

Кванты Интернета

Начиная с этого номера «КВАНТ» будет знакомить читателей с интересными материалами, которые можно найти в Сети.

Адрес:

www.mccme.ru

«Сеть, сеть, сеть», —
беспокойно зашепта-
ли вокруг кота.

М.Булгаков.
Мастер и
Маргарита



12-й Математический Праздник. 18 февраля 2001 года

Условия задач.

7 класс

Задача 1 (4 балла).

В книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377} - 1$.
Не опечатка ли это?

На сайте Московского центра непрерывного математического образования можно найти:

- задачи олимпиад самых разных видов и уровней (архив объемом 15 Мбайт),
- информацию о физико-математических школах, кружках, олимпиадах и конкурсах.

Адрес:

www.camosun.bc.ca/~jbritton/jbfunpatt.htm

О треугольнике Рёло (составленном из дуг окружностей таким образом, что каждая его вершина является центром прости-волежащей дуги) и других кривых постоянной ширины можно прочитать в недавно переизданной замечательной книге Г.Радемахера и О.Тёплица «Числа и фигуры».

Investigating Patterns



Number Patterns Fun with Curves & Topology



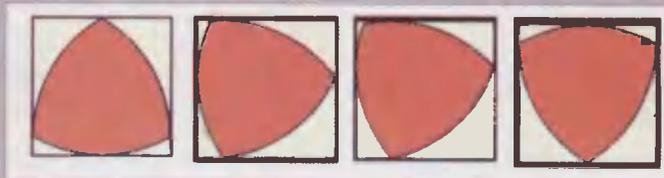
TOPIC LINKS

Джил Бритон из далекой Канады собрала коллекцию «развлекательна»-математических страниц Интернета, демонстрирующих возможности, которых нет у книг и кинофильмов.

Хотите искать простые числа – к вашим услугам действующее решето Эратосфена.

Муравьи на знаменитом листе Мёбиуса работы Эшера оживают и пускаются в бесконечный односторонний путь.

А придуманный механиком Рёло треугольник невозможно крутить внутри квадрата, постоянно касаясь всех его сторон!



Интернет

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленкин, С.А.Гордунин,
Н.П.Долбиллин, В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.Р.Зильберман,

С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаев, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,

Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора),

И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,

Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов,

Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,

А.И.Шви́ро

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,

В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,

Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,

П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,

В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,

А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,

Н.А.Пвтриквва, Н.Х.Розов,

А.П.Саани, И.Ш.Слободецкий,

М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский,

В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдр

Бюро Квантум

©2001, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Физика приготовления кофе. *А.Варламов, Дж.Балестрино*
8 Стихи и фигуры. *Е.Шикин, Г.Шикина*
12 Фауна и Флора. *А.Минеев*
16 Параллельная проекция. *А.Заславский*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 20 Деление урана: от Клапрота до Гана. *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 22 Задачи М1781–М1785, Ф1788–Ф1792
23 Решения задач М1756–М1765, Ф1773–Ф1777

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 31 Задачи
34 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
34 Молоко убежало! *Н.Елисеев*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Математические знаки

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 36 Ортоцентрический треугольник. *А.Егоров*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 39 Отклонение частиц и световых лучей полем тяготения.
С.Кожинин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 42 Разновески. *И.Гольдес, С.Тасмуратов, С.Тасмуратова*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 44 Домашний терморегулятор. *В.Ланге*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 45 Магнитные явления. *В.Можаев*

ОЛИМПИАДЫ

- 49 LXIV Московская математическая олимпиада
51 Избранные задачи Московской физической олимпиады
54 V Международная астрономическая олимпиада

- 56 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Стихи и фигуры»*
II *Кванты Интернета*
III *Шахматная страничка*
IV *Физики на монетах мира*

Международная благотворительная организация Институт «Открытое общество. Фонд содействия» и Московский комитет образования выписывают для школ Москвы тысячу экземпляров журнала «Квант».

Частный предприниматель Русинович В.В. выписывает пятьдесят экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.

① Погода: 150-190 мм в высоту
 10 мм в ширину
 ② 150-190 мм в высоту
 10 мм в ширину
 ③ 150-190 мм в высоту
 10 мм в ширину

нарисовать в гущу +
 какой бога а нечисти
 но перемешать в
 мешок

(мешок) помет
 саше пропарить

Ельница - 10%
 в мешочке по 2-3-4

150-190 мм в высоту



Физика приготовления кофе

А.ВАРЛАМОВ, ДЖ.БАЛЕСТРИНО

ПУТЕШЕСТВЕННИК, СТРАНСТВУЮЩИЙ из одной страны в другую, может заметить, что в наш век стандартизации и засилия транснациональных монополий, когда одни и те же прохладительные напитки подаются в Нью-Йорке и Катманду, кофейный рынок остается на удивление пестрым и разнообразным. Напиток из одних и тех же зерен кофе приготавливают и пьют по-разному в Турции и Египте, в Италии и Франции, в Финляндии и США. Заказав кофе в баре где-нибудь в Неаполе, вы получите изящную чашечку размером чуть больше наперстка, на дне которой медленно колыхается густая капля почти черного цвета, покрытая аппетитной пенкой. Однако сделав тот же заказ в Чикаго, вы получите пластмассовый сосуд объемом в пол-литра, заполненный горячей водой коричневатого цвета. Мы не беремся судить, какой из напитков вкуснее или полезнее, а просто обсудим различные методы приготовления кофе и связанные с ними физические процессы.

Кипяченый кофе

Это один из старинных способов приготовления кофейного напитка, сохранившийся до наших дней на севере Скандинавии. Прожаренный и крупно помолотый кофе засыпается в воду в количестве 10 грамм на 150–190 миллилитров воды и кипятится в кофейнике примерно 10 минут. Затем напиток разливается без фильтрации по чашкам и в течение нескольких минут отстаивается. Никакой интересной физики в этом процессе нет, а от комментария вкусовых качеств данного напитка авторы воздерживаются.

Кофеварка с бумажным фильтром

Такая кофеварка широко распространена в США, на севере Европы,

в Германии и во Франции. Ее принцип действия чрезвычайно прост, а процесс приготовления кофе занимает 6–8 минут. Кофе крупного помола засыпается в конический фильтр, изготовленный из специальной фильтровальной бумаги. Далее на помолотый кофе капает сверху горячая вода, «обмывает» его, просачивается сквозь фильтр и собирается в стеклянный сосуд. В результате получается легкий кофейный напиток: лишь немногие кофейные масла просачиваются сквозь плотный бумажный фильтр, да и крупный помол и отсутствие избыточного давления не способствуют полному извлечению всех кофейных ароматов. Американская доза составляет 5–6 г кофе на 150–190 мл воды, европейская — 10 г на чашку.



«Кофе по-турецки»

Описание процесса приготовления такого кофе уже заслуживает внимания. Кофейные зерна перемалываются в пыль (тонкий помол), и этот порошок, часто вместе с сахаром, засыпается в металлическую (обычно медную или латунную) конусообразную кофеварку, называемую джезвой. Затем она заливается холодной водой и погружается по самое гор-

лышко в раскаленный песок (по иному рецепту молотый кофе кладется на поверхность уже горячей воды). Разогрев жидкости происходит за счет теплопередачи от песка через дно и боковые стенки джезвы. За отсутствием песка можно воспользоваться слабым огнем газовой плиты, электрической плиткой и т.д. В результате прогрева придонных слоев возникают конвекционные потоки: горячая жидкость уносит с собой вверх на поверхность частички кофе, где они, благодаря силам поверхностного натяжения, задерживаются и образуют «кофейную корочку». Постепенно содержимое джезвы доводится до кипения: сквозь корочку прорываются пузыри, образуется пена. В этот момент джезва вынимается из песка (или снимается с плиты), так как кипение «убивает» кофе.¹ Процедура доведения напитка до кипения повторяется еще два раза, что приводит к образованию обильной пены. Полученную жидкость разливают по небольшим чашкам и ждут, пока не уйдет на дно осадок. В результате получается вкусный густой напиток, особенно если количество воды было относительно небольшим.

К недостатку такого способа можно отнести наличие взвеси кофейного порошка в полученном напитке, который постепенно оседает на дно чашки. Имеется даже способ гадания на «кофейной гуще».

Итальянская мокка

Одной из самых распространенных кофеварок для домашнего приготовления кофе в Италии является мокка. Она состоит из трех частей: нижнего усеченного конуса (нагре-

¹ По-видимому, это связано с тем, что под воздействием продолжительного кипения разрушаются фракции, придающие напитку его характерный вкус, который формируется, в зависимости от состава смеси, более чем из тысячи ароматов, большинство из которых летучи.

вателя), куда заливается вода, металлического фильтра, куда засыпается кофе среднего помола, и, наконец, верхнего усеченного конуса, где накапливается готовый напиток. Эта кофеварка рассчитана на приготовление напитка определенной консистенции: воду следует наливать до уровня имеющегося в нагревателе клапана, фильтр засыпают полным — примерно 6 г на порцию в 50 мл воды.

Процесс приготовления кофе в мокке весьма занимателен. В фильтр засыпается кофейный порошок и утрамбовывается, в нижнюю часть мокки заливается вода. Мокка плотно закручивается по резьбе, соединяющей верхний и нижний конусы. (Верхнее ситечко прикрывает цилиндр фильтра. Дополнительной изоляцией от внешней среды является резиновая прокладка, проложенная между верхним и нижним конусами.) Кофеварка ставится на слабый огонь. Процесс приготовления заключается в доведении до кипения воды в нагревателе, последующем ее прогоне через кофейный порошок, дальнейшем подъеме приготовленного таким образом напитка по трубке и его сливе в объем верхнего конуса. После этого кофе готов к разливу (через носик) по чашкам.

Все кажется простым и понятным. Но что является «движителем» описанного процесса? Конечно, огонь. Вначале вода нагревается до кипения, затем начинается процесс кипения в замкнутом объеме, где воде отведено гораздо больше места, чем пару над ее поверхностью. Температура переходит через 100 °С, пар над поверхностью воды все время остается насыщенным, его давление превышает 1 атм и продолжает расти. Внешнее же давление, вплоть до верхнего уровня фильтра, равно атмосферному. Насыщенный пар с тем-

пературой выше 100 °С начинает играть роль сжатой пружины, продавливающей чуть перегретый кипяток сквозь кофейный порошок, содержащийся в фильтре. При этом из кофе извлекаются все те ароматы, масла и другие компоненты, которые превращают воду в чудесный напиток. Понятно, что свойства этого напитка зависят как от самого кофейного порошка, находящегося в фильтре, так и от температуры воды и времени ее протекания сквозь фильтр. Секреты приготовления смеси кофейных зерен, их жарки и помола являются тайнами каждого изготовителя, основанными на таланте, труде и столетиях опыта. От чего же зависит время протекания жидкости через фильтр, мы можем понять без промышленного шпионажа, исходя лишь из законов физики.

В середине девятнадцатого века французские инженеры А.Дарси и Ж.Дюпюи провели первые экспериментальные наблюдения за движением воды в трубах, заполненных песком. Эти исследования положили начало созданию теории фильтрации, которая сегодня успешно применяется для описания движения жидкостей, газов и их смесей через твердые тела, содержащие связанные между собой поры или трещины. Помимо создания в городе Дижоне первой совершенной системы водоснабжения в Европе, Дарси сформулировал так называемый линейный закон фильтрации, который сегодня носит его имя. Он связывает объемный расход жидкости Q через песчаный фильтр, длина которого L , а площадь S , с разностью уровней воды ΔH над фильтром и у его основания:

$$Q = \frac{k_f S \Delta H}{L}.$$

Входящий в эту формулу коэффициент фильтрации k_f зависит как от природы пористой среды, так и от свойств протекающей жидкости. Эти свойства можно легко разделить:

$$k_f = \frac{k \rho g}{\eta},$$

заодно перейдя от разности уровней, характеризующей конкретный фильтр, к разности давлений по обе его стороны $\Delta p = \rho g \Delta H$:

$$\omega = \frac{k \Delta p}{\eta L}.$$

Здесь $\omega = Q/S$ есть так называемая скорость фильтрации, показывающая, какой объем жидкости протекает через единицу площади поверхности фильтра в единицу времени, коэффициент η характеризует вязкость жидкости, а коэффициент k является характеристикой лишь пористой среды и называется коэффициентом проницаемости (он имеет размерность площади). Следует отметить, что проницаемость, выраженная в единицах СИ, обычно очень мала. Так, для крупнозернистых песчаников это $10^{-12} - 10^{-13} \text{ м}^2$, для плотных песчаников 10^{-14} м^2 . В нефтепромысле для коэффициента проницаемости используется специальная единица — дарси (Д): $1 \text{ Д} = 1,02 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$.

Попробуем применить закон Дарси к изучению нашей мокки. Например, интересно узнать, до какой температуры перегревается кипяток в нижней части кофеварки. Оценим разность давлений между нижней и верхней сторонами фильтра по формуле Дарси:

$$\Delta p = \frac{\omega \eta L}{k} = \frac{m \eta L}{S \rho k t}.$$

Характерные размеры фильтра у мокки на три порции таковы: $L = 1 \text{ см}$ и $S = 50 \text{ см}^2$; масса кофе $m = 150 \text{ г}$ набегает за $t = 3 \text{ мин}$. Коэффициент проницаемости мы можем принять того же порядка, что и для крупнозернистого песчанника: $k \approx 10^{-13} \text{ м}^2$. Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$. С вязкостью нужно быть осторожным, так как она сильно зависит от температуры; тем не менее, в таблицах физических величин можно отыскать, что $\eta(100^\circ \text{С}) = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$. В результате получаем $\Delta p \sim 10^4 \text{ Па}$. Соответствующая температура кипения воды, согласно известному графику зависимости давления насыщенного пара от температуры кипения, составляет $T^* = 105^\circ \text{С}$.

Итак, мы разобрались с нормальным процессом приготовления кофе в итальянской мокке. Однако ходят мрачные слухи о том, что временами эти кофеварки выходят из повиновения и превращаются в бомбы, угрожая потолкам и стенам кухонь, не говоря уже о находящихся поблизости любителях кофе. Из-за чего же и как это может случиться?

Ясно, что прежде всего может за-



сориться или окислиться аварийный клапан, сделанный в нижней части мокки именно для того, чтобы дать выход пару в случае его незапланированного перегрева. Поэтому становятся опасными старые кофеварки. Второй причиной «катастрофы» может стать непроходимость самого фильтра, заполненного кофейным порошком. Тому могут быть различные причины. Самая экзотическая, в духе детектива о жизни неаполитанской мафии: изощренный киллер забил верхнюю трубочку спитым кофе, оставшимся в невымытой кофеварке со вчерашнего дня. Более реальная такая: плотно утрамбованный (по незнанию, чтобы получилось крепче) кофейный порошок слишком мелкого для мокки помола становится непроницаемым для воды. Под действием продолжающегося нагрева давление в нижнем сосуде вырастет недопустимо высоко, вода пробьет себе канал в фильтре и сорвет верхнюю часть кофеварки с резьбы. С чем же связана такая непроницаемость фильтра?

Оказывается, все дело в ограниченности применимости закона Дарси. Действительно, линейный закон фильтрации написан без учета капиллярных явлений. Пористую среду можно представить как сложную систему соединенных пустот и капилляров. Жидкость может протекать через капилляр радиусом r только в том случае, когда разность давлений на концах капилляра превышает $2\sigma/r$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Разность давлений на концах капилляра можно оценить как $\Delta p/N$, где Δp – разность давлений на фильтре, а N – среднее число капилляров, укладываемых на толщине фильтра. Возьмем для оценки $N \sim 10$, $\Delta p \sim 10^4$ Па, $\sigma = 0,07$ Н/м. Получим, что уже при среднем радиусе капилляров $r \sim 0,1$ мм часть из них могут оказаться запертыми для протекания жидкости при нормальной разности давлений на фильтре.

На первый взгляд, в этом нет ничего страшного – ведь часть капиллярных пор окажутся большего радиуса и будут способны пропускать жидкость. Однако более внимательный анализ показывает, что этого может оказаться недостаточно. Необходимо потребовать, чтобы доля незапертых пор была больше некоторого критического значения. В

противном случае система открытых пор не будет пронизывать фильтр от одной границы до другой; двигаясь по этим порам, мы сможем сделать только несколько шагов и неизбежно уткнемся в непроницаемый капилляр. Говорят, что в этом случае система открытых пор потеряла «связность» и перестала пронизывать все пространство, она раздробилась на множество небольших групп из соединенных друг с другом пор (такие группы называют кластерами).

Свойства систем с нарушенной или ограниченной связностью изучает специальный раздел статистической физики, называемый теорией перколяции (от percolation – протекание). Критическая концентрация (доля) элементов, при которой система теряет связность, носит название порога перколяции. Теория перколяции изучает не только условия прекращения протекания (тока, жидкости) сквозь систему, но и свойства так называемого слабого протекания, т.е. чуть выше порога перколяции (когда протекание идет по малому числу сквозных капиллярных проходов). Оказывается, зависимость интенсивности протекания от концентрации свободных пор (которая в нашем случае зависит от давления) носит сложный степенной характер (с дробным показателем степени), т.е. совсем не похожа на закон Дарси, который вступает в силу только тогда, когда протекание происходит по развитой системе пронизываемых пор.²

Однако вернемся к нашему кофейному фильтру. В этом случае доля пронизываемых пор зависит от разности давлений на фильтре и от среднего радиуса пор, который, в свою очередь, зависит от степени измельчения кофе. При излишнем измельчении порошка средний радиус пор уменьшается, а их число на толщине фильтра увеличивается; в результате и система может оказаться непроницаемой вплоть до пороговой разности давлений в несколько атмосфер. А дальше может произойти следующее. В сжатом избыточном давлением фильтре будет еще силь-

нее уменьшаться средний радиус пор, что приведет к росту пороговой разности давлений, а это – к дальнейшему прессованию кофе в фильтре... Короче говоря, образуется порочный замкнутый круг: температура в нижнем сосуде будет расти, вместе с ней будет расти и давление. Наконец, при некотором давлении вода все же пробьет себе канал и прорвется сквозь фильтр. В лучшем случае вы получите плохой кофе – ведь была использована лишь малая часть засыпанного порошка, да и температура слишком высока. В худшем – давление поднимется настолько, что резьба не выдержит, и кофеварка взорвется.

Оценим максимальный (теоретический) ущерб, который может нанести мокка, превратясь в тепловую бомбу. Будем исходить из худшего: забилось все, что могло забиться, и 150 г воды разогреваются в замкнутом объеме, ненамного превышающем объем самой воды. При температуре порядка критической (где плотность пара сравнивается с плотностью воды), которая для воды равна $T_k = 373$ °C = 646 К, вся вода превратится в пар. Дальнейшее нагревание возможно, но сама мокка станет светиться – такого еще никто не видел. Итак, для предельной оценки допустим, что закупоренная мокка разогрелась до температуры порядка $T = 600$ К. Записав уравнение Менделеева–Клапейрона, можно легко оценить давление в нижней части:

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}.$$

Полагая $m = 150$ г, $V = 200$ см³, $M = 18$ г/моль, $R = 8,31$ Дж/(моль · К), найдем, что $p \sim 10^8$ Па = 10^3 атм – это давление порядка имеющегося на дне Марианской впадины. Да и энергия, запасенная в кофеварке при такой температуре, впечатляет: $E = (5/2)pV \sim 50$ кДж, так что взрыв разогнал бы отдельные части мокки до скоростей порядка сотен метров в секунду.

Из приведенных оценок понятно, что резьба не выдержит гораздо раньше. Но также очевидна и могучая сила, запасенная в кофеварке благодаря избыточному нагреву: ее действительно с лихвой хватит, чтобы не только забрызгать всю кухню несостоявшимся напитком, но и на-

² Подробнее с теорией перколяции и ее замечательными достижениями вы можете познакомиться по статье А.Эфроса “Что такое теория протекания” (“Квант” №2 за 1982 год) или по книге А.Эфроса “Физика и геометрия беспорядка” (Библиотечка “Квант”, выпуск 19).

делать других бед. Так что присматривайте за клапаном, выбирайте кофе правильного помола, засыпайте его в фильтр без горки и, главное, не утрамбовывайте.

Кофе в мокке получается крепким и ароматным, без осадка, однако все же уступает по своим вкусовым качествам кофе «эспрессо», который подается в хорошем баре. Основной причиной этого, по-видимому, является сравнительно высокая температура кипятка, продавливаемого сквозь фильтр перегретым паром. Поэтому рецепт улучшения качества кофе при его приготовлении в мокке таков: ставьте кофеварку на очень слабый огонь. При этом процесс фильтрации будет идти медленнее, однако и пар в нижнем сосуде не будет слишком перегреваться.

Наверное, очень хороший кофе можно приготовить в мокке, находясь в высокогорном альпинистском приюте: там внешнее давление заметно ниже 1 атм, и, например, на высоте Эвереста вода кипит при 74 °С – так что перегрев воды в мокке как раз доведет температуру до оптимальных 90–95 °С.

Старинная неаполитанская кофеварка «Napoletana»

Эта кофеварка напоминает мокку, однако вместо фильтрации избыточным давлением пара использует фильтрацию под влиянием силы тяжести. Она также состоит из двух сосудов, поставленных один на другой, и фильтра, заполненного кофе, между ними. Вода в нижнем цилиндре доводится до кипения, затем кофеварка снимается с огня и переворачивается. Происходит фильтрация под действием давления столба воды порядка нескольких сантиметров, так что Δp не превышает 0,01 атм. Процесс приготовления кофе идет здесь заметно медленнее, чем в мокке. Можно поставить эксперимент по приготовлению одного и того же количества кофе в обеих кофеварках и, основываясь на следующей из закона Дарси обратной пропорциональности времени приготовления кофе приложенному давлению, проверить нашу предыдущую оценку давления в нагревателе мокки. Однако на практике для «Napoletana» кофе выбирают более крупного помола, чем для мокки, иначе напиток будет готов лишь через полчаса и окажется холодным.



Знатоки говорят, что кофе из «Napoletana» получается вкуснее, чем из мокки: здесь нет пагубного воздействия на кофе перегретого кипятка.

Впрочем, высокий темп современной жизни не оставляет времени для философской беседы на террасе с видом на Везувий и прекрасный неаполитанский залив в приятном ожидании, когда наконец-то наберется чашечка благотворного напитка. Эта роскошь осталась на старых картинах из неаполитанской жизни и в творениях Эдуардо де Филиппо.

«Эспрессо»

Не все неаполитанцы были терпеливы и в прошедшие времена. Говорят, что в прошлом веке один из тех жителей столицы королевства Двух Сицилий³, кто не мог спокойно ждать у «Napoletana», убедил своего приятеля, инженера из Милана, сконструировать принципиально новую кофеварку, приготавливающую индивидуальную порцию прекрасного ароматного густого напитка в течение полминуты.

Каждая чашка хорошего кофе является вместилищем секретов роста и сбора урожая кофейных зерен, приготовления смеси и ее прожарки, помола... За вершиной кофейного искусства – маленькой чашечкой итальянского «эспрессо» – стоит также и высокая технология. Аппарат для приготовления «эспрессо», который называют тоже эспрессо, гораздо больше и внушительнее своих оптимистичных коллег. Обычно такие машины стоят в барах и ресторанах, однако для знатоков и любителей

кофе существуют и домашние версии этого аппарата. Фирма «La Pavoni», производящая такие кофеварки с 1905 года, – одна из старейших, и ее продукция известна во всем мире.

В эспрессо вода с температурой 90–94 °С продавливается под давлением 9–16 атм сквозь фильтр с кофейным порошком специального помола, еще более мелкого, чем для мокки. Весь процесс занимает 15–25 секунд, в результате чего изготавливается 1–2 порции кофе по 20–35 мл каждая – лично для вас и, может быть, для вашего собеседника. Процесс протекания жидкости сквозь фильтр с кофейным порошком описывается тем же законом Дарси, что и в мокке, однако разность давлений, прилагаемая к фильтру, здесь в десятки раз больше, а температура, наоборот, ниже 100 °С. Эти параметры подобраны специально таким образом, чтобы высокой температурой не разрушить неустойчивые фракции кофейного напитка. Сравнительно короткое время взаимодействия воды с порошком совместно с высоким давлением оставляют в порошке все лишнее и извлекают из него все лучшее: эмульсии кофейных масел формируют ту густоту напитка, которая не может быть достигнута никаким другим способом; его аромат сохраняется наличием пенки, которая не позволяет исчезнуть летучим компонентам. «Эспрессо», как это ни странно, содержит меньше кофеина – из-за краткости контакта воды с порошком (20–30 с против 4–5 мин) в фильтре и малости ее объема весь кофеин не успевает извлекаться.

Первый образец эспрессо был выставлен в Париже в 1855 году. В современных стационарных аппаратах, составляющих оборудование баров и ресторанов, вода подается под необходимым давлением с помощью имеющегося в конструкции специального насоса. В классической машине для приготовления «эспрессо» горячая вода из цилиндра нагрева при поднятии ручки заполняет камеру над фильтром и затем продавливается сквозь фильтр вручную, опуская ручку; высокое давление создается за счет динамического сопротивления фильтра с кофе и эффекта рычага, многократно увеличивающего усилие руки.

Интересно наблюдать за поведением кофейной струи, стекающей с

³ Которой когда-то был Неаполь.

носика по мере того, как заполняется чашка. Сначала эта струя течет хорошо, затем слабеет и в некоторый момент переходит в капель. То же самое явление авторы наблюдали и в горах: солнце прогрело снег на крыше, и поток талой воды стекал по сосульке то струей, то капелью. Попробуем оценить тот критический объемный расход воды Q_k , при котором происходит смена режимов. Для простоты будем говорить о сосульке, хотя результаты окажутся применимыми и к кофеварке.

Пусть поток воды медленно стекает по сосульке. Понятно, что пока объемный расход воды очень мал, струи не получится. Действительно, на конце сосульки вода будет собираться в каплю, капля будет медленно расти, достигнет некоторого критического размера, сорвется... и процесс повторится. Поскольку мы договорились, что расход воды очень мал, то процесс можно считать почти статическим. В условиях равновесия отрыв капли происходит тогда, когда ее сила тяжести mg превышает силу поверхностного натяжения $F_\sigma = 2\pi\sigma r$, действующую по периметру вдоль перетяжки (ее радиус мы обозначили r):

$$mg = 2\pi\sigma r.$$

Время «заполнения» такой капли, очевидно, равно

$$t_k = \frac{m}{\rho Q_k}.$$

Понятно, что сам процесс отрыва капли также занимает некоторое время. Капля под действием сил поверхностного натяжения и тяжести пребывает почти в состоянии равновесия. Но когда ее масса достигает критической величины и поверхностное натяжение уже не может компенсировать силу тяжести, перемычка рвется. Характерное время разрыва перемычки τ можно получить из соображений теории размерностей: жидкость с вязкостью η должна быть перемещена на расстояние порядка r под действием сил поверхностного натяжения с коэффициентом σ . Запишем равенство:

$$\tau = r^\alpha \eta^\beta \sigma^x$$

и сравним размерности правой и левой сторон:

$$c = m^\alpha (kg/(m \cdot s))^\beta (kg/c^2)^x.$$

Отсюда получаем

$$1 = -\beta - 2x, \quad 0 = \alpha - \beta, \\ 0 = \beta + x,$$

что дает

$$\alpha = \beta = -x = 1,$$

или

$$\tau \sim \frac{\eta}{\sigma}.$$

Теперь понятно, что смена режимов капли и струи происходит при таком объемном расходе воды, когда очередная капля еще не успевает оторваться, как уже набегают новые, т.е. при

$$t_k \sim \tau, \text{ или } \frac{m}{\rho Q_k} \sim \frac{\eta}{\sigma}.$$

Выражая массу капли из условия ее равновесия через силу поверхностного натяжения, находим окончательную красивую формулу:

$$Q_k \sim \frac{2\pi\sigma^2}{\eta\rho g}.$$

Впрочем, оперируя не с объемным расходом воды, а с расходом массы, можно было бы сразу получить эту формулу из анализа размерностей и замечания, что Q_k не должно зависеть от размера кончика сосульки (сосулька тает, и кончик «подстраивается»). В случае металлического носика кофеварки его размер в принципе может влиять на величину критического потока, но не сильно, так что найденная для сосульки оценка, вполне применима и для носика кофеварки.

Растворимый кофе

Постоянная спешка современной жизни привела к появления растворимого кофе. Его приготавливают из настоящего кофе, который измельчают и выдерживают при высокой температуре и очень низком давлении. Вода сублимирует, а оставшийся порошок помещают в вакуумную упаковку, где он может храниться весьма долго, не теряя своих свойств. Перед употреблением он просто растворяется в горячей воде.

Вариации на тему «эспрессо»

Имея кофеварку, которая готовит «эспрессо», и хорошую кофейную смесь, можно приготовить целый спектр кофейных напитков. Так, в



итальянском баре вы можете получить: *caffè ristretto* – «укороченный кофе», приготовленный с нормальным количеством кофе, но меньшим количеством воды; *caffè lungo* – «удлиненный кофе», приготовленный с нормальным количеством кофе, но большим количеством воды; *caffè macchiato* – то же «эспрессо», но с добавлением небольшого количества молока; *caffè coretto* – «эспрессо» с добавлением ликера, виски или водки. Особого разговора заслуживает «саруссина»⁴ – «эспрессо», налитое на дно чашки среднего размера и залитое сверху молоком, взбитым горячим паром до состояния воздушной пены. Хороший бармен может залить это молоко на кофе так, что на поверхности выступит написанная коричневым на белом фоне первая буква вашего имени. А можно просто присыпать белоснежную пену порошком какао или крошками шоколада.

Наконец, говорят, что в Неаполе в некоторых местах до сих пор подают *caffè prepagato*. Выглядит это так. Заходит хорошо одетый синьор со спутницей или с приятелем и заказывает: «Три кофе! Два нам и одно *caffè prepagato*». Через некоторое время в тот же бар заходит бродяга или просто бедняк и спрашивает, нет ли *caffè prepagato*. И бармен наливают ему бесплатно чашечку ароматного «эспрессо». Неаполь остается Неаполем...

⁴ Свое название этот напиток получил за внешнее сходство с монахом-доминиканцем, носящим белую рясу с черным клобуком (клобук по-итальянски называется *sarussino*).

Стихи и фигуры

Е. ШИКИН, Г. ШИКИНА

Я,
еле
качая
веревки,
в стнели
не различая
синих тонов
и милой головки,
летаю в просторе,
крылатый как птица,
меж лиловых кустов!
но в заманчивом взоре,
знаю, блещет, аляя, зарница!
и я счастлив ею без слов!

В. Брюсов. Треугольник

Стремление увидеть за словом число, представить поэзию и искусство в виде своего рода математики (или описать их через нее) «берет начало в основном принципе математической эстетики пифагорейцев – сущность красоты кроется во внутренних числовых отношениях» [1].

Однако поэтическое слово разнообразно взаимодействует не только с числами, но и с геометрическими фигурами.

Начнем с определения.

«Стих – это текст, ощущаемый как текст повышенной важности, рассчитанный на запоминание и повторение. Стихотворный текст достигает этой цели тем, что делит речь на определенные, легко охватываемые сознанием части. Кроме общезыкового членения, здесь еще присутствует и другое деление – на соотносимые и соизмеримые отрезки, каждый из которых также называется стихом» [2].

Границы этих отрезков обязательно заданы для всех читателей внеязыковыми средствами – в письменной поэзии обычно графикой (разбивкой на строки). При восприятии стихотворного текста сознание учитывает длины отрезков и предчувствует их границы. Положенный на бумагу и взятый как целое стихотворный текст представляет собой плоскую фигуру, обычно с вертикально обрезанным левым краем (см., например, рис.1).

Использование графических возможностей позволяет связывать стихотворные тексты с различными фигурами и даже говорить о фигурных стихах.

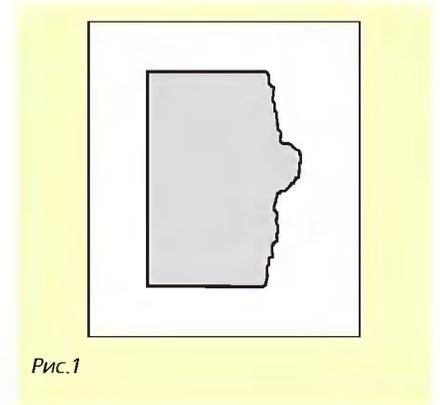
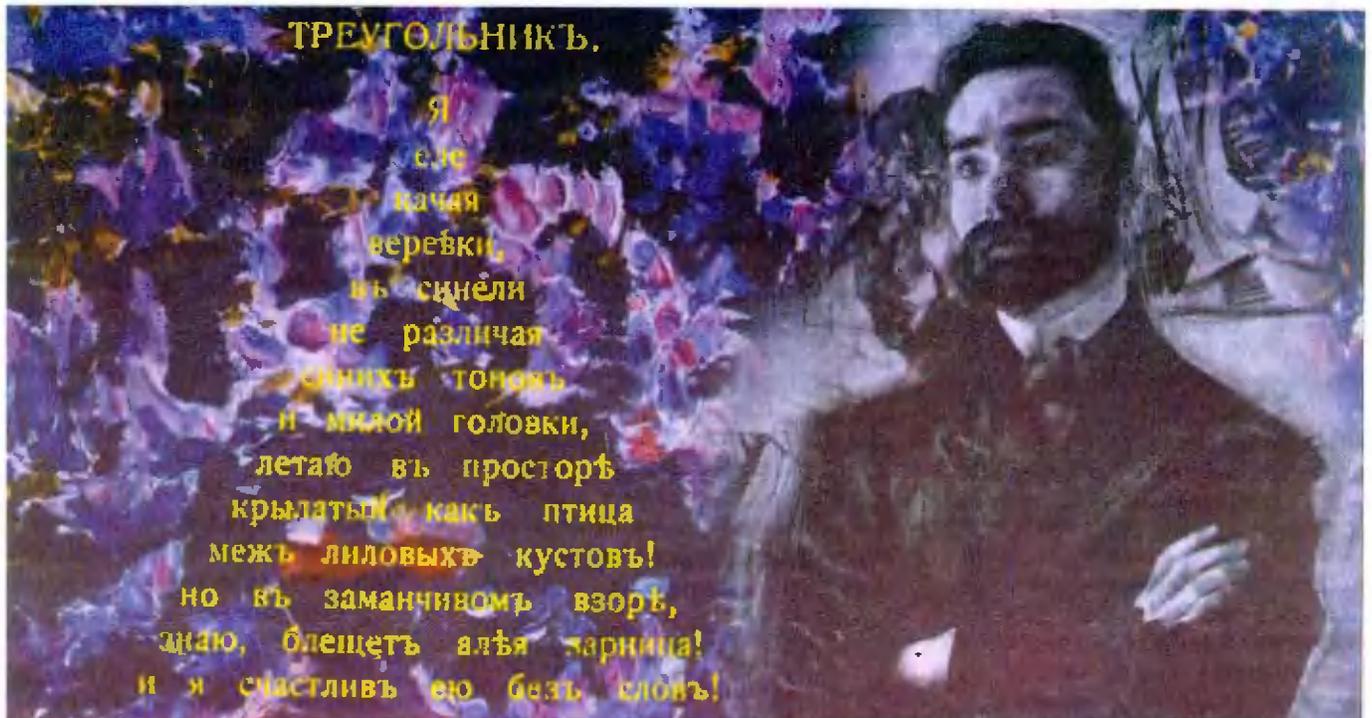


Рис.1

Изобретателями фигурных стихов считаются поэты александрийской школы Симмий, Доспад и Феокрит; в частности, Симмий (III в. до н.э.) написал стихотворения «Секира», «Крылья Эрота» и «Яйцо», в которых расположения стихотворных строк разной длины складывались в очертания названных предметов. Латинскому поэту Порфирию Оптациану (IV в.) принадлежит целая серия стихотворений, в которых выделенные буквы складывались во фразы (тоже стихотворные), распо-



лагающиеся по фону стихотворения причудливыми зигзагообразными узорами.

Традиция фигурных стихов продолжалась в поэзии средних веков, Возрождения (достаточно вспомнить стихотворение в виде бутылки в конце «Гаргантюа и Пантагрюэля» Ф.Рабле) и барокко; в России Симеон Полоцкий писал стихи в форме сердца, А.П.Сумароков – в виде креста, Г.Р.Державин – в форме треугольника.

Определенный интерес к фигурным стихам сохранился и в XX веке.

Понятно, что художественный эффект таких стихов возможен лишь при их зрительном восприятии. Приведем несколько простых примеров этой *зрительной поэзии*.

Отрезки

Акrostихи относятся, пожалуй, к самым известным фигурным стихам. (Напомним, что слово «акrostих» (краестишие) происходит от греческих *akros* – край и *stichos* – строка.) Нередко это стихи-посвящения [3]:

Ангел лег у края небосклона,
Наклонившись, удивлялся безднам:
Новый мир был синим и беззвездным,
Ад молчал, не слышалось ни стопа.

Алой крови робкое биенье,
Хрустких рук испуг и содроганье.
Миру снов досталось в обладанье
Ангела святое отраженье.

Тесно в мире, пусть живет, мечтая
О любви, о свете и о тени,
В ужасе предвечном открывая
Азбуку своих же откровений.

(Н.Гумилев)

В русской поэзии начала XX века стихотворных посвящений подобного рода было особенно много. Упомянем еще написанные в форме акrostиха сонеты-посвящения Михаила Кузмина Валерию Брюсову и Валерия Брюсова Игорю Северянину.

Вертикальный отрезок, воспроизводящий траекторию прописных букв, является как бы геометрическим стержнем акrostиха (рис.2). Формы подобных стихов довольно разнообразны. Это и *телестих*, когда соответствующий вертикальный отрезок образуется из последних букв каждой строчки (рис.3), и *мезостих*, когда вертикальный отрезок разбивает стихотворение (рис.4).

Акро-, теле- и мезостихи могут сочетаться и в достаточно сложные

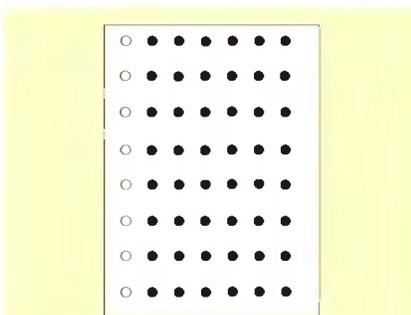


Рис.2

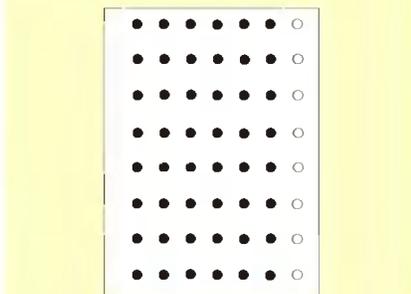


Рис.3

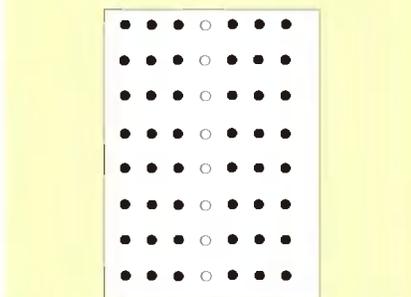


Рис.4

фигуры. Вот, например, одно из наиболее редких по форме латинских стихотворений этого жанра [4] (рис.5):

Inter cuncia micans Igniti sidera caelI
Expellit tenebras Etoto phoebus etorbE
Sic caecae revjeas IESVS caloginis umbraS
Viviticansque simul Vero praecordia motV
Solem Iusritiae Sese probat esse beatiS

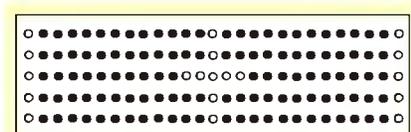


Рис.5

Филигранные (по общепризнанному мнению специалистов по английской поэзии) акrostихи, виртуозный плод поэтической техники, опубликованы в знаменитом честеровском сборнике «Песни голубя» [5].

Не следует думать, однако, что акrostихи есть привилегия только ев-

ропейских языков. Вот пример из японской поэзии [6, 7]:

«Однажды Нарихира пригласил одного или двух друзей отправиться с ним в путешествие в Восточный край Адзума. Достигнув местности под названием Яцухаси (Восемь мостов), что в провинции Микава, они спешили и присели в тени деревьев, плененные зрелищем цветущих у реки ирисов, и тогда Нарихира, изливая чувства, навеянные странствием, сложил песню, в которой каждая строка начиналась слогом из слова **какицубата** (ирис):

кара коромо
киццу нарэниси
цума си араба
харубару кинуру
таби о си дзо омоу»

Приведенная запись нуждается в пояснении. При чтении подряд слогов

ка, ки, цу, ха, та

согласная *x* оказывается после гласной *y* и озвончается. Поэтому слог *ха* читается здесь как *ба*.

Это стихотворение не только представляет собой акrostих (вид японской поэтической игры *орикю*). Оно несет в себе еще и изысканную внутреннюю симметрию, заслуживающую отдельного пояснения.

Как известно, японская письменность является иероглифической. При помощи иероглифов было записано и это стихотворение. Однако, будучи прочтенным вслух, оно допускает и другую иероглифическую запись (с тем же звучанием) и представляет тем самым уникальный пример письменной поэзии. При замене иероглифов меняется и смысл. Сравните два перевода:

Думается мне:
Там в столице далеко –
Милая жена.
Грусть на сердце у меня:
Как далеко мы зашли!

Их парчовая ткань
Роскошным нарядом подруги
Искушает мой взор.
Сколь тоскливо на сердце нынче
У того, кто избрал скитанья!..

Обратим внимание читателя на то, что второй из переводов выполнен в форме акrostиха.

Наблюдение. Положенные на бумагу акро-, мезо- и телестихи порождают простые геометрические фигуры, составленные из прямолинейных отрезков (рис.6).

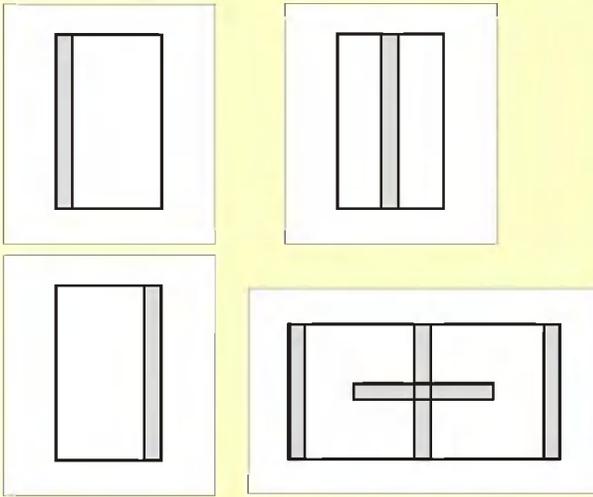


Рис.6

Существуют не очень сложные, но уже совсем не плоские геометрические фигуры, которые естественно сочетаются со стихотворной тканью. Речь идет уже не о фигурах, возникающих внутри стихотворного текста, а наоборот – о фигурах, несущих этот текст.

Начнем с примера, скорее забавного.

Призмы

Каждый грамотный человек, наделенный даже очень скромным поэтическим даром, может за сравнительно короткое время создать такое множество стихов, что вряд ли найдется кто-то, способный прочесть их все.

Замечание. Если вы решитесь попробовать себя на этом поприще, имейте в виду, что качеством стихов придется пренебречь. Зато их количество может быть любым [8].

Обратимся к рисунку 7, на котором схематически изображен лист бумаги с написанным на нем стихотворением из десяти строк (мы берем десять исключительно для того, чтобы было легче считать; на этом и следующих трех рисунках для простоты изображены только четыре строки). Надрежем лист на десять горизонтальных полосок так, чтобы на каждой полоске помещалась ровно одна строка (рис.8). Возьмем еще один такой же листок, но уже с другим стихотворением из десяти строк, и разрежем его аналогичным образом. Потом наступит очередь третьего, четвертого и т.д. Соединим полученные листы так, как это показано на рисунке 9. При удачном под-

боре начальных стихотворений (в предлагаемой конструкции это место самое нетривиальное; в крайнем случае можно обойтись ритмической прозой) можно легко создать много новых. Для этого достаточно полистать скроенную книжицу по нарезанным страничкам и выбрать, например, первую полоску на второй макространице, вторую – на пятой, третью – на первой, четвертую – на третьей и т.д. (рис.10).

Количество новых стихотворений полностью определяется количеством исходных. Например, в книжке с двумя разрезанными страницами получается

$$2^{10} = 1024$$

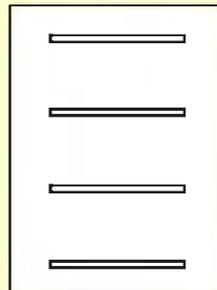


Рис.7

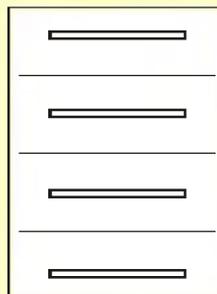


Рис.8

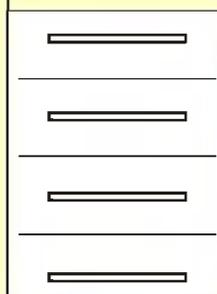


Рис.9

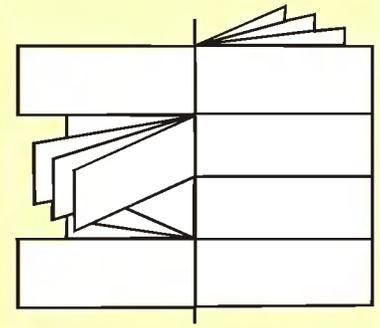


Рис.10

стихотворения, а в книжке из десяти макространиц общее число десятистрочных стихотворений равно

$$10^{10} = 10000000000.$$

В рассмотренном примере заметно проявило себя третье измерение. Правда, форма представления остается традиционно покадровой – это просто книжка с разрезанными страницами. А десять миллиардов стихотворений воспринимается скорее как курьез.

Однако подобного «размножения» стихов можно добиться и иным способом.

Рассмотрим фигуру, похожую на детскую пирамидку (рис.11), но сложенную не из деревянных дисков

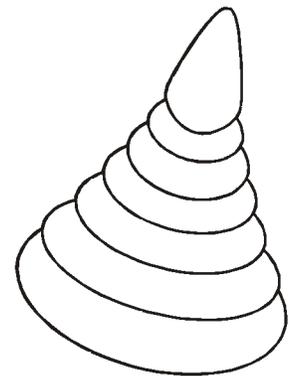


Рис.11

разных диаметров, нанизываемых на деревянный стержень, а из пластин, выполненных в форме правильных призм (рис.12). В результате мы получим правильную призму (в данном случае шестиугольную), каждая из малых призм которой (у нас восемь) может вращаться вокруг стержня независимо от других. Теперь остается только написать шесть стихотворений из восьми строк и оклеить каждую из боковых граней малых призм одной стихотворной строкой (рис.13). Размножение сти-

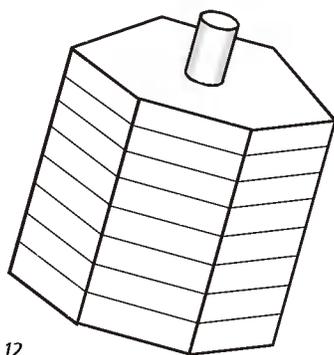


Рис. 12

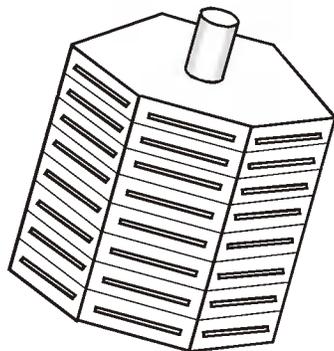


Рис. 13

хотворений происходит путем поворотов каждой из малых призм на углы, кратные 60° . Общее количество полученных в результате стихов равно

$$6^8 = 1679616.$$

Тор

Существуют и другие пространственные стихотворные формы. Одна из таких форм связана с *венком сонетов*.

Сонет – это стихотворение из 14 строк (образующих 2 четверостишия – катрена и 2 трехстишия – терцета, часто с жестко заданной рифмовкой). Цикл из четырнадцати сонетов, написанных так, что первая строка каждого последующего сонета повторяет последнюю строку предыдущего, причем при этом последняя строка четырнадцатого сонета совпадает с первой строкой начального, представляет собой *венок сонетов*. Взятые в том же порядке, в каком они следуют одна за другой, первые строки всех четырнадцати сонетов складываются в пятнадцатый – *магистральный сонет*.

Именно так построены «Золотой обруч» К. Бальмонта, «Роковой ряд» В. Брюсова и др.

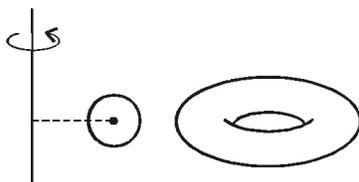


Рис. 14

Рассмотрим поверхность, получаемую в результате вращения окружности вокруг прямой, лежащей с этой окружностью в одной плоскости и не имеющей с ней общих точек (рис. 14). Эта геометрическая фигура называется *тором*, так же, как и тело, ограниченное этой фигурой (рис. 15). Иногда это тело называют *полноторием*.

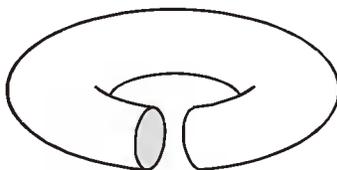


Рис. 15

Если обвить тор (или полноторие) длинной лентой (свитком) с последовательно выписанными на ней всеми

$$14 \times 14 - 14 = 196 - 14 = 182$$

строчками (напомним, что крайние строки каждого из четырнадцати сонетов повторяются дважды), то по

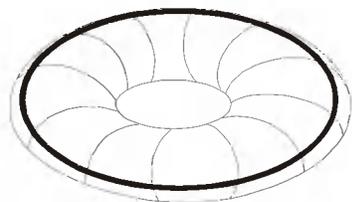


Рис. 16

внешнему экватору мы получим строки заключительного (пятнадцатого) сонета (рис. 16). Этот магистральный сонет является тематическим и композиционным ключом всего цикла. Обычно он и создается раньше других сонетов.

Вполне возможно, что именно такой и была изначально явленная конструкция этого целостного поэтического произведения, которую теперь мы встречаем только в многолистном книжном варианте, что, конечно, заметно снижает его эмоциональный, да и поэтический заряд.

Описанная выше процедура, а также и то, что венки из полевых цветов (например, из одуванчиков) имеют с полноторием несомненное сходство, позволяют высказать предположение о том, как именно могло возникнуть название – *венки сонетов*.

Цилиндр

В заключение приведем еще один, хотя и шуточный, но явно не плоский стихотворный текст:

*у попа была собака –
он ее любил.
она съела кусок мяса –
он ее убил.
и в землю закопал,
и надпись написал,
что у попа была собака ...*

(рис. 17).

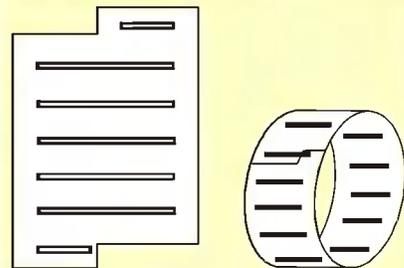
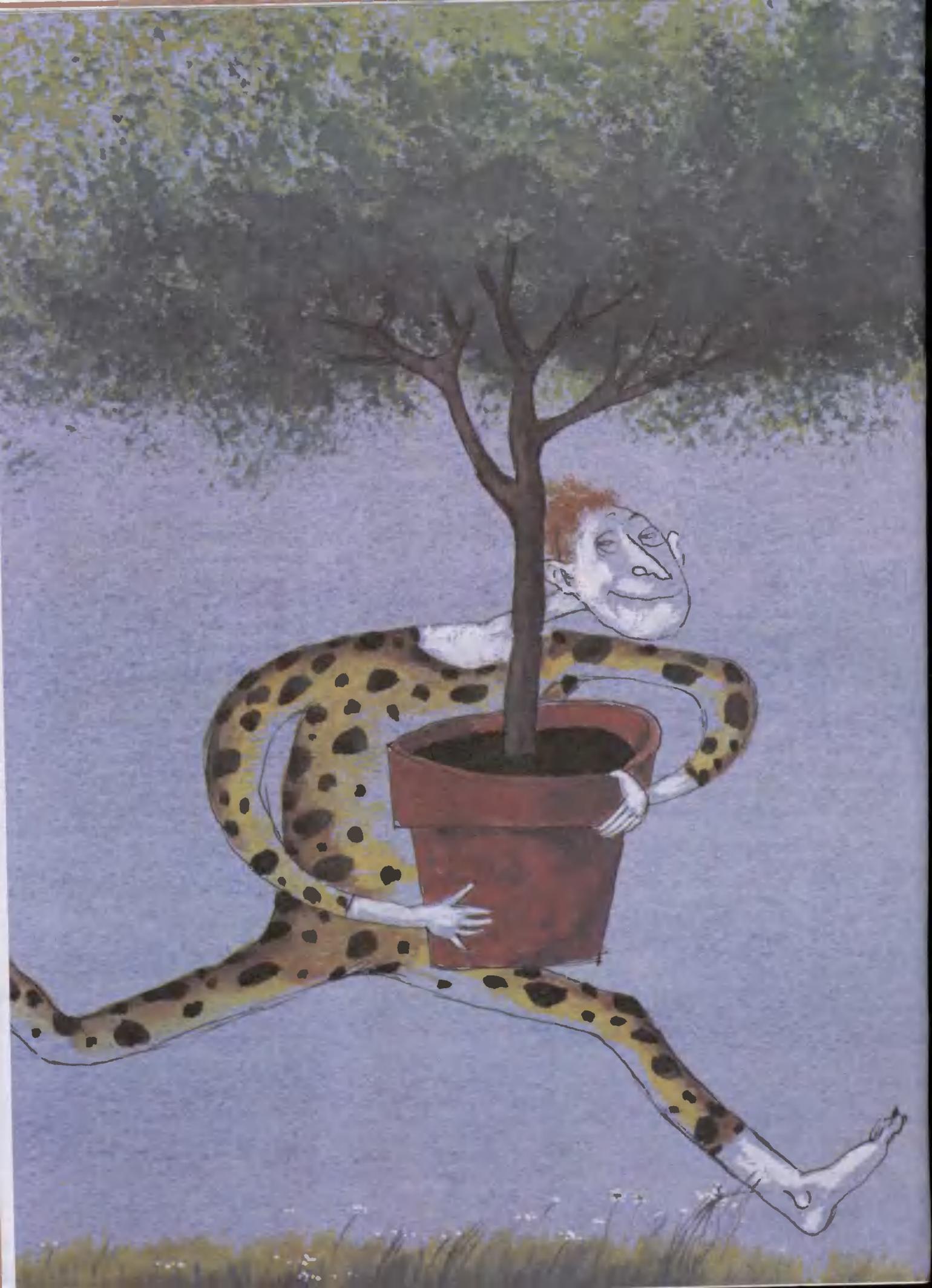


Рис. 17

Литература

1. *Топоров В.Н.* Числа. – Мифы народов мира. Энциклопедия. Т. 2. – М.: Советская энциклопедия, 1982.
2. *Гаспаров М.Л.* Очерк истории европейского стиха. – М.: Наука, 1989.
3. *Гумилев Н.С.* Собрание сочинений. Т. 2. ТЕРРА – «TERRA», 1991.
4. *Гогошвили А.* Акrostих в «Слове о полку Игореве» и других памятниках русской письменности XI–XII веков. – М., 1991.
5. *Гиллиов И.М.* Игра об Уильяме Шекспире, или Тайна Великого Феникса. – М.: Артист. Режиссер. Театр, 1997.
6. *Исэ-моногатари.* – М.: Наука, 1979.
7. *Кокинвакасю.* Собрание старых и новых песен Японии. Т. 2. – М.: Радуга, 1995.
8. *Гарднер М.* От мозаик Пенроуза к надежным шифрам. – М.: Мир, 1993.



А. МИНЕЕВ

ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ СОВРЕМЕННЫМ жаргоном с целью выяснить, что «круче» на Земле – царство Фауны или царство Флоры, животный или растительный мир – по разным показателям. Для начала – по массе.

В нашем путешествии мы будем заглядывать в две довольно необычные книги. Одна из них – это недавно вышедший превосходный справочник типа «все обо всем» под бесхитростным названием «Новейший справочник необходимых знаний, от альфы до омеги» (М.: РИПОЛ КЛАССИК, 2000). Другая, не менее удивительная книга, – это своеобразная энциклопедия по физике и биологии биосферы, написанная В.Г.Горшковым и называемая «Физические и биологические основы устойчивости жизни» (М.: ВИНТИ, 1995).

Масса животных и растений

Если говорить о первенстве в общем зачете – в суммарной массе всех животных и растений на Земле, то тут пальма первенства принадлежит растениям. Так, масса всех растений составляет около 2400 млрд тонн, а масса животных и микроорганизмов – около 20 млрд тонн. Отметим, что масса всех людей на этом фоне вообще «не смотрится» – всего порядка 100 млн тонн.

Если перейти к индивидуальному зачету – к сопоставлению масс больших деревьев и больших животных, то тут, казалось бы, также впереди царство Флоры. При оценке максимальной массы деревьев воспользуемся данными статьи «О высо-

ких деревьях» («Квант» №3, 4 за 1991 г.). А именно: максимальная высота деревьев не превышает 150 м, при этом отношение высоты к диаметру дерева $h/d \sim 50$. Считая, что дерево имеет форму конуса и его плотность $\rho \approx 500 \text{ кг/м}^3$, получим $M_{\text{max}} \sim \rho \pi d^2 h / 12 \sim 200 \text{ т}$. К подобной или даже большей оценке приводят данные для самого большого из известных деревьев – мамонтового дерева в Калифорнии, имеющего высоту 83 м и окружность 24 м (т.е. диаметр около 7,6 м): масса такого дерева оказывается более 500 т.

Сопоставим полученную величину с максимальной массой живущих или живших когда-то на Земле животных. Здесь лидируют киты: голубой кит – длина до 33 м, масса до 190 т и кашалот – длина 20 м, масса до 50 т. Достаточно велики индийский слон – высота 3,5 м, масса 6 т, бегемот – длина 4 м, высота 2,5 м, масса 3 т и акулы – китовая длиной 20 м и массой 14 т и гигантская длиной 15 м и массой 9 т. Про крупнейших из ископаемых животных – динозавров – по понятным причинам имеются только данные об их длине и высоте. Так, крупнейшие травоядные – бронтозавры – имели длину 22 м и высоту 5 м; крупнейшие плотоядные наземные животные – тираннозавры – были длиной до 14 м, а крупнейшие плававшие динозавры – плезиозавры – до 16 м (правда, с учетом их огромной шеи). С известной долей условности при оценке указанные данные по динозаврам приводят к массе этих животных до 50–70 т.

Таким образом, казалось бы, масса большого животного уступает мас-

се гигантского дерева. Но картина существенно изменится, если мы сравним массы «живого» вещества представителей царств Флоры и Фауны. Дело в том, что у крупных деревьев большую часть ствола занимает древесина, клетки которой уже потеряли способность участвовать в обмене веществ. Собственно живой частью дерева является тонкий слой вблизи коры дерева, по которому по дереву разносятся вода и минеральные соли (от корней) и продукты фотосинтеза (от листьев). Этот слой имеет толщину порядка десятка годовых колец – не более нескольких сантиметров. В результате живая масса дерева может достигать «всего» несколько тонн (до 10 т). Так что по живой массе представители царства Фауны несколько покруче, чем представители царства Флоры.

Почему растения неподвижны, а животные обязаны передвигаться, или Законы Горшкова

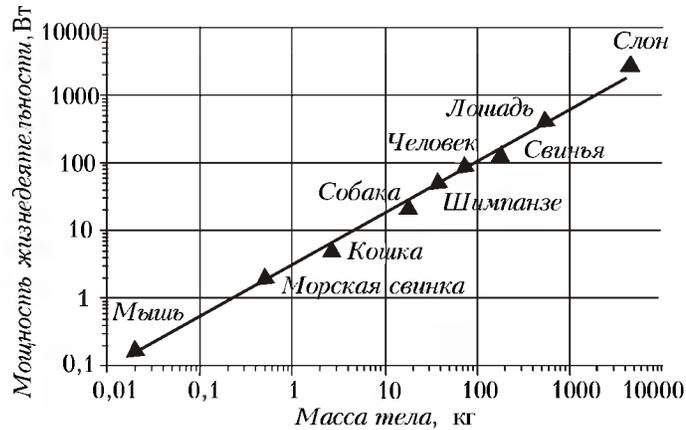
Процесс увеличения массы растений связан с образованием органических веществ в результате фотосинтеза. Солнечный свет является основной движущей силой их роста. От того, передвигались бы растения по поверхности Земли или нет, фактически усваиваемая ими мощность солнечного излучения не зависит и составляет около 1 Вт/м^2 . Поэтому «стратегия» растений заключается не в передвижении, а в покрытии как можно большей поверхности. Это приводит к предпочтительности привязки растений к определенному участку поверхности Земли и выражается в законе *неподвижности растений*.

Для жизнедеятельности животных требуется гораздо большая мощность потребления энергии. Для оценки ее воспользуемся так называемой кривой «От мыши до слона» из книги К.Шмидта-Нильсена «Размеры животных: почему они так важны?» (М.: Мир, 1987). Из нее видно, например, что для человека массой $m = 80 \text{ кг}$ величина мощности жизне-



деятельности составляет около 80 Вт (это мощность, которую человек затрачивает в состоянии, близком к покою, а при предельных нагрузках затрачиваемая мощность существенно больше – до 10 кВт, например, при спринтерском беге).

Как можно «использовать» величину мощности жизнедеятельности (или, иначе, мощности метаболизма) человека 80 Вт? Если умножить ее на продолжительность суток (86400 с), то можно получить мини-



Кривая «От мыши до слона»

мальное потребляемое человеком суточное количество энергии – около 7 МДж, или 1800 ккал. Как вы помните, близкую к этому значению энергию человек должен ежедневно получать с пищей. Далее, если поделить 80 Вт на эффективную площадь, занимаемую человеком, $S \approx L^2$ (где $L \approx (m/\rho)^{1/3}$ – характерный размер, $\rho \approx 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность человека), то можно получить удельную мощность, потребляемую человеком: около 500 Вт/м^2 . Более точные оценки приводят к величине 1000 Вт/м^2 или даже несколько большей.

Сравнение мощностей, развиваемых растениями (1 Вт/м^2) и животными (1000 Вт/м^2), позволяет сделать вывод, что питание животных за счет продуктов жизнедеятельности растений делает необходимым их передвижение в поисках пищи (площадь, которую животное должно обойти в течение дня, на несколько порядков превышает эффективную площадь, занимаемую им самим). Этот вывод называется *законом необходимости передвижения животных*. Следует отметить, что расти-

тельные животные по численности преобладают. Очевидно, что плотоядные животные, питающиеся другими животными, должны двигаться быстрее, чем растительные, по крайней мере в моменты охоты.

Ограничения на размеры и массу животных

При увеличении размеров животного – для простоты представим его в виде шара радиусом R , стоящего на ногах длиной R и радиусом каждой

ноги r , – его масса растёт пропорционально R^3 , а площадь ног – пропорционально r^2 . Казалось бы, с ростом R давление на ноги $p \sim R^3/r^2$ может превысить допустимое, и придется ноги утолщать. А когда толщина станет сравнимой с размером животного ($r \sim R$), размеры живых существ достигнут предела.

Однако измеренное допустимое давление в опорных частях животных довольно велико, так что если бы предел на максимальные размеры животных определялся прочностью, масса животного могла быть более тысячи тонн.

В поисках других ограничений снова обратимся к тому, что живые существа в процессе жизнедеятельности обязаны вырабатывать определенное количество энергии. Приведем выражение для упомянутой выше кривой «От мыши до слона» – зависимости мощности жизнедеятель-

ности P (Вт) от массы животного m (кг):

$$P \approx 3m^{0,75}$$

Такую тепловую мощность нужно отводить через поверхность тела площадью S . Поскольку S пропорциональна квадрату линейных размеров, т.е. $m^{2/3}$, может оказаться, что при большой массе тела отвести тепло будет затруднительно. Проведем соответствующие оценки. Животное массой 100–200 т имеет объем 100–200 м^3 и поверхность тела 100–160 м^2 . Примем, согласно В.Г.Горшкову, что максимально возможная удельная мощность отвода тепла при испарении с поверхности составляет около 200 Вт/м^2 . Тогда через указанную поверхность тела можно отвести 20–30 кВт тепла. Скорость же производства тепла P составляет 17–28 кВт. Видно, что животные с большой массой по возможности отвода тепла находятся уже вблизи предела. Тем более что при быстром передвижении они затрачивают еще большую мощность.

Отметим, что как современные, так и, скорее всего, доисторические гиганты животного мира – теплокровные животные. Это означает, что температура их тела выше температуры окружающей среды, и они могут сохранять примерно постоянную температуру в течение длительного времени.

Некоторым аргументом в пользу этого может служить оценка характерного времени τ остывания тела животного. Считая, как и раньше, что оно представляет собой шар радиусом R , получим

$$\tau \sim \frac{CR^2}{\chi}$$

где $C = \pi^{-2} \approx 0,1$ – коэффициент, связанный со сферической геометрией задачи, $\chi \approx 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ – температуропроводность воды (напомним, что тела животных из воды в основном и состоят). Отсюда следует, что, например, для человека массой $m = 80 \text{ кг}$ и эффективным радиусом $R_{\text{эф}} = (3m/(4\pi\rho))^{1/3} \approx 0,27 \text{ м}$ характерное время остывания составляет $\tau \sim 5 \cdot 10^4 \text{ с}$ (около 0,6 суток). При радиусе $R_{\text{эф}} \sim 0,5 \text{ м}$ и, соответственно, массе около 1 т (морж, бизон, носорог) $\tau \sim 1,8 \cdot 10^5 \text{ с}$ (около 2 суток). Наконец, для крупнейшего из животных массой 200 т (такого,



как голубой кит) и $R_{зф} \approx 3,6$ м характерное время $\tau \sim 10^{26}$ с – уже около трети года!

Большие животные медленно меняют температуру тела и должны быть теплокровными. Для упрощения процесса теплоотвода с поверхности такие животные имеют гладкую кожу. В то же время у самых маленьких теплокровных животных, типа мыши массой ~ 3 г, эффективный радиус $R_{зф} \sim 0,9$ см и характерное время охлаждения $\tau \sim 1$ мин. В результате такие животные, имея достаточно большую температуру тела (у мыши она $\approx 38^\circ\text{C}$), вынуждены непрерывно искать пищу, съедая ее за день по порядку величины столько же, сколько весят сами. Кроме того, они обязаны иметь шерстяной покров, позволяющий снизить теплоотвод от поверхности тела (коэффициент теплопроводности шерсти приближается к таковому для воздуха и примерно на порядок меньше теплопроводности воды).

Таким образом, у самых маленьких теплокровных животных задача – не замерзнуть, а у самых больших – не перегреться.

Размеры клеток и скорость роста растений и животных

Размеры типичных клеток животных и растений примерно одинаковы, их характерный диаметр $d_{кл} \sim 10\text{--}20$ микрон. Однако сходство размеров типичных клеток не исключает наличия специальных клеток, имеющих существенно большую протяженность. Так, довольно велики нервные клетки у животных. А у некоторых растений, в частности у водоросли Нителлы, длина клеток достигает нескольких сантиметров, а диаметр порядка миллиметра. Следует отметить, что нервные клетки

животных, через которые передаются определенные сигналы по их организму, имеют специфическое строение (на техническом языке их можно уподобить волноводной линии). Поэтому их лишь с некоторой натяжкой можно назвать клетками. Нечто подобное происходит и в случае больших клеток Нителлы. Поскольку «управлять» жизнью этих клеток с помощью одного ядра затруднительно, в них имеется множество ядер, каждое из которых обслуживает определенную область большой клетки, – фактически это как бы множество сросшихся клеток.

Рост и развитие растений и животных происходит за счет деления клеток. При этом наибольшая скорость роста, естественно, у молодых организмов. В упомянутом справочнике приводится совершенно поразительный факт: скорость роста бамбука доходит до 75 сантиметров в сутки, т.е. до 3 сантиметров в час! Могут ли животные составить конкуренцию растениям по скорости роста? Тут, по видимому, следует дать отрицательный ответ. Дело в том, что растения могут расти некоторое время только в длину (можно назвать это одномерным ростом). У животных рост всегда двумерный (или трехмерный) – одновременно в длину и в ширину. Поэтому по скорости изменения линейных размеров растения вне конкуренции.

Однако и для растений, и для животных рост – это «просто» деление и дифференциация клеток. Можно ли найти физические причины, ограничивающие скорость роста клеток? Сделаем некоторые оценки. Клетки растений и животных состоят в основном из воды. Коэффициент диффузии для молекул воды при нормальных условиях составляет $D \sim 10^{-9}$ м²/с. При размере клеток $x \sim 10\text{--}20$ мкм характерная скорость диффузионного процесса составляет

$$v_D \sim \frac{D}{x} \sim (0,5 - 1) \cdot 10^{-4} \text{ м/с} = 50 - 100 \text{ мкм/с}.$$

Отметим, что для клеточных размеров скорости как направленного перемещения, так и случайного блуждания оказываются одного порядка.

Сравним указанную величину v_D с реальной скоростью перемещения веществ внутри клетки. Воспользуемся данными статьи А.В.Приезжева и Ю.М.Романовского «Физичес-

кие основы подвижности клеток» из книги «Школьникам о современной физике» (М.: Просвещение, 1990):

скорость движения ядер и митохондрий в клетке – 50 мкм/с;

скорость движения веществ по системе прокачки клетки – 150 мкм/с.

Очевидно, что скорость образования и роста новых клеток должна быть существенно меньше. Если принять «запас» равным 10, то для скорости роста клеток получаем такую оценку:

$$v_{кл} \sim (0,5 - 1) \cdot 10^{-5} \text{ м/с} = 5 - 10 \text{ мкм/с}.$$

Это составляет 2–4 сантиметра в час или 50–100 сантиметров в сутки. Видно, что наша оценка хорошо совпала с максимальной скоростью роста у растений (75 сантиметров в сутки).

Несколько другие соображения, основанные на скорости производства вещества зеленым растением под действием Солнца (см. статью А.Веденова и О.Иванова «С какой скоростью растет зеленый лист?» в «Кванте» №4 за 1990 г.), также дают оценку, близкую к указанной выше величине скорости роста. Так, при оптимальных условиях (хорошее освещение и питание корней) молодое растение может увеличивать свой рост за день примерно на треть. Это означает, что ежедневная скорость прироста у бамбука может составить 30 см при росте 1 м, 60 см при росте 2 м и 90 см для трехметрового растения. Видно, что это примерно тот же диапазон скорости роста, что и приведенный ранее экспериментальный факт (75 сантиметров за сутки). Нужно отметить, что уже начиная с 2–3 метрового размера ствола бамбука недостаток освещенности и питания корней (в основном из-за конкуренции с окружающими растениями) приводит к замедлению скорости роста. При этом близкий к экспоненциальному закон увеличения массы у молодого побега постепенно сменяется на примерно постоянный прирост массы, характерный для взрослого растения.

На этом прервем краткую экскурсию по миру Фауны и Флоры (по их наиболее «эффектным» представителям), затеянную с целью приоткрыть тайну их «крутизны». Прекрасно, что они есть, царство Фауны и царство Флоры, – это основа и нашей с вами жизни. К тому же, это пища, в том числе... и для ума.



Параллельная проекция

А. ЗАСЛАВСКИЙ

ПРИ РЕШЕНИИ СТЕРЕОметрических задач часто приходится изображать пространственные объекты на плоскости. Как правило, для этого используется параллельная проекция, при которой каждая точка X исходного объекта изображается точкой X' пересечения плоскости чертежа и прямой, проходящей через X и параллельной некоторой фиксированной прямой в пространстве. Важ-

ным частным случаем является ортогональная проекция, при которой направление проектирования перпендикулярно плоскости чертежа. Наша цель — выяснить, какие свойства исходных объектов сохраняются при проекции, а какие могут нарушаться.

Проекции плоских объектов

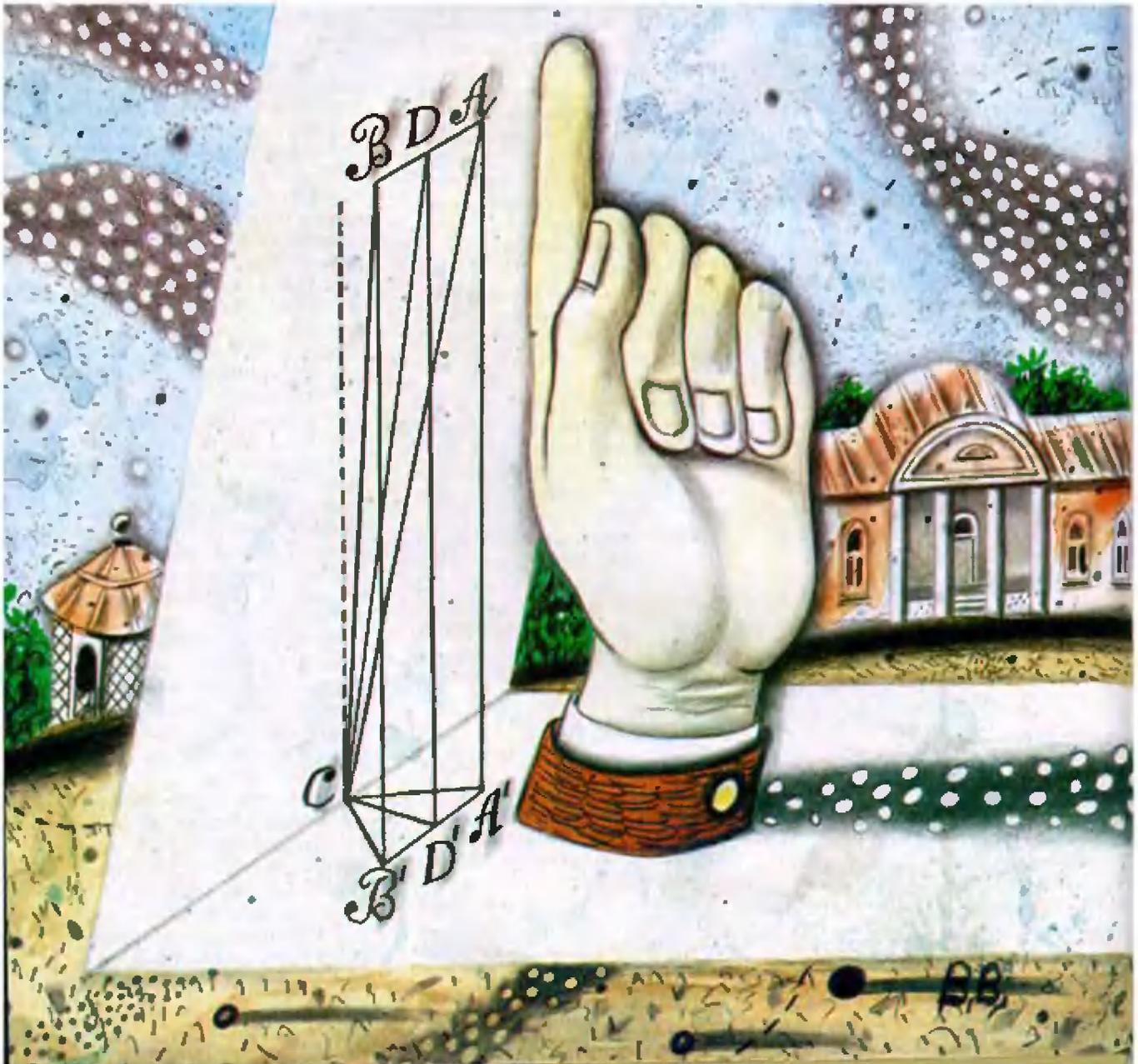
Начнем с самых простых объектов — прямых и отрезков. Из рисунка 1 видно, что параллельная проекция

переводит параллельные прямые в параллельные. Кроме того, с помощью теоремы Фалеса нетрудно показать, что сохраняются отношения длин параллельных отрезков.

Упражнения

1. Докажите эти утверждения.
2. Докажите, что при параллельной проекции расположенные в одной плоскости равновеликие параллелограммы переходят в равновеликие.

Указание. Рассмотрите случай двух



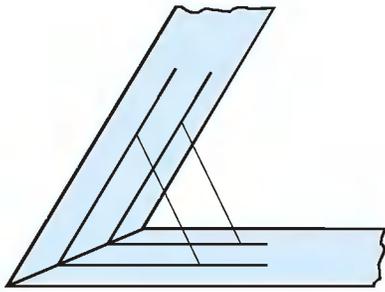


Рис.1

параллелограммов, изображенных на рисунке 2, и подумайте, как свести произвольный случай к разобранному.

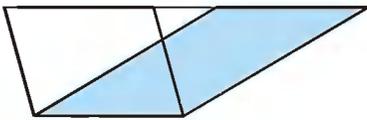


Рис.2

Пользуясь результатом упражнения 2, можно показать, что параллельная проекция сохраняет отношения площадей фигур, лежащих в одной плоскости. Для ортогональной проекции верен более сильный результат: отношение площади проекции к площади исходной фигуры равно косинусу угла между содержащими их плоскостями.

Следующей простейшей фигурой является угол. Оказывается, что даже при ортогональной проекции величина угла может подвергнуться весьма сильным искажениям. Так, из рисунка 3 видно, что если плоскость, в которой расположен угол, и плоскость проекции почти перпендикулярны, а перпендикуляр (CD) к линии их пересечения лежит внутри угла, то «очень острый» угол (ACB) может перейти в «очень тупой» (A'CB').

Упражнение 3. Проведите вычисления, подтверждающие это утверждение.

В дальнейшем нам будет полезен

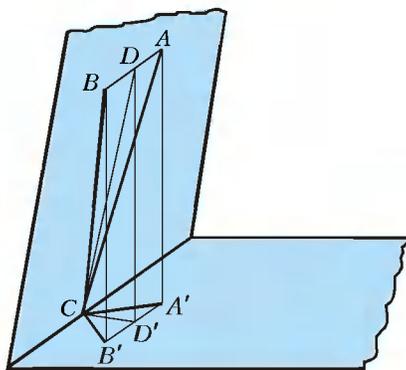


Рис.3

следующий факт. Пусть плоские углы некоторого трехгранного угла равны a, b, c , а противолежащие им двугранные углы равны, соответственно, α, β, γ . Тогда

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \quad (*)$$

Упражнение 4. Докажите эту формулу.

От угла естественно перейти к треугольнику. Пусть дан некоторый треугольник ABC . Выясним, как могут выглядеть треугольники, являющиеся его ортогональными проекциями. Результат оказывается довольно неожиданным.

Утверждение 1. Любой треугольник может быть получен как ортогональная проекция треугольника, подобного ABC .

Доказательство. Разберем случай, когда $\triangle ABC$ правильный. Доказательство для общего случая аналогично.

Проведем через вершины данного треугольника $A'B'C'$ прямые a, b, c , перпендикулярные его плоскости (рис.4). Для доказательства утверждения достаточно найти на прямых a и b такие точки X и Y , что $C'X = C'Y$ и $\angle XC'Y = \pi/3$. Предположим для определенности, что $C'A' \geq C'B'$, и возьмем точку X , совпадающую с A' , и точку Y , лежащую на прямой b выше плоскости $A'B'C'$, такую что $C'Y = C'A'$. Если $\angle A'C'Y > \pi/3$, будем двигать точки X и Y по соответствующим прямым вверх, соблюдая условие $C'X = C'Y$. Подняв обе точки достаточно высоко, можно сделать угол $\angle XC'Y$ сколь угодно малым, а так как этот угол меняется непрерывно, в какой-то момент он примет требуемое значение. Если же $\angle A'C'Y < \pi/3$, будем двигать точку X вниз, а Y вверх. Тогда угол $\angle XC'Y$ стремится к π и также в какой-то момент принимает требуемое значение. Положив теперь $X = A, Y = B, C' = C$, получаем,

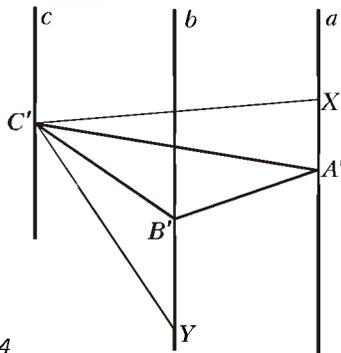


Рис.4

что треугольник $A'B'C'$ является проекцией правильного треугольника ABC .

Отметим, что утверждение 1 означает фактически, что для плоских фигур любое изображение, полученное посредством параллельной проекции, можно с точностью до подобия получить с помощью ортогональной.

Действительно, пусть проекциями трех не лежащих на одной прямой точек A, B, C являются точки A', B', C' . Проведем через произвольную точку D плоскости ABC прямые, параллельные AC и BC , и найдем точки X и Y их пересечения с BC и AC соответственно (рис.5). По свойствам параллельной проекции X и Y проектируются в такие точки X' и Y' , что $C'X'/B'X' = CX/BX, C'Y'/A'Y' = CY/A'Y'$, а точка D – в точку D' пересечения прямых, проходящих через X' и Y' и параллельных $C'A'$ и $C'B'$ соответственно. Таким образом, проекции всех точек плоскости ABC определяются однозначно. С другой стороны, утверждение 1 показывает, что три данные точки можно ортогонально спроектировать в вершины треугольника, подобного данному.

Однако при переходе к пространственным объектам возможности ортогональной и параллельной проекций оказываются существенно различными. Чтобы показать это, исследуем вопросы, связанные с изображением на плоскости одного из самых простых таких объектов – тетраэдра.

Проекции тетраэдра

Как правило, тетраэдр изображают на плоскости в виде четырехугольника, диагонали которого соответствуют двум противоположным ребрам тетраэдра, а стороны – остальным ребрам. Возникает естественный вопрос: какими свойства-

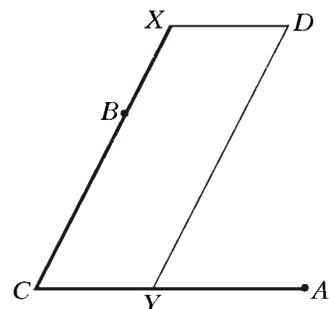


Рис.5

ми должен обладать этот четырехугольник, если известны какие-то свойства тетраэдра, например если тетраэдр правильный?

Оказывается, что, рисуя четырехугольник, не нужно заботиться о соблюдении каких-либо условий. Точнее, справедливо следующее.

Теорема Польке–Шварца. Любой четырехугольник на плоскости может быть получен как параллельная проекция правильного тетраэдра.

Доказательство. Четырехугольник с точностью до подобия определяется четырьмя параметрами: отношением диагоналей, углом между диагоналями и отношениями отрезков, на которые диагонали делятся точкой их пересечения. Пусть дан четырехугольник $A'B'C'D'$, диагонали которого пересекаются в точке O . На ребрах AC и BD правильного тетраэдра $ABCD$ возьмем точки O_1 и O_2 , такие что $AO_1/O_1C = A'O/O_1C'$ и $BO_2/O_2D = B'O/O_2D'$. Если проектировать тетраэдр на любую плоскость параллельно прямой O_1O_2 , то диагонали полученного четырехугольника будут делиться точкой пересечения в тех же отношениях, что и диагонали данного. Осталось показать, что за счет выбора плоскости проекции можно получить нужные значения двух оставшихся параметров. Поскольку противоположные ребра тетраэдра равны и перпендикулярны, это утверждение можно переформулировать так:

Дан прямоугольный равнобедренный треугольник PXY ($\angle P = 90^\circ$) и проходящие через его вершины X и Y параллельные прямые, не лежащие в его плоскости. Тогда на этих прямых найдутся такие точки X' , Y' , что отношение PX'/PY' и угол $\angle X'PY'$ равны наперед заданным величинам.

Этот факт можно доказать теми же рассуждениями, что и утверждение

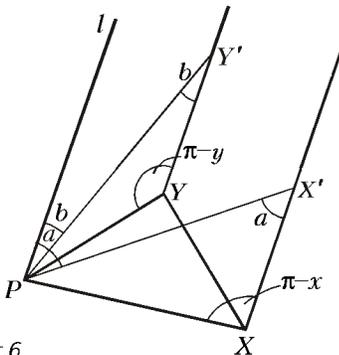


Рис.6

1. Однако мы используем для доказательства формулу (*). Проведем через P прямую l , параллельную данным прямым, проходящим через X и Y . Пусть угол между плоскостями φ и ψ , первая из которых содержит прямые l и PX , вторая l и PY , равен γ , а углы, которые l образует с PX и PY , равны x и y соответственно. Проведем через P две прямые, лежащие в плоскостях φ и ψ и образующие с l углы a и b . Точки их пересечения с параллельными l прямыми, проходящими через X и Y , обозначим X' , Y' (рис.6). Тогда (по теореме синусов)

$$PX'/PX = \sin x / \sin a,$$

$$PY'/PY = \sin y / \sin b,$$

и

$$PX'/PY' = \sin x / \sin y \cdot \sin b / \sin a.$$

Таким образом, отношение PX'/PY' определяется отношением синусов углов a и b , и можно сделать эти синусы сколь угодно малыми, оставляя их отношение постоянным. При этом знаки их косинусов могут быть как одинаковыми, так и противоположными. Пусть $\angle X'PY' = c$. Из формулы (*), примененной к трехгранному углу с ребрами l , PY' , PX' следует, что при малых значениях $\sin a$, $\sin b$ значение $\cos \angle X'PY'$ близко к 1 при одинаковых знаках $\cos a$, $\cos b$ и к -1 при противоположных. Поэтому при некоторых a , b это значение равно заданному.

Теорема доказана.

Из рисунка 7 видно, что вершины правильного тетраэдра $ABCD$ и точки A' , B' , C' , D' , симметричные им относительно его центра тяжести (совпадающего с точкой пересечения высот), являются вершинами куба, а противоположные грани этого куба проходят через противоположные точки тетраэдра. Поскольку центр тяжести тетраэдра является серединой отрезка, соединяющего середины его двух противоположных ребер, а параллельное проектирование сохраняет середины отрезков, центр тяжести тетраэдра проецируется в центр тяжести его проекции. Отсюда следует, что вершины двух произвольных четырехугольников, симметричных относительно общего центра тяжести, можно считать параллельными проекциями вершин куба.

Рассмотрим теперь не просто параллельное, а ортогональное проек-

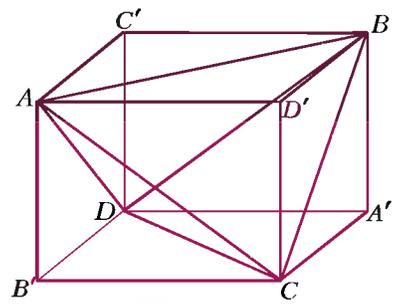


Рис.7

тирование правильного тетраэдра на плоскость. В этом случае уже нельзя получить произвольный четырехугольник. Действительно, отношения, в которых диагонали четырехугольника делятся точкой их пересечения, однозначно определяют направление проектирования, а значит, и его плоскость и остальные параметры четырехугольника.

Упражнение 5. Докажите, что если диагонали четырехугольника, являющегося ортогональной проекцией правильного тетраэдра, перпендикулярны, то одна из них делится точкой пересечения пополам.

Указание. Докажите, что если прямой угол при ортогональной проекции переходит в прямую, то одна из его сторон параллельна плоскости проекции.

Вывести условия, которым должен удовлетворять четырехугольник, являющийся ортогональной проекцией правильного тетраэдра, несложно, но они оказываются довольно громоздкими и малоинтересными. Однако эти условия неожиданно красиво записываются с помощью комплексных чисел.

Ортогональное проектирование и комплексные числа

Пусть четырехугольник $ABCD$ является ортогональной проекцией на плоскость правильного тетраэдра. Найдем координаты векторов, соответствующих его сторонам и диагоналям в произвольной декартовой системе координат, и сопоставим каждому такому вектору (x, y) комплексное число $x + iy$. Оказывается, сумма квадратов полученных шести чисел равна нулю. Отметим, что направления векторов можно выбирать произвольно, так как $(-z)^2 = z^2$ для любого комплексного числа z .

Справедливо и обратное: если сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих сторонам и диаго-

налям данного четырехугольника, равна нулю, то этот четырехугольник может быть получен ортогональным проектированием правильного тетраэдра.

Вновь впишем тетраэдр в куб, как на рисунке 7. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — векторы, лежащие на трех выходящих из одной вершины ребрах куба, w_1, w_2, w_3 — комплексные числа, соответствующие проекциям этих векторов. Тогда из двух противоположных ребер тетраэдра, лежащих, например, в гранях куба, образованных векторами \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , одно задает вектор $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, другое $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$. При переходе к проекциям эти соотношения сохраняют силу, и, значит, сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих этим ребрам, равна

$$(w_1 + w_2)^2 + (w_1 - w_2)^2 = 2(w_1^2 + w_2^2),$$

а сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих всем ребрам тетраэдра, равна $4(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$. Поэтому наше утверждение равносильно следующему:

Утверждение 2. Три вектора на плоскости могут быть получены как ортогональные проекции трех непараллельных ребер куба тогда и только тогда, когда сумма квадратов соответствующих им комплексных чисел равна нулю.

Доказательство. Докажем сначала лемму.

Лемма. Пусть данные векторы плоскости имеют координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Для того чтобы они были проекциями трех ребер куба, необходимо и достаточно, чтобы существовали три числа z_1, z_2, z_3 , удовлетворяющие условиям

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2, \quad (1)$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0. \quad (2)$$

Для доказательства леммы будем считать, что одна из вершин куба совпадает с началом координат плоскости проекции, а смежные с ней проектируются в точки с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Введем в пространстве систему координат, оси x и y которой совпадают с координатными осями плоскости

проекции, а ось z перпендикулярна этой плоскости. Тогда три смежные с началом координат вершины куба будут иметь координаты $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ при некоторых z_1, z_2, z_3 . Для того чтобы три вектора с такими координатами были ребрами куба, необходимо и достаточно, чтобы их длины были равны и они были попарно перпендикулярны. Первое условие равносильно соотношениям (1), второе — соотношениям (2).

Исключим теперь из условий (1), (2) z_1, z_2, z_3 . Для этого перенесем в (2) произведения $z_i z_j$ в правую часть и разделим произведение двух из получившихся уравнений на третье. Получим, например, что

$$z_1^2 = -(x_1x_2 + y_1y_2)(x_1x_3 + y_1y_3)/(x_2x_3 + y_2y_3).$$

Если, например, $x_2x_3 + y_2y_3 = 0$, то векторы \vec{e}_2 и \vec{e}_3 перпендикулярны, и один из них является ребром куба (см. упражнение 5). Разбор этого случая не представляет трудности. Подставив выражение для z_1^2 и аналогичные выражения для z_2^2, z_3^2 в (1), получим два соотношения, которым должны удовлетворять исходные координаты. После преобразований эти соотношения принимают вид

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0.$$

Следовательно,

$$(x_1 + iy_1)^2 + (x_2 + iy_2)^2 + (x_3 + iy_3)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + i(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = 0.$$

Утверждение доказано.

Проекции правильных многогранников

Из утверждения 2 следует, что для тетраэдра и куба сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих проекциям ребер, равна нулю. Докажем, что для остальных правильных многогранников это также справедливо. Прежде всего, отметим, что октаэдр можно получить, отрезав от тетраэдра с ребром 2 четыре тетраэдра с ребром 1 (рис.8). Ребра полученного октаэдра будут параллельны ребрам исходного тет-

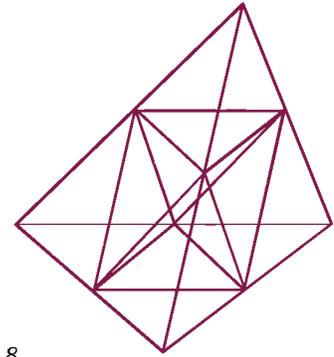


Рис.8

раэдра, так что для них утверждение тоже будет справедливо. Чтобы доказать его для додекаэдра и икосаэдра, рассмотрим пять вписанных в додекаэдр кубов, один из которых показан на рисунке 9. Из рисунка видно, что три пары ребер додекаэдра и три пары отрезков, соединяющих центры его граней (т.е. ребер икосаэдра), параллельны ребрам куба. Все множество ребер разбивается на пять таких наборов, для каждого из которых сумма квадратов соответствующих комплексных чисел равна нулю по утверждению 2.

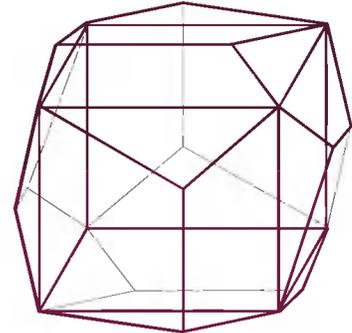


Рис.9

Это рассуждение показывает, что в случае додекаэдра и икосаэдра условие равенства нулю суммы квадратов не является достаточным, так как нулю должна равняться не только сумма по всему множеству ребер, но и по некоторым его подмножествам.

В заключение отметим еще одно свойство ортогональных проекций правильных многогранников: сумма квадратов длин проекций ребер не зависит от плоскости проекции. Для куба это немедленно следует из того, что сумма квадратов косинусов углов, образуемых тремя непараллельными ребрами куба с произвольной прямой, равна единице. Для остальных многогранников утверждение доказывается аналогично утверждению 2.

Деление урана: от Клапрота до Гана

А. ВАСИЛЬЕВ

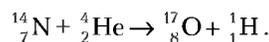
Вильгельм Клапрот (1789) → Анри Беккерель (1896) → Пьер и Мария Кюри (1898) →
Эрнест Резерфорд (1911) → Ганс Бете (1932) → Джеймс Чедвик (1932) →
Ирен и Фредерик Жолио-Кюри (1934) → Энрико Ферми (1935) →
Лизе Мейтнер, Фриц Штрассман, Отто Ган (1938)

ДЕВЯНОСТО ВТОРОЙ ЭЛЕМЕНТ периодической таблицы Менделеева уран был открыт Вильгельмом Клапротом в 1789 году. Через сто с лишним лет, в 1896 году, Анри Беккерель обнаружил, что уран радиоактивен, а еще через два года супруги Пьер и Мария Кюри выделили из урановой руды два новых химических элемента – полоний и радий. Как оказалось, радиоактивность радия в миллион раз превышала радиоактивность естественного урана. Свойство радиоактивности заключается в том, что радиоактивные элементы излучают либо α -, либо β -частицы и превращаются в другие элементы. Как показал Резерфорд, α -частицы представляют собой двукратно положительно заряженные ядра гелия, а β -частицы – это отрицательно заряженные электроны.

Окончательно постулат о неделимости и неизменности химических элементов завершил свое существование при появлении гипотезы Резерфорда и Содди о распаде атомов. Уже на заре изучения радиоактивности были установлены три цепочки радиоактивного распада. Две из них начинались от урана, а одна – от девяностого элемента тория. Периоды полураспада не управлялись никакими физическими и химическими воздействиями, а конечным продуктом всех этих цепочек был свинец. (Факт существования двух различных цепочек распада урана был понят лишь в результате многолетней интенсивной работы ученых разных стран.)

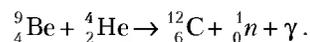
Вначале Резерфорду в 1911 году с помощью бомбардировки ядер α -

частицами удалось преобразовать один элемент в другой, как это видно, например, из реакции



Впоследствии было открыто много таких реакций, однако не с тяжелыми элементами – они эффективно отталкивали α -частицы.

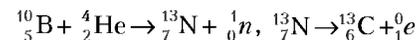
Затем в 1932 году были открыты позитрон, тяжелый водород и, наконец, нейтрон. Облучая бериллий α -частицами, Бете и Беккер в Германии обнаружили сильно проникающее излучение, которое они приняли за γ -лучи. Жолио-Кюри показал, однако, что эти лучи выбивают протоны из водородосодержащих соединений, что невозможно для γ -излучения. То, что сильно проникающим излучением являются нейтроны, показал Чедвик, изучая реакцию



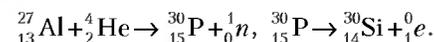
С открытием нейтронов прояснился, наконец, долго мучивший химиков вопрос дробных масс элементов, т.е. существования изотопов. Оказалось, что и уран имеет два основных изотопа: ${}^{235}_{92}\text{U}$ и ${}^{238}_{92}\text{U}$ – они и являются родоначальниками двух радиоактивных цепочек.

Открытие Чедвика позволило использовать при бомбардировке атомных ядер не только α -частицы, но и нейтроны. Между двумя этими процессами вскоре обнаружилось существенное различие. Бомбардировка α -частицами почти всегда приводила к образованию стабильных атомов, если при этом происходило также излучение протона. Если же при бомбардировке атомов α -частицами

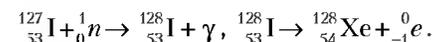
происходило излучение нейтрона, то наряду с ним также излучался позитрон. Излучение позитрона иногда происходило уже после того, как облучение α -частицами прекращалось. Наблюдение таких реакций Ирен и Фредериком Жолио-Кюри в 1934 году предопределило открытие искусственной радиоактивности. Первыми такими реакциями стали:



и



Исключительно важное значение нейтронов для проведения ядерных реакций осознал Ферми. Его команда облучила нейтронами почти все элементы периодической системы и открыла множество искусственных радиоактивных элементов. Например:



На этом пути Ферми добрался до урана и, облучая его нейтронами, обнаружил множество трансмутантов. Некоторые из вновь полученных продуктов облучения обладали очень малыми периодами полураспада. Поскольку многие из этих продуктов излучали электроны, Ферми предположил, что он получил 93-й и 94-й трансурановые элементы. Предположение Ферми, однако, было принято научной общественностью с осторожностью, причем многие полагали, что наиболее надежно установленный так называемый 13-минутный элемент был на самом деле протактинием – элементом с номером 91.

Лизе Мейтнер и Отто Ган решили перепроверить эксперимент Ферми

с тем чтобы определить, является ли 13-минутный элемент протактинием. Поскольку вновь обнаруженный продукт реакции не оказался ни протактинием, ни ураном, ни актинием, ни торием, они заключили, что вновь обнаруженный элемент является трансурановым 93-м элементом. Никакие другие возможности ими тогда не рассматривались. С открытием нейтрона и использованием искусственных источников радиации действительно наблюдалось огромное количество необычных реакций, однако продуктами этих реакций всегда являлись либо изотопы облучаемых веществ, либо элементы, отстоящие на одну или, в крайнем случае, на две позиции от облучаемых элементов. Возможность развала тяжелого ядра на легкие тогда просто не существовала.

Независимо от этих опытов, Кюри и Савич описали в 1937–38 годах так называемый 3,5-часовой изотоп, который возникал при облучении урана нейтронами. Его свойства напоминали пятьдесят седьмой элемент лантан. В то же время в экспериментах Гана и Штрассмана по облучению урана нейтронами был получен еще более странный результат: наряду с предполагаемыми трансурановыми элементами возникали, путем последовательного излучения α -частиц, три искусственно β -активных изотопа радия с различными временами жизни, которые, в свою очередь, превращались в β -активные изотопы актиния. Вывод о том, что в эксперименте наблюдались именно изотопы радия, основывался на том, что, согласно законам химии, это могли быть только барий или радий, однако появление пятьдесят шестого элемента бария по существовавшему тогда представлениям считалось невозможным. Станным в этих опытах было то, что α -распад не сопровождался появлением медленных нейтронов, однако сразу же появлялось много различных изотопов. Чтобы получить максимально обогащенный искусственным радием образец, экспериментаторы попытались выделить его, используя в качестве носителя хлорид бария, но все попытки завершились неудачей. В то же время контрольные опыты с действительно изотопами радия всегда оказывались успешными – первый осадок всегда был богаче радиоактивным элементом.

В этой драматической ситуации Ган и Штрассман предприняли контрольный «показательный» опыт. Они смешали чистый натуральный радий с искусственным радием и провели разделение изотопов. Оказалось, что естественный радий, как всегда, выделяется хорошо, а искусственный отделять от бария невозможно. Далее, при β -распаде радия образуется актиний, а при β -распаде бария – лантан. Смесь естественного и искусственного радия давала и тот, и другой элемент.

Ган вынужден был признать, что наблюдавшийся им искусственный радий был на самом деле барием. В первом сообщении от 6 января 1939 года об опытах, которые «противоречили всем явлениям, наблюдавшимся до сих пор в ядерной физике», Ган высказал предположение, что второй продукт распада должен иметь атомную массу порядка 100, так чтобы суммарная масса вновь образуемых элементов совпала с массой урана. Во втором сообщении от 10 февраля 1939 года Ган и Штрассман описали расщепление тория, продуктами распада которого были инертный газ и щелочной металл.

Сразу вслед за этими сообщениями появилась статья Лизе Мейтнер и ее племянника Отто Фриша, в которой расщеплению ядра урана на два более легких ядра было дано теоретическое обоснование. Они же показали, что деление ядер урана должно сопровождаться громадным выходом энергии. Уран, порядковый номер которого 92, превращается в барий с номером 56 и криптон с номером 36. Хотя условие сохранения заряда в этой реакции выполняется, оба получающихся в ней искусственных изотопа имеют слишком большую массу. Они, следовательно, должны превратиться в другие, более стабильные изотопы. Так, наивысший стабильный изотоп криптона имеет массу 86, а в процессе деления ядер урана возникает нестабильный криптон с массой 88. За реакции с тепловыми, т.е. медленными, нейтронами ответствен ${}_{92}^{235}\text{U}$. Если бы не было других продуктов распада, искусственный изотоп бария должен был бы иметь массу $(235 + 1) - 88 = 148$. В то же время самый тяжелый стабильный изотоп бария имеет массу лишь 138. Учитывая это обстоятельство, в своем сообщении Ган и Штрассман предполо-

жили, что в результате реакции деления тяжелых ядер наряду с легкими ядрами появляются также нейтроны. (Экспериментально это впервые показал Фредерик Жолио-Кюри.) Высвобождающиеся в ходе этой реакции нейтроны способны инициировать дальнейшие реакции распада тяжелых ядер, что при достаточном запасе «горючего» приводит к цепной реакции.

Итак, что же происходит в уране? Уран в основном состоит из двух изотопов ${}_{92}^{235}\text{U}$ и ${}_{92}^{238}\text{U}$, причем их количества в природном уране находятся в соотношении 1 : 140. За счет медленных нейтронов идет цепная реакция деления лишь U-235, а с U-238 происходит следующее. При захвате им нейтрона образуется короткоживущий изотоп U-239, самопроизвольно излучающий электрон. В результате образуется элемент с номером 93, т.е. нептуний. Изотоп нептуния ${}_{93}^{239}\text{Np}$ – тоже радиоактивен, его период полураспада составляет 2,3 дня. Нептуний также излучает электрон, в результате чего образуется элемент с номером 94, т.е. плутоний. Период полураспада ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ около 24000 лет. (Имена этим элементам американский физик Гленн Сиборг дал по названиям планет: Уран – Нептун – Плутон.) Кроме указанных ядерных реакций, при облучении урана-238 нейтронами рождается еще один изотоп, когда нейтрон не захватывается, а, наоборот, сам выбивает еще один нейтрон из ядра. В результате β -излучающий изотоп урана с массой 237 превращается в ${}_{93}^{237}\text{Np}$ с периодом полураспада в миллионы лет. В дополнение ко всему, в уране-238 также происходят естественные реакции деления, образующие около 200 изотопов с номерами от 30 до 64. Таким образом, наличие ${}_{92}^{238}\text{U}$ в природной смеси урана выводит нейтроны из цепной реакции с ${}_{92}^{235}\text{U}$, однако в этих же процессах идет накопление плутония, а с ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ также возможна цепная реакция.

В заключение – несколько строк о человеке, которому принадлежит честь открытия расщепления тяжелых ядер. Отто Ган родился почти через сто лет после открытия Клапротом урана – 8 марта 1879 года во Франкфурте-на-Майне. Химическое образование он получил в Мюнхене

(Окончание см. на с. 30)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 – 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1781» или «Ф1788». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1781 – М1783 предлагались на LXIV Московской математической олимпиаде этого года.

Задачи Ф1788 – М1792 предлагались в этом году на Московской физической олимпиаде.

Задачи М1781–М1785, Ф1788 – Ф1792

М1781. Начальник охраны хочет расставить часовых вокруг лагеря так, чтобы ни к лагерю, ни к часовым нельзя было незаметно подкрасться. Каждый часовой имеет прожектор, который может освещать отрезок длиной 100 м. Сможет ли начальник исполнить свой замысел?

В.Клепцын

М1782. Докажите, что для любого натурального n существует лишь конечное число решений неравенства $|x^! - y^y| < n$ в натуральных числах x и y .

С.Злобин

М1783. В треугольнике ABC проведены высота $АН$, биссектриса $ВL$ и медиана $СM$. Оказалось, что треугольник HML равносторонний. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

Р.Женюдаров

М1784. На доске записаны все целые числа от 1 до 2000.
а) Наугад стирают 998 чисел. Докажите, что среди оставшихся чисел можно указать несколько (не менее двух) так, что их сумма тоже имеется на доске.

б*) Наугад стирают 89 чисел. Докажите, что среди оставшихся можно указать 20 чисел так, что их сумма тоже имеется на доске. Останутся ли справедливы утверждения, если стереть еще одно число?

Ф.Шлейфер

М1785. Остров разделен на княжества.

а) Каждое княжество представлено на карте острова равносторонним треугольником. Докажите, что для правильной раскраски карты достаточно двух красок.

б*) Каждое княжество представлено на карте равнобе-

ренным прямоугольным треугольником. Докажите, что для правильной раскраски карты достаточно четырех красок. (Раскраска является правильной, если всякие два княжества, имеющие общий участок границы, окрашены в разные цвета.)

В.Произволов

Ф1788. Два тонких стержня помещены в воду так, что они параллельны и расстояние между ними равно a . По одному из стержней резко ударяют. Через какое время звук от удара дойдет до точки на втором стержне, удаленной от места удара на расстояние $\sqrt{a^2 + l^2}$, если скорости звука в воде и в стержне равны u и v соответственно?

Д.Харабадзе

Ф1789. В системе, изображенной на рисунке 1, нить невесома и нерастяжима, блоки невесома, трения нет. Вначале нить удерживают так, что груз массой m висит неподвижно, а груз массой $2m$ касается пола. Затем конец нити начинают тянуть вверх с постоянной скоростью v . Как при этом будут двигаться оба груза?

М.Семенов

Ф1790. В покоящемся сосуде объемом $V = 31$ л с очень жесткими и совершенно не проводящими тепло стенками находятся воздух при нормальных условиях и вода массой $m = 9$ г. Сосуд практически мгновенно приобретает скоростью u и движется поступательно. После установления теплового равновесия воздух в сосуде имеет

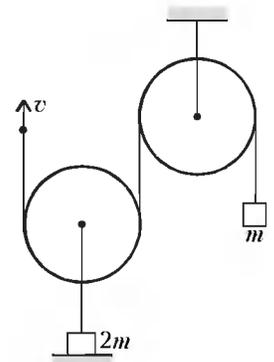


Рис.1

влажность $\phi = 50\%$. Найдите скорость u . Удельная теплота парообразования воды $L = 2,2$ Мдж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), давление насыщенных паров воды при нормальных условиях $p = 600$ Па, удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме $c_V = 720$ Дж/(кг·К), средняя молярная масса воздуха $M = 0,029$ кг/моль.

С. Варламов

Ф1791. Одно колено гладкой изогнутой трубки с круглым внутренним сечением площадью S вертикально, а другое наклонено к горизонту под углом α (рис.2). В трубку налили жидкость плотностью ρ и массой M так, что ее уровень в наклонном колене выше, чем в вертикальном, которое закрыто легким поршнем, соединенным с вертикальной пружиной с жесткостью k . Найдите период малых колебаний этой системы. Ускорение свободного падения равно g .

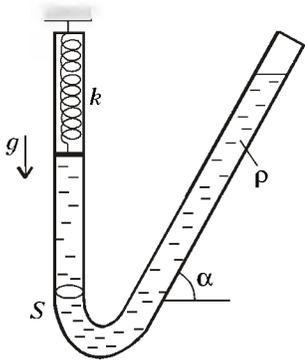


Рис.2

М. Семенов

Ф1792. Ацетон и бензол смешиваются друг с другом в любых пропорциях, образуя прозрачный раствор. Объем смеси равен суммарному объему компонентов до смешивания. Коэффициент преломления света в смеси n зависит от концентраций молекул ацетона N_a и бензола N_b следующим образом: $n^2 = 1 + K_a N_a + K_b N_b$, где K_a и K_b – некоторые константы (поляризуемости молекул ацетона и бензола). В колбе находится $V = 200$ мл смеси ацетона и бензола при температуре $t_1 = 50$ °С. Палочка из стекла, опущенная в колбу, освещается светом с длиной волны $\lambda = 546$ нм и не видна в этом растворе при данной температуре. Сколько миллилитров и какой жидкости – ацетона или бензола – нужно долить в колбу после ее охлаждения до температуры $t_2 = 20$ °С, чтобы после размешивания раствора стеклянная палочка не была видна при том же освещении? Коэффициенты преломления света с данной длиной волны у этих жидкостей при температуре t_2 равны $n_a = 1,36$ и $n_b = 1,50$ соответственно, а у стекла – $n_c = 1,47$. Коэффициенты объемного расширения обеих жидкостей в диапазоне температур от t_2 до t_1 одинаковы и равны $\alpha = 0,00124$ 1/К. Тепловым расширением стекла и испарением жидкостей пренебречь.

С. Варламов

Решения задач M1756–M1765, Ф1773–Ф1777

M1756. Даны несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое. Докажите, что все числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одинакового цвета одно делилось на другое.

Построим алгоритм раскраски наших чисел в два цвета. Расположим числа по убыванию. Возьмем наименьшее и окрасим его в первый цвет. Рассмотрим следующее число. Если оно делится на минимальное число первого цвета, то

окрасим его в первый цвет, а иначе – во второй; получим, что минимальные числа двух цветов попарно не делят друг друга. Рассмотрим следующее число: оно делится хотя бы на одно из двух минимальных. Если ровно на одно, то, покрасив его в тот же цвет, получим предыдущую ситуацию. Если же следующее число делится на оба минимальных, то временно окрасим его в третий цвет. Если следующее число делится на минимальное число третьего цвета, то и его красим в третий цвет, и так далее, пока не встретится число, не делящееся на минимальное число третьего цвета. Рассмотрим это число и два минимальных числа первых двух цветов: новое число делится на одно из них, тогда покрасим новое число в этот цвет, а все числа третьего цвета – в другой цвет и опять получим ситуацию, когда два минимальных числа разного цвета не делят друг друга. Повторяя этот алгоритм, мы получим раскраску, требуемую в задаче.

Примечание. Данный факт является частным случаем теоремы Дилворга о частично упорядоченных множествах, которую в связи с этой задачей можно сформулировать так:

Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых n из них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое. Тогда все числа можно покрасить в $n - 1$ цвет так, чтобы для любых двух чисел одинакового цвета одно делилось на другое.

Е. Черепанов

M1757*. Выпуклый многоугольник можно разрезать на 20 параллелограммов. Докажите, что этот многоугольник можно разрезать на 15 параллелограммов.

Решение задачи опирается на два вспомогательных утверждения. Первое из них представляет собой лемму Минковского.

Лемма 1. Если выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то этот многоугольник обладает центром симметрии.

Для доказательства этого утверждения достаточно убедиться в том, что для каждой стороны многоугольника найдется равная и параллельная ей сторона.

Сначала разрежем параллелограммы разбиения на более мелкие параллелограммы так, чтобы новое измельченное разбиение многоугольника удовлетворяло следующему требованию: любые его два параллелограмма либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону целиком.

Пусть нижняя сторона AB исходного многоугольника M горизонтальна (рис.1). Будем строить из параллелограммов нового разбиения «дорожки», начинающиеся от стороны AB так, чтобы каждый следующий параллелограмм примыкал к предыдущему по горизонтальной его стороне. Ясно, что последний параллелограмм каждой дорожки будет примыкать к верхней горизонтальной стороне CD многоугольника M . Одним словом, сторона CD будет параллельна стороне AB и будет иметь ту же длину.

Теперь сформулируем и

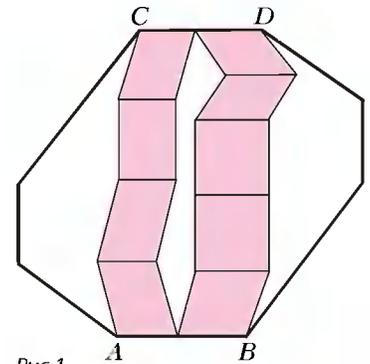


Рис.1

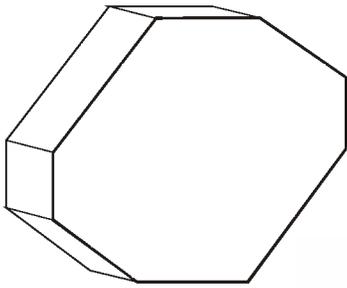


Рис.2

На рисунке 2 показано, как центрально-симметричный выпуклый $2n$ -угольник можно разрезать на $n - 1$ параллелограмм и центрально-симметричный выпуклый $2(n - 1)$ -угольник. Отсюда индуктивно вытекает первая часть утверждения.

Обоснуем вторую часть утверждения. Возьмем произвольную пару непараллельных сторон нашего $2n$ -угольника – AB и KL (рис.3). При этом $2n$ -угольник каким-то образом разрезан на параллелограммы. Тогда найдется

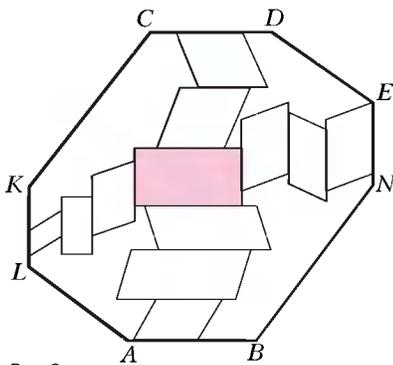


Рис.3

дорожка из параллелограммов, соединяющая сторону AB с параллельной ей стороной CD , и найдется вторая дорожка из параллелограммов, соединяющая сторону KL с параллельной ей стороной EN . Эти дорожки пересекаются, т.е. имеют общий параллелограмм, стороны которого параллельны сторонам AB и KL . Делаем вывод: любая пара непараллельных сторон $2n$ -угольника порождает в разбиении такой параллелограмм, но подобных различных пар (а точнее – пар направлений) в точности $\frac{n(n - 1)}{2}$ штук.

Значит, различных параллелограммов в любом разбиении не меньше $\frac{n(n - 1)}{2}$ штук.

Артподготовка на этом закончилась; делаем заключительный залп по самой задаче. Согласно лемме 1, условием задачи задан центрально-симметричный $2n$ -угольник M .

Согласно лемме 2, $\frac{n(n - 1)}{2} \leq 20$, т.е. $n \leq 6$. Иначе говоря, $2n$ -угольник M имеет не более 12 сторон. Но в таком случае M можно разрезать на не более чем 15 параллелограммов, а значит, и ровно на 15. Этим все доказано.

В.Произволов

M1758. *Всякий депутат имеет свой (абсолютный) рейтинг. В начальный момент после избрания каждый депутат вошел в одну из фракций, в которой он может подсчитать свой относительный рейтинг. Возможен переход депутата из одной фракции в другую, если его относительный рейтинг при этом увеличивается. Пусть в каждый момент времени может происходить лишь один такой переход. Докажите, что спустя конечное время все рейтинговые переходы прекратятся.*

докажем второе вспомогательное утверждение.
Лемма 2. *Центрально-симметричный выпуклый $2n$ -угольник можно разрезать на $\frac{n(n - 1)}{2}$ параллелограммов, но нельзя разрезать на меньшее число параллелограммов.*

Всякий i -й депутат имеет свой абсолютный рейтинг R_i . В начальный момент (после избрания) каждый i -й депутат вошел в одну из фракций, в которой он может подсчитать свой относительный рейтинг: $r_i = R_i/S$, где S – сумма всех абсолютных рейтингов данной фракции. Обозначим через $S_i(t)$ и $S_j(t)$ суммы всех абсолютных рейтингов депутатов i -й и j -й фракций в момент t . Согласно условию переход k -го депутата (в момент t) из i -й фракции в j -ю реализуется, если и только если выполняется неравенство $R_k/S_i(t) < R_k/(S_j(t) + R_k)$, т.е. $S_i(t) > S_j(t) + R_k$, или

$$R_k + S_j(t) - S_i(t) < 0. \quad (*)$$

Отметим, что здесь получаем $S_i(t + 1) = S_i(t) - R_k$ и $S_j(t + 1) = S_j(t) + R_k$.

Теперь рассмотрим функцию $L(t) = \sum S_m^2(t)$, где индекс m пробегает все номера фракций. Покажем, что при реализации перехода $L(t)$ убывает. Действительно, пусть в момент t происходит переход k -го депутата из i -й фракции в j -ю. Тогда получаем

$$L(t + 1) = (S_i(t) - R_k)^2 + (S_j(t) + R_k)^2 + \sum S_n^2(t + 1),$$

где n отлично от i и j . Раскрывая первые два квадрата, находим

$$L(t + 1) = S_i^2(t) + S_j^2(t) + 2R_k(R_k + S_j(t) - S_i(t)) + \sum S_n^2(t + 1).$$

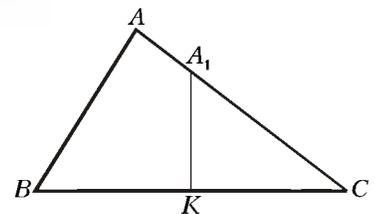
С учетом неравенства (*) устанавливаем $L(t + 1) < L(t)$. Но функция L может принимать лишь конечное число значений, поэтому ее убывание не может продолжаться сколь угодно долго.

В.Ильичев

M1759. *Имеется остроугольный треугольник с меньшей стороной c и противоположащим ей углом γ . Известно, что треугольник можно раскрасить в два цвета так, что расстояние между любыми двумя точками одного цвета будет не больше c . Докажите, что $\gamma \geq 36^\circ$.*

Рассмотрим треугольник ABC с длинами сторон $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, причем $a \geq b \geq c$; углы при вершинах A , B и C обозначим соответственно через α , β и γ .

Пусть точка K – середина стороны BC , точка A_1 – пересечение серединного перпендикуляра к BC и стороны AC (см. рисунок).



Из условия задачи следует, что в указанной раскраске вершины B и C должны быть разного цвета, поскольку расстояние между ними больше c (если оно равно c , то треугольник равносторонний, и для него утверждение задачи выполняется). Значит, точка A_1 должна иметь одинаковый цвет с одной из точек B или C . В любом случае должно выполняться неравенство $AB \geq A_1C$, которое равносильно следующим неравенствам:

$$c \geq \frac{a}{2 \cos \gamma}; \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \geq \frac{1}{2 \cos \gamma};$$

$$\sin 2\gamma \geq \sin \alpha; \quad \alpha \leq 2\gamma \leq \pi - \alpha.$$

Учитывая, что $2\gamma \leq \beta + \gamma = \pi - \alpha$, имеем: $AB \geq A_1C \Leftrightarrow \alpha \leq 2\gamma$.

Завершаем доказательство:

$$180^\circ = \alpha + \beta + \gamma \leq 2\gamma + 2\gamma + \gamma = 5\gamma \Rightarrow \gamma \geq 36^\circ.$$

А.Эвнин

M1760. Таблицу размером $n \times n$ клеток назовем удивительной, если она обладает следующим свойством: всякие n чисел таблицы такие, что в каждом столбце таблицы и в каждой строке таблицы присутствует ровно одно из них, дают одну и ту же сумму. Докажите, что каждая удивительная таблица может быть представлена в виде суммы двух таблиц, у одной из которых в каждом столбце все числа равны, а у другой – в каждой строке все числа равны.

Например,

$$\begin{pmatrix} 3, & 4, & 1 \\ 6, & 7, & 4 \\ 5, & 6, & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & 3, & 0 \\ 2, & 3, & 0 \\ 2, & 3, & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 4, & 4, & 4 \\ 3, & 3, & 3 \end{pmatrix}.$$

Массовик-затейник вызывает на сцену простодушного добровольца и показывает ему таблицу

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 6, & 7, & 8, & 9, & 10 \\ 11, & 12, & 13, & 14, & 15 \\ 16, & 17, & 18, & 19, & 20 \\ 21, & 22, & 23, & 24, & 25 \end{pmatrix}.$$

Затем предлагает добровольцу молча выбрать из таблицы 5 чисел, по одному из каждой строки и каждого столбца, а сам, не зная этих чисел, сообщает изумленному добровольцу, чему равна их сумма. Нас это не изумляет, поскольку сумма всегда будет равна 65.

Вопрос в том, как устроены удивительные таблицы. Оказывается, они устроены всегда так, как сказано в условии задачи. Докажем это.

Доказательство этого примечательного факта осуществляется на удивление просто. Пусть M – произвольная удивительная таблица размером $n \times n$. Составим таблицу P , у которой все строки будут одинаковыми и такими, какова первая строка у таблицы M . Затем, вычтя из таблицы M таблицу P , получим таблицу Q , у которой в каждой строке будут стоять одинаковые числа (например, в первой – только нули).

Последнее следует из того, что всякие четыре числа удивительной таблицы, располагающиеся «в вершинах прямоугольника»

$$\begin{matrix} a, \dots, b \\ \dots, \dots \\ c, \dots, d \end{matrix}$$

подчиняются условию $a + d = c + b$.

Проделав эту процедуру с примером из формулировки задачи, получаем равенство

$$\begin{pmatrix} 3, & 4, & 1 \\ 6, & 7, & 4 \\ 5, & 6, & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3, & 4, & 1 \\ 3, & 4, & 1 \\ 3, & 4, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 3, & 3, & 3 \\ 2, & 2, & 2 \end{pmatrix}.$$

Доказанные здесь утверждения принадлежат к тем фактам, которые просто доказать, но непросто обнаружить.

В.Произволов

M1761. У фокусника 100 карточек, занумерованных числами от 1 до 100. Он раскладывает все карточки в три ящика – красный, белый и синий – так, чтобы в каждом ящике лежала хотя бы одна карточка.

Один из зрителей выбирает два из трех ящиков, вынимает из них по одной карточке и объявляет сумму номеров вынутых карточек. Зная эту сумму, фокусник определяет тот ящик, из которого карточки не вынимались.

Сколькими различными способами можно разложить карточки по ящикам так, чтобы этот фокус всегда удавался? (Способы, при которых хотя бы одна карточка попадает в разные ящики, считаются различными.)

Ответ. 12.

Пусть карточка 1 (или число 1) лежит в красном ящике (сокращенно КЯ), а карточка с наименьшим числом k , не лежащая в КЯ, лежит в белом ящике (БЯ). Тогда $k - 1$ находится в КЯ.

По условию, в синем ящике (СЯ) есть хотя бы одна карточка; пусть n – наименьшее число (т.е. карточка с наименьшим числом) в СЯ $\Rightarrow n > k$. Если $n - 1$ лежит в КЯ, то зритель может выгадать либо $n - 1$ и k из КЯ и БЯ, либо n и $k - 1$ из СЯ и КЯ. Суммы чисел на карточках одинаковы, значит, в этом случае фокус не удастся. Следовательно, $n - 1$ находится в БЯ.

Предположим, что карточка 2 лежит в КЯ. Тогда взяв либо 2 и $n - 1$ из КЯ и БЯ, либо 1 и n из КЯ и СЯ, получим одинаковые суммы, значит, $k = 2$ и 2 находится в БЯ.

Рассмотрим два случая.

1) В КЯ нет других карточек, кроме 1. Покажем, что тогда $n = 100$. Пусть $n < 100$. Тогда $n + 1$ лежит либо в БЯ, либо в СЯ. Пары карточек $(1, n + 1)$ и $(2, n)$ с одинаковой суммой находятся в (КЯ, БЯ (СЯ)) и в (БЯ, СЯ) – фокус не удался. Значит, $n = 100$, т.е. в СЯ только одна карточка 100, в КЯ – одна карточка 1, в БЯ – карточки 2, 3, ..., 99. Покажем, что в этом случае фокус всегда удаётся: если мы берем карточки из БЯ и КЯ, то получаем суммы 3, 4, ..., 100, если из КЯ и СЯ – сумму 101, если из БЯ и СЯ – суммы 102, 103, ..., 199, т.е. суммы различны.

2) В КЯ есть другие числа, и m – наименьшее из них. Тогда $m > 2$, значит, $m - 1$ не лежит в КЯ. Если $m - 1$ находится в БЯ, то для пар $(m - 1, n)$ из БЯ и СЯ и $(n - 1, m)$ из БЯ и СЯ фокус не удаётся. Значит, $m - 1$ лежит в СЯ.

Лемма 1. Если в двух различных ящиках лежат карточки x и $x + 1$, а в третьем y и $y + 1$, то фокус не удаётся.

Доказательство. Одинаковые суммы имеют пары $(x, y + 1)$ и $(x + 1, y)$ из разных пар ящиков.

Лемма 2. Если в одном ящике лежат карточки x и y , а в двух других $x + 1$ и $y + 1$ соответственно, то фокус не удаётся.

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 1.

Выше мы показали, что для каждой пары ящиков есть карточки с двумя последовательными числами, а именно

$$\text{КЯ, БЯ : } 1, 2,$$

$$\text{БЯ, СЯ : } n - 1, n,$$

$$\text{СЯ, БЯ : } m - 1, m.$$

Значит, по лемме 1 ни в одном из ящиков нет карточек с двумя последовательными числами.

Далее, полагая, что $y = 1$, если x лежит в КЯ и $x + 1$ – в СЯ, и $y = n - 1$, если x находится в БЯ и $x + 1$ – в КЯ, по лемме 2 получаем, что в этих случаях фокус не удастся. Аналогично фокус не удастся, если x лежит в СЯ, а $x + 1$ в БЯ. Итак, если a находится в КЯ, то $a + 1$ – в БЯ, $a + 2$ – в СЯ, $a + 3$ – в БЯ и т.д. Значит, в КЯ находятся числа, сравнимые с 1 по модулю 3, в БЯ – сравнимые с 2, в СЯ – делящиеся на 3. Покажем, что такое расположение карточек подходит: сумма чисел на карточках из КЯ и БЯ делится на 3, из КЯ и СЯ сравнима с 1 по модулю 3, из СЯ и БЯ – с 2, т.е. всегда можно определить, из каких ящиков взяты карточки.

Мы получили, что если карточка 1 лежит в КЯ, а карточка с наименьшим числом не из КЯ находится в БЯ, то есть два варианта раскладывания карточек. Аналогично рассуждаем в случае других пяти пар ящиков. Значит, всего имеется $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ различных способов.

Н.Агаханов, А.Гайфуллин

M1762. Существует ли натуральное число n такое, что n имеет ровно 2000 различных простых делителей и $2^n + 1$ делится на n ?

Докажем по индукции, что для любого натурального k существует натуральное n_k , имеющее k различных простых делителей, делящееся на 3 и такое, что $2^{n_k} + 1$ делится на n_k .

Для $k = 1$ можно взять $n = 3$. Пусть число $n_k = n$, кратное 3, имеет k различных простых делителей, причем $2^n + 1$ делится на n .

Число $2^{3n} + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$ делится на $3n$. Это следует из того, что $2^n + 1$ делится на n , а

$$2^{2n} - 2^n + 1 = (2^n - 2)(2^n + 1) + 3 \quad (*)$$

делится на 3 (поскольку при нечетном n числа $2^n + 1$ и $2^n - 2$ делятся на 3).

Далее, число $2^{2n} - 2^n + 1$ не делится на 9, поскольку на 9 делится произведение $(2^n - 2)(2^n + 1)$. Значит, поскольку $2^{2n} - 2^n + 1 > 3$ при $n > 1$, то это число имеет при $n > 1$ простой делитель $p > 3$. Так как НОД $(2^n + 1, 2^{2n} - 2^n + 1) = 3$ (это тоже ясно из равенства $(*)$), то p – не делитель n .

Из сказанного следует, что число $3pn$ имеет $k + 1$ простой делитель, причем $2^{3pn} + 1$ делится на $3pn$. Последнее следует, например, из равенства

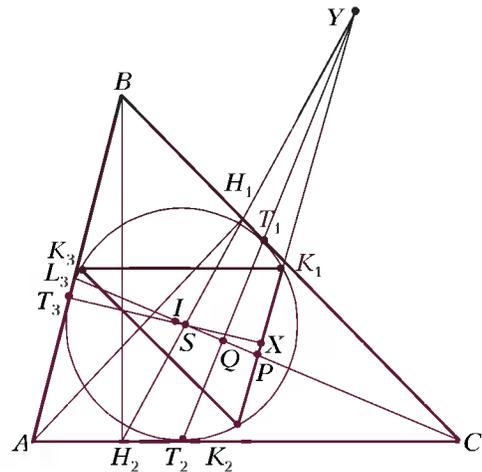
$$(2^{3n})^p + 1 = (2^{3n} + 1)((2^{3n})^{p-1} - (2^{3n})^{p-2} + \dots + 1).$$

Для завершения решения достаточно положить $n_{k+1} = 3pn = 3pn_k$.

А.Егоров, В.Сендеров

M1763. Пусть AH_1, BH_2, CH_3 – высоты остроугольного треугольника ABC . Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC, CA, AB в точках T_1, T_2, T_3 соответственно. Прямые l_1, l_2, l_3 являются образами прямых H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 при симметрии относительно прямых T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 соответственно.

Докажите, что прямые l_1, l_2, l_3 образуют треугольник с вершинами на окружности, вписанной в треугольник ABC .



1. Будем обозначать через $\sphericalangle(l, m)$ направленный угол между прямыми l и m .

Пусть $\sphericalangle(AC, AB) = \alpha, \sphericalangle(AB, BC) = \beta, \sphericalangle(BC, CA) = \gamma$, тогда (см. рисунок)

$$\sphericalangle(H_1H_2, AC) = -\beta \quad (\text{так как } \Delta H_1CH_2 \sim \Delta ACB),$$

$$\sphericalangle(T_1T_2, AC) = \frac{-\alpha - \beta}{2} \quad (\text{так как } CT_1 = CT_2),$$

$$\text{значит, } \sphericalangle(H_1H_2, T_1T_2) = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

2. Рассмотрим гомотегию с отрицательным коэффициентом, переводящую описанную окружность треугольника ABC во вписанную. Пусть $K_1K_2K_3$ – образ ABC при этой гомотегии, тогда стороны треугольника $K_1K_2K_3$ параллельны сторонам треугольника ABC , значит,

$$\begin{aligned} \sphericalangle(K_1K_2, T_1T_2) &= \sphericalangle(AB, T_1T_2) = \sphericalangle(AB, AC) + \sphericalangle(AC, T_1T_2) = \\ &= -\alpha + \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2} = -\sphericalangle(H_1H_2, T_1T_2). \end{aligned}$$

Проведем AL_1, BL_2, CL_3 – биссектрисы треугольника ABC , тогда $CL_3 \perp T_1T_2$ и $\sphericalangle(K_1K_2, CL_3) = -\sphericalangle(H_1H_2, CL_3)$. Пусть $CL_3 = l_c, P, Q, S$ – точки пересечения CL_3 с K_1K_2, T_1T_2 и H_1H_2 соответственно, I – центр вписанной окружности треугольника ABC, r – ее радиус. Вычислим длины отрезков CP, CQ и CS .

3. $\Delta H_1CH_2 \sim \Delta ACB \Rightarrow CS = l_c \cdot \frac{CH_1}{CA} = l_c \cos \gamma$, но

$$lL_3 = \frac{r}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}, \quad \text{так как } \sphericalangle L_3IT_3 = \frac{|\beta - \alpha|}{2},$$

значит,

$$l_c = r \left(\frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}} \right),$$

тогда

$$CS = r \left(\frac{\cos \gamma}{\sin \frac{\gamma}{2}} + \frac{\cos \gamma}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}} \right).$$

4. $\sphericalangle T_1CI = \frac{\gamma}{2}$, следовательно, $\sphericalangle T_1IQ = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, значит,

$$T_1Q = r \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) = r \cos \frac{\gamma}{2},$$

откуда

$$CQ = T_1Q \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = r \frac{\cos^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

5. Пусть $IX \perp K_1K_2$, $X \in K_1K_2$. Тогда

$$\angle K_1IK_2 = 2\angle K_1K_3K_2 = 2\gamma \Rightarrow \angle K_1IX = \gamma,$$

стало быть,

$$IX = r \cos \gamma.$$

Но

$$\angle XIP = \angle L_3IT_3 = \frac{|\beta - \alpha|}{2},$$

поэтому

$$IP = \frac{r \cos \gamma}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}},$$

и из равенства

$$CI = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

следует, что

$$CP = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}} - \frac{r \cos \gamma}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}.$$

6. Докажем, что $CP + CS = 2CQ$, т.е. что Q – середина отрезка SP . Имеем:

$$\begin{aligned} CP + CS &= \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}} - \frac{r \cos \gamma}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}} + \frac{r \cos \gamma}{\sin \frac{\gamma}{2}} + \frac{r \cos \alpha}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}} = \\ &= \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}} (1 + \cos \gamma) = \frac{2r \cos \alpha^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = 2CQ. \end{aligned}$$

Значит, T_1T_2 – серединный перпендикуляр к отрезку SP . Продлим K_1K_2 и H_1H_2 до пересечения в точке Y . Мы доказали, что $\sphericalangle (H_1H_2, SP) = \sphericalangle (SP, K_1K_2)$, значит, треугольник SYP – равнобедренный, поэтому прямые H_1H_2 и K_1K_2 симметричны относительно YQ , т.е. относительно T_1T_2 . Это означает, что K_1K_2 совпадает с прямой l_3 . Аналогично, l_1 и l_2 – это прямые K_2K_3 и K_1K_3 , следовательно, треугольник, составленный из прямых l_1, l_2, l_3 , – это $K_1K_2K_3$. Его вершины лежат на вписанной в треугольник ABC окружности, что и требовалось доказать.

Т.Емельянова, А.Гайфуллин, Д.Терешин

M1764. Пусть функция $f: [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям: $f(0) = 0$, $f(1) > 0$, f монотонно возрастает на $[0; 1]$ и для любых $x_1, x_2 \in [0; 1]$, для которых $x_1 + x_2 \in [0; 1]$, выполняется неравенство

$$f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_1 + x_2).$$

Докажите, что тогда последовательность чисел

$$s_n = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

не ограничена.

Так как для любого $k \in \mathbf{N}$ имеем

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} \geq k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2},$$

то, как известно, последовательность чисел $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ не ограничена сверху (т.е. $a_n \rightarrow \infty$).

Задача будет решена, если мы докажем, что существует $c > 0$ со следующим свойством: $s_n \geq c \cdot a_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$.

Для достижения этого достаточно показать, что для всех $x \in (0; 1]$

$$f(x) \geq \frac{f(1)}{2} x. \quad (*)$$

Приведем доказательство неравенства (*).

Для всех $x \in [1/2; 1]$ имеем $x \leq 1 \leq 2x$. Тогда, применяя свойства f , получаем

$$f(1) \leq f(2x) = f(x+x) \leq f(x) + f(x) = 2f(x),$$

откуда, с учетом $0 \leq x \leq 1$, следует неравенство (*).

Далее можно применить математическую индукцию. Пусть

неравенство (*) выполняется для любого $x \in \left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right]$.

Тогда при $x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}; \frac{1}{2^n}\right]$ имеем $2x \in \left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. В силу

предположения тогда $f(2x) \geq \frac{f(1)}{2}(2x)$. С другой стороны,

как уже отмечено выше, $2f(x) \geq f(2x)$. Потому имеем

$2f(x) \geq \frac{f(1)}{2}(2x)$, что равносильно неравенству (*). По-

скольку любой $x \in (0; 1]$ находится в некотором отрезке

вида $\left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right]$, то неравенство (*) доказано и задача

решена.

В.Попов

M1765. Длина ребра правильного тетраэдра равна 1.

а) На ребрах тетраэдра отмечены 5 точек.

б) На поверхности тетраэдра отмечены 9 точек.

в*) В тетраэдре отмечены 9 точек.

Докажите, что в каждом случае найдутся две отмеченные точки, расстояние между которыми не превосходит 0,5.

а) Три полуребра, выходящих из какой-либо вершины тетраэдра $ABCD$, назовем репером. Таким образом, каркас тетраэдра (т.е. объединение его ребер) состоит из четырех реперов. Так как отмеченных точек пять, то найдутся две из них M и N , которые принадлежат одному реперу. Остается заметить, что диаметр репера равен 0,5, а, значит, $MN \leq 0,5$.

б) Средние линии разделяют каждую грань тетраэдра $ABCD$ на четыре треугольника. Треугольник, ограниченный средними линиями, в каждой грани оставляем белым, а объединение четырех таких треугольников называем множеством S . Все угловые треугольники (их 12) закрашиваем в черный цвет, а их объединение называем множеством T . Если 5 или более из 9 отмеченных точек попали в белое множество S , то среди них найдутся две, которые попадут в один из четырех белых треугольников.

Ясно, что расстояние между этими двумя точками не превосходит 0,5.

Если же множеству S принадлежит не более четырех отмеченных точек, то множеству T принадлежит 5 или более отмеченных точек. Воспользуемся тем, что множество T является объединением четырех подмножеств, каждое из которых в свою очередь является объединением трех черных треугольников с общей вершиной (вершиной тетраэдра). В одном из этих подмножеств найдутся две отмеченные точки. Расстояние между ними не больше 0,5, так как диаметр подмножества равен 0,5.

в) Представим тетраэдр $ABCD$ как объединение четырех правильных тетраэдров с длиной ребра 0,5 у каждого и правильного октаэдра Q (тоже с длиной ребра 0,5).

Если четырьмя тетраэдрами вместе принадлежат 5 или более отмеченных точек, то, рассуждая как в предыдущем пункте, мы обнаружим, что найдутся две среди них с расстоянием не более 0,5.

Таким образом, все свелось к рассмотрению случая, когда 5 (или более) отмеченных точек принадлежат октаэдру Q . Разрежем октаэдр Q на четыре многогранника, диаметр каждого из которых будет равен длине ребра октаэдра, т.е. 0,5. И дальше все получится... Но только я это написал, как тут же спохватился: ведь разрезать октаэдр таким образом я не умею! Более того, я не уверен, что это возможно.

Тогда, как «нормальному герою», мне придется идти в обход.

Опишем около октаэдра Q сферу, спроектируем на ее поверхность из ее центра 5 отмеченных в Q точек – получим точки X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5 . Нам достаточно доказать, что среди пяти проектирующих лучей найдутся два, угол между которыми не превосходит 90° .

Проведем три большие попарно перпендикулярные окружности I_1, I_2 и I_3 на сфере так, чтобы I_1 и I_2 пересекались в точке X_1 и чтобы точка X_2 принадлежала окружности I_1 . Три окружности разделили сферу на 8 сферических треугольников. Нужно убедиться, что найдутся две отмеченные точки, принадлежащие одному из них. Мы видим, что остались только два сферических треугольника, которым не принадлежат ни X_1 , ни X_2 . Но тогда им принадлежат три точки X_3, X_4 и X_5 . При всех вариантах в один из треугольников попадают две точки.

В.Произволов

Ф1773. На тонкий горизонтальный стержень насажена цилиндрическая шайба диаметром D и толщиной l ,

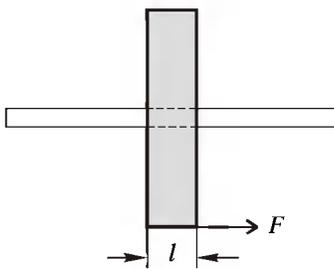


Рис.1

дырка по оси шайбы имеет диаметр чуть больше, чем диаметр стержня (рис.1). К краю шайбы приложена сила \vec{F} , параллельная стержню. При каком коэффициенте трения шайбы о стержень движение шайбы будет равномерным? Сила тяжести отсутствует!

дырка по оси шайбы имеет диаметр чуть больше, чем диаметр стержня (рис.1). К краю шайбы приложена сила \vec{F} , параллельная стержню. При каком коэффициенте трения шайбы о стержень движение шайбы будет равномерным? Сила тяжести отсутствует!

уравновешивать друг друга:

$$N_1 = N_2 = N.$$

Силы трения \vec{f}_1 и \vec{f}_2 в сумме компенсируют \vec{F} (движение шайбы по условию равномерное):

$$f_1 + f_2 = F.$$

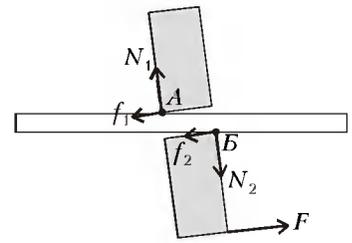


Рис.2

Проскальзывание есть, так что

$$f_1 = f_2 = f = \mu N.$$

Запишем еще условие для моментов сил (можно для аккуратности перейти в движущуюся вместе с шайбой инерциальную систему отсчета). Удобно рассматривать моменты сил относительно точки A – из-за малого диаметра стержня можно не учитывать момент силы \vec{f}_2 :

$$N_2 l - F \frac{D}{2} = 0, \text{ откуда } N = N_2 = F \frac{D}{2l}.$$

Окончательно найдем

$$2\mu F \frac{D}{2l} = F, \text{ и } \mu = \frac{l}{D}.$$

А.Зильберман

Ф1774. Легкий жесткий стержень подвешен горизонтально за концы при помощи двух легких нитей, вытянутых по вертикали (рис.1). На стержень насажены два груза массы M и $2M$, расположенных симметрично на равных расстояниях друг от друга и от концов стержня. Нить со стороны тяжелого груза пережигают.

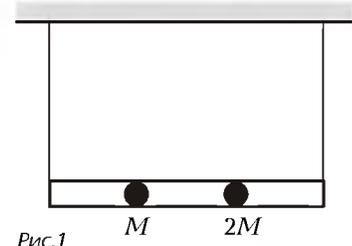


Рис.1

Во сколько раз изменится сила натяжения оставшейся нити сразу после этого? Считайте, что за интересующий нас короткий временной интервал стержень не успевает заметно сдвинуться.

Выберем для расчетов малый интервал времени τ – такой малый, что стержень после пережигания нити смещается из начального положения очень мало. Тогда можно считать, что точка A (рис.2) практически неподвижна, а стержень поворачивается вокруг точки A . До пережигания нити сила T_1 находится из уравнения моментов (удобно считать моменты сил относительно точки B):

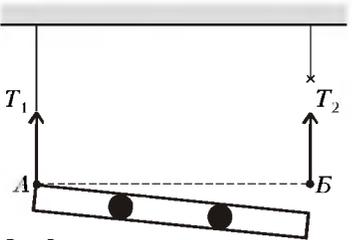


Рис.2

$$2Mg \frac{l}{3} + Mg \frac{2l}{3} - T_1 l = 0, \text{ и } T_1 = \frac{4}{3} Mg.$$

Для определения силы T_1^* , сразу после пережигания, найдем ускорение центра масс системы $a_{цм}$ и воспользуемся уравнением второго закона Ньютона

$$3Mg - T_1^* = 3Ma_{цм}.$$

Обозначим ускорение легкого груза a , тогда тяжелый груз имеет ускорение $2a$. За время τ первый груз опустится на $a\tau^2/2$, второй – на $2a\tau^2/2$, и потенциальная энергия системы уменьшится на

$$\Delta E_p = Mg \frac{a\tau^2}{2} + 2Mg \frac{2a\tau^2}{2}.$$

В рассматриваемый момент времени скорость малого груза равна $a\tau$, большого $2a\tau$, а суммарная кинетическая энергия составляет

$$E_k = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{2M(2a\tau)^2}{2}.$$

Приравняв ΔE_p и E_k , получим

$$a = \frac{5}{9}g \text{ и } a_{ц} = \frac{5}{3}a = \frac{25}{27}g.$$

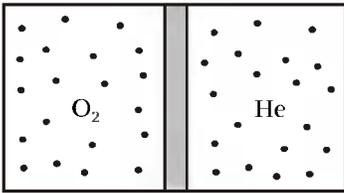
Тогда

$$T_1^* = 3Mg - 3Ma_{ц} = \frac{2}{9}Mg.$$

Итак, сила натяжения оставшейся нити уменьшится в 6 раз.

Р. Старов

Ф1775. Тонкостенный горизонтальный цилиндрический медный сосуд разделен пополам массивным теплопроводящим поршнем (см. рисунок). С одной стороны от поршня находится разреженный кислород, с другой – гелий. Если сместить поршень немного из положения равновесия и отпустить, он будет совершать колебания. Во сколько раз может измениться период этих колебаний, если теплоизолировать сосуд от окружающей среды? Сосуд закреплён и двигаться не может.



от поршня находится разреженный кислород, с другой – гелий. Если сместить поршень немного из положения равновесия и отпустить, он будет совершать колебания. Во сколько раз

может измениться период этих колебаний, если теплоизолировать сосуд от окружающей среды? Сосуд закреплён и двигаться не может.

В первом случае будем считать, что через тонкие стенки сосуда легко проникает тепло – в этом случае температуру газов в любой момент можно считать равной внешней температуре, т.е. $T = \text{const}$. Обозначим длину сосуда $2l$, малое смещение поршня x . Тогда для каждой половины сосуда запишем

$$p_0 V_0 = (p_0 + \Delta p)(V_0 - \Delta V),$$

или

$$p_0 S l = (p_0 + \Delta p) S (l - x),$$

где S – площадь сечения сосуда. Отсюда

$$\Delta p = p_0 \frac{x}{l}$$

(мы пренебрегли произведением малых величин x и Δp). Если в одной половине сосуда давление увеличивается на Δp , то в другой оно уменьшается на такую же величину. Возвращающая сила, действующая на поршень, равна

$$F = -2\Delta p S = -2p_0 \frac{S}{l} x = Mx'',$$

отсюда для частоты колебаний поршня массой M получаем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2p_0 S}{lM}}.$$

В случае хорошей теплоизоляции температура при колебаниях изменяется, при этом силы, действующие на поршень, также изменяются. Пусть объем гелия уменьшился при смещении поршня на $xS \ll lS$, а давление увеличилось на Δp_1 . Используем первое начало термодинамики:

$$A + \Delta U = 0, \text{ или } -p_0 S x + \frac{3}{2} \nu R \Delta T = 0,$$

и уравнение состояния газа:

$$pV = \nu RT, \text{ или } \nu R \Delta T = p \Delta V + V \Delta p_1 = -p_0 S x + S l \Delta p_1.$$

Отсюда получим

$$-p_0 S x + \frac{3}{2} (-p_0 S x + S l \Delta p_1) = 0,$$

или

$$\Delta p_1 = \frac{5}{3} p_0 \frac{x}{l}.$$

Давление кислорода уменьшается, но для его нахождения нужно учесть, что это двухатомный газ, тогда

$$\Delta p_2 = -\frac{7}{5} p_0 \frac{x}{l}.$$

Разность давлений создает возвращающую силу

$$F = -\left(\frac{5}{3} + \frac{7}{5}\right) p_0 \frac{x}{l} S = -\frac{46}{15} p_0 \frac{S}{l} x.$$

Следовательно, новая частота колебаний равна

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{46}{15} \frac{p_0 S}{lM}},$$

а отношение частот составляет

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{23}{15}} \approx 1,24.$$

Очевидно, что период колебаний уменьшится во столько же раз.

А. Диабатов

Ф1776. Маленький проводящий незаряженный шарик находится на большом расстоянии от точечного заряда Q . Во сколько раз изменится сила, действующая на шарик со стороны заряда, если расстояние между ними увеличить в два раза? Во сколько раз нужно будет увеличить диаметр шарика, чтобы вернуть силу взаимодействия к прежнему значению? Подсказка: помещенный в однородное (или почти однородное) поле проводящий незаряженный шарик похож на маленький диполь (маленький – по сравнению с диаметром шарика).

На большом расстоянии от заряда Q его поле в пределах объема маленького шарика можно считать однородным; в этом поле разность потенциалов между диаметрально противоположными точками шарика A и B (рис.1) равна

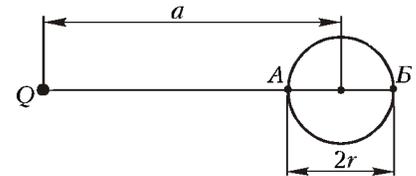


Рис.1

$$\Delta \phi_{AB} = k \frac{Q}{a^2} \cdot 2r.$$

Шарик проводящий, поэтому результирующая разность

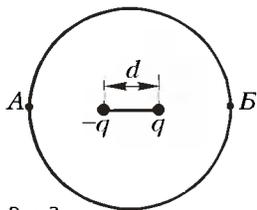


Рис.2

потенциалов между этими точками должна обратиться в ноль. Воспользуемся подсказкой – заменим индуцированные на шарике заряды диполем с зарядами $-q$ и q на расстоянии $d \ll r$ друг от друга (рис.2). В почти однородном поле этот диполь находится практически в центре шарика. В поле диполя потенциалы точек A и B равны

$$\varphi_A = k \frac{-q}{r-d/2} + k \frac{q}{r+d/2} \quad \text{и} \quad \varphi_B = k \frac{q}{r-d/2} + k \frac{-q}{r+d/2},$$

а

$$\Delta\varphi_{BA} = 2k \frac{qd}{r^2}.$$

Тогда

$$2k \frac{qd}{r^2} = 2k \frac{Qr}{a^2},$$

откуда

$$qd = Q \frac{r^3}{a^2}.$$

На диполь действует сила

$$F = -k \frac{Qq}{(a-d/2)^2} + k \frac{Qq}{(a+d/2)^2} = \\ = -k \frac{Qq}{(a^2 - d^2/4)^2} \cdot 2ad \approx -2k \frac{Qqd}{a^3} = -2k \frac{Q^2 r^3}{a^5}.$$

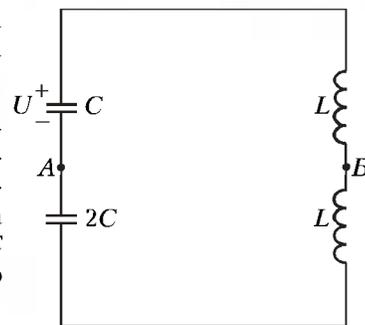
Знак «минус» означает притяжение. Видно, что при увеличении a вдвое сила уменьшится в 32 раза.

Для компенсации уменьшения силы r^3 должно увеличиться в 32 раза. Для этого радиус шарика нужно увеличить в $\sqrt[3]{32} \approx 3,17$ раза.

А.Повторов

Ф1777. Из двух конденсаторов с емкостями C и $2C$ и двух одинаковых катушек с индуктивностью L собрана схема, показанная на рисунке. Конденсатор емкостью C

вначале заряжен до напряжения U . Дождемся момента, когда этот конденсатор окажется полностью разряженным, и соединим точки A и B проводящей перемычкой. Найдите максимальный ток через перемычку. Элементы цепи можно считать идеальными.



В тот момент, когда конденсатор емкостью C окажется полностью разряженным, напряжение на конденсаторе емкостью $2C$ станет равным $0,5U$ (по цепи протек заряд CU). Найдем ток I , текущий

через катушки в этот момент, из закона сохранения энергии:

$$\frac{CU^2}{2} = \frac{2C(0,5U)^2}{2} + 2 \frac{LI^2}{2}, \quad \text{и} \quad I = \frac{U}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

После соединения перемычкой точек A и B получаются два независимых контура: верхний $L - C$ и нижний $L - 2C$. Амплитуда тока верхнего контура равна I , а амплитуду тока в нижнем контуре I^* найдем из закона сохранения энергии в нем:

$$\frac{2C(0,5U)^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{LI^{*2}}{2}, \quad \text{и} \quad I^* = \frac{U}{2} \sqrt{3 \frac{C}{L}}.$$

Ток через перемычку AB равен разности токов контуров – разумеется, с учетом постоянно меняющейся разности фаз. Частоты отличаются в $\sqrt{2}$ раз – обязательно наступит такой момент, в который токи «удачно» вычитаются и получается максимальное значение, равное сумме амплитуд:

$$I_{AB} = I + I^* = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} U \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

З.Рафаилов

Деление урана: от Клапрота до Гана

(Начало см. на с. 20)

и Марбурге, а первые шаги в науке делал под руководством Уильяма Рамзая в Лондоне и Эрнеста Резерфорда в Монреале. По возвращении в Германию Ган продолжил свои исследования радиоактивных элементов в Химическом институте Берлинского университета. Здесь же он встретился с Лизе Мейтнер, которая прибыла в Берлин из Вены на учебу к Макс Планку. Сотрудничество Отто Гана и Лизе Мейтнер продолжалось более 30 лет. В 1912 году Ган стал директором радиохимической группы вновь созданного Института

физической химии и электрохимии Общества кайзера Вильгельма. В годы первой мировой войны Ган принимал участие в боевых действиях на Западном фронте. После окончания войны Ган продолжил исследования радиоактивности и в 1928 году стал директором Института физической химии и электрохимии. В 1934 году его ближайшая сотрудница Лизе Мейтнер была вынуждена покинуть Германию, и их работа продолжалась лишь по переписке. В годы второй мировой войны Ган занимался фундаментальными исследованиями продуктов ядерного распада, хотя и был подключен к некоторым проектам ядерных исследований вермахта. В конце войны Ган и его коллеги были арестованы союз-

ными войсками и переправлены в Англию. Здесь же Отто Ган узнал о ядерных бомбардировках японских городов Хиросима и Нагасаки и пережил по этому поводу сильнейшее потрясение. В 1946 году Ган вернулся в Германию и стал президентом Общества кайзера Вильгельма, переименованного в Общество Макса Планка. В этом же году ему была вручена Нобелевская премия по химии за 1944 год. Выступая с публичными лекциями об опасности распространения ядерного оружия, Отто Ган объединил многих ученых в борьбе за мирное развитие человечества.

Задачи

1. Дядюшка Скрудж зашел в магазин спортивных товаров за подарками для племянников. Протянув продавцу 20 долларов, он попросил продать ему один футбольный мяч, три баскетбольных и коробку теннисных. Положена ли ему сдача, если денег на покупку



заведомо хватит и известно, что один теннисный мяч стоит 33 цента, а один футбольный – столько, сколько стоят три волейбольных и пять теннисных мячей вместе взятых?

И. Жук

2. Три веселых маляра раскрасили ребра куба в три цвета так, что никакие два одноцветных ребра не имеют общей вершины. Докажите, что ребер каждого цвета



ровно четыре. (Каждое ребро куба окрашено только один цвет).

Д. Калинин

3. Найдите девять последовательных трехзначных чисел, обладающих следующим свойством: если в каждом из этих чисел перемножить цифры, а затем



сложить полученные девять произведений, то в результате получится число 1125.

К. Кохась

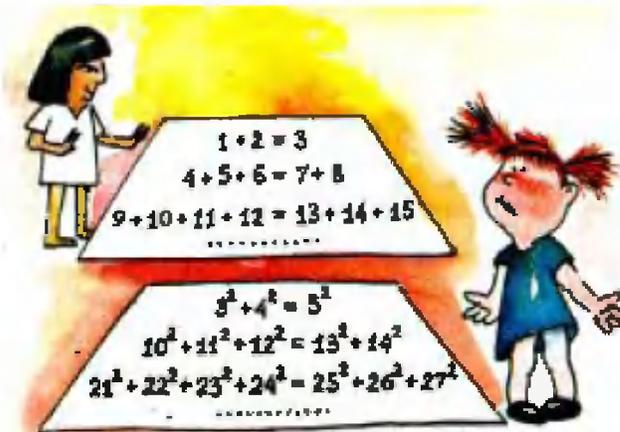
4. На плоскости расположены два равных, но несовпадающих треугольника. Прямая P_1 делит площадь каждого из них пополам, а прямая P_2 делит пополам их периметры. Могут ли прямые P_1 и P_2 быть взаимно перпендикулярными?

И. Акулицы



5. Найдите и обоснуйте закономерности, которым подчиняются числовые равенства, написанные в пирамидах.

Дима Бабицев, 3 кл. (Набережные Челны)



Иллюстрации Д. Гришуковой

Математические знаки

Попробуйте показать иностранцу, не знакомому с русским языком, запись «Ваня + Аня = любовь». Он наверняка поймет только два символа: «+» и «=». Точно так же мы узнаем эти символы в японском эквиваленте:

$$\text{小僧} + \text{女の子} = \text{愛}$$

Впрочем, не только эти, но и остальные математические знаки вполне интернациональны и практически не зависят от языка, используемого в той или иной стране.

Первыми математическими знаками были *цифры*. Наиболее удобными оказались арабские цифры: 0, 1, 2 и т.д. Римскими цифрами пользуются достаточно редко: иногда ими записывают века или годы (MMI=2001 год), главы книг или нумерованные события.

Буквенные обозначения для неизвестных величин появились еще в III веке у Диофанта. Он же ввел особые знаки для арифметических операций. Однако только в XIV – XVII веках была создана система буквенных обозначений, характерная для наших дней. В конце XV века итальянец Л. Пачоли и француз Н. Шюке для сложения и вычитания использовали знаки \tilde{p} (от латинского plus) и \tilde{m} (minus), а немецкие математики ввели современные обозначения + и -.

В XVI веке использовалась смешанная запись, содержащая и слова, и некоторые математические знаки. Так, уравнение

$$x^3 + 5x = 12$$

Дж. Кардано (1545) записал бы в виде

$$1. \text{ cubus } \tilde{p}. \text{ } \zeta. \text{ positionibus } \\ \text{aequantur } 12$$

(cubus – куб, positio – неизвестная, aequantur – равно). Француз Ф. Виет (1591) записал бы его как

$$1C + \zeta N, \text{aequat} 12$$

(C – cubus – куб, N – numerus – число). Но уже в 1631 году англичанин Т. Гарриот использовал бы для записи этого уравнения вполне понятный для нас вид

$$aaa + 5 \cdot a = 12.$$

Р. Декарт в 1637 году придал алгебраическим выражениям полностью современный вид. Он изображал неизвестные величины последними буквами латинского алфавита, например: x, y, z , а параметры – начальными буквами: a, b, c .

Постепенно принимали знакомый всем вид показатели степеней и знаки радикалов. Современное обозначение знака радикала $\sqrt{\quad}$ представляет собой слитную запись двух частей: модифицированной буквы r (от radix – корень) и черты, ограничивающей выражение, к которому применен знак радикала.

В XVII веке, в первую очередь усилиями Г. Лейбница и И. Ньютона, начали развиваться дифференциальное и интегральное исчисления. Лейбниц впервые ввел название «производная» (derivative) в 1667 году. Он использовал обозначения $dx, dy, \frac{dx}{dy}$.

А еще через сотню лет Ж. Лагранж ввел очень удобную запись, которой мы и пользуемся поныне: $u' = \frac{du}{dx}$, $du = u'dx$. Термин «дифференциал» (differential) появился в 1704 году в «*Lexicon technicum*» – универсальном словаре искусства и науки Джона Харриса.

Привычное обозначение для частной производной $\frac{du}{dx}$ впервые ввел А. Лежандр (1786). Правда, ему это почему-то не понравилось, и эта запись не использовалась вплоть до 1841 года, когда ее стал употреблять К. Якоби.

Лейбниц начал обозначать знак интеграла как *omn.* (от omnia – всеобщее). Он же ввел и современное \int как стилизованную букву S (от summa). Ньютону повезло меньше: предложенное им для интеграла обозначение ξ было отвергнуто, так как очень походило на штрих. Само название «интеграл» в печати первым дал Якоб Бернулли в 1690 году. Другой представитель этой славной семьи, Иоганн, также претендовал на первенство в использовании терми-

на. К слову сказать, семья Бернулли – три поколения – внесла огромный вклад в современные науки: математику, физику, химию. И сейчас, отдавая им за это должное, уже никто не интересуется, кто конкретно из них за что отвечает. О важности понятия интеграла знал даже Лев Толстой: «Когда бы в университете мне сказали, что другие понимают интегральное вычисление, а я не понимаю, – тут самолюбие. Но тут надо быть убежденным прежде, что нужно иметь известные способности для этих дел и, главное, в том, что все эти дела важны очень» (из романа «Анна Каренина»).

Для определенного интеграла Л. Эйлер предложил пределы интегрирования заключать в скобки: (a, b) – не привилось! Современная запись \int_a^b была введена Ж. Фурье в 1822 году, а обозначение \oint для интеграла по контуру ввел в 1917 году А. Зоммерфельд.

Знак предела \lim (с точкой) предложил С. Люилье в 1786 году, а принятое теперь $\lim_{x \rightarrow x_0}$ – это заслуга Г. Харди (1908).

В последнее же время особо новых математических обозначений не вводилось – так что держайтесь!

В. Калинин



Знак	Значение	Кто ввел	Когда введен
Знаки объектов			
∞	бесконечность	Дж.Валлис	1655
π	отношение длины окружности к диаметру	У.Джонс Л.Эйлер	1706 1736
i	корень квадратный из -1	Л.Эйлер	1777
x, y, z	неизвестные или переменные величины	Р.Декарт	1637
	вектор	О. Коши	1853
Знаки операций			
$+$	сложение	немецкие математики	конец XV в.
$-$	вычитание	немецкие математики	конец XV в.
\times	умножение	У.Оутред	1631
\cdot	умножение	Г.Лейбниц	1698
$:$	деление	Г.Лейбниц	1684
a^2, a^3, \dots, a^n	степени	Р.Декарт	1637
$\sqrt{\quad}, \sqrt[3]{\quad}$	корни	Х.Рудольф А.Жирар	1525 1629
Log, log	логарифм	И. Кеплер	1624
sin	синус	Б. Кавальери	1632
cos	косинус	Л.Эйлер	1748
tg	тангенс	Л.Эйлер	1753
arcsin	арксинус	Ж.Лагранж	1772
dx, ddx, d^2x, d^3x	дифференциал	Г.Лейбниц	1675
$\int ydx$	интеграл	Г.Лейбниц	1675
$\frac{dy}{dx}$	производная	Г.Лейбниц	1675
$\int_a^b f(x)dx$	определенный интеграл	Ж.Фурье	1819–1822
Σ	сумма	Л.Эйлер	1755
$!$	факториал	Х. Крамп	1808
$\lim_{x \rightarrow x_0}$	предел	Г.Харди	1908
φ, f	функция	И.Бернулли	1718
\mathcal{A}, \mathcal{B}	функция	Л.Эйлер	1734
Знаки отношений			
$=$	равенство	Р.Рекорд	1557
$>$	больше	Т.Гарриот	1631
$<$	меньше	Т.Гарриот	1631
\equiv	сравнимость	К.Гаусс	1801
\parallel	параллельность	У.Оутред	1677
\perp	перпендикулярность	П.Эригон	1634

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередную конкурсную серию по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (спометкой «Конкурс «Математика 6–8»»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон.

1. Положительные числа a , b , c таковы, что

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b - c)^3 + (a - b + c)^3 + (-a + b + c)^3.$$

Докажите, что $a = b = c$.

В.Произволов

2. Два параллелограмма $ABCD$ и $CEFK$ имеют общую вершину C . Известно, что BE параллельно DK , а длины этих отрезков равны a и b . Найдите длину AF .

М.Волчкевич

3. Десять различных чисел x_1, x_2, \dots, x_{10} преобразовали следующим образом:

$$x_1 \rightarrow ax_1 + b;$$

$$x_2 \rightarrow ax_2 + b;$$

.....

$$x_{10} \rightarrow ax_{10} + b,$$

где a и b – некоторые числовые параметры. Оказалось, что множество вновь полученных чисел совпало со

множеством исходных десяти чисел. Верно ли, что
а) $|a| = 1$; б) $b = 0$?

В.Сеидеров

4. Можно ли расставить на шахматной доске несколько пешек так, чтобы количества пешек на соседних вертикалях отличались в 2 раза, а на соседних горизонталях – в 3 раза?

И.Акулич

5. В грибе, представляющем из себя квадрат 16×16 , разбитый на 256 равных квадратиков, завелись 13 червяков. Каждый червяк представляет из себя цепочку из пяти квадратиков, в которой каждые два последовательных квадратика имеют общую сторону.

а) Докажите, что одним разрезом, параллельным стороне квадрата, можно разрезать по крайней мере трех червяков.

б) Останется ли верным утверждение из пункта а), если один из червяков выползет из гриба?

И.Жук

Молоко убежало!

Н.ЕЛИСЕЕВ

Как показывает опыт, процесс кипения молока всегда начинается неожиданно и происходит весьма стремительно. Белая шапка молочной пены образуется в доли секунды, стремительно поднимается до края кастрюли, и... кажется, никакая сила не способна удержать пену в этот момент – резкий запах горелого молока наполняет кухню.

Можно ли справиться с коварным молоком? Конечно, можно. Правильное понимание физических процессов, происходящих при кипении молока, поможет нам его укротить.

Сначала постараемся понять, почему же все-таки убегает молоко. Заметить приближение начала кипения в непрозрачном молоке невозможно, поэтому про-

ведем наблюдения с обычной водопроводной водой. Для экспериментов лучше взять прозрачную стеклянную посуду (обязательно термостойкую), но можно обойтись и обыкновенной алюминиевой кастрюлей или даже пустой консервной банкой.

Поставьте кастрюлю на огонь, наполнив ее холодной водой. По мере нагревания кастрюли вы увидите, что ее дно и стенки покрываются мелкими газовыми пузырьками. Они чаще всего образуются на дне кастрюли – особенно там, где есть следы жира, песчинки, мелкие царапины или невидимые глазом микротрещины. Эти пузырьки образуются за счет выделения газов, растворенных в воде. Температура воды у дна нашей экспериментальной кастрюли несколько выше, чем на повер-

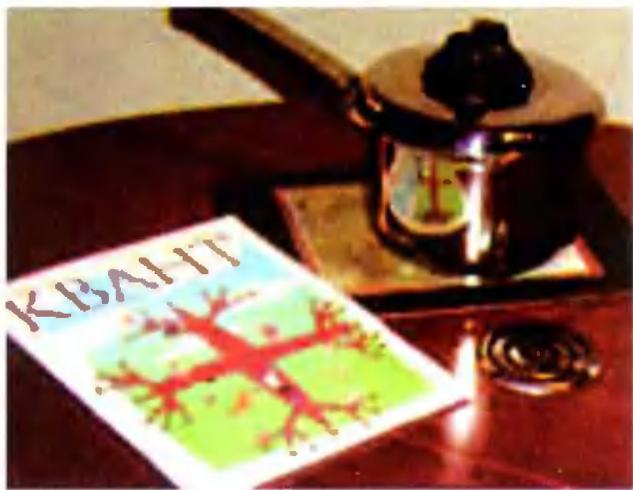
хности, поэтому вода возле дна должна испаряться более интенсивно. Только куда ей испаряться в глубине? Вот вода и находит выход – испаряется внутрь газовых пузырьков.

С повышением температуры количество пара в пузырьке растет, пузырек увеличивается в объеме, наконец, выталкивающая сила Архимеда отрывает его от дна, и он всплывает. А на дне уже «зреет» новый пузырек. При приближении к температуре кипения количество паровых пузырьков быстро увеличивается, и... начинается процесс кипения.

Но где же пена? В случае воды ее действительно нет, а в случае молока она появляется, причем в большом количестве. Все дело в том, что на поверхности молока при нагревании образуется достаточно прочная пленка из полимеризовавшихся молекул молока (это та самая пенка, которую многие так не любят в кипяченом молоке), не позволяющая пузырькам пара выходить на поверхность. В некоторый момент под пленкой скапливается достаточно большое количество пузырьков, способных прорвать молочную пленку. И в этот миг молоко «убегает», хотя на самом деле «убегает» молочная пена, прорвавшаяся сквозь пленку на поверхность молока.

Заметим, что образование пены связано не только с испарением, но и с наличием в жидкости различных веществ-примесей. Попробуйте самостоятельно поэкспериментировать и выяснить, как различные вещества влияют на пенообразование.

Теперь попробуем научиться отслеживать появление пены на молоке и управлять ее образованием. Нанесите несколько царапин на небольшом участке дна емкости – для этих целей лучше всего подойдет дно использованной консервной банки. Налейте в нее воду и поставьте на плиту. Заметили, откуда в основном поднимаются пузырьки? Действительно, возле царапин образовались очаги локального кипения, а в остальном объеме находится перегретая, но практически еще не кипящая жидкость. Кипение стало управляемым, поскольку поднимающиеся со дна крупные пузыри прямо-таки бьют ключом и не дают образоваться на поверхности молочной пленке.



Итак, проблема решена. Надо создать очаги локального кипения – и вероятность быстрого вскипания молока резко снизится. Но какая хозяйка решится царапать кастрюлю?



Пусть лучше молоко убежит, чем испортится любимая кастрюля! Однако выход есть – можно не царапать стенки кастрюли, а положить на дно, например, проволоку с шершавой поверхностью или пластинку. Этот способ активно используют химики. Нагревая различные смеси, они кладут на дно стеклянные шарики или обрезки нержавеющей проволоки, чтобы исключить выбросы нагреваемых, подчас очень жгучих, химических смесей.

Некоторое время назад наша промышленность выпускала специальный «сторож молока», выполненный в виде диска из нержавеющей стали с концентрическими канавками. Поверхность его гладкая и легко моется. Диск кладут на дно кастрюли, при этом в канавках остается довольно много воздуха – сюда и устремляются пары закипающего молока. В результате на дне образуются довольно крупные пузыри, которые всплывают на поверхность через специальную горловину в диске. Пена в этом случае не образуется, и молоко не убежит. Можно даже и не присматривать за ним, умный «сторож» сам позовет вас – как только начнут образовываться крупные пузыри, диск станет подпрыгивать, слегка позванивая.

В качестве «сторожа» для молока можно приспособить также крышку для консервирования – стеклянную или стальную. Ее нужно положить на дно бортиками вниз – в этом случае под ней останется достаточно воздуха, который при нагревании будет расширяться и струйкой пузырьков устремляться вверх, разрушая поверхностную пленку и тем самым предотвращая резкое вскипание молока.

Можно использовать и еще один способ, который особенно рекомендуется для микроволновых печей. Берется достаточно глубокая посуда, молоко наливается до половины, а внутренние края стенок смазываются сливочным маслом. В этом случае молочная пена доходит до границы смазки и останавливается. Почему это происходит, поразмышляйте сами.

В заключение заметим, что не стоит обольщаться, уверовав во всемогущество физики. Если вы при кипячении молока будете подводить к нему очень мощный поток тепла, т.е. будете включать огонь на максимум, вас не спасут никакие хитрости – молоко все равно убежит. Поэтому при проведении экспериментов будьте, пожалуйста, предельно внимательны и осторожны. Помните, что ожог от молока более болезненный, чем от воды. Недаром появилась поговорка: «Обжегшись на молоке, дуют на воду».

Ортоцентрический треугольник

А.ЕГОРОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ПОГОВОРИМ о высотах треугольников.

Напомним прежде всего, что во всяком треугольнике высоты (точнее — прямые, на которых они лежат) пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром*.

Вот изящное доказательство этого факта. Возьмем произвольный треугольник ABC . Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — его высоты. Через вершины A , B и C проведем прямые, параллельные противоположным сторонам (рис.1). В

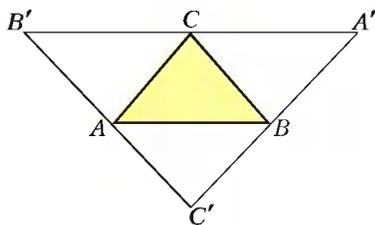


Рис. 1

результате получится треугольник $A'B'C'$, стороны которого параллельны AB , BC и AC соответственно. Прямые, перпендикулярные $A'B'$ в точке C , $B'C'$ в точке A и $A'C'$ в точке B , т.е. серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A'B'C'$, пересекаются в точке H — центре описанной около $A'B'C'$ окружности. Но каждая из высот треугольника ABC лежит на одной из этих прямых.

Упражнение 1 (теорема Эйлера). Докажите, что во всяком треугольнике точка пересечения медиан M , центр описанной окружности O и ортоцентр H

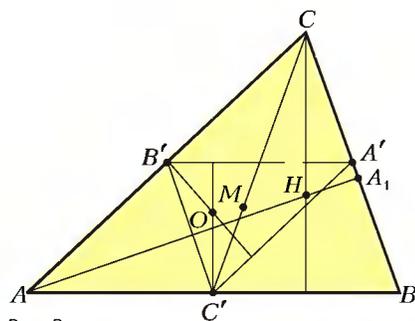


Рис. 2

лежат на одной прямой, и найдите, в каком отношении точка M делит отрезок OH . *Указание.* Пусть A' , B' , C' — середины сторон треугольника ABC (рис.2), H — его ортоцентр, O — центр описанной окружности, а M — центр тяжести. Заметим, что точка O — ортоцентр треугольника $A'B'C'$, а при гомотетии с коэффициентом -2 и центром в точке M точки A' , B' , C' переходят в точки A , B и C соответственно, а точка O — в H .

При этом ортоцентр H лежит внутри треугольника ABC , если он остроугольный, и вне него, если ABC — тупоугольный треугольник (рис. 3, а, б). Для прямоугольного треугольника ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла (рис. 3, в).

Попутно отметим, что для тупоугольного треугольника ABC треугольник AHB (см.рис.3,б) — остроуголь-

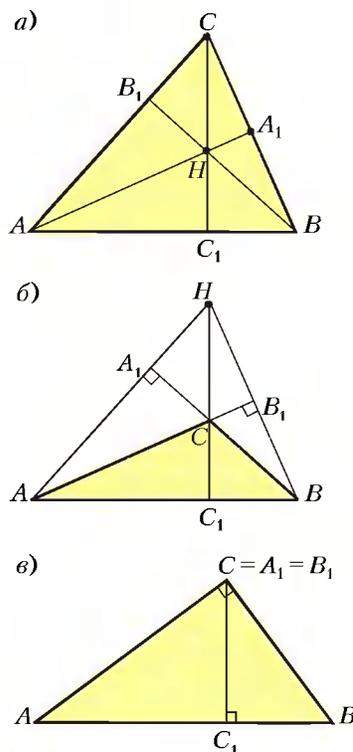


Рис. 3

ный с высотами AB_1 , BA_1 , HC_1 и ортоцентром C . Это замечание будет нам полезно в дальнейшем. Стоит также обратить внимание на то, что каждая из четырех точек A , B , C и H является ортоцентром треугольника, образованного остальными тремя точками.

Вспомогательная окружность

В дальнейшем будут использованы стандартные обозначения для сторон и углов треугольника: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Через R мы будем обозначать радиус описанной окружности, а через O — ее центр.

Начнем с задачи.

Задача. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны.

Рассмотрим сначала остроугольный треугольник ABC . Поскольку углы AA_1B и BB_1A — прямые, точки A , B_1 , A_1 и B лежат на окружности с диаметром AB (рис.4,а). Поэтому $\angle B_1A_1B = \pi - \alpha$. Но это значит, что $\angle CA_1B_1 = \alpha$, и треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны по третьему признаку подобия. Если же ABC тупоугольный

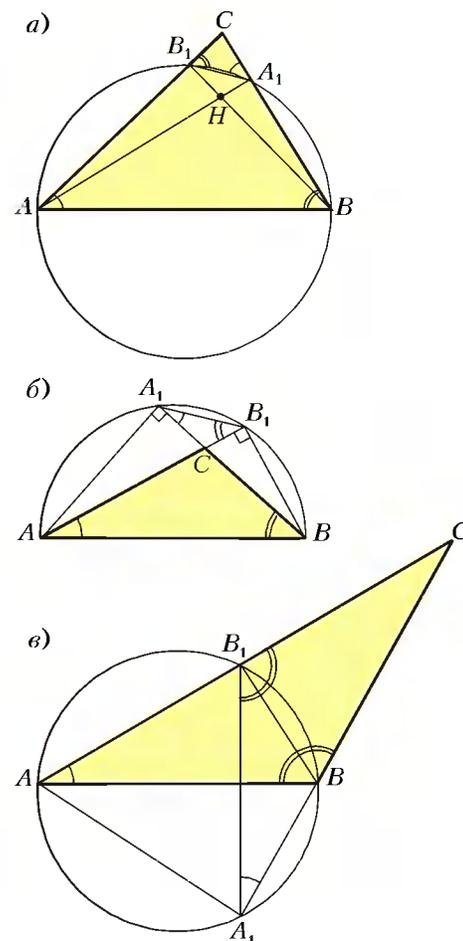


Рис. 4

и $\gamma > \pi / 2$ (рис.4,б), то точки A_1, B_1, B, A лежат на одной окружности, а углы $\angle A_1B_1A$ и $\angle ABA_1$ равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.

Если C — острый, а B — тупой угол, то B_1BA_1A — вписанный четырехугольник (рис.4,в) и $\angle BA_1B_1 = \angle A$, что доказывает утверждение задачи и в этом случае.

Во всех трех случаях при доказательстве равенства углов была использована окружность, содержащая 4 точки интересующей нас конфигурации. Дальше этот прием будет применяться неоднократно.

Отметим еще, что коэффициент подобия треугольников ABC и A_1B_1C равен

$$k = \frac{B_1C}{BC} = \cos \gamma, \text{ если } \gamma < \pi / 2,$$

и

$$k = |\cos \gamma|, \text{ если } \gamma > \pi / 2.$$

Упражнения

2. Найдите сторону AB треугольника ABC , если $A_1B_1 = l$, а $\angle C = \gamma$.

3. Найдите угол C треугольника ABC , если отрезок A_1B_1 а) равен R , где R — радиус описанной около него окружности; б) равен $\frac{1}{2}R$. в) В каких пределах может меняться отношение $\frac{A_1B_1}{R}$?

4. Докажите, что прямые OC и A_1B_1 перпендикулярны.

5. Пусть R — радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , а p_1 — полупериметр треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите площадь треугольника ABC .

Замечание. Внимательно разглядев рисунок 4,а, нетрудно заметить, что

$$\angle B_1A_1A = \angle B_1BA = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Аналогично, из рисунка 4,б

$$\angle B_1A_1A = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Эти соотношения нам тоже пригодятся в дальнейшем.

Ортоцентрический треугольник

Ортоцентрическим треугольником для данного треугольника ABC называется треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями его высот. Ясно, что если исходный треугольник не является прямоугольным, то ортоцентрический треугольник существует.

Выразим углы ортоцентрического треугольника через углы данного. Сначала сделаем это для остроуголь-

ного треугольника. Прежде всего заметим (рис.5,а), что, как было ранее доказано, $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B = \alpha$. Поэтому в ортоцентрическом треугольнике

$$\angle A_1 = \pi - 2\alpha,$$

аналогично.

$$\angle B_1 = \pi - 2\beta, \angle C_1 = \pi - 2\gamma.$$

Попутно становится очевидным, что

$$\angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A,$$

т.е. что высота AA_1 является биссектрисой угла A_1 ортоцентрического треугольника.

Итак, *высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортоцентрического треугольника, а ортоцентр H — центром вписанной в $\Delta A_1B_1C_1$ окружности.*

Упражнение 6. Найдите углы остроугольного треугольника, если его ортоцентрический треугольник а) правильный; б) равнобедренный прямоугольный; в) равнобедренный с углом при вершине $2\pi / 3$; г) имеет углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

Теперь найдем углы треугольника $A_1B_1C_1$, если угол C тупой.

Мы уже отметили ранее, что $\angle A_1B_1A = \beta$. Кроме того, в остроугольном треугольнике $A_1H_1B_1$ (рис.5,б) AB_1, BA_1, HC_1 — высоты, так что треугольник $A_1B_1C_1$ является ортоцентрическим и для $A_1H_1B_1$. Мы уже видели, что

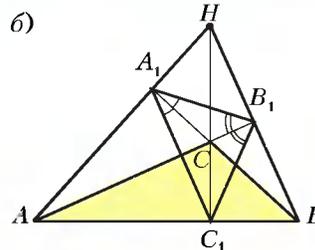
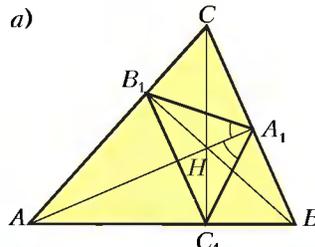


Рис. 5

$\angle A_1B_1A = \beta$, а высота AB_1 — биссектриса угла B_1 . Поэтому $\angle B_1 = 2\beta$. Аналогично, $\angle A_1 = 2\alpha$, а $\angle C_1 = 2\gamma - \pi$.

Упражнения

7. Найдите углы тупоугольного треугольника, если его ортоцентрический треугольник а) правильный; б) равно-

бедренный прямоугольный; в) имеет углы $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

8. Найдите углы треугольников, подобных своим ортоцентрическим треугольникам.

9. Сколько существует (с точностью до подобия) треугольников, ортоцентрический треугольник которых неравнобедренный и имеет углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$?

10. Вторым ортоцентрическим треугольником для данного треугольника называется ортоцентрический треугольник его ортоцентрического треугольника. Найдите углы треугольника, если его второй ортоцентрический треугольник правильный.

Ортоцентр и описанная окружность

Снова начнем с остроугольного треугольника ABC . Пусть H — его ортоцентр. Опшем около ΔABC окружность. Пусть H_1, H_2, H_3 — точки пересечения продолжений высот исходного треугольника с описанной окружностью (рис.6).

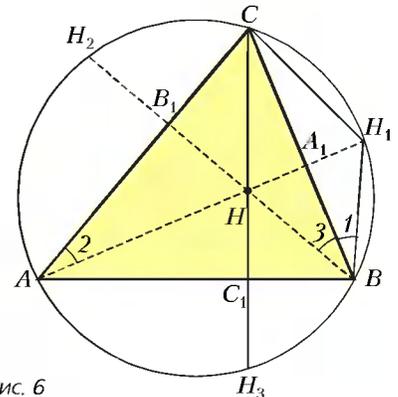


Рис. 6

Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ (как вписанные), а $\angle 2 = \angle 3$ (это острые углы двух прямоугольных треугольников с общим углом C), получаем, что $\angle 1 = \angle 3$, а треугольник $H_1H_2H_3$ равнобедренный, так как его высота BA_1 является биссектрисой. Следовательно, $HA_1 = A_1H_1$, т.е.

точка, симметричная ортоцентру относительно стороны, лежит на описанной окружности. ()*

А так как треугольники CHB и CH_1B равны, радиус окружности, описанной около треугольника CHB , равен R . Итак, на рисунке 7 радиусы всех четырех окружностей равны. Заметим попутно, что треугольники $H_1H_2H_3$ и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом 2. Поэтому радиус окружности, описанной около ортоцентрического треугольника, равен $R/2$.

Если треугольник ABC тупоугольный, то $A_1B_1C_1$ является ортоцентри-

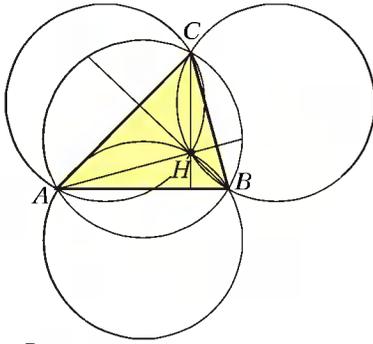


Рис. 7

чеким треугольником и для треугольника AHB и, по только что доказанному, радиус его описанной окружности тоже равен $R/2$.

Утверждение (*), доказанное для остроугольных треугольников, справедливо и для тупоугольных треугольников. В самом деле (рис.8), опишем окружность около остроугольного треугольника AHB . Мы уже доказали,

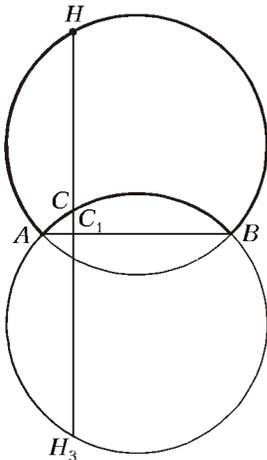


Рис. 8

что окружности ACB , AHB , HCB и ACH имеют одинаковые радиусы. Поэтому, например, окружности ACB и AHB симметричны относительно прямой AB . Но это и значит, что при симметрии относительно AB точка H_3 , симметричная точке H , оказывается на окружности ABC . Аналогично рассуждаем и о точках H_1 и H_2 .

Упражнение 11. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через середины сторон треугольника ABC и через середины отрезков AH , BH и CH , соединяющих его ортоцентр с вершинами. (Эта окружность называется *окружностью девяти точек*.)

Экстремальное свойство

Будем говорить, что треугольник KLM вписан в треугольник ABC , если его вершины K , L , M лежат на сторонах AB , BC и CA соответственно.

Теорема. Из всех треугольников KLM минимальный периметр имеет ортоцентрический треугольник.

Интересно отметить, что если треугольник ABC тупоугольный или прямоугольный, то вписанного в него треугольника минимального периметра не существует (он вырождается в высоту, опущенную из вершины наибольшего угла).

Вспомогательная задача. Пусть дан острый угол ACB с вершиной C и точка M внутри него. Найдите на сторонах AC и CB точки K и L так, чтобы треугольник KLM имел минимальный периметр.

Построим точки M' и M'' , симметричные точке M относительно сторон AC и BC , и рассмотрим ломаную $M''LKM'$ (рис.9). Ее длина равна периметру треугольника KLM . Ясно,

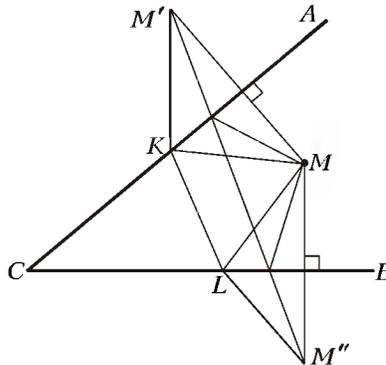


Рис. 9

что длина отрезка $M'M''$ не больше длины этой ломаной и совпадает с ней только тогда, когда точки K и L совпадают с точками пересечения отрезка $M'M''$ со сторонами угла. Задача решена.

Упражнение 12. Докажите, что такие точки K и L существуют, т.е. что отрезок $M'M''$ пересекает лучи CA и CB .

Теперь приступим к доказательству теоремы.

Возьмем на стороне AB треугольника ABC точку M . Отразим точку M относительно сторон AC и BC и соединим точки M' и M'' (рис.10).

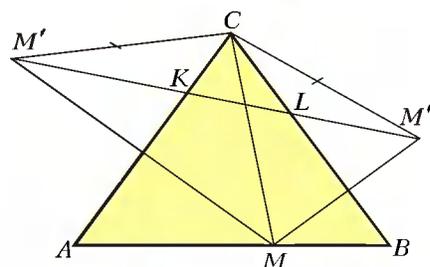


Рис. 10

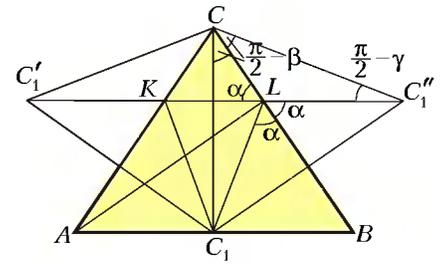


Рис. 11

Мы уже знаем, что периметр треугольника KLM меньше периметра любого треугольника с вершиной в точке M , вписанного в треугольник ABC . Осталось найти точку M так, чтобы периметр KLM был минимальным. Заметим, что треугольник $M''CM'$ равнобедренный, а $\angle M''CM' = 2\gamma$ — постоянный угол. Поэтому периметр $\triangle KLM$ минимален, если минимален отрезок $M'M''$. Но отрезок $M'M''$ минимален, когда минимальна сторона $M'C$. Поскольку $M'C = MC$, искомый минимум достигается, когда MC — высота треугольника ABC , т.е. когда $M = C_1$ (рис. 11).

Рассмотрим теперь треугольник C_1KL и докажем, что $L = A_1$. Но это просто. В самом деле, $\angle C_1CC_1'' = 2\gamma$. Поэтому

$$\angle CC_1''L = \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

$$\angle C_1''CL = \angle BCC_1 = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

$$\begin{aligned} \angle CLK &= \frac{\pi}{2} - \gamma + \frac{\pi}{2} - \beta = \\ &= \pi - (\gamma + \beta) = \alpha, \end{aligned}$$

$$\angle C_1LB = \angle C_1''LB = \angle CLK = \alpha.$$

Но тогда $\angle CLC_1 = \pi - \alpha$ и четырехугольник CLC_1A вписанный (снова вспомогательная окружность!). Поэтому

$$\angle CLA = \angle CC_1A = \frac{\pi}{2}.$$

Мы могли бы рассуждать и иначе. Предположим, что точка L не есть основание высоты AA_1 . Тогда треугольник, построенный в соответствии с вспомогательной задачей, имеет периметр, меньший периметра треугольника C_1KL , что невозможно.

Итак, K и L — основания высот треугольника ABC . А это и значит, что $L = A_1$. Аналогично, $K = B_1$.

Тем самым экстремальное свойство треугольника $A_1B_1C_1$ доказано.

Отклонение частиц и световых лучей полем тяготения

С. КОЖИНИН

РАССМОТРИМ НЕСКОЛЬКО ИНТЕРЕСНЫХ ЗАДАЧ О ДВИЖЕНИИ КЛАССИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ И ФОТОНОВ В ПОЛЯХ ТЯГОТЕНИЯ ПЛАНЕТ И ЗВЕЗД.

Задача 1. Рассеяние частицы полем Земли

На какой угол θ изменится направление скорости пролетающей мимо Земли метеорной частицы под действием поля земного тяготения (рис.1)? Скорость частицы на бесконечности равна v_∞ . Влияние атмосферы Земли не учитывать.

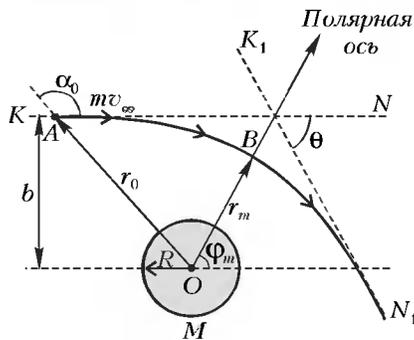


Рис. 1

При решении задачи учтем (без вывода), что частица движется по гиперболической траектории. Опираясь на геометрические свойства гиперболы, можно доказать, что угол рассеяния θ , прицельное расстояние b и расстояние r_m от центра планеты до ближайшей точки B траектории частицы связаны соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{b^2 - r_m^2}{2br_m}. \quad (1)$$

Действительно, гипербола – это геометрическое место точек, разность расстояний до которых от двух заданных точек O и O' , называемых фокусами (рис.2), постоянна: $r_1 - r_2 = \text{const}$. Один из фокусов гиперболы O совпадает с центром Земли, второй фокус O' лежит на прямой, проходящей через центр Земли и ближайшую к центру точку B траектории. На беско-

нечно больших расстояниях от Земли как при приближении, так и при удалении скорость частицы направлена по асимптоте гиперболы, поэтому задача состоит в нахождении угла θ между асимптотами. Точка пересечения асимптот лежит посередине между фокусами.

Приравняем разности расстояний от фокусов O и O' до бесконечно удаленной точки – это отрезок $O'C$ на рисун-

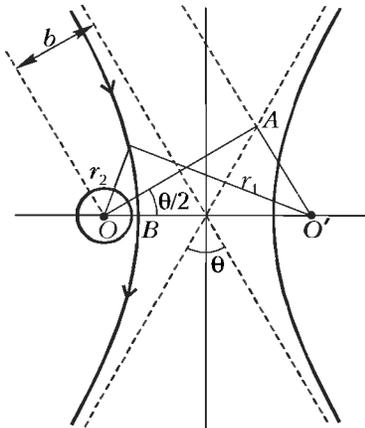


Рис. 2

ке 2 – до ближайшей к центру Земли точки. Из треугольника $OO'C$ найдем

$$OC = 2b,$$

$$O'C = 2b \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad OO' = \frac{2b}{\cos \frac{\theta}{2}}.$$

Разность расстояний от фокусов до точки B составляет

$$BO' - BO = (OO' - BO) - BO,$$

где $BO = r_m$. Теперь условие равенства разности расстояний до выбранных точек можно записать в виде

$$2b \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{\cos \frac{\theta}{2}} - 2r_m.$$

Переносим $2r_m$ в левую часть, возводя

обе части в квадрат и используя тождество

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta,$$

получаем формулу (1).

Запишем теперь законы сохранения энергии E и момента импульса L частицы для участка AB ее траектории (см. рис.1):

$$E_A = E_B, \quad L_A = L_B,$$

или

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2} - \frac{GMm}{r_m}, \quad (2)$$

$$bv_\infty = r_m v_m,$$

где v_m – скорость частицы в точке B ; мы учли, что точка A находится в бесконечности, поэтому $L_A = L_\infty = r_0 m v_\infty \sin \alpha_0 = b m v_\infty$, а $L_B = r_m m v_m \sin 90^\circ = r_m m v_m$. (Отметим, что вместо закона сохранения момента импульса можно использовать второй закон Кеплера.) Из равенств (2) получаем

$$r_m^2 + \frac{2GM}{v_\infty^2} r_m - b^2 = 0. \quad (3)$$

Если считать заданным расстояние r_m , то для прицельного расстояния b находим

$$b = r_m \sqrt{1 + \frac{2GM}{r_m v_\infty^2}}.$$

Если считать заданным расстояние b , то для r_m находим

$$r_m = \frac{GM}{v_\infty^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{bv_\infty^2}{GM} \right)^2} - 1 \right). \quad (4)$$

Для определенности будем считать известным прицельный параметр b . Тогда, с учетом (3), для угла рассеяния получаем

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{GM}{bv_\infty^2}. \quad (5)$$

Метеорная частица не задевает планету, если $r_m \geq R$ (см. рис.1). При $r_m = R$ расстояние b оказывается минимальным и равным

$$b_{\min} = R \sqrt{1 + \frac{2GM}{Rv_\infty^2}} = R \sqrt{1 + \left(\frac{v_{2к}}{v_\infty} \right)^2},$$

где $v_{2к} = \sqrt{2GM/R}$ – вторая космическая (параболическая) скорость. При заданном значении v_∞ и минимальном прицельном расстоянии b_{\min} угол отклонения (или угол рассеяния) макси-

мален: $\theta = \theta_{\max}$ и

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_{\max}}{2} = \frac{(v_{2k}/v_{\infty})^2}{2\sqrt{1+(v_{2k}/v_{\infty})^2}} = \frac{GM/(Rv_{\infty}^2)}{\sqrt{1+2GM/(Rv_{\infty}^2)}}.$$

Отсюда следуют важные частные случаи:

1) Если $v_{\infty} \gg v_{2k}$, то $b_{\min} \approx R$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg}(\theta_{\max}/2) \approx 0,5(v_{2k}/v_{\infty})^2 = GM/(Rv_{\infty}^2).$$

Так как $v_{2k}/v_{\infty} \ll 1$, то

$$\theta_{\max} \approx \frac{2GM}{Rv_{\infty}^2}$$

(мы учли, что при $x \rightarrow 0$ $\operatorname{tg} x \approx x$).

2) Если $v_{\infty} \ll v_{2k}$, то формула для угла рассеяния приводится к виду

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_{\max}}{2} \approx \frac{v_{2k}}{2v_{\infty}}.$$

В предельном случае, когда $v_{2k}/v_{\infty} \rightarrow \infty$, получаем $\operatorname{tg}(\theta_{\max}/2) \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\theta_{\max} \rightarrow 180^\circ$. Таким образом, при достаточно малых значениях v_{∞} направление скорости частицы при облете центрального тела (планеты или звезды) изменится практически на противоположное!

Заметим, что обсуждаемую задачу можно решить, исходя из уравнения траектории частицы в полярных координатах:

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi, \quad (6)$$

где φ – полярный угол, $p = L^2/(2m\alpha)$ – фокальный параметр частицы, $\varepsilon = \sqrt{1+2EL^2/(\alpha^2 m)}$ – эксцентриситет орбиты, $\alpha = GMm$, причем $m \ll M$, E и L – полная механическая энергия и момент импульса частицы соответственно. Из начальных условий получаем

$$E = E_{\infty} = \frac{mv_{\infty}^2}{2}, \quad L = L_{\infty} = mbv_{\infty}.$$

Следовательно, эксцентриситет орбиты равен

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{bv_{\infty}^2}{GM}\right)^2}. \quad (7)$$

Так как $\varepsilon > 1$, частица движется по гиперболической траектории. Из выражения (6) следует, что при $\varphi = 0$ расстояние r минимально и равно

$$r_m = \frac{p}{1+\varepsilon} = a(\varepsilon-1), \quad (8)$$

где $a = p/(\varepsilon^2 - 1) = \alpha/(2E)$ – полуось гиперболы. Легко убедиться в том, что формулу (8) можно привести к виду (4).

Определим угол φ_m между линией, соединяющей точки O и B (полярной осью), и направлением асимптоты K_1N_1 , к которой приближается траектория частицы, удаляющейся в бесконечность (см. рис.1). Поскольку при $\varphi = \varphi_m$ $r = \infty$, то из формулы (6) получаем

$$\cos \varphi_m = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Угол отклонения θ и угол φ_m связаны соотношением $\theta = -\pi + 2\varphi_m$, поэтому последнее равенство принимает вид

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}.$$

Эту формулу можно получить непосредственно из свойств гиперболы. Подставляя сюда выражение (7) для ε , опять получаем формулу (5).

Задача 2. Отклонение светового луча Солнцем

Оцените угол отклонения θ луча света при его прохождении вблизи поверхности Солнца. Масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг, его радиус $R = 7 \cdot 10^8$ м.

Будем считать, что свет состоит из корпускул массой m . Так как корпускула имеет массу, ее траектория должна искривляться под действием силы гравитации, подобно тому как искривляются траектории обычных частиц или тел, движущихся в полях тяготения планет и звезд.

Предположим, что световая корпускула движется в поле тяготения звезды по гиперболической траектории (см. рис.1). Если рассматривать световую корпускулу как классическую частицу с кинетической энергией $E_k = mv^2/2 = mc^2/2$, то для оценки угла θ можем воспользоваться результатами задачи 1: формула (5) теперь принимает вид

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{GM}{bc^2},$$

где $b \geq R$. Легко убедиться в том, что для обычных небесных тел массой M и радиусом R выполняется условие

$$\frac{GM}{rc^2} \ll 1, \quad R \leq r \leq \infty,$$

которое называют условием, или приближением, слабого поля (именно при этом условии поля тяготения являются ньютоновскими). Например, на поверхности Солнца $GM/(Rc^2) \approx 10^{-6}$. Учитывая малость угла θ , мож-

но записать

$$\theta = \frac{2GM}{bc^2},$$

тогда для светового луча, проходящего вблизи поверхности звезды ($b \approx R$), получим

$$\theta \approx \frac{2GM}{Rc^2}.$$

Для Солнца $\theta \approx 0,87''$.

Заметим, что минимальное расстояние r_m по-прежнему определяется формулой (4), которая при $v_{\infty} = c$ принимает вид

$$r_m = \frac{GM}{c^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{bc^2}{GM}\right)^2} - 1 \right) \approx b \left(1 - \frac{GM}{bc^2} \right).$$

Очевидно, что рассмотренный способ решения задачи является некорректным с точки зрения современной физической теории. Действительно, в рамках данного способа скорость световой корпускулы изменяется от $v_{\infty} = c$ до $v_m = bv_{\infty}/r_m = bc/r_m$. Понятно, что при $b \approx r_m \approx R$ $v_m \approx v_{\infty} = c$, но это приближение ничего не меняет по существу: скорость света остается переменной величиной. Кроме того, теперь мы знаем, что классическая формула $E_k = mv^2/2$, где $v \ll c$, к световым частицам не применима: энергия световой частицы, т.е. кванта света, или фотона, определяется формулой Планка – Эйнштейна

$$E = mc^2 = \hbar\omega,$$

а скорость фотона в вакууме всегда равна c .

Теперь решим задачу другим способом, исходя из квантовой теории света. Метод решения задачи остается прежним: воспользуемся законами сохранения энергии и момента импульса фотона (кванта света), движущегося в слабом поле тяготения звезды. Полная энергия фотона равна

$$E = \hbar\omega - \frac{GMm}{r} = \hbar\omega \left(1 - \frac{GM}{rc^2} \right) = \text{const}$$

(мы учли, что масса фотона равна $m = \hbar\omega/c^2$). Момент импульса фотона равен

$$L = rmc \sin \alpha = r \frac{\hbar\omega}{c} \sin \alpha = \text{const}.$$

Рассмотрим движение фотона на участке AB траектории, которую по-прежнему будем считать гиперболической (см. рис.1). Законы сохранения энергии: $E_A = E_B$ и момента им-

пульса: $L_A = L_B$ дают уравнения

$$\omega_0 = \omega \left(1 - \frac{GM}{r_m c^2} \right),$$

$$b\omega_0 = r_m \omega,$$

где ω_0 – частота фотона в точке A , находящейся в бесконечности, ω – частота фотона в точке B на расстоянии r_m от центра звезды. Из первого уравнения непосредственно следует, что $\omega > \omega_0$ – так называемое фиолетовое гравитационное смещение. Из обоих уравнений получаем

$$r_m^2 - br_m + \frac{GMb}{c^2} = 0.$$

Если считать заданным прицельный параметр b , то

$$r_m = \frac{b}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2R_g}{b}} \right),$$

где $R_g = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус (или радиус Шварцшильда). Для обычных небесных тел $R_g/R = 2GM/(Rc^2) \ll 1$, т.е. поля тяготения являются слабыми. Например, гравитационный радиус Солнца равен $R_g = 2GM/c^2 \approx 3$ км, т.е. $R_g \ll R$.

Так как $b \geq R$, то в приближении слабого поля можно записать

$$r_m = \frac{b}{2} \left(1 \pm \left(1 - \frac{R_g}{b} \right) \right),$$

или

$$r_{m1} = b \left(1 - \frac{R_g}{2b} \right) \text{ и } r_{m2} = \frac{R_g}{2}.$$

Очевидно, что второе решение не имеет смысла, поэтому окончательно получаем

$$r_m = b \left(1 - \frac{R_g}{2b} \right).$$

Аналогично, для угла отклонения θ находим

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{R_g}{2b} = \frac{GM}{bc^2}, \quad \theta \approx \frac{R_g}{b} = \frac{2GM}{bc^2}.$$

Как видим, в приближении слабого поля результаты, полученные с обеих точек зрения – классической и квантовой, – полностью совпадают.

Отметим, что в 1915 году расчет угла отклонения выполнил А.Эйнштейн. Согласно общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна, в поле гравитации (тяготения) изменяются законы геометрии и ход времени (искривление пространства – времени). Из уравнений ОТО следует, что траектория светового луча в слабом поле тяготе-

ния звезды определяется уравнением

$$\frac{b^2 c^2 / (GM)}{r} = 1 + \frac{bc^2}{GM} \cos \varphi + \sin^2 \varphi.$$

Как видно, это уравнение отличается от уравнения траектории классической световой корпускулы членом $\sin^2 \varphi$. Учитывая, что $\theta = -\pi + 2\varphi_m$, получаем формулу Эйнштейна для угла отклонения светового луча:

$$\theta = \frac{2R_g}{b} = \frac{4GM}{bc^2}.$$

Для луча, проходящего вблизи поверхности звезды ($b \approx R$), этот угол равен

$$\theta = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

В частности, для Солнца

$$\theta = 4GM/(Rc^2) \approx 1,75''.$$

Понятно, насколько важно было измерить угол θ . Результаты измерений должны были подтвердить (или опровергнуть) выводы ОТО об искривлении пространства – времени. Первые измерения удалось осуществить во время полного солнечного затмения 29 мая 1919 года астрономам А.Эддингтону, Ф.Дайсону и К.Дэвидсону, которые организовали экспедиции в Бразилию и к берегам Африки. Сфотографировав звезды вблизи закрытого Луной Солнца, они измерили их смещения и рассчитали угол отклонения световых лучей. Он оказался в полном согласии с формулой Эйнштейна. В наше время угол θ измерен намного точнее путем радиоастрономических наблюдений (свет и радиоволны распространяются по тем же законам, не связанных с солнечными затмениями. Результаты измерений еще надежнее подтверждают теоретическую формулу.

ОТО включает в себя принцип соответствия, согласно которому в случае слабых полей и малых скоростей ($v \ll c$) все предсказания ОТО должны совпадать с предсказаниями ньютоновской теории. Последнее означает, что траектории (геодезические) нерелятивистских частиц «не чувствуют» кривизну трехмерного пространства. Но когда речь идет о траекториях фотонов, учет пространственной кривизны становится существенным. Можно сказать, что искривление траектории фотонов складывается из двух эффектов: эффекта изменения хода часов (искривление времени) и эффекта искривления пространства. При решении задачи в рамках ОТО автоматически учитываются оба эффекта, в результате для угла отклонения ОТО

дает формулу, которая отличается от классической формулы множителем «2». Очевидно, что эта разница играет фундаментальную роль.

Задача 3. Звезда как гравитационная линза

Теория тяготения предсказывает, что любое гравитирующее тело (планета, звезда и т.п.) должно отклонять световые лучи. Следовательно, любое гравитирующее тело должно действовать наподобие оптической линзы, фокусируя световые лучи в некоторой точке F , называемой фокусом линзы.

Предположив, что звезда массой M и радиусом R является гравитационной линзой и действует так (или почти так), как действует обычная оптическая собирающая линза, оцените фокусное расстояние F такой линзы (рис.3).

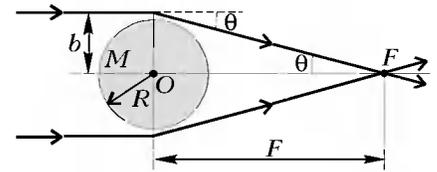


Рис.3

Как видно из рисунка 3,

$$F = \frac{b}{\text{tg} \theta}.$$

Воспользуемся результатами предыдущей задачи. В приближении слабого поля и с учетом малости угла θ получаем

$$F \approx \frac{b}{\theta} \approx \frac{b^2}{R_g} = \frac{b^2 c^2}{2GM}.$$

При $b \approx R$

$$F \approx \frac{R^2}{R_g} = \frac{R^2 c^2}{2GM}.$$

Для Солнца, например, $F \approx 1,7 \cdot 10^{14}$ м. А так как расстояние от Земли до Солнца равно $l = 1,5 \cdot 10^{11}$ м, то $F \gg l$. Понятно, что наблюдать с Земли линзовый эффект в поле тяготения Солнца нельзя. С другой стороны, ближайшая к нам звезда Проксима Центавра находится от нас на расстоянии $l \approx 4 \cdot 10^{16}$ м $\gg F$. Следовательно, любая из удаленных звезд может стать гравитационной линзой. Необходимо только, чтобы источник излучения, звезда-линза и наблюдатель расположились на одной прямой.

количество гирек (больше 2, разумеется). Кроме того, в примере предыдущего пункта нам удалось вычислить примечательные наборы, состоящие из семи гирек различных масс, в частности 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. Способ, с помощью которого мы это сделали, позволяет легко произвести проверку примечательности этого набора:

$$\begin{aligned} 3 + 5 + 7 + 9 &= 11 + 13, \\ 1 + 9 + 13 &= 5 + 7 + 11, \\ 9 + 13 &= 1 + 3 + 7 + 11, \\ 1 + 9 + 11 &= 3 + 5 + 13, \\ 1 + 3 + 5 + 11 &= 7 + 13, \\ 1 + 5 + 13 &= 3 + 7 + 9, \\ 7 + 11 &= 1 + 3 + 5 + 9. \end{aligned} \quad (3)$$

Существуют ли примечательные наборы с меньшим количеством различающихся по массе гирек?

Упражнения

- Покажите, что не существует примечательного набора с тремя гирьками, массы которых попарно различны.
- Покажите, что не существует примечательного набора с пятью гирьками, массы которых попарно различны.
- Таким образом, 7 – минимальное число гирек, которое может содержать

примечательный набор, если массы его гирек попарно различны.

Хорошо, а как быть с большим количеством гирек? Всегда ли существуют наборы, содержащие 9, 11, 13, ... различающихся по массе гирек?

Ответ на этот вопрос положительный. Сейчас мы построим некоторую конструкцию, позволяющую продолжить уже известный нам ряд $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 9, a_6 = 11, a_7 = 13$.

Заметим, что в каждом из равенств (3) присутствуют «разделенные соседи»: в левой части найдется такое число, для которого в правой части обнаруживается соседнее с ним нечетное число (число, отличающееся на 2). Если эти два «соседа» поменять местами, то для восстановления «равновесия» в ту часть, куда переместится меньшее число, нужно добавить 4. Следовательно, если два новых члена будут отличаться друг от друга на 4, то их всегда возможно добавить в разные части любого из равенств (3), предварительно переставив в нем двух «соседей» так, чтобы равенство при этом не нарушилось.

Положим $a_8 = x, a_9 = x + 4$, где x есть

решение уравнения

$$\sum_{i=2}^7 a_i = a_1 + x + 4.$$

Гирьки с массами a_1, a_2, \dots, a_9 образуют новый примечательный набор. Действительно, семь прежних равенств (3) можно «подправить» описанным выше способом. К ним добавляются два новых равенства:

$$\begin{aligned} a_2 + \sum_{i=3}^7 a_i &= a_1 + a_9, \\ a_1 + \sum_{i=3}^7 a_i &= a_2 + a_8. \end{aligned}$$

Заметим, что во вновь полученных равенствах снова присутствуют «разделенные соседи», так что процесс образования новых членов можно продолжить: $a_{10} = y, a_{11} = y + 4$, где y есть решение уравнения

$$\sum_{i=2}^9 a_i = a_1 + y + 4,$$

и так далее.

Упражнение 4. Примечательный набор состоит из пяти гирек. Какими могут быть их массы?

Отклонение частиц и световых лучей полем тяготения

(Начало см. на с.39)

В рамках ОТО фокусное расстояние гравитационной линзы определяется с учетом формулы Эйнштейна и поэтому равно

$$F = \frac{b^2}{2R_g} = \frac{b^2 c^2}{4GM}.$$

Для Солнца при $b \approx R$ получаем $F \approx 8,3 \cdot 10^{13}$ м. Понятно, что сделанные выше выводы о возможности наблюдения эффекта гравитационной линзы от Солнца и звезд остаются в силе.

Эффект гравитационной линзы был предсказан Эйнштейном в 1936 году, но он оставался лишь теоретическим предсказанием более сорока лет. В 1979 году был открыт удивительный объект – двойной квазар QSO 0957 + 561. Изображение квазара, полученное в различных диапазонах электромагнитного излучения, состояло из двух отдельных почти точечных изображений, отделенных друг от друга угловым расстоянием $5,7''$, имеющих идентичные спектры и почти одинаковую яркость. Гравитационной линзой

в этом случае служила большая эллиптическая галактика (или скопление галактик), находящаяся на пути от квазара к Земле и создающая его двойное изображение.

В обычной (тонкой) линзе, как известно, все преломленные лучи собираются в одной точке – фокусе линзы. В гравитационной линзе дело обстоит не так: чем ближе к притягивающему центру проходит луч, тем сильнее он преломляется и тем меньше расстояние от центра до точки F пересечения лучей. Вместо одного фокуса в гравитационной линзе возникает целая фокальная ось. Если ядро гравитационной линзы не пропускает свет, то пересечение лучей возможно только начиная с некоторого минимального расстояния F , определяемого последней формулой. В этой точке и начинается фокальная ось, которая простирается в область $x > F$.

На рисунке 4 показано, как выглядит «точечный» источник, если смотреть на него сквозь гравитационную линзу. Если наблюдатель находится на оси в точке 1, где $x < F$, то источник S_0 совсем не виден, так как он закрыт непрозрачным ядром линзы. В точке

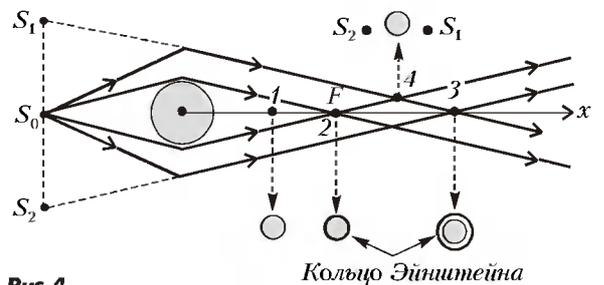


Рис. 4

2, где $x = F$, изображение источника появляется со всех сторон от ядра, поэтому здесь источник виден как светящееся кольцо, примыкающее к ядру. При увеличении расстояния (точка 3) кольцо отрывается от ядра, между ними возникает зазор, который постепенно возрастает по мере удаления наблюдателя (кольцевое изображение источника называют кольцом Эйнштейна). Теперь представим, что удаленный наблюдатель сместился на некоторое расстояние от оси (точка 4). Картина становится совсем иной. Симметрия лучей нарушается, светящееся кольцо разрывается на две дуги, которые по мере удаления от оси стягиваются в маленькие кружки. Наблюдатель увидит вместо одного источника S_0 два его изображения: S_1 и S_2 .

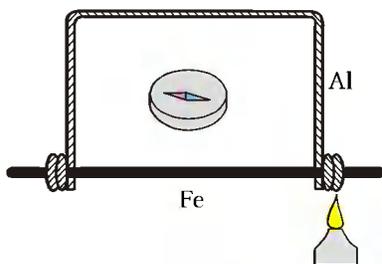
Домашний терморегулятор

В. ЛАНГЕ

Сейчас совершенно немислимо представить нашу жизнь без всевозможных приборов, приводимых в действие электрической энергией. В подавляющем большинстве случаев энергию дают тепловые электростанции (вклад гидроэлектростанций сравнительно мал, еще меньше дают ветросиловые электростанции, и уж совершенно незначительна доля остальных, в том числе используемых с недавнего времени в космосе так называемых солнечных батарей, производство которых обходится чрезвычайно дорого). Там химическая энергия, заключенная в топливе, вначале преобразуется в тепловую; тепло нагревает котлы; образующийся в них пар приводит в действие турбины, вращающие электрогенераторы; и только от них получается электрический ток, поступающий к потребителю по проводам. Длинная и сложная цепочка превращений!

Между тем существует простой метод *прямого превращения* тепловой энергии в электрическую. И любой из вас может создать у себя дома установку, успешно решающую такую задачу. Для этого вам потребуется железный стержень толщиной 4–5 мм и длиной 10–15 см, примерно 30 см алюминиевой проволоки диаметром 2–3 мм, а также самый простой магнитный компас или просто магнитная стрелка.

Тщательно зачистите стержень и проволоку, а затем намотайте несколько витков проволоки на один из концов железного стержня. После этого отогните проволоку под прямым углом к стержню и на расстоянии 1,5–2 см от сгиба согните проволоку еще раз на 90°, чтобы она оказалась параллельной стержню; затем, отмерив на ней 8–10 см, снова согните ее перпендикулярно стержню и оставшуюся часть намотайте на стержень. В результате получится прямоугольная рамка. Расположите рамку так, чтобы ее плоскость оказалась, во-первых, вертикальной и, во-вторых, параллельной магнитной стрелке компаса, помещенного внутри (см. рисунок).



Если нагреть одну из скруток в пламени двух-трех одновременно горящих спичек, можно увидеть, как стрелка начинает отклоняться (в наших опытах наблюдалось отклонение до 30°). Это косвенно свидетельствует о появлении в рамке постоянного электрического тока, магнитное поле которого и вызывает отклонение стрелки. Стало быть, в этой установке действительно наблюдается прямое преобразование тепловой энергии в электрическую.

Впервые описанное явление наблюдал в 1821 году немецкий физик Томас Йоганн Зеебек (1770–1831), именем которого оно и было затем названо. «Он положил медную пластинку на пластинку сурьмы и посредством медной проволоки соединил пластинки с обмоткой "мультипликатора" [так во времена Зеебека называли один из видов гальванометра – В.Л.]. Когда он сжимал рукой металлические пластинки, возникал электрический ток. Если же сжимать пластинки, не касаясь их рукой, то тока не получалось. Зеебек тотчас понял, что причиной возникновения тока является тепло руки. Он нашел, что ток возникает в том случае, когда места прикосновения различных металлов имеют неодинаковую температуру», – так описываются опыты Зеебека по обнаружению термоэлектричества в замечательной книге Лакура и Анпеля «Историческая физика».

Сейчас термоэлектрическое явление используется главным образом для дистанционного измерения температуры. Что же касается его применения для получения электрического тока,

то для металлических термопар КПД преобразования составляет всего около 0,1%. Гораздо выше коэффициент полезного действия полупроводниковых термопар, у которых он уже сейчас доходит до 15% и более. К сожалению, и это значение мало, да и стоимость полупроводниковых материалов пока еще чересчур велика. Неудобно и то, что развиваемая металлическими термопарами электродвижущая сила весьма мала: например, для пары «алюминий–железо», о которой говорилось выше, при разности температур между горячим и холодным спаями 1 К ЭДС составляет всего около 15 мкВ. Для полупроводниковых термопар можно получить намного большие значения, но, как уже отмечалось, полупроводниковые материалы дороги и трудно обрабатываются.

В 1834 году французский физик и метеоролог Жан Шарль Пельтье (1785–1845) обнаружил второе термоэлектрическое явление (названное потом его именем), обратное эффекту Зеебека, – выделение или поглощение тепла в спае двух разнородных металлов. Явление Пельтье можно использовать, например, для постройки холодильных машин. И в этом случае КПД устройств будет на несколько порядков выше, если в них вместо металлов использовать полупроводниковые вещества.

И все-таки скажем немного о практической роли эффектов Зеебека и Пельтье в современной технике. Существует большое количество разнообразных устройств – как термоэлектрических генераторов, так и термоэлектрических холодильников, применяемых в различных ситуациях на земле, на море, в воздухе и в космосе. Для термогенераторов получила распространение такая схема: изотопный источник энергии и теплотворная, набранная из полупроводниковых термоэлементов. На основе эффекта Пельтье исправно работают микрохолодильники, которые находят широкое применение для охлаждения узлов электронных приборов, например матричных полупроводниковых приборов для визуализации изображения (для снижения шумов светочувствительная микросхема этого прибора работает при температуре на несколько десятков градусов ниже нуля по Цельсию).

Магнитные явления

В. МОЖАЕВ

КАК ИЗВЕСТНО, ОСНОВНЫМ фундаментальным (а значит, полученным из экспериментов) законом в электростатике является закон Кулона – закон электрического взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Силовой характеристикой электростатического поля служит вектор напряженности электрического поля \vec{E} . (Заметим, что из закона Кулона вытекает основная теорема электростатики – теорема Гаусса, которая устанавливает связь между потоком напряженности электрического поля через замкнутую поверхность с величиной заряда, находящегося внутри этой поверхности.)

Если проводить параллель между электростатикой и магнитостатикой, то можно сказать, что в основе магнитостатики лежит закон Ампера – закон магнитного взаимодействия двух токов, текущих в малых отрезках проводников, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Силовой характеристикой магнитного поля является вектор индукции магнитного поля \vec{B} .

Магнитное поле, подобно электрическому, является объективной реальностью и в то же время служит средством описания взаимодействия движущихся заряженных частиц. Если мы знаем величину индукции магнитного поля в некоторой точке пространства в данный момент времени, то мы знаем величину и направление силы, которая подействовала бы на движущуюся заряженную частицу в этой пространственно-временной точке.

Для определения индукции магнитного поля, создаваемого электрическим током, можно использовать закон

Био – Савара. Согласно этому закону, малый отрезок проводника Δl (рис. 1), по которому течет ток I (отрезку приписывается направление тока), создает в точке M , находящейся на расстоянии r от Δl ($\Delta l \ll r$), магнитное поле с индукцией, равной

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta l \sin \alpha}{4\pi r^2}.$$

Здесь α – угол между $\vec{\Delta l}$ и радиусом-вектором \vec{r} , проведенным от отрезка к точке, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Направление вектора $\Delta \vec{B}$ определяется правилом буравчика: если буравчик ввинчивать по направлению тока, то направление вращения рукоятки буравчика совпадает с направлением индукции магнитного поля. Полная индукция \vec{B} магнитного поля, создаваемого в точке M всем проводником с током, равна векторной сумме индукций магнитного поля от всех участков проводника.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Найдем индукцию магнитного поля протяженного прямого провода с током I на расстоянии a от провода. Длину провода будем считать много большей a .

Для определения индукции магнитного поля вблизи провода воспользуемся законом Био – Савара. На рисунке 2 бесконечный прямой провод с током I расположен вдоль оси Z . На расстоянии z от начала координат выберем небольшой отрезок провода

длиной dz и запишем выражение для величины индукции магнитного поля в точке A , создаваемого элементом тока dz :

$$dB = \frac{\mu_0 I dz \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \cos \beta \cdot dz}{4\pi r^2}.$$

Сделаем замену переменных: перейдем от z к β . Поскольку $z/a = \tan \beta$, то, продифференцировав обе части этого равенства, получим $dz = a d\beta / \cos^2 \beta$. После замены переменной найдем индукцию в точке A , просуммировав по всему проводу:

$$B = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 I \cos \beta \cdot a d\beta}{4\pi r^2 \cos^2 \beta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_0^{\pi/2} \cos \beta d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. (*)$$

Вектор индукции \vec{B} магнитного поля в точке A направлен от нас перпендикулярно плоскости рисунка. Линии магнитной индукции представляют собой семейство окружностей, симметричных относительно провода.

Полученный результат остается справедливым для бесконечно длинного провода и любого конечного расстояния a , либо для провода конечной длины, но при условии, что расстояние a много меньше длины провода. Если проводник с током не является прямолинейным, то формула для B остается справедливой при расстояниях a , много меньших радиуса кривизны проводника.

А теперь разберем несколько конкретных задач.

Задача 1. Два длинных параллельных медных провода диаметром $d = 2$ мм расположены на расстоянии $L = 5$ см друг от друга. В обоих проводах текут одинаковые токи со средней скоростью движения электронов проводимости $v = 0,1$ см/с. Атомная масса меди $A = 63,6$ г/моль, плотность меди $\rho = 8,9$ г/см³, постоянная Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Можно считать, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

Определите силу Ампера, действующую на элемент провода с током длиной $l = 1$ м. Вычислите электростатическую силу, которая действовала бы на электроны проводимости в проводе длиной $l = 1$ м со стороны электронов проводимости другого провода без учета положительных

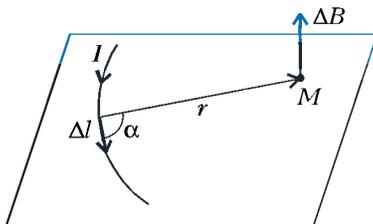


Рис. 1

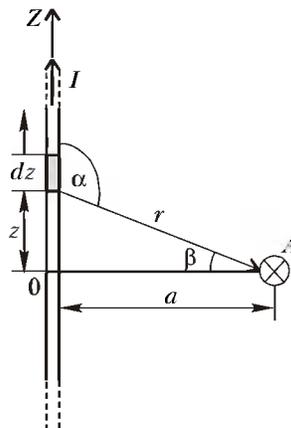


Рис. 2

зарядов, и сравните ее с силой Ампера.

Указание. Напряженность электрического поля вблизи заряженной бесконечной нити равна $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$, где q – заряд единичной длины нити, r – расстояние до нити.

Сначала вычислим концентрацию электронов проводимости в меди:

$$n = \frac{\rho N_A}{A} = 0,84 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$$

и силу тока в проводах:

$$I = \frac{\pi d^2}{4} nev = 42,2 \text{ А}$$

(здесь e – заряд электрона). Теперь, воспользовавшись формулой (*), найдем величину индукции магнитного поля, создаваемого током одного из проводов в месте расположения второго:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

На рисунке 3 изображена одна из линий индукции магнитного поля про-

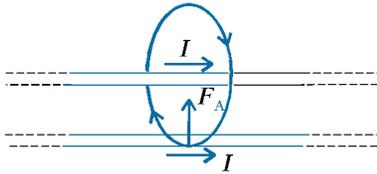


Рис. 3

вода. Сила Ампера, действующая на элемент провода, равна

$$F_A = BIl = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi L} = 7,13 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

Для вычисления электростатической силы найдем заряд q электронов, содержащихся в куске провода единичной длины:

$$q = \frac{\pi d^2}{4} ne = 4,22 \cdot 10^4 \text{ Кл.}$$

Напряженность электрического поля, создаваемого электронами, расположенными вдоль провода, на расстоянии L от провода равна

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ В/м,}$$

а электростатическая сила отталкивания, действующая на элемент провода единичной длины, заряженный электронами проводимости, составляет

$$F_э = qE = 6,3 \cdot 10^{20} \text{ Н.}$$

Отношение силы магнитного взаимодействия к электростатической силе в пределах погрешности расчета дает

$$\frac{F_A}{F_э} = 1,1 \cdot 10^{-23}.$$

Задача 2. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая рамка из однородного куска проволоки в виде равностороннего треугольника со стороной a . Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны одной из сторон рамки. Масса рамки m , величина индукции B .

Какой ток нужно пропустить по рамке (против часовой стрелки), чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин треугольника?

Пусть по контуру против часовой стрелки течет ток I (рис. 4). Очевидно, что на все три стороны треугольника

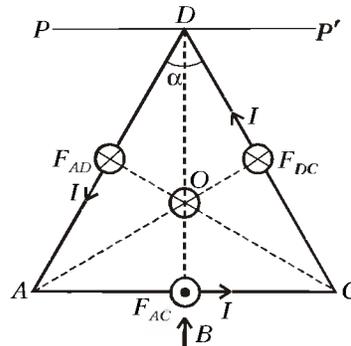


Рис. 4

будут действовать силы Ампера, точками приложения которых являются середины сторон AC , CD и DA . В точке пересечения медиан (точка O) приложена сила тяжести, равная mg и направленная от нас перпендикулярно плоскости рисунка.

Найдем результирующий момент сил Ампера, действующих на три стороны треугольника, относительно оси PP' . Сила \vec{F}_{AC} равна $F_{AC} = IaB$ и направлена на нас, силы \vec{F}_{AD} и \vec{F}_{DC} равны

$$F_{AD} = F_{DC} = IaB \sin(\alpha/2) = IaB/2$$

(поскольку $\alpha = 60^\circ$) и направлены от нас. Суммарный момент всех трех сил Ампера относительно оси PP' равен

$$M_A = IaB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{IaB}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a - \frac{IaB}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a = \frac{\sqrt{3}}{4} Ia^2 B.$$

Видно, что с увеличением тока момент сил Ампера увеличивается и в некоторый момент окажется в состоянии приподнять рамку относительно вершины D , поскольку препятствует этому постоянный момент силы тяжести

$$M_g = mg \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Рамка начнет приподниматься относительно вершины D , когда

$$M_A \geq M_g, \text{ или } \frac{\sqrt{3}}{4} Ia^2 B \geq mg \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда

$$I \geq \frac{4mg}{3aB}.$$

Задача 3. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая тонкая жесткая квадратная рамка из однородного куска провода со стороной a . Рамка находится в магнитном поле длинного горизонтального провода с током, расположенного симметрично над рамкой (рис. 5). Масса рамки m , индукция магнитного поля у боковых сторон рамки 1 и 2 равна B , коэффициент трения скольжения рамки о поверхность стола μ ($\mu < 1/3$).

Какой ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала скользить по столу, не отрываясь от него?

Пусть по квадратной рамке течет ток I по часовой стрелке, если смотреть сверху. На боковые стороны рамки будут действовать силы Ампера \vec{F}_1 и

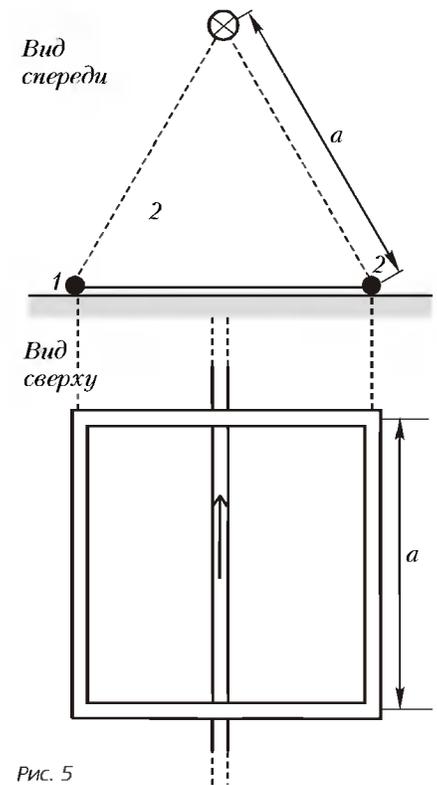


Рис. 5

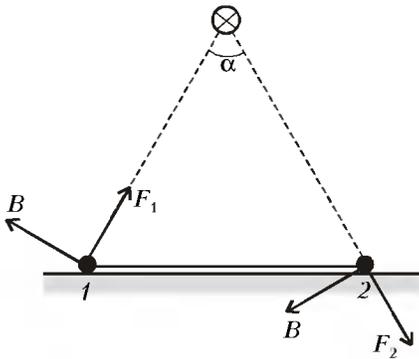


Рис. 6

\vec{F}_2 (рис.6), причем

$$F_1 = F_2 = IaB.$$

В общем случае при увеличении тока через рамку возможны два варианта: либо рамка начнет приподниматься относительно стороны 2, либо она начнет скользить без отрыва от стола.

Предположим, что коэффициент трения скольжения таков, что рамка может приподниматься раньше, чем наступит скольжение. Запишем условие подъема стороны 1:

$$F_1 a \frac{\sqrt{3}}{2} - mg \frac{a}{2} \geq 0.$$

Отсюда следует, что ток, при котором происходит подъем, подчиняется условию

$$I_{\text{п}} \geq \frac{mg}{\sqrt{3}aB}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда раньше наступит скольжение рамки. Результирующая сила вдоль горизонтальной оси равна

$$F_2 \cos \alpha + F_1 \cos \alpha = IaB \cdot 2 \cos \alpha.$$

Реакция опоры равна весу рамки mg . Запишем условие скольжения:

$$2IaB \cos \alpha \geq \mu mg.$$

Отсюда для тока, соответствующего скольжению, получаем

$$I_{\text{ск}} \geq \frac{\mu mg}{aB} = \frac{mg}{3aB}.$$

Сравнивая токи $I_{\text{п}}$ и $I_{\text{ск}}$, мы убеждаемся, что скольжение рамки наступит раньше при токах

$$I_{\text{ск}} \geq \frac{\mu mg}{aB}.$$

Задача 4. В сверхпроводящем тонком кольце радиусом R , индуктивностью L и массой m течет наведенный

ток I_0 . Кольцо, подвешенное на тонкой неупругой нити, опускают в область горизонтального однородного магнитного поля с индукцией \vec{B} . В устойчивом положении равновесия угол между вектором \vec{B} и его проекцией на плоскость кольца равен α .

Определите зависимость угла α от начального тока I_0 в кольце и постройте график $\alpha = \alpha(I_0)$. Найдите также зависимость установившегося тока $I_{\text{уст}}$ в кольце от величины начального тока I_0 и постройте график $I_{\text{уст}} = I_{\text{уст}}(I_0)$.

Если кольцо находится в однородном магнитном поле \vec{B} и в нем течет ток $I_{\text{уст}}$, то единственным положением устойчивого равновесия является положение, когда $\alpha = \pi/2$ и вектор индукции собственного магнитного поля кольца в его центре направлен вдоль вектора \vec{B} . Тогда, согласно закону сохранения магнитного потока через сверхпроводящее кольцо.

$$LI_0 = LI_{\text{уст}} + B\pi R^2.$$

Отсюда

$$I_{\text{уст}} = I_0 - \frac{B\pi R^2}{L}.$$

Из условия $I_{\text{уст}} > 0$ следует, что $I_0 > \pi R^2 B/L$, при этом $\alpha = \pi/2$. Если $I_0 < \pi R^2 B/L$, то устойчивого положения с током $I_{\text{уст}} \neq 0$ нет, поэтому устойчивое положение равновесия в этом случае будет при $I_{\text{уст}} = 0$; в этом случае $\alpha \neq \pi/2$. По закону сохранения

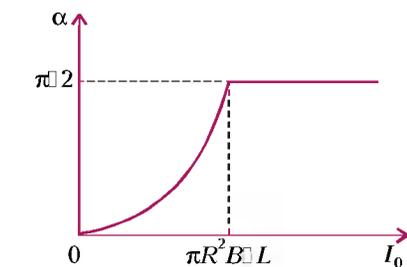


Рис. 7

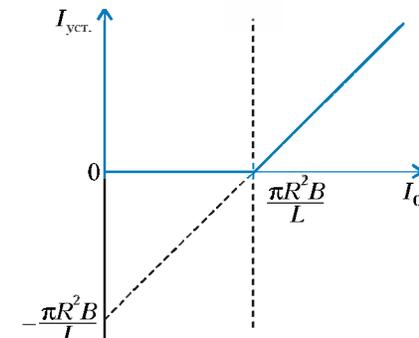


Рис. 8

магнитного потока,

$$LI_0 = \pi R^2 B \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{LI_0}{\pi R^2 B}\right).$$

Графики зависимостей $\alpha(I_0)$ и $I_{\text{уст}}(I_0)$ приведены на рисунках 7 и 8.

Задача 5*. По оси длинного полого диэлектрического ($\epsilon = 3$) цилиндра натянута заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд $q = 10^{-7}$ Кл/м (рис.9). Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 10^3$ с $^{-1}$.

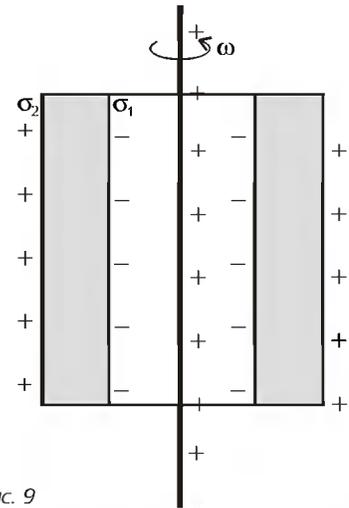


Рис. 9

Определите индукцию магнитного поля внутри диэлектрика, в полости цилиндра и во внешнем пространстве вдали от торцов цилиндра. Центробежными эффектами пренебречь.

Указание. Используйте формулу для индукции в соленоиде: $B = \mu_0 NI/L$, где N – число витков соленоида, L – длина соленоида, I – ток в соленоиде.

Под действием электрического поля зарядов нити происходит поляризация диэлектрического цилиндра: на внутренней поверхности цилиндра появляются отрицательные поляризационные заряды с поверхностной плотностью σ_1 , а на внешней стороне цилиндра – положительные заряды с плотностью σ_2 . Напряженность электрического поля вблизи заряженной нити в вакууме, на расстоянии много меньше длины нити, равна (см. указание к задаче 1)

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Очевидно, что внутри диэлектрика напряженность электрического поля

будет в ϵ раз меньше:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

С другой стороны, мы можем использовать предыдущую формулу и для нахождения поля в диэлектрике:

$$E = \frac{q - \sigma_1 \cdot 2\pi R_1}{2\pi\epsilon_0 r},$$

где R_1 – радиус внутренней поверхности цилиндра. Приравнявая последние два выражения, получим

$$\sigma_1 = \frac{(\epsilon - 1)q}{2\pi\epsilon R_1}.$$

Поскольку диэлектрик электронейтрален, то

$$2\pi R_2 \sigma_2 - 2\pi R_1 \sigma_1 = 0,$$

где R_2 – радиус внешней поверхности цилиндра. Отсюда

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{R_1}{R_2} = \frac{(\epsilon - 1)q}{2\pi\epsilon R_2}.$$

Вращение поляризационных зарядов эквивалентно току в соленоиде.

При расстояниях $r_n \leq r \leq R_1$ (здесь r_n – радиус заряженной нити) суммарное магнитное поле двух эквивалентных соленоидов с радиусами R_1 и R_2 равно нулю из-за электронейтральности диэлектрика.

Рассмотрим теперь пространство внутри диэлектрика при $R_1 < r < R_2$. Индукция магнитного поля, создаваемого вращающимися зарядами плотностью σ_1 , очевидно, равна нулю, а вращающиеся заряды плотностью σ_2 создают однородное магнитное поле. В формулу для индукции в соленоиде входит величина NI/L – это величина поверхностного тока на единицу длины соленоида. Эквивалентная величина для вращающихся поляризационных зарядов плотностью σ_2 равна

$$\frac{\omega}{2\pi} \cdot 2\pi R_2 \sigma_2 = \omega R_2 \sigma_2 = \frac{\omega(\epsilon - 1)q}{2\pi\epsilon}.$$

Окончательное выражение для величины индукции будет таким:

$$B = \frac{\mu_0 \omega (\epsilon - 1) q}{2\pi\epsilon} = 1,33 \cdot 10^{-11} \text{ Тл}.$$

Индукция внутри диэлектрика параллельна нити и направлена вертикально вверх.

Во внешнем пространстве индукция магнитного поля равна нулю.

Задача 6*. На двух горизонтальных параллельных и проводящих рельсах, расстояние между которыми l ,

расположены два проводящих и отстоящих друг от друга на расстояние b стержня, каждый массой m . Омическое сопротивление каждого стержня R , а омическим сопротивлением рельсов можно пренебречь.

На каком расстоянии друг от друга окажутся стержни после включения внешнего однородного магнитного поля с индукцией \vec{B} ? Вектор индукции перпендикулярен плоскости стержней и рельсов.

Сначала обсудим процесс установления магнитного поля, который осуществляется быстро, но за конечное время. Рассмотрим произвольный момент времени, когда еще происходит нарастание индукции магнитного поля. Нарастающее магнитное поле приводит к появлению вихревого электрического поля. Если магнитное поле симметрично относительно центра прямоугольника, образованного рельсами и стержнями, то силовые линии вихревого электрического поля будут иметь вид концентрических окружностей (рис. 10). Работа по перемещению единичного положительного заряда в вихревом поле вдоль замкнутого контура равна ЭДС индукции

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -lb \frac{dB}{dt}.$$

В нашем контуре будет течь ток

$$I = \frac{|E_i|}{2R} = \frac{lb}{2R} \frac{dB}{dt}.$$

Сила, действующая на каждый из стержней, равна

$$F = lIB = \frac{l^2 b}{2R} B \frac{dB}{dt} = \frac{l^2 b}{4R} \frac{d(B^2)}{dt}.$$

Уравнение движения каждого стержня имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{l^2 b}{4R} \frac{d(B^2)}{dt},$$

или

$$dv = \frac{l^2 b}{4mR} d(B^2).$$

Мы нашли связь бесконечно малого

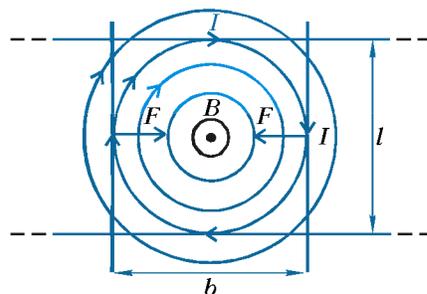


Рис. 10

изменения скорости стержня с бесконечно малым приращением квадрата индукции поля. Для полных приращений получим

$$\int_0^{v_0} dv = \int_0^{B_0} \frac{l^2 b}{4mR} d(B^2).$$

Отсюда найдем конечную скорость стержней:

$$v_0 = \frac{l^2 b B_0^2}{4mR}.$$

Теперь рассмотрим второй этап, когда мы имеем стационарное однородное магнитное поле с индукцией B_0 . В начальный момент времени два стержня находятся на расстоянии b друг от друга и имеют начальные скорости, равные v_0 и направленные навстречу друг другу. На рисунке 11 изображены стержни в произвольный момент времени, когда их координаты равны

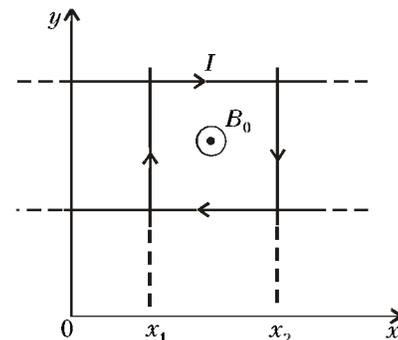


Рис. 11

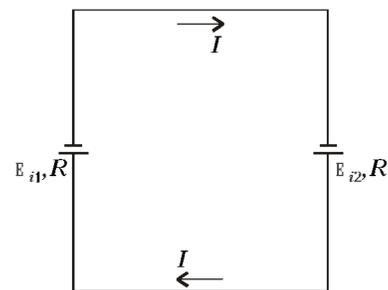


Рис. 12

x_1 и x_2 . Пусть в этот момент в контуре течет ток I по часовой стрелке. Запишем, уравнения движения стержней:

$$m\ddot{x}_1 = lIB_0,$$

$$m\ddot{x}_2 = -lIB_0.$$

Эквивалентная электрическая схема контура изображена на рисунке 12, где $E_{i1} = -\dot{x}_1' B_0$ – ЭДС индукции,

(Окончание см. на с. 55)

LXIV Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. Решите ребус: $AX \cdot UX = 2001$.

А.Блинков

2. Офеня¹ купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя офеня получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

А.Саблин

3. Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Наташе коробки хватило на 41 чашку чая, а Инне – на 58 чашек. Сколько пакетиков было в коробке?

А.Стивак, И.Яценко

4. Расставьте по кругу 6 различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних.

А.Митягин

5. Вифсла, Тофсла и Хемуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль – 5, а Тофсла – 4 снежка. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. (В себя самого снежками не кидаются.)

Т.Голенищева-Кутузова, В.Клетцын

6. Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после закрашивания каждой следующей клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно закрасить а) 26; б) 28 клеток, соблюдая это условие. (В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от 1 до 26 или до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.)

И.Акулич

7 класс

1. В книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377} - 1$. Не опечатка ли это?

С.Маркелов

2. Приходя в тир, игрок вносит в кассу 100 рублей. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на 10%, а после каждого промаха уменьшается на 10%. Могло ли после нескольких выстрелов у него оказаться 80 рублей 19 копеек?

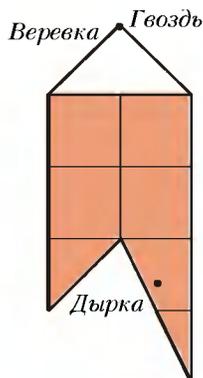
И.Яценко

3. Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал 2 подъезда и добавил 3 этажа. При этом количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать еще 2 подъезда и добавить еще 3 этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте? (В каждом подъезде одинаковое число этажей, а на всех этажах во всех подъездах одинаковое число квартир.)

Т.Голенищева-Кутузова, В.Гурович, П.Кожевников, И.Яценко

4. В стене имеется маленькая дырка (точка). У хозяина есть флажок следящей формы (см. рисунок). Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь так, чтобы флажок закрывал дырку.

А.Шень



дующей формы (см. рисунок). Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь так, чтобы флажок закрывал дырку.

граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

А.Стивак

Задачи для старших классов

8 класс

1. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник шириной 200 и высотой 100 клеток. Его закрашивают по клеткам, начав с левой верхней и идя по спирали (дойдя до края или до закрашенной части, поворачивают направо). Какая клетка будет закрашена последней? (Укажите номер ее строки и столбца; например, нижняя правая клетка стоит в 100-й строке и 2000-м столбце).

А.Хачатурян

2. Можно ли последовательно поставить на плоскости 100 точек так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой и чтобы в любой момент фигура, состоящая из уже поставленных точек, имела ось симметрии?

И.Акулич

3. Даны шесть слов: ЗАНОЗА, ЗИПУНЫ, КАЗИНО, КЕФАЛЬ, ОТМЕЛЬ, ШЕЛЕСТ. За один шаг можно заменить любую букву в любом из этих слов на любую другую. Сколько шагов нужно, чтобы сделать все слова одинаковыми (допускаются и бессмысленные)?

В.Доценко, А.Шень

4. См. задачу М1783 «Задачника «Кванта».

5. Леша задумал двузначное число, а Гриша пытается его отгадать, называя двузначные числа. Он отгадал, если одну цифру назвал правильно, а в другой ошибся не более чем на единицу (например, если задумано 65, то 65, 64 и 75 подходят, а 63, 76 и 56 – нет). Придумайте способ, гарантирующий Грише успех за 22 попытки.

Фольклор

6 (Продолжение задачи 5). Покажите, что нет способа, гарантирующего Грише успех за 18 попыток.

9 класс

1. Можно ли расставить на футбольном поле четырех футболистов так,

¹ Продавец в разнос, корабейник.

чтобы попарные расстояния между ними составляли 1, 2, 3, 4, 5 и 6 метров?

А. Митягин

2. В некоторой стране суммарная зарплата 10 процентов самых высокооплачиваемых работников составляет 90 процентов зарплаты всех работников. Может ли быть, что в каждом из регионов, на которые делится страна, зарплата любых 10% работников составляет не более 11% всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

М. Вялый

3. Внутри угла с вершиной M отмечена точка A . Из этой точки выпустили шар, который отразился от одной стороны угла в точке B , затем от другой стороны в точке C и вернулся в A («угол падения» равен «углу отражения»). Докажите, что центр O окружности, описанной около $\triangle BCM$, лежит на прямой AM .

А. Заславский

4. Камни лежат в трех кучах: в одной 51, в другой 49, а в третьей 5 камней. Разрешается объединять любые кучи в одну, а также разделять кучу из четного числа камней на две равные. Можно ли получить 105 куч по одному камню в каждой?

В. Клецын

5. Натуральное число N в 999...99 (к девяток) раз больше суммы своих цифр. Укажите все возможные значения k и для каждого из них приведите пример такого числа.

Г. Гальперин

6. Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по одной партии. Для каждого участника A было подсчитано число набранных им очков (за победу дается 1 очко, за ничью — $1/2$ очка, за поражение — 0 очков) и коэффициент силы по формуле: сумма очков тех участников, у кого A выиграл, минус сумма очков тех, кому он проиграл. Могут ли коэффициенты силы всех участников быть а) больше 0; б) меньше 0?

А. Толтыго

10 класс

1. Существуют ли три квадратных трехчлена, каждый из которых имеет корень, а сумма любых двух не имеет корней?

А. Белов

2. См. задачу M1781 «Задачника «Кванта».

3. Приведите пример многочлена $P(x)$ степени 2001, для которого вы-

полняется тождество $P(x) + P(1-x) = 1$.

В. Сендеров

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_A , BH_B и CH_C . Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников AH_BH_C , BH_AH_C , CH_AH_B равностороннему $H_AH_BH_C$.

А. Аконян

5. На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За один ход любую из них можно передвинуть на соседнюю клетку по вертикали или горизонтали (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения двух фишек, причем ровно по одному разу?

А. Шаповалов

6. В игре «Десант» две армии захватывают страну. Они ходят по очереди, каждым ходом занимая один из свободных городов. Первый город захватывается с воздуха, а каждым следующим ходом можно захватить любой город, соединенный дорогой с каким-то городом, уже занятым этой армией. Если таких нет, армия прекращает боевые действия (при этом, возможно, другая продолжает). Найдется ли такая схема городов и дорог, что армия, ходящая второй, сможет захватить более половины всех городов, как бы ни действовала первая? (Число городов конечно, каждая дорога соединяет ровно два города.)

П. Грозман, А. Шаповалов, Д. Шаповалов

11 класс

1. Существуют ли три квадратных трехчлена таких, что каждый имеет два различных действительных корня, а сумма любых двух трехчленов не имеет действительных корней?

А. Белов

2. Дана геометрическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Известно, что a_1, a_{10}, a_{30} — натуральные числа. Верно ли, что a_{20} — также натуральное число?

Фольклор

3. В неравностороннем треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, I' — центр окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон CB и CA ; L и L' — точки, в которых сторона AB касается этих окружностей. Докажите, что прямые IL' , $I'L$ и высота CH треугольника ABC пересекаются в одной точке.

А. Заславский

4. Докажите, что не существует многочлена $Q(x)$ степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом значении x является простым числом.

А. Белов

5. Докажите, что в пространстве существует 2001 выпуклый многогранник, никакие три из которых не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга (т.е. имеют хотя бы одну общую граничную точку, но не имеют общих внутренних точек).

А. Белов

6. По кругу расставлено несколько коробочек, в которых лежат шарики (коробочка может быть и пустой). За один ход разрешается взять все шарики из какой-то коробочки и разложить их, начиная со следующей коробочки, двигаясь по часовой стрелке и кладя в каждую коробочку по одному шарiku.

а) Докажите, что если шарики всегда берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.

б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков можно получить любое другое.

В. Гуровиц

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Напомним правила игры «Жизнь». На клетчатом листе стоит несколько фишек. Их расположение во всех клетках одновременно меняется следующим образом. Если в клетках, соседних с данной (по стороне или углу), стоит ровно 3 фишки, то в данную клетку ставится фишка (если ее не было). Если в соседних клетках более 3 или менее 2 фишек, то фишка снимается (если она была). Если в соседних клетках ровно 2 фишки, то состояние клетки не меняется.

Докажите, что в игре «Жизнь» на квадрате 2001×2001 существует конфигурация, не имеющая прообраза. (9)²

А. Белов

2. Единичный квадрат разбит на три многоугольника. Докажите, что диаметр хотя бы одного из них не меньше $\sqrt{65}/8$. (9)

Фольклор

² В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.

3. Фокусник угадывает поочередно масть всех карт в колоде из 52 карт. После каждого ответа ему сообщают, угадал он или ошибся. Докажите, что существует стратегия, позволяющая угадать не менее 13 карт, и нет стратегии, позволяющей гарантированно угадать больше. (10)

И.Изместьев

4. В треугольнике ABC отмечена точка O и из нее опущены перпендикуляры OA_1 , OB_1 , OC_1 на стороны BC , AC , AB . Пусть A_2 , B_2 , C_2 – вторые точки пересечения прямых AO , BO , CO с окружностью, описанной около $\triangle ABC$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны. (10)

А.Заславский

5. Найдите для каждого натурального $n > 1$ все функции (не обязательно непрерывные), которые удовлетворяют уравнению $f(x+y) = f^n(x) + f^n(y)$. (10)

Б.Френкин

6. Будем рассматривать последовательности длины n , состоящие из ± 1 . Произведением последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ назовем последовательность $\{x_i y_i\}$. Докажите, что для любых k различных последовательностей s_1, \dots, s_k найдется последовательность s такая, что количество последовательностей, одновременно принадлежащих множествам $Z = \{s_1, \dots, s_k\}$ и

$sZ = \{ss_1, \dots, ss_k\}$, не превосходит $k^2/2^n$. (10)

А.Белов, В.Сеидеров

7. Прямые разбивают верхнюю полуплоскость на многоугольники, диаметр каждого из которых меньше 1, а все стороны больше 0,000001. Докажите, что один из многоугольников можно выдвинуть вниз, не смещая остальные. (10)

А.Белов

*Публикацию подготовили
А.Стивак, Б.Френкин*

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

8 класс

1. В кубический сосуд емкостью $V = 3$ л залили $m = 1$ кг воды и положили $m = 1$ кг льда. Начальная температура смеси $t_1 = 0^\circ\text{C}$. Под сосудом сожгли $m_1 = 50$ г бензина, причем доля $\alpha = 80\%$ выделившегося при этом тепла пошла на нагревание содержимого сосуда. Считая сосуд тонкостенным и пренебрегая теплоемкостью сосуда и тепловым расширением, найдите уровень воды в сосуде после нагрева. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота испарения воды $r = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг \cdot °C), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, удельная теплота сгорания бензина $q = 4,6 \cdot 10^7$ Дж/кг. Считать, что дно сосуда горизонтально.

Ю.Старокуров

2. Груз неизвестной массы взвешивают, уравновесив его гирькой известной массы M на концах тяжелого прямого коромысла. При этом равновесие достигается, когда точка опоры коромысла смещается от середины на $x = 1/4$ его длины в сторону гирьки. В отсутствие же груза на втором плече коромысла остается в равновесии при смещении его точки опоры от середи-

ны в сторону гирьки на $y = 1/3$ его длины. Считая коромысло однородным по длине, найдите массу взвешиваемого груза m .

В.Птушенко

3. Два одинаковых сообщающихся сосуда наполнены жидкостью плотностью ρ_0 и установлены на горизонтальном столе. В один из сосудов кладут маленький груз массой m и плотностью ρ . На сколько будут после этого отличаться силы давления сосудов на стол? Массой гибкой соединительной трубки с жидкостью можно пренебречь.

О.Шведов

9 класс

1. Две материальные точки 1 и 2 и точечный источник света S совершают равномерное прямолинейное движение по горизонтальной плоскости. Тени

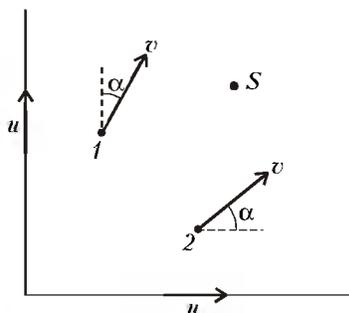


Рис. 1

от материальных точек движутся со скоростями, равными u , вдоль вертикальных стенок, которые перпендикулярны друг другу (рис.1). Скорости материальных точек равны $v = 2u/\sqrt{3}$ и направлены под углом $\alpha = 30^\circ$ к соответствующим стенкам. Чему равна и куда направлена скорость источника S ?

О.Шведов

2. Автомобиль проехал по пятикилометровому участку дороги. Специаль-

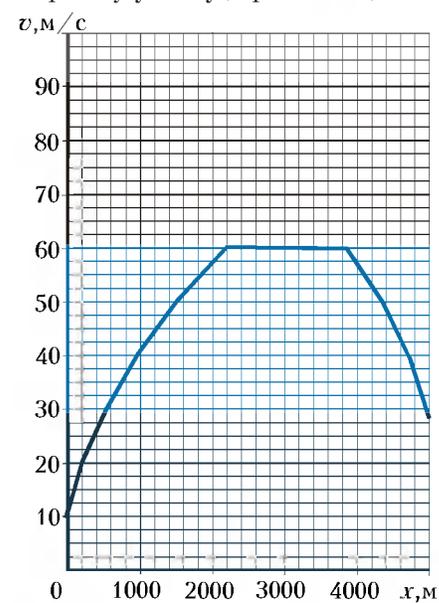


Рис. 2

ный прибор при этом записывал показания спидометра через каждые 10 метров. В результате получилась зависимость скорости автомобиля v от пройденного пути x , показанная на рисунке 2. Оцените, за какое время t автомобиль проехал эти пять километров.

А. Андрианов

3. Эскалатор метро движется со скоростью v . Пассажир заходит на эскалатор и начинает идти по его ступенькам следующим образом: делает шаг на одну ступеньку вперед и два шага по ступенькам назад. При этом он добирается до другого конца эскалатора за время t . Через какое время t_1 пассажир добрался бы до конца эскалатора, если бы шел другим способом: делал два шага вперед и один шаг назад? Скорость пассажира относительно эскалатора при движении вперед и назад одинакова и равна u . Считать, что размеры ступеньки много меньше длины эскалатора.

А. Якута

4. Тонкая гладкая спица длиной L вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, к которой прикреплен один из ее концов. Угол между спицей и вертикальной осью равен α . На спицу насажена маленькая бусинка, которая в начальный момент находится на середине спицы и покоится относительно нее. При какой угловой скорости ω вращения спицы вокруг вертикальной оси бусинка слетит со спицы?

Р. Компанеец

10 класс

1. Два тела имеют одинаковые ребристые поверхности (рис.3). Какую среднюю силу F в горизонтальном направлении, перпендикулярном реб-



Рис. 3

рам, нужно приложить к верхнему телу массой m , чтобы медленно тащить его по неподвижной горизонтальной поверхности второго тела с постоянной (в среднем) скоростью? Все ребра одинаковые, симметричные, имеют ширину l и высоту h . Поверхности граней ребер гладкие, их соударения абсолютно неупругие.

В. Птушенко

2. Петя и Вася решили построить плоты из пустых консервных банок

без крышек. Петя предложил расположить банки в один слой доньями вверх, а Вася — доньями вниз. Пренебрегая давлением насыщенных паров и поверхностным натяжением воды и считая, что оба плота будут медленно опускаться на воду так, что донья банки будут параллельны ее поверхности, оцените, кому и на сколько больше понадобится банок для постройки плота грузоподъемностью $M = 1000$ кг. Считать, что площадь дна банки $S = 0,01$ м², высота банки $H = 0,1$ м, масса банки $m = 0,01$ кг, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с², атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Д. Харабадзе

3. Над одним моле идеального одноатомного газа совершается процесс, изображенный на pV -диаграмме (рис.4). Постройте график зависимо-

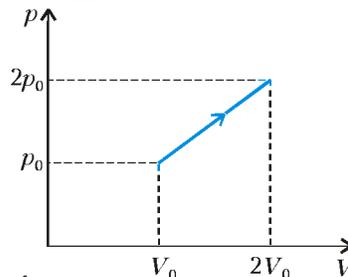


Рис. 4

сти теплоемкости газа в данном процессе от температуры.

О. Шведов

4. При подключении к батареек резистора сопротивлением R через нее течет ток I . При подключении к этой же батареек резистора, соединенного последовательно с неизвестным резистором, через нее течет ток $(3/4)I$. Если же резистор соединить с тем же неизвестным резистором параллельно и подключить к этой же батареек, то через нее будет течь ток $(6/5)I$. Найдите сопротивление R_x неизвестного резистора.

О. Шведов

11 класс

1. Квадратная рамка, изготовленная из тонкого проводника, подключена к батареек с ЭДС \mathcal{E} . Ток, текущий по рамке, создает в ее центре магнитное поле с индукцией B . Чему будет равна индукция B_1 магнитного поля в центре рамки из того же проводника, если ее размер увеличить вдвое, а ЭДС батареек оставить неизменной? Внутренним сопротивлением батареек пренебречь.

Примечание. Индукция магнитного поля, создаваемая движущимся зарядом в некоторой точке, определяется величиной заряда, его скоростью \vec{v} , расстоянием \vec{r} до точки, углом между вектором скорости и прямой, соединяющей заряд и точку, константой $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А² и направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы \vec{v} и \vec{r} .

О. Шведов

2. Имеется толстая плоско-выпуклая однородная осесимметричная линза (рис.5). Радиус R ее плоского осно-

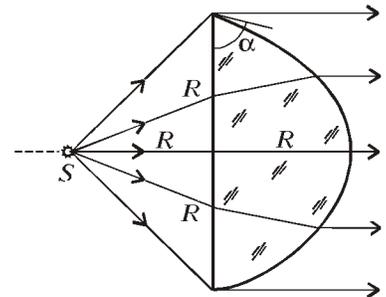


Рис. 5

вания равен ее толщине. Угол α между ограничивающими ее поверхностями в месте их пересечения меньше 90° . На оси симметрии линзы со стороны плоского основания помещают точечный источник света. Расстояние от него до линзы R . Выпуклая поверхность линзы гладкая, а ее форма такова, что все лучи, прошедшие через линзу без отражений, образуют строго параллельный пучок с плоским фронтом, диаметр которого равен диаметру линзы. Определите угол α .

Р. Компанеец

Второй теоретический тур

8 класс

1. Художник нарисовал «Зимний пейзаж» (рис.6). Как вы думаете, в каком месте на Земле он мог писать с такой натурой?

М. Семенов



Рис. 6

2. На краю крыши висят сосульки конической формы, геометрически подобные друг другу, но разной длины. После резкого потепления от $t_1 = 0^\circ\text{C}$ до $t_2 = 10^\circ\text{C}$ самая маленькая сосулька длиной $l = 10$ см растаяла за время $\tau = 2$ ч. За какое время τ_1 растает большая сосулька длиной $L = 30$ см, если внешние условия не изменятся?

М.Семенов

3. На улице идет сильный дождь. Его капли массой $m = 0,1$ г падают вертикально со скоростью $v_1 = 3$ м/с, причем в каждом кубометре воздуха содержится $N = 100$ капель. Школьник хочет перебежать из своего дома к приятелю в соседний дом, который находится на расстоянии $L = 50$ м, и при этом вымокнуть как можно меньше. Скорость бега может быть любой, но не выше $v_2 = 10$ м/с. Какова минимальная масса воды M , которая попадет на школьника во время пробежки, если площадь проекции его тела на горизонтальную плоскость равна $S_1 = 0,16$ м², а на вертикальную — $S_2 = 0,45$ м²?

М.Семенов

9 класс

1. Автомобиль движется с постоянной скоростью по прямолинейному участку дороги. Другой автомобиль равномерно движется по дуге окруж-

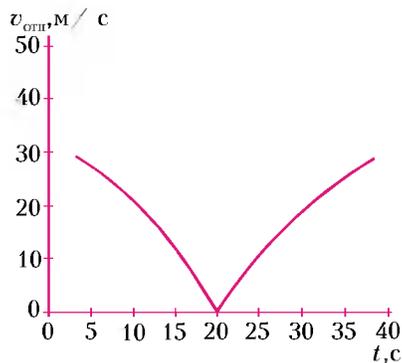


Рис. 7

ности радиусом $R = 200$ м. График зависимости модуля относительной скорости автомобилей от времени изображен на рисунке 7. Найдите величину скоростей автомобилей.

О.Шведов

10 класс

1. Т-образный маятник состоит из трех одинаковых жестко скрепленных невесомых стержней длиной L , два из которых являются продолжением друг друга, а третий перпендикуляр-

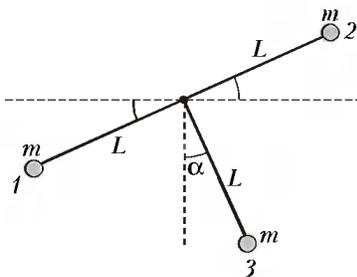


Рис. 8

рен им (рис.8). К свободным концам стержней, находящихся в одной вертикальной плоскости, прикреплены точечные грузы массой m . Маятник может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку скрепления стержней и перпендикулярной им. Маятник отклонили от положения равновесия на угол $\alpha < 90^\circ$ и отпустили без начальной скорости. С какой силой стержень действует на груз 3 сразу после отпускания маятника?

С.Варламов

2. В результате взрыва снаряда массой m , летевшего со скоростью v , образовались два одинаковых осколка. Пренебрегая массой взрывчатого вещества, найдите максимальный угол α разлета осколков, если сразу после взрыва их общая кинетическая энергия увеличилась на ΔW .

В.Погожев

3. Раствор этилового спирта в воде, имеющий концентрацию $n = 40\%$ по объему, находится в герметично закрытой бутылке, занимая 90% ее объема. Известно, что раствор заливали в бутылку и закрывали ее при температуре $t_1 = 0^\circ\text{C}$ и атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па. Чистый этиловый спирт кипит при этом давлении при температуре $t_2 = 77^\circ\text{C}$. Давление насыщенных паров воды при температуре t_2 равно $p_n = 4,18 \cdot 10^4$ Па. Какое давление установится над жидкостью в этой бутылке при температуре t_2 ? Давлением насыщенных паров спирта и воды при температуре t_1 можно пренебречь.

С.Варламов

4. Два плоских зеркала образуют двугранный угол. Точечный источник света находится внутри этого угла и равноудален от зеркал. При каких значениях угла α между зеркалами у источника будет ровно 100 различных изображений?

Р.Компанеев

11 класс

1. Для подтверждения своей водительской квалификации автомобилист должен выполнить следующее упражнение: за ограниченное время проехать расстояние $L = 50$ м между точками 1 и 2, начав движение в точке 1 и остановившись в конце пути в точке 2. Какое наименьшее время t для этого необходимо, если наибольшая мощность, развиваемая двигателем автомобиля, равна $P = 80$ кВт, а тормозной путь автомобиля при скорости $v = 80$ км/ч составляет $l_1 = 50$ м? Масса автомобиля $m = 1000$ кг.

В.Птушенко

2. В схеме, изображенной на рисунке 9, конденсаторы, емкости которых $C_1 = C_2 = C$, первоначально не заряжены, а диоды идеальные. Ключ K

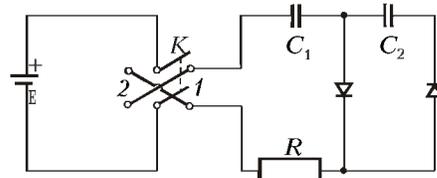


Рис. 9

начинают циклически переключать, замыкая его вначале в положение 1, а потом — в положение 2. Затем цикл переключений повторяется, и т.д. Каждое из переключений производится после того, как токи в цепи прекращаются. Какое количество таких циклов переключений надо произвести, чтобы заряд на конденсаторе емкостью C_2 отличался от своего установившегося (при $n \rightarrow \infty$) значения не более чем на 0,1%?

М.Семенов

Публикацию подготовили
М.Семенов, А.Якута

V Международная астрономическая олимпиада

Очередная, уже пятая, международная астрономическая олимпиада школьников прошла с 20 по 27 октября 2000 года в Специальной астрофизической обсерватории РАН на Северном Кавказе. Во олимпиаде приняли участие 8 национальных команд из Армении, Белоруссии, Болгарии, Бразилии, Индии, России (включая отдельную команду Москвы) и Украины.

Олимпиада включала в себя три тура: теоретический, практический и наблюдательный. Официальными языками олимпиады были русский и английский; на этих языках Оргкомитет подготовил задания, а перед турами руководители команд могли перевести задания на родные языки участников. Школьники были разделены на две группы: 8–10 классы (возраст участников до 15,8 лет) и 11–12 классы (до 17,8 лет).

Ниже приводятся условия задач теоретического тура и список призеров олимпиады.

Теоретический тур

8–10 классы

1. Как вы знаете, наиболее распространенным календарем в средние века был Юлианский. Сейчас большинство стран используют Григорианский календарь. Разница между Юлианским и Григорианским календарями составляет 13 дней: для одного и того же дня даты Юлианского календаря отстают на 13 от дат Григорианского календаря. Последний раз даты в этих календарях совпадали в 3-м веке. Вычислите, в каком веке эта разница составит 1 год и, например, 22 октября по Григорианскому календарю вновь совпадет с 22 октября по Юлианскому календарю.

2. Две звезды имеют одинаковые видимые звездные величины и одинаковые спектральные классы. Но одна

расположена вдвое дальше другой. Как соотносятся размеры эти звезд?

3. На рисунке 1 представлены два фотоснимка Луны, полученные одной и той же камерой, установленной на одном и том же телескопе (телескоп расположен на Земле).

Первый снимок был сделан, когда Луна находилась вблизи перигея, второй – когда вблизи апогея. Найдите по этим данным величину эксцентриситета лунной орбиты. Оцените минимальный период времени между моментами, когда эти снимки могли быть сделаны.

4. Космонавт летит на космическом корабле на высоте 100 км над Морем Холода (Луна). Астронавт гуляет по поверхности Луны в Море Холода, где сейчас дневное время суток (светит

Солнце). Может ли космонавт обнаружить этого астронавта с помощью 20-кратного бинокля? Принять во внимание все возможности.

5. На спутнике некоторой планеты «Олимпия» находится радиоисточник. Этот радиоисточник работает все время, но наблюдатель регистрирует сигнал не все время из-за затмений спутника планетой. На рисунке 2 показана зависимость уровня сигнала, получаемого наблюдателем, в зависимости от времени. Найдите по этим данным среднюю плотность планеты. Орбиту

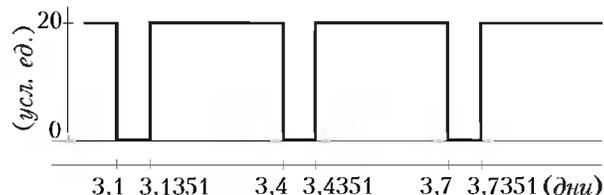


Рис. 2

спутника можно считать круговой, наблюдатель находится в плоскости орбиты спутника, а «Олимпия» расположена далеко от наблюдателя.

6. 1,2-метровая камера Шмидта имеет поле зрения $6 \times 6^\circ$. Оцените, сколько фотографий нужно получить этой камерой, чтобы покрыть все небо. (Сделайте, пожалуйста, оценку максимального и минимального числа фотоснимков.) Объясните ваши вычисления. Где вы должны установить телескоп, чтобы выполнить поставленную задачу?

11–12 классы

1. При наблюдении квазара обнаружено, что линия в его спектре, имеющая лабораторную длину волны 3000 \AA , наблюдается на волне 15000 \AA . Оцените: а) с какой скоростью удаляется от нас квазар; б) каково расстояние до него, если постоянная Хаббла $H = 75 \text{ км/(с} \cdot \text{Мпк)}$. Оба ответа могут быть даны с точностью 30%.

2. Молодые ученые из республики Коми (Российская Федерация) зарегистрировали несколько дней назад новый объект, напоминающий затменно-переменную звезду. Однако пери-

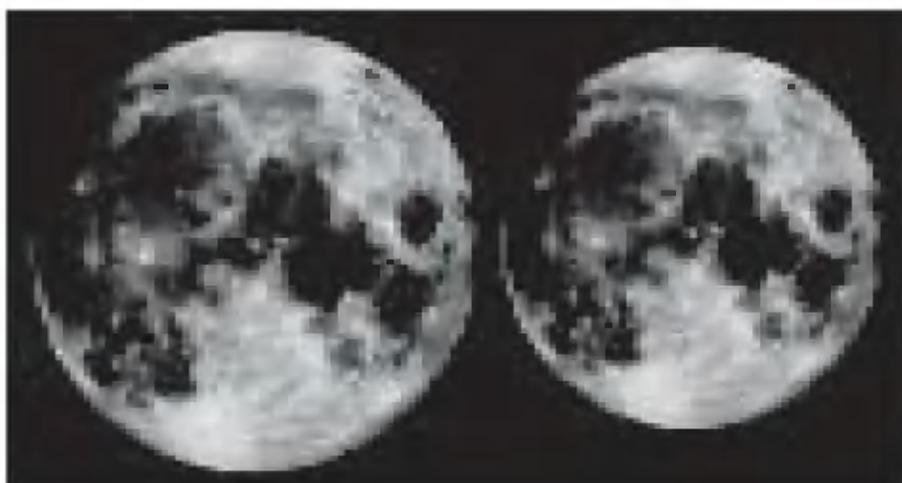


Рис. 1

од этой звезды непостоянен: звездная величина объекта, составляющая обычно $24,32^m$, каждые 7–11 секунд увеличивается до $24,52^m$ на 0,2–0,3 секунды. После исследований выяснилось, что светящийся объект – это

глаза группы абсолютно черных котов, сидящих на абсолютно черном теле в нашей Солнечной системе и смотрящих в сторону Солнца! И один из котов моргает! Вычислите число котов в этой группе. Поясните реше-

ние рисунком. Считайте, что размеры всех котов одинаковы.

3–6. См. задачи 3–6 для 8–10 классов.

Призеры олимпиады

Дипломы I степени получили

Агарвал Т. – Индия,
Бадьин Д. – Россия,
Бхалерао В. – Индия,
Булах В. – Россия,
Квасов И. – Россия.

Джа М. – Индия,
Кумар В. – Индия,
Лебедев А. – команда Москвы,
Праху В. – Индия,
Руфат Д. – Болгария,
Шахвердян Т. – Армения,
Войцук П. – команда Москвы.

Крумов В. – Болгария,
Нагаев М. – Россия,
Подлесных Д. – команда Москвы,
Скоморохов Р. – Болгария,
Соколовский К. – команда Москвы.

Публикацию подготовил
М. Гаврилов

Дипломы II степени получили

Балуев Р. – Россия,
Иванов М. – команда Москвы,

Дипломы III степени получили

Иванов А. – Россия,
Джаянти Ш. – Бразилия,
Константинов С. – Россия,

Магнитные явления

(Начало см. на с. 45)

возникающая в стержне с координатой x_1 , $E_{i2} = x_2'IB_0$ – ЭДС индукции во втором стержне, R – их внутренние сопротивления. Закон Ома для этой схемы имеет вид

$$x_2'IB_0 - x_1'IB_0 = 2IR.$$

Объединив последние три уравнения, получим

$$x_2'' - x_1'' = -\frac{(IB_0)^2}{mR}(x_2' - x_1'),$$

или, обозначив $x_2 - x_1 = z$,

$$z'' + \frac{(IB_0)^2}{mR}z' = 0.$$

После интегрирования запишем

$$z' + \frac{(IB_0)^2}{mR}z = \text{const}.$$

Из начальных условий следует, что

$$\text{const} = \frac{(IB_0)^2}{mR}b - 2v_0.$$

При $t \rightarrow \infty$ $z' \rightarrow 0$, поэтому для конечного расстояния между стержнями

найдем

$$b_k = b - \frac{2v_0mR}{(IB_0)^2} = \frac{b}{2}.$$

Упражнения

1. Какова индукция магнитного поля, создаваемого вращением электрона по круговой орбите радиусом $r = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см, вблизи протона? Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Указание. Индукция магнитного поля в центре кольца с током I равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}, \text{ где } R \text{ – радиус кольца.}$$

2. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая квадратная рамка из однородного куска провода со стороной a . Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого параллельны одной из диагоналей квадрата рамки. Масса рамки m , величина индукции B . Какой ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин квадрата?

3. По оси длинного металлического цилиндра натянута заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд $q = 10^{-7}$ Кл/м. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 10^3$ с⁻¹. Пренебрегая центробежными эффектами, определите индукцию магнитного поля внутри металла, в поло-

сти цилиндра и во внешнем пространстве вдали от торцов цилиндра.

Указание. Индукция магнитного поля внутри длинного соленоида с числом витков N и длиной L равна $B = \mu_0 NI/L$, где I – ток в соленоиде.

4*. Частица с зарядом q и массой m влетает с начальной скоростью v_0 в вязкую среду с поперечным однородным магнитным полем с индукцией B . Сила вязкого трения пропорциональна скорости частицы: $\vec{F}_{\text{тр}} = -\alpha\vec{v}$. На каком расстоянии от начальной точки (точки влета частицы в среду) частица остановится?

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Докажем, что профессору Мумбуму Плюмбуму не удастся составить из 8 различных цифр число, которое делилось бы на каждую из этих цифр. Очевидно, среди цифр не должно быть цифры 0. Кроме того, среди них обязательно должны присутствовать четные цифры, поэтому искомое восьмизначное число должно быть четным. В таком случае оно не должно делиться на цифру 5 (иначе это число должно было бы оканчиваться на цифру 0). Итак, в искомое число могут входить только цифры 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, и, следовательно, оно должно делиться на 9. Но сумма выписанных цифр не делится на 9.

Пример семизначного числа, делящегося на любую из его цифр: 1289736.

2. Если квадрат имеет нечетную сторону, то в нем клеток одного цвета на 1 больше количества клеток другого цвета. Пусть отмечено N квадратов с центральной белой клеткой (назовем их центрально-белыми) и M квадратов с центральной черной клеткой (назовем их центрально-черными). У центрально-белых квадратов суммарное количество белых клеток на N больше суммарного количества черных клеток; у центрально-черных квадратов суммарное количество черных клеток на M больше суммарного количества белых клеток. Поскольку изначально количества черных и белых клеток равны, то $M = N$. Таким образом, белых и черных клеток отмечено поровну.

3. Очевидно, при маленьком радиусе колеса оно будет катиться по бордюру, и длина следа будет не нулевой. Найдем наибольшее значение радиуса колеса R , при котором еще возможно касание бордюра – правильного треугольника с длиной стороны a (рис.1).

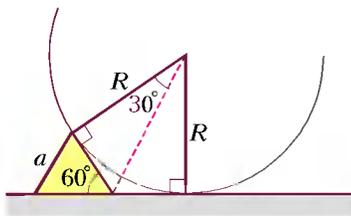


Рис. 1

Из соотношения $\frac{a}{R} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ получаем $R = a\sqrt{3}$. Колесо будет поворачиваться вокруг вершины бордюра, оставляя нулевую длину следа, если только его радиус превышает величину $a\sqrt{3}$. Для значения $a = 20$ см имеем $a\sqrt{3} > 20 \cdot 1,7 = 34$ см, поэтому колесо с радиусом 30 см обязательно оставит на бордюре след.

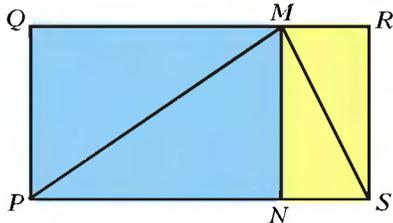


Рис. 2

4. Воспользуемся следующим вспомогательным утверждением: если на стороне QR прямоугольника $PQRS$ выбрана точка M , то площадь треугольника PMS равна половине площади прямоугольника $PQRS$. Для доказательства достаточно опустить высоту MN и рассмотреть площади треугольников PQM ; PMN и MNS ; MRS (рис.2).

Для доказательства основного утверждения задачи заметим, что площадь четырехугольника $CBDA$ (рис.3), с одной стороны, равна половине площади красного прямоугольника, а с другой стороны – половине площади синего прямоугольника.

5. Может показаться, что данных недостаточно – ведь первый собеседник не договорил, какой именно год он имеет в виду. И тем не менее задача решается: ведь он успел сказать главное – что получается *какой-то год*, а следовательно – *целое число*. Таким образом, если год его рождения обозначить через x , то из условия следует, что $\frac{(x+43)(x+45)}{x}$ – целое. Но

$$\frac{(x+43)(x+45)}{x} = \frac{x^2 + 88x + 1935}{x} = x + 88 + \frac{1935}{x},$$

т.е. 1935 делится на x . Отсюда $x = 1935$ (меньшие значения, очевидно, не подходят).

Таким образом, первый собеседник родился в 1935 году. Тогда 43 года ему исполнилось в 1978 году, 45 – в 1980 году, а тот год, о котором он не успел ничего сказать – это $1978 \times 1980 / 1935 = 2024$. Правда, этот год еще не наступил, но в условии это и не требуется. Он, например, мог сказать так: «...когда наступит сорокалетие моего внука» или еще что-нибудь.

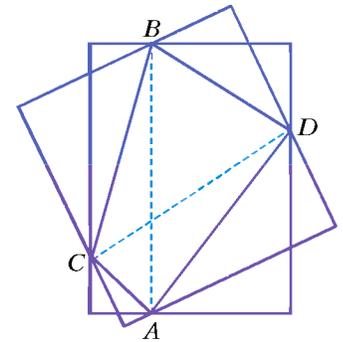


Рис. 3

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Поскольку из двух наклонных больше та, у которой проекция больше, то из неравенств условия задачи выводятся такие следствия:

$$DP \geq PA \Rightarrow OD \geq OA;$$

$$AQ \geq QB \Rightarrow OA \geq OB;$$

$$BR \geq RC \Rightarrow OB \geq OC;$$

$$CS \geq SD \Rightarrow OC \geq OD.$$

Отсюда

$$OD \geq OA \geq OB \geq OC \geq OD.$$

или

$$OD = OA = OB = OC = OD.$$

Значит, точка O – центр описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности.

17. Такого натурального числа не существует. Для любого натурального n член этой последовательности $(n^2 + 3n + 3)n + 1$ является кубом числа $n + 1$.

18. Пусть каждому медвежонку в конечном итоге досталось m граммов сыра. Так как после каждого откусывания масса куска уменьшается в 2 раза, то лиса не могла от каждого куска откусить одинаковое число раз (по 5), так как в этом случае начальные массы кусков также были бы равны, что противоречит условию. Поэтому пусть от первого куска лиса откусила n раз ($0 \leq n \leq 4$), а от второго – остальные $10 - n$ раз.

Тогда первоначальные массы кусков были равны $m \cdot 2^n$ и $m \cdot 2^{10-n}$.

Допустим, медвежата правы, и уравнивать массу частей можно за k откусываний, где $1 \leq k \leq 3$. Так как $n \leq 4$, то масса первого куска меньше, чем второго, и для уравнивания надо от второго куска откусить больше раз, чем от первого, т.е. больше $k/2$ раз. Итак, пусть от второго куска при уравнивании надо откусить p раз, причем $k/2 < p \leq k \leq 3$. Тогда от пер-

вого куска следует откусить $k - p$ раз. В результате массы кусков станут равны $m \cdot 2^{n-(k-p)}$ и $m \cdot 2^{10-n-p}$, а поскольку они сравниваются между собой, то $n - (k - p) = 10 - n - p$, откуда

$$k = 2(n + p - 5),$$

т.е. k – четное число. Но $1 \leq k \leq 3$, следовательно, $k = 2$. Далее, так как $k/2 < p \leq k$, то $p = 2$. Поэтому

$$2 = 2(n + 2 - 5), \text{ и } n = 4.$$

Таким образом, первоначальные массы частей равны $m \cdot 2^4 = 16m$ и $m \cdot 2^{10-4} = 64m$. В сумме это составляет 1 кг, или 1000 г, поэтому $16m + 64m = 1000$, откуда $m = 12,5$ г. Окончательная же масса обеих частей равна $12,5 \times 2 = 25$ г, что противоречит условию, согласно которому на долю медвежат досталось меньше 20 г сыра.

Следовательно, медвежата *неправы*.

Правомерен вопрос: а возможно ли вообще, чтобы после десятого откусывания медвежатам досталось меньше 20 г сыра? Оказывается, да. Простейший пример: лиса разламывает сыр на части, массы которых соотносятся как 1:1024, а затем 10 раз откусывает от большей части. В результате массы кусков уравниваются, но в каждом из них будет меньше грамма!

Возможны и другие, менее грабительские, варианты.

19. Пусть числа записаны на карточках, выложенных в ряд. Будем менять карточки и увеличивать вдвое числа на них. Две карточки, раз поменявшись местами, обратно поменяться не могут. Предположим противное и выберем пару (A, B) , первой поменявшуюся обратно. Ясно, что в промежутке между прямым и обратным обменами была еще хотя бы одна операция с A или B , иначе левое число так и осталось бы меньше правого. Однако карточка, поменявшись с A , попадет между A и B . Снова с A она не поменялась – иначе обратный обмен A и B не первый. Остаться между A и B она тоже не может – тогда A и B не смогут поменяться. Значит, она поменялась с B . Но тогда сколько раз в промежутке поменялась A , столько раз поменялась и B , значит, числа на A и B увеличились в одинаковое количество раз, правое осталось больше левого, и они так и не могли поменяться.

20. Разделим клетки доски на 16 крайних, одну центральную и 8 средних. На средние клетки было сделано 8 ходов, один из них из центра, поэтому не более 7 – с края. Значит, с края на край сделано не менее 9 ходов. Предположим, с края на край нет ходов по диагонали, тогда по принципу Дирихле вдоль одной из сторон квадрата сделано не менее 3 ходов с края на край. Для них есть 3 начальных и 3 конечных клетки, но на одном краю доски только 5 клеток, поэтому какая-то начальная совпадает с конечной, т.е. найдутся два последовательных хода в одном направлении, чего быть не может. Итак, имеется ход D с края на край по диагонали. Тогда он отсекает угол, и ход из этого угла (или в этот угол) пересекает D . Таким образом, ломаная должна быть самопересекающейся.

Параллельная проекция

1. Пусть параллельные прямые a и b проектируются параллельно прямой l на плоскость π . Тогда плоскости, проходящие через a и b и параллельные l , параллельны между собой и, значит, пересекают π по параллельным прямым. Следовательно, параллельной проекцией параллелограмма будет параллелограмм, и равные параллельные отрезки проектируются в равные. Для завершения доказательства достаточно заметить, что по теореме Фалеса отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, равно отношению длин их проекций.

2. Противоположные стороны двух параллелограммов, изображенных на рисунке 2 статьи, лежат на одних прямых. Их проекции обладают тем же свойством и, значит, равновелики. Пусть теперь даны два равновеликих параллелограмма $ABCD$ и $KLMN$. Заменим $ABCD$ равновеликим параллелограммом

$ABC'D'$, сторона BC' которого параллельна KL , а $KLMN$ – равновеликим параллелограммом $KLM'N'$, сторона LM' которого параллельна AB . Поскольку параллельная проекция сохраняет отношения параллельных отрезков, проекции этих, а значит, и исходных параллелограммов равновелики.

3. Возьмем равнобедренный треугольник ABC с вершиной C , лежащей на линии пересечения исходной плоскости и плоскости проекции, и основанием AB , параллельным этой линии (см. рис. 3 статьи). Его проекцией будет также равнобедренный треугольник $CA'B'$, причем $A'B' = AB$, а высота $CD' = CD \cos \varphi$, где φ – угол между плоскостями. Следовательно, $\text{tg} \angle A'CD' = \text{tg} \angle ACD / \cos \varphi$. Пусть

$\text{tg} \angle ACD = \epsilon, \cos \varphi = \epsilon^2$, где ϵ достаточно мало. Тогда близкий к нулю угол ACB проектируется в близкий к π угол $A'CB'$.

4. Пусть O – вершина трехгранного угла. На ребре, двугранный угол при котором равен γ , отложим отрезок $OC = 1$, проведем через C плоскость, перпендикулярную OC , и найдем точки A и B ее пересечения с другими ребрами (рис. 4). Получаем

$$CB = \text{tg} a, CA = \text{tg} b, OB = 1/\cos a, OA = 1/\cos b,$$

$$AB^2 = \text{tg}^2 a + \text{tg}^2 b - 2 \text{tg} a \text{tg} b \cos \gamma,$$

$$\cos c = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

5. Докажем сначала, что если прямой угол ортогонально проектируется в прямой, то одна из его сторон параллельна плоскости проекции.

Предположим, что это не так. Тогда можно считать, что проекцией прямого угла ACB является прямой угол ADB . Но в этом случае все углы при вершине D пирамиды $ABCD$ прямые, т.е. $AC > AD, BC > BD, AC^2 + BC^2 > AD^2 + BD^2$ – противоречие.

Пусть теперь диагонали четырехугольника $A'B'C'D'$ перпендикулярны. Так как эти диагонали являются проекциями перпендикулярных друг другу противоположных ребер тетраэдра, одно из этих ребер, например BD , параллельно плоскости проекции. Тогда плоскость симметрии тетраэдра, проходящая через AC и середину BD , перпендикулярна плоскости проекции, и $A'B'C'D'$ симметричен относительно прямой $A'C'$, в которую проектируется эта плоскость. Отсюда сразу вытекает требуемое утверждение.

Ортоцентрический треугольник

2. $|\cos \gamma|$.

3. а) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$; в) от 0 до 1.

Указание. $c = 2R \sin \gamma$, т.е. $A_1B_1 = 2R \sin \gamma |\cos \gamma|$.

4. Определите углы, образуемые прямыми A_1B_1 и OC со стороной AC .

5. $R\rho_1$. Указание. В четырехугольниках $OA_1CB_1, OA_1BC_1, OB_1AC_1$ диагонали перпендикулярны, а сумма их площадей равна площади исходного треугольника.

6. а) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{4}$; в) $\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$;

г) $\frac{\pi - \alpha_1}{2}, \frac{\pi - \beta_1}{2}, \frac{\pi - \gamma_1}{2}$.

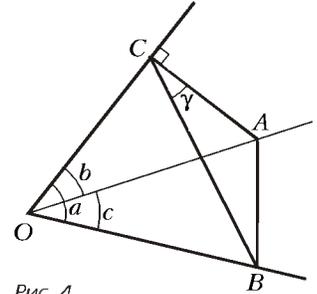


Рис. 4

7. а) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}$;
 в) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}; \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$;
 8. $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}; \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.

9. Четыре.

10. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}$;
 $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}$.

11. Пусть сначала ABC – остроугольный треугольник. Окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, гомотетична с центром H и коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$

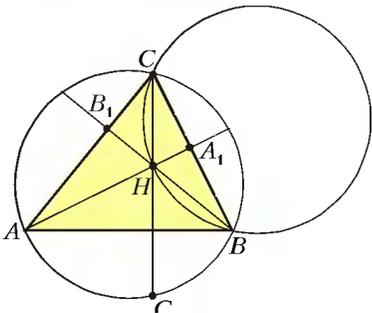


Рис. 5

описанной окружности треугольника ABC и, следовательно, проходит через середины отрезков CH, BH и AH . Далее, точка A – ортоцентр треугольника CHB . Мы доказали, что точки, симметричные точке A относительно сторон BC, BH и CH , лежат на окружности BHC (рис. 5). Но эта окружность при гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и с центром в точке A переходит в окружность, описанную около треугольника $A_1B_1C_1$ и, следовательно, проходит через середины сторон AC и AB . Аналогично рассматриваются оставшиеся случаи. Обратите внимание на то, что отрезки AB, AC и BC рассматриваются нами то как стороны треугольника ABC , то как отрезки высот треугольников AHB, AHC, BHC .

Разновески

1. Нужно удостовериться в том, что треугольник с длиной основания a_i , где a_i – любое число из указанного набора, существует. Пусть $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Тогда $a_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i - a_j, j \neq n$.

Значит, $a_n < a_1 + \dots + a_{n-1}$, и, следовательно, каждый отрезок длины a_i меньше суммы длин всех остальных отрезков.

3. Предположим, массы гирек в примечательном наборе выражаются числами a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , причем $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Если убрать a_1 , то выполняется только одно равенство $a_2 + a_5 = a_3 + a_4$. В самом деле, неравенства $a_2 + a_3 < a_4 + a_5, a_2 + a_4 < a_3 + a_5$ и $a_2 + a_3 + a_4 > a_5$ очевидны (если $a_2 + a_3 + a_4 \leq a_5$, то $a_1 + a_2 + a_3 < a_5$, и гирьки a_1, a_2, a_3, a_5 нельзя разбить на две группы равной массы). Рассуждая аналогично (заменяя всюду a_1 на a_2), убеждаемся в том, что если убрать a_2 , то возможно либо равенство $a_1 + a_5 = a_3 + a_4$, либо равенство $a_1 + a_3 + a_4 = a_5$. Из совокупности равенств

$$a_2 + a_5 = a_3 + a_4,$$

$$a_1 + a_5 = a_3 + a_4$$

находим $a_1 = a_2$, а из совокупности равенств

$$a_2 + a_5 = a_3 + a_4,$$

$$a_5 = a_1 + a_3 + a_4$$

находим $a_1 = -a_2$, чего не может быть. Значит, удовлетворяющего условию задачи набора из пяти гирек с попарно различными массами не существует.

4. С точностью до произвольного множителя $m > 0$ решение задачи имеет один из видов: $\{1,1,1,1,1\}, \{1,1,1,3,3\}, \{1, 1, 1, 1, 3\}, \{1, 1, 3, 3, 5\}$.

Магнитные явления

1. $B = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi^2 r^2 \sqrt{\pi \epsilon_0 r m}} \approx 4 \text{ Тл.}$

2. $I = \frac{mg}{\sqrt{2aB}}$.

3. Внутри металла $B = \mu_0 q\omega / (2\pi) = 2 \cdot 10^{-11} \text{ Тл}$, а в полости цилиндра и во внешнем пространстве магнитное поле отсутствует.

4. $l = \frac{mv_0}{\sqrt{\alpha^2 + (qB)^2}}$.

LXIV Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. $AX = 29, UX = 69$ или, наоборот, $AX = 69, UX = 29$. Поскольку $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, число 2001 можно представить в виде произведения двузначных чисел лишь следующими способами: $69 \cdot 29$ или $23 \cdot 87$.

2. Если оптовая цена ручки x рублей, то $5 - x = 10 - 3x$, откуда $x = 2,5$, т.е. 2 рубля 50 копеек.

3. 20 пакетиков.

4. Если рядом стоят числа a и b , то следующим стоит число b/a , за ним $1/a$, потом $1/b$ и, наконец, a/b . Эти шесть чисел удовлетворяют условию задачи. Конечно, при неудачном выборе чисел a и b какие-то из указанных чисел совпадут, но нас это не остановит: для решения задачи достаточно предьявить один пример. Например, взять $a = 2, b = 3$.

5. В Хемуля, Вифслу и Тофслу попали по одному разу. *Решение.* Если в Вифслу, Тофслу и Хемуля попали x, y и z снежков соответственно, то всего было брошено $13 + x + y + z$ снежков. С другой стороны, Вифсла бросил $6x$, Хемуль – $5y$, а Тофсла – $(4z + 1)$ снежков (вместе с первым снежком). Получаем уравнение

$$6x + 5y + 4z + 1 = 13 + x + y + z,$$

откуда $5x + 4y + 3z = 12$. Так как x, y, z – целые неотрицательные числа, то

$$(x; y; z) = (1; 1; 1), (0; 3; 0) \text{ и } (0; 0; 4).$$

Но поскольку в самого себя кидать снежки нельзя, то среди чисел x, y, z не может быть двух нулей. Поэтому возможен только первый случай.

6. См. рис.6.

1		20		13	
	2	21	12		
		3	22	11	
14	15	16	4	17	18
		10	23	5	
	9		24		6
8			25		7
			26		28

Рис. 6

7 класс

1. Конечно, это опечатка. Любая степень числа, оканчивающегося цифрой 1, тоже оканчивается цифрой 1. Поэтому разность $23021^{377} - 1$ оканчивается на 0 и, следовательно, не является простым числом.

2. Да, могло, если он один раз попал и три раза промахнулся. Решение проще всего найти, если разложить 8019 на множители: $8019 = 9^3 \cdot 11$. После удачного выстрела количество денег умножается на 1,1, а после неудачного – на 0,9, и $100 \cdot 1,1 \cdot (0,9)^3 = 80,19$.

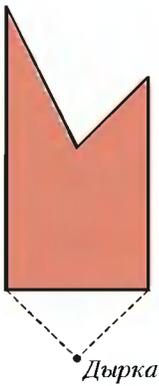


Рис. 7

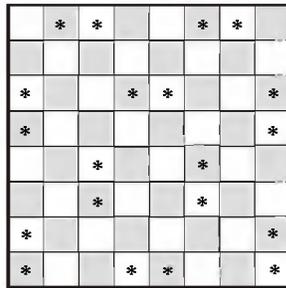


Рис. 8

- Да, могло; например, если в исходном проекте было 5 подъездов, 4 этажа и на каждом этаже по одной квартире: $5 \cdot 4 = 20$, $3 \cdot 7 = 21$, $1 \cdot 10 = 10$.
- На рисунке 7 закрашено множество точек, в которые можно вбить гвоздь.
- Пример приведен на рисунке 8.

Задачи для старших классов

8 класс

- Это клетка, расположенная в строке 51 и столбце 50. Сначала будет закрашен наружный слой клеток, после чего останется прямоугольник 98×198 клеток. Этот прямоугольник также закрашивается по спирали, и т.д. После окраски 49-го слоя останется прямоугольник, расположенный в строках 50–51 и столбцах 50–151. Последней будет закрашена его нижняя левая клетка.
- Да. Можно, например, ставить точки на окружности через равные достаточно малые интервалы.
25. Напишем слова в столбик. После всех замен буквы в каждом столбце должны стать одинаковыми. Число замен будет наименьшим, если в каждом столбце сохранить наиболее частую букву. Наименьшее число замен равно $4 + 4 + 5 + 4 + 4 + 4 = 25$. (В результате могут получиться и осмысленные слова, например ЗЕЛЕНЬ, КАПЕЛЬ или КАФЕЛЬ.)
- 5, 6. Расположим двузначные числа в клетках прямоугольника, откладывая по горизонтали единицы, по вертикали – десятки.

90			94		97	
		82			87	89
70				75		
			63			68
	51				56	
			44			49
30		32				37
				25		29
	11	13				17

Рис. 9

Гриши соответствует крестик из пяти клеток, в центре которого – названное им число (если оно содержит цифру 0 или 9, то часть крестика выходит за края прямоугольника). Покрытие прямоугольника 22 крестиками легко найти, если заметить, что крестиками можно выложить плоскость без перекрытий (правда, придется добавить несколько крестиков по краям прямоугольника). Например, можно назвать числа 11, 13, 17, 25, 29, 30, 32, 37, 44, 49, 51, 56, 63, 68, 70, 75, 82, 87, 89, 90, 94, 97 (рис.9).

В задаче 6 суммарная площадь крестиков равна $18 \times 5 = 90$, т.е. площади прямоугольника. Но, покрывая угловую клетку, мы выйдем за пределы прямоугольника, и эта потеря помешает покрыть весь прямоугольник.

9 класс

- Да. Расставим футболистов на прямой так, чтобы расстояние между первым и вторым было 2 м, между вторым и тре-

тым – 3 м, между третьим и четвертым – 1 м.
 2. Да. Допустим, что в каждом регионе все получают одинаковую зарплату и есть регион, в котором живут те самые 10% работников, которые получают 90% всей зарплаты.
 3. Перпендикуляры к сторонам угла, восстановленные в точках B и C , пересекаются в точке M' , диаметрально противоположной M . Из равенства углов падения и отражения получаем, что M' – центр вписанной, а M – невписанной окружности треугольника ABC . Поэтому диаметр MM' (включающий точку O) лежит на биссектрисе угла BAC .
 Дополнение. Покажите, что O лежит на описанной окружности $\triangle ABC$.

4. Нет. Если в некоторый момент количество камней в каждой куче делится на некоторое нечетное число, то так будет и дальше. После первого хода можно получить три варианта размещения камней: 100 и 5 (общий делитель 5), 56 и 49 (делитель 7), 51 и 54 (делитель 3).

5. Такое число существует для любого k : $N_k = 9k \cdot (10^k - 1)$. Пусть $9k = \overline{s_1 \dots s_i 0 \dots 0}$ ($s_i \neq 0$, нулей на конце может и не быть). При любом k имеем $9k < 10^k$. Поскольку $N_k = 9k \cdot 10^k - 9k$, то сумма цифр числа N_k равна $s_1 + \dots + s_i - 1 + 9 + \dots + 9 + (9 + 1) - s_1 - \dots - s_i = 9k$ (в левой части k девяток).

6. а), б) Нет. Обозначим сумму очков участника A через S_A , а его коэффициент силы через F_A . Сумма $\sum_A S_A F_A$ равна сумме чисел вида $\pm S_A S_B$, где шахматисты A и B сыграли не вничью. Каждое такое слагаемое входит один раз со знаком «+» и один раз со знаком «-». Поэтому вся сумма равна 0, и коэффициенты силы не могут все одновременно быть положительными или отрицательными.

10 класс

1. Да. Например, x^2 , $(x-1)^2$ и $(x-2)^2$.
 3. Многочлены задачи получаются из нечетных многочленов $f(t)$ (для которых $f(-t) = -f(t)$) по формуле $P(x) = f(x-1/2) + 1/2$. Например, при $f(t) = t^{2001}$ получаем $P(x) = (x-1/2)^{2001} + 1/2$.
 4. Пусть H_1, H_2, H_3, H – ортоцентры треугольников $AH_B H_C, BH_A H_C, CH_A H_B, ABC$ соответственно, M_1, M_2, M_3 – середины $H_B H_C, H_C H_A, H_A H_B$. Поскольку $H_C H_2 \parallel H H_A, H_A H_2 \parallel H H_C$, то точка H_2 симметрична H относительно середины отрезка $H_A H_C$. Такие же рассуждения справедливы для H_1 и H_3 . Так как $M_1 M_2$ – общая средняя линия треугольников $H_A H_B H_C$ и $H_1 H_2 H_3$, то $H_A H_B = H_1 H_2$. Аналогично, $H_B H_C = H_2 H_3, H_A H_C = H_1 H_3$, поэтому треугольники $H_1 H_2 H_3$ и $H_A H_B H_C$ равны.

5. Не могут. Назовем расположение фишек одноцветным или разноцветным в зависимости от того, стоят ли они на клетках одинакового или разного цвета. При перемещениях фишек одноцветные и разноцветные расположения чередуются, поэтому их должно быть поровну. Но количество разноцветных расположений равно $2 \cdot 32^2$, а одноцветных – $2 \cdot 32 \cdot 31$, поскольку две фишки не могут стоять на одной клетке.

6. Да (см. рис.10). Пусть на кольце последовательно расположены точки $A_1, B_2, A_3, B_1, A_2, B_3$, причем от точек A_1, A_2, A_3 отходят «ветки» с k городами. Если первая армия первым ходом занимает точку на «ветке» длины k , то вторая

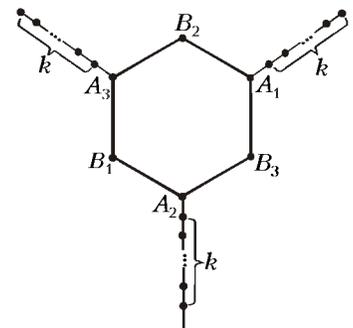


Рис. 10

должна занять соответствующую точку A_j ; если первая занимает A_i , то вторая – B_i ; если первая выбирает B_i , то вторая – одну из точек A_j ($j \neq i$). Дальнейшие действия очевидны. Так как в конце игры вторая армия занимает хотя бы две точки A_j , то первая занимает не более $k + 3$ точек. Поэтому доля городов, захваченных второй армией, не менее $(2k + 3)/(3k + 6) > 1/2$. В условии задачи вместо $1/2$ можно взять любое число $a < 2/3$ (тогда k нужно брать достаточно большим).

11 класс

1. Да. Например, $(x - 3)^2 - 1$, $x^2 - 1$ и $(x + 3)^2 - 1$.
2. Да. Пусть q – знаменатель прогрессии. Тогда q^9 и q^{29} – положительные рациональные числа. Это верно и для $q^2 = q^{29-9 \cdot 3}$ и $q = q^{9-2 \cdot 4}$. Пусть $q = m/n$, где m, n – взаимно простые натуральные числа. Число $a_{30} = a_1 m^{29} / n^{29}$ натуральное, поэтому a_1 делится на n^{29} и тем более на n^{19} . Значит, $a_{20} = a_1 m^{19} / n^{19}$ – число натуральное.
3. Точки I, I' лежат на биссектрисе $\angle ACB$. Опустив из них перпендикуляры $IK, I'K'$ на AC , получаем:

$$\frac{CI}{CI'} = \frac{IK}{I'K'} = \frac{IL}{I'L'}.$$

Спроектируем CI' на AB :

$$\frac{LH}{L'H} = \frac{IL}{I'L'}.$$

Пусть F – точка пересечения IL' и $I'L$, а G – ее проекция на AB . Тогда

$$\frac{GL}{GL'} = \frac{FI}{FI'} = \frac{IL}{I'L'} = \frac{LH}{L'H'},$$

откуда $G = H$, что и требовалось.

Дополнение. Докажите, что $CF = FH$.

4. Предположим, такой многочлен $Q(x)$ существует. Если его свободный член (равный $Q(0)$) делится на простое число p , то и $Q(p)$ делится на p . При этом $Q(p) \geq p^2 > p$ и потому является составным. Значит, $Q(0) = 1$. Но многочлен $Q(Q(x))$ обладает всеми свойствами из условия задачи и при этом $Q(Q(0)) = Q(1) > 1$, что противоречит предыдущему.
5. (По работе И.Межирова.) Опишем построение для произвольного количества многогранников N . Пусть правильный N -угольник с центром в начале координат лежит в горизонтальной плоскости и имеет вершины A_1, \dots, A_N (по часовой стрелке), а точки B_1, \dots, B_N находятся над ними на высоте 1. Многогранник с номером $k = 1, \dots, N$ будет представлять собой пирамиду с вершиной B_k , основание которой горизонтально и находится на высоте меньше 1. Возьмем горизонтальный треугольник с вершиной A_1 и соединим его вершины с B_1 , получив первую пирамиду. Пусть k пирамид построены. Если проведена горизонтальная плоскость P на высоте немного меньше чем 1, то сечения пирамид целиком находятся вблизи B_1, \dots, B_k . Пусть C – проекция B_{k+1} на эту плоскость. Проведем из C луч, пересекающий k -е сечение, и будем вращать его в направлении $(k-1)$ -го сечения (против часовой стрелки). В какой-то момент он уже не пересекает внутренность k -го сечения, но еще содержит некоторую его граничную точку D_k . Продолжение луча за точку D_k вращаем против часовой стрелки, оно пересечет $(k-1)$ -е

сечение, затем коснется его и даст точку D_{k-1} . Продолжая аналогично, получим выпуклый многоугольник $D_1 \dots D_k C$, касающийся сечений построенных пирамид (при $k = 1$, т.е. при построении второй пирамиды, нужно добавить еще одну вершину).

Соединив вершины многоугольника с B_{k+1} , получим $(k+1)$ -ю пирамиду. Если ее пересекает горизонтальная плоскость Q , то сечения пирамид плоскостью Q проектируются на части их сечений плоскостью P (из-за наличия вертикального ребра у каждой пирамиды). Поэтому они не имеют общих внутренних точек, и никакие три не соприкасаются в одной точке. Значит, наши пирамиды – искомые многогранники.

6. а) Состояние описанной системы определяется количеством шариков в каждой коробочке и указанием коробочки, из которой нужно взять шарики. Из каждого состояния можно перейти за один шаг в однозначно определенное состояние. Предшествующее также восстанавливается однозначно: начиная с выделенной коробочки и идя против часовой стрелки, нужно брать по шарик из каждой непустой коробочки. Встретив пустую (может быть, после нескольких кругов), положим в нее собранные шарики и объявим отмеченной. Начав с заданного состояния, будем выполнять операцию из условия задачи. Возможных состояний конечное число, и какое-то из них повторится. Значит, повторилось и предшествующее состояние, и т.д. вплоть до исходного.

б) Теперь состояние системы определяется лишь тем, как разложены шарики по коробочкам. Пусть из состояния X_1 можно перейти за один шаг в X_2 и т.д. вплоть до X_n . Если затем двигаться по правилу пункта а), то через сколько-то шагов придем в X_{n-1} . Далее можно аналогично перейти в X_{n-2} и т.д. вплоть до X_1 . Таким образом, если существует путь из одного состояния в другое, то существует путь и обратно.

Осталось найти конкретное состояние X , в которое можно перейти из любого состояния Y (тогда можно перейти из X в произвольное состояние Z , а тем самым и из Y в Z). Отметим некоторую коробочку M . Если каждый раз брать шарики из непустой коробочки, ближайшей к M при движении против часовой стрелки, то либо число шариков в M увеличится, либо ближайшая пустая коробочка станет еще ближе. Процесс не может продолжаться бесконечно, и потому все шарики соберутся в M . Это и есть состояние X .

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Число конфигураций конечно. Если одна из них имеет более одного прообраза, то какая-то другая не имеет прообразов. Но «пустая» конфигурация (когда фишек на листе нет) получается из любой конфигурации, в которой имеется только одна или две фишки.
2. Допустим, утверждение задачи неверно. Найдутся две вершины квадрата $ABCD$, которые принадлежат одной и той же части. Если эти вершины – противоположные, то диаметр части не меньше $\sqrt{2}$. Если это соседние вершины A, B , то отложим от них на боковых сторонах по $1/8$, получив точки E, F . Так как $AF = BE = \sqrt{65}/8$, то E и F не принадлежат первой части. Пусть M – середина стороны CD . Тогда $AM = BM > \sqrt{65}/8$; $EM = FM = \sqrt{65}/8$. Значит, M не принадлежит тем частям, что A, B, E, F . Поэтому E и F принадлежат одной и той же части. Вершины C, D могут принадлежать лишь третьей части. Отложив от них на боковых сторонах по $1/8$, получим точки, которые не могут входить в одну часть ни с C, D , ни с A, B ни с E, F .

**Избранные задачи
Московской физической олимпиады**

Первый теоретический тур

8 класс

$$1. h = \frac{2mr - \alpha m_1 q + m\lambda + 2mc(t_2 - t_1)}{\rho r V^{2/3}} \approx 8,23 \text{ см}$$

(здесь $t_2 = 100^\circ\text{C}$).

$$2. m = M \frac{y - x}{y(1 + 2x)} = \frac{M}{6}.$$

$$3. \Delta F = 0, \text{ если } \rho \leq \rho_0; \Delta F = mg(1 - \rho_0/\rho), \text{ если } \rho > \rho_0.$$

9 класс

1. Скорость источника света равна $u\sqrt{2}$ и направлена под углом 45° к стенкам.

2. $t \approx 120 \pm 10 \text{ с}$. *Указание.* Постройте график зависимости $1/v$ от x и вычислите площадь под получившейся кривой.

$$3. t_1 = t \frac{3v - u}{3v + u}, \text{ при этом } u < 3v.$$

$$4. \omega > \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2g \cos \alpha}{L}}.$$

10 класс

$$1. F = mgh/l.$$

2. Пете понадобится на 10 банок больше.

3. Теплоемкость постоянна и равна $2R$.

4. $R_x = R$. Заметим, что эту задачу нельзя решить в предположении, что внутреннее сопротивление батарейки отсутствует.

11 класс

$$1. B_1 = B/4.$$

$$2. \alpha = \arctg(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx 72^\circ.$$

Второй теоретический тур

8 класс

1. Ни в каком (месяц «рогами» вверх можно увидеть только вблизи экватора, где снег бывает лишь высоко в горах, а пейзаж на картинке равнинный).

$$2. \tau_1 = \tau L/l = 6 \text{ ч}.$$

$$3. M = NmL(S_2 + S_1 v_1/v_2) \approx 250 \text{ г}.$$

9 класс

1. Скорости автомобилей одинаковы и равны 20 м/с .

10 класс

1. Сила равна $N = mg\sqrt{1 - (5/9)\sin^2 \alpha}$ и направлена под углом $\varphi = \arcsin \frac{2\sin \alpha}{\sqrt{9 - 5\sin^2 \alpha}}$ к соответствующему третьему стержню.

2. $\alpha = \pi$, если $\Delta W > mv^2/2$; $\alpha = \pi/2$, если $\Delta W = mv^2/2$ и оба осколка движутся (если один из осколков останавливается, то угол α не определен); $\alpha = \arccos \frac{mv^2 - 2\Delta W}{mv^2 + 2\Delta W}$, если

$$\Delta W < mv^2/2.$$

$$3. p = p_0 T_2/T_1 + np_0 + (1-n)p_n \approx 1,9 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

3. Если фокусник всегда называет одну и ту же масть, то он угадает 13 карт. Рассмотрим теперь произвольную стратегию. Пока в колоде остаются хотя бы две масти, очередная карта может оказаться не той масти, которую назвал фокусник. Поэтому при любой стратегии может случиться, что фокусник отгадает лишь карты последней масти в колоде.

4. Вокруг четырехугольника AB_1OC_1 можно описать окружность; $\angle OAB_1 = \angle OC_1B_1$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Аналогично, $\angle OBA_1 = \angle OC_1A_1$. В окружности, описанной около треугольника ABC , вписанные углы OAB_1 и OBA_1 опираются на дуги A_2C и B_2C , поэтому их сумма равна $\angle A_2C_2B_2$. Отсюда

$$\angle A_1C_1B_1 = \angle OC_1B_1 + \angle OC_1A_1 = \angle A_2C_2B_2.$$

Равенство других углов в рассматриваемых треугольниках доказывается аналогично.

5. Уравнение выполняется, если $f(x)$ тождественно равно нулю или какому-либо корню степени $n - 1$ из $1/2$. Покажем, что других решений нет. Положим $x = y = 0$:

$f(0) = 2f''(0)$. Отсюда $f(0)$ равно одной из перечисленных констант. Пусть теперь x любое, $y = 0$: $f(x) = f''(x) + f''(0)$. Значения $f(x)$ являются корнями многочлена $z^n - z + f''(0)$, поэтому их количество конечно.

Теперь пусть x любое, $y = x$: $f(2x) = 2f''(x)$. С учетом предыдущего

$$f(2x) = 2f(x) - 2f''(0) = 2f(x) - f(0).$$

Если $f(x) > f(0)$, то $f(2x) > f(x)$ и т.д., тогда как множество значений функции конечно. Аналогично, $f(x)$ не может быть меньше $f(0)$.

6. Для произвольной последовательности t рассматриваемого вида положим $Z_t = Z \cap tZ$. Пусть σ – сумма количеств элементов во всех множествах Z_t . Для любых последовательностей p, q существует, и притом ровно одна, последовательность r такая, что $p = rq$. Значит, каждый элемент множества Z входит ровно в k множеств Z_t , и потому $\sigma = k^2$. Так как в этой сумме 2^n слагаемых, то хотя бы одно из них не превосходит $k^2/2^n$. Аналогично получается оценка $l_k = \frac{k(k-1)}{2^n - 1}$, при $2^n > k > 0$ она более точна. Легко видеть, что оценки l_1 и l_{2^n-1} неулучшаемы.

7. Допустим, утверждение задачи неверно. На прямой a , ограничивающей верхнюю полуплоскость, лежат какие-то вершины многоугольников, причем расстояние между любыми из них не меньше $0,000001$. Поэтому если двигаться по a слева направо, то для каждой вершины M однозначно определена следующая вершина N (удаленная от M не больше чем на 1). Пусть b – самая правая из прямых разбиения, проходящих через M , а c – самая левая из проходящих через N . Для многоугольника, примыкающего к a , возможные направления выдвигания – это те, которые «смотрят» внутрь многоугольника относительно любой из его сторон, кроме a . По предположению множество таких направлений пусто. Как следствие, прямая разбиения при движении по a слева направо поворачивается по часовой стрелке. Отсюда получаем, что полоса между a, b и c может быть пересечена только горизонтальными прямыми. Но тогда диаметры многоугольников в этой полосе в совокупности не ограничены (при удалении от a прямые b и c удаляются друг от друга).

$$4. \alpha \in \left[\frac{2\pi}{101}; \frac{2\pi}{100} \right) \cup \left(\frac{2\pi}{100}; \frac{2\pi}{99} \right).$$

11 класс

- $t = 2\sqrt{2I_T L} / v \approx 6,4$ с.
- Не менее 10 циклов.

V Международная астрономическая олимпиада

Теоретический тур

8–10 классы

- В 490-м столетии для невисокосных лет (периодов времени, начинающихся с 1 марта високосных лет и заканчивающихся 28 февраля последующих лет) и в 491-м для високосных лет.
- Линейные размеры первой звезды немного более чем в 2 раза превышают линейные размеры второй звезды.
- $e \approx 0,07$; около полугода.
- Да. Например, астронавта можно обнаружить по его тени, так как Море Холода находится в районе северного полюса Луны, где лучи Солнца падают под малыми углами к горизонту и отбрасывают длинные тени.
- $\rho \approx 4250$ кг/м³.
- Нужно установить камеру на экваторе и сделать от 1146 до 1800 снимков.

11–12 классы

- а) $v \approx 277000$ км/с; $R \approx 3700$ Мпк.
Указание: используйте формулы специальной теории относительности.
- Шесть.

VII Российская олимпиада по астрономии и физике космоса

(см. «Квант» №3)

Теоретический тур

8 класс

- Земля «перехватывает» немного более широкий пучок солнечного света, чем это было бы в отсутствие атмосферы.
- Затмения наиболее продолжительны, когда Луна будет в апогее. Дополнительные условия: затмение должно быть центральным; на долготе наблюдателя Луна должна быть близка к кульминации.
- ≈ 1 мин 26 с.
- Разрешение глаза Комова не хуже $1,3 - 1,5'$, так что зрение у него вполне хорошее.
- 29,53 земных суток, или одни лунные сутки.
- На Уране.

9 класс

- Да, представится.
- Из Пегаса или Водолея.

10 класс

- $\approx 1,72$ земного года.
- $-3,2''$. 4. $4,7 \cdot 10^{20}$ кг.

11 класс

- Антенны следует располагать на околоземных орбитах.
- 0,13. 6. $5,6 \cdot 10^7$ К.

IX Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

(см. «Квант» №3)

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

- а) 28002; б) $45n \cdot 10^{n-1} + 1$.

Указание. Разобьем число от 0 до $\underbrace{99\dots9}_n$ на пары: $(\underbrace{99\dots9}_n, 0)$; $(9\dots98, 1)$; ...; $(\underbrace{50\dots0}_{n-1}, \underbrace{49\dots9}_{n-1})$. Сумма цифр в каждой паре равна $9n$, всего пар $5 \cdot 10^{n-1}$.

- $(1 + \sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}; -1/\sqrt{2})$. Указание. Сложив первое неравенство с удвоенным вторым, имеем $(x - 2y - 1)^2 \leq 0$, т.е. $x = 2y + 1$, $2y^2 + 2y - x = 0$.

- $\pi - \alpha$. Указание. Поскольку $\angle IBJ = \angle ICJ = 90^\circ$, точки I , B , J , C лежат на окружности с центром в точке M .

- а) 10; б) 11; в) $\left[\frac{n+1}{2} \right]$. Указание. Пусть k такое, что среди n человек нет двух поздравивших друг друга. Тогда общее количество поздравлений равно nk , причем $nk \leq \frac{n(n-1)}{2}$, т.е. $k \leq \frac{n-1}{2}$.

Если $k \geq \left[\frac{n+1}{2} \right]$, то $nk > \frac{n(n-1)}{2}$ и, значит, найдется пара

поздравивших друг друга. Если $k \leq \left[\frac{n-1}{2} \right]$, то можно так организовать поздравление, что никакие двое не поздравят друг друга.

- а) Можно; б) можно. На рисунке 11 сначала показано, как разрезать на равнобедренные трапеции правильный треугольник, а потом – как разрезать квадрат и равнобедренный прямоугольный треугольник на трапеции и правильные треугольники.

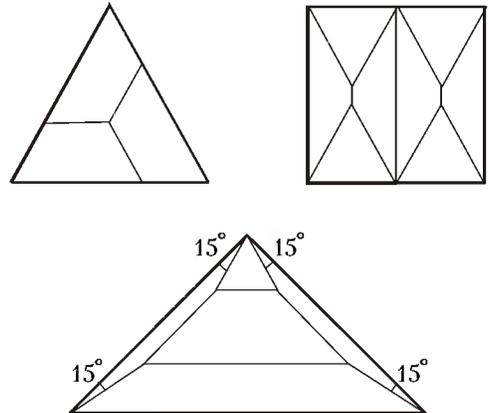


Рис. 11

- 4а. Указание. Докажите, что $BN = 2AN$, а $\triangle ADB = \triangle DMC$, так что $DC = AB$.

- а) Можно; б) можно; в) нельзя, так как сумма $1^3 + 2^3 + \dots + 2001^3$ нечетна.

Указание для случаев а) и б). Возьмем 16 последовательных кубов целых чисел $k^3, (k+1)^3, \dots, (k+15)^3$ и докажем, что можно так расставить знаки «+» и «-» между ними, что получится 0. Для этого рассмотрим 8 равенств (k фиксирова-

но):

$$\begin{aligned}
 k^3 &= k^3, \\
 (k+1)^3 &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1, \\
 (k+2)^3 &= k^3 + 3k^2 \cdot 2 + 3k \cdot 2^2 + 2^3, \\
 &\dots\dots\dots \\
 (k+7)^3 &= k^3 + 3k^2 \cdot 7 + 3k \cdot 7^2 + 7^3.
 \end{aligned}$$

Заметим, что при любом l

$$\begin{aligned}
 l^2 - (l+1)^2 - (l+2)^2 + (l+3)^2 &= 4, \\
 l - (l+1) - (l+2) + (l+3) &= 0.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 k^3 - (k+1)^3 - (k+2)^3 + (k+3)^3 - (k+4)^3 + \\
 + (k+5)^3 + (k+6)^3 - (k+7)^3 = -1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 + 6^3 - 7^3
 \end{aligned}$$

при любом k .

Но это значит, что расстановка знаков

$$+ - - + - + + - - + + - + - - +$$

перед кубами любых 16 последовательных целых чисел дает нулевую сумму.

В случае а) разбиваем числа $1^3, 2^3, \dots, 1999^3$ на группы по 16 последовательных кубов начиная с нуля, а в случае б) — начиная с 1.

ФИЗИКА

- $g \operatorname{ctg} \alpha > a \geq g \frac{1 - \sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu(1 - \sin \alpha)}$.
- $v_{0\min} = \sqrt{g(\sqrt{L^2 + h^2} + h)}$.
- $h_{\max} = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3M} \approx 10$ км (здесь M — молярная масса воздуха, R — универсальная газовая постоянная).
- Равновесие в системе определяется из условия

$$f(\alpha) = \frac{\beta \alpha}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} = 1,$$

где $\alpha = \frac{x}{R}$ и $\beta = \frac{kqQ/R^2}{mg}$. График на рисунке 12 представлен для случая $gQ > 0$. Здесь точка 1 соответствует устойчивому равновесию, а точка 2 — неустойчивому.

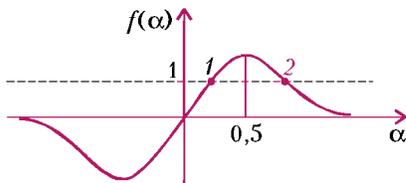


Рис. 12

- $E_p \approx 3,4$ эВ; $E_H \approx 4,5$ эВ, $E_D \approx 2,3$ эВ.
- $P = \frac{E^2}{R} \frac{N-2}{N}$, $N \geq 3$.

$$7. \tau \sim \frac{h}{\sqrt{gR\rho_v/\rho_0}} \sim 100 \text{ с}; \text{большие капли падают быстрее.}$$

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

5. *Указание.* Из условия следует, что сумма чисел, вычеркнутых Борей и Витей, делится на 4. Поэтому могло бы остаться одно из трех чисел: 1, 5 или 9. Числа 1 и 9 отпадают (если, например, осталось число 1, то сумма чисел, вычеркнутых Борей, равна 11, но это невозможно; если 9 — рассуждаем аналогично).
- 5/3. Площадь «косого» сектора AMP равна площади сектора OMP , где O — центр окружности.
27. *Указание.* Рассыпанное число делится на 9, больше 20^6 , но меньше 30^6 . Потому a — одно из трех чисел: 21, 24 и 27; так как 21^6 оканчивается на 1, а 24^6 — на 6, то это 27.
- Да. См., например, рис.13.

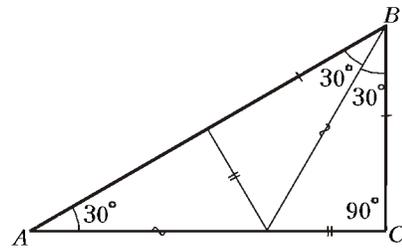


Рис. 13

- а) Нет; б) нет.
Указание. а) Докажите, что в описанном многоугольнике с четным числом сторон суммы сторон, взятых через одну, равны. Однако сумма $1 + 2 + \dots + 2002$ нечетна.
б) Отрезки длиной 1999, 2000 и 1 касаются окружности. Это невозможно, так как $2000 = 1999 + 1$.
- а) Можно. Например, последовательность $\frac{k}{2000!}$, где $k = 1, 2, \dots, 2000$, — арифметическая прогрессия.
б) Нет. В арифметической прогрессии $a_{n+1} - a_n = d$ — постоянная величина. Но в бесконечной последовательности вида $\frac{1}{n_k}$ разность соседних членов $\frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_{k+1}}$ стремится к нулю.
- 60° и 120° . *Указание.* $AN = 2R|\cos A|$, откуда $|\cos A| = 1/2$.
- $x + y + z = 3$. *Указание.* Числа x, y, z — различные корни уравнения $t^3 - 3t^2 + a = 0$.
5. *Указание.* Площади сегментов, занумерованные на рисунке 14, равны.

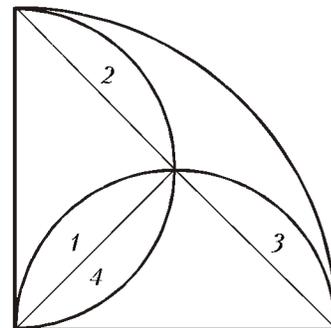


Рис. 14

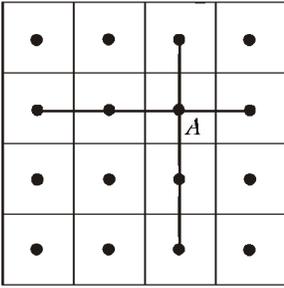


Рис. 15

10. 9 и 1. Указание.

$(x-v)^2 + (y-u)^2$ – квадрат расстояния от точки (x, y) на окружности $x^2 + y^2 = 1$ до точки (v, u) на окружности $v^2 + u^2 = 4$.

11. Существует. На рисунке 15 центрами клеток квадрата 4×4 изображены члены компании из 16 человек. Шестеро друзей каждого из них расположены в

той же вертикали и той же горизонтали, что и он сам. Ясно, что каждые двое имеют в точности двух общих друзей.

12. Нет. Если $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, то $a_1 \cdot 10^{n-1} < A < a_1 \cdot 9^{n-1}$, что невозможно.

ФИЗИКА

- В 2 раза.
- Ртуть сместится в сторону второго сосуда.
- Скорости звука в воздухе и в металле различны.
- Днем.
- С шарика на поверхность.
- В первом случае солнечные лучи сильнее рассеиваются.
- $\tau \sim 10^{-5}$ с.
- Спиртовой.
- Никакие.
- В первом случае основную роль играют магнитные, а не электрические силы.

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
- Леонардо Пизанский по прозвищу Фибоначчи (сын Боначчи). Числа f_n называются числами Фибоначчи. Рассмотрев последовательность остатков от деления f_n на 3, т.е. 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, ..., нетрудно заметить периодичность этой последовательности с периодом 8. А так как $f_4 = 3$ и $f_8 = 21$ делятся на 3, то f_n делится на 3 тогда и только тогда, когда n делится на 4.
- 2π. Указание. Искомая площадь равна площади прямоугольника OABC (рис.16).

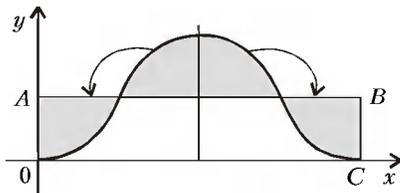


Рис. 16

- $1/3$. Указание. Пусть $S = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots$. Тогда $S = 1 - 2S$, т.е. $S = 1/3$.
- Давид Гильберт. Речь идет о 3-й проблеме Гильберта: равноставлены ли куб и правильный тетраэдр того же объема? Отрицательное решение получено в 1903 году немецким математиком Дэнном.

ФИЗИКА

- Джордж Гамов; 50-е годы; ~6 К.
- Майкл Фарадей; 1831 год.
- А.Эйнштейн (1916 г.). В.А.Фабрикант (1939 г.), Н.Г.Басов, А.М.Прохоров и Ч.Таунс (1954 г.): усиление света в результате вынужденного излучения.
- Ускорение электрическим полем; линейные, циклические, на встречных пучках и т.д.; 30-е годы; В.И.Векслер, Г.И.Будкер, Э.Макмиллан и др.; США, Россия, Швейцария.
- Нильс Бор.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
<http://www.courier.com.ru>

Vivos Voco!
<http://vivovoco.nns.ru>
 (раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,
 А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Чернуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришуква, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия,
 Е.А.Силина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

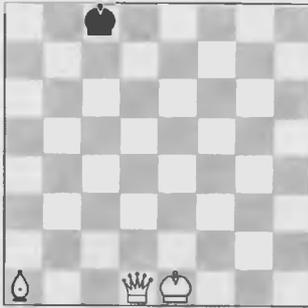
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
 Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
 тел. 930-56-48

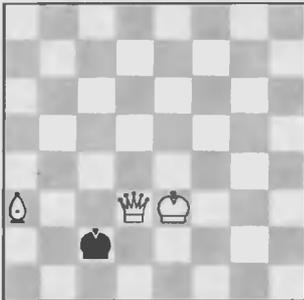
Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
 Чеховском полиграфическом комбинате
 Комитета Российской Федерации по печати
 142300 г. Чехов Московской области
 Заказ №

Цилиндрические шахматы-II



Мат в... 0 ходов

Пока что перед нами обычная доска. Но в этой шуточной задаче черный король и вправду получает мат в 0 ходов, причем сразу двумя способами. Белые, как и требуется в задании, не прикасаются к своим фигурам, но... сворачивают доску в цилиндр. И теперь что на горизонтальном цилиндре, что на вертикальном черный король сразу оказывается заматованным.



Пусть, например, склеены друг с другом крайние горизонтали.

Поле a1, как мы видим, присоединилось к диагонали b8-h2, и поля b8, c7 попали под наблюдение слона. В одну слились диагонали a6-c8 и d1-h5, и ферзь напал на черного короля, одновременно отняв у него поле b7. Мат на доске!

При переходе к новым доскам возникают не только оригинальные шахматные сюжеты, но и интересные головоломки. Вот один пример. Мы знаем, что на обычной доске можно расставить восемь ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу, причем 92 способами. А вот на цилиндре нет ни одной необходимой расстановки!

Докажем это для вертикального цилиндра. Возьмем стандартную доску, помня о том, что ее края склеены. Это означает, в частности, что поля с d1 до a4 и с h5 до e8 образуют одну диагональ. Запишем на каждом поле доски три цифры, совпадающие, соответственно, с

номером вертикали, горизонтали и диагонали (параллельной a8-h1), проходящих через это поле. Диагонали нумеру-

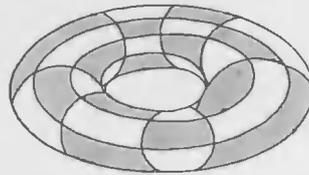
187	286	385	484	583	682	781	888
178	277	376	475	574	673	772	871
161	268	367	466	565	664	763	862
152	251	358	457	556	655	754	853
143	242	341	448	547	646	745	844
134	233	332	431	538	637	736	835
125	224	323	422	521	628	727	826
116	215	314	413	512	611	718	817

ются справа налево – как именно, видно на рисунке.

Предположим, что восемь ферзей расставлены на восьми полях цилиндра так, что не угрожают друг другу. Тогда первые цифры на этих полях различны и образуют полный набор чисел 1, 2, ..., 8. То же самое касается вторых и третьих цифр. Таким образом, сумма всех 24 цифр на восьми полях с ферзями равна $(1+2+...+8) \cdot 3 = 108$. Так как сумма цифр каждого поля делится на 8, то и общая сумма должна делиться на 8, однако 108 на 8 не делится – противоречие!

Если склеить края цилиндрической доски, то получится доска тороидальная. В тороидальных шахматах много чудес: например, одинокого короля здесь могут заматовать даже король и ферзь!

На диаграммах, представляющих задачи на торе, часто отрезают все четыре



границы – это знак того, что надо мысленно склеить края обычной доски.

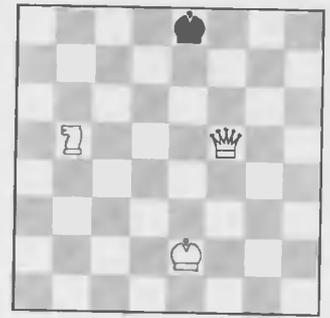
Мат в 4 хода на тороидальной доске

1. ♖h7! Теперь в распоряжении черных два ответа.

1... ♜f8. Поля d1, e1 и f1 контролирует белый король – на торе действуют правила горизонтального цилиндра!

2. ♜g6 ♜e7 3. ♜e1 ♜d7. Поля d8 и f8 держит белый король на e1. 4. ♜e8 ×.

1... ♜d8 2. ♜c7+ ♜e8 3. ♜h6! Конь идет по тору, как по вертикальному цилиндру! 3... ♜f8 4. ♜e1 × (через поля b6-a5, h4-f2). Поля f7 и g8 около черного короля держит белый конь, а остальные – ферзь.



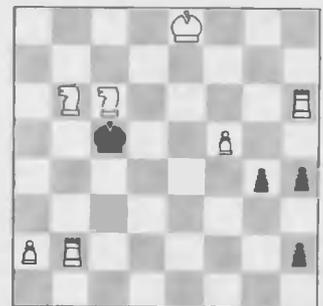
И в заключение – позиция, в которой мат надо поставить на трех досках – обычной, цилиндре и торе!

М. Рейли, 1957

Мат в 2 хода на обычной доске, вертикальной цилиндрической и тороидальной

На обычной доске после 1. a4 нет защиты от 2. ♜b5 ×. Но на вертикальном цилиндре этот ход ничего не дает, ввиду 1... hа! – черная пешка h4 бьет на проходе белую a4. А решает 1. ♜d7!, и черным не избежать 2. ♜h5 × (ладья нападает на короля слева – через поля a5 и b5).

На торе марш короля на d7 опровергается посредством 1... h1 ♜(♜), и в случае 2. ♜h5+ эта ладья просто берется



превращенной фигурой сверху, через поля h8-h6. Что же делать? К цели ведет удивительный ход 1. ♜g2!! с неизбежным 2. ♜g5 ×! Убедимся в этом.

Ладья покинула поле b2, но коня b6 защищает другая ладья – h6. Она держит шестую горизонталь, поэтому черному королю не скрыться на ней (и после 1... ♜b5 тоже). А четвертая горизонталь недоступна ему из-за белых коней. На поле g5 белая ладья g2 попадает на втором ходу по вертикали "g" сверху (через поля g8-g6), и воспрепятствовать ее появлению здесь черные не в состоянии. А королю, стоящему на c5 (или b5), ладья будет угрожать слева по пятой горизонтали (через поля a5, b5).

Е. Гук

Физики на монетах мира



В 1979 году к столетию со дня рождения Отто Гана (1879—1968) в Германии была выпущена в обращение медно-никелевая монета достоинством в 5 марок.

На гурте монеты написано: «1938 – расщепление ядра урана», а на реверсе изображена схема цепной реакции. Простой рисунок, приведенный на монете, иллюстрирует одно из важнейших открытий физики, которому суждено было в корне изменить сам путь развития цивилизации.

(Подробнее о расщеплении урана – внутри журнала.)