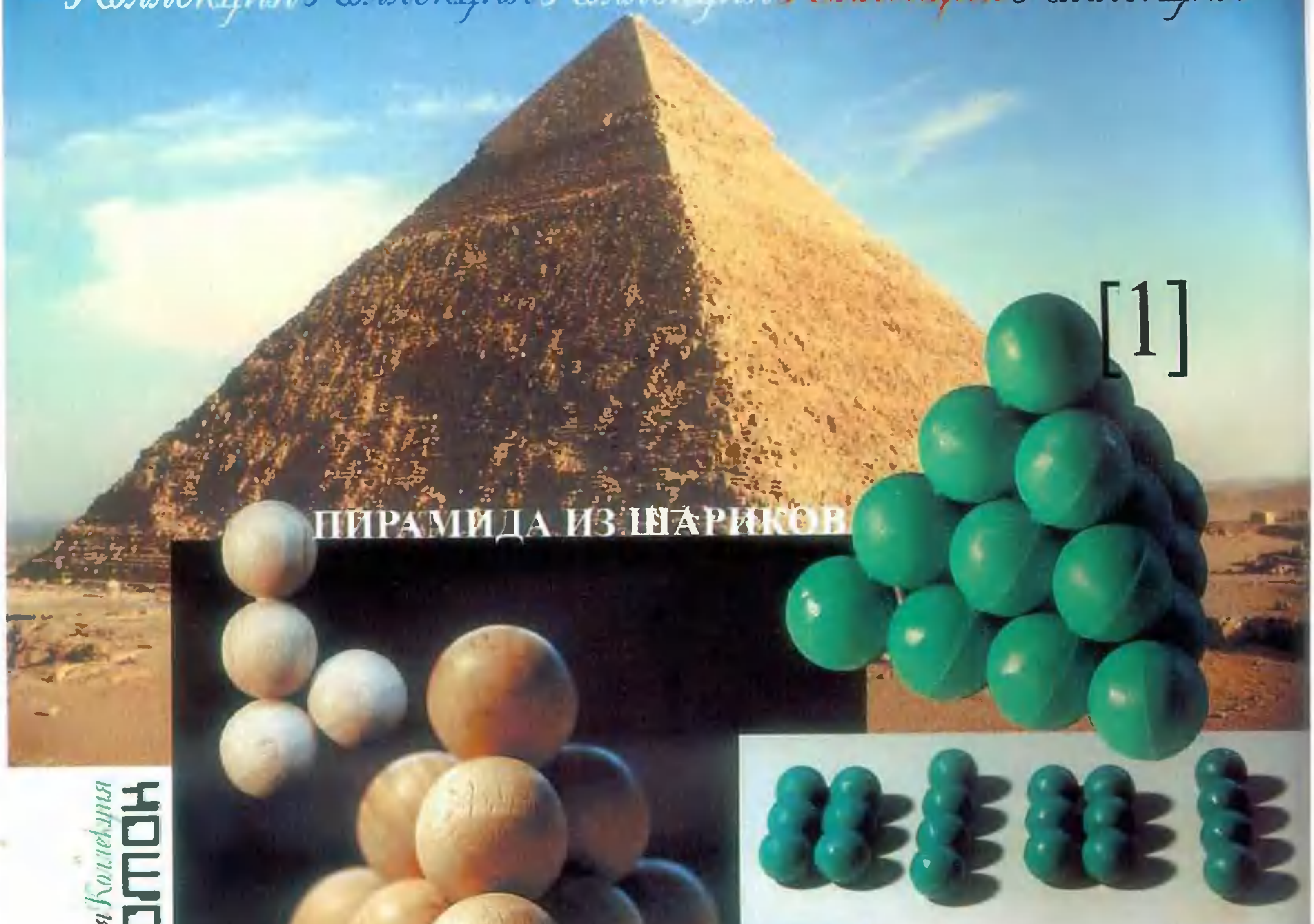
ISSN 0130-2221
МАЙ/ИЮНЬ
2003 · №3

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Коллекция Коллекция Коллекция **головоломок**

# ПИРАМИДА ИЗ ШАРИКОВ





Трудно придумать более простую задачу для читателей Кванта, чем сложить пирамиду из отдельных шариков. Задача становится гораздо более сложной, если шарики заранее соединить между собой в цепочки. Известны, по крайней мере, два варианта таких головоломок, и оба достаточна трудные в решении.

В первом варианте пирамиду нужно собрать из четырех элементов, которые попарно одинаковы и содержат по 4 и 6 шариков. Эта головоломка была придумана очень давно (и когда-то уже публиковалась в журнале), но продолжает быть одной из самых любимых у знатоков голаваломак.

Второй вариант появился недавно и уже поэтому кажется более интересным. Здесь пирамидку требуется собрать из пяти одинаковых элементов, каждый из которых состоит из четырех шариков.

Попробуйте решить эти задачи, а изготовить головоломки совсем нетрудно. Можно взять любые готовые шарики, например от старых бус, а можно вырезать их из дерева или вылепить из глины. Шарики склеивают между собой или нанизывают на проволоку, загнутую на концах цепочек.

*А.Калинин*

КВАНТ МАЙ ИЮНЬ 2003 №3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



*В 2003 году 6000 экземпляров журнала «Квант» издаются за счет грантов Фонда некоммерческих программ «Династия» и Фонда «Евразия».*

*Нефтяная компания «Sakhalin Energy Investment Company Ltd.» выписывает сто экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.*


1+3+5+7+9+11+13+15+17+19

# Андрей Николаевич Колмогоров
## (к 100-летию со дня рождения)

***В.ТИХОМИРОВ***

В АПРЕЛЕ ЭТОГО ГОДА ИСПОЛНИЛОСЬ 100 ЛЕТ со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова – одного из крупнейших математиков двадцатого столетия и одного из величайших русских ученых за всю историю науки в нашей стране.

Колмогоров получил широчайшее международное признание (по числу академий, избравших его иностранным членом, и университетов, избравших его почетным профессором, он уступает из наших ученых лишь И.П.Павлову и П.Л.Капице). Андрей Николаевич был создателем огромной научной школы (тринадцать его прямых учеников стали членами Российской академии наук). Он очень много сделал не только для науки, но и для математического просвещения. Им был создан знаменитый 18-й физико-математический интернат, носящий сейчас его имя; он был одним из основателей журнала «Квант».

Его своеобразие, как ученого, было в его разносторонности.

Об этом замечательно сказал его друг, знаменитый тополог, академик Павел Сергеевич Александров: «Необыкновенная широта творческих интересов А.Н. Колмогорова, огромный диапазон и разнообразие тех областей математики, в которых он работал в различные периоды своей жизни, выделяют Андрея Николаевича среди математиков не только нашей страны, но и всего мира, и можно прямо сказать, что в отношении этого свойства своего дарования он не имеет себе равных среди математиков нашего времени».

Обычно у ученого имеется одна узкая специальность, скажем алгебра, геометрия, алгебраическая геометрия и т.п. У кого-то бывает две специальности, ну три, редко больше. А у Колмогорова было (в одной лишь математике) около двадцати таких научных направлений, где он выступил как первооткрыватель или классик. А кроме математики он внес значительный вклад во многие другие как смежные, так и далекие от математики области знаний: физику, биологию, геологию, океанологию, метеорологию, кристаллографию, а также в некоторые гуманитарные области (историю России, стиховедение, историю науки).

Колмогоров был гений. Одним из признаков гениальности в науке, по моему мнению, является то, что ученому довелось бросить в благодатную почву зерно, из которого произросло потом исполинское научное древо.

В подтверждение гениальности Колмогорова можно привести один фрагмент из его творческой биографии. В 1941 году Колмогоров заинтересовался совершенно новой для себя наукой, которая, собственно, относится не к математике, а к естествознанию – к физике, гидро- и аэродинамике. Эта наука называется теорией турбулентности. Само по себе явление турбулентности наглядно видели мы все. Если речное течение очень медленное, то вихрей при обтекании валунов не образуется. А в горных речках все бурлит, образуются вихри. Постичь и описать это явление очень важно для прогноза погоды, теории морских течений и многого, многого другого. До 1941 года математической теории турбулентности не существовало, но было несколько великих ученых, которые пытались дать феноменологические объяснения турбулентности.

Колмогоров думал о турбулентности примерно полгода, потом наступила война, и он вынужден был переключиться на другие проблемы (его привлекли к задачам коррекции бомбометания и артиллерийского огня, и он перевернул и эту, собственно говоря, военную науку). Колмогоровым были опубликованы по теории турбулентности три маленькие статеечки в «Докладах Академии наук», общим объемом примерно 15 страниц. И вот что из этого произросло.

По прошествии примерно шестидесяти лет ученик Андрея Николаевича Акива Моисеевич Яглом, один из крупнейших современных специалистов по теории турбулентности, оказавшись в Америке, получил грант на написание серии книг по колмогоровской теории турбулентности. Эта область науки чрезвычайно разрослась. Представление о том можно получить из монографии французского ученого Уриэла Фриша, переведенной на русский язык и вышедшей из печати в 1998 году. Она называется «Турбулентность. Наследие Колмогорова». В этой книге есть такие слова: «Глубже всех проник в суть турбулентности именно Колмогоров – математик, обладавший страстным интересом к живой действительности». Библиография книги Фриша содержит более 600 работ последователей Колмогорова. Но это только малая часть того, что должен обозреть Яглом. Сейчас он завершает первый том серии, всего же их предполагается семь.

В этом году Акиве Моисеевичу исполняется 82 года, он торопится, отстраняя от себя какие бы то ни было другие дела. Я просил его написать для одного популярного нашего издания несколько страниц про свою юность, про своего брата-близнеца Исаака Моисеевича Яглома, умершего несколько лет тому назад. Исаак Моисеевич был замечательным математиком и популяризатором науки, очень много сделавшим для математического просвещения. Но получил отказ на мою просьбу. Акива Моисеевич ска-

*Иллюстрация П.Чернуского*

зал: «Я не могу отвлекаться. Я пишу монографию». «Сколько же ты будешь ее писать?» – спросил я. И получил такой ответ: «Ты, наверное, слышал о нашумевшем процессе в Америке: некий человек посылал письма разным людям, а в них были заложены взрывные устройства, и несколько человек были убиты. Он был осужден (в соответствии с законами США) *на три пожизненных заключения и еще тридцать лет*. Я думаю, что этого мне хватило бы».

Вот какой масштаб творческой активности породили три маленькие заметки Андрея Николаевича Колмогорова, оказавшиеся столь благодатным зерном, брошенным в ниву науки! Нет никакого сомнения, что если бы наша научная общественность озаботилась этим вовремя, вклад Колмогорова в теорию турбулентности был бы увенчан Нобелевской премией. Этот вопрос поставил известный бельгийский ученый И.Пригожин, но слишком поздно, когда Андрею Николаевичу оставалось жить всего полгода.

А.Н.Колмогоров родился 25 апреля (12 апреля по старому стилю) 1903 года в Тамбове. Его мать умерла через несколько часов после рождения сына, и он был воспитан сестрой своей матери – Верой Яковлевной Колмогоровой. Его детство прошло в Туношне под Ярославлем, в имении деда – Якова Степановича Колмогорова. Дед Андрея Николаевича был крупным помещиком, предводителем угличского дворянства, попечителем народной гимназии. Свое раннее детство в Туношне Андрей Николаевич всегда вспоминал как очень счастливое. Вера Яковлевна с сестрами устроила в туношенском доме «маленькую школу, – вспоминал Андрей Николаевич, – в которой занималась с десятком детей разного возраста по новейшим рецептам педагогики». Издавался семейный детский журнал «Весенние ласточки», где маленький Андрей заведовал математическим отделом. Там он публиковал придуманные им задачи и свои научные мысли. «Радость математического открытия, – писал он спустя примерно шестьдесят пять лет, – я познал рано, подметив в возрасте пяти-шести лет закономерность: $1=1^2$, $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$ и так далее».

В 1910 году Вера Яковлевна с Андреем переезжают в Москву, и он поступает в одну из лучших частных московских гимназий. В этой гимназии мальчики и девочки учились вместе (такое было в те годы еще только в одной московской гимназии). В одном классе с Андреем Колмогоровым училась Аня Егорова (дочь известного историка, члена-корреспондента Российской академии наук Дмитрия Николаевича Егорова), которая три десятилетия спустя стала его женой. Андрей Николаевич навсегда сохранил чувство глубокой признательности своей школе, учителям, основателям школы – Евгении Арнольдовне Репман и Вере Федоровне Федоровой. В школьные годы у Андрея Николаевича начали складываться первые глубокие дружеские связи. И прежде всего с братьями Селиверстовыми – Николаем и Глебом. Среди других одноклассников были Сергей Ивашев-Мусатов, интересный художник и замечательная личность (Солженицын, с которым Мусатов сидел в одной шарашке, изобразил его в романе «В круге первом» под фамилией Иванов-Кондрашов); Борис Бирюков – сын известного толстовца, автора биографии Толстого; Дмитрий Ромашов, ставший выдающимся генетиком (он вовлек Колмогорова консультантом в «эволюционную бригаду» – бригадами в тридцатые годы называлось то, что ныне зовется лабораториями, – и Колмогоров сделал замечательное открытие в математической генетике); Николай Нюберг (сын учительницы, преподававшей в гимназии латынь) – физик-оптик, специалист по теории зрения, также имевший плодотворные научные контакты с Колмогоровым.

Круг интересов Андрея Николаевича в его гимназический период был очень широк. Его интересуют естественные науки, история, социология, шахматы и даже политическая жизнь. Он пишет утопическую конституцию островного государства-коммуны, построенную на идеалах справедливости, как понимал ее тогда четырнадцатилетний подросток. Тогда же Колмогоров самостоятельно изучает дифференциальное и интегральное исчисление по энциклопедическому словарю Брокгауза и Ефрона. В 1917 году он принимает участие в выборной кампании на выборах в Учредительное собрание, агитируя за список №6 – плехановское «Единство».

В 1918–1920 годах, в тяжелое и голодное время, Колмогоров испытывал определенные колебания. Некоторое время он мечтал стать лесничим. Его увлекала история. «Увлечение было настолько серьезным, – вспоминает Андрей Николаевич, – что первым научным докладом, который я сделал в семнадцатилетнем возрасте, был доклад на семинаре С.В.Бахрушина о новгородском землевладении». Бахрушин – крупный русский историк, профессор Московского университета. По материалам, доложенным на семинаре, Колмогоров подготовил рукопись, датированную 14 января 1921 года. Вот как пишет об исторических исследованиях Колмогорова (опубликованных в 1994 году) наш выдающийся историк, академик В.Л. Янин: «Андрей Николаевич сам неоднократно рассказывал своим ученикам о конце своей "карьеры историка". Когда работа была доложена им на семинаре, руководитель семинара профессор С.В Бахрушин, одобрив результаты, заметил, однако, что выводы молодого человека не могут претендовать на окончательность, так как "в исторической науке каждый вывод должен быть обоснован несколькими доказательствами"(!). Впоследствии, рассказывая об этом, добавлял: "И я решил уйти в науку, в которой для окончательного вывода достаточно было одного доказательства". История навсегда потеряла гениального исследователя, а математика приобрела его».

Колмогорова влекла к себе математика, но в те годы «техника воспринималась как нечто более серьезное и необходимое, чем чистая наука». И Андрей Николаевич поступает на физико-математический факультет Московского университета и одновременно на металлургический факультет Менделеевского химико-технологического института. Но вскоре «интерес к математике перевесил сомнения в актуальности профессии математика».

С 1920 года вся жизнь Андрея Николаевича была связана с Московским университетом.

«То были годы необычайного подъема и увлечения внезапно открывшимися новыми творческими возможностями, годы подлинного цветения для многих молодых людей, впервые вкусивших радость творческого соприкосновения с наукой. Мало найдется в истории математики периодов столь горячего энтузиазма, как начало двадцатых годов в Московском университете, когда в столь короткий срок, буквально в несколько лет, возникла большая научная школа, в значительной степени определившая развитие математики в нашей стране и сразу выдвинувшая целый ряд выдающихся ученых», — писал П.С. Александров о рождавшейся в те годы московской математической школе. Главой этой школы, ее создателем был Николай Николаевич Лузин.

Колмогоров становится учеником Н.Н.Лузина. К числу своих учителей Андрей Николаевич относил также Павла Сергеевича Александрова, Алексея Константиновича Власова, Вячеслава Васильевича Степанова и Павла Самуиловича Урысона.

Научный старт Колмогорова был стремительным. В своей первой работе, написанной в восемнадцатилетнем возрасте в 1921 году (но опубликованной в 1928 г.), Колмогоров заложил начала общей теории специальных операций над множествами. Эта работа и поныне находится в ряду наиболее значительных достижений в этой области. А летом 1922 года Колмогоров получает один из самых замечательных результатов своей жизни: он строит почти всюду расходящийся ряд Фурье. Этот результат, сделавший его имя известным всему математическому миру, и поныне является одним из крупнейших достижений в теории функций. Его работа двадцатых годов о принципе исключенного третьего входит в число самых фундаментальных работ по математической логике.

Необходимо рассказать еще об одной деятельности Колмогорова в его студенческую пору. Вот как он пишет об этом: «В 1922—1925 годах потребность в дополнительном заработке к весьма маловесомой в то время стипендии привела меня в среднюю школу. Работу в Потылихинской [1] опытно-показательной школе Наркомпросса РСФСР я вспоминаю теперь с большим удовольствием. Я преподавал математику и физику (тогда не боялись поручать преподавание сразу двух предметов девятнадцатилетним учителям) и принимал самое активное участие в жизни школы (был секретарем школьного совета и воспитателем в интернате)».

Маленькое отступление. Я готовил в середине восьмидесятых годов очень краткую биографическую справку об Андрее Николаевиче для первого тома собрания избранных его сочинений. Там перечислялись основные вехи его жизненного пути, награды, премии и звания. Андрей Николаевич попросил меня прочитать, что у меня получилось. Когда я дошел до места, в котором сказано, что он работал в потылихинской школе, Андрей Николаевич с неожиданной для меня горячностью добавил: «... и руководил кружком юных биологов и был секретарем школьного совета!» У меня создалось впечатление, что этой своей жизненной позицией он гордился едва ли не больше всего.

Потылихинская школа сыграла важную роль в жизни Колмогорова. Вот как он сам рассказал об этом. «В школьные годы я был довольно болезненным ребенком. На школьном дворе во время игр падал в обморок. Потылихинская школа между прочим оказала на меня в этом отношении некоторое действие. Молодому учителю очень хотелось быть популярным. Для этого мне не хватало именно физических возможностей. В те времена каждый класс школьников выбирал себе классного руководителя — такой был порядок в школе. И у меня был любимый класс, про который я был совершенно уверен, что именно меня они выберут своим классным руководителем. И вдруг ко мне приходят и говорят, что они выбрали физкультурника!.. Это произвело на меня чрезвычайное впечатление и содействовало тому, что я постарался исправиться, побольше ходить на лыжах, плавать научился как следует и т.д.»

В 1924 году Андрей Николаевич организует свой первый поход со школьниками в Крым. С той поры летние походы становятся важной составной частью его жизни.

[1] *Потылиха — московская улица.*

Двое среди учеников Колмогорова по потылихинской школе стали известными людьми: это Юра Беклемишев, в будущем писатель Юрий Крымов, погибший на войне, и Алеша Исаев, Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий, разработчик серии двигателей для космических кораблей «Восток», «Восход» и «Союз». С Исаевым Андрей Николаевич совершил одно из своих самых замечательных путешествий по Северу по рекам Пинега и Кулой летом 1927 года.

В 1929 году Колмогоров заканчивает аспирантуру, и с этого времени до конца своей жизни работает на механико-математическом факультете МГУ. В этом году началась дружба Андрея Николаевича с Павлом Сергеевичем Александровым. С 1934 года существенную часть своей жизни они проводили в купленном ими загородном доме в Комаровке, неподалеку от подмосковного поселка Болшево.

Начиная с 1924 года, на протяжении последующих сорока лет Колмогоров работает в теории вероятностей. Он завоевал положение безусловного лидера в этой науке. Его книга «Основные понятия теории вероятностей» (написанная им в возрасте тридцати лет) вошла в золотой фонд этой науки наряду с классическими мемуарами Я.Бернулли и Лапласа. В этой книге, в частности, была построена общепринятая ныне аксиоматика теории вероятностей. В конце двадцатых годов Колмогоров строит общую теорию интеграла и меры множеств в евклидовых пространствах. В тридцатые годы он создает теорию марковских случайных процессов, завершая усилия Эйнштейна, Планка, Смолуховского и Винера, доказывает основополагающий результат по математической статистике (о скорости сходимости эмпирической функции распределения к истинной), дает аксиоматическое построение многообразий постоянной кривизны. Своей работой по проективной геометрии он явился одним из основоположников топологической алгебры и топологической геометрии. Очень большую роль сыграл цикл его исследований по алгебраической топологии, где он ввел (одновременно с американским математиком Дж.Александером) одно из важнейших понятий топологии – понятие когомологических групп. В конце тридцатых годов была написана знаменитая работа по теории дифференциальных уравнений (совместная с И.Г.Петровским и Н.С.Пискуновым), стимулом для которой послужили интересы Колмогорова в области генетики. В ней был получен принципиальный результат о бегущей волне. Эта работа имела необыкновенную по широте область применимости. В общей топологии ему принадлежит первый пример открытого отображения, повышающего размерность. В конце тридцатых годов Колмогоров строит теорию экстраполяции случайных процессов (параллельно с ним, но чуть позже, эту же теорию создает Винер, который считал ее одним из высших своих достижений). В области функционального анализа Колмогоров определяет понятие линейного топологического пространства и находит критерий его нормируемости, давая первый импульс новой главе функционального анализа – теории топологических векторных пространств. В конце тридцатых годов появляется знаменитая совместная работа И.М.Гельфанда и А.Н.Колмогорова, где были обозначены первые контуры будущей грандиозной теории банаховых алгебр.

В сороковые годы Колмогоров обращается к новой науке – локальной теории турбулентности (об этом уже рассказывалось выше). Эти его исследования прерывает война.

Без всякого сомнения, война была самым большим переживанием всех, кому довелось жить в это время. Но, обладая никогда не иссякающей жизнерадостностью, Андрей Николаевич любил вспоминать и курьезные эпизоды того времени.

Однажды, когда он возвращался из Москвы к себе в загородный комаровский дом, он был остановлен красноармейцами, охранявшими зенитную батарею в комаровском лесочке. Его приняли за шпиона, потому что он был в белых парусиновых штанах и мог тем самым (так считалось в те дни) сигнализировать немецким летчикам о целях бомбометания. Документов у Колмогорова при себе не оказалось, а в его рюкзаке обнаружились оттиски по турбулентности, написанные на иностранном языке. Командир батареи поверил объяснениям Колмогорова (что он академик, возвращающийся к себе домой), но комиссару этих объяснений показалось недостаточно. Ту ночь Колмогоров провел на гауптвахте, а под утро был препровожден на Лубянку. Там разобрались очень быстро. Комиссару тогда сильно не поздоровилось, а Андрея Николаевича с извинениями доставили в его комаровский дом.

Андрей Николаевич оставался в Москве до октября 1941 года, когда из столицы были эвакуированы правительственные учреждения, а также большинство учреждений науки и культуры. Колмогоров уехал в Казань, куда эвакуировалась Академия наук.

Но уже в начале 1942 года Колмогоров возвращается в Москву. «Ко мне обратились, – вспоминал он, – с просьбой дать свое заключение по поводу разногласий, имеющихся в приемах оценки меры точности по опытным данным». И Колмогоров фактически создал новую отрасль военных знаний.

Весной 1942 года решено было возобновить занятия в Московском университете. Большинство преподавателей было эвакуировано, и Андрей Николаевич, составив всю программу обучения, читал многие курсы и вел упражнения по разным предметам.

Один из слушателей вспоминал. Университет не отапливался, к тому же в него попала бомба, разрушившая стеклянную арку над старым зданием университета, где проходили занятия. На курсе, где Колмогоров должен был читать лекции по анализу, было совсем немного студентов, в подавляющем большинстве – девочки, которые сидели в шубах и варежках. Андрей Николаевич прочитал первую лекцию по интегральному исчислению, где объяснил начальные правила интегрирования. После короткого перерыва начался семинар по анализу. В качестве первого задания Колмогоров дал вычислить неопределенный интеграл от дроби с числителем единица и знаменателем, равным единица плюс икс в четвертой степени. Студенты стали растерянно смотреть на этот интеграл, а Андрей Николаевич некоторое время ходил по аудитории, изредка заглядывая им в тетрадки. Но ни у кого ничего не получалось. Когда студенты признались в этом, Андрей Николаевич воскликнул: «Не получается? Ну, это не удивительно... У Эйлера тоже долго не получалось... »

В первые послевоенные годы Колмогоров разрабатывает основы теории статистического контроля продукции и создает теорию ветвящихся процессов – процессов, напоминающих цепную реакцию.

Теорию ветвящихся процессов Андрей Николаевич создавал вместе со своими учениками Борисом Севастьяновым и Николаем Дмитриевым. В какой-то момент Андрею Николаевичу пришло на ум, что эти исследования могут иметь прикладное значение, которое требует секретности. Когда по просьбе руководителя Севастьянов обратился в компетентные органы, все там пришли в такое волнение, что тут же отобрали у него экземпляр его собственной диссертации, и ему не по чему было готовиться к собственной защите!

В творчестве Андрея Николаевича Колмогорова десятилетний период с 1953 до 1963 годы занимает особое место по невероятной, неслыханной интенсивности творческой деятельности. Это время было для многих (и для Андрея Николаевича тоже) временем надежд и творческого подъема.

Наибольшие усилия Андрея Николаевича в науке были сосредоточены вокруг шести больших групп проблем: малых знаменателей, суперпозиций, равномерных предельных теорем, общей теории динамических систем, внедрения понятия энтропии в различные области математики и связи случайности и сложности.

Здесь им были выдвинуты фундаментальные идеи, заложены основания новых научных направлений, решены великие проблемы, созданы новые методы, предложена концепция воссоединения теорий порядка и хаоса, увенчавшая его творческую биографию.

Новый метод доказательства теорем существования, связанный с малыми знаменателями, развитый В.И.Арнольдом и Ю.Мозером и получивший название КАМ-теории (теории Колмогорова–Арнольда–Мозера), сдвинул с мертвой точки одну из основных проблем небесной механики об устойчивости систем, подобных Солнечной системе. Было доказано, что в массивном множестве начальных данных возможно вечное существование трех тел, двигающихся по законам небесной механики, не ведущее к распаду.

Кстати, об этой знаменитой задаче трех тел. Априори существует несколько возможностей, касающихся «финального поведения трех тел в пространстве», т.е. поведения на всем отрезке времени от $-\infty$ до $+\infty$. Эти возможности те же, что в человеческом обществе случаются у трех друзей. Возможно, скажем, что три друга были рядом в прошлом до какого-то момента, потом они могут оставаться в дружбе и во все последующие времена, но может случиться, что один из них расстанется с двумя другими. Или, скажем, двое дружат и знакомятся с третьим. Возможен случай «захвата», когда третий присоединяется к паре друзей и далее они не расстаются, но возможен и случай «обмена», когда один из двух друзей начинает дружбу с новым приятелем, а второй удаляется от них. Возможно такое поведение, когда два друга все время находятся рядом, а третий постоянно покидает их и удаляется от них все дальше и дальше, но потом возвращается. Такое поведение называется осцилляционным. При этом, скажем, возможен «захват в осцилляцию», когда новый друг начинает осциллировать. Такие же случаи (обмена, захвата, захвата в осцилляцию и т.д.) возможны в задаче трех тел, всего 10 вариантов. Известный французский математик и астроном Ж.Шази полагал, что некоторые из этих десяти случаев невозможны, в частности захват. А замечательный советский ученый и исследователь Арктики Отто Юльевич Шмидт выдвинул в сороковые годы гипотезу происхождении Солнечной планетной системы, целиком основанную на осуществимости захвата. Проблему финальных движений трех тел – великую проблему, стоящую со времен Лапласа, – Андрей Николаевич поставил перед своим учеником-третьекурсником Володей Алексеевым. И через двадцать лет проблема оказалась решенной! Ответ в этой важной естественно-научной проблеме оказался таков: *все десять возможностей оказались реализуемыми*! Решение было получено совместными усилиями самого Колмогорова и его учеников В.М.Алексеева, В.И.Арнольда и К.А.Ситникова. Последняя точка была поставлена Алексеевым.

В 1956–1957 годах Колмогоровым (совместно с В.И.Арнольдом) было получено решение тринадцатой проблемы Гильберта (об этом решении см. в моей статье «Математика во второй половине XX века» в «Кванте» №2 за 2001 г.). Колмогоровым в 1956 году была доказана замечательная теорема из классической теории вероятностей о безгранично-делимых распределениях. Построение Колмогоровым нового инварианта в теории динамических систем вызвало бурный рост в теории информации, теории приближений, функциональном анализе. Наконец, он ввел важнейшее понятие, получившее название «колмогоровской сложности».

Но в тот же период он был окружен огромным числом новых учеников и молодых последователей, для большинства из которых контакты с Колмогоровым оказали решающее влияние на всю их творческую биографию.

На семинарах в университете, дома в Москве, в Комаровке Андрей Николаевич обсуждал со всеми ними и многими другими математиками и специалистами в других науках широчайший спектр научных проблем от небесной механики до стиховедения.

Колмогоров в те годы вел очень активную общественную жизнь. Он заведовал кафедрой теории вероятностей на механико-математическом факультете МГУ (которую создал в 1935 году) и отделом теории вероятностей в Математическом институте им.В.А.Стеклова, руководил отделом математики в Большой Советской Энциклопедии (и много писал для энциклопедии; в частности, в те годы им были написаны основополагающая статья «Математика» и статья «Кибернетика», сыгравшая большую роль в становлении этого нового направления науки); с 1954 по 1958 годы он был деканом механико-математичекого факультета. Колмогоров участвовал в трех Международных конгрессах (в частности, в Амстердамском конгрессе 1954 года, где ему и фон Нейману была оказана высокая честь открытия и закрытия конгресса; он начал свой доклад словами: «Для меня явилась неожиданностью необходимость сделать доклад на заключительном заседании конгресса в этом большом зале, который был ранее мне известен как место исполнения великих произведений мировой музыки под управлением Менгельберга»), а также в двух Всесоюзных математических съездах. Я перечислил далеко не все, чем был занят в те годы Андрей Николаевич.

Последние четверть века Колмогоров посвятил проблемам школьного математического образования. Эта часть деятельности Андрея Николаевича заслуживает отдельной статьи.

Колмогоров – пример универсального ученого. Он был и выдающимся логиком, и геометром, и аналитиком (именно эти три типа математической ориентации он выделил в своей брошюре «О профессии математика»), и натурфилософом, и «математиком для математики», и человеком глубоких гуманитарных интересов. Колмогоров всегда искал и отстаивал истину. Он был исключительной личностью. Трудно найти еще примеры ученых такой поразительной силы, широты и глубины.

И до самых последних мгновений Андрей Николаевич сохранил интерес к жизни во всем ее многообразии – к науке, к природе, к людям.

... За два года до смерти, будучи уже тяжело больным, Андрей Николаевич диктовал мне свои воспоминания о Павле Сергеевиче Александрове (что стоило ему невероятных усилий). Он попросил меня прочитать ему заметку «Несколько слов об А.Н.Колмогорове», написанную Александровым в 1970 году и воспринятую всеми как прощание со своим другом. Там были слова: «Моя дружба с А.Н.Колмогоровым занимает в моей жизни совершенно исключительное, неповторимое место». Услышав это, Андрей Николаевич начал диктовать: «Я хочу предварить [свои воспоминания] признанием, частично повторяющим приведенные выше слова Павла Сергеевича: для меня эти пятьдесят три года нашей тесной и неразрывной дружбы явились основой того, что моя жизнь оказалась преисполненной счастья, а основой моего благополучия явилась непрестанная заботливость со стороны Павла Сергеевича».

Как вдохновляюще звучат эти слова – о жизни, преисполненной счастья!

# Колмогоров и «Квант»

**А.СОСИНСКИЙ**

*С особым чувством отмечают столетний юбилей Андрея Николаевича Колмогорова все те, кто был связан в прошлом или связан теперь с журналом «Квант» – физико-математическим журналом для школьников и студентов. Андрей Николаевич Колмогоров и Исаак Константинович Кикоин были основателями журнала. Исаак Константинович закладывал традиции физического направления журнала, а Андрей Николаевич – математического.*

*Работа в «Кванте» не была для А.Н.Колмогорова случайным увлечением. Создание журнала для юношества являлось составной частью обширной программы совершенствования математического образования, которую Андрей Николаевич реализовывал в течение всей своей творческой жизни. В эту программу входило также и реформирование математического образования, и создание специализированных физико-математических школ для детей, увлеченных математикой и физикой, и проведение математических олимпиад, и издание специальной литературы, и многое, многое другое.*

*Одним из сокровенных желаний Андрея Николаевича было привлечение к научному творчеству детей, живущих вдалеке от ведущих научных центров. Для этого им был основан 18-й физико-математический интернат (ныне школа им. А.Н.Колмогорова), эту же цель, по мысли Андрея Николаевича, должен был преследовать и журнал «Квант». Он должен был дать возможность школьнику, где бы он ни жил, познакомиться с увлекательными физико-математическими материалами, побудить его к занятиям наукой.*

*При организации журнала Андрей Николаевич и Исаак Константинович сумели подобрать активную и высокопрофессиональную редколлегию и найти квалифицированных редакторов. При этом сами они выступили в роли камертона, написав в первый год несколько статей, послуживших образцами для подражания и задавших общий тон для всего журнала.*

*Две первые статьи А.Н.Колмогорова в «Кванте» не относились к каким-то изысканным областям высшей математики, а просто комментировали то, что школьники изучали на уроках. Первая статья (опубликованная в самом первом номере журнала) называлась «Что такое функция», вторая, вышедшая во втором номере, была озаглавлена «Что такое график функции». Но уже для третьего номера Андрей Николаевич написал небольшую, но яркую заметку «Паркеты из правильных многоугольников», ставшую прообразом статей одного из разделов журнала – «Математического кружка». Всего он опубликовал 13 статей в журнале и выпустил две книжки в Библиотечке «Квант». Одна из его статей (написанная совместно с Ф.Л.Варпаховским) была посвящена крупному научному событию – решению проблемы Гильберта Юрием Матиясевичем.*

*...В последние годы своей жизни Андрей Николаевич, несмотря на тяжелую болезнь, продолжал следить за работой журнала. Он ежемесячно собирал у себя дома актив редколлегии, участвовал в отборе статей для очередного номера, критиковал излишнюю трудность задач, вычурность некоторых математических статей, художественное оформление. Чувствовалось, какое большое значение придавал Андрей Николаевич своему любимому детищу – журналу «Квант».*

*В 1983 году Андрей Николаевич дал мне небольшое интервью (оно было опубликовано в «Кванте» №4 за 1983 г.). Предлагаем вашему вниманию запись этой беседы двадцатилетней давности, сохранившей живой голос замечательного человека – А.Н.Колмогорова.*

Мы находимся в старом деревянном доме в деревне Комаровка под Москвой, где Андрей Николаевич обычно проводит конец недели. Светлая, скромно обставленная комната. В одном из углов старый, но качественный проигрыватель со специальными полками для пластинок. Стены заставлены стеллажами с книгами. В середине комнаты большой стол с множеством книг, оттисков статей, рукописей, художественных альбомов. Андрей Николаевич сидит у окна за небольшим письменным столом. Рядом с пишущей машинкой и аккуратно сложенными исписанными листами бумаги стоит магнитофон, на который записывается наша беседа.

**— Андрей Николаевич, часто приходится слышать о возрастающей специализации науки. В то же время известно, что вы занимались такими далекими друг от друга областями математики, как теория вероятностей и алгебраическая топология, математическая логика и теория динамических систем. В чем, по-вашему, будущее науки — в универсальности или специализации?**

— Математика велика. Один человек не в состоянии изучить все ее разветвления. В этом смысле специализация неизбежна. Но в то же время математика — единая наука. Все новые и новые связи возникают между ее разделами, иногда самым непредвиденным образом. Одни разделы служат инструментами для других разделов. Поэтому замыкание математиков в слишком узких пределах, должно быть, гибельно для нашей науки. Положение облегчается тем, что работа в области математики, в принципе, коллективна. Должно быть некоторое количество математиков, которые понимают взаимные связи между самыми различными областями математики. С другой стороны, можно работать с большим успехом и в какой-нибудь совсем узкой ветви математики. Но в этом случае надо еще, хотя бы в общих чертах, понимать связи между своей специальной областью исследования с областями смежными, понимать, что, по существу, научная работа в математике – коллективная работа.

**— Что вы можете сказать о соотношении и связях прикладной и чистой математики?**

— Прежде всего, нужно заметить, что само различие между прикладной и чистой математикой чрезвычайно условно. Вопросы, которые, казалось бы, принадлежат к чистой математике и не имеют применений, очень часто совершенно неожиданно оказываются важными для разных приложений. С другой стороны, занимаясь прикладной математикой, ученый почти неизбежно наталкивается на смежные вопросы, решающиеся теми же методами, привлекающие его своей логической красотой, но, собственно говоря, непосредственных приложений уже не получающие. Вероятно, в практической работе математика нужно проявлять должную широту. Несомненно, что математики должны, это их долг, заниматься всеми теми вопросами, которые настоятельно навязываются вопросами практики. Если смежные вопросы, пусть сразу применений не имеющие, являются привлекательными хотя бы в силу красоты и естественности возникающих задач, ими, конечно, тоже нужно заниматься.

**— Норберт Винер пишет в своей автобиографической книге, что перестал заниматься функциональным анализом, когда почувствовал, что «Колмогоров наступает мне на пятки». А как вы относитесь к конкуренции в математике?**

— Заявление Винера мне не совсем понятно. В функциональном анализе я сделал немного. Самая интересная моя работа по функциональному анализу называется «Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве».

Что касается конкуренции, то конкуренция может быть дружеской, тогда она мало отличается от сотрудничества. Тесное содружество, когда два математика одновременно и параллельно думают над одной и той же проблемой, порой бывает очень продуктивным. Но при этом иногда бывает и так, что участие одного из сотрудников практически оказывается излишним, и тогда ему разумно без обиды отойти в сторону.

**— Всегда ли математика была вашим основным увлечением? Когда вы окончательно выбрали математику как профессию?**

— Нет, как это часто бывает, пути моего развития были более извилистыми. С раннего детства было известно, что я умею хорошо считать и что меня интересуют математические задачи арифметического характера; я сравнительно рано познакомился и с началами алгебры. Но все это относится к очень раннему возрасту. Несколько позднее, в средних классах школы, победили уже совсем другие увлечения – в частности, историей. Возврат к математике произошел в самых последних классах средней школы. Когда я кончил среднюю школу, то долго колебался в выборе дальнейшего пути. В первые студенческие годы, кроме математики, я занимался самым серьезным образом в семинаре по древнерусской истории профессора С.В.Бахрушина. Не бросал мысль о технической карьере, почему-то меня увлекала металлургия, и, параллельно с университетом, я поступил на металлургическое отделение Химико-технологического института им. Менделеева и некоторое время там проучился. Окончательный выбор математики как профессии, собственно говоря, произошел, когда я начал получать первые самостоятельные научные результаты, то есть лет с восемнадцати-девятнадцати.

**— Когда обычно проявляются способности к математике? Всегда ли, как у вас, в раннем возрасте?**

— Я довольно много преподавал в средней школе. У меня сложилось такое впечатление, что интерес к математике в средних классах, в возрасте двенадцати-тринадцати лет, часто оказывается временным и совсем проходит к старшим классам. Особенно часто это бывает у девочек. С теми школьниками, которые увлечены математикой в возрасте 13–15 лет, по-моему, стоит работать. При умелом культивировании их способности постепенно развиваются и, как правило, уже не теряются. Бывает, конечно, и очень много исключений. Разумеется, серьезный интерес к математике может проявиться и позже.

**— Какие математики старшего поколения оказали на вас наибольшее влияние?**

— В студенческие годы я был учеником Николая Николаевича Лузина. Кроме него большое влияние оказали на меня Вячеслав Васильевич Степанов, Александр Яковлевич Хинчин, Павел Сергеевич Александров и другие математики их поколения.

**— Что вам хотелось бы сказать о своих учениках и кого из них вы хотели бы упомянуть?**

— Мне повезло на талантливых учеников. Многие из них, начав работу вместе со мной в какой-нибудь области, потом переходили на новую тематику и уже совершенно независимо от меня получали замечательные результаты. Выделить из них наиболее заслуживающих упоминания было бы трудно. Скажу только в виде шутки, что в настоящее время один из моих учеников управляет земной атмосферой, а другой — океанами. [1]

**— Андрей Николаевич, каков ваш режим дня?**

— Естественно, в течение моей достаточно длинной жизни режим дня в разные ее периоды был различным. Опишу, пожалуй, только тот режим дня, который мы с Павлом Сергеевичем Александровым установили для себя на те 3—4 дня в неделю, которые мы проводили за городом, под Москвой, в деревне Комаровка.

День начинался в 7 часов утра. Первый час был посвящен гимнастике, пробежке. В 8 часов мы завтракали и принимались за работу за столом — с пишущей машинкой или без нее. В час или два часа дня был полдник, состоявший из молока или кефира с хлебом. После полдника мы еще немного работали, а потом отправлялись на большую прогулку пешком или — зимой — на лыжах, до 4 часов дня. Потом на полчаса мы укладывались спать. В 5 часов был обед. После обеда мы иногда еще занимались работой, обычно — второстепенной: переписывание или тому подобное. Вечер посвящался чтению, музыке, приему гостей. Перед сном мы любили делать небольшую прогулку. Укладывались спать около 10 часов.

Но, конечно, когда работаешь и начинает получаться решение какой-либо важной проблемы, все отступает на задний план, никакого распорядка дня уже не бывает.

**— Вы, как и многие математики, любите серьезную музыку. Расскажите, почему.**

— Ваше замечание о многих математиках, увлекающихся серьезной музыкой, мне кажется правильным. Если прийти в концертный зал, особенно в Малый зал Московской консерватории, то вы там увидите непропорционально много математиков. По-видимому, между математическим творчеством и настоящим интересом к музыке имеются какие-то глубокие связи. Но выяснить и объяснить эти связи мне представляется довольно трудным. Замечу, впрочем, что мой друг Павел Сергеевич Александров рассказывал, что у него каждое направление математической мысли, тема для творческих размышлений связывались с тем или иным конкретным музыкальным произведением.

Среди любимых композиторов назову, в первую очередь, Моцарта, Шумана, ну и, конечно, величайших музыкантов Баха, Бетховена.

**— Лингвисты и литературоведы обратили внимание на ваши публикации по стиховедению. Что вы можете сказать об этом — менее обычном — сочетании: математика и поэзия?**

— Мне хотелось бы разделить этот вопрос на два, так как мое увлечение поэзией имеет такой же непроизвольный, стихийный характер, как и у людей, не занимающихся теоретическим исследованием стиха. Любимые мои поэты — это Тютчев, Пушкин, Блок. Что же касается моих научных работ по метрике и ритмике русского стиха, то они действительно обратили на себя внимание специалистов-литературоведов, но все-таки это довольно специальная область исследования, интересоваться которой совершенно не обязательно всякому.

**— Занимаетесь ли вы спортом? Каким?**

— Состязательным спортом я никогда не занимался. Если не ошибаюсь, я только три раза в жизни участвовал в гонке на 10 км на лыжах.

Но я всегда очень любил большие прогулки пешком и на лыжах, совершал длинные путешествия на байдарке или на лодке. Очень люблю плавание, походы в горы. Во всех этих занятиях я ценю не только их пользу для здоровья, но и ту радость общения с природой, которую они приносят.

Всегда любил купание в морском прибое. В солнечные мартовские дни люблю делать большие лыжные пробеги в одних шортах. Во время таких мартовских лыжных пробегов люблю выкупаться посреди сияющих на солнце сугробов в только что вскрывшейся ото льда речке. Впрочем, я не советую обязательно подражать мне во всем этом — можно просто записаться в какую-нибудь привлекающую вас спортивную секцию.

**— Андрей Николаевич, что бы вы хотели пожелать нашим читателям?**

— Конечно, в первую очередь, я желаю нашим читателям внести тот или иной вклад в науку, большой или хотя бы маленький. Замечу, впрочем, что в случае если бы все наши читатели принялись писать самостоятельные научные работы, то научные журналы не выдержали бы такого натиска. Поэтому я выскажу и более скромное пожелание — чтобы школьное увлечение математикой пригодилось вам и в дальнейшей жизни. В «Кванте» мы как раз стараемся вам показать (может быть, и недостаточно), как разнообразны приложения математической науки.

---

[1] *Речь идет об академике А. М. Обухове, директоре Института физики атмосферы АН СССР, и об академике А. С. Монине, директоре Института океанологии АН СССР. (Прим. ред.)*

# Ванна и закон Бэра

*В. СУРДИН*

С тех пор как Архимед с криком «Эврика!» выскочил из ванны, этот банно-прачечный агрегат исправно служит физикам, и не только по своему прямому назначению. С помощью ванны можно, например, сделать множество интереснейших опытов. Один из них познакомит вас с законом Бэра и поможет, не покидая ванной комнаты, определить, куда вращается Земля.

### Закон Бэра

Представьте, что мы с вами плывем на лодке вниз по течению реки, например Волги. Оглянитесь по сторонам: правый берег у реки возвышенный, а левый низменный. Все ли реки отличаются этой особенностью? Нет, только реки, текущие в северном полушарии Земли. А в южном полушарии все наоборот: высокий берег – левый. Географы называют это «законом Бэра», а иногда «эффектом Бэра», поскольку подметил такую особенность речных берегов петербургский академик Карл Бэр (1792–1876).

Почему же реки ведут себя именно так?

Посмотрим на рисунок 1. Извилистая речка в случае *1* течет на нем с севера на юг (пунктирная стрелка *А*), а Земля вращается с запада на восток (изогнутая сплошная стрелка). Чем ближе к экватору, тем больший круг в одно и то же время (например, в сутки) описывает каждая точка Земли. Значит, вода течет из мест, вращающихся медленнее, в места, которые вертятся быстрее. Поэтому вода отстает от вращения Земли. Она ударяет о западный берег (прямая стрелка *В*), подмывает его, делает обрывистым. Заметим, что западный берег на такой реке – правый.

Возьмем другую реку, текущую с юга на север (*2*). В этом случае вода, которая быстро двигалась у экватора вместе со всей поверхностью планеты на восток, будет попадать в места, где суша движется под ней медленнее. А сама вода сохранит старую быстроту движения. Значит, она будет обгонять свое русло, выплескиваться на восточный берег и размывать его. Но для этой реки восточный берег и есть правый.

Теперь допустим, что река течет с запада на восток (*3*), в ту сторону, куда вращается Земля. Тогда течение реки будет складываться с вращением планеты, что увеличит центробежную силу инерции и погонит воду реки к югу, к экватору, дальше от центра вращения. Вода будет подтачивать (прямая стрелка) южный берег, но как раз он при этом окажется правым.

Наконец, возьмем последний случай (*4*). Положим, что река течет с востока на запад. Произойдет обратное: скорость вращения воды вокруг земной оси замедлится по сравнению с берегами, центробежная сила инерции ослабнет, вода будет ударяться о северный берег, а онто как раз и есть правый.

Как видим, в северном полушарии река всегда стремится подмыть правый берег. Рассуждая подобным образом, вы легко поймете, что в южном полушарии реки всегда будут подмывать и делать обрывистым левый берег. В районе экватора этот эффект исчезает, но в средних и высоких широтах спокойные равнинные реки следуют закону Бэра. Кстати, это хороший гео-


Иллюстрация Е.Силиной

графический признак: видя на фотографии реку с обрывистым правым берегом, мы имеем основание думать, что она течет в северном полушарии.

Разумеется, не только речная вода «чувствует» вращение Земли. Течение воздушных потоков также подчиняется закону Бэра. При этом в северном полушарии воздух отклоняется вправо и закручивается по часовой стрелке даже в том случае, если внутри этого вихря повышенное давление атмосферы препятствует этому, – так формируются антициклоны. Если же в некоторой области атмосферы давление пониженное, то воздушный поток закручивается против часовой стрелки, формируя циклон: в нем перепад давления от периферии к центру нейтрализует эффект Бэра и выполняет роль центростремительной силы. В южном полушарии, естественно, все наоборот: циклоны вращаются по часовой стрелке, антициклоны – против.

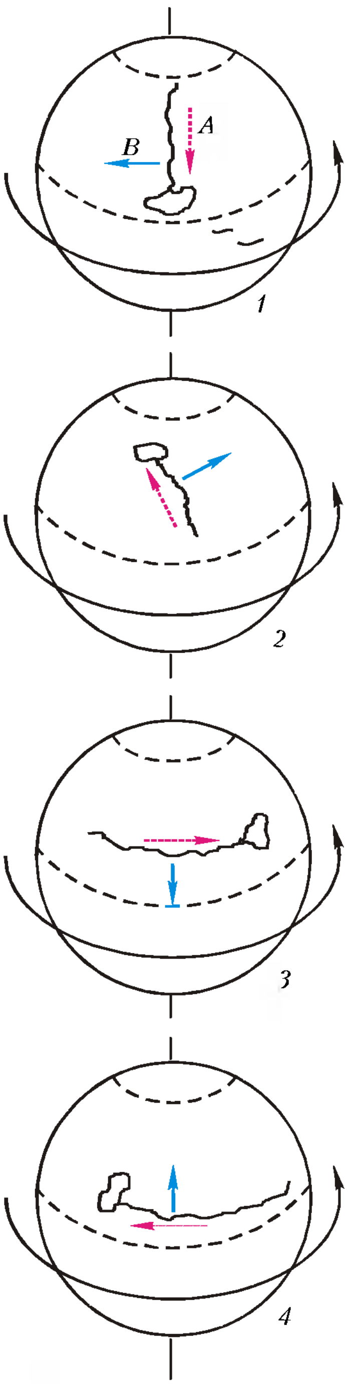



*Рис. 1*

А вот вопросы для самостоятельного размышления:

1. Почему воздушные потоки образуют спиралеобразные циклоны, а речное русло не закручивается в спираль?

2. Где еще на Земле может проявиться эффект Бэра?

До сих пор мы рассуждали с точки зрения наблюдателя, находящегося вне Земли и не вращающегося с ней. Систему отсчета такого наблюдателя, неподвижного относительно далеких небесных тел, называют инерциальной; в ней справедливы законы механики Ньютона. Но если наблюдатель находится на вращающейся Земле, то, очевидно, что и он заметит те же эффекты подмыва речных берегов, образования циклонов и отклонения падающих тел к востоку (это тоже вариант эффекта Бэра). Но как он их объяснит?

Наблюдатель во вращающейся системе, являющейся частным случаем неинерциальной системы отсчета, вынужден предположить, что существует особая сила, вызывающая упомянутые выше эффекты. Ее принято называть силой Кориолиса, в честь французского физика Гюстава Гаспара Кориолиса (1792–1843), изучавшего относительные движения. Для инерциального наблюдателя это фиктивная сила, поскольку он воспринимает отклонение движущихся по Земле (или на карусели) тел как чисто кинематический эффект. Но для неинерциального наблюдателя, который не знает, что его планета вращается, кориолисова сила вполне реальна, как и центробежная сила инерции, действующая даже на неподвижные (относительно планеты) объекты.

## Опыт для любознательных туристов

Описанные выше эффекты, особенно связанные с циклонами и антициклонами, хорошо знакомы любознательным гражданам обоих полушарий Земли. Особый интерес обычно вызывает тот факт, что при пересечении экватора циклоны и антициклоны меняют направление своей закрутки. Оказалось, что этот интерес с успехом можно эксплуатировать. Один такой случай описан в книге калифорнийского астронома Ф.Плэта «Плохая астрономия: Разоблачение неверных представлений и ошибок, от астрологии до "мистификации" с посадкой на Луну» (Plait Ph. Bad Astronomy: Misconceptions and Misuses Revealed, from Astrology to the Moon Landing «Hoax». New York: John Wiley & Sons, 2002). Замечу, что в этой книге рассмотрены типичные ошибки родителей и учителей при ответах на «детские» вопросы (Почему небо голубое? Почему бывает зима и лето? Почему Луна меняет свой вид?), объяснены некоторые непростые проблемы (Почему Луна у горизонта большая? Откуда берется сила Кориолиса?), а также разъяснены весьма серьезные заблуждения, имеющие коммерческий или политический смысл (Обладает ли астрология прогностической силой? Имеют ли право некоторые компании продавать имена звезд?) и т.п.

Так вот, в книге Плэта описан и замечательный пример того, как можно эксплуатировать интерес к науке у людей, не обремененных глубоким знанием ее основ:

«В городе Наньюки (Кения), расположенном на экваторе, один местный гражданин – Питер Мак-Лири – демонстрирует любознательным туристам следующий эффектный опыт: он проводит на земле линию, якобы отмечающую положение экватора, ставит по разные стороны от этой линии два чана с водой и открывает в их донышках отверстия. Вытекающая из северного чана вода закручивается по часовой стрелке, а из южного – против часовой. Мак-Лири объясняет, что это происходит под действием вращения Земли, и собирает с туристов деньги.

Но его доходы могли бы заметно поубавиться, если бы туристы лучше знали астрономию и физику. Действительно, в северном и южном полушариях Земли сила Кориолиса закручивает потоки жидкости и газа в разных направлениях, в каждом случае – в направлении вращения Земли (правда, г-н Мак-Лири перепутал эти направления: в северном полушарии потоки закручиваются против часовой стрелки). Но заметить эффект Кориолиса можно лишь в больших масштабах, например в атмосферных циклонах, а никак не в туалете или кухонной раковине. Ясно, что Мак-Лири заранее раскручивал воду в своих чанах в разные стороны».

Ну что же, разоблачить мистификацию дело полезное, даже если обман подогревает любознательность наивных граждан. Действительно, вблизи экватора эффект Кориолиса практически отсутствует, поскольку ось вращения жидкости перпендикулярна земной оси. В общем, можно поздравить автора книги «Плохая астрономия» с этой находкой, случай весьма поучительный – мистификатор пойман за руку. Но до конца ли прав сам разоблачитель обмана, считающий, что в лабораторном масштабе сила Кориолиса слишком мала, чтобы вызвать вращение воды в чане?

### А теперь – в ванну!

Давайте сами поставим опыт с вытекающей из чана водой, который убедит нас, что даже в комнатных условиях можно заметить эффект Кориолиса. Скажу сразу, что кухонная раковина для этого не очень подходят, но в ванне опыт удается легко (надеюсь, читатель «Кванта» живет не на экваторе), нужно лишь проявить аккуратность и немного терпения.

Итак, наберите полную ванну воды и дайте ей отстояться не менее часа, а еще лучше часа 2–3. Это необходимо, чтобы прекратились хаотические движения воды. Проверить их наличие легко: бросьте в воду кристиллик марганцовки, и он прочертит сиреневую линию от поверхности до дна. Если линия остается прямой, значит, вода спокойна. Затем очень аккуратно, не погружая руку в воду, вытяните за цепочку пробку. Поднимайте ее медленно и строго вертикально. Теперь ждите. Почти вся вода вытечет спокойно, без видимых движений. Но последние 2–3 литра воды продемонстрируют вам идеальный циклончик (рис.2), всегда закрученный против часовой стрелки (если вы житель северного полушария).

Объяснить это просто. В спокойном состоянии вода вместе с ванной и Землей совершает один оборот в сутки. В локальной системе отсчета можно представить ось вращения проходящей через центр сливного отверстия. Во время слива вода с расстояния 1 метр приближается к оси вращения на расстояние 1 сантиметр. Из закона сохранения момента импульса следует, что при уменьшении радиуса вращения ($R$) в 100 раз во столько же должна возрасти линейная скорость вращения ($V$), а значит, период вращения ($T = 2\pi R/V$) вблизи сливного отверстия сокращается в 10000 раз: с 24 часов до 10 секунд. Однако и 10 секунд – слишком большой период, чтобы образовался циклончик. В чем же дело?

А дело, оказывается, в вязкости воды. Ее порции, покидающие ванну первыми, медленно вращаются относительно неподвижных, более далеких от сливного отверстия слоев воды и за счет трения передают им часть своего момента импульса. Вначале в ванне было около 300 литров воды, а в момент появления «микроторнадо» остается всего 2–3 литра. Если бы вытекавшая вода оставила весь свой момент в ванне, то последние ее литры совершали бы вблизи отверстия более 10 оборотов в секунду. Поэтому даже небольшой вязкости воды, обеспечивающей передачу только 10% момента, оказывается достаточно для наблюдения эффекта Кориолиса в масштабах ванной комнаты.

*Рис. 2*

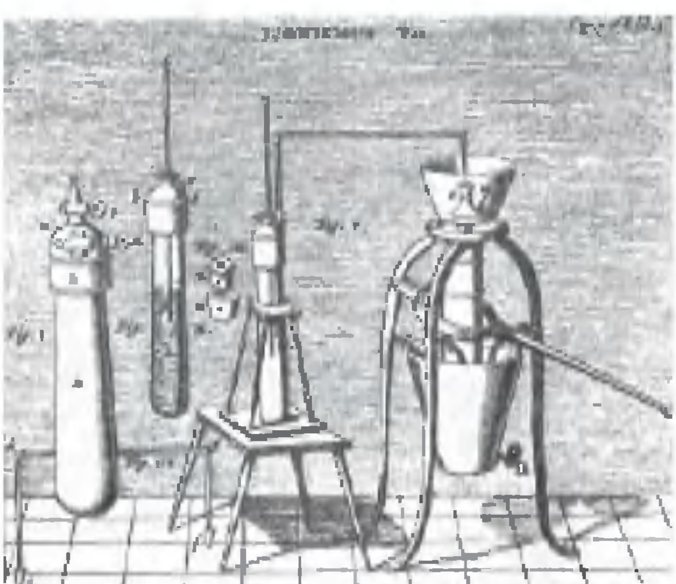
Вот так, не выходя за порог дома, можно доказать, что Земля вращается, и даже определить, в каком полушарии планеты вы находитесь. Это мог бы сделать даже сам Архимед, если бы в его ванне было сливное отверстие (очевидно, что отсутствие канализации в древних Сиракузах делало такое отверстие ненужным). Но почему этого не сделали ученые XIX столетия Бэр и Кориолис? Вероятно, они были слишком аккуратными людьми и сливали воду из ванны сразу же после купания, не дав затухнуть в ней случайным движениям. Вот к чему приводит иногда излишняя аккуратность!

# Два бургомистра

А.ВАСИЛЬЕВ

Яркие индивидуальности физиков и математиков часто проявлялись в самых разнообразных областях человеческой деятельности. Среди ученых были и знаменитые художники, как Леонардо да Винчи, и видные политики, как Бенджамин Франклин. Многие из них уделяли большое внимание развитию современной им техники, промышленного производства и военного дела. По роду службы Исаак Ньютон был смотрителем Королевского монетного двора в Лондоне, а Отто фон Герике в Магдебурге и Оле Рёмер в Копенгагене были градоначальниками.

**Бургомистр Магдебурга.** Отто фон Герике (1602–1686) родился в Магдебурге в самом начале XVII века. По окончании городского училища он продолжил обучение в университетах Лейпцига, Хельмштадта, Йены и Лейдена. Особенно его интересовали физика, прикладная математика, механика и фортификация. Юность Герике пришлась на начало жестокой тридцатилетней войны, в которой, помимо немцев, на разных этапах приняли участие чехи, австрийцы, датчане, шведы и французы. Как стратегически важный центр восточной Германии, Магдебург неоднократно переходил из рук в руки, а в 1631 году был полностью разрушен. Герике, как члену городского совета, пришлось в эти годы проявить не только выдающиеся инженерные, но и незаурядные дипломатические способности. За заслуги перед родным городом в его защите и восстановлении в 1646 году он был избран бургомистром Магдебурга и оставался им в течение 30 лет.



*Различные пневматические инструменты Герике*

Будучи далеко не кабинетным ученым, Герике на протяжении всей жизни интересовался естественными науками. Особенно его интриговал постулат Аристотеля о том, что природа не терпит пустоты. Для проверки этого утверждения он изобрел воздушный насос, с помощью которого в 1654 году осуществил свой знаменитый опыт с магдебургскими колоколами.

Для выполнения опыта было изготовлено два медных полушария диаметром около 35,5 см, одно из которых было снабжено трубкой для откачивания воздуха. Эти полушария сложили вместе, а между ними поместили кожаное кольцо, пропитанное расплавленным воском. Затем с помощью насоса откачали воздух из полости, образовавшейся между полушариями. На каждом из полушарий имелись железные кольца, в которые были впряжены две упряжки лошадей. Все попытки разъединить полушария не увенчались успехом, однако когда внутрь полушарий впустили воздух, они распались без усилия.

Опыт с магдебургскими колоколами доказал наличие атмосферного давления и до сих пор излагается в курсах общей физики по всему миру. Развивая эту тематику, Герике построил первый водяной барометр и использовал его для метеорологических наблюдений, изобрел гигрометр, сконструировал воздушный термометр, манометр.

Круг интересов Герике, однако, не ограничился данным разделом физики. По сути, уже в XVII веке он заложил фундамент науки об электричестве и, в частности, экспериментальной электростатики. В 1660 году он придумал и соорудил первое устройство для получения статического электричества – серный шар диаметром 15–20 см, электризуемый при натирании сухой ладонью. Насадив шар на ось, Герике наблюдал различные электрические явления. Притянутая к шару пушинка отталкивалась от него, парила в воздухе, притягивалась к другим телам, особенно к заостренным, а потом – снова к шару. Перенося шар по комнате, ученый водил пушинку за собой. Раньше считалось, что наэлектризованное тело способно только притягивать предметы, Герике же обнаружил явление взаимного отталкивания наэлектризованных тел. Экспериментатор показал, что электростатические заряды могут распространяться по полуметровой льняной нитке, притягивающей к своему концу легкие предметы. Натирая шар рукой в темноте, он обнаружил слабое свечение, т.е. первым наблюдал электролюминесценцию. Шар Герике явился прообразом электростатического генератора, посредством которого были открыты новые электрические явления.

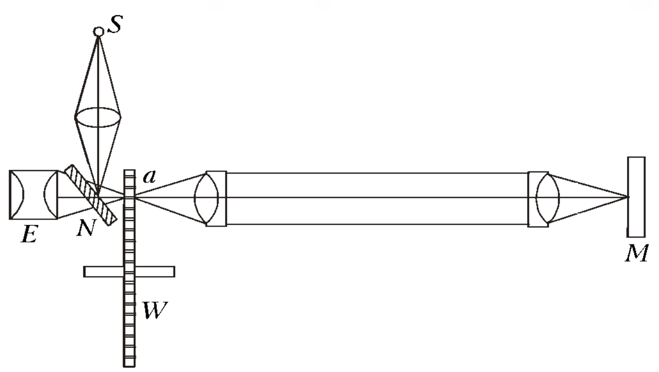
Многочисленные физические опыты еще при жизни принесли ученому признание и уважительное прозвище немецкого Галилея. В 1666 году первым среди ученых он был удостоен дворянского звания и стал именоваться Отто фон Герике.

**Бургомистр Копенгагена.** Оле Кристенсен Рёмер (1644–1710) прославился тем, что еще в начале своей научной карьеры сделал одно из величайших открытий в физике – установил факт конечной величины скорости света. Почти до конца XVII века явление распространения световых лучей стояло в стороне от всех других физических явлений. По сложившемуся за долгие годы мнению, для прохождения светом отрезка любой длины не требовалось никакого времени, а все попытки экспериментально измерить скорость света оказывались неудачными.

Успех в измерении скорости света пришел, когда «длина отрезка» достигла астрономических величин и световому лучу понадобилось достаточно много времени для преодоления этого расстояния. Открытие молодого датского астронома было сделано в 1675 году в Парижской обсерватории совместно с ее директором Дж. Кассини. При проведении наблюдений за движением спутников Юпитера они заметили, что промежутки времени между двумя последовательными затмениями одного и того же спутника планеты различны при наблюдениях, разнящихся на полгода. Обратив внимание на то, что в одном из этих положений Земля движется в направлении к Юпитеру, а в другом удаляется от него, Рёмер сделал вывод, что свету, идущему от наблюдаемого спутника, требуется некоторое время для преодоления расстояния между планетами, а когда это расстояние меняется, изменяется и время, в течение которого свет его проходит.

Количественные оценки скорости света, сделанные Рёмером, а затем и другими астрономами, были не очень точными.

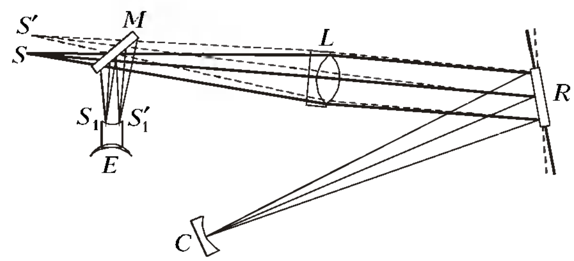
Первое лабораторное измерение скорости света в земных условиях осуществил в 1849 году французский физик Арман Ипполит Физо. В опыте Физо, как показано




*Определнние скорости света методом Физо*

на рисунке, пучок света от источника $S$, отраженный полупрозрачным зеркалом $N$, периодически прерывался вращающимся зубчатым диском $W$, проходил базу $MN$ длиной около 8 км и, отразившись от зеркала $M$, возвращался к диску. Попадая на зубец, свет не достигал наблюдателя, а при попадании в промежуток между зубцами свет можно было наблюдать в окуляр $E$. По известной скорости вращения диска было определено время прохождения светом базы, что привело к значению скорости света в воздухе $c = 313300$ км/с.

В 1862 году французский физик-экспериментатор Жан Бернар Фуко реализовал высказанную ранее идею Араго, применив вместо зубчатого диска быстровращающееся (512 об/с) зеркало. Отражаясь от зеркала $R$, пучок света от источника $S$ направлялся на базу $C$ и по возвращении вновь попадал на то же зеркало, успевшее повернуться на




*Измерение скорости света методом вращающегося зеркала (метод Фуко)*

некоторый малый угол (пунктиром на рисунке показано положение зеркала, изменившееся за время прохождения светом пути $RC$ и обратно, и обратный ход лучей через объектив $L$ и полупрозрачное зеркало $M$, когда отраженный пучок собирается в точке $S'$, а не в точке $S$, как это было бы при неподвижном зеркале). Скорость света при этом устанавливается по смещению $SS'$, измеряемому с помощью окуляра $E$. При базе всего в 20 м Фуко нашел, что скорость света равна $c = 298000 \pm 500$ км/с.

Схемы и основные идеи опытов Физо и Фуко были многократно использованы в последующих работах по определению скорости света. Полученное в 1926 году американским физиком Альбертом Майкельсоном значение $c = 299796 \pm 4$ км/с было в то время самым точным и вошло в международные таблицы физических величин.

В современных измерениях скорости света зубчатое колесо заменяется на электронно-оптический, дифракционный, интерференционный или какой-либо иной преобразователь света. В качестве источника света выступает лазер, а приемником света служит фотоэлемент или фотоэлектронный умножитель. Все это позволило существенно снизить погрешности измерений и установить значение скорости света $c = 299792{,}5 \pm 0{,}15$ км/с.

Помимо прямых измерений скорости света по времени прохождения известной базы, в настоящее время широко применяются косвенные методы, дающие еще большую точность. Так, в 1972 году американский ученый Ивенсон (и его сотрудники) по цезиевому стандарту частоты определил с точностью до одиннадцатого знака частоту излучения $CH_4$-лазера, а по криптоновому стандарту частоты нашел его длину волны.

Решением Генеральной ассамблеи Международного комитета по численным данным для науки и техники (1973 г.) скорость света в вакууме принято считать равной $c = 299792458 \pm 1{,}2$ м/с.

# Задачи по математике и физике

***Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.***

***Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2003 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2003» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1861» или «Ф1868». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).***

***Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).***

***В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.***

## Задачи М1861—М1870, Ф1868—Ф1877

**М1861.** Точки в количестве $2n+1$ разделили окружность на $2n+1$ равных дуг, где $n>1$. Среди этих точек $n+1$ – красные. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с красными вершинами.

*В.Произволов*

**М1862.** Биссектрисы $AD$, $BE$ и $CF$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $I$. Докажите, что а) если $ID = IF = IE$, то треугольник $ABC$ правильный; б) если треугольник $DFE$ правильный, то и треугольник $ABC$ правильный.

*А.Заславский, В.Сендеров*

**М1863*.** Рассмотрим последовательность, первые два члена которой равны 1 и 2 соответственно, а каждый следующий член – наименьшее натуральное число, которое еще не встретилось в последовательности и которое не взаимно просто с предыдущим членом последовательности. Докажите, что каждое натуральное число входит в эту последовательность.

*Дж.Лагариас, Н.Рейнс, Н.Слоан*

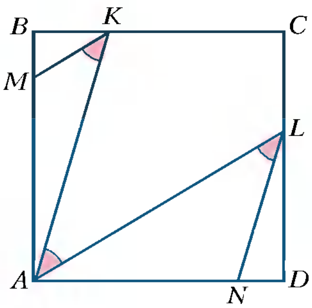



Рис.1

**М1864.** В квадрат $ABCD$ вписана ломаная $MKALN$ такая, что $\angle MKA = \angle KAL = \angle ALN = 45^\circ$ (рис.1). Докажите, что

$$MK^2 + AL^2 = AK^2 + NL^2.$$

*В.Произволов*

**М1865*.** Для натурального числа $N = 46$ можно указать натуральное число

$$M = 4601000217438573602957 16,$$

обладающее следующими свойствами: 1) первые цифры числа $M$ представляют собой число $N$; 2) если эти первые цифры перенести в конец числа $M$, то (отбросив при необходимости первые нули) получим число

$$M_1 = 1000217438573602957 1646,$$

которое ровно в $N$ раз меньше числа $M$. Для каких еще натуральных $N$ существует число $M$, обладающее такими же свойствами?

*И.Акулич*

**М1866.** Остров разделен на княжества, каждое из которых представляет собой на карте острова параллелограмм. При этом любые два параллелограмма либо не имеют общего участка границы, либо в качестве общего участка границы имеют общую сторону. Докажите, что для правильной раскраски карты острова достаточно трех красок. (Раскраска правильная, если любые два княжества, имеющие общий участок границы, закрашены в разные цвета.)

*В.Произволов*

**М1867*.** Пусть $M$ – множество членов некоторой геометрической прогрессии. Каково наибольшее возможное число элементов в пересечении множества $M$ с множеством а) $\{2^n - 1 | n \in \mathbf{Z}\}$; б) $\{2^n + 1 | n \in \mathbf{Z}\}$?

*А.Голованов, В.Сендеров*

**М1868*.** Рассмотрим множество всех квадратных таблиц $p \times p$ клеток ($p > 1$), заполненных натуральными числами 1, 2, ..., $p^2$. Назовем правильной таблицу, в которой в первой строке (столбце) стоят по порядку числа 1, 2, ..., $p$, во второй строке (столбце) $p+1$, $p+2$, ..., $2p$, и т.д. Пусть $A$ – подмножество нашего множества таблиц, в котором каждую таблицу можно получить из правильной операциями перестановки столбцов и перестановки строк, $B$ – подмножество, в котором операциями прибавления числа 1 ко всем числам строки или столбца из любой таблицы можно получить таблицу с равными числами. Докажите, что $A=B$ тогда и только тогда, когда $p$ простое.

*Д.Калинин*

**М1869.** а) Решите уравнение

$$\sin^8 x + \frac{1}{\sin^3 x} = \cos^8 x + \frac{1}{\cos^3 x}.$$

б) Пусть $x>0$, $y>0$, $x \neq y$, $n$, $m$ – натуральные,

$$x^n + \frac{1}{x^m} = y^n + \frac{1}{y^m}.$$

Докажите, что

$$x^2 + y^2 > \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{n+m}}.$$

*В.Сендеров*

**М1870.** а) На плоскости даны точки $A$, $B$, $C$, $D$ общего положения (т.е. никакие три из них не лежат на одной прямой). Известно, что углы между прямыми $AB$ и $CD$, $AC$ и $BD$, $AD$ и $BC$ равны. Докажите, что они прямые.

б) Углы между противоположными ребрами тетраэдра равны. Верно ли, что они прямые?

*А.Заславский*

**Ф1868.** Игрушечная пушка может стрелять под любым углом к поверхности земли, скорость вылета ядра $v_0 = 30$ м/с. Тонкая стена имеет высоту $H = 40$ м. На какое максимальное расстояние можно забросить снаряд от точки выстрела при условии, что снаряд должен перелететь через стену? Стрелять можно из любого места земной поверхности перед стеной. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$, сопротивлением воздуха пренебречь.

*А.Повторов*

**Ф1869.** Система из двух грузов массами $M$ и $M/2$, к которым прикреплены легкие блоки, движется по гладкому горизонтальному столу под действием силы $F_0$ (рис. 2). С каким ускорением движется точка нити, к которой приложена сила? Масса нити очень мала. Свободные куски нити считать горизонтальными, растяжением нити пренебречь.

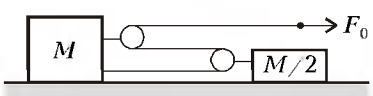


Рис.2

*М.Учителев*

**Ф1870.** На гладком горизонтальном столе покоится глубокая тарелка, на дне которой лежит маленькая, но массивная монета. Тарелку резко толкают в горизонтальном направлении так, что монета сразу после удара еще не движется. В процессе дальнейшего движения монета поднимается по стенке тарелки на максимальную высоту $h$. Найдите максимальное и минимальное значения кинетической энергии тарелки при движении. Трения в системе нет, монета при движении не отрывается от внутренней поверхности тарелки, суммарная масса тарелки и монеты равна $M$. Тела все время двигаются вдоль одной прямой.

*А.Зильберман*

**Ф1871.** Порция гелия вначале расширяется в 3 раза при постоянном давлении, потом охлаждается при постоянном объеме, затем ее сжимают без подвода тепла, пока давление и объем не вернутся к начальным значениям. Известно, что в этом цикле максимальная температура была в 6 раз больше минимальной. Найдите КПД цикла.

*А.Простов*

**Ф1872.** Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы каплю ртути массой $m = 20$ г «запихнуть» в стеклянный капилляр с внутренним диаметром $d = 1$ мм? Считайте, что плотность ртути в $n = 14$ раз больше, чем плотность воды, коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}5$ Дж/м$^2$. Ртуть не смачивает стекло.

*Р.Стеклов*

**Ф1873.** Реклама чудо-нагревателя «Интеллигентное тепло» утверждает, что для нагревания воздуха в обычной жилой комнате объемом 50 м$^3$ от 20 °С до 21 °С зимой, когда температура воздуха на улице равна –10 °С, достаточно всего 10 кДж электроэнергии. Возможно ли это хотя бы в принципе? Перекачивать в комнату тепло от более нагретых тел нельзя!

*З.Рафаилов*

**Ф1874.** Пять резисторов соединены между собой, как показано на рисунке 3. Сопротивление одного из них (неизвестно – какого) равно 200 Ом, остальные имеют сопротивления по 100 Ом каждый. Какой из резисторов нужно удалить из схемы («вырезать»), чтобы сопротивление между выводами $A$ и $Б$ изменилось меньше всего?

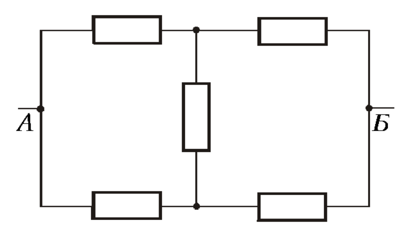


Рис. 3

*З.Мостов*

**Ф1875.** Конденсаторы емкостями 1 мкФ и 2 мкФ соединены последовательно. Каждый из них может выдержать напряжение 200 В (так написано в документации). Можно ли их подключать крайними выводами к сети переменного напряжения 220 В? А к источнику постоянного напряжения 220 В? Диэлектрик – промасленная бумага (самый распространенный тип конденсатора такой емкости в недавнем прошлом).

*А.Повторов*

**Ф1876.** Конденсатор емкостью $C$ зарядили до напряжения $U_0$ и подключили к катушке индуктивностью $L$, после чего в цепи возникли колебания. В некоторый момент к выводам конденсатора подключают параллельно соединенные резистор сопротивлением $R$ и еще одну катушку индуктивностью $3L$. Найдите максимальное и минимальное количества теплоты, которые могут выделиться в резисторе за достаточно большой интервал времени. Считайте элементы цепи идеальными.

*Р.Александров*

**Ф1877.** На тороидальном сердечнике с большой магнитной проницаемостью намотана толстым проводом катушка, содержащая большое количество витков. От середины обмотки сделан отвод. Крайние выводы катушки подключили к сети 220 В, а между крайним и средним выводами катушки включили лампу на 110 В мощностью 60 Вт. Найдите токи в каждой из половин обмотки. Кстати, заметим, что такое устройство (катушка с отводом на ферромагнитном сердечнике) называется автотрансформатором.

*З.Рафаилов*

## Решения задач М1841—М1845, Ф1853—Ф1862

**М1841.** *Для натуральных чисел a, b, c докажите равенство*

$$НОК\left(НОД(a,b),НОД(b,c),НОД(c,a)\right)= \\ =НОД\left(НОК(a,b),НОК(b,c),НОК(c,a)\right)$$

*(НОК – наименьшее общее кратное, НОД – наибольший общий делитель).*

Решить задачу нетрудно, если хорошо осмыслить для себя понятия наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя.

Справедливость заявленного равенства установим, прибегая к каноническому разложению чисел $a$, $b$ и $c$ на простые сомножители. Произвольное простое число $p$ входит в разложение числа $a$ в степени $k$, в разложение числа $b$ – в степени $m$, в разложение числа $c$ – в степени $n$, где для определенности $0 \le k \le m \le n$.

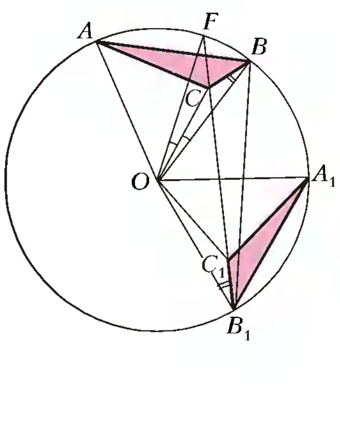
Проанализируем левую часть равенства. Число НОД$(a, b)$ содержит в своем разложении простое $p$ в степени $k$, число НОД$(b, c)$ – в степени $m$, число НОД$(c, a)$ – в степени $k$. Значит, левая часть равенства в каноническом разложении содержит сомножитель $p^m$.

Проанализируем правую часть равенства. Число НОК$(a, b)$ содержит в своем разложении простое $p$ в степени $m$, число НОК$(b, c)$ – в степени $n$, число НОК$(c, a)$ – в степени $n$. Значит, правая часть равенства, как и левая, содержит в каноническом разложении сомножитель $p^m$.

Это означает, что всякое простое число входит сомножителем в левую часть в той же степени, в какой оно входит и в правую, т.е. равенство доказано.

*В.Произволов*

**М1842.** *Вершины A и B треугольника ABC лежат на окружности с центром O. Точки C и O находятся по одну сторону от AB. Поворотом треугольника ABC около центра O получен треугольник $A_1B_1C_1$, причем луч $B_1C_1$ проходит через вершину C и пересекает окружность в точке F. Докажите, что CF = CB.*




Так как $\Delta OB_1A_1 = \Delta OAB$, то $\angle OB_1A_1 = \angle ABO$, но и $\angle C_1B_1A_1 = \angle CBA$ (см. рисунок). Значит, $\angle OB_1C_1 = \angle CBO$ и около четырехугольника $B_1OCB$ можно описать окружность. Из этого следует, что $\angle CB_1B = \angle COB$, но $\angle CB_1B = \frac{1}{2}\overset{\smile}{FB} = \frac{1}{2}\angle FOB$, т.е. $\angle FOC = \angle COB$ и $\Delta FOC = \Delta COB$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует утверждение задачи: $CF = CB$.

*В.Дубов*

**М1843.** *Имеется неограниченное количество кошельков. Первоначально в одном из них лежит KM монет (K, M – натуральные), а остальные кошельки пусты. Затем неоднократно выполняется следующая операция: из каждого кошелька, в котором есть монеты, вынимается по одной монете, и все вынутые монеты складываются в какой-либо пустой кошелек. Через некоторое время в K кошельках оказалось по M монет. При каких K и M такое возможно?*

Описанную в условии операцию изъятия монет и складывания их в пустой кошелек назовем *ходом*. Кроме того, введем еще несколько терминов. Тот кошелек, в который в процессе хода складываются вынутые монеты, назовем *новым* (т.е. после каждого хода новым является ровно один кошелек). Другие непустые кошельки, которые имеются после хода, назовем *старыми* (ясно, что перед ходом в каждом из старых кошельков было на 1 монету больше, чем после хода). Наконец, кошельки, в которых перед ходом было ровно по одной монете, а после хода, разумеется, ничего не осталось, назовем *опустевшими*.

Рассмотрим ситуацию после любого хода. В новый кошелек попало по одной монете из каждого старого кошелька плюс, возможно, по одной монете из каждого опустевшего кошелька (если таковые были). Следовательно, число монет в новом кошельке *не меньше* количества старых кошельков. Этот факт (обозначим его Ф1) в дальнейшем будет использован.

Итак, пусть после какого-то хода стало $K$ кошельков по $M$ монет в каждом. Один из них, разумеется, новый, а остальные $(K - 1)$ – старые. Согласно Ф1 должно выполняться неравенство $M \ge K - 1$, или $K \le M + 1$. Уже какое-то ограничение! Воспользовавшись им, проверим «вручную» самые маленькие $M$, не превышающие 2 в сочетании с допустимыми $K$ для каждого $M$.

1) Если $M = 1$, то $K = 1$ или 2. Рассмотрим оба случая.

$K = 1$. Тогда $KM = 1$, и первоначально в кошельке одна монета. На первом же ходу она будет переложена в другой кошелек, что соответствует ситуации, описанной в условии ($K = 1$ кошелек с $M = 1$ монетой). Таким образом, значения $K = 1$, $M = 1$ являются одним из ответов на вопрос задачи.

$K = 2$. Тогда $KM = 2$, и первоначально в кошельке 2 монеты. После первого хода в двух кошельках станет по одной монете, поэтому значения $K = 2$, $M = 1$ являются еще одним ответом. Для удобства запишем этот ход в виде $2 \to 1,1$, и в дальнейшем также будем использовать аналогичные обозначения.

2) Если $M = 2$, то $K = 1$, 2 или 3, и $KM = 2$, 4 или 6 соответственно. Рассмотрим все случаи.

$K = 1$. Тогда $KM = 2$, и первоначально в кошельке 2 монеты. Здесь «состояние» кошельков изображается схемой: $2 \to 1,1 \to 2$, т.е. также возникла удовлетворяющая условию ситуация: $K = 1$ кошелек с $M = 2$ монетами. Так что имеем третий ответ: $K = 1$, $M = 2$.

$K = 2$. Тогда $KM = 4$, и первоначально в кошельке 4 монеты. Здесь получаем: $4 \to 3{,}1 \to 2{,}2$, т.е. еще один ответ: $K = 2$, $M = 2$.

$K = 3$. Тогда $KM = 6$, и первоначально в кошельке 6 монет. Здесь получаем: $6 \to 5{,}1 \to 4{,}2 \to 3{,}2{,}1 \to \to 3{,}2{,}1 \to$ и т.д. Явное зацикливание, причем состояния, удовлетворяющего условию, так и не появилось. Значит, здесь ответа нет.

Так или иначе, но получены четыре пары значений $(K, M)$, удовлетворяющих условию. Докажем, что других значений нет. Для этого предположим противное – что такие пары есть для какого-то $M > 2$, и покажем, что это ведет к противоречию. Предварительно докажем следующую лемму.

**Лемма.** *Пусть после какого-то хода расположение монет в кошельках оказалось следующим (здесь $n$ – некоторое натуральное число):*

- *в $(K - n)$ кошельках по $(M + n)$ монет в каждом;*
- *в $(M - K + 1)$ кошельках по $n$ монет в каждом;*
- *имеется еще $(n - 1)$ пар непустых кошельков, причем в двух из них по 1 монете, в двух других – по 2 монеты, ... , в двух последних – по $(n - 1)$ монет.*

*(Нетрудно проверить, что всего в кошельках при этом лежит как раз $KM$ монет.)*

*Утверждается, что тогда перед последним ходом в кошельках было такое же расположение монет, но при $n$, увеличенном на 1, т.е.*

- *в $(K - n - 1)$ кошельках по $(M + n + 1)$ монет в каждом;*
- *в $(M - K + 1)$ кошельках по $(n + 1)$ монет в каждом;*
- *имеется еще $n$ пар непустых кошельков, причем в двух из них по 1 монете, в двух других – по 2 монеты, ... , в двух последних – по $n$ монет.*

Если утверждение леммы верно, то тогда можно однозначно определить расположение монет перед предыдущим ходом, перед «предпредыдущим» ходом и так далее.

Докажем лемму. Определим общее количество кошельков для первоначально указанного расположения монет:

$$(K - n) + (M - K + 1) + 2(n - 1) = M + n - 1.$$

Из них один кошелек новый, а остальные $(M + n - 2)$ кошельков – старые. Может ли какой-нибудь кошелек с $n$ монетами быть новым? Если да, то согласно Ф1 должно выполняться неравенство $n \ge M + n - 2$, откуда $M \le 2$. Но такие значения $M$ были рассмотрены отдельно ранее, а сейчас мы имеем дело с бóльшими $M$. По аналогичным причинам не может быть новым никакой кошелек, в котором меньше $n$ монет (тогда значения $M$ получаются еще меньше). Поэтому никуда не денешься – новым может быть только кошелек с $(M + n)$ монетами. А это позволяет нам однозначно восстановить расположение монет перед предыдущим ходом. Все остальные кошельки – старые, и перед ходом в каждом из них было на 1 монету больше. Но старых кошельков, как мы знаем, всего $(M + n - 2)$, поэтому, чтобы в новом кошельке было после хода ровно $(M + n)$ монет, необходимо наличие еще двух опустевших кошельков (в которых перед ходом было по одной монете). Получаем как раз такую ситуацию, как описано в лемме. Все!

Обратим внимание на такое следствие из леммы: перед ходом должно быть на 1 кошелек больше, чем после хода, а перед предыдущим – еще на 1 кошелек больше и так далее. Поэтому если в процессе перекладывания монет возникло такое расположение монет в кошельках, как в лемме, то оно никак не могло появиться из *единственного* кошелька с $KM$ монетами – ведь «продвигаясь» от этого расположения назад, мы будем получать все увеличивающееся количество кошельков, которое, очевидно, никак не сможет стать равным 1.

Долго мы возились с этой леммой, и пока вроде не очень ясно, зачем. Но сейчас это выяснится. Пусть после очередного хода в $K$ кошельках оказалось по $M$ монет. Восстановим расположение монет перед последним ходом. Один из кошельков – новый, остальные $(K - 1)$ – старые. В каждом старом кошельке было перед ходом на 1 монету больше, т.е. по $(M + 1)$ монет. Чтобы соблюсти «количественный баланс» числа монет, необходимо добавить еще $(M - K + 1)$ опустевших кошельков. Таким образом, перед последним ходом было:

- в $(K - 1)$ кошельках по $(M + 1)$ монет в каждом;
- в $(M - K + 1)$ кошельках по 1 монете в каждом.

А это как раз расположение монет, указанное в лемме для случая $n = 1$. Значит, в соответствии с леммой, перед каждым предыдущим ходом непустых кошельков было на 1 больше, и, продвигаясь назад, мы никак не придем к единственному исходному кошельку. Противоречие.

Итак, задача решена. Имеется всего 4 пары значений $(K, M)$, удовлетворяющих условию: $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, 2)$.

*И.Акулич*

**М1844.** *Пятиугольник ABCDE, периметр которого равен 4, таков, что $AB = DE = 1$, а также $\angle BAE = \angle DEA = \angle BCD = 90°$ (рис.1). Докажите, что биссектриса CF угла C делит пятиугольник на четырехугольники, у которых равны периметры и равны площади.*

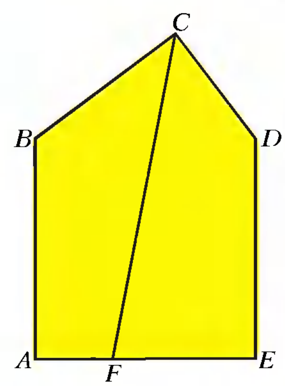



Рис. 1

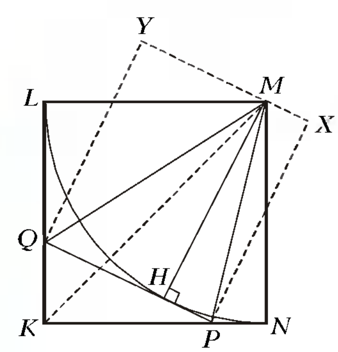



Рис. 2

Возьмем квадрат $KLMN$ со стороной 1 и проведем в нем дугу окружности $\overset{\frown}{LN}$ с центром в точке $M$ (рис.2). Отрежем от квадрата треугольник $PKQ$, подобный треугольнику $BCD$, так, чтобы его гипотенуза $PQ$ касалась дуги $LN$, скажем, в точке $H$. Тогда ясно, что $HP = PN$ и $HQ = QL$, т.е. периметр $\Delta PKQ$ равен 2 и треугольник $PKQ$ равен треугольнику $BCD$.

Отразим точку $H$ центрально-симметрично относительно середины отрезка $PM$; получим точку $X$. При этом образовался прямоугольник $XPHM$ со стороной $XP = 1$. Отразим симметрично точку $H$ относительно середины отрезка $QM$; получим точку $Y$. При этом образовался прямоугольник $YQHM$ со стороной $YQ = 1$. Заметим, что ломаная $XMY$ на самом деле является отрезком.

В пятиугольнике $XPKQY$ биссектриса $KM$ угла $K$ разделяет его на четырехугольники, у которых равны периметры и равны площади.

Осталось заметить, что пятиугольник $XPKQY$ равен пятиугольнику $ABCDE$.

*В.Произволов*

**М1845.** *Назовем несоседние натуральные числа a и b близкими, если $a^2-1$ делится на b и $b^2-1$ делится на a.*
*а) Пусть $n>1$. Докажите, что в любом отрезке $[n; 8n-8]$ найдется пара близких чисел.*
*б) Постройте отрезок $[n; 8n-9]$ $(n>1)$, в котором пар близких чисел нет.*

Начнем с пункта б). Непосредственно проверяем, что на отрезке $[2; 7]$ нет близких чисел.

а) В $[2; 8]$ и в $[3; 16]$ содержится пара $(3; 8)$.

Докажем, что при $n > 3$ достаточно брать отрезок $[n; 8n-17]$ (пример $[4; 14]$ показывает, что $[n; 8n-18]$ было бы недостаточно). В $[4; 15]$ лежит пара $(4; 15)$. При $5 \le n \le 8$ имеем $8n-17 \ge 23$, поэтому можно брать пару $(8; 21)$. При $9 \le n \le 21$ имеем $8n-17 \ge 55$, поэтому можно брать пару $(21; 55)$.

Пусть теперь $n > 21$. Рассмотрим $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$. Пусть $a_k$ – наибольший член этой последовательности, меньший $n$. Имеем $21 \le a_k < n$, $a_{k+2} = 8a_k - 3a_{k-1} \le 8a_k - 24 < 8n - 24$.

Для завершения решения покажем, что любые два соседних члена любой последовательности, задаваемой равенствами

$$a_1 = 1,\ a_2 = m,\ a_{k+2} = ma_{k+1} - a_k \qquad (*)$$

(где $m > 2$), – близкие числа.

Покажем прежде всего, что $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1$. База индукции: $a_2^2 - a_1a_3 = m^2 - \left(m^2-1\right) = 1$. Пусть $a_{n-1}^2 - a_{n-2}a_n = 1$. Тогда

$$a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = a_n^2 - a_{n-1}\left(ma_n - a_{n-1}\right) =$$
$$= a_n^2 - ma_{n-1}a_n + \left(a_{n-2}a_n + 1\right) =$$
$$= a_n^2 + a_n\left(a_{n-2} - ma_{n-1}\right) + 1 = a_n^2 - a_n^2 + 1 = 1.$$

Значит, $a_{n+1}^2 - 1 \vdots a_n$ и $a_n^2 - 1 \vdots a_{n+1}$ при любом натуральном $n$; осталось доказать, что $a_{n+1} - a_n > 1$. Это тоже легко сделать при помощи индукции: если $a_n - a_{n-1} > 1$, то

$$a_{n+1} - a_n = \left(ma_n - a_{n-1}\right) - a_n =$$
$$= (m-1)a_n - a_{n-1} > a_n - a_{n-1} > 1.$$

Это и завершает решение задачи.

Из равенства $a_n^2 - a_{n-1}\left(ma_n - a_{n-1}\right) = 1$ следует, что близкие числа могут быть соседними членами лишь одной последовательности $(*)$.

Близких чисел, не описываемых последовательностями $(*)$, не существует: любая пара близких чисел, кроме $(1; 1)$, – пара соседних членов одной из таких последовательностей. Это можно доказать при помощи так называемого «метода спуска».

Заметим, что при $m = 2$ последовательность $(*)$ совпадает с последовательностью натуральных чисел. Таким образом, в этом случае мы получаем множество всех пар соседних чисел. Если же $m = 3$, то для любого натурального $n$ число $a_n$ – это $(2n)$-й член последовательности Фибоначчи.

Отметим напоследок, что множество пар $\left(\varphi_{2n-1}; \varphi_{2n+1}\right)$ чисел Фибоначчи – это множество пар $(a; b)$ таких натуральных чисел, что $a < b$, $a^2+1 \vdots b$, $b^2+1 \vdots a$. Любая такая пара – пара соседних членов последовательности $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_{k+2} = 3b_{k+1} - b_k$.

*Н.Богданов, В.Сендеров*

**Ф1853.** *В большой комнате на гладком горизонтальном твердом полу стоит кровать. Одна ее ножка чуть короче других, поэтому под нее пришлось подложить гладкий брусок. Оказалось, что трение совсем мало и брусок этот легко выбить – маленький упругий шарик, который пускают по полу со скоростью больше 1 м/с, с этим справляется. Задачу злоумышленнику усложнили – он может бросать шарик с уровня пола на расстоянии 3 м от бруска, а посредине между ним и бруском поставили ширму высотой 0,5 м. С какой минимальной скоростью нужно (вернее – не нужно!) бросить шарик, чтобы выбить брусок?*

Бросим шарик под углом 45° так, чтобы он пролетел расстояние $L$ = 3 м. Тогда максимальная высота траектории будет равна

$$H = \frac{L}{4} = \frac{3\text{ м}}{4} = 0{,}75\text{ м} > h = 0{,}5\text{ м},$$

начальная скорость будет

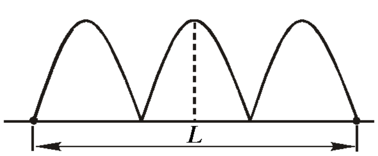
$$v = \sqrt{gL} \approx 5{,}5\ \text{м/с}$$

и горизонтальная составляющая скорости составит

$$v_x = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 3{,}9\ \text{м/с} > 1\ \text{м/с}.$$

Эта траектория нам подходит.

Но можно обойтись и меньшей скоростью, если воспользоваться подсказкой о твердой поверхности пола и об упругости шарика. Проще всего посмотреть на рисунок: в этом случае дальность полета равна $L_1 = L/3 = 1$ м, но бросить шарик под углом 45° («оптимальный» бросок) уже не выйдет – высота не подходит ($H_1 = L_1/4 = 0{,}25$ м $< 0{,}5$ м). Придется увеличивать вертикальную составляющую скорости до




$$v_{y_1} = \sqrt{2gh} \approx 3{,}2\ \text{м/с}.$$

Тогда

$$L_1 = v_{x_1}\cdot 2\frac{v_{y_1}}{g},\ \text{и}\ v_{x_1} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{L^2g}{2h}} \approx 1{,}6\ \text{м/с} > 1\ \text{м/с}.$$

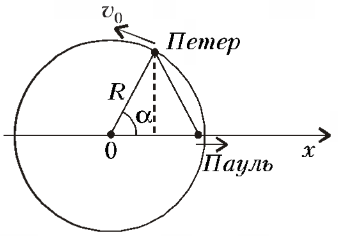
Скорость шарика при этом равна

$$v_1 = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} \approx 3{,}5\ \text{м/с}.$$

А вот «разделить» $L$ на 5 (или более) частей уже не получится – велика требуемая скорость (или слишком высока ширма).

*П. Коренев*

**Ф1854.** *Петер и Пауль неторопливо бегают по футбольному полю (кажется, где-то в Баварии),*




*причем расстояние между ними все время равно 50 м. Петер с постоянной по величине скоростью 2 м/с бегает по кругу радиусом 50 м, а Пауль бежит по прямой, проходящей через центр этого круга. Найдите максимальные значения скорости и ускорения Пауля. Считайте, что подолгу он на одном месте не стоит.*

Координата Пауля (см. рисунок) равна

$$x = 2R\cos\alpha = 2R\cos\frac{v_0}{R}t .$$

Это самое обычное колебательное движение. Для него максимальная скорость равна

$$v_m = x_m\omega = 2R\omega = 2R\frac{v_0}{R} = 2v_0 = 2\cdot 2 \text{ м/с} = 4 \text{ м/с},$$

а максимальное ускорение составляет

$$a_m = v_m\omega = 2\frac{v_0^2}{R} = 0{,}16 \text{ м/с}^2 .$$

Если бы не условие, запрещающее Паулю «подолгу стоять на месте», возможно было бы еще одно «движение» – когда Пауль все время находится в центре круга.

*А. Фанатов*

**Ф1855.** *В системе на рисунке 1 все блоки невесомые, а нити невесомые и нерастяжимые. Считая массы всех грузов одинаковыми, найдите ускорения блоков. Свободные концы всех нитей вертикальны.*

Введем обозначения для сил натяжения нитей так, как это сделано на рисунке 2. Обозначим ускорение груза *4* (и блока, ось которого с ним связана) буквой $a$ и направим его вниз (впрочем, направление этого ускорения можно выбрать произвольно). Тогда ускорение груза *3* будет направлено вниз и равно $2a$, груза *1* – вверх и равно $2a$ и, наконец, груза *2* – вверх и равно $0{,}5a$. Очевидно, что груз *5* не движется вовсе.

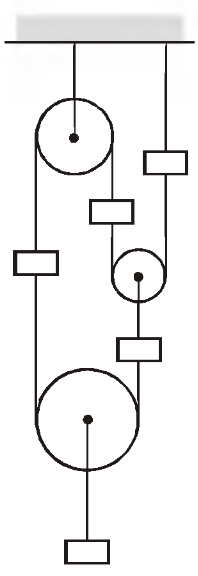


Рис. 1

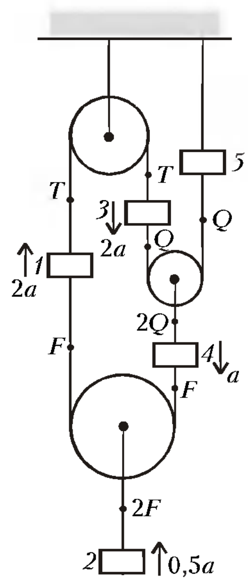



Рис. 2

Запишем уравнения движения для каждого груза:

$$T - F - mg = m\cdot 2a ,$$

$$2F - mg = m\cdot 0{,}5a ,$$

$$Q + mg - T = m\cdot 2a ,$$

$$F + mg - 2Q = m\cdot a .$$

Отсюда находим

$$a = \frac{g}{18{,}5} = \frac{2}{37}g .$$

Направление этого ускорения, а значит, и всех остальных мы угадали верно.

*А. Блоков*

**Ф1856.** *Из тонкой жесткой проволоки согнули угол 90°, одну из сторон угла закрепили в вертикальном положении, другую – в горизонтальном (рис.1). На каждую из сторон надели маленькую шайбу массой M и соединили шайбы легким стержнем длиной L. Вначале этот стержень почти вертикален, затем от малого толчка система приходит в движение. Найдите максимальные скорости каждой из шайб. Трение отсутствует.*

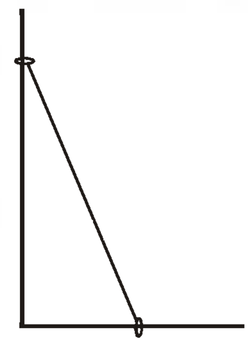


Рис. 1

Нижняя шайба вначале разгоняется, но к концу пути она должна остановиться; следовательно, где-то в промежуточном положении ее скорость будет максимальной. Запишем закон сохранения энергии (см. рис. 2):

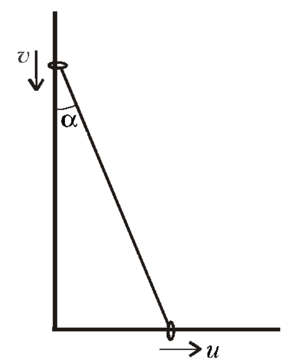



Рис. 2

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = MgL(1-\cos\alpha)$$

и соотношение между скоростями:

$$v\cos\alpha = u\sin\alpha .$$

Тогда получим

$$u^2\left(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha\right) = 2gL(1-\cos\alpha) ,$$

или

$$u^2 = 2gL(1-\cos\alpha)\cos^2\alpha .$$

Возьмем производную по углу и приравняем ее к нулю:

$$-2\cos\alpha_0\sin\alpha_0 + 3\cos^2\alpha_0\sin\alpha_0 = 0 .$$

Подходит только $\cos\alpha_0 = 2/3$, поэтому

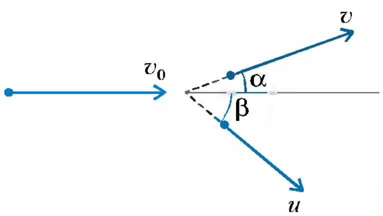
$$u_m = u(\alpha_0) = \sqrt{\frac{8}{27}gL} \approx 0{,}55\sqrt{gL} .$$

Когда верхняя шайба почти достигнет своего положения внизу, скорость второй станет равной нулю, и вся энергия достанется верхней. В этот момент

$$v = v_m = \sqrt{2gL} \approx 1{,}41\sqrt{gL} .$$

*Р. Александров*

**Ф1857.** *По гладкому горизонтальному столу скользит шайба и налетает на точно такую же неподвиж-*




*ную шайбу, едва ее коснувшись. После удара первая шайба отклонилась от первоначального направления на угол 1°, вторая шайба после удара стала двигаться под углом 80° к этому направлению. Какая часть начальной кинетической энергии системы перешла при ударе в тепло?*

В соответствии с рисунком, запишем закон сохранения импульса системы:

$$v\sin\alpha - u\sin\beta = 0\,,$$

$$v\cos\alpha + u\cos\beta = v_0.$$

Возведем в квадрат каждое уравнение и сложим:

$$v^2 + u^2 + 2uv(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = v_0^2\,.$$

Изменение кинетической энергии системы будет равно

$$\Delta W = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m\left(u^2+v^2\right)}{2} = muv\cos(\alpha+\beta)\,.$$

Теперь найдем $v$ и $u$:

$$u = v\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,,\quad v\cos\alpha + v\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta} = v_0\,,$$

$$v\sin(\alpha+\beta) = v_0\sin\beta\,,$$

$$v = v_0\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\,,\quad u = v_0\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\,.$$

Доля перешедшей в тепло энергии составит

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{muv\cos(\alpha+\beta)}{mv_0^2/2} =$$

$$= 2\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} \approx 0{,}0055 = 0{,}55\%\,.$$

*А. Простов*

**Ф1858.** *В теплоизолированном сосуде находится $N$ молекул двухатомного газа при температуре $T_1$. При этих условиях начинается диссоциация молекул, которая практически прекращается при падении температуры в сосуде до $T_2$. При диссоциации одной молекулы поглощается энергия $\varepsilon$. Какая часть молекул продиссоциирует, и во сколько раз упадет давление в сосуде?*

Температура в сосуде падает из-за поглощения энергии при диссоциации. Пусть из $N$ молекул «развалились» на атомы $N_1$, тогда частиц в сосуде стало $N - N_1 + 2N_1 = N + N_1$. Для энергии можно записать баланс (здесь $k$ – постоянная Больцмана):

$$\frac{5}{2}kT_1\cdot N = \varepsilon N_1 + \frac{5}{2}kT_2(N-N_1) + \frac{3}{2}kT_2\cdot 2N_1\,.$$

Отсюда найдем число продиссоциированных молекул:

$$N_1 = N\frac{5k(T_1-T_2)/2}{\varepsilon + kT_2/2}$$

и долю этих молекул от общего числа:

$$\frac{N_1}{N} = \frac{5k(T_1-T_2)}{2\varepsilon + kT_2}\,.$$

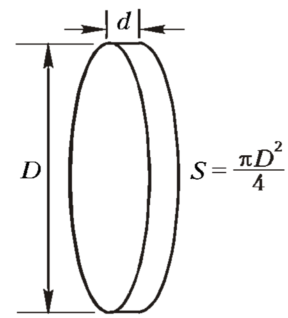
Отношение давлений будет равно

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{N+N_1}{N}\frac{T_2}{T_1} = \left(1+\frac{N_1}{N}\right)\frac{T_2}{T_1} = \left(1+\frac{5k(T_1-T_2)}{2\varepsilon+kT_2}\right)\frac{T_2}{T_1}\,.$$

*З. Рафаилов*

**Ф1859.** *Две медные монеты диаметром 1 см и толщиной 1 мм расположены на расстоянии 1 м друг от друга, причем плоскости монет перпендикулярны прямой, соединяющей их центры. На монеты наносят электрические заряды. Какими должны быть знаки зарядов и каково должно быть отношение их величин, чтобы сила взаимодействия между монетами упала до нуля? Интересный случай нулевых зарядов можете не рассматривать.*

Монеты маленькие, а расстояние между ними велико – это сильно упростит решение. Зарядим, для начала, одну из монет зарядом $Q$. На расстоянии $L = 1$ м от нее напряженность поля равна $E = k\dfrac{Q}{L^2}$ (здесь $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$). На плоских гранях второй монеты возникнут разноименные заряды $-q_1$ и $+q_1$, которые скомпенсируют это поле внутри проводящей монеты. Поле почти однородное, и у нас получится практически плоский конденсатор. Найдем $q_1$ (см. рисунок):




$$2\pi k\frac{q_1}{S} = \frac{kQ}{L^2}\,,$$

откуда

$$q_1 = Q\frac{S}{2\pi L^2} = Q\frac{D^2}{8L^2}\,.$$

Ближе к заряду $Q$ находится заряд $-q_1$, поэтому результирующая сила электрического притяжения между монетами будет равна

$$F = k\frac{Qq_1}{L^2} - k\frac{Qq_1}{(L+d)^2} = kQq_1\frac{2Ld+d^2}{L^2(L+d)^2} \approx 2kQq_1\frac{d}{L^3}\,.$$

Чтобы скомпенсировать эту силу притяжения, нужно поместить на вторую монету одноименный с $Q$ заряд $q_2$. Найдем его:

$$2kQq_1\frac{d}{L^3} = kQ\frac{q_2}{L^2}\,,$$

откуда

$$q_2 = q_1\frac{2d}{L} = Q\frac{Sd}{\pi L^3} = Q\frac{D^2 d}{4L^3} = Q\frac{10^{-4}\cdot 10^{-3}}{4\cdot 1} = Q\frac{1}{4\cdot 10^7}\,.$$

Тогда отношение зарядов монет равно

$$\frac{Q}{q_2} = 4\cdot 10^7\,.$$

*А. Повторов*

**Ф1860.** *К батарейке подключают «мостик», состоящий из пяти резисторов. Четыре из этих пяти резисторов имеют сопротивление R. Каким должно быть сопротивление пятого резистора, чтобы силы токов через какие-нибудь два резистора в схеме оказались одинаковыми и ни один из токов не был нулевым?*

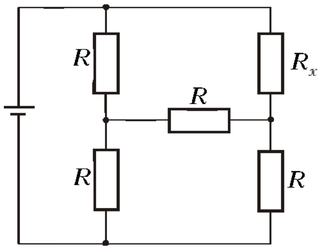


Рис. 1

Ясно, что искомый резистор – не в диагонали «мостика» (в этом случае его ток был бы нулевым). Тогда получается только одна схема, изображенная на рисунке 1. Теперь нужно проанализировать, какие из токов могут оказаться одинаковыми. Варианты *1* и *2* (рис. 2) сразу отбросим – там получаются нулевые токи в отмеченных местах. После простого перебора остаются «возможные» схе-

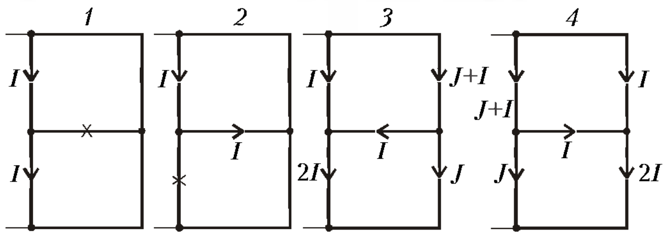


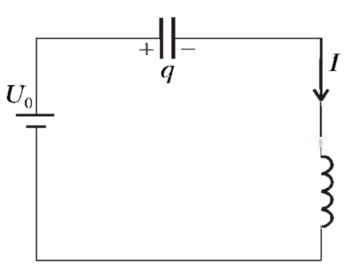
Рис. 2

мы *3* и *4*. Для первой из них получается $R_x = 0$, для второй $R_x = 5R$. Других подходящих схем нет.

*А. Зильберман*

**Ф1861.** *К батарейке напряжением 12 В подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью 1 мкФ и катушку индуктивностью 1 Гн. В тот момент, когда ток через катушку максимален, параллельно ей подключают резистор сопротивлением 1 МОм, а когда ток через катушку снова становится максимальным и течет в ту же сторону, резистор отключают. Какое количество теплоты выделится при этом в резисторе? Какой заряд через него протечет?*

До подключения резистора сопротивлением 1 МОм в цепи (см. рисунок) происходили колебания. Найдем максимальный ток в цепи. Пусть в некоторый момент заряд конденсатора равен $q$, а в катушке течет ток $I$. Учитывая работу батарейки, можно записать закон сохранения энергии в виде




$$qU_0 = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}.$$

При максимальном токе $I = I_m$ ЭДС индукции обращается в ноль, тогда $q = CU_0$ и $I_m = U_0\sqrt{C/L} = 12 \cdot 10^{-3}$ А. Амплитуда напряжения катушки будет равна $U_0$. После подключения резистора сопротивлением 1 МОм ток через него составит не более $I_R = U_0/R = 12 \cdot 10^{-6}$ А $\ll I_m$. Это означает, что подключенный резистор практически не изменит колебаний, и энергия, переходящая в тепло, будет равна

$$Q = \frac{U_0^2}{R}T = \frac{U_0^2}{R} \cdot 2\pi\sqrt{LC} \approx 9 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Заряд, прошедший через резистор, будет равен по порядку величины

$$q_R = I_R T = I_R \cdot 2\pi\sqrt{LC} \approx 7{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$$

*Р. Катушкин*

**Ф1862.** *От шара радиусом 10 см, сделанного из органического стекла, осторожно отпиливают два маленьких кусочка так, что получаются две плосковыпуклые линзы – диаметр первой составляет 1 см, диаметр второй вдвое больше. Линзы аккуратно склеивают плоскими поверхностями, как показано на рисунке 1. На главной оптической оси получившейся системы на расстоянии 1 м от нее помещают точечный источник света, а с другой стороны системы – экран. Как нужно расположить экран, чтобы освещенное пятно на нем имело минимальный диаметр? Чему он равен?*

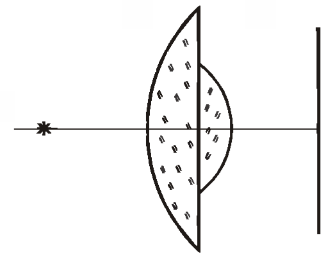


Рис. 1

В условии не задан коэффициент преломления органического стекла – примем его равным коэффициенту преломления обычного стекла, т.е. $n$ = 1,4. Тогда плосковыпуклые линзы (одна и другая) имеют фокусные расстояния

$$F = \frac{R}{n-1} = \frac{0{,}1 \text{ м}}{1{,}4-1} = 0{,}25 \text{ м}.$$

Сложенные вместе, линзы имеют удвоенную оптическую силу, а фокусное расстояние системы равно $F/2 = 0{,}125$ м. Изображение источника, даваемое «слабой» линзой (края системы), получается на расстоянии

$$f_1 = \frac{dF}{d-F} = \frac{1 \text{ м} \cdot 0{,}25 \text{ м}}{1 \text{ м} - 0{,}25 \text{ м}} = \frac{1}{3} \text{ м}.$$

Средняя часть системы дает изображение на расстоянии

$$f_2 = \frac{dF/2}{d-F/2} = \frac{1}{7} \text{ м}.$$

Из рисунка 2 ясно, что самое «узкое» место для двух пучков света (на экране нужно получить не изображение источника, а лишь пятно света) получится при установке экрана на расстоянии $x$. Из геометрических соображений,

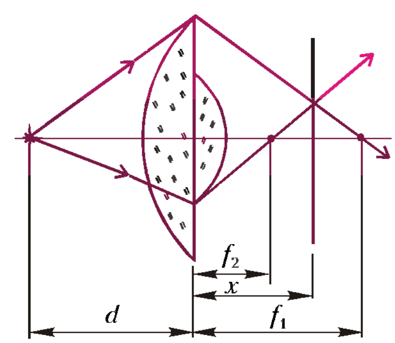


Рис. 2

$$\frac{h}{x-f_2} = \frac{r}{f_2} \quad \text{и} \quad \frac{h}{f_1-x} = \frac{2r}{f_1},$$

где $h$ – радиус пятна, а $2r$ = 1 см. Отсюда получаем

$$x = \frac{3f_1f_2}{f_1+2f_2} = \frac{3}{13} \text{ м} \approx 23 \text{ см},$$

$$h = 2r\left(1-\frac{x}{f_1}\right) = \frac{4}{13} \text{ см} \approx 0{,}3 \text{ см}.$$

*А. Очков*

# Задачи

**1.** В некотором государстве живут только правдуны (которые говорят только правду) и лгуны (которые всегда лгут). В течение одного вечера в дом входили 10 человек, и каждый из них (кроме последнего) записал

на специальном листе бумаги, кто вошел в дом после него – правдун или лгун. Если верить всем записям, то в дом входили только лгуны. Сколько лгунов пришло в дом на самом деле?

*Д.Калинин*

**2.** На большом прямоугольном столе лежат линейка и кирпич, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Как измерить пространственную диагональ кирпича, не пользуясь ничем, кроме перечисленного, и приложив линейку только один раз?

*М.Ахмеджанова*

**3.** Расстояние от Гадюкина до Мартышкина не менее 9 км. На расстоянии не менее 1 км и не более 3 км от Гадюкина растет береза, а на расстоянии не менее 5 км и не более 7км от Гадюкина растет дуб. Точно посередине между березой и дубом зарыт клад, причем это место находится не дальше 4 км от Мартышкина. На каком расстоянии от Гадюкина зарыт клад?

*К.Кохась, Ф.Петров*

---

*Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.*

**4.** Из трех цифр $x$, $y$, $z$ составлены три десятичные периодические дроби $x,(yz)$, $y,(zx)$ и $z,(xy)$ таким образом, что выполняется равенство

$$x,(yz) + y,(zx) = z,(xy).$$

Докажите, что среди цифр $x$, $y$, $z$ имеются одинаковые.

*И.Николаева*


**5.** Шулер Фукс выкладывает в один ряд лицом вниз три карты: даму, короля и туза, не соблюдая порядок старшинства (считается, что туз старше короля, а король старше дамы). Моряк Лом должен переложить их по старшинству слева направо. Перед каждой попыткой он может указать на любые две карты и узнать, какая старше. Если после этого он выложит карты правильно, Фукс об этом сообщает. Если нет, то Лом отворачивается, а Фукс в это время меняет две рядом лежащие карты. Есть ли у Лома способ справиться с заданием не более чем за три попытки?

*А.Шаповалов*

*Иллюстрации Д.Гришуковой*

# Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»

*С 27 июня по 3 июля 2002 года в костромском пансионате «Березовая роща» состоялся заключительный этап конкурса им. А.П.Савина «Математика 6–8»журнала «Квант». С каждым годом популярность турнира растет: в позапрошлый раз участвовали 22 команды, в прошлый – 24, а на этот раз – 26 команд из Астрахани, Донецка, Костромы, Магнитогорска, Москвы, Омска, Перми, Санкт-Петербурга и Харькова. 22 команды состояли из учеников 6–8 классов, а 4 команды – из девятиклассников. Девятиклассники решали те же самые задачи, но соревновались только между собой.*

*В первый день для разминки была проведена математическая регата (соревнование по решению задач на скорость). Во второй день – командная устная олимпиада, по итогам которой (впервые в истории турнира) все команды 6–8 классов были разбиты на три лиги, а четвертую лигу образовали девятиклассники.*

*Затем начался собственно турнир. Он состоял из личной устной олимпиады и математических боев по лигам. На первые четыре задачи устной олимпиады отводилось два часа. Решив любые три из них, участник получал еще три задачи и два часа времени. Участникам, рассказавшим решения семи или шести задач, были присуждены дипломы I степени, 5 задач – II степени, 4 – III степени, 3 – похвальные грамоты.*

***Дипломы I степени получили***
*Бузмаков Алексей – Пермь, 8 кл.,*
*Воронин Павел – Санкт-Петербург, 7 кл.,*
*Голдырев Роман – Пермь, 8 кл.,*
*Гончарук Наталья – Харьков, 7 кл.,*
*Качаев Алексей – Донецк, 8 кл.,*
*Плынин Федор – Москва, 8 кл.,*
*Христофоров Михаил – Санкт-Петербург, 7 кл.*

***Дипломы II степени получили***
*Абрамов Ярослав – Москва, 8 кл.,*
*Беликова Виктория – Донецк, 8 кл.,*
*Капелиович Сергей – Санкт-Петербург, 7 кл.,*
*Латушкин Сергей – Пермь, 8 кл.,*
*Лях Анастасия – Донецк, 8 кл.,*
*Малявин Георгий – Кострома, 7 кл.,*
*Москва Владимир – Москва, 8 кл.,*
*Низов Сергей – Кострома, 8 кл.,*
*Оленин Михаил – Москва, 8 кл.,*
*Рубашкина Анастасия – Санкт-Петербург, 8 кл.,*
*Тестов Владимир – Москва, 8 кл.*

***Дипломы III степени получили***
*Батыев Андрей – Харьков, 7 кл.,*
*Волков Юрий – Москва, 8 кл.,*
*Гейнрихс Александр – Пермь, 8 кл.,*
*Горбань Тимофей – Москва, 8 кл.,*
*Гусаков Алексей – Москва, 8 кл.,*
*Девятов Ростислав – Москва, 7 кл.,*

*Кондакова Анна – Москва, 8 кл.,*
*Корняков Яков – Москва, 8 кл.,*
*Куликова Софья – Пермь, 8 кл.,*
*Мордасов Филипп – Москва, 8 кл.,*
*Недумов Всеволод – Москва, 8 кл.,*
*Петров Андрей – Москва, 8 кл.,*
*Семейко Александр – Москва, 8 кл.,*
*Тарасов Вячеслав – Астрахань, 7 кл.*

***Похвальные грамоты получили***

*астраханцы Марков Евгений и Христодулиди Павел, ивановец Разумовский Роман, костромичи Ефремов Михаил, Иванов Дмитрий и Колчин Александр, магнитогорцы Воропаев Ростислав и Поляков Евгений, омичи Бакланова Надежда, Лосев Александр и Лосенков Виктор, пермяки Заболотных Андрей и Прокопенко Евгений, харьковчане Цыбулин Иван и Ярошенко Александр, а также москвичи Заплетина Ольга, Ибрагимова Лилия, Калмыков Владимир, Леонов Ярослав, Ли Дмитрий, Мамонтов Александр, Милехин Олег, Мордасова Марина, Овсянникова Екатерина, Осиненко Антон, Поройкова Ольга и Тимофеева Диана.*

*По итогам математических боев I место заняла команда Москвы (руководитель Г.В.Кондаков), II место разделили команды Санкт-Петербурга (руководитель И.В.Кацев) и Москвы (руководитель С.И.Васянин), а III место досталось командам Москвы (руководители Т.Ю.Сысоева и А.В.Хачатурян) и Перми (руководители И.И.Зорина и Г.А.Одинцова).*

*Книги для призов победителям, помимо журнала «Квант», предоставили МЦНМО (директор И.В.Ященко), МИРОС (А.М.Абрамов) и Фонд математического образования и просвещения (С.И.Комаров и В.М.Имайкин).*

Вот несколько задач турнира.

**1.** Заполните клетки таблицы размером $10 \times 10$ крестиками и ноликами так, чтобы нигде ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали не стояли три одинаковых значка подряд.

*В. Гуровиц*

**2.** В записи $1*2*3*4*5*6$ на местах, отмеченных звездочками, стоят знаки: плюсы или минусы. Любые два знака, разделенные цифрой, можно заменить на противоположные. Докажите, что значение выражения можно сделать кратным числу 7.

*Е. Барабанов, И. Воронович*

**3.** Расположите на плоскости 8 точек так, чтобы на серединном перпендикуляре к любому отрезку с концами в этих точках лежали ровно две из 8 точек.

*В. Гуровиц*

**4.** Точку отразили относительно некоторых четырех прямых. Ее образы попали на некоторую окружность с центром $O$. Затем точку $O$ отразили относительно тех же прямых. Докажите, что образы точки $O$ принадлежат некоторой окружности.

*В. Произволов*

**5.** Вписанная окружность с центром $I$ касается сторон $BC$, $CA$ и $AB$ треугольника $ABC$ в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$ соответственно. Отрезки $AI$, $BI$ и $CI$ пересекают окружность в точках $A_2$, $B_2$ и $C_2$ соответственно. Докажите, что площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна половине площади шестиугольника $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$.

*В. Произволов*

**6.** Внутри прямоугольника выбрана произвольная точка и соединена отрезками с вершинами. Докажите, что среди полученных четырех отрезков обязательно найдутся три, из которых можно составить треугольник.

*Е. Барабанов, И. Воронович*

**7.** Сложите из бумажного прямоугольника размером $2 \times 5$ двуслойную коробку размером $1 \times 1 \times 1$ без крышки. (Бумагу можно гнуть и надрезать, но нельзя резать на отдельные куски.)

*С. Волчёнков*

**8.** Найдите все такие тройки простых чисел, что произведение любых двух из них при делении на третье дает остаток 1.

*Б. Френкин*

**9.** Целые числа $x$, $y$, $z$ таковы, что $xy + yz + zx = 1$. Докажите, что число $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ является квадратом целого числа.

*В. Сендеров*

**10.** Докажите, что первые $n$ натуральных чисел, где $n > 10$, можно разбить на два множества таким образом, чтобы произведение чисел первого из них равнялось сумме чисел второго.

*А. Шаповалов*

**11.** На нижней горизонтали доски размером $2\times25$ выстроились фишки с номерами от 1 до 25 по порядку. За один ход можно переставить одну фишку на пустую соседнюю (по горизонтали или вертикали) клетку. За какое наименьшее число ходов удастся расставить все фишки на нижней горизонтали в обратном порядке?

*А. Шаповалов*

**12.** Можно ли пятиконечную звезду разрезать на три выпуклых многоугольника?

*В. Произволов*

**13.** Докажите, что любую степень двойки можно умножить на такое натуральное число, что произведение окажется палиндромом – числом, десятичная запись которого слева направо читается так же, как и справа налево.

*А. Шаповалов*

**14.** Любое ли натуральное число представимо в виде разности двух палиндромов?

*А. Шаповалов*

**15.** Докажите, что для любого натурального $n > 1$ существуют $2n$ таких попарно различных натуральных чисел, что произведение факториалов первых $n$ из них равно произведению факториалов $n$ других.

*А. Егоров, В. Сендеров*

**16.** Найдите такое наименьшее натуральное число $n$, что среди углов любого выпуклого $n$-угольника найдутся такие три, что их величины численно равны длинам сторон некоторого треугольника.

*Е. Барабанов, И. Воронович*

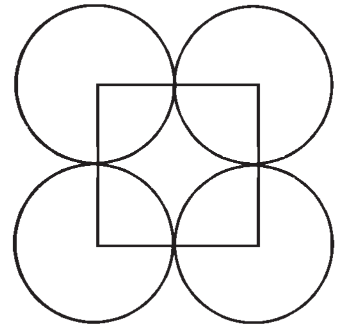
**17.** На доску размером $11\times11$ клеток положили несколько квадратов размером $2\times2$ так, что каждый квадрат закрывает ровно 4 клетки и никакие два квадрата не пересекаются более чем по одной клетке. Какое наибольшее число квадратов могло быть?

*Д. Калинин*

**18.** Кавалеров ордена Славы выстроили в виде каре $7\times7$. На каждом – один, два или три ордена. Слава посчитал число орденов в каждой шеренге, колонне и каждой из двух диагоналей каре. Докажите, что эти числа не могли быть все разными.

*Фольклор*

**19.** По четырем одинаковым окружностям единичного радиуса с центрами в вершинах квадрата со стороной длины 2 вечно бегут спортсмены, не переходя с окружности на окружность (см. рисунок). Из любых трех спортсменов хотя бы двое периодически встречаются. Каково наибольшее возможное число спортсменов? (Спортсмены встречаются, если они бегут по одной окружности в противоположных направлениях или если они бегут по касающимся окружностям и одновременно оказываются в точке касания.)



*А. Чеботарев*

**20.** Действительные числа $a$ и $b$ таковы, что

$$a + b^5 > ab^5 + 1.$$

Докажите неравенство

$$b + a^7 > a^7 b + 1.$$

*Е. Барабанов, И. Воронович*

**21.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{yz}}{y+z}, \\ y = \dfrac{\sqrt{zx}}{z+x}, \\ z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}. \end{cases}$$

*А. Жуков*

**22.** Таня задумала натуральное число, не превосходящее 100. Саша пытается его угадать. Если он угадал, то Таня так и говорит: «Угадал!» Если же названое Сашей число не совпадает с тем, которое в этот момент имеется у Тани, то она молчком делит имеющееся в этот момент у нее число на Сашино, если делится нацело, а если не делится, то молчком умножает имеющееся у нее число на Сашино и прибавляет единицу. Помогите Саше узнать число, задуманное Таней вначале.

*А. Шаповалов*

**23.** Какое наибольшее число полей шахматной доски можно отметить так, чтобы центры никаких четырех отмеченных клеток не оказались вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски?

*А. Шаповалов*

**24.** В полном однокруговом турнире участвуют $n$ команд. Они договорились, что каждая команда в своей $k$-й игре забивает $k$ голов. Каково наименьшее число ничьих в таком турнире?

*А. Чеботарев*

*Публикацию подготовили И.Акулич, А.Спивак*

# Сетки-помощницы

М.ШАРИЧ

В РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ довольно часто выручают вспомогательные элементы. Бывает, стоит только провести на чертеже дополнительную высоту, вписать или описать окружность, достроить параллелограмм, как скрытые связи между неизвестными величинами задачи начинают зримо проступать, и путь к ее решению становится ясным и очевидным. В данной заметке мы поговорим о построении специального *фона* к геометрическому чертежу – *сетки*, или *решетки*. Этот прием не столь распространен, как остальные вспомогательные построения, но вполне достоин того, чтобы на него обратили внимание.

**Задача 1.** *На сторонах BC и CD квадрата ABCD даны точки K и M соответственно так, что BK = KC и CM = 2DM (рис. 1). Найдите величину угла MAK.*

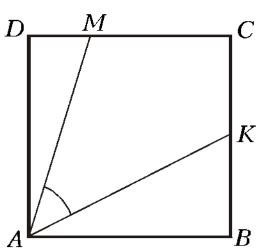



Рис. 1

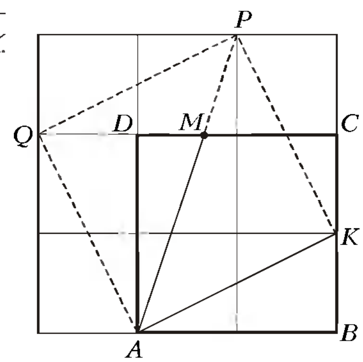



Рис. 2

**Первое решение.** Построим квадратную сетку, показанную на рисунке 2. Из рисунка видно, что отрезок *AK* является стороной, а отрезок *AM* – частью диагонали *AP* квадрата *AKPQ*. Следовательно, угол *MAK* равен 45°.

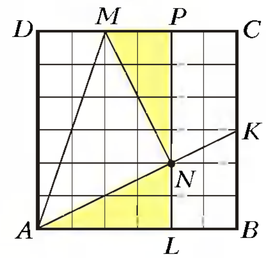



Рис. 3

**Второе решение.** Построим квадратную сетку, показанную на рисунке 3. Из равенства прямоугольных треугольников *ANL* и *NMP* следует, что *AN* = *MN* и $\angle ANL + \angle MNP = 90^\circ$, поэтому треугольник *ANM* равнобедренный и прямоугольный. Следовательно, $\angle MAK = \angle MAN = 45^\circ$.

**Задача 2.** *Середины сторон квадрата ABCD соединяются со всеми его вершинами. Построенные отрезки, пересекаясь, образуют внутри квадрата правильный восьмиугольник PQRSTUVX (рис. 4). Найдите отношение площади восьмиугольника к площади квадрата.*

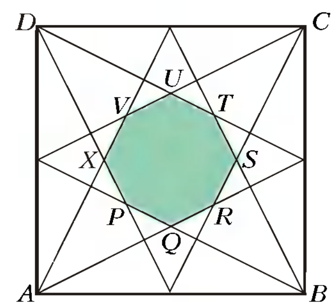



Рис. 4

**Решение.** Чертеж к задаче представим нарисованным на квадратной сетке, показанной на рисунке 5.

Обозначим через *s* площадь одного квадратика – ячейки сетки. Тогда площади треугольников *PQR*, *RST*, *TUV*, *VXP* равны 2*s*. Восьмиугольник составлен из этих

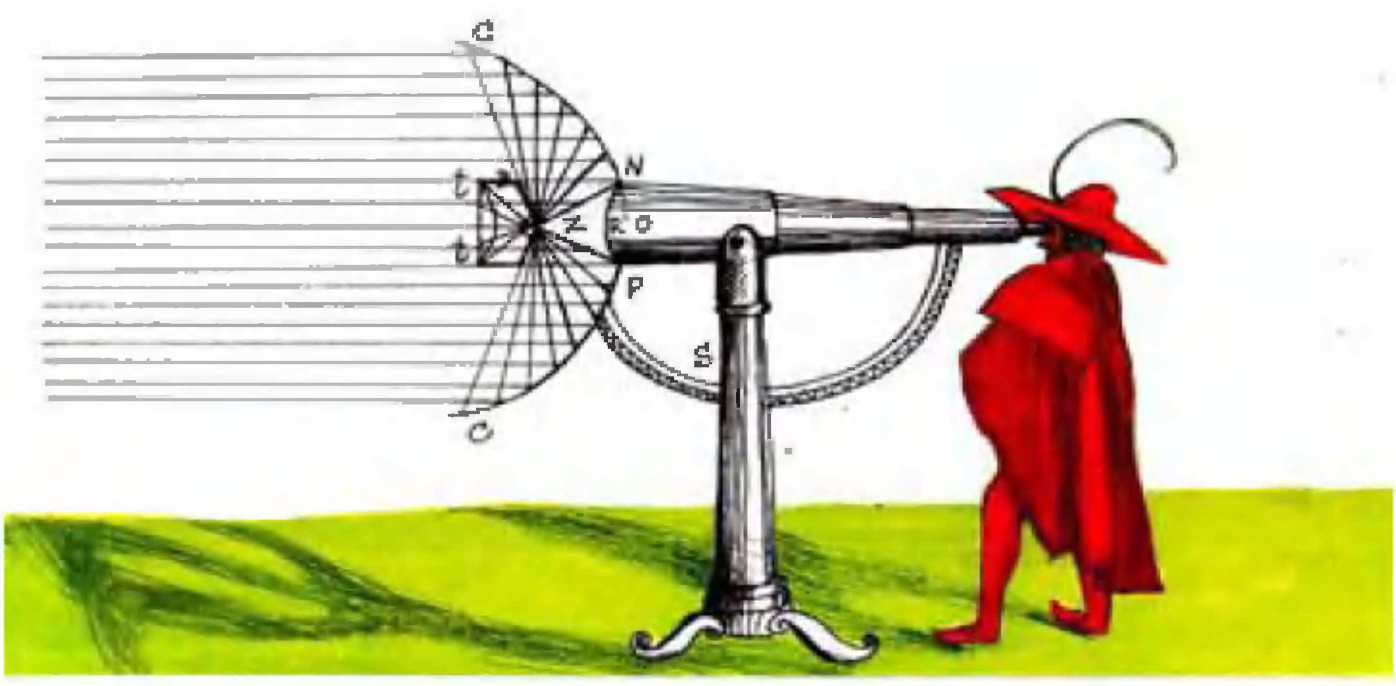


Иллюстрация В.Акатьевой

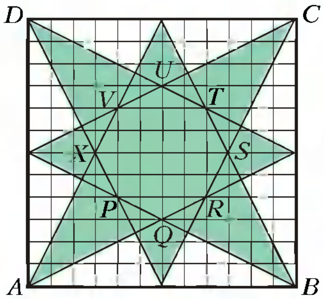


Рис. 5

треугольников и центрального квадрата площадью $16s$, так что площадь восьмиугольника равна $24s$. Поскольку площадь квадрата $ABCD$ равна $144s$, то искомое отношение площадей равно $\frac{24s}{144s}=\frac{1}{6}$.

**Задача 3.** *В параллелограмме $ABCD$ точки $E$ и $F$ — середины сторон $AB$ и $AD$ соответственно, $P$ и $Q$ — середины отрезков $EC$ и $FC$ соответственно, $O$ — точка пересечения диагоналей параллелограмма (рис. 6). Найдите отношение площадей четырехугольника $OPCQ$ и пятиугольника $EPOQF$.*

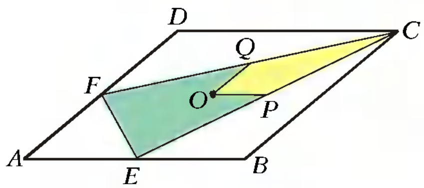


Рис. 6

**Решение.** Разделив каждую сторону параллелограмма на 4 равные части, проведем через полученные точки прямые, параллельные сторонам параллелограмма (рис. 7).

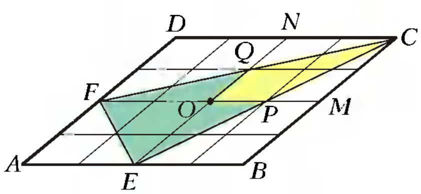


Рис. 7

Пусть площадь одного маленького параллелограмма — ячейки сетки — равна $s$. Тогда площадь параллелограмма $OMCN$ равна $4s$, а площадь каждого из треугольников $PMC$ и $QNC$ равна $s$. Отсюда площадь четырехугольника $OQCP$ равна $4s-2s=2s$. Аналогично определяем площадь пятиугольника $EPOQF$, она равна $4s$. Итак, искомое отношение равно $\frac{2s}{4s}=\frac{1}{2}$.

**Задача 4.** *Точки $D$, $E$ и $F$ равностороннего треугольника $ABC$ принадлежат соответственно сторонам $AB$, $BC$ и $CA$, причем $DB=\frac{1}{3}AB$, $CE=\frac{1}{3}BC$, $FA=\frac{1}{3}AC$. Отрезки $AE$, $BF$ и $CD$ пересекаются в точках $K$, $L$ и $M$ (рис.8). Во сколько раз площадь треугольника $ABC$ больше треугольника $KLM$?*

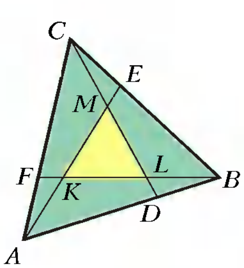


Рис. 8

**Решение.** Представим чертеж к задаче нарисованным на равномерной треугольной сетке (рис.9). Обозначим через $s$ площадь треугольника $KLM$, тогда площадь треугольника $ABK$ равна $2s$ (как половина площади параллелограмма $AGBK$). Аналогично, площади треугольников $BCL$ и $CAM$ тоже равны $2s$. Следовательно, площадь треугольника $ABC$ равна $7s$, так что искомое отношение площадей равно 7.

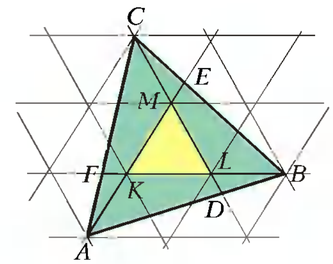


Рис. 9

**Задача 5.** *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки $P$, $Q$, $R$, $S$ являются серединами его сторон (рис.10). Во сколько раз площадь четырехугольника $ABCD$ больше площади четырехугольника $PQRS$?*

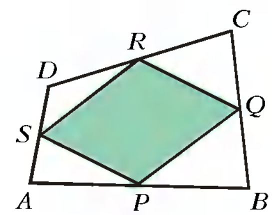


Рис. 10

**Решение.** Проведем параллельные линии сетки, как показано на рисунке 11. В данном случае сетка получилась неравномерная, но, тем не менее, с ее помощью можно поймать улов!

Так как площадь четырехугольника $XPQY$ равна половине площади треугольника $ABC$, а площадь четырехугольника $XYRS$ равна половине площади треугольника $ACD$, то площадь

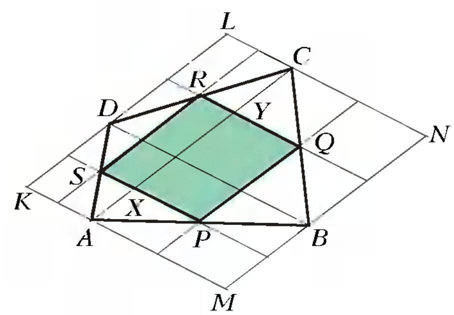


Рис. 11

четырехугольника $ABCD$ ровно вдвое больше площади четырехугольника $PQRS$.

### Упражнения

**1.** В треугольнике $ABC$ высота $CD=1$ делит сторону $AB$ на отрезки $AD=2$ и $BD=3$. Чему равен угол $ACB$?

(Ответ: 135°.)

**2.** Точка $K$ — середина стороны $AB$ квадрата $ABCD$, точка $L$ лежит на его диагонали $AC$, причем $CL:AL=1:3$. Докажите, что угол $KLD$ прямой.

**3.** На сторонах $AB$ и $CD$ квадрата $ABCD$ взяты точки $P$ и $R$ так, что $AP:BP=CR:RD=1:2$. Обозначим через $S$ точку пересечения отрезков $AR$ и $DP$, а через $Q$ — точку пересечения отрезков $BR$ и $CP$. Какую часть квадрата перекрывает четырехугольник $PQRS$?

(Ответ: 2/9.)

# Чаша весов колеблется...

## А.СТАСЕНКО

*Вот, я знаю вас, владыки справедливости,.. я не творил дурного,.. я не прибавлял к мере веса, я не давил на гирю, я не плутовал с отвесом... Я чист. Я чист. Я чист.*

Древнеегипетское заклинание
(из «Книги мертвых», гл. 125)

Тысячи лет нужды торговли заставляли человечество отмерять и взвешивать. Изобретено множество систем весов, представленных в современных музеях. Разработаны теории точного взвешивания, из которых в школьные программы вошла в основном *статика* весов.[1] В реальности весы работают в *динамическом режиме*, в чем можно убедиться в любом магазине. И это не случайно. А почему – об этом и пойдет речь.

«Сконструируем» самые простые весы (рис.1,*а*): пружина с направляющим штоком, на верхнем конце которого укреплена чашка для товара. Если масса чашки $m$, то пружина сразу укоротится на

$$x_0 = \frac{mg}{k},$$

где $k$ – жесткость пружины. Это положение и является стартовым для взвешивания товара (рис.1,*б*). Поэтому введем понятие отклонения от положения равновесия:

$$s = x - x_0 .$$

Груз, даже спокойно положенный на чашку весов (без начальной скорости), начнет двигаться вниз и вызовет колебания, которые постепенно затухнут из-за сопротивления воздуха, трения твердых частей конструкции весов друг

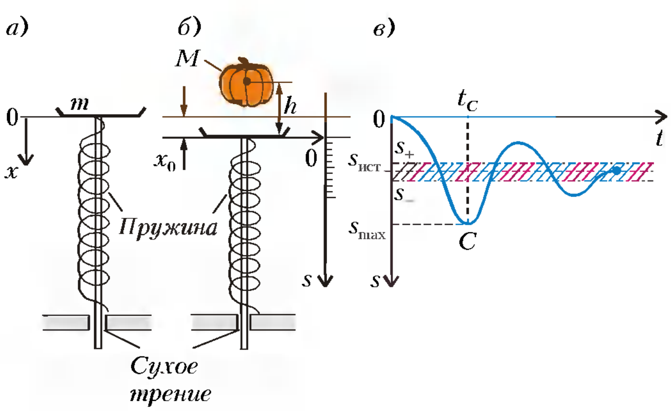



Рис. 1

о друга, потерь энергии в деформируемой пружине... В результате, если подождать достаточно долго, то при отсутствии сухого трения истинное показание весов должно быть равно (рис.1,*в*)

$$s_{ист} = \frac{Mg}{k} \equiv \frac{G}{k} . \qquad (1)$$

(Заметим, что под термином «вес груза $G$» здесь мы понимаем показание весов.)

Но кто же будет ждать «достаточно долго»? И Продавцу некогда, и Очередь соберется и взволнуется не в пользу Покупателя.

В дальнейшем для упрощения теории предположим, что диссипация механической энергии (т.е. ее превращение в тепловую) связана только с сухим трением. В идеальном случае сила сухого трения не зависит от величины относительной скорости трущихся тел, а зависит только от направления движения, т.е. от знака скорости. Рисунок 2 иллюстрирует этот факт: знак силы трения противоположен знаку скорости, т.е. $s'$, что вполне разумно – в противном случае трение ускоряло бы тела. В частности, в начале движения, когда чашка и груз идут вниз ($s' > 0$), сила трения направлена вверх (т.е. в наших координатах она отрицательна). В этих предположениях уравнение движения весов будет иметь вид

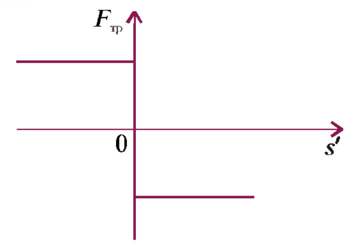



Рис. 2

$$(m + M)s'' = -ks + Mg \mp F_{тр} . \qquad (2)$$

(Обратим внимание, что на самом деле тут *два* уравнения, каждое из которых соответствует определенному знаку скорости $s' \gtrless 0$.) Это выражение можно привести к более привычному виду

$$s'' + \omega^2 s = \frac{Mg \mp F_{тр}}{m + M} , \qquad (3)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + M}} \qquad (4)$$

– круговая частота собственных колебаний.

Но почему в уравнении (2) не учтен вес чашки $mg$? А потому, что оно записано для *отклонения* $s$ от положения равновесия. Поясним подробнее. Вернемся к координате $x$ (см. рис.1,*а*). В этом случае уравнение движения чашки с грузом имеет вид

$$(m + M)x'' = -kx + (m + M)g \mp F_{тр} .$$

Здесь вес чашки присутствует, что вполне понятно. Но, подставляя сюда $x = s + x_0$ и учитывая, что $x'' = s''$ (постоянная величина $x_0$ исчезает при дифференцировании по времени), получаем

$$(m + M)s'' = -ks - \underline{kx_0} + \underline{mg} + Mg \mp F_{тр} .$$

По определению величины $x_0$, подчеркнутые слагаемые взаимно уничтожаются, и получается уравнение (2).

Из уравнения (2) видно, что существуют два значения $s$,

(Окончание см. на с. 34)

[1] *О статике простейших рычажных равноплечих весов можно прочитать, например, в статье С.Варламова в «Кванте» №1 за 2003 год. (Прим. ред.)*

*Искатели вечного движения, какое количество пустейших замыслов пустили вы в мир!*

Леонардо да Винчи

*Нельзя устроить часы, которые заводились бы сами собою и сами поднимали гири, движущие механизм.*

Джероламо Кардано

*Создание вечного двигателя абсолютно невозможно...*

Из решения Парижской Академии наук, 1775 г.

*...нам пришлось бы допустить, что можно ввести в действие автоматическую машину и получать путем охлаждения моря или земли механическое действие в любом количестве, вплоть до исчерпания всей теплоты суши и моря...*

Уильям Томсон

*Определяя вечное движение, нужно быть очень осторожным.*

Ричард Фейнман

# А так ли хорошо знаком вам вечный двигатель?

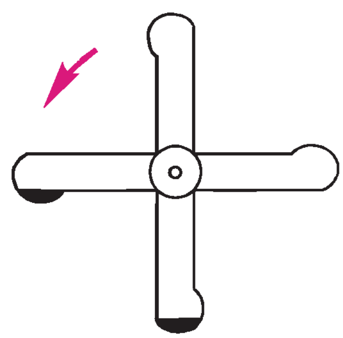
Отчего столько эмоций на протяжении многих столетий вызывала идея perpetuum mobile – вечного двигателя? Очевидно, необыкновенно привлекательной была да и по сию пору остается воображаемая возможность добывать из ничего неограниченное количество энергии (вечный двигатель I рода) или превращать сколь угодно тепла в работу (вечный двигатель II рода). Но стоит ли обращаться к этой теме, если ее неоднократно, даже официальными постановлениями ученых собраний, раз и навсегда закрывали? Стоит, поскольку немало полезного можно вынести из размышлений, почему именно такие устройства нельзя создать.

Как показывает история, практически всякий раз, когда обнаруживались новые природные явления или неизвестные ранее эффекты, многие изобретатели сразу же пытались использовать их для обоснования возможности перпетуум мобиле и предлагали новые его проекты. Даже в нашей небольшой подборке задач и любопытных фактов вы найдете «представителей» механических, гидравлических, капиллярных, тепловых и электромагнитных вечных двигателей.

### Вопросы и задачи

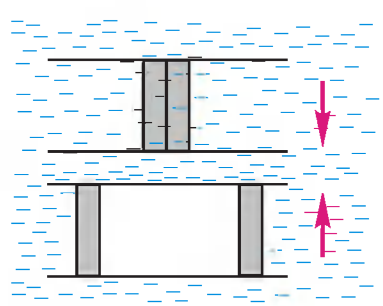
**1.** Является ли обращение планет вокруг Солнца примером перпетуум мобиле?

**2.** В двух трубках, накрест закрепленных на валу, находится



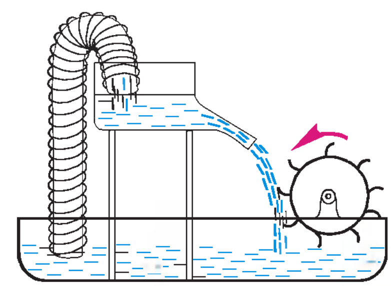
ртуть. По идее автора проекта, ртуть должна перетекать справа налево, заставляя колесо непрерывно вращаться. Так ли это?

**3.** Раздвигая поршни в цилиндре вблизи дна сосуда, можно



добиться его всплытия, сдвигая у поверхности воды – погружения. Нельзя ли такой механизм использовать для «бесплатного» подъема грузов?

**4.** В проекте этого вечного двигателя вода за счет капиллярных сил должна была подниматься по фитилю, стекать в верхний сосуд, а затем вращать



водяное колесо. Что же помешало воде?

**5.** Изменится ли что-нибудь, если фитиль в последнем проекте заменить на тонкую смачиваемую водой капиллярную трубку?

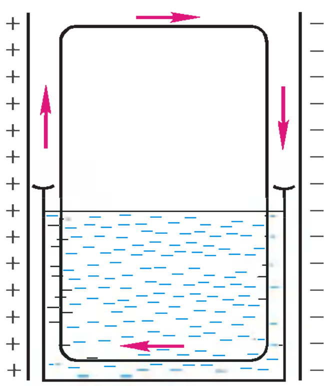
**6.** Достигнет ли КПД тепловых машин 100%, если трение в их частях удастся свести к нулю?

**7.** Может ли существовать такое вещество, которое удастся перевести из некоторого начального состояния в одно и то же конечное состояние и адиабатически, и изотермически?

**8.** При растворении в воде некоторых веществ, например гипосульфита, температура раствора понижается. Если использовать такой раствор в качестве холодильника, а окружающую среду – в качестве нагревателя, можно совершить некоторую работу. После высыхания раствора цикл повторяют. Не кроется ли здесь возможность создания вечного двигателя?

**9.** Основой игрушки «Пьющий утенок» или «Птичка Хоттабыча» является запаянная ампула с трубочкой, заполненная легкоиспаряющейся жидкостью. Птичка периодически «пьет», опуская клюв в стакан с водой. Можно ли это устройство считать вечным двигателем?

**10.** Между обкладками плоского конденсатора расположен провод, нижняя часть которого опущена в чистую воду. По мысли автора проекта, из-за того что электрическое поле в воде ос-




лаблено, на свободные заряды в верхней части провода будет действовать бóльшая сила со стороны поля, чем в нижней, и в проводе все время будет поддерживаться ток. Почему это невозможно?

**11.** Генератор электрического тока, однажды приведенный в движение, питает током электродвигатель, а тот, в свою очередь, вращает якорь генератора. Можно ли считать такую установку вечным двигателем?

### Микроопыт

Впервые за всю историю «Калейдоскопа» мы не предлагаем вам провести эксперимент (т.е. сконструировать перпетуум мобиле), а напротив, решительно советуем воздержаться от этого, даже если очень захочется. Почему — читайте дальше признание изобретателя Бехера.

### Любопытно, что...

...со времени первого представления проекта вечного двигателя в начале XVII века и до начала XX века Британское патентное бюро рассмотрело более 600 заявок, причем львиная их доля пришлась на последние полстолетия, когда уже были сформулированы закон сохранения энергии и законы термодинамики.

...ни один из «Комиссии знатоков», проверявшей действие машины Орфиреуса — известного немецкого изобретателя вечного двигателя начала XVII века, — не сомневался, что в принципе такой двигатель сделать можно, критике был подвергнут лишь конкретный образец машины.

...росту сторонников идеи вечного двигателя даже в среде критически мыслящих исследователей в свое время способствовало идущее от Декарта ошибочное толкование силы как произведения массы тела на его скорость.

...следующим после Леонардо да Винчи ученым, занимавшим четкую позицию о невозможности создания вечного двигателя, был голландский математик и инженер Стевин. Он разработал теорию о несостоятельности механических перпетуум мобиле с колесами и грузами, считая это истиной, не требующей доказательств, и вынес на титульную страницу своего трактата девиз: «Чудо не есть чудо».

...соблазн построить вечный двигатель не обошел и русского изобретателя-самоучку, лучшего, как его называли в Европе, механика XVIII века, конструктора многих оригинальных механизмов, приборов и часов Ивана Кулибина. Как и следовало ожидать, в этом случае и он потерпел фиаско.

...в знаменитом решении Парижской Академии наук отмечалось, как бесславно заканчивались труды горе-изобретателей и рушились их семьи. Еще за сто лет до вынесенного учеными вердикта прозвучало признание немца Бехера: «Десять лет я занимался этим безумием, потеряв кучу времени, денег и погубив свое доброе имя и славную репутацию, — все это лишь для того, чтобы сегодня с полной убежденностью сказать: вечное движение неосуществимо».

...броуновское вечное движение, тепловую природу которого доказал французский физик Гюи, по его же мнению оказалось несовместимым со вторым законом термодинамики, запрещающим вечные двигатели II рода. Однако, как позже выяснилось, само броуновское движение отвергает возможность создания подобных двигателей.

...когда для объяснения «недостачи» энергии при $\beta$-распаде — испускании электрона атомным ядром — была предложена неуловимая частица нейтрино, даже великий ученый Нильс Бор предпочел усомниться в незыблемости закона сохранения энергии, нежели «изобретать» новую частицу.

...примерно через сто лет после мысленного эксперимента с демоном Максвелла аналогичное устройство, нарушающее второй закон термодинамики, придумал американский физик Фейнман. И хотя он же разъяснил, почему не должен работать этот вечный двигатель, идея устройства послужила основой для создания микроскопических моторов, работающих за счет броуновского движения атомов окружающей среды. Природа, кстати, уже «изобрела» подобные двигатели — в мембранах живых клеток.

### Что читать в «Кванте» о вечном двигателе

(*публикации последних лет*)


1. «Вечный двигатель, демоны и информация» — 1995, №5, с. 14;
2. «О квантовой природе теплоты» — 1998, №3, с. 7;
3. «Еще один вечный двигатель?» — 1998, №3, с. 35;
4. «Леонардо да Винчи и принцип невозможности вечного двигателя» — 1999, №5, с. 14;
5. «Внутренняя энергия идеального газа» — 2000, №1, с. 38;
6. «Капилляры и смачивание» — 2000, Приложение №3, с. 99;
7. Калейдоскоп «Кванта» — 2001, №3, с. 32;
8. «Осмос и... вечный двигатель» — 2002, Приложение №4, с. 85.



*Материал подготовил*
*А.Леонович*

*(Начало см. на с. 31)*

при которых весы могут оставаться в покое ( $s''=0$ ):

$$s_{\pm}=\frac{G\mp F_{\text{тр}}}{k}=s_{\text{ист}}\mp\frac{F_{\text{тр}}}{k}.$$

Значит, вокруг «истинного» показания весов существует полоса застоя шириной $\Delta s=2F_{\text{тр}}/k$ (она заштрихована на рисунке 1,*в*), попав в которую с нулевой скоростью (т.е. с нулевой кинетической энергией), весы остаются в покое.

Ясно, что Продавцу наиболее выгодно снять груз в точке *C*, в которой весы показывают максимальный вес. Поэтому рассмотрим движение весов с самого начала. Пусть аккуратный Продавец кладет товар на чашку весов с нулевой начальной скоростью и отпускает его. Значит, в начальный момент времени $t=0$ отклонение весов и скорость этого отклонения равны нулю:

$$s_0=0,\ s_0'=0.$$

Чашка весов с товаром начнет двигаться вниз ( $s_0'>0$, согласно нашему выбору оси координат), в уравнении (2) перед силой трения нужно взять знак «минус» (сила трения тормозит движение), так что решение уравнения (2) примет вид

$$s(t)=\frac{G-F_{\text{тр}}}{k}(1-\cos\omega t). \qquad (5)$$

Но ведь это уравнение гармонических колебаний! А как же трение? Дело в том, что выражение (5) верно только до точки *C*, после прохождения которой изменяется знак скорости ( $s'<0$ ) и, следовательно, знак перед силой трения. Значит, «гармонические колебания» сначала будут происходить вокруг уровня $s=s_+$, а затем вокруг $s=s_-$ и т.д. Понятно, что наибольшее отклонение будет достигнуто при $\cos\omega t_C=-1$, т.е. в момент времени $t_C=\pi/\omega$, и это отклонение (наиболее выгодное для Продавца) будет равно

$$s_{\max}=2\frac{G-F_{\text{тр}}}{k}. \qquad (6)$$

И это еще не все. Ведь можно *уронить* товар с высоты *h* (над чашкой весов, находящейся в положении равновесия; см. рис.1,*б*). Тогда, считая удар товара о чашку абсолютно неупругим, из закона сохранения импульса получим начальное значение скорости чашки с товаром:

$$(m+M)s_0'=M\sqrt{2gh},\ s_0'=\frac{\sqrt{2gh}}{1+m/M}. \qquad (7)$$

Можно решить уравнение (2) с этими новыми начальными условиями (см. Приложение для желающих). Но для определения наибольшего отклонения $s_{\max}$ достаточно энергетических соображений. Ведь начальная кинетическая энергия чашки и товара $(m+M)s_0'^2/2$ идет прежде всего на сжатие пружины: потенциальная энергия пружины равна $ks_{\max}^2/2$ и на преодоление силы трения: ее работа равна $-F_{\text{тр}}s_{\max}$; кроме того, поле тяготения Земли совершает работу, равную $Gs_{\max}$. В результате получим уравнение

$$\frac{ks_{\max}^2}{2}=\left(G-F_{\text{тр}}\right)s_{\max}+\frac{Gh}{1+m/M}.$$

Последнее слагаемое справа – начальная кинетическая энергия чашки с грузом. Заметим, что она меньше начальной потенциальной энергии *Gh* груза над чашкой, поскольку часть этой энергии перешла в тепло при неупругом ударе. (А о том, почему сюда не вошла сила *mg*, мы уже говорили.) Решение этого квадратного уравнения тривиально:

$$s_{\max}=\frac{G-F_{\text{тр}}}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{2Ghk}{\left(G-F_{\text{тр}}\right)^2(1+m/M)}}\right)$$

(при $h=0$ оно совпадает с выражением (6)).

Как же узнать истинный вес товара *G* (или его массу $M\equiv G/g$)? Ведь в последнем уравнении помимо *G* еще много неизвестных: масса чашки *m*, жесткость пружины *k*, сила трения $F_{\text{тр}}$ – четыре неизвестных! А что известно? Прежде всего, $s_{\max}$ (или ложный вес $G_{\max}=ks_{\max}$ – именно за него вас просят заплатить в кассу). Далее, вы можете непосредственно оценить высоту *h*, с которой роняется товар, и кроме того – засечь по секундной стрелке ваших часов момент

$$t_C=\frac{\pi}{\omega}=\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}.$$

Это уже кое-что, но этого недостаточно для определения перечисленных выше четырех неизвестных. Что же делать? Конечно, можно принести собственную выверенную гирю (известной массы) и самому поэкспериментировать с весами (ставя или роняя ее на чашку) – но это может задеть честь легко ранимого Продавца. Можно попросить его уронить тот же товар с высоты $h_1>h$, $h_2>h_1$,.. – сколько нужно раз (подумайте сами, сколько именно раз), чтобы получить нужное число максимальных показаний весов и, следовательно, нужное число уравнений, а затем найти все неизвестные и среди них истинный вес *G*. Только, проведя вычисления, не забудьте взять сдачу!

### Приложение для желающих

Приведем решение уравнения (2) для ненулевой начальной скорости движения чашки с товаром $s_0'$ (см выражение (7)):

$$s(t)=A(1-\cos\omega t)+B\sin\omega t,$$

где

$$A=\frac{G\mp F_{\text{тр}}}{k},\ B=\frac{s_0'}{\omega}.$$

Это решение легко запрограммировать на компьютере, только надо не забывать переключать знак перед $F_{\text{тр}}$ в выражении для *A* каждый раз, когда достигается нулевое значение скорости (т.е. когда касательная к кривой $s(t)$ становится горизонтальной). Например, первый раз это случится в момент времени, определяемый условием

$$\omega t=\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2Ghk/(1+m/M)}}{G-F_{\text{тр}}}\right).$$

Вычисления следует продолжать до тех пор, пока система не окажется впервые с нулевой скоростью в полосе застоя.

Полезно также уговорить компьютер нарисовать картины для различных значений параметров задачи (*k*, $G\equiv Mg$, *h*, *m/M*).

Желаем успехов!

***Физика 9–11***

*Публикуемая ниже заметка «Обратная задача Всемирного потопа» предназначена девятиклассникам, «Два кольца в одном магнитном поле» – десятиклассникам и «Следы в камере» – одиннадцатиклассникам.*

# Обратная задача Всемирного потопа

**В.ВЫШИНСКИЙ, А.СТАСЕНКО**

*сотвори начало не вскоре,.. тихо и разумно, со вниманием,*
*а не борзяся, якоже и умом разумевати глаголемая.*
Предварение к Псалтири

РЕЧЬ ПОЙДЕТ О ДЕЛАХ СЕРЬЕЗНЫХ И ВЕСЬМА ДАВНИХ. Конечно, и в нащи дни происходили наводнения в Европе, которые повредили и Праге, и Дрезденской галерее, и Предкавказью… Но в истории Человечества было такое наводнение, которое оставило память на тысячи лет. Вот что читаем в Книге «Бытие»:

«… разверзлись все источники великой бездны, и окна небесные отворились; и лился на землю дождь сорок дней и сорок ночей,.. так что покрылись все высокие горы, какие есть под всем небом. На пятнадцать локтей поднялась над ними вода, и покрылись горы. Вода же разливалась на земле сто пятьдесят дней.

… и навел Бог ветер на землю, и воды остановились. И закрылись источники бездны и окна небесные…

Вода же постепенно возвращалась с земли и стала убывать вода по окончании ста пятидесяти дней».

И все это время патриарх Ной (или Ут-Напишти, по вавилонской традиции), предупрежденный загодя Богом, сидел в заранее построенном большом ковчеге (сто лет строил!) со своей семьей и автономным подсобным хозяйством.

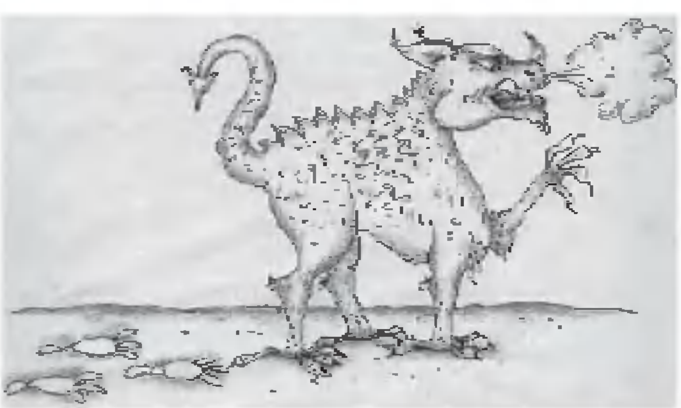
«И остановился ковчег в седьмом месяце, в семнадцатый день месяца, на горах Араратских. Вода постепенно убывала до десятого месяца; в первый день десятого месяца показались верхи гор».

Можно ли по этим данным реконструировать численные параметры событий? Задачи такого класса называются обратными или некорректно поставленными. Это не означает, что они плохие. Просто имеет место недостаток входной информации, а решать надо. Картинка внизу наглядно демонстрирует различие между прямой и обратной задачами. И в современном физическом эксперименте такие задачи не редки, так что математики развили целую теорию решения обратных задач. (Приятно напомнить, что тут важнейшую роль сыграла русская школа академика А.Н.Тихонова.)

Попробуем и мы («тихо и разумно…») сделать некоторые физические оценки давно прошедшего события. Итак, дождь шел сорок суток. Примем для оценок, что это был ливень, при котором плотность воды в воздухе порядка $\hat{\rho} \sim 5\ \text{г/м}^3$, а радиус капель $a \sim 3-5$ мм. Такие капли падают со скоростью $u \sim 10$ м/с. Значит, плотность потока воды была порядка

$$\hat{\rho} u \sim 5 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/м}^3 \cdot 10\ \text{м/с} = 0{,}05\ \text{кг}/\left(\text{м}^2 \cdot \text{с}\right).$$

За все время $t_д$ такого дождя на каждый квадратный метр



*Прямая задача: описать след известного дракона*

*Обратная задача: описать дракона по его следу*

Если всплывание ковчега произошло в сороковой день, то глубина наводнения в этот момент не могла превышать высоту ковчега в «тридцать локтей». Поскольку древнееврейский локоть равен 44 см, а древневавилонский 49 см, это даст высоту ковчега порядка 13–15 м. Таким образом, даже чудовищного ливня, который, пожалуй, на порядок сильнее современного, явно было недостаточно, чтобы затопить «горы Араратские». Тут нужна была помощь Океана. И Бог открыл не только «хляби небесные», но и «хляби земные» – «источники бездны».

Уже слой воды толщиной 10–200 м, образовавшийся от ливня, создал давление на земную кору от одной до десятков атмосфер. Сравним с чем-нибудь. Известно, что во время тайфунов давление воздуха в его центральной части («глаз тайфуна») несколько уменьшается. И даже это небольшое уменьшение (по сравнению с нашей оценкой давления дождевой воды) на больших площадях приводит к разгрузке земной коры, потере ее устойчивости и землетрясениям. Значит, под действием катастрофического ливня одна из тектонических платформ (под Междуречьем) могла опуститься; соседние, возможно, поднялись (кстати, это могло способствовать удержанию прибывающих облаков, как любой горный хребет не пропускает «тучки небесные, вечные странни-


Рис 1

пришлось количество воды

$$\rho u t_{\text{д}} = 5\cdot 10^{-2}\ \text{кг}/\left(\text{м}^2\cdot \text{с}\right)\cdot 40\cdot 24\cdot 3600\ \text{с} \approx 2\cdot 10^{5}\ \text{кг}/\text{м}^2,$$

что при плотности воды $\rho_{\text{в}} = 10^3$ кг/м$^3$ дало глубину $h_{\text{д}} \approx 200$ м. Не мало! Это, скорее всего, оценка сверху. А теперь получим оценку снизу.

«И продолжалось на земле наводнение сорок дней, и умножилась вода и подняла ковчег и он возвысился над землею».

цы»). Так и сказано в писании: «Яко толща земли проседеся на земли». Но как мудро все было устроено: сначала шел обильный, но спокойный дождь – для того, чтобы ковчег (довольно громоздкий ящик, построенный едва ли с учетом теории упругости и сопротивления материалов) плавно оторвался от стапеля и «возвысился над землей», а затем пришла паводковая волна с океана, боковой удар который мог бы разрушить это сооружение.

А что же дальше? К сожалению, нам не известно, по какому закону (в зависимости от времени) опускалась суша. Но, поскольку ковчег оказался в конце концов на Кавказе (а о ветре пока не упоминается), разумно предположить, что океанские воды хлынули из Персидского (ныне) залива и погнали ковчег на северо-запад. А от древнего Ура, где жил Ной и все передовое человечество, до Арарата порядка тысячи километров (см. карту древнего, но послепотопного мира, частично изображенную художником на рисунке 1). Правда, ковчег не сразу прибыл туда. Сто пятьдесят дней его тащило куда-то к норд-весту, как сказал бы современный моряк. И тут прибытие воды остановилось. Подул ветер. Конечно, едва ли поверхностный ветер мог быть причиной остановки потока воды глубиной несколько километров. Но не случайно же эти два события указаны как одновременные. И если обитателям ковчега даже только показалось, что ветер остановил поток, значит, он подул с северо-запада (рис.2). А на самом деле он остановиться мог потому, что навстречу с норд-веста шел такой же паводок, так что вертикальная плоскость $AB$ оставалась неподвижной.

И только примерно через 200 дней после начала Потопа ковчег «остановился на горах Араратских», хотя суши еще нигде не было видно, т.е. он сел на мель. Значит, более полутора месяцев норд-вест гнал его назад, к зюйд-осту. (На рисунке 1 искривление предполагаемого пути ковчега отражает общую тенденцию всех движений – отклоняться из-за вращения Земли, в частности вправо в северном полушарии, вспомните о крутизне правых берегов наших рек.)

Конечно, если бы мы знали форму ковчега, его осадку, скорость ветра, коэффициент сопротивления,.. то можно было бы рассчитать и его траекторию. Но такие сведения даются только великим святым в состоянии «умной молитвы и божественного созерцания». Мы же продолжим приблизительные численные оценки.

Наибольшее расстояние между Тигром и Евфратом, которое, по-видимому, и определяло масштабы расселения тогдашнего «всего Человечества», составляет приблизительно 300 км (см. карту). Поэтому можно предположить, что хлынувший поток имел ширину порядка сотни километров (так говорят физики, когда не знают точно, была ли эта ширина 70 или 400 км). Тут-то и пора воскликнуть: вот это паводок! И приступить к его простенькой теории.

Прежде всего зададимся вопросом: какова была средняя скорость ковчега? Если «паводковая вода» с океана прибывала 150 – 40 = 110 дней и за это время ковчег прошел на NW мимо Арарата приблизительно $(1000 + x)$ км, то его средняя скорость «туда» равна

$$v_1 = \frac{1000 + x}{110}\ \frac{\text{км}}{\text{сутки}},$$

а «обратно», под ветром (до посадки на мель на Арарате), –

$$v_2 = \frac{x}{50}\ \frac{\text{км}}{\text{сутки}}.$$

Если принять эти скорости одинаковыми (а почему нет?), то получим

$$x \approx 1000\ \text{км}.$$

Значит, ковчег проскочил примерно вдвое дальше, чем расстояние Ур–Арарат. (Если кто-нибудь знает точнее, может сообщить в редакцию «Кванта».) Следовательно, средняя скорость ковчега равна

$$v \approx v_1 \approx v_2 \approx 20\ \text{км/сутки} \approx 0{,}2\ \text{м/с}.$$

А каков должен быть средний секундный расход воды из океана, чтобы за 110 дней заполнить, например, бассейн (см. рис. 2) с поперечным сечением $OAB$, где $OA \sim 2000$ км,

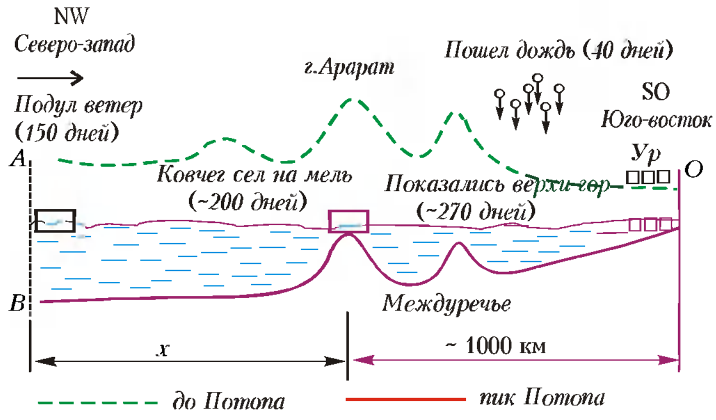



Рис. 2

$AB \sim 5$ км (современная высота Арарата над уровнем современного океана составляет 5165 м, но для оценок такие отличия несущественны – тем более, что мы собираемся пренебречь и глубиной наполнения от дождя, которую оценили выше: $10 \lesssim h_д \lesssim 200$ м)? Объем этого бассейна, в расчете на его «ширину» в 1 $м_\perp$, перпендикулярную рисунку 2, равен

$$\frac{1}{2} AB \cdot OA \sim \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2000 \cdot 10^6\ \ \text{м}^3/\text{м}_\perp = 5 \cdot 10^9\ \ \text{м}^3/\text{м}_\perp.$$

Таким образом, «скорость наполнения» была порядка

$$\frac{5 \cdot 10^9\ \ \text{м}^3/\text{м}_\perp}{110 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{с}} \approx 500\ \ \frac{\text{м}^3}{\text{с} \cdot \text{м}_\perp}.$$

(При таком расходе воды ванна шириной $\sim 0{,}5$ $м_\perp$ и объемом $\sim 0{,}5$ $м^3$ наполнилась бы за 2 миллисекунды.)

Оценим теперь потенциальную энергию этого объема воды (тоже в расчете на ширину в 1 $м_\perp$):

$$П_1 = \frac{AB}{2}\rho_в V_1 g =$$

$$= \frac{5 \cdot 10^3\ \text{м}}{2} \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 5 \cdot 10^9\ \frac{\text{м}^3}{\text{м}_\perp} \cdot 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 12{,}5 \cdot 10^{16}\ \ \text{Дж/м}_\perp$$

(здесь $\rho_в$ – плотность воды). В справочниках можно найти так называемый тротиловый эквивалент: 2 кг этого взрывчатого вещества «обладают» энергией $10^7$ Дж. Тогда найденная потенциальная энергия потока составляет $25 \cdot 10^9$ кг тротила/$м_\perp$, или 25 Мт тротила/$м_\perp$. При ширине потока $b \sim 100$ км $= 10^5$ м (см. выше) получим полную потенциальную энергию:

$$П = П_1 \cdot b \sim 2{,}5 \cdot 10^6\ \ \text{Мт тротила},$$

что эквивалентно многим тысячам современных самых мощных 100-мегатонных бомб. Поистине, «вздохи» Земли были титаническими.

Впрочем, не бойтесь нового потопа, ибо апостол Петр обещал, что в следующий раз «земля и все дела на ней сгорят». И тогда будет «новая земля и новое небо».

## Приложения

**1.** Рассчитаем скорость капли дождя. В установившемся режиме (при постоянной скорости падения) сила тяжести капли уравновешивается силой сопротивления воздуха. Последняя же, как известно, пропорциональна квадрату скорости движения $u$, площади поперечного сечения $\pi a^2$ и плотности окружающей среды (воздуха) $\rho_{воз}$, т.е. $\sim Gu^2\pi a^2\rho_{воз}$, где $G$ – безразмерный коэффициент, равный приблизительно 1/4 для сферы. Итак,

$$\rho_в \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 g = \frac{1}{4}\rho_{воз}\pi a^2 u^2,$$

откуда получаем

$$u = 4\sqrt{\frac{\rho_в a g}{3\rho_{воз}}} = 4\sqrt{\frac{10^3\ кг/м^3 \cdot (3-5)\cdot 10^{-3}/2\ м \cdot 10\ м/с^2}{3\cdot 1\ кг/м^3}} \approx 10\ м/с.$$

(Для радиуса капли приняты значения $a = (3-5)/2$ мм, плотность воздуха равна $\rho_{воз} = 1$ кг/м³.)

**2.** Использованная формула для силы сопротивления среды движущемуся в ней телу позволяет оценить и скорость $v$ ветра, который гнал ковчег к Арарату. Пусть площадь поперечного сечения подводной части ковчега $S_п$, надводной $S_п$ (рис.3). Запишем условие равенства силы сопротивления воды и «тянущей» силы ветра (вода считается неподвижной):

$$\rho_в S_п v_2^2 \approx \rho_{воз} S_п v^2$$

(тут мы заранее предполагаем, что $v \gg v_2$). Отсюда

$$v \approx v_2\sqrt{\frac{\rho_в S_п}{\rho_{воз} S_п}}.$$

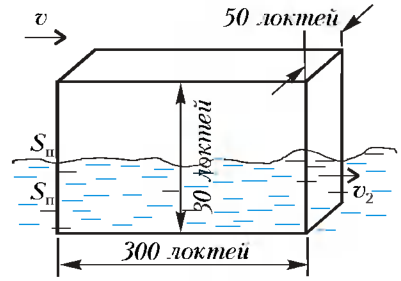



Рис. 3

Полагая $S_п = S_п$ (ковчег наполовину погружен в воду), получим

$$v \approx v_2\sqrt{\frac{10^3}{1}} \approx 30 v_2,$$

что при упомянутом выше значении $v_2 \approx 0{,}2$ м/с дает

$$v \approx 6\ м/с.$$

Нормальный ветер...

# Два кольца в одном магнитном поле

А.СТАСЕНКО

*– Неужели же колебание – принцип?*
*– Первый в жизни. Единственный, который тверд. Тот, которым цветет все и все – живет.*

В.Розанов.
Литературные и политические афоризмы

Известно, как Архимед при помощи ванны отличил серебряную вещь от золотой. А если отключили воду (или она замерзла в трубах), нет ли другого способа? Вот об этом и пойдет речь.

Жили-были два кольца одинаковой массы $m$ и одинакового радиуса $a$. По виду совсем одинаковые, но одно золотое, а другое серебряное. Одинспособныйджентльмен анодировал их да и позабыл, где какое. Тут и вода не помогла бы. Однако догадался он подвесить их на тонких упругих нитях, да еще в постоянном магнитном поле (рис. 1). Что они могли поделать? Ну конечно, только совершать крутильные колебания вокруг осей, совпадающих с нитями. И возникла надежда, что их свободные колебания будут затухать с

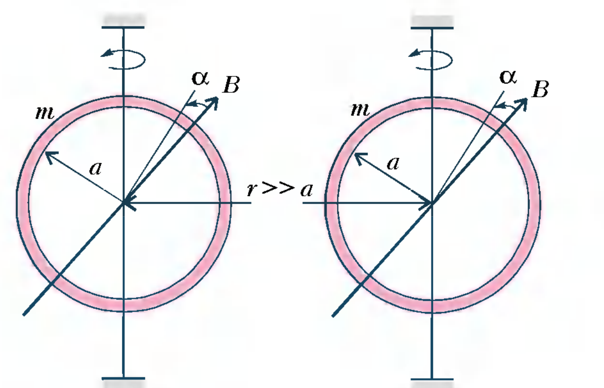



Рис. 1

разной скоростью и это легко будет заметить. Но – какое быстрее? И вообще, почему их колебания должны затухать?

Разумеется, если кольца находятся в воздухе, то будет действовать сопротивление воздуха; однако кольца можно поместить в вакуум или «пренебречь сопротивлением воздуха» по старой школьной привычке. Далее, крутильные деформации упругих нитей, конечно, будут сопровождаться выделением в них тепла («внутреннее трение»), т.е. потерями механической энергии колебаний. От этого не избавиться, но этим тоже можно пренебречь по сравнению с... чем? И вот тут на первый план выступают магнитное поле и закон Фарадея.

Как известно, при повороте замкнутого проводника в неподвижном магнитном поле и, следовательно, при изменении магнитного потока через поверхность, опирающуюся на этот проводник (или, как еще говорят, при изменении числа линий индукции магнитного поля, пронизывающих эту поверхность), в проводнике возникнет электродвижущая сила индукции. (То же самое произойдет, если проводник как-то растягивать или сжимать, т.е. менять площадь поверхности, или поворачивать само магнитное поле вокруг проводника – словом, если любым способом менять этот самый поток магнитной индукции.) Но если в проводнике возникла ЭДС $\mathcal{E}$, то потечет электрический ток и, значит, на его сопротивлении $R$ будет выделяться в единицу времени тепловая энергия $\mathcal{E}^2/R$. Будем считать, что это единственный сток энергии («сток» означает «отрицательный источник») – ну, хотя бы потому, что заданное поле достаточно сильное.

Конечно, мы знаем, что возникший ток породит свое магнитное поле (самоиндукция), которое будет препятствовать изменению потока первоначального поля (закон Ленца), но для простоты рассуждений будем считать, что коэффициент самоиндукции пренебрежимо мал.

У каждого кольца на нити есть положение равновесия, при котором нить не закручена. Чтобы «включить» колебания, закрутим нить на малый угол $\alpha_0$ $(\alpha_0 \ll \pi)$ и отпустим. Возникнут свободные затухающие колебания. Любая колебательная система характеризуется очень важным параметром – добротностью. Чем больше добротность, тем «лучше» колебания. Например, гармонические колебания (рис. 2,*а*; штриховая кривая), по определению, никогда не затухают – их добротность бесконечно велика. Амплитуда же затухающих колебаний за один период $T$ уменьшается на некоторую величину $\Delta\alpha_m$.

А что происходит с энергией колебаний? Ведь полная механическая энергия состоит из энергий двух сортов: потенциальной $\Pi$ и кинетической $K$. Рассмотрим сначала первую из них. Подобно тому как потенциальная энергия растянутой пружины равна $kx^2/2$ (где $x$ – растяжение, $k$ – жесткость), потенциальная энергия закрученной нити равна $\Pi = G\alpha^2/2$, где $G$ – крутильная жесткость. Ее ($\Pi$) изменение со временем показано на рисунке 2,*б*. Видно, что потенциальная энергия обращается в ноль, когда колебательная система – осциллятор (в данном случае кольцо на нитях) – проходит положение равновесия. Но в эти же моменты времени достигает наибольшей величины кинетическая энергия $K$. Можно показать, что для идеальных (гармонических) колебаний средние (за период) значения потенциальной и кинетической энергий строго одинаковы: $\langle\Pi\rangle = \langle K\rangle$, а их сумма $W = \langle\Pi\rangle + \langle K\rangle$ не изменяется со временем (а куда же ей деваться, если нет потерь?). Но в случае затухающих колебаний эта суммарная механическая энергия уменьшается за период на величину $\Delta W_T$. Теперь понятно, что «качество» колебаний, т.е. их добротность $Q$, разумно охарактеризовать отношением $W/\Delta W_T$ – чем меньше знаменатель (потери), тем «лучше» колебания, тем ближе они к прекрасным (но недостижимым) свободным гармоническим колебаниям. Или отношением характерного времени затухания, т.е. времени, за которое происходит уменьшение амплитуды колебаний $\alpha_m$, например, в 2, 10 или $e$ раз, к периоду колебаний.

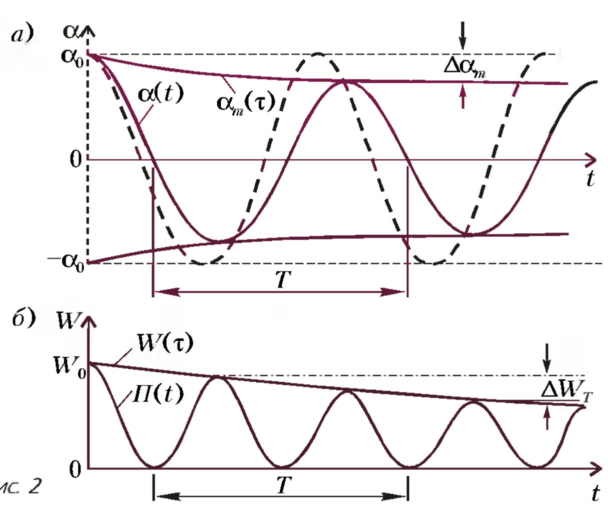



Рис. 2

Оценим это отношение для одного из колец. Пусть изменение угла поворота описывается уравнением

$$\alpha(t) = \alpha_m(\tau)\cos\omega t$$

(см. рис. 2,*а*). Заметим, что в этой записи указаны два времени: 1) «быстрое» время $t$, характерным масштабом которого является период $T$ – за этот отрезок времени происходят большие изменения угла в крайних его пределах, и 2) «медленное» время $\tau$, за которое амплитуда $\alpha_m$ изменяется на заметную величину и которое содержит много периодов колебаний. Значит, мы предполагаем, что колебания хотя и не идеальные, но «достаточно хорошие» – они медленно затухают и, значит, их добротность высока. А их суммарная энергия в любой момент времени равна

$$W = 2\langle\Pi\rangle = 2\frac{G\langle\alpha^2(t)\rangle}{2} = \frac{G\alpha_m^2(\tau)}{2}$$

(так как $\langle\cos^2\omega t\rangle = 1/2$).

Теперь найдем, наконец, изменение потока индукции магнитного поля через плоскость кольца. Сам поток равен

$$\Phi = BS\sin\alpha \approx BS\alpha = B\pi a^2\alpha_m(\tau)\cos\omega t$$

(напомним, что угол $\alpha$ предполагается малым, поэтому $\sin\alpha \approx \alpha$). Его изменение на масштабах времени порядка одного периода связано только с изменением косинуса (ведь $\alpha_m(\tau)$ «почти» постоянно на этом отрезке времени). Следовательно,

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\omega B\pi a^2\alpha_m(\tau)\sin\omega t\,.$$

Но это и есть ЭДС индукции $\mathcal{E}$. Значит, потери энергии за период составят

$$\Delta W_T = T\cdot\frac{\langle\mathcal{E}^2\rangle}{R} = \frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{\left(\omega B\pi a^2\right)^2\alpha_m^2(\tau)\cdot(1/2)}{2\pi a/(\lambda s)}.$$

Здесь учтено, что $T = 2\pi/\omega$, $\langle\sin^2\omega t\rangle = 1/2$, а сопротивление проводника длиной $2\pi a$ и поперечного сечения $s$ равно $R = 2\pi a/(\lambda s)$, где $\lambda$ – удельная электропроводность материала.

Итак, вот, наконец, желанная добротность колебаний:

$$\frac{W}{\Delta W_T} = \frac{G\alpha_m^2(\tau)}{2}\,\frac{\omega\cdot 2\pi a}{2\pi\left(\omega B\pi a^2\right)^2\alpha_m^2(\tau)(1/2)\lambda s}\,.$$

Видно, прежде всего, что это отношение не зависит от «амплитуды» колебаний $\alpha_m(\tau)$. Далее, если радиусы, массы и жесткости нитей подвеса одинаковы для обоих колец, то частóты их колебаний одинаковы; кроме того, магнитное поле одно и то же. Значит, добротности $Q$ будут отличаться только из-за различия удельных электропроводностей и площадей сечения проводников, поэтому можно записать

$$Q \sim \frac{W}{\Delta W_T} \sim \frac{1}{\lambda s}\,.$$

А поскольку массы и радиусы колец одинаковы, то их площади сечения обратно пропорциональны плотностям: $s \sim \rho^{-1}$, и

$$Q \sim \frac{\rho}{\lambda}\,.$$

И тут Одинспособныйджентльмен понял, что раз уж столько всего одинакового у обоих колец, то, закрыв глаза и подумав, можно было бы и без длительных рассуждений сообразить, что отношение добротностей обоих осцилляторов должно иметь вид

$$\frac{Q_{Ag}}{Q_{Au}} = \frac{\lambda_{Au}\rho_{Ag}}{\lambda_{Ag}\rho_{Au}} = \frac{\tau_{Ag}}{\tau_{Au}}.$$

Заглянув в справочник, он получил

$$\frac{\tau_{Ag}}{\tau_{Au}} = \frac{1,66\cdot 10,5}{2,42\cdot 19,3} \approx 0,4.$$

Значит, крутильные колебания серебряного кольца будут затухать заметно быстрее.

– Но, позвольте, – сказал Другойспособныйджентльмен, – ведь если у веществ этих колец различные удельные теплоемкости $c$, то при одинаковых массах они могут нагреться по-разному.

Действительно, если отклонить оба кольца на одинаковый угол $\alpha_0$ от положения равновесия, то в конце концов вся начальная энергия перейдет в тепло, так что отношение приращений температур колец будет равно

$$\frac{\Delta t^\circ_{Ag}}{\Delta t^\circ_{Au}} = \frac{c_{Au}}{c_{Ag}} = \frac{0,130}{0,235} \approx 0,5.$$

Останется только измерить или даже только почувствовать (хотя бы пальцем) различие температур – и проблема решена.

– Однако, позвольте, – сказал Третийспособныйджентльмен, – ведь если видимые геометрические параметры колец (радиусы, внешние диаметры сечений) одинаковы, то при одинаковых массах, но разных плотностях по крайней мере внутри одного из них должна быть полость; значит, их моменты инерции относительно оси вращения будут хоть чуть-чуть, да отличаться. Следовательно, и собственные частоты их колебаний при одной и той же крутильной жесткости нитей подвеса будут несколько отличаться, что будет рано или поздно замечено по различию фаз колебаний (например, когда одно из колец будет находиться в положении максимального отклонения, т.е. мгновенного покоя, другое будет проходить положение равновесия с максимальной скоростью).

– Позвольте, – начал было Очереднойспособныйджентльмен, но тут его перебил Первый. – А что такое «момент инерции относительно оси вращения»?

И ему посоветовали срочно поступать в Московский государственный университет или в Московский физико-технический институт.

# Следы в камере

**А.СТАСЕНКО**

*Если в небе пролетает реактивный самолет, то мы ясно видим тянущийся за ним след – облако кристалликов льда, хотя сам самолет не всегда можно разглядеть... Отдельная элементарная частица в десятки миллиардов раз меньше предмета, который можно разглядеть в микроскоп. И тем не менее, пролетая с огромной скоростью через камеру Вильсона или более современный прибор – пузырьковую камеру, такая частица оставляет след, видимый невооруженным глазом.*

К.Форд.
Мир элементарных частиц

Камера Вильсона была изобретена порядка сотни лет назад и в течение многих десятилетий служила удобным и информативным прибором экспериментальной ядерной физики.

Идея ее работы проста. Как известно, если парциальное давление $p$ водяного пара в атмосфере превышает его давление насыщения $p_н$ при данной температуре – отношение $S = p/p_н > 1$ назовем пересыщением, – то может образоваться туман, выпасть роса... Для самопроизвольной (спонтанной) конденсации пара в чистом воздухе нужны большие значения пересыщения, а именно $S \sim 10$. Но если в воздухе присутствуют посторонние частицы, могущие служить ядрами конденсации, образование микрокапелек может начаться при меньших $S$. Вот такими ядрами конденсации и могут быть ионы, образующиеся на пути элементарной частицы. Значит, можно подобрать такое пересыщение пара, которое еще недостаточно для его спонтанной конденсации, но вполне достаточно для появления микрокапелек на ионах, отмечающих траекторию элементарной частицы.

Но как же устроена камера Вильсона?

Самый простой (для изготовления) тип камеры Вильсона, который часто применялся еще полвека назад, приведен на рисунке 1. Стеклянный цилиндр $Ц$ (диаметром 10–30 см) сверху закрыт толстой стеклянной пластинкой, а снизу имеет зачерненную проволочную сетку $C$, припаянную к латунному кольцу. Резиновая мембрана $M$ в нерабочем состоянии горизонтальна. При подаче через отверстие $O^+$ сжатого воздуха эта мембрана, растягиваясь, поднимается кверху. Чтобы газ в камере был насыщен паром, в нее вводят несколько кубических сантиметров воды. Если внезапно открыть вентиль $B$, то мембрана снова возвратится в начальное горизонтальное положение, смесь воздуха и пара в камере окажется охлажденной, а пар – пересыщенным, и камера будет готова к регистрации пролетающей элементарной частицы. Понятно, что стеклянные стенки нужны для фотографирования следа (трека) частицы, т.е. тех микрокапелек, которые образовались на ионах, а зачерненная сетка нужна для того, чтобы этот след был резче виден на темном фоне. Отверстие $O^-$ обеспечивает, в случае необходимости, выравнивание давлений в камере и в атмосфере.

Опыт показал, что наилучшее отношение объемов камеры после и до расширения составляет примерно $4/3$ (для смеси воздуха с водяным паром).

А сколько капелек образуется при полном торможении исследуемой частицы? Например, вдоль трека $\alpha$-частицы образуется несколько сот тысяч капелек тумана. А $\beta$-частицы создают значительно более тонкие прерывистые следы, в которых на один сантиметр длины приходится всего около 50 ионов. Дело в том, что тяжелая $\alpha$-частица (ее масса приблизительно в $4\times 1850$ раз больше массы электрона),

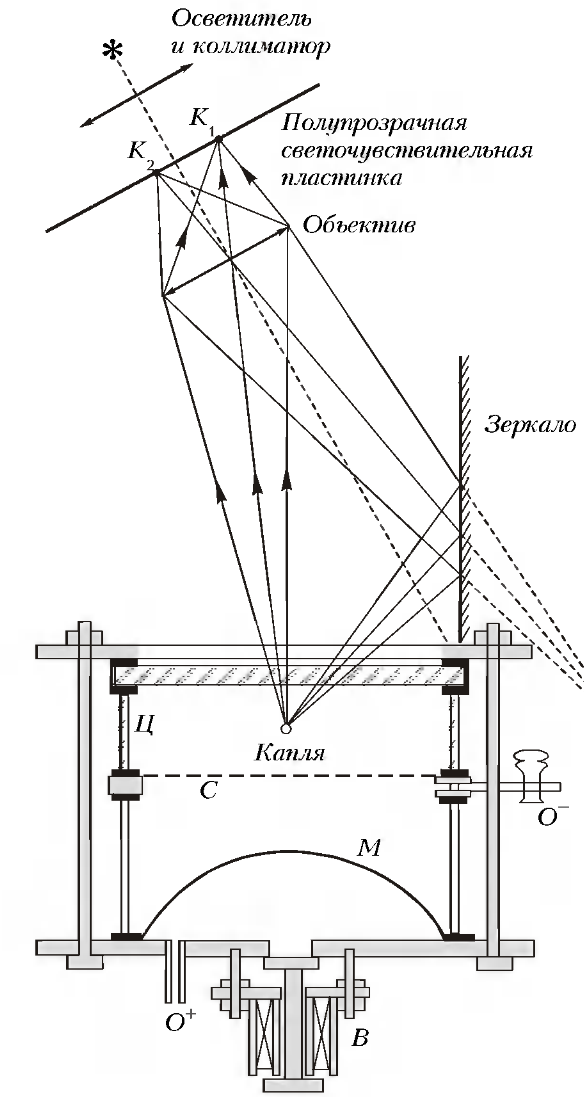



Рис. 1

несущая положительный заряд, уверенно пронизывает электронные оболочки атомов, разрушая их. А $\beta$-частицы, сами будучи электронами, более нежно взаимодействуют с отрицательно заряженными электронными облаками атомов.

Итак, осталось успеть сфотографировать конденсационный след элементарной частицы. Один из удобных способов фоторегистрации трека проиллюстрирован на рисунке 1. В этом случае фотографируют прямое $K_1$ и отраженное $K_2$ изображения некоторой капли ($K$) следа на одной и той же светочувствительной поверхности. Такой способ позволяет получить стереоскопическое изображение следа и определить его положение в пространстве. Это важно, поскольку следы не обязательно горизонтальные и прямые. Например, их можно специально искривить, поместив камеру Вильсона в магнитное поле, – тогда частицы, несущие различные электрические заряды, по-разному отклонятся под действием силы Лоренца.

Одна из множества интересных проблем, связанных с камерой Вильсона, касается ее быстродействия. Как скоро после регистрации одной серии следов можно проводить следующий опыт? Давайте сделаем оценку времени, за которое капельки, несущие заряды разного знака, встретятся друг с другом и рекомбинируют.

Вообще говоря, молекуле воды не безразличен знак того иона, на котором она собирается конденсироваться. Уже сам Вильсон заметил, что она предпочитает отрицательные ионы. Этот факт объясняется тем обстоятельством, что электрическое поле молекулы воды очень сложное: оно определяется не только дипольным моментом, но и квадрупольным (квадруполь можно вообразить как два диполя, параллельных друг другу, но противоположно направленных). В результате минимум потенциальной энергии даже для электронейтральной капли воды соответствует состоянию, при котором отрицательные «хвосты» молекул торчат наружу, а положительные – внутрь. Вот почему молекулы воды предпочитают, чтобы в центре капли находился отрицательный ион. Значит, размеры положительно и отрицательно заряженных микрокапель в треке элементарной частицы должны быть, вообще говоря, различны. Но мы в дальнейших оценках пренебрежем этим фактом и будем для простоты рассуждений считать все микрокапли одинаковыми, причем не изменяющимися со временем.

Оценим прежде всего силу сопротивления, которую испытывает капелька, движущаяся в газообразной среде. Конечно, в камере Вильсона находится смесь газов – например, воздуха и паров воды. Для оценки положим, что паров воды пренебрежимо мало, так что капелька движется в почти чистом воздухе, масса молекул которого равна

$$m = \frac{\mathrm{M}}{N_\mathrm{A}},$$

где $\mathrm{M} = 29$ кг/кмоль – молярная масса воздуха, $N_\mathrm{A} = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро. Как известно, молекулы воздуха сталкиваются друг с другом в среднем на расстояниях порядка $10^{-7}$ м (средняя длина свободного пробега молекулы). Поэтому для всех капелек, размеры которых меньше этой величины, воздух не является сплошной средой: они «чувствуют» удары отдельных молекул. Учтем это обстоятельство.

Для простоты заменим шаровую каплю радиусом $a$ кубиком с тем же поперечным сечением $s = \pi a^2$. И пусть кубик движется параллельно своим ребрам со скоростью $u$, много меньшей средней скорости теплового движения молекул $v$ (рис. 2).

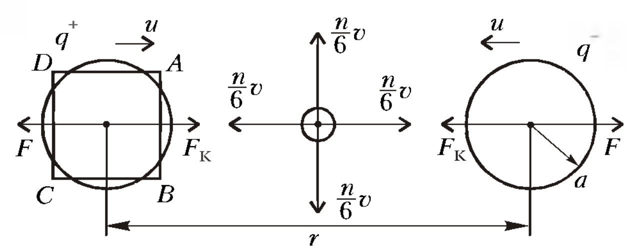



Рис. 2

А что понимать под $v$? Пусть это будет средняя квадратичная скорость, определяющая среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул воздуха:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT, \text{ и } v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mathrm{M}}},$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, а $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная.

Ясно, что на переднюю грань кубика $AB$ в единицу времени налетает число молекул, равное $\frac{n}{6}(v+u)s$ (число «6» в знаменателе символизирует гипотезу о том, что в изотропном газе молекулы летят равновероятно по шести направлениям). Скорость каждой молекулы перед ударом об эту грань кубика равна $-(v+u)$. Если предположить, что удар абсолютно упругий, то молекула отскочит обратно с той же (по

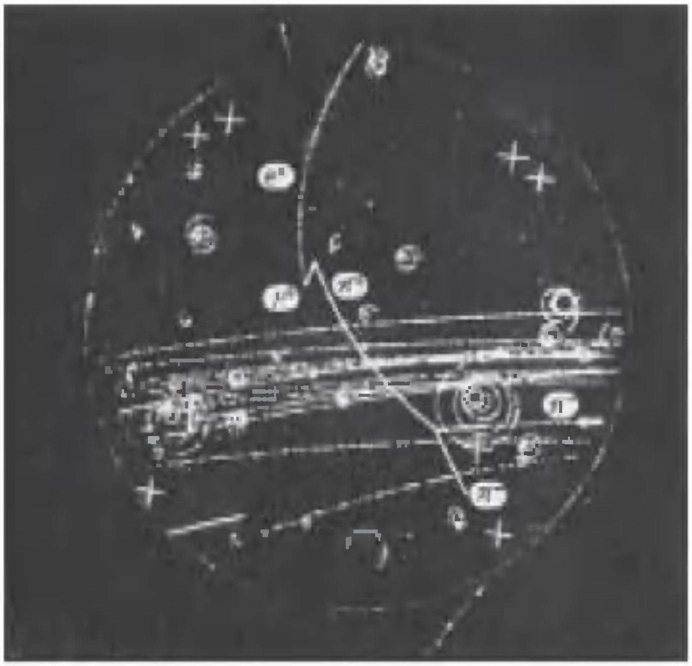


Рис. 3

модулю) скоростью $v+u$ в системе координат самого кубика. А в неподвижной системе координат скорость налетающей молекулы, естественно, равна $-(v+u)+u=-v$, а отраженной $(v+u)+u=v+2u$, так что изменение импульса одной молекулы составит $m((v+2u)-(-v))=2m(v+u)$. Значит, сам кубик в единицу времени будет получать от этих молекул тормозящий импульс, равный

$$-\frac{n}{6}(v+u)s\cdot 2m(v+u).$$

Аналогичные рассуждения для грани $CD$ дадут импульс

$$\frac{n}{6}(v-u)s\cdot 2m(v-u).$$

Таким образом, суммарное изменение импульса кубика в единицу времени, т.е. действующая на него тормозящая сила, составит

$$F=\frac{1}{3}\pi a^2 mn\left((v-u)^2-(v+u)^2\right)=-\frac{4}{3}\pi a^2\rho vu$$

(здесь учтено, что $mn=\rho$). Точное значение силы сопротивления получится при интегрировании по поверхности сферической частицы потоков молекул с учетом их разброса по скоростям. Оно равно

$$F_т=-\pi a^2\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\rho\left(1+\frac{\pi}{8}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}\,vu.$$

Отношение этих сил составляет

$$\frac{F}{F_т}=\frac{\sqrt{3\pi/8}}{1+\pi/8}=0,78.$$

Не так уж и намного наш результат отличается от точного. Собственно, эти две формулы и отличают грамотного школьника от грамотного студента первого курса Московского физико-технического института.

Пусть теперь две одинаковые капельки, имеющие одинаковые по модулю электрические заряды $q$, находятся на расстоянии $r$ (см. рис.2) и притягиваются друг к другу с кулоновской силой, равной

$$F_К=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Давайте рассмотрим так называемое квазистатическое движение, когда скорость капельки хотя и меняется, но в каждый момент времени сила кулоновского притяжения $F_К$ уравновешивается силой сопротивления $F$ воздуха. Таким образом, для каждой капельки можно записать

$$\frac{4}{3}\pi\rho a^2 vu=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Поскольку $r$ – расстояние между капельками, скорость каждой из них равна

$$u=\frac{1}{2}\frac{dr}{dt}.$$

Итак, получаем простенькое дифференциальное уравнение

$$r^2dr=\frac{6q^2}{4\pi\cdot 4\pi\varepsilon_0\rho a^2 v}dt.$$

Проинтегрируем его, учитывая граничные условия: при $t=0$ расстояние между каплями $r=r_0$, а в некоторый момент времени $\tau$ капли окажутся уже так близко друг к другу, что расстояние $r$ можно считать пренебрежимо малым по сравнению с $r_0$ – ну, почти нулевым (для упрощения оценок). Получим

$$\tau=\frac{4}{3}\pi\frac{r_0^3\cdot 4\pi\varepsilon_0\rho a^2 v}{6q^2}.$$

Теперь перейдем к численным оценкам. Пусть каждая из капелек несет единичный элементарный заряд $q=e=1,6\cdot 10^{-19}$ Кл, температура смеси $T=260$ К и ее плотность $\rho=0,9$ кг/м$^3$, а $r_0$ соответствует плотности следа 50 ионов/см (след $\beta$-частицы), т.е. $r_0=2\cdot 10^{-4}$ м. И конечно, все знают, что $1/(4\pi\varepsilon_0)=9\cdot 10^9$ Н·м$^2$/Кл$^2$. Тогда

$$\tau=\frac{4}{3}\pi\frac{\left(2\cdot 10^{-4}\right)^3\cdot 0,9\cdot\sqrt{3\cdot 8,31\cdot 260/\left(29\cdot 10^{-3}\right)}}{6\cdot\left(1,6\cdot 10^{-19}\right)^2\cdot 9\cdot 10^9}a^2\approx$$

$$\approx 10^{19}a^2\ \left(\text{с/м}^2\right).$$

Следовательно, для размеров капелек $a\sim 10^{-9}$ м (если такие объекты можно считать капельками) рекомбинация происходит приблизительно за 10 секунд, а для капелек с $a=10^{-8}$ м – уже за 1000 секунд. Конечно, капли будут расти со временем за счет конденсации пара, диффундирующего к ним из отдаленных уголков камеры, так что это время еще увеличится. Впрочем, можно ведь не ждать, пока капельки сами рекомбинируют или осядут на дно камеры под действием силы тяжести, а догадаться включить электрическое поле, которое растащит их в разные стороны.

Понятно, что с увеличением плотности смеси газов в камере заряженная частица на единице длины своей траектории будет встречать все больше молекул, ее след будет все короче,что позволит регистрировать все более энергичные частицы в том же объеме камеры. Поэтому имеются камеры с давлением до сотен атмосфер.

За десятки лет при помощи камеры Вильсона были получены многие миллионы фотографий, позволившие глубоко изучить физику ядерных процессов. В настоящее время в экспериментальной ядерной физике стали применять другие, более быстродействующие приборы – пузырьковые и стриммерные камеры, диффузионные камеры постоянного действия. (Фотография на рисунке 3 сделана в жидководородной пузырьковой камере.)

# Прогулка до теоремы Чебышёва

В.УФНАРОВСКИЙ

*Не так уж и трудно задачи решать:*
*Проблема дает вдохновенье.*
*Искусство же в том, чтоб суметь отыскать*
*Задачу, когда есть решенье.*

П. Хэйн. Груки

Есть особая прелесть в прогулках «куда глаза глядят»: идешь, сам не зная куда, и вдруг встречаешь что-то совсем неожиданное, чего и в голову не могло прийти, когда начинал прогулку. Давайте и мы прогуляемся по одной хитрой математической тропинке.

Мы начнем ее с признака делимости на 9: *число $n$ делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.* Можно даже более внушительно: *если от числа $n$ отнять его сумму цифр, которую мы обозначим $\sigma(n)$, то результат всегда будет делиться на 9.*

А теперь присядем и поговорим об обозначениях. От их выбора, как ни странно, зависит очень и очень многое, поэтому в обозначениях математики всегда достаточно консервативны. Например, обозначение $n$ любому математику скажет, что речь идет о целых, скорее всего, натуральных числах (кстати, а какое $n$ у нас?). Неспроста мы выбрали и обозначение $\sigma$ — как-никак это маленькая буква «сигма», а большая $\Sigma$ издревле используется для обозначения сумм. У нас сумма маленькая, так что и букву возьмем маленькую.

Посмотрим на обозначения еще с одной стороны. Вы, конечно, знаете, арабы пишут не так, как мы — слева направо, а наоборот, справа налево. Но задумывались ли вы о том, что сами-то мы с числами обращаемся по-арабски — справа налево. Ну да, не поверите вы, ведь числа мы пишем слева направо. Это да. А складываете вы как? С какой цифры начинаете, с первой или с последней? А умножаете? Попробуйте наоборот! Это неудивительно, цифры и обозначения у нас, как известно, арабские. В действительности удобнее было бы писать и цифры справа налево, но что поделаешь: привычка — вторая натура.

Чтобы обойти привычку, будем записывать число в другой форме — не через цифры, а через разложение в степени десятки; скажем, не 234, а $4+3\cdot 10+2\cdot 100$. Против этого наша привычка не восстает, поэтому запишем и наше число $n$ в таком виде:

$$n = a_0 + a_1\cdot 10 + a_2\cdot 10^2 + \ldots + a_k\cdot 10^k,$$

где $a_0$ — последняя цифра, $a_1$ — предпоследняя, ..., $a_k$ — первая, так что всего цифр $k+1$, а их сумма равна

$$\sigma(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Ну а теперь ничего не стоит доказать наше утверждение:

$$n-\sigma(n) = (a_0 - a_0) + a_1(10-1) + a_2(10^2-1) + \ldots + a_k(10^k-1) = 0 + 9a_1 + 99a_2 + \ldots + 99\ldots 9a_k,$$

что, конечно же, делится на 9 (кстати, сколько девяток в последней записи?).

Налюбовавшись результатами своего труда, продолжим прогулку. Что еще можно получить так же просто, не особенно напрягаясь? Можно менять одно из трех: задачу, доказательство, обозначения. Доказательство менять не хочется. Можем ли мы поменять задачу? Да, нетрудно придумать и доказать признак делимости на 11 — только сумму нужно брать знакочередующуюся $(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots)$. Если копнуть глубже, то получится что-то вроде универсального признака делимости (докажите его в качестве упражнения):

*Пусть $m$ — натуральное число и $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — остатки чисел 10, $10^2, \ldots, 10^k$ при делении на $m$. Тогда число $n-(a_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_kp_k)$ делится на $m$.*

При $m = 9$ получаем уже доказанный ранее результат. (А как насчет 11?) Для $m = 7$ получаем последовательность $\{p_i\}$: 3, 2, 6; 4, 5, 1, 3, 2 и т. д. Поэтому, например, остаток от 1992 при делении на 7 равен остатку $2+9\cdot 3+9\cdot 2+1\cdot 6=53$, что в свою очередь равно остатку $3+5\cdot 3=18$, что в свою очередь... Пожалуй, можно остановиться и сказать, что это 4. Не слишком интересно...

Пойдем в другую сторону — попробуем поменять обозначения. Как еще можно обозначить наше число $n$? Тот, кто хоть немного знаком с программированием, сразу скажет — надо использовать другую систему счисления, например двоичную:

$$n = b_0 + b_1\cdot 2 + b_2\cdot 2^2 + \ldots + b_m\cdot 2^m,$$

где $b_i$ — это нули и единицы. (Например, $25 = 1 + 0\cdot 2 + 0\cdot 4 + 1\cdot 8 + 1\cdot 16$.) Тут тоже своя сумма цифр: $\sigma_2(n) = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$ (Цифра 2, конечно же, намекает на основание системы счисления, так что наша $\sigma$ — это $\sigma_{10}$.)

Соответствующая теорема звучит так: $n-\sigma_2(n)$ делится на... А в самом деле, на что? В десятичной системе делилось на $9 = 10 - 1$, значит, здесь должно делиться на $2 - 1 = 1$. Факт верный, но малоценный. А может, попробовать в общем случае, в $p$-ичной системе счисления, где $p$ — произвольное

*Опубликовано в «Кванте» №6 за 1992 год.*

основание? Запишем

$$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_k p^k \quad (\text{где } a_i < p)$$

и обозначим

$$\sigma_p(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k,$$

получается красивая

**Теорема 1.** *$n - \sigma_p(n)$ делится на $(p-1)$.*

Докажем. Это очень просто — рассуждение не меняется: разность

$$n - \sigma_p(n) = (a_0 - a_0) + a_1(p-1) + a_2(p^2-1) + \ldots + a_k(p^k-1),$$

разумеется, делится на $(p-1)$.

Например, в восьмеричной системе счисления число, записанное как 124, делится на 7. Проверим?

$$4 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 64 = 84$$

— действительно, на 7 делится. Вот вам и новый признак делимости на 7. Жаль только, что к восьмеричной системе счисления мы не больно-то привычные.

Куда бы дальше пойти? Что бы еще извлечь из делимости? А что если... действительно поделить? В самом деле, вполне достойный вопрос: чему равно частное от деления

$$\delta_p(n) = \frac{n - \sigma_p(n)}{p-1}\ ?$$

Интересно... Начнем хотя бы с $p = 2$, там хоть делить не надо. Составим для начала табличку:

| $n$ | $n_2$ | $\sigma_2(n)$ | $\delta_2(n) = n - \sigma_2(n)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 10 | 1 | 1 |
| 3 | 11 | 2 | 1 |
| 4 | 100 | 1 | 3 |
| 5 | 101 | 2 | 3 |
| 6 | 110 | 2 | 4 |
| 7 | 111 | 3 | 4 |
| 8 | 1000 | 1 | 7 |
| 9 | 1001 | 2 | 7 |
| 10 | 1010 | 2 | 8 |
| 11 | 1011 | 3 | 8 |
| 12 | 1100 | 2 | 10 |

Что мы видим? При переходе от четного $n$ к нечетному число $\delta_2(n)$ не меняется, на четном — меняется. А на сколько? Ага, как раз на столько, сколько нулей в конце двоичной записи числа $n$. А число это, как известно, есть максимальная степень двойки, на которую делится $n$. Например, $n = 12$ делится на $4 = 2^2$, и шагнули мы на 2 — от 8 до 10. Значит, мы можем сказать, что $\delta_2(n)$ как бы считает, сколько степеней двойки есть в числах 1, 2,..., $n$ или, лучше сказать, в произведении $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, которое обозначается обычно $n!$ и называется *факториалом числа n*. Итак, вроде бы верен следующий факт: *$\delta_2(n) = n - \sigma_2(n)$ есть максимальная степень двойки, на которую делится число n!.* Докажем?

В бой, ясное дело, просится индукция. Для малых $n$ все видно из таблицы. Давайте осуществим индукционный переход. Допустим, что для $(n-1)$ мы нужный результат уже получили: $(n-1) - \sigma_2(n-1)$ есть максимальная степень двойки, на которую делится число $(n-1)!$. Докажем для $n$. Число $n!$ отличается от $(n-1)!$ только тем, что оно в $n$ раз больше. Значит, появится ровно столько новых степеней двойки, сколько их есть в числе $n$, а это как раз число нулей в конце двоичной записи числа $n$. А как насчет $n - \sigma_2(n)$ по сравнению с $(n-1) - \sigma_2(n-1)$? Само $n$ по сравнению с $n-1$ увеличилось на 1. А как изменится $\sigma_2(n)$ по сравнению с $\sigma_2(n-1)$? Допустим, что в конце двоичной записи числа $n$ стоит $k$ нулей: ...1000...0. Тогда $n-1$ имеет вид ...0111...1 с $k$ единицами на конце (разве что ноль может и отсутствовать). Значит, единиц стало на $k-1$ меньше, а общее изменение равно $1-(-(k-1))$, что как раз равняется $k$, и тем самым индукционный переход оказывается верным.

Куда дальше? Ну, конечно, интересно, верно ли это в общем случае, т.е. правда ли, что

$$\delta_p(n) = \frac{n - \sigma_p(n)}{p-1}$$

есть максимальная степень $p$, делящая $n!$.

**Упражнение 1.** Докажите это для $p = 3$.

Увы, при $p = 4$ нас ждет разочарование. Число 6! делится на $4^2$, но $\delta_4(6) = (6-3)/3 = 1 \neq 2$. Причину мы откроем очень быстро — необходимо, чтобы $p$ было простым.

**Упражнение 2.** Докажите справедливость утверждения для любого простого $p$.

К счастью, для решения вопросов о делимости кроме простых чисел нам больше ничего и не нужно. Но что нам делать с факториалами, куда приспособить только что полученные знания? Конечно же, в первую очередь, для биномиальных коэффициентов $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. Главная формула, с которой они связаны, — это бином Ньютона:

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n.$$

Для большей симметрии используем такое обозначение:

$$C_{m+n}^n = \frac{(m+n)!}{n!\,m!}.$$

Теперь, благодаря полученным знаниям, мы способны определить, на какую степень простого числа $p$ делится данный биномиальный коэффициент. Она в точности равна

$$\frac{(m+n) - \sigma_p(m+n) - (n - \sigma_p(n)) - (m - \sigma_p(m))}{p-1} =$$

$$= \frac{\sigma_p(m) + \sigma_p(n) - \sigma_p(m+n)}{p-1}.$$

Красиво! Например, если $\sigma_p(m+n) = \sigma_p(m) + \sigma_p(n)$, то $C_{m+n}^n$ на $p$ не делится, и наоборот. Любопытно, а когда такое бывает? Ну хотя бы тогда, когда при сложении в $p$-ичной системе счисления чисел $m$ и $n$ переносов из разряда в разряд не происходит. Скажем, если сложить числа, записанные в семеричной системе счисления как 23 и 32, то получим 55 без переносов. Вывод: так как $3 + 2 \cdot 7 = 17$, $2 + 3 \cdot 7 = 23$, то $C_{40}^{17}$ на 7 не делится.

А если перенос есть? Допустим, в каком-то $i$-м разряде. Скажем, у $m$ было число $r < p$, у $n$ — число $s < p$, а их сумма $r + s$ оказалась больше $p$. Тогда в следующий разряд перейдет 1, а в этом — вместо $r + s$ будет записано $r + s - p$. Тем самым в числе $m + n$ сумма цифр за счет $i$-го разряда будет на $p - 1$ меньше, чем $\sigma_p(m) + \sigma_p(n)$. Да, как забавно — как раз на $p - 1$ мы и делим. Так ведь это замечательно! Как мы сразу не догадались — верна следующая

**Теорема 2.** *Если p — простое число, то максимальная степень p, делящая $C_{m+n}^{n}$, равна количеству переносов при сложении чисел m и n в p-ичной системе счисления.*

Вот до какой теоремы мы добрели! Что бы извлечь из такого неочевидного факта? Глаза разбегаются. Ну давайте, простоты ради, начнем с изучения $C_{2n}^{n}$ — самого большого биномиального коэффициента среди всех, входящих в разложение бинома $(x+y)^{2n}$. (Кстати, а можете ли вы доказать, что он и впрямь самый большой?) Максимальная степень $p$, на которую он делится, равна количеству переносов, получающихся при сложении $n$ с самим собой в $p$-ичной системе счисления. Допустим, что $n < p < 2n$.

Тогда $n$ в $p$-ичной системе записывается одной $p$-ичной «цифрой» (собственно $n$), а $2n$ — двумя; скажем, $2n = r + 1 \cdot p$. Это значит, что происходит ровно один перенос и, следовательно, $p$ входит в $C_{2n}^{n}$ ровно один раз. Таким образом, произведение всех простых чисел, заключенных между $n$ и $2n$, не превосходит $C_{2n}^{n}$. Нельзя ли получить что-то попривлекательнее? Оценим $C_{2n}^{n}$ грубо.

Если положить в биноме Ньютона $x = y = 1$, то получится, что

$$1 + C_{2n}^{1} + C_{2n}^{2} + \ldots + C_{2n}^{n} + \ldots + C_{2n}^{2n-1} + 1 = 2^{2n},$$

откуда

$$C_{2n}^{n} < 4^{n}.$$

Точно таким же образом произведение всех простых чисел между $n/2$ и $n$ меньше $4^{n/2}$, между $n/4$ и $n/2$ — меньше $4^{n/4}$ и т.д. Тогда произведение всех простых чисел между 1 и $n$ меньше

$$4^{n/2} \cdot 4^{n/4} \cdot 4^{n/8} \cdot \ldots = 4^{n/2+n/4+n/8+\ldots} < 4^{n}.$$

В итоге мы бесплатно получили совсем неочевидный факт:

**Теорема 3.** *Произведение всех простых чисел, меньших n, не превосходит $4^{n}$.*

**Упражнение 3.** Докажите это строго: мы слишком небрежно делили пополам, «забыв», что бывают и нечетные числа. (Возможно, что лучший способ строгого подхода — индукция.)

Пусть теперь $p \le n$. Тогда в разложении $n$ по крайней мере две $p$-ичные цифры. Если в разложении $2n$ их ровно две, то $2n < p^{2}$, и заведомо происходит не более одного переноса. Следовательно, верна

**Лемма 1.** *Если $p > \sqrt{2n}$, то максимальная степень p, делящая $C_{2n}^{n}$, не превосходит 1.*

Интересно, а когда делимости нет вообще? Так как $2n < p^{2}$, то $n = a_0 + a_1 p$, где $a_0 < p$, $a_1 < p/2$. Чтобы не было переносов, должно быть $a_0 < p/2$. В частности, при $a_1 = 1$ получаем, что если $a_0 = n - p < p/2$, то $p$ не является делителем $C_{2n}^{n}$. Отсюда следует

**Лемма 2.** *Если $n \ge p > 2n/3$, то p не является делителем $C_{2n}^{n}$ $(n > 2)$.*

Доказательство: $n < p + p/2 = 3p/2$, откуда $p > 2n/3$.

Прикинем теперь, что происходит при малых значениях $p \le \sqrt{2n}$. Там переносов уже может быть несколько, но во всяком случае не больше чем $k$, если $2n = a_0 + a_1 p + a_2 p^{2} + \ldots + a_k p^{k}$. Так как $2n \ge p^{k}$, то $\log_p 2n \ge k$, и мы можем сказать, что максимальная степень $p$, делящая $C_{2n}^{n}$, не превосходит $\log_p 2n$. Значит, для произвольного $p$ справедлива

**Лемма 3.** *Пусть $N = p^{m}$ является делителем $C_{2n}^{n}$. Тогда $N \le 2n$.*

Доказательство: $p^{m} \le p^{\log_p 2n} = 2n$.

Ну вот, теперь мы более или менее представляем структуру числа $C_{2n}^{n}$. Его разложение на степени простых чисел состоит из трех типов сомножителей:

1) Простые числа, большие $n$ (и, естественно, меньшие $2n$), — каждое по одному разу.

2) Простые числа, меньшие $2n/3$, но большие $\sqrt{2n}$, — каждое не более одного раза.

3) Простые числа, меньшие $\sqrt{2n}$. Тут возможна делимость на $p^{k}$ с $k > 1$, но все равно полный вклад $p^{k}$ каждого такого простого числа не превосходит $2n$.

Интересно, а может ли быть так, что первая группа отсутствует, т.е. между $n$ и $2n$ нет простых чисел? Тогда все сосредоточено во второй и третьей группах. Можем ли мы оценить их реальный вклад? Произведение всех чисел второй группы, по теореме 3, не превосходит $4^{2n/3}$. Простых чисел в третьей группе заведомо меньше чем $\sqrt{2n} - 1$, так что их общий вклад, по лемме 3, не превосходит $(2n)^{\sqrt{2n}-1}$. В итоге: если между $n$ и $2n$ нет простых чисел, то справедливо неравенство

$$C_{2n}^{n} < 4^{2n/3} \cdot (2n)^{\sqrt{2n}-1}. \qquad (*)$$

Какая мысль! Ведь если мы докажем, что это неравенство ложно, то одновременно докажем знаменитый постулат Бертрана: между $n$ и $2n$ всегда имеется хотя бы одно простое число. Попробуем оценить $C_{2n}^{n}$. Коль скоро это самый большой из биномиальных коэффициентов, входящих в бином $(1+1)^{2n}$, и так как их всего там $2n+1 < 4n$, то заведомо $C_{2n}^{n} > \frac{4^{n}}{4n}$. Из полученных неравенств следует, что

$$\frac{4^{n}}{4n} < 4^{2n/3} \cdot (2n)^{\sqrt{2n}-1}, \quad 4^{n/3} < 2 \cdot (2n)^{\sqrt{2n}},$$

$$\frac{n}{3} < \sqrt{2n}\log_4 2n + \frac{1}{2}, \quad \sqrt{n} < \sqrt{18}\log_4 2n + \frac{1}{2}.$$

Но хорошо известно, что логарифм — функция медленная, и $\sqrt{n}$ ее обгонит. Осталось понять, когда. Прикинем, что будет при $n = 1000$. Заведомо, $\sqrt{1000} > 30$, $\log_4 2000 < \log_4 4096 = \log_4 4^{6} = 6$, т.е. $30 < \sqrt{18} \cdot 6 + \frac{1}{2}$, что неверно. Значит, при $n = 1000$ и (как вы, надеемся, легко с помощью производной докажете) для $n > 1000$ неравенство $(*)$ — ложное. Следовательно, для этих значений $n$ справедлива

**Теорема Чебышёва (постулат Бертрана).** *Между n и 2n всегда имеется хотя бы одно простое число.*

Хорошо, а что делать с маленьким $n$? Там же, вроде бы, неравенство верно. Ну и бог с ним — постулат-то Бертрана тоже верен, и в этом легко убедиться, попросту просмотрев таблицу простых чисел или написав махонькую программку. Если хотите, можно и иначе — проявив больше щепетильности к оценкам, получить более точное неравенство (см., например, книгу В.Серпинского «250 задач по элементарной теории чисел»). Это уж дело вкуса.

Но, пожалуй, наша прогулка затянулась. Пора и отдохнуть, а если вы еще захотите прогуляться — для затравки несколько задачек.

**1.** Докажите, что для простого $p$ и любых целых $x$, $y$ число $(x+y)^{p} - x^{p} - y^{p}$ делится на $p$.

**2.** Обобщите предыдущую задачу на случай нескольких слагаемых и выведите отсюда малую теорему Ферма: $x^{p} - x$ делится на $p$.

**3.** Докажите, что если $N = p^{m}$, где $p$ простое, делит биномиальный коэффициент $C_{n}^{i}$, то $N \le n$.

**4.** Докажите, что есть два простых числа между $n$ и $2n$ для $n > 5$.

**5.** Докажите, что если $p_k$ есть $k$-е по счету простое число, то $p_{k+2} < 2p_k$.

**6.** Докажите, что $n!$ не является степенью никакого числа при любом $n > 1$.

# Потенциал электростатического поля

В.МОЖАЕВ

Силовой характеристикой электрического поля является вектор напряженности $\vec{E}$ электрического поля. Напряженность равна отношению силы, с которой поле действует на пробный точечный заряд, к величине этого заряда. Как видно из определения, напряженность поля не зависит от величины пробного заряда (лишь бы он не изменял исследуемое поле) и поэтому является характеристикой именно поля.

Помимо силовой характеристики поля $\vec{E}$ вводят еще энергетическую характеристику – потенциал поля $\varphi$. В отличие от напряженности, потенциал является скалярной величиной и равен отношению потенциальной энергии взаимодействия пробного точечного заряда с полем к величине этого заряда. Потенциальная энергия заряда, помещенного во внешнее электрическое поле, численно равна работе, которую необходимо совершить, чтобы переместить этот заряд от выбранного нулевого уровня в данную точку поля. Значение потенциальной энергии, а следовательно и потенциала в данной точке, зависит от выбора нулевого уровня отсчета. Физический смысл имеет не сам потенциал в точке, а его изменение в пространстве (разность потенциалов), которое не зависит от выбора нулевого уровня.

На практике электростатическое поле можно охарактеризовать только одной функцией – например, электростатическим потенциалом, поскольку напряженность электростатического поля однозначно связана с потенциалом. Так, в случае сферически симметричного поля, когда напряженность поля зависит только от расстояния $r$, эта связь имеет вид

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr},$$

где производная $\frac{d\varphi}{dr}$ выражает быстроту приращения потенциала в данном направлении. Аналогичные соотношения можно записать для проекций вектора напряженности в декартовой системе координат:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx},\ E_y = -\frac{d\varphi}{dy},\ E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$$

(при дифференцировании по одной координате две остальные надо считать постоянными).

Теперь перейдем к разбору конкретных примеров расчета потенциала электростатического поля с известным распределением напряженности поля или наоборот – расчета $\vec{E}$ по известному распределению $\varphi$.

**Задача 1.** *Заряженная проводящая сфера радиусом $R_1$ окружена сферическим слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$ и внешним радиусом $R_2$ (рис.1). Найдите распределение потенциала $\varphi(r)$ во всем пространстве и нарисуйте соответствующий график, если заряд сферы равен $Q$.*

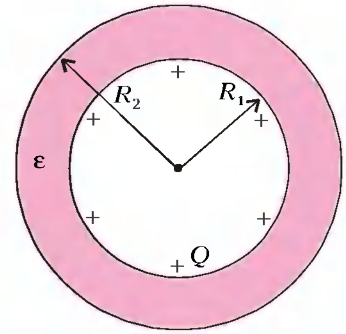



*Рис. 1*

Сначала найдем распределение напряженности электрического поля $E(r)$. Поскольку задача сферически симметрична, напряженность и потенциал будут зависеть только от радиуса $r$. Разобьем наше пространство на три части: $r \ge R_2$; $R_1 \le r \le R_2$; $r \le R_1$.

Напряженность поля в области $r \ge R_2$, очевидно, равна напряженности поля точечного заряда $Q$, помещенного в центр сферы. Следовательно, в этой области

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Воспользуемся связью между напряженностью поля и потенциалом:

$$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Отсюда найдем

$$d\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr.$$

После интегрирования обеих частей этого равенства получим

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{const}.$$

Для нахождения константы за нулевой уровень потенциала примем бесконечность: при $r \to \infty$ $\varphi \to 0$. При таком выборе константа будет равна нулю, и распределение потенциала будет иметь вид

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Теперь рассмотрим область $R_1 \le r \le R_2$. В этой области поле будет эквивалентно полю точечного заряда $Q$, который помещен в центр сферы, а все пространство заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$. Поэтому распределение напряженности поля здесь запишется в виде

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Для приращения потенциала получим

$$d\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}dr.$$

После интегрирования обеих частей этого равенства зависимость $\varphi(r)$ будет иметь вид

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} + \text{const}.$$

Поскольку $\varphi(r)$ – непрерывная функция, потенциал при $r = R_2$ должен быть одним и тем же как при стремлении $r$ к $R_2$ справа, так и при стремлении слева, т.е.

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2} + \text{const}.$$

Отсюда константа будет равна $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$, а распределение $\varphi(r)$ будет иметь вид

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} + \frac{Q(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}.$$

Наконец, рассмотрим область $r \le R_1$. Здесь напряженность электрического поля равна нулю, и, следовательно, $\varphi(r) = \mathrm{const}$. Эту константу найдем из выражения для второй области при $r \to R_1$ и получим

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1} + \frac{Q(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}.$$

На рисунке 2 изображено распределение $\varphi(r)$ для всех трех областей. Отметим характерную особенность приведенного распределения: при $r = R_1$ и $r = R_2$ происходят скачки производной $d\varphi/dr$, а следовательно, и скачки напряженности электрического поля. Разрыв функции $E(r)$ при $r = R_1$ и $r = R_2$ связан с наличием поляризационных зарядов на внутренней и внешней поверхностях сферического слоя диэлектрика.

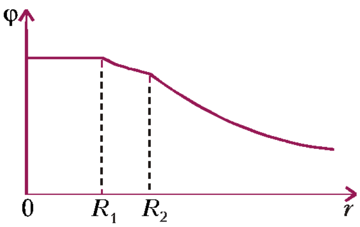


Рис. 2

**Задача 2.** *Три маленьких одинаковых шарика, каждый массой m и зарядом q, расположены на гладкой горизонтальной поверхности. Шарики связаны друг с другом тремя нерастяжимыми и непроводящими нитями длиной l каждая (рис. 3). Все три нити одновременно пережигают. Определите ускорения шариков сразу после пережигания и импульс каждого шарика после разлета на большие расстояния.*

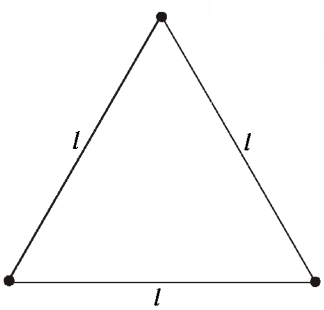


Рис. 3

Сразу после пережигания нитей на шарики будут действовать только электрические силы. Поскольку шарики расположены симметрично относительно точки пересечения биссектрис, результирующие силы, действующие на шарик, будут одинаковы по абсолютной величине и направлены под углом 120° друг к другу. На рисунке 4 на примере одного из шариков показаны силы $\vec{f}$ попарного взаимодействия шариков и результирующая сила $\vec{F}$, где

$$f = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} \quad \text{и} \quad F = \sqrt{3}f = \frac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

Ускорение каждого шарика равно

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\varepsilon_0 m l^2}.$$

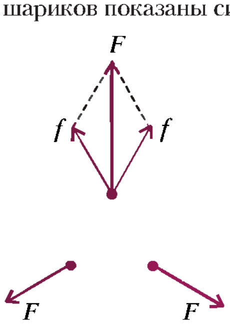


Рис. 4

Для ответа на второй вопрос воспользуемся законом сохранения энергии. Сразу после пережигания нитей кинетическая энергия шариков равна нулю, а потенциальная энергия равна сумме потенциальных энергий всех пар зарядов:

$$W_p = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

Когда шарики разлетятся на большие расстояния, потенциальная энергия шариков будет равна нулю, а кинетическая энергия составит

$$W_k = \frac{3p^2}{2m},$$

где $p$ – импульс каждого шарика. Из равенства $W_p = W_k$ следует, что

$$\frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} = \frac{3p^2}{2m},$$

откуда получаем

$$p = q\sqrt{\frac{m}{2\pi\varepsilon_0 l}}.$$

**Задача 3.** *Два небольших проводящих шарика радиусом r расположены на расстоянии R ($R \gg r$) друг от друга. Шарики поочередно заземляют. Определите потенциал шарика, который был заземлен первым, если первоначально каждый шарик имел заряд q.*

В нашем случае, когда $r \ll R$, мы будем пренебрегать возможным перераспределением зарядов по поверхностям сфер, полагая, что заряды распределены равномерно.

Сначала рассмотрим исходную ситуацию, когда каждый заряженный шарик находится в поле заряда другого шарика. Найдем потенциал каждого шарика, который будет включать в себя два слагаемых. Одно слагаемое – это потенциал шарика в собственном электрическом поле:

$$\varphi_{11} = \varphi_{22} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Здесь $\varphi_{11}$ – потенциал первого шарика, который мы и будем заземлять первым, а $\varphi_{22}$ – потенциал второго шарика. Второе слагаемое – это потенциал каждого шарика в поле другого шарика:

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Здесь $\varphi_{12}$ – потенциал первого шарика в поле второго шарика, а $\varphi_{21}$ – потенциал второго шарика в поле первого. Теперь мы можем записать суммарный потенциал каждого шарика:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_{11} + \varphi_{12} = \varphi_{22} + \varphi_{21} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right).$$

Заземлим первый шарик – его потенциал станет равным нулю, что возможно только при изменении заряда этого шарика. Новый заряд $q_1$ первого шарика найдем из условия

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 0,$$

откуда

$$q_1 = -q\frac{r}{R}.$$

После заземления второго шарика его потенциал станет равным нулю. Новый заряд $q_2$ на втором шарике определяется из уравнения

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0,$$

откуда

$$q_2 = -q_1\frac{r}{R} = q\left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Потенциал $\varphi$ шарика, который был заземлен первым, определяется новыми зарядами на обоих шариках:

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right).$$

**Задача 4.** *Распределение потенциала $\varphi(x)$ между электродами газоразрядной трубки во время газового разряда изображено на рисунке 5. Постройте график распределения напряженности поля $E(x)$.*

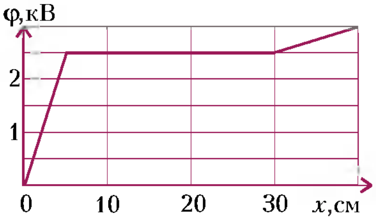



Рис. 5

Для нахождения распределения напряженности электрического поля воспользуемся соотношением, связывающим напряженность с потенциалом:

$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

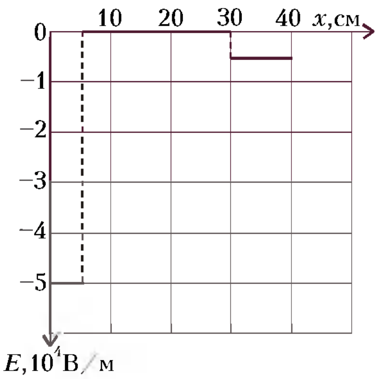



Рис. 6

На участке $0 \le x < 5$ см зависимость $\varphi(x)$ линейная, поэтому напряженность поля постоянна и равна

$$E_1 = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = -\frac{2{,}5\cdot10^3\ \text{В}}{5\cdot10^{-2}\ \text{м}} = -5\cdot10^4\ \text{В/м}.$$

В интервале $5\ \text{см} < x < 30\ \text{см}$ $\varphi = \text{const}$, поэтому

$$E_2 = 0.$$

На участке $30 < x \le 40$ см зависимость $\varphi(x)$ опять линейная, и

$$E_3 = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = -\frac{5\cdot10^2\ \text{В}}{10^{-1}\ \text{м}} = -5\cdot10^3\ \text{В/м}.$$

Полученная зависимость $E(x)$ изображена на рисунке 6.

**Задача 5.** *В плоский конденсатор с расстоянием между пластинами d вставлена металлическая пластина толщиной d/2. Площадь боковой поверхности пластины равна площади обкладок конденсатора. Конденсатор подключен к батарее с ЭДС* $\mathcal{E}$ *(рис. 7). Найдите и изобразите на рисунке распределение потенциала внутри конденсатора, принимая за нулевой уровень потенциала: а) бесконечность; б) левую обкладку конденсатора.*

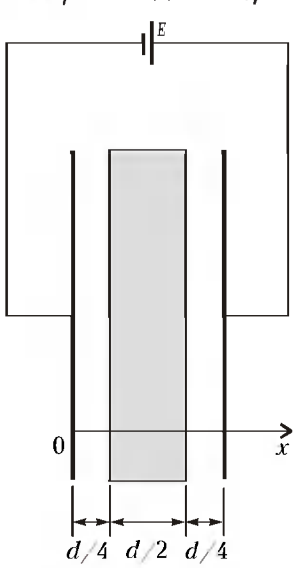



Рис. 7

Сначала разберем первый случай, когда за нулевой уровень отсчета принимается бесконечность.

Найдем распределение напряженности электрического поля внутри конденсатора. Очевидно, что поле в металлической пластине отсутствует, а в зазорах между пластиной и обкладками конденсатора оно однородно и его напряженность равна $E = -2\mathcal{E}/d$. Плоскость $x = d/2$, проходящая через середину конденсатора, является поверхностью нулевого потенциала. Дело в том, что все силовые линии как внутри конденсатора, так и вне пересекают эту плоскость под прямым углом, и, следовательно, при перемещении заряда по этой поверхности работа не совершается. Таким образом, мы имеем реперную точку: при $x = d/2$ $\varphi = 0$.

Разобьем расстояние между пластинами конденсатора на три участка: $0 \le x \le d/4$; $d/4 \le x \le 3d/4$; $3d/4 \le x \le d$. Рассмотрим первый участок. На этом участке $E = -2\mathcal{E}/d$. Воспользуемся связью между напряженностью и потенциалом:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx},$$

откуда

$$d\varphi = \frac{2\mathcal{E}}{d}\,dx.$$

После интегрирования получим

$$\varphi = \frac{2\mathcal{E}}{d}x + \text{const}.$$

Для определения константы воспользуемся тем фактом, что потенциал всей пластины равен нулю, и, следовательно, $\varphi = 0$ при $x = d/4$. Тогда получим, что константа будет равна $-\mathcal{E}/2$, и наше распределение на первом участке будет иметь вид

$$\varphi(x) = \mathcal{E}\left(\frac{2x}{d} - \frac{1}{2}\right).$$

Для второго интервала $d/4 \le x \le 3d/4$ напряженность поля равна нулю (поле внутри пластины отсутствует), следовательно, $\varphi(x) = \text{const}$. Но поскольку при $x = d/2$ $\varphi = 0$, то и константа равна нулю. Значит, на втором отрезке

$$\varphi(x) = 0.$$

Теперь рассмотрим третий участок $3d/4 \le x \le d$. На этом участке, как и на первом, $E = -2\mathcal{E}/d$, а

$$\varphi(x) = \frac{2\mathcal{E}}{d}x + \text{const}.$$

Найдем эту константу. Воспользуемся тем, что при $x = 3d/4$ $\varphi = 0$. После подстановки получим, что константа равна $-3\mathcal{E}/2$, а распределение потенциала имеет вид

$$\varphi(x) = \mathcal{E}\left(\frac{2x}{d} - \frac{3}{2}\right).$$

Распределение потенциала между пластинами конденсатора для всех трех участков изображено на рисунке 8, *а*.

Разберем теперь второй случай, когда за нулевой потенциал принимается левая обкладка конденсатора: при $x = 0$

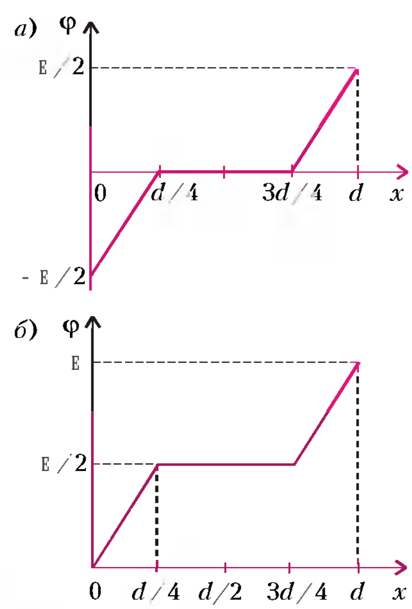



Рис. 8

$\varphi = 0$. Распределение потенциала на участке $0 \le x \le d/4$ будет иметь вид

$$\varphi(x) = \frac{2\mathrm{E}}{d}x .$$

В интервале $d/4 \le x \le 3d/4$ потенциал остается постоянным и равным $\mathrm{E}/2$. На третьем участке

$$\varphi(x) = \frac{2\mathrm{E}}{d}x - \mathrm{E} = \mathrm{E}\left(\frac{2x}{d} - 1\right).$$

Соответствующий график представлен на рисунке 8,*б*.

**Упражнения**

**1.** Металлический шар радиусом $R_1$, несущий заряд $Q$, окружен расположенным концентрически полым металлическим незаряженным шаром с внутренним радиусом $R_2$ и внешним $R_3$. Найдите потенциалы шаров, если в бесконечности потенциал равен нулю. Как изменятся потенциалы шаров, если внешний шар заземлить?

**2.** Найдите распределение потенциала в плоском конденсаторе с расстоянием между пластинами $d$, если одна обкладка заземлена, другая находится при потенциале $\varphi_0$, а в пространстве между ними распределен заряд с постоянной объемной плотностью $\rho$.

**3.** Три одинаковых одноименно заряженных шарика, каждый с зарядом $q$ и массой $m$, связаны нерастяжимыми нитями длиной $a$ каждая. Все шарики неподвижны и расположены на гладкой горизонтальной поверхности. Одна из нитей пережигается. Какие скорости будут иметь шарики в тот момент, когда они будут располагаться на одной прямой? Радиус шариков мал по сравнению с длиной нити.

**4.** Металлический шар радиусом $R_1$, заряженный до потенциала $\varphi_1$, симметрично окружен тонкостенной проводящей незаряженной сферой радиусом $R_2$. Чему будет равен потенциал шара в двух случаях: а) если заземлить сферу; б) если закоротить шар и сферу (соединить проводником)?

ОЛИМПИАДЫ

# Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

## Районный тур

**1.** Имеется 21 карточка с числами: 4 карточки с единицей, 2 карточки с двойкой, 7 карточек с тройкой и 8 – с четверкой. Костя сложил из двадцати карточек прямоугольник $4 \times 5$. Суммы чисел во всех вертикальных рядах этого прямоугольника равны между собой. Суммы чисел во всех горизонтальных рядах тоже равны между собой. Какая карточка осталась у Кости? (6)[1]

*К.Кохась*

**2.** а) У ослика Иа-Иа есть 100 палочек. Длина каждой палочки 1 или 3 см. Докажите, что Иа-Иа может из всех палочек сложить прямоугольник, сломав не более одной палочки (на две части). (6)

*К.Кохась*

б) У ослика Иа-Иа есть 100 палочек. Докажите, что сломав не более двух из них (каждую – на две части), он может из всех палочек сложить прямоугольник. (9)

*К. Кохась*

в) Конструктор состоит из палочек длиной 8 или 9 см. Сумма их длин равна 18 м. В конструкторе есть палочки обоих типов. Докажите, что из всех этих палочек можно сложить равносторонний восьмиугольник. (10)

*Д. Карпов, А. Пастор*

[1] *В скобках после условия задачи указан класс, которому она предлагалась.*

**3.** Докажите, что если $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, $\angle CBD = \angle CAB$ и $\angle ACD = \angle BDA$ (рис.1), то $\angle ABC = \angle ADC$. (8)

*Ф.Бахарев*

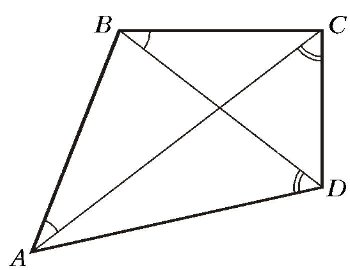


Рис. 1

**4.** На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение трех натуральных чисел, сумма которых равна 407? (8)

*С.Берлов*

**5.** При проверке диктанта оказалось, что грубые ошибки составляют более четверти всех ошибок. Если бы каждый ученик сделал в 3 раза больше грубых ошибок и на 2 больше негрубых, то число грубых ошибок стало бы ровно в 5 раз меньше числа негрубых. Докажите, что по крайней мере треть класса написала диктант безошибочно. (8)

*К.Кохась*

**6.** В ряд выписали 40 разных положительных чисел, каждое из которых меньше 1. Сумма чисел, стоящих на местах с четными номерами, на 1 больше суммы чисел, стоящих на местах с нечетными номерами. Докажите, что в ряду найдется число, которое меньше обоих своих соседей. (8)

*С.Иванов*

**7.** На сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ выбраны точки $K$ и $L$ соответственно. Отрезки $BL$ и $CK$ пересекаются в точке

*O*. На плоскости взята такая точка *D*, что *ALDK* – параллелограмм. Докажите, что если *D* лежит внутри треугольника *ABC*, то площадь четырехугольника *ALOK* меньше площади треугольника *BOC*. (11)

*А.Храбров*

**8.** Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \sin a_{n+1}$, если $a_{n+1} > a_n$, и $a_{n+2} = a_{n+1} + \cos a_{n+1}$, если $a_{n+1} \le a_n$. Докажите, что $a_n < 100$ для любого натурального *n*. (11)

*К.Кохась*

## Городской тур

**9.** В обращении имеются лишь монеты в 3 и 5 тугриков. У каждого из покупателей и у кассира денег ровно 22 тугрика. Докажите, что покупатели могут заплатить по 4 тугрика каждый в порядке очереди. (6)

*А.Железняк*

**10.** По дороге шла толпа людей. Более трети из них повернули направо, более 30% – налево, а все остальные, которых оказалось более 4/11, пошли обратно. Докажите, что в толпе было не менее 173 человек. (6)

*К.Кохась*

**11.** Произведение некоторых 25 натуральных чисел оканчивается на 25. Докажите, что среди них можно выбрать три числа, произведение которых тоже оканчивается на 25. (6)

*А.Храбров*

**12.** Из доски размером $8 \times 8$ вырезали «по клеточкам» 12 прямоугольников размером $1 \times 2$. Можно ли из оставшейся части доски вырезать прямоугольник размером $1 \times 3$? (7)

*К.Кохась, В.Франк*

**13.** На сторонах *AB*, *AC* и *BC* треугольника *ABC* отметили точки *K*, *L* и *M* соответственно так, что $KL \parallel BC$, $KL = LC$ и $\angle LMB = \angle BAC$ (рис. 2). Докажите равенство $LM = AK$. (7)

*С.Берлов*

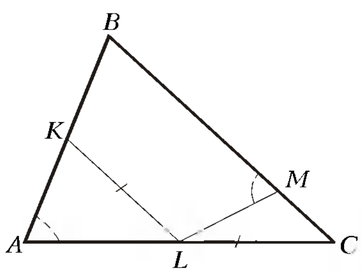


Рис. 2

**14.** 100 красных, 100 синих и 100 зеленых конфет упаковали в четыре коробки – по 65, 70, 80 и 85 штук соответственно. На каждой коробке написано, сколько внутри нее конфет. Оленька вскрыла одну из коробок. Докажите, что она может указать на одну из остальных коробок и назвать два цвета так, что в этой коробке обязательно найдется конфета хотя бы одного из двух названных ею цветов. (7)

*О.Ванюшина*

**15.** Существуют ли такие 30 отрезков, никакие два из которых не имеют общих точек и не лежат на одной прямой, что для любого из них содержащая его прямая пересекает не менее 15 других отрезков? (7)

*С.Иванов*

**16.** Есть полоска $1 \times 101$. Двое ходят по очереди. За ход можно поставить плюс или минус в еще не заполненную клетку. Тот, кто поставил знак рядом с противоположным, проигрывает. Если этого не случилось, а полоска уже заполнена, то выигрывает второй. Докажите, что второй может обеспечить себе победу. (7)

*С.Иванов*

**17.** Внутри треугольника *ABC* на биссектрисе угла *B* выбрана такая точка *M*, что $AM = AC$ и $\angle BCM = 30°$. Докажите, что $\angle AMB = 150°$. (8)

*Ф.Петров*

**18.** На доске $9 \times 9$ закрашено несколько клеток так, что от любой закрашенной клетки можно добраться до любой другой, двигаясь только по закрашенным клеткам и каждый раз переходя на соседнюю клетку через сторону. Докажите, что периметр закрашенной фигуры не превосходит 120. (Длина стороны клетки равна 1.) (8)

*С.Иванов*

**19.** У Гарри есть мышонок и лягушата. Гарри может превращать лягушат в мышат или наоборот по следующему правилу: если мышат и лягушат не поровну, то количество тех животных, которых было меньше половины, удваивается. После того как Гарри сумел проделать эту операцию 17 раз подряд, мышат впервые оказалось ровно в два раза больше, чем лягушат. Сколько животных было у Гарри? (9)

*Ю.Лифшиц*

**20.** Костя выложил из палочек целочисленной длины квадрат $10 \times 10$ (вместе с границей), разбитый на клеточки $1 \times 1$. Палочки не пересекаются во внутренних точках. Какое наименьшее число палочек единичной длины могло быть при этом использовано? (9)

*К.Кохась*

**21.** На стороне *AC* треугольника *ABC* отмечена точка *K* так, что $AK = 2KC$ и $\angle ABK = 2\angle KBC$ (рис.3). Точка *F* – середина стороны *AC*, *L* – проекция *A* на *BK*. Докажите, что прямые *FL* и *BC* перпендикулярны. (9)

*Ф.Бахарев*

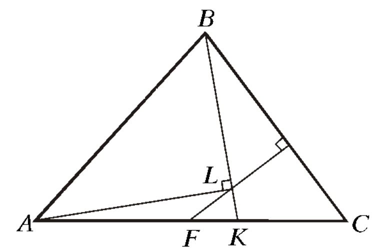


Рис. 3

**22.** Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют общую точку. (10)

*М. Пратусевич, Ю.Лифшиц*

**23.** В выпуклом четырехугольнике *ABCD* угол *B* прямой, $AC = CD$ и $\angle BCA = \angle ACD$ (рис.4). Точка *F* – середина отрезка *AD*. Отрезки *BF* и *AC* пересекаются в точке *L*. Докажите, что $BC = CL$. (10)

*Ф.Бахарев*

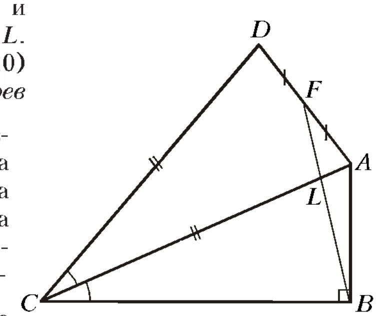
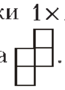
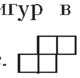
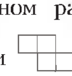


Рис. 4

**24.** Прямоугольник размером $100 \times 2002$ (сторона длины 2002 расположена горизонтально) разбит на доминошки (т.е. прямоугольники $1 \times 2$) и фигурки вида . Известно, что в этом разбиении не более 600 доминошек. Докажите, что как минимум а) 800; б) 20000 четырехклеточных фигур в данном разбиении расположены горизонтально (т.е.  или ). (10)

*Д.Карпов, А.Пастор*

**25.** На диагоналях $AC$ и $BD$ вписанного четырехугольника $ABCD$ выбраны точки $M$ и $N$ соответственно так, что $BN / DN = AM / CM$ и $\angle BAD = \angle BMC$. Докажите, что $\angle ANB = \angle ADC$. (10)

*Ф.Бахарев*

**26.** В стране не менее 100000 городов, из каждого города выходит ровно 2001 дорога. Верно ли, что всегда можно закрыть часть дорог (не менее одной, но не все) таким образом, чтобы после этого из всех городов выходило поровну дорог (дорога соединяет два города, любые два города соединены не более чем одной дорогой)? (10)

*Д.Карпов, М.Островский*

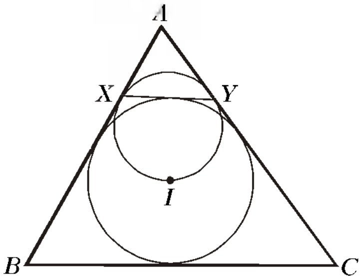



Рис. 5

**27.** $I$ – центр вписанной окружности треугольника $ABC$ (рис.5). Окружность, проходящая через $I$, касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что отрезок $XY$ касается вписанной в треугольник $ABC$ окружности. (11)

*С.Берлов*

**28.** В зоопарке есть двое двухчашечных весов для взвешивания животных. Слон и верблюд весят целое число килограммов, и сумма их масс не превосходит 2 тонн. В зоопарк доставили набор гирь, весящих целое число килограммов, сумма масс которых равна 2 тоннам. Выяснилось, что если на одну из чашек первых весов поставить слона, а на одну из чашек вторых – верблюда, то какими бы ни были веса животных, можно распределить некоторые из гирь по всем 4 чашкам так, чтобы те и другие весы пришли в равновесие. Какое наименьшее число гирь могли привезти в зоопарк? (11)

*А.Храбров*

## Отборочный тур на Всероссийскую олимпиаду

**29.** Длина боковой стороны $AB$ трапеции $ABCD$ равна сумме длин оснований $AD$ и $BC$. Докажите, что биссектрисы углов $A$ и $B$ пересекаются на стороне $CD$. (9)

*Ф.Бахарев*

**30.** При каком наибольшем $\alpha$ любые вещественные числа

$$0 = a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{11} = 1$$

можно разбить на две группы, средние арифметические в которых отличаются не меньше чем на $\alpha$? (9)

*М.Лифшиц, Ю.Лифшиц, Ф.Петров*

**31.** а) Пусть $O$ – центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника $ABC$, точка $C_1$ симметрична $C$ относительно $O$, $D$ – середина стороны $AB$, $K$ – центр описанной окружности треугольника $ODC_1$ (рис.6). Докажите, что точка $O$ делит пополам отрезок прямой $OK$, лежащий внутри угла $ACB$. (9)

*Р.Станоевич*

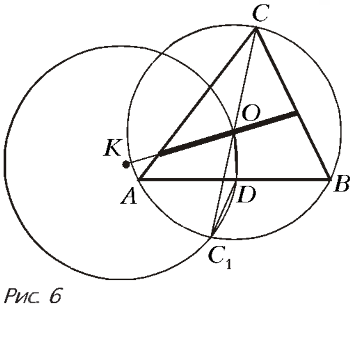



Рис. 6

б) На сторонах $AB$ и $BC$ вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки $X$ и $Y$ соответственно так, что $XBYD$ – параллелограмм (рис.7). Точки $M$ и $N$ – середины диагоналей $AC$ и $BD$, прямые $AC$ и $XY$ пересекаются в точке $L$. Докажите, что точки $M$, $N$, $L$ и $D$ лежат на одной окружности. (10)

*С.Берлов, Д.Джукич, Д.Карпов, А.Пастор*

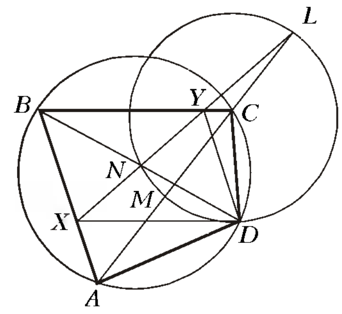
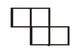



Рис. 7

**32.** Можно ли в прямоугольнике $17 \times 101$ расставить числа от 1 до 1717 так, чтобы в каждой фигурке вида , целиком помещающейся в прямоугольнике, сумма чисел делилась на 17 или на 101? (9)

*К.Кохась*

**33.** Многоугольник $F$, никакие три вершины которого не лежат на одной прямой, можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники не менее чем двумя способами. Докажите, что некоторые четыре вершины $F$ образуют выпуклый четырехугольник, целиком лежащий в $F$. (9)

*Ю.Лифшиц*

**34.** Даны 64 вершины. Двое играют в следующую игру: каждым ходом первый игрок соединяет ребром две еще не соединенные вершины, а второй произвольным образом ориентирует это ребро (т.е. ставит стрелочку, задавая на этом ребре направление движения). Второй игрок выигрывает, если после 1959 ходов от любой вершины до любой другой можно будет дойти, двигаясь вдоль стрелок. Кто выигрывает при правильной игре? (10)

*А.Пастор*

**35.** Берег озера имеет вид выпуклого центрально-симметричного стоугольника $A_1A_2 \ldots A_{100}$ с центром симметрии $O$. Внутри озера расположен остров $B_1B_2 \ldots B_{100}$ такой, что $B_i$ – середина отрезка $OA_i$ для всех $i$ от 1 до 100. На острове находится тюрьма с высоким забором по краям. В противоположных точках берега находятся два охранника. Докажите, что они видят весь берег озера. (10)

*Ф.Петров*

**36.** Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается сторон $BC$, $CA$ и $AB$ в точках $A'$, $B'$ и $C'$ соответственно (рис.8). Через точку $A'$ проведена прямая $l$, перпендикулярная отрезку $AA'$. Она пересекается с прямой $B'C'$ в точке $X$. Докажите, что прямая $BC$ делит отрезок $AX$ пополам. (11)

*Ф.Бахарев*

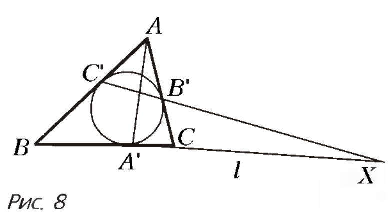



Рис. 8

**37.** На доске написано натуральное число. Дима с Сашей играют в следующую игру. Дима своим ходом называет некоторое натуральное число $x$, а Саша меняет число, записанное на доске, либо прибавляя к нему $x$, либо вычитая из него $x$ (по своему выбору). Дима стремится к тому, чтобы на доске появилось число, равное какой-нибудь степени заданного натурального числа $k$ (годится и $k^0 = 1$). При каких значениях $k$ Дима сможет добиться этого независимо от исходного числа, записанного на доске? (11)

*М.Антипов*

*Публикацию подготовили К.Кохась, А.Спивак*

## Малому мехмату – 25 лет

В этом году Малому механико-математическому факультету (МММФ) – математической школе при механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова – исполняется 25 лет. За годы своего существования заочное отделение Малого мехмата выпустило свыше 10000 учащихся, многие из которых стали студентами большого мехмата и других факультетов МГУ.

У истоков создания МММФ стояли такие известные математики, как нынешний ректор МГУ, академик РАН, профессор В.А.Садовничий, декан механико-математического факультета, член-корреспондент РАН, профессор О.Б.Лупанов, профессора мехмата И.И.Мельников, С.В.Алешин, И.Н.Сергеев.

Основные задачи МММФ – приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, расширение математического кругозора учащихся средних школ, а также знакомство с механико-математическим факультетом МГУ. Каждую субботу сотни школьников Москвы и ближнего Подмосковья, занимающиеся на вечернем отделении Малого мехмата, приходят в аудитории Главного здания МГУ, чтобы слушать лекции и решать задачи. Каждый месяц сотни писем с выполненными заданиями приходят в адрес заочного отделения МММФ из многих уголков необъятной России, Белоруссии, Украины, Казахстана и других стран СНГ.

Лучшие ученики 11 класса весной приглашаются для участия в олимпиаде «Абитуриент» механико-математического факультета МГУ, по результатам которой происходит зачисление в состав студентов мехмата. Лучшие ученики 9 и 10 классов приглашаются на устные экзамены в Специализированный учебно-научный центр при МГУ (школу им. А.Н.Колмогорова), подавляющее большинство выпускников которого поступают в Московский университет.

В 2003 году заочное отделение Малого мехмата объявляет набор *будущих восьмиклассников, нынешних учащихся седьмых классов.* Зачисление в восьмой класс (как для индивидуальных, так и для коллективных учеников) производится на конкурсной основе. Обучение на Малом мехмате платное, однако существует возможность бесплатного обучения для учащихся из малообеспеченных семей, успешно написавших вступительную работу. Информация о зачислении и условиях оплаты будет выслана осенью 2003 года после проверки вступительных работ.

Желающие поступить на заочное отделение МММФ должны *не позднее 10 октября 2003 года* (по почтовому штемпелю) выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи!). Решать задачи можно в любом порядке, но записывать решения в тетрадь нужно в том порядке, в котором они указаны во вступительной работе. Не забудьте вложить в работу конверт с точным обратным адресом.

Вступительную работу необходимо выполнить в *школьной тетради в клетку*. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

1) Республика, край, область

2) Фамилия, имя учащегося (для коллективных учеников – Ф.И.О. руководителя и полный список учащихся)

3) Школа, класс (в 2003/04 учебном году)

4) Полный домашний адрес с указанием индекса почтового отделения

5) Фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность (только для индивидуальных учеников)

Наш адрес: *119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, Малый мехмат.*

Вечернее отделение МММФ приглашает на занятия всех желающих школьников 6–11 классов Москвы и ближнего Подмосковья.

Справки по телефону 939-39-43.

Подробную информацию о Малом мехмате можно найти в Интернете по адресу: http://mmmf.math.msu.su

### Вступительная работа

**1.** Вся семья выпила по одинаковой чашке кофе с молоком, причем Маша выпила 1/4 налитого по всем чашкам молока и 1/6 часть налитого кофе. Сколько человек в семье?

**2.** Две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника. Обязательно ли эти треугольники равны?

**3.** Существуют ли целые числа $a$, $b$, $c$, $d$ такие, что

$$abcd - a = \underbrace{111\ldots1}_{2003},$$

$$abcd - b = \underbrace{111\ldots1}_{2002},$$

$$abcd - c = \underbrace{111\ldots1}_{2001},$$

$$abcd - d = \underbrace{111\ldots1}_{2000}?$$

**4.** В Хогвартсе 50% первокурсников учатся без троек по зельеваренью и 30% учатся без троек по трансфигурации. Сколько процентов учеников успевают без троек по обоим предметам, если 40% первокурсников имеют тройки и по зельеваренью и по трансфигурации?

**5.** Докажите, что если $q = p - 1$, то

$$\left(p^{16} + q^{16}\right)\left(p^{8} + q^{8}\right)\left(p^{4} + q^{4}\right)\left(p^{2} + q^{2}\right)\left(p + q\right) = p^{32} - q^{32}.$$

**6.** В прямоугольной таблице расставлены числа так, что сумма чисел любой строки, как и любого столбца, равна 1. Докажите, что таблица квадратная.

**7.** На какое наибольшее число частей (не обязательно равных) можно разрезать круглый блин четырьмя прямыми разрезами?

**8.** Что больше: 44...45 · 66...65 или 33...34 · 88...87 (каждое из четырех чисел 100-значное)?

**9.** Существуют ли два последовательных натуральных числа, у каждого из которых сумма цифр делится на 7?

**10.** На планете «Куб» (имеющей форму куба) каждой гранью владеет рыцарь (который всегда говорит правду) или лжец (который всегда лжет). Каждый из них утверждает, что большая часть его соседей – лжецы. Сколько рыцарей и сколько лжецов владеют гранями планеты?

## Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ

Физический факультет МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы Заочной физической школы (ЗФШ) при факультете на очередной учебный год.

Физический факультет МГУ готовит физиков – теоретиков и экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений – таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика, компьютерная физика и математическое моделирование.

Выпускникам физического факультета присваивается степень магистра.

Основная цель ЗФШ – помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, прежде всего – на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 октября* по адресу:

*119992 ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.*

В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером $7 \times 12$ см по приведенному здесь образцу, и конверт с Вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет МГУ удостоверения об окончании ЗФШ учитываются приемной комиссией).

Для проживающих в Москве и Московской области имеется вечерняя физическая школа.

Справки по телефону (095) 939-54-95 с 14 до 16 часов по рабочим дням.

| | |
|---|---|
| Фамилия, имя, отчество | *Пирогов Юрий Андреевич* |
| Класс ЗФШ | *10* |
| Профессия родителей | *мать – врач, отец – инженер* |
| Подробный домашний адрес | *120713 Москва, ул.Столетова, д.3, кв.13* |
| Номер и адрес школы | *школа 564, Севастопольский пр., д.5а* |

### Вступительное задание

Поступающим в 10 класс нужно решить задачи 1–4, в 11 класс — задачи 4–7

**1.** По взаимно перпендикулярным дорогам движутся два автомобиля с постоянными скоростями $v_1$ и $v_2$. В момент времени, когда расстояние между ними минимально, первый автомобиль находится на расстоянии $L$ от перекрестка. На каком расстоянии от перекрестка находится в этот момент второй автомобиль?

**2.** На пути тела массой $m$, скользящего по гладкой горизонтальной поверхности, находится незакрепленная горка высотой $H$ и массой $M$. Передний склон горки плавно переходит в плоскость; горка может скользить по плоскости без трения и не отрываясь от нее. При какой минимальной скорости тела оно сможет преодолеть горку?

**3.** К бруску массой $M$, покоящемуся на горизонтальной плоскости, прикреплена пружина жесткостью $k$, которую начинают плавно растягивать горизонтальной силой. До начала движения бруска эта сила совершает работу $A$. Определите коэффициент трения тела о плоскость.

**4.** Придумайте качественную задачу по любому разделу физики и приведите ее решение.

**5.** Идеальный газ массой $m$ и молярной массой $\text{M}$, имеющий начальную температуру $T_0$, охлаждают изохорически так, что его давление падает в $k$ раз, а затем расширяют изобарически до тех пор, пока его температура не станет равной первоначальной. Определите совершенную газом работу.

**6.** Внутри уединенной толстостенной металлической сферической оболочки с радиусами $R_1$ и $R_2$ ($R_1 < R_2$) на расстоянии $d < R_1$ от центра помещен точечный заряд $Q$. Определите потенциал центра оболочки.

**7.** Возможно ли существование электростатического поля, у которого силовые линии представляют собой сгущающиеся параллельные прямые?

## ЗИФМШ объявляет прием

Заочная инженерная физико-математическая школа (ЗИФМШ) при Петербургском государственном университете путей сообщения (ПГУПС) объявляет прием учащихся в 9, 10 и 11 классы на 2003/04 учебный год. Главная цель школы – помочь обучающимся глубже постичь математику и физику, развить инженерный склад мышления и лучше подготовиться к поступлению в высшие учебные заведения.

Прием в ЗИФМШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Рядом с номером задачи указывается, для какого класса она предназначена. Например, **4**(9, 10) означает, что задача **4** входит в конкурсное задание для 9 и 10 классов. Задание для каждого класса состоит из шести задач.

Решение вступительного задания необходимо прислать по адресу:

*190031 Санкт-Петербург, Московский проспект, д.9, ПГУПС, ЗИФМШ, на конкурс.*

В письмо вложите анкету, заполненную печатными буквами по следующему образцу:

| | |
|---|---|
| Фамилия, имя, отчество | *СИДОРОВ ИВАН ПЕТРОВИЧ* |
| Класс (указывается по состоянию на 1 сентября 2003г.) | *ДЕСЯТЫЙ* |
| Подробный домашний адрес | *524806 г. ТВЕРЬ, ул. САДОВАЯ, д.55, кв.77* |
| Номер и адрес школы | *ШКОЛА №5, г. ТВЕРЬ, ул. ЗЕЛЕНАЯ, д.7* |

Зачисленным в ЗИФМШ в течение года высылаются учебные пособия и контрольные задания. Решенные задания оцениваются и рецензируются. Успешно закончившие ЗИФМШ получают удостоверение об окончании.

### Вступительное задание

**1**(9). Один из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, длиной 4 см, увеличили на 50%, а другой уменьшили на 50%. Найдите площадь круга, описанного около получившегося треугольника.

**2**(9). Тело объемом 50 см$^3$ плавает на поверхности воды. Определите объем той части тела, которая погружена в воду, если плотность воды 1000 кг/м$^3$, а плотность вещества, из которого сделано тело, 200 кг/м$^3$.

**3**(9, 10). Найдите сумму остатков от деления числа 126450747 на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25.

**4**(9, 10). При охлаждении 2 кг воды выделилось 750 кДж тепла. При этом половина воды превратилась в лед. Какой была начальная температура воды? Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг.

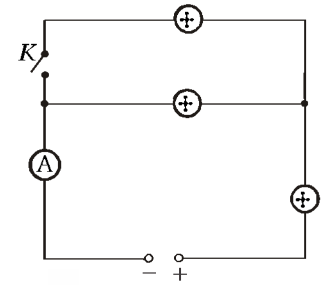
**5**(9, 10, 11). Найдите сумму целых решений неравенства

$$\frac{1}{x^2+5x+4} \le \frac{8x+27}{\left(x^2+8x+16\right)\left(x^2+7x+6\right)}.$$

**6**(9, 10, 11). Из Москвы в одном направлении с интервалом 10 мин выехали два поезда со скоростью 36 км/ч каждый. С какой скоростью двигался встречный поезд, если он повстречал второй поезд через 4 мин после первого?

**7**(10, 11). В треугольнике две медианы взаимно перпендикулярны и равны $a$ и $b$. Найдите площадь треугольника.

**8**(10, 11). Три лампы включены в сеть с напряжением 220 В по схеме, изображенной на рисунке. Все лампы одинаковой мощности и рассчитаны на напряжение 220 В. Во сколько раз изменится показание амперметра, если замкнуть ключ $K$?




**9**(11). Найдите значение $a$, при котором график функции

$$y = x^2 - 2(a-1)x + (2a+1)$$

пересечет положительную полуось $Ox$ в двух точках.

**10**(11). Когда из баллона выпустили некоторое количество газа, давление в нем уменьшилось в 10 раз, а абсолютная температура уменьшилась в 2,5 раза. Какая часть газа осталась в баллоне?

# НАМ ПИШУТ

## Можно решить проще и красивее

Всегда с большим нетерпением жду появления журнала «Квант» в своем почтовом ящике и внимательно читаю публикуемые в нем материалы по математике. В шестом номере журнала за 2002 год приведено решение задачи М1818 из «Задачника «Кванта». Мне удалось найти красивое решение этой задачи, существенно более простое, чем в журнале.

**Задача М1818.** *Докажите неравенство*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2,$$

*где* $a > 0$ $b > 0$, $c > 0$.

Обозначив $a + b + c = S$, имеем

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(S-a)}} \ge \frac{2a}{S},$$

причем равенство достигается лишь при $a = \frac{S}{2}$. Аналогично,

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} \ge \frac{2b}{S} \text{ и } \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2c}{S}.$$

Сложив эти три неравенства, получим

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge 2.$$

Осталось заметить, что последнее неравенство на самом деле всегда строгое, ибо случай $a = b = c = \frac{S}{2}$ невозможен.

*А.Петров*

## Вспышка лампочки

Щелчок выключателя – и комната озаряется светом. Интересно оценить время $\tau$ нагрева нити накала лампочки от комнатной температуры до белого каления. Сделаем это, исходя из следующих соображений.

За время $\tau$ электрический ток выделит количество теплоты $U^2\tau/\bar{R}$, а для нагрева нити необходимо тепло $cm(t_2-t_1)$. Отсюда получаем

$$\frac{U^2}{\bar{R}}\tau \sim cm(t_2-t_1).$$

Здесь $U$ = 220 В – действующее напряжение сети, $c = 154$ Дж/(кг · °С) – удельная теплоемкость вольфрама при 1000 °С, $t_1 = 20$ °С – комнатная температура, $t_2 = 2200$ °С – рабочая температура нити, $m$ – ее масса, $\bar{R}$ – среднее значение сопротивления нити в указанном диапазоне температур. Положим

$$\bar{R} = \rho\frac{l}{S}\left(1+\frac{\alpha t_2}{2}\right),$$

где $\rho = 5{,}5\cdot10^{-8}$ Ом · м – удельное сопротивление вольфрама, $\alpha = 0{,}0048$ 1/°С – его температурный коэффициент сопротивления, $S$ – площадь поперечного сечения и $l$ – длина нити накала. Кроме того,

$$m = dlS,$$

где $d = 19350$ кг/м$^3$ – плотность вольфрама. Приходим к расчетной формуле

$$\tau \sim \frac{cdl^2\rho(1+\alpha t_2/2)(t_2-t_1)}{U^2}.$$

Заметим, что площадь сечения нити $S$ сократилась и не влияет на результат. А типичную длину нити нам удалось найти в одном из задачников: $l$ = 0,05 м. Тогда расчет дает

$$\tau \sim 10^{-4} \text{ с}.$$

Глаз, конечно, среагировать не успевает, и нагрев нити кажется мгновенной вспышкой.

*В.Дроздов*

## «Квант» для младших школьников

### Задачи

*(см. «Квант» №2)*

**1.** Да. Если бы некоторые две гирьки весили вместе не меньше, чем некоторые три другие, можно было бы выбрать из остальных пяти гирек две, первая из которых весит не меньше, чем вторая. Добавив первую к двум гирькам, а вторую – к трем, получим три гирьки, перевешивающие четыре другие гирьки, что противоречит условию.

**2.** В начале есть по крайней мере 10 джентльменов в шляпах, следовательно, всего шляп не меньше 10. В конце есть по крайней мере 10 джентльменов без шляп, следовательно, шляп не больше 10. Поэтому шляп ровно 10. Значит, и количество джентльменов в шляпах в любой момент (в частности, вначале) равно 10.

**3.** Дракон. Если все драконы погибли, то кто-то из рыцарей убил нечетное число драконов и не мог пасть жертвой принцессы.

**4.** Пусть в каждом из кошельков лежит $x$ копеек, а всего имеется $y$ кошельков. Тогда общая сумма денег составляет $xy$ копеек.

После того как в каждый кошелек добавили по копейке, а количество кошельков уменьшили на 1%, общая сумма денег составила, очевидно, $(x+1)\cdot 0{,}99y$. Так как сумма денег при этом уменьшилась, то $(x+1)\cdot 0{,}99y < xy$, откуда $(x+1)\cdot 0{,}99 < x$ и $x > 99$.

После того как из каждого кошелька изъяли по копейке, а количество кошельков при этом увеличили на 1%, общая сумма денег составила $(x-1)\cdot 1{,}01y$. Так как сумма денег при этом уменьшилась, то $(x-1)\cdot 1{,}01y < xy$, откуда $(x-1)\cdot 1{,}01 < x$ и $x < 101$.

Итак, получается $99 < x < 101$. Учитывая, что $x$ – количество копеек (т.е. заведомо целое число), получаем единственную возможность: $x = 100$, т.е. в каждом кошельке было по 100 копеек (или, если угодно, по рублю).

Понятно, что если, не меняя количества кошельков, в каждый из них добавить еще по рублю, то в каждом кошельке станет вдвое больше денег. Поэтому и общая сумма денег возрастет в 2 раза.

**5.** Достроим чертеж до прямоугольника $HEFG$ и введем обозначения, показанные на рисунке 1.

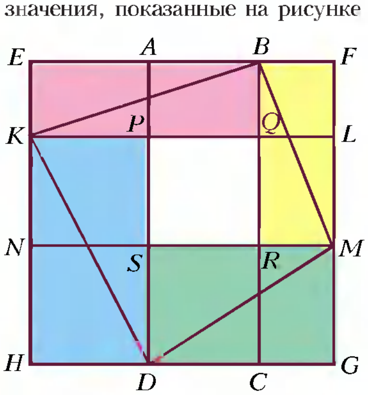


Рис. 1

Поскольку площадь $\triangle KQB$ равна половине площади прямоугольника $KEBQ$, площадь $\triangle BRM$ равна половине площади прямоугольника $BRMF$, площадь $\triangle MSD$ равна половине площади прямоугольника $MSDG$, площадь $\triangle DPK$ равна половине площади прямоугольника $DPKH$, то площадь четырехугольника $KBMD$ равна полусумме площадей четырехугольников $HEFG$ и $PQRS$.

Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что площадь четырехугольника $ALCN$ также равна полусумме площадей четырехугольников $HEFG$ и $PQRS$.

Следовательно, площади четырехугольников $ALCN$ и $KBMD$ равны.

## Конкурс «Математика 6–8»

*(см. «Квант» №6 за 2002 г.)*

**11.** Покажем, что Пятнице не удастся придумать для пометки дуриана такую последовательность из палочек и кружочков, чтобы по его записи Робинзон всегда мог однозначно установить, сколько каких плодов было запасено.

Действительно, если эта пометка представляет собой $n$ палочек, то запись, состоящая из $n$ палочек, расшифровывается двумя разными способами: 1 дуриан или $n$ бананов.

Если эта пометка представляет собой $n$ кружочков, то запись, состоящая из $2n$ кружочков, расшифровывается двумя способами: 2 дуриана или $n$ ананасов.

Пусть пометка для дуриана содержит и палочки, и кружочки. Предположим сначала, что она начинается с палочек, т.е. имеет вид

$$d = 11\ldots100\ldots011\ldots100\ldots01\ldots$$

В этой пометке каждому промежутку из кружочков обязательно предшествует промежуток из палочек. Рассмотрим произвольный промежуток из кружочков, к которому присоединим одну палочку спереди из предшествующего промежутка, т.е. набор вида 100...0. Если кружочков в нем $2n$, то его можно расшифровать как 1 банан и $n$ ананасов. Если число кружочков $2n-1$, то его можно расшифровать как 1 кокос и $n-1$ ананасов. Эту процедуру можно проделать с каждым набором такого вида. Оставшиеся палочки будем считать отметками для бананов. Таким образом, запись $d$ можно расшифровать двумя способами: 1 дуриан или соответствующее количество бананов, кокосов и ананасов, полученное из указанной выше процедуры.

Предположим теперь, что пометка для дуриана начинается кружочками, т.е. имеет вид

$$d = 00\ldots011\ldots100\ldots011\ldots$$

Для каждого промежутка из кружочков, которому предшествует промежуток из палочек, применим процедуру расшифровки, описанную выше. Рассмотрим начальный промежуток. Если он состоит из $2n$ кружочков, то его можно трактовать как $n$ ананасов, и запись $d$ вновь расшифровывается двумя способами. Если он состоит из $2n-1$ кружочков, то, приписав к нему спереди палочку, получаем расшифровку: 1 кокос и $n-1$ ананасов. Следовательно, запись $1d$ расшифровывается двумя способами: 1 банан и 1 дуриан или соответствующее число бананов, кокосов и ананасов, полученное с помощью описанной выше процедуры.

**12.** Заметим что различные числа $\overline{abc}$ и $\overline{a_1b_1c_1}$ порождают различные числа $\overline{abc}+\overline{ab}+a = 111a+11b+c$ и $\overline{a_1b_1c_1}+\overline{a_1b_1}+a_1 = 111a_1+11b_1+c_1$. Это позволяет переформулировать задачу так: сколько существует трехзначных чисел $\overline{abc}$, для которых $\overline{abc}+\overline{ab}+a \le 999$? Всего трехзначных чисел имеется 900 штук, а неравенству $\overline{abc}+\overline{ab}+a > 999$ удовлетворяют лишь те из них, которые начинаются с цифры 9, кроме числа 900. Отсюда получаем ответ: $900-99=801$.

**13.** Допустим, что произведение площадей треугольников $ABD$ и $BCD$ равно произведению площадей треугольников $ABC$ и $ACD$. Пусть O – точка пересечения диагоналей $BD$ и $AC$. Обозначим $S_1 = S_{\triangle ABO}$, $S_2 = S_{\triangle BOC}$, $S_3 = S_{\triangle COD}$, $S_4 = S_{\triangle AOD}$. Тогда $S_{\triangle ABC} = S_1+S_2$, $S_{\triangle CDA} = S_3+S_4$, $S_{\triangle BCD} = S_2+S_3$, $S_{\triangle DAC} = S_4+S_1$.

Поэтому

$$(S_1+S_2)(S_3+S_4) = (S_2+S_3)(S_4+S_1),$$

или

$$S_1S_4+S_2S_3 = S_2S_1+S_3S_4,$$

откуда получаем $(S_1 - S_3)(S_2 - S_4) = 0$. Следовательно, $S_2 = S_4$ либо $S_1 = S_3$. В первом случае $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD}$, поэтому точки $C$ и $D$ находятся на одинаковом удалении от прямой $AB$; $AB \parallel CD$. Во втором случае аналогично доказывается, что $BC \parallel AD$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $ABCD$ – трапеция или параллелограмм. Для определенности положим $BC \parallel AD$ и обозначим $AD = a$, $BC = b$, $h$ – расстояние между прямыми $AD$ и $BC$. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{bh}{2}, \; S_{\triangle ACD} = \frac{ah}{2}, \; S_{\triangle ABD} = \frac{ah}{2}, \; S_{\triangle BCD} = \frac{bh}{2}.$$

Поэтому

$$S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ACD} = \frac{abh^2}{4} = S_{\triangle ABD} \cdot S_{\triangle BCD}.$$

**14.** а) Полагая $m = 2k + 1$, $n = 2k$, где $k$ – натуральное число, получаем

$$5^m - 5^n = 5^{2k+1} - 5^{2k} = 5^{2k}(5-1) = \left(2 \cdot 5^k\right)^2,$$

т.е. среди чисел $5^m - 5^n$ сколь угодно много квадратов.

б) Предположим, что сумма $7^m + 7^n$ является квадратом некоторого натурального числа. Поскольку $7^m + 7^n = 7^n\left(7^{m-n}+1\right)$ и числа $7^n$, $7^{m-n}+1$ взаимно просты, то точными квадратами являются также числа $7^n$, $7^{m-n}+1$. Отсюда следует, что $7^{m-n}+1 = b^2$, где число $b$ натуральное, $b > 2$. Тогда $7^{m-n} = b^2 - 1 = (b-1)(b+1)$, и каждое из чисел $b - 1$, $b + 1$ является некоторой ненулевой степенью 7. Но этого не может быть, поскольку разность между числами $b + 1$ и $b - 1$ равна 2. Противоречие.

Пусть теперь $m = 3k + 1$, $n = 3k$. Тогда

$$7^m + 7^n = 7^n\left(7^{m-n}+1\right) = 7^{3k} \cdot 8 = \left(2 \cdot 7^k\right)^3,$$

т.е. среди чисел $7^m + 7^n$ имеется сколь угодно много кубов.

**15.** Победу в игре может обеспечить себе начинающий. Допустим противное – что любой первый ход начинающего ведет его к поражению. Нам удобно будет пронумеровать столбики номерами от 61 до 70, в соответствии с исходным количеством монет. Проигрывающим является и такой первый ход начинающего, когда он берет одну монету из 64-го столбика (а из других – ничего). У второго игрока имеется ответный выигрышный ход. Пусть он этим ходом берет $k_i$ монет из $i$-го столбика для всех $i = 61, 62..., 70$ (некоторые $k_i$ могут быть равны 0). В результате после этого из всех столбиков, кроме 64-го, окажутся изъяты $k_i$ монет, а из 64-го – $(k_{64}+1)$ монет. Далее любые ходы начинающего второй игрок парирует своими ходами, пока не заберет последнюю монету. Но ведь начинающий игрок может первым ходом взять из всех столбиков, кроме 64-го, те же $k_i$ монет, а из 64-го – $(k_{64}+1)$ монет! В результате получится та же ситуация, но очередь хода за вторым игроком, и парировать его ходы будет уже первый, пока не победит. Таким образом, предположение о том, что победу может обеспечить себе второй игрок, было неверным, и побеждает начинающий. Правда, мы не можем указать его конкретную стратегию, но в условии об этом не спрашивалось.

Для полноты доказательства надо убедиться, что такой ход начинающего допустим правилами игры. Для всех столбиков, кроме 64-го, изъятое число монет вполне допустимо. А из 64-го? Когда начинающий взял из 64-го столбика одну монету, там осталось 63 монеты. Тогда второй игрок мог взять из этого столбика не более $7 < \sqrt{63}$ монет. Поэтому $k_{64} + 1 \le 8$, и первый игрок первым ходом действительно мог взять из 64-го столбика $k_{64} + 1$ монет.

## *Заключительный этап конкурса «Математика 6–8»*

**1.** См. рис.2.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × |
| 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × |
| × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 |
| × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 |
| 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × |
| 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × |
| × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 |
| × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 |
| 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × |
| 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × |

*Рис. 2*

**2.** Если число минусов четно, то выражение можно привести к виду 1 + 2 + 3 + + 4 + 5 + 6 = 21. А если нечетно, то к виду 1 + 2 – 3 + + 4 – 5 – 6 = –7.

**3.** Рассмотрите вершины квадрата и вершины равносторонних треугольников, построенных во внешнюю сторону (рис.3). Можно строить треугольники и во внутреннюю сторону (рис.4); но нетрудно сообразить, что это – всего лишь иной способ описания той же самой конфигурации точек.

**4.** Центр искомой окружности

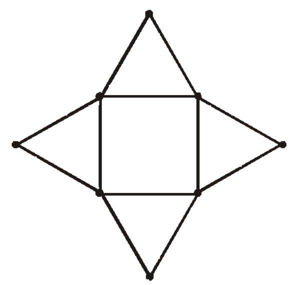


*Рис. 3*

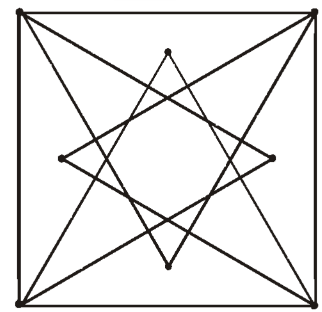


*Рис. 4*

– та самая точка, о которой сказано в первом предложении условия задачи.

**5.** Треугольники $A_2B_1C_2$, $C_2A_1B_2$ и $B_2C_1A_2$ (рис.5) обладают следующими свойствами: $C_2B_1 = C_2A_1$, $B_2A_1 = B_2C_1$, $A_2C_1 = A_2B_1$ и $\angle A_2B_1C_2 + \angle C_2A_1B_2 + \angle B_2C_1A_2 = 360^\circ$. (Последнее равенство легко получить при помощи теоремы о вписанном угле. Можно рассуждать и иначе: проведя отрезки $IA_1$, $IB_1$, $IC_1$ и воспользовавшись равнобедренностью треугольников $B_1IC_2$, $C_2IA_1, \ldots, A_2IB_1$, получить равенство сумм углов

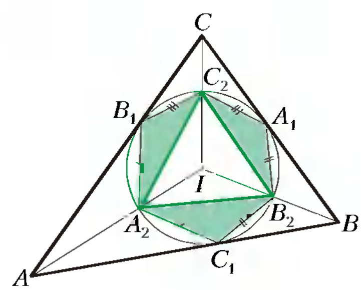



*Рис. 5*

$$\angle A_2B_1C_2 + \angle C_2A_1B_2 + \angle B_2C_1A_2 = \angle B_1C_2A_1 + \angle A_1B_2C_1 + \angle C_1A_2B_1,$$

откуда, воспользовавшись знанием суммы углов шестиугольника, получаем нужное равенство.) Следовательно, из треугольников $A_2B_1C_2$, $C_2A_1B_2$ и $B_2C_1A_2$ можно сложить треугольник. По трем сторонам он равен треугольнику $A_2B_2C_2$.

**6.** Разобьем прямоугольник средними линиями на 4 равных прямоугольника. Не ограничивая общности, можно считать, что выбранная точка лежит в левой нижней части (рис.6). Очевидно, $MB = KL < LM + MK \le CM + MA$ и $MB \ge MA$, $MB \ge MC$.

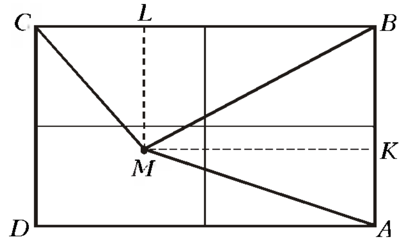



*Рис. 6*

**7.** Сначала разрежем по сплошной красной

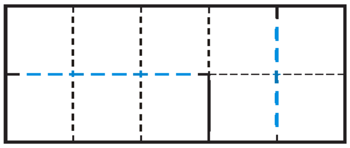


Рис. 7

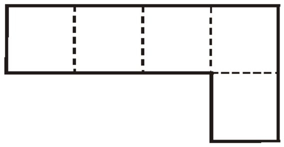


Рис. 8

линии (рис. 7), потом перегнем по пунктирным синим линиям исходный прямоугольник так, чтобы получилась двухслойная фигура из 5 квадратиков (рис.8). Из полученной фигуры легко сложить коробку.

**9.** Очевидно, $1+x^2=xy+yz+zx+x^2=(x+y)(x+z)$. Аналогично, $1+y^2=(y+x)(y+z)$ и $1+z^2=(z+x)(z+y)$. Следовательно, $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)=(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$.

**11.** Заметим, что не меньше 24 фишек из имеющихся 25 в процессе перестановок придется поднимать на верхнюю горизонталь, а затем опускать обратно (затратив тем самым как минимум по 2 хода на каждую фишку). Поясним, почему. Если какие-то две фишки при перемещении не покинут нижнюю горизонталь, то они не смогут поменяться, тогда как каждая фишка, находившаяся первоначально слева от другой, в итоговом расположении должна оказаться справа (и наоборот). Поэтому на такие «возвратно-поступательные» вертикальные перемещения потребуется не меньше $24\cdot 2=48$ ходов.

Что касается горизонтальных перемещений, то здесь оценка снизу вполне очевидна. Фишке номер 1, чтобы добраться до места номер 25, потребуется не меньше 24 ходов. То же относится и к фишке номер 25, которая пробирается к месту номер 1. Далее, фишка номер 2, чтобы дойти до 24-го места, затратит не меньше 22 ходов (и фишка номер 24 – тоже). Ну, и так далее. Поэтому всего потребуется не менее $2\cdot(24+22+\ldots+2)=312$ ходов.

Суммарное минимальное число ходов (вертикальных и горизонтальных), таким образом, оценивается величиной 48 + + 312 = 360.

С другой стороны, можно показать, как достичь цели ровно за 360 ходов. Для этого:

1) Фишку номер 1 поднимаем в верхний ряд и переводим вправо до 25-го места, оставляя ее пока в верхнем ряду.

2) Фишку номер 2 поднимаем в верхний ряд и переводим вправо до 24-го места, оставляя ее пока в верхнем ряду.

…

12) Фишку номер 12 поднимаем в верхний ряд и переводим вправо до 14-го места, оставляя ее пока в верхнем ряду.

13) Фишку номер 13 поднимаем в верхний ряд и оставляем там.

14) Фишку номер 14 переводим влево до 12-го места, а затем поднимаем в верхний ряд и оставляем там.

15) Фишку номер 15 переводим влево до 11-го места, а затем поднимаем в верхний ряд и оставляем там.

…

24) Фишку номер 24 переводим влево до 2-го места, а затем поднимаем в верхний ряд и оставляем там.

25) Фишку номер 25 переводим влево до 1-го места и оставляем там, никуда не поднимая.

26) Все фишки с верхнего ряда опускаем в нижний ряд.

Как легко посчитать, мы управились за 360 ходов.

**12.** Нельзя.

**13.** Десятичная запись числа $a=2^n$, где $n\in\boldsymbol{N}$, содержит не более $n$ цифр. Запишем цифры числа $a$ в обратном порядке и припишем к полученному числу $b$ справа $n$ нулей. Сложим полученное число $b\cdot 10^n$ с числом $a$. Получим палиндром $b\cdot 10^n+a$, который делится на $a=2^n$, поскольку $10^n$ делится на $2^n$.

**14.** Любое.

**16.** $n=5$. При $n=3$ достаточно рассмотреть треугольник с углами величиной 10°, 10° и 160°; при $n=4$ – четырехугольник с углами 40°, 50°, 100° и 170°. Докажем «от противного», что в выпуклом пятиугольнике искомые три угла всегда есть. Пронумеруем величины углов пятиугольника по возрастанию: $0^\circ<\alpha_1\le\alpha_2\le\alpha_3\le\alpha_4\le\alpha_5<180^\circ$. Тогда $\alpha_3+\alpha_4\le\alpha_5$ и $\alpha_1+\alpha_2\le\alpha_5$, откуда

$$540^\circ=(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4)+\alpha_5\le 3\alpha_5,$$

так что $\alpha_5\ge 180^\circ$, что неверно.

**17.** Расположенный в левом верхнем углу доски квадрат размером $10\times 10$ разобьем на 25 синих квадратов размером $2\times 2$, а расположенный в правом нижнем – на 25 красных (рис.9). Очевидно, получили 50 квадратов, удовлетворяющих условию задачи. Для доказательства того, что больше не бывает, рассмотрим 25 клеток, помеченных на рисунке 9 звездочками. Если бы квадратов размером $2\times 2$ было больше 50, то какая-то из помеченных клеток оказалась бы не менее чем в трех квадратах, а в таком случае хотя бы два из них пересекались по двум клеткам, а не по одной.

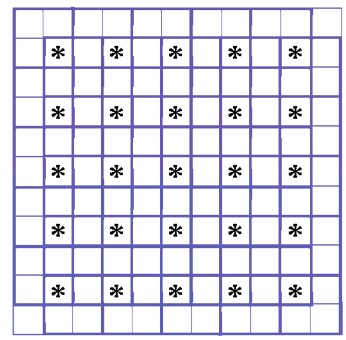


Рис. 9

**18.** Всего в шеренге (колонне, диагонали) может быть от $1\cdot 7=7$ орденов до $3\cdot 7=21$, т.е. всего 15 вариантов. Но шеренг, колонн и диагоналей 16, а число 16 больше, чем 15. Поэтому хотя бы одно совпадение неизбежно.

**20.** Данное в условии задачи неравенство равносильно неравенству

$$(a-1)\left(1-b^5\right)>0,$$

которое равносильно неравенству

$$\left(a^7-1\right)(1-b)>0,$$

а оно, в свою очередь, равносильно тому неравенству, которое требовалось доказать.

**21.** $(x;y;z)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ или $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Авторский замысел решения заключался в избавлении от знаменателей и замене переменных $a=yz$, $b=xz$ и $c=xy$, приводящей к системе

$$\begin{cases}c^2+b^2=a,\\ a^2+c^2=b,\\ b^2+a^2=c.\end{cases}\qquad (*)$$

Вычитая почленно из первого уравнения второе, получаем

$$b^2-a^2=a-b,$$

откуда $a=b$ или $a+b=1$.

Случай $a=b$ приводит к системе

$$\begin{cases}c^2=a-a^2,\\ 2a^2=c,\end{cases}$$

откуда $4a^4=a-a^2$. Поскольку ситуация $a=b=0$ невозможна, то

$$4a^3+a-1=0.$$

Этому уравнению удовлетворяет значение $a=1/2$. В силу теоремы Безу, многочлен $4a^3 + a - 1$ делится на $2a - 1$. Выполнив деление уголком, получим уравнение

$$(2a-1)\left(2a^2 - a + 1\right) = 0 .$$

Поскольку дискриминант квадратного трехчлена $2a^2 - a + 1$ отрицателен, то уравнение $2a^2 - a + 1 = 0$ решений не имеет, так что в рассматриваемом нами случае $a = b = 1/2$. При этом $c = 2a^2 = 1/2$.

Теперь рассмотрим случай $a + b = 1$. Если $a = c$ или $b = c$, то аналогично вышеизложенному находим $a = b = c = 1/2$. Если же $a \neq b$ и $b \neq c$, то, вычитая почленно из первого уравнения системы ($*$) третье, получаем $a + c = 1$, а вычитая из второго третье, получаем $b + c = 1$. Полученной системе уравнений

$$\begin{cases} a+b=1, \\ a+c=1, \\ b+c=1 \end{cases}$$

удовлетворяет лишь известный нам набор $a = b = c = 1/2$.

Теперь, решив систему $yz = xz = xy = \frac{1}{2}$, находим ответ: $(x; y; z) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ или $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Но некоторые команды придумали решение задачи, основанное на неравенстве между средним арифметическим и средним геометрическим. Заметим, что все неизвестные должны быть одного знака: или все положительные, или все отрицательные. Пусть для определенности все неизвестные положительны. Тогда

$$x = \frac{\sqrt{yz}}{y+z} \le \frac{1}{2} .$$

Аналогично, $y \le \frac{1}{2}$ и $z \le \frac{1}{2}$. Перемножив почленно все три уравнения системы, находим

$$(y+z)(z+x)(x+y) = 1 .$$

Если хотя бы одно из чисел $x$, $y$, $z$ меньше $1/2$, а остальные положительны и не превышают $1/2$, то произведение $(y+z)(z+x)(x+y)$ меньше единицы. Поэтому иных решений в положительных числах, кроме $x = y = z = \frac{1}{2}$, система не имеет.

**24.** Если $n = 2$, то игра единственна и кончится она вничью. Если же $n \ge 3$, то как минимум две ничьи состоятся: самая первая встреча турнира кончится со счетом 0 : 0, а последняя – со счетом $(n-1):(n-1)$. Можно добиться того, чтобы никаких других ничейных встреч не было. Чтобы это сделать, применим индукцию. Для $n = 3$ расписание по сути единственно. Пусть для некоторого $n$ расписание, при котором только две ничьи, уже составлено. Добавим к $n$ «старым» командам одну «новую» команду $N$. Пусть сначала будут сыграны все игры между старыми командами, кроме последней, в которой должны были встретиться некоторые две старые команды $A$ и $B$. Теперь пусть сыграют $A$ и $N$, затем $A$ и $B$, а потом пусть $N$ сыграет (в любом порядке) все оставшиеся ей игры. Очевидно, ничья случится лишь в последней игре.

## Калейдоскоп «Кванта»

### *Вопросы и задачи*

**1.** Нет, так как идея перпетуум мобиле предполагает неопределенно долгое совершение работы без изменения состояний тел, а такой работы в случае планет не совершается.

**2.** Нет, не так. Когда трубки расположатся под углом 45° к горизонту, ртуть окажется в нижних коленах, и система будет уравновешена.

**3.** Нет, поскольку на глубине для раздвигания поршней придется совершать дополнительную работу против сил гидростатического давления.

**4.** Те же силы поверхностного натяжения, что поднимали воду по капиллярам фитиля, не позволят ей стекать с верхнего его конца в сосуд.

**5.** Не изменится. По указанным в предыдущем решении причинам вода вытекать из трубки не будет.

**6.** Нет, так как не отпадет необходимость отводить значительное количество теплоты в холодильник.

**7.** Не может, иначе удалось бы осуществить цикл (рис.10), в котором все полученное системой тепло целиком перешло бы в работу. Такая машина была бы вечным двигателем II рода, который запрещен вторым началом термодинамики.

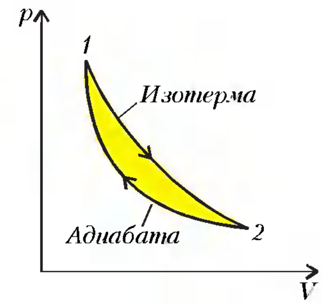


Рис. 10

**8.** Нет, процесс будет длиться до тех пор, пока не произойдет насыщение окружающей среды водяным паром.

**9.** Нельзя. Секрет действия игрушки – в ватной голове, которая периодически смачивается водой. Испарение воды приводит к понижению давления паров жидкости внутри ампулы, подъему жидкости в трубочке и переносу ее центра тяжести. Энергия, требуемая для наклонов птички, пополняется за счет внутренней энергии воды и окружающего воздуха.

**10.** Тока в проводнике не будет, так как разность потенциалов между обкладками конденсатора одинакова и в верхней, и в нижней его частях. Это происходит за счет перераспределения зарядов по обкладкам.

**11.** Нет, движение довольно быстро закончится из-за расходования энергии на преодоление трения в движущихся частях генератора и электродвигателя.

## Потенциал электростатического поля

**1.** $\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$, $\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$;

$\varphi_1^* = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$, $\varphi_2^* = 0$.

**2.** $\varphi(x) = \left(\frac{\varphi_0}{d} + \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}\right)x - \frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$, где $x$ отсчитывается от заземленной пластины.

**3.** Скорость среднего шарика (расположенного напротив пережигаемой нити) равна $u = \frac{q}{\sqrt{6\pi\varepsilon_0 ma}}$, скорости крайних шариков одинаковы и равны $v = -\frac{u}{2}$.

**4.** а) $\varphi = \varphi_1\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$; б) $\varphi = \varphi_1\frac{R_1}{R_2}$.

## Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

**1.** Так как сумма чисел делится и на 5, и на 4, то она делится на 20. Сумма всех чисел на карточках равна 61. Значит, осталась карточка с единицей.

**2.** а) Ослик возьмет две одинаковые палочки в качестве вертикальных сторон, а остальные палочки выложит в длинный отрезок, разделит его на две половины (сделав, если нужно,

разлом) и использует эти половины в качестве горизонтальных сторон.
б) Ослик может разломить пополам какую-нибудь палочку. Эти половинки будут вертикальными сторонами прямоугольника. Из оставшихся палочек Иа сложит отрезок и разделит его пополам (если нужно, разломив). Это будут горизонтальные стороны.
в) Пусть в конструкторе $x$ палочек по 8 см и $y$ палочек по 9 см. Тогда

$$8x + 9y = 1800.$$

Поскольку 1800 делится и на 8, и на 9, то $y$ делится на 8, а $x$ – на 9. Значит, $y = 8b$ и $x = 9a$, где $a$, $b$ – натуральные числа. Очевидно,

$$a + b = 1800 : 72 = 25.$$

Осталось объяснить, как из палочек сложить восемь отрезков длиной $1800 : 8 = 225 = 9 + 3\cdot 72$ см каждый. Положим на каждую сторону по одной палочке длиной 9 см. Палочки длины 8 см можно разбить на $a$ кучек по 9 палочек, а оставшиеся палочки длины 9 см можно разбить на $(b - 1)$ кучек по 8 палочек (сумма длин палочек каждой кучки равна 72 см). Мы получили $a + b - 1 = 24$ кучки. Их можно разложить по три на каждую из 8 сторон.

**3.** *Первый способ*. Пусть O – точка пересечения диагоналей. В треугольниках $ABC$ и $BOC$ угол $C$ – общий, а угол $A$ первого равен углу $B$ второго. Следовательно, $\angle ABC = \angle BOC$. Аналогично, $\angle ADC = \angle AOD$. Поскольку углы $BOC$ и $AOD$ вертикальные, то $\angle ABC = \angle ADC$.
*Второй способ*.

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle CAB - \angle ACB =$$

$$= 180^\circ - \angle CBD - (\angle BCD - \angle ACD) =$$

$$= (180^\circ - \angle CBD - \angle BCD) + \angle ACD = \angle BDC + \angle BDA = \angle ADC.$$

**4.** На 6 нулей. Задумаемся, на какую степень пятерки может делиться это произведение. Каждое из чисел меньше $5^4 = 625$ и поэтому делится разве лишь на $5^3$. Хотя бы одно из чисел не делится на 5, иначе их сумма делилась бы на 5. Поэтому больше шести нулей быть не может. А шесть нулей бывает: 407 = 250 + 125 + 32.
Вот другое доказательство того, что больше шести нулей не бывает. Пусть $x + y + z = 407$. Тогда по неравенству между среднем арифметическим и среднем геометрическим

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3} = \frac{407}{3} < 200,$$

откуда $xyz < 200^3 < 10^7$.

**5.** Пусть $k$ – число учеников в классе, $x$ – количество всех ошибок, $y$ – количество грубых ошибок. Тогда число негрубых ошибок равно $x - y$ и по условию

$$x - y + 2k = 5\cdot 3y,$$

откуда $y = \dfrac{x+2k}{16}$. Вспомнив неравенство $y > \dfrac{x}{4}$, получаем

$$\frac{x+2k}{16} > \frac{x}{4},$$

т.е. $x < \dfrac{2}{3}k$. Так как число учеников, сделавших ошибки, не превосходит количества ошибок, то ошибки сделали менее $\dfrac{2}{3}$ учеников класса, что и требовалось доказать.

**6.** Предположим, что такого числа нет.
*Первый способ*. Из каждого числа с нечетным номером, кроме первого, проведем стрелку к соседу, который меньше его (к одному из них, если оба меньше). Ни в какое число не входят две стрелки, так как иначе это число было бы меньше двух своих соседей. Значит, все числа, кроме первого и еще одного, разбились на пары соседних, причем в каждой паре число с нечетным номером больше числа с четным номером. Оставшееся без пары число с четным номером отличается от первого числа менее чем на 1, поэтому разность суммы чисел с четными номерами и суммы чисел с нечетными номерами меньше 1, а это противоречит условию задачи.
*Второй способ*. Рассмотрим наибольшее число $a$ последовательности. Разобьем остальные на две части: числа «до» и числа «после» $a$. Вторая часть – убывающая последовательность (иначе первое число, после которого монотонность нарушается, было бы меньше своих соседей). Аналогично, первая часть – возрастающая последовательность. Добавим число $a$ в ту часть, где количество чисел нечетно. Таким образом, последовательность разбита на две – убывающую и возрастающую. (Одна из последовательностей может быть пустой.)
В убывающей последовательности сумма чисел с четными номерами меньше суммы чисел с нечетными номерами, так как второе меньше первого, четвертое меньше третьего и т.д. В возрастающей сумма чисел с четными номерами, кроме последнего, меньше суммы чисел с нечетными номерами, кроме первого, так как второе меньше третьего, четвертое меньше пятого и т.д. Наконец, разность последнего и первого чисел возрастающей части меньше 1, так как оба числа принадлежат интервалу (0; 1). Следовательно, сумма чисел с четными номерами меньше увеличенной на 1 суммы чисел с нечетными номерами.

**7.** Поскольку $LD \parallel AB$, то $S_{ABD} = S_{ABL}$. Аналогично, $S_{ACD} = S_{ACK}$. Следовательно,

$$S_{ABC} > S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ABL} + S_{ACK},$$

откуда и следует требуемое.

**8.** По индукции легко доказать неравенство $a_n < 3\pi$. Легко доказать даже, что последовательность $a_n$ монотонна и стремится к $3\pi$.

**9.** Существует лишь один способ набрать 22 тугрика монетами по 5 и 3 тугрика, а именно, $22 = 2\cdot 5 + 4\cdot 3$. В любой момент времени у кассира будет не менее 22 тугриков, поэтому у него в любой момент времени найдутся две монеты по 3 тугрика или одна монета в 5 тугриков. Кассир может либо взять у очередника 3 монеты по 3 тугрика и в качестве сдачи дать 5 тугриков, либо взять две монеты по 5 тугриков и отдать две монеты по 3 тугрика.

**10.** Если в толпе было $n$ человек, то

$$\frac{n+1}{3} + \frac{3n+1}{10} + \frac{4n+1}{11} \le n,$$

т.е.

$$110n + 110 + 99n + 33 + 120n + 30 \le 330n,$$

откуда $173 \le n$, что и требовалось доказать.

**11.** Поскольку $25 = 5^2$, то среди данных чисел можно найти такие два числа $a$ и $b$, что $ab$ делится на $5^2$. Все остальные числа нечетны. При делении на 4 любое нечетное число дает остаток 1 или 3. Начав разбивать 23 числа на пары чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 4, придем к разбиению 23 чисел на 11 пар и еще одно число $c$. Очевидно, $c \equiv 1 \pmod 4$. Произведение $abc$ делится на 25 и дает остаток 1 при делении на 4. Поэтому оно оканчивается на 25.

**12.** Нет, не обязательно (рис.11).

**13.** Отметим на луче $CB$ такую точку $N$, что $\angle LNC = \angle LMB = \angle BAC$ (рис. 12). Тогда $LN = LM$. Из параллельности прямых $KL$ и $BC$ следует равенство углов $ALK$

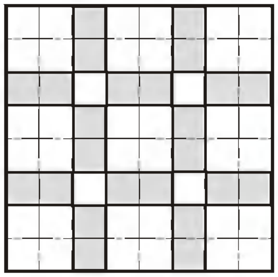


Рис. 11

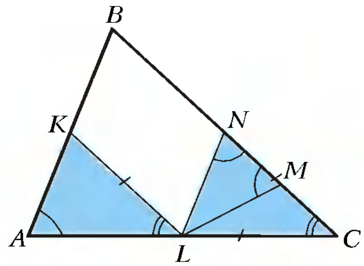



Рис. 12

и $LCN$. Следовательно, треугольники $AKL$ и $LNC$ равны, откуда $AK = LN = LM$.

**14.** Пусть во вскрытой коробке $x$ красных, $y$ синих и $z$ зеленых конфет. Не умаляя общности, можно считать, что $x \le y \le z$. Так как во вскрытой коробке не менее 65 конфет, то $z \ge \frac{65}{3} > 21$. Значит, в запечатанных коробках всего не более 78 зеленых конфет. Среди оставшихся коробок есть коробка, содержащая 80 или 85 конфет. В такой коробке не все конфеты зеленые.

**15.** Пусть они существуют.

*Первый случай.* Проведем через каждый из 30 отрезков прямую и оценим количество точек пересечения прямых. (Если через какую-то точку проходят более чем две прямые, будем учитывать ее столько раз, сколько пар прямых в ней пересекаются. Например, если через точку проходят 4 прямые, то учтем ее 6 раз.)

С одной стороны, число точек пересечения 30 прямых не превосходит $\frac{29 \cdot 30}{2} = 29 \cdot 15$, так как на каждой прямой есть не более 29 точек пересечения, а каждая точка учитывается дважды: один раз на одной прямой и один – на другой. С другой стороны, можно подсчитать для каждой прямой точки ее пересечения с *отрезками*. Таких пересечений для каждой прямой не меньше 15, поэтому всего – не меньше $30 \cdot 15$. Таким образом, число точек пересечения не превосходит $29 \cdot 15$ и не меньше $30 \cdot 15$. Противоречие.

*Второй способ.* Если продолжение отрезка $a$ пересекает отрезок $b$, нарисуем стрелку от $a$ к $b$. Очевидно, не могут одновременно существовать стрелки от $a$ к $b$ и от $b$ к $a$. По условию, из каждого отрезка должно выходить не менее 15 стрелок. Значит, в каждый отрезок входят не более 14 стрелок и у стрелок оказывается больше начал, чем концов.

**16.** Назовем расстановку плюсов и минусов *удачной*, если в ней самый левый и самый правый знаки различны и расположены симметрично относительно центра полоски; *выжидательной* – если это сплошной интервал, заполненный одинаковыми знаками и расположенный «почти симметрично», т.е. так, что количества пустых клеток слева и справа отличаются на 1.

Докажем, что второй игрок может действовать так, чтобы после каждого его хода позиция была выжидательной или удачной. Рассмотрим некоторый ход первого игрока.

Если это самый первый ход игры и он сделан не в центральную клетку, то второй игрок может поставить противоположный знак в симметричную клетку; если же в центральную – создать выжидательную позицию.

Случай, когда первый делает ход из выжидательной позиции, очевиден. Пусть первый ходит из удачной позиции. Если он ставит какой-то знак ближе к краю, чем все ранее поставленные, то второй может создать удачную позицию. Если же первый ставит знак внутрь свободного интервала, то второй может ответить тем же. Ведь если бы ответить было нельзя, то были бы интервалы, заполненные одинаковыми знаками и отделенные друг от друга одиночными пустыми клетками, причем знаки в соседних интервалах различны. Поскольку крайние знаки разные, то смена знака внутри области происходит нечетное число раз и количество пустых клеток нечетно. Поскольку длина всей области нечетна, то количество заполненных клеток четно. Но после хода первого заполнено нечетное число клеток!

*Замечание.* Пусть двое по очереди ставят плюсы и минусы в полоске размером $1 \times n$; тот, кто поставил знак рядом с противоположным, проигрывает; если этого не случилось, а полоска уже заполнена (естественно, одинаковыми знаками), то ничья. Докажите, что игра ничейна – ни один из игроков не имеет выигрышной стратегии.

**17.** Опустим из $M$ перпендикуляры $MK$ и $ML$ на стороны $AB$ и $BC$ соответственно. Так как $BM$ – биссектриса угла $B$, имеем $MK = ML$. Углы треугольника $LMC$ равны 90°, 60° и 30°, значит, $ML = MC/2$. Пусть $N$ – середина $MC$, тогда $MN = ML = MK$. Отрезок $AN$ – медиана, биссектриса и высота треугольника $AMC$, в частности, $\angle ANM = 90°$. Теперь заметим, что $AMK$ и $AMN$ – прямоугольные треугольники с общей гипотенузой $AM$ и равными катетами $MK$ и $MN$, следовательно, они равны. В частности, $\angle MAK = \angle MAN$, откуда $\angle MAC = 2\angle MAN = 2\angle MAB$. Теперь, обозначив $\angle MAB = \alpha$ и посчитав величины углов, легко завершить решение.

**18.** Если закрашенных клеток не больше 59, утверждение следует из следующей леммы: ***периметр любой связной фигуры из n клеток не превосходит 2n + 2.***

Если же закрашено не менее 60 клеток, то в дополнительной фигуре (состоящей из незакрашенных клеток) не более $81 - 60 = 21$ клетки. Поскольку каждый отрезок границы закрашенной фигуры принадлежит либо границе дополнительной фигуры, либо границе квадрата $9 \times 9$, то периметр не превосходит $4 \cdot 21 + 4 \cdot 9 = 120$.

*Замечание.* Периметр может быть равен 120 (рис.13).

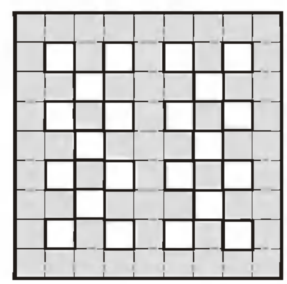


Рис. 13

**19.** Пусть у Гарри было $n$ животных. Легко понять, что при каждой операции количество мышат удваивается по модулю $n$. Поэтому после семнадцати ходов количество мышат будет равно $2^{17} - nk$, где $k$ – целое неотрицательное число. Поскольку это вдвое больше, чем количество остальных животных, получаем уравнение

$$2^{17} - nk = 2\left(n - \left(2^{17} - nk\right)\right),$$

откуда $3 \cdot 2^{17} = n(3k + 2)$. Поэтому $n = 3 \cdot 2^s$, где $0 \le s \le 16$. Поскольку мышат становится вдвое больше, чем лягушат, на $(s+1)$-м ходу, то $s = 16$. У Гарри было $3 \cdot 2^{16}$ животных.

**20.** 18 отрезков. Пример – на рисунке 14. Чтобы доказать, что палочек единичной длины не меньше 18, раскрасьте клетки квадрата в шахматном порядке и заметьте, что к каждой из 18 черных клеток, прилегающих к границе, примыкает отрезок единичной длины. (Для угловых клеток это очевидно. Если же черная клетка прилегает, скажем, к нижней горизонтальной стороне и ее вертикальные стороны составлены отрезками неединичной длины, то ее верхняя сторона – единичный отрезок.)

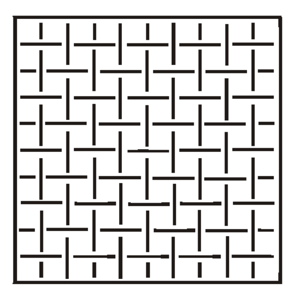


Рис. 14

**22.** Обозначим эти трехчлены $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, а их старшие коэффициенты – $a$, $b$ и $c$. Можно считать, что $a < b < c$. Поскольку трехчлен $f(x)-g(x)$ имеет только один корень и его старший коэффициент отрицателен, то $f(x)-g(x) \le 0$ для любого $x$. Аналогично, $g(x) \le h(x)$. Таким образом, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ для всех $x$. Но в некоторой точке $t$ имеем $f(t) = h(t)$. Тогда и $f(t) = g(t) = h(t)$.

**23.** В равнобедренном треугольнике $ACD$ медиана $CF$ совпадает с биссектрисой и высотой, следовательно, $\angle ACF = \angle DCF$ и $\angle AFC = 90^\circ$. Значит, четырехугольник $ABCF$ – вписанный. Поэтому

$$\angle BLC = \frac{\breve{BC}+\breve{AF}}{2} = \angle BAC + \angle ABF =$$

$$= 90^\circ - \angle ACB + \angle ABF = 90^\circ - 2\angle ACF + \angle ABF = 90^\circ - \angle ACF =$$

$$= \angle FAC = \angle FBC = \angle LBC.$$

**26.** Не всегда. Рассмотрим 2001 одинаковых графов, в каждом из которых 2003 вершины, точнее, одна вершина степени 2000 и 2002 вершины степени 2001. И еще рассмотрим одну вершину, не принадлежащую ни одному из этих графов. Соединим ее ребрами с каждой из 2001 вершин степени 2000. Мы получили граф, в котором $1 + 2001 \cdot 2003 = 4008004$ вершин, причем степени всех вершин одинаковы. Пользуясь тем, что сумма степеней вершин любого связного графа четна, легко доказать, что в построенном графе нет подграфа, степени всех вершин которого одинаковы и нечетны. При помощи перехода к дополнительному подграфу из этого легко выводится, что нет и собственного подграфа, степени всех вершин которого одинаковы и четны.

**27.** $\angle YXI = \angle XYI$ и $\angle XYI = \breve{XI}/2 = \angle BXI$, стало быть, $\angle YXI = \angle BXI$. Аналогично, $\angle XYI = \angle CXI$. Значит, точка $I$ лежит на биссектрисах углов $BXY$ и $XYC$, что и требовалось доказать.

*Замечание*. Условие «точки $X$ и $Y$ лежат на сторонах треугольника» однозначно определяет картинку. Если «стороны» заменить на «продолжения сторон», то утверждение задачи останется верным. (Убедитесь в этом!)

**28.** 12. Сначала по индукции докажите, что набором гирь 1, 1, 2, 4, 8, …, $2^k$ и $A$ при $A \le 2^{k+1}$ можно уравновесить любую пару грузов суммарной массы не более $A + 2^{k+1}$, а затем докажите, что 11 гирь недостаточно.

**30.** $\alpha = 11/20$. Вычислим среднее арифметическое всех 11 чисел. Если оно больше $1/2$, поместим в первую группу число $a_1 = 0$, а во вторую – все остальные. Среднее арифметическое чисел $a_2, \dots, a_{11}$ в $11/10$ раз больше среднего арифметического всех чисел, а потому больше $11/20$.

Если же среднее арифметическое всех чисел не больше $1/2$, помещаем в одну группу $a_{11} = 1$, а в другую $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Сумма всех одиннадцати чисел не больше $11/2$, значит, сумма первых десяти не больше $9/2$, поэтому их среднее арифметическое не больше $9/20 = 1 - 11/20$.

Примером набора, который нельзя разбить на две группы с меньшей разностью средних арифметических, служит, например, набор 0, $1/10$, $2/10$, …, $9/10$, 1.

**31.** а) Пусть $OK$ пересекает $BC$ в точке $X$, $AC$ – в точке $Y$. Пусть $Z$ – точка описанной окружности треугольника $ODC_1$, диаметрально противоположная O. Тогда, поскольку угол $ODA$ прямой, $Z = OK \cap AB$. Из вписанности четырехугольника $ZODC_1$ получаем, что $\angle COX = \angle ADC_1$. Кроме того, $\angle DAC_1 = \angle OCX$ (из вписанности четырехугольника $C_1ACB$). Поэтому подобны треугольники $COX$ и $ADC_1$, откуда $OX/OC = DC_1/AD$. Аналогично, $OY/OC = DC_1/DB$. Осталось приравнять правые части двух последних равенств.

б) Не умаляя общности, можно считать, что точка $L$ расположена на продолжении диагонали $AC$ за точку $C$. Заметим, что $\angle DAC = \angle DBC$ и $\angle DCA = \angle DBA$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. В силу того, что $AB \parallel DY$, мы имеем $\angle DCA = \angle DBA = \angle BDY$. Таким образом, треугольники $DAC$ и $YBD$ подобны по двум углам. Следовательно, треугольники $DMC$ и $YND$ подобны как соответствующие «половинки», отрезанные от двух подобных треугольников медианами. Отсюда $\angle DML = \angle DNL$. Это означает, что точки $M$, $N$, $L$ и $D$ лежат на одной окружности.

**32.** Можно. Например, в силу китайской теоремы об остатках можно расставить числа так, чтобы число $i$-й строки и $j$-го столбца было сравнимо с $(-1)^i(2i-1)$ по модулю 17 и с $(-1)^j(2j-1)$ по модулю 101.

**34.** Выигрывает первый игрок. Число $1959 = 6 + \frac{63 \cdot 62}{2}$ на 6 больше количества ребер полного графа с 63 вершинами. Докажем, что первый игрок может получить вершину, в которую входят 6 ребер и ни одного ребра не выходит. Сначала он разобьет вершины на пары и проведет по ребру между вершинами каждой пары. Второй как-то ориентирует эти ребра, в результате получатся 32 вершины, в которые входит по одному ребру и ни одного не выходит. Первый разобьет эти 32 вершины на пары и проведет в них ребра. Второй эти ребра ориентирует, в результате чего образуются 16 вершин, в которые входит по 2 ребра и ни одного не выходит. И так далее. В итоге получится вершина $A$, в которую входят 6 ребер и ни одного ребра не выходит.

После этого первый проведет все возможные ребра среди 63 отличных от $A$ вершин. Получится ориентированный граф с 1959 ребрами, в котором из вершины $A$ нельзя выйти.

**37.** При $k = 2^r + 1$, где $r$ – целое неотрицательное число. Представим число $k - 1$ в виде $k - 1 = 2^p q$, где $p$ – неотрицательное целое, а $q$ – нечетное число. Ясно, что все степени $k$ дают остаток 1 при делении на $q$. Предположим, что $q \ne 1$ и на доске написано число $a$, не дающее остаток 1 при делении на $q$. Покажем, что в этом случае Саша всегда сможет изменить число так, чтобы и новое число не давало остаток 1 при делении на $q$. Допустим, Дима назвал некоторое число $x$. Саша будет вынужден написать число, дающее остаток 1 при делении на $q$, лишь если числа $a + x$ и $a - x$ дают остаток 1, но в этом случае число $(a+x)-(a-x) = 2x$ кратно $q$, а тогда $x \vdots q$ и $a + x \equiv a - x \equiv a \not\equiv 1 \pmod{q}$. Итак, в случае $q \ne 1$ Саша может не позволить появиться на доске числу, сравнимому с 1 по модулю $q$, а значит, на доске не появится никакая степень числа $k$.

Докажем индукцией по $r$, что при $k = 2^r + 1$ Дима сможет получить на доске степень числа $k$. *База*: $r = 0$, т.е. $k = 2$. Действия Димы будут такими: если на доске написано число $a = 2^u(2v+1)$, где $v \ge 1$, Дима называет $x = 2^u$. Тогда $a - x = 2^{u+1}v$ и $a + x = 2^{u+1}(v+1)$. В обоих случаях максимальный нечетный делитель числа, написанного на доске, уменьшился. Следовательно, когда-нибудь Дима получит степень двойки. *Переход*. Пусть $k = 2^r + 1$, тогда $n = 2^{r+1} + 1$ можно представить в виде $n = 2k - 1$. Допустим, Дима уже получил степень числа $k$. Покажем, как он из степени числа $k$ сможет сделать степень числа $n$. Для этого объясним, как из числа $a$ вида $k^u n^v$ можно получить число того же вида с меньшим $u$. Если Дима называет число $x = (k-1)k^{u-1}n^v$, то $a - x = k^{u-1}n^v$ и $a + x = (2k-1)k^{u-1}n^v = k^{u-1}n^{v+1}$. Следовательно, за $u$ ходов получится степень числа $n$.

## Траектории замечательных точек треугольника Понселе

*(см. «Квант» №2)*

**1.** Пусть точка $X(\alpha;\beta;\gamma)$ лежит на отрезке $X_1X_2$. Проведем прямую $l$, перпендикулярную $AB$, и введем на этой прямой

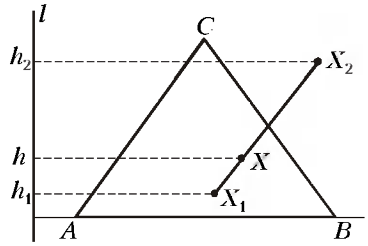



Рис. 15

координаты. Проекция любой точки на прямую $l$ – это взятое с соответствующим знаком расстояние от точки до прямой $AB$ (рис.15). Пусть

$$\frac{h_2-h}{h_2-h_1}=\lambda=\frac{X_2X}{X_2X_1}.$$

Тогда $h=\lambda h_1+(1-\lambda)h_2$. Поделив на высоту $h_c$, получаем требуемое:

$$\gamma=\lambda\gamma_1+(1-\lambda)\gamma_2.$$

**2.** Пусть $\overrightarrow{CB}=\vec a$, $\overrightarrow{BA}=\vec c$, $\overrightarrow{AC}=\vec b$. Проведем через точку $X$ прямые, параллельные сторонам $AC$ и $BC$, $B'$, $A'$ – точки пересечения этих прямых с $AB$ и $AC$. Тогда

$$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}=\gamma\vec b-\beta\vec c.$$

**3.** Наметим это вычисление. Рассмотрим скалярный квадрат вектора $u$:

$$\vec u\cdot\vec u=u^2=(\gamma_2-\gamma_1)^2\vec b^{\,2}+(\beta_2-\beta_1)^2\vec c^{\,2}-2(\gamma_2-\gamma_1)(\beta_2-\beta_1)\vec b\vec c=$$
$$=(\gamma_2-\gamma_1)\big((\gamma_2-\gamma_1)\vec b-(\beta_2-\beta_1)\vec c\big)\vec b+$$
$$+(\beta_2-\beta_1)\big((\beta_2-\beta_1)\vec c-(\gamma_2-\gamma_1)\vec b\big)\vec c.$$

В первом слагаемом заменим $\vec c$ на $-\vec a-\vec b$, а во втором заменим $\vec b$ на $-\vec a-\vec c$.

Дальше преобразуем наше выражение, пользуясь тем, что $\alpha+\beta+\gamma=1$, т.е. $\beta+\gamma=1-\alpha$:

$$(\gamma_2-\gamma_1)\big((\gamma_2+\beta_2-\gamma_1-\beta_1)\vec b+(\beta_2-\beta_1)\vec a\big)\vec b+$$
$$+(\beta_2-\beta_1)\big((\gamma_2+\beta_2-\gamma_1-\beta_1)\vec c+(\gamma_2-\gamma_1)\vec a\big)\vec c=$$
$$=-(\gamma_2-\gamma_1)(\alpha_2-\alpha_1)b^2-(\beta_2-\beta_1)(\alpha_2-\alpha_1)c^2+$$
$$+(\gamma_2-\gamma_1)(\beta_2-\beta_1)\big(\vec a\vec b+\vec a\vec c\big),$$

но

$$\vec a\vec b+\vec a\vec c=\vec a\big(\vec b+\vec c\big)=-a^2.$$

**4.** а) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$,

т.е. $a^2+b^2+c^2=\sigma_1^2-2\sigma_2$.

б) $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$. Можно действовать, например, так:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)=$$
$$=(a+b+c)\big(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc+3ab\big)-3ab(a+b)=$$
$$=\sigma_1\big(\sigma_1^2-3\sigma_2\big)+3ab(a+b+c)-3ab(a+b).$$

**5.** Поскольку $S=rp$, $r^2p=p^3-\sigma_1p^2+\sigma_2p-abc$, т.е.

$$r^2p=-p^3+p\sigma_2-4Rrp,$$

откуда

$$\sigma_2=ab+ac+bc=p^2+r^2+4Rr.$$

**6.** Вычислим, например, координату $\gamma_H$ (для остальных координат – аналогично). Высота треугольника $AHB$ с точностью до знака равна $b\cos\angle A\operatorname{ctg}\angle B$, так что

$$S_{AHB}=\frac12c\cos\angle A\operatorname{ctg}\angle B=$$
$$\frac{\big(b^2+c^2-a^2\big)\big(a^2+c^2-b^2\big)}{8ac\sin\angle B}=\frac{\big(b^2+c^2-a^2\big)\big(a^2+c^2-b^2\big)}{16rp}.$$

Отсюда

$$\gamma_H=\frac{\big(b^2+c^2-a^2\big)\big(a^2+c^2-b^2\big)}{16p^2r^2}.$$

Раньше мы видели, что для центра описанной окружности

$$\gamma_O=\frac{c^2\big(b^2+a^2-c^2\big)}{16p^2r^2},$$

а для центра тяжести $\gamma_M=\dfrac13$. Прямым вычислением можно убедиться в том, что

$$\frac23\gamma_O+\frac13\gamma_H=\frac13=\gamma_M,$$

что и составляет содержание теоремы Эйлера.

**7.** Пусть $D$, $E$ и $F$ – точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника (рис.16). Тогда $\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{CF}{FA}=1$ и по теореме Чевы отрезки $AE$, $BF$ и $CD$ пересекаются в одной точке $G$, причем $AD=p-a$, $BD=p-b$, $CF=p-c$. Если $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ – барицентрические координаты точки $G$, то

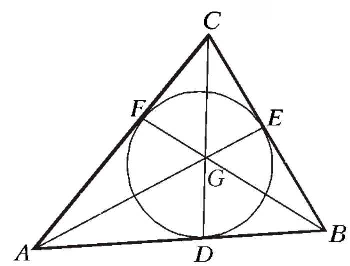



Рис. 16

$$\alpha(p-a)=\beta(p-b)=\gamma(p-c).$$

Докажем это для координат $\alpha$ и $\beta$:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{S_{CBG}}{S_{CAG}}=\frac{S_{CBD}-S_{GBD}}{S_{CAD}-S_{GAD}}=\frac{BD}{AD}=\frac{p-b}{p-a},$$

откуда $\alpha(p-a)=\beta(p-b)$.

Пусть $\alpha(p-a)=k$. Тогда

$$\alpha=\frac{k}{p-a},\quad \beta=\frac{k}{p-b},\quad \gamma=\frac{k}{p-c}.$$

Из равенства $\alpha+\beta+\gamma=1$ получаем

$$k\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)=1,$$

т.е.

$$k=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)+(p-a)(p-c)+(p-b)(p-c)},$$

но тогда, например в силу ранее установленных формул,

$$\alpha=\frac{(p-b)(p-c)}{pr^2+4Rr},$$

так как знаменатель равен

$$3p^2-2p(a+b+c)+ab+ac+bc=r^2+4Rr.$$

**8.** Пусть $D$, $E$ и $F$ – точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника (рис.17). Тогда (докажите) $AF=p-b$, $FB=p-a$, $BD=p-c$, $DC=p-b$,

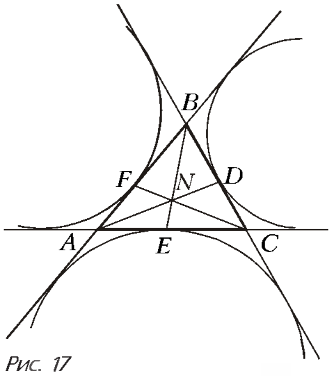


Рис. 17

$CE = p - a$, $EA = p - c$. Поскольку

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = \frac{p-b}{p-a}\cdot\frac{p-c}{p-b}\cdot\frac{p-a}{p-c} = 1,$$

по теореме Чевы отрезки $AD$, $BE$ и $CF$ пересекаются в одной точке $N$. Для вычисления барицентрических координат точки $N$ докажите, что для них $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p-a}{p-b}$, $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{p-b}{p-c}$, после чего найдите $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

**9.** Как и при решении упражнения 6, докажите, что $\frac{2}{3}\alpha_I + \frac{1}{3}\alpha_N = \frac{1}{3}\alpha_M$ и что аналогичные равенства справедливы и для координат $\beta$ и $\gamma$.

## Уравнения Пелля

*(см. «Квант» №4, 6 за 2002 г.)*

**52.** а) $(s; r) = (1; 1)$ или $(2; 3)$. Если $s$ нечетно и $r > 1$, то $3^s \equiv 3 \not\equiv 1 \equiv 2^r + 1 \pmod 4$. Если же $s = 2k$ четно, то $2^r = (3^k - 1)(3^k + 1)$, откуда $3^k - 1 = 2^a$ и $3^k + 1 = 2^b$ для некоторых целых неотрицательных $a$ и $b$, так что $2^b - 2^a = 2$, откуда $b = 2$, $a = 1$, $k = 1$, $s = 2$ и, наконец, $r = 3$.

б) $(x; y; z) = (1; 1; 1)$, $(1; 3; 2)$, $(5; 1; 3)$ или $(7; 5; 4)$. Пусть $y > 1$. Поскольку $x$ нечетно, то $x \equiv 1 \pmod 4$. Следовательно, $z$ четно, т.е. $z = 2s$. Значит,

$$2^y = (3^s)^2 - x^2 = (3^s - x)(3^s + x),$$

так что

$$\begin{cases} 3^s - x = 2^a, \\ 3^s + x = 2^b, \end{cases}$$

где $a$, $b$ – целые неотрицательные числа. Сложив уравнения и поделив на 2, находим

$$3^s = 2^{a-1} + 2^{b-1}.$$

Поскольку число $3^s$ нечетно, то $a = 1$. Значит, $x = 3^s - 2$. Подставив найденное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$3^s = 2^{b-1} + 1.$$

В силу пункта а), имеем $(s; b) = (1; 2)$ или $(2; 4)$. Этим двум случаям соответствуют ответы $(x; y; z) = (1; 3; 2)$ или $(7; 5; 4)$.

Пусть теперь $y = 1$. Если $z$ четно, то $2 = \left(3^{z/2}\right)^2 - x^2$, что невозможно, так как число 2 нельзя представить в виде разности квадратов целых чисел. Значит, $z$ нечетно: $z = 2s + 1$. Обозначим $t = 3^s$. Тогда $x^2 - 3t^2 = -2$. Значит, $x + t\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$ для некоторого целого неотрицательного числа $n$. Поскольку $2 \pm \sqrt{3} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})^2$, то

$$3^s = t = \frac{(x + t\sqrt{3}) - (x - t\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^{2n+1} - (1-\sqrt{3})^{2n+1}}{2^{n+1}\sqrt{3}}.$$

Докажем, что $2n + 1$ – степень тройки. Если $q$ – простой делитель числа $2n + 1$, отличный от 3, то

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1} - (1-\sqrt{3})^{2n+1} = C\left((1+\sqrt{3})^q - (1-\sqrt{3})^q\right),$$

где $C$ – натуральное число. Но $(1+\sqrt{3})^q - (1-\sqrt{3})^q = 2m\sqrt{3}$, где $m$ – целое число, не делящееся на 3. Нетрудно проверить, что $m$ – не степень двойки. (В противном случае также и некоторое $T$, являющееся решением уравнения $V^2 - 3T^2 = -2$, было бы степенью двойки, а это невозможно.) Мы пришли к противоречию: число $t = 3^s$ не имеет простого делителя, отличного от 3.

Итак, $2n + 1$ – степень тройки. Если $2n + 1$ делится на 9, то из равенства $(1 \pm \sqrt{3})^9 = 16(275 \pm 153\sqrt{3})$ следует, что $z = 3^s$ делится на 17. Значит, $2n + 1 = 1$ или 3, откуда $n = 0$, $x = 1$ и $z = 1$ или $n = 1$, $x = 5$ и $z = 3$.

**53.** а) Выполнив замену $x = X - 4y$, получаем уравнение

$$X^2 + 2X - 15y^2 - 12y + 1 = 0,$$

которое можно записать в виде

$$(X+1)^2 - 3(5y^2 - 4y) = 0.$$

Обозначив $u = X + 1$ и домножив обе части уравнения на 5, получаем

$$5u^2 - 3(25y^2 - 20y) = 0,$$

откуда

$$5u^2 - 3(5y-2)^2 = -12.$$

Домножив обе части на 5 и обозначив $v = 5u$ и $w = 5y - 2$, получаем уравнение

$$v^2 - 15w^2 = -60.$$

Поскольку для $d = 15$ имеем $q = 4 + \sqrt{15}$ и

$$\frac{4 + \sqrt{15} + 60}{2\sqrt{15}} < 9,$$

то для нахождения множества $M$ достаточно проверить значения $w = 1, 2, \ldots, 8$. Подходит только $w = 8$, которому соответствует значение $v = 30$. Значит,

$$v + w\sqrt{15} = \pm(30 + 8\sqrt{15})(4 + \sqrt{15})^n,$$

где $n \in \boldsymbol{Z}$. Поскольку нас интересуют только те пары $(v; w)$, для которых $v \equiv 0$ и $w \equiv 3 \pmod 5$, то, как легко проверить, подходит лишь

$$v + w\sqrt{15} = (30 + 8\sqrt{15})(-4 - \sqrt{15})^n.$$

Теперь легко выписать ответ:

$$y = \frac{w+2}{5} = \frac{(15+4\sqrt{15})(-4-\sqrt{15})^n - (15-4\sqrt{15})(-4+\sqrt{15})^n + 2\sqrt{15}}{5\sqrt{15}},$$

$$x = u - 4y - 1 = (15+4\sqrt{15})(-4-\sqrt{15})^n + (15-4\sqrt{15})(-4+\sqrt{15})^n - 4y - 1.$$

**54.** б) $x = (m^2 - n^2)/(m^2 + n^2)$, $y = 2mn/(m^2 + n^2)$.

**55.** Взяв $r = 9$, имеем $221^2 - 67 \cdot 27^2 = -2$; далее опять $r = 9$ и $1899^2 - 67 \cdot 232^2 = -7$; потом $r = 5$ и $3577^2 - 67 \cdot 437^2 = 6$; на предпоследнем шаге $r = 7$ приводит к равенству $9053^2 - 67 \cdot 1106^2 = -3$; наконец, $r = 8$ дает ответ. (Оригинальное индийское решение этой задачи использует прием, сокращающий вычисления. Обе части равенства $221^2 - 67 \cdot 27^2 = -2$ возводят в квадрат, получая $(221^2 + 67 \cdot 27^2)^2 - 67(2 \cdot 27 \cdot 221)^2 = (-2)^2$, после сокращения которого на 4 получается искомый ответ.)

**59.** Если $y = 0$, то $aB = Ab$ и

$$1 = A^2 - dB^2 = A^2 - d\left(\frac{Ab}{a}\right)^2 = \frac{A^2}{a^2}\left(a^2 - db^2\right) = \frac{A^2}{a^2},$$

так что $\frac{A^2}{a^2} = 1$. Следовательно, $A = a$ и $b = B$. Но пары $(a;\, b)$ и $(A;\, B)$ – разные.

**60.** Воспользуйтесь теоремой 10 для $d = 3^{2n+1}$.
Далее, если $x^2 - 3^{2n+1} = 1$, то $(x-1)(x+1) = 3^{2n+1}$, откуда $(x-1)$ и $(x+1)$ – степени тройки, т.е. $x - 1 = 1$ и $x + 1 = 3$, чему соответствует $y = 1$.

**61.** Да. Начнем с того, что $239 + 2\cdot 169 = 577$ и $239 + 169 = 408$. Далее имеем $577 + 2\cdot 408 = 1393$ и $577 + 408 = 985$. Значит, $1393^2 - 2\cdot 985^2 = -1$. Следовательно,

$$0 < \sqrt{2} - \frac{1393}{985} = \frac{1}{985^2\left(\sqrt{2} + \frac{1393}{985}\right)} < \frac{1}{900^2\cdot 2} < 0{,}000001.$$

**62.** б) Если $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| > 1$, то неравенство выполнено. Пусть $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \le 1$. Поскольку число $\sqrt{2}$ иррационально, то $\left|m^2 - 2n^2\right| \ne 0$ и, следовательно, $\left|m^2 - 2n^2\right| \ge 1$. Поэтому

$$\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{\left(m - n\sqrt{2}\right)\left(m + n\sqrt{2}\right)}{n\left(m + n\sqrt{2}\right)}\right| = \left|\frac{m^2 - 2n^2}{n^2\left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right)}\right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{n^2\left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right)} > \frac{1}{4n^2},$$

ибо

$$\frac{m}{n} + \sqrt{2} = \frac{m}{n} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \le \left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| + 2\sqrt{2} \le 1 + 2\sqrt{2} < 4.$$

в) Годится последовательность $x_n = 4\left\{n\sqrt{2}\right\}$, где фигурные скобки означают дробную часть: $\{x\} = x - [x]$. В самом деле, обозначив $a = \left[n\sqrt{2}\right]$ и $b = \left[m\sqrt{2}\right]$, мы сможем записать

$$\left|x_n - x_m\right| = \left|4\left(n\sqrt{2} - a\right) - 4\left(m\sqrt{2} - b\right)\right| =$$

$$= 4|n - m|\cdot\left|\sqrt{2} - \frac{a - b}{n - m}\right| > 4|n - m|\cdot\frac{1}{4(n - m)^2} = \frac{1}{|n - m|}.$$

г) Имеем

$$\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \ge \frac{1}{n^2\left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right)}.$$

Неравенство

$$\frac{1}{n^2\left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right)} < \frac{1}{\left(\varepsilon + 2\sqrt{2}\right)n^2}$$

можно записать в виде

$$\frac{m}{n} - \sqrt{2} > \varepsilon.$$

Вспомнив исходное неравенство, имеем

$$\varepsilon < \frac{1}{\left(\varepsilon + 2\sqrt{2}\right)n^2},$$

т.е.

$$n^2 < \frac{1}{\varepsilon\left(\varepsilon + 2\sqrt{2}\right)}.$$

Конечность множества значений $n$ (а значит, и $m$) теперь очевидна.

**63.** $$\left|a_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{2 + a_n}{1 + a_n} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{2 - \sqrt{2} - \left(1 - \sqrt{2}\right)a_n}{1 + a_n}\right| =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)\cdot\left|\sqrt{2} - a_n\right|}{1 + a_n} < 0{,}5\left|a_n - \sqrt{2}\right|.$$

Значит, $a_{n+1}$ более чем вдвое ближе к $\sqrt{2}$, чем $a_n$.

**64.** Если $\frac{x}{y}$ – подходящая дробь, то и $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{y}}}$ – подходящая дробь (в которой на два «этажа» больше). Преобразуя ее, получим $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{y}{y + x}} = 1 + \frac{y + x}{x + 2y} = \frac{2x + 3y}{x + 2y}$.

*Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:*

*Московский Центр непрерывного математического образования*
kvant.mccme.ru

*Московский детский клуб «Компьютер»*
math.child.ru

*Курьер образования*
www.courier.com.ru

*Vivos Voco!*
vivovoco.nns.ru
*(раздел «Из номера»)*

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.А.Акатьева, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, Е.А.Силина, Л.Н.Тишков, П.И.Чернуский**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

**Л.З.Симакова**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.**
**Рег. св-во №0110473**

**Адрес редакции:**
**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48**

**Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати**
**142300 г.Чехов Московской области**
**Заказ №**

# ГарриКаспаровУ – 40 лет

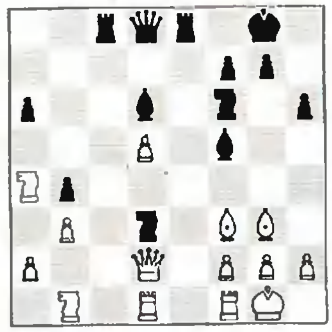
13 апреля Гарри Каспарову исполнилось 40 лет. Юбилей Каспарова – хороший повод вспомнить два ярких примера из его матчей за шахматную корону. В первом из поединков он одолел Карпова и сместил его с трона, во втором – отстоял свое звание в трудной борьбе с Анандом.

**А.Карпов – Г.Каспаров**
**Матч на первенство мира,**
**16-я партия**
**Москва,1985**
**Сицилианская защита**

**1. e4 c5 2. ♘f3 e6 3. d4 cd 4. ♘:d4 ♘c6 5. ♘b5 d6 6. c4 ♘f6 7. ♘1c3 a6 8. ♘a3.** Эта позиция встречалась на практике несчетное число раз, обычное продолжение здесь 8...♗e7 9. ♗e2 0-0 10. 0-0 b6 11. ♗e3 ♗b7 и т.д. Однако Каспаров подготовил неожиданный дебютный сюрприз. **8...d5?!** Хотя эта жертва пешки впервые была осуществлена двадцатью годами раньше в партии Хонфи – Дели (Венгрия, 1965), именно Каспаров продемонстрировал скрытые ресурсы черных. **9. cd ed 10. ed ♘b4.**

В партии-первоисточнике белые объявили шах 11. ♕a4+ и после 11. ... ♗d7 12. ♕b3 ♗e7 могли развить инициативу посредством ♗e2, 0-0 и ♖d1. Однако выпад слоном 12... ♗g4 или 12... ♗f5 обеспечивал черным полноправную игру.

**11. ♗e2 ♗c5 12. 0-0.** Карпов рокировался автоматически, а правильное решение 12. ♗e3! применил только... в следующем году. **12...0-0 13. ♗f3.** Стратегический план черных довольно оригинальный: они не собираются отыгрывать пешку, а завершают мобилизацию сил. Контригра вскоре примет угрожающий характер, и прежде всего из-за неудачного расположения коня на a3, поэтому следовало увести его с края доски – 13. ♘c2 или 13. ♘c4. **13...♗f5 14. ♗g5 ♖e8 15. ♕d2 b5 16. ♖ad1 ♘d3 17. ♘ab1.** Решающая ошибка. Необходимо было 17. d6! и на 17... ♖a7 – 18. ♘d5 с острой игрой. **17...h6 18. ♗h4 b4 19. ♘a4 ♗d6 20. ♗g3 ♖c8 21.b3.**



**21...g5!** Невооруженным глазом видно, что фигуры черных доминируют на всей доске, а лишняя пешка "d" не имеет значения. Сейчас нельзя ни 22. ♘b2 ♗:b2 23. ♕:b2 g4 и белые без фигуры, ни 22. ♗e2 из-за 22... ♘e4! Таким образом, коня с поля d3 выкурить не удается. Финал партии Каспаров проводит с большой энергией

**22. ♗:d6 ♕:d6 23. g3 ♘d7 24. ♗g2 ♕f6! 25. a3 a5 26. ab ab 27. ♕a2 ♗g6 28. d6 g4! 29. ♕d2 ♔g7 30. f3 ♕:d6 31. fg ♕d4+ 32. ♔h1 ♘f6! 33. ♖f4 ♘e4 34. ♕:d3 ♘f2+ 35. ♖:f2 ♗:d3 36. ♖fd2 ♕e3! 37. ♖:d3 ♖c1 38. ♘b2 ♕f2! 39. ♘d2 ♖:d1+ 40. ♘:d1 ♖e1+. Белые сдались.**

Любопытно, что эта партия была признана лучшей за последние тридцать лет. После этой встречи Карпов отстал в счете и так и не сумел его сравнять. Каспаров стал 13-м чемпионом мира. После этого два «К» сыграли еще три матча: в двух верх взял Каспаров, один закончился вничью. В 1990 году их марафон завершился, а в 1992 в матче за корону Каспаров разгромил Шорта.

Спустя три года Гарри сыграл новый матч, с индийским гроссмейстером Анандом. Поединок начался с восьми коротких ничьих, девятую партию Ананд выиграл, а в десятой Каспаров взял реванш. И после нее индийский гроссмейстер... поплыл. Таким образом, данная встреча фактически решила судьбу матча.

**Г.Каспаров – В.Ананд**
**Матч на первенство мира ПША,**
**10-я партия**
**Нью-Йорк, 1995**
**Испанская партия**

**1. e4 e5 2. ♘f3 ♘c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 ♘f6 5. 0-0 ♘:e4 6. d4 b5 7. ♗b3 d5 8. de ♗e6 9. ♘bd2 ♘c5 10. c3 d4 11. ♘g5!?**

Впервые этот неожиданный ход конем был применен Карповым в матче против Корчного в Багио.

**11...dc.** Взятие коня после 11... ♕:g5 12. ♕f3 0-0-0 13. ♗:e6+ fe 14. ♕:c6 ♕:e5 15. b4 ♕d5 16. ♕:d5 ed 17. dc bc 18. ♘b3 приводит к лучшему эндшпилю для белых: в их пользу и размен на b3, и вариант 11... ♗d5 12. ♘:f7! ♔:f7 13. ♕f3+ ♔e6 14. ♕g4+ ♔f7 15. e6! с сильнейшей атакой.

**12. ♘:e6 fe 13. bc ♕d3 14. ♗c2!** Весьма ядовитый ход. В десятой партии матча в Багио Карпов продолжал 14. ♘f3, последовало 14... ♕:d1 15. ♗:d1 ♗e7 16. ♗e3 ♘d3 17. ♗b3 ♔f7, и белые ничего не достигли.

**14... ♕:c3.** Выбора нет, после 14... ♕d5 15. ♕h5+ белые получают крайне опасную атаку при полном материальном равенстве. Ничего хорошего не ждет черных и при 14... ♕d7 15. ♕h5+ ♕f7 16. ♕e2. **15. ♘b3!!** В варианте 15. ♕h5+ g6 16. ♗:g6+ hg 17. ♕:h8 ♕:a1 у белых нет компенсации за фигуру. В данной партии ферзь черных тоже возьмет на a1 (после размена на b3), но совсем в другой ситуации.

**15... ♘:b3.** После 45-минутного размышления Ананд решил принять вызов. Но, видимо, не стоило быть таким принципиальным, в случае 15... ♘:e5 16. ♗d2 ♕c4 17. ♖c1 0-0-0! пробить позицию черных не так просто. **16. ♗:b3 ♘d4.** Защищая пешку e6. Немедленное взятие ладьи проигрывает: 16... ♕:a1 17. ♕h5+ ♔d7 (17...g6 18. ♕f3 ♘d8 19. ♕f6 ♖g8 20. ♗g5 ♕d4 21. ♖d1) 18. ♗:e6+! ♔:e6 19. ♕g4+ ♔f7 20. ♕f3+ ♔e6 21. ♕:c6+ ♗d6 22. ed ♕e5 23. ♗d2, и нет удовлетворительной защиты от ♖e1.

**17. ♕g4!!**

Только сейчас прояснился замысел Каспарова: ради атаки он жертвует целую ладью.

**17... ♕:a1.** Черные вынуждены принять данайский дар: пешка e6 под боем, а в случае 17...0-0-0 18. ♗e3 ♘:b3 19. ♕:e6+ ♔b7 20. ab ♕c6 21. ♕:c6+ ♔:c6 22. ♖:a6+ эндшпиль безнадежен для них.

**18. ♗:e6 ♖d8.** Не спасает ни 18... ♘c5, ни 18... ♘c6. **19. ♗h6!** Красиво, ничего не скажешь. **19... ♕c3.** Теперь ладья отыгрывается. Но не играть же 19... ♕:f1+ 20. ♔:f1 gh 21. ♕h5+ ♔e7 22. ♕f7×.

**20. ♗:g7 ♕d3 21. ♗:h8.** Итак, в результате эффектной комбинации белые остались с лишней пешкой при двух сильных слонах. **21... ♕g6 22. ♗f6 ♗e7 23. ♗:e7 ♕:g4 24. ♗:g4 ♔:e7 25. ♖c1! c6 26. f4 a5 27. ♔f2 a4 28. ♔e3 b4 29. ♗d1!** Последняя тонкость. После 29. ♖c4 a3 еще могли возникнуть какие-то осложнения. **29...a3 30. g4 ♖d5 31. ♖c4 c5 32. ♔e4 ♖d8 33. ♖:c5 ♘e6 34. ♖d5 ♖c8 35. f5 ♖c4+ 36. ♔e3 ♘c5 37. g5 ♖c1 38. ♖d6. Черные сдались.**

В конце 2000 года Каспаров проиграл матч Крамнику и потерял титул чемпиона мира. Однако в последующие два года он доказал, что по-прежнему остается сильнейшим шахматистом на планете, убедительно выиграв все супертурниры, в том числе с участием Крамника.

*Е.Гик*

Индекс 70465

# Физики и математики на монетах мира


В 1977 году в Германской Демократической Республике была выпущена серебряная монета достоинством в 10 марок, на реверсе которой изображены магдебургские колокола – основной элемент знаменитого опыта ОТТО ФОН ГЕРИКЕ по установлению атмосферного давления.

АРИСТОТЕЛЮ, сформулировавшему принцип о том, что природа не терпит пустоты, посвящены греческие монеты достоинством в 5 драхм, выпускавшиеся в обращение с 1976 по 1990 год.

Портрет ОЛЕ РЁМЕРА и изображение средневековой астрономической обсерватории представлены на датской банкноте 1970 года достоинством в 50 крон.

*(Подробнее о самих ученых – внутри журнала.)*