общ}} \approx 33^\circ,$$

$$\varphi = 90^\circ - \beta \approx 57^\circ \approx 1 \text{ рад}.$$

А.Старов

Ф1742. *Резистор сопротивлением 200 Ом подключен к сети 220 В, 50 Гц необычным образом – через трансформатор с одинаковыми обмотками (см. рисунок). Индуктивность каждой обмотки составляет 5 Гн. Найдите ток через резистор и сдвиг фаз между этим током и напряжением сети. Сопротивлением проводов и обмоток трансформатора пренебречь, рассеяние магнитного потока считать малым.*



По цепи катушка – резистор – катушка течет некоторый ток. В зависимости от того как включены в цепь катушки (можно поменять местами выводы одной из катушек и все изменить), магнитные поля токов могут складываться друг с другом или вычитаться.

Во втором случае магнитные поля в сердечнике полностью скомпенсируются, и ЭДС индукции обратится в ноль. При этом резистор будет просто включен в сеть своими выводами, поэтому сдвиг фаз между током и напряжением сети окажется нулевым, а ток составит 220 В/200 Ом = = 1,1 А (действующее значение).

Если переключить выводы любой катушки, поля будут складываться и магнитный поток, пронизывающий витки двух катушек, окажется в 4 раза больше, чем при подключении одной катушки в цепь с тем же током (вдвое больше поле и вдвое больше витков). Понятно, что эту необычную цепь легко заменить последовательным включением резистора сопротивлением 200 Ом и катушки индуктивностью $4 \cdot 5$ Гн = 20 Гн. Такая цепь легко «считается» – сдвиг фаз отличается от 90° примерно на 2°, а сила тока составляет

$$\frac{220}{\sqrt{200^2 + (314 \cdot 20)^2}} \text{ А} \approx 35 \text{ мА (действующее значение).}$$

А.Зильберман

Победители конкурса «Задачник «Кванта» 1998–99 годов

I место заняли

по математике

Жданов Денис – Йошкар-Ола, школа 28;

по физике

Янышин Денис – Канаш, школа 9.

II место заняли

по математике

Шабанов Александр – с.Садовое Воронежской обл., школа 1;

по физике

Дельцов Василий – Чебоксары, школа 54.

III место заняли

по математике

Байденко Борис – Украина, Киев, лицей «Лидер»;

по физике

Янышин Александр – Канаш, школа 9.

Кроме того, в число победителей вошли

по математике

Гуляев Михаил – Нижний Новгород, школа 139,
Галкин Никита – Украина, Макеевка, Донецкий колледж,
Малахов Станислав – Луховицы, школа 2;

по физике

Однороженко Денис – Радужный, школа 2,
Манзюк Максим – Волгоград, гимназия 2,
Ключников Илья – Саратов, лицей Колледжа прикладных наук.

Победители, занявшие первые места по математике и физике, награждаются комплектами журнала «Квант» за второе полугодие 2000 года.

Задачи

1. – Сколько раз вы объявили шах? – спросили у гроссмейстера после окончания игры.

– А вы сами узнаете, если я скажу, что в цифровом ребусе

ШАХ + ШАХ + ... + ШАХ = МАТ

слово ШАХ встречается столько раз, сколько я объявил шах во время партии, причем количество чисел, зашифрованных словом ШАХ, здесь наибольшее, – ответил тот.

Сколько же?

М.Ахмеджанова

2. Бивис и Батт-Хед смотрели три программы видеоклипов по трем телевизорам одновременно. Первая программа содержала в полтора раза меньше клипов,

чем вторая, а всего в трех программах было 200 клипов. Из всего просмотренного Бивису понравилась лишь пятая часть клипов первой программы и половина клипов второй программы. Батт-Хеду понравилось столько же клипов, сколько и Бивису, в том числе все клипы третьей программы. А сколько клипов им не понравилось?

И.Акулич

3. В некотором городе на любом перекрестке сходятся ровно три улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Из города выходят три дороги. Верно ли, что эти дороги непременно имеют разные цвета?

С.Дужин

4. Имеется 100 карточек. Какие бы 50 из них ни взять, среди них можно выбрать 30 таких, что какие бы 20 из них ни взять, из них можно выбрать 10 таких, что какие бы 5 из них ни взять, среди них окажется не менее 3 красных карточек.

В то же время, какие бы 80 карточек из 100 ни взять, среди них можно выбрать 20 таких, что какие бы 10 из них ни взять, среди них окажется не менее 2 синих карточек.

Сколько красных и сколько синих карточек находится в колоде?

В.Произволов

5. Когда жители Параллелограммии отвоевали у жителей Пентагонии пятиугольный участок поля, они решили разделить его на участки в виде параллелограммов.

Удастся ли им это сделать?

Л.Емельянов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков.

6. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют неравенству $\frac{a+b}{c+d} < 2$. Докажите, что

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} < 8.$$

В.Сендеров

7. Четыре натуральных числа таковы, что произведение любых трех из них является квадратом целого числа. Докажите, что каждое из четырех чисел является квадратом целого числа.

В.Произволов

8. Могут ли две биссектрисы внешних углов треугольника пересекаться на его описанной окружности?

В.Сендеров

9. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске, чтобы каждая из них угрожала ровно n остальным? Рассмотрите случаи а) $n = 0$; б) $n = 1$; в) $n = 2$.

И.Акулич

10. Летом Маша отдыхала в молодежном лагере, где вместе с ней находились 45 школьников. После окончания отдыха 950 пар обменялись адресами. Через некоторое время Маше понадобился адрес Ирины, с которой она адресом не обменивалась. Докажите, что Маша может узнать адрес Ирины с помощью отдыхающих в лагере, т.е. что существует цепочка из школьников, которая начинается с Маши и оканчивается Ириной и в которой каждая пара школьников обменялась адресами.

О.Мельников

Победители конкурса «Математика 6–8» 1999 года

Лучших результатов в конкурсе добились следующие школьники:

Белов Дмитрий – Иваново, лицей 33, 8 кл.,
Дятлов Семен – Новосибирск, гимназия 3, 7 кл.,
Исаев Михаил – Барнаул, школа-гимназия 42, 7 кл.,
Щербина Татьяна – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Цимбалюк Александр – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Томин Дмитрий – Иваново, лицей 33, 8 кл.,
Аввакумов Сергей – Севастополь, гимназия 7, 8 кл.,
Шепельская Варвара – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Дильман Глеб – Челябинск, ФМЛ 31, 8 кл.,
Книшевицкий Кирилл – Донецк, школа 13, 7 кл.,
Гордон Дмитрий – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Ятченко Артем – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Оникиенко Александр – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Жариков Антон – Набережные Челны, гимназия 26, 7 кл.,
Зеленская Анна – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Есебуа Георгий – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.

и кружки:

гимназии 26, Набережные Челны, руководитель *Л.В.Баева*,
при Ивановском энергетическом университете, руководитель *С.И.Токарев*,
«Эврика», ФМЛ 27, Харьков, руководители *Е.Л.Аринкина, В.Я.Крупчицкий*,
Математической школы Малой академии наук при Харьковском областном дворце детского и юношеского творчества, руководитель *С.А.Лифиц*,
при центре дополнительного образования «Поиск», Чебоксары, руководители *С.А.Иванов, О.В.Ильин, А.В.Монов*,
ФМЛ 64, Омск, руководитель *Ю.Е.Рязанова*,
школы-лицея 90, Краснодар, руководители *З.А.Дегтерева, Н.Ю.Балагурова*,
при Стерлитамакском государственном педагогическом институте, Стерлитамак, руководитель *Р.Г.Вахитов*,
математического клуба «Граф», ФМШ 56, Магнитогорск, руководитель *А.В.Христева*,
гимназии 10, Тобольск, руководитель *А.А.Кугаевский*,
многопрофильной гимназии г.Раменское, руководитель *Н.М.Митрофанова*,

лицея 2, Ангарск, руководитель *Э.М.Нефедова*,
при Самарском муниципальном университете Наяновой, Самара, руководители *В.С.Исаханова, А.Н.Савин, А.К.Овчинников*.

Жюри конкурса отмечает также хорошие работы следующих школьников:
Свердлика Валерия – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Вершининой Анны – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Гнеушева Сергея – Челябинск, ФМЛ 31,
Поплавского Михаила – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Львова Петра – Саратов, 8 кл.,
Гринберга Антона – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Гринберга Игоря – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Бабичевой Татьяны – Набережные Челны, гимназия 26, 6 кл.
и кружков:
«Пифагор», гимназия 1, Петровск-Забайкальский, руководитель *И.О.Путинцева*,
многопрофильного лицея, Луганск, руководитель *А.А.Камин*,
школы-гимназии 10, Ангарск, руководитель *Л.В.Шварева*,
«Эрудит», Астрахань, руководитель *А.В.Забалуева*,
СФМШ 35, Донецк, руководитель *Д.Л.Конашенков*,
школы 51, Комсомольск-на-Амуре, руководители *Р.В.Голобокова, Г.И.Лимаренко*.

Сезам, откройся!

А.КОТОВА

Дехканин Али скромно слушал беседу ученого звездочета и хитроумного Насреддина.[1] Когда Гуссейн Гуслия, раздосадованный тем, что ему вновь не удалось посрамить собеседника, перестал наконец призывать Аллаха и проклинать свою несчастливую судьбу, Али почтительно вмешался в разговор.

– Извините меня, о достопочтенные, за то, что я прерву вашу мудрую беседу, но мне вспомнилась одна загадка, ответ на которую мне неизвестен. Не могли бы вы удовлетворить любопытство столь ничтожного невежды, как я, и разрешить ее?

Гуссейн Гуслия немедленно воспрял духом и приосанился.

– Говори, я позволяю, – важно сказал он. «Сейчас я наконец одержу верх над тобой, о самонадеянный Насреддин!» – подумал он, надеясь, что загадка окажется слишком сложна для Ходжи Насреддина. Он же, великий Гуссейн Гуслия, конечно, разрешит ее – ведь в вычислениях ему нет равных.

– Рассказывают, – начал Али, – что знаменитый Али-Баба, мой дальний родственник, нашел некогда пещеру, в которой разбойники хранили награбленные сокровища. Он услышал и волшебные слова, которые отпирали дверь в пещеру. Вы, вероятно, знаете эту достойную удивления историю и знаете те волшебные слова...

– Конечно, – кивнул Гуссейн Гуслия. – Следовало лишь сказать: «Сезам, откройся!» – и двери распахивались. Продолжай же, мы слушаем тебя.

– Но мало кто знает, – продолжал Али, – что одних слов было все же недостаточно. Историю эту передавали из уст в уста многие достойные люди, прежде чем она достигла слуха Шехерезады, столь же прекрасной, сколь и умной женщины; и постепенно важные детали рассказа были утрачены. Я же, приходясь троюродным племянником внучатой племянницы самого Али-Бабы, слышал эту историю в том виде, в каком сам Али-Баба рассказывал ее своим внукам.

Али закрыл глаза, чтобы никакой посторонний предмет не отвлекал его внимания, и заговорил нараспев:

– ...И когда подошел я к горе, в которой хранились сокровища, и произнес волшебные слова, и ничего не случилось, вспомнил я, что перед тем, как воззвать к Сезаму, атаман разбойников чем-то скрипел и грохотал. Я огляделся и увидел перед собою бочку, обыкновенную деревянную бочку, в каких привозят из дальних стран свои вина гяуры, не признающие наших бурдюков, столь удобных в обращении. Бочка была закрыта плотно пригнанной крышкой, но в крышке оказались четыре круглых отверстия, расположенные квадратом. Я внимательно осмотрел бочку со всех сторон, но более ничего не нашел. Тогда, призвав на помощь Аллаха, опустил я руки в два из отверстий и нащупал каждой

[1] *См. «Квант» №1, 2 за этот год.*

рукой по кувшину, из горлышек которых торчали вяленые рыбины, размерами и формой подобные сельдям. Вытащив одну из них, я убедился, что это превосходная каспийская сельдь, хорошо посоленная и жирная. К несчастью, раздался шум и лязг – разбойники возвращались, что-то забыв в пещере…

Ходжа Насреддин осторожно тронул Али за плечо.

– Послушай, друг, уже взошла луна, а мне хотелось бы хорошенько выспаться. Не мог бы ты подхлестнуть верблюдов своего повествования, дабы они скорей добрались до оазиса истины?

Али открыл глаза и некоторое время с недоумением оглядывался, как человек, позабывший, где он находится.

– Прости, Ходжа Насреддин, – сказал он, – я несколько увлекся. Мой предок вновь спрятался за деревом и увидел, как разбойники подъехали к пещере. Атаман подошел к бочке и засунул в нее руки, как прежде Али-Баба. Но, как вы помните, одной селедки не хватало – ведь Али-Баба ее вытащил и в данный момент обсасывал ее хребет, притаившись поблизости. Атаман рассвирепел, стал обвинять своих разбойников в воровстве и в запальчивости громко крикнул: «Вы же прекрасно знаете, о негодные пожиратели вяленой рыбы, что эти селедки отпирают пещеру!». Тут, как вы понимаете, Али-Баба весь обратился в слух. «Ведь волшебные слова срабатывают, – бушевал атаман, – лишь если все четыре селедки во всех четырех кувшинах под четырьмя отверстиями направлены хвостами в одну сторону – вверх или вниз!». Он приказал разбойникам где угодно раздобыть недостающую селедку; разбойники клялись, что не трогали ее и не знают, где среди ночи достать вяленую рыбу – не устраивать же налет на слободу рыбников из-за одной сельди? Переругиваясь между собой, разбойники ушли; предок же мой, не теряя времени, помчался во весь дух домой, схватил последнюю в доме еду – это была худосочная сушеная треска, но другой рыбы не нашлось – и побежал обратно.

Он вернулся к пещере, засунул руки в бочку и положил в пустой кувшин свою треску; но когда он вынул руки, раздался тот самый скрип и грохот, какой он слышал раньше. Бочка бешено завертелась, а когда остановилась, нельзя было определить, в какие отверстия прежде Али-Баба засовывал руки.

И вот теперь мы подошли к загадке. Али-Баба никогда не рассказывал, как же ему удалось открыть дверь. Он говорил лишь, что несколько раз засовывал руки в бочку и поворачивал рыб то так, то эдак, после каждого опыта восклицая: «Сезам, откройся!». Как вам известно, в конце концов пещера открылась, ибо Али-Баба несомненно побывал в ней и вынес часть сокровищ, которых ему хватило на безбедную жизнь до самой старости. Объясните же мне, ты, мой мудрый друг Ходжа Насреддин, и ты, известный своей ученостью Гуссейн Гуслия, как Али-Баба смог справиться со столь хитроумным замком?

– Та-ак… – протянул Гуссейн Гуслия, оглаживая бороду. – Если засунуть руки в какие-либо отверстия по диагонали квадрата, можно повернуть селедки на этой диагонали головами вверх (рис.1). Потом засовываем руки в отверстия, образующие какую-то из сторон квадрата, и поворачиваем одну из селедок так, чтобы обе они были головами вверх (рис.2). Если дверь не открылась, значит, нужно перевернуть еще одну селедку – ведь теперь три селедки направлены головами вверх.

Рис. 1

– И как же ты определишь ее? – с любопытством спросил Ходжа Насреддин.

– Буду последовательно засовывать руки то так, то эдак, моля Аллаха о снисхождении, – задумчиво ответствовал Гуссейн Гуслия. – Рано или поздно я ухвачу за хвост ту единственную селедку, которая лежит неправильно!..

– Ну, если тебе понадобилась помощь Аллаха, – заметил Ходжа Насреддин, – молись и о том, чтобы разбойники не вернулись прежде, чем ты ухватишь нужную рыбу за хвост! Аллах велик, но и он иной раз медлит, надеясь, что разумный обойдется без него, – у него хватает хлопот с неразумными.

Рис. 2

– Погоди, о нечестивый богохульник! – воскликнул старый звездочет. – Мне следует удалиться и поразмыслить. Думаю, к утру я сообщу вам разгадку.

Ходжа Насреддин лениво зевнул.

– Зачем ждать утра, о мудрый Гуссейн Гуслия? Если хочешь, я расскажу тебе, что следовало делать Али-Бабе.

Смотри: ты разобрался, как повернуть три из селедок вверх головами. Но тебе ведь не нужно, чтобы все они обязательно смотрели на звезды, правильно? Засунь руки вновь в диагональные отверстия. Если одна из селедок хвостом вверх, ты повернешь ее хвостом вниз и откроешь дверь. Если же обе они головами вверх, поверни одну из них вверх хвостом. Теперь на одной стороне квадрата у тебя обе селедки смотрят в небо, а на другой – в землю (рис.3).

– Это ничего не даст, – проворчал Гуссейн Гуслия. – Теперь тебе нужно перевернуть две из них, а как ты это сделаешь?

– Немного терпения, по-

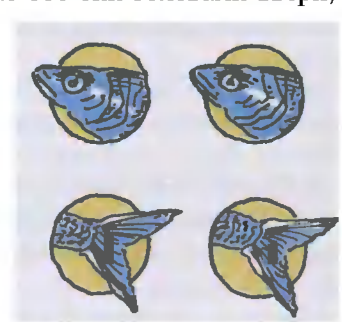


Рис. 3

Рис. 4

– Немного терпения, почтенный, немного терпения. Теперь я вновь выбираю сторону квадрата. Если обе селедки смотрят вверх или обе смотрят вниз, я переворачиваю их – и дверь открыта. Если же они смотрят в разные стороны, я все равно их переворачиваю...

– Зачем? – раздраженно спросил Гуссейн Гуслия. – Ты только запутаешься в этих поворотах!

– Ничуть не бывало! Теперь у меня по диагоналям селедки расположены одинаково! В двух противоположных углах они смотрят вверх, в двух других – вниз (рис.4). Осталось еще раз засунуть руки в бочку, в любые отверстия по диагонали квадрата, и перевернуть селедки, как бы они ни лежали – хвостами ли вверх, хвостами ли вниз – и дверь откроется!

Гуссейн Гуслия чуть не плакал. Опять осрамиться перед Ходжой Насреддином было выше его сил!

– Не расстраивайся, – сказал Насреддин. – Если бы я был на месте Али-Бабы, я куда быстрее решил бы эту задачку.

– Уж куда быстрее, – всхлипнул старик. – Позор, позор на мою седую голову!.. А как?

– Я вытащил бы все селедки. Если Али не ошибся, рассказывая нам свою историю, без одной селедки бочка не крутилась, ведь так? Значит, можно не спеша засунуть всю рыбу по местам в нужном положении, и пока не положишь последнюю, бочка останется неподвижной. А когда четвертая рыба окажется на своем месте, дверь уже открыта.

– Погоди, Насреддин, – сказал Али. – Наверное, рыбу все-таки нельзя вынимать, а то задача становится слишком простой.

– Тогда в следующий раз, рассказывая свое семейное предание, не напирай на вкус селедки, – сказал Насреддин. – Признайся, где ты раздобыл столь превосходную задачу?

Али сильно смутился.

– Кто-то рассказывал ее при мне в нашей деревенской чайхане, – сказал он, краснея. – Я только немного приукрасил ее...

...Пожелав друг другу доброго сна, собеседники расстались. Насреддин и Али завалились на кошму, любезно предоставленную чайханщиком. А великий мудрец, звездочет и математик Гуссейн Гуслия отправился в свои покои в эмирском дворце, где и проворочался без сна всю ночь. Страшное подозрение терзало его: уж не от Ходжи ли Насреддина услыхал Али свою загадку?..

ИНФОРМАЦИЯ

X Сахаровские чтения

19 и 20 мая 2000 года в санкт-петербургском лицее ФТШ при Физико-техническом институте им. А.Ф.Иоффе РАН состоялась юбилейная международная научная конференция школьников «Сахаровские чтения». Сроки проведения конференции, как обычно, были приурочены ко дню рождения Андрея Дмитриевича Сахарова.

Популярность Сахаровских чтений постоянно растет. В этом году Программный комитет получил около 400 заявок, из которых для участия в конференции были отобраны 211 докладов по шести секциям: математики, физики, программирования, биологии, истории и литературоведения. Участниками конференции стали школьники из 25 городов России, Беларуси, Украины, Югославии и США. На наиболее многочисленных секциях физики и биологии помимо устных были представлены и стендовые доклады.

Сахаровские чтения не являются конкурсом – здесь нет победителей и побежденных. Однако на каждой секции работает жюри, состоящее из ученых высшей квалификации. Для начинающего исследователя профессиональная оценка места представляемой им работы в ряду других является чрезвычайно важной.

Дипломы лауреатов получили следующие докладчики:

по секции физики – *Ахил Наранг*, *Самир Мегани* (США), *Ребекка Эйзенхаймер* (США), *Артем Борисенко* (Калининград, лицей 18), *Денис Лицкевич* (Беларусь, Барановичи, лицей 1, 10 кл.), *Юрий Янсон* (Украина, Харьков, гимназия 45, 10 кл.), *Андрей Кошелев* и *Андрей Шутович* (Санкт-Петербург, лицей ФТШ, 11 кл.), *Константин Бодня* (Калининград, лицей 23, 10 кл.);

по секции математики – *Валерия Лисицкая* (Украина, Мариуполь, Городской лицей, 10 кл.), *Алевтина Голякова*, *Дмитрий Вельтищев* и *Михаил Вельтищев* (Москва, ФМОШЛ 444, 9 кл.);

по секции программирования – коллектив учащихся 9 – 11 классов ФМГ 30 (Санкт-Петербург) в составе: *Александр Касьянов*, *Андрей Жданов*, *Борис Карулин*, *Виктор Живописцев*, *Евгений Жидков*, *Егор Сорокин*, *Иван Ласаков*, *Игорь Горягин*, *Константин Усевич*, *Ростислав Хлебников*, а также *Андрей Кошелев* (Санкт-Петербург, лицей ФТШ, 11 кл.), *Андрей Киселев* (Украина, Черновцы, лицей 1, 10 кл.), *Александр Павлов* и *Юрий Шатов* (Санкт-Петербург, лицей 366, 11 кл.).

Всем авторам докладов были вручены дипломы участников конференции.

По окончании конференции состоялся круглый стол. Его участники – руководители делегаций, члены жюри, учителя – обсуждали проблемы научной работы школьников, говорили о роли научного руководителя, о месте научной конференции в научно-образовательном процессе. Высказывались разные, иногда полярные суждения. В одном участники круглого стола были единодушны – подобные съезды школьников чрезвычайно полезны.

Координаты Оргкомитета Сахаровских чтений:

телефоны: (812) 247-56-49, 247-15-15;
факс: (812) 247-56-49;
e-mail: khimin@school.ioffe.rssi.ru.

Раздался голос, взор мой понуждая
Оборотиться, как иглу звезда.

Данте

Осмотрев и изучив в большом количестве то, что извлекается из высоких гор, морских глубин, подземных пещер и потаенных рудников, мы... долго и много, с большим старанием занимались исследованием магнитных сил.

Уильям Гильберт

...магнитные явления вызываются исключительно электричеством и... нет иной разницы между двумя полюсами магнита, чем их положение относительно токов, из которых этот магнит состоит.

Андре Мари Ампер

Я попытался дать вам качественные объяснения диамагнетизма и парамагнетизма, однако хочу тут же внести поправку и сказать, что с точки зрения классической механики честным путем понять магнитные эффекты невозможно. Подобные магнитные эффекты – явления целиком квантово-механические.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакома вам взаимосвязь вещества и магнитного поля?

От первых попыток многовековой давности приспособить естественные магниты для своих нужд, прежде всего для навигации, человек прошел гигантский путь в понимании тончайших процессов, происходящих внутри окружающих нас тел при их помещении в магнитное поле. Следующие одно за другим открытия воплощались в электрических машинах и трансформаторах, приборах для записи и воспроизведения звука, находили применение в совершенствовании средств связи и вычислительной техники.

Рождение магнетохимии, изучающей магнитные свойства веществ и их связь со строением молекул; использование магнитострикции, т.е. способности тел менять форму и размеры при намагничивании, для производства ультразвука и применение фотоэлектромагнитного эффекта в качестве инструмента для оценки качества полупроводников; разработка ферритов как альтернативы металлическим магнитам; установление взаимозависимости между сверхпроводимостью и магнетизмом – многим оказался славен уходящий век в исследовании магнитных материалов. Однако он вовсе не исчерпал все связанные с ними задачи – их хватит и на ваш век! Уж очень заманчивы перспективы работы с веществами, обладающими неведомыми ранее магнитными свойствами, и устройствами на их основе, отличающимися высокой надежностью, миниатюрностью, огромной информационной емкостью. А сколько интересных, порой загадочных, проявлений магнетизма в живой природе!

Так что пусть вас не смущают слова Р.Фейнмана о сложности изучения магнитных явлений. Не забывайте, что издавна, по крайней мере со времен Данте, магнетизм завораживал даже поэтов, а само слово «магнит» во французском языке происходит от глагола «любить». И если эта тема притянет вас, как магнит, – успех обеспечен!

Вопросы и задачи

1. Отчего вертикально стоящие стальные оконные решетки с течением времени намагничиваются? На каком конце вертикального прута возникает северный полюс и на каком – южный?

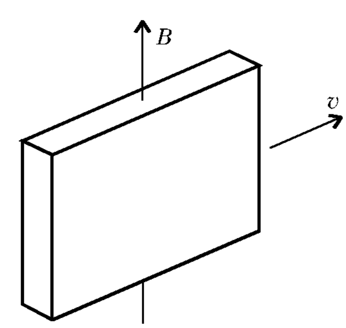
2. Действительно ли постоянны постоянные магниты?

3. Можно ли намагнитить железный шарик?

4. Почему электромагнитный кран не применяют для переноски горячего проката?

5. Кювета с раствором медного купороса помещена между полюсами сильного электромагнита (поверхность жидкости перпендикулярна магнитному полю). В центре кюветы в раствор опущен медный электрод, соединенный с положительным полюсом источника тока, а по периметру погружено медное кольцо, соединенное с отрицательным полюсом. Что произойдет при замыкании цепи?

6. Длинная и тонкая незаряженная пластинка из немагнитного металла движется с постоянной скоростью перпендикулярно линиям магнитной индукции, как показано на рисунке. При этом



между боковыми плоскостями пластинки возникает разность потенциалов. Почему?

7. Можно ли защититься от внешнего магнитного поля с помощью ферромагнитной оболочки, подобно экранировке от электростатических полей?

8. Почему колебания стрелки компаса затухают быстрее, если корпус прибора латунный, и медленнее – если пластмассовый?

9. Зачем сердечник трансформатора собирают из отдельных пластин?

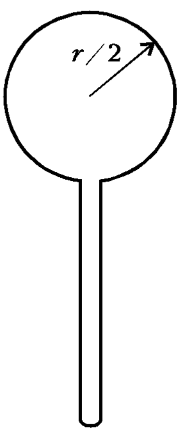
10. Зависит ли индуктивность катушки с железным сердечником от силы тока в ней?

11. Как изменится магнитное поле катушки с током, если в нее ввести сердечник: а) железный; б) алюминиевый; в) медный?

12. При исследовании магнитной проницаемости жидкостей их поочередно наливают в сообщающийся сосуд, одно из колен которого помещают между полюсами сильного электромагнита. Отчего одни жидкости поднимаются в этом колене, а другие опускаются?

13. Отчего пламя свечи, помещенное между полюсами магнита, выталкивается наружу?

14. Что произойдет в кольце, когда в него введут магнит, если кольцо сделано из: а) диэлектрика; б) проводника; в) сверхпроводника?



15. По сверхпроводящему кольцу радиусом r идет ток. Форму кольца меняют так, как изображено на рисунке. Как изменится индукция магнитного поля в центре уменьшенного кольца по сравнению с индукцией в центре первоначального кольца?

Микроопыт

Тонкий железный гвоздь подвесьте на легкой несгораемой нити так, чтобы при включении сильного электромагнита, находящегося поблизости, гвоздь отклонялся, попадая в пламя горелки. Вы увидите, что через некоторое время, словно «обжегшись», гвоздь выскакивает из пламени и возвращается в исходное положение. Затем все повторяется. В чем причина периодических движений гвоздя?

Любопытно, что...

...первым обстоятельным трудом о свойствах и методах применения магнита, в котором шла речь о магнитном камне и были даны указания, как находить у него полюса и намагничивать им железную иглу, был появившийся во Франции в 1269 году рукописный трактат «Послание о Магните Пьера де Марикур, по прозванию Перегрина, к рыцарю Сигеру де Фукокур».

...еще Гильберт предположил, что в природе должны существовать «магнитные заряды» – северный и южный. Эти воззрения были развиты Кулоном, установившим закон взаимодействия таких «зарядов», в точности совпадающий с известным законом для зарядов электрических. И только Ампер, объяснив все магнитные явления с помощью элементарных электрических токов, сделал гипотезу об особых магнитных зарядах излишней.

...любому вращающемуся телу, в том числе и планетам, должно быть присуще небольшое намагничивание. Попытки обнаружить его предпринимал еще выдающийся российский физик П.Н.Лебедев. Впоследствии, на более совершенном оборудовании, это явление подтвердилось, в частности было измерено намагничивание стержня при его вращении вокруг продольной оси.

...суммарная магнитная проницаемость сплава диамагнитного золота и парамагнитной платины падает на два порядка по сравнению с обычными неферромагнитными веществами.

...в отличие от парамагнетиков и диамагнетиков, магнитная проницаемость ферромагнитных веществ определяется интенсивностью внешнего магнитного поля. Так, у железа магнитная проницаемость в слабых полях может достигнуть значений в несколько тысяч единиц, а в сильных полях ее значения снижаются до сотен единиц и ниже. При температурах же выше так называемой точки Кюри (для железа она равна 767 °С) все ферромагнетики становятся парамагнетиками.

...некоторые сплавы парамагнитных и диамагнитных металлов, например так называемый сплав Гейслера из меди, марганца и алюминия, почти не уступают по своим магнитным свойствам железу. Сейчас получены вполне «работоспособные» магниты из... органических материалов.

...магниты, изготовленные из соединений самария и кобальта, обладают огромной подъемной силой. Магнит в виде маленького шарика способен удерживать груз, в сотни раз превышающий по массе сам шарик.

...не очень сильное магнитное поле, в которое помещен сверхпроводник, вытесняется из его толщи, а достаточно сильное магнитное поле разрушает сверхпроводящее состояние. Этот эффект можно использовать для создания логических элементов памяти в ЭВМ на сверхпроводниках.

...благодаря новым открытиям в магнетизме, становится реальным производство устройств памяти со сверхплотной записью информации, когда на площади с ноготь большого пальца (любимое сравнение американских компьютерщиков) разместятся десятки тысяч копий «Одиссеи» Гомера.

...в сверхсильных магнитных полях, например на поверхности нейтронных звезд, атомы вещества образуют полимерные цепочки, выстроенные вдоль линий поля. Они столь крепки, что даже при температуре в миллионы градусов вещество пребывает в кристаллическом состоянии. В подобных полях диэлектрик может стать металлом и наоборот.

Что читать в «Кванте» о взаимосвязи вещества и магнитного поля

(публикации последних лет)

1. «Точка Кюри» – 1996, №2, с.35;
2. «Магниты, заряды, планеты...» – 1996, №3, с.40;
3. «Можно ли увидеть магнитное поле?» – 1996, №6, с.37;
4. «Как устроены металлы?» – 1997, №2, с.2;
5. «Магнитная монополия» – 1998, №2, с.2;
6. «Магниты... бывают без металла» – 1998, №3, с.17;
7. «ФЭМ- эффект» – 1998, №4, с.3;
8. «Катушки индуктивности в электрических цепях» – 1998, №4, с.44 или 1999, Приложение №2, с.90;
9. «Осторожно: магнитное поле» – 1999, №3, с.41;
10. «Страсти по сверхпроводимости в конце тысячелетия» – 2000, №1, с.2.

Материал подготовил А.Леонович

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Как Студент на сверхзвук выходил» предназначена девятиклассникам, заметка «Где найти прошлогоднюю зиму?» – десятиклассникам и «Хочешь общаться – излучай» – одиннадцатиклассникам.

Как Студент на сверхзвук выходил

А.СТАСЕНКО

Не делай ничего наугад, а только по правилам искусства.

Марк Аврелий

В ночь перед экзаменом по аэродинамике приснился Студенту страшный сон – будто, падая с кровати, достиг он сверхзвуковой скорости. Вскочив в холодном поту, задумался Студент: в самом деле, с какой высоты нужно упасть, чтобы достичь сверхзвука в атмосфере Земли? Вопрос не праздный – ведь этак можно было бы обойтись без аэродинамических труб, требующих большой мощности для разгона воздуха! И еще преимущество: поток воздуха в аэродинамической трубе неизбежно турбулентный (возмущенный), а в атмосфере турбулентность естественная, может быть, как раз такая, как в реальном полете. И еще важное соображение: исследуемое тело, например самолет или его модель, может быть любых размеров, в отличие от (поневоле) малых размеров в трубе. И еще... Но и перечисленных прелестей казалось достаточно, чтобы Студент с воодушевлением взялся за физические оценки.

Еще в школе он знал, что тело, сброшенное с высоты l, достигает (в вакууме) скорости (рис.1, слева)

$$v_0 = \sqrt{2gl}\,. \qquad (1)$$

Значит, чтобы достичь скорости порядка 330 м/с, высота должна быть равна

$$l = \frac{v_0^2}{2g} \approx \frac{\left(3{,}3\cdot 10^2\right)^2}{2\cdot 10}\ \text{м} \approx 5\ \text{км}\,.$$

(Конечно, не обязательно падать вертикально: можно, привязав тело к нити длиной l, достичь той же скорости в нижней точке колебаний. Что гораздо лучше: опыт будет снова и снова повторяться, пока продолжаются колебания – в отличие от одноразового падения вниз.)

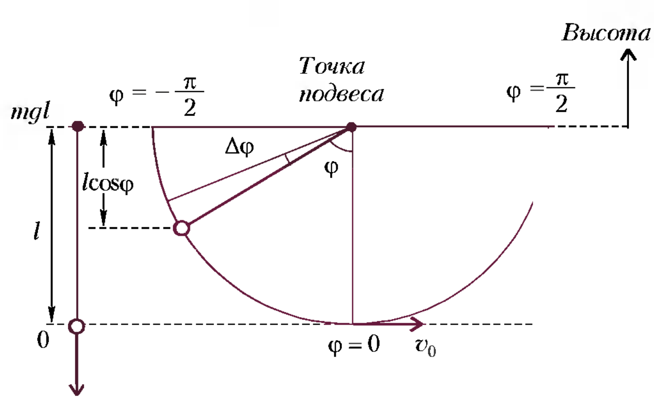


Рис. 1

Но в вакууме никакого звука нет – значит, нет и понятия сверхзвукового движения. А воздух будет оказывать сопротивление движению, и качественно ясно, что начальная высота, падая с которой тело может достичь сверхзвуковой скорости, должна быть больше полученной выше оценки. И, значит, на таких масштабах плотность атмосферы ρ уже не придется считать постоянной величиной (см. рис.1, справа) – об этом отлично знают альпинисты.

Силу сопротивления можно описать, исходя из соображений размерностей:

$$F = C\frac{\rho v^2}{2}S\,. \qquad (2)$$

Здесь $\rho v^2/2$ – так называемый скоростной напор (он имеет размерность давления), S – характерная площадь тела, например его лобового сечения. А вот C – это безразмерный коэффициент сопротивления, который теория размерностей, естественно, «не чувствует». Ради его измерения и построены во всем мире мощные аэродинамические трубы, ради него Студент и задумался.

Так возник Проект Экспериментальной Установки.

Возьмем невесомую нерастяжимую нить длиной l, подвесим на ней сверхзвуковой авиалайнер (например, ТУ-144) или истребитель массой m и, приведя этот «математический маятник» в горизонтальное положение, отпустим (см. рис.1, в центре). Потенциальная энергия самолета в любой точке его траектории, характеризуемой углом φ, равна

$$mgl(1-\cos\varphi)\,.$$

Проверим: в начальной точке, когда $\varphi = -\pi/2$, $\cos\varphi = 0$ и эта энергия равна mgl, а при $\varphi = 0$ (в самой нижней точке траектории) она равна нулю.

Не будь потерь энергии на сопротивление, суммарная механическая энергия сохранялась бы (собственно, из этого условия и найдена скорость v_0 в формуле (1)):

$$m\left(\frac{v^2}{2} + gl(1-\cos\varphi)\right) = mgl\,. \qquad (3)$$

Но если есть сила сопротивления, то суммарная механическая энергия колеблющегося тела будет убывать. Работа силы сопротивления на небольь-

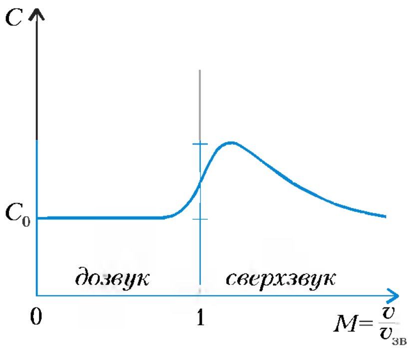


Рис. 2

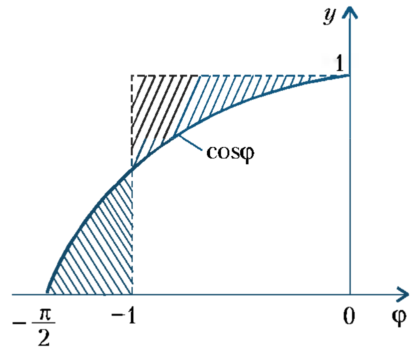


Рис. 3

шом участке пути длиной $l\Delta\varphi$ равна, очевидно, $Fl\Delta\varphi$. Значит, учитывая выражения (2) и (3), можно записать

$$\Delta\left(\frac{v^2}{2} + gl(1-\cos\varphi)\right) =$$

$$= -\frac{v^2}{2}\left(C\frac{\rho Sl}{m}\right)\Delta\varphi. \quad (4)$$

Обозначим набор величин в правой части в скобках одной буквой:

$$\beta = \frac{C\rho Sl}{m}.$$

Вообще говоря, это не постоянная. Действительно, первая же оценка по формуле (1) показала, что проектируемое устройство будет циклопическим сооружением, поэтому плотность воздуха ρ будет заметно изменяться на таких масштабах. Да и безразмерный коэффициент сопротивления C не постоянен, а зависит от отношения скорости движения тела к скорости звука $v_{зв}$, т.е. от числа Маха $M = v/v_{зв}$. Вблизи $M = 1$ он резко возрастает (рис.2), а затем уменьшается с ростом M (для чего и делаются стреловидные крылья у сверхзвуковых самолетов). Конечно, все это можно учесть в правой части уравнения (4) и, решив его, например численно на компьютере, сравнить результаты теории и эксперимента, из чего и будет получена информация об искомом коэффициенте сопротивления.

Но Студент сделал проще. Чтобы оценить все-таки длину подвеса, при которой лайнер заведомо достигнет скорости звука, он сделал *Оценку Сверху*, или, как изящно выражаются математики, мажорировал. Для этого он выбрал для плотности самое большое значение $\rho_0 \approx 1$ кг/м^3 (у поверхности Земли), для коэффициента сопротивления взял максимальное значение (приблизительно вдвое большее, чем при дозвуковых скоростях) $C \approx 2C_0$, а скорость в выражении для работы силы сопротивления решил мажорировать ее значением для случая вакуума, которое получается из выражения (3):

$$\left(v^0\right)^2 = 2gl\cos\varphi = v_0^2\cos\varphi.$$

Итак, в формуле (4) справа стоит убыль механической энергии, заведомо бóльшая (по модулю), чем в реальности, но зато теперь можно проще узнать, сколько будет «съедено» энергии, например на участке траектории от верхней точки ($\varphi = -\pi/2$) до нижней ($\varphi = 0$). Для этого надо сложить все потери энергии на каждом малом $\Delta\varphi$, или, как говорят взрослые, проинтегрировать функцию

$$-\beta_{max}\frac{v_0^2}{2}\cos\varphi,$$

где, по договору, $\beta_{max} = 2C_0\rho_0 Sl/m$. При этом придется найти площадь под кривой $y = \cos\varphi$ (рис.3). Кто умеет, да возьмет интеграл:

$$\int\limits_{-\pi/2}^{0}\cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{0} =$$

$$= 0 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

А кто не умеет, и так поймет, взглянув на рисунок 3, что эта площадь порядка единицы (там для наглядности заштрихованы участки одинаковой площади).

Теперь изменение суммарной механической энергии можно записать так:

$$\left(\frac{v^2}{2} + gl(1-\cos 0)\right) -$$

$$-\left(0 + gl\left(1 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = -\beta_{max}gl\cdot 1.$$

Потребуем, чтобы скорость тела в нижней точке ($\varphi = 0$) стала равной скорости звука: $v = v_{зв}$, и учтем, что $\cos 0 =$ $= 1$, а $\cos(-\pi/2) = 0$. Тогда

$$\left(\frac{v_{зв}^2}{2} + 0\right) - (0 + gl) = -\beta_{max}gl.$$

В результате получим квадратное уравнение для искомой длины l:

$$v_{зв}^2 = 2g(1-\beta_{max})l = 2g\left(1 - \frac{2C_0\rho_0 Sl}{m}\right)l.$$

Подставляя характерные значения величин для «типичных» сверхзвуковых истребителей: $m = 30$ т, $S = 50$ м^2, $C_0 = 0{,}01$, найдем

$$l_1 \approx 7\text{ км и } l_2 \approx 20\text{ км}.$$

Даже меньший из этих двух корней сравним с высотой самых высоких гор на Земле.

И еще одна мысль пронзила Студента: центробежная сила!? Ведь вблизи нижней точки центростремительное ускорение будет равно

$$\frac{v_{зв}^2}{l} \approx 1{,}5g,$$

значит, перегрузка составит $2{,}5g$ – лайнер «потяжелеет», и это надо учесть при выборе троса.

Таким образом, если пропилить в самой высокой горе пропасть с вертикальными стенками шириной в несколько размахов крыла, затем наверху установить горизонтальную ось вращения, подвесить лайнер на тросе длиной семь километров... – работы хватит всем и надолго. А кстати, где можно достать тонкую (желательно нерастяжимую) нить длиной несколько километров, способную выдержать вес нескольких авиалайнеров?

С этими мыслями Студент и пошел на экзамен по экспериментальной аэродинамике. Результат экзамена в летописях не сохранился...

Где найти прошлогоднюю зиму?

А.СТАСЕНКО

Большие керамические сосуды для хранения продуктов, чтобы охладить их, зарывали в землю на глубину, превышающую человеческий рост (найдены в Кноссе, Трое, Тиринфе).

Словарь античности

Великий Лукреций весьма любопытно объяснил полугодовую периодичность колебаний температуры на некоторой глубине под землей:

«Летом в колодцах вода холодней,
потому что от зноя
Пористей почва тогда и скорей
выпускает на воздух
Жара она семена, какие в ней
только найдутся.
...В холод, напротив, она,
под давлением стужи сжимаясь,
Как бы смыкается вся и,
сходясь все плотней и плотнее,
Весь свой остаток тепла выжимает,
конечно, в колодцы».

С тех пор физика выработала более строгие понятия, чем «семена жара» или «давление стужи», – скажем, такие вполне измеримые величины, как плотность ρ или удельная теплоемкость c. Эти понятия сейчас пригодятся нам. А еще одна важная физическая величина, имеющая отношение к делу, называется *теплопроводностью* (или коэффициентом теплопроводности). О ней стоит поговорить особо. Вводится она очень просто и, как все в науке, практически целесообразно.

Например, нужно узнать, сколько тепла ежесекундно уходит зимой через каждый квадратный метр стены дома на улицу – это ведь поможет рассчитать количество дров, угля или электроэнергии, необходимое для отопления помещения. Пусть температуры внутренней и наружной поверхностей стены $t_в$ и $t_н$, а ее толщина h. Тогда искомую плотность потока тепла q, его размерность $[q] = \text{Дж}/(\text{м}^2\cdot\text{с})$, записывают в виде

$$q = \lambda\frac{t_в - t_н}{h}. \qquad (1)$$

Вот здесь уже и введен коэффициент теплопроводности λ. Предполагается, что этот коэффициент не зависит ни от температур, ни от толщины стенки, а характеризует только свойства ее вещества, так что строитель может найти его значение в Справочнике.

Из записанного равенства легко установить размерность коэффициента теплопроводности: $[\lambda] = \text{Дж}/(\text{м}\cdot\text{с}\cdot\text{К})$. Для наших целей важно, что сюда входит единица времени. Это позволяет из всех перечисленных величин ρ, c, h, λ составить комбинацию, имеющую размерность времени:

$$\tau \sim \frac{\rho c}{\lambda}h^2.$$

Для чего? А для того чтобы узнать глубину $h_{T/2}$, на которую «дойдет» температура, полгода назад ($\tau = T/2$) бывшая на поверхности Земли. Отсюда получим

$$h_{T/2} \sim \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c}\frac{T}{2}}. \qquad (2)$$

Конечно, физические свойства «земли», «почвы» чрезвычайно разнообразны – наверняка суглинок, чернозем и гранит отличны друг от друга по плотности, теплоемкости и теплопроводности. Но для комплекса $a = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ можно принять некое «среднее» значение $2\cdot10^{-7}$ м^2/с, этот комплекс так прямо и называется *температуропроводностью*. А сколько секунд содержит один год? Посчитаем:

$$T = 3600\,\frac{\text{с}}{\text{ч}}\cdot 24\,\frac{\text{ч}}{\text{сут}}\cdot 365\ \text{сут} \approx 3\cdot10^7\,\text{с}.$$

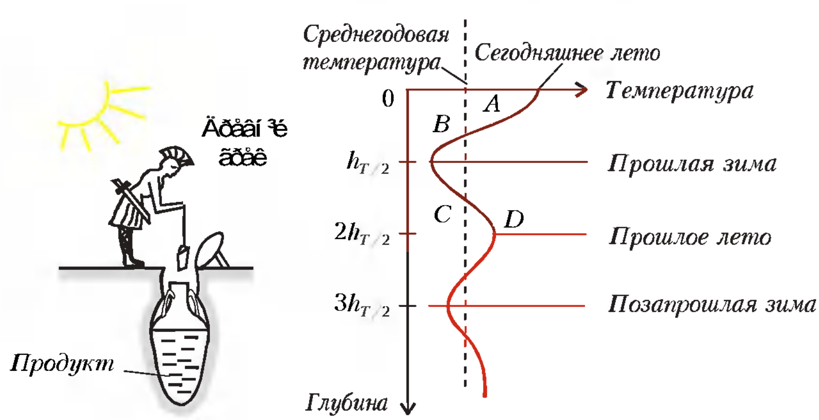
Подставляя все это в полученную для $h_{T/2}$ формулу, имеем оценку

$$h_{T/2} \sim \sqrt{\frac{aT}{2}} = \sqrt{\frac{2\cdot10^{-7}\ \text{м}^2/\text{с}\cdot 3\cdot10^7\ \text{с}}{2}} \sim 2\ \text{м}.$$

Разумеется, это всего лишь оценка по порядку величины, но и она говорит о том, почему древние греки зарывали сосуды глубже своего роста – там проходит волна холода от прошлой зимы, когда на поверхности царит лето.

На рисунке качественно изображена «мгновенная картина» распределения температуры по глубине. Но почему колебания температуры постепенно уменьшаются с глубиной? Все из-за той же теплопроводности: с одной стороны, она позволяет тепловой энергии проникать внутрь земли, а с другой – она же способствует «рассасыванию горбов и впадин» температуры. В частности, по «склону» AB тепловая энергия течет вглубь, а по склону DC – вверх, согласно соотношению (1).

Аналогичную мгновенную картину распределения температуры можно нарисовать и для звуковой волны в воздухе. К счастью, при тех частотах, на которых мы общаемся друг с другом или слушаем музыку, теплопроводность воздуха не играет большой роли: его последовательные сжатия и разрежения происходят так быстро, что теплопроводность не успевает сгладить «горбы и впадины» температуры. Или, как сказал бы физик, *дисперсия* и *затухание* акустической волны незначительны. Но об этом ли думал древний грек, зарывая амфору?..



Хочешь общаться – излучай

А.СТАСЕНКО

Возможность воздействия одного тела на другое на расстоянии через пустоту без посредства чего-нибудь еще... – для меня это настолько бессмысленно, что, по-моему, к такому заключению никогда не может прийти человек, обладающий достаточной способностью разбираться в философских вопросах.

И.Ньютон

Действительно, если вы потеряли в лесу родных или знакомых, рекомендуется кричать «ау!». Правда, тут нет пустоты – акустические волны распространяются в воздухе. Но во Вселенной громадную роль играют волны, способные распространяться и в вакууме.

Представим себе два заряда противоположного знака – один тяжелый положительный, другой легкий отрицательный, вращающийся вокруг первого (рис.1). Кто подумал, что это атом водорода с протоном в центре, – не совсем прав, поскольку микромир

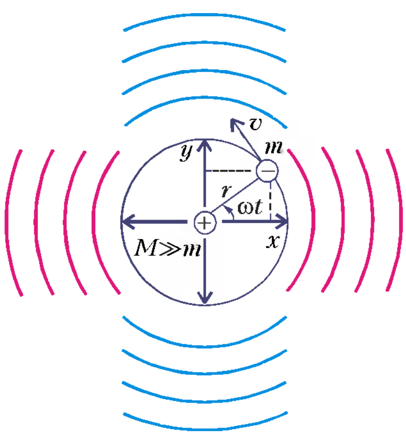


Рис. 1

нужно описывать при помощи квантовой механики, а мы собираемся остаться в рамках «обычной» физики. Просто имеем два заряда, и один из них вращается вокруг другого.

Ясно, что это *вращение* можно представить как два взаимно перпендикулярных *колебания* со сдвигом фаз на $\pi/2$:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\omega t + r^2\sin^2\omega t = r^2$$

(ибо, как хорошо известно, $\sin\omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$). Тут мы еще раз вспомнили, что даже *равномерное* движение по окружности есть ускоренное движение, да не одно, а два. Можно сказать также, что мы имеем два *диполя* (с переменным расстоянием между зарядами).

Но, как учат в школе (и правильно делают), каждый колеблющийся заряд излучает, причем мощность этого излучения пропорциональна четвертой степени частоты. В результате осциллятор – в нашем случае это диполь – каждую секунду должен терять свою энергию W так, что

$$\frac{dW}{dt} \sim -\omega^4. \qquad (1)$$

Выразим энергию диполя через расстояние между зарядами r и величину заряда q. Сила их кулоновского взаимодействия (притяжения) равна

$$F_{\text{К}} = -k\frac{q^2}{r^2},$$

следовательно, потенциальная энергия взаимодействия есть

$$W_p = -k\frac{q^2}{r}.$$

Кинетическую энергию $W_k = mv^2/2$ (центральный заряд тяжел и «неподвижен») можно переписать с учетом того, что кулоновская сила обеспечивает центростремительное ускорение, равное

$$\frac{v^2}{r} = \frac{kq^2}{mr^2}.$$

Тогда полная энергия системы, равная сумме потенциальной и кинетической энергий, будет

$$W = W_p + W_k = -\frac{kq^2}{r} + \frac{1}{2}\frac{kq^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{kq^2}{r}$$

(отрицательный знак описывает тот факт, что движущийся заряд не может уйти «на бесконечность»).

Поработаем теперь над выражением (1), стараясь уравнять хотя бы размерности его обеих частей.

Прежде всего заметим, что изменение энергии в единицу времени пропорционально самой энергии в данный момент времени. Это довольно общее положение. Например, убыль атомов некоего радиоактивного изотопа пропорциональна имеющемуся количеству атомов:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{\tau}N,$$

где τ – характерное время распада, откуда получается экспоненциальный закон

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}.$$

Или, увеличение числа микробов в питательном бульоне в единицу времени пропорционально их наличному количеству:

$$\frac{dn}{dt} = +\alpha n,$$

откуда опять-таки

$$n = n_0 e^{\alpha t}.$$

Точно так же скорость роста денежного вклада в банке пропорциональна наличности в данный момент (если не учитывать «черных» вторников, сред,...).

Таким образом, выражение (1) можно уже несколько конкретизировать:

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} \sim -\omega^4. \qquad (2)$$

В результате слева имеем размерность $1/\text{с}$, справа $1/\text{с}^4$. Далее, поскольку речь идет об электромагнитном излучении, совершенно естественно вспомнить о скорости света в вакууме c, которая имеет размерность м/с и содержит в знаменателе так нужную нам секунду в первой степени:

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} \sim -\frac{\omega^4}{c^3}. \qquad (3)$$

Но что это – теперь справа в знаменателе стоит лишний м^3. А у нас как раз есть характерный размер r! Запишем:

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} \sim -\frac{r^3\omega^4}{c^3} \sim -\frac{1}{\tau}. \qquad (4)$$

Наконец, с размерностями все в порядке, но это все еще не равенство: мы не знаем, какой *безразмерный* множитель может появиться в правой части. Ну и Бог с ним – мы и так знаем достаточно много. Например, можно оценить характерное время τ, за которое энергия осциллятора заметно изменится (например, в два раза):

$$\tau \sim \frac{c^3}{r^3\omega^4}.$$

Если говорить об излучении атома в оптическом диапазоне, можно взять $\omega \sim 10^{16}\ 1/\text{с}$, $r \sim 10^{-10}\ \text{м} = 1\,\text{Å}$. Тогда

$$\tau \sim \frac{\left(3\cdot 10^8\ \text{м/с}\right)^3}{\left(10^{-10}\ \text{м}\right)^3\left(10^{16}\ 1/\text{с}\right)^4} \approx 3\cdot 10^{-9}\ \text{с}.$$

С точки зрения «доквантовой» механики, за это характерное время все электроны должны были бы упасть на ядра своих атомов и Вселенная прекратила бы свое существование, по крайней мере в комфортном для нас виде. Этот Конец Света предотвратила квантовая механика: она позволила электронам вращаться на некоторых избранных (квантованных) уровнях достаточно долго. Но наша оценка не бесполезна: она оказалась оценкой характерного *времени перехода* между этими разрешенными уровнями.

Однако перейдем теперь к излучению другого рода – гравитационному. Вселенной управляет всемирное тяготение. И даже если муха в соседнем доме перелетит с одной стены на другую, это в принципе изменит распределение гравитационного поля во всей Вселенной, в том числе и у вашего рабочего стола. И это изменение передается при помощи гравитационных волн, которые распространяются со скоростью c, как и электромагнитные волны в вакууме. Только, в отличие от последних, от гравитационных волн нельзя экранироваться – они проникают всюду, но именно потому их и нелегко зарегистрировать. А было бы так заманчиво следить за перемещением любого интересующего нас тела!

Конечно, полет мухи мало что изменит во Вселенной. Другое дело – движения небесных тел. Основными источниками гравитационных волн являются быстро вращающиеся пульсары, входящие в двойные звездные системы (рис.2,*а*); ими могут быть также неосесимметричные волчки (рис. 2,б). Иными словами, для излучения гравитационных волн важна определенная *асимметрия* систем; их излучение является не дипольным, а *квадрупольным*. (Те, кто бывал на дискотеках, понимают, что «квадро» означает «четыре».)

Попробуем описать это излучение. Если гравитирующий волчок можно охарактеризовать массой m, характерным размером r и скоростью вращения ω, то легко понять, что его вращательная энергия $W \sim mr^2\omega^2$. Оказывается, скорость убыли этой энергии тоже пропорциональна ω^4, так что, аналогично выражению (2), можно записать

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} \sim -\omega^4.$$

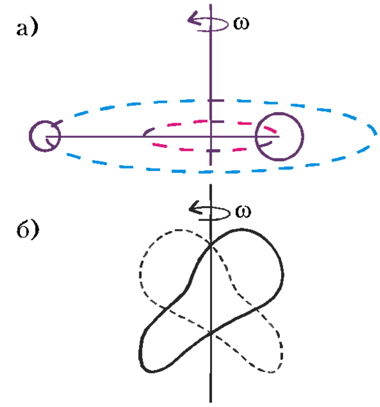


Рис. 2

Однако сюда должны войти величины, характерные именно для гравитации – конечно же, постоянная всемирного тяготения G, имеющая размерность $\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$, и скорость распространения c с размерностью м/с:

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} \sim -\frac{G\omega^4}{c^5}.$$

Но теперь справа имеем размерность $1/\left(\text{с}\cdot\text{м}^2\cdot\text{кг}\right)$, а нужна $1/\text{с}$. Ясно, что правую часть надо умножить на mr^2 – и все будет в порядке:

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} \sim -\frac{Gmr^2}{c^5}\omega^4 \sim -\frac{1}{\tau}.$$

По этому выражению можно найти и характерное время τ замедления вращения звездной системы, излучающей гравитационные волны. Но это предоставим жителям ее планет... если кому-то нравится жить в поле двойной звезды.

ИНФОРМАЦИЯ

V Международная конференция памяти С.Н.Бернштейна

1 — 5 февраля 2000 года в Санкт-Петербургском государственном университете состоялась очередная Международная конференция молодых ученых по математике, физике и программированию, посвященная памяти С.Н.Бернштейна. Конференция проходила в историческом здании Двенадцати Коллегий университета. В парадном Актовом зале перед ее участниками выступил профессор И.В.Романовский, рассказавший о своем учителе — Нобелевском лауреате, академике Л.В.Канторовиче, ученике С.Н.Бернштейна.

Оргкомитет конференции получил 86 заявок на участие в конференции; Экспертный совет, в который входят известные петербургские ученые, рекомендовал к участию в конференции 38 докладов. Работа конференции проходила по секциям математического анализа, алгебры, геометрии, прикладной математики, теоретической и экспериментальной физики, теоретического программирования. Многие доклады представляли собой глубокие научные исследования, некоторые носили элементарный характер, но потребовали от авторов немалой изобретательности.

Главную премию конференции получил петербургский школьник *Александр Нечипорук* за доклад «Воксельная графика». Коллеги Александра по семинару теоретического программирования *Кирилл Лызо*, *Алексей Ковалев* и *Евгений Петренко* были награждены секционными премиями.

Наибольшее внимание специалистов привлекли доклады, которые представили:

по секции алгебры — *Сергей Васильев* и *Филипп Шабашев* (СПГУ), *Станислав Булыгин* и *Андрей Бондаренко* (Украинский национальный университет), петербургские школьники *Евгений Городницкий* и *Василий Халидов*, белорусские школьники *Давид Змейков* и *Александр Медведев* (Александр учился в 8 классе и для решения представленной задачи самостоятельно изучил основы теории групп);

по секции математического анализа — *Дмитрий Митин*, *Андрей Примак* и *Юрий Шеляженко* (Украинский национальный университет), *Тарас Степанов* и *Александр Слободянкин* (Донецкий политехнический колледж), *Павел Дудка* (Черновицкий лицей);

по секции геометрии — пермские школьники *Максим Авхачев*, *Владислав Чике-*

Жеребьевка для чемпиона

Б.ФРЕНКИН

ПЕРЕД КАЖДЫМ СПОРТИВНЫМ соревнованием болельщики поглощены вопросом: кто станет победителем? Ответ зависит от класса игры участников, в какой-то мере и от везения. А когда участников больше двух, то вмешивается такой мощный фактор, как система организации турнира.

Два крайних (и наиболее типичных) вида турниров – круговой и кубковый (олимпийский). При круговой системе каждый участник играет с каждым. Чемпион определяется по сумме очков, и это звание могут разделить несколько человек. При розыгрыше кубка участники разбиваются на пары по жребию. Те, кто победил в парах, снова составляют пары по жребию, и т.д. Если в очередном туре оказалось нечетное число участников, то один из них пропускает этот тур и сразу выходит в следующий. Ничьи при розыгрыше кубка невозможны. В итоге «на ковре» остается один спортсмен – он и получает кубок.

Ясно, что результат кругового турнира меньше подвержен случайностям и надежнее характеризует силы участников. Но при розыгрыше кубка игрок должен все время «выкладываться», тогда как в круговом турнире важна лишь общая сумма очков. Поэтому кубковые матчи проходят в целом интереснее, чем встречи в круговых чемпионатах.

Результаты двух описанных видов соревнований с одним и тем же составом участников могут сильно различаться. Конечно, если дважды провести круговой турнир, то, скорее всего, итог тоже изменится. Но нас интересует влияние самой системы розыгрыша. Поэтому примем *предположение о стабильной игре*: в каждой паре игроков победитель всегда один и тот же (т.е. если один из игроков в паре хоть раз победил другого, он побеждает его всегда). Тогда ничьи в круговом турнире исключены, поскольку их не бывает в кубковом. (Однако допускается, что один игрок выигрывает у другого, другой – у третьего, а при этом третий выигрывает у первого.)

В предположении о стабильной игре результаты кругового турнира предопределены – в том числе, кто станет чемпионом. (Мы будем называть *чемпионами* всех, кто разделил первое место.) С кубком дело обстоит иначе: на его судьбу влияет жеребьевка. Конечно, если чемпион кругового турнира выигрывает у всех остальных игроков, то он возьмет кубок при любой жеребьевке. Но если он проиграл хоть одному участнику и жребий свел их в розыгрыше кубка, то для чемпиона все на этом и закончится.

Естественно возникает вопрос: возможен ли такой расклад игроков по результатам встреч в парах, что чемпион кругового турнира не выиграет кубок ни при какой жеребьевке? (Примем пока, что пропускать туры никому не приходится. Это значит, что число участников является степенью двойки.) Рассмотрим сначала более простую задачу:

А. *Прошел чемпионат по круговой системе с участием 2^N игроков. Теперь тем же спортсменам предстоит разыграть кубок. Выполнено предположение о стабильной игре. Докажите, что существует жеребьевка розыгрыша кубка, при которой чемпион кругового турнира выйдет в финал.*

Результат неплохой, но какой-то половинчатый и потому наводит на некие мысли. Оказывается, мысли эти возникают не зря (хотя путь от второго места к первому нелегок!):

Б. *При тех же условиях докажите, что существует жеребьевка, при которой чемпион кругового турнира получит кубок.*

Утверждение А, конечно, следует из утверждения Б. Но его стоило установить как отдельный факт: оно доказывается не только гораздо проще, но и принципиально другим способом.

Для полноты картины осталось выяснить следующий вопрос:

В. *Пусть число игроков не является степенью двойки, остальные условия сохраняются. Если в очередной тур розыгрыша кубка вышло нечетное число спортсменов, то один из них по жребию пропускает этот тур и выходит в следующий. Останутся ли верными утверждения А и Б?*

Автор приведенных задач – К.Е.Фельдман. Задача Б была предложена на зимних соревнованиях по отбору на международную олимпиаду 1994 года и оказалась на практике крепким орешком – ее решили всего три человека.

Мы видим, что простые и всем знакомые ситуации могут служить источником логических задач. Для их решения не требуется применять какие-то сложные теоремы, но сообразительность нужна не меньше, чем в алгебре или геометрии. Возможно, и вам удастся в самой обычной ситуации найти спрятанную в ней головоломку. Желаем успеха!

лев, *Юлия Могилат* и студентка *Марина Хомякова*;

по секции прикладной математики — студенты *Виктор Куницын* (Санкт-Петербург), *Илона Вертинская* и *Иван Рожнов* (Минск), школьники из Санкт-Петербурга *Наталия Баранова*, *Виктория Алавердова* и *Александр Зимин*, а также школьники из белорусского города Осиповичи *Андрей Широкий* и *Андрей Жигадло*;

по секции теоретической и экспериментальной физики — петербуржец *Николай Клишин* и москвич *Алексей Добрынин*.

В 2001 году Оргкомитет планирует провести VI Международную конференцию молодых ученых памяти С.Н.Бернштейна и приглашает принять в ней участие старшеклассников и студентов младших курсов (возраст участников — не более 19 лет). Полный текст доклада и заявку (в заявке укажите номер факса для отправки приглашения) следует выслать до 10 января 2001 года.

Наш адрес: 199155 Санкт-Петербург, пер.Каховского, 9, Оргкомитет VI Международной конференции памяти С.Н.Бернштейна.

Телефон: (812) 350-10-76.

Факс: (812) 584-43-43.

И.Чистяков

Здравствуйте, уважаемые читатели "Кванта"!

Два года назад появился на свет журнал "Компьютер в школе" (КвШ). Вот как мы представляли себе положение дел в школьных компьютерных классах:

«... Необходимо разобраться в бесчисленных вариациях простого сюжета, обозначенного этими словами – КОМПЬЮТЕР В ШКОЛЕ. Школьная информатика с великим трудом выбирается из безмашинной эпохи, но при этом сотни тысяч учителей и школьников по всей России оказываются неожиданно для самих себя участниками великой всемирной гонки. Вдумаемся: разве угнаться школе за фаворитами этой гонки, обладателями домашних и корпоративных компьютеров? Да и в том ли задача, чтобы угнаться?..».

Плотность событий на мировом компьютерном рынке чрезвычайно высока; "время жизни" микросхем, устройств и программ измеряется месяцами. Выбор того или иного технического решения может обернуться для пользователя как успехом, так и неудачей. Как же научиться принимать верные решения, как не потерять из виду главную цель?

«Во-первых, во-вторых и в-третьих, компьютер – это инструмент общения...» – такая роль компьютеров была предопределена талантливым американским инженером Аланом Кэем тридцать с лишним лет назад.

В десять лет Алан Кэй стал победителем Национальной игры-викторины (National Quiz).

В двадцать восемь он предложил первую в истории (1968) модель персонального компьютера – "динамической книги", Dynamic Book.

В тридцать он стал профессором Станфордского университета, а затем – одним из основателей Исследовательского центра компании Xerox в Пало-Альто, автором первой объектно-ориентированной среды программирования Smalltalk.

Четыре года назад Кэй был приглашен на пост вице-президента Walt Disney Company по исследованиям и разработкам в сфере визуальных технологий, получивших собирательное название Imagineering. Многие годы Кэй роботал преподавателем в калифорнийских школах.

Выступая перед Конгрессом США, Кэй заявил:

«Я уверен, что главная цель непрерывного образования – учиться проницательности, умению "искать суть". Для того чтобы освободиться в XXI веке от мешающих стереотипов, от чувства зависимости, дети должны сегодня осваивать три основные формы рассуждений – назовем их "основанными на фактах", "основанными на логике аргументов" и "основанными на системной динамике", т.е. на представлении о целостности и динамичности мира.

Только... как всему этому научиться?».

Ответом на вопрос Кэя стала статья Феликса Владимировича Широкова, опубликованная в первом номере нашего журнала. Предлагаем выдержки из этой статьи-манифеста.

«The Brave Digital World, или Путь Хаммурапи

... Метод "системной динамики", о котором упоминает Алан Кэй, – это один из методов "формирования разума" (mind shaping). Этот термин относится к только-только формирующейся дисциплине – "теории сознания".

... Одной из красивых и практически важных задач является задача о бумеранге. Когда австралийский абориген бросает бумеранг, его мозг решает так называемую задачу Коши. Бумерангу надо придать такую скорость и такое вращение, чтобы он, описав сложную траекторию, подбил в своем полете птицу и возвратился к охотнику. Мозг решает эту задачу "мгновенно", а повинующаяся ему рука автоматически придает этому удивительному аэродинамическому объекту нужную скорость и направление.

Охотник не проводит свои юные годы в университетских аудиториях, не слушает курсов математического анализа и дифференциальных уравнений, не знакомится с законами Ньютона и не учится интегрировать уравнения механики на компьютере.

Иногда говорят, что будущий охотник учится на примерах, методом "проб и ошибок", запоминая удачные пробы. Но если прикинуть, какое количество проб надо было бы сделать наугад подростку-аборигену, чтобы обеспечить себе обед, то окажется, что время, требуемое для такого обучения, превосходит возраст Вселенной. Мозг довольно быстро обучается формировать общую картину полета бумеранга. Бросая бумеранг тем или иным способом, охотник учится "предвосхищать" события.

Так формируется некоторый механизм разума, позволяющий формировать интуитивную картину "причина – далекое следствие". Собственно, весь жизненный опыт человека состоит в формировании подобных интуитивных картин.

... В книге можно собрать замечательные истории, мудрые афоризмы и поучительные поговорки. В книге можно изложить математическую дисциплину. Но книга практически не годится для передачи знаний методом "системной динамики".

Задача о бумеранге – это лишь один пример ситуации, требующей применения метода "системной динамики". Другим примером может послужить знаменитая задача Хаммурапи. Вы запускаете программу, и на экране монитора появляется сообщение:

"Вы – Хаммурапи, властитель древней Шумерии. Ваша задача – засевать землю, собирать урожай и кормить своих подданных. Если они будут сыты, то вы будете править Шумерией год за годом. Если голодны – то подданные поднимут восстание.

Но год на год не приходится. В задачу встроены генераторы случайностей. Они управляют погодой, которая влияет на *урожайность; они могут вызвать моровую язву, которая погубит половину ваших подданных; они определят количество беженцев, которых вы примете в свое подданство; они, наконец, могут вызвать нашествие неприятеля, армия которого имеет непредсказуемую численность и может появиться на любом участке границ вашего государства".*

Играя с компьютером, исполняя обязанности легендарного Хаммурапи, вы учитесь распределять зерно по разным расходным статьям шумерского бюджета: на прокормление государевых людей, на посев для будущего урожая и на содержание армии. Зерно – ваш переменный, текущий актив, но, кроме того, у вас есть и земля. Часть ее можно продать, обменять на зерно. Цены как на землю, так и на зерно колеблются; вы можете не только продать, но и купить землю. Земля – это постоянный актив, ее площадь не зависит от капризов погоды. Если у вас много подданных и мало земли, то собранный урожай окажется недостаточным, и тогда...

Короче говоря, даже начинающий игрок, просидев за компьютером пару часов, начинает кожей чувствовать смысл различных экономических категорий, оценивать последствия принимаемых решений. Эта игра учит его манипулировать ресурсами, выбирая разумный курс в бушующем житейском море.

... В игре может появиться и персонаж, поучающий владыку, – мудрый писец. Тогда Хаммурапи (сам игрок) и его писец-советник (воплощение логики и "опыта" игровой программы) будут независимо оценивать социально-экономическую ситуацию в Шумерии и принимать решения – каждый свое. Качество этих решений будет проверено жизнью: за вами остается право оценить ситуацию, возникающую на очередном этапе.

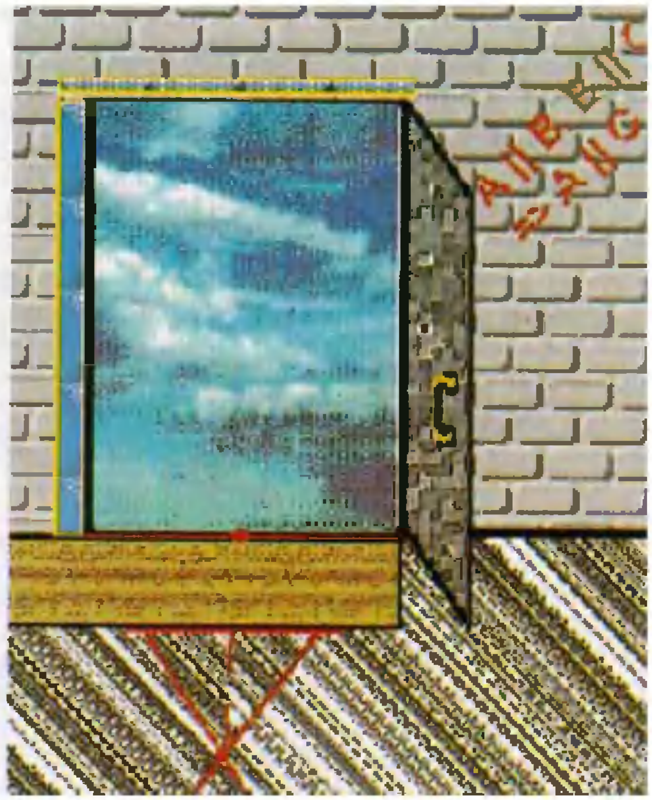
Роль писца можно поручить искусственной нейросети, которая, так же, как и сам великий Хаммурапи, будет принимать все более разумные решения, обучаясь от этапа к этапу игры. Современная теория нейросетей находит широкое применение для анализа и прогнозирования реальных экономических и финансовых ситуаций. По свидетельству журнала "Экономист", уже в 1995 году нейрокомпьютерная технология завоевала Уолл-стрит. Финансовый бизнес уже не сводится к искусству "подсчета бобов" (bean counters – давнее прозвище финансистов); в финансовые, кредитные, страховые и инвестиционные компании стали приходить выпускники математических и физических факультетов, способные быстро освоиться в новом для себя мире и работать с нейромоделями.

... Носителем нового знания, способным передать его будущим поколениям, является сегодня компьютер – динамическая электронная книга. И мы видим одну из главных задач нового журнала – "Компьютер в школе" – в распространении этого подхода к процессам обучения.»

Но компьютер сегодня – не только инструмент общения; он остается непревзойденным инструментом моделирования. Модели процессов и явлений обретают в компьютере новые качества. Спектр компьютерных моделей, создаваемых школьниками и учителями, весьма широк. В школьных проектах угадываются контуры платформы, на которой вырастет здание физики XXI века.

Авторы статей в «КвШ» рассказывают об интересных направлениях прикладной физики. Разработчики из долгопрудненского Физтеха создают коллекцию виртуальных приборов, активно сотрудничают с учителями. А в статье Сергея Бирюкова («КвШ» №3, 2000) продемонстрирован потенциал, которым обладает широко известная в научном мире система компьютерной алгебры DERIVE для создания моделей физических процессов.

Решение многих инженерных задач вполне по плечу школьникам, овладевшим искусством компьютерного моделирования. Мы рассказываем о том, как старшеклассники, участвующие во всероссийских и международных конкурсах, используют компьютер в своих исследованиях.



Сегодня юные обитатели Сети, решившие всерьез заняться физикой, могут обратиться к Владимиру Шелесту из новосибирского Академгородка (www.nsu.ru/materials/ssl/) или к организаторам Красноярской летней школы (http://www.mbec.protres.ru/klsh/klsh3.html). И тогда пароль «WWW» поможет им стать участниками всемирного физического семинара.

Мы рассказываем читателям о новых моделях общения человека с компьютером. Среди них – модели, основанные на методах когнитивной компьютерной графики и теории клеточных автоматов. Синтез этих двух направлений приведет уже в ближайшие годы к созданию нового поколения виртуальных инструментов познания мира.

Рядом с этими технологиями завтрашнего дня – красочная мозаика сегодняшних средств мультимедиа, в которой нашли место и системы виртуальной реальности, и системы символьных вычислений. Об этих системах рассказывают на страницах нашего журнала опытные преподаватели.

Есть и тема, к которой мы возвращаемся раз в год. Тема эта – «Компьютер с тысячью лиц». Как создать в школе локальную сеть по технологии «Интранет»? Найдут ли место в классе портативные компьютеры? Какие контуры приобретет всемирная Сеть, когда ее компонентами станут миллионы «пикосетей» – радиосетей, масштаб которых измеряется десятками и сотнями метров?..

Сотни бумажных страниц, составляющих сегодня подшивку нашего журнала, перенесены на сайт "Компьютера в школе" – www.school.ru. Поиск информации в Сети о последних новостях в мире физики и математики можно начинать с электронных страниц нашего издания. А наш подписной индекс – 26230 по каталогу «Почта России».

Дробно-рациональные уравнения с параметром

С.ЛАВРЕНОВ

В этой статье рассматриваются задачи, довольно часто встречающиеся на вступительных экзаменах. Мы подробно разберем решение нескольких таких задач.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$1+\frac{5a-3}{x-a}=\frac{5(2a+1)(1-a)}{(x-a)(x-3a+1)}.$$

Решение. После очевидных выкладок получим, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+(a-2)x-2a^2+8a-8=0, \\ x\neq a, \quad x\neq 3a-1. \end{cases}$$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения:

$$D=(a-2)^2-4\left(-2a^2+8a-8\right)=$$
$$=9a^2-36a+36=9(a-2)^2\geq 0.$$

Итак, при любом значении a квадратное уравнение имеет корни

$$x_1(a)=a-2,\ x_2(a)=4-2a,$$

так что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=a-2, \\ x=-2a+4, \end{array}\right. \\ x\neq a, \\ x\neq 3a-1. \end{cases} \qquad (1)$$

(Часто абитуриенты записывают в ответ именно эту систему, считая, что этим решение завершено. Но это не так. Можно ли, глядя на эту систему, сразу ответить на вопрос, сколько решений будет при $a=1$? Нет.)

Для каждого корня найдем, при каких значениях параметра a он не удовлетворяет уравнению. Для наглядности сведем вычисления в таблицу:

	$x_1=a-2$	$x_2=-2a+4$
$x-a=0$	$a-2-a=0$ решений нет	$-2a+4-a=0$ $a=\frac{4}{3}$
$x-3a+1=0$	$a-2-3a+1=0$ $a=-\frac{1}{2}$	$-2a+4-3a+1=0$ $a=1$

(Многие абитуриенты пишут, что при найденных значениях a уравнение не имеет корней. Это неверно. Например, при $a=1$ второй корень нужно отбросить. Но первый корень при этом существует и имеет значение -1. Ведь «запрещенное» значение $a=1$ присутствует только во второй колонке нашей таблицы, но не в первой.)

Для «запрещенных» значений a из одной колонки таблицы вычислим значение корня для другой колонки:

$x_1\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}-2=\frac{2}{3}$	$x_2\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\left(-\frac{1}{2}\right)+4=5$
$x_1(1)=1-2=-1$	

Еще выделим случай, когда оба корня совпадают: $D=0\Leftrightarrow a=2\Rightarrow x=0$.

Ответ: $x_1=a-2$, $x_2=4-2a$ при $a\in \boldsymbol{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};1;\frac{4}{3};2\right\}$; $x=5$ при $a=-\frac{1}{2}$; $x=-1$ при $a=1$; $x=-\frac{2}{3}$ при $a=\frac{4}{3}$; $x=0$ при $a=2$.

Вот теперь для любого предъявленного нам значения a мы можем сразу указать количество решений и вычислить их прямой подстановкой.

Чтобы лучше понять, как устроены решения системы (1), построим графики для входящих в (1) соотношений на координатной плоскости aOx (рис.1). Самостоятельно разберитесь в геометрической интерпретации решения.

Упражнения

Решите уравнения и дайте решениям геометрическую интерпретацию:

1. $1+\frac{a+1}{x-a}=\frac{2(a-1)(a-2)}{(x-a)(x-a+1)}$. **2.** $3+\frac{2a-3}{(x-2)(x+a)}=\frac{2x+5a}{x+a}$.

3. $7a+3+\frac{2a\left(9a^2-1\right)}{x^2+2x-a^2+2a}=2x+\frac{9a^2+10a+5}{x-a+2}$.

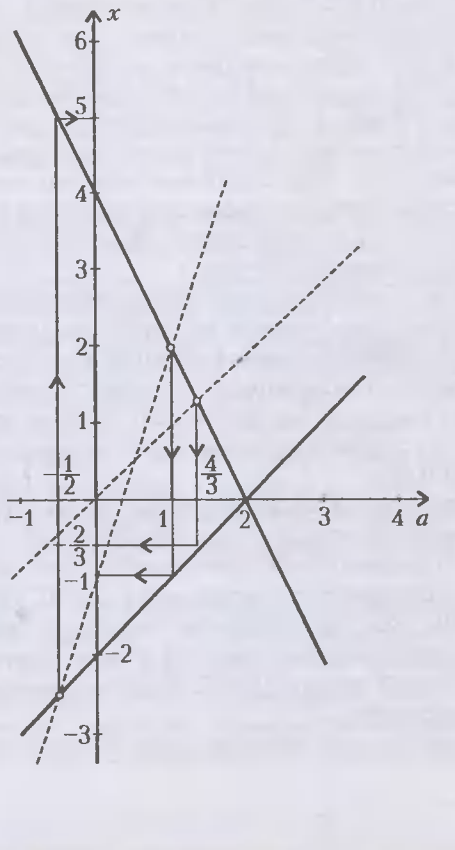


Рис. 1

Дробно-рациональные уравнения с параметром

С.ЛАВРЕНОВ

В этой статье рассматриваются задачи, довольно часто встречающиеся на вступительных экзаменах. Мы подробно разберем решение нескольких таких задач.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$1+\frac{5a-3}{x-a}=\frac{5(2a+1)(1-a)}{(x-a)(x-3a+1)}.$$

Решение. После очевидных выкладок получим, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+(a-2)x-2a^2+8a-8=0, \\ x\ne a, \quad x\ne 3a-1. \end{cases}$$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения:

$$D=(a-2)^2-4\left(-2a^2+8a-8\right)=$$
$$=9a^2-36a+36=9(a-2)^2\ge 0.$$

Итак, при любом значении a квадратное уравнение имеет корни

$$x_1(a)=a-2,\ x_2(a)=4-2a,$$

так что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=a-2, \\ x=-2a+4, \end{array}\right. \\ x\ne a, \\ x\ne 3a-1. \end{cases} \qquad (1)$$

(Часто абитуриенты записывают в ответ именно эту систему, считая, что этим решение завершено. Но это не так. Можно ли, глядя на эту систему, сразу ответить на вопрос, сколько решений будет при $a=1$? Нет.)

Для каждого корня найдем, при каких значениях параметра a он не удовлетворяет уравнению. Для наглядности сведем вычисления в таблицу:

	$x_1=a-2$	$x_2=-2a+4$
$x-a=0$	$a-2-a=0$ решений нет	$-2a+4-a=0$ $a=\frac{4}{3}$
$x-3a+1=0$	$a-2-3a+1=0$ $a=-\frac{1}{2}$	$-2a+4-3a+1=0$ $a=1$

(Многие абитуриенты пишут, что при найденных значениях a уравнение не имеет корней. Это неверно. Например, при $a=1$ второй корень нужно отбросить. Но первый корень при этом существует и имеет значение -1. Ведь «запрещенное» значение $a=1$ присутствует только во второй колонке нашей таблицы, но не в первой.)

Для «запрещенных» значений a из одной колонки таблицы вычислим значение корня для другой колонки:

$x_1\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}-2=\frac{2}{3}$	$x_2\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\left(-\frac{1}{2}\right)+4=5$
$x_1(1)=1-2=-1$	

Еще выделим случай, когда оба корня совпадают: $D=0\Leftrightarrow a=2\Rightarrow x=0$.

Ответ: $x_1=a-2,\ x_2=4-2a$ при $a\in\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};1;\frac{4}{3};2\right\}$; $x=5$ при $a=-\frac{1}{2}$; $x=-1$ при $a=1$; $x=-\frac{2}{3}$ при $a=\frac{4}{3}$; $x=0$ при $a=2$.

Вот теперь для любого предъявленного нам значения a мы можем сразу указать количество решений и вычислить их прямой подстановкой.

Чтобы лучше понять, как устроены решения системы (1), построим графики для входящих в (1) соотношений на координатной плоскости aOx (рис.1). Самостоятельно разберитесь в геометрической интерпретации решения.

Упражнения

Решите уравнения и дайте решениям геометрическую интерпретацию:

1. $1+\frac{a+1}{x-a}=\frac{2(a-1)(a-2)}{(x-a)(x-a+1)}$. **2.** $3+\frac{2a-3}{(x-2)(x+a)}=\frac{2x+5a}{x+a}$.

3. $7a+3+\frac{2a\left(9a^2-1\right)}{x^2+2x-a^2+2a}=2x+\frac{9a^2+10a+5}{x-a+2}$.

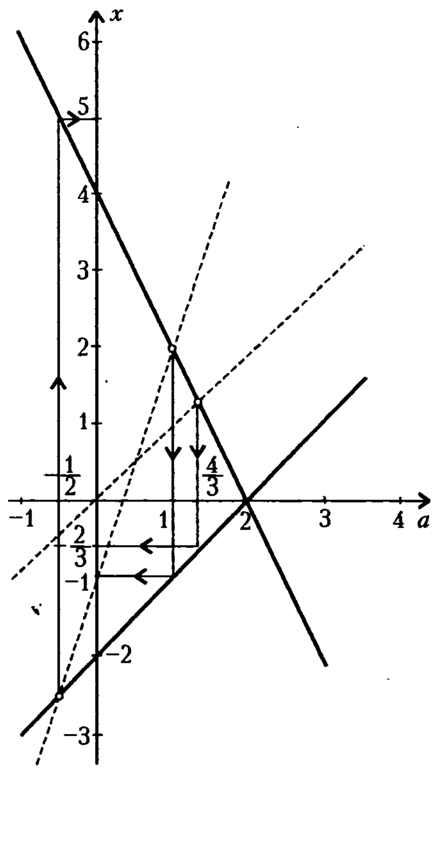


Рис. 1

Теперь разберем еще одну задачу.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\frac{ax+3}{x+4}=\frac{x+6}{ax+1}.$$

Решение. После очевидных преобразований приходим к системе

$$\left(a^2-1\right)x^2+(4a-10)x-21=0,\ x+4\neq 0,\ ax+1\neq 0.$$

При $a^2=1$ уравнение не является квадратным, при $a=-1$ получаем $(-4-10)x-21=0$, т.е. $x=-\frac{3}{2}$, причем $-\frac{3}{2}\neq 4$, $-\frac{3}{2}\neq -1$. Итак, $x=-\frac{3}{2}$ при $a=-1$.

Если $a=1$, аналогично получаем, что $x=-\frac{7}{2}$. Итак, $x=-\frac{7}{2}$ при $a=1$.

Если $a^2-1\neq 0$, т.е. $a\neq\pm 1$, имеем

$$\frac{D}{4}=(2a-5)^2+21\left(a^2-1\right)=(5a-2)^2\geq 0,$$

отсюда

$$x_1(a)=\frac{3a+3}{a^2-1}=\frac{3}{a-1},\ x_2(a)=\frac{-7a+7}{a^2-1}=-\frac{7}{a+1}.$$

Составим таблицу:

	$x_1=\frac{3}{a-1}$	$x_2=-\frac{7}{a+1}$
$x+4=0$	$\frac{3}{a-1}+4=0,\quad a=\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{a+1}+4=0,\quad a=\frac{3}{4}$
$ax+1=0$	$\frac{3a}{a-1}+1=0,\quad a=\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{a+1}+1=0,\quad a=\frac{1}{6}$

Все полученные значения a отличны от ± 1. Вычислим для них значения корней:

$x_1\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{\frac{3}{4}-1}=-12$	$x_2\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{7}{\frac{1}{4}+1}=-\frac{28}{5}$
$x_1\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{\frac{1}{6}-1}=-\frac{18}{5}$	

Оба корня совпадают при $D=0$, т.е. при $a=\frac{2}{5}$, тогда

$$x=x_1\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{\frac{2}{5}-1}=-5.$$

Ответ: $x_1=\frac{3}{a-1}$, $x_2=-\frac{7}{a+1}$ при $a\in \mathbf{R}\setminus\left\{-1;\frac{1}{6};\frac{1}{4};\frac{2}{5};\frac{3}{4};1\right\}$; $x=-\frac{3}{2}$ при $a=-1$; $x=-\frac{18}{5}$ при $a=\frac{1}{6}$; $x=-\frac{28}{5}$ при $a=\frac{1}{4}$; $x=-5$ при $a=\frac{2}{5}$; $x=-12$ при $a=\frac{3}{4}$; $x=-\frac{7}{2}$ при $a=1$.

Упражнения

4. Дайте решению задачи 2 геометрическую интерпретацию.

5. Решение задачи 2 немного упростится, если использовать замену $x=1/u$. Испытайте ее.

6. Решите уравнение

$$\frac{ax+8}{x-1}=\frac{x+2}{ax+5}.$$

В следующей задаче корни квадратного уравнения «плохо» выражаются через коэффициенты, что создает некоторые дополнительные трудности.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$\frac{x-7}{ax+4}=\frac{ax-2}{x+1}.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$(x+1)(x-7)=(ax-2)(ax+4),\ ax+4\neq 0,\ x\neq -1. \quad (2)$$

Уравнение системы приводится к виду

$$\left(a^2-1\right)x^2+2(a+3)x-1=0.$$

Пусть сначала $a^2-1=0 \Leftrightarrow a=\pm 1$. Как и раньше, получаем, что $x=\frac{1}{4}$ при $a=-1$, $x=\frac{1}{8}$ при $a=1$.

При $a^2\neq 1$ имеем

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2+\left(a^2-1\right)=2\left(a^2+3a+4\right)>0,$$

т.е.

$$x_{1,2}=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{2a^2+6a+8}}{a^2-1}. \quad (3)$$

(Катастрофа! Если подставить эти корни в соотношение $ax+4=0$, то после преобразований получим уравнение 4-й степени. К счастью, есть другой метод отбора корней.)

Подставим значения x, не входящие в область определения, в уравнение (2) и определим, решая получившееся уравнение, какие значения параметра a им соответствуют.

Пусть $ax+4=0$. Заметим, что $a\neq 0$ и $x=-\frac{4}{a}$. Подставляя в (2), имеем $\left(-\frac{4}{a}+1\right)\left(-\frac{4}{a}-7\right)=0$.

Если $-\frac{4}{a}+1=0$, то $a=4$; отбросываем корень $x=-1$.

Если $-\frac{4}{a}-7=0$, то $a=-\frac{4}{7}$; отбрасываем корень $x=7$.

Если $x+1=0$, то $x=-1$. Подставляя в (2), получим, что при $a=-2$ и при $a=4$ нужно отбросить корень $x=-1$.

Итак, при $a=-2$; $-\frac{4}{7}$; 4 один из корней, даваемых формулой (3), будет отброшен, но другой, возможно, будет оставлен. Эти корни можно определить по формуле (3), но проще воспользоваться теоремой Виета, так как один из корней квадратного уравнения – отбрасываемый – нам уже известен: $x_2=\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{1}{x_1}$.

При $a=-2$ получим $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{1-4}\cdot\frac{1}{-1}=\frac{1}{3}$.

При $a=-\frac{4}{7}$ получим $x_1=7$, $x_2=\frac{7}{33}$.

При $a=4$ получим $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{15}$.

Ответ: $x_{1,2}=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{2a^2+6a+8}}{a^2-1}$ при $a\in$

Конденсаторы в цепях постоянного тока

В.МОЖАЕВ

В упрощенном виде конденсатор представляет собой систему двух проводников, разделенных слоем диэлектрика, толщина которого мала по сравнению с размерами проводников. Такая система проводников обладает способностью накапливать электрический заряд: на одной обкладке положительный, а на другой отрицательный, в целом же конденсатор остается электронейтральным.

Количественной характеристикой накопительной способности таких систем является электроемкость. Для ориентировки в величинах электроемкости приведем два примера: электроемкость уединенного проводящего шара радиусом, равным радиусу нашей планеты ($R \sim$ 6400 км), составляет примерно 10^{-3} Ф, а электроемкость уединенного куска провода диаметром 2 мм и длиной 1 м равна приблизительно 10^{-12} Ф. (В этих примерах вторая обкладка уединенных проводников находится в бесконечности, т.е. силовые линии электрического поля уходят с данных проводников на бесконечность.)

Основное внимание в статье будет уделено поведению конденсаторов в электрических цепях с источниками постоянного тока. Помимо конденсаторов, в таких цепях обычно присутствуют и резисторы. Весь промежуток времени с момента замыкания цепи и до момента установления стационарного состояния можно разбить на три этапа.

Первый этап – это очень короткий промежуток времени (его можно оценить, разделив линейный размер схемы на скорость света) сразу после замыкания ключа. За это время в цепи установится некоторый начальный ток, но, поскольку в реальных схемах величина этого тока конечна, за бесконечно малое время во всех участках цепи протекут бесконечно малые заряды и изменением зарядов и напряжений на конденсаторах можно будет пренебречь. Итак, на первом этапе, сразу после замыкания цепи, сохраняются напряжения на конденсаторах, которые были до замыкания, и устанавливаются начальные токи, величины которых определяются законом Ома для замкнутых цепей и не зависят от емкостей конденсаторов.

На втором этапе идет переходной процесс – выход на стационарный режим, во время которого в участках цепи текут переменные токи и происходит разрядка или подзарядка конденсаторов. Этот процесс характеризуется так называемой постоянной времени τ. Смысл ее в следующем: если время, прошедшее после замыкания цепи, много меньше τ, можно считать, что переходной процесс и не начинался, а если время много больше τ, то переходной процесс закончился и установился стационарный режим.

Как в первом, так и во втором процессах через конденсаторы текут переменные токи, но в первом случае это очень быстро изменяющиеся токи и поэтому реактивные сопротивления конденсаторов практически равны нулю, а во втором случае скорости изменения тока существенно меньше и зависят как от омического сопротивления цепи, так и от ее емкости. (Более подробно этот этап будет разобран ниже на конкретных примерах.)

И наконец, третий (и последний) этап, когда устанавливается стационарный режим. Здесь реактивные сопротивления конденсаторов равны бесконечности, токи через конденсаторы равны нулю, напряжения на конденсаторах равны установившимся значениям, которые определяются законом Ома для замкнутой цепи.

Теперь перейдем к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. *В электрической схеме, изображенной на рисунке 1, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор не заряжен. Параметры схемы указаны на рисунке. Определите начальные токи через резисторы и через батарею сразу после замыкания ключа.*

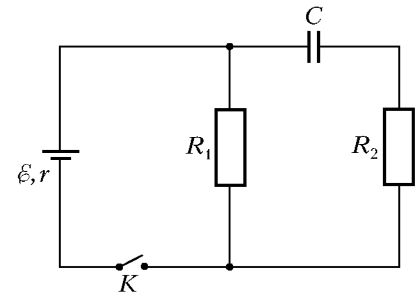


Рис. 1

За очень малое время установления начальных токов (не путать с установившимися стационарными токами) заряд на конденсаторе не изменится и разность потенциалов на нем останется равной нулю. Эквивалентная схема для этого промежутка времени будет иметь вид, изображенный на рисунке 2. Такая схема позволяет с помощью

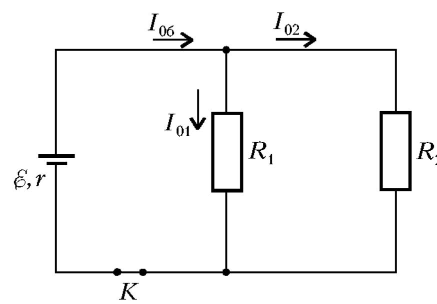


Рис. 2

закона Ома для замкнутой цепи определить начальные токи. Начальный ток через батарею составляет

$$I_{06} = \frac{\mathscr{E}}{r + \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{(R_1 + R_2)\mathscr{E}}{r(R_1 + R_2) + R_1R_2},$$

а начальные токи через резисторы равны

$$I_{01} = \frac{R_2\mathscr{E}}{r(R_1 + R_2) + R_1R_2}$$

и

$$I_{02} = \frac{R_1\mathscr{E}}{r(R_1 + R_2) + R_1R_2}.$$

Следует отметить, что полученные значения начальных токов не зависят от емкости конденсатора C.

Задача 2. *В электрической схеме, изображенной на рисунке 3, в началь-*

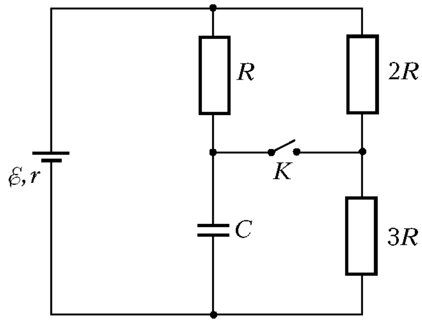


Рис. 3

ный момент ключ K разомкнут, а конденсатор не заряжен. Параметры схемы указаны на рисунке. Определите начальные токи через ключ и через батарею сразу после замыкания ключа.

Сразу после замыкания ключа K напряжение на конденсаторе остается равным нулю, поэтому начальный ток через резистор $3R$ (более точно – через резистор сопротивлением $3R$) будет равен нулю. Эквивалентная схема для этого момента времени изображена на

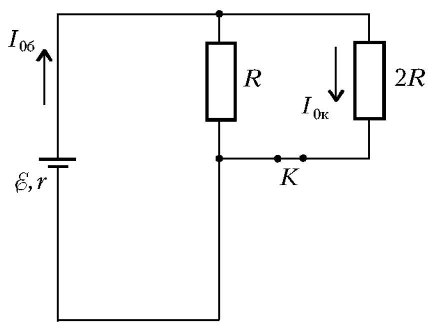


Рис. 4

рисунке 4. Начальный ток через батарею, очевидно, равен

$$I_{0б} = \frac{\mathscr{E}}{r + \dfrac{2R^2}{3R}} = \frac{3\mathscr{E}}{3r + 2R}.$$

Такой же ток течет и через конденсатор. А начальный ток через ключ равен начальному току, протекающему через резистор $2R$:

$$I_{0к} = \frac{\mathscr{E}}{3r + 2R}.$$

Задача 3. *В электрической схеме, изображенной на рисунке 5, ключ K разомкнут, а конденсатор заряжен до некоторого напряжения U_x. Параметры схемы указаны на рисунке. Определите величину U_x, при которой ток через батарею сразу после замыкания ключа останется неизменным.*

До замыкания ключа через батарею течет ток

$$I_б = \frac{\mathscr{E}}{r + R_1}.$$

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе остается неизменным и равным U_x. Пусть в этот

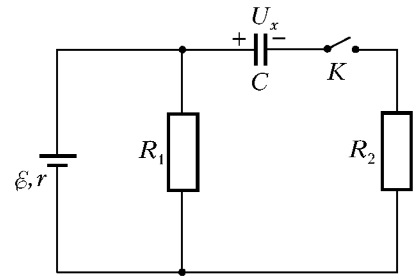


Рис. 5

момент в цепи текут токи, изображенные на рисунке 6. Запишем закон Ома для контура, охватывающего батарею

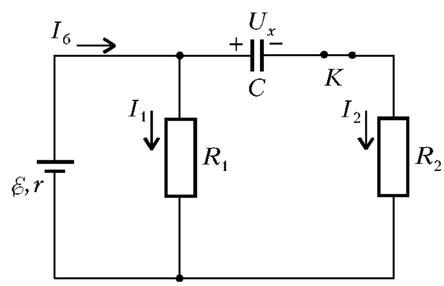


Рис. 6

и резистор R_1:

$$\mathscr{E} = I_1 R_1 + I_б r.$$

Поскольку ток $I_б$ сохраняется, то и ток I_1 через резистор R_1 остается неизменным, значит, $I_1 = I_б$. По закону сохранения заряда, $I_б = I_1 + I_2$, откуда следует, что $I_2 = 0$. Запишем теперь закон Ома для контура, охватывающего батарею, конденсатор и резистор R_2:

$$\mathscr{E} = I_б r + U_x + I_2 R_2.$$

С учетом выражений для I_2 и $I_б$ получим

$$U_x = \frac{R_1 \mathscr{E}}{r + R_1}.$$

Задача 4*. *В электрической схеме, изображенной на рисунке 1, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор не заряжен. Параметры схемы указаны на рисунке. Найдите зависимость от времени тока через батарею после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь ($r = 0$).*

Сразу оговоримся, что решение этой задачи выходит за рамки школьной программы, но интерес представляет не само решение, а физическая сторона переходных процессов и та роль, которую выполняют конденсаторы в подобных цепях.

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа, причем за начало отсчета времени возьмем момент окончания первого этапа – установления начальных значений токов и напряжений. Именно начиная с этого момента в цепи будет идти квазистационарный процесс.

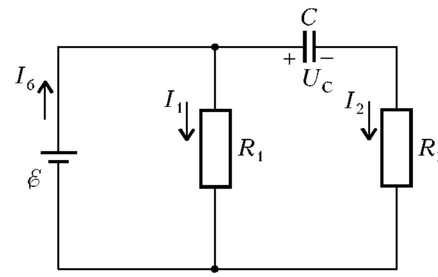


Рис. 7

Согласно рисунку 7, для произвольного момента времени можно записать:

$$\mathscr{E} = U_C + I_2 R_2,$$

$$\mathscr{E} = I_1 R_1,$$

$$I_б = I_1 + I_2,$$

$$I_2 = C\frac{dU_C}{dt}.$$

Первое уравнение – это закон Ома для контура, содержащего батарею, конденсатор и резистор R_2, второе – закон Ома для контура, охватывающего батарею и резистор R_1, третье – закон сохранения заряда, четвертое – связь между током I_2 и изменением напряжения на конденсаторе. Продифференцировав первое уравнение по времени и решая его совместно с остальными тремя уравнениями, получим дифференциальное уравнение относительно тока через батарею:

$$\frac{dI_б}{dt} + \frac{1}{R_2 C} I_б = \frac{\mathscr{E}}{R_1 R_2 C}.$$

Семейство решений этого уравнения имеет вид

$$I_б(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\mathscr{E}}{R_1},$$

где A – произвольная константа, $\tau = R_2 C$ – постоянная времени. Константа A определяется начальным током $I_б(0)$, который мы уже находили в задаче 1. При $r = 0$ получим

$$I_б(0) = \frac{(R_1 + R_2)\mathscr{E}}{R_1 R_2}.$$

Для данного начального тока зависимость тока через батарею от времени запишется в виде

$$I_б(t) = \frac{\mathscr{E}}{R_1}\left(1 + \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C}}\right).$$

Постоянная времени $\tau = R_2C$ является характерным временем данного переходного процесса. При $t \ll R_2C$ ток через батарею практически не успевает заметно измениться, а при $t \gg R_2C$ можно считать, что переходной процесс закончился и через батарею течет постоянный ток $I_б = \mathscr{E}/R_1$. График зависимости $I_б(t)$ показан на рисунке 8.

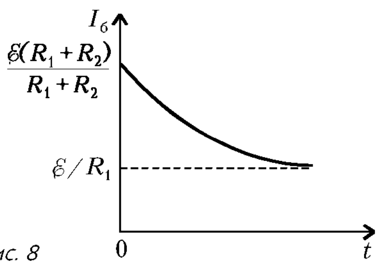


Рис. 8

На примере разобранной схемы мы рассмотрели все три процесса. До замыкания ключа ток через батарею равен нулю, сразу после замыкания ток скачком возрастает до значения $I_б(0) = (R_1 + R_2)\mathscr{E}/(R_1R_2)$, затем по экспоненте спадает до установившегося значения $I_б(\infty) = \mathscr{E}/R_1$.

Задача 5. *В схеме на рисунке 9 ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсаторы не заряжены. Ключ K_1 замыкают, оставляя K_2 разомкнутым. 1) Какие напряжения установятся*

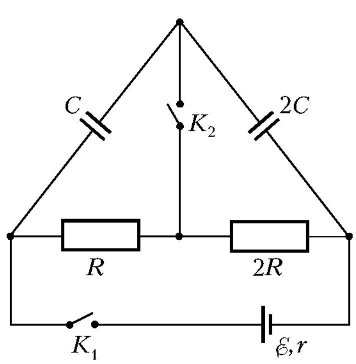


Рис. 9

на конденсаторах? 2) Какой заряд протечет через ключ K_2, если его замкнуть (при замкнутом ключе K_1)? Параметры схемы указаны на рисунке.

1) В установившемся режиме после замыкания ключа K_1 общее напряжение на конденсаторах будет равно суммарному падению напряжения на резисторах:

$$U_{общ} = \frac{3R\mathscr{E}}{r + 3R}.$$

Поскольку суммарная емкость конденсаторов $C_{общ} = 2C/3$, заряды на конденсаторах равны

$$q_1 = q_2 = C_{общ}U_{общ} = \frac{2RC\mathscr{E}}{r + 3R},$$

а напряжения составляют

$$U_1 = \frac{q_1}{C} = \frac{2R\mathscr{E}}{r + 3R}$$

и

$$U_2 = \frac{q_2}{2C} = \frac{R\mathscr{E}}{r + 3R}.$$

2) До замыкания ключа K_2 на верхней пластине конденсатора C (более точно – конденсатора емкостью C) находился заряд $-q_1$, а на верхней пластине второго конденсатора – заряд $+q_2$. После замыкания ключа K_2 и установления нового стационарного состояния напряжения на конденсаторах изменятся и будут равны

$$U_1' = \frac{R\mathscr{E}}{r + 3R} \text{ и } U_2' = \frac{2R\mathscr{E}}{r + 3R}.$$

Новый заряд на верхней пластине конденсатора C будет $q_1' = -U_1'C$, а на верхней пластине второго конденсатора будет заряд $q_2' = +U_2' \cdot 2C$. Очевидно, что через ключ K_2 протечет заряд

$$Q = (q_1' + q_2') - (-q_1 + q_2) = \frac{3RC\mathscr{E}}{r + 3R}.$$

Задача 6. *В электрической схеме, состоящей из батареи с ЭДС $\mathscr{E}$ = 20 В, резисторов с сопротивлениями R_1 = 10 Ом, R_2 = 20 Ом, R_3 = 30 Ом и конденсатора, замыкают*

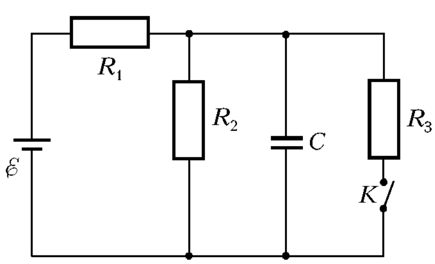


Рис. 10

ключ K (рис.10). 1) Найдите ток через резистор R_3 сразу после замыкания ключа. 2) Определите ток через батарею в тот момент времени, когда напряжение на конденсаторе станет равным $3/5\mathscr{E}$. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

1) До замыкания ключа часть электрической схемы находится в стационарном режиме: через резисторы и батарею течет постоянный ток

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2},$$

конденсатор C заряжен до напряжения

$$U_C = IR_2 = \frac{R_2\mathscr{E}}{R_1 + R_2} = \frac{40}{3} \text{ В} \approx 13{,}3 \text{ В}.$$

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе останется неизменным, и через резистор R_3 потечет ток (сверху вниз)

$$I_3 = \frac{U_C}{R_3} = \frac{R_2\mathscr{E}}{R_3(R_1 + R_2)} = \frac{40}{9} \text{ А} \approx 0{,}44 \text{ А}.$$

2) Сначала разберемся, в каком режиме будет находиться наша схема: то ли это будет переходной процесс, то ли стационарный режим. Для этого найдем установившееся напряжение на конденсаторе в стационарном режиме. Эквивалентная схема, соответствующая этому случаю, будет иметь вид, изображенный на рисунке 11. Общее

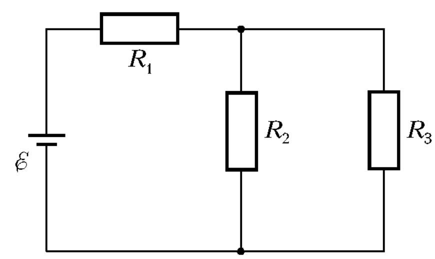


Рис. 11

сопротивление цепи равно

$$R_{общ} = R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3},$$

через резистор R_1 течет ток

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_{общ}} = \frac{(R_2 + R_3)\mathscr{E}}{R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3},$$

напряжение на этом резисторе равно

$$U_1 = I_1R_1 = \frac{R_1(R_2 + R_3)\mathscr{E}}{R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3},$$

а на резисторах R_2 и R_3 (такое же, как на конденсаторе) –

$$U_2 = U_3 = U_C = \mathscr{E} - U_1 = \frac{R_2R_3\mathscr{E}}{R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3} = \frac{120}{11} \text{ В} \approx 11 \text{ В}.$$

Поскольку нас интересует напряжение $U_C = 3/5\mathscr{E}$ = 12 В, очевидно, что состояние системы соответствует переходному процессу. В этот момент напряжение на резисторе R_1 равно

$$U_1' = \mathscr{E} - U_C = \frac{2}{5}\mathscr{E},$$

следовательно, через резистор R_1 и через батарею течет ток

$$I_б = I_1 = \frac{U_1'}{R_1} = \frac{2\mathcal{E}}{5R_1} = 0{,}8\ \text{А}.$$

Задача 7. *Две батареи с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ включены в схему, параметры которой указаны на рисунке 12, причем*

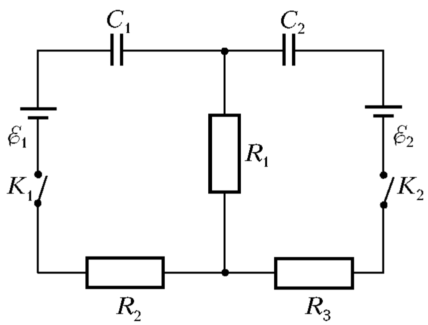


Рис. 12

$R_1 = R_2 = R_3 = R$. В начальный момент времени ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсаторы не заряжены. Ключи одновременно замыкают. 1) Найдите начальный ток через резистор R_1. 2) Какое количество теплоты выделится во всей схеме после замыкания ключей? Внутренним сопротивлением батарей пренебречь.

1) Эквивалентная схема сразу после одновременного замыкания ключей K_1 и K_2 показана на рисунке 13. Для

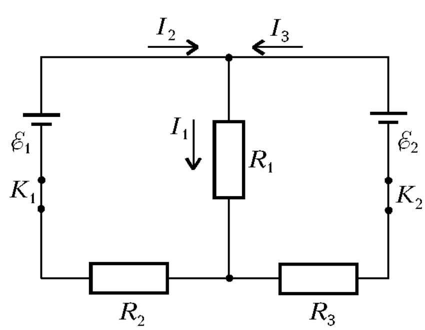


Рис. 13

определения начального тока через резистор R_1 запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = I_1R_1 + I_2R_2, \\ \mathcal{E}_2 = I_1R_1 + I_3R_3, \\ I_1 = I_2 + I_3. \end{cases}$$

Здесь первое уравнение – это закон Ома для левого контура, второе уравнение – закон Ома для правого контура, третье уравнение – закон сохранения заряда. Совместное решение этой системы уравнений позволяет найти ток I_1:

$$I_1 = \frac{R_2\mathcal{E}_2 + R_3\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{3R}.$$

2) После установления стационарного состояния напряжения на конденсаторах будут

$$U_{C_1} = \mathcal{E}_1,\ U_{C_2} = \mathcal{E}_2,$$

а заряды –

$$q_1 = C_1U_{C_1} = C_1\mathcal{E}_1,$$

$$q_2 = C_2U_{C_2} = C_2\mathcal{E}_2.$$

Работа, совершенная источниками, равна

$$A = q_1\mathcal{E}_1 + q_2\mathcal{E}_2 = C_1\mathcal{E}_1^2 + C_2\mathcal{E}_2^2.$$

Эта работа равна сумме энергии, запасенной в конденсаторах, и количества теплоты, выделившегося в резисторах. Энергии конденсаторов равны

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1}\ \text{и}\ W_2 = \frac{q_2^2}{2C_2}.$$

Значит, в схеме выделяется количество теплоты

$$Q = A - (W_1 + W_2) = \frac{C_1\mathcal{E}_1^2 + C_2\mathcal{E}_2^2}{2}.$$

Упражнения

1. Какое количество теплоты выделится в схеме, изображенной на рисунке 14, после размыкания ключа K? Параметры схемы указаны на рисунке.

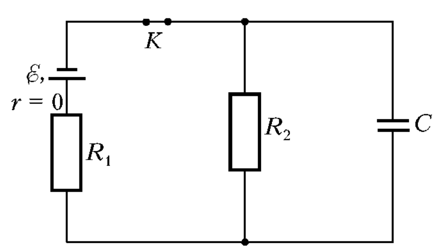


Рис. 14

2. При разомкнутом ключе K (рис.15) на конденсаторе устанавливается напряжение U_1 = 12 В.

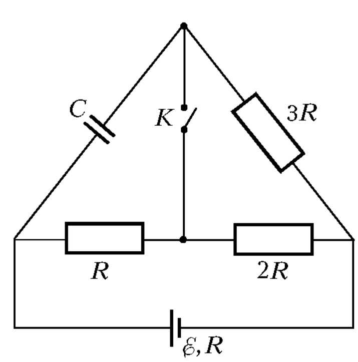


Рис. 15

1) Найдите ЭДС батареи.

2) Определите установившееся напряжение на конденсаторе после замыкания ключа.

3. В электрической схеме (рис.16), состоящей из батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ = 30 В,

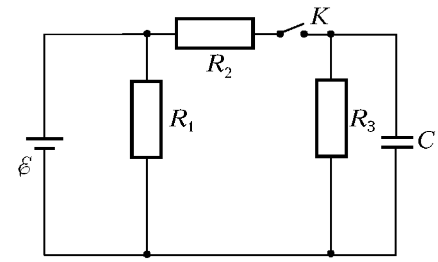


Рис. 16

резисторов с сопротивлениями R_1 = 10 Ом, R_2 = 20 Ом, R_3 = 30 Ом и конденсатора, замыкают ключ K.

1) Найдите ток через резистор R_2 сразу после замыкания ключа.

2) Найдите ток через батарею в тот момент времени, когда ток через резистор R_3 равен I_3 = 0,3 А.

Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. Батарея с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r включена через ключ K в схему, параметры которой указаны на рисунке 17. В начальный момент

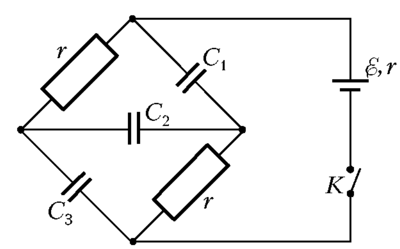


Рис. 17

времени ключ разомкнут, а конденсаторы не заряжены. Ключ замыкают.

1) Определите начальный ток (сразу после замыкания ключа) через батарею.

2) Какое количество теплоты выделится во всей схеме после замыкания ключа?

XXVI Всероссийская олимпиада школьников по математике

Заключительный этап олимпиады состоялся с 12 по 18 апреля 2000 года в Казани. Ему предшествовали зональные соревнования в Барнауле, Кирове, Краснодаре, Нижнем Новгороде, а также городские олимпиады Москвы и Санкт-Петербурга. Их победители (180 школьников из 47 регионов России, а также наиболее успешно выступившей на национальной олимпиаде Китая провинции Квантун) провели в столице Республики Татарстан семь запоминающихся дней.

Список призеров олимпиады свидетельствует о более заметных, чем, скажем, 5–7 лет назад, успехах юных математиков из областных центров и небольших городов. Особо отметим Белорецкую компьютерную школу, Гуманитарно-естественный лицей 41 Ижевска и ФМЛ Кирова; именно эти учебные заведения наряду с Московской государственной Пятьдесят седьмой школой и ФМЛ 239 Петербурга были представлены своими учащимися во всех параллелях. Любопытны цифры по Краснодару: 13 участников из 10 разных школ.

Замечательно выступили на олимпиаде ростовчанин *Олег Гольберг* **(9 класс), мурманчанин** *Сергей Волков* **(10 класс), петербуржец** *Юрий Лифшиц* **(11 класс) и кировчанин** *Андрей Халявин* **(ученик 9 класса, выступавший за 11 класс). Эти ребята решили все задачи.**

А команду России для участия в XLI Международной математической олимпиаде составили *В.Дремов, Ю.Лифшиц, А.Поярков, А.Гайфуллин, А.Федотов* **и** *А.Халявин;* **запасным участником был определен** *Е.Зинин.*

В заключение следует поблагодарить оргкомитет, работу которого возглавлял заместитель министра образования Татарстана И.Г.Хадиуллин. Основные события олимпиады происходили в школе 1, а из «нематематической» программы наиболее интересными были экскурсии в музей Н.И.Лобачевского и в казанский Кремль.

Ниже приводятся условия задач зонального и заключительного этапов и список призеров олимпиады.

Задачи олимпиады

Зональный этап

8 класс

1. Ненулевые числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^2b^2\left(a^2b^2+4\right)=2\left(a^6+b^6\right).$$

Докажите, что хотя бы одно из них иррационально.

Н.Агаханов

2. В некотором городе на любом перекрестке сходятся ровно три улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они разных цветов.

С.Дужин

3. Какое наименьшее число сторон может иметь нечетноугольник (не обязательно выпуклый), который можно разрезать на параллелограммы?

Л.Емельянов

4. Два пирата делят добычу, состоящую из двух мешков монет и алмаза, действуя по следующим правилам.

Вначале первый пират забирает себе из любого мешка несколько монет и перекладывает из этого мешка в другой такое же количество монет. Затем так же поступает второй пират (выбирая мешок, из которого он берет монеты, по своему усмотрению), и т.д. до тех пор, пока можно брать монеты по этим правилам. Пирату, взявшему монеты последним, достается алмаз. Кому достанется алмаз, если каждый из пиратов старается получить его?

Дайте ответ в зависимости от первоначального количества монет в мешках.

Д.Храмцов

5. Даны 8 гирек массой 1, 2, ..., 8 граммов, но неизвестно, какая из них какой массы. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит массу каждой гирьки, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлена масса хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

А.Шаповалов

6. Пусть от платформы A до платформы B электропоезд прошел за X минут $(0 < X < 60)$. Найдите X, если известно, что как в момент отправления от A, так и в момент прибытия в B угол между часовой и минутной стрелками равнялся X градусам.

С.Токарев

7. Биссектрисы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O. Прямая, симметричная AB относительно CE, пересекает прямую, симметричную BC относительно AD, в точке K. Докажите, что $KO\perp AC$.

М.Сонкин

8. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причем для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки (т.е. 1, 2, 4, 8, ...). Для каждого города A статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих A с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. У него получилось 100000. Докажите, что статистик ошибся.

И.Рубанов

9 класс

1. Миша решил уравнение $x^2+ax+b=0$ и сообщил Диме набор из четырех чисел – два корня и два коэффициента этого уравнения (но не сказал, какие именно из них корни, а какие – коэффициенты). Сможет ли Дима узнать, какое уравнение решал Миша, если все числа набора оказались различными?

М.Евдокимов

2. Существуют ли различные взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b и c, большие 1 и такие, что 2^a+1 делится на b, 2^b+1 делится на c, а 2^c+1 делится на a?

В.Сендеров

3. На прямой имеется $2n+1$ отрезок. Любой отрезок пересекается по крайней мере с n другими. Докажите, что существует отрезок, пересекающийся со всеми остальными.

С.Берлов

4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Через точку A окружности S_1 проведены прямые AM и AN, пересекающие S_2 в точках B и C, а через точку D окружности S_2 – прямые DM и DN, пересекающие S_1 в

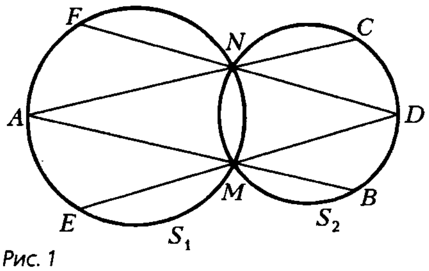


Рис. 1

точках E и F, причем A, E, F лежат по одну сторону от прямой MN, а D, B, C – по другую (рис.1). Докажите, что если $AB = DE$, то точки A, F, C и D лежат на одной окружности, положение центра которой не зависит от выбора точек A и D.

М.Сонкин, Д.Терешин

5. В таблице 99×101 расставлены кубы натуральных чисел, как показано на рисунке 2. Докажите, что

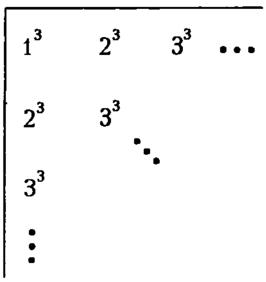


Рис. 2

сумма всех чисел в таблице делится на 200.

Л.Емельянов

6. Среди 2000 внешне неразличимых шариков половина – алюминиевые массой 10 г, а остальные – дюралевые массой 9,9 г. Требуется выделить две кучки шариков так, чтобы массы кучек были различны, а число шариков в них – одинаково. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь это можно сделать?

С.Токарев

7. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника BCD, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ACD, пересекает сторону BC в точке N (M, $N \neq C$). Пусть O – центр описанной окружности треугольника CMN. Докажите, что прямая OD перпендикулярна стороне AB.

М.Сонкин

8. Клетки таблицы 200×200 окрашены в черный и белый цвета так, что черных клеток на 404 больше, чем белых. Докажите, что найдется квадрат 2×2, в котором число белых клеток нечетно.

Р.Садыков, Е.Черепанов

10 класс

1. Рассматриваются 2000 чисел: 11, 101, 1001, ... Докажите, что среди этих чисел не менее 99% составных.

В.Произволов, В.Сендеров

2. Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?

Л.Емельянов

3. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом A, равным 60°. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABD. Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K. Найдите отношение AO/OK.

С.Берлов

4. При каком наименьшем n квадрат $n \times n$ можно разрезать на квадраты 40×40 и 49×49 так, чтобы квадраты обоих видов присутствовали?

В.Замятин

5. Существует ли функция $f(x)$, определенная при всех $x \in \boldsymbol{R}$ и для всех x, $y \in \boldsymbol{R}$ удовлетворяющая неравенству

$$\left|f(x+y) + \sin x + \sin y\right| < 2?$$

Е.Знак

6. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - 5$, если a_n нечетно, и $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, если a_n четно. Докажите, что при всех нечетных $a_0 > 5$ в последовательности $\{a_n\}$ встретятся сколь угодно большие числа.

А.Храбров

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ провели биссектрисы l_a, l_b, l_c, l_d внешних углов A, B, C, D соответственно. Точки пересечения прямых l_a и l_b, l_b и l_c, l_c и l_d, l_d и l_a обозначили через K, L, M, N. Известно, что 3 перпендикуляра, опущенных из K на AB, из L на BC, из M на CD, пересекаются в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный.

П.Кожевников

8. В стране 2000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что через любой город проходит не более N различных несамопересекающихся циклических маршрутов нечетной длины (т.е. состоящих из нечетного числа дорог). Докажите, что страну можно разделить на $2N + 2$ республики так, чтобы никакие два города из одной республики не были соединены дорогой.

В.Дольников, Д.Карпов

11 класс

1. Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа a_1, a_2, ..., a_{10}, что уравнение

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{10}) = (x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_{10})$$

будет иметь ровно 5 различных решений.

Н.Агаханов

2. Высота и радиус основания цилиндра равны 1. Каким наименьшим числом шаров радиуса 1 можно целиком покрыть этот цилиндр?

И.Рубанов

3. Последовательность a_1, a_2, ..., a_{2000} действительных чисел такова, что для любого натурального n, $1 \le n \le 2000$, выполняется равенство

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2.$$

Докажите, что все члены этой последовательности – целые числа.

С.Тухвебер

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Для неотрицательных чисел x и y, не превосходящих 1, докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

А.Храбров

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, имеет центр O и касается стороны AC в точке K. Вторая окружность – также с центром O – пересекает все стороны треугольника ABC. Пусть E и F – ее точки пересечения со сторонами AB и BC соответственно, ближайшие к вершине B; B_1 и B_2 – точки ее пересечения со стороной AC, B_1 – ближе к A. Докажите, что точки B, K и точка P пересечения отрезков B_2E и B_1F лежат на одной прямой.

М.Сонкин

7. Даны числа 1, 2, ..., N, каждое из которых окрашено либо в черный, либо в белый цвет. Разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые три числа, одно из которых равно полусумме двух других. При каких N всегда можно сделать все числа белыми?

С.Токарев

8. См. задачу 8 для 10 класса.

Заключительный этап

9 класс

1. Различные числа a, b и c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму $a + b + c$.

Н.Агаханов

2. Таня задумала натуральное число $X \le 100$, а Саша пытается его угадать. Он выбирает пару натуральных чисел M и N, меньших 100, и задает вопрос: «Чему равен наибольший общий делитель $X + M$ и N?». Докажите, что Саша может угадать Танино число, задав 7 таких вопросов.

А.Голованов

3. Пусть O – центр описанной окружности ω остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_1 с центром K проходит через точки A, O, C и пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Известно, что точки L и K симметричны относительно прямой MN. Докажите, что $BL \perp AC$.

М.Сонкин

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы 3 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длина которого (т.е. количество входящих в него дорог) не делится на 3.

Д.Карпов

5. На доску последовательно выписываются числа $a_1 = 1$, a_2, a_3, … по следующим правилам: $a_{n+1} = a_n - 2$, если число $a_n - 2$ натуральное и еще не выписано на доску, в противном случае $a_{n+1} = a_n + 3$. Докажите, что все квадраты натуральных чисел появятся в этой последовательности при прибавлении 3 к предыдущему числу.

Н.Агаханов

6. См. задачу М1745 «Задачника «Кванта».

7. На медиане CD треугольника ABC отмечена точка E. Окружность S_1, проходящая через E и касающаяся прямой AB в точке A, пересекает сторону AC в точке M. Окружность S_2, проходящая через E и касающаяся прямой AB в точке B, пересекает сторону BC в точке N. Докажите, что описанная окружность треугольника CMN касается S_1 и S_2.

М.Сонкин

8. По окружности расставлены 100 натуральных чисел, взаимно простых в совокупности. Разрешается прибавлять к любому числу наибольший общий делитель его соседей. Докажите, что при помощи таких операций можно сделать все числа попарно взаимно простыми.

С.Берлов

10 класс

1. См. задачу М1743 «Задачника «Кванта».

2. Пусть $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ и $x_1^{13} + x_2^{13} + \ldots + x_n^{13} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Докажите, что если $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, то

$$x_1^{13}y_1 + x_2^{13}y_2 + \ldots + x_n^{13}y_n < x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

О.Мусин

3. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса острого угла между высотами AA_1 и CC_1 пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Биссектриса угла B пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника ABC с серединой стороны AC, в точке R. Докажите, что точки P, B, Q и R лежат на одной окружности.

С.Берлов

4. Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них A, B и C и спросить, верно ли, что $m(A) < m(B) < m(C)$ (через $m(x)$ обозначена масса гири x); при этом дается ответ «Да» или «Нет». Можно ли за девять вопросов гарантированно узнать, в каком порядке идут массы гирь?

О.Подлипский

5. Пусть M – конечное множество чисел. Известно, что среди любых трех его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит M. Какое наибольшее число элементов может быть в M?

Е.Черепанов

6. Совершенное число, большее 6, делится на 3. Докажите, что оно делится на 9. (Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от самого числа, например $6 = 1 + 2 + 3$.)

А.Храбров

7. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Хорды BA и BC внешней окружности касаются внутренней в точках K и M соответственно. Пусть Q и P – середины дуг AB и BC, не содержащих точку N. Окружности, описанные около треугольников BQK и BPM, пересекаются второй раз в точке B_1. Докажите, что BPB_1Q – параллелограмм.

Т.Емельянова

8. См. задачу М1744 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Найдите все функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, которые для всех $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ удовлетворяют неравенству

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \ge 3f(x+2y+3z).$$

Н.Агаханов, О.Подлипский

2. Докажите, что можно разбить все множество натуральных чисел на 100 непустых подмножеств так, чтобы в любой тройке a, b, c такой, что $a + 99b = c$, нашлись два числа из одного подмножества.

Д.Джукин, Ф.Петров, И.Богданов, С.Берлов

3. На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с вершинами в целых точках. Докажите, что внутри или на границе пятиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис.3) есть хотя бы одна целая точка.

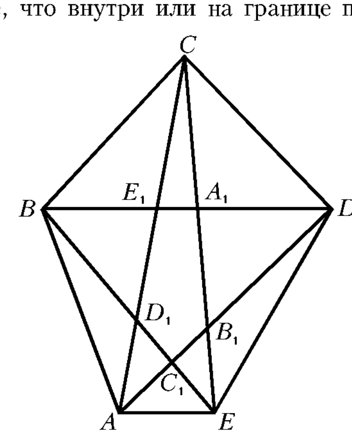


Рис. 3

В.Дольников, И.Богданов

4. Дана последовательность неотрицательных чисел a_1, a_2, …, a_n. Для любого k от 1 до n обозначим через m_k величину

$$\max_{l=1,2,\ldots,k} \frac{a_{k-l+1} + a_{k-l+2} + \ldots + a_k}{l}.$$

Докажите, что при любом $\alpha > 0$ число тех k, для которых $m_k > \alpha$, меньше чем $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\alpha}$.

В.Дольников

5. Докажите неравенство

$$\sin^n 2x + \left(\sin^n x - \cos^n x\right)^2 \le 1.$$

А.Храбров

6. Совершенное число, большее 28, делится на 7. Докажите, что оно делится на 49. (Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от самого числа, например 6 = = 1 + 2 + 3.)

А.Храбров

7. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке K и продолжений сторон AB и CD, окружность ω_2 касается стороны AD в точке L и продолжений сторон AB и CD. Известно, что точки O, K, L лежат на одной прямой. Докажите, что середины сторон BC, AD и центр окружности ω лежат на одной прямой.

П.Кожевников

8. Клетки таблицы 100×100 окрашены в 4 цвета так, что в любой строке и в любом столбце ровно по 25 клеток каждого цвета. Докажите, что найдутся две строки и два столбца, на пересечении которых все четыре клетки окрашены в разные цвета.

С.Берлов

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили
Гольберг Олег – Ростов-на-Дону, школа 8,
Дубашинский Михаил – Санкт-Петербург, школа 527, 7 кл.,
Стырт Олег – Омск, лицей 64;

по 10 классам –
Волков Сергей – Мурманск, Политехнический лицей;

по 11 классам –
Гайфуллин Александр –Раменское, муниципальная гимназия,
Лифшиц Юрий– Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Халявин Андрей – Киров, ФМЛ, 9 кл.

Дипломы II степени

по 9 классам получили
Деркач Мария – Калуга, школа 4,
Кобзев Владимир – Белорецк, Компьютерная школа,
Куликов Егор – Ярославль, школа 33,
Куюмжиян Каринэ – Ростов-на-Дону, школа 8, 8 кл.,
Миргасимов Алмаз – Набережные Челны, гимназия 26, 8 кл.,
Митричев Петр – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Порсев Анатолий – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41,
Сороцкий Евгений – Санкт-Петербург, гимназия 70;

по 10 классам –
Акопян Арсений – Москва, лицей «Вторая школа»,
Бурков Евгений – Нижний Новгород, гимназия 63,
Воробьев Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Гарбер Михаил – Ярославль, школа 33,
Глазырин Алексей – Челябинск, лицей 11,
Каленков Максим – Набережные Челны, гимназия 26,
Медвинский Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 366,
Межиров Илья – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Соколов Сергей – Рыбинск, школа 30,
Сонкина Анна – Калуга, школа 24,
Спиридонов Сергей– Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41;

по 11 классам –
Дремов Владимир – Волгодонск, школа 24,
Зинин Евгений – Краснодар, гимназия 87,
Исмагилов Ильнур – Саров, лицей 3,
Колесников Андрей – Нижний Новгород, Педагогическая гимназия,
Крамаренко Денис – Краснодар, школа 42,
Поярков Алексей – Рыбинск, лицей 2,
Федотов Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Фролов Сергей – Нижний Новгород, гимназия 87.

Дипломы III степени

по 9 классам получили
Белокопытов Артем – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Ватев Кирилл–Долгопрудный, ФМШ 5,
Волков Юрий – Кемерово, Классический лицей, 8 кл.,
Красильников Павел – Краснодар, школа 2, 8 кл.,
Марков Виктор – Покровск, Покровская школа,
Седов Игорь – Казань, лицей 5,
Смирнов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сухов Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Телятник Андрей – Долгопрудный, ФМШ 5,
Ширяев Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Юдкин Дмитрий – Краснодар, школа 63;

по 10 классам –
Васильев Антон – Санкт-Петербург, гимназия 30,
Гарбер Алексей – Ярославль, школа 33,
Горский Евгений – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Жук Дмитрий – Вологда, ВГЕМЛ,
Игнатенков Егор – Омск, лицей 168,
Клименко Алексей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Лапшин Виктор – Москва, школа 1303,
Мусатов Даниил – Москва, школа 1543,
Привалов Игорь – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сафарова Юлия – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Смирнов Филипп – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Столбов Василий – Советск Кировской обл., лицей,
Ульянов Федор – Иваново, лицей 33;

по 11 классам –
Баутин Михаил – Нижний Новгород, ФМШ 40,
Горелов Сергей – Челябинск, ФМЛ 31,
Грибов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зильберман Роман – Челябинск, ФМЛ 31,
Исанбаев Павел – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41,

Карвонен Максим – Рыбинск, лицей 2,
Кислицын Александр – Саров, гимназия 15,
Куликов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Мельников Леонид – Междуреченск, гимназия 20,
Мойкина Татьяна – Ярославль, гимназия 1,
Николаев Андрей – Омск, лицей 64,
Скопенков Михаил – Москва, СУНЦ МГУ,
Шарич Владимир – Москва, СУНЦ МГУ.

Школьники Китая получили 1 диплом I степени, 4 диплома II степени и 1 диплом III степени.

Публикацию подготовил
С.Токарев

XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

С 19 по 26 апреля этого года в Перми прошел заключительный этап Всероссийской физической олимпиады школьников. В соревнованиях приняли участие 186 учащихся 9 – 11 классов из 63 регионов России.

Ниже приводятся условия теоретических и экспериментальных задач заключительного этапа и список призеров олимпиады.

Задачи олимпиады

Теоретический тур

9 класс

1. К диску радиусом R, насаженному на горизонтальный вал мотора, под действием силы тяжести прижимается тяжелый брусок массой M (рис.1).

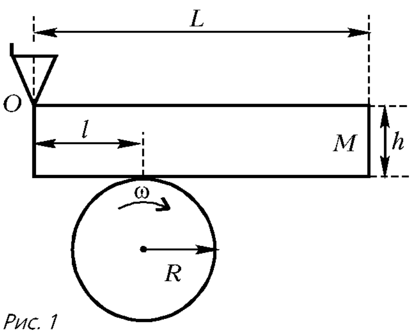


Рис. 1

Брусок может свободно поворачиваться относительно оси O. Длина бруска L, его толщина h. Точка соприкосновения бруска с диском находится на расстоянии l от левого края бруска. Коэффициент трения скольжения между бруском и диском μ. Предполагая, что мотор может развивать мощность P, определите угловую скорость ω вращения диска в зависимости от величины l. Рассмотрите случаи вращения диска по часовой стрелке (ω^+) и против часовой стрелки (ω^-). Постройте качественные графики $\omega^+(l)$ и $\omega^-(l)$.

С.Козел

2. Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через t_1 = 1,2 с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через t_2 = 1,0 с попал в лапу стрелявшего

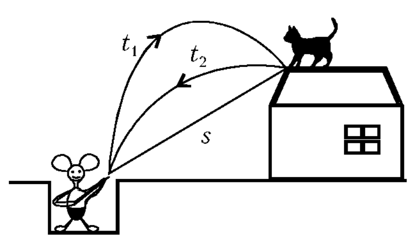


Рис. 2

мышонка (рис.2). На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд?

Д.Александров, В.Слободянин

3. Известно, что дистиллированную воду, очищенную от примесей, можно охладить без превращения в лед ниже температуры t_0 = 0 °С. В зависимости от внешнего давления процесс кристаллизации воды может начаться при различных температурах $t < t_0$. Образовавшийся при этом лед отличается по своим физическим свойствам от обычного льда при температуре 0 °С. Определите, чему равна удельная теплота плавления льда λ_2 при температуре t_1 = −10 °С. Удельную теплоемкость воды в интервале температур от −10 °С до 0 °С примите равной c_1 = = $4{,}17\cdot10^3$ Дж/(кг·К). Удельную теплоемкость льда в этом интервале температур примите равной c_2 = = $2{,}17\cdot10^3$ Дж/(кг·К). Удельная теплота плавления льда при температуре 0 °С равна λ_1 = $3{,}32\cdot10^5$ Дж/кг.

В.Орлов

4. Дан «черный ящик» с тремя выводами (рис.3). Известно, что внутри ящика находится некоторая схема, составленная из резисторов. Если к выводам *1*, *3* подключить источник напряжением U = 15 В и измерить с помощью вольтметра напряжения между выводами *1*, *2* и *2*, *3*, то они оказываются равными U_{12} = 6 В и U_{23} = 9 В.

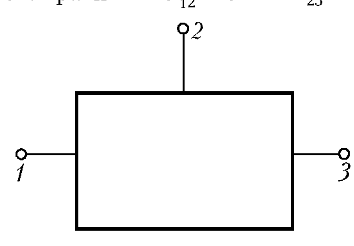


Рис. 3

Если источник подключить к выводам *2*, *3*, то U_{21} = 10 В и U_{13} = 5 В. Какими будут напряжения U_{13} и U_{32}, если источник подключить к выводам *1*, *2*? Нарисуйте возможные схемы «черного ящика» с минимальным числом резисторов. Полагая, что наименьшее сопротивление из всех резисторов равно R, найдите сопротивления остальных резисторов.

С.Козел

10 класс

1. На гладкой горизонтальной поверхности колеблется на пружине вдоль оси Ox брусок. По направлению к бруску вдоль оси Ox движется со скоростью v_0 шарик (рис.4), который после упругого удара о брусок отска-

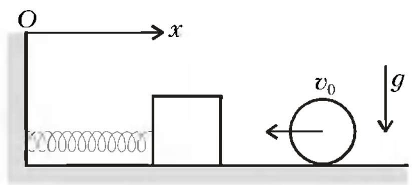


Рис. 4

кивает в противоположном направлении. Масса шарика во много раз меньше массы бруска. График зависимости координаты x бруска от времени t представлен на рисунке 5.

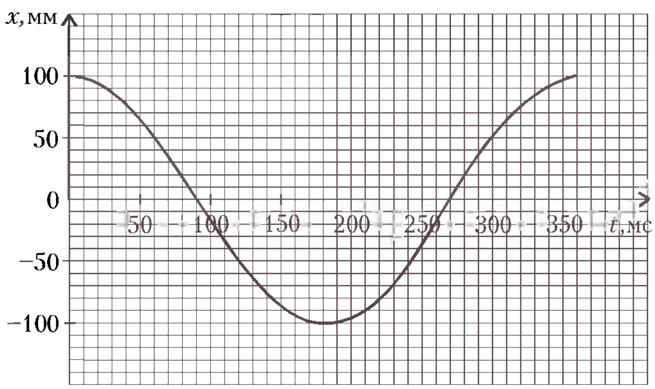


Рис. 5

1) Используя график, найдите максимально возможную скорость шарика после отскока при $v_0 = 0{,}06$ м/с.

2) При каких значениях v_0 разность Δ между максимально возможной скоростью отскока и v_0 не будет зависеть от v_0? Найдите эту разность.

В.Чивилёв

2. Длинный товарный поезд трогается с места. Вагоны соединены друг с другом с помощью абсолютно неупругих сцепок. Первоначально зазор в каждой сцепке равен L (рис.6). Масса локомотива m, а его порядковый номер первый. Все вагоны загружены, и масса каждого из них тоже m.

1) Считая силу тяги локомотива постоянной и равной F, найдите время, за которое в движение будет вовлечено N вагонов.

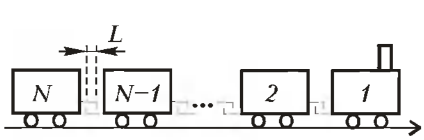


Рис. 6

2) Полагая, что состав очень длинный ($N \to \infty$), определите предельную скорость v_∞ локомотива.

П.Бойко, Ю.Полянский

3. В воду массой m бросают вещество такой же массы, обладающее следующими свойствами. а) При растворении в воде вещество поглощает энергию λ на каждый килограмм, причем $\lambda/c = 200$ К, где c – удельная теплоемкость вещества, которая равна теплоемкости воды и не меняется при растворении. б) Растворимость вещества в воде, определяемая как отношение массы растворенного вещества к массе растворителя: $\alpha = m_{\text{вещ}}/m_{\text{раств}}$, в насыщенном растворе зависит от температуры (рис.7). Начальная температура вещества +200 °С, воды 0 °С. Определите установившуюся температуру раствора $t_{\text{уст}}$ и конечную концентрацию $\alpha_{\text{уст}}$. Тепловыми потерями и испарением пренебречь.

С.Сырицын

4. Кривая ABC (рис.8) является адиабатой для некоторого вещества, у которого внутренняя энергия зависит от произведения pV,

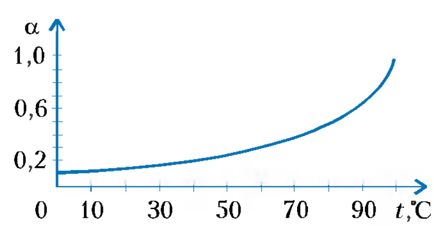


Рис. 7

т.е. $U = U(pV)$. Найдите полное количество теплоты, которое вещество получило в процессе $1-2$, изображенном на рисунке.

Д.Абанин

5. В электрической цепи, представленной на рисунке 9, ключ K разомкнут и токи не текут. Определите:

1) Токи через батареи $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ сразу после замыкания ключа.

2) Изменение электростатической энергии ΔW системы после прекращения токов.

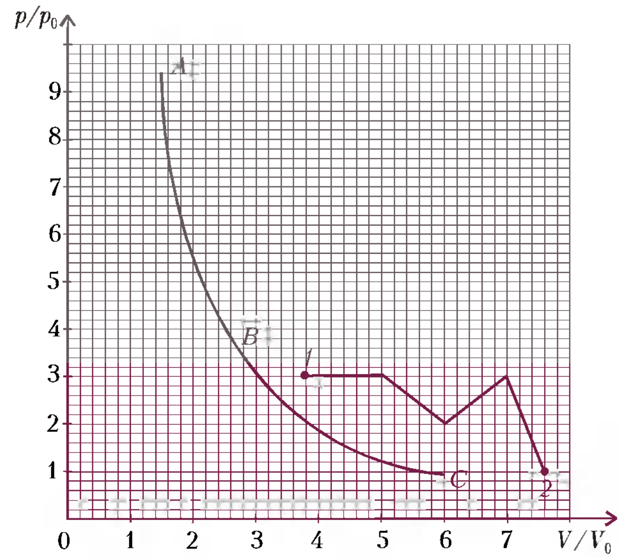


Рис. 8

3) Работы A_1 и A_2 батарей $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ за все время процесса.

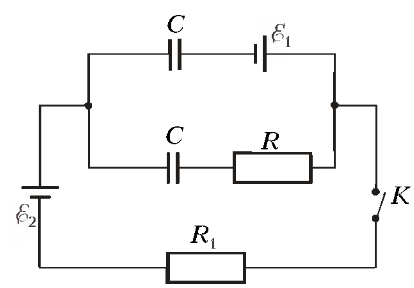


Рис. 9

4) Количество теплоты Q, выделившееся на резисторах после замыкания ключа.

Ю.Чешев

11 класс

1. На два вращающихся в противоположных направлениях цилиндрических валика радиусом $R = 0{,}5$ м положили длинный однородный брус (рис.10) так, что его центр масс ока-

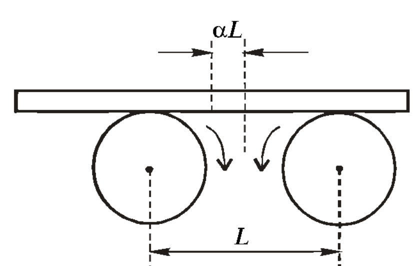


Рис. 10

зался смещенным от оси симметрии на αL, где $\alpha = 3/8$, а $L = 2$ м – расстояние между осями валиков. Затем брус без толчка отпускают. Коэффициент трения между брусом и валиками равен $\mu = 0{,}3$ и не зависит от их относительной скорости. Угловая скорость вращения валиков $\omega_1 = 10\ \text{с}^{-1}$. После того как колебания установились, угловую скорость вращения валиков уменьшили в 10 раз. Найдите частоту Ω и амплитуду A_2 новых установившихся колебаний бруса.

А.Варгин

2. К двум точкам A и B, находящимся на одной горизонтали, расстояние

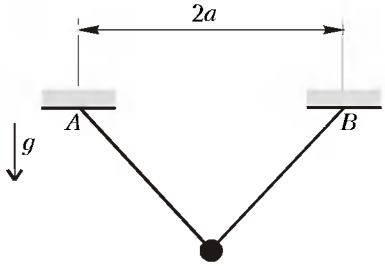


Рис. 11

между которыми $2a$, прикреплена тонкая легкая нерастяжимая нить длиной $2l$ (рис.11). По нити без трения скользит маленькая тяжелая бусинка. Ускорение свободного падения g.

1) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\perp$ в плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки крепления нити.

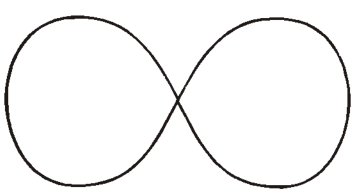


Рис. 12

2) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\parallel$ в вертикальной плоскости, проходящей через точки крепления нити.

3) При каком отношении l/a траектория движения бусинки в проекции на горизонтальную плоскость может иметь вид, представленный на рисунке 12?

Примечание: при решении задачи вам может оказаться полезной формула

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots \text{ при } x \ll 1.$$

В.Пестун

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. В электростатическом вольтметре сила притяжения между металлическими пластинами плоского конденсатора C измеряется с помощью аналитических весов (рис.13). При постоянном напряжении $U_1 = 500$ В между пластинами *1* и *2* весы уравновешиваются разновесом массой $m_1 = 200$ мг.

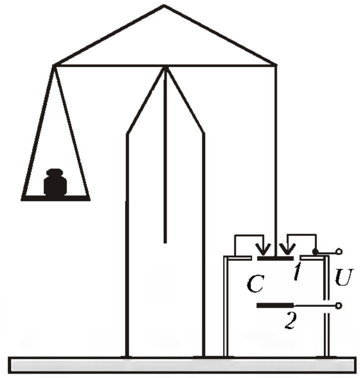


Рис. 13

На пластины конденсатора подается периодическая последовательность треугольных импульсов напряжения с длительностью $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$ с и периодом повторения $T = 0{,}01$ с (рис.14). Чему равна амплитуда импульсов U_0,

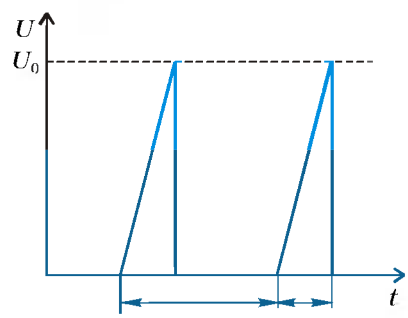


Рис. 14

если в этом случае весы уравновешиваются разновесом массой $m_2 = 30$ мг? Период собственных колебаний весов много больше T.

В.Можаев

5. В электрической цепи с мостиком Уитстона, изображенной на рисунке 15, после установления всех токов размыкают ключ K. Определите, при какой величине сопротивлений R_1 через микроамперметр с внутренним сопротивлением r после размыкания ключа протечет наибольший заряд. Все остальные параметры электрической цепи, указанные на рисунке, считать заданными. Внутренним сопротивлением источника напряжения и

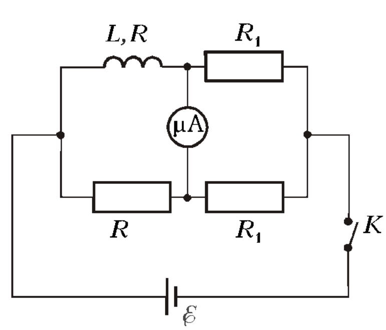


Рис. 15

сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Р.Компанеец

Экспериментальный тур

В работе по составлению и подготовке заданий экспериментального тура приняли участие В.Ефимов, С.Зорин, В.Мызников и С.Полянский.

9 класс

1. Определите сопротивления резисторов $R_1, \ldots, R_7$, амперметра и вольтметра.

Оборудование: батарейка от карманного фонаря, лабораторные вольтметр и амперметр, соединительные провода, ключ, резисторы $R_1 - R_7$.

2. Определите коэффициент жесткости пружины.

Оборудование: пружина, линейка, лист миллиметровой бумаги, брусок, груз массой 100 г, вес которого превосходит предел упругости пружины.

10 класс

1. Определите удельную теплоемкость металлического образца.

Оборудование: два геометрически подобных металлических образца, один из которых алюминиевый, термометр или мультиметр с термопарой, секундомер, сосуд с горячей водой, штатив, весы, салфетка, лист миллиметровой бумаги.

Примечание: удельная теплоемкость алюминия $c = 896$ Дж/(кг · К).

2. Определите максимально возможную температуру накала вольфрамовой нити лампочки, достижимую с предлагаемым оборудованием. Считать, что температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha = 0{,}0048\ \text{К}^{-1}$.

Оборудование: источник постоянного тока с неизвестной ЭДС и неизвестным внутренним сопротивлением, миллиамперметр с известным сопротивлением, два резистора с известными сопротивлениями, одно из которых сравнимо с сопротивлением миллиамперметра, а другое во много раз его превосходит, лампа от карманного фонаря, соединительные провода.

11 класс

1. Определите длину волны излучения полупроводникового лазера и период отражательной дифракционной решетки.

Оборудование: полупроводниковый лазер, два бруска, линейка, экран, алюминиевая фольга, две швейные иглы, стеклянная пластинка, пластилин, часть сектора лазерного диска, ластик, лист миллиметровой бумаги.

2. Внутри «черного ящика» собрана цепь из последовательно соединенных элементов. Определите, из каких элементов состоит цепь и в какой последовательности они соединены, и найдите их номиналы (значения).

Оборудование: «черный ящик», источник переменного тока с неизвестным напряжением и частотой 50 Гц, резистор с известным сопротивлением, осциллограф, соединительные провода.

Примечание: с каждого соединения схемы сделан вывод на клемму «ящика», элементы цепи могут быть не идеальными.

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Квасов Игорь – Дзержинск, школа 2,
Гибински Алексей – Дубна, лицей «Дубна»;

по 10 классам –

Калинин Вячеслав – Клин, школа 1,
Манаков Андрей – Озерск, ФМЛ 39,
Щербаков Роман – Подпорожье, школа 8,
Румянцев Андрей – Москва,СУНЦ МГУ,
Гатанов Тимур – Санкт-Петербург, ФМГ 30,
Королев Кирилл – Челябинск, ФМЛ 31,
Четвериков Денис – Вологда, ВГЕМЛ;

по 11 классам –

Ротаев Михаил – Новосибирск, школа-колледж 130,
Вахов Алексей – Пермь, ФМШ 146,
Ващенко Андрей – Брянск, лицей 1,
Панов Евгений – Челябинск, ФМЛ 31,
Алферов Роман – Челябинск, ФМЛ 31,
Вавилов Виталий – Небережные Челны, лицей 78.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Антышев Евгений – Волгореченск Костромской обл., школа 2,
Булычев Петр – Москва, лицей «Вторая школа»,
Маврин Павел – Тольятти, лицей 51,
Ражев Михаил – Дубна, лицей «Дубна»,
Гейко Василий – Нижний Новгород, гимназия 87,
Журавлев Михаил – Ноябрьск Ямало-Ненецкого АО, лицей 10;

по 10 классам –

Дзябура Василий – Сергиев Посад, ФМШ 2,
Ахмеров Антон – Краснообск Новосибирской обл., СУНЦ НГУ,
Муравьев Вячеслав – Смоленск, гимназия,
Швецов Павел – Киров, ФМЛ,
Климай Петр – Курган, Лингво-гуманитарная гимназия 47,
Семенов Дмитрий – Санкт-Петербург, ФТШ,
Нургалиев Данияр – Казань, ФМЛ 131,
Нестеренок Александр – Санкт-Петербург, ФТШ,
Семенов Андрей – Саров, гимназия 15,
Соболев Михаил – Долгопрудный, лицей 11 «Физтех»,
Терентьев Евгений – Чебоксары, гимназия 34;

по 11 классам –

Шутович Андрей – Санкт-Петербург, ФТШ,
Жук Сергей – Вологда, ВГЕМЛ,
Ефимов Артем – Березники, школа 3,
Попов Илья – Москва, лицей «Вторая школа»,
Салтыков Петр – Дубна, лицей «Дубна»,
Чепель Владислав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Рогутов Владимир – Юбилейный Московской обл., гимназия 3,
Шукшин Иван – Волгодонск, школа 24.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Захаркин Александр – Чебоксары, Политехническая школа-гимназия,
Завьялов Андрей – Пермь, ФМШ 146,
Калинин Петр – Нижний Новгород, лицей 40,
Касаткин Алексей – Уфа, УЭМШК 106,
Назаренко Максим – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сепп Янус – Таллин, Реальная школа,
Скрипачев Павел – Чебоксары, школа 53,
Идрисов Георгий – Бийск, лицей,
Кондратьев Андрей – Саратов, ФТЛ 1,
Самокотин Алексей – Челябинск, ФМЛ 31,
Фудин Дмитрий – Москва, гимназия 1567,
Кротов Александр – Архангельск, школа 22,
Николаев Сергей – Брянск, лицей 1,
Сухомлин Кирилл – Ростов-на-Дону, лицей 1 при РГУ,
Дружинин Андрей – Ноябрьск Ямало-Ненецкого АО, лицей 10;

по 10 классам –

Карманов Максим – Челябинск, ФМЛ 31,
Страбыкин Александр – Киров, ФМЛ,
Малышев Александр – Казань, лицей 83,
Нагорный Юрий – Москва, ФМОШЛ 444,
Терещенко Евгений – Майкоп, лицей 34,
Гребенников Сергей – Омск, ФМШ 64,
Береснев Николай – Киров, ФМЛ,
Подшивалов Вячеслав – Иркутск, лицей 2,
Шемятихин Дмитрий – Ульяновск, школа 40;

по 11 классам –

Кузьмин Денис – Киров, ФМЛ,
Панфилов Андрей – Майкоп, школа 17,
Харитонов Александр – Дубна, лицей «Дубна»,
Иванов Евгений – Йошкар-Ола, школа ПЛИРМЭ,
Мамонов Алексей – Воронеж, Политехнический лицей 1,
Клиньшов Владимир – Нижний Новгород, лицей 40.

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Коровин

Школа «АВАНГАРД» – ШКОЛА ДЛЯ ВСЕХ

Как подготовиться в вуз, физико-математическую школу или лицей, если нет доверия к репетиторам, ограничен в средствах или живешь в небольшом городке? Конечно, поступить во Всероссийскую школу математики и физики (ВШМФ) «АВАНГАРД». Эта школа, учрежденная Министерством образования РФ, имеет более чем десятилетний практический опыт ЗАОЧНОГО обучения школьников:

по физике – с 8 по 11 класс (включая двухлетний углубленный курс);

по математике – с 7 по 11 класс.

С прошлого года ВШМФ проводит *заочное тестирование школьников по математике и физике.*

В школе «АВАНГАРД», в зависимости от знаний, Вы можете выбрать программу обучения, доступную Вам. Всего программ три: «*A*», «*B*», «*C*». Освоил программу «*A*» или «*B*» – открыта дорога в большинство областных вузов, а если освоена программа «*C*», то можно смело идти в МИФИ, МГТУ и т.п. Плата за обучение – самая доступная. Существует возможность занятий сразу по двум программам: «*A*» + «*B*» или «*B*» + «*C*». За последние пять лет 90% наших учеников поступили в вузы! И это закономерно, так как методики и задачи разработаны лучшими преподавателями МИФИ и МФТИ.

Учебный год в ВШМФ начинается 10 сентября и кончается 30 июня. *Прием в школу ведется круглогодично.* Достаточно прислать личное заявление на адрес школы и оплатить обучение. Стоимость обучения не зависит от сложности программы и не превышает 3 минимальных месячных зарплат за полный годичный курс обучения по данному предмету.

Школа «АВАНГАРД» совместно с Министерством образования РФ и при участии журнала «Квант» ежегодно проводит:

межобластную олимпиаду по математике и физике (заочный тур; результаты олимпиады 1999 г. см. в «Кванте» №4);

межгосударственную конференцию одаренных школьников и очный тур олимпиады.

Ниже приводятся тестовые вступительные задания по математике и физике по программе «*C*». Вам нужно:

– выбрать предмет, класс, программу и написать заявление о приеме в школу (в произвольной форме);

– решить выбранный вариант задания;

– выслать нам заявление и решенный вариант (с пометкой «Квант»), а получив наш ответ, заполнить учетную карточку и прислать ее нам вместе с копией чека об оплате.

Заочное тестирование в ВШМФ «АВАНГАРД» – уникальная возможность познакомиться с новыми технологиями в образовании, проверить свои знания по математике и физике, сравнить свои результаты по тестам с результатами своих ровесников. В какой бы школе Вы не учились, заочное тестирование несколько раз в год позволит Вам объективно оценить свои успехи, а приобретенные навыки помогут Вам при выполнении контрольных и самостоятельных работ и при сдаче экзаменов.

Для участия в заочном тестировании пришлите заявку в произвольной форме на адрес ВШМФ, и Вам будет выслан проспект с подробной информацией о порядке проведения тестирования и каталог тестов с краткими аннотациями.

Наш адрес:
115446 Москва, а/я 450,
ВШМФ «АВАНГАРД».

Тестовое вступительное задание по математике

Программа «C»

7 класс

1. Вычислите

$$4{,}07-5{,}49+8{,}93-1{,}51+\frac{4{,}2:6-3\frac{1}{3}\cdot 0{,}3}{7{,}5:0{,}5}.$$

2. Докажите, что число 123456789 является составным.

3. Запишите число 1000 с помощью восьми одинаковых цифр и знаков арифметических действий.

4. Число содержит 4 сотни, b десятков и c единиц. При каких значениях b и c данное число кратно 30?

5. Три класса школьников сажали деревья. Первый класс посадил a деревьев, второй – 70% того, что посадил первый, а третий класс – на 5 деревьев больше второго. Сколько деревьев посадили все три класса?

8 класс

1. Упростите выражение

$$(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)$$

и вычислите его значение при $x=-0{,}4$.

2. Решите уравнение

$$\frac{8(x+10)}{15}-24\frac{1}{2}=7\frac{x}{10}-\frac{2(11x-5)}{5}.$$

3. Известно, что $x+\frac{1}{x}=3$. Найдите значение выражения $x^2+\frac{1}{x^2}$.

4. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, на 54 больше данного числа. Найдите это число.

5. Постройте график функции

$$\frac{y-x}{x-1}=-2.$$

9 класс

1. Натуральное пятизначное число A имеет в разряде десятков цифру 8. Если эту цифру десятков переставить в начало числа A, сохранив порядок остальных цифр, то вновь полученное пятизначное число будет больше A на 69570. Определите число A, если известно, что оно кратно 6.

2. Решите неравенство

$$ax+1>0.$$

3. Постройте график функции

$$|x|+|y|=2.$$

4. Произведение двух целых чисел равно 216, а их наименьшее общее кратное равно 36. Найдите эти числа.

5. Смешали p%-й и 10%-й растворы соляной кислоты и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько грамм каждого раствора было взято?

10 класс

1. Решите уравнение

$$\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6.$$

2. Определите, при каких значениях параметра a оба корня уравнения

$$x^2+2(a-4)x+a^2+6a=0$$

положительны.

3. Длины сторон треугольника равны 4, 5 и 7 см. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

4. Решите уравнение

$$\left|x^2-9\right|+\left|x^2-4\right|=5.$$

5. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{1-ax}{-2x^2+6x-7}}.$$

11 класс

1. Решите неравенство

$$x(x+1)(x+2)(x+3) < 48.$$

2. Найдите площадь наибольшего прямоугольника, который можно вписать в правильный треугольник со стороной a.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+4} = a - \sqrt{x^2+6x+9}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x + \left(0{,}04c^2+1{,}2c\right)\cos\dfrac{y}{5} = c+8, \\ \sin x + 20\cos\dfrac{y}{5} = -21. \end{cases}$$

5. Сторона равностороннего треугольника равна a. На высоте этого треугольника построен новый равносторонний треугольник. На высоте нового треугольника построен еще один равносторонний треугольник и т.д. до бесконечности. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех этих треугольников.

Тестовое вступительное задание по физике

Программа «С»

8 класс

1. На рисунке 1 изображены четыре тела одной и той же массы. На тела *2* и *4* поставлены гири, тела *3* и *4* помещены на катки. При равномерном движении какого из тел по горизонтальной поверхности сила трения наибольшая?

2. Тело A массой 40 г соединили с телом B массой 80 г и объемом 40 $см^3$. Оба тела вместе поместили в измери-

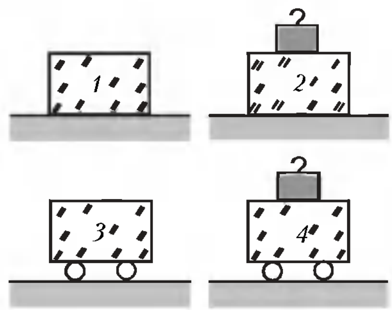


Рис. 1.

тельный цилиндр с водой. При полном погружении в воду тела вытеснили 140 $см^3$ воды. Определите плотность тела A.

3. Площадь большого поршня гидравлического пресса 1000 $см^2$, малого 2 $см^2$. Какая сила действует на большой поршень, если малый испытывает действие силы 200 Н? Трение не учитывать.

4. Почему при открывании крана в трубке (рис.2), из которой откачан воздух, образуется водяной фонтан?

5. Какую работу нужно совершить, чтобы переместить груз массой 100 кг на расстояние 2 м по совершенно гладкой горизонтальной поверхности?

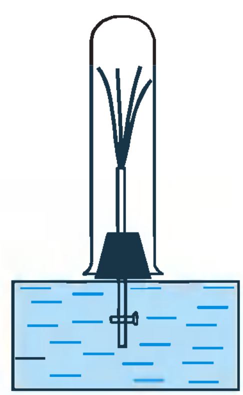


Рис. 2

6. Резиновый шар надули воздухом и завязали. Как изменится объем шара и давление внутри него при повышении атмосферного давления?

9 класс[1]

1. Человек бежит по эскалатору. В первый раз он насчитал $n_1 = 50$ ступеней, во второй раз, двигаясь в том же направлении со скоростью втрое большей, он насчитал $n_2 = 75$ ступеней. Сколько ступеней он насчитал бы на неподвижном эскалаторе?

2. Первую половину пути поезд шел со скоростью в $n = 1{,}5$ раза большей, чем вторую половину пути. Средняя скорость поезда на всем пути равна $v_{ср} = 43{,}2$ км/ч. Каковы скорости поезда на первой и второй половинах пути?

3. В железном калориметре массой $m = 0{,}1$ кг находится $m_1 = 0{,}5$ кг воды при температуре $t_1 = 15$ °C. В калориметр бросают свинец и алюминий общей массой $m_2 = 0{,}15$ г и температурой $t_2 = 100$ °C. В результате температура воды поднимается до $t = 17$ °C. Определите массы свинца и алюминия. Удельная теплоемкость свинца $c_1 = 125{,}7$ Дж/(кг·К), алюминия $c_2 = 836$ Дж/(кг·К), железа $c_3 = 460$ Дж/(кг·К).

4. Вычислите сопротивление проволочного куба, к противоположным вершинам которого подано напряжение. Сопротивления всех ребер одинаковы и равны $R = 1$ Ом.

[1] *Задачи по физике для 10 и 11 классов можно получить по почте, прислав заявку в адрес школы «АВАНГАРД».*

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

(См. «Квант» №4)

1. Так быть не может. Из условия задачи следует, что всех яблок (желтых, зеленых и красных) больше, чем всех яблок (первого, второго и третьего сорта). Противоречие.

2. Построим треугольник AGH такой, что $AH = BG = BC$, и проведем параллельно DE и параллельно GH прямые из вершин B и C; пусть они пересекаются в точке F (рис.1). Тогда $\Delta DAE = \Delta BGF = \Delta CEF = \Delta HAG$, так что $AEFG$ – параллелограмм, BFC – равносторонний треугольник, $\angle MFN = 60°$. Обозначим $\angle EFM = \angle GFN = \alpha$, тогда $\angle FEA = \angle FGA = \angle EFN = \angle GFM = 60° + \alpha$; $\angle EFG = \angle EAG = 60° + 2\alpha$. Для суммы углов параллелограмма $AEFG$ имеем

$$2\left(60° + \alpha + 60° + 2\alpha\right) = 360°$$

$\alpha = 20°$. Следовательно, $\angle BAC = \angle EAG = 100°$.

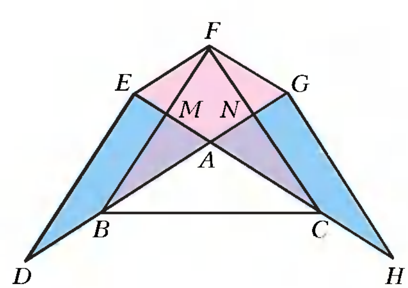


Рис. 1

3. Число X – целое, поскольку сумма чисел в каждой строке таблицы – целое число. Обозначим эту сумму через S. Тогда сумма всех чисел в таблице равна $1 + 2 + \ldots + 8 + X = 3S$, откуда $36 + X = 3S$, следовательно, X делится на 3. Пусть $X = 3k$, где k – целое, тогда $S = 12 + k$. Пусть a, b – два числа, стоящие в одной строке с X. Имеем $3k + a + b = 12 + k$, или $2k + a + b =$

= 12. Следовательно, числа a, b либо одновременно четные, либо нечетные. Рассмотрев все возможные варианты, получаем четыре решения: $X = 0$; 3; 6; 9. Заполнение таблицы для каждого из этих четырех вариантов показано на рисунке 2.

$x = 0$:

4	8	0
6	1	5
2	3	7

$x = 3$:

1	7	5
8	3	2
4	3	6

$x = 6$:

1	8	5
6	2	6
7	4	3

$x = 9$:

2	4	9
6	8	1
7	3	5

Рис. 2

4. Не могут. Пусть середины ребер (их 12) – белые точки, а вершины куба и центры его граней (их 14) – черные точки. Каждое звено ломаной имеет один черный конец, а другой – белый. Значит, на замкнутой ломаной должно быть равное количество как черных, так и белых точек.

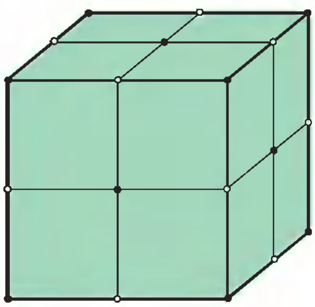


Рис. 3

5. Так как Пончик съедает за минуту 4 или 5 пирожков, то через 10 минут после старта он съел не менее $4 \times 10 = 40$ и не более $5 \times 10 = 50$ пирожков. Сиропчик выпил на 20% больше стаканов, т.е. $6/5$ количества съеденных Пончиком пирожков. Отсюда следует, что число этих пирожков делится на 5 и потому равно 40, 45 или 50. Заметим, что 20% этого количества равно, соответственно, 8, 9 или 10 – именно на столько *условных единиц* (т.е. пирожков либо стаканов) Сиропчик опережал Пончика через 10 минут после начала состязания. По условию, Пончик сумел за 4 минуты сравнять счет. Так как он в минуту съедает не более 5 пирожков, а Сиропчик выпивает не менее 3 стаканов, то за минуту Пончик может уменьшить отставание не более чем на $5 - 3 = 2$ *у.е.* Поэтому за 4 минуты он способен уменьшить разницу не более чем на $2 \times 4 = 8$ *у.е.* (но уж никак не на 9 или 10). Поэтому однозначно можно сделать вывод: к исходу 10-й минуты Пончик съел 40 пирожков, а Сиропчик выпил 48 стаканов. За 4 последующие минуты Пончик съел еще $5 \times 4 = 20$ пирожков, а Сиропчик выпил еще $3 \times 4 = 12$ стаканов, и, таким образом, к концу 14-й минуты у них набралось по 60 *у.е.* За следующие 6 минут Пончик съел не менее $4 \times 6 = 24$ и не более $5 \times 6 = 30$ пирожков, т.е. всего к исходу 20-й минуты он поглотил от $60 + 24 = 84$ до $60 + 30 = 90$ пирожков. Сиропчик к тому моменту отстал на 10%, т.е. количество выпитых им стаканов составляло $9/10$ этого количества. Следовательно, число съеденных Пончиком к концу 20-й минуты пирожков должно делиться на 10. Среди натуральных чисел от 84 до 90 лишь одно – 90 – делится на 10. Поэтому Пончик съел к исходу 20-й минуты именно 90 пирожков, а Сиропчик выпил $90 \times (9/10) = 81$ стакан (нетрудно убедиться, что это возможно: например, если в течение пяти из упомянутых шести минут он выпивал по 3 стакана, а за шестую минуту – 6). За оставшиеся 5 минут Сиропчик, по условию, вырвал-таки победу. Так как за минуту он выпивает не более 6 стаканов, то за 5 минут – не более $6 \times 5 = 30$. Пончик же за минуту съедает не менее 4 пирожков, т.е. за 5 минут – не менее $4 \times 5 = 20$. Поэтому к концу битвы Пончик съел *не менее* $90 + 20 = 110$ пирожков, а Сиропчик выпил *не более* $81 + 30 = 111$ стаканов. А поскольку Сиропчик победил, то *именно так все и было!* (В самом деле, любое «шевеление» приведет либо к ничьей, либо к победе Пончика).

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Индукция магнитного поля Земли имеет вертикальную составляющую. Северный полюс будет находиться на нижнем конце прута, южный – на верхнем (в северном полушарии).

2. Нет, так как влияние внешних магнитных полей, сотрясения и резкие изменения температуры способствуют размагничиванию постоянных магнитов.

3. В достаточно сильном магнитном поле можно намагнитить ферромагнетик любой формы.

4. По мере нагревания стали (приближения к точке Кюри) ее магнитная проницаемость уменьшается, сталь плохо намагничивается и очень слабо притягивается электромагнитом.

5. От центрального электрода к кольцу потечет ток. На движущиеся в растворе ионы со стороны магнитного поля будет действовать сила, приводящая жидкость во вращение по часовой стрелке (если смотреть сверху).

6. Свободные электроны металла, движущиеся в магнитном поле, под действием силы Лоренца смещаются к одной из боковых плоскостей пластины. В направлении, поперечном движению пластины, возникает электрическое поле (эффект Холла).

7. В отличие от электрических силовых линий, линии магнитной индукции не обрываются на поверхности экрана, поэтому магнитное поле можно лишь ослабить, и то при достаточно толстых стенках оболочки.

8. Качающаяся стрелка создает переменное магнитное поле, индуцирующее в латунном футляре вихревые токи, препятствующие движению стрелки.

9. Чтобы уменьшить индукционные токи Фуко.

10. Индуктивность зависит от магнитной проницаемости сердечника, которая при различной силе тока в катушке, а значит и при различной величине магнитного поля в сердечнике, неодинакова.

11. а) Увеличится во много раз; б) немного увеличится; в) немного уменьшится.

12. Парамагнитные жидкости втягиваются в область более сильного поля, а диамагнитные выталкиваются из нее.

13. Газы, образующиеся при горении (углекислый и угарный газы), обладают свойствами диамагнетиков.

14. а) Произойдет поляризация; б) возникнет кратковременный индукционный ток; в) появится длительный индукционный ток.

15. Магнитный поток, пронизывающий сверхпроводящий контур, не может измениться. Поскольку площадь контура уменьшилась в 4 раза, во столько же раз увеличится индукция магнитного поля.

Микроопыт

В пламени (нагреваясь) железный гвоздь теряет свои магнитные свойства, а в воздухе (охлаждаясь) восстанавливает их.

Жеребьевка для чемпиона

А. Занумеруем игроков следующим образом. В начало списка поставим тех, кто победил чемпиона («опасных»). Далее – проигравших ему («неопасных»). Последний номер дадим чемпиону. В каждом туре розыгрыша кубка составим пары по порядку номеров.

Чемпион выступил не хуже «среднестатистического» участника, который выиграл столько же, сколько и проиграл. Значит, число «опасных» не больше числа «неопасных». Все «опасные» попадут в первую половину списка, тогда как чемпион – во вторую. Поэтому чемпион не встретится с «опасным» игроком раньше финала, что и требовалось.

Б. «Опасными» мы называем тех, кто выигрывает у чемпиона, а «неопасными» – тех, кто ему проигрывает. Каждый из «опасных» проиграл в чемпионате кому-то из «неопасных» (иначе он бы выиграл больше матчей, чем чемпион, что невозможно). Составим первую пару розыгрыша кубка из «опасного» и такого «неопасного», которому он проиграл. Следующие пары составляем таким же образом, пока это возможно. Допустим, остались «опасные», которых нельзя включить в такие пары (они проиграли в чемпионате тем «неопасным», которые уже вошли в предыдущие пары). Тогда пусть эти «опасные» играют между собой. Если один из них останется без пары, то поступим следующим образом. Общее число «опасных» не больше числа «неопасных» (поскольку чемпион выступил не хуже «среднестатистического» игрока, который выиграл и проиграл поровну). В составленных парах не больше «неопасных» игроков, чем «опасных», и еще один «опасный» остался без пары. Значит, кто-то из «неопасных» не был еще включен в пару – пусть с ним и играет оставшийся «опасный».

Остальные игроки объединяются в пары произвольно. Чемпион выйдет в следующий тур, поскольку играет с «неопасным». Если в остальных турах пары строятся по тому же правилу, то чемпион получит кубок. Это заведомо возможно, если в каждом туре «опасные» составляют менее половины участников. Допустим, что вплоть до некоторого тура проведена описанная процедура и это условие выполнялось. Покажем, что и после очередного тура такой процедуры оно будет выполнено.

Поскольку в следующий тур выходит половина участников предыдущего, то достаточно показать, что отсеивается не меньше половины «опасных». Но в матчах между ними выбывает каждый второй участник. Только один «опасный» может выиграть у «неопасного». Поэтому достаточно, чтобы в том же туре хотя бы один «опасный» проиграл «неопасному». Как мы видели, в первом туре это выполнено. В последующие туры при описанной жеребьевке выходили только такие «опасные», которые проигрывают кому-то из «неопасных», также вышедших в этот тур. И первая же пара составлялась из «опасного» и такого «неопасного», которому он проигрывает. Этим и доказан искомый факт.

В. Добавим к «настоящим» игрокам некоторое количество «статистов», чтобы общее число участников стало степенью двойки. Пусть эти «статисты» проигрывают всем остальным участникам, а между собой играют как угодно. Очевидно, чемпион останется чемпионом, и можно использовать жеребьевки из пунктов А и Б. При этом можно обеспечить, чтобы «статисты» все время играли между собой – кроме одного, если в данном туре их число нечетно (тогда нечетно и число «настоящих» игроков). Удалим теперь «статистов», и пусть «настоящий» игрок, встречавшийся со «статистом» в каком-то туре, пропускает этот тур и выходит в следующий. Мы получим искомую жеребьевку.

Дробно-рациональные уравнения с параметром

1. $x_1 = 2a-3$, $x_2 = 1-a$ при $a \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{4}{3}; 2; 3\right\}$; $x=-2$ при $a \in \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$; $x=-1$ при $a \in \{1; 2\}$; $x = -\frac{1}{3}$ при $a = \frac{4}{3}$.

2. $x_1 = 2a-1$, $x_2 = 3$ при $a \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{-3; \frac{1}{3}; \frac{3}{2}; 2\right\}$; $x=-7$ при $a=-3$; $x=3$ при $a \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{3}{2}; 2\right\}$.

3. $x_1 = a$, $x_2 = 2a-1$, $x_3 = (a+1)/2$ при $a \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{-1; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; 1; 5\right\}$; $x_1=-1$, $x_2 = 0$ при $a=-1$; $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ при $a = -\frac{1}{3}$; $x_1=-1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ при $a=0$; $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ при $a = \frac{1}{3}$; $x=1$ при $a=1$; $x_1 = 5$, $x_2 = 9$ при $a=5$.

6. $x_1 = -\frac{7}{a+1}$, $x_2 = \frac{6}{1-a}$ при $a \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{-8; -5; -1; \frac{1}{7}; 1; \frac{5}{2}; 13\right\}$; $x = \frac{2}{3}$ при $a=-8$; $x = \frac{7}{4}$ при $a=-5$; $x=3$ при $a=-1$; $x=-\frac{7}{2}$ при $a=1$; $x=-4$ при $a = \frac{5}{2}$; $x = -\frac{1}{2}$ при $a=13$.

7. При $a \in \left(-\infty; -\frac{14}{11}\right) \cup \{-1\} \cup (2; +\infty)$ решений нет; $x_{1,2} = \frac{a+4 \pm \sqrt{-(a-2)(11a+14)}}{2\left(1-a^2\right)}$ при $a \in \left(-\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 1\right) \cup (1; 2)$; $x = -\frac{11}{5}$ при $a = -\frac{14}{11}$; $x = -\frac{5}{7}$ при $a = -\frac{2}{5}$; $x = -\frac{5}{8}$ при $a = \frac{1}{5}$; $x = -\frac{3}{5}$ при $a=1$; $x=-1$ при $a=2$.

8. К случаям, рассмотренным в задаче 5 статьи, добавляется случай равенства нулю коэффициента перед x^2. Ответ показан на рисунке 4.

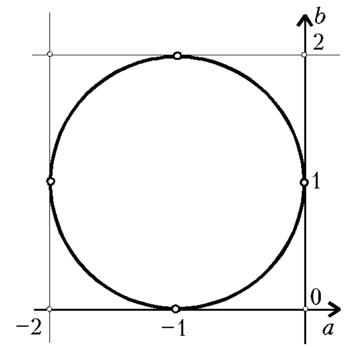


Рис. 4

Конденсаторы в цепях постоянного тока

1. $Q = \frac{C\mathscr{E}^2}{2}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)^2$.

2. 1) $\mathscr{E} = 4U_1/3 = 16$ В; 2) $U_2 = 5\mathscr{E}/16 = 5$ В.

3. 1) $I_2 = \mathscr{E}/R_2 = 1{,}5$ А;

2) $I_6 = \mathscr{E}(R_1+R_2)/(R_1R_2) - I_3R_3/R_2 = 4{,}05$ А.

4. 1) $I_{06} = \mathscr{E}/r$; 2) $Q = (C_1+C_2+C_3)\mathscr{E}^2/2$.

XXVI Всероссийская олимпиада школьников по математике

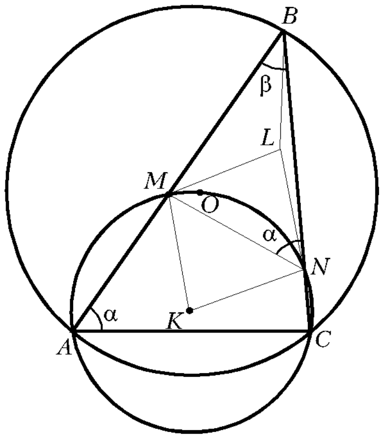
Заключительный этап

9 класс

1. *Ответ*: $a+b+c=-3$. *Указание.* Пусть x_1 – общий корень первой пары уравнений, а x_2 – общий корень второй пары уравнений. Докажите, что $x_1x_2 = 1$, а потому x_2 – общий корень уравнений $x^2+x+a=0$ и $x^2+cx+1=0$.

2. Сначала Саша узнает НОД чисел $X+1$ и 2 и тем самым определяет четность числа X. Если X четно, то второй вопрос будет о НОД$(X+2, 4)$, а если нечетно, то о НОД$(X+1, 4)$, после чего Саша узнает остаток от деления X на 4. Вообще, если после k вопросов ($k \le 5$) Саша определит остаток r_k от деления X на 2^k, то следующим ($k+1$)-м вопросом он узнает $A = $ НОД$\left(X+2^k-r_k, 2^{k+1}\right)$, а затем найдет и остаток от деления X на 2^{k+1}: если $A = 2^{k+1}$, то $r_{k+1} = 2^k + r_k$, если же $A = 2^k$, то $r_{k+1} = r_k$.

Таким образом, задав 6 вопросов, Саша узнает остаток от деления X на 64. Ясно, что чисел с таким остатком при делении на 64 в пределах первой сотни не более 2. Если их все же



два, скажем a и $a + 64$, то Саша может спросить, чему равен наибольший общий делитель $X + 3 - r$ и 3, где r – остаток от деления a на 3. Ясно, что если $X = a$, то ответ: 3, а если $X = a + 64$, то 1. Итак, седьмым вопросом число X определится однозначно.

Замечание. Можно заметить, что первые шесть вопросов Саша употребил на отыскание последних шести цифр двоичной записи числа X.

Рис.5

3. Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$ (рис.5). Тогда $\angle AOC = 2\beta$. Поэтому дуга AC окружности с центром K, не содержащая точек M и N, равна 4β. Далее, $\angle ABC = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{MN}\right)$, что дает $\beta = \frac{1}{2}\left(4\beta - \overset{\smile}{MN}\right)$. Тогда $\overset{\smile}{MN} = 2\beta$ и $\angle MKN = 2\beta$ (центральный угол). Из симметрии относительно MN получаем $\angle MLN = 2\beta$, $ML = LN$. Из этих равенств следует, что L – центр описанной окружности ΔMBN.

Так как $AMNC$ – вписанный четырехугольник, то $\angle BNM = \angle BAC = \alpha$. Для окружности, описанной около ΔMBN, $\angle BLN$ – центральный, поэтому $\angle BLM = 2\alpha$. Из ΔMBL получаем $\angle MBL = \angle BML = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Поскольку $\angle ABL + \angle BAC = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \alpha = \frac{\pi}{2}$, то $BL \perp AC$.

4. Для решения этой задачи удобно прибегнуть к языку теории графов (города – вершины графа, дороги – ребра, степень вершины – количество дорог, выходящих из города, цикл – замкнутый маршрут).

Предположим, что существует граф, степени всех вершин которого более двух, но длина любого цикла в этом графе делится на 3. Рассмотрим такой граф G с наименьшим числом вершин. Очевидно, в этом графе существует цикл Z; пусть этот цикл последовательно проходит по вершинам A_1, A_2, …, A_{3k}. Пусть существует путь S, соединяющий вершины A_m и A_n и не проходящий по ребрам цикла Z. Рассмотрим циклы Z_1 и Z_2, состоящие из пути S и двух «половинок» цикла Z. Поскольку длины обоих этих циклов делятся на 3, нетрудно заметить, что длина пути S делится на 3. В частности, из доказанного утверждения следует, что никакая вершина X, не входящая в цикл Z, не может быть соединена ребрами с двумя разными вершинами цикла Z. Кроме того, ребра, выходящие из вершин цикла Z, отличные от ребер этого цикла, все различны.

Объединим все вершины A_1, A_2, …, A_{3k} цикла Z в одну вершину A, которую соединим ребрами со всеми вершинами, соединеными с вершинами цикла Z. Очевидно, в полученном графе G_1 меньше вершин, чем в графе G, и степень каждой вершины по-прежнему более двух. Из доказанного выше следует, что длина любого цикла в графе G_1 делится на 3. Мы получили противоречие: ведь в выбранном ранее графе G было минимальное количество вершин среди всех таких графов.

Таким образом, в любом графе, степени всех вершин которого более двух, существует цикл, длина которого не делится на 3. Остается лишь применить это утверждение для графа, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам.

5. *Указание.* Докажите по индукции, что при $n = 5m$ все числа от 1 до n окажутся выписанными. Для этого запишите первые 5 членов последовательности, а затем убедитесь, что $a_{5m} = 5m - 2$, а следующие 5 чисел имеют вид: $5m + 1$, $5m + 4$, $5m + 2$, $5m + 5$, $5m + 3$. Далее воспользуйтесь тем, что квадраты натуральных чисел дают при делении на 5 остатки 0, 1 и 4.

7. Пусть окружность S_1 вторично пересекает CD в точке F (рис.6). Будем считать для определенности, что E лежит между D и F (возможно, $F = E$). Из равенства $DA^2 = DF \cdot DE$ следует $DB^2 = DF \cdot DE$, а значит, и окружность S_2 проходит через точку F. Теперь, поскольку $CA \cdot CM = CE \cdot CF = CB \cdot CN$, получаем $\frac{CM}{CN} = \frac{CB}{CA}$, откуда $\Delta CMN \sim \Delta CBA$, $\angle CMN = \angle CBA$, $\angle CNM = \angle CAB$. Проведем касательную к S_1 в точке M и отметим на ней две точки P и Q так, чтобы P оказалось по одну сторону с B от прямой AC, а Q – по другую. Очевидно, $\angle PMA = \angle BAM$. Но тогда $\angle QMC = \angle PMA = \angle CAB = \angle CNM$, а это означает, что окружность, проходящая через C и M и касающаяся S_1, проходит и через N. Аналогично показывается, что окружность, проходящая через C и N и касающаяся S_2, проходит и через M.

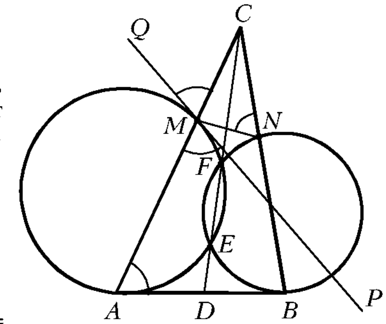


Рис. 6

8. Положим для удобства изложения $a_{n+100} = a_n$ при $n = 1$, 2, …, 100. Через (a, b) будем обозначать наибольший общий делитель чисел a и b.

Лемма. *Пусть a_1, a_2, …, a_n и d – натуральные числа. Тогда существует натуральное число k такое, что $(a_1 + kd, a_i) \le d$ для любого $i = 2, 3, …, n$.*

Доказательство леммы. Существует некоторое число, кратное $a_2a_3\ldots a_n$, скажем $la_2a_3\ldots a_n$, которое больше a_1. Тогда среди тех k, для которых $a_1 + kd > la_2a_3\ldots a_n$, существует наименьшее число k_0. Положим $a_1' = a_1 + k_0d$. Тогда $0 < a_1' - la_2a_3\ldots a_n \le d$, и наибольший общий делитель a_1' и каждого из a_i не превосходит d. Лемма доказана.

Пусть теперь M – наибольший из попарных общих делителей чисел a_i. Докажем, что с помощью операций, описанных в условии, мы сможем заменить исходный набор чисел на набор, в котором все попарные общие делители меньше M. Действительно, так как числа a_1, a_2, …, a_{100} взаимно просты в совокупности, найдутся два соседних числа a_i и a_{i+1}, первое из которых делится на M, а второе – нет. Тогда $d = (a_i, a_{i+1}) < M$. Применяя лемму, прибавим к a_i такое кратное d, чтобы наибольшие общие делители a_i' с каждым из остальных чисел стали не больше d. В полученном наборе попрежнему все попарные наибольшие делители не превосходят M, а чисел, кратных M, меньше, чем в исходном. Повторяя при необходимости эту операцию, мы добьемся, что останется ровно одно число, кратное M, и тогда, очевидно, все попарные наибольшие общие делители станут меньше M.

Итак, если наибольший из попарных общих делителей чисел набора больше 1, его можно уменьшить. Поэтому его можно уменьшить до 1, что и требуется условием.

10 класс

2. Пусть $t_i = x_i^{13} - x_i$. При $-1 < x_i \le 0$ имеем $t_i \ge 0$; если же $0 < x_i < 1$, то $t_i < 0$. Неравенство, которое нужно доказать, перепишем в виде $\sum_{i=1}^{n} t_i y_i < 0$. Без ограничения общности можно считать, что $y_1 > 0$ (поскольку $\sum (y_i + c) t_i =$

$= \sum y_i t_i + c\sum t_i = \sum y_i t_i$).

Пусть число k таково, что $x_k \le 0$, $x_{k+1} > 0$. Тогда t_1, ..., $t_k \ge 0$, t_{k+1}, ..., $t_n < 0$. Оценим сумму $\sum t_i y_i$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i y_i = \sum_{i=1}^{k} t_i y_i + \sum_{j=k+1}^{n} t_j y_j \le$$

$$\le y_k \sum_{i=1}^{k} t_i + y_{k+1} \sum_{j=k+1}^{n} t_j < y_{k+1} \sum_{i=1}^{n} t_i = 0.$$

Неравенство доказано.

3. Пусть H – ортоцентр ΔABC, а M – середина стороны AC (рис.7). Выберем на отрезках AH и CH точки S и T такие, что $PS \perp AB$ и $TQ \perp BC$. Обозначим через K точку пересечения перпендикуляров PS и QT. Поскольку $\angle BPK = \angle BQK = 90°$, то четырехугольник $BPKQ$ вписанный.

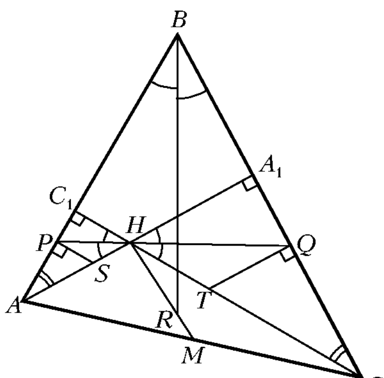


Рис. 7

Покажем, что точки K и R совпадают. Треугольник PBQ равнобедренный ($BP = BQ$), ибо $\angle HPB = \angle HQB$. Поэтому точка K лежит на биссектрисе угла B. Докажем, что она также лежит и на прямой HM. Действительно, треугольники PHC_1 и QHA_1 подобны по двум углам, поэтому $\frac{PH}{HQ} = \frac{C_1H}{HA_1}$. Аналогично, ΔAHC_1 подобен ΔCHA_1, откуда $\frac{C_1H}{HA_1} = \frac{AH}{HC}$. Далее, $\frac{PH}{HQ} = \frac{HS}{HT}$, ибо $\Delta PHS \sim \Delta THQ$. Следовательно,

$$\frac{HS}{HT} = \frac{PH}{HQ} = \frac{C_1H}{HA_1} = \frac{AH}{HC},$$

откуда $ST \| AC$. Поэтому середина отрезка ST лежит на прямой HM. Поскольку $HSKT$ – параллелограмм, точка K лежит на прямой HM. Отсюда точка K является точкой пересечения прямой MH с биссектрисой угла B. Таким образом, точки K и R совпадают.

4. *Ответ*: нельзя. Пусть у нас есть гири A, B, C, D, E. Всего имеется $5! = 120$ различных способов упорядочивания масс этих гирь. А при условии $m(A) < m(B) < m(C)$ существует $\frac{5!}{3!} = 20$ различных способов упорядочивания масс. Поэтому если на какой-то вопрос получен отрицательный ответ, то этот вопрос может исключить не более 20 вариантов. Следовательно, первые пять вопросов могут исключить не более $20 \cdot 5 = 100$ вариантов. Каждый из следующих четырех вопросов может исключить не более половины из оставшихся вариантов. Т. е. после 6-го вопроса может остаться не менее 10 вариантов, после 7-го – не менее 5 вариантов, после 8-го – не менее 3, и, наконец, после 9-го вопроса может остаться по крайней мере 2 варианта. Таким образом, мы показали, что при любой последовательности из девяти задаваемых вопросов найдется последовательность ответов, которой удовлетворяют по крайней мере два варианта упорядочивания масс гирь.

5. *Ответ:* 7. *Пример*: {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}. *Указание.* Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, где $m \ge 8$, – множество из m чисел, удовлетворяющее условию задачи, причем $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$. Можно считать, что $a_4 > 0$ (если $a_4 \le 0$, то числа $-a_m$, $-a_{m-1}$, ... > $-a_1$ также удовлетворяют условию). Докажите, что для одной из троек a_1, a_2, a_3 или a_1, a_2, a_4 сумма любых двух чисел множеству A не принадлежит.

6. Предположим, что совершенное число равно $3n$, где n не кратно 3. Тогда все натуральные делители числа $3n$ (включая его само) можно разбить на пары d и $3d$, где d не делится на 3. Следовательно, сумма всех делителей числа $3n$ (она равна $6n$) делится на 4. Отсюда n кратно 2. Далее заметим, что числа $\frac{3n}{2}$, n, $\frac{n}{2}$ и 1 будут различными делителями числа $3n$, их сумма равна $3n + 1 > 3n$, откуда следует, что число $3n$ не может быть совершенным. Противоречие.

7. Пусть точки Q и B_1 лежат по разные стороны от прямой BK, а точки P и B_1 лежат по разные стороны от прямой BM (остальные случаи рассматриваются аналогично). Прямые QK и PM (рис.8) пересекаются в точке N, так как точки Q и P являются образами точек K и M при гомотетии с центром N (касательная переходит в параллельную ей касательную с точкой касания в середине дуги). Значит, $\angle NQB + \angle NPB = \pi$. Кроме того, $\angle KB_1B + = \angle KQB = \pi$ и $\angle MB_1B + \angle MPB = = \pi$. Следовательно, $\angle KB_1B + \angle MB_1B = = \pi$, т. е. точка B_1 лежит на прямой KM. Далее, $\angle BQB_1 = = \angle BKB_1 = \angle KNM = = \angle B_1MB = \angle B_1PB$. А поскольку $\angle QBP + + \angle QNP = \pi$, то получаем, что в четырехугольнике BPB_1Q два противоположных угла равны, а сумма двух смежных равна π, следовательно, BPB_1Q – параллелограмм.

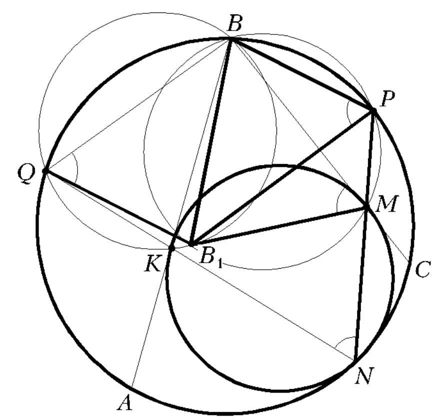


Рис. 8

11 класс

1. При $x = y = -z$, получаем $f(2x) \ge f(0)$.
С другой стороны, при $x = z = -y$ получаем, что $f(2x) \le f(0)$. Итак, $f(0) \ge f(2x) \ge f(0)$, т.е. $f(2x) \equiv \text{const}$. Функция $f(x) \equiv C$ при любом C удовлетворяет неравенству.

2. Предъявим такое разбиение. Выделим в i-е множество ($1 \le i \le 99$) все четные числа, дающие при делении на 99 остаток $i - 1$, а в сотое множество – все нечетные числа. Очевидно, что среди любых чисел a, b и c, удовлетворяющих уравнению $a + 99b = c$, четное количество нечетных. Если среди них два нечетных, то они из одного (сотого) множества, иначе a и c из одного множества, так как они четные и дают одинаковые остатки от деления на 99.

3. Будем говорить «в» вместо «внутри или на границе». Предположим противное. Рассмотрим пятиугольник минимальной площади S, для которого не выполняется утверждение задачи (так как площадь любого пятиугольника с вершинами в целых точках – число полуцелое, то такой найдется). Покажем, что все целые точки в треугольнике AC_1D_1, кроме A, лежат на C_1D_1. В самом деле, если в нем есть другая целая точка K, то площадь выпуклого пятиугольника $KBCDE$ меньше S, а его «внутренний» пятиугольник лежит в пятиугольнике $A_1B_1C_1D_1E_1$, что, очевидно, невозможно.
Выберем из ABC, BCD, CDE, DEA и EAB треугольник наименьшей площади. Пусть это ABC. Тогда точка A лежит не дальше от прямой BC, чем D; точка C лежит не дальше от прямой AB, чем E. Рассмотрим точку O такую, что $ABCO$ –

параллелограмм (очевидно, эта точка целая). Нетрудно показать, что точка O лежит в треугольнике AB_1C. Тогда из доказанного в предыдущем абзаце следует, что она лежит в пятиугольнике $A_1B_1C_1D_1E_1$, чего не может быть. Противоречие.

4. Пусть $b_t = 1_1 + \ldots + a_t$. Ясно, что $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$. Тогда

$$\frac{a_{l+1} + a_{k-m+2} + \ldots + a_k}{m} = \frac{b_k - b_l}{k - l}.$$

Рассмотрим на координатной плоскости точки $B_0(0, 0)$, $B_1(1, b_1)$, $B_2(2,b_2)$, …, $B_n(n, b_n)$. Тогда отношение $\frac{b_k - b_l}{k - l}$ будет равно тангенсу угла наклона прямой B_lB_k. Значит, условие $m_k > \alpha$ будет равносильно тому, что прямая, проходящая через B_k с углом наклона $\operatorname{arctg}\alpha$ (эту прямую назовем l_k), будет проходить выше хотя бы одной из точек B_l при $l < k$ (такую точку B_k будем называть *хорошей*). Выражение $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\alpha}$ будет равно b_n/α, и это будет расстояние между точкой $(0,n)$ и точкой пересечения l_n с осью абсцисс. Докажем индукцией по количеству точек n, что это расстояние больше числа хороших точек. База очевидна. Если точка B_n не хорошая, то выбросим ее, при этом число хороших точек не изменится, а отрезок уменьшится (так как $b_{n-1} \le b_n$). Если же она хорошая, то пусть B_k – ближайшая (по оси абсцисс) точка, лежащая под l_n. Тогда выбросим все точки от B_{k+1} до B_n (они все хорошие), количество хороших точек уменьшится на $n - k$, а отрезок – больше, чем на $n - k$.

5. Доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$\sin^{2n} x + \left(2^n - 2\right)\sin^n x \cos^n x + \cos^{2n} x \le \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^n.$$

При $\cos x \sin x = 0$ неравенство справедливо. Если $\cos x \sin x \ne 0$, оно с помощью замены $t = \operatorname{tg}^2 x$ сводится к неравенству

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)^n \ge t^n + \frac{1}{t^n} + 2^n - 2,$$

справедливому при всех $t > 0$. Это неравенство легко доказывается по индукции.

6. Решение аналогично решению задачи 6 для 10 класса.

7. Пусть для определенности O лежит на продолжении отрезка AB за точку B (рис.9). Обозначим через P, Q точки пересечения KL с окружностью ω, через M, N – точки касания сторон BC и AD с ω. Проведем касательные l_1, l_2 к ω в точках P, Q. Обозначим через α угол между касательной l_1 (или l_2) и хордой PQ.

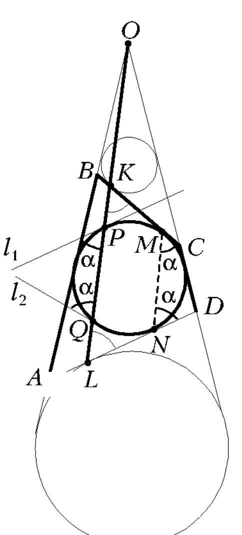


Рис. 9

При гомотетии с центром O, переводящей окружность ω_1 в ω, касательная BC в точке K перейдет в l_2; при гомотетии, переводящей окружность ω_2 в ω, прямая AD перейдет в l_1. Отсюда $BC \| l_2$, $AD \| l_1$ и, следовательно, $\angle LKC = \angle KLD = \alpha$. Кроме того, $\angle BMN = \angle ANM$, как углы между касательной и хордой. Отсюда получаем, что четырехугольник $KLNM$ – равнобокая трапеция и $\angle NMC = \angle MND = \alpha$. Итак, хорды PQ и MN параллельны и стягивают равные дуги величиной 2α. Отсюда следует, что средняя линия этой трапеции проходит через центр ω. Но середина KM совпадает с серединой BC (точки касания стороны треугольника со вписанной и вневписанной окружностями, как известно, симметричны относительно середины стороны), и также середина LN совпадает с серединой AD.

8. Предположим противное: пусть среди четырех клеток на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов есть две клетки одинакового цвета. Для удобства будем нумеровать цвета числами от 1 до 4. Назовем *парой* две клетки разного цвета, лежащие в одном столбце. Назовем *совпадением* две клетки одинакового цвета, лежащие в одном столбце или в одной строке. Разделим пары на 6 типов по цветам входящих в них клеток: {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}. Рассмотрим две произвольные строчки. Докажем, что в этих двух строчках всего не менее 25 совпадений. Из сделанного предположения следует, что любые две пары с клетками в этих строчках должны иметь общий цвет. Нетрудно заметить, что возможны два принципиально различных случая: все пары содержат цвет 1 или есть пары типов [1,2}, {1,3} и {2,3}. Рассмотрим эти два случая.

Если все пары в наших двух строчках содержат клетку цвета 1, то всего пар не более, чем клеток цвета 1 в обеих строчках, т.е. не более 50. Значит, в рассматриваемых двух строчках не менее 50 совпадений.

Пусть есть пары типов {1,2}, {1,3} и {2,3}.В этом случае все клетки цвета 4 в наших строчках совпадают, и таким образом есть не менее 25 совпадений.

Итак, мы доказали, что в любой паре строчек не менее 25 совпадений, аналогичный результат верен и для любой пары столбцов. Таким образом, всего в нашем квадрате есть не менее $2 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} \cdot 25 = 25 \cdot 99 \cdot 100$ пар клеток одинакового цвета, лежащих в одной строке или в одном столбце. Но так как в любой строке и в любом столбце по 25 клеток каждого цвета , количество пар клеток одного цвета, лежащих в одном столбце или в одной строке, равно $200 \cdot \frac{25 \cdot 24}{2} \cdot 4 = 24 \cdot 100^2$. Учитывая, что $25 \cdot 99 > 24 \cdot 100$, мы приходим к противоречию.

XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

1. $\omega^+ = A(l + \mu h)$, $\omega^- = A(l - \mu h)$, где $A = 2P/(RMgL\mu)$; в случае вращения против часовой стрелки при $l \le \mu h$ происходит заклинивание.

2. Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Кванта».

3. $\lambda_2 = \lambda_1 - (c_1 - c_2)(t_0 - t_1) = 3{,}12 \cdot 10^5$ Дж/кг.

4. $U_{13} = 3{,}75$ В, $U_{23} = 11{,}25$ В; резисторы могут быть соединены «треугольником» или «звездой» в первом случае сопротивления резисторов равны R, $2R$ и $3R$, а во втором – R, $3R/2$ и $3R$.

10 класс

1. 1) $v_m \approx 2{,}1$ м/с; 2) при $v_0 > 0{,}38$ м/с, $\Delta = 3{,}5$ м/с.

2. Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Кванта».

3. $t_{уст} \approx 65$ °C, $\alpha_{уст} \approx 0{,}35$. **4.** $Q = (2{,}0 \pm 0{,}2)p_0V_0$.

5. 1) $I_1 = I_2 = \left(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1/2\right)/R$; 2) $\Delta W = C\left(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\right)^2/4$;
3) $A_1 = C\mathcal{E}_1\left(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\right)/2$, $A_2 = C\mathcal{E}_2\left(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\right)$;
4) $Q = C\left(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\right)^2/4$.

11 класс

1. $\Omega = 1{,}72$ с$^{-1}$, $A_2 = 0{,}29$ м.

2. Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Кванта».

4. $U_0 = U_1\sqrt{3Tm_2/(\tau m_1)} = 1500$ В.

5. $R_1 = R\sqrt{r/(r + 2R)}$.

Малая теорема Ферма

(См. «Квант» №4)

44. Если НОД$(s, p-1) = d > 1$, то $\left(g^s\right)^{(p-1)/d} = \left(g^{s/d}\right)^{p-1} \equiv$ $\equiv 1 \pmod p$. Поскольку $(p-1)/d < p-1$, мы доказали, что число g^s не является первообразным корнем по модулю p. Осталось доказать, что если НОД$(s, p-1) = 1$, то g^s – первообразный корень. Это можно делать разными способами. Можно доказывать, что числа s, $2s$, $3s$, ..., $(p-1)s$ дают разные остатки при делении на $p-1$ (попробуйте!). А можно рассуждать «от противного»: если бы g^s не было первообразным корнем, то существовало бы натуральное число $r < p-1$, для которого $\left(g^s\right)^r \equiv 1 \pmod p$; но тогда sr должно делиться на $p-1$, что невозможно из-за взаимной простоты чисел s и $p-1$.

46. а) 5; б) 6. в) Так как $257 = 2^8 + 1$, то $2^{16} - 1$ делится на 257. Следовательно, порядок числа 2 по модулю 257 не превосходит $16 < 256$. Проверим, что 3 – первообразный корень: $3^8 \equiv 136$, $3^{16} \equiv 249 \equiv -2^3$, $3^{64} \equiv 2^{12} = 1024 \cdot 4 \equiv (-4)\cdot 4 = -16$, следовательно, $3^{128} - 1 = \left(3^{64}-1\right)\left(3^{64}+1\right) \not\equiv 0 \pmod{257}$. *Ответ*: 3.

47. а) $2^8 \equiv -7 \pmod{263}$, $2^{16} \equiv 49$, $2^{32} \equiv 34$, $2^{64} \equiv 104$, $2^{128} \equiv 33$; следовательно, $2^{131} = 2^3 \cdot 2^{128} \equiv 8 \cdot 33 \equiv 1$. Значит, 2 не является первообразным корнем, а -2 – является: $(-2)^{131} \equiv -1 \not\equiv 1$ и $(-2)^2 \not\equiv 1 \pmod{263}$. б) *Указание*. Если $a^3 \not\equiv a$, то $a \not\equiv 0$ и $(\pm a)^2 \not\equiv 1$. Имеем $a^{82} - 1 = \left(a^{41}-1\right)\left(a^{41}+1\right)$. Значит, для всякого $a (\not\equiv 0)$ либо $a^{41} \equiv 1$, либо $a^{41} \equiv -1$. И вообще, для всякого простого числа $p = 2q + 1$, где q – тоже простое, $q > 2$, ровно одно из чисел a и $-a$, где $a^3 \not\equiv a \pmod p$, является первообразным корнем по модулю p.

50. а) $x \equiv 1$, $2^3 \equiv 8$, $2^6 \equiv 12$ или $2^9 \equiv 5 \pmod{13}$.

51. *Указание*. $x^7 - 1 = (x-1)\left(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)$. *Ответ*: $x \equiv 2^4$, 2^8, 2^{12}, 2^{16}, 2^{20} или 2^{24} (mod 29). (Этот же ответ можно записать иначе: $x \equiv$ 16, 24, 7, 25, 23 или 20.)

52. Если k делится на $p-1$, то все слагаемые сравнимы с 1 по модулю p и потому сумма сравнима с $p - 1 \not\equiv 0 \pmod p$. Если же k не делится на $p-1$, то существует такое не кратное p число x, что $x^k \not\equiv 1 \pmod p$. Обозначим $S = 1^k + 2^k + \ldots$ $\ldots + (p-1)^k$. Сумма $x^k + (2x)^k + \ldots + ((p-1)x)^k = x^k S$ сравнима с S по модулю p, поскольку (после взятия остатков от деления на p) ряд чисел x, $2x$, $3x$, ..., $(p-1)x$ отличается от ряда 1, 2, ..., $p-1$ только перестановкой, а от перемены мест слагаемых сумма не меняется. Значит, $x^k S \equiv S \pmod p$, откуда $\left(x^k - 1\right)S \equiv 0$, т.е. $S \equiv 0 \pmod p$.

Если пользоваться существованием первообразного корня, то доказывать, что при k, не кратных $p-1$, сумма S кратна p, можно и при помощи формулы суммы геометрической прогрессии:

$$1^k + g^k + g^{2k} + \ldots + g^{(p-2)k} = \frac{1 - g^{(p-1)k}}{1 - g^k} \equiv 0 \pmod p.$$

Ответ: при k, не кратных $p-1$.

53. а) $101^2\left(1 + 2\cdot 8^2\right) = 1315929$; б) $17^3\left(1 + 6 \cdot 8^2\right) = 1891505$.

55. *Ответ*: $\varphi(n)/2$. *Указание*. Если НОД$(a, n) = 1$, то и НОД$(n-a, n) = 1$.

56. *Ответ*: 1. *Указание*. Для каждого из чисел a = 1, 2, ..., $p-1$ существует и единственно такое число b, что $ab \equiv 1 \pmod p$ и $1 \le b \le p-1$. Это число b является первообразным корнем тогда и только тогда, когда a – первообразный корень.

57. б) *Указание*. Пусть, для определенности, q – простой делитель числа m. Тогда $(ab)^{mn/q} = a^{mn/q} \cdot \left(b^n\right)^{m/q} \equiv$ $\equiv a^{mn/q} \not\equiv 1 \pmod p$, ибо mn/q не кратно числу m.

Далее, при $p = 5$ порядки чисел 2 и 3 равны 4, а порядок произведения $2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 5$ равен 1.

59. а) *Указание*. $n-1$ кратно числу $2p$. *Замечание*. Все числа $n = \left(4^p - 1\right)/3$, где $p > 3$,– составные. При $p = 5$ получаем $n =$ $= 341$.

61. б) При $a = 0$ или 1 годится $n = 4$; при $a = -2$ – число $n =$ $= 6$; при $a = 2$ – указанное в пункте а) число $n = 161038$. Если $|a| > 2$, то годится $n = |a|$, если a четно, и $n = 2|a|$, если нечетно.

в) Можно считать, что $a > 1$. Пусть $a^n \equiv a \pmod n$, причем n четно, $n > 2$. Рассмотрим такое (существующее по теореме Биркгофа – Вандивера) простое число p, что $a^{n-1} - 1$ кратно p, но ни при каком $m < n-1$ разность $a^m - 1$ не кратна p. В силу упражнения 32, б) число $p-1$ делится на $n-1$. Следовательно, $p \ge n$; а так как n четно, то $p > n$.

Поскольку $np - 1 = n - 1 + n(p-1)$ делится на $n-1$, то $a^{np-1} - 1$ делится на $a^{n-1} - 1$. По малой теореме Ферма, $a^{np-1} =$ $= a^{n(p-1)} \cdot a^{n-1} \equiv 1 \pmod p$.

Следовательно, разность $a^{np} - a$ делится и на n, и на p, а потому и на np. Строя таким образом все новые и новые числа, мы доказываем утверждение задачи.

62. б) Нетрудно проверить, что $n = 65$ – наименьшее составное натуральное число, для которого $3^{n-1} \equiv 2^{n-1} \pmod n$.

в) Если пользоваться бесконечностью множества чисел Кармайкла, то достаточно рассмотреть $n = 3^k - 2^k$, где k – число Кармайкла, и применить утверждение пункта а).

Можно обойтись и без этого, рассмотрев $n = 3^{2^t} - 2^{2^t}$. Тогда числа $3^{2^t} - 1$ и 2^{2^t} кратны 2^t, так что опять применимо утверждение пункта а).

63. *Указание*. Для любого числа a, взаимно простого с n, рассмотрите сумму $S = a^{n-1} + (2a)^{n-1} + \ldots + ((n-1)a)^{n-1}$. Докажите, что $S \equiv 1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + (n-1)^{n-1} \equiv -1$ и $S \equiv a^{n-1}\left(1^{n-1} +\right.$ $\left.+ 2^{n-1} + \ldots + (n-1)^{n-1}\right) \equiv -a^{n-1} \pmod n$.

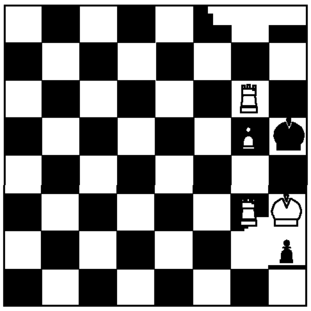
65. Если p – простой делитель составного числа n, то $C_n^p/n =$ $= (n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)/p!$ – не целое число, поскольку делимое не кратно p.

66. а) $a + \dfrac{a^p - a}{p} + \dfrac{a^{p^2} - a^p}{p^2}$;

б) $a + \dfrac{a^p - a}{p} + \dfrac{a^q - a}{q} + \dfrac{a^{pq} - a^p - a^q + a}{pq}$.

МашинА времени – I

Задача-миниатюра на диаграмме может вызвать удивление, ведь нет ничего проще – 1. h6×. Но не стоит спешить с ответом…



Мат в 1 ход

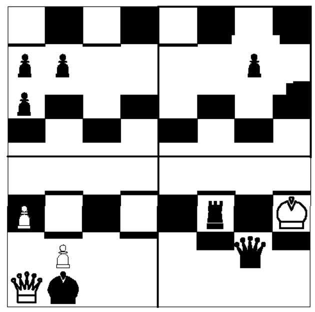
Стоит ли напоминать, что играть в шахматы надо по правилам. Например: ходы делаются по очереди, король не становится под шах, взятые фигуры снимаются с доски и т.д. Что касается классической задачи или этюда, то положение фигур в них должно быть легально – получаться из исходного положения. Как ни странно, все эти «обычные» истины лежат в основе необычного жанра композиции – ретроанализа (от латинского retro – назад, вспять).

Нередко во время игры партнеры стремятся к одной и той же позиции, но каждый оценивает ее в свою пользу. Соответственно не совпадают их прогнозы на будущее. Оценка же ретрозадачи всегда однозначна, но истину часто удается установить только после проведения тонких логических рассуждений. Задания в ретрозадачах просты, значительно сложнее определить их предысторию: чья очередь хода, какими были последние взятия, на каких полях погибли фигуры, возможна ли рокировка и т.д. Короче говоря, необходимо установить, как возникло данное положение, т.е. заглянуть в его прошлое.

Посмотрим еще раз на позицию на диаграмме. Как будто, все ясно — g6-h6×. Но вот в чем вопрос, как перед этим ходили черные? Их король не мог попасть на h5 ни с h4, ни с g4 – он стоял бы рядом с белым оппонентом, ни с h6, где находился бы под невозможным двойным шахом. Нет хода и у черной пешки, ведь поля g3 и h3 заняты.

Итак, в данной позиции у черных отсутствует предыдущий ход, и, значит, она возможна в партии, т.е. легальна, только при ходе черных. Именно они и ставят мат – **1...h1** ×. Итак, наша гипотеза оказалась ошибочной – матуют не белые, а черные.

Для изучения приемов логических экспертиз стоит рассмотреть несколько стандартных нелегальных позиций. Их легко сконструировать, но в обычной партии они никогда не могут возникнуть.



Для экономии места на диаграмме представлены сразу четыре невозможные конфигурации. Каждая ставит вопрос, на который нет ответа.

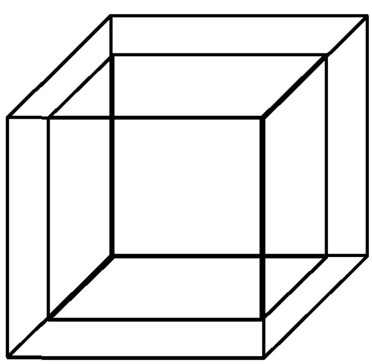
Откуда появилась пешка на а6? Ниоткуда. Перед нами нелегальный пешечный треугольник.

Как слон попал на h8? Мешает черная пешка g7, стоящая на исходном месте. Это нелегальное положение фигуры.

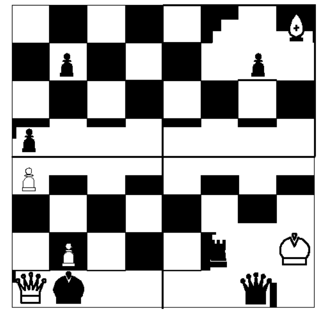
Каким образом белые дали шах ферзем с а1? Никаким. На это поле ферзь мог попасть только с а2, но тогда черный король стоял бы под шахом при ходе белых. Этот шах нелегальный.

Могли ли черные дать двойной шах ферзем и ладьей? Не могли. Такой шах принципиально невозможен.

Число таких «абракадабр» легко увеличить. Кстати, они напоминают «невозможные объекты», которые на рисунках выглядят вполне правдоподобно, а вглядишься – обнаружишь, что перед тобой предмет-призрак.



Вернемся на шахматную доску. На следующей диаграмме вновь изображены четыре позиции. Они лишь незначительно отличаются от предыдущих, но уже легальны.



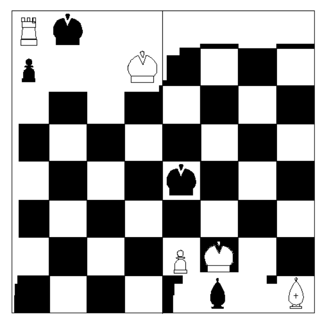
Черная пешка а5 попала сюда после взятий c7:b6 и b6:a5. Другой маршрут исключен.

Слон h8 может быть только превращенным: белая пешка «h» дошла до h7, затем было сыграно h7-h8С.

Ферзь мог дать шах черному королю ходом a3-a1+ или a3:a1+.

Двойной шах на сей раз легален. Только что черная пешка стала ферзем: g2-g1 ++.

Искусство составления ретрозадач в том и состоит, чтобы отличить позиции возможные от невозможных, анализируя их в далеком прошлом. Рассмотрим еще два положения на одной диаграмме.



Слева белая пешка, стоявшая на b7, последним ходом взяла черную фигуру на а8 и превратилась в ладью – b7:a8Л+. Но какую фигуру? Если предположить, что ферзя, ладью или слона, то тогда не удастся указать предыдущий ход черных. Значит, только коня, и последним был ход (ретроход) b7:( )a8 +. В скобках указана взятая фигура, а точнее, возрождающаяся при ретроанализе. Предыдущим ходом черные поставили на а8 коня с c7, но не с b6 из-за нелегального шаха белому королю.

Справа белые могли дать шах только ходом g2-f2+, а перед этим шаховали черные – f2-f1○ +. Этот факт можно кратко записать ретронотацией: 1. g2-f2+ f2-f1○ +. Счет ходов противоположен обычному и идет от настоящего времени к прошлому.

Е.Гик

Индекс 70465

Физики на монетах мира

Историю развития учения об электромагнетизме можно проследить на монетах и банкнотах некоторых европейских государств.

АЛЕССАНДРО ВОЛЬТА изображен на монете Республики Сан-Марино номиналом в 10 лир и на банкноте Итальянской Республики достоинством в 10000 лир. На этих денежных знаках представлены также «вольтова батарея» и «вольтов столб» – первые источники постоянного электрического тока.

Тот факт, что пропускание тока по проводнику сопровождается поворотом магнитной стрелки, показан на банкноте Королевства Дании достоинством в 100 крон. Здесь же изображен портрет ХАНСА КРИСТИАНА ЭРСТЕДА, автора этого открытия.

МАЙКЛ ФАРАДЕЙ, которому принадлежит открытие электромагнитной индукции, дважды представлен на банкноте Англии достоинством в 20 фунтов. Кроме известного портрета, на банкноте есть рисунок, на котором великий ученый изображен во время рождественской лекции в Королевском институте, где он демонстрирует магнитоэлектрическую машину.

(Подробнее об этих замечательных ученых – внутри журнала.)